

СОДЕРЖАНИЕ

Матвеенко Л. И., Кардашев Н. С., Шоломицкий Г. Б. О радиоинтерферометре с большой базой	651
Эйдман В. Я. О связи излучения ускоренно движущихся зарядов в среде с затуханием волн в неоднородной плазме	655
Кравцов Ю. А. Модификация метода геометрической оптики для волны, просачивающейся через каустику	659
Наумов А. П. О миллиметровом спектре поглощения молекулярного кислорода	668
Марченко Ю. И., Рубаник В. П. О взаимной синхронизации молекулярных генераторов	679
Цареградский В. Б. Взаимодействие молекулярного пучка с электромагнитным полем резонатора III. Устойчивость колебаний молекулярного генератора с неоднородным полем	688
Мартirosyan Р. М., Прохоров А. М., Сороченко Р. Л. Радиоспектрометр на волну 21 см с квантовым параметром	699
Стратонович Р. Л. Об уравнении Фоккера—Планка с разрывными коэффициентами и условиях на поверхности разрыва	704
Гольдберг Н. И. К оценке характеристической функции эргодического случайного процесса	711
Грачева М. Е., Гуревич А. С. О сильных флуктуациях интенсивности света при распространении в приземном слое атмосферы	717
Гуревич Г. Л., Отмахов Ю. А., Розенблюм Е. А. О распространении электромагнитных пучков в гиротропных средах	725
Островский Л. А. Вращательные разрывы в электродинамике нелинейных сред	738
Каплун В. А. Дифракция плоских электромагнитных волн на решетке из параллельных проводов, помещенных в слое диэлектрика	743
Барсуков К. А. и Болотовский Б. М. Излучение осциллятора в неоднородной и нестационарной среде	760
Григорьев Г. И., Ковнер М. С., Никифорова О. Г., Оболенский Л. М., Самсонов А. В., Трахтенберг В. Ю. Логопериодический спиральный облучатель для параболоида с перекрытием по частоте 1:7	768
Герштейн Л. И. Радиометр сантиметрового диапазона с устранением влияния паразитного сигнала методом автоподстройки частоты гетеродина	771
Шаповалов А. С., Козлов И. Г. Некоторые результаты экспериментального исследования свойств электростатического анализатора энергии заряженных частиц	775
Баширова Р. М., Бондаренко А. В. Исследование энергетического спектра положительных ионов, попадающих на катод в аномальном тлеющем разряде	784
Рабинович М. И. Об автоколебаниях в кольцевой линии с распределенными нелинейными параметрами	794
Арефьев Б. А. Оптимизация рециркуляционных процессов	807
Котельников И. В. Алгоритм синтеза минимальных схем на пороговых элементах с тремя входами для случая трех переменных	815

Краткие сообщения и письма в редакцию

Разин В. А., Хижнякова И. П. К вопросу о распределении ионизированного газа вблизи галактической плоскости	822
Мухамедгалиева А. Ф., Страховский Г. М. Исследование молекулярного генератора с двумя последовательными резонаторами на двух встречных пучках	824
Алексеев А. И. К вопросу о колебании плотности фотонов в резонансной среде	826
Здорнова Е. А., Малахов А. Н. Экспериментальные исследования флуктуаций коэффициента усиления транзисторов	928

Прокопович М. Р., Иванков А. Г. О статистических характеристиках шума при циклическом перемагничивании ферромагнетиков	831
Тай М. Л. Условия сопряжения для плотности вероятности перехода многомерного марковского процесса	834
Браво-Животовский Д. М. Об одном методе расчета систем с квазиповерхностными волнами	836
Литвин-Седой М. З. Об осуществимости заданного предельного цикла в некоторых системах второго порядка	839
Анишин Н. С. Постоянное запоминающее устройство, совмещенное с устройством оперативной памяти	842

Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. V, № 2, 1965	844
--	-----

УДК 621.396.67:523.164

О РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРЕ С БОЛЬШОЙ БАЗОЙ

Л. И. Матвеенко, Н. С. Кардашев, Г. Б. Шоломицкий

Рассмотрена система радиоинтерферометра без ретрансляции. Регистрация сигналов по промежуточной частоте происходит независимо на каждой антенне (путем записи на магнитную ленту) с последующей совместной обработкой этих записей. Использование двух независимых гетеродинов налагает следующее условие на стабильность их частоты

$$\sqrt{\Delta f_r^2/f_r} \leq 1,6 \cdot 10^{-11} D \quad (D — \text{длина базы в км}). \quad \text{Обсуждаются достоинства такого интерферометра.}$$

В настоящее время для обнаружения и исследования источников космического радиоизлучения малых угловых размеров широко применяются радиоинтерференционные методы исследований. В случае радиоисточников малых угловых размеров приходится разносить антенны на расстояния нескольких десятков и сотен километров. Создание таких систем связано с большими техническими трудностями, так как обычные методы канализации частот сигнала и гетеродина на такие расстояния становятся неприемлемыми ввиду большого затухания; уже при $D > 1 \text{ км}$ приходится пользоваться сложными системами ретрансляции. Примером такой сложной системы может служить интерферометр, построенный в Джодрелл-Бэнк и работающий на частоте 178 МГц [1]. Кроме технической сложности недостатком системы являются флюктуации фазы за счет изменения параметров среды на линии ретрансляции, в результате которых частота интерференции изменяется на величину порядка нескольких герц в минуту.

В работе [2] делается попытка некоторого упрощения системы интерферометра путем сложения сигналов после детекторов по низкой, а не по высокой частоте, как в обычной схеме. Однако в этой схеме происходит потеря чувствительности в $T_a/T_{\text{ш}}$ раз, где T_a — антenna температура источника, $T_{\text{ш}}$ — шумовая температура системы. Последние достижения в создании высокостабильных генераторов [3], а также успехи в записи электрических сигналов высоких частот на магнитную пленку [4] позволяют исключить ретрансляцию и построить радиоинтерферометры со сверхдлинными базами.

1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ГЕТЕРОДИНОВ

Рассмотрим две независимые приемные системы, разнесенные на большое расстояние друг от друга. Каждая система состоит из антенны, усилителя высокой частоты, смесителя, гетеродина, усилителя промежуточной частоты и высокочастотного регистрирующего устройства, которое будет рассмотрено во втором разделе. Выходной сигнал такой интерференционной системы

$$e_{\text{вых}} \propto \cos \left(\varphi + \psi + \int_0^t \Delta \omega_r(x) dx \right). \quad (1)$$

Для случая ориентации базы в направлении восток—запад разность фаз

$$\varphi = \frac{2\pi D \cos \delta}{13750\lambda} t$$

обусловлена разностью хода сигналов, принимаемых антеннами (здесь D — длина базы интерферометра, δ — склонение наблюдаемого источника, t — часовой угол, λ — длина волны, φ — сдвиг фазы, обусловленный аппаратурными эффектами, $\Delta\omega_r(x)$ — относительная нестабильность частоты гетеродинов).

Очевидно, влиянием $\int_0^t \Delta\omega_r(x) dx$, приводящим к размытию интерференционной картины, можно пренебречь, если выполнено условие $\varphi \gg \int_0^t \Delta\omega_r(x) dx$, что эквивалентно неравенству $\sqrt{\overline{\Delta f_r^2}}/f_r \ll 1,6 \cdot 10^{-10} D$ (D — в км). Практически достаточно, чтобы

$$\sqrt{\overline{\Delta f_r^2}}/f_r \leq 1,6 \cdot 10^{-11} D. \quad (2)$$

В настоящее время достигнуты относительные стабильности молекулярных генераторов около $10^{-13} — 10^{-14}$ в течение времени порядка нескольких секунд, а в случае водородного генератора 10^{-15} [6]. Чем дальше разнесены антенны, тем меньшая требуется стабильность. В частности, уже при базах ~ 1000 км требованиям на стабильность гетеродинов вполне удовлетворяют схемы с кварцевым генератором. При этом частоты гетеродинов могут отличаться на некоторую постоянную величину Δf_{r0} , что приводит к бегущей диаграмме. Благодаря малости Δf_{r0} нет необходимости делать разные промежуточные частоты, так как уменьшение чувствительности за счет потери энергии когерентного сигнала в полосе Δf_{r0} будет ничтожно.

Для реализации предельной чувствительности, т. е. в случае пропускания интерференционного сигнала через фильтр частоты интерференции с полосой $\Delta F_\Phi \approx \Delta F_{\text{инт}}$ гетеродины должны иметь стабильность в $n = f_c/\Delta f_c$ раз большую (f_c — частота, а Δf_c — полоса принимаемого сигнала). В случае применения радиоинтерферометра для радиоастрономических задач ($n \approx 10 \div 100$) стабильность вышеуказанных гетеродинов достаточна.

2. НЕЗАВИСИМАЯ РЕГИСТРАЦИЯ СИГНАЛОВ И ИХ ПОСЛЕДУЮЩАЯ ОБРАБОТКА

При независимой записи сигналов по промежуточной частоте (что уже сейчас можно сделать до частот 5 Мгц [4]) кроме двух приемных систем необходимо счетно-решающее устройство, которое считывает сигналы промежуточной частоты с магнитных пленок, перемножает их с соответствующими сдвигами по фазе и выделяет частоту интерференции узкополосным фильтром. При этом введение различных относительных задержек лент соответствует наблюдению радиоисточников в разных азимутах.

Фаза интерференционного сигнала зависит от $\psi = \psi_0 + \Delta\psi$, где ψ_0 — постоянная составляющая фазы, вводимая при обработке, а флуктуирующая часть $\Delta\psi$ обусловлена нестабильностью скорости лентопротяжного механизма при записи и воспроизведении сигнала. Требования, налагаемые на стабильность скорости лентопротяжного механизма, определяются (аналогично (2)) выражением

$$\frac{\sqrt{\Delta v^2}}{V} \leq 1,6 \cdot 10^{-11} DK, \quad (3)$$

где K — отношение частоты сигнала к промежуточной частоте. При $K = 10^3$ и $D = 10^3$ км стабильность лентопротяжного механизма должна быть равной $1,6 \cdot 10^{-5}$. Как сообщалось в работе [8], в настоящее время создан высокоскоростной лентопротяжный механизм для широкополосной многоканальной записи со стабильностью скорости 10^{-6} .

Таким образом, используя магнитофоны [8] и гетеродины со стабильностью 10^{-8} , в настоящее время можно создать радиоинтерферометры с базой 1000 км, что чрезвычайно актуально для радиоастрономии. Влияние нестабильности скорости протяжки ленты можно существенно уменьшить при помощи высокостабильного «пилот-сигнала», регистрируемого одновременно с сигналом на той же ленте. В качестве пилот-сигнала можно использовать частоту гетеродина, поделенную в m раз. Эти сигналы обеспечивают привязку обеих рабочих записей к одним и тем же моментам времени. В случае, если регистрируемый пилот-сигнал есть $z = z_0 \sin(\omega t)$, точность определения момента времени будет Δt и ошибка в фазе интерферирующих сигналов

$$\Delta\phi \simeq \frac{\omega_c}{\omega} \left(\frac{2\Delta z}{z} + \int_0^t \Delta\omega dx \right), \quad (4)$$

где Δz — полная ошибка в амплитуде пилот-сигнала после считывания с ленты и $\Delta\omega$ — нестабильность частоты пилот-сигнала. Анализ выражения (4) показывает, что возможна реализация условия $\Delta\phi \ll i$.

Еще большую точность воспроизведения можно осуществить, если зарегистрировать на магнитную пленку принимаемый сигнал и пилот-сигнал в виде цифрового кода. Это можно осуществить, используя быстро действующее кодирующее устройство [7].

Независимая регистрация сигналов имеет еще одно преимущество. Поскольку длина базы практически не ограничена, при $D/d > f_c/\Delta f_c$ (d — размер антенны интерферометра) и обычном соотношении $\Delta f_c/f_c = 2-5\%$ можно получить большой выигрыш в разрешении по азимуту. Действительно, эффективная ширина диаграммы интерферометра $\Delta\Theta$ равна произведению количества лепестков на ширину одного лепестка:

$$\Delta\Theta = \frac{f_c}{\Delta f_c} \frac{\lambda}{D \cos \Theta}.$$

Это меньше ширины $\Delta\Theta' = \lambda/d$ диаграммы направленности антенны по половине мощности в $p = \Delta\Theta'/\Delta\Theta = \frac{\Delta f_c}{f_c} \frac{D \cos \Theta}{d}$ раз. Задавая при обратке различные значения ψ_0 , мы имеем возможность получить с одной и той же записи на магнитной ленте в p раз большее количество информации. При $D = 1000$ км, $d = 30$ м, $\Theta = 0^\circ$, $\Delta f_c = 5$ МГц и $f_c = 1000$ МГц можно получить в $p = 170$ раз больше информации по сравнению с обычным случаем, что существенно сокращает время наблюдений. Следует отметить также, что перед суммированием сигналов возможно их умножение (или деление) и получение тем самым дополнительной информации о распределении источников (или радиояркости по источникам) самой счетно-решающей системой, а не путем непосредственных наблюдений.

Таким образом, предлагаемая система позволяет 1) реализовать очень большие базы, 2) избавиться от ретрансляции, 3) автоматизиро-

вать регистрацию сигнала и обработку записей, 4) осуществлять полный обзор в пределах диаграммы одиночной антенны. Система из двух антенн, работающая по описанному выше принципу, позволит получить при больших базах не только амплитудные, но и пространственно-фазовые характеристики интерференции, а следовательно, детально исследовать распределение яркости дискретных источников очень малых угловых размеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Elgaroy, D. Morris, B. Rowson, *Monthly Notices*, **124**, 396 (1962).
2. R. H. Brown, R. O. Twiss, *Phil. Mag.*, **45**, 663 (1954).
3. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, *ЖЭТФ*, **37**, 1068 (1959).
4. Г. Веде, Сб. Техника магнитной записи, ИЛ, М., 1962, стр. 189.
5. R. H. Brown, N. P. Palmer, A. R. Thompson, *Phil. Mag.*, **46**, 857 (1955).
6. H. M. Goldenberg, *Phys. Rev. Letters*, **5**, 361 (1960).
7. G. V. Jacoby, *Commun. Electr.*, № 64, 491 (1963).
8. D. F. Clark, *Electronics*, № 16, 74 (1961).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
27 января 1964 г.,
после доработки
14 января 1965 г.

ON RADIOINTERFEROMETER WITH A LARGE BASE

L. I. Matveenko, N. S. Kardashev, G. B. Sholomitsky

The radiointerferometer system without retranslation has been considered. The signal registration at the intermediate frequency is carried out independently by each antenna (by recording on a magnetic tape) with subsequent common processing of these results. The usage of two independent heterodynes imposes the following condition for their frequency stability $\sqrt{\Delta f_h^2/f_h} < 1.6 \cdot 10^{-11} D$ (D is the base length in km). The merits of such interferometer have been discussed.

УДК 533.922

О СВЯЗИ ИЗЛУЧЕНИЯ УСКОРЕННО ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ В СРЕДЕ С ЗАТУХАНИЕМ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Я. Эйдман

Показано, что при ускоренном движении заряда в среде черенковское излучение уменьшается. Этот эффект приводит к уменьшению затухания Ландау в слабонеоднородной плазме.

Как хорошо известно, под действием статического поля плазма становится неоднородной, а электроны плазмы движутся ускоренно. В работе [1] было найдено, что при распространении продольной волны в слабонеоднородной плазме затухание Ландау несколько уменьшается. В настоящей статье это затухание волны связывается с черенковским излучением электронов, движущихся ускоренно во внешнем статическом поле $F(z)$, которое вызывает неоднородность плазмы.

Для решения поставленной задачи необходимо найти излучение ускоренно движущегося электрона в плазме, а затем, как обычно, усреднить это излучение по распределению Максвелла, т. е. определить излучательную способность среды [2, 3].

Как и в [1], будем рассматривать лишь одномерный случай, причем здесь можно не учитывать неоднородность плазмы (чтобы оттенить то обстоятельство, что дискутируемый механизм затухания волн целиком связан с ускоренным движением частиц, а не с эффектами неоднородности плазмы, которые будут рассмотрены в другой работе).

Для продольного поля $E_\omega(z)$, возбуждаемого током $j = N^{2/3} \dot{z}(t) \delta[z - z(t)]$ (где $\dot{z}(t)$, $z(t)$ — скорость и координата заряда, $N^{2/3}$ — число электронов, приходящихся на единицу площади), имеем уравнение

$$\frac{d^2 E_\omega}{dz^2} + k^2 E_\omega = \sum_i \delta \exp[i\omega t_i(z)]. \quad (1)$$

Здесь $k = (\omega/\omega_0 v_T) \sqrt{\varepsilon/3}$, $\delta = -2e\omega^3 N^{2/3} i/3\omega_0^2 v_T^2$; $\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$, ω_0 — ленгмюровская частота, v_T — средняя тепловая скорость электронов плазмы, $v_T = T/m$; $t_i(z)$ — корень уравнения $z - z(t) = 0$. Для определенности предположим, что электроны движутся в однородном поле $F(z) < 0$, т. е. $z = vt + \alpha_0 t^2/2$; $z = v + \alpha_0 t$, $\alpha_0 = |F/m|$ — ускорение частицы, $t_i = t_{1,2} = (1/\alpha_0) (v \pm \sqrt{v^2 - 2z\alpha_0})$. Заряд движется вдоль положительного направления оси Oz (нижний знак «—»), в точке $z = v^2/2\alpha_0$ заряд поворачивает и движется в обратном направлении (знак «+»).

Решение уравнения (1) для $z < v^2/2\alpha_0$ элементарно:

$$E_\omega = \delta \exp(+i\omega v/\alpha_0) \left\{ e^{ikz} \int_{-\infty}^z e^{-ikz} [e^{i\omega z} + e^{-i\omega z}] dz - \right. \\ \left. - e^{-ikz} \int_{v^2/2\alpha_0}^z e^{ikz} [e^{i\omega z} + e^{-i\omega z}] dz \right\}. \quad (2)$$

$$z < v^2/2\alpha_0, \quad \zeta = \frac{1}{\alpha_0} \sqrt{v^2 - 2\alpha_0 z}.$$

Используя (2), легко получить величину излучаемой энергии. Для этого надо вычислить работу, совершающую полем при движении заряда*.

Эта работа в единицу времени при движении заряда вдоль оси Oz , т. е. при $z > 0$ равна

$$\begin{aligned} \frac{dA_{1\omega}}{dt} &= e \dot{z} E_\omega e^{-i\omega t} \Big|_{t=v/\alpha_0-\zeta} = \frac{e\alpha_0^2 \delta}{4b} \left\{ \frac{\omega V \pi}{2Vbi} e^{-iT^2} [1 - \Phi(TV\bar{i}^*)] - \right. \\ &\quad \left. - \exp[i(\omega\zeta + b\zeta^2)] + \frac{\omega V \pi}{2Vbi} e^{iT_1^2} \Phi(T_1 V \bar{i}) \right\} + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$b = \frac{k\alpha_0}{2}, \quad T = \frac{-\omega + \zeta k\alpha_0}{V 2k\alpha_0}, \quad T_1 = \frac{\omega + \zeta k\alpha_0}{V 2k\alpha_0},$$

$$\Phi(TV\bar{i}) = \frac{2i}{V\pi} \int_0^T e^{-it^2} dt, \quad V\bar{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{i^*} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

При движении электрона в обратном направлении, т. е. при $z < 0$ для работы получается аналогичная (3) формула, но с заменой ζ на $-\zeta$. В интересующем нас случае, когда величина ускорения мала ($\alpha_0 \rightarrow 0$), с помощью формулы (3) легко получить потери энергии заряда на черенковское излучение (см. ниже).

Чтобы установить связь рассматриваемого механизма излучения с затуханием волн в плазме, усредним выражение (3) и аналогичное выражение для $z < 0$ по распределению Максвелла $f_0 = (N^{1/3}/v_T(2\pi)^{1/2}) \times \exp(-v^2/2v_T^2)$. Тогда будем иметь, например, для $z < 0$ ($z_1 = |z|$)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{A}_\omega}{dt} &= P_\omega = \frac{-2\omega^3 mi \exp(-z\alpha_0/v_T^2)}{3(2\pi)^{3/2} v_T^3 k^2} \int_{\sqrt{2z_1\alpha_0}}^{\infty} \frac{\exp[-x^2/(2v_T^2)] x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2z_1\alpha_0}} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\omega V \pi}{2Vbi} e^{-iT^2} [1 - \Phi(TV\bar{i}^*)] - \exp \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{i}{\alpha_0} \left(\omega x - \frac{kx^2}{2} \right) \right] + \frac{\omega V \pi}{2Vbi} e^{iT_1^2} \Phi(T_1 V \bar{i}) \Big\} - 2 \frac{\omega^3 mi \exp(-z\alpha_0/v_T^2)}{3(2\pi)^{3/2} v_T^3 k^2} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{-\sqrt{2z_1\alpha_0}} \frac{\exp[-x^2/(2v_T^2)] x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2z_1\alpha_0}} \left\{ \frac{\omega V \pi}{2Vbi} e^{-iT_1^2} [1 - \Phi(-T_1 V \bar{i}^*)] - \right. \end{aligned} \quad (4)$$

* В отличие от случая равномерного движения заряда, в выражении для величины указанной работы должны входить и члены, ответственные за изменение энергии статического поля, увлекаемого зарядом. Однако для рассматриваемой системы резонансные члены, отвечающие потерии энергии зарядами на черенковское излучение (которыми мы только и будем интересоваться), легко отделяются (см. ниже).

$$-\exp\left[\frac{i}{\alpha_0}\left(\omega x + \frac{kx^2}{2}\right)\right] + \frac{\omega V \pi}{2V bi^*} e^{iT^2} \Phi(-TVi) \Big\} + \text{к. с.},$$

причем $x^2 = (\alpha_0)^2 = v^2 - 2z\alpha_0$.

Характер излучения зарядов существенно зависит от величины параметра $\gamma = \omega^2/\alpha_0 k$. Этот параметр характеризует отклонение движения зарядов от равномерного движения. Действительно, изменение скорости за время одного периода колебаний поля есть $\Delta z \approx \alpha_0/\omega$. Для черенковского излучения необходимо, чтобы скорость зарядов в некоторой плоскости z была равна фазовой скорости волны ($z = \omega/k$), причем за период колебаний она не должна существенно изменяться, т. е. $\omega/k \gg \alpha_0/\omega$ или $\gamma = \omega^2/k\alpha_0 \gg 1$. Эти качественные соображения целиком подтверждаются приводимым ниже расчетом. Если $\gamma \gg 1$, то аргументы интегралов вероятности в (4) $T \gg 1$, $T_1 \gg 1$ везде, кроме узкой области близи точек $x = \pm \omega/k$. При этом, разумеется, необходимо считать, что $x_0 = \sqrt{2z_1\alpha_0} < \omega/k$, так как в противном случае излучение Черенкова не возникает в рассматриваемой плоскости.

Чтобы воспользоваться асимптотическим методом для вычисления интегралов (4), приведенным в [1], будем предполагать, что резонансная точка $x = \omega/k$ лежит достаточно далеко от начальной точки интегрирования x_0 , т. е. $\omega/k - x_0 \gg \omega/kV\sqrt{\gamma}$. Тогда, используя формулы

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= 1 - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2z^2)^n} \right] \quad \text{при } |\arg z| < \frac{\pi}{2} \\ &\quad (z \gg 1); \\ \Phi(z) &= -1 - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2z^2)^n} \right] \quad \text{при } \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \\ &\quad (z \gg 1) \end{aligned} \tag{5}$$

и действуя таким же образом, как в [1], получаем

$$\begin{aligned} P_\omega &= -\frac{\omega^4 i m \exp(-za_0/v_T^2)}{(2\pi)^{3/2} 3v_T^3 k^2} \left\{ \int_{c_1}^0 \frac{\exp(-x^2/2v_T^2)x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2z_1\alpha_0}} \times \right. \\ &\times \left[\frac{1}{kx - \omega} - \frac{3(k\alpha_0)^2}{(kx - \omega)^5} + \dots - \frac{1}{\omega} \exp\left[\frac{i}{\alpha_0}\left(\omega x + \frac{kx^2}{2}\right)\right] + \right. \\ &+ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k\alpha_0} \sqrt{i^*}} e^{iT_1^2} - \frac{1}{kx + \omega} + \frac{3(k\alpha_0)^2}{(kx + \omega)^5} \Big] + \\ &+ \int_{c_2}^0 \frac{\exp(-x^2/2v_T^2)x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 2z_1\alpha_0}} \left[-\frac{1}{kx + \omega} + \frac{3(k\alpha_0)^2}{(kx + \omega)^5} - \frac{1}{\omega} \exp\left[\frac{i}{\alpha_0}\left(\omega x + \frac{kx^2}{2}\right)\right] \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k\alpha_0} \sqrt{i^*}} e^{iT^2} - \frac{1}{\omega - kx} + \frac{3(k\alpha_0)^2}{(\omega - kx)^5} \right] + \dots \Big\} + \text{к. с.} \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь путь интегрирования c_1 идет по действительной оси от точки $x = \sqrt{2z_1\alpha_0}$ до ∞ с обходом сверху точки $x = \omega/k$ у резонансных членов, а путь интегрирования c_2 идет по действительной оси от точки $x = -\sqrt{2z_1\alpha_0}$ до $-\infty$ с обходом снизу точки $x = -\omega/k$ у резонанс-

ных членов. Из (6) видно, что вкладу в черенковские потери зарядов в плоскости $z = -z_1$ отвечают полюса подынтегральных выражений в (6)*. (Напомним, что переменная x равна скорости зарядов в указанной плоскости $z = -z_1$, $x = a_0 c = v - a_0 t = \dot{z}$.) В частности, если скорость зарядов меньше фазовой скорости волны (например, при движении зарядов в вакууме), то реакция излучения отсутствует.

Таким образом, из (6) для черенковского излучения волны, распространяющейся в положительном направлении оси Oz , получаем

$$\eta_\omega = P_\omega = \frac{\omega^5 m}{\pi^{1/2} 2^{3/2} 3 v_T^3 k^4} \exp[-\omega^2/2k^2 v_T^2] \times \quad (7)$$

$$\times \left[1 - \frac{\omega^4}{8k^4 v_T^4} \frac{F^2}{k^2(xT)^2} \right],$$

где так же, как и в [1], пренебрегается членами порядка zF/xT по сравнению с единицей, а $(\omega^2/k^2 v^2)(F/kxT) \ll 1$. При $F = 0$ получаем формулу для черенковского излучения при равномерном движении зарядов. Учет неравномерности движения зарядов приводит к некоторому уменьшению излучаемой энергии. Это связано с тем, что при равномерном движении заряд излучает в течение всего времени движения, а при ускоренном движении излучение происходит лишь в тот промежуток времени, пока его скорость порядка фазовой скорости волны. Сравнивая теперь (7) с формулой (15) из [1], находим, что рассматриваемый механизм излучения действительно может быть ответственен за исследованное в [1] поглощение волн.

Автор признателен Б. М. Болотовскому за сделанное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Эйдман, ЖТФ (в печати).
2. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 43, 1419 (1962).
3. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 852 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 октября 1964 г.

ON CONNECTION OF RADIATION OF ACCELERATED-MOVING CHARGES IN MEDIUM WITH WAVE DAMPING IN NONHOMOGENEOUS PLASMA

V. Ya. Eidman

VCerenkov radiation is shown to decease for a charge moving with acceleration in a medium. This effect leads to the reduction of Landau damping in a weak nonhomogeneous plasma.

* Быстро осциллирующие члены, связанные с работой, идущей на перестройку статического поля, при этом не существенны (см. выше).

УДК 538.566

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ДЛЯ ВОЛНЫ, ПРОСАЧИВАЮЩЕЙСЯ ЧЕРЕЗ КАУСТИКУ

Ю. А. Кравцов

Получено асимптотическое решение скалярного волнового уравнения для волны, просачивающейся через каустическую поверхность. Решение представлено в виде комбинации экспоненциальной функции и функции Вебера (а также ее производной) с надлежащим образом выбранными амплитудами. Показано, что задача сводится к уравнению эйконала для функции Ψ , определенным образом зависящей от аргументов ψ_1 и ψ_2 экспоненты и функции Вебера, и к геометрико-оптическим уравнениям переноса для амплитуд нулевого приближения.

1. Нас будет интересовать асимптотическое решение скалярного волнового уравнения

$$\Delta\varphi + k^2\epsilon\varphi = 0 \quad (k = \omega/c) \quad (1)$$

в том случае, когда падающая волна частично просачивается за каустическую поверхность, т. е., по терминологии квантовой механики, имеет место подбарьерное прохождение волны. Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \{A_1 w_1(k^{1/2}\psi_1, ka) + i[k(\psi_1^2 - a)]^{-1/2} B_1 w'_1(k^{1/2}\psi_1, ka)\} e^{ik\psi_1}, \\ \varphi_2 &= \{A_2 w_2(k^{1/2}\psi_1, ka) + i[k(\psi_1^2 - a)]^{-1/2} B_2 w'_2(k^{1/2}\psi_1, ka)\} e^{ik\psi_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $\psi_{1,2}$ и a — искомые функции координат, а $w_1(t, b)$ и $w_2(t, b)$ — два линейно независимых решения уравнения

$$w''(t, b) + (t^2 - b)w(t, b) = 0 \quad (3)$$

(штрихи обозначают дифференцирование по t). Это уравнение легко сводится к уравнению для функций Вебера [1] (функций параболического цилиндра), через которые и выражается его решение.

В качестве двух линейно независимых решений уравнения (3) удобно взять функции $w_1(t, b)$ и $w_2(t, b)$, которые при $t \rightarrow -\infty$ описывают волны, бегущие в сторону возрастания (w_1) или убывания (w_2) аргумента t :

$$w_1(t, b) \underset{t \rightarrow -\infty}{\simeq} (t^2 - b)^{-1/4} \exp(-i \int_t^{-\sqrt{b}} \sqrt{t^2 - b} dt), \quad w_2(t, b) = w_1^*(t, b). \quad (4)$$

В соответствии с этим назовем условно функцию $w_1(t, b)$ «падающей», а $w_2(t, b)$ — «отраженной» волной. При $t \rightarrow +\infty$ каждая из этих функ-

ций будет содержать волны как с нарастающей, так и с убывающей фазой. Однако, как следует, например, из результатов работ [2, 3], комбинация

$$W(t, b) = w_1(t, b) + R(b)w_2(t, b)$$

содержит при $t \rightarrow +\infty$ только одну волну

$$W(t, b) \underset{t \rightarrow +\infty}{\simeq} D(b)(t^2 - b)^{-1/4} \exp\left(i \int_{\sqrt{b}}^t \sqrt{t^2 - b} dt\right),$$

удаляющуюся от заднего края барьера. Здесь $R(b)$ и $D(b)$ — комплексные коэффициенты отражения и прохождения барьера параболической формы, модули которых определяются по формулам

$$|R(b)|^2 = \frac{1}{1 + e^{-\pi b}}, \quad |D(b)|^2 = \frac{1}{1 + e^{\pi b}}, \quad |D|^2 + |R|^2 = 1. \quad (5)$$

Мы не приводим выражений для аргументов величин $R(b)$ и $D(b)$, так как для дальнейшего они не представляют интереса. Из сказанного следует, что решение (2) будет описывать волну, удаляющуюся от заднего края барьера, если $A_2 = R(ka)A_1$, $B_2 = R(ka)B_1$.

Мы предположим, что параметр $a = b/k$ в решении (2), характеризующий ширину потенциального барьера и, следовательно, определяющий долю энергии, просочившейся за каустику, является гораздо более медленной функцией координат, чем ϵ , A_1 , B_1 , ψ_1 и ψ_2 . Подставляя решение (2) в уравнение (1), мы отбросим поэтому члены, содержащие ∇a и Δa .

Представив затем амплитуды A_1 и B_1 в виде рядов по обратным степеням волнового числа k :

$$A_1 = A_1^{(0)} + k^{-1}A_1^{(1)} + k^{-2}A_1^{(2)} + \dots, \quad B_1 = B_1^{(0)} + k^{-1}B_1^{(1)} + k^{-2}B_1^{(2)} + \dots,$$

и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях k и при линейно независимых функциях $w_{1,2}(t, b)$ и $w'_{1,2}(t, b)$, мы получаем систему рекуррентных уравнений для амплитуд $A_1^{(0)}$, $B_1^{(0)}$, $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$ и т. д. Повторив рассуждения, аналогичные проведенным в работе [4] для случая каустики без просачивания, можно показать, что условиями разрешимости уравнений для $A_1^{(0)}$ и $B_1^{(0)}$ являются следующие уравнения для функций ψ_1 и ψ_2 :

$$(\nabla\psi_2)^2 + (\psi_2^2 - a)(\nabla\psi_1)^2 = \epsilon, \quad (\nabla\psi_1, \nabla\psi_2) = 0. \quad (6)$$

Эти уравнения нетрудно свести к одному уравнению, а именно — уравнению эйконала

$$(\nabla\Psi)^2 = \epsilon \quad (7a)$$

для функций

$$\Psi_{1,2} = \psi_2 \mp \int \sqrt{\psi_1^2 - a} d\psi_1. \quad (7b)$$

Далее, из условия разрешимости уравнений первого приближения следуют два уравнения переноса для величин $F_1 = A_1^{(0)} + B_1^{(0)}$, $\Phi_1 = A_1^{(0)} - B_1^{(0)}$:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\Phi_1^2}{\sqrt{\psi_1^2 - a}} \nabla\Psi_1\right) = 0, \quad \operatorname{div}\left(\frac{F^2}{\sqrt{\psi_1^2 - a}} \nabla\Psi_2\right) = 0; \quad (8)$$

при этом нужно потребовать, чтобы на каустике ($\psi_1 = -\sqrt{a}$) было $F_1 = \Phi_1$, иначе решение (2) окажется здесь расходящимся.

Физический смысл функций $\Psi_{1,2}$, F_1 , Φ_1 становится ясным из асимптотического поведения нулевого приближения $\varphi^{(0)} = \varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)}$ при $t = k^{1/2}\psi_1 \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(0)} &\simeq \Phi_1 k^{-1/4} (\psi_1^2 - a)^{-1/4} \exp(ik\Psi_1), \\ \varphi_2^{(0)} &\simeq R(ka) F_1 k^{-1/4} (\psi_1^2 - a)^{-1/4} \exp(ik\Psi_2) \end{aligned} \quad (9)$$

$(\psi_1 \rightarrow -\infty).$

Из (9) видно, что перед каустикой и вдали от нее, когда $\psi_1 \rightarrow -\infty$, (2) переходит в известное решение, полученное методом геометрической оптики, причем величины Ψ_1 и Ψ_2 представляют собой фазы падающей и отраженной волн, а $\Phi_1 = \Phi_1(\psi_1^2 - a)^{-1/4}$ и $F_1 = R(ka)F_1 = R(ka)F_1(\psi_1^2 - a)^{-1/4}$ — их амплитуды. При $t = k^{1/2}\psi_1 \rightarrow +\infty$, т. е. далеко за барьером,

$$\varphi^{(0)} = \varphi_1^{(0)} + \varphi_2^{(0)} \cong D(ka)\Phi_1 k^{-1/4} (\psi_1^2 - a)^{-1/4} \exp(ik\Psi_1) \quad (\psi_1 \rightarrow +\infty). \quad (10)$$

Таким образом, Ψ_1 является фазой, а $D(ka)\Phi_1(\psi_1^2 - a)^{-1/4}$ — амплитудой волны, просочившейся через каустическую поверхность. Как и в случае каустики без просачивания [4], геометрико-оптическая интерпретация смысла величин Ψ_1 , Ψ_2 , F_1 и Φ_1 теряет силу в окрестности каустики ($\psi_1 = -\sqrt{a}$), где обычное приближение геометрической оптики расходится. Амплитуды же Φ_1 и F_1 , в отличие от $\Phi_1 = \Phi_1(\psi_1^2 - a)^{-1/4}$ и $F_1 = F_1(\psi_1^2 - a)$, при $\psi_1 \rightarrow -\sqrt{a}$ остаются конечными, так как неограниченный рост множителя $(\psi_1^2 - a)^{-1/4}$ компенсируется в уравнениях переноса (8) уменьшением до нуля сечения лучевой трубы.

Нам остается определить ширину потенциального барьера a . С этой целью введем ортогональные криволинейные координаты ξ , η , ζ , где ξ — расстояние, отсчитываемое по линии $\psi_2 = \text{const}$, а η — по линии $\psi_1 = \text{const}$ (так что $\psi_1 = \psi_1(\xi)$, $\psi_2 = \psi_2(\eta)$). Введение ортогональных координат ξ , η возможно потому, что линии $\psi_1 = \text{const}$ и $\psi_2 = \text{const}$ взаимно ортогональны (см. (6)). В новых координатах $(\nabla\psi_1)^2 = h_1^{-2}(\partial\psi_1/\partial\xi)^2$, $(\nabla\psi_2)^2 = h_2^{-2}(\partial\psi_2/\partial\eta)^2$, где h_1 и h_2 — соответствующие коэффициенты Ламэ.

В силу принятого условия медленного изменения параметра a , последний следует считать локальной величиной. По существу это означает, что вблизи каустики мы имеем дело с полем «почти плоской» волны, отражающейся от «почти параболического» барьера ширины a . В таком случае координаты ξ , η будут близки к декартовым и можно приближенно принять $h_1 \simeq h_2 \simeq 1$. Тогда из (6) получаем

$$(\psi_1^2 - a) \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} \right)^2 = \varepsilon - \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\eta} \right)^2. \quad (11)$$

Пусть при фиксированных η и ζ правая часть (11) обращается в нуль при $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$, причем внутри интервала (ξ_1, ξ_2) величина $\varepsilon - (\partial\psi_2/\partial\eta)^2$ отрицательна. В соответствии с постановкой задачи число нулей не должно превышать двух; в противном случае в качестве w_1 и w_2 надо было бы брать другие эталонные функции. Считая, что $\psi_1(\xi_1) = -\sqrt{a}$ и $\psi_1(\xi_2) = +\sqrt{a}$, интегрируем по ξ в пределах от ξ_1 до ξ_2 квадратные корни из модулей левой и правой частей (11):

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{|\psi_1^2 - a|} \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} d\xi = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \sqrt{|\psi_1^2 - a|} d\psi_1 = \frac{\pi a}{2} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\left| \varepsilon - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right|} d\xi.$$

Отсюда следует, что

$$a = \frac{2}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\left| \varepsilon - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right)^2 \right|} d\xi \quad (a > 0). \quad (12)$$

Полученное значение a зависит, разумеется, от η и ξ как от параметров. Таким образом, при рассматриваемой постановке задачи, когда ширина барьера a считается локальной величиной, следует при нахождении амплитуд F_1, Φ_1 по формулам (8) и коэффициентов $R(ka), D(ka)$ по формулам (5) подставлять значение (12) для a , которое соответствует точке касания лучом каустики.

Выражение, аналогичное (12), можно получить и в случае надбарьерного отражения, когда параметры b в (3) и a в (2) отрицательны, а правая часть (11) обращается в нуль при комплексных ξ_1 и ξ_2 . Считая тогда $a < 0$, сопоставим комплексным нулям ξ_1 и ξ_2 правой части выражения (11) нули $\psi_1 = -i\sqrt{|a|}$ и $\psi_1 = +i\sqrt{|a|}$ левой части. Извлекая далее квадратный корень из обеих частей выражения (11) и интегрируя по замкнутому контуру, охватывающему точки ξ_1 и ξ_2 в комплексной плоскости ξ , имеем*

$$a = \frac{-i}{\pi} \oint \sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right)^2} d\xi \quad (a < 0). \quad (13)$$

Существенно, что выражения (5) для коэффициентов R и D , а следовательно, и решение (2) сохраняют силу при $a < 0$.

При выводе формул (12) и (13) неявно предполагалось, что решения уравнения эйконала Ψ_1 и Ψ_2 известны, т. е. известны функции ψ_1, ψ_2 и связанная с ними ортогональная система координат ξ, η, ζ . Однако в случае надбарьерного отражения, когда каустика $\psi_1 = -\sqrt{a} = -i\sqrt{|a|}$ является мнимой, в нашем распоряжении имеется только одно значение эйконала Ψ_1 , соответствующее падающей волне. В этом случае мы можем построить сначала систему падающих лучей, соответствующих эйконалу Ψ_1 , а значения Ψ_1 в тех точках пространства, где лучи проходят через минимальное значение ε (оно соответствует вершине потенциального барьера), взять за начальные значения для эйконала Ψ_2 . Определив таким путем значения Ψ_1 и Ψ_2 во всем пространстве, мы находим ψ_1 и ψ_2 при помощи (7а), после чего уже нетрудно построить систему координат ξ, η, ζ .

2. Проиллюстрируем применение описанного метода на примере так называемого «радиовосхода» точечных источников радиоизлучения, находящихся выше ионосферы (радиозвезд, межпланетных космических станций и т. п.). Примем следующие упрощающие предположения:

- а) будем считать ионосферу плоской, а профиль электронной концентрации $N(z)$ — параболическим: $N(z) = N_0 \left[1 - \left(\frac{z-z_0}{z_m} \right)^2 \right]$, так что $\varepsilon(z) = 1 - \gamma^2 \left[1 - \left(\frac{z-z_0}{z_m} \right)^2 \right]$, где $\gamma^2 = 4\pi e^2 N_0 / m\omega^2$;

* Ср. с записью аналогичных выражений в [2, 3].

б) отражением в начале и конце параболического слоя ($z = z_0 \pm z_m$) пренебрежем, так как в реальной ионосфере функция $N(z)$ имеет непрерывную производную и указанные отражения фактически отсутствуют;

в) параметр a вычислим в предположении, что лучи касаются каустики в точках наибольшего снижения (в действительности точка касания и точка наибольшего снижения не совпадают друг с другом).

Простые расчеты, основанные на построении лучей в параболическом слое, приводят к следующей зависимости a от синуса угла падения $q = \sin \alpha$ (рис. 1):

$$a(q) = \frac{z_m}{\gamma} [q^2 + \gamma^2 - 1]. \quad (14)$$

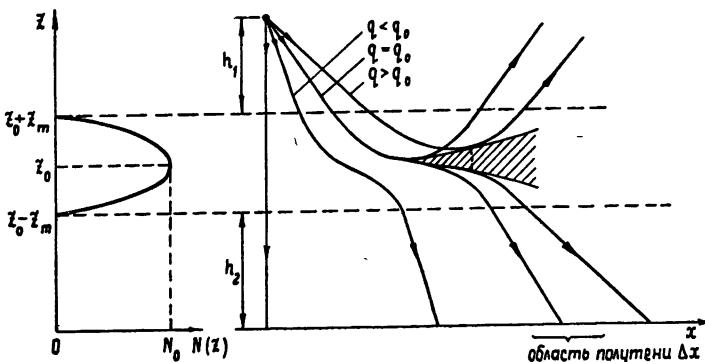


Рис. 1.

Величина a отрицательна при $q^2 < q_0^2 = 1 - \gamma^2$ (надбарьерное отражение) и положительна при $q^2 > q_0^2 = 1 - \gamma^2$ (подбарьерное просачивание). Таким образом, мы имеем дело с непрерывным переходом от прямого прохождения лучей в точку приема к просачиванию волны через каустику; можно проследить изменение поля по x на поверхности Земли от области света $q < q_0$ к области тени $q > q_0$.

Если вблизи источника излучения поле имеет вид $f(q)(e^{ikr}/r)$ (r — расстояние от источника), то в точке x на поверхности Земли интенсивность поля, вычисленная по формулам (8), оказывается равной

$$\bar{\Phi}_1^2 = \frac{qf^2(q)|D(ka)|^2}{(1-q^2)x(q)(dx(q)/dq)} = \Phi_0^2(q)|D(ka)|^2, \quad (15)$$

причем зависимость x от q дается выражениями

$$x(q) = \begin{cases} x_1(q) = (h_1 + h_2) \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{2qz_m}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{2\gamma^2 + q^2 - 1}}{\gamma} \right) & (q < q_0) \\ x_2(q) = (h_1 + h_2) \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{2qz_m}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{1-q^2}}{\gamma} \right) & (q > q_0) \end{cases}$$

Вычислим расстояние Δx , на котором множитель $|D|^2$ изменяется от значения $e(1+e)^{-1}$, соответствующего $\pi ka = -1$, до значения $(1+e)^{-1}$ ($\pi ka = +1$), т. е. расстояние, на котором интенсивность $\bar{\Phi}_1^2$ уменьшается приблизительно в e раз (множитель $\Phi_0^2(q)$ в (15) можно

считать практически постоянным и равным $\Phi_0^2(q_0)$, так как с ростом q он изменяется, как правило, значительно медленнее, чем $|D|^2$). При изменении a от $a = -1/\pi k$ до $a = +1/\pi k$ q меняется от $q_0 - \Delta q$ до $q_0 + \Delta q$, где $\Delta q \approx \gamma/2\pi k z_m q_0$. Следовательно, в окрестности $q = q_0$ для ширины области полутени Δx имеем

$$\Delta x = \frac{dx_1(q_0)}{dq} \Delta q + \frac{dx_2(q_0)}{dq} \Delta q = \frac{\lambda}{4\pi^2 \sqrt{1-\gamma^2}} \left[\frac{h_1+h_2}{\gamma^2 z_m} + \ln 4 \right]. \quad (16)$$

Пусть, например, источник поля расположен на межпланетной станции, удаленной от Земли на расстояние h_1 . Для $N_0 = 10^6 \text{ см}^{-3}$ и $\lambda = 15 \text{ м}$ имеем $\gamma = 0,45$. Положив далее $z_m = 100 \text{ км}$, $h_2 = 200 \text{ км}$ (типичные параметры ионосферы), находим по формуле (15), что при удалении источника $h_1 = 10^6 \text{ км}$

$$\Delta x = 1,4 \cdot 10^4 \lambda = 210 \text{ км},$$

а при удалении $h_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ км}$

$$\Delta x = 8,4 \text{ км}.$$

Зная Δx и скорость движения источника v , можно, разумеется, найти время Δt , в течение которого поле на поверхности Земли изменится в e раз; наоборот, измеряя время Δt , за которое сигнал возрастает (убывает) в e раз, можно оценить параметр z_m ионосферы. Эта оценка может дополнить информацию об ионосфере, получаемую при изучении «радиовосходов» искусственных спутников Земли [5], если, конечно, уточнить расчетные формулы (учесть сферичность ионосферы, заменить параболическую модель $N(z)$ более точной и т. п.).

Следует заметить, что при уменьшении расстояния от источника h_1 до нескольких сотен километров оценка Δx по формуле (16) оказывается явно заниженной. Так, взяв $h_1 = 100 \text{ км}$ и сохранив прежние значения z_m , h_2 , γ , имеем

$$\Delta x = 0,43 \lambda = 6,5 \text{ м}.$$

Действительная ширина области полутени будет значительно большей из-за дифракции волн в области, где a меняет знак. Неприменимость выражения (16), а следовательно, и асимптотического решения (2) при малых h_1 связана с тем, что параметр $a = (z_m/\gamma)(q^2 + \gamma^2 - 1)$ при указанных условиях резко меняется уже на расстояниях порядка λ , что противоречит требованию медленности изменения a . Для описания поля в случае быстрых изменений a нужно использовать более сложные (двухмерные или трехмерные) эталонные функции, учитывающие дифракцию в области $a \approx 0$. К сожалению, такие функции в настоящее время не исследованы.

3. Асимптотическое решение (2) можно видоизменить таким образом, чтобы оно описывало поведение волны в потенциальной яме. Для этого в качестве эталонных функций $w_{1,2}(t, b)$ следует взять решения уравнения

$$w''(t, b) + (b - t^2)w(t, b) = 0, \quad (17)$$

описывающего одномерные колебания в параболической потенциальной яме. Известно (см., например, [6]), что уравнение (18) имеет затухающие при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$ решения только для $b = 2n + 1$, где n — целое число. Следовательно, для параметра $a = b/k$ имеем в данном случае следующее условие квантования:

$$a = \frac{2}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\epsilon - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right)^2} d\xi = \frac{b}{k} = \frac{2n + 1}{k}, \quad (18)$$

где по-прежнему ξ_1 и ξ_2 — нули подынтегрального выражения. Из (18) следует выражение

$$2k \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\epsilon - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right)^2} d\xi = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

которое в одномерном случае ($\psi_2 \equiv 0$) сводится к известному квазиклассическому правилу квантования Бора—Зоммерфельда:

$$2k \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\epsilon} d\xi = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (19)$$

Существенно, что при выводе соотношения (19) не требовалось, чтобы квантовое число n было большим. Дело в том, что в качестве эталонной функции $w(t, b)$ было взято решение для колебаний в параболической потенциальной яме, где условие квантования (19) является точным при любых n (гармонический осциллятор). В связи с этим при малых n нужно наложить определенное ограничение на форму потенциальной ямы, которое сводится к требованию «почти параболической» зависимости $\epsilon(\xi)$ в области, существенной для колебаний, или, иными словами, к требованию слабой ангармоничности осциллятора.

Для того, чтобы пояснить это требование, рассмотрим собственные колебания частицы массы m в одномерной яме с потенциальной функцией $U(x) = -U_0/\cosh^2(ax)$. Простые вычисления по формуле (20) дают для собственных значений энергии частицы приближенное выражение

$$\frac{E_n}{U_0} = -\frac{1}{x} [\sqrt{x} - (2n + 1)]^2, \quad (20)$$

где $x = 8mU_0/\hbar^2a^2$. Точные значения E_n определяются соотношением [6]

$$\frac{E_n}{U_0} = -\frac{1}{x} [\sqrt{x + 1} - (2n + 1)]^2. \quad (21)$$

На рис. 2 представлены графики, отображающие зависимость E_n/U_0 от параметра $\sqrt{x} = \sqrt{8mU_0/\hbar^2a^2}$. Приближенные значения E_n (пунктир) близки к точным (отмечены сплошными кривыми) даже при $n = 0$, если $x \gg 1$. Это условие может быть выполнено как для широкой ($1/a \rightarrow \infty$), так и для узкой ямы ($1/a$ мало), но в последнем случае U_0 должно быть достаточно велико (глубокая яма). Тогда основное состояние E_0 соответствует колебаниям вблизи дна потенциальной ямы, где форма потенциальной функции $U(x)$ близка к параболической. При больших n (на рис. 2 $n = 1, 2, 3$) энергетические уровни, вычисленные по приближенной формуле (20), близки к точным практически при любых x (за исключением x , близких к $(2n + 1)^2$), что указывает на хорошее приближение, даваемое квазиклассическим условием квантования (19).

Сказанное выше о требованиях к форме потенциальной функции в задаче о собственных значениях почти без изменений переносится и на

случай прохождения частицы через потенциальный барьер $U(x) = U_0 \operatorname{ch}^2(ax)$. В этом случае приближенные выражения (5) для коэффициентов отражения R и прохождения D близки к истинным значениям, вычисленным в [6], если а) ширина барьера $1/\alpha$ велика, или б) ширина барьера $1/\alpha$ мала, но форма барьера близка к параболической.

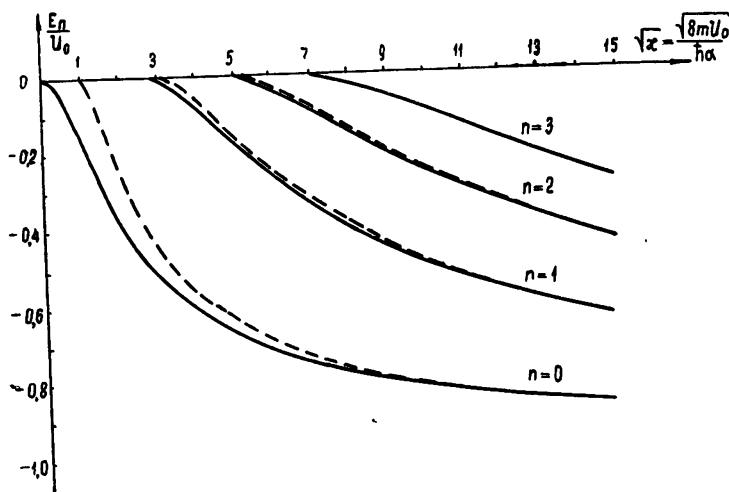


Рис. 2.

ширина барьера $1/\alpha$ мала, но форма барьера близка к параболической. Именно с этими оговорками следует понимать имеющиеся в литературе указания [2, 3], что формулы (5) справедливы при любых значениях a .

4. Как следует из результатов данной работы и работы [4], асимптотическое решение волнового уравнения вблизи каустики оказалось возможным получить на основе последовательно геометрико-оптического рассмотрения, используя эталонные функции, удовлетворяющие уравнениям $w'' - tw = 0$ и $w'' \pm (t^2 - b)w = 0$. В принципе можно было бы исходить и из более сложных уравнений вида $w'' \pm (t - b_1)(t - b_2)\dots(t - b_n)w = 0$ или из уравнений более высокого порядка, но этот путь вряд ли будет эффективным. Во-первых, такие уравнения изучены в настоящее время недостаточно, а во-вторых (и это основное), при использовании одномерных волновых функций мы сталкиваемся с необходимостью требовать медленности изменения параметров b_n , что существенно ограничивает область применимости асимптотических выражений. Мы могли убедиться в этом на примере задачи о «радиовосходе» при небольшой высоте источника волн (см. раздел 2). Более эффективно, на наш взгляд, использование двухмерных или трехмерных эталонных функций.

Однако применение и одномерных эталонных функций открывает ряд возможностей. В частности, при исследовании колебаний в открытых резонаторах можно использовать решения вида $w_i(t_1)w_j(t_2)e^{it_3}$, где w_i и w_j — функции Эйри или Вебера. Как раз к такого рода асимптотическим выражениям приводит рассмотрение собственных колебаний в эллиптическом резонаторе [7]. Возможно, что именно путем «эталонизации» волновых функций удастся построить эффективную теорию волновых явлений в квазиоптических системах, необходимость создания которой выявила в настоящее время с полной очевидностью [8].

В заключение автор выражает признательность С. М. Рытову за весьма ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Т. Уиттакер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, 2, Физматгиз, М., 1963.
2. В. Л. Гинзбург, Электромагнитные волны в плазме, Физматгиз, М., 1960.
3. Н. Г. Денисов, Уч. записки Горьк. ун-та, 35, 3 (1957).
4. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 430 (1964).
5. Я. Л. Альперт, Э. Ф. Чудесенко, Б. С. Шапиро, Сб. Предварительные итоги научных исследований о помощью первых советских ИСЗ и ракет, изд. АН СССР, М., 1960, стр. 40.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
7. В. П. Быков, Рефераты докладов на III Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн в Тбилиси, 1964, изд. Наука, М., 1964, стр. 84.
8. Б. З. Кацеленбаум, Рефераты докладов на III Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн в Тбилиси, 1964, изд. Наука, М., 1964, стр. 17.

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
9 ноября 1964 г.

MODIFICATION OF GEOMETRICAL OPTICS METHOD FOR A WAVE
PENETRATING THROUGH CAUSTIC

Yu. A. Kravtsov

An asymptotic solution has been obtained of a scalar wave equation for a wave penetrating through caustic surface. The solution is given in the form of combination of exponential function and of Veber one (as well as its derivative) with the amplitude chosen in a proper way. The problem is shown to be reduced to eikonal equation for the function Ψ in a definite way depending on the argument ψ_1 and ψ_2 of the exponential and Veber function and to the geometric-optical transport equations for the amplitude of zero approximation.

УДК 539.287

О МИЛЛИМЕТРОВОМ СПЕКТРЕ ПОГЛОЩЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО КИСЛОРОДА

А. П. Наумов

Отмечается несостоительность гипотезы Мэриотта—Бирнбаума о сдвиге резонансных частот микроволнового спектра поглощения кислорода при давлениях порядка нескольких атмосфер. Показано, что приближенный учет нерезонансного поглощения O_2 является достаточным для количественного объяснения результатов измерений поглощения миллиметровых радиоволн при высоких давлениях. Описание спектра поглощения O_2 в области $\lambda \approx 5 \text{ м} \mu$ до давлений $P \approx 7+8 \text{ atm}$ может быть выполнено обычным способом.

В последнее время неоднократно обсуждался вопрос о поглощении сантиметровых и миллиметровых радиоволн молекулами кислорода при повышенном давлении порядка нескольких атмосфер [1—4] (см. также обзор [5]). Дискутируемый вопрос представляет интерес не только для радиоспектроскопии. Экспериментальные и теоретические результаты работ [1—3] позволяют получить дополнительную информацию о спектре атмосферного кислорода (нерезонансное поглощение, зависимость ширины линий O_2 от давления), что, в свою очередь, необходимо для уточнения характеристик распространения микроволн, решения некоторых геофизических задач и т. д. Однако нам хотелось бы обратить внимание на сомнительность интерпретации соответствующих экспериментальных результатов, предложенной в [1, 3, 4]. Здесь имеется в виду гипотетическое утверждение Мэриотта—Бирнбаума [1] о сдвиге резонансных частот кислородных триплетов $\nu_{K\pm}(P)^*$ при возрастании давления, которое получило количественное развитие в [3]. В [4] сделана попытка теоретически обосновать эту гипотезу.

По мнению авторов [3], при давлении P для спектра кислорода имеет место соотношение

$$\nu_{K\pm}(P) = \nu_{K\pm}^0 - aP, \quad (1)$$

где $\nu_{K\pm}^0$ — резонансная частота при малом давлении ($P \approx 2 \div 10 \text{ mm rt. st.}$), $a = 0,4 \text{ M} \mu\text{c}/\text{м} \mu\text{m rt. st.}$ Из выражения (1) следует, что при $P = 760 \text{ mm rt. st.}$ $\nu_{K\pm}(P) - \nu_{K\pm}^0 = 0,3 \text{ Г} \mu\text{c}$, т. е. в области резонанса $\nu_{K\pm}^0 \approx 60 \text{ Г} \mu\text{c}$ даже при обычных атмосферных условиях сдвиг резонансных частот, согласно [3], составляет около $0,5\%^{**}$. Столь малое от-

* Подробности о спин-вращательном спектре O_2 см. в [6—8]. Ниже переходы $J = 1 \rightarrow J$ обозначены, как и в [9], через K_- , переходы $J + 1 \rightarrow J$ обозначены через K_+ , соответствующие резонансные частоты — через ν_{K-} и ν_{K+} , полуширины — через $\Delta\nu_{K-}$ и $\Delta\nu_{K+}$, а матричные элементы дипольного момента — через μ_{K-} и μ_{K+} (K — квантовое число вращательного момента количества движения ядра, J — квантовое число полного момента количества движения молекулы).

** В [1—3] рассматривается поглощение в чистом кислороде. Сдвиг же величин $\nu_{K\pm}^0$, предполагаемый в [1, 3, 4], если он имеет место в кислороде, должен быть и в смеси $O_2 - N_2$, ибо близкодействующие молекулярные взаимодействия (лондоновская дисперсия, обменные силы) в последнем случае близки к взаимодействиям в чистом кислороде. Отношение соответствующих сечений соударений, которые определяются упомянутыми силами, $\sigma_{O_2-N_2}/\sigma_{O_2-O_2} \approx 0,90$ [10, 11].

личие резонансных частот кислородных переходов от обычно принимаемых требует тем не менее существенного пересмотра ряда данных о спектре поглощения O_2 . В частности, полуширины спектральных линий атмосферного кислорода, которые не могут быть определены непосредственным измерением на уровне моря из-за перекрытия линий* и находятся лишь из сопоставления экспериментального коэффициента поглощения в области резонанса с вычисленным, будут отличаться при наличии сдвига $\nu_{K\pm}^0$ примерно на 30%, а эквивалентные длины путей радиоволн в земной атмосфере на волнах $\lambda \approx 5$ мм — на 30–40% от значений, найденных в [9, 30]**.

1. Обсудим кратко аргументы, которые приводят авторы [1, 3, 4] в подтверждение сдвига резонансных частот O_2 .

а) В работах [1] таким аргументом было превышение измеренного поглощения радиоволн в кислороде при давлениях $P > 10$ атм на частотах $\nu = 9,07$ ГГц и 23,34 ГГц над вычисленным поглощением [6]***. Попытка [1] «улучшить» расчетные величины коэффициента поглощения [6] путем уменьшения величин $\nu_{K\pm}^0$ встретила возражение уже в [2], где методом возмущений было показано, что матричные элементы энергетических состояний молекулы O_2 , а следовательно, и резонансные частоты $\nu_{K\pm}^0$ не меняются сколько-нибудь заметно при возрастании давления. В [2] было найдено также, что матричные элементы переходов $K+1 \leftrightarrow K-1$ становятся отличными от нуля при $P > 10$ атм и соответствующие квантовые переходы обуславливают более высокое поглощение радиоволн в спектральной области, исследованной Мэриоттом и Бирнбаумом [1]****.

б) Авторы [3] измерили поглощение на ряде частот в диапазоне $\nu = 48 \div 70$ ГГц при давлениях $P = 0 \div 14$ атм. Этот диапазон лежит в максимуме кислородного поглощения и переходы $K+1 \leftrightarrow K-1$ не дают вклада в эту область. Оказалось, что теоретические и экспериментальные значения коэффициентов поглощения O_2 находятся в удовлетворительном согласии, если считать выполненным соотношение (1)*****. Коэффициент поглощения в [3] вычислялся по формуле *****

$$\gamma = c^2 \nu^2 P \sum_K \frac{\gamma_{K\pm}(\Delta\nu_{K\pm}/P)}{(\nu_{K\pm}^0 - aP)^2} \frac{\delta\nu}{(\nu - \nu_{K\pm}^0 + aP)^2 + (\delta\nu)^2}, \quad (2)$$

* Перекрытие спектральных линий O_2 при $\lambda \approx 5$ мм приводит к нелинейной зависимости $\Delta\nu_{K\pm}(P)$. Поэтому общая экстраполяция $\Delta\nu_{K\pm} = a_{K\pm}P$ (коэффициент уширения, измеряемый при низком давлении $a_{K\pm} = \text{const}$), справедливая для сингулентных линий, дает завышенные значения полуширин кислородных линий при $P > 760$ мм рт. ст. (подробнее см. [9]).

** Приведенные количественные оценки выполнены нами по методике, описанной в [9, 30].

*** О контрольных измерениях в [1] поглощения на частоте $\nu = 2,3$ ГГц при $P = 3 \div 8$ атм см. ниже.

**** В обычных условиях переходы $K+1 \leftrightarrow K-1$ запрещены и в расчетах Ван Флека [6] не принимались во внимание. Для давлений $P \approx 20 \div 50$ атм при $K = 3 \div 11$ резонансные частоты $\nu_{K+1} \leftrightarrow K-1 \approx 1 \div 4$ ГГц согласно [2].

***** Расхождение расчетов [3] с экспериментальными данными всюду не превышает $\approx 15\%$, а на некоторых частотах (например, на $\nu = 48,9$ ГГц, 54,3 ГГц, 68,7 ГГц) составляет $2 \div 3\%$. При сопоставлении теории Ван Флека [6] (без учета уменьшения величин $\nu_{K\pm}^0$) с экспериментом [3] расхождение на этих частотах достигает примерно 2 раз.

***** См. также выражение (1) в [4].

где $\gamma_{K\pm}$ и $\Delta\nu_{K\pm}$ — интенсивность и полуширина спектральной линии при низком давлении, $\delta\nu$ — полуширина линии при давлении P^* , ν и v — частота внешнего поля в cm^{-1} и $G\text{c}$, c — скорость света.

Формула (2) получена в следующих предположениях:

1) форма спектральной линии описывается выражением Ван Флека—Вайскопфа [12], причем вблизи резонанса членом $\delta\nu[(v + \nu_{K\pm}^0 - aP)^2 + (\delta\nu)^2]^{-1}$ пренебрегается по сравнению с членом $\delta\nu[(v - \nu_{K\pm}^0 + aP)^2 + (\delta\nu)^2]^{-1}$;

2) считается, что во всем диапазоне $v = 48 \div 70 G\text{c}$ нерезонансное поглощение O_2 пренебрежимо мало по сравнению с резонансным**.

Даже если принять точку зрения авторов [3], то все же в расчетной формуле (2) легко обнаружить ошибку. В самом деле, следуя выводу [6] формулы для коэффициента поглощения O_2 и считая, что в резонансе при малом давлении P_1 (когда вкладом всех линий, кроме рассматриваемой, можно пренебречь)

$$\gamma_{\text{рез}} = \gamma_{K\pm} = AT^{-3}(\nu_{K\pm}^0)^2 \mu_{K\pm}^2 e^{-BhcK(K+1)/kT} \frac{1}{\Delta\nu_{K\pm}/P_1} \quad (3)$$

(вращательная постоянная молекулы кислорода $B = 1,44 cm^{-1}$, k — постоянная Больцмана), окончательно получим

$$\gamma = c^2 v^2 P \sum_K \frac{\gamma_{K\pm} (\Delta\nu_{K\pm}/P_1)}{(\nu_{K\pm}^0)^2} \frac{\delta\nu}{(v - \nu_{K\pm}^0 + aP)^2 + (\delta\nu)^2}. \quad (4)$$

Разница в формулах (2), (4) мало сказывается в самом резонансе, но существенна на концах диапазона $48 \div 70 G\text{c}$. Так, если расчет по формуле (2) на частотах $v = 48,9 G\text{c}$, $68,7 G\text{c}$ приводит к расхождению с экспериментом [3] на $2 \div 3\%$, то аналогичное сопоставление с вычисленным значением γ по формуле (4) дает расхождение уже около 16%.

в) В [4] сдвиг резонансных частот O_2 интерпретируется с помощью теории адиабатических соударений***. Но хорошо известно (см., например, § 7, гл. 13 в [16]), что в микроволновом диапазоне последние не имеют существенного значения, ибо энергия взаимодействия между соударящимися молекулами, необходимая для заметного изменения фазы колеблющейся молекулы (характеристика адиабатичности соударения) больше, чем это нужно для перехода между основным и возбужденным состояниями. К тому же кинетическая энергия молекул достаточно велика при обычных температурах ($kT > h\nu$). Последнее составляет одно из условий существования переходов при соударениях, т. е. свидетельствует о явном преобладании адиабатических соударений в микроволновом диапазоне, которые не приводят к какому-либо сдвигу резонансной частоты.

Разумеется, сказанное не исключает некоторого влияния на микроволновой спектр адиабатических соударений, которые все-таки происходят и вызывают малые сдвиги резонансных частот $\nu_{K\pm}^0$. Но спектро-

* Полуширины спектральных линий O_2 слабо зависят от квантового числа K . При $K \neq 1$ разброс значений $\Delta\nu_{K\pm}$ не превышает 0,6% [10]. Для давлений $P \gtrsim 760 \text{ mm rt. st.}$ из-за отмеченного выше перекрытия линий O_2 целесообразно говорить лишь о среднем значении для всех квантовых чисел полуширины $\delta\nu$. Поэтому в обозначении $\delta\nu$ опускается индекс $K \pm$.

** Отметим, что оба предположения являются весьма неточными. О некорректности формы линии Ван Флека—Вайскопфа см. в [13, 14], а о необходимости учета нерезонансного поглощения в области $v \approx 48 \div 70 G\text{c}$ для расчета коэффициента поглощения O_2 при высоком давлении см. ниже.

*** Количественные оценки значения a в приводимой теории [4] отсутствуют.

скопические данные (см., например, [1⁶]) приводят к следующим оценкам: $|\nu_{K\pm}(P) - \nu_{K\pm}^0| < 0,05 \delta\nu$; для чистого кислорода, используя обычную запись [9] $\delta\nu = [\alpha_{K\pm}(P)]_{cp} P$, имеем: $a/(\alpha_{K\pm})_{cp} < 0,05$. Легко убедиться, что последнее соотношение не выполняется уже в обычных условиях для спектра кислорода, если использовать предлагаемое авторами [3] значение $a = 0,4 \text{ M}Hz/\text{мм рт. ст.}$ и — значение $(\alpha_{K\pm})_{cp} = 1,17 \text{ M}Hz/\text{мм рт. ст.}$ (см. [9]).

Что касается инверсионного спектра аммиака, аналогию с которым проводят авторы [1, 3] и для которого при давлениях $P \approx 1 \div 2 \text{ atm}$ наблюдается заметное уменьшение резонансных частот, то причина сдвига здесь состоит в специфике взаимодействия молекул, обладающих такой конфигурацией. Рассмотрение возмущения волновых функций NH_3 [17, 18] подтверждает возможность сдвига инверсионных частот. Но отмеченный пример не имеет никакого отношения к микроволновому спектру кислорода.

Подводя итог краткому критическому обзору работ [1—4], можно заключить, что гипотеза о сдвиге резонансных частот O_2 при возрастании давления не получила теоретического подтверждения (см. [2]), а единственным ее источником является несоответствие теории Ван Флека [6] экспериментальным результатам [1, 3]. Из данных [1, 3] наибольший интерес представляют результаты [3] при $P < atm$, полученные в области резонанса, где сдвиг частоты $\nu_{K\pm}^0$, если он имеет место, наиболее существенен для величины поглощения. К тому же переходы $K+1 \leftrightarrow K-1$, разрешенные при высоких давлениях, не дают вклада в поглощение этой области и не искажают спектра O_2 .

2. Первое, что напрашивается в качестве интерпретации измерений [3], это устранение дефекта, присущего форме линии Ван Флека—Вайскопфа, которая использовалась в расчетах [1, 3]. Этот дефект состоит в том, что максимальное поглощение для каждой линии, вычисленное по формуле (2) при $a = 0$, имеет место не на резонансной частоте $\nu_{K\pm}$, а на частоте $\nu_m = \nu_{K\pm}^0 + (\Delta\nu_{K\pm})^2/\nu_{K\pm}^0$ *. В этом легко убедиться, раскрыв с помощью формулы (2) равенство $d\gamma/d\nu = 0$. Отмеченное обстоятельство совершенно не влияет на спектр O_2 при обычных атмосферных условиях, так как соответствующий сдвиг резонансной частоты равен 0,006 Гц и член $(\Delta\nu_{K\pm})^2/\nu_{K\pm}^0$ составляет лишь 0,01% от величины $\nu_{K\pm}^0$. Однако при давлении $P \approx 10 \text{ atm}$ член $(\Delta\nu_{K\pm})^2/\nu_{K\pm}^0$ равен уже 1,4 Гц, что замедлит сдвиг теоретическую кривую поглощения в сторону высоких частот. При замене $\nu_{K\pm}^0$ в (2) через $\nu_{K\pm}^0 - (\Delta\nu_{K\pm})^2/\nu_{K\pm}^0$ (считается, что $a = 0$) вычисленный коэффициент поглощения лучше соответствует экспериментальным данным [3], нежели без учета поправки, но в количественном отношении это улучшение является недостаточным для полной интерпретации измерений [3]**. Замена в формуле (4) структурного фактора Ван Флека—Вайскопфа формой линии из кинетического уравнения [14], которая представляется наиболее корректной в настоящее время, также не позволяет привести в согласие теоретические результаты с экспериментом [3] (см. рис. 1—4).

Следует, однако, обратить внимание на тот факт, что все расчетные кривые, которые сопоставлялись с экспериментальными результатами [3], получены без учета нерезонансного поглощения O_2 . Пренебрежение

* Форма спектральной линии, полученная из решения кинетического уравнения [14], дает максимальное поглощение на частоте $\nu_m = \nu_{K\pm}^0$.

** Для некоторых частот вычисленный коэффициент поглощения меньше измеренного на $\approx 30 \div 50\%$.

нерезонансным поглощением O_2 по сравнению с резонансным в области $\nu = 48 \div 70$ Гц вытекает, по мнению авторов [3], из оценок нерезонанс-

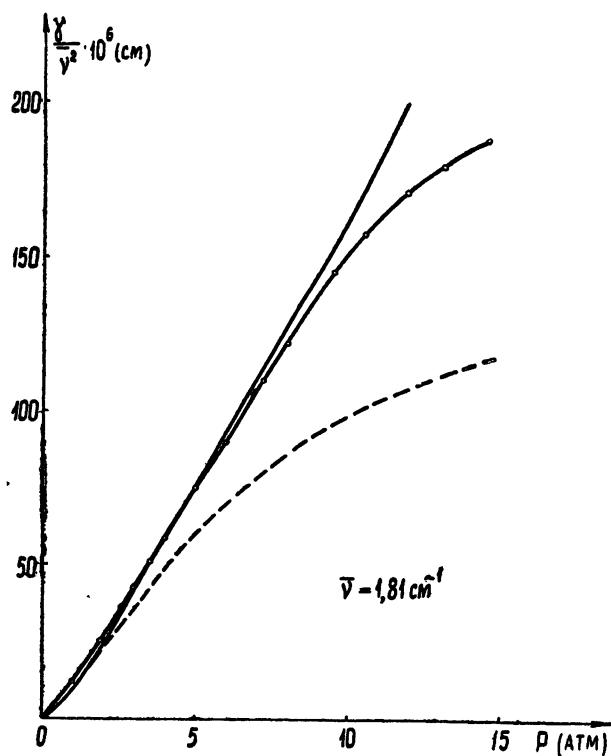


Рис. 1.

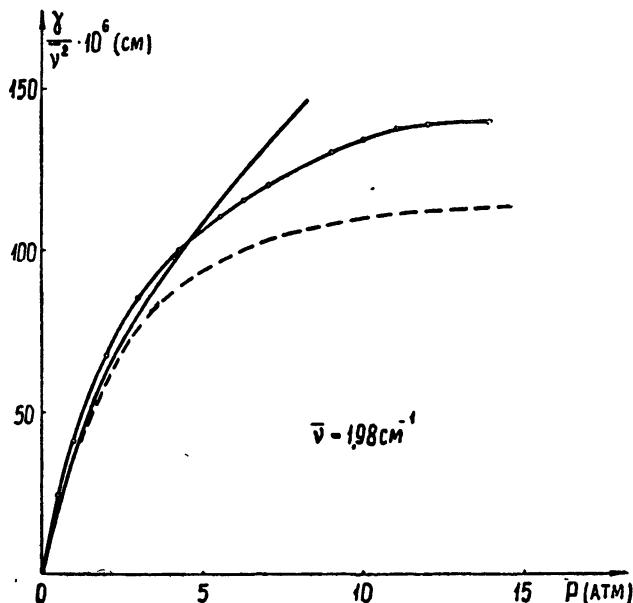


Рис. 2.

ной части по формуле Дебая, а резонансной — по формуле Ван Флека—Вайскопфа. Если для расчета резонансной части поглощения O_2 использовать форму линии по кинетическому уравнению [14] (вместо ошибочной формы линии Ван Флека—Вайскопфа), то резонансная часть

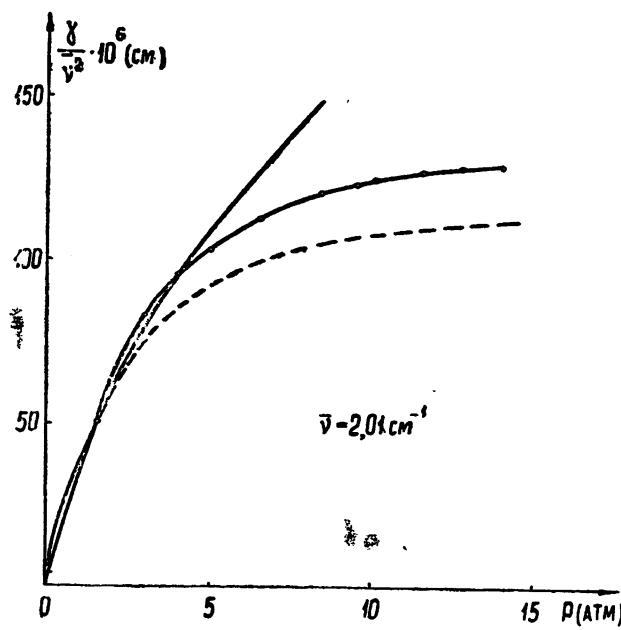


Рис. 3.

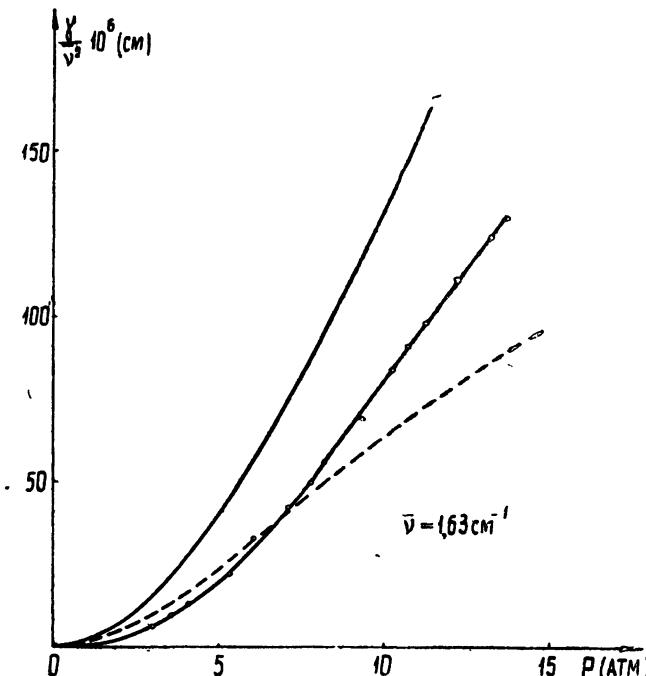


Рис. 4.

поглощения в области $\lambda \approx 5 \text{ мм}$ изменится очень мало [9]*, так как вблизи центра линии различные формы близки друг к другу. Что касается описания нерезонансного поглощения формулой Дебая, то неправомерность этого неоднократно уже отмечалась в литературе [9, 13, 14, 19, 20]. В частности, измерения атмосферного поглощения на дециметровых $\lambda \approx 25 \div 60 \text{ см}$ [19, 31]) и миллиметровых ($\lambda \approx 1 \div 2 \text{ мм}$ [21]) волнах, где ослабление радиоволн в кислороде обусловлено лишь нерезонансной частью**, свидетельствуют, что дебаевское выражение даёт существенно заниженные величины коэффициента нерезонансного поглощения $\gamma_{\text{нр}}$.

Механизм нерезонансного поглощения O_2 связан, как известно, с возбуждением при соударениях диагональных матричных элементов магнитного молекулярного момента [6]. Квантово-механическим аналогом нерезонансного поглощения служат зеемановские переходы, так как в межмолекулярном магнитном поле (при соударениях) происходит M -расщепление триплетных уровней кислорода. Величина этого расщепления меняется в течение соударения***. Классические методы (аналогичные, например, [23]) не применимы для расчета нерезонансного поглощения O_2 . Впервые выражение для $\gamma_{\text{нр}}$ с помощью матрицы плотности в определенных идеализациях получено Станкевичем [20]. Однако и в этом случае извлечение количественной информации сопряжено с трудоемкой вычислительной процедурой. Строгое кинетическое рассмотрение вопроса о нерезонансном поглощении O_2 во всем микроволновом диапазоне в настоящее время отсутствует.

Между тем интерполяция экспериментальных данных [19, 21, 24, 25, 31] приводит к следующей эмпирической формуле для коэффициента нерезонансного поглощения атмосферным кислородом радиоволн в диапазоне $\nu = 40 \div 100 \text{ Гц}$ на уровне моря****:

$$\gamma_{\text{нр}}^0 [\text{дБ/км}] = 0,022 + 1,02 \cdot 10^{-3} (\nu - 40). \quad (5)$$

Из формулы (23) работы [20] видно, что вблизи резонансных частот при бинарных молекулярных соударениях величина $\gamma_{\text{нр}}^0$ пропорциональна P^2 *****. Поскольку возбуждение магнитного момента O_2

* Разумеется, в форме линии Ван Флека—Вайскопфа предварительно нужно $v_{K\pm}^0$ заменить на $v_{K\pm}^0 - (\Delta v_{K\pm})^2/v_{K\pm}^0$.

** В диапазоне $\lambda \approx 25 \div 60 \text{ см}$ радиоволны в ясной атмосфере поглощаются только молекулами кислорода; причем резонансная часть коэффициента поглощения много меньше нерезонансной (соответствующее отношение около 0,01%). На волнах $\lambda \approx 1 \div 2 \text{ мм}$ поглощение в атмосфере при обычных условиях определяется вращательным спектром водяных паров [22]. Однако кислородную часть поглощения на этих волнах определяет нерезонансное поглощение.

*** Уже из сказанного следует, что термин «нерезонансное поглощение» не отражает сути механизма этого поглощения. Однако в данной работе мы пользуемся принятой терминологией.

**** Правда, в [21] содержатся сведения лишь о полном вертикальном ослаблении радиоволн $\lambda \approx 2,18 \text{ мм}$ и $1,33 \text{ мм}$. Однако из данных [21] определяется коэффициент поглощения молекулярного кислорода, который, согласно вышеупомянутым замечаниям, отождествляется с величиной $\gamma_{\text{нр}}$. В самом деле, принимая из данных [22] коэффициент поглощения водяного пара γ_{H_2O} равным $0,43 \text{ дБ/км}$ при $\lambda = 2,18 \text{ мм}$ и умножая это значение на фактор 2 (так как вычисленный коэффициент поглощения γ_{H_2O} в $1,5 \div 2$ раза ниже измеренного; см. рис. 3 в [22]), получим, что полное вертикальное ослабление в водяных парах $\Gamma_{H_2O} = 1,29 \text{ дБ}$ (при наземной влажности $\rho = 7,5 \text{ г/м}^3$, к которой приведены результаты [21] и для характеристической высоты $H_{H_2O} = 1,5 \text{ км}$). Так как полное атмосферное поглощение на этой длине волны $\Gamma_a = 2 \text{ дБ}$ [21], то на долю вертикального ослабления в кислороде приходится $\Gamma_{O_2} = 0,71 \text{ дБ}$, что при $H_{O_2} = 4 \text{ км}$ [20] дает $\gamma_{\text{нр}} = 0,17 \text{ дБ/км}$. Аналогичная обработка результатов [21] на волне $\lambda \approx 1,33 \text{ мм}$ приводит к близкому результату. Использованное выше значение H_{H_2O} представляется наиболее точным в свете последних расчетных данных [30].

***** Вдали от резонанса $\gamma_{\text{нр}}^0 \sim P^3$ [20].

происходит в магнитном поле соседних молекул, то далеко не все молекулярные соударения в атмосфере ответственны за нерезонансное поглощение. Из основных атмосферных газов лишь молекулы кислорода обладают магнитным дипольным моментом; поэтому соударения $O_2 - O_2$ способны возбудить магнитный дипольный момент, в то время как соударения $O_2 - N_2$ неэффективны (по крайней мере в диполь-дипольном приближении) для величины нерезонансного поглощения кислорода. Принимая во внимание концентрацию кислорода в атмосфере $f = 0,21$ и то обстоятельство, что $\gamma_{\text{нр}} \sim f^2$, для чистого кислорода формулу (5) можно записать в виде

$$\gamma_{\text{нр}} [\text{дБ/км}] = [0,50 + 2,31 \cdot 10^{-2} (\nu - 40)] \left(\frac{P}{760} \right)^2. \quad (6)$$

В формуле (6) ν выражено в ГГц, P — в мм рт. ст.

Разумеется, описание нерезонансного поглощения электромагнитных волн молекулами кислорода соотношением (6) является весьма грубым. Формула (6) дает скорее слаженный (усредненный) по диапазону ход величины $\gamma_{\text{нр}}$. Однако уже ориентировочные прикидки свидетельствуют о том, что учет нерезонансного поглощения может оказаться достаточным для интерпретации измерений [3] до давлений $P \approx 7 \text{ атм}$. В самом деле, резонансное поглощение γ_p в области $\lambda \approx 5 \text{ мкм}$ мало меняется при давлениях $P \gtrsim 6 \div 7 \text{ атм}$ (см. рис. 1—3), в то время как нерезонансная часть поглощения $\gamma_{\text{нр}}$ растет пропорционально P^2 (при бинарных соударениях молекул). Так, на частоте $\nu = 1,98 \text{ см}^{-1}$ при $P \approx 1 \text{ атм}$ отношение $\gamma_{\text{нр}}/\gamma_p \approx 1,7\%$, а при $P \approx 6 \text{ атм}$ $\gamma_{\text{нр}}/\gamma_p \approx 24\%$.

3. Мы рассчитали коэффициент поглощения молекулярного кислорода (концентрация 100%) на электронной вычислительной машине по формуле

$$\begin{aligned} \gamma [\text{дБ/км}] = & A P T^{-3} \nu^2 \sum_K (F_{K+} \mu_{K+}^2 + F_{K-} \mu_{K-}^2) e^{-B h c K (K+1)/kT} + \\ & + [0,50 + 2,31 \cdot 10^{-2} (\nu - 40)] \left(\frac{P}{760} \right)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

где нерезонансная часть поглощения описывается полуэмпирическим интерполяционным выражением (см. выше), а резонансная — аналогично [9]. В формуле (7) $A = 12,73\%$,

$$\begin{aligned} F_{K\pm} = & \frac{4\nu_{K\pm}^2 \Delta\nu_{K\pm}}{(\nu_{K\pm}^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 (\Delta\nu_{K\pm})^2}, \quad \mu_{K+}^2 = \frac{K(2K+3)}{K+1}, \\ \mu_{K-}^2 = & \frac{(K+1)(2K-1)}{K}, \end{aligned}$$

P выражено в мм рт. ст., ν — в ГГц, температура T полагалась равной 300°К. В расчете использовались резонансные частоты $\nu_{K\pm}$, заимствованные из [5] (см. таблицу 1)**. Резонансные частоты $\nu_{K\pm}$ для значений $K = 1 \div 23$ измерялись при низком давлении в работах [26—29]. Измененные величины $\nu_{K\pm}$ совпадают с вычисленными значениями в [28, 29].

* Коэффициент A больше коэффициента A_1 работы [9] в $1/0,21 = 4,76$ раза, так как в [9] рассматривается кислород в атмосфере.

** В разделе 3 данной работы мы опускаем индекс 0 в обозначении $\nu_{K\pm}^0$, так как считаем, что резонансные частоты O_2 не меняются при рассматриваемых давлениях.

(расхождение $\lesssim 0,003\%$), что свидетельствует о достаточной степени точности расчетных значений $\nu_{K\pm}$ и при $K > 23$, т. е. для тех переходов, резонансные частоты которых не измерялись. Полуширины спектральных линий O_2 вычислялись нами по формуле $\Delta\nu_{K\pm} = \delta\nu = (\alpha_{K\pm})_{cp} P$, причем в качестве величины $(\alpha_{K\pm})_{cp}$ использовалось значение 1,17 $Mg/m\text{мм}$ рт. ст., найденное в [9]. Указанная величина $(\alpha_{K\pm})_{cp}$ при $P = 760$ mm рт. ст. в чистом кислороде приводит к $\delta\nu \approx 0,030 \text{ см}^{-1}$, в то время как в атмосфере $\delta\nu \approx 0,027 \text{ см}^{-1}$.

На рис. 1—4 вычисленный по формуле (7) коэффициент поглощения молекулярного кислорода (в единицах $\gamma \cdot 10^6/\nu^2$ при $P = 0 \div 14 \text{ атм}$;

Таблица 1

Резонансные частоты молекулярного кислорода

Кванто- вое чис- ло K	$\nu_{K+} [\text{Гц}]$	$\nu_{K-} [\text{Гц}]$
1	56,2652	118,7455
3	58,4466	62,4862
5	59,5910	60,3060
7	60,4348	59,1642
9	61,1506	58,3239
11	61,8002	57,6123
13	62,4112	56,9687
15	62,9978	56,3632
17	63,5685	55,7841
19	64,1276	55,2208
21	64,6789	54,6725
23	65,2241	54,1300
25	65,7616	53,5976
27	66,2978	53,0695
29	66,8313	52,5458
31	67,3627	52,0259
33	67,8923	51,5091
35	68,4205	50,9949
37	68,9478	50,4830
39	69,4741	49,9730
41	69,9998	49,4648
43	70,5249	48,9582
45	71,0497	48,4530
47	71,5743	47,9492
49	72,0986	47,4465

сплошная кривая) сопоставляется с экспериментальными результатами [3], обозначенными кружками. Пунктирной кривой на рис. 1—4 представлен коэффициент поглощения O_2 , вычисленный с формой линии по кинетическому уравнению и без учета нерезонансной части поглощения.

Из рис. 1—3 видно, что на частотах $\nu = 1,81 \text{ см}^{-1}$ (54,3 Гц), $1,98 \text{ см}^{-1}$ (59,4 Гц), $2,01 \text{ см}^{-1}$ (60,3 Гц) расхождение вычисленного коэффициента поглощения по формуле (7) с измеренным не превышает 15% до давлений $P \approx 7 \div 8 \text{ атм}$. На этих частотах степень соответствует теории эксперименту не хуже, чем в [3], однако описание спектра O_2 в данной работе выполнено, в отличие от [3], без каких-либо дополнительных гипотез, которые к тому же вызывают серьезные сомнения (см. раздел 1). Если же наряду с нерезонансным поглощением O_2 , которое, несомненно, имеет место, учесть и сдвиг частот $\nu_{K\pm}$, предполагаемый авторами [1, 3], то расхождение между экспериментальными и теорети-

ческими результатами на частотах $\nu = 1,81 \text{ см}^{-1}$, $1,98 \text{ см}^{-1}$, $2,01 \text{ см}^{-1}$ при $P \leq 7 \text{ атм}$ будет достигать $30 \div 40\%$.

На двух других частотах $\nu = 1,63 \text{ см}^{-1}$ (48,9 Гц) и $2,29 \text{ см}^{-1}$ (68,7 Гц), которые принадлежат концам исследуемого диапазона ($48 \div 70 \text{ Гц}$), согласие нашего расчета с данными [3] хуже, чем на указанных выше частотах (см. рис. 4). Последнее объясняется, по-видимому, тем обстоятельством, что соотношение (6) весьма грубо описывает нерезонансное поглощение. Между тем детали нерезонансного поглощения приобретают существенное значение на концах диапазона $48 \div 70 \text{ Гц}$, где резонансная и нерезонансная части поглощения соизмеримы уже при нормальных условиях. Следует, однако, отметить, что и на частотах $\nu = 1,63 \text{ см}^{-1}$, $2,29 \text{ см}^{-1}$ грубая аппроксимация нерезонансного поглощения приводит к превышению экспериментальных результатов; последнее позволяет надеяться на эффективность дискутируемого механизма поглощения при более точном описании его на этих частотах. Исключение составляет $\nu = 1,89 \text{ см}^{-1}$, где экспериментальные результаты [3] превышают как наши расчетные данные, так и вычисленные в [3] значения коэффициента поглощения O_2 со сдвигом резонансных частот.

Наряду с приближенным характером описания нерезонансного поглощения в рамках модели бинарных соударений следует указать также, что сама модель бинарных соударений становится непригодной при высоких давлениях. Так, спектроскопические оценки, выполненные с учетом величины эффективного диаметра соударений молекул O_2 , показывают, что при давлениях $P \approx 8 \div 9 \text{ атм}$ следует ожидать соударения между более чем двумя молекулами в кислороде. Поэтому плохое соответствие между вычисленными и экспериментальными кривыми на рис. 1—3 при $P \geq 7 \div 8 \text{ атм}$ можно объяснить влиянием множественных соударений и повышением роли деталей в описании нерезонансного поглощения, которые не учитываются формулой (6). Наконец, экспериментальный материал о поглощении радиоволн молекулами кислорода при повышенном давлении носит пока отрывочный характер и не все экспериментальные результаты можно увязать между собой. Так измерения [1] при $P \approx 3 \div 8 \text{ атм}$ на частоте $\nu = 2,3 \text{ Гц}$, где поглощение определяется лишь нерезонансной частью спектра, удовлетворительно согласуются с расчетами по дебаевской формуле (расхождение $\leq 15\%$), хотя последняя, как уже упоминалось выше, совершенно не отражает сути нерезонансного поглощения O_2 и лишь при удачном подборе величины параметра релаксации дает верный порядок коэффициента поглощения молекулярного кислорода на некоторых длинах волн для фиксированного давления. Однако экспериментальные данные [1] на частоте $\nu = 2,3 \text{ Гц}$ выглядят существенно заниженными по сравнению с измерениями [19, 24, 31], если последние пересчитать к чистому кислороду при давлениях $P \approx 3 \div 8 \text{ атм}$.

Принимая во внимание результаты работ [2, 3] и замечания данной работы, следует заключить, что спектр поглощения O_2 в диапазоне $\nu = 48 \div 70 \text{ Гц}$ может быть описан обычным способом (см. [9]) до давлений $P \approx 7 \div 8 \text{ атм}$. При этом нужно считать, что резонансные частоты кислородных переходов не зависят от давления (см. таблицу 1).

Автор искренне признателен С. А. Жевакину за просмотр рукописи и сделанные замечания, К. С. Станкевичу за полезные дискуссии, а также И. А. Раковой за помощь в оформлении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Magyott, G. Birnbaum, Phys. Rev., **99**, 1886 (1955); J. Chem. Phys., **32**, 686 (1960).
2. M. Mizushima, J. Chem. Phys., **32**, 691 (1960).

3. A. Battaglia, A. Gozzini, M. Iannuzzi, Arc. sci., 14, fasc. spec., 93 (1961).
4. M. Iannuzzi, N. Minnaja, Nuovo Cimento, 30, 997 (1933).
5. A. H. Barrett, Memoires de la Societe Royale des Sciences de Liege, 7, fasc. unique, Liege Universite, 1963.
6. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 71, 413 (1947).
7. М. Стрендберг, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1956
8. M. Tinkham, M. W. P. Strandberg, Phys. Rev., 97, 937 (1955); 99, 537 (1955).
9. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 10, 998 (1965).
10. J. O. Artman, J. P. Gordon, Phys. Rev., 96, 1237 (1954).
11. L. F. Stafford, C. W. Tolbert, J. Geoph. Res., 68, 3431 (1963).
12. J. H. Van Vleck, V. E. Weiskopf, Rev. Mod. Phys., 17, 227 (1945).
13. E. P. Gross, Phys. Rev., 97, 395 (1955).
14. С. А. Жевакин, Г. М. Стрелков, Материалы XV Всесоюзного совещания по спектроскопии, Минск, 1963.
15. M. L. Meeks, J. Geoph. Res., 66, 3749 (1961).
16. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
17. H. Margenau, Phys. Rev., 76, 1423 (1949).
18. P. W. Anderson, Phys. Rev., 75, 1450 (1949).
19. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1098 (1963).
20. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 98 (1965).
21. M. Sohn, F. L. Wentworth, J. C. Wiltsie, Proc. IEEE, 51, 1227 (1963).
22. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника, 9, 1327 (1964).
23. A. A. Maryott, G. Birnbaum, J. Chem. Phys., 36, 2026 (1962).
24. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 19 (1958).
25. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 984 (1964).
26. J. H. Burkhalter, R. S. Anderson, W. V. Smith, W. Gordy, Phys. Rev., 79, 651 (1950).
27. B. V. Gokhale, M. W. P. Strandberg, Phys. Rev., 84, 844 (1951).
28. M. Mizushima, R. Hill, Phys. Rev., 93, 745 (1954).
29. R. M. Zimmegger, M. Mizushima, Phys. Rev., 121, 152 (1961).
30. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
31. Л. Н. Бондарь, В. Д. Кротиков, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника, 10, 755 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 октября 1964 г.

ON MILLIMETER SPECTRUM OF MOLECULAR OXYGEN ABSORPTION

A. P. Naumov

It is noted that Maryott—Birnbaum hypothesis of resonance frequency shift of microwave spectrum of oxygen absorption is not true at the pressure of about several atmospheres. The approximate account of the nonresonance absorption is shown to be sufficient for quantitative explanation of measurement results of absorption of millimeter radio waves in the case of high pressures. The description of absorption spectrum of O_2 in the 5 mm range may be obtained by the usual method up to the pressure $P \approx 7 \pm 8$ atm.

УДК 621.378.3

О ВЗАИМНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Ю. И. Марченко, В. П. Рубаник

Исследована взаимная синхронизация молекулярных генераторов в случае сильных связей без запаздывания; изучено также влияние мало-го запаздывания сил связи на процессы взаимной синхронизации как в случае сильных, так и в случае слабых связей.

В радиотехнике, измерительной технике широко применяются молекулярные генераторы СВЧ колебаний. Описание и теоретическое исследование работы таких генераторов дается в работах [1-6] и др. Хотя молекулярные генераторы обладают достаточно высокой стабильностью частоты и низким уровнем шумов, иногда требуется еще большая стабильность и помехоустойчивость, что достигается взаимной синхронизацией нескольких взаимосвязанных генераторов с близкими собственными частотами.

Теоретически взаимная синхронизация молекулярных генераторов исследовалась в работе Манешина и Хохлова [7]. В этой работе предполагается, что генераторы связаны непосредственно друг с другом и что связи являются слабыми. Между тем при взаимной синхронизации генераторы связываются некоторой линией связи, наличие которой влияет на процессы взаимной синхронизации. Кроме того, в большинстве случаев связи между молекулярными генераторами являются значительными. Поэтому представляет интерес исследовать взаимную синхронизацию молекулярных генераторов в случае сильных связей, а также выяснить влияние линии связи на процессы взаимной синхронизации. В случае широкополосной линии связи ее можно рассматривать приближенно как звено запаздывания.

В нашей работе приближенными методами исследуется взаимная синхронизация молекулярных генераторов в случае сильных сил связи, а также исследуется влияние запаздывания сил связи на процессы взаимной синхронизации как в случае сильных, так и в случае слабых связей.

Взаимодействие молекулярных генераторов с учетом запаздывания сил связи приближенно описывается системой дифференциально-разностных уравнений:

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_1}{Q_1} \dot{x}(t) + \omega_1^2 x(t) + 4\pi P_1[x(t)] + \alpha_1 y(t-\Delta) + \beta_1 \dot{y}(t-\Delta) + \gamma_1 \ddot{y}(t-\Delta) = 0; \quad (1)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{\omega_2}{Q_2} \dot{y}(t) + \omega_2^2 y(t) + 4\pi P_2[y(t)] + \alpha_2 x(t-\Delta) + \beta_2 \dot{x}(t-\Delta) + \gamma_2 \ddot{x}(t-\Delta) = 0,$$

где $x(t)$, $y(t)$ — напряженности поля в резонаторах, $P_1(x)$, $P_2(y)$ — усредненные по длине резонаторов поляризации молекулярных пучков, ω_1 , ω_2 — собственные частоты резонаторов. Коэффициенты α_1 , α_2 , β_1 , β_2 ,

γ_1, γ_2 характеризуют силы взаимной связи между генераторами, $\Delta > 0$ — запаздывание сил связи. Предполагается, что поляризации молекулярных пучков малы, а силы связи меньше внутренних сил в каждом генераторе, т. е.

$$|\gamma_1\gamma_2| < 1, \quad |\beta_1\beta_2| < \omega_1\omega_2, \quad |\alpha_1\alpha_2| \ll \omega_1^2\omega_2^2. \quad (2)$$

Сначала предположим, что коэффициенты сил связи α_i , γ_i довольно велики, коэффициенты β_i малы, а также, что запаздывание Δ мало по сравнению с периодами колебаний. Вводя малый безразмерный параметр ε и делая замену переменной $\omega_1 t = \tau$, приведем систему (1) к виду

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \varepsilon \{ \lambda_1 \dot{x}(\tau) + R_1[x(\tau)] + r_1 \dot{y}(\tau - \varepsilon\Delta') \} + \alpha_1 y(\tau - \varepsilon\Delta') + \gamma_1 \ddot{y}(\tau - \varepsilon\Delta') = 0; \quad (3)$$

$$\ddot{y}(\tau) + \zeta^2 y(\tau) + \varepsilon \{ \zeta \lambda_2 y(\tau) + \zeta^2 R_2[y(\tau)] + \zeta^2 r_2 \dot{x}(\tau - \varepsilon\Delta') \} + \alpha_2 x(\tau - \varepsilon\Delta') + \gamma_2 \ddot{x}(\tau - \varepsilon\Delta') = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon\lambda_1 &= 1/Q_1, & \varepsilon\lambda_2 &= 1/Q_2, & \varepsilon R_1(x)\omega_1^2 &= 4\pi\ddot{P}_1(x), & \varepsilon R_2(y)\omega_2^2 &= 4\pi\ddot{P}_2(y), \\ \omega_2/\omega_1 &= \zeta, & \varepsilon\Delta' &= \Delta\omega_1, & \varepsilon r_1 &= \beta_1/\omega_1, & \varepsilon r_2 &= \beta_2/\omega_2. \end{aligned}$$

К системе (3) применим асимптотический метод построения приближенных решений, изложенный в работе [8]. В качестве порождающей возьмем систему, которая получается из (3) при $\varepsilon=0$. При выполнении условий (2) порождающая система имеет бигармоническое решение с частотами ν_1 и ν_2 ; последние определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 - \nu^2 & \alpha_1 - \gamma_1\nu^2 \\ \alpha_2 - \gamma_2\nu^2 & \zeta^2 - \nu^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

где $\zeta = \omega_2/\omega_1 \simeq 1$. При значительных коэффициентах сил связи частоты связанных колебаний ν_1, ν_2 будут значительно отличаться друг от друга, и в системе не будет внутреннего резонанса.

Решение системы (3) ищем в первом приближении в виде

$$\begin{aligned} x(\tau) &= a_1(\tau) \cos \psi_1(\tau) + a_2(\tau) \cos \psi_2(\tau); \\ y(\tau) &= k_1 a_1(\tau) \cos \psi_1(\tau) + k_2 a_2(\tau) \cos \psi_2(\tau), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\psi_i(\tau) = \nu_i \tau + \varphi_i(\tau)$ ($i = 1, 2$); $a_1(\tau), a_2(\tau), \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ — медленно изменяющиеся функции времени, а k_1, k_2 определяются формулами

$$k_i = \frac{\nu_i^2 - 1}{\alpha_i - \gamma_i\nu_i^2} = \frac{\alpha_2 - \gamma_2\nu_i^2}{\nu_i^2 - \zeta^2}. \quad (6)$$

Предположив, что $\alpha_1 - \nu_1^2 \gamma_1 > 0$, $\nu_1 > 1$, $\nu_2 < 1$, получим: $k_1 > 0$, $k_2 < 0$.

Действуя указанным выше методом, получим для определения $a_1(\tau), a_2(\tau), \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$ систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\tau} &= \frac{-\varepsilon}{2\nu_1(1 + \gamma_1 k_1 + k_1 k_1' + \gamma_2 k_1')} \{ \nu_1 a_1 [\lambda_1 + r_1 k_1 - k_1 \Delta' (\alpha_1 - \gamma_1 \nu_1^2)] - \\ &- A_{10}^{(1)}(a_1, a_2) + k_1' \nu_1 a_1 [\zeta \lambda_2 k_1 + \zeta^2 r_2 - \Delta' (\alpha_2 - \gamma_2 \nu_1^2)] - k_1' \zeta^2 A_{10}^{(2)}(a_1, a_2) \}; \\ \frac{da_2}{d\tau} &= \frac{-\varepsilon}{2\nu_2(1 + \gamma_1 k_2 + k_2 k_2' + \gamma_2 k_2')} \{ \nu_2 a_2 [\lambda_1 + r_1 k_2 - k_2 \Delta' (\alpha_1 - \gamma_1 \nu_2^2)] - \end{aligned} \quad (7)$$

$$- A_{01}^{(1)}(a_1, a_2) + k'_2 v_2 a_2 [\zeta \lambda_2 k_2 + \zeta^2 r_2 - \Delta'(a_2 - \gamma_2 v_2^2)] - k'_2 \zeta^2 A_{01}^{(2)}(a_1, a_2);$$

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = v_1 + \varepsilon \frac{B_{10}^{(1)}(a_1, a_2) + k'_1 \zeta^2 B_{10}^{(2)}(a_1, a_2)}{2v_1 a_1 (1 + \gamma_1 k_1 + k_1 k'_1 + \gamma_2 k'_1)},$$

$$\frac{d\psi_2}{d\tau} = v_2 + \varepsilon \frac{B_{01}^{(1)}(a_1, a_2) + k'_2 \zeta^2 B_{01}^{(2)}(a_1, a_2)}{2v_2 a_2 (1 + \gamma_1 k_2 + k_2 k'_2 + \gamma_2 k'_2)},$$

где

$$k'_i = \frac{\alpha_2 - \gamma_2 v_i^2}{\alpha_1 - \gamma_1 v_i^2} k_i \quad (i = 1, 2);$$

$$A_{10}^{(1)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int R_1(a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 d\psi_1 d\psi_2 \simeq B_1 F_1(\Omega_1 \tau_1) a_1;$$

$$A_{10}^{(2)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int R_2(k_1 a_1 \cos \psi_1 + k_2 a_2 \cos \psi_2) \sin \psi_1 d\psi_1 d\psi_2 \simeq B_2 F_1(\Omega_1 \tau_2) k_1 a_1;$$

$$A_{01}^{(1)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int R_1(a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2) \sin \psi_2 d\psi_1 d\psi_2 \simeq B_1 F_1(\Omega_2 \tau_1) a_2;$$

$$A_{01}^{(2)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int R_2(k_1 a_1 \cos \psi_1 + k_2 a_2 \cos \psi_2) \sin \psi_2 d\psi_1 d\psi_2 \simeq B_2 F_1(\Omega_2 \tau_2) k_2 a_2; \quad (8)$$

$$B_{10}^{(1)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int R_1(a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 d\psi_1 d\psi_2 \simeq B_1 \delta_1 \tau_1 F_2(\Omega_1 \tau_1) a_1;$$

$$B_{10}^{(2)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int R_2(k_1 a_1 \cos \psi_1 + k_2 a_2 \cos \psi_2) \cos \psi_1 d\psi_1 d\psi_2 \simeq B_2 \delta_1 \tau_2 F_2(\Omega_1 \tau_2) k_1 a_1;$$

$$B_{01}^{(1)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int R_1(a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2) \cos \psi_2 d\psi_1 d\psi_2 \simeq B_1 \delta_2 \tau_1 F_2(\Omega_2 \tau_1) a_2;$$

$$B_{01}^{(2)} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int R_2(k_1 a_1 \cos \psi_1 + k_2 a_2 \cos \psi_2) \cos \psi_2 d\psi_1 d\psi_2 \simeq B_2 \delta_2 \tau_2 F_2(\Omega_2 \tau_2) k_2 a_2,$$

B_1, B_2 — числовые характеристики молекулярных пучков, τ_1, τ_2 — средние времена пролета молекул через резонаторы, δ_1, δ_2 — расстройки частот колебаний генераторов по отношению к частотам молекулярных пучков; функции $F_1(z), F_2(z)$ характеризуют распределение молекул пучков по скоростям. Кроме того, в равенствах (8) для $A_{ij}^{(k)}, B_{ij}^{(k)}$ мы воспользовались квазистационарными выражениями, которые получены нами для случая полигармонических колебаний аналогично тому, как это сделано в работе [4] для случая чисто гармонических колебаний поля в резонаторе.

Система (7) с учетом равенств (8) дает нам возможность исследовать стационарные режимы колебаний и их устойчивость.

Сначала исследуем стационарные режимы взаимной синхронизации при условии, что запаздывание сил связи отсутствует ($\Delta' = 0$).

Для упрощения исследования будем предполагать, что генераторы идентичны, т. е. что $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $a_1 = a_2 = a$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $r_1 = r_2 = r$, $\omega_2/\omega_1 = \zeta = 1$. Тогда получаем $k_1 = 1$, $k_2 = -1$, $k'_1 = 1$, $k'_2 = -1$.

Стационарные режимы колебаний определяем из условий

$$da_1/d\tau = 0, \quad da_2/d\tau = 0,$$

которые дают нам систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{2v_1(1 + \gamma)} [BF_1(\Omega_1\tau_1) - v_1(\lambda + \tau)] &= 0, \\ \frac{-a_2}{2(1 - \gamma)} (\lambda - r) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Из системы (9) получаем два возможных стационарных режима:

- 1) $a_2 = 0$, $a_1 = 0$,
- 2) $a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$,

где a_1 определяется из уравнения

$$BF_1(\Omega_1\tau_1) - v_1(\lambda + r) = 0. \tag{10}$$

При малом рассеянии энергии легко убедиться, что первый стационарный режим неустойчив, а поэтому достаточно ограничиться исследованием второго стационарного режима, который в случае его устойчивости дает нам периодический режим взаимной синхронизации. Для определения этого режима мы должны решить уравнение (10). Это уравнение решаем графически (см. рис. 1), построив графики функций $n = F_1(\Omega_1\tau_1)$ (кривая а) и $u = v_1(\lambda + r)/B$ (прямая б). Для функций $F_1(z)$ и $\Omega_1(a)$ возьмем из [4] выражения

$$F_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}, \quad \Omega_1(a) = \sqrt{\xi^2 a^2 + \delta_1^2}.$$

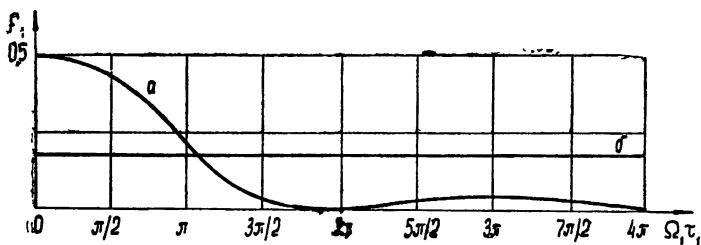


Рис. 1.

Тогда a_1 определится равенством

$$a_1^2 = \frac{\Omega_{10}^2 - \delta_1^2}{\xi^2}, \tag{11}$$

где $\Omega_{10}\tau_1$ — абсцисса точки M пересечения кривой а с прямой б. Из равенства (11) мы видим, что с увеличением расстройки частот δ_1 амплитуда a_1 уменьшается.

Как видно из рис. 1, при выполнении неравенств

$$0,023 < \frac{v_1(\lambda + r)}{B} < 0,5$$

существует один стационарный режим колебаний, а при выполнении неравенства

$$\frac{v_1(\lambda + r)}{B} < 0,023$$

— три или больше стационарных режимов. Чтобы выяснить, какой же из получающихся стационарных режимов существует фактически, мы должны исследовать устойчивость полученных режимов.

Проведенное исследование показывает, что устойчивые режимы лежат в областях $\Omega_1 \tau_1 \in [0,2\pi]$, $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ ($k = 2, 3, \dots$), а неустойчивые — в областях $\Omega_1 \tau_1 \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Следовательно, при наличии нескольких стационарных режимов устойчивые и неустойчивые режимы чередуются.

Рассмотрим теперь случай, когда в системе есть малое запаздывание сил связи ($\Delta' \neq 0$), и выясним его влияние на процессы взаимной синхронизации.

Предположим снова, что генераторы идентичны. Тогда для определения амплитуды ненулевого стационарного периодического режима синхронизации получаем уравнение

$$BF_1(\Omega_1 \tau_1) - v_1[\lambda + r - \Delta'(\alpha - \gamma v_1^2)] = 0, \quad (12)$$

которое снова решаем графически (рис. 1); кривая а определяется прежним уравнением, а прямая б — уравнением

$$u = \frac{v_1(\lambda + r)}{B} - \frac{v_1}{B} (\alpha - \gamma v_1^2) \Delta'.$$

Так как по предположению $\alpha - \gamma v_1^2 > 0$, то запаздывание сил связи приводит к тому, что прямая б опускается вниз. Поэтому точка М пересечения прямой б с кривой а отодвигается вправо и появляются новые точки пересечения. Следовательно, в соответствии с равенством (11) происходит расширение основной области синхронизации и, кроме того, появляются новые режимы синхронизации, которых при отсутствии запаздывания не существовало.

Исследуем теперь влияние запаздывания на процессы взаимной синхронизации в случае слабых связей ($a_j = \epsilon r_j \omega_j^2$, $\gamma_j = \epsilon s_j$ ($j = 1, 2$)). При этом пренебрежем рассеиванием энергии в линии связи (считая $\beta_j = 0$), не требуя, однако, малости запаздывания.

Производя, как и раньше, замену независимого переменного, приведем систему (1) к виду

$$\ddot{x}(\tau) + x(\tau) + \epsilon \lambda_1 \dot{x}(\tau) + \epsilon R_1[x(\tau)] + \epsilon r_1 y(\tau - \Delta') + \epsilon s_1 \ddot{y}(\tau - \Delta') = 0; \quad (13)$$

$$\ddot{y}(\tau) + \zeta^2 y(\tau) + \epsilon \lambda_2 \dot{y}(\tau) + \epsilon \zeta^2 R_2[y(\tau)] + \epsilon \zeta^2 r_2 x(\tau - \Delta') + \epsilon s_2 \ddot{x}(\tau - \Delta') = 0.$$

Положим $\zeta = \omega_2/\omega_1 \approx 1$ и применим к системе (13) асимптотический метод, указанный в работе [9]. Решение в первом приближении ищем в форме

$$\begin{aligned} x(\tau) &= a(\tau) \cos \theta_1(\tau), & \theta_1(\tau) &= \tau + \varphi_1(\tau), \\ y(\tau) &= b(\tau) \cos \theta_2(\tau), & \theta_2(\tau) &= \zeta \tau + \varphi_2(\tau), \end{aligned} \quad (14)$$

где $a(\tau)$, $b(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$, как и раньше, медленно меняющиеся функции времени, определяемые системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{2} A^{(1)}(a) - \frac{\varepsilon}{2} [\lambda_1 a + (\zeta^2 s_1 - r_1) b \sin(\eta + \zeta\Delta')]; \\ \frac{db}{d\tau} &= \frac{\varepsilon}{2} A^{(2)}(b) - \frac{\varepsilon}{2\zeta} [\zeta^2 \lambda_2 b - (s_2 - \zeta^2 r_2) a \sin(\eta - \Delta')]; \\ \frac{d\theta_1}{d\tau} &= 1 + \frac{\varepsilon}{2a} B^{(1)}(a) - \frac{\varepsilon(\zeta^2 s_1 - r_1)b}{2a} \cos(\eta + \zeta\Delta'); \\ \frac{d\theta_2}{d\tau} &= \zeta + \frac{\varepsilon}{2b} B^{(2)}(b) - \frac{\varepsilon(s_2 - \zeta^2 r_2)a}{2\zeta b} \cos(\eta - \Delta'). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \eta &= \eta(\tau) = \theta_1(\tau) - \theta_2(\tau); \\ A^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R_1(a \cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1 \simeq B_1 F_1(\Omega_1 \tau_1) a; \\ A^{(2)}(b) &= \frac{\zeta}{\pi} \int_0^{2\pi} R_2(b \cos \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_2 \simeq B_2 F_1(\Omega_2 \tau_2) b; \\ B^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R_1(a \cos \theta_1) \cos \theta_1 d\theta_1 \simeq B_1 \delta_1 \tau_1 F_2(\Omega_1 \tau_1) a; \\ B^{(2)}(b) &= \frac{\zeta}{\pi} \int_0^{2\pi} R_2(b \cos \theta_2) \cos \theta_2 d\theta_2 \simeq B_2 \delta_2 \tau_2 F_2(\Omega_2 \tau_2) b. \end{aligned}$$

Для отыскания стационарных периодических режимов взаимной синхронизации в системе (15) полагаем

$$da/d\tau = 0, \quad db/d\tau = 0, \quad d\eta/d\tau = d\theta_1/d\tau - d\theta_2/d\tau = 0.$$

Однако исследование стационарных режимов и особенно их устойчивости на основании системы (15) очень громоздкое. Поэтому мы, следуя Хохлову [4, 7], применим метод вторичного упрощения приближенных уравнений. Этот метод состоит в том, что при слабых связях амплитуды колебаний связанных генераторов представляются в виде $a = a_0 + a_1$, $b = b_0 + b_1$, где a_0 , b_0 — амплитуды стационарных колебаний при отсутствии связей, определяемые из уравнений

$$B_1 F_1(\Omega_{10} \tau_1) - \lambda_1 = 0, \quad B_2 F_1(\Omega_{20} \tau_2) - \lambda_2 = 0,$$

а a_1 , b_1 — малые поправки к амплитудам, обусловленные наличием связей между генераторами. Для отыскания a_1 , b_1 и разности фаз $\eta(\tau)$ получаем равенства

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\varepsilon C_1}{\gamma^2 a_0} \left\{ \frac{F_2(\Omega_{10} \tau_1)}{F'_1(\Omega_{10} \tau_1)} \Omega_{10}(1 + X_1) \sin[\eta(\tau) + \zeta\Delta'] + \delta_{10} \cos[\eta(\tau) + \zeta\Delta'] \right\}; \\ b_1 &= -\frac{\varepsilon C_2}{\gamma^2 b_0} \left\{ \frac{F_2(\Omega_{20} \tau_2)}{F'_1(\Omega_{20} \tau_2)} \Omega_{20}(1 + X_2) \sin[\eta(\tau) - \Delta'] - \delta_{20} \cos[\eta(\tau) - \Delta'] \right\}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \delta - \varepsilon M_0 \cos[\eta(\tau) - \eta_1] - \varepsilon^2 N_0 \sin[2\eta(\tau) - \eta_2] - \varepsilon^2 K_0, \quad (17)$$

где δ_{10} , δ_{20} — расстройки частот собственных колебаний несвязанных генераторов по отношению к частотам молекулярных пучков, δ — расстройка между частотами резонаторов,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\zeta^2 s_1 - r_1) b_0}{B_1 F_2(\Omega_{10}\tau_1) \tau_1 a_0}, \quad C_2 = \frac{(s_2 - \zeta^2 r_2) a_0}{\zeta B_2 F_2(\Omega_{20}\tau_2) \tau_2 b_0}, \\ X_1 &= \frac{F'_2(\Omega_{10}\tau_1)}{F_2(\Omega_{10}\tau_1)} \delta_{10}\tau_1, \quad X_2 = \frac{\zeta F'_2(\Omega_{20}\tau_2)}{F_2(\Omega_{20}\tau_2)} \delta_{20}\tau_2, \\ M_0^2 &= (C_1 - C_2)^2 + \left[C_1 \frac{F'_2(\Omega_{10}\tau_1)}{F'_1(\Omega_{10}\tau_1)} \delta_{10}\tau_1 + \zeta^2 C_2 \frac{F'_2(\Omega_{20}\tau_2)}{F'_1(\Omega_{20}\tau_2)} \delta_{20}\tau_2 \right]^2 + \\ &+ 2C_1 C_2 \left[1 - \zeta^2 \frac{F'_2(\Omega_{10}\tau_1) F'_2(\Omega_{20}\tau_2)}{F'_1(\Omega_{10}\tau_1) F'_1(\Omega_{20}\tau_2)} \delta_{10}\tau_1 \delta_{20}\tau_2 \right] [1 - \cos(2\Delta')] - \\ &- 2C_1 C_2 \left[\frac{F'_2(\Omega_{10}\tau_1)}{F'_1(\Omega_{10}\tau_1)} \delta_{10}\tau_1 + \zeta^2 \frac{F'_2(\Omega_{20}\tau_2)}{F'_1(\Omega_{20}\tau_2)} \delta_{20}\tau_2 \right] \sin(2\Delta'); \\ N_0^2 &= \frac{1}{4\gamma^4} \left\{ (C_1^2 + C_2^2) \left[\frac{C_1^2 F_2^2(\Omega_{10}\tau_1)}{a_0^4 F_1^2(\Omega_{10}\tau_1)} \Omega_{10}^2 (1 + X_1)^2 + \frac{C_2^2 F_2^2(\Omega_{20}\tau_2)}{b_0^4 F_1^2(\Omega_{20}\tau_2)} \Omega_{20}^2 (1 + X_2)^2 \right] + \right. \\ &+ \frac{4C_1^2 C_2^2 F_2(\Omega_{10}\tau_1) F_2(\Omega_{20}\tau_2)}{a_0^2 b_0^2 F'_1(\Omega_{10}\tau_1) F'_1(\Omega_{20}\tau_2)} \Omega_{10} \Omega_{20} (1 + X_1) (1 + X_2) \cos^2(2\Delta') + \\ &+ 2C_1 C_2 \left[\frac{(C_1^2 + C_2^2) F_2(\Omega_{10}\tau_1) F_2(\Omega_{20}\tau_2)}{a_0^2 b_0^2 F'_1(\Omega_{10}\tau_1) F'_1(\Omega_{20}\tau_2)} \Omega_{10} \Omega_{20} (1 + X_1) (1 + X_2) + \right. \\ &\left. \left. + \frac{C_1^2 F_2^2(\Omega_{10}\tau_1)}{a_0^4 F_1^2(\Omega_{10}\tau_1)} \Omega_{10}^2 (1 + X_1)^2 + \frac{C_2^2 F_2^2(\Omega_{20}\tau_2)}{b_0^4 F_1^2(\Omega_{20}\tau_2)} \Omega_{20}^2 (1 + X_2)^2 \right] \cos(2\Delta'). \right\} \end{aligned}$$

Стационарные периодические режимы синхронизованных колебаний получим, положив в (16), (17) $\eta = \text{const}$. Устойчивость стационарных режимов, как показано в [7], можно исследовать приближенно по одному фазовому уравнению (17). Условие устойчивости получается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [\varepsilon M_0 \cos(\eta - \eta_1) + \varepsilon^2 N_0 \sin(2\eta - \eta_2)] > 0. \quad (18)$$

Будем рассматривать генераторы, мощности которых приблизительно одинаковы. Как показано в [7], следует различать два случая: случай значительных расстроек частот генераторов по отношению к частотам молекулярных пучков ($\delta_{10}\tau_1 \sim 1$, $\delta_{20}\tau_2 \sim 1$) и случай малых расстроек ($\delta_{10}\tau_1 \sim \varepsilon$, $\delta_{20}\tau_2 \sim \varepsilon$). В первом случае величина M_0 сравнима с единицей, и членами порядка ε^2 в (17), (18) можно пренебречь. Тогда зависимость между разностью фаз η и расстройкой частот резонаторов δ изобразится кривой, показанной на рис. 2. Из этого рисунка мы видим, что устойчивые режимы синхронизации соответствуют точкам дуги AB . Ширина области синхронизации $2\varepsilon M_0$. В этой области каждому значе-

нию расстройки частот соответствует один определенный режим синхронизации.

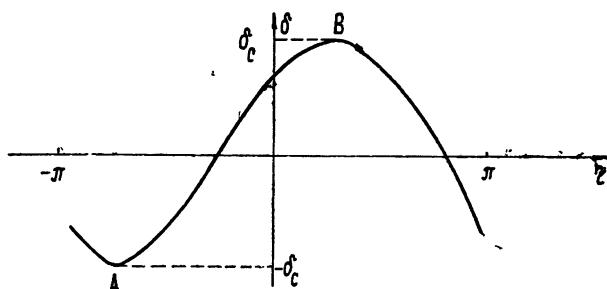


Рис. 2.

Посмотрим теперь, как влияет на этот режим запаздывание сил связи. Из выражения для M_0 мы видим, что при увеличении Δ' от 0 до $\pi/4$ величина M_0 уменьшается, следовательно, уменьшается и область синхронизации. Характер синхронизации при этом не меняется. При дальнейшем увеличении запаздывания его влияние уменьшается.

Во втором случае величина M_0 будет порядка ε и поэтому членами с ε^2 пренебрегать нельзя. Уравнение для определения стационарных режимов в этом случае имеет вид

$$\delta = \varepsilon M_0 \cos(\eta - \eta_1) + \varepsilon^2 N_0 \sin(2\eta - \eta_2) + \varepsilon^2 K_0. \quad (19)$$

Здесь необходимо снова различать два случая: 1) $M_0 > 2\varepsilon N_0$ и 2) $M_0 < 2\varepsilon N_0$. В первом случае картина синхронизации будет такой же, как и раньше, лишь область синхронизации значительно меньше. Совсем иная картина в случае $M_0 < 2\varepsilon N_0$. В этом случае зависимость между δ и η имеет вид, показанный на рис. 3. Здесь существует уже не одна, а две области стационарных режимов, которым соответствуют точки дуг AB и CD . Соответствующие области расстроек частот $[\delta_{1c}, \delta_{2c}]$ и $[\delta_{3c}, \delta_{4c}]$ налагаются друг на друга, образуя одну общую область синхронизации. Но в части этой области, являющейся пересечением двух указанных выше областей, возможны два устойчивых стационарных режима синхронизации, и генераторы могут перескакивать с одного режима колебаний на другой.

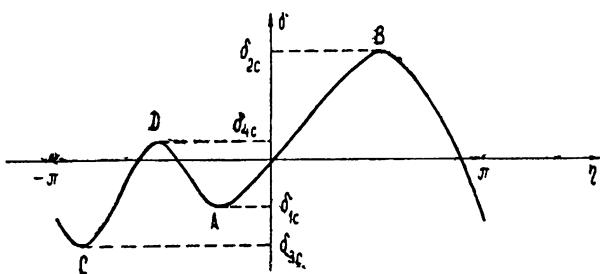


Рис. 3.

Посмотрим теперь, какое влияние окажет в этом случае запаздывание сил связи. Из выражений для M_0 и N_0 видно, что при малых запаздываниях ($\Delta' < \pi/4$) M_0 и N_0 уменьшаются, причем M_0 убывает значительно быстрее, чем N_0 . Следовательно, как и раньше, происходит умень-

шение области синхронизации. Кроме того, первый случай может перейти во второй, т. е. вместо одного режима синхронизации может появиться два.

Таким образом, при слабых связях запаздывание до 1/8 периода колебаний ухудшает процессы взаимной синхронизации: уменьшает область синхронизации, а в некоторых случаях приводит к появлению вместо одного двух устойчивых режимов синхронизации и к возможному переходу генераторов от одного режима колебаний к другому.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 27, 431 (1954).
2. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, УФН, 57, 485 (1955).
3. Н. Г. Басов, Радиотехника и электроника, 1, 752 (1956).
4. Ю. Л. Климонтович, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 32, 1150 (1957).
5. Г. П. Любимов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 33, 1396 (1957).
6. В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 945 (1957).
7. Н. К. Манешин, Р. В. Хохлов, Научн. докл. высш. школы — Радиотехника и электроника, № 3, 74 (1958).
8. Б. А. Альтшуль, В. П. Рубаник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 137 (1963).
9. В. П. Рубаник, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклон. аргументом, 2, 183 (1963).

Черновицкий государственный университет

Поступила в редакцию
9 ноября 1962 г., после объединения 19 февраля 1965 г.

ON MUTUAL SYNCHRONIZATION OF MOLECULAR GENERATORS

Yu. I. Marchenko, V. P. Roubanik

The mutual synchronization of molecular generators has been investigated in the case of strong couples without delay. The effect of a small delay of coupling forces has also been studied on the processes of mutual synchronization both in the case of strong and weak couples.

УДК 621.378.33

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПУЧКА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ РЕЗОНАТОРА.

III. УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ

B. B. Цареградский

С помощью разложения поляризации молекулярного пучка по полю [1] получено характеристическое уравнение молекулярного генератора и найдено его решение для любого типа колебаний в резонаторе. В качестве примера исследована устойчивость двух автоколебательных режимов в молекулярном генераторе с синусоидальным распределением поля по оси движения пучка. Показано, что переходы между циклами носят гистерезисный характер.

1. В предыдущей статье [1] рассматривался стационарный режим молекулярного генератора с неоднородным полем. Полученные в [1] формулы позволяют рассчитать характеристики молекулярного генератора для любого типа колебаний резонатора. В качестве примера применения развитой теории в [1] анализировался генератор с синусоидальным распределением поля вдоль оси движения пучка молекул. Проведенный анализ показал, что при определенных значениях расстройки резонатора U и параметра возбуждения $\chi\eta$ возможны два автоколебательных режима. Переход одного режима в другой совершается при некотором значении расстройки $U = U^*$, зависящем от $\chi\eta$. Чтобы определить тип перехода (гистерезисный или безгистерезисный), необходимо найти U^* . Однако это можно сделать лишь после выяснения устойчивости стационарных режимов.

В настоящей заметке рассматривается устойчивость молекулярного генератора с произвольным неоднородным полем. На основе разложения поляризации по полю [1] найдено характеристическое уравнение и исследуется его решение. В качестве примера рассмотрен молекулярный генератор с синусоидальным распределением поля по пучку. Выполненный численный расчет корней характеристического уравнения позволил установить наличие гистерезисного перехода между автоколебательными циклами в генераторе.

2. Перейдем к выводу уравнений, определяющих устойчивость молекулярного генератора с неоднородным полем.

Представим поле в резонаторе в виде [1]

$$E(r, t) = A_s(t) E_s(z) = \frac{\sqrt{\mu_3}}{\beta\tau_0} a_s(t) E_s(z) = \frac{\sqrt{\mu_3}}{\beta\tau_0} a_0(t_1) \cos [\omega_r^* t_1 + \vartheta(t_1)] E_s(z). \quad (1)$$

С точностью до высших гармоник поляризация молекул равна [1]

$$P(x, t_1) = \frac{1}{4\pi Q_s} \frac{\sqrt{\mu_3}}{\beta \tau_0} p(x, t_1) = \frac{1}{4\pi Q_s} \frac{\sqrt{\mu_3}}{\beta \tau_0} \{ p_1(x, t_1) \cos [\omega_r^* t_1 + \vartheta(t_1)] + \\ + p_2(x, t_1) \sin [\omega_r^* t_1 + \vartheta(t_1)] \}. \quad (2)$$

Здесь и всюду в дальнейшем будем придерживаться обозначений, принятых в [1]. Уравнения, связывающие величины $p_1(x, t_1)$, $p_2(x, t_1)$, $a_0(t_1)$ и $\vartheta(t_1)$, можно получить из уравнений Максвелла и уравнения Шредингера. Первые после ряда преобразований приводятся к виду [1]

$$\frac{d}{dt_1} a_0(t_1) = -\mu_1 \{ a_0(t_1) + \chi \int_0^1 p_2(x, t_1) E_s(x) dx \}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt_1} \vartheta(t_1) = \mu_1 \left\{ U - \frac{\chi}{a_0(t_1)} \int_0^1 p_1(x, t_1) E_s(x) dx \right\},$$

второе дает

$$p_1(x, t_1) = -2\eta \int_0^x a_0 \left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2} \right) E_s(x_1) \sin \left(\frac{x-x_1}{\mu_2} \right) \times \\ \times \cos \left[\frac{\omega_r^*}{\mu_2} (x-x_1) + \vartheta(t_1) - \vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2} \right) \right] dx_1 + \\ + 2\mu_3 \eta \int_0^x a_0 \left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2} \right) E_s(x_1) \sin \left(\frac{x-x_1}{\mu_2} \right) dx_1 \int_0^{x_1} a_0 \left(t_1 - \frac{x-x_2}{\mu_2} \right) E_s(x_2) dx_2 \int_{x_2}^{x_1} a_0 \left(t_1 - \frac{x-x_3}{\mu_2} \right) E_s(x_3) \cos \left(\frac{x_2-x_3}{\mu_2} \right) \times \\ \times \left\{ \cos \left[\vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2} \right) + \vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_2}{\mu_2} \right) - \vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_3}{\mu_2} \right) - \vartheta(t_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\omega_r^*}{\mu_2} (x-x_1-x_2+x_3) \right] + \cos \left[\vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_2}{\mu_2} \right) + \vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_3}{\mu_2} \right) - \right. \\ \left. \left. - \vartheta(t_1) - \vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2} \right) - \frac{\omega_r^*}{\mu_2} (x-x_2-x_3+x_1) \right] + \right. \\ \left. + \cos \left[\vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2} \right) + \vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_3}{\mu_2} \right) - \vartheta \left(t_1 - \frac{x-x_2}{\mu_2} \right) - \vartheta(t_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\omega_r^*}{\mu_2} (x-x_1-x_3+x_2) \right] \right\} dx_3; \quad (4)$$

$$p_2(x, t_1) = -2\eta \int_0^x a_0 \left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2} \right) E_s(x_1) \sin \left(\frac{x-x_1}{\mu_2} \right) \sin \left[\frac{\omega_r^*}{\mu_2} (x-x_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \vartheta(t_1) - \vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2}\right) \Big] dx_1 - 2\mu_3\eta \int_0^x a_0\left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2}\right) E_s(x_1) \times \\
& \times \sin\left(\frac{x-x_1}{\mu_2}\right) dx_1 \int_0^{x_1} a_0\left(t_1 - \frac{x-x_2}{\mu_2}\right) E_s(x_2) dx_2 \times \\
& \times \int_{x_2}^{x_1} a_0\left(t_1 - \frac{x-x_3}{\mu_2}\right) E_s(x_3) \cos\left(\frac{x_2-x_3}{\mu_2}\right) \left\{ \sin\left[\vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2}\right)\right] + \right. \\
& + \vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_2}{\mu_2}\right) - \vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_3}{\mu_2}\right) - \vartheta(t_1) - \frac{\omega_r^*}{\mu_2}(x - x_1 - x_2 + x_3) \Big] + \\
& + \sin\left[\vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_2}{\mu_2}\right) + \vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_3}{\mu_2}\right) - \vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2}\right) - \right. \\
& - \vartheta(t_1) - \frac{\omega_r^*}{\mu_2}(x - x_2 - x_3 + x_1) \Big] + \sin\left[\vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2}\right) + \vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_3}{\mu_2}\right) - \right. \\
& \left. \left. - \vartheta\left(t_1 - \frac{x-x_2}{\mu_2}\right) - \vartheta(t_1) - \frac{\omega_r^*}{\mu_2}(x - x_1 - x_3 + x_2)\right] \right\} dx_3. \quad (5)
\end{aligned}$$

В этих уравнениях $U = 2Q_s(\omega_s - \omega_{21})/\omega_{21}$ — относительная расстройка частоты резонатора; $\chi\eta = 4\pi Q_s d^2 D_0 \tau_0 \chi / \hbar$ — параметр возбуждения; $\chi = V_n/N_s$ — фактор заполнения резонатора молекулами с объемом V_n ; N_s — нормировка рабочей моды; $x = z/L$ — безразмерная координата вдоль движения пучка; $\mu_1 = 1/2Q_s$ — малый параметр, связанный с затуханием в резонаторе; τ_0 — время пребывания молекул в поле; $\mu_2 = 1/Q_d = 1/\omega_{21}$, τ_0 — малый параметр, связанный с добротностью молекулярной системы ($\mu_2 \ll \mu_1 \ll \mu_3$); D_0 — плотность активных молекул на входе резонатора.

По поводу (4), (5) сделаем следующее замечание. При выводе этих выражений мы считали амплитуду поля генерации малой (или, что то же самое, $\mu_3 \ll 1$) и отбросили все члены разложения, содержащие поле в пятой и более высоких степенях. На самом деле (4), (5) достаточно хорошо аппроксимирует поляризацию и в случае, когда $\mu_3(a_0)^2$ не мало (например, в [1] $\mu_3 a_0^2 \sim 5$). Как показывают оценки, это связано с быстрым убыванием n -го члена в разложении (4), (5) (см. также формулу (8) в [1]) при увеличении числа n .

Уравнения (3) совместно с (4) и (5) описывают нестационарные процессы в молекулярном генераторе. Пользуясь ими, выведем характеристическое уравнение. Для этого положим

$$\begin{aligned}
a_0(t_1) &= a_0^c + \Delta a_0(t_1); \quad \vartheta(t_1) = \vartheta^c + \Delta\vartheta(t_1); \\
p_1(x, t_1) &= p_1^c(x) + \Delta p_1(x, t_1); \quad (6) \\
p_2(x, t_1) &= p_2^c(x) + \Delta p_2(x, t_1),
\end{aligned}$$

где a_0^c , ϑ^c , p_1^c , p_2^c — амплитуда, фаза и обе части поляризации в стационарном режиме колебаний, а величины Δa_0 , $\Delta\vartheta$, $\Delta p_1(x, t_1)$ и $\Delta p_2(x, t_1)$ — малые отклонения от соответствующих стационарных значений.

Будем искать $\Delta a_0(t_1)$ и $\Delta \vartheta(t_1)$ в виде

$$\Delta a_0(t_1) = A e^{\lambda t_1}, \quad \Delta \vartheta(t_1) = B e^{\lambda t_1} \quad (7)$$

и подставим (7) в (6), а (6) в (4), (5). Принимая во внимание (3), после ряда громоздких преобразований получим характеристическое уравнение

$$\left\{ 2[\gamma(0; \alpha) - \gamma(\lambda; \alpha)] + \frac{\lambda}{\chi \eta \mu_1} + \mu_3(a_0^c)^2 [3F_4(\lambda; \alpha) - F_4(0; \alpha)] \right\} \left\{ 2[\gamma(0; \alpha) - \gamma(\lambda; \alpha)] + \frac{\lambda}{\chi \eta \mu_1} + \mu_3(a_0^c)^2 [3F_4(\lambda; \alpha) - F_4(0; \alpha) - 2F_5(\lambda; \alpha)] \right\} + \left\{ 2[\beta(\lambda; \alpha) - \beta(0; \alpha)] + \mu_3(a_0^c)^2 \left[-\frac{3}{2}F_3(\lambda; \alpha) + \frac{1}{2}F_3(0; \alpha) + F_6(\lambda; \alpha) \right] \right\} \left\{ 2[\beta(\lambda; \alpha) - \beta(0; \alpha)] + \mu_3(a_0^c)^2 \left[-\frac{3}{2}F_3(\lambda; \alpha) + \frac{1}{2}F_3(0; \alpha) \right] \right\} = 0. \quad (8)$$

Здесь обозначено*

$$\alpha = \frac{\omega_r^* - 1}{\mu_2};$$

$$\begin{aligned} \beta(\lambda; \alpha) &= \int_0^1 E_s(x) dx \int_0^x e^{-\lambda(x-x_1)/\mu_2} E_s(x_1) \sin\left(\frac{x-x_1}{\mu_2}\right) \cos\left[\omega_r^*\left(\frac{x-x_1}{\mu_2}\right)\right] dx_1; \\ \gamma(\lambda; \alpha) &= \int_0^1 E_s(x) dx \int_0^x e^{-\lambda(x-x_1)/\mu_2} E_s(x_1) \sin\left(\frac{x-x_1}{\mu_2}\right) \sin\left[\omega_r^*\left(\frac{x-x_1}{\mu_2}\right)\right] dx_1; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} F_3(\lambda; \alpha) &= -\frac{1}{3} \int_0^1 E_s(x) dx \int_0^x E_s(x_1) dx_1 \int_0^{x_1} E_s(x_2) dx_2 \times \\ &\times \int_{x_2}^{x_1} E_s(x_3) dx_3 \{e^{-\lambda(x-x_1)/\mu_2} + e^{-\lambda(x-x_2)/\mu_2} + e^{-\lambda(x-x_3)/\mu_2}\} \times \end{aligned}$$

$$\times \{\sin[\alpha(x - x_1 - x_2 + x_3)] + \sin[\alpha(x - x_1 + x_2 - x_3)]\};$$

$$\begin{aligned} F_4(\lambda; \alpha) &= \frac{1}{6} \int_0^1 dx \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_{x_2}^{x_1} dx_3 E_s(x) E_s(x_1) E_s(x_2) E_s(x_3) \times \\ &\times [e^{-\lambda(x-x_1)/\mu_2} + e^{-\lambda(x-x_2)/\mu_2} + e^{-\lambda(x-x_3)/\mu_2}] \{ \cos[\alpha(x - x_1 - x_2 + x_3)] + \\ &+ \cos[\alpha(x - x_1 + x_2 - x_3)] \}; \end{aligned}$$

* В статье [1] обозначено $F_1(\alpha) \equiv -4\beta(0; \alpha)$, $F_2(\alpha) \equiv 2\gamma(0; \alpha)$, $F_3(\alpha) \equiv F_3(0; \alpha)$, $F_4(\alpha) \equiv F_4(0; \alpha)$.

$$\begin{aligned}
 F_5(\lambda; \alpha) &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_{x_2}^{x_1} dx_3 E_s(x) E_s(x_1) E_s(x_2) E_s(x_3) \times \\
 &\times \{ e^{-\lambda(x-x_3)/\mu_3} \cos[\alpha(x-x_1-x_2+x_3)] + e^{-\lambda(x-x_2)/\mu_3} \cos[\alpha(x-x_1+x_2-x_3)] \}; \\
 F_6(\lambda; \alpha) &= - \int_0^1 dx \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_{x_2}^{x_1} dx_3 E_s(x) E_s(x_1) E_s(x_2) E_s(x_3) \times \\
 &\times \{ e^{-\lambda(x-x_3)/\mu_3} \sin[\alpha(x-x_1-x_2+x_3)] + e^{-\lambda(x-x_2)/\mu_3} \sin[\alpha(x-x_1+x_2-x_3)] \}.
 \end{aligned} \tag{9a}$$

3. С помощью найденного уравнения исследуем устойчивость стационарных режимов. Рассмотрение проведем сначала в предположении о малости стационарных амплитуд $\mu_3(a_0^c)^2$. В этом случае членами с $\mu_3(a_0^c)^2$ и $\mu_3^2(a_0^c)^4$ можно пренебречь и характеристическое уравнение примет вид

$$\left[\gamma(0; \alpha) - \gamma(\lambda; \alpha) + \frac{\lambda}{2\chi\eta\mu_1} \right]^2 + [\beta(\lambda; \alpha) - \beta(0; \alpha)]^2 = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет двухкратный корень $\lambda = 0$. Остальные корни в общем случае комплексные; поэтому их целесообразно представить в виде

$$\lambda = \lambda_1 + i\omega. \tag{11}$$

Используя замену (11), можно показать, что корни (10) совпадают с корнями следующих двух взаимно исключающих систем уравнений (различающихся знаком ω):

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_1}{\mu_1} + 2\chi\eta \left[\gamma(0; \alpha) - \gamma \left(\lambda_1; \alpha \pm \frac{\omega}{\mu_2} \right) \right] &= 0; \\
 \pm \frac{\omega}{\mu_1} - 2\chi\eta \left[\beta(0; \alpha) - \beta \left(\lambda_1; \alpha \pm \frac{\omega}{\mu_2} \right) \right] &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Каждая из этих систем, как видно из (9), не содержит корней λ порядка μ_1 с положительной действительной частью. Из общих физических соображений следует также, что в молекулярном генераторе не могут существовать процессы со скоростью протекания λ , превышающей порядок μ_1 .

Пренебрежем в (12) членами λ_1/μ_1 и ω/μ_1 . Для корней, имеющих порядок μ_2 , возможность пренебрежения очевидна; корни же порядка μ_1 с отрицательными λ_1 удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\lambda_1}{\mu_1} \right| &\ll 2\chi\eta \left| \gamma \left(\lambda_1; \alpha \pm \frac{\omega}{\mu_2} \right) \right|; \\
 \left| \frac{\omega}{\mu_1} \right| &\ll 2\chi\eta \left| \beta \left(\lambda_1; \alpha \pm \frac{\omega}{\mu_2} \right) \right|.
 \end{aligned}$$

Заметим, что λ_1/μ_1 и ω/μ_1 обязаны своим происхождением левой части (3).

Рассмотрим далее комплексную плоскость корней $\lambda_1, i\omega$ и определим точки на оси $i\omega$, через которые проходят корни из левой полупло-

скости в правую, при соответствующем изменении параметров $\chi\eta$ и U . Для этого положим в (12) $\lambda_1 = 0$ и учтем сделанное выше замечание; в результате будем иметь

$$\begin{aligned}\gamma\left(0; \alpha \pm \frac{\omega}{\mu_2}\right) &= \gamma(0; \alpha); \\ \beta\left(0; \alpha \pm \frac{\omega}{\mu_2}\right) &= \beta(0; \alpha).\end{aligned}\quad (13)$$

Корни (13) находятся следующим образом. Предположим, что при заданных U и $\chi\eta$ существует несколько стационарных решений (3)–(5) [1] $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$ с одинаковыми амплитудами и мы исследуем какое-либо из них, например, то, которое характеризуется частотой α . Тогда совокупность значений $\omega_k/\mu_2 = \pm(\alpha_k - \alpha)$ является совокупностью всех решений системы (13) для данной частоты α . Каждая такая совокупность $\{\omega_k/\mu_2\}$ существенным образом зависит от распределения поля $E_s(x)$. Нетрудно видеть, однако, что для любого $E_s(x)$ существует двухкратный корень (13) $\omega = 0$ и нет корней, переход которых слева направо (и наоборот) происходит через бесконечность.

Укажем еще на режимы α , которые удовлетворяют соотношению*

$$-\frac{U}{\chi\eta} = \beta(0; \alpha), \quad (14)$$

где $U = 0$. Для них в совокупности $\{\omega_k/\mu_2\}$ содержатся сопряженные точки

$$\pm \omega/\mu_2 = -2\alpha. \quad (15)$$

Это утверждение вытекает из четности $\gamma(0; \alpha)$ и $\beta(0; \alpha)$ по аргументу α и соотношений (13).

Наша дальнейшая задача — определить корни (12) вблизи оси ω . Простое рассуждение показывает, что корни с малой действительной частью $\lambda_1 \sim \mu_3(a_0^c)^2$ могут располагаться только в окрестности точек $\{\omega_k/\mu_2\}$ радиуса $r \sim \mu_3(a_0^c)^2$. Физический интерес в данной задаче представляют именно эти корни, так как учет членов $\sim \mu_3(a_0^c)^2$ в характеристическом уравнении приводит к смещению корней на величину того же порядка и может явиться причиной их перехода с левой полуплоскости на правую.

Учет членов $\sim \mu_3(a_0^c)^2$ для корней, расположенных на расстоянии $r \gg \mu_3(a_0^c)^2$ от оси ω , не существенен**. Будем искать корни (12) вблизи значений $\{\omega_k/\mu_2\}$ в виде

$$\begin{aligned}\lambda^{(k)} &= \lambda_1^{(k)} + i\omega^{(k)} = \lambda_1^{(k)} + i[\omega_k \pm \Delta\omega^{(k)}]; \\ \omega_k &= \pm(\alpha_k - \alpha)\mu_2,\end{aligned}\quad (16)$$

где $\lambda_1^{(k)}/\mu_2 \ll 1$; $\Delta\omega^{(k)}/\mu_2 \ll 1$. Подставим (16) в (12) и разложим полученные выражения в ряд по $\lambda_1^{(k)}/\mu_2$ и $\Delta\omega^{(k)}/\mu_2$. Ограничевшись членами до второго порядка малости включительно, перепишем (12) следующим образом:

* В [1] показано, что при перекрытиях порога самовозбуждения по параметру $\chi\eta$, не превышающих $1,5 + 2$ раза, стационарное значение частоты α находится из уравнения (14).

** У уравнений (12) возможны корни, которые даже при учете членов $\mu_3(a_0^c)^2$ не пересекают ось ω . Имея в виду лишь реализуемые на практике стационарные режимы, будем предполагать отсутствие подобных корней в правой полуплоскости.

$$[\gamma_1(\alpha_k) + i\beta_1(\alpha_k)] \frac{\lambda_2^{(k)}}{\mu_2} + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \beta_1(\alpha_k) - i \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \gamma_1(\alpha_k) \right] \left(\frac{\lambda_2^{(k)}}{\sqrt{2} \mu_2} \right)^2 = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(k)} &= \lambda_1^{(k)} \pm i\Delta\omega^{(k)}; \\ \gamma_1(\lambda_1; \alpha) &= \frac{\partial}{\partial(\lambda_1/\mu_2)} \gamma(\lambda_1; \alpha); \quad \beta_1(\lambda_1; \alpha) = \frac{\partial}{\partial(\lambda_1/\mu_2)} \beta(\lambda_1; \alpha); \\ \gamma_1(\alpha_k) &\equiv \gamma_1(0; \alpha_k); \quad \beta_1(\alpha_k) \equiv \beta_1(0; \alpha_k). \end{aligned} \quad (18)$$

Решая (17), найдем нетривиальные корни

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1^{(k)}}{\mu_2} &= - \frac{2 \left[\gamma_1(\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \beta_1(\alpha_k) - \beta_1(\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \gamma_1(\alpha_k) \right]}{\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \beta_1(\alpha_k) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \gamma_1(\alpha_k) \right]^2 \right\}}; \\ \frac{\Delta\omega^{(k)}}{\mu_2} &= - \frac{2 \left[\gamma_1(\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \gamma_1(\alpha_k) + \beta_1(\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \beta_1(\alpha_k) \right]}{\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \beta_1(\alpha_k) \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \gamma_1(\alpha_k) \right]^2 \right\}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Нулевой корень (17) соответствует совокупности решений $\{\omega_k/\mu_2\}$.

Левая часть (19) должна быть по условию порядка $\mu_3(a_0^c)^2$. Поэтому с точностью до $\mu_3(a_0^c)^2$ имеем

$$\begin{aligned} \gamma_1(\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \beta_1(\alpha_k) &\simeq \beta_1(\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \gamma_1(\alpha_k); \\ \gamma_1(\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \gamma_1(\alpha_k) &\simeq -\beta_1(\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \beta_1(\alpha_k), \end{aligned}$$

что эквивалентно равенству*

$$\gamma_1(\alpha_k) \simeq \beta_1(\alpha_k) \simeq 0. \quad (20)$$

Выполнение (20) указывает на существование у режима α корня в окрестности определенной точки из совокупности $\{\omega_k/\mu_2\}$. Этот корень вычисляется по формулам (19).

Учтем теперь члены (8) порядка $\mu_3(a_0^c)^2$, считая их малыми**, и найдем поправки к рассмотренным корням.

Двухкратно вырожденный корень (12) $\lambda = 0$ расщепляется на два корня:

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu_3(a_0^c)^2 \lambda^{(1)} + \mu_3^2(a_0^c)^4 \lambda^{(2)} + \dots; \\ \lambda &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

* Равенство $0 \simeq \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \gamma_1(\alpha_k) \simeq \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \beta_1(\alpha_k)$ не может служить решением; в противном случае соотношения (19) не имеют места.

** Требование малости $\mu_3(a_0^c)^2 \ll 1$ является здесь просто удобным математическим приемом. На самом деле $\mu_3(a_0^c)^2$ может быть и не малым и тем не менее все выводы остаются в силе. Это достигается малостью сомножителя при $\mu_3(a_0^c)^2$. См. также замечание на стр. 690.

Нулевой корень не представляет физического интереса. Его происхождение связано, как нетрудно видеть, с произволом в выборе начала отсчета фазы колебания ϑ .

Ограничимся первой поправкой и вычислим корень (21). С этой целью подставим (21) в (8). Имея в виду лишь члены порядка $\mu_3(a_0^c)^2$, перепишем уравнение (8) в форме

$$[\gamma(\lambda; \alpha) - \gamma(0; \alpha)]^2 - \mu_3(a_0^c)^2 F_4(0; \alpha)[\gamma(\lambda; \alpha) - \gamma(0; \alpha)] + [\beta(\lambda; \alpha) - \beta(0; \alpha)]^2 - \mu_3(a_0^c)^2 \frac{1}{2} F_3(0; \alpha)[\beta(\lambda; \alpha) - \beta(0; \alpha)] = 0. \quad (22)$$

Вывод (22) предполагает замену λ выражением (21) с последующим разложением γ и β в ряд, в котором удерживаются члены не выше первого порядка по $\mu_3(a_0^c)^2$. Проделав указанные операции, определим искомый корень (21):

$$\lambda = \frac{\mu_2 \mu_3 (a_0^c)^2 [F_3(0; \alpha) \beta_1(\alpha) + 2\gamma_1(\alpha) F_4(0; \alpha)]}{2[\beta_1^2(\alpha) + \gamma_1^2(\alpha)]}. \quad (23)$$

Поправки $\Delta\lambda^{(k)} \sim \mu_3(a_0^c)^2$ к остальным корням $\{\omega_k/\mu_2\}$ (13) находятся аналогичным путем. Опустив промежуточные преобразования, выпишем конечный результат:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda^{(k)} = & \mu_2 \mu_3 (a_0^c)^2 \{ [\beta(0; \alpha) - \beta(i\omega_k; \alpha)] [3F_3(i\omega_k; \alpha) - \\ & - F_3(0; \alpha) - F_6(i\omega_k; \alpha)] + [\gamma(0; \alpha) - \gamma(i\omega_k; \alpha)] [6F_4(i\omega_k; \alpha) - \\ & - 2F_4(0; \alpha) - 2F_5(i\omega_k; \alpha)] \} 4^{-1} \{ [\beta(0; \alpha) - \beta(i\omega_k; \alpha)] \beta_1(i\omega_k; \alpha) + \\ & + [\gamma(0; \alpha) - \gamma(i\omega_k; \alpha)] \gamma_1(i\omega_k; \alpha) \}^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Выражение (24) применимо и для корней (16). В этом случае, однако, необходимо заменить в (24) $i\omega_k$ на выражение (16) и использовать (19).

Резюмируем сказанное. Исследование устойчивости стационарного режима с частотой α и амплитудой a_0^c проводится в два приема. Сначала определяются корни нулевого приближения (16). На плоскости параметров $\{\chi; \eta; U\}$ по ним можно построить границу, отделяющую состояние покоя от возможных стационарных режимов. Второй шаг заключается в вычислении поправок (23), (24). Пользуясь им, определяем остальную часть границы и, тем самым, устойчивость стационарных режимов при конечных амплитудах.

4. В качестве примера рассмотрим устойчивость колебаний молекулярного генератора с синусоидальным распределением поля:

$$E_s(x) = \sin(2\pi x). \quad (25)$$

Для удобства рассуждений воспроизведем рис. 1 [1] и напомним основные результаты [1], относящиеся к случаю (25).

На рис. 1 представлены кривые $F_1(\alpha_1) \equiv -4\beta(0; \alpha_1)$ и $F_2(\alpha_1) \equiv 2\gamma(0; \alpha_1)$, где $\alpha_1 = \alpha/2\pi$. Проекция точки пересечения Q кривой F_1 с прямой $2U/\chi\eta$ на ось α_1 определяет частоту стационарных колебаний. Амплитуда этих колебаний на частоте α_1 пропорциональна разности

$F_2(\alpha_1) = 1/\chi\eta$ и отлична от нуля при условии $F_2(\alpha_1) > 1/\chi\eta$. Как видно из рис. 1, генератор с синусоидальным распределением поля (25) имеет два стационарных режима. Для одного из них частота колебаний

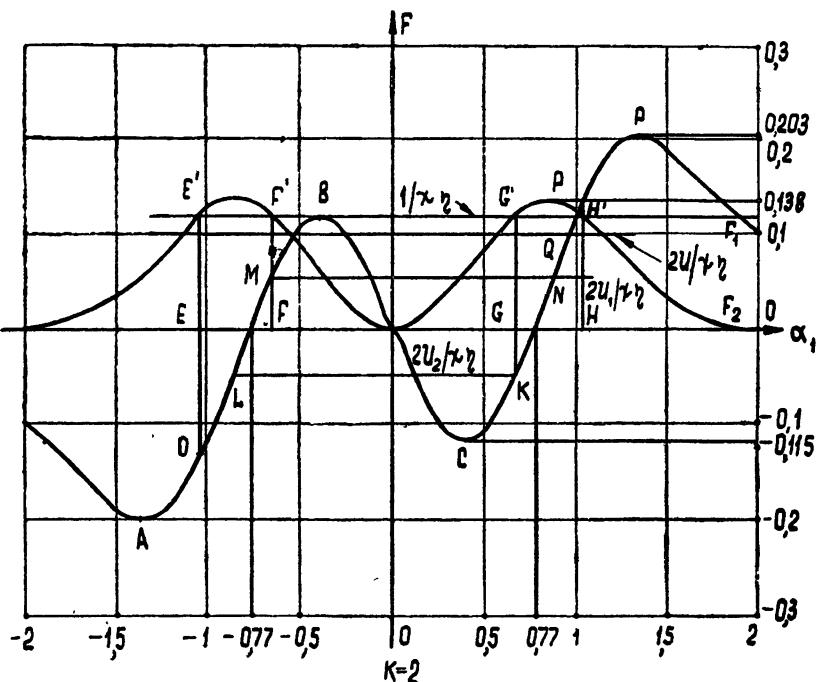


Рис. 1.

при заданном $\chi\eta$ лежит в интервале GH , для другого — в EF . Если расстройка U попадает в интервал $U_2 \ll U \ll U_1$, то условие самовозбуждения выполнено сразу для обоих режимов; чтобы указать, какой из режимов реализуется, необходимо рассмотреть устойчивость каждого из них.

Большую часть анализа устойчивости можно провести графически. По этой причине мы не будем выписывать здесь результаты вычислений функций $\gamma_1(\alpha_1)$, $\beta_1(\alpha_1)$, $F_3(\alpha_1) \equiv F_3(0; \alpha_1)$ и $F_4(\alpha_1) \equiv F_4(0; \alpha_1)$, а ограничимся лишь видом этих функций, представленных на рис. 2, 3, и указанием на их свойства:

$$\beta_1(\alpha_1) = -\beta_1(-\alpha_1); \quad F_3(\alpha_1) = -F_3(-\alpha_1);$$

$$\gamma(\alpha_1) = \gamma_1(-\alpha_1); \quad F_4(\alpha_1) = F_4(-\alpha_1).$$

Пользуясь рис. 2, заключаем, что в окрестности $\{\omega_k/\mu_2\}$ нет корней (16), кроме совпадающих с $\{\omega_k/\mu_2\}$. Далее, как видно из рис. 1, для всех режимов из GH и EF совокупность $\{\omega_k/\mu_2\}$ содержит только

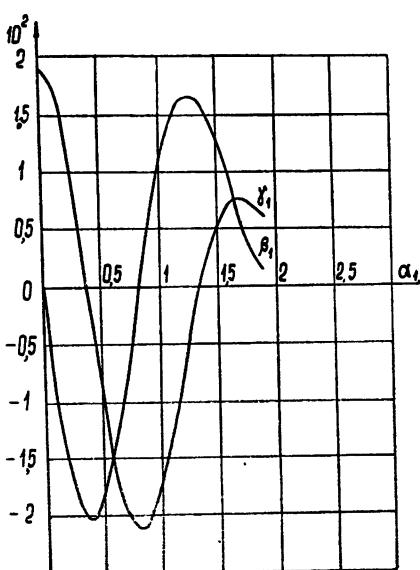


Рис. 2.

одну точку $\omega = 0$. Исключение составляют режимы $\alpha = \pm 0,77(2\pi)$. Для них в совокупности $\{\omega_k/\mu_2\}$, кроме $\omega = 0$, существуют два сопряженных корня (15):

$$\pm \frac{\omega}{\mu_2} = \mp 0,77(4\pi). \quad (26)$$

Определим поправку (23) к корням нулевого приближения. Из вида функций, представленных на рис. 2, 3, нетрудно заключить, что выражение (23) имеет отрицательный знак для всех режимов α_1 из области GH и EF . Громоздкий расчет (24), который мы опустим, дает тот же результат и для режимов

$$\alpha = \pm 0,77(2\pi).$$

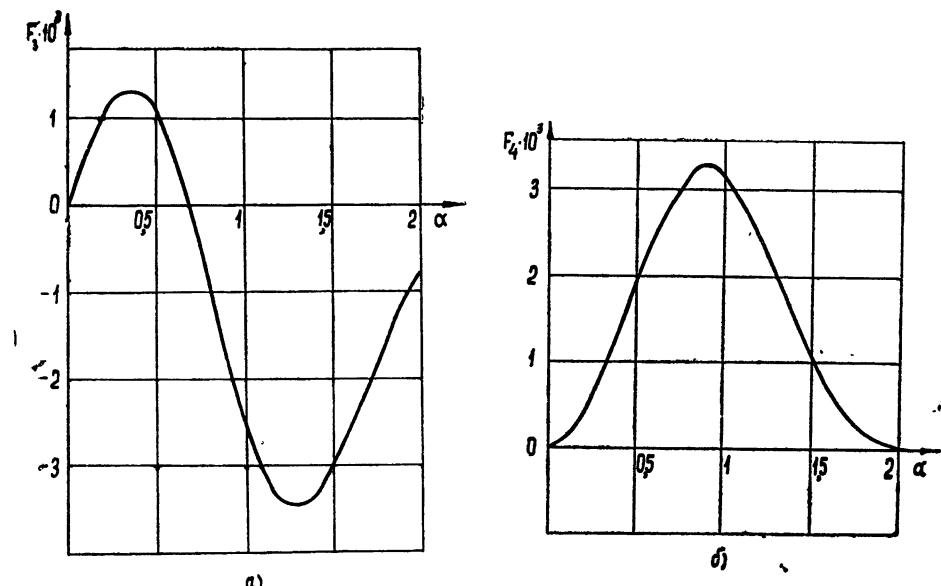


Рис. 3.

Таким образом, проведенный анализ указывает на устойчивость стационарных режимов колебания типа GH и EF ; мы приходим к явлению гистерезиса частоты, которое подробно разбиралось в [1].

В заключение заметим, что площадь петли гистерезиса определяется параметром $\chi\eta$ и отлична от нуля при $\chi\eta > \frac{1}{0,133}$ (рис. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Цареградский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 504 (1965).

MOLECULAR BEAM INTERACTION WITH CAVITY ELECTROMAGNETIC FIELD.

III. OStILLATION STABILITY OF MOLECULAR GENERATOR WITH
NONHOMOGENEOUS FIELD*V. B. Tsaregradsky*

By means of the field [1] expansion of molecular beam polarization a characteristic equation for a molecular generator has been obtained. Its solution for each resonator mode has been given. As an example the stability has been investigated of two auto-oscillation regimes in the molecular generator with sinusoidal field distribution along the axis of a beam. The transitions between cycles are shown to have a hysteresis character.

УДК 539.28.078:523 164

РАДИОСПЕКТРОМЕТР НА ВОЛНУ 21 см С КВАНТОВЫМ ПАРАМАГНИТНЫМ УСИЛИТЕЛЕМ

P. M. Мартиросян, A. M. Прохоров, R. L. Сороченко

Описывается радиоспектрометр на волну 21 см с квантовым парамагнитным усилителем для исследования радиолинии водорода. Приведены результаты измерений шумовых параметров и флуктуационной чувствительности радиометра.

Исследование спектральных радиолиний — область радиоастрономии со специфичными требованиями к применяемой аппаратуре. Здесь возможности обнаружения и исследования слабых сигналов не могут быть улучшены за счет расширения полосы пропускания приемного устройства; основным путем является уменьшение внутренних шумов аппаратуры. До сравнительно недавнего времени такие исследования в линии 21 см проводились с помощью приемников с кристаллическим смесителем на входе, работающих по принципу частотного радиометра (модуляция частоты приемного тракта и сравнение спектральных плотностей шумов в двух разнесенных по частоте участках спектра) [1].

В последние годы для повышения чувствительности спектрометров стали применяться квантовые парамагнитные [2] и параметрические усилители [3, 4], позволяющие снизить уровень шумов и соответственно повысить чувствительность аппаратуры в 5–10 раз. Возможности квантовых парамагнитных усилителей могут быть наилучшим образом использованы именно для спектральных исследований, где не требуется широкой полосы пропускания, реализация которой в квантовом парамагнитном усилителе затруднительна.

Мы использовали для повышения чувствительности радиоспектрометра на волну 21 см квантовый парамагнитный усилитель с двумя связанными резонаторами. Основным элементом парамагнитного усилителя является двухчастотный резонатор. В нашей конструкции были использованы два связанных четвертьволновых полосковых резонатора на частоту 1420 Мгц. В качестве рабочего вещества служит рубин ($\text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Cr}^{3+}$) в перпендикулярной ориентации с концентрацией ионов Cr^{3+} , равной 0,04%.

Внешнее магнитное поле в квантовом парамагнитном усилителе обеспечивает необходимое расщепление уровней парамагнитного иона. Требования к стабильности магнитного поля довольно высокие, поскольку амплитудная и фазовая стабильность усилителя определяется стабильностью магнитного поля. В описываемом усилителе магнитное поле напряженностью 2000 э было получено в соленоиде со сверхпроводящей обмоткой из чистого ниобия. Конструкция соленоида и порядок получения необходимого значения магнитного поля при помощи соленоида со сверхпроводящей обмоткой описаны в работе [5]. Величина магнитного поля должна устанавливаться очень точно: отклонение от резонансного значения поля на 1–2 э приводит к заметному уменьшению усиления.

Величина усиления в режиме работы с радиометром составляла 16–18 дБ при полосе пропускания 7–8 Мгц. Усилитель в режиме уси-

ления 17—18 дБ работал довольно стабильно. Специальное исследование стабильности усиления показало, что долговременные уходы (за 30 мин) составляли 2—3% от общего усиления.

Применение сверхпроводников позволяет получить очень стабильные поля, что важно для стабильной работы усилителя и резко сокращает вес и габариты аппаратуры. Система охлаждения усилителя состоит из двух стеклянных сосудов, смонтированных в специальном кожухе. Емкость азотного и гелиевого сосуда составляла 5 л и 2,5 л соответственно, что обеспечивало непрерывную работу в течение 10 часов. Сконструированный усилитель (см. рис. 1) очень компактен и имеет вес не более 10 кг.

Квантовый парамагнитный усилитель был использован в качестве усилителя высокой частоты радиоспектрометра на волну $\lambda = 21 \text{ см}$,

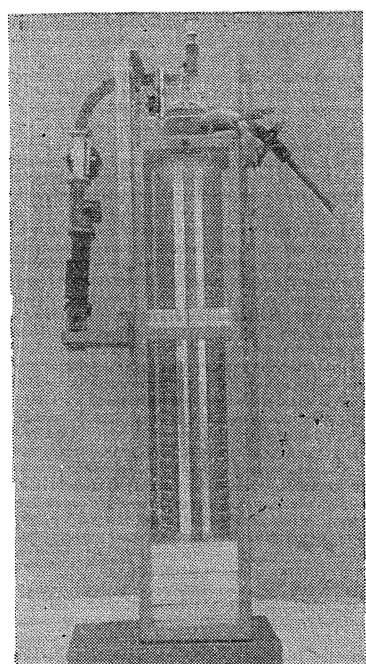


Рис. 1. Общий вид квантового парамагнитного усилителя со связанными резонаторами

При температуре жидкого азота. Конструктивно более просто эквивалент в виде дополнительного облучателя не может быть применен при наблюдениях на волне 21 см, так как излучение нейтрального водорода приходит к нам с любых участков небесной сферы. В этом случае при создании радиометра с модуляцией диаграммы направленности мы принимали бы разность двух профилей радиолиний и обработка результатов была бы весьма затруднительной.

Высокочастотное сопротивление подобрано с таким расчетом, чтобы при температуре жидкого азота его сопротивление соответствовало бы волновому сопротивлению коаксиальной линии. При этом обеспечивалось КСВ не хуже 1,1 в широком диапазоне частот. Для предотвращения конденсации водяного пара из воздуха на охлажденных стенках коаксиала выходной высокочастотный разъем эквивалента сделан гер-

применявшегося ранее для радиоспектральных наблюдений [6]. К сожалению, применение квантового усилителя исключает использование хорошо зарекомендовавшего себя частотного радиометра, так как квантовый усилитель не допускает модуляцию с узкой полосой пропускания. Осуществление же частотной модуляции на следующих после квантового парамагнитного усилителя схемных элементах, например, за счет изменения частоты первого гетеродина, привело бы к большим «параизитным» сигналам из-за неравномерности частотной характеристики усилителя. Поэтому в радиоспектрометре была использована схема амплитудного радиометра, флюктуационная чувствительность которого при одинаковой шумовой температуре в $\sqrt{2}$ раза хуже по сравнению с ранее применяемым частотным радиометром.

Общая блок-схема радиоспектрометра с квантовым парамагнитным усилителем приведена на рис. 2. Модуляция осуществляется путем переключения входа квантового парамагнитного усилителя с антены на эквивалент. Модулятор выполнен на полупроводниковых диодах, замыкающих или размыкающих четвертьвольновые полосковые линии. В качестве эквивалента использо-

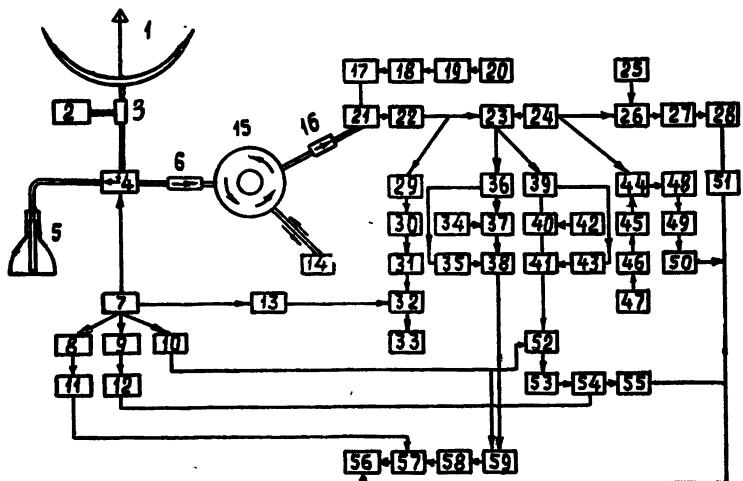


Рис. 2. Блок-схема радиоспектрометра:

1—антенна, 2—шумовой генератор, 3—направленный ответвитель, 4—модулятор, 5—дюар с охлажденной нагрузкой (эквивалент), 6, 16—ферритовые вентили, 7—генератор модуляционной частоты, 8, 9, 13—фазовращатели, 10, 11, 12—формирователи опорного напряжения и запирающих импульсов, 14—квантовый парамагнитный усилитель, 15—циркулятор, 17—четырехкратный умножитель частоты, 18—умножитель частоты в 108 раз, 19—буферный каскад, 20—кварцевый генератор первого гетеродина, 21—первый смеситель, 22—усилитель промежуточной частоты, 23—второй смеситель, 24—гетеродин плавной перестройки частоты, 25—кварцевый генератор меток частоты 1000 кГц, 26—смеситель, 27—усилитель частоты 250 кГц, 28—детектор для меток 500 кГц, 29, 30—дополнительный усилитель и детектор широкополосного выхода, 31, 32, 33—усилитель частоты модуляции, синхронный детектор и регистрирующий прибор широкополосного выхода, 24, 42—третий гетеродины узкополосных выходов, 36, 39—усилители второй промежуточной частоты, 35, 43—автоматическая регулировка усиления, 37, 40—третьи смесители, 38, 41—кварцевые фильтры, 44—смеситель меток 10 кГц, 45—усилитель группы гармоник, 46—формирователь узких импульсов, 47—кварцевый генератор 20 кГц, 48—усилитель 5 кГц, 49—детектор, 50—реле меток частоты 10 кГц, 51—реле меток частоты 500 кГц, 52, 59—детекторы узкополосных каналов, 53, 58—усилители частоты модуляции, 54, 57—синхронные детекторы, 55, 56—регистрирующие приборы узкополосных каналов.

метичным. За счет некоторых потерь в выходном коаксиальном азотной нагрузке ее шумовая температура несколько выше температуры кипения азота и составляет 85°К.

Подключение квантового парамагнитного усилителя к схеме радиометра производится с помощью циркулятора, имеющего прямые потери 0,2 дБ и обратные потери 20 дБ. Для улучшения связки между модулятором и циркулятором включен дополнительный ферритовый вентиль с прямыми потерями 0,35 дБ и обратной связью 30 дБ.

Вся высокочастотная часть радиометра, включая смеситель и предварительный усилитель промежуточной частоты, размещается в верхней кабине 22-метрового радиотелескопа [?].

Для более стабильной работы усилителя, а также уменьшения испарения жидкого гелия обеспечивается постоянное вертикальное положение сосуда дюара с парамагнитным усилителем, а соединение его с остальными врачающимися элементами высокочастотного тракта осуществляется посредством коаксиального врачающегося перехода с малыми потерями (0,1 дБ). Для уменьшения потерь высокочастотной энергии линия передачи от расположенного в фокусе антенны облучателя до верхней кабины выполнена на волноводе большого сечения с переходом на коаксиал непосредственно у модулятора. Потери этой части тракта очень малы (не более 0,1 дБ).

В процессе наблюдений калибровка радиометра по интенсивности производится по шумовому генератору, энергия которого вводится в ка-

нал антенны через направленный ответвитель. В свою очередь, шумовой генератор с подобранный связью направленного ответвителя калибровался с большой точностью по разнице теплового излучения согласованных нагрузок, находящихся при температуре жидкого азота.

Флуктуационная чувствительность амплитудного радиометра с учетом флуктуаций коэффициента усиления может быть достаточно точно определена выражением

$$\Delta T_a = \frac{\pi}{2} \frac{T_c}{\sqrt{\Delta f \tau}} + (T_a - T_s)(\delta G/G), \quad (1)$$

где T_c — общая шумовая температура радиометра, Δf — полоса пропускания, τ — постоянная времени выходного фильтра, $T_a - T_s$ — разность температур антенны и эквивалента, $\delta G/G$ — относительные флуктуации коэффициента усиления. С понижением шумовой температуры радиометра второй член выражения (1) начинает играть существенную роль, если $T_a - T_s \neq 0$. Поэтому для получения максимальной чувствительности необходимо стремиться к уменьшению $T_a - T_s$. Согласно проведенным измерениям, шумовая температура антенны составляла около 40°K . Чтобы приблизить T_a к температуре эквивалента, составляющей 85°K , в тракт антенны соответствующим подбором связи вводились дополнительные шумы направленного ответвителя, используемого для температурной калибровки. Таким способом удавалось сбалансировать разность температур антенны и эквивалента с точностью до 1°K . Общую шумовую температуру всей системы радиометра с квантовым парамагнитным усилителем можно выразить так:

$$T_c = T_a + \frac{1}{\eta} \left[290(1-\eta) + T_{\text{КПУ}} + \frac{T_p}{G} \right], \quad (2)$$

где T_a — шумовая температура антенны, $T_{\text{КПУ}}$ — собственная шумовая температура КПУ, T_p — шумовая температура смесительного приемника, η — коэффициент передачи в. ч. тракта от места ввода калиброванного сигнала до входа КПУ, G — коэффициент усиления КПУ. Шумовая температура смесителя, отнесенная к одному каналу приема, соответствовала 1500°K . Таким образом, при усиении 18 дБ $T_p/G = 24^{\circ}\text{K}$.

Коэффициент передачи в. ч. тракта определяется потерями в модуляторе, изоляторе, циркуляторе, врачающемся переходе, а также потерями в небольших отрезках соединительных фидерных линий. Эти потери составляют $0,85 \text{ дБ}$. Таким образом, $\eta = 0,835$. Принимая собственную шумовую температуру квантового усилителя (шумы спонтанного излучения и потери в подводящих коаксиалах) равной 10°K и подставляя величины η , T_a и T_p/G в выражение (1), получим, что $\Delta T_a = 183^{\circ}\text{K}$. Проведенные измерения шумовой температуры радиометра ($T_c = 180^{\circ}\text{C} \pm 5^{\circ}\text{K}$) показали хорошее соответствие с данными расчета.

Реализация флуктуационной чувствительности радиометра существенным образом зависит от наличия и величины «паразитной модуляции», которая вызывает отклонение регистрирующего прибора радиометра в отсутствие спектральной линии. Появление «паразитной модуляции» обусловливается изменением каких-либо параметров радиометра в тakt с частотой модуляции. При применении резонаторного усилителя наиболее очевидной причиной «паразитной модуляции» является модуляция характеристики усилителя при подключении к его входу антенны и эквивалента, имеющих в общем случае различные импедансы. Этот эффект был предварительно исследован в лабораторных условиях, в результате чего были определены величины развязки на входе квантового усилителя при различных значениях коэффициента

усиления. При усилении 18 дБ требование к развязке с этой точки зрения составляли 40 дБ [8].

Обеспечение необходимой развязки, а также выравнивание температур антенны и эквивалента позволили обеспечить достаточно хорошую реализацию теоретической чувствительности радиометра. При наблюдениях радиолинии водорода (при $\Delta f = 20 \text{ кГц}$ и $t = 30 \text{ сек}$) была достигнута флюктуационная чувствительность $0,3^\circ\text{K}$, а в сплошном спектре (при $\Delta f = 8 \text{ МГц}$, $\Delta t = 1 \text{ сек}$) — чувствительность $0,12^\circ\text{K}$, что хорошо соглашается с расчетными данными.

На рис. 3 приведена запись радиолинии водорода в созвездии Лебедя на радиоспектрометре с квантовым парамагнитным усилителем.

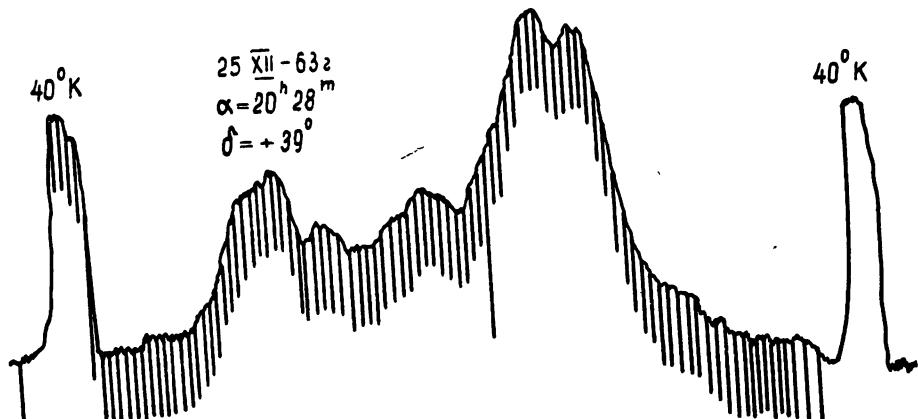


Рис. 3.

Проведенные наблюдения показывают, что применение квантового усилителя дает возможность уверенно выделить мелкие детали в профиле радиолинии. В частности, выявленный ранее в результате статистической обработки «провал» в первом максимуме профиля, обусловленный наличием в этом направлении ионизированного комплекса Лебедь-Х, теперь отчетливо виден в одиночной записи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Чихачев, Р. Л. Сороченко, Труды 5 совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956.
2. J. V. Jelly, B. F. Gorges, Rev. Sci. Instr., 32, 76 (1961).
3. B. J. Robinson, J. T. de Jager, Proc. IEEE, 109, 267 (1962).
4. G. Mezger, Proc. IEEE, 51, 356 (1963).
5. Р. М. Мартиросян, А. М. Прохоров, ПТЭ, № 1, 106 (1964).
6. Р. Л. Сороченко, Диссертация, ФИАН, М., 1961.
7. П. Д. Калячев, А. Е. Саломонович, Труды ФИАН, 17, 13 (1962).
8. Н. В. Карлов, Р. М. Мартиросян, Р. Л. Сороченко, Радиотехника и электроника, 10, 40 (1965).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
30 июля 1964 г.

RADIOSPECTROMETER ON WAVE 21 cm WITH QUANTUM PARAMAGNETIC AMPLIFIER

R. M. Martirosyan, A. M. Prokhorov, R. L. Sorochenko

The radiospectrometer on the wave 21 cm with quantum paramagnetic amplifier for investigation of hydrogen radio line is described. The measurement results are given of the noise parameters and fluctuation radiometer sensitivity.

УДК 538.56:519.25

ОБ УРАВНЕНИИ ФОККЕРА—ПЛАНКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И УСЛОВИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА

P. Л. Стратонович

Рассмотрены многомерное уравнение Фоккера—Планка и флюктуационные уравнения с коэффициентами, имеющими разрывы первого рода. Получены условия сопряжения, которым удовлетворяет плотность вероятности на гиперповерхности разрыва. Подсчитан поток вероятности, сосредоточенный на гиперповерхности и текущий вдоль нее. Приведен пример с нулевыми коэффициентами сноса, когда расплывание вероятности и ее перемещение вдоль линии разрыва коэффициентов обусловлено исключительно диффузионными явлениями.

Расчет многих радиофизических систем, содержащих нелинейности и подверженных действию случайных воздействий, удобно проводить при помощи уравнения Фоккера—Планка (см., например, [1]). При существенных нелинейностях типа реле, сухого трения и т. д., а также при аппроксимации других нелинейных зависимостей коэффициенты этого уравнения имеют разрывы первого рода. В последнем случае при отыскании решения уравнения Фоккера—Планка для различных областей непрерывности следует сопрягать эти решения в соответствии с определенными условиями на гиперповерхности разрыва [2, 3]. Вывод этих условий, особенно в многомерном случае, является не простым делом, что приводило иногда к неточным утверждениям. В настоящей заметке рассматриваются некоторые вопросы, связанные с многомерными условиями сопряжения.

1. При коэффициентах сноса $a_i(x, t)$ и диффузии $b_{ij}(x, t)$ ($i, j = 1, \dots, n$), имеющих разрывы первого рода, обычные равенства

$$\dot{w} = - \frac{\partial G_i}{\partial x_i} \equiv \operatorname{div} G; \quad (1)$$

$$G_i = a_i w - \frac{1}{2} \frac{\partial(b_{ij} w)}{\partial x_j} \quad (2)$$

сохраняют справедливость во всех точках пространства и времени, если функции понимать в смысле обобщенных функций. (Подразумевается суммирование по дважды встречающимся индексам; w — плотность вероятности.)

Пусть Γ — гладкая гиперповерхность разрыва коэффициентов, n_i — единичный вектор нормали к ней, v — координата, отсчитываемая вдоль нормали и принимающая значение 0 на поверхности Γ , причем $dv/dx_i = n_i$. Вектор плотности потока (2) в рассматриваемом случае имеет на Γ сингулярности типа $\delta(v)$:

$$G_i = G_i^0 \delta(v) + G_i^1, \quad (3)$$

где G_i^1 — несингулярная (но разрывная) часть. Обозначая $\Delta[f] \equiv f^+ - f^- \equiv f(v=0+0) - f(v=0-0)$, согласно (2), имеем

$$G_i^0 \delta(v) = -\frac{1}{2} \frac{\partial(b_{ij}w)}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial(b_{ij}w)}{\partial v} = -\frac{1}{2} n_j \Delta[b_{ij}w] \delta(v), \quad (4)$$

т. е.

$$G_i^0 = -\frac{1}{2} n_j \Delta[b_{ij}w]$$

и

$$G_i^1 = a_i w - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (b_{ij}w) \quad (5)$$

(дифференцирование в последнем члене производится без учета скачка). При подстановке (3) в (1) получаем

$$\begin{aligned} w = & -G_i^0 \frac{\partial \delta(v)}{\partial x_i} - (\operatorname{div}_\Gamma G^0) \delta(v) - \frac{\partial G_i^1}{\partial x_i} = -G_i^0 n_i \delta'(v) - \\ & - (\operatorname{div}_\Gamma G^0) \delta(v) - n_i \Delta[G_i^1] \delta(v) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь точками обозначены члены, не содержащие особенностей; $\operatorname{div}_\Gamma$ обозначает $(n-1)$ -мерную дивергенцию внутри поверхности Γ .

Естественно предположить, что плотность w не имеет особенностей. Дельта-особенность на Γ моментально «расплывается», если хотя бы с одной стороны поверхности коэффициент диффузии в перпендикулярном направлении $b_{ij} = n_i b_{ij} n_j$ не исчезает. Приравнивая нуль сингулярности в правой части (6), получаем искомые условия сопряжения:

$$G_i^0 n_i = 0, \quad (7)$$

т. е.

$$n_i n_j \Delta[b_{ij}w] = 0$$

и

$$\operatorname{div}_\Gamma G^0 - n_i \Delta[G_i^1] = 0. \quad (8)$$

В эти выражения следует подставить (4), (5).

Вероятность, поступающая на гиперповерхность Γ вследствие разности нормальных потоков по обе стороны от нее, растекается, согласно (8), вдоль гиперповерхности.

Бесконечность потоков $G_i^0 \delta(v)$ вдоль поверхности при отсутствии на ней уплотнений вероятности предполагает, разумеется, бесконечную скорость регулярного перемещения дифундирующих «частиц». Источником такой бесконечной упорядоченной скорости является бесконечная неупорядоченная скорость диффузионного движения. Некоторые особенности описанного процесса можно проследить на следующем двухмерном примере.

2. Пусть везде $a(x) = 0$, матрицы диффузии в верхней и нижней полу平面 различны и имеют вид

$$b_{ij} = b_{ij}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } x_2 > 0, \quad (9)$$

$$b_{ij} = b_{ij}^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{при } x_2 < 0.$$

В данном случае $v = x_2$ и $n_t = (0, 1)$. Согласно (4), имеем

$$G_1^0 = -\frac{1}{2} \Delta [b_{12} w] = -\frac{w^+ + w^-}{2};$$

$$G_2^0 = -\frac{1}{2} \Delta [b_{22} w] = -\frac{w^+ - w^-}{2}.$$

Далее

$$\Delta[G_i^1] = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial(b_{ij}^+ w^+)}{\partial x_j} - \frac{\partial(b_{ij}^- w^-)}{\partial x_j} \right].$$

Следовательно, (7) дает условие $w^+ - w^- = 0$, а (8) приводит к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (w^+ + w^-) + \left[\frac{\partial(b_{21}^+ w^+)}{\partial x_1} + \frac{\partial(b_{22}^+ w^+)}{\partial x_2} - \frac{\partial(b_{21}^- w^-)}{\partial x_1} - \frac{\partial(b_{22}^- w^-)}{\partial x_2} \right] = 0,$$

или, если учесть равенство $w^+ = w^- = w$, к соотношению

$$4 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial w^+}{\partial x_2} - \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим, как расплывается вероятность, сосредоточенная в начале координат:

$$w(x, 0) = \delta(x_1)\delta(x_2).$$

Благодаря симметрии можно ограничиться рассмотрением лишь верхней полуплоскости $x_2 \geq 0$, полагая $w^+ = w$. Поскольку $\partial w^- / \partial x_2 = -\partial w^+ / \partial x_2$ на Γ , условие (9) примет вид

$$2 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \quad (10a)$$

при $x_2 = 0$. Оно служит граничным условием для уравнения

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ &\left(w(x, 0) = \frac{1}{2} \delta(x_1)\delta(x_2), \quad x_2 \geq 0 \right). \end{aligned}$$

Для решения этого уравнения перейдем к новым переменным $x = x_1 - x_2$, $y = x_2$ и совершим преобразование Карсона—Лапласа по времени. Для изображения будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} - 2p \bar{w} = -p\delta(x)\delta(y), \quad (11)$$

решение которого ищем в виде $c(x, p)e^{-y\sqrt{2p}}$ ($y > \epsilon > 0$) (решение $c e^{y\sqrt{2p}}$ соответствует притоку вероятности из бесконечности; поэтому его отбрасываем). Условие (10a) при учете (11) дает

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial c}{\partial x} - \sqrt{2p} c + p\delta(x) = 0;$$

следовательно,

$$c(x, p) = \begin{cases} pe^{x\sqrt{2p}} & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (12)$$

Итак, изображение искомой плотности имеет вид $\bar{w} = p \exp [(x - y)\sqrt{2p}]$. Пользуясь таблицами операционного исчисления, находим оригинал

$$w = \frac{y-x}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left[-\frac{(y-x)^2}{2t} \right] = \frac{2x_2-x_1}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left[-\frac{(2x_2-x_1)^2}{2t} \right] \quad (12a)$$

при $x < 0$ ($x_2 > x_1$) и, кроме того,

$$w = 0$$

в других местах. Таким образом, кроме диффузионного расплывания вероятности вдоль линий $x_2 - x_1 = \text{const}$, наблюдается смещение вероятности в сторону отрицательных x_1 вследствие потока вероятности $G_i^0 = -w$ вдоль оси Ox_1 .

3. Предыдущее рассмотрение дает полное решение проблемы в предположении, что коэффициенты диффузии и сноса имеют разрывы первого рода, но не имеют на гиперповерхностях разрыва особенностей типа дельта-функций. Это условие требует особой проверки, если диффузионный процесс с разрывными коэффициентами реализуется при помощи радиотехнических средств. Возможно, что при такой реализации оно будет не выполнено и процесс окажется процессом другого типа, именно, его сносы будут иметь дельта-образные выбросы.

Возьмем процесс, описываемый уравнениями

$$\dot{x}_i = m_i(x, t) + g_{ir}(x, t) \xi_r(t), \quad (13)$$

где $\xi_r(t)$ — гауссовые дельта-коррелированные процессы:

$$\overline{\xi_r(t)} = 0; \quad \overline{\xi_r(t) \xi_s(t+\tau)} = \kappa_{rs} \delta(\tau),$$

а выражение $g_{ir}\xi_r$ понимается в симметризованном смысле. Как известно [1], уравнению (13) соответствуют коэффициенты сноса и диффузии:

$$a_i = m_i + \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_j} g_{js} \kappa_{rs}; \quad b_{ij} = g_{ir} g_{js} \kappa_{rs}. \quad (14)$$

Если предположить, что функции m_i , g_{ir} имеют разрывы первого рода и не имеют дельта-выбросов (такие функции легко реализовать технически), то, как видно из (14), в отличие от рассмотренного ранее случая, коэффициенты сноса будут иметь не только разрывы первого рода, но и дельта-образные выбросы. Чтобы обобщить на этот случай предыдущие результаты, заменим разрывные функции g_{ir} слаженными g_{ir}^ϵ , предполагая, что скачки происходят на расстояниях порядка ϵ причем

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_{ir}^\epsilon = g_{ir}.$$

Согласно (2), (14), имеем

$$G_i = m_i w - \frac{1}{2} g_{ir}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{js}^\epsilon \kappa_{rs} w). \quad (15)$$

В потоках (15) вместо дельта-образных выбросов теперь будут члены порядка ϵ^{-1} . При подстановке (15) в (1) потребуем, чтобы в правой

части равенства (1) отсутствовали члены порядка ε^{-2} и ε^{-1} . Поскольку члены порядка ε^{-2} могут получиться лишь при дифференцировании по-перечного потока $n_i G_i$ по v , получаем условие, что $n_i G_i$ не должен содержать членов порядка ε^{-1} :

$$n_i m_i w - \frac{1}{2} n_i g_{ir}^{\varepsilon} n_j \frac{\partial}{\partial v} (g_{js}^{\varepsilon} x_{rs} w) \sim 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} n_i g_{ir}^{\varepsilon} n_j \frac{\partial}{\partial v} (g_{js}^{\varepsilon} x_{rs} w) &= \sqrt{b_v^{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{b_v^{\varepsilon}} w) \sim 1 \\ (b_v^{\varepsilon} &= n_i n_j g_{ir}^{\varepsilon} g_{js}^{\varepsilon} x_{rs}), \end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$\sqrt{b_v^{\varepsilon}} w \simeq \text{const} \quad (16)$$

вдоль v , и, в частности,

$$\sqrt{b_v^+} w^+ = \sqrt{b_v^-} w^-, \quad \Delta [\sqrt{b_v^-} w] = 0. \quad (17)$$

Это условие теперь заменяет условие $\Delta [b_v w] = 0$ (7). Второе условие (8) (условие сохранения вероятности), разумеется, остается неизменным, если соответствующим образом определить потоки G_i^0 . Совершая предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая (3), определяем их при помощи формулы

$$G_i^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int G_i d\nu = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g_{ir}^{\varepsilon} n_j \frac{\partial}{\partial v} (g_{js}^{\varepsilon} x_{rs} w) d\nu$$

или, в силу (16), при помощи формулы

$$G_i^0 = -\frac{1}{2} w^+ \sqrt{b_v^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int g_{ir}^{\varepsilon} n_j \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{g_{js}^{\varepsilon}}{\sqrt{b_v^{\varepsilon}}} \right) x_{rs} d\nu. \quad (18)$$

Существенно, что результат оказывается некоторым образом зависящим от способа аппроксимации разрывных функций.

Как видно из этого рассмотрения, случай, когда функции m_i имеют разрывы и не имеют дельта-особенностей, более сложен, чем случай, когда сносы a_i имеют разрывы, но не имеют дельта-особенностей. Понятно, для этого случая невозможно построение теории, использующей обобщенные функции и не зависящей от способа предельного перехода (при переходе от непрерывных функций к разрывным). Во всяком случае, этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании.

4. Применим развитую теорию к рассмотренному ранее примеру. Коэффициентам (9) соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \vartheta_+(x_2) \xi_1 - \vartheta_-(x_2) \xi_2; \\ \dot{x}_2 &= \vartheta_+(x_2) \xi_1 + \vartheta_-(x_2) \xi_2, \end{aligned}$$

где

$$\vartheta_+(z) = 1 - \vartheta_-(z) = \frac{1}{2} (1 + \text{sign } z);$$

$$\overline{\xi_i(t) \xi_j(t + \tau)} = \delta_{ij} \delta(\tau).$$

Условие (17) в данном случае дает то же самое соотношение $w^+ = w^-$, что и (7). Поток же G_1^0 теперь подсчитывается сложнее. Заменяя $\vartheta_{\pm}(x_2)$ на аппроксимирующие непрерывные функции $\vartheta_{\pm}(x_2)$ и учитывая (16), имеем, согласно (18),

$$G_1^0 = -\frac{w^+}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \left[\vartheta_{\epsilon+} d\left(\frac{\vartheta_{\epsilon+}}{\sqrt{\vartheta_{\epsilon+}^2 + \vartheta_{\epsilon-}^2}}\right) - \vartheta_{\epsilon-} d\left(\frac{\vartheta_{\epsilon-}}{\sqrt{\vartheta_{\epsilon+}^2 + \vartheta_{\epsilon-}^2}}\right) \right] \quad (19)$$

$$(\vartheta_{\epsilon+}^+ = \vartheta_{\epsilon-}^- = 1; \quad \vartheta_{\epsilon+}^- = \vartheta_{\epsilon-}^+ = 0).$$

Результат интегрирования зависит от соотношения между $\vartheta_{\epsilon+}$ и $\vartheta_{\epsilon-}$. Пусть они связаны равенством

$$\vartheta_{\epsilon+}^{2/k} + \vartheta_{\epsilon-}^{2/k} = 1 \quad (k > 0).$$

Производя в (19) интегрирование по частям и вводя переменную

$$u = \vartheta_{\epsilon+}^{2/k} \quad (\vartheta_{\epsilon-}^{2/k} = 1 - u),$$

получаем

$$G_1^0 = -\frac{w}{2} \Delta \left[\frac{\vartheta_{\epsilon+}^2 - \vartheta_{\epsilon-}^2}{\sqrt{\vartheta_{\epsilon+}^2 + \vartheta_{\epsilon-}^2}} \right] + \frac{w}{2} \int \frac{\vartheta_{\epsilon+} d\vartheta_{\epsilon+} - \vartheta_{\epsilon-} d\vartheta_{\epsilon-}}{\sqrt{\vartheta_{\epsilon+}^2 + \vartheta_{\epsilon-}^2}} =$$

$$= -w + \frac{w}{4} \int_{u=0}^{u=1} \frac{du^k - d(1-u)^k}{\sqrt{u^k + (1-u)^k}} = -w + \frac{k}{2} w \int_0^1 \frac{u^{k-1} du}{\sqrt{u^k + (1-u)^k}}.$$

В частности, $G_1^0 = -w/2$ при $k = 1$ и $G_1^0 = -[1 - \ln(\sqrt{2} + 1)/\sqrt{2}]w \approx -0,375w$ при $k = 2$.

Эти результаты приводят к изменению граничного условия (10), (10a). Так, при $k = 1$ оно заменяется на условие

$$3 \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial w^+}{\partial x_2} - \frac{\partial w^-}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{3}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0.$$

Внося соответствующие корректиры в решение, вместо (12), будем иметь

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = 0; \quad \bar{w} = 2p \exp [(2x - y) \sqrt{2p}]$$

и, следовательно,

$$w(x_1, x_2, t) = 2 \frac{3x_2 - 2x_1}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left[-\frac{(3x_2 - 2x_1)^2}{2t} \right]$$

при $x_2 > x_1$ и $x_2 > 0$. Отсюда видно, что расплывание вероятности теперь происходит медленнее, чем в случае (12a).

Приведенные условия сопряжения (7), (8), (17) позволяют решать также большое число других задач. При этом в практических случаях следует определять поток вероятности G^0 по формуле (18), но не совершая предельного перехода, а взяв в качестве g_{js}^e реальные (допредельные) функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, § 4, изд. Сов. радио, М., 1961.
2. Э. М. Хазен, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 3, 58 (1961).
3. Э. М. Хазен, Теория вероятностей и ее применение, 6, 130, 234 (1961).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
21 сентября 1964 г.ON FOKKER-PLANK'S EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS
AND CONDITIONS OF THE SURFACE OF DISCONTINUITY*R. L. Stratovich*

Fokker-Plank's multi-dimensional equation has been considered as well as stochastic equations with coefficients having the discontinuity of the first type. The conjugation conditions have been obtained for probability density on the hyper-surface of discontinuity. The probability flux along the hyper-surface has been calculated. An example corresponding to the zero transfer coefficients is given, the probability spreading and traveling along discontinuity line of coefficients being caused only by the diffusion phenomena.

УДК 519.25

К ОЦЕНКЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЭРГОДИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Н. И. Гольдберг

Предложена несмещенная и состоятельная (в случае идеального интегрирования) оценка одномерной характеристической функции стационарного эргодического случайного процесса. Рассмотрены статистические свойства новой оценки.

Для решения ряда задач, возникающих при рассмотрении широкого круга вопросов современной радиофизики (например, флуктуаций и шумов в различных элементах радиоустройств, статистических явлений в ионосфере и распространения волн в средах с нерегулярными неоднородностями) необходимо знание вероятностных характеристик случайных процессов. Статистические оценки вероятностных характеристик случайных процессов рассмотрены в ряде работ [1-4]; настоящая статья посвящена оценкам характеристической функции, являющейся одной из универсальных вероятностных характеристик случайного процесса.

Одномерная характеристическая функция $\Theta_1(v, t)$ случайного процесса $\xi(t)$ может быть представлена в виде

$$\Theta_1(v, t) = m_1 \{ \cos[v\xi(t)] + j \sin[v\xi(t)] \}, \quad (1)$$

где $m_1 \{ \cdot \}$ — знак математического ожидания, v — аргумент характеристической функции.

Для стационарных эргодических случайных процессов в качестве оценки характеристической функции на интервале времени продолжительностью T примем функционал

$$\Theta_1^*(v, g, T) = \int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t) \{ \cos[v\xi(t)] + j \sin[v\xi(t)] \} dt, \quad (2)$$

где $g(T-t)$ — отклик некоторой линейной системы, выполняющей роль усредняющего устройства, на единичный импульс. Из (2) следуют выражения для оценок действительной $\text{Re}^*\Theta_1(v, g, t)$ и мнимой $\text{Im}^*\Theta_1(v, g, t)$ составляющих характеристической функции:

$$\text{Re}^*\Theta_1(v, g, T) = \int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t) \cos[v\xi(t)] dt; \quad (3)$$

$$\text{Im}^*\Theta_1(v, g, T) = \int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t) \sin[v\xi(t)] dt. \quad (4)$$

Очевидно, (3) и (4) можно рассматривать как алгоритмы для получения выборочных значений характеристической функции, что в ряде случаев предпочтительнее других вероятностных характеристик.

При выполнении требований

$$\int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t) dt = 1, \quad (5)$$

что может быть осуществлено введением постоянного множителя в весовую функцию, оценки (2), (3) и (4) являются несмещеными; в случае идеального интегратора оценки будут также и состоятельными.

Рассмотрим статистические свойства оценок (3) и (4). Очевидно, характеристическая функция $\Theta_1(u)_{\text{Re}}$ оценки (3) равна

$$\Theta_1(u)_{\text{Re}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ju)^n}{n!} m_1 \left\{ \left[\int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t) \cos[v\xi(t)] dt \right]^n \right\}; \quad (6)$$

для оценки (4) получим

$$\Theta_1(u)_{\text{Im}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ju)^n}{n!} m_1 \left\{ \left[\int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t) \sin[v\xi(t)] dt \right]^n \right\}. \quad (7)$$

Плотности вероятностей оценок равны

$$W_1(\text{Re}^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ju\text{Re}^*\Theta_1(v, g, T)] \Theta_1(u)_{\text{Re}} du; \quad (8)$$

$$W_1(\text{Im}^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ju\text{Im}^*\Theta_1(v, g, T)] \Theta_1(u)_{\text{Im}} du. \quad (9)$$

Можно показать, что корреляционная функция $B(\chi)_{\text{Re}}$ оценки (3)

$$B(\chi)_{\text{Re}} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t_1)g(T-t_2) [\text{Re}\Theta_2(v, -v, t_2 - t_1 + \chi) + \\ + \text{Re}\Theta_2(v, v, t_2 - t_1 + \chi)] dt_1 dt_2 \quad (10)$$

и оценки (4)

$$B(\chi)_{\text{Im}} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t_1)g(T-t_2) [\text{Re}\Theta_2(v, -v, t_2 - t_1 + \chi) - \\ - \text{Re}\Theta_2(v, v, t_2 - t_1 + \chi)] dt_1 dt_2. \quad (11)$$

Здесь Θ_2 — двухмерная характеристическая функция процесса $\xi(t)$.

Таким образом, для процесса с произвольными распределениями вероятностей корреляционная функция оценки характеристической функции на выходе линейной системы определяется видом его двухмерной характеристической функции и импульсной реакцией системы.

Для дисперсии оценки (3), характеризующей ее статистическую точность, получим

$$M_2[\text{Re}^*\Theta_1] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t_1)g(T-t_2) [\text{Re}\Theta_2(v, -v, t_2 - t_1) + \\ + \text{Re}\Theta_2(v, v, t_2 - t_1)] dt_1 dt_2 - \text{Re}^2\Theta_1(v); \quad (12)$$

дисперсия оценки (4)

$$M_2\{\text{Im}^*\Theta_1\} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_0+T} g(T-t_1)g(T-t_2)[\text{Re}\Theta_2(v, -v, t_2 - t_1) - \\ - \text{Re}\Theta_2(v, v, t_2 - t_1)]dt_1 dt_2 - \text{Im}^2\Theta_1(v). \quad (13)$$

Рассмотрим статистическую точность оценок на выходе широко распространенного аналогового интегратора с импульсной переходной функцией $h(t)$ в виде

$$h(t) = 1 - e^{-\beta t}. \quad (14)$$

Выражение (14) совместно с (5) приводит к формуле

$$g(T-t) = \frac{\beta \exp[\beta(t-T/2)]}{2\text{sh}(\beta T/2)}. \quad (15)$$

Можно показать, что для процесса с произвольными распределениями вероятностей при импульсной переходной функции вида (14) выражения для дисперсий оценок (3) и (4) будут таковы:

$$M_2\{\text{Re}^*\Theta_1\} = \frac{\beta}{4\text{sh}^2(\beta T/2)} \int_{t_0}^{t_0+T} \text{sh}[\beta(T-\tau)][\text{Re}\Theta_2(v, -v, \tau) + \\ + \text{Re}\Theta_2(v, v, \tau)]d\tau - \text{Re}^2\Theta_1(v); \quad (16)$$

$$M_2\{\text{Im}^*\Theta_1\} = \frac{\beta}{4\text{sh}^2(\beta T/2)} \int_{t_0}^{t_0+T} \text{sh}[\beta(T-\tau)][\text{Re}\Theta_2(v, -v, \tau) - \\ - \text{Re}\Theta_2(v, v, \tau)]d\tau - \text{Im}^2\Theta_1(v). \quad (17)$$

Далее, для процесса $\xi(t)$ с нормальными распределениями вероятностей дисперсии оценок будут равны

$$M_2\{\text{Re}^*\Theta_{1(n)}\} = e^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} f_{n1}(p, q)\varphi(R^n, T, \beta); \quad (18)$$

$$M_2\{\text{Im}^*\Theta_{1(n)}\} = e^{-p} \sum_{n=1}^{\infty} f_{n2}(p, q)\varphi(R^n, T, \beta), \quad (19)$$

где

$$f_{n1}(p, q) = \frac{p^{2n}}{(2n)!} \cos^2 q + \frac{p^{2n-1}}{(2n-1)!} \sin^2 q; \quad (20)$$

$$f_{n2}(p, q) = \frac{p^{2n}}{(2n)!} \sin^2 q + \frac{p^{2n-1}}{(2n-1)!} \cos^2 q; \quad (21)$$

$$\varphi(R^n, T, \beta) = \frac{\beta}{2\text{sh}^2(\beta T/2)} \int_{t_0}^{t_0+T} \text{sh}[\beta(T-\tau)]R^n(\tau)d\tau; \quad (22)$$

$$p = v^2\sigma^2; \quad (23)$$

$$q = av; \quad (24)$$

$R(\tau)$, σ^2 , a — числовые характеристики процесса $\xi(t)$: нормированная автокорреляционная функция, дисперсия и математическое ожидание.

Можно показать, что для корреляционной функции

$$R_1(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|) \quad (25)$$

функция (22) имеет вид

$$\varphi_1(S, Q) = \frac{nQ \operatorname{sh}(S/Q) + e^{-nS} - \operatorname{ch}(S/Q)}{2(n^2 Q^2 - 1) \operatorname{sh}^2(S/2Q)}, \quad (26)$$

где

$$S = \alpha T, \quad (27)$$

$$Q = \alpha/\beta. \quad (28)$$

Так же можно показать, что

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \varphi_1(S, Q) = \frac{2}{n^2 S^2} (nS + e^{-nS} - 1). \quad (29)$$

В случае корреляционной функции

$$R_2(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2) \quad (30)$$

имеем

$$\begin{aligned} \varphi_2(S, Q) = & \frac{\sqrt{\pi} \exp(1/4nQ^2)}{8Q\sqrt{n} \operatorname{sh}^2(S/2Q)} \left[e^{S/Q} \Phi\left(\frac{1}{2Q\sqrt{n}} + SV\sqrt{n}\right) + \right. \\ & \left. + e^{-S/Q} \Phi\left(\frac{1}{2Q\sqrt{n}} - SV\sqrt{n}\right) - 2\operatorname{ch}(S/Q)\Phi\left(\frac{1}{2Q\sqrt{n}}\right) \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа [5];

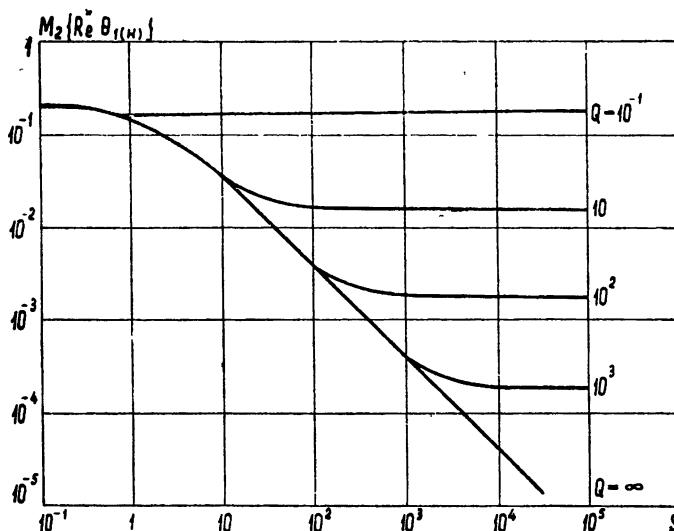


Рис. 1.

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \varphi_2(S, Q) = \frac{1}{nS^2} [V\pi S V n \Phi(S V n) + e^{-nS^2} - 1]. \quad (32)$$

Очевидно, выражения (29) и (32) соответствуют случаю идеального интегратора.

На рис. 1 и рис. 2 изображены семейства кривых дисперсий (18) и

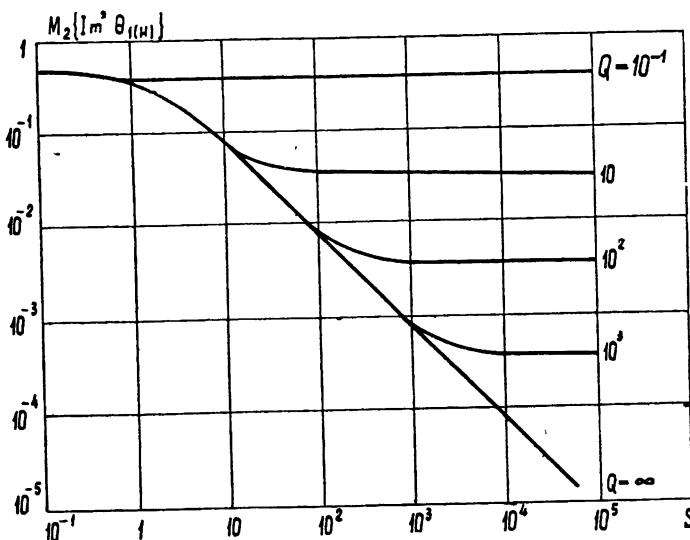


Рис. 2.

(19) для корреляционной функции вида (25) (рис. 1 — для $p = 1$ и $q = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; рис. 2 — для $p = 1$ и $q = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Аналогичные семейства кривых для корреляционной функции (30) изображены на рис. 3 и рис. 4 (рис. 3 — для $p = 1$ и $q = \pi/3 + \pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; рис. 4 — для $p = 1$ и $q = \pi/3 + \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

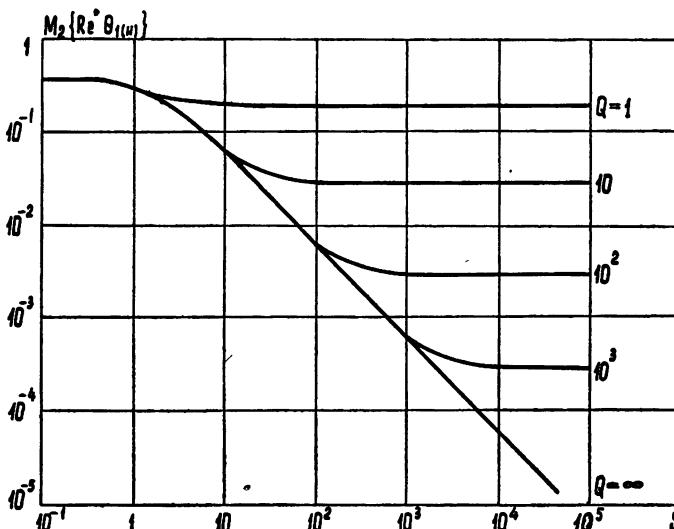


Рис. 3.

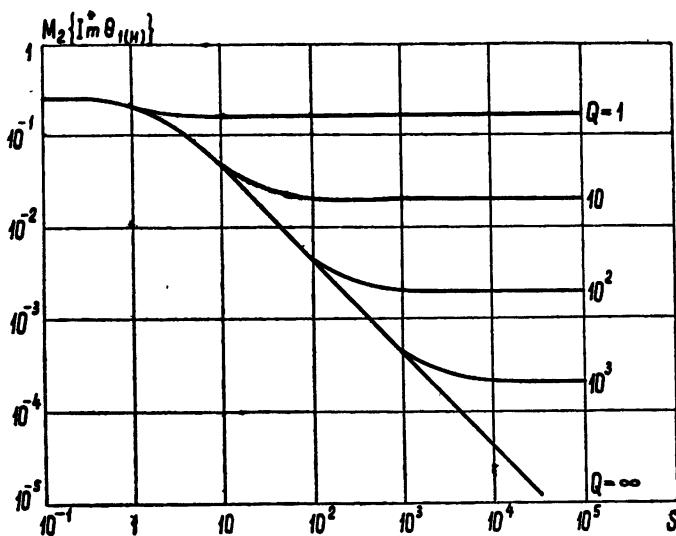


Рис. 4.

Полученные результаты позволяют определять статистические свойства оценок действительной и мнимой составляющих одномерной характеристической функции, через которые, в свою очередь, могут быть выражены оценки одномерных вероятностных характеристик процесса, таких, как плотность вероятностей, дисперсия и математическое ожидание. Использование оценок характеристической функции в ряде случаев предпочтительнее других вероятностных характеристик (в особенности при статистическом анализе композиций распределений, а также случайной фазы квазигармонических сигналов).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 509 (1959).
2. А. А. Семенов, Г. А. Карпев, Изв. высш. уч. зав.—Физика, № 3, 39 (1958).
3. В. Д. Гусев, М. Б. Виноградова, Вестн. МГУ, сер. математика, механика, физика, № 6, 99 (1959).
4. Р. А. Валитов, К. И. Палатов, А. Е. Черный, Методы измерения основных характеристик флуктуационных сигналов, изд. ХГУ, Харьков, 1961.
5. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.

Поступила в редакцию
4 ноября 1964 г.

ON THE EVALUATION OF CHARACTERISTIC FUNCTION OF ERGODIC RANDOM PROCESS

N. I. Goldberg

The undisplaced and justifiable (in case of ideal integration) evaluation has been proposed of the unidimensional characteristic function of stationary ergodic random process. The statistical properties of the new evaluation have been considered.

УДК 535.3 : 551.51

О СИЛЬНЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

M. E. Грачева, A. C. Гурвич

Исследованы флюктуации интенсивности света, распространяющегося на приземной трассе. Обнаружен резкий излом зависимости измеренного среднего квадрата флюктуаций σ_b^2 от соответствующей теоретической величины σ_t , полученной в первом приближении метода плавных возмущений; функция $\sigma_b^2 = f(\sigma_t)$ возрастает вместе с σ_t , стремясь к постоянному значению $\sigma_b^2 \approx 1,6$.

Турбулентность атмосферы приводит к флюктуациям показателя преломления, вследствие чего при распространении электромагнитных и звуковых волн в атмосфере возникают флюктуации амплитуды, фазы и других параметров распространяющейся волны [1]. Первые исследования, относящиеся к изучению флюктуаций интенсивности света, были связаны с изучением мерцания изображений звезд в телескопах [2–5].

В приземном слое атмосферы были проведены специальные эксперименты по изучению мерцания наземных источников вочных условиях на различных расстояниях между источником света и приемником [6–9]. В [6, 7] установлено, что зависимость величины флюктуаций интенсивно-

сти света $\beta = \sqrt{(I - \bar{I})^2 / \bar{I}^2}$ (I — мгновенное значение светового потока через диафрагму приемника, \bar{I} — его среднее значение) от расстояния L , проходимого лучом в турбулентной атмосфере, и от метеорологических условий удовлетворительно согласуется с теорией. Для очных условий дисперсия флюктуаций интенсивности может быть порядка единицы. В [6] и [7] применялся малый по сравнению с зоной Френеля приемник, но источник был большим и его угловой размер менялся при изменении расстояния между источником света и приемником. Последнее несколько искажало результаты измерений, в частности, зависимость интенсивности мерцания от расстояния, что приводило к некоторому уменьшению дисперсии флюктуаций.

В работе [8] исследовалось мерцание наземного источника света вочных условиях на расстояниях $120 \div 600$ м между источником света и приемником в зависимости от длины пути, вертикального градиента температур и числа Ричардсона. Интенсивность мерцания измерялась в единицах P_m , определяемых отношением пикового значения амплитуды принимаемого сигнала к среднему уровню (величина P_m отличается от β на некоторый постоянный множитель). Однако измерение интенсивности мерцания в единицах P_m затрудняет сравнение экспериментальных данных с теоретическими результатами. В работе [8] применялись источник и приемник, размеры которых велики по сравнению с зоной Френеля.

Результаты, полученные в [9], трудно интерпретировать из-за весьма несовершенной методики измерений и отсутствия в работе данных о некоторых существенных характеристиках аппаратуры. По этой причине трудно установить, чем вызвано насыщение кривой, характеризующей зависимость мерцания от расстояния.

Область сильных флюктуаций ($\beta > 1$), по-видимому, не была затронута в работах [6–8]. В дневных условиях на больших расстояниях можно ожидать увеличения интенсивности мерцания по сравнению с ночных условиями, так как днем при неустойчивой стратификации атмосферы вертикальный градиент температуры, определяющий флюктуации температуры, выше, чем ночью.

В настоящей работе исследовалось мерцание наземного источника света вблизи земли в дневных условиях. Изучалась зависимость флюктуаций интенсивности света от метеорологических условий и расстояния, проходимого светом в турбулентной атмосфере.

Измерения проводились летом 1963 г. на Цимлянской научной станции Института физики атмосферы АН СССР.

В качестве источника света использовалась 250-ваттная ртутная лампа сверхвысокого давления, питание которой осуществлялось переменным напряжением с частотой 2500 гц. Источник света был помещен в фокусе объектива (фокусное расстояние 200 мм, диаметр 80 мм), из которого выходил слаборасходящийся пучок света модулированного с частотой 5000 гц (поскольку лампа удваивает частоту). Применение модулированного светового пучка позволило в дневных условиях избавиться от немодулированного рассеянного солнечного света и упростило приемную аппаратуру, так как отпадала необходимость в применении усилителей постоянного тока.

Диаметр входного отверстия приемника составлял 2 мм, что полностью устранило «эффект осреднения» объектива [1]. Переменное напряжение на выходе фотоумножителя, пропорциональное мгновенному значению интенсивности светового потока I через входную диафрагму приемника, усиливается полосовым усилителем (рис. 1), настроенным на

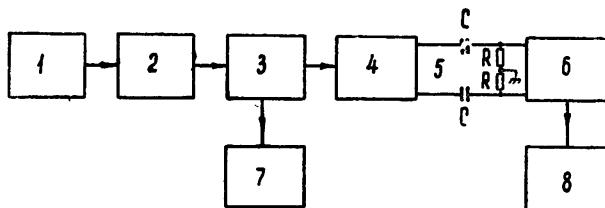


Рис. 1. Блок-схема приемника:

1—фотоумножитель-17, 2—полосовой усилитель, 3—первый детектор,
4—низкочастотный фильтр, 5—вычитающая RC-цепочка, 6—второй
детектор, 7, 8—интегрирующий вольтметр.

частоту 5000 гц (полоса пропускания ± 500 гц по половинной мощности), а затем детектируется. На выходе первого детектора образуется напряжение, среднее значение которого измеряется интегрирующим вольтметром с постоянной времени 100 сек. После прохождения через низкочастотный фильтр с частотой среза 600 гц и вычитания постоянной составляющей с помощью RC-цепочки ($RC \approx 50$ сек) на сопротивлении R возникает напряжение, пропорциональное флюктуациям интенсивности светового потока. На выходе второго детектора напряжение пропорционально $|I - \bar{I}|$; среднее значение этой величины измеряется вторым интегрирующим вольтметром с постоянной времени 100 сек.

Таким образом, на эксперименте измерялись (в одинаковых единицах) средний уровень интенсивности светового потока \bar{I} и средний модуль отклонения мгновенного значения интенсивности от ее среднего уровня $|I - \bar{I}|$.

Измерения проводились на участке степи с ровным рельефом, что обеспечивало однородность турбулентного режима вдоль всего пути распространения луча и позволило ограничиться измерением основных метеохарактеристик в одной точке трассы. Приемник света мог перемещаться в различные пункты, расположенные на расстояниях $L = 125, 250, 500, 1000$ и 1750 м от стационарного источника. На расстояниях, меньших 125 м, эффект мерцания сравним с собственными шумами установки. Расстояния больше 1750 м не могли быть использованы из-за неровностей рельефа. Средняя высота луча над землей z вдоль всей трассы составляла 2 м.

Как показано теоретически [1, 10] и экспериментально [11], интенсивность мерцания зависит от угловых размеров источника $\gamma = d/L$ через параметр $\gamma/\gamma_0 = d/\sqrt{2\lambda L/\pi}$, где $\gamma_0 = \sqrt{2\lambda/\pi L}$, d — диаметр источника, λ — длина световой волны. Все измерения на расстояниях от 125 до 1000 м проводились при постоянном отношении γ/γ_0 , равном примерно $4,5$.

Как показано в [1], средний квадрат флуктуаций логарифма интенсивности света σ_t^2 может быть рассчитан по формуле

$$\sigma_t^2 = 1,23 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad (1)$$

где k — волновое число световой волны, C_n^2 — структурная постоянная показателя преломления. (Формула (1) получена как первое приближение метода плавных возмущений и справедлива при условиях $\sqrt{2\pi L/k} \gg l_0$ и $\sigma_t^2 \ll 1$; l_0 — внутренний масштаб турбулентности.) Определения интенсивности мерцания наземного источника сопровождались метеорологическими измерениями, что позволило рассчитать величину структурной постоянной коэффициента преломления атмосферы C_n^2 . Для этой цели измерялись вертикальные профили температуры $T(z)$ и скорости ветра $U(z)$ в слое от $0,5$ до 12 метров*. Зная значение средней температуры \bar{T}_1 и \bar{T}_2 на двух высотах $z_1 = 1$ м и $z_2 = 4$ м, можно рассчитать величину структурной постоянной температуры C_T^2 в приземном слое атмосферы по формуле

$$C_T^2 = a^2 \left[0,54 z^{-1/3} \frac{\bar{T}_2 - \bar{T}_1}{\ln(z_2/z_1)} \right]^2, \quad (2)$$

где $a^2 = a^2(Ri)$ — функция числа Ричардсона Ri (вид этой функции получен в [12]). Число Ri определяется из вертикальных профилей температуры и скорости ветра.

Так как флуктуации коэффициента преломления атмосферы обусловлены в основном флуктуациями температуры, то структурные постоянные C_T и C_n связаны следующей формулой для диапазона видимых световых волн [6]:

$$C_n = \frac{69 \cdot 10^{-6} p}{T^2} C_T, \quad (3)$$

где p — атмосферное давление в миллибарах. По формулам (1) — (3) и графику $a^2 = a^2(Ri)$ вычислялась величина C_n^2 .

Используя гипотезу о нормальности распределения логарифма интенсивности света $\ln I$ [1, 6], можно связать измеряемое в данной работе отношение $|I - \bar{I}|/\bar{I}$ с величиной флуктуаций интенсивности света $\beta^2 = (I - \bar{I})^2/\bar{I}^2$. Эта связь выражается формулой

* Градиентные измерения проводились под руководством Д. Ф. Тимановского.

$$\beta^2 = \frac{(\bar{I} - \bar{\bar{I}})^2}{\bar{I}^2} = \exp \left[2\Phi^{-1} \left(\frac{|\bar{I} - \bar{\bar{I}}|}{2\bar{I}} \right) \right]^2 - 1,$$

где Φ^{-1} — функция, обратная интегралу вероятности

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx.$$

Исходя из той же гипотезы о нормальном распределении $\ln I$, можно получить выражение для флюктуаций логарифма интенсивности

$\sigma^2 = (\bar{\ln I} - \bar{\bar{\ln I}})^2$ через β^2 [1]:

$$\sigma^2 = \ln \left(1 + \frac{(\bar{I} - \bar{\bar{I}})^2}{\bar{I}^2} \right) = \ln(1 + \beta^2).$$

Для учета ослабления мерцания за счет конечных размеров источника использовался график, взятый из работы [10]. По этому графику значения β^2 пересчитывались на источник малых угловых размеров, т. е. на источник, для которого $\gamma/\gamma_0 \ll 1$.

Всего за период измерений с 10 июля по 8 августа получено 210 значений для интенсивности мерцания наземного источника света в дневных условиях; из них 30 значений относятся к утренним и вечерним часам, когда метеоусловия нестационарны. При сравнении экспериментальных данных с метеорологическими характеристиками эти значения не учитывались, так как теоретические расчеты, которые использовались для определения C_n^2 , применимы только для стационарных метеоусловий.

Поскольку выяснение закона распределения флюктуаций интенсивности представляет большой интерес, было произведено несколько пробных записей мгновенных значений интенсивности I на шлейфовом осциллографе. На рис. 2 приведена полученная в результате обработки

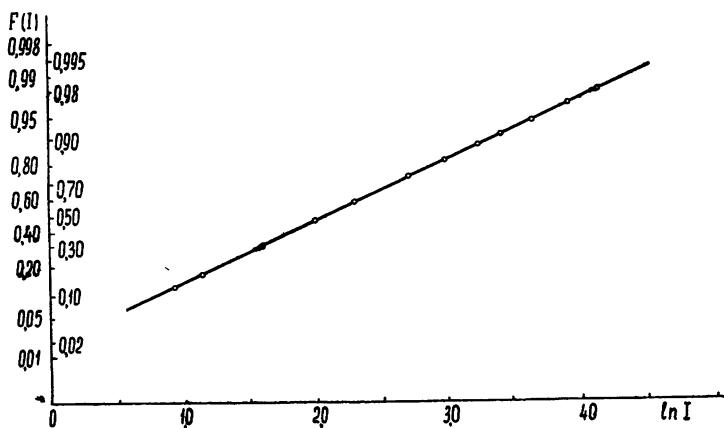


Рис. 2. Эмпирическая функция распределения вероятностей флюктуаций интенсивности света $F(I)$.

этих записей эмпирическая функция распределения вероятностей флюктуаций логарифма интенсивности. По оси абсцисс отложен $\ln I$, а по оси ординат $F(\bar{I})$ — эмпирическая функция распределения вероятностей I

в вероятностном масштабе. Нормальный закон распределения флуктуаций логарифма интенсивности выражается в этих координатах прямой линией. Как видно из графика, результат обработки записи хорошо согласуется с гипотезой о нормальном распределении $\ln I$.

На рис. 3 приведена зависимость дисперсии логарифма интенсивно-

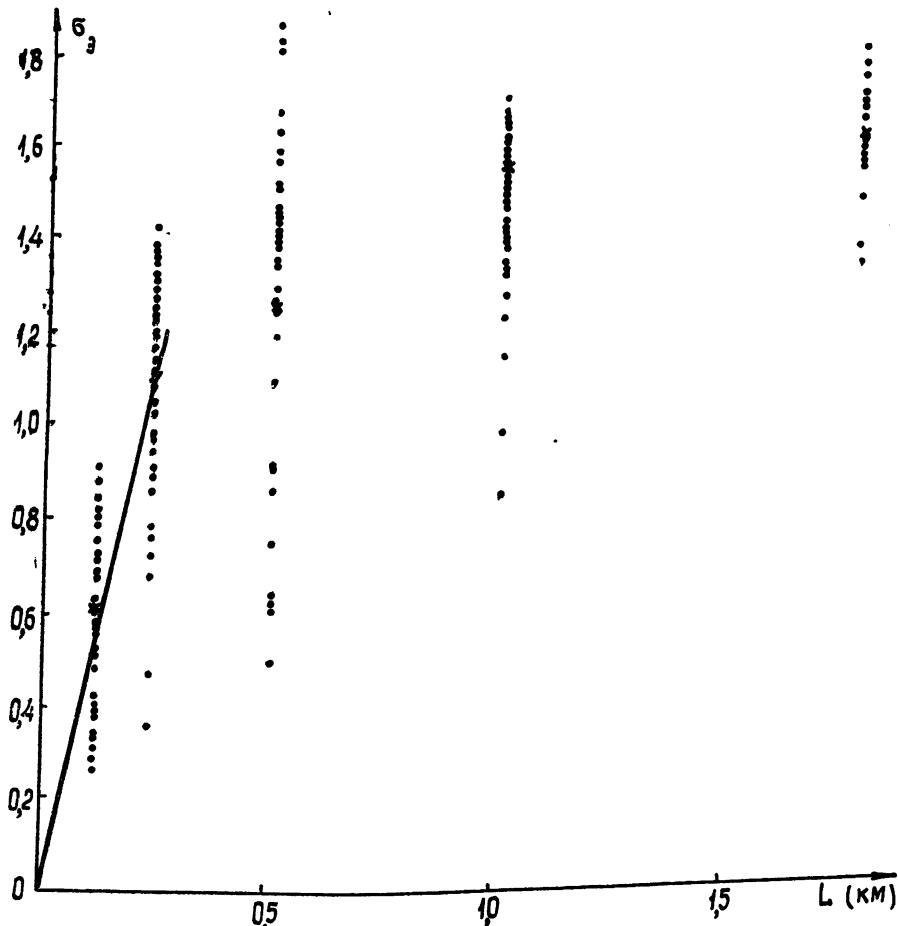


Рис. 3. Зависимость флуктуаций логарифма интенсивности света σ_0 от расстояния L .

сти σ_0 от расстояния L , проходимого световым лучом в атмосфере. Разброс значений σ_0 является естественным следствием большого разнообразия микрометеорологических условий и, прежде всего, значений вертикального градиента температуры. Значительное количество измерений, однако, позволило вычислить средние значения интенсивности мерцания для каждого расстояния и сравнить их качественно с теоретической зависимостью $\sigma \sim L^{11/12}$, следующей из формулы (1). Из графика рис. 3 видно, что средние значения экспериментальных данных ложатся на зависимость $L^{11/12}$ для малых расстояний 125 и 250 м; для больших расстояний эта зависимость σ_0 от расстояния более слабая. Подробнее это явление будет рассмотрено ниже.

Обращает на себя внимание тот факт, что относительная дисперсия $\beta = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$ на больших расстояниях может быть значительно больше 1. Это является следствием того, что флуктуации интенсивности света

при больших β имеют характер редких, коротких, очень сильных вспышек, перемежающихся большими интервалами времени, когда интенсивность меньше среднего уровня (рис. 4). В связи с этим для всякого рода практических приложений интересно знать, в течение какой части

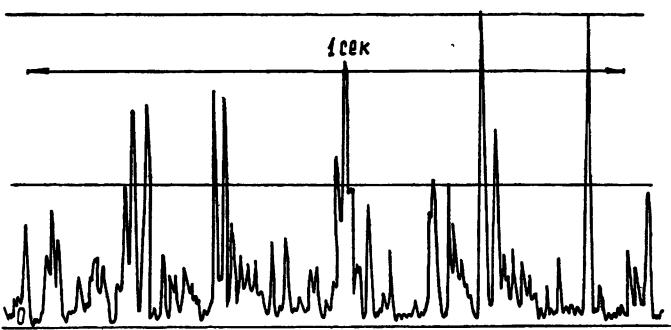


Рис. 4. Образец записи на шлейфовом осциллографе мгновенных значений интенсивности света, падающего на приемник.

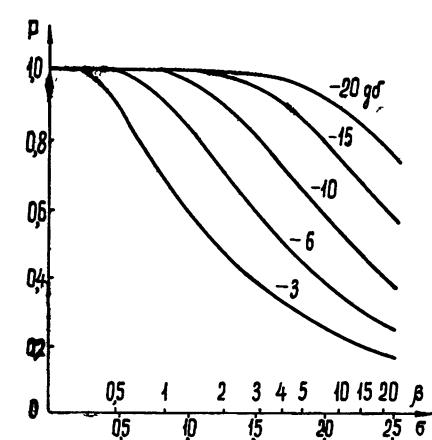
времени уровень интенсивности приходящего излучения превышает некоторое фиксированное значение, равное $\alpha\bar{I}$; иначе говоря, какова вероятность P того, что уровень интенсивности больше некоторой доли α среднего уровня. Пользуясь нормально-логарифмическим законом распределения вероятностей, можно получить следующую формулу, удобную для численных оценок:

$$P = 1 - \Phi\left(\frac{\ln\alpha + \sigma^2/2}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{0,24\alpha\sigma + \sigma^2/2}{\sigma}\right),$$

где $\alpha(\sigma) = 10\lg\alpha$, $\Phi(x)$ — интеграл вероятности. График рис. 5, на котором представлены значения P для различных α и σ , удобен для практических расчетов.

Необходимо еще отметить, что сказанное относится к источнику с малыми угловыми размерами и приемнику с малым входным отверстием. Увеличение угловых размеров источника и входного отверстия приемника может изменить закон распределения вероятностей флуктуаций полной интенсивности приходящего излучения. Этот вопрос нуждается в дополнительных экспериментальных исследованиях, особенно в случае сильных флуктуаций интенсивности $\sigma \geq 1$. До проведения этих исследований грубые оценки влияния размера входного отверстия приемника и угловых размеров источника могут быть сделаны на основе результатов, полученных в [1, 10].

Рис. 5. Вероятность P превышения интенсивности падающего на приемник света над долей α от среднего уровня \bar{I} в зависимости от α и σ .



Представляет интерес сравнить данные эксперимента с результатами расчета по формуле (1). Это сравнение прежде всего имеет целью

выяснить возможность расчета интенсивности мерцания по микрометеорологическим данным. Кроме того, В. И. Татарским показано, что в общем случае $\sigma^2 = f(C_n^2 k^{7/6} L^{11/6})$. Вид функции f определен теоретически только для случая слабого мерцания (формула (1)). Для случая сильного мерцания $\sigma \geq 1$ вид функции f пока не найден.

На рис. 6 указаны расчетные значения σ_t по формуле (1) и полу-

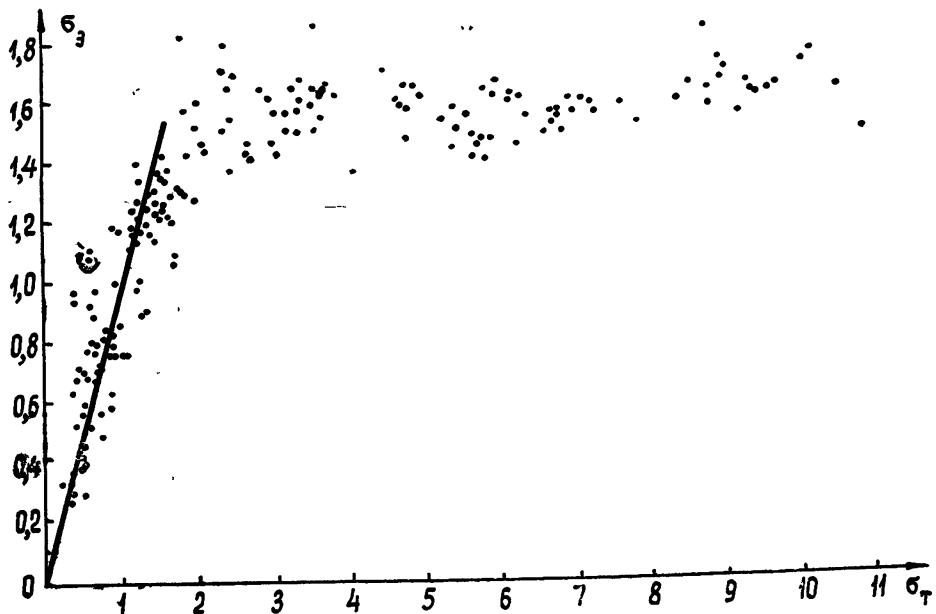


Рис. 6. Сравнение экспериментальных значений флюктуаций логарифма интенсивности σ_3 с результатами расчета σ_t по формуле (1).

ченные в результате обработки экспериментальные данные σ_3 . На рис. 7 нанесены усредненные по группам данные рис. 6.

Из анализа графиков рис. 6 и 7 следует, что для малых значений σ имеет место удовлетворительное совпадение экспериментальных и расчетных данных. Начиная со значений $\sigma \approx 1$, формула (1) становится несправедливой и зависимость σ от $\sqrt{C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}}$ будет более слабой,

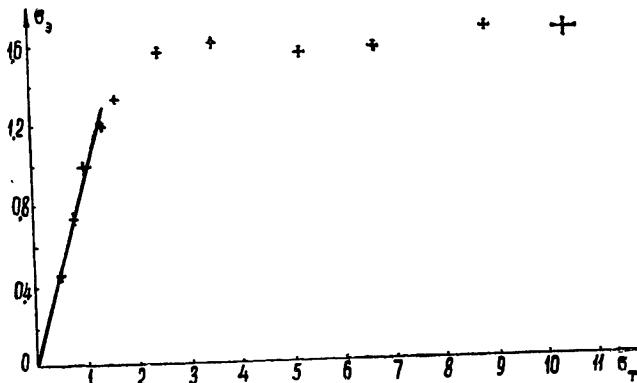


Рис. 7. Данные рис. 6, усредненные по группам.

чем (1). Отсюда следует, что мерцание со значениями $\sigma < 1$ можно считать слабым и рассчитывать его по формуле (1). Эта область значений была исследована ранее для ночных условий.

Область сильных мерцаний исследована в данной работе впервые; здесь интересен тот факт, что даже при значениях $\sigma_t \approx 10$, например, при больших расстояниях L , дисперсия логарифма интенсивности не превосходит значение $\sigma_e = 2$. Полученные экспериментальные данные могут быть использованы в дальнейшем для проверки теоретических расчетов в случае сильного мерцания.

В заключение сформулируем основные результаты работы.

1) Зависимость σ от L находится в удовлетворительном согласии с результатами первого приближения метода плавных возмущений, приводящими к формуле (1) для случая слабого мерцания $\sigma < 1$.

2) Впервые исследована область сильных флуктуаций интенсивности. Для сильного мерцания $\sigma \geq 1$ зависимость интенсивности мерцания σ от расстояния L и метеорологических условий слабее, чем для мерцания с $\sigma < 1$.

Авторы выражают признательность В. И. Татарскому за ценные советы при подготовке и проведении эксперимента, а также приносят благодарность В. М. Александрову, М. А. Воробьеву и Е. И. Ивановой за участие в проведении измерений и обработке результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. В. И. Татарский, Л. Н. Жукова, ДАН СССР, 124, 567 (1959).
3. Л. Н. Жукова, Тр. совещания по мерцанию звезд, изд. АН СССР, М., 1959, стр. 113.
4. A. M. Ellison, H. Seddon, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 112, 73 (1952).
5. О. А. Мельников, И. Г. Кучеров, Н. И. Колчинский, Тр. совещания по мерцанию звезд, изд. АН СССР, М., 1959.
6. А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Л. Р. Цвант, ДАН СССР, 123, 33 (1958).
7. В. И. Татарский, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Л. В. Терентьева, Астрон. ж., 35, 623 (1958).
8. D. Y. Portman, F. C. Elder, E. Ryznar, V. E. Noble, J. Geophys. Res., 67, 201 (1962).
9. H. Siedentopf, F. Wissak, Optik, 8, 430 (1948).
10. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 306 (1964).
11. А. И. Кон, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 790 (1964).
12. Л. Р. Цвант, Тр. ИФА, Атмосферная турбулентность, № 4, 137 (1962).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
20 ноября 1964 г.

ON STRONG FLUCTUATIONS OF LIGHT INTENSITY WHEN PROPAGATING IN ATMOSPHERIC LAYER NEAR THE EARTH

M. E. Grachyova, A. S. Gurvich

The intensity fluctuations of light have been investigated propagating along a track near the Earth. A step break has been detected of the dependence of the measured mean square of fluctuations σ_e on the corresponding theoretical value σ_t obtained in the first approximation of the smooth perturbation method. The function $\sigma_e = f(\sigma_t)$ increases with σ_t approaching to the constant value $\sigma_e = 1.6$.

УДК 621.371 : 538.245

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПУЧКОВ В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмахов, Е. А. Розенблум

Решена задача о распространении электромагнитных пучков в безграничной гиротропной среде с учетом пространственной дисперсии. Рассмотрены конкретные примеры распространения электромагнитных пучков в феррите в отсутствие и при наличии поглощения.

При решении задач о распространении электромагнитной энергии в безграничной гиротропной среде в качестве первого этапа рассматривается распространение плоских электромагнитных волн [1–4]. Следующим этапом должно быть решение краевой задачи. Хотя в принципе метод решения такой задачи очевиден (например, путем разложения на плоские волны поля, заданного на границе), без дополнительных упрощений получаемые результаты являются в большинстве случаев совершенно необозримыми.

В предельном случае, когда длина волны λ стремится к нулю, становится справедливой геометрическая оптика, и решение задачи в этом случае тривиально. Представляет интерес случай, когда отношение длины волны к характерному размеру поля λ/a мало, хотя и не равно нулю. Как будет показано ниже, здесь удается получить результаты в форме, аналогичной френелевской формуле в теории дифракции. Это позволяет в ряде случаев непосредственно воспользоваться результатами этой теории. Используемое нами приближение будем называть квазиоптическим, а решения, получаемые в этом приближении, — пучками, аналогично тому, как это делается для изотропных сред [5–8].

Хотя дальнейшее рассмотрение относится к ферритам*, результаты могут быть легко перенесены на любые гиротропные среды.

1. ПРИБЛИЖЕНИЕ КВАЗИОПТИКИ ДЛЯ ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим краевую задачу в феррите в квазиоптическом приближении. Вначале ограничимся двухмерным случаем. Пусть плоскость $z = 0$ является границей раздела феррита и диэлектрика, и в плоскости $z = +0$ задано поле $E(y, 0)$. Необходимо найти поле в произвольной точке $E(y, z)$. Предполагается, что при $z > 0$ источники отсутствуют. При учете пространственной дисперсии в феррите существуют 4 типа плоских волн [2, 3], и поле $E(y, z)$ может быть представлено как суперпозиция этих волн.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением двух проекций $E(y, z)^{**}$:

$$E_{\perp}(y, z) = x_0 E_x(y, z) + y_0 E_y(y, z). \quad (1.1)$$

* Феррит рассматривается вдали от обменного резонанса.

** Третья проекция может быть найдена из условия $\operatorname{div} D = 0$.

Тогда можно записать

$$E_{\perp}(y, z) = \sum_j \int d\gamma_y E_j(\gamma_y) [x_0 + ie_j(\gamma_y)y_0] e^{-i[\gamma_y y + \gamma_{jz}(\gamma_y)z]}. \quad (1.2)$$

Здесь введены следующие обозначения: γ_{jz} и γ_y — проекции постоянной распространения плоской волны на оси z и y ; γ_y является переменной интегрирования, и может быть взята одинаковой для всех j ; $E_j(\gamma_y)$ и $e_j(\gamma_y)$ — соответственно амплитуда и эллиптичность j -ой плоской волны. Все эти величины, кроме $E(\gamma_y)$, известны из решения задачи о безграничном феррите [3].

В плоскости $z = +0$ поле (1.2) запишется так:

$$E_{\perp}(y, 0) = \sum_j \int d\gamma_y E_j(\gamma_y) (x_0 + ie_j y_0) e^{-i\gamma_y y}. \quad (1.3)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_j E_j(\gamma_y) (x_0 + ie_j y_0) = \frac{1}{2\pi} (x_0 J_x + y_0 J_y), \quad (1.4)$$

где

$$J_{x, y} = \int E_{x, y} (y', 0) e^{i\gamma_y y'} dy'.$$

Условие (1.4) дает только два скалярных соотношения для нахождения $E_j(\gamma_y)$. Отсюда видно, что при учете пространственной дисперсии задания поля в произвольном сечении недостаточно для однозначного определения поля в данной точке. Воспользуемся дополнительными граничными условиями [9], которые запишем в виде

$$\sum_j [\mathbf{m}_j (2i\lambda a \gamma_{jz} \mathbf{M}_0 + \mathbf{H}_{0r} - \mathbf{H}_0)] = 0. \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{m}_j — амплитуда переменной части магнитного момента; \mathbf{H}_{0r} — постоянное магнитное поле на границе образца; a — постоянная решетки; $\lambda = \Theta_c/\mu_0 M_0$, где Θ_c — температура Кюри, μ_0 — магнетон Бора; $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_{10} - \mathbf{M}_{20}$, где $\mathbf{M}_{1, 20}$ — намагниченности насыщения двух подрешеток феррита.

Выразив m_j через $E_j(\gamma_y)$ [3], получим необходимые дополнительные соотношения для определения $E_j(\gamma_y)$. Из них и из (1.4) найдем

$$2\pi E_j(\gamma_y) = R_{jx}(\gamma_y) J_x + R_{jy}(\gamma_y) J_y. \quad (1.6)$$

Здесь $R_{jx}(\gamma_y)$ и $R_{jy}(\gamma_y)$ — некоторые функции γ_y .

Предположим теперь, что $E_{x, y}(y', 0)$ может быть представлено в виде

$$E_{x, y}(y', 0) = E_{x, y0}(y', 0) e^{-i\gamma_{y0} y'}, \quad (1.7)$$

где $E_{x, y0}(y', 0)$ — функция, мало меняющаяся на расстояниях порядка длины волны. Подставляя (1.6) и (1.7) в (1.2) и вводя обозначение $\eta = \gamma_y - \gamma_{y0}$, получим

$$E_{\perp}(y, z) = \sum_j \int \int d\eta dy' [R_{jx}(\eta) E_{x0}(y', 0) + R_{jy}(\eta) E_{y0}(y', 0)] \times \quad (1.8)$$

$$\times (x_0 + ie_j y_0) \exp \{-i[\eta(y - y') + \gamma_{jz}(\eta)z + \gamma_{y0}y]\}.$$

В выражении (1.8) представим $\gamma_{jz}(\eta)$ в виде ряда по η :

$$\gamma_{jz} = \gamma_{jz0} + p_j \eta + q_j \eta^2 + r_j \eta^3 + s_j \eta^4 + \dots \quad (1.9)$$

и вычислим интеграл по η методом перевала. Точка перевала находится из условия

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [\eta(y - y') + \gamma_{jz}(\eta)z] \Big|_{\eta_0} = 0, \quad (1.10)$$

т. е.

$$y - y' + p_j z = - [2q_j \eta_0 + 3r_j \eta_0^2 + 4s_j \eta_0^3 + \dots] z. \quad (1.10a)$$

Обращая ряд (1.10a), найдем

$$\eta_0 = - \frac{\tau_j}{4q_j z} - \frac{3r_j}{(2q_j)^3} \frac{\tau_j^2}{z^2} - \frac{1}{(2q_j)^4} \left(\frac{9r_j}{q_j} - 4s_j \right) \frac{\tau_j^3}{z^3} - \dots (\tau_j = y - y' + p_j z). \quad (1.10b)$$

При достаточно больших z , удовлетворяющих условиям*

$$z \gg \left| \frac{s_j}{q_j^2} \right|, \quad z \gg \left| \frac{r_j^2}{q_j^3} \right|, \quad (1.11)$$

получается следующее выражение для поля в гиротропной среде:

$$E_{\perp}(y, z) = \sum_{j=1}^4 E_{j\perp}(y, z) \exp [-i(\gamma_{jz0} z + \gamma_{y0} y)]. \quad (1.12)$$

Здесь

$$E_{j\perp}(y, z) = \int dy' E_{j\perp}(y', 0) L_j(y - y' + p_j z);$$

$$E_{j\perp}(y', 0) = \sum_{n=0, \alpha=x, y}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \frac{d^n}{d\eta^n} R_{j\alpha}(\eta) \Big|_{\eta=0} \left[x_0 + i y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^k d^k e_j(\eta)}{k!} \Big|_{\eta=0} \frac{d^k}{dy'^k} \right] \frac{d^n E_{\alpha 0}(y', 0)}{dy'^n};$$

$$L_j(y - y' + p_j z) = \sqrt{-i} \exp \left[i \frac{\tau_j^2}{4q_j z} + i \frac{r_j}{8q_j^3} \frac{\tau_j^3}{z^2} + i \left(\frac{9r_j^2}{4q_j} - s_j \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\tau_j^4}{(2q_j)^4 z^3} + \dots \right] \Bigg/ \sqrt{2\pi z \left[2q_j - \frac{3r_j}{q_j} \frac{\tau_j}{z} + \frac{1}{2q_j^2} \left(12s_j - \frac{9r_j}{q_j} \right) \frac{\tau_j^2}{z^2} - \dots \right]}.$$

Заметим сразу, что в поле $E_{j\perp}(y', 0)$ можно не учитывать члены, связанные с производными от $R_{j\alpha}(\eta)$ и $L_j(\eta)$ ввиду того, что эти функции изменяются достаточно медленно. Формулу (1.12) можно значительно упростить. Предположим вначале, что потери в среде отсутствуют, т. е. p, q, r, s и т. д. — действительные числа. Тогда $L_j(y - y' + p_j z)$ является ненарастающей функцией от y' . Пусть, кроме того, a_j — размер области по y' , где $E_{j\perp}(y', 0)$ существенно отлична от нуля. При этом,

* Неравенства (1.11) являются условиями, позволяющими пренебречь следующим членом асимптотического разложения искомого интеграла. Их выполнение эквивалентно наличию большого параметра, позволяющего проводить интегрирование методом перевала. Легко видеть, что для изотропной среды таким параметром является kz .

хотя формально интегрирование в (1.12) ведется в бесконечных пределах, основной вклад будет давать область, где $|y'| < a$; поэтому при выполнении условий

$$\left| \frac{(y - a_j + p_j z)^3}{z^2} \frac{r_j}{8q_j^3} \right| \ll \pi, \quad \left| \frac{(y - a_j + p_j z)^4}{(2q_j)^4 z^3} \left(\frac{9r_j^2}{4q_j} - s_j \right) \right| \ll \pi, \quad (1.13a)$$

$$\left| \frac{r_j}{2q_j^2} (y + p_j z - a_j) \right| \ll 1, \quad \left| \left(\frac{r_j^2}{q_j^4} + \frac{s_j}{q_j^3} \right) \left(\frac{y - a_j + p_j z}{z} \right)^2 \right| \ll 1 \quad (1.13b)$$

можно оставить только первый член в показателе экспоненты функции E_j , а также ограничиться первым членом в разложении входящего в E_j радикала в ряд по τ/z . Поле (1.12) запишется в виде

$$E_{j\perp}(y, z) = \sum_i \sqrt{\frac{-i}{4\pi q_j z}} e^{-i(\tau_{jz} y^2 + \tau_{y0} y)} \int E_{j\perp}(y', 0) \exp \left[i \frac{(y - y' + p_j z)^2}{4q_j z} \right] dy'. \quad (1.14)$$

Пусть теперь в среде существуют потери. Коэффициенты p, q, r, s и т. д., входящие в (1.12), становятся комплексными, так что, например, $\exp(i\tau_j^2/4 q_j z)$ может стать нарастающей функцией по y' . В этом случае нельзя утверждать, что существенной для интегрирования является область, где $|y'| < a_j$, хотя именно на этом были основаны сделанные упрощения. Однако, если входящие в (1.12) функции являются аналитическими, можно изменить путь интегрирования, интегрируя уже не по действительной оси, а по линии наискорейшего спуска. Если a'_j — характерный размер области вдоль этой линии, на котором подынтегральное выражение существенно отлично от нуля, то при выполнении условий (1.13), в которых a_j заменено на a'_j и p, q, r, s комплексны, можно перейти от (1.12) к (1.14). Если при деформации пути интегрирования придется пересекать особые точки $E_{j\perp}(y', 0)$, то к интегралу (1.14) нужно будет добавить соответствующие вычеты.

Заметим, что если не интересоваться фазой поля, то в отсутствие потерь вместо условий (1.13а) можно указать менее жесткие условия применимости (1.14). Действительно, рассмотрим второй член в показателе экспоненты:

$$i \frac{r_j}{8q_j^3} \frac{\tau_j^3}{z^2} = i \frac{r_j}{8q_j^3} \left[\frac{(y + p_j z)^3}{z^2} - 3 \frac{(y + p_j z)^2}{z^2} y' + 3 \frac{y + p_j z}{z^2} (y')^2 - \frac{(y')^3}{z^2} \right]. \quad (1.15)$$

Первый член в (1.15) не зависит от y' , поэтому фактор $\exp \left[i \frac{r_j}{8q_j^3} \frac{(y + p_j z)^3}{z^2} \right]$

может быть вынесен за знак интеграла в (1.12). Неучет этого члена отразится лишь на фазе поля. Для пренебрежения остальными членами при больших z достаточно потребовать, чтобы

$$3 \left(\frac{y + p_j z}{z} \right)^2 \left| \frac{r_j}{8q_j^3} a_j \right| \ll \pi. \quad (1.16)$$

Аналогично получается и условие

$$4 \left| \left(\frac{y + p_j z}{z} \right)^3 \left(\frac{9r_j^2}{4q_j} - s_j \right) \frac{a_j}{(4q_j)^4} \right| \ll \pi. \quad (1.17)$$

До сих пор мы рассматривали случай больших $z(s_j/q_j^2 z \ll 1)$. Пусть теперь z достаточно мало. Поскольку a_j — по-прежнему размер области по y' , где $E(y', 0)$ существенно отлично от нуля, ширина спектра по γ_y имеет порядок величины $1/a_j$. Если a_j достаточно велико, то только в узком интервале γ_y вблизи γ_{y0} величина $E(\gamma_y)$ отлична от нуля. Однако в этом интервале γ_{yz} может быть достаточно точно представлено несколькими членами разложения (1.6а). Это, очевидно, допустимо, если

$$|r_j| \eta_{\text{эфф}}^3 z \ll \pi; \quad |s_j| \eta_{\text{эфф}}^4 z \ll \pi; \quad \eta_{\text{эфф}} \sim 1/a_j. \quad (1.18)$$

Проведя интегрирование по η и предполагая, что $e_j(\eta)$ и $R_{jx, y}(\eta)$ — достаточно плавные функции, придем снова к формуле (1.14).

С учетом потерь в среде для справедливости формулы (1.14) потребуется выполнение тех же условий (1.13), но только $\eta_{\text{эфф}}$ будет характеризовать размер области, где $E(y', 0)$ существенно отлично от нуля по линии наискорейшего спуска. По-существу, возможность представить поле $E(y, z)$ в виде (1.14) связана с тем, что вклад в поле дает область, где $\tau/z \ll 1$.

Таким образом, поле в гиротропной среде может быть представлено в виде (1.14) для всех y при z , удовлетворяющих условиям (1.18), и для y , которые подчиняются соотношениям (1.13) или (1.16) — (1.17), при z , удовлетворяющих условиям (1.11).

Легко видеть, что условия (1.11), (1.13) и (1.15) можно сделать совместными. Для этого необходимо, чтобы $\eta_{\text{эфф}}$ было достаточно малым:

$$\eta_{\text{эфф}}^4 \ll q^2/s^2, \quad \eta_{\text{эфф}} \ll q^3/r^3. \quad (1.19)$$

В этом случае формула (1.14) справедлива для всех z . Кроме того, при малых $\eta_{\text{эфф}}$ излучение происходит в малом угле, поэтому в отсутствие потерь условия (1.16) — (1.17) удовлетворяются в той области значений y , где поле заметно отличается от нуля. В этом случае (1.14) дает, с точностью до фазы, выражение для поля, справедливое во всем пространстве, где это поле существенно отлично от нуля.

Заметим, что для изотропной среды формула (1.14) тождественна френелевскому приближению в теории дифракции. При этом условия (1.18), (1.11) и (1.17) принимают следующий вид (мы ограничимся простейшим случаем $\gamma_{y0} = 0$):

$$z \ll \frac{\pi k^3}{8\eta_{\text{эфф}}^4}; \quad z \gg \frac{1}{2k}; \quad \left(\frac{y}{z}\right)^3 ak \ll 2\pi. \quad (1.20)$$

2. ПАРАМЕТРЫ ПУЧКОВ

Из формулы (1.14) видно, что поле в феррите при учете пространственной дисперсии может быть представлено в виде суммы четырех полей, по-разному распространяющихся и имеющих различную поляризацию. Каждое из этих полей мы будем называть пучком. Распространение пучка происходит аналогично распространению электромагнитного поля в изотропной среде в квазиоптическом приближении.

Как известно, в изотропной среде поле в этом приближении имеет вид

$$E_1(y, z) = e^{-ikz} \sqrt{\frac{ik}{2\pi z}} \int E_1(y', 0) \exp\left[-\frac{ik(y-y')^2}{2z}\right] dy'. \quad (2.1)$$

Отсюда видно, что при отсутствии потерь можно воспользоваться результатами решения задач в изотропной среде, производя замену $k \rightarrow -\frac{1}{2q}$, $y \rightarrow y + pz$ всюду, кроме экспоненты e^{-ikz} , где $k \rightarrow \gamma_{jz0}$.

В отсутствие потерь параметр p_j имеет простой физический смысл. Чтобы выяснить его, устремим q_j к нулю. Тогда

$$E_{j\perp}(y, z) = \sum_j \exp[-i(\gamma_{jz0}z + \gamma_{y0}y)] E_{j\perp}(y + p_j z, 0). \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что $-p_j$ дает тангенс угла между направлением движения j -го пучка и осью z . Этот угол, естественно, совпадает с углом наклона вектора групповой скорости к оси z . Действительно,

$$v_{rp} = y_0 \frac{\partial \omega}{\partial \gamma_y} + z_0 \frac{\partial \omega}{\partial \gamma_z}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{tg}(\overset{\wedge}{v_{rp}} \overset{\wedge}{z_0}) = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma_y} / \frac{\partial \omega}{\partial \gamma_z} = -\frac{\partial \gamma_z}{\partial \gamma_y} = -p_j. \quad (2.4)$$

Различие в p_j для разных j приводит к тому, что пучки распространяются в разных направлениях.

Параметр q_j ответственен за расплывание пучков. Это видно из следующих соображений. Множитель $\exp[i(y - y' + p_j z)^2/4q_j z]$ обладает «фильтрующими» свойствами, причем ширина интервала $\Delta y'$, дающего заметный вклад в интеграл, связана с $|q_j|$: увеличение $|q_j|$ ведет к увеличению этого интервала, т. е. к расширению области по y , где поле существенно отлично от нуля.

Мы не будем приводить явный вид величин, определяющих амplitуды пучков $E_{j\perp}(y, 0)$. Анализ их показывает, что эффективно возбуждаются пучки с малыми постоянными распространения. Поэтому очень мала амплитуда четвертого пучка; кроме того, у него велика мнимая часть γ_4 , так что этим пучком мы в дальнейшем не будем интересоваться. Третий пучок эффективно возбуждается лишь в резонансе, где $\gamma_1 \sim \gamma_3$, когда потери очень малы ($\alpha = \Delta H/H \sim 10^{-8}$, что имеет место в гранатах при низкой температуре). Однако даже в случае, когда амплитуды «спиновых» пучков достаточно малы, их учет может представить интерес, так как из-за различия в p_j эти пучки в пространстве могут разделиться с электромагнитными.

Во всех остальных случаях, если интересоваться пучками большой амплитуды, достаточно вести суммирование по индексам 1, 2 в (1.14). При этом отпадает надобность в дополнительных граничных условиях, и используются только уравнения (1.3).

Вернемся к параметрам p_j и q_j . В системе координат, изображенной на рис. 1, имеем (временно опуская индекс j)

$$p = \frac{\partial \gamma_z}{\partial \gamma_y} = \frac{(\partial \gamma / \partial \theta) \sin(\alpha - \theta) - \gamma \cos(\alpha - \theta)}{(\partial \gamma / \partial \theta) \cos(\alpha - \theta) + \gamma \sin(\alpha - \theta)} = -\operatorname{ctg} \xi. \quad (2.5)$$

Легко найти угол между групповой и фазовой скоростями:

$$\operatorname{tg} \kappa = -\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} / \gamma. \quad (2.6)$$

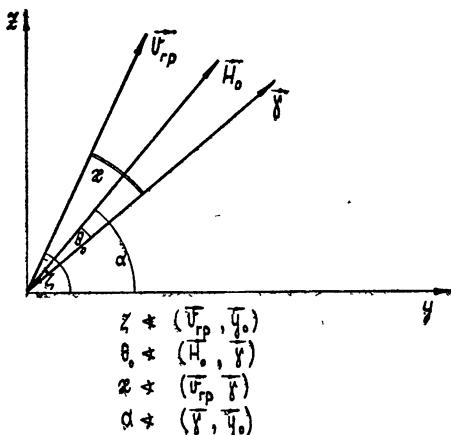


Рис. 1.

Исследуем величину $f = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} / \gamma$ в некоторых частных случаях (заметим, что $f \equiv p$ при $\alpha - \theta = \pi/2$).

1. Дисперсионные соотношения для электромагнитных и спиновых ветвей независимы. Это имеет место при наличии не очень малых потерь во всем диапазоне частот, а при их отсутствии — вне резонанса [2]. Мы не будем приводить общие выражения для f , ограничившись следующими двумя случаями.

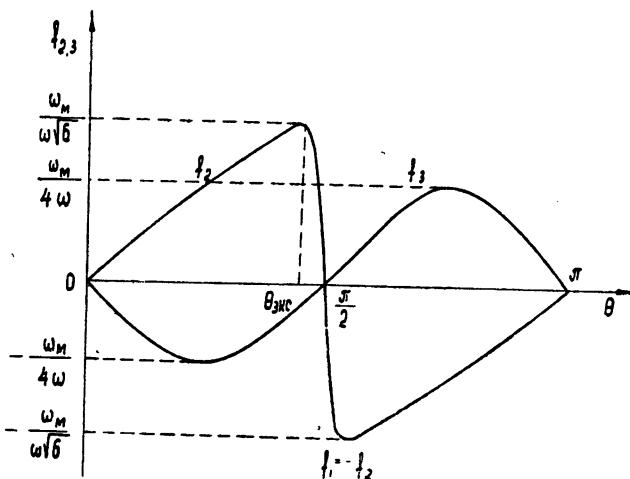


Рис. 2.

а) Гиротропия мала ($\omega \gg \omega_m = 4\pi\gamma_e M_0$)*. Функции (рис. 2) $f_1, 2, 3$ являются периодическими функциями с периодом π :

$$f_{1, 2} \simeq \mp \frac{\omega_m}{2\omega} \sin \theta \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \theta_{\text{екс}}; \quad (2.7)$$

* Здесь γ_e — гиromагнитное отношение.

$$f_{1,2} \simeq \mp \frac{\omega_m}{\omega} \frac{\left[1 - \frac{2}{3} (\pi/2 - \theta)^2 \right] (\pi/2 - \theta)}{\sqrt{(1 + 4\pi M_0/H_0)^2 \omega_H^2/\omega^2 + 4(\pi/2 - \theta)^2}} \text{ при } \theta_{\text{экст}} \ll \theta \ll \frac{\pi}{2}; \quad (2.7a)$$

$$f_3 \simeq -\frac{\omega_m}{4\omega} \sin 2\theta. \quad (2.8)$$

Здесь $\omega_H = \gamma_c H_0$.

Выражение (2.7) справедливо при $\cos \theta \gg \omega_m/2\omega \ll 1$. Вблизи $\theta = \pi/2$ это условие нарушается, и там справедлива формула (2.7а). Выражения (2.7) и (2.7а) переходят друг в друга, причем

$$f_{1,2 \text{ экст}} \simeq \mp \frac{\omega_m}{\omega \sqrt{6}} \quad \text{при } \theta_{1,2 \text{ экст}} = \frac{\pi}{2} \mp \frac{\omega_m}{\omega \sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\pi \frac{M_0}{H_0}}. \quad (2.9)$$

б) Гиротропия не мала ($\omega \sim \omega_H = \gamma_c H_0$), но $\theta \ll 1$. Тогда

$$f_1 \simeq \frac{i\omega_m \theta / 2 \alpha \omega_H}{1 - i\omega_m \theta^2 / 2 \alpha \omega_H}; \quad f_3 = -f_1; \quad (2.10)$$

$$f_2 \simeq \frac{\theta}{2} \left[\frac{-\omega_m / 2 \omega_H + i\theta^2 \omega_m / 2 \alpha \omega_H}{1 - i\theta^2 \omega_m / 2 \alpha \omega_H} \right]. \quad (2.11)$$

Отметим, что $|f_1|$ имеет резкий максимум при $\theta = \sqrt{2\alpha\omega_H/\omega_m}$.

2. Пусть теперь потери очень малы ($\alpha < 10^{-3}$). Тогда в резонансе дисперсионные соотношения для волн 1 и 3 нельзя рассматривать независимо. Воспользовавшись приведенным в работе [2] дисперсионным соотношением и решая его методом возмущений при малых θ , получим

$$f_{1,3} \simeq \pm \frac{1}{2} \omega_m \theta \left[(\omega - \omega_H - i\alpha\omega)^2 + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \gamma_c H_E a^2 (\omega_B - \omega) \right]^{-1/2}. \quad (2.12)$$

Здесь H_E — обменное поле. Выражение (2.12) переходит в (2.10), если $(\alpha\omega)^2 \gg 4(\omega^2/c^2) \epsilon \gamma_c H_E a^2 (\omega_B - \omega)$ (где $\omega_B = \omega_H + \omega_m$), θ достаточно мало, а $\omega = \omega_H$.

Рассмотрим теперь параметр q_j , ограничившись некоторыми частными случаями. Легко показать, что при $\alpha = \theta = \pi/2$

$$q = \frac{1}{2\gamma^3} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \theta^2} - \gamma^2 - \frac{1}{4\gamma^2} \left(\frac{\partial \gamma^2}{\partial \theta} \right)^2 \right]. \quad (2.13)$$

При малой гиротропии, отбросив члены 2-го порядка по ω_m/ω , получаем из (2.13), что

$$q_{1,2} = -c \sqrt{\epsilon} / 2\omega \quad (2.14)$$

для углов, удовлетворяющих условию $\cos \theta \gg \omega_m/2\omega$. Вблизи $\theta = \pi/2$ это условие нарушается, так что для углов $\beta = \pi/2 - \theta \ll 1$

$$q_{1,2} = -\frac{1}{2k} \left[1 \pm \frac{1 - 2\beta^2}{\sqrt{(\omega_B/\omega)^2 + 4\beta^2}} \frac{\omega_m}{\omega} \right]. \quad (2.15)$$

Выражение (2.14) показывает, что с данной точностью расплывание для обоих пучков происходит одинаково, и при том так же, как в изо-

тропной среде. Интересно, что при $\theta = \pi/2$ величина $q_2 = \omega_m/2k\omega_B$ может быть сделана достаточно малой. Это означает, что для соответствующего пучка расплывание будет малым при $\theta \approx \pi/2$.

Рассмотрим еще случай $\omega = \omega_H$. Тогда для $\theta = 0$

$$q_1 = -\frac{1}{4k} \sqrt{\frac{\omega_m}{\alpha\omega_H}} e^{-i\pi/4}; \quad q_2 = -\frac{1}{4k} \frac{1 + \omega_m/4\omega_H}{\sqrt{1 + \omega_m/\omega_H}}. \quad (2.16)$$

Видно, что для необыкновенной волны расплывание становится сильным на резонансной частоте.

3. ОБОБЩЕНИЕ НА ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Перейдем к рассмотрению трехмерного случая.

Поле $E_{\perp}(x, y, 0)$ запишем в следующем виде:

$$E_{\perp}(x, y, 0) = [x_0 E_{x0}(x, y, 0) + y_0 E_{y0}(x, y, 0)] \exp[-i(\gamma_{x0}x + \gamma_{y0}y)], \quad (3.1)$$

где $E_{x, y, 0}(x, y, 0)$ — функция, мало меняющаяся на расстояниях порядка длины волны в феррите. Введем величину $\eta_{x, y} = \gamma_{x, y} - \gamma_{x, 0}$ и разложим $\gamma_{jz}(\eta_x, \eta_y)$ в ряд по η_x, η_y :

$$\gamma_{jz} = \gamma_{jz0} + p_{jx}\eta_{jx} + p_{jy}\eta_{jy} + q_{jx}\eta_{jx}^2 + q_{jy}\eta_{jy}^2 + h_j\eta_{jx}\eta_{jy} + \dots \quad (3.2)$$

Проводя вычисления обычным образом и используя приближения, аналогичные приведенным в разделе 1, получаем следующее выражение для поля:

$$E_{\perp}(x, y, z) = \sum_i \frac{-i \exp[-i(\gamma_{jz0}z + \gamma_{x0}x + \gamma_{y0}y)]}{2\pi z \sqrt{4q_{jx}q_{jy} - h_j^2}} \int E_{j\perp}(x', y', 0) dx' dy' \times \\ \times \exp i[q_{jy}(x - x' + p_{jx}z)^2 + q_{jx}(y - y' + p_{jy}z)^2 + \\ + h_j(x - x' + p_{jx}z)(y - y' + p_{jy}z)] / [(4q_{jx}q_{jy} - h_j^2)z]. \quad (3.3)$$

Здесь аналогично (1.12)

$$E_{j\perp}(x, y, 0) = [x_0 + ie_j(0)y_0][E_{x0}(x, y, 0)R_{jx}(0) + E_{y0}(x, y, 0)R_{jy}(0)]. \quad (3.4)$$

Формула (3.3) применима при всех y , если

$$\left(\eta_x \text{ эф } \frac{\partial}{\partial \eta_x} + \eta_y \text{ эф } \frac{\partial}{\partial \eta_y} \right)_0^3 \gamma_{jz} z + \left(\eta_x \text{ эф } \frac{\partial}{\partial \eta_x} + \eta_y \text{ эф } \frac{\partial}{\partial \eta_y} \right)_0^4 \gamma_{jz} z \ll \pi. \quad (3.5)$$

Знакок «0» означает, что производные берутся в точке $\eta_x = 0, \eta_y = 0$; η_x эф и η_y эф — эффективная ширина спектра соответственно в плоскостях xz и yz .

Выясним теперь, когда трехмерный случай может быть сведен к двухмерному. Легко видеть, что для этого необходимо, а) чтобы $E_{j\perp}(x, y, 0)$ можно было бы представить в виде суммы произведений функций, каждая из которых зависит лишь от одной координаты, б) чтобы $h_j = 0$.

Первое условие всегда выполнимо. Легко показать, что поворотом координатной системы на некоторый угол φ_j вокруг оси z можно всегда добиться выполнения и 2-го условия.

Особый интерес представляет случай, когда φ_j совпадают для всех j , т. е. когда $h_j = 0$ для всех j одновременно. Именно такая ситуация

имеет место, например, в частном случае, когда все γ_j и ось z лежат в одной плоскости. В этом важном случае трехмерная задача полностью сводится к двухмерной.

4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Воспользуемся полученными результатами и на конкретном примере рассмотрим, как распространяются электромагнитные волны в гиротропной среде. Зададим функцию $E(y, 0)$ следующим образом:

$$E(y, 0) = x_0 \exp(-vy^2 + iwy^2), \quad (4.1)$$

где v и w — некоторые константы ($v > 0, w > 0$).

1. Вначале не будем учитывать потери, считая параметры пучков p_j и q_j действительными. Тогда поле в произвольном сечении, определяемое из (1.14), запишется так:

$$\begin{aligned} E(y, z) = \sum_j e^{-i\gamma_{jz}z} \frac{\theta_{2,1}}{\theta_{2,1} - \theta_{1,2}} (x_0 + ie_j y_0) \sqrt[4]{\frac{-1}{(4q_j zw + 1)^2 + (4q_j zv)^2}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{v(y + p_j z)^2}{(1 + 4wq_j z)^2 + (4vq_j z)^2}\right] \exp i\left\{\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1 + 4wq_j z}{4vq_j z} + \right. \\ \left. + \frac{[(v^2 + w^2)4q_j z + w](y + p_j z)^2}{(1 + 4wq_j z)^2 + (4vq_j z)^2}\right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

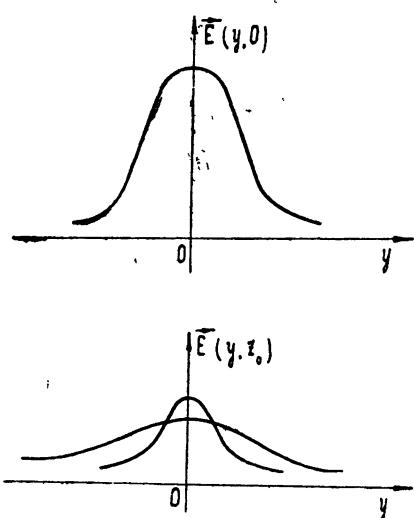


Рис. 3.

оборот, если $\omega \sim \omega_B$, различие в расплывании пучков становится очень большим.

2. Пусть теперь в среде присутствуют потери. Параметры p_j и q_j комплексны: $p_j = p'_j - ip''_j$; $q_j = q'_j - iq''_j$. Подставляя в (1.14) поле $E(y, 0)$, задаваемое (4.1), получим (интегрируя, согласно разделу 1, по линии наискорейшего спуска):

В частном случае, когда феррит намагнчен вдоль оси z и $\gamma_{jz0} = \gamma_{j0} = k\sqrt{\mu \pm \mu_a}$ (при этом $p_j = 0$, $e_j = \mp 1$), поле в любом сечении феррита складывается из пучков, распространяющихся вдоль оси z , с постоянными расстояниями γ_{10} и γ_{20} , и поляризованных по правому и левому кругу. Поскольку каждый из них расплывается по-своему (рис. 3), суммарное поле оказывается поляризованным по эллипсу с эллиптичностью, зависящей от координаты y (тогда как поле (4.1) в плоскости $z = 0$ поляризовано вдоль оси x). Различие в расплывании пучков определяется членами третьего порядка по гиротропии, так что при $\omega \gg \omega_B$ на не очень больших расстояниях этот эффект оказывается слабо. На-

$$E(y, z) = \sum_j \sqrt{\frac{-i}{4q_j z}} \frac{\exp(-i\gamma_{jz} z)}{\sqrt[4]{L_j^2 + \varepsilon_j^2}} \exp([L_j(G_j^2 - L_j H_j) - (L_j F_j^2 - 2G_j \varepsilon_j F_j + H_j \varepsilon_j^2)]/(L_j^2 + \varepsilon_j^2)) \exp\left\{i \frac{1}{2} \arctg \frac{\varepsilon_j}{L_j} - [\varepsilon_j(F_j^2 - \varepsilon_j K_j) - (G_j^2 \varepsilon_j - 2L_j F_j G_j + L_j^2 K_j)]/(L_j^2 + \varepsilon_j^2)\right\} \frac{e_{2,1}(x_0 + i e_j y_0)}{(e_{2,1} - e_{1,2})}, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} L_j &= v + \frac{q'_j}{4|q_j|^2 z}; & G_j &= \frac{p'_j z q'_j - q'_j (y + p'_j z)}{4|q_j|^2 z}; \\ F_j &= -\frac{1}{4|q_j|^2 z} [(y + p'_j z) q'_j + q''_j p'_j z]; & \varepsilon_j &= w + \frac{q'_j}{4|q_j|^2 z}; \\ H_j &= -\frac{1}{4|q_j|^2 z} [2p''_j z (y + p'_j z) q'_j - q'_j (y + p'_j z)^2 + q''_j p'^2_j z^2]; \\ K_j &= \frac{1}{4|q_j|^2 z} \{[(y + p'_j z)^2 - p'^2_j z^2] q'_j + 2p''_j q'_j z (y + p'_j z)\}. \end{aligned}$$

Устремляя в (4.3) q_j к нулю, найдем, что теперь при наличии потерь в среде направление движения j -го пучка определяется параметром $p'_j - (w/v) p''_j$, имеющим смысл тангенса угла наклона групповой скорости к оси z . Этот параметр зависит от вида функции $E(y, 0)$, в нашем случае от величин v и w из (4.1).

Определим, как изменяется поле $E_j(y, z)$ при $p_j = 0$, когда $q'_j = q''_j$, $q'_j < 0$. Из (4.3) легко найти, что амплитуда j -го пучка пропорциональна $\exp[-\Phi(z)y^2]$, где

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \operatorname{Re} \left[\frac{M_j^2}{N_j^2} - M_j \right]; & N_j &= v - \frac{\sqrt{2}}{8|q_j|z} - i \left(w - \frac{\sqrt{2}}{8|q_j|z} \right); \\ M_j &= v - iw. \end{aligned} \quad (4.4)$$

На рис. 4 приведен график $\Phi(z)$ при $0 \leq w \leq v(\sqrt{2} - 1)$. При всех $w < v(\sqrt{2} + 1)$ графики $\Phi(z)$ имеют подобный вид. При $w > v(\sqrt{2} + 1)$ исчезает максимум $\Phi(z)$. Из рис. 4 видно, что в плоскости $z = z_1$ пучок фокусируется, затем он начинает расплываться, причем в плоскости $z = z_2$ повторяется первоначальное распределение поля. При $z = z_3$ амплитуда пучка не зависит от y . При $z > z_3$ амплитуда нарастает с ростом y , и при $z \rightarrow \infty$ распределение поля снова не зависит от y . Выражение для поля (4.3), полученное в квазиоптическом приближении, справедливо, как уже указывалось, внутри не очень большого интервала по y . В рассматриваемом случае значительная часть поля сосредоточена вне этого интервала.

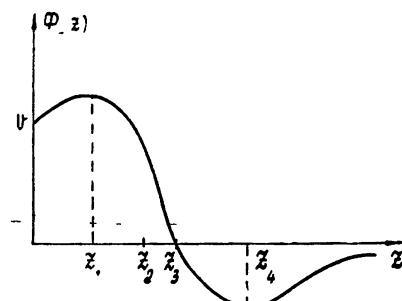


Рис. 4.

Интересно проследить, к чему приводит учет следующего приближения. Воспользуемся формулой (1.12), в экспоненте которой сохраним члены порядка $(y - y')^4$ (члены порядка $(y - y')^3$ отсутствуют, так как в силу симметрии $r_i \equiv 0$). Вычисляя интеграл по y' методом перевала, получим

$$E_j(y, z) = \sqrt{\frac{-i}{4\pi q_j z}} e^{-i\gamma_{jz_0} z} \exp \left[(M_j^2/N_j - M_j)y^2 - i \frac{s_j}{(2q_j)^4 N_j^4 z^3} \frac{M_j^4 y^4}{N_j^4 z^3} \right] \times \\ \times \left[N_j + 6i \frac{s_j}{(2q_j)^4 N_j^2 z^2} \frac{M_j^2 y^2}{N_j^2 z^2} \right]^{-1/2} \frac{e_{2,1}}{e_{2,1} - e_{1,2}} (x_0 + ie_j y_0), \quad (4.5)$$

где $s_j = q_j/8k^2$.

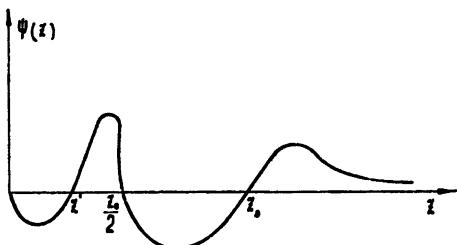


Рис. 5.

Качественный ход $\Psi(z) = \operatorname{Re}[is_j M_j^4/(2q_j)^4 N_j^4 z^3]$ представлен на рис. 5. Видно, что теперь, с учетом $\Psi(z)$ амплитуда пучка спадает по y при $z > z_0$. Что же касается $z < z_0$, то здесь в двух интервалах $z(0 \leq z \leq z')$ и $z_0/2 \leq z \leq z_0$) амплитуда нарастает по y , и в этих интервалах нужно либо учитывать следующий член в (1.12), либо, ограничиваясь малыми y , рассматривать только $\Phi(z)$.

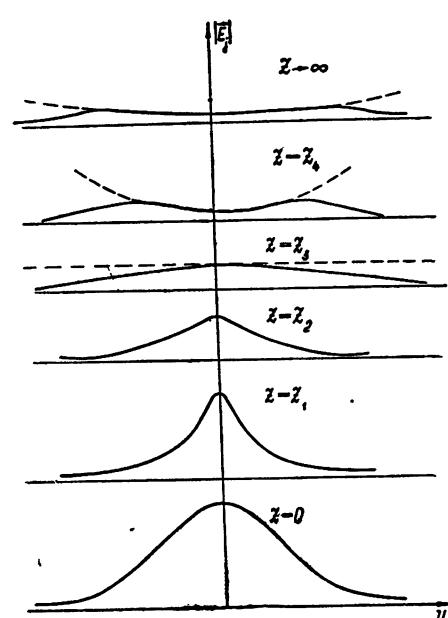


Рис. 6.

Авторы выражают признательность В. И. Таланову за внимание к работе.

На рис. 6 сплошными линиями показано, как меняется распределение поля в каждом сечении при распространении пучка в гиротропной среде с потерями. Распределение поля, которое получается в квази-оптическом приближении, отмечено на рисунке пунктиром. Заметим, что когда в феррите вдоль магнитного поля распространяется правоизированый пучок на частоте $\omega = \omega_H$ и с q_1 , определяемым формулой (2.16), то он затухает раньше, чем успеет сказаться расплывание.

В заключение отметим, что результаты, полученные в работе, могут быть легко перенесены на случай активных линейных сред с тензорными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
2. М. А. Гинзбург, ФТТ, 2, 913 (1960).
3. В. А. Auld, J. Appl. Phys., 31, 1642 (1960).
4. Г. М. Генкин, Ю. А. Отмаков, Е. А. Розенблум, ФТТ, 5, 2968 (1963).
5. Г. Д. Малюжинец, УФН, 69, 321 (1959).
6. G. Couvaï, F. Schwing, IRE Trans., AP-9, 248 (1963).
7. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 313 (1964).
8. В. З. Каценеленбаум, УФН, 83, 81 (1964).
9. W. S. Ament, G. T. Rado, Phys. Rev., 97, 1558 (1955).

Поступила в редакцию
10 октября 1964 г.

ON ELECTROMAGNETIC BEAM PROPAGATION IN GYROTROPIC MEDIA

G. L. Gourevich, Yu. A. Otmakhov, E. A. Rosenblum

The problem has been solved of the electromagnetic beam propagation in an infinite gyrotropic medium, the spatial dispersion being taken into account. The concrete examples have been considered of the electromagnetic beams propagating in a ferrite both in the absence and in the presence of absorption.

УДК 621.371.11

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ РАЗРЫВЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕД

Л. А. Островский

Показано, что при достаточно общих условиях возможны два типа разрывов электромагнитного поля в нелинейной среде: ударные волны и вращательные разрывы. Рассмотрено образование вращательных разрывов при взаимодействии ударных волн. Показано, что стационарные вращательные конфигурации возможны лишь при медленном (квазистатическом) вращении поля; эффекты релаксации и дисперсии приводят к расплыванию вращательных разрывов.

1. В настоящее время рассмотрен лишь один тип разрывов электромагнитного поля в нелинейной среде — ударные электромагнитные волны, в которых направление поляризации поля при переходе через разрыв не меняется. Ввиду векторного характера электромагнитного поля следует ожидать, что возможны также разрывы с изменением направления векторов полей. Чтобы выяснить, какие вообще типы разрывов возможны, рассмотрим граничные условия на скачке в их векторной форме [1]:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = \frac{v_n}{c} (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \quad D_{n2} = D_{n1}, \quad (1)$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = -\frac{v_n}{c} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1), \quad B_{n2} = B_{n1}.$$

Здесь \mathbf{n} — нормаль к поверхности разрыва, v_n — нормальная компонента скорости перемещения разрыва; индексы 1 и 2 относятся к значениям напряженностей поля и индукций перед и за разрывом.

В реальных случаях нелинейны либо только магнитные, либо только электрические свойства среды; положим для определенности, что связь $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ линейна (как всегда, случай $\mathbf{D} = D(\mathbf{E})$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ рассматривается совершенно аналогично). Предположим еще, что среда изотропна по отношению к компоненте поля, касательной к поверхности разрыва*. Тогда, исключая из (1) \mathbf{E} и \mathbf{D} и полагая $\mathbf{H}_{\tau_i} = H_{\tau_i} \boldsymbol{\tau}_i$, $\mathbf{B}_{\tau_i} = B_{\tau_i} \boldsymbol{\tau}_i$ ($i = 1, 2$, $\boldsymbol{\tau}_i$ — единичный вектор, касательный к поверхности разрыва), получим

$$\left(\mathbf{H}_{\tau_2} - \frac{\epsilon v_n^2}{c^2} \mathbf{B}_{\tau_2} \right) \boldsymbol{\tau}_2 = \left(\mathbf{H}_{\tau_1} - \frac{\epsilon v_n^2}{c^2} \mathbf{B}_{\tau_1} \right) \boldsymbol{\tau}_1. \quad (2)$$

Следовательно, возможны два различных случая:

$$[\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2] = 0, \quad \frac{\epsilon v_n^2}{c^2} = \frac{\mathbf{H}_{\tau_2} - \mathbf{H}_{\tau_1}}{\mathbf{B}_{\tau_2} - \mathbf{B}_{\tau_1}} \quad (3)$$

* Разумеется, при наличии этого поля среда может стать анизотропной по отношению к другим поперечным возмущениям.

и

$$[\tau_1 \tau_2] \neq 0, \quad \frac{\epsilon v_n^2}{c^2} = \frac{H_{\tau_1}}{B_{\tau_1}} = \frac{H_{\tau_2}}{B_{\tau_2}}. \quad (4)$$

Первый случай соответствует обычно рассматриваемой ударной волне; поля по обе стороны ее фронта лежат в одной плоскости. При этом из (1) следуют известные граничные условия, связывающие скачки электрического и магнитного полей на разрыве:

$$\frac{E_{2x} - E_{1x}}{B_{2y} - B_{1y}} = \frac{H_{2y} - H_{1y}}{\epsilon(E_{2x} - E_{1x})} = \frac{v_n}{c} \quad (5)$$

(направление распространения разрыва здесь совмещено с осью z , плоскость поляризации магнитного поля — с плоскостью yz).

Во втором случае для однозначной и монотонной нелинейной зависимости $B_\tau(H_\tau)$ из (4) следует: $H_{1\tau} = H_{2\tau} = H_\tau$, $B_{1\tau} = B_{2\tau} = B_\tau$, т. е. векторы \mathbf{H} и \mathbf{B} испытывают поворот около нормали к фронту разрыва, оставаясь постоянными по величине*. Электрическое поле можно представить тогда в виде $E_\tau = E_0 + E_{\tau\tau}$, где E_0 — непрерывное поле, а $E_{\tau\tau}$ испытывает лишь поворот на тот же угол, что и H_τ . Условия (1) здесь дают

$$\frac{E_\tau}{B_\tau} = \frac{H_\tau}{\epsilon E_0} = \frac{v_n}{c}. \quad (6)$$

Отметим, что скорость разрыва не зависит от угла поворота векторов полей. Такой разрыв, как и в магнитной гидродинамике, естественно назвать вращательным.

2. Как известно [1, 2], ударные волны могут возникать в результате распространения волн с непрерывным изменением поля (простых волн). Для вращательных разрывов аналогичная ситуация не имеет места (см. ниже). Одной из возможных причин образования таких разрывов является взаимодействие ударных волн с различными направлениями поляризации**. Рассмотрим, например, «столкновение» двух ударных волн с параллельными фронтами, поля за фронтами которых различны по направлению, но одинаковы по модулю ($H_{\tau_1}^2 = H_{\tau_2}^2 = H_0^2$, $E_{\tau_1}^2 = E_{\tau_2}^2 = E_0^2$); в области между фронтами ударных волн поперечные поля отсутствуют.

После соприкосновения фронтов ударных волн в некоторой точке $z = z_0$ в обе стороны от этой точки могут распространяться несколько различных автомодельных волн (ударных, вращательных разрывов и т. д.)***. Сделаем предположение (подтверждающееся результатом для указанного ниже интервала углов), что в каждом направлении от точки z_0 отходит одна ударная волна и один вращательный разрыв (сравнение скоростей волн показывает, что впереди распространяется ударная волна). Их фронты разделяют пять областей различных постоянных значений векторов полей.

Из симметрии ясно, что результирующие поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в области между вращательными разрывами лежат на биссектрисе угла, образованного полями взаимодействующих ударных волн. Целесообразно поэтому выбрать систему координат так, как показано на рис. 1. Записывая гра-

* Для немонотонной зависимости $B_\tau(H_\tau)$ существуют и другие возможности.

** Общая задача о взаимодействии электромагнитных ударных волн с одинаковой поляризацией рассмотрена в работе [3].

*** В отличие от взаимодействия одинаково поляризованных волн, когда после взаимодействия в каждом направлении распространяется лишь одна из автомодельных волн (т. е. волны, поля в которых зависят только от отношения $(z - z_0)/(t - t_0)$) [3].

ничные условия (5) и (6), нетрудно получить уравнение, определяющее H по исходному полю H_0 сходящихся волн:

$$\left(\frac{H}{H_0} - 1\right)^{1/2} \left(\frac{B}{B_0} - 1\right)^{1/2} + \left(\frac{HB}{H_0 B_0}\right)^{1/2} \left(\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi}\right) = 1. \quad (7)$$

При известном H величина E определяется без труда. При $\varphi = 0$ (взаимодействие одинаково поляризованных волн) из (7) после элементарных преобразований получаем уже известное соотношение [3]

$$\frac{B_0}{B} + \frac{H_0}{H} = 1, \quad (8)$$

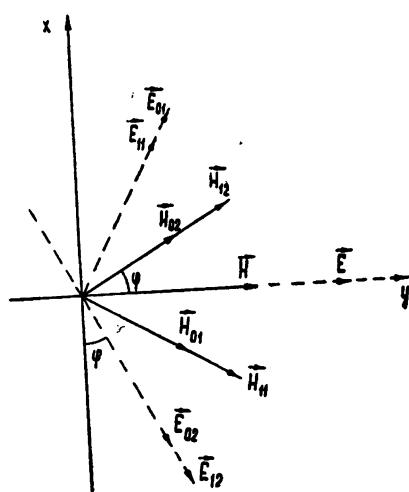


Рис. 1.

из которого при обычных законах связи $B(H)$ следует неравенство $H > 2H_0$ [4]. При увеличении φ от 0 до 60° отношение H/H_0 в [7] убывает до единицы. Следовательно, если поля в падающих волнах ориентированы под углом $2\varphi = 120^\circ$ друг к другу, то после взаимодействия образуются только вращательные разрывы. Если же $60^\circ < \varphi < 90^\circ$, то из (8) следует, что $H < H_0$. В этой области, однако, формула (8) не применима, так как при $H < H_0$ ударные волны неустойчивы и вместо них возникают простые волны, распространяющиеся впереди вращательных разрывов*.

Другим примером возникновения вращательных разрывов может служить распад неэволюционных ударных волн (для таких волн число возможных возмущений, взаимодействующих с разрывами, меньше числа граничных условий, связывающих поля этих возмущений). В этом случае разрыв не может существовать и мгновенно распадается [5, 7]. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, укажем, что ударная волна, по обе стороны фронта которой направления H_c противоположны, неэволюционна и распадается на вращательный разрыв, угол поворота поля в котором равен π , и опережающую его эволюционную ударную волну (именно такие конфигурации удовлетворяют всем граничным условиям в момент распада)**. Такая система волн возникает и в результате распространения простой волны с изменением знака H .

3. Рассмотрим теперь волны с вращением направления поляризации поля, не предполагая их разрывного характера. Для волны, распространяющейся вдоль оси z , уравнения Максвелла дают

$$\frac{\partial^2 H_c}{\partial z^2} = \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 B_c}{\partial t^2}, \quad B_z = \text{const}. \quad (9)$$

Нелинейную связь $B_c(H_c)$ считаем, как и выше, изотропной. Будем сначала искать решение (9) в виде стационарной волны, т. е. функции аргумента $\xi = z - vt$ ($v = \text{const}$). Тогда интегрирование (9) приводит к равенству (2), где под H_c , B_c следует теперь понимать величины

* Рассмотрение этого случая проводится аналогично.

** В двухпроводной линии передачи ударные волны с изменением знака поля эволюционны (число возможных возмущений меньше) [7].

в двух произвольных точках. В частности, согласно (4), возможны волны с постоянным по модулю, но произвольным образом вращающимся полем H_τ^* .

Последний результат можно несколько обобщить. Именно, полагая в (9) модули H_τ и B_τ постоянными, получим для угла поворота φ поля относительно фиксированной оси в поперечной плоскости линейное уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \cos \varphi = 0, \quad (10)$$

где v по-прежнему соответствует (6). Следовательно, φ в общем случае представляется суперпозицией двух произвольных функций переменных $z \mp vt$. Разумеется, для самого поля принцип суперпозиции здесь несправедлив (уравнение (10) относится лишь к постоянному $|H_\tau|$).

Рассмотренные «вращательные» волны распространяются без изменения формы и не приводят непосредственно к образованию вращательных разрывов (как простые волны — к образованию ударных волн). Если при $z \rightarrow \pm \infty$ значения H_τ различны и постоянны, такая волна сама может рассматриваться как вращательный разрыв с произвольной «структурой» (тогда как структура ударной волны конечной ширины не может быть определена без учета диссипативных процессов).

Предположение о квазистатической связи $B_\tau(H_\tau)$ может выполняться лишь при достаточно медленном изменении поля. При учете релаксационных процессов H_τ и B_τ не параллельны, и энергия волны диссирирует. При этом возможны, как известно, стационарные ударные волны с определенной структурой [1]. Что касается вращательных разрывов, то релаксация вообще исключает возможность существования соответствующих стационарных решений, как это имеет место и в магнитной гидродинамике. Действительно, полагая снова поля в (9) зависящими от $\xi = z - vt$, интегрируя и учитывая, что v удовлетворяет условию (4) при $z \rightarrow +\infty$ (где поля постоянны), получим для произвольной точки

$$H_\tau = \frac{\epsilon v^3}{c^2} B_\tau. \quad (11)$$

Это соотношение требует во всяком случае параллельности H_τ и B_τ и при наличии процессов релаксации не может точно выполняться. Фактически эффекты дисперсии и диссипации должны приводить к расширению вращательного разрыва с конечной скоростью, как это имеет место и в магнитной гидродинамике [6].

В заключение отметим интересную с практической точки зрения аналогию между рассмотренными процессами в безграничном пространстве и волнами в связанных линиях передачи**.

Уравнения волн в системе, эквивалентная схема которой показана на рис. 2, без учета дискретности параметров, имеют вид

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial z^2} = C_k \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2), \quad (12)$$

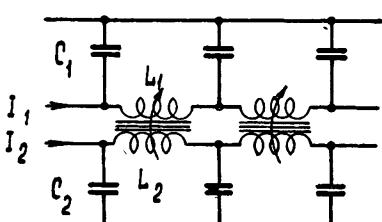


Рис. 2.

* Условие (3) не дает здесь ничего нового, так как при нелинейной связи $B_\tau(H_\tau)$ оно может выполняться для непрерывных решений только в случае $H_\tau = \text{const}$.

** Простые и ударные волны в таких линиях рассматривались в работе [5].

где I_i — ток, Φ_i — погонный поток индукции в i -ой линии, нелинейно зависящий как от I_1 , так и от I_2 . В симметричном случае, когда $C_1 = C_2$, а зависимости $\Phi_1(I_1)$ при $I_2 \equiv 0$ и $\Phi_2(I_2)$ при $I_1 \equiv 0$ идентичны, можно рассматривать I_i , Φ_i как компоненты некоторых векторов I , $\Phi(I)$. Тогда, как легко видеть, система (12) аналогична (9). В подобных линиях могут, по-видимому, наблюдаться как ударные волны, так и волны типа вращательных разрывов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 79 (1960).
2. И. Г. Катаев, Ударные электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1963.
3. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 285 (1965).
4. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 413 (1963).
5. А. М. Белянцев, Г. И. Фрейдман, ЖТФ (в печати).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
7. Р. В. Половин, УФН, 72, 33 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 декабря 1964 г.

ROTATIONAL DISCONTINUITIES IN ELECTRODYNAMICS OF NONLINEAR MEDIA

L. A. Ostrovsky

It is shown that at conditions general enough two types of em fields discontinuities in the nonlinear medium are possible: shock waves and rotational discontinuities. The formation of rotational discontinuities has been considered in interaction of shock waves. The stationary rotational configurations are shown to be formed only at a slow (quasi-static) field rotation. The relaxation and dispersion effects lead to diffusion of the rotational discontinuities.

УДК 621.371.167

**ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА РЕШЕТКЕ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДОВ,
ПОМЕЩЕННЫХ В СЛОЕ ДИЭЛЕКТРИКА**

B. A. Каплун

Получено выражение для постоянной распространения электромагнитных волн вдоль решетки из параллельных тонких проводов, расположенных в плоском слое диэлектрика параллельно границам раздела. Рассмотрены условия возбуждения решетки падающей на слой плоской электромагнитной волной. Приведены выражения для полей внутри и вне слоя.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] решена задача о дифракции плоской электромагнитной волны на цилиндрическом проводе, помещенном в плоский слой диэлектрика. Было рассмотрено два режима работы: в отсутствие и при наличии внешнего возбуждения. Внешним источником возбуждения служила плоская электромагнитная волна, падающая под произвольным углом на слой с проводом. В результате была найдена постоянная распространения электромагнитных волн вдоль провода в зависимости от параметров системы «провод—слой диэлектрика» и получено выражение для амплитуды колебаний в проводе, определяемой амплитудой падающей волны, углом ее падения и параметрами системы «провод—слой диэлектрика». Полученные результаты показали, что даже весьма тонкий слой оказывает существенное влияние на скорость распространения электромагнитных волн вдоль провода.

В этой связи представляют интерес распространить рассмотренную задачу на решетку из параллельных проводов, расположенную в плоском диэлектрическом слое. Высокочастотные устройства, в которых электромагнитные волны распространяются через такие системы, находят широкое применение на практике (например, в антенах СВЧ, антенных обтекателях и т. п.).

Постановка интересующей нас задачи следующая. В среднем сечении безграничного плоского слоя диэлектрика толщиной $2h$ с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 помещена решетка, составленная из бесконечных параллельных цилиндрических проводов радиуса ρ ; шаг решетки — d , причем $\rho \ll d$. Кроме того предполагается, что провода достаточно тонкие: $\rho \ll \lambda_0$ (λ_0 — длина волны в воздухе), а их материал обладает бесконечной проводимостью; слой и окружающая среда, характеризуемые постоянными распространения k_1 и k_0 ($\mu_1 = \mu_0 = 1$), потерь не имеют ($\sigma_1 = \sigma_0 = 0$).

Ось z прямоугольной системы координат совпадает с осью одного из проводов решетки (нулевого), ось y перпендикулярна границам слоя (рис. 1).

Предположим сначала, что в проводах решетки существуют высокочастотные колебания, фаза которых изменяется вдоль оси z по линейному

закону αz , а от провода к проводу вдоль оси x —скакками через ϕ радиан. Мы будем искать постоянную распространения электромагнитной волны вдоль проводов и зависимость ее от параметров слоя, решетки и фазировки существующих в проводах колебаний. Затем будет рассмотрено возбуждение решетки плоской электромагнитной волной, падающей на слой под произвольным углом. При решении задачи принимается временная зависимость вида $e^{j\omega t}$.

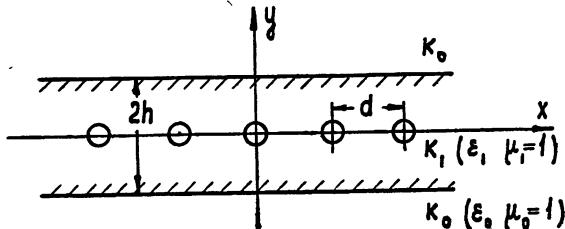


Рис. 1.

1. НАХОЖДЕНИЕ ПОЛЕЙ В СЛОЕ

Приступим к нахождению полей, создаваемых решеткой при наличии границ раздела.

Для определения напряженности первичного поля решетки в точке $M(x; y; z)$ просуммируем в этой точке поля от всех проводов. Так как возбужденный провод создает в окружающем пространстве электромагнитное поле, продольная составляющая которого может быть описана функцией Ханкеля нулевого порядка, для решетки из проводов получим (рис. 2)

$$E_z = A(k_1^2 - \alpha^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} [V(nd-x)^2 + y^2 V k_1^2 - \alpha^2] e^{-jn\psi - j\alpha z}. \quad (1)$$

Здесь $V\sqrt{(nd-x)^2 + y^2} = r_n$, n — номер провода решетки, а A — множитель, пропорциональный амплитуде.

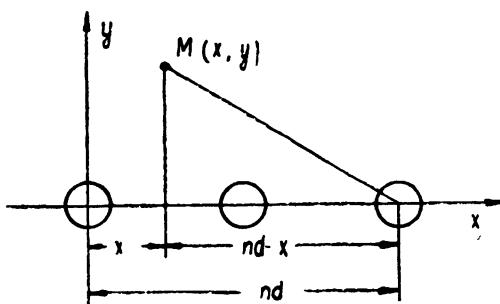


Рис. 2.

Воспользуемся преобразованием, позволяющим заменить сумму цилиндрических волн в выражении (1) суммой плоских волн [2]:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi kn} H_0^{(2)} [2\pi\beta V(n-\delta)^2 + v^2] &= \frac{j}{\pi} e^{-j2\pi\delta k} \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp \frac{[-j2\pi\delta m - j2\pi v \sqrt{\beta^2 - (m+k)^2}]}{\sqrt{(m+k)^2 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

В наших обозначениях $\beta \equiv \frac{d}{2\pi} \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}$; $\delta \equiv x/d$; $k \equiv \psi/2\pi$; $v \equiv y/d$.

Учитывая преобразование (2) и выражения для составляющих электрического и магнитного полей единичного провода, найдем составляющие первичного электромагнитного поля, образуемого решеткой:

$$\begin{aligned} E_z &= jA \frac{2}{d} (k_1^2 - \alpha^2) \exp\left(-jx \frac{\psi}{d} - j\alpha z\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right)^2 + \alpha^2 - k_1^2 \right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \exp\left[-j \frac{2\pi}{d} mx - j|y| \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right)^2}\right]; \\ E_y &= -A \frac{2\alpha}{d} \exp\left(-jx \frac{\psi}{d} - j\alpha z\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-j \frac{2\pi}{d} mx - \right. \\ &\quad \left. - j|y| \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right)^2}\right]; \\ E_x &= -jA \frac{2\alpha}{d} \exp\left(-jx \frac{\psi}{d} - j\alpha z\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right) \left[\left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 - k_1^2 \right]^{-1/2} \exp\left[-j \frac{2\pi}{d} mx - j|y| \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right)^2}\right]; \\ H_z &= 0; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} H_y &= -jA \frac{2k_1^2}{\omega \mu d} \exp\left(-jx \frac{\psi}{d} - j\alpha z\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right) \left[\left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2 - k_1^2 \right]^{-1/2} \exp\left[-j \frac{2\pi}{d} mx - j|y| \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right)^2}\right]; \\ H_x &= A \frac{2k_1^2}{\omega \mu d} \exp\left(-jx \frac{\psi}{d} - j\alpha z\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-j \frac{2\pi}{d} mx - j|y| \times \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right)^2}\right]. \end{aligned}$$

Для каждой элементарной волны, определяемой параметром m , имеем

$$k_1 \cos \delta = \frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} = m'; \quad k_1 \cos \beta = \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2}; \quad k_1 \cos \gamma = \alpha.$$

Здесь $\cos \delta$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы. Заметим, что везде следует брать отрицательное значение корней от мнимого числа $(2\pi m/d + \psi/d)^2 + \alpha^2 - k_1^2$, так как только в этом случае обеспечивается уменьшение амплитуды затухающих элементарных волн с увеличением $|y|$.

Найдем далее вторичные поля, образующиеся за счет взаимодействия первичного поля решетки с границами раздела (прошедшее и отраженное поля). Вначале определим вторичное поле в слое, возникающее за счет отражений первичного поля от границ. Для этого

разобьем элементарную плоскую волну на две составляющие, поляризованные параллельно и перпендикулярно плоскости падения. Для обозначения параллельно поляризованных составляющих введем знак \parallel , для перпендикулярно поляризованных — знак \perp . Индексом « m » будем обозначать элементарную m -ую волну.

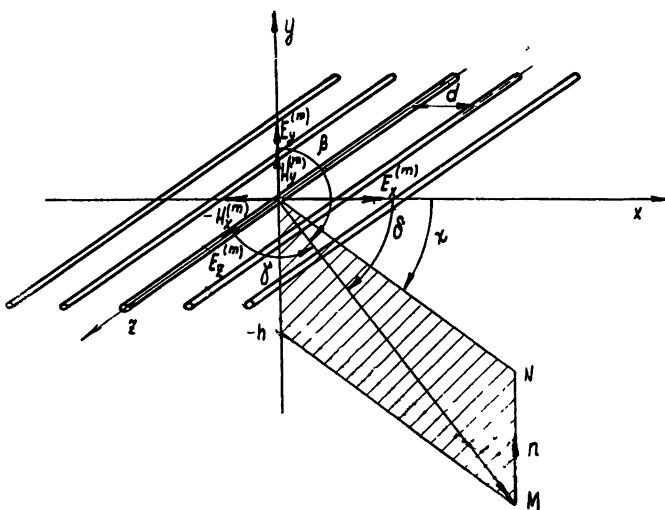


Рис. 3.

На рис. 3 показано взаимное расположение решетки проводов и плоскостей раздела. Заштрихованная плоскость — плоскость падения элементарной волны на границу раздела $y = -h$; OM — направление распространения элементарной волны; n — нормаль к плоскости раздела; ON — след плоскости падения на плоскости xOz . Из геометрических соображений ясно, что

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\cos \gamma_1}{\cos \delta_1}; \quad \sin \chi_1 = \frac{\cos \gamma_1}{\sqrt{\cos^2 \delta_1 + \cos^2 \gamma_1}} = \frac{\alpha}{\sqrt{m'^2 + \alpha^2}}; \quad \cos \chi_1 = \frac{m'}{\sqrt{m'^2 + \alpha^2}}$$

Тангенциальные составляющие векторов поля элементарной m -ой волны, падающей на границу раздела $y = -h$, при выбранных на рис. 3 направлениях векторов поля таковы:

для параллельно поляризованных составляющих

$$E_{\text{пад } \parallel}^{(m)} = E_x^{(m)} \cos \chi_1 + E_z^{(m)} \sin \chi_1 = -jA \frac{2\alpha}{d\sqrt{m'^2 + \alpha^2}} \sqrt{m'^2 + \alpha^2 - k_1^2} \times \\ \times \exp(-jm'x - j|y|\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - jaz); \quad (4)$$

$$H_{\text{пад } \parallel}^{(m)} = -H_x^{(m)} \sin \chi_1 = -A \frac{2k_1 \alpha}{d\omega \mu \sqrt{m'^2 + \alpha^2}} \times$$

$$\times \exp(-jm'x - j|y|\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - jaz);$$

для перпендикулярно поляризованных составляющих

$$E_{\text{пад.}\perp}^{(m)} = E_z^{(m)} \cos \chi_1 - E_x^{(m)} \sin \chi_1 = jA \frac{2k_1^2 m'}{d\sqrt{m'^2 + \alpha^2} \sqrt{m'^2 + \alpha^2 - k_1^2}} \times \\ \times \exp(-mj'x - j|y|\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - ja z); \quad (5)$$

$$H_{\text{пад.}\perp}^{(m)} = -H_x^{(m)} \cos \chi_1 = -A \frac{2k_1^2 m'}{d\omega \mu \sqrt{m'^2 + \alpha^2}} \times \\ \times \exp(-jm'x - j|y|\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - ja z).$$

Аналогичные соотношения имеют место и при рассмотрении границы раздела $y = h$.

Для нахождения соотношений между амплитудами падающих, отраженных и преломленных элементарных волн используем условия непрерывности касательных составляющих полей на границах раздела $y = h$ и $y = -h$. Обозначив (см. рис. 4) амплитуды отраженных m -ных волн через $AR_{\parallel, \perp}^{(m)}$, прошедших — через $AP_{\parallel, \perp}^{(m)*}$ и приняв, что $H_{\text{отр.}}^{(m)} = -R_{\parallel, \perp}^{(m)} H_{\text{пад.}}^{(m)}$, из граничных условий при $y = h$ и $y = -h$ найдем

$$R_{\parallel, \perp}^{(m)} = \frac{AR_{\parallel, \perp}^{(m)}}{A} = \frac{r_{\parallel, \perp} \exp(-j2h\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2})}{1 - r_{\parallel, \perp} \exp(-j2h\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2})}; \quad (6)$$

$$P_{\parallel, \perp}^{(m)} = \frac{AP_{\parallel, \perp}^{(m)}}{A} = \frac{p_{\parallel, \perp} \exp[-jh(\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2})]}{1 - r_{\parallel, \perp} \exp(-j2h\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2})} \frac{k_1^2}{k_0^2}. \quad (7)$$

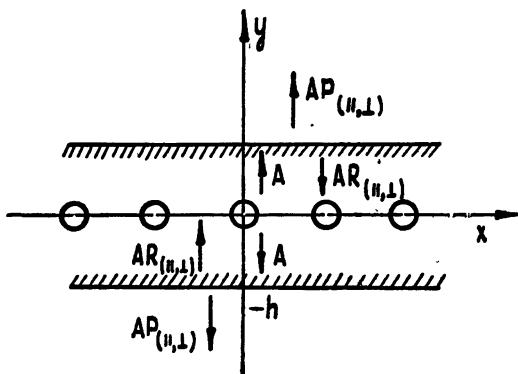


Рис. 4.

Здесь $r_{\parallel, \perp}$ и $p_{\parallel, \perp}$ — соответствующие коэффициенты Френеля:

$$r_{\parallel} = \frac{k_1^2 \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2} - k_0^2 \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2}}{k_1^2 \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2} + k_0^2 \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2}}; \quad (8)$$

$$p_{\parallel} = \frac{2k_0^2 \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2}}{k_1^2 \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2} + k_0^2 \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2}};$$

* Амплитуды соответствующих волн для границ раздела $y = h$ и $y = -h$ одинаковы ввиду симметрии задачи.

$$r_{\perp} = \frac{\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2}}{\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} + \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2}}; \quad p_{\perp} = \frac{2\sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2}}{\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} + \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2}}. \quad (9)$$

Выбор индекса \parallel или \perp определяется поляризацией рассматриваемой m -ой волны.

С помощью выражений (4) — (7) найдем z -овые составляющие полей отраженных волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости падения:

$$E_{z \text{ отр } \parallel}^{(\mp y)} = A \frac{2}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2}}{m'^2 + \alpha^2} \times \\ \times R_{\parallel}^{(m)} \exp(\mp jy \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - jm'x - jaz); \quad (10)$$

$$E_{z \text{ отр } \perp}^{(\mp y)} = A \frac{2}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m'^2}{m'^2 + \alpha^2} \frac{k_1^2}{\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2}} \times \\ \times R_{\perp}^{(m)} \exp(\mp jy \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - jm'x - jaz). \quad (11)$$

Знак минус перед y в показателе степени экспоненты относится к волнам внутри слоя, распространяющимся в сторону положительных y , знак плюс — в сторону отрицательных y .

При рассмотрении условий распространения электромагнитных волн вдоль диэлектрического слоя с решеткой из проводов надо знать поле вблизи поверхности этих проводов. Учитывая периодичность $E_z \exp(j \frac{\psi}{\alpha} x)$ в направлении оси x , можно ограничиться рассмотрением поля на одном проводе.

Воспользуемся разложением плоских волн по цилиндрическим функциям [3] относительно оси N -го провода (т. е. при $x = x' + Nd$), учитывая вместе с тем, что для тонких проводов ($\rho \ll \lambda_1$) существенен лишь нулевой член разложения. В этом случае

$$\exp(-jm'x - jy \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - jaz) = \exp(-jm'x + \\ + jy \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} - jaz) = I_0(r_N \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}) \exp(-jaz - jNdm'). \quad (12)$$

Здесь $r_N = \sqrt{(Nd - x)^2 + y^2}$ (рис. 2), а $e^{-jNdm'} = \exp(-j2\pi Nm - j\psi N) = e^{-j\psi N}$, так как m и N — натуральные числа.

Используя (10) — (12), найдем напряженность общего вторичного поля $E_{z \text{ отр}}$ внутри слоя:

$$E_{z \text{ отр}} = E_{z \text{ отр } \parallel}^{(+y)} + E_{z \text{ отр } \parallel}^{(-y)} + E_{z \text{ отр } \perp}^{(+y)} + E_{z \text{ отр } \perp}^{(-y)} = A \frac{2}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{m'^2 + \alpha^2} \times \\ \times \left[\alpha^2 \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} R_{\parallel}^{(m)} + \frac{m'^2 k_1^2}{\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2}} R_{\perp}^{(m)} \right] I_0(r_N \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}) \times \\ \times \exp(-jaz - j\psi N) = A \frac{2}{d} R(\alpha) I_0(r_N \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}) \exp(-jaz - j\psi N). \quad (13)$$

Здесь

$$R(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2}{m'^2 + \alpha^2} \left[\alpha^2 \sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2} R_{\parallel}^{(m)} + \frac{m'^2 k_1^2}{\sqrt{k_1^2 - \alpha^2 - m'^2}} R_{\perp}^{(m)} \right]. \quad (13a)$$

Сумма продольных составляющих электрического поля на поверхности любого N -го провода решетки равна нулю:

$$E_{z_{\text{опт}}} |_{r_N=\rho} + E_{z|_{r_N=\rho}} = 0. \quad (14)$$

Из выражения (1) для N -го провода ($x = x' + Nd$) при $\rho \ll d$ и $\rho \ll \lambda_0$ нетрудно найти [4], что

$$\begin{aligned} E_{z|_{r_N=\rho}} &= A(k_1^2 - \alpha^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)} \left[\sqrt{[(n-N)d - x']^2 + y^2} \sqrt{k_1^2 - \alpha^2} \right] \times \\ &\times \exp[-j(n-N)\psi] \exp(-jaz - j\psi N) = A(k_1^2 - \alpha^2) \exp(-jaz - j\psi N) \times \\ &\times \left\{ H_0^{(2)}(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}) + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} H_0^{(2)} [(n-N)d \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}] \cos(n-N)\psi \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь первый член в фигурных скобках определяет собственное поле N -го провода на поверхности этого провода (это поле при $\rho \ll \lambda_0$ имеет особенности логарифмического характера); второй член характеризует поле на поверхности N -го провода от всех остальных проводов решетки (этот член определяется гладкой функцией).

Учитывая, что $H_0^{(2)}(\nu) = I_0(\nu) - jN_0(\nu)$, после подстановки соотношений (13) при $r_N = \rho$ и (15) в уравнение (14) получим*

$$\begin{aligned} R(\alpha) &= -\frac{d}{2} (k_1^2 - \alpha^2) \left\{ 1 - \frac{N_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})}{I_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})} + \frac{2}{I_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})} \times \right. \\ &\times \left. \sum_{n=N+1}^{\infty} H_0^{(2)} [(n-N)d \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}] \cos(n-N)\psi \right\}; \end{aligned} \quad (16)$$

$R(\alpha)$ — функция от α ; разрешив уравнение (16) относительно α , определим постоянную распространения электромагнитных волн вдоль проводов $\alpha = \alpha_0$, зависящую от свойств системы «слой—решетка проводов» и от фазировки существующих в проводах высокочастотных колебаний. При $\alpha = \alpha_0$ энергия во внешнее пространство не выходит, а распространяется в слое под некоторым углом к проводам решетки, зависящим от их фазировки.

Анализ и расчеты показывают, что действительные значения $\alpha = \alpha_0$ получаются в результате решения уравнения (16) лишь в том случае, если ряд, определяющий $R(\alpha)$ (выражение (13а)), имеет хотя бы один член, в котором

$$k_1^2 - \alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{d} m + \frac{\psi}{d} \right)^2 > 0. \quad (17)$$

В этом случае распространение волны в слое возможно. При нарушении условия (17) $\alpha = \alpha_0$ — мнимая величина и волна в слое не распространяется.

Приведенное неравенство позволяет найти соотношения между параметрами слоя, решетки и фазировкой колебаний в проводах при

* О вычислении ряда см. Приложение.

распространении или нераспространении волн в слое. В частности, легко видеть, что при неизменных h , ρ и λ_0 и фиксированных значениях ψ (или d) существуют дискретные области значений d (или ψ), определяемые параметром m ($m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$), при которых волна распространяется в слое.

Уравнение (16) достаточно сложное и решать его относительно α лучше графически для различных значений толщины слоя h/λ_0 и радиуса проводов ρ/λ_0 .

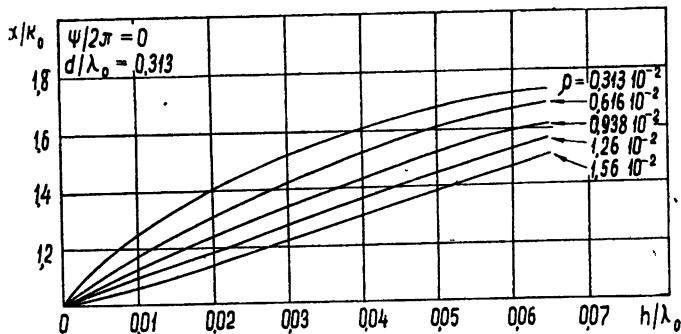


Рис. 5.

На рис. 5 приведены расчетные кривые $\alpha/k_0 = f(h/\lambda_0)$ при $\psi/2\pi = 0$; $d/\lambda_0 = \text{const} = 0,313$; $\rho/\lambda_0 = \text{var}$, а на рис. 6 — зависимости $\alpha/k_0 = f(d/\lambda_0)$ при $\psi/2\pi = \text{const} = 0$; $h/\lambda_0 = \text{const} = 0,0625$; $\rho/\lambda_0 = \text{const} = 0,313 \cdot 10^{-2}$ и кривые $\alpha/k_0 = f(\psi/2\pi)$ при $d/\lambda_0 = \text{const} = 0,313$; $h/\lambda_0 = \text{const} = 0,0625$; $\rho/\lambda_0 = \text{const} = 0,313 \cdot 10^{-2}$. Все кривые построены для $\epsilon_1 = 4,0$ и $k_0 = 0,196$. Приведенные графики иллюстрируют зависимость постоянной распространения $\alpha = \alpha_0$ от параметров слоя, решетки и фазировки колебаний в проводах. Во всех случаях величина постоянной распространения существенно зависит от толщины слоя и изменяется от значения $\alpha = k_0$ (при стремлении толщины слоя h к нулю) до $\alpha_0 = k_1$ (при стремлении толщины слоя h к бесконечности).

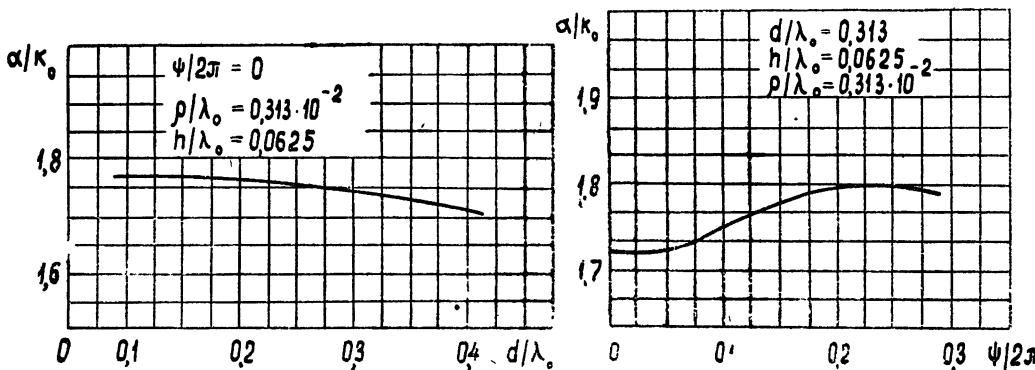


Рис. 6.

Несложный анализ позволяет сделать общий вывод, согласно которому переход к более густой решетке и увеличение радиуса проводов приводит к замедлению роста постоянной распространения по мере увеличения толщины слоя диэлектрика.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕШЕТКИ ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНОЙ

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, падающую на слой с решеткой из проводов. Направление распространения волны, поляризованной под углом ν к плоскости падения, характеризуется углами δ , β , γ (рис. 7).

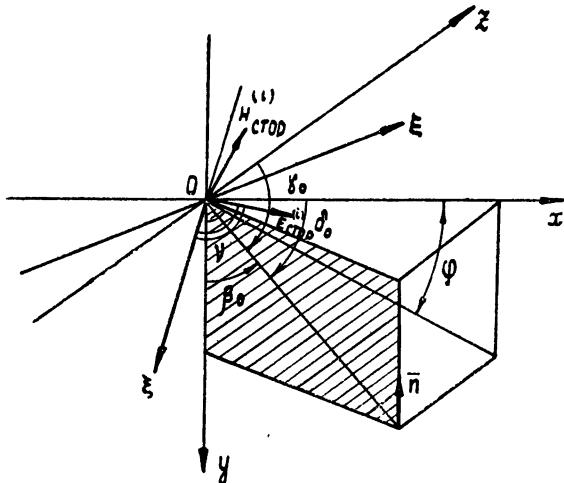


Рис. 7.

Напряженность электрического и магнитного полей падающей волны

$$E_{\text{стор}}^{(i)} = E_0 \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0); \quad (18)$$

$$H_{\text{стор}}^{(i)} = E_0 \frac{k_0}{\omega \mu} \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0).$$

Здесь $\cos \varphi_0 = \cos \delta_0 / \sin \gamma_0$. Сумма продольных составляющих электрического поля на поверхности N -го провода равна нулю:

$$E_{z_{\text{стор}}} |_{r_N = \rho} + E_z |_{r_N = \rho} + E_{z_{\text{стор}}}^{(h)} |_{r_N = \rho} = 0. \quad (19)$$

Здесь $E_{z_{\text{стор}}} |_{r_N = \rho}$ и $E_z |_{r_N = \rho}$ определяются выражениями (13) и (15); $E_{z_{\text{стор}}}^{(h)} |_{r_N = \rho}$ — z -овая составляющая (на поверхности N -го провода) поля стоячей волны в слое.

Для нахождения $E_{z_{\text{стор}}}^{(h)}$ разложим падающую волну на две, поляризованные параллельно и перпендикулярно к плоскости падения; каждую волну рассмотрим отдельно. Обращаясь к рис. 7, для границы $y = -h$ найдем тангенциальные составляющие векторов поля падающей волны. Для обозначения этих составляющих введем индекс $\tau_{\parallel, \perp}$:

$$E_{\text{стор} \tau_{\parallel}} = E_0 \cos \nu \cos \beta_0 \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0);$$

$$H_{\text{стор} \tau_{\parallel}} = E_0 \frac{k_0}{\omega \mu} \cos \nu \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0);$$

$$E_{\text{стор} \tau_{\perp}} = E_0 \sin \nu \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0);$$

$$H_{\text{стор}}^{(l)} = E_0 \frac{k_0}{\omega \mu} \sin \nu \cos \beta_0 \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0).$$

Обозначим амплитуду отраженной волны через $E_{0(\parallel, \perp)}^{(r)}$, прямой и обратной волн в слое—через $E_{1(\parallel, \perp)}^+$ и $E_{1(\parallel, \perp)}^-$ соответственно, амплитуду волны, прошедшей через слой, через $E_{0(\parallel, \perp)}^{(t)}$ (рис. 8). Используя граничные условия для падающей, преломленной и прошедшей волн при $y = h$ и $y = -h$, найдем значения амплитуд для параллельно поляризованных составляющих

$$E_{1(\parallel)}^+ = - \frac{E_0}{B_{\parallel}} 2k_0 \cos \nu \cos \beta_0 (k_0 \cos \beta_1 + k_1 \cos \beta_0) \exp[jh(k_0 \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 + k_1 \sin \gamma_1 \sin \varphi_1)],$$

$$E_{1(\parallel)}^- = \frac{E_0}{B_{\parallel}} 2k_0 \cos \nu \cos \beta_0 (k_0 \cos \beta_1 - k_1 \cos \beta_0) \exp[jh(k_0 \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - k_1 \sin \gamma_1 \sin \varphi_1)],$$

$$E_{0(\parallel)}^{(r)} = - \frac{E_0}{B_{\parallel}} \cos \nu (k_0^2 \cos^2 \beta_1 - k_1^2 \cos^2 \beta_0) [\exp(j2k_1 h \sin \gamma_1 \sin \varphi_1) - \exp(-j2k_1 h \sin \gamma_1 \sin \varphi_1)] \exp(j2k_0 h \sin \gamma_0 \sin \varphi_0), \quad (20a)$$

$$E_{0(\parallel)}^{(t)} = - \frac{E_0}{B_{\parallel}} 4k_0 k_1 \cos \nu \cos \beta_0 \cos \beta_1 \exp(j2k_0 h \sin \gamma_0 \sin \varphi_0)$$

при

$$B_{\parallel} = (k_0 \cos \beta_1 - k_1 \cos \beta_0)^2 \exp(-j2k_1 h \sin \gamma_1 \sin \varphi_1) - (k_0 \cos \beta_1 + k_1 \cos \beta_0)^2 \exp(j2k_1 h \sin \gamma_1 \sin \varphi_1)$$

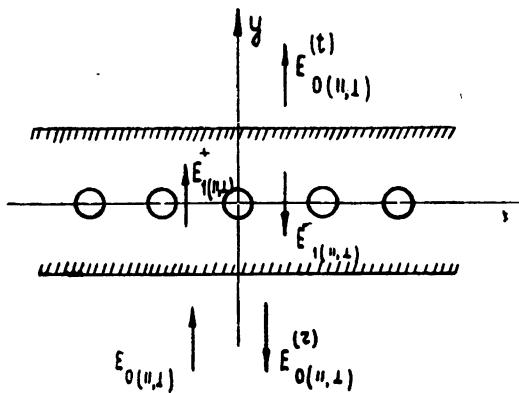


Рис. 8.

и для перпендикулярно поляризованных составляющих

$$E_{1(\perp)}^+ = - \frac{E_0}{B_{\perp}} 2k_0 \sin \nu \cos \beta_0 (k_0 \cos \beta_0 + k_1 \cos \beta_1) \exp[jh(k_0 \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 + k_1 \sin \gamma_1 \sin \varphi_1)],$$

$$E_{1(\perp)}^- = \frac{E_0}{B_{\perp}} 2k_0 \sin \nu \cos \beta_0 (k_0 \cos \beta_0 - k_1 \cos \beta_1) \exp[jh(k_0 \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - k_1 \sin \gamma_1 \sin \varphi_1)], \quad (206)$$

$$E_{0(\perp)}^{(r)} = -\frac{E_0}{B_\perp} \sin \nu (k_0^2 \cos^2 \beta_0 - k_1^2 \cos^2 \beta_1) [\exp(j2k_1 h \sin \gamma_1 \sin \varphi_1) - \exp(-j2k_1 h \sin \gamma_1 \sin \varphi_1)] \exp(j2k_0 h \sin \gamma_0 \sin \varphi_0),$$

$$E_{0(\perp)}^{(t)} = -\frac{E_0}{B_\perp} 4k_0 k_1 \sin \nu \cos \beta_0 \cos \beta_1 \exp(j2k_0 h \sin \gamma_0 \sin \varphi_0)$$

при

$$B_\perp = (k_0 \cos \beta_0 - k_1 \cos \beta_1)^2 \exp(-j2k_1 h \sin \gamma_1 \sin \varphi_1) - (k_0 \cos \beta_0 + k_1 \cos \beta_1)^2 \exp(j2k_1 h \sin \gamma_1 \sin \varphi_1).$$

Для стоячей волны в слое, поляризованной параллельно или перпендикулярно плоскости падения, с помощью рис. 7 найдем составляющую напряженности электрического поля, параллельную оси z :

$$\begin{aligned} E_{z_{\text{стор}}}^{(h)} &= \operatorname{ctg} \beta_1 \cos \gamma_1 [E_{1(\parallel)}^+ \exp(-jk_1 y \sin \gamma_1 \sin \varphi_1) + \\ &+ E_{1(\parallel)}^- \exp(jk_1 y \sin \gamma_1 \sin \varphi_1)] \exp(-jk_1 x \sin \gamma_1 \cos \varphi_1 - jk_1 z \cos \gamma_1), \\ E_{z_{\text{стор}}}^{(h)} &= \frac{\cos \delta_1}{\sin \beta_1} [E_{1(\perp)}^+ \exp(-jk_1 y \sin \gamma_1 \sin \varphi_1) + E_{1(\perp)}^- \exp(jk_1 y \sin \gamma_1 \sin \varphi_1)] \times \\ &\times \exp(-jk_1 x \sin \gamma_1 \cos \varphi_1 - jk_1 z \cos \gamma_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Разложив плоскую волну по цилиндрическим функциям вокруг оси N -го провода и учитывая при $r_N = \rho \ll \lambda_0$ лишь нулевой член разложения (12), вместо (21) получим

$$\begin{aligned} E_{z_{\text{стор}}}^{(h)} &= \operatorname{ctg} \beta_1 \cos \gamma_1 (E_{1(\parallel)}^+ + E_{1(\parallel)}^-) I_0(k_1 r_N \sin \gamma_1) \times \\ &\times \exp(-jk_1 z \cos \gamma_1 - jk_1 N d \sin \gamma_1 \cos \varphi_1), \\ E_{z_{\text{стор}}}^{(h)} &= \frac{\cos \delta_1}{\sin \beta_1} (E_{1(\perp)}^+ + E_{1(\perp)}^-) I_0(k_1 r_N \sin \gamma_1) \exp(-jk_1 z \cos \gamma_1 - jk_1 N d \sin \gamma_1 \cos \varphi_1). \end{aligned}$$

Для суммарного поля

$$E_{z_{\text{стор}}}^{(h)} = E_{z_{\text{стор}}}^{(h)\parallel} + E_{z_{\text{стор}}}^{(h)\perp}. \quad (22)$$

Подставив (13), (15) и (22) при $r_N = \rho$ в (19), найдем

$$\begin{aligned} A \frac{2}{d} R(\alpha) I_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}) \exp(-j\alpha z - jN\psi) + A(k_1^2 - \alpha^2) I_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}) \times \\ \times \exp(-j\alpha z - jN\psi) \left\{ 1 - j \frac{N_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})}{I_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})} + \frac{2}{I_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})} \times \right. \\ \times \sum_{n=N+1}^{\infty} H_0^{(2)} [(n-N)d \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}] \cos(n-N)\psi \Big\} + \left[\operatorname{ctg} \beta_1 \cos \gamma_1 (E_{1(\parallel)}^+ + E_{1(\parallel)}^-) + \right. \\ \left. + \frac{\cos \delta_1}{\sin \beta_1} (E_{1(\perp)}^+ + E_{1(\perp)}^-) \right] I_0(k_1 \rho \sin \gamma_1) \exp(-jk_1 z \cos \gamma_1 - jk_1 N d \sin \gamma_1 \cos \varphi_1). \end{aligned}$$

Из этого уравнения следует, что

$$\alpha = k_1 \cos \gamma_1; \quad \psi = k_1 d \sin \gamma_1 \cos \varphi_1; \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
 A = & -\frac{d}{2} \left[\operatorname{ctg} \beta_1 \cos \gamma_1 (E_{1(\perp)}^+ + E_{1(\perp)}^-) + \frac{\cos \delta_1}{\sin \beta_1} (E_{1(\perp)}^+ + E_{1(\perp)}^-) \right] R(\alpha) + \\
 & + \frac{d}{2} (k_1^2 - \alpha^2) \left\{ 1 - j \frac{N_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})}{I_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})} + \frac{2}{I_0(\rho \sqrt{k_1^2 - \alpha^2})} \times \right. \\
 & \left. \times \sum_{n=N+1}^{\infty} H_n^{(2)} [(n-N)d \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}] \cos(n-N)\psi \right\} \rangle^{-1}.
 \end{aligned} \quad (24)$$

Полученные соотношения дают полное представление о характере возбуждения рассматриваемой системы произвольно падающей плоской электромагнитной волной. В выражении (24) $R(\alpha)$ определяется соотношением (13). При $k_1 \cos \gamma_1 = \alpha_0$, $\psi = k_1 d \sin \gamma_1 \cos \varphi_1$ и соблюдении условия (17) знаменатель выражения (24) обращается в нуль и амплитуда A возрастает до бесконечности — наступает резонанс; во всех других случаях A имеет конечное значение. На практике резонанс можно наблюдать при $k_1 < k_0$, поскольку, как показывает расчет, только в этом случае существует действительный угол γ_0 , при котором выполняется условие $\cos \gamma_0 = (k_1/k_0) \cos \gamma_1$.

3. ПОЛЕ В СРЕДЕ, ОКРУЖАЮЩЕЙ СЛОЙ

Найдем поле в среде, окружающей слой. Для этого в областях $y > h$ и $y < -h$ сначала определим напряженности электрических полей, создаваемых решеткой. Используя выражения (4), (5), (7)–(9), получим

$$\begin{aligned}
 E_x_{\text{прош}} &= E_{x_{\text{прош}} \parallel} + E_{x_{\text{прош}} \perp} = -jA \frac{2\alpha}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m'}{m'^2 + \alpha^2} P_{\parallel}^{(m)} + \\
 &+ \frac{k_0^2}{V m'^2 + \alpha^2 - k_0^2} P_{\perp}^{(m)} \Big) \exp(-jm'x - j|y|\sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2} - jaz); \\
 E_y_{\text{прош}} &= E_{y_{\text{прош}} \parallel} + E_{y_{\text{прош}} \perp} = -A \frac{2\alpha}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{\parallel}^{(m)} \exp(-jm'x - \\
 &- j|y|\sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2} - jaz); \\
 E_z_{\text{прош}} &= E_{z_{\text{прош}} \parallel} + E_{z_{\text{прош}} \perp} = -jA \frac{2}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m'^2 + \alpha^2} \times \\
 &\times \left(\alpha^2 V \sqrt{m'^2 + \alpha^2 - k_0^2} P_{\parallel}^{(m)} - \frac{m'^2 k_0^2}{V m'^2 + \alpha^2 - k_0^2} P_{\perp}^{(m)} \right) \times \\
 &\times \exp(-jm'x - j|y|\sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - m'^2} - jaz).
 \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь везде (в том числе в выражениях для $P_{\parallel}^{(m)}$, $P_{\perp}^{(m)}$ и A) $\alpha = k_0 \cos \gamma_0$, $\psi = k_0 d \sin \gamma_0 \cos \varphi_0$. Далее с помощью выражений (18), (20a) и (20b) в областях $y > h$ и $y < -h$ найдем напряженности электрических полей (страженного и прошедшего) сторонней волны:

$$E_{\text{стор}}^{(t)} = (E_0^{(t)} \cos \nu + E_0^{(t)} \sin \nu) \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0) \quad (26)$$

для прошедшей волны ($y > h$) и

$$E_{\text{стор}}^{(r)} = (E_{0\parallel}^{(r)} \cos \nu + E_{0\perp}^{(r)} \sin \nu) \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0) \quad (27)$$

для отраженной волны ($y < -h$).

Обращаясь к рис. 7 и используя (25), определим в областях $y > h$ и $y < -h$ составляющую электрического поля решетки, ориентированную параллельно вектору электрического поля падающей сторонней волны:

$$\begin{aligned} E_{\text{прош}} = & (E_{x_{\text{прош}}} \sin \chi_0 + E_{z_{\text{прош}}} \cos \chi_0) \sin \nu + (E_{y_{\text{прош}}} \sin \beta_0 - E_{x_{\text{прош}}} \times \\ & \times \cos \beta_0 \cos \chi_0 + E_{z_{\text{прош}}} \cos \beta_0 \sin \chi_0) \cos \nu. \end{aligned} \quad (28)$$

С помощью выражений (25) — (28) найдем в областях $y > h$ $y < -h$ суммарное поле, поляризованное так же, как поле падающей сторонней волны. При этом следует иметь в виду, что везде $\alpha = k_0 \cos \gamma_0$; $\psi = k_0 d \sin \gamma_0 \cos \varphi_0$. Для $y > h$ (прошедшая волна)

$$\begin{aligned} E_{\text{прош}}^{(\text{общ})} = & E_{\text{прош}} + E_{\text{стор}}^{(t)} = \left\{ -jA \frac{2}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{m' \alpha}{m'^2 + \alpha^2} \left(\sqrt{m'^2 + \alpha^2} - k_0^2 P_{\parallel}^{(m)} + \right. \right. \right. \\ & + \frac{k_0^2}{\sqrt{m'^2 + \alpha^2} - k_0^2} P_{\perp}^{(m)} \left. \right) (\sin \chi_0 \sin \nu - \cos \beta_0 \cos \chi_0 \cos \nu) + \\ & + \frac{1}{m'^2 + \alpha^2} \left(\alpha^2 \sqrt{m'^2 + \alpha^2} - k_0^2 P_{\parallel}^{(m)} - \frac{k_0^2 m'^2}{\sqrt{m'^2 + \alpha^2} - k_0^2} P_{\perp}^{(m)} \right) \times \\ & \times (\cos \chi_0 \sin \nu + \cos \beta_0 \sin \chi_0 \cos \nu) - j\alpha P_{\parallel}^{(m)} \sin \beta_0 \cos \nu \left. \right] \exp \left(-jmx \frac{2\pi}{d} - \right. \\ & \left. \left. \left. - jy \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - \left(m \frac{2\pi}{d} + \frac{\psi}{d} \right)^2} \right) + (E_{0\parallel}^{(t)} \cos \nu + E_{0\perp}^{(t)} \sin \nu) \times \right. \\ & \times \exp(-jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0) \left. \right\} \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0); \end{aligned} \quad (29a)$$

для $y < -h$ (отраженная волна)

$$\begin{aligned} E_{\text{отр}}^{(\text{общ})} = & E_{\text{прош}} + E_{\text{стор}}^{(r)} = \left\{ -jA \frac{2}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{m' \alpha}{m'^2 + \alpha^2} \left(\sqrt{m'^2 + \alpha^2} - k_0^2 P_{\parallel}^{(m)} + \right. \right. \right. \\ & + \frac{k_0^2}{\sqrt{m'^2 + \alpha^2} - k_0^2} P_{\perp}^{(m)} \left. \right) (\sin \chi_0 \sin \nu - \cos \beta_0 \cos \chi_0 \cos \nu) + \\ & + \frac{1}{m'^2 + \alpha^2} \left(\alpha^2 \sqrt{m'^2 + \alpha^2} - k_0^2 P_{\parallel}^{(m)} - \frac{k_0^2 m'^2}{\sqrt{m'^2 + \alpha^2} - k_0^2} P_{\perp}^{(m)} \right) \times \\ & \times (\cos \chi_0 \sin \nu + \cos \beta_0 \sin \chi_0 \cos \nu) - j\alpha P_{\parallel}^{(m)} \sin \beta_0 \cos \nu \left. \right] \exp \left(-jm \frac{2\pi}{d} x + \right. \\ & + jy \sqrt{k_0^2 - \alpha^2 - \left(m \frac{2\pi}{d} + \frac{\psi}{d} \right)^2} \left. \right) + (E_{0\parallel}^{(r)} \cos \nu + E_{0\perp}^{(r)} \sin \nu) \exp(jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0) \left. \right\} \times \\ & \times \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0). \end{aligned} \quad (29b)$$

Из соотношений (29а) и (29б) можно видеть, что прошедшее и отраженное поля представляют собой спектр плоских волн, отличающихся составляющими постоянной распространения по осям x и y . Эти составляющие зависят от параметра m , а также от параметров слоя и решетки. Выделяя основную волну спектра (при $m = 0$), легко найти соотношение между параметрами слоя и решетки, при которых будет существовать только основная волна. Такое соотношение определяется условием $V k_0^2 - \alpha^2 - (\psi/2\pi)^2 > 0$. Учитывая (23), найдем, в частности, неравенство, ограничивающее шаг проводов решетки, при котором существует лишь основная волна:

$$\frac{d}{\lambda_0} < \frac{1}{\sin \gamma_0 (1 + \cos \varphi_0)}.$$

Используя выражения (18), (29а) и (29б), определим коэффициенты прохождения и отражения для произвольно падающей на слой волны:

$$P = E_{\text{прош}}^{(\text{общ})}/E_{\text{стор}}^{(i)}, \quad R = E_{\text{отр}}^{(\text{общ})}/E_{\text{стор}}^{(i)}. \quad (30)$$

4. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим несколько частных случаев, представляющих практический интерес.

а) Решетка с ограниченным шагом, удовлетворяющим неравенству $d/\lambda_0 < [\sin \gamma_0 (1 + \cos \varphi_0)]^{-1}$; произвольное падение.

При этом условии в выражениях для полей (29а) и (29б) основную роль играют члены при $m = 0$: при $m \neq 0$ появляется экспоненциальный множитель $\exp \left[-|y| \frac{2\pi}{d} \sqrt{\left(m + \frac{d}{\lambda_0} \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 \right)^2 - \left(\frac{d}{\lambda_0} \right)^2 \sin^2 \gamma_0} \right]$, который с увеличением $|y|$ быстро стремится к нулю. При достаточном удалении точки наблюдения от слоя ($|y| \gg \lambda_0$) вместо (29а) и (29б) имеем

$$\begin{aligned} E_{\text{прош}}^{(\text{общ})} = & \left\{ -jA \frac{2}{d} \left[\alpha \frac{\psi}{d} \left[\left(\frac{\psi}{d} \right)^2 + \alpha^2 \right]^{-1} \left(\sqrt{\left(\frac{\psi}{d} \right)^2 + \alpha^2 - k_0^2} P_{\parallel}^{(0)} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{k_0^2}{\sqrt{(\psi/d)^2 + \alpha^2 - k_0^2}} P_{\perp}^{(0)} \right) (\sin \chi_0 \sin \nu - \cos \beta_0 \cos \chi_0 \cos \nu) + \frac{1}{(\psi/d)^2 + \alpha^2} \times \right. \right. \\ & \times \left(\alpha^2 \sqrt{\left(\frac{\psi}{d} \right)^2 + \alpha^2 - k_0^2} P_{\parallel}^{(0)} - \frac{k_0^2 \left(\frac{\psi}{d} \right)^2}{\sqrt{(\psi/d)^2 + \alpha^2 - k_0^2}} P_{\perp}^{(0)} \right) (\cos \chi_0 \sin \nu + \right. \quad (31a) \\ & \left. \left. \left. + \cos \beta_0 \sin \chi_0 \cos \nu) - j\alpha P_{\parallel}^{(0)} \sin \beta_0 \cos \nu \right) + (E_{0\parallel}^{(t)} \cos \nu + E_{0\perp}^{(t)} \sin \nu) \right\} \times \\ & \times \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 - jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{отр}}^{(\text{общ})} = & \left\{ -jA \frac{2}{d} \left[\frac{\alpha \frac{\psi}{d}}{(\psi/d)^2 + \alpha^2} \left(\sqrt{\left(\frac{\psi}{d} \right)^2 + \alpha^2 - k_0^2} P_{\parallel}^{(0)} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{k_0^2}{\sqrt{(\psi/d)^2 + \alpha^2 - k_0^2}} P_{\perp}^{(0)} \right) (\sin \chi_0 \sin \nu - \cos \beta_0 \cos \chi_0 \cos \nu) + \right. \right. \quad (31b) \\ & \left. \left. \left. + j\alpha P_{\parallel}^{(0)} \sin \beta_0 \cos \nu \right) + (E_{0\parallel}^{(t)} \cos \nu + E_{0\perp}^{(t)} \sin \nu) \right\} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + ((\psi/d)^2 + \alpha^2)^{-1} \left(\alpha^2 \sqrt{\left(\frac{\psi}{d}\right)^2 + \alpha^2 - k_0^2} P_{\parallel}^{(0)} - \frac{k_0^2 (\psi/d)^2}{\sqrt{(\psi/d)^2 + \alpha^2 - k_0^2}} P_{\perp}^{(0)} \right) \times \\
 & \times (\cos \chi_0 \sin \nu + \cos \beta_0 \sin \chi_0 \cos \nu) - j \alpha P_{\parallel}^{(0)} \sin \beta_0 \cos \nu \Big] + (E_{0\perp}^{(r)} \cos \nu + E_{0\parallel}^{(r)} \sin \nu) \Bigg) \times \\
 & \times \exp(-jk_0 x \sin \gamma_0 \cos \varphi_0 + jk_0 y \sin \gamma_0 \sin \varphi_0 - jk_0 z \cos \gamma_0).
 \end{aligned}$$

Здесь $P_{\parallel, \perp}^{(0)} = P_{\parallel, \perp}^{(m)}$ при $m = 0$; везде (в том числе в выражениях для $P_{\parallel, \perp}^{(0)}$ и A) $\alpha = k_0 \cos \gamma_0$ и $\psi = k_0 d \sin \gamma_0 \cos \varphi_0$.

Соотношения (31а) и (31б) определяют плоские волны, распространяющиеся от слоя в сторону положительных и отрицательных значений y соответственно. При увеличении шага решетки d/λ_0 больше критического размера появляются дополнительные плоские волны, соответствующие значениям $m \neq 0$. Иными словами, такая решетка начинает рассеивать падающую на слой волну.

б) Решетка с ограниченным шагом; плоскость падения перпендикулярна проводам решетки, падающая волна поляризована перпендикулярно плоскости падения (т. е. $\gamma_0 = 90^\circ$; $\delta_0 = \varphi_0 = 90^\circ - \beta_0$; $\nu = 90^\circ$; $\chi_0 = 0^\circ$).

В этом случае при $|y| \gg \lambda_0$ вместо (29а) и (29б) имеем

$$\begin{aligned}
 E_{\text{прош}}^{(\text{общ})} &= \left(A \frac{2k_0}{d \cos \beta_0} P_{\perp}^{(0)} + E_{0\perp}^{(r)} \right) \exp(-jk_0 x \sin \beta_0 - jk_0 y \cos \beta_0); \\
 E_{\text{отр}}^{(\text{общ})} &= \left(A \frac{2k_0}{d \cos \beta_0} P_{\perp}^{(0)} + E_{0\perp}^{(r)} \right) \exp(-jk_0 x \sin \beta_0 + jk_0 y \cos \beta_0).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты прохождения и отражения для сторонней волны:

$$P = \frac{A}{E_0} \frac{2k_0}{d \cos \beta_0} P_{\perp}^{(0)} + \frac{E_{0\perp}^{(r)}}{E_0}; \quad R = \frac{A}{E_0} \frac{2k_0}{d \cos \beta_0} P_{\perp}^{(0)} + \frac{E_{0\perp}^{(r)}}{E_0}; \quad (32)$$

$P_{\perp}^{(0)}$ и A определяются при тех же условиях, что и в предыдущем случае.

в) Решетка с ограниченным шагом; провода решетки лежат в плоскости падения, падающая волна поляризована параллельно плоскости падения (т. е. $\gamma_0 = 90^\circ - \beta_0$; $\delta_0 = \varphi_0 = 90^\circ$; $\nu = 0^\circ$; $\chi_0 = 90^\circ$).

В данном случае при $|y| \gg \lambda_0$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{прош}}^{(\text{общ})} &= [A(2k_0/d)P_{\parallel}^{(0)} + E_{0\parallel}^{(r)}] \exp(-jk_0 y \cos \beta_0 - jk_0 z \sin \beta_0); \\
 E_{\text{отр}}^{(\text{общ})} &= [A(2k_0/d)P_{\parallel}^{(0)} + E_{0\parallel}^{(r)}] \exp(jk_0 y \cos \beta_0 - jk_0 z \sin \beta_0).
 \end{aligned}$$

Коэффициенты прохождения и отражения:

$$P = \frac{A}{E_0} \frac{2k_0}{d} P_{\parallel}^{(0)} + \frac{E_{0\parallel}^{(r)}}{E_0}; \quad R = \frac{A}{E_0} \frac{2k_0}{d} P_{\parallel}^{(0)} + \frac{E_{0\parallel}^{(r)}}{E_0}; \quad (33)$$

$P_{\parallel}^{(0)}$ и A находятся при тех же условиях, что и в предыдущих случаях.

Правильность изложенной теории проверялась экспериментально. На рис. 9 приведены расчетные кривые $|P|^2 = f(\beta_0)$, полученные с помощью выражений (32) и (33) для слоя с решеткой при $d/\lambda_0 = 0,25$; $\rho/\lambda_0 = 3,13 \cdot 10^{-3}$; $2h/\lambda_0 = 6,25 \cdot 10^{-2}$; $\epsilon = 4,0$; $k_0 = 0,196$. Там же точками отмечены измеренные значения коэффициентов прохождения (по мощности). Как видно, расчетные данные достаточно хорошо согласуются с экспериментальными.

ются с экспериментальными результатами, что говорит о правильности теоретических предпосылок и полученных выражений.

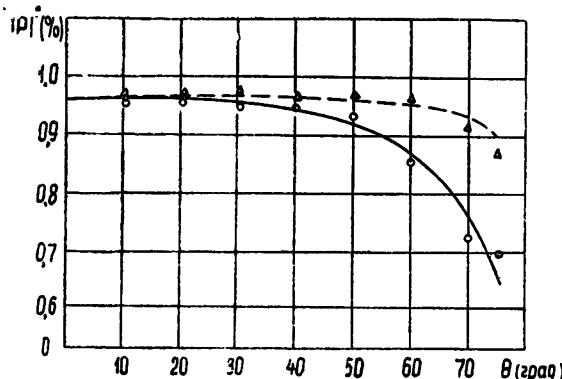


Рис. 9. Зависимость $|P|^2$ от θ : сплошная кривая—параллельная поляризация, пунктирующая поляризация, точки и треугольники—экспериментальные результаты.

В заключение автор выражает свою признательность А. А. Пистолькорсу за ценные советы при выполнении настоящей работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty} H_0^{(2)}[(n-N)d\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}] \cos(n-N)\psi$ сходится медленно.

Рассмотрим замену данного ряда эквивалентным, но быстрорасходящимся рядом. Для этого используем следующие преобразования (см. [4], формулы (6.532), (6.534)):

$$\begin{aligned}
 & 1) \\
 & \sum_{n=N+1}^{\infty} H_0^{(2)}[(n-N)d\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}] \cos(n-N)\psi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{d^2(k_1^2 - \alpha^2) - \psi^2}} + \\
 & + \sum_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{d^2(k_1^2 - \alpha^2) - (2\pi l + \psi)^2}} + \sum_{l=1}^n \frac{1}{\sqrt{d^2(k_1^2 - \alpha^2) - (2\pi l - \psi)^2}} + j \left\{ \frac{1}{\pi} \times \right. \\
 & \times \ln \frac{\gamma d\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}}{4\pi} - \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{l=1}^m \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^n \frac{1}{l} \right] + \sum_{l=m+1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(2\pi l + \psi)^2 - d^2(k_1^2 - \alpha^2)}} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2\pi l} \right] + \sum_{l=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(2\pi l - \psi)^2 - d^2(k_1^2 - \alpha^2)}} - \frac{1}{2\pi l} \right] \}
 \end{aligned}$$

при

$$d\sqrt{k_1^2 - \alpha^2} > 0; \quad 0 < \frac{\psi}{d\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}} < 1; \quad m < \frac{d\sqrt{k_1^2 - \alpha^2} - \psi}{2\pi} < m+1 \text{ и}$$

$$n < \frac{d\sqrt{k_1^2 - \alpha^2} + \psi}{2\pi} < n+1;$$

2)

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} H_0^{(2)}[(n-N)d\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}] \cos(n-N)\psi = -\frac{1}{2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{1}{V(2\pi l - \psi)^2 - d^2(k_1^2 - \alpha^2)} + j \left\{ \frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma d \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}}{4\pi} + \right. \\
 & + \sum_{l=0}^m \frac{1}{V(2\pi l - \psi)^2 - d^2(k_1^2 - \alpha^2)} - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^n \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{1}{V(2\pi l + \psi)^2 - d^2(k_1^2 - \alpha^2)} - \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2\pi l} \right] + \sum_{l=n+1}^{\infty} \left[\frac{1}{V(2\pi l - \psi)^2 - d^2(k_1^2 - \alpha^2)} - \frac{1}{2\pi l} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

при

$$\begin{aligned}
 d \sqrt{k_1^2 - \alpha^2} > 0; \quad \frac{\psi}{d \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}} > 1; \quad m < \frac{\psi - d \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}}{2\pi} < m + 1 \quad \text{и} \\
 n < \frac{\psi + d \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}}{2\pi} < n + 1.
 \end{aligned}$$

Везде $\ln \gamma = 0,577$. Ряды в правых частях равенств 1) и 2) хорошо сходятся уже при $4 \div 5$ членах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Каплун, А. А. Пистолькорс, Радиотехника и электроника, **9**, 1948 (1964).
2. J. R. Wait, Canadian J. Phys., **32**, 571 (1954).
3. А. Дж. Стреттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948, стр. 327.
4. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М., 1951, стр. 367.

Поступила в редакцию
12 ноября 1964 г.

DIFFRACTION OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVES ON ARRAY OF PARALLEL WIRES PLACED IN TO DIELECTRIC LAYER

V. A. Kaplun

The expression has been obtained for the wave number of electromagnetic wave propagating along array of thin parallel wires placed in a plane dielectric layer parallel to the interface. The conditions of array excitation have been considered by a plane electromagnetic wave falling on the layer. The expressions for fields inside and outside the layer are given.

УДК 530.1

ИЗЛУЧЕНИЕ ОСЦИЛЛЕТОРА В НЕОДНОРОДНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ

К. А. Барсуков и Б. М. Болотовский

Рассматривается излучение точечного осциллятора, помещенного в среду, диэлектрическая постоянная которой меняется по закону бегущей волны. В качестве примера рассмотрено излучение неподвижного электрического осциллятора.

Интерес к изучению нестационарных и неоднородных сред в последнее время связан с применениеми нестационарных сред для умножения частоты [6], параметрического усиления [7] и т. п. Интерес этот вызван также тем, что сильная электромагнитная волна (например, лазерное излучение), проходя через среду, меняет ее свойства: среда становится периодически нестационарной и неоднородной.

Ранее нами было рассмотрено излучение заряженной частицы, движущейся в неоднородной и нестационарной среде [1, 2]. Для процесса излучения в такой среде существенным является то обстоятельство, что среде могут быть переданы энергия и импульс. Представляет интерес рассмотреть особенности излучения систем, обладающих степенями свободы и движущихся в неоднородной и нестационарной среде. Ниже мы рассмотрим излучение осциллятора, движущегося с постоянной скоростью в среде, свойства которой модулированы по закону бегущей волны.

1. СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим осциллятор, движущийся со скоростью \mathbf{v} в среде, диэлектрическая постоянная которой определяется формулой

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t), \quad (1)$$

где \mathbf{k}_0 — «вектор обратной решетки», характеризующий пространственную неоднородность, ω_0 — частота изменения свойств среды и $|\epsilon_1| \ll |\epsilon_0|$.

Среда с диэлектрической постоянной (1) может принять на себя импульс, равный целому кратному от величины $\hbar \mathbf{k}_0$, и энергию, равную целому кратному от величины $\hbar \omega_0$, с тем же коэффициентом кратности q (q — целое число).

Если частота осциллятора равна Ω , то мы будем считать его квантовой системой, обладающей бесконечным числом эквидистантных уровней, расстояние между которыми равно $\hbar \Omega$.

Пусть движущийся осциллятор излучает квант $\hbar \omega$. Законы сохранения энергии и импульса для такого процесса записываются в виде

$$E_1 - E_2 = \Delta E = \hbar \omega + q \hbar \omega_0 + r \hbar \Omega; \quad (2)$$

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{\hbar \omega}{c} V_{\epsilon_0} \frac{\mathbf{k}}{k} + q \hbar \mathbf{k}_0.$$

При этом мы учли, что в процессе излучения внутренняя энергия осциллятора может измениться на величину $r\hbar\Omega$, где r — целое число.

Умножая второе равенство системы (2) на скорость осциллятора v и учитывая соотношение $v\Delta p = \Delta E$, справедливое при малых изменениях импульса, получим

$$\Delta E = \hbar\omega \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos\theta + q\hbar k_0 v, \quad (3)$$

где θ — угол между волновым вектором излученного кванта и скоростью осциллятора. Приравнивая (3) и первое равенство системы (2), найдем частоту излученного кванта:

$$\omega_{q,r} = \frac{q(k_0 v - \omega_0) + r\Omega}{1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos\theta}. \quad (4)$$

Величина $\omega_{q,r}$ дает частоту излученного кванта, если в процессе излучения среда приняла на себя q квантов ω_0 , k_0 и при этом излучающая система «спустилась» на r уровней. В случае, если осциллятор является точечным, число r может принимать только значения +1 или −1.

Рассмотрим некоторые следствия, которые вытекают из формулы (4).

Прежде всего отметим, что источником излучения в нестационарной неоднородной среде может быть покоящийся диполь ($v=0$) с постоянным во времени дипольным моментом ($\Omega=0$). В этом случае формула (4) дает $\omega_q = -q\omega_0$, т. е. в этом случае спектр излучения состоит из линий, расстояние между которыми равно ω_0 . Энергия излучения в этом случае берется от среды ($q < 0$). Если $q = 0$ и $r = 0$, то из формулы (4) следует, что для $\omega_{q,r}$, отличных от нуля, должно выполняться соотношение $1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos\theta = 0$, которое представляет собой условие излучения Вавилова—Черенкова.

Если скорость осциллятора меньше фазовой скорости света в среде: $v < c/\sqrt{\epsilon_0}$, осциллятор излучает ($\omega > 0$) при выполнении неравенства

$$q(k_0 v - \omega_0) + r\Omega > 0 \quad (5)$$

и поглощает при выполнении противоположного неравенства. В частности, как видно из (5), излучение может сопровождаться раскачкой собственных колебаний осциллятора ($r < 0$).

Нетрудно провести анализ излучения при сверхсветовом движении осциллятора. По сравнению с излучением в однородной стационарной среде важным отличием является существование двух степеней свободы, выражаемых числами q и r .

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

В качестве примера использования приведенной выше формулы для спектра излучения осциллятора рассмотрим подробнее поле излучения неподвижного точечного электрического осциллятора с частотой Ω и моментом p_0 . Для простоты будем считать, что вектор p_0 ориентирован вдоль вектора k_0 , который для определенности направим вдоль оси z . Следовательно, момент осциллятора в этом случае можно записать в виде

$$\mathbf{p} = (0, 0, p); \quad \mathbf{p} = p_0 e^{i\Omega t} \delta(z) \delta(x) \delta(y), \quad (6)$$

где считается, что осциллятор находится в начале координат.

Поле осциллятора будем описывать единственной скалярной функцией Π , которая удовлетворяет следующему неоднородному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) - \frac{1}{c^2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) = -4\pi p. \quad (7)$$

Векторы поля найдутся из соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{z_0}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) - \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right); \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{c \mu} \operatorname{rot} \left(\mu z_0 \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где z_0 — орт оси z , а ε и μ зависят от координат и времени по закону

$$\varepsilon = \varepsilon(k_0 z - \omega_0 t), \quad \mu = \mu(k_0 z - \omega_0 t), \quad (9)$$

частным случаем которого является (1).

Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} P(\xi) e^{i\gamma t} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda d\gamma, \quad (10)$$

где ξ и γ — переменные, введенные в [3]:

$$\xi = z - ut; \quad \eta = \frac{z}{u} - \frac{1}{u} \int_0^{z-ut} \frac{d\xi}{1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu} \quad \left(u = \frac{\omega_0}{k_0} \right).$$

Представляя (6) в виде, аналогичном (10), получим для $P(\xi)$ следующее уравнение:

$$\varepsilon \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\varepsilon} (1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu) \frac{dP}{d\xi} \right] + \frac{\kappa^2}{1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu} P = -4\pi f(\xi), \quad (11)$$

где

$$f(\xi) = \frac{p_0 e^{-i\frac{\omega_0}{u}\xi}}{(2\pi)^2 u} \exp \left(i \frac{\gamma}{u} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu} \right), \quad (12)$$

$$\kappa = \left[\frac{\gamma^2}{c^2} \varepsilon \mu - \lambda^2 (1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu) \right]^{1/2}; \quad \operatorname{Im} \kappa > 0; \quad \beta_u = \frac{u}{c}. \quad (13)$$

Решение уравнения (11), полученное методом вариации постоянных, имеет вид

$$P(\xi) = 4\pi \left\{ P_1(\xi) \int_{-\infty}^{\xi} f(\xi) P_2(\xi) \frac{d\xi}{\varepsilon} + P_2(\xi) \int_{\xi}^{\infty} f(\xi) P_1(\xi) \frac{d\xi}{\varepsilon} \right\}, \quad (14)$$

где $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ — решения однородного уравнения, причем $P_1 P_2' - P_2 P_1' = \varepsilon / (1 - \varepsilon \mu \beta_u^2)$. Кроме того, если κ имеет небольшую мнимую часть, $P_1 \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ и $P_2 \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow -\infty$.

Соотношение (14) является точным, коль скоро нам известны функции $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$. Однако при произвольной зависимости ε и μ от переменной ξ нахождение этих функций является чрезвычайно трудной математической задачей. Поэтому ниже мы ограничимся приближением геометрической оптики и воспользуемся выражением для $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ из [3]:

$$P_1(\xi) = \sqrt{\frac{\epsilon}{x}} \exp \left(-i \int_0^\xi \frac{xd\xi}{1 - \beta_u^2 \epsilon \mu} \right); \quad (15)$$

$$P_2(\xi) = \sqrt{\frac{\epsilon}{x}} \exp \left(i \int_0^\xi \frac{xd\xi}{1 - \beta_u^2 \epsilon \mu} \right).$$

Условие применимости приближенных выражений (15) можно записать в виде [3]

$$\left| \frac{1 - \beta_u^2 \epsilon \mu}{\sqrt{\epsilon x}} \frac{d}{d\xi} \sqrt{\frac{\epsilon}{x}} \right| \ll 1. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (14), имеем

$$P(\xi) = 4\pi \sqrt{\frac{\epsilon}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi') \exp \left[-i \int_{\xi'}^{\xi} \frac{x \operatorname{sgn} n(\xi - \xi')}{1 - \beta_u^2 \epsilon \mu} d\xi' \right] \frac{d\xi'}{\sqrt{\epsilon(\xi') \mu(\xi')}}. \quad (17)$$

Формула (17) вместе с (10) и (8) полностью определяет поле излучения точечного осциллятора в нестационарной среде. Однако выражение (17) оказывается довольно сложным; поэтому мы перейдем к случаю (1). Считая, что

$$\left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \right| \ll 1; \quad \left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0(1 - \beta_u^2 \epsilon_0)} \right| \ll 1, \quad (18)$$

где $\beta_u = u/c$, и проводя интегрирование по ξ и по γ в (10) и (17), получим в конечном счете

$$\begin{aligned} \prod = & ip_0 \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\Delta_n) J_m(\Delta_m) \frac{\epsilon_{mn}}{\gamma_n} \times \right. \\ & \left. \times \exp[i\gamma_n |z| + ik_0 m(z - ut) - it(\Omega - n\omega_0)] \right\} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\Delta_n = \frac{\epsilon_1 (\Omega - n \omega_0)^2}{2k_0 x_0 c^2};$$

$$\gamma_n = \left[\frac{(\Omega - n \omega_0)^2}{c^2} \epsilon_0 - \lambda^2 \right]^{1/2};$$

$$x_0 = \gamma_n - \frac{u}{c} \epsilon_0 (\Omega - n \omega_0);$$

$$\epsilon_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } (\Omega - n \omega_0) - u \gamma_n \operatorname{sgn} z > 0 \\ (-1)^{m+n} & \text{при } (\Omega - n \omega_0) - u \gamma_n \operatorname{sgn} z < 0 \end{cases}$$

Из формулы (19) видно, что при $\Omega = 0$ (постоянный диполь) поле излучения представляет собой распространяющиеся волны с набором

частот $q\omega_0$, где q — целое число, как это и следует из условия (4). Энергия излучения в этом случае, согласно сказанному ранее, черпается здесь из энергии среды.

Формула (19) дает возможность вычислить радиационные потери энергии осциллятора. Эти потери мы будем находить по величине тормозящей силы, действующей на осциллятор со стороны поля излучения. Нетрудно видеть, что

$$\frac{dW}{dt} = \left(\frac{dp_0}{dt} E \right)_{\substack{x=0 \\ y=0 \\ z=0}}, \quad (20)$$

где dW/dt — потери энергии осциллятора в единицу времени. Положим в (20) $p_0 = z_0 p_0 \cos(\Omega t)$ и за вектор E возьмем действительную часть электрического поля, определяемого формулами (19) и (8). Тогда, подставляя в (20) реальную часть (8) и выделяя только ту долю радиационных потерь осциллятора, которая зависит от времени линейно, получим

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{p_0^2 \Omega}{2 \epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{(\Omega-n\omega_0)c/\sqrt{\epsilon_0}} J_n^2(\Delta) \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{(\Omega-n\omega_0)^2 \frac{\epsilon_0}{c^2} - \lambda^2}}, \quad (21)$$

где n -ый член ряда соответствует радиационным потерям осциллятора на частоте $\Omega - n\omega_0$.

Формула (21) применима при условии (16), которое должно выполняться во всем интервале интегрирования по λ в (21). Отметим, что в (21) переменная интегрирования λ играет роль радиальной компоненты волнового вектора поля излучения. В частности, формула (16) принимает следующий вид для граничных значений λ : при $\lambda = 0$

$$\left| \frac{(1 + \beta_u \sqrt{\epsilon_0}) \epsilon_1 c k_0}{4 (\Omega - n \omega_0) \epsilon_0^{3/2}} \right| \ll 1; \quad (22)$$

при $\lambda = (\Omega - n \omega_0) c^{-1} \sqrt{\epsilon_0}$

$$\left| \frac{(1 - \beta_u^2 \epsilon_0)^2 \epsilon_1 k_0 c}{4 \epsilon_0^3 \beta_u^3 (\Omega - n \omega_0)} \right| \ll 1.$$

В случае, когда среда стационарна и однородна, формула (21) переходит в точную формулу для энергии излучения точечного осциллятора, помещенного в среду с постоянной ϵ_0 .

Если частота изменения свойств среды ω_0 стремится к нулю, формула (21) переходит в соответствующее выражение, полученное в [4], если в последнем положить скорость осциллятора v_0 равной нулю.

Любопытно отметить, что когда частота осциллятора оказывается кратной частоте нестационарности среды ω_0 , т. е. $\Omega = q\omega_0$, то тогда в дополнение к (21) осциллятор теряет еще энергию, величина которой определяется формулой

$$\frac{dW'}{dt} = -\frac{p_0 \omega_0}{2 \epsilon_0} q \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{(q-n)\omega_0 c^{-1} \sqrt{\epsilon_0}} J_n(\Delta_n) J_{n-2q}(\Delta_{n-2q}) \times$$

$$\times \frac{\lambda^3 d\lambda}{V (q-n)^2 \omega_0^2 c^{-2} \epsilon_0 - \lambda^2}. \quad (23)$$

Любопытно отметить, что потери энергии в этом случае оказываются отрицательными, т. е. здесь происходит ослабление радиационного затухания осциллятора. Формула (23) характеризует дополнительные потери, обусловленные параметрическим взаимодействием осциллятора с нестационарной средой. Для случая, когда $\omega_0 = 0$, на существование таких потерь было обращено внимание в работе [5].

3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В случае, когда переменная часть ϵ мала по сравнению с постоянной частью ($|\epsilon_1| \ll |\epsilon_0|$), можно искать поле излучения в виде ряда по степеням ϵ_1 .

Пусть диэлектрическая постоянная ϵ определяется формулой (1), где ϵ_0 и ϵ_1 не зависят явно от r и t . Тогда материальное уравнение $D = \epsilon E$ в фурье-представлении записывается следующим образом:

$$D_{k,\omega} = \epsilon_0 E_{k,\omega} + \frac{\epsilon_1}{2} (E_{k+k_0,\omega+\omega_0} + E_{k-k_0,\omega-\omega_0}), \quad (24)$$

где $E_{k,\omega}$ и $D_{k,\omega}$ — фурье-компоненты электрического поля E и электрической индукции D .

Равенство (24) можно переписать в виде

$$D_{k,\omega} = \epsilon_0 E_{k,\omega} + \overset{\wedge}{\epsilon}_1 E_{k,\omega}, \quad (25)$$

где действие оператора $\overset{\wedge}{\epsilon}_1$ определяется из сравнения равенств (24) и (25).

Запишем уравнения для магнитного поля $H_{k,\omega}$ в виде [2]

$$\left(k^2 - \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \right) H = \frac{4\pi i}{c} [k j] + \frac{\omega}{c} [k, \overset{\wedge}{\epsilon}_1 E]. \quad (26)$$

О физическом смысле полученного уравнения см. в [1, 2].

Уравнение (26) может быть решено методом последовательных приближений при малых ϵ_1 . Положим

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 + \dots; \\ E &= E_0 + E_1, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$E_n = \frac{\omega}{c k} \left[\frac{k}{k} H_n \right], \quad (28)$$

а за H_0 примем решение уравнения (26) при $\epsilon_1=0$. Теперь определим E_0 по формуле (28), подставим в правую часть уравнения (26) и из полученного уравнения найдем H_1 . Повторяя эту процедуру, мы получим выражения для H и E в виде рядов (27).

Таким способом можно определить только поперечную часть E , удовлетворяющую условию $\operatorname{div} E = 0$. Мы ограничимся вычислением поперечного поля и не будем рассматривать здесь излучение продольных волн.

Найдем несколько первых членов приближения в задаче об излучении точечного осциллятора, движущегося равномерно в неоднородной и нестационарной среде. Пусть электрический дипольный момент осциллятора определяется формулой

$$\mathbf{P} = p_0 \cos(\Omega t) \delta(r - vt). \quad (29)$$

Фурье-компоненты тока $\mathbf{j}_{k,\omega}$, отвечающего моменту \mathbf{P} , имеют следующий вид:

$$\mathbf{j}_{k,\omega} = -\frac{i\omega p_0}{2(2\pi)^3} [\delta(\omega - \Omega - kv) + \delta(\omega + \Omega - kv)]. \quad (30)$$

Функции нулевого приближения \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 определяются выражениями

$$\mathbf{H}_0 = \frac{\omega}{(2\pi)^2 c} \frac{[\mathbf{k} p_0]}{\mathbf{k}^2 - \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2}} \{ \delta(\omega - \Omega - kv) + \delta(\omega + \Omega - kv) \}; \quad (31)$$

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{\omega^2}{(2\pi)^2 c^2 k^2} \frac{[\mathbf{k} [\mathbf{k} p_0]]}{\mathbf{k}^2 - \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2}} \{ \delta(\omega - \Omega - kv) + \delta(\omega + \Omega - kv) \}.$$

Выражения (31) дают электрическое и магнитное поле точечного диполя частоты Ω , движущегося с постоянной скоростью через однородную и стационарную среду с диэлектрической постоянной ϵ_0 . Спектр излучения в этом приближении определяется из условия обращения в нуль аргументов δ -функций, так как только в этом случае выражения (31) отличны от нуля. Приравнивая нулю аргументы δ -функций в (31) с учетом равенств $kv = kv \cos \theta = \omega \beta \sqrt{\epsilon_0} \cos \theta$, получим для частоты излучения формулу

$$\omega = \frac{\pm \Omega}{1 - \beta \sqrt{\epsilon_0} \cos \theta},$$

т. е. формулу (4) при $q = 0$ и $r = \pm 1$.

Следующее приближение дает

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \frac{\pi \epsilon_1 \omega}{(2\pi c)^3} \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2}} \left\{ \frac{(\omega + \omega_0)^2 [\mathbf{k} p_0^+]}{D^+} [\delta(\omega + \omega_0 - \Omega - kv - k_0 v) + \delta(\omega + \omega_0 + \Omega - kv - k_0 v)] + \frac{(\omega - \omega_0)^2 [\mathbf{k} p_0^-]}{D^-} \times \right. \\ &\quad \left. [\delta(\omega - \omega_0 - \Omega - kv + k_0 v) + \delta(\omega - \omega_0 + \Omega - kv + k_0 v)] \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\mathbf{p}^\pm = \mathbf{p}_0 - (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0, \mathbf{p}_0)}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2},$$

$$D^\pm = (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) - \epsilon_0 \frac{(\omega \pm \omega_0)^2}{c^2},$$

а \mathbf{E}_1 определяется через \mathbf{H}_1 по формуле (28).

Нетрудно убедиться в том, что $m-e$ приближение рассматриваемого метода будет содержать наряду с другими также члены, описывающие излучение, частота которого определяется формулой (4) с $q = \pm m$, $r = \pm 1$.

Предыдущее рассмотрение относилось к нахождению поперечного поля излучения движущегося осциллятора. Нетрудно видеть, что продольное поле определяется таким же методом с помощью третьего уравнения системы (26).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, ЖЭТФ, 45, 303 (1963).
2. К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 291 (1964).
3. К. А. Барсуков, Радиотехника и электроника, 9, №173 (1964).
4. Б. В. Хачатрян, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 904 (1963).
5. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 432 (1964).
6. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 43, 351 (1962).
7. Ф. В. Бункин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 714 (1962).

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
6 ноября 1964 г.

OSCILLATOR RADIATION IN NONHOMOGENEOUS AND NONSTATIONARY MEDIUM

K. A. Barsoukov, B. M. Bolotovskiy

The radiation is considered of the point oscillator placed in a medium with permeability changing according to the traveling wave law. As an example, the radiation of movingless electric oscillator has been considered.

УДК 621.396.677.497.523.164

ЛОГОПЕРИОДИЧЕСКИЙ СПИРАЛЬНЫЙ ОБЛУЧАТЕЛЬ ДЛЯ ПАРАБОЛОИДА С ПЕРЕКРЫТИЕМ ПО ЧАСТОТЕ 1:7

*Г. И. Григорьев, М. С. Ковнер, О. Г. Никифорова,
Л. М. Оболенский, А. В. Самсонов, В. Ю. Трахтенгерц*

Исследованы диаграммы направленности и коэффициент стоячей волны для антенной системы, состоящей из цилиндрического рефлектора и частотнозависимого облучателя в диапазоне $1,5 \leq D/\lambda \leq 10$. Ширина диаграммы направленности при $D/\lambda = 2$ оказалась равной 10° .

В последнее время все большее применение находят частотно-независимые (логарифмически периодические) антенны. Эти антенны нашли широкое применение в устройствах, требующих постоянства характеристик излучения антенны и входного сопротивления в широком диапазоне частот. В целях получения узких диаграмм направленности и больших коэффициентов усиления такие антенны часто используют в качестве облучателей. В статьях [1, 2] даны подробные обзоры теоретических и экспериментальных исследований различных типов частотно-независимых антенн (см. также [3–5]).

В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования моделей широкодиапазонного облучателя для 15-метрового параболоида радиотелескопа в Зименках. Масштаб модели 1 : 10. В качестве рефлектора использовался параболический цилиндр с фокусным расстоянием $F = 0,525$ м высотой $h = 1$ м и раскрытием $D = 1,5$ м. Облучателем служила логопериодическая антenna, выполненная в виде конической спирали в двухзаходном кабельном варианте [2]. Конструктивные данные облучателя следующие: угол при вершине конуса $2\beta = 90^\circ$, угол намотки к основанию 7° . Вершина конуса помещалась в фокусе параболоида. Подключение фидера — несимметричное; облучатель был электрически изолирован от рефлектора. Сравнительно большой угол при вершине конуса обеспечивал освещение зеркала с апертурным углом около 140° . Кроме того, при больших углах β фазовый центр мало смещается от вершины облучателя с изменением частоты [3]. Последнее обстоятельство весьма существенно, так как значительные смещения фазового центра от фокуса параболоида могут сопровождаться появлением боковых лепестков.

Измерение характеристик системы проводилось в диапазоне

$$1,5 \leq D/\lambda \leq 10, \quad (1)$$

где λ — рабочая длина волн. Диаграмма направленности снималась по обычной схеме: исследуемая антenna была передающей, а приемником служил диполь с квадратичным детектором и низкочастотным усилителем. Диполь ориентировался как параллельно образующей параболического цилиндра (вертикальный диполь), так и перпендикулярно ей (горизонтальный диполь). Коэффициент стоячей волны КСВ определялся с помощью измерительных линий.

Результаты измерения КСВ для различных длин волн изображены

на рис. 1 пунктирной линией. Из рисунка видно, что для данной антенной системы КСВ по всему диапазону длин волн не хуже трех.

Сплошной линией на том же рисунке приведена зависимость ширины диаграммы направленности θ по мощности на уровне 0,5 от отношения D/λ в плоскости, перпендикулярной образующей для вертикальной

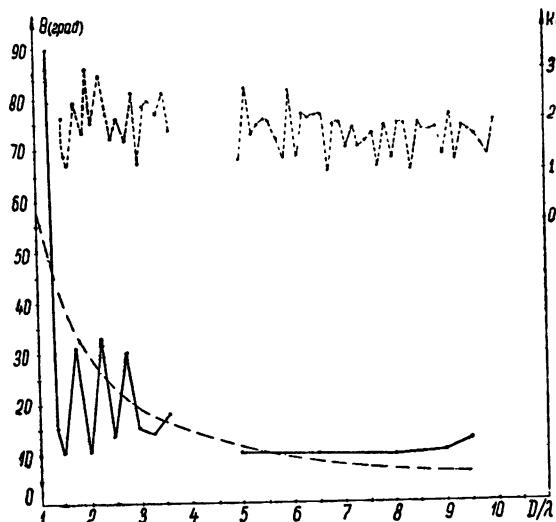


Рис. 1.

поляризации. Из этого рисунка видно, что при $5 \leq D/\lambda \leq 10$ $\theta \approx 10 \div 15^\circ$. Когда D/λ становится меньше 1,5, начинается резкое расширение диаграммы. В области $1,5 \leq D/\lambda \leq 3,5$ существует целый ряд диапазонов частот, в которых имеет место «сверхнаправленность», причем наблюдается некоторая периодичность с «периодом» $\sim 0,5$ ($\theta < \lambda/D$). Так, например, при $D/\lambda = 2$ $\theta \approx 9^\circ$. Последний результат, на наш взгляд, интересен тем, что с подобной антенной системой сравнительно малых размеров ($D \geq \lambda$) можно получить сравнительно высокую направленность, которая, по-видимому, является следствием сложного распределения фазы в облучателе. К сожалению, исследования распределения фазы не проводились. Отметим также, что диаграммы вертикально поляризованного излучения в диапазоне (1) почти всегда однолепестковые (ошибка измерений не превышала 10%). При $D/\lambda = 1,25$ имеется много лепестков, при $D/\lambda = 1,375$ появляются два боковых лепестка с уровнем $\sim 1/3$ центрального и, наконец, при $D/\lambda = 2,75$ число лепестков возрастает до 5.

Для сравнения на рис. 1 нанесена пунктирная линия $\theta = \lambda/D$.

Диаграммы направленности горизонтально поляризованного излучения по ширине мало отличаются от выше описанных. Однако на некоторых частотах появляются боковые лепестки (как правило, много меньше основного лепестка). Типичная диаграмма приведена на рис. 2, где пунктирная линия относится к вертикальной, а сплошная — к горизонтальной поляризации; параметр D/λ здесь равен 3.

Авторы признательны Ю. М. Жидко за обсуждение результатов.

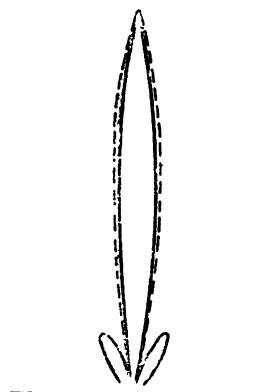


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Дайсон, Электроника, 35, 15 (1962).
2. А. С. Минаш, Вопросы радиоэлектроники, сер. X, вып. 2, 13 (1962).
3. R. H. Dule Hamel, F. R. Oge, IRE Nation. Conv. Rec., 7, 128 (1959).
4. D. E. Isbell, Proc. IRE, 47, 1152 (1959).
5. B. W. Bales, E. Volkenburg, Electronics, 34, 50 (1961).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
8 июля 1964 г.

LOGOPERIODIC SPIRAL IRRADIATOR FOR PARABOLOID WITH
FREQUENCY OVERLAP 1:7

*G. I. Grigor'ev, M. S. Kovner, O. G. Nikiforova, L. M. Obolensky,
A. V. Samsonov, V. Yu. Trakhtenherz*

The radiation patterns have been investigated and standing wave ratio for the antenna system consisting of a cylindrical reflector and frequency-independent irradiator in the range $1.5 \leq D/\lambda \leq 10$. The antenna beamwidth at $D/\lambda = 2$ turned to be equal to 10° .

УДК 621.396.628 : 523.164

**РАДИОМЕТР САНТИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА С УСТРАНЕНИЕМ
ВЛИЯНИЯ ПАРАЗИТНОГО СИГНАЛА МЕТОДОМ
АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ ГЕТЕРОДИНА**

Л. И. Герштейн

Описывается принцип действия и схема диапазонного радиометра сантиметровых волн, в котором для устранения влияния паразитного сигнала на результаты измерений применяется система автоподстройки частоты гетеродина по составляющей тока смесителя с частотой модуляции. Примененный метод позволяет обойтись без вентиляй и двойных мостов в конструкции радиометра. Приводятся результаты испытаний макета.

При сравнительных радиоастрономических измерениях различных источников вход радиометра постоянно соединен с антенной. Для таких измерений не существенно наличие какого-либо неизменного во время измерений паразитного сигнала; важно лишь, чтобы его величина при этих измерениях была фиксирована.

Существующие конструкции радиометров позволяют устраниить паразитный сигнал путем применения вентиляй и двойных мостов. Однако эти элементы обусловливают узкополосность радиометров. Кроме того, на некоторых участках спектра вентили вносят заметные потери, а двойные мосты усложняют конструкцию приборов. Поэтому представляет определенный интерес устранение влияния паразитного сигнала на результаты измерений без использования указанных элементов.

Паразитный сигнал, возникающий в радиометре, построенном по небалансной (однокристальной) схеме с направленным ответвителем в цепи гетеродина, состоит из двух компонент.

I компонента связана с неодинаковым отражением от входа и модулятора излучаемой смесителем мощности шумов на частотах приемных каналов, которые вновь попадают на смеситель. Эта компонента рассмотрена в работе [1]. Применив аналогичные выкладки к радиометру с волноводным трактом и двумя каналами приема, можно получить выражение для I компоненты паразитного сигнала на выходе радиометра (с квадратичным вторым детектором):

$$V_1 = 2\rho x T \left[(p_2^2 - p_s^2) (f_1 - f_2) + \int_{f_r-f_1}^{f_r-f_2} Q(f) df + \int_{f_r+f_1}^{f_r+f_2} Q(f) df \right] G. \quad (1)$$

Здесь V_1 — напряжение I компоненты на выходе, ρ — волновое сопротивление тракта, x — постоянная Больцмана, T — эквивалентная температура смесителя, p_2 — коэффициент отражения входа радиометра, p_s — коэффициент отражения модулятора, f_1 и f_2 — соответственно верхняя и нижняя границы полосы пропускания УПЧ (форма частотной характеристики принята прямоугольной), G — коэффициент усиления радиометра*, f_r — частота гетеродина,

* Коэффициент усиления радиометра состоит из двух факторов: $G = G_0 u$, где G_0 — коэффициент усиления по мощности от входа радиометра до второго детектора, u — коэффициент усиления по напряжению от выхода второго детектора до выхода радиометра.

$$Q(f) = p_1 \cos \frac{4\pi l_m \sqrt{f^2 - f_k^2}}{c} - p_2 \cos \frac{4\pi l_a \sqrt{f^2 - f_k^2}}{c}$$

(l_m и l_a — соответственно расстояния от модулятора и антенного ввода до смесителя, c — скорость света, f — частота, f_k — критическая частота волновода).

II компонента обусловливается неодинаковым отражением от входа и модулятора мощности гетеродина, что приводит к модуляции приходящего на смеситель сигнала гетеродина, и, соответственно, шумов смесителя на промежуточной частоте. Учитывая, что пути распространения отраженных от входа и модулятора мощностей одинаковы как для I компоненты, так и для II компоненты, можно получить следующее приближенное выражение для II компоненты:

$$V_{II} = n P_r Q(f_r) G, \quad (2)$$

где V_{II} — напряжение II компоненты на выходе радиометра, P_r — мощность гетеродина, n — численный коэффициент, который определяется зависимостью шумов смесителя на промежуточной частоте от мощности гетеродина; остальные величины в выражении (2) те же, что и в выражении (1).

Из определения II компоненты ясно, что напряжение V_{II} на выходе вызвано присутствием в токе смесителя компоненты с частотой модуляции радиометра; II компонента паразитного сигнала будет отсутствовать, если в токе смесителя не будет составляющей с частотой модуляции.

Если при помощи подключенного к смесителю селективного усилителя с фазовым детектором выделить постоянную составляющую напряжения, пропорциональную величине составляющей тока смесителя с частотой модуляции, то мы получим возможность наблюдать за относительной величиной и знаком связанной с этой составляющей II компоненты паразитного сигнала.

Зависимость выражения (2) от частоты гетеродина определяется величиной $Q(f_r)$; она, в свою очередь, является знакопеременной квазипериодической функцией частоты, обращающейся в нуль при ряде значений f_r . В хорошем приближении интервалы по частоте между этими значениями (корнями выражения $Q(f) = 0$) обратно пропорциональны длине волноводного тракта (от смесителя до антенны).

С помощью автоподстройки частоты гетеродина по признаку отсутствия составляющей тока кристалла с частотой модуляции можно поддерживать близкое к нулю значение $Q(f_r)$ и, тем самым, значение V_{II} на выходе радиометра. Автоподстройка возможна около любой из частот, являющихся корнями уравнения $Q(f) = 0$. Поскольку эти частоты расположены достаточно близко (в построенном макете — на расстоянии $(2 \div 5) 10^{-3} f_r$ одна от другой), то практически автоподстройка возможна около любой из заранее заданных частот. Таким образом, II компонента паразитного сигнала уничтожается в результате применения автоподстройки частоты гетеродина.

Кроме того, при автоподстройке f_r входящие в выражение (1) для I компоненты паразитного сигнала величины (кроме T и G) не изменяют своего значения за время измерений на какой-либо из выбранных частот; T и G могут медленно и незначительно изменять свою величину. Поэтому наличие автоподстройки приводит также к стабилизации I компоненты паразитного сигнала.

Выражение $Q(f)$ близко к нечетной функции частоты относительно

тех значений частот, которые являются корнями $Q(f) = 0$. Поэтому входящие в выражение (1) два интеграла, подынтегральной функцией которых является $Q(f)$, а пределы интегрирования расположены симметрично по обе стороны от значений f_r , будут иметь примерно равные значения, но противоположные знаки; так как в выражение (1) входит их сумма, то величина I компоненты при этом сильно уменьшается.

То, что было сказано об уменьшении величины I компоненты, имеет, конечно, качественный характер. Определение количественных соотношений в общем виде затруднительно. Для ряда конкретных случаев выражение (1) было просчитано на счетной машине; в результате этих расчетов можно сделать вывод, что, в среднем, величина I компоненты уменьшается при работе системы автоподстройки примерно на порядок. Расчет и эксперимент показывают, что оставшееся значение I компоненты паразитного сигнала зависит от выбранной точки автоподстройки и может изменяться (от одной точки к другой) в несколько раз.

Возникает вопрос: не будет ли поступающий на вход радиометра измеряемый сигнал приводить в действие систему автоподстройки и снижать, тем самым, чувствительность радиометра? Расчет величины этого эффекта показал, что в наихудшем случае возможное снижение чувствительности пренебрежимо мало (меньше 0,1%).

На рис. 1 приведена блок-схема макета прибора. Как видно из приведенной блок-схемы, радиометр построен по однокристальной схеме с направленным ответвителем. Диапазон приемника ($\lambda = 1,7 \div 2,7 \text{ см}$) определяется, в основном, конструкцией камеры смесителя 7. Механический дисковый модулятор 1 и направленный ответвитель 4 удовлетвори-

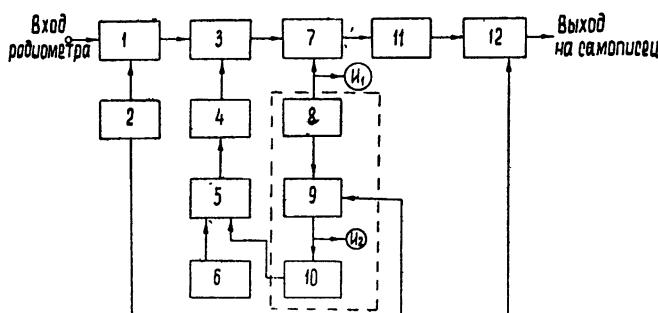


Рис. 1. Блок-схема радиометра:

1—механический волноводный модулятор; 2—генератор частоты модуляции $F_m = 182 \text{ гц}$; 3—направленный ответвитель; 4—гетеродин с диапазоном (1,7- $+2,7 \text{ см}$); 5—управляемый источник питания гетеродина; 6—устройство ручного управления источником питания; 7—однокристальный смеситель; 8—усилитель частоты F_m ; 9—фазовый детектор; 10—фильтр цепи автоподстройки; 11—УПЧ ($f_{\text{п ч}} = 100 \text{ Мгц}$; $\Delta f = 27 \text{ Мгц}$, шум-фактор—2,5); 12—низкочастотный блок радиометра, И₁—индикатор тока смесителя, И₂—индикатор системы автоподстройки Узлы, обведенные пунктиром, относятся только к системе автоподстройки.

тельно работают во всем рабочем диапазоне примененного волновода. Промежуточная частота $f_{\text{п ч}} = 100 \text{ Мгц}$. При таком выборе $f_{\text{п ч}}$ шумы гетеродина будут малы, что делает ненужным применение мостовых схем для снижения уровня этих шумов. С индикатором тока смесительного кристалла И₁ соединен селективный усилитель 8, настроенный на частоту модуляции $F_m = 182 \text{ гц}$. С выхода усилителя 8 сигнал автоподстройки поступает на фазовый детектор 9, а затем через фильтр 10 на управляемый источник питания 5 гетеродина 4. Таким образом, цепь автоподстройки оказывается замкнутой. Для контроля и предварительной уста-

новки выбранной рабочей точки схемы автоподстройки имеются индикатор И₂ и органы ручной перестройки 6 источника питания (а тем самым, и частоты гетеродина).

Изготовленный макет имеет следующие данные:

- 1) диапазон перестройки $11,1 \div 17,5$ Ггц,
- 2) дрейф линии записи соответствует $1 \div 10$ град в час,
- 3) чувствительность (при постоянной времени 1 сек) от 2° до 4° по всему диапазону.

Резюмируя, можно сказать, что в результате применения системы автоподстройки частоты гетеродина по признаку отсутствия составляющей тока смесителя с частотой модуляции уничтожается II компонента паразитного сигнала, а его I компонента (определяющая в этом случае весь паразитный сигнал на выходе радиометра) резко уменьшает свою величину и остается стабильной во время проведения сравнительных измерений различных источников.

Конструктивно осуществление описанного метода подавления паразитного сигнала весьма несложно. Необходим лишь дополнительный селективный усилитель с фазовым детектором (на частоту модуляции данного радиометра). Вход этого усилителя соединяется со смесителем, а выход фазового детектора вводится последовательно с опорным напряжением в электронный стабилизатор питания той цепи, от которой зависит частота гетеродина. Таким образом, стабилизатор питания используется, кроме своего основного назначения, и как усилитель мощности в цепи автоподстройки.

Применение этого метода подавления паразитного сигнала позволяет исключить из конструкции радиометров вентили (на входе) и балансные смесители; такое упрощение СВЧ тракта позволяет получать большие (порядка октавы) пределы перестройки радиометра, причем изменение рабочей частоты осуществляется простым изменением частоты гетеродина.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, ЖТФ, 25, 1426 (1955).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 декабря 1964 г.

CM BAND RADIOMETER WITH ELIMINATION OF SPURIOUS SIGNAL INFLUENCE BY THE METHOD OF AUTO-TUNING OF HETERODYNE FREQUENCY

L. I. Gershtein

The operation principle is described as well as the circuit of cm band radiometer in which the auto-tuning system of heterodyne frequency is used for eliminating the influence of spurious signal on the measurement results. The tuning is controlled by the current component of mixer with modulation frequency. The experimental results of the model are given.

УДК 539.07 : 523.165

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗАТОРА ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

А. С. Шаповалов, И. Г. Козлов

Исследованы основные характеристики анализатора энергии заряженных частиц с диспергирующим элементом в виде цилиндрического конденсатора, поток заряженных частиц в который вводится под острым углом к оси цилиндров.

В работе [1] было проведено теоретическое исследование фокусирующих и дисперсионных свойств электростатического поля цилиндрического конденсатора и рассмотрена возможность использования его в качестве анализирующего элемента спектрометра энергии заряженных частиц. Исследование показало, что при вводе потока заряженных частиц под острым углом к оси цилиндрического конденсатора поле последнего обладает более высокой удельной дисперсией по энергии, чем поле плоского конденсатора [2]. В предлагаемой работе приводятся результаты экспериментального изучения ряда основных характеристик анализатора энергии заряженных частиц, использующего в качестве анализирующего элемента поле цилиндрического конденсатора с вводом частиц под острым углом к оси цилиндров. Результаты эксперимента сравниваются с результатами теоретического рассмотрения [1].

1. РАСЧЕТ АНАЛИЗАТОРА

Пусть в цилиндрический конденсатор через отверстие в его внутренней обкладке под острым углом Θ к оси цилиндров вводится слаборасходящийся пучок заряженных частиц. Если между цилиндрами имеется тормозящее поле, то, как показывает расчет [1], при определенном значении параметра, характеризующего неоднородность поля,

$$\xi = \sqrt{\frac{U}{\Delta U_t} \ln \frac{R_o}{r_0}} \quad (1)$$

(U — потенциал внутренней обкладки конденсатора, определяющий энергию частиц, ΔU_t — тормозящая разность потенциалов между обкладками конденсатора, R_o — радиус внешнего цилиндра конденсатора, r_0 — радиус внутреннего цилиндра конденсатора) частицы возвращаются к внутреннему цилиндру и сфокусируются на его поверхности в узкую полоску. Максимальное смещение частиц x_0 данной энергии вдоль оси конденсатора и максимальная высота y_0 их траекторий, отсчитываемая от оси цилиндров, могут быть определены из соотношений [1]

$$x_0 = r_0 4\xi e^{\xi^2 \sin^2 \Theta} \cos \Theta \int_0^{\xi \sin \Theta} e^{-z^2} dz; \quad (2)$$

$$y_0 = r_0 e^{\xi^2 \sin^2 \Theta} . \quad (3)$$

Если в потоке имеются частицы с одинаковой массой, но с различными скоростями (энергиями), то при заданном ΔU_t они сфокусируются на поверхности внутреннего цилиндра на различных расстояниях от входного отверстия. Таким образом, тормозящее поле цилиндрического конденсатора обладает свойствами электростатической линзы с фокальной плоскостью, расположенной вдоль поверхности внутреннего цилиндра и, следовательно, может быть использовано в качестве анализирующего элемента спектрометра энергии заряженных частиц.

Действительно, прорезав на определенном расстоянии от входного отверстия выходное, можно, меняя ΔU_t , выводить через него из зазора конденсатора последовательно частицы с различной энергией, связанной с ΔU_t соотношением (1). Фиксировать выведенные частицы можно, например, при помощи коллектора, расположенного вблизи выходной щели.

Зная величину коллекторного тока I_k и тормозящую разность потенциалов ΔU_t , можно определить число частиц в потоке, обладающих той или иной энергией, т. е. произвести энергетический анализ потока.

Интервал неразрешимых анализатором энергий частиц $\Delta(eU)$ (в электрон-вольтах) определяется выражением [1]

$$\frac{\Delta(eU)}{eU} = \frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{kx_0} , \quad (4)$$

где Δx_1 — ширина входной щели, Δx_2 — ширина выходной щели, x_0 — расстояние между щелями, определяемое формулой (2).

Коэффициент k , входящий в формулу (4), так же, как x_0 , y_0 и угол ввода $\Theta = \Theta_\Phi$, при котором происходит фокусировка частиц по направлению, является функцией параметра ξ ; он может быть определен с помощью формул и графиков, представленных в работе [1].

Из выражения (4) видно, что при выбранных геометрических размерах разрешение спектрометра является постоянной величиной, которая определяется шириной входной и выходной щелей, расстоянием между ними и значением коэффициента k . Для увеличения разрешения спектрометра можно уменьшать ширину входной и выходной щелей, или увеличивать расстояние между ними и коэффициент k , который, так же, как и x_0 , зависит от соотношения радиусов цилиндров конденсатора. Значительное уменьшение ширины щелей приводит к резкому уменьшению тока, проходящего на коллектор, т. е. к уменьшению чувствительности спектрометра; кроме того, это связано с серьезными технологическими трудностями. Увеличение расстояния между щелями и коэффициента k сделает конструкцию громоздкой.

Из выражения (4) следует также, что с увеличением энергии частиц исследуемого пучка eU интервал неразрешимых спектрометром энергий $\Delta(eU)$ будет увеличиваться.

Из графиков, представленных в работе [1], следует, что наилучшими дисперсионными свойствами обладает поле цилиндрического конденсатора, геометрические размеры которого соответствуют $\xi = 1,2$. Выбрав $\xi = 1,2$, из соотношений и графиков [1] находим

$$\Theta_\Phi = 58^\circ, \quad k = 1,774 ,$$

$$x_0 = 5,397 r_0, \quad y_0(\Theta_\Phi) = 2,812 r_0 ;$$

затем, положив $R_0 = 18$ мм, определяем геометрические размеры спектрометра:

$$r_0 = 4,25 \text{ мм}, \quad x_0 = 22,94 \text{ мм.}$$

Так как авторы ставили своей задачей проверку основных теоретических соотношений, полученных в работе [1], а не стремились к созданию спектрометра с очень высоким разрешением, то ширины входной и выходной щелей были выбраны равными

$$\Delta x_1 = 0,22 \text{ м.м.}, \quad \Delta x_2 = 0,23 \text{ м.м.}$$

Подставляя в соотношения (1) и (4) $\xi = 1,2$, $k = 1,774$, а также вычисленные геометрические размеры спектрометра, находим связь между ускоряющим и тормозящим напряжениями и разрешение прибора:

$$\Delta U_t = 1,005 \text{ } U, \quad (5)$$

$$\Delta U/U = 1,105\%. \quad (6)$$

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Основу разработанного спектрометра, чертеж аксиального и азимутального сечений которого представлен на рис. 1, составлял цилиндрический конденсатор, обкладки которого 1 и 2 были выгнуты в виде двух полуцилиндров из листового предварительно отожженного в вакууме и тщательно отполированного никеля толщиной 0,5 м.м. Использование

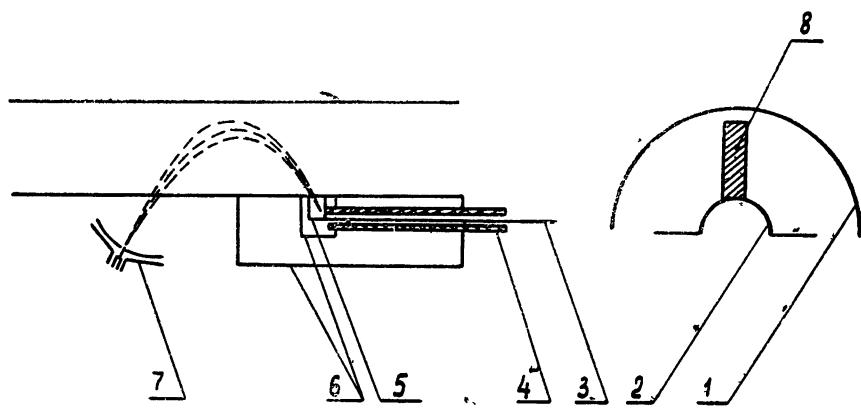


Рис. 1. Осевое и азимутальное сечения спектрометра:

1, 2—обкладки цилиндрического конденсатора, 3—вывод тока с коллектора, 4—керамическая трубочка, 5—коллектор, 6—экраны, 7—электронная пушка, 8—область движения заряженных частиц.

при изготовлении обкладок специально изготовленных цилиндрических шаблонов позволило выдержать их радиальные размеры с точностью до 0,01 м.м.

Азимутальный угол раствора полуцилиндров был взят равным π -радиан (см. рис. 1). Как показали измерения с помощью электролитической ванны при зазоре конденсатора $R_0 - r_0 = 13,75$ м.м и длине щелей 4 м.м искажением поля конденсатора в области 8 движения заряженных частиц за счет краевых эффектов можно было пренебречь.

Обкладки конденсатора жестко скреплены одна с другой стеклянными изоляторами. Входная и выходная щели во внутреннем полуцилиндре конденсатора прорезаны электроискровым методом и имели вначале ширину больше расчетной. Затем к краям прорезанных щелей были приварены пластинки из черненого в атмосфере метана никеля толщиной 0,2 м.м, и их ширина стала равной расчетной величине. Использование черненого никеля связано с необходимостью снизить до минимума величину вторичной электронной эмиссии с краев щелей; последняя может

существенно исказить экспериментальные результаты при энергетическом анализе потоков электронов [3-5].

Коллектор 5, находящийся под выходным отверстием, был изготовлен из черненого никеля в виде цилиндра Фарадея и тщательно закрыт экранами 6 от попадания на него рассеянных частиц. Вывод тока с коллектора 3 помещен внутри керамической трубочки 4 и также тщательно заэкранирован.

Исследование дисперсионных и фокусирующих свойств разработанного спектрометра проводилось при помощи ленточного электронного пучка. Для создания ленточного слаборасходящегося потока электронов была сконструирована низковольтная пушка Пирса с прямонакальным вольфрамовым катодом. Анодное отверстие, определявшее поперечные размеры пучка на выходе из пушки, составляло $0,5 \text{ мм} \times 4 \text{ мм}$. Ширина отверстия в фокусирующем электроде при длине в 4 мм составляла 1 мм . Расстояние между анодом и фокусирующим электродом равно 1 мм . Катод с размерами $0,07 \text{ мм} \times 0,45 \text{ мм} \times 6 \text{ мм}$ помещался за фокусирующим электродом на расстоянии $0,2 \text{ мм}$ от него. Ленточный вольфрам для катода пушки был получен прокаткой накаленной вольфрамовой проволоки диаметром $0,3 \text{ мм}$ на вальцах. После прокатки размеры катода доводились до расчетной величины травлением. Травление одновременно осуществляло полировку поверхности катода.

После сборки пушки методом подвижной диафрагмы [6] было проведено специальное исследование расходности сформированного электронного потока. Диафрагма имела отверстие размерами $0,07 \text{ мм} \times 8 \text{ мм}$ и могла перемещаться как вдоль пучка, так и в его поперечном сечении параллельно большей стороне. Пушка при токе накала катода $I_f = 4,8 \text{ а}$, напряжении накала $U_f = 2,1 \text{ в}$, напряжении на фокусирующем электроде, равном нулю, и анодном напряжении $U = 35 \text{ в}$ обеспечивала ток пучка $I_n = 0,35 \text{ ма}$.

Для исследования геометрии электронного пучка, сформированного пушкой, было изучено распределение плотности тока по поперечному сечению пучка на различных расстояниях d от анодного отверстия. На рис. 2 представлены кривые, характеризующие распределение плотности тока по поперечному сечению пучка при $U = 35 \text{ в}$ на расстоянии от анод-

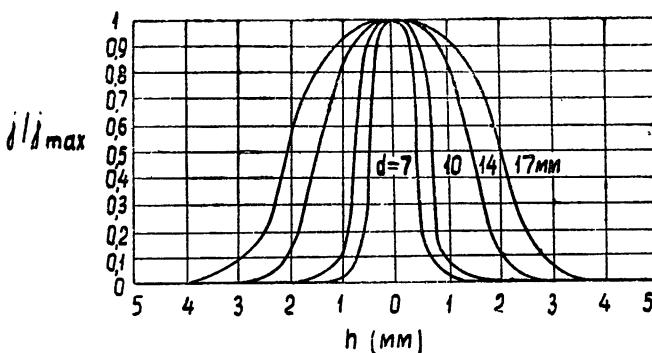


Рис. 2. Распределение плотности тока электронного пучка по его поперечному сечению на разных расстояниях d от анодного отверстия.

ного отверстия, равном соответственно 7 мм , 10 мм , 14 мм и 17 мм . Каждая кривая характеризует зависимость отношения j/j_{\max} (j — плотность тока в данной точке поперечного сечения пучка, j_{\max} — плотность тока на оси пучка) от расстояния h до оси пучка. Аналогичные кривые были

получены при $U = 50 \text{ в}, 80 \text{ в}, 100 \text{ в}, 130 \text{ в}, 150 \text{ в}, 200 \text{ в}, 250 \text{ в}, 300 \text{ в}$. Исследование велось при непрерывной откачке при давлении не выше ($1,5 \div 2$) 10^{-6} тор. При давлении выше ($8 \div 9$) 10^{-6} тор в центральной части пучка наблюдался пик плотности тока, аналогичный описанному в работе [7].

График на рис. 3, построенный с помощью рис. 2, иллюстрирует расходимость электронного пучка, сформированного пушкой при работе в указанном выше режиме. По оси абсцисс отложено расстояние от анодного отверстия до исследуемой точки пучка, по оси ординат — полуширина пучка a , определенная как полуширина соответствующей данному расстоянию d кривой рис. 2. Кривые рис. 2 снимались несколько раз. При построении графика рис. 3 были использованы наибольшие значения из экспериментально определенных поперечных размеров пучка. Поэтому кривая рис. 3, практически совпадающая с расчетной [8], дает, по-видимому, несколько завышенные результаты.

Исследование электронного пучка, сформированного пушкой при более высоких напряжениях, показало, что с увеличением ускоряющего напряжения от 35 в до 300 в расходимость пучка уменьшается. Максимальная расходимость пучка имеет место при $U = 35 \text{ в}$; угол между касательной к траектории «граничного» электрона и осью пучка на расстоянии в 12 мм от анодного отверстия пушки при этом составляет 8° . Значительная расходимость пучка, по-видимому, связана с влиянием

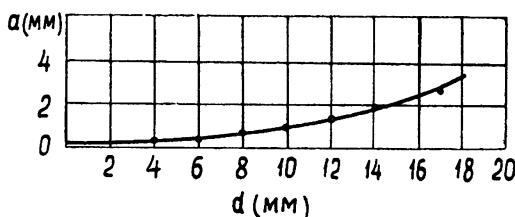


Рис. 3. Зависимость полуширины электронного пучка a от расстояния между анодным отверстием и исследуемым поперечным сечением пучка d .

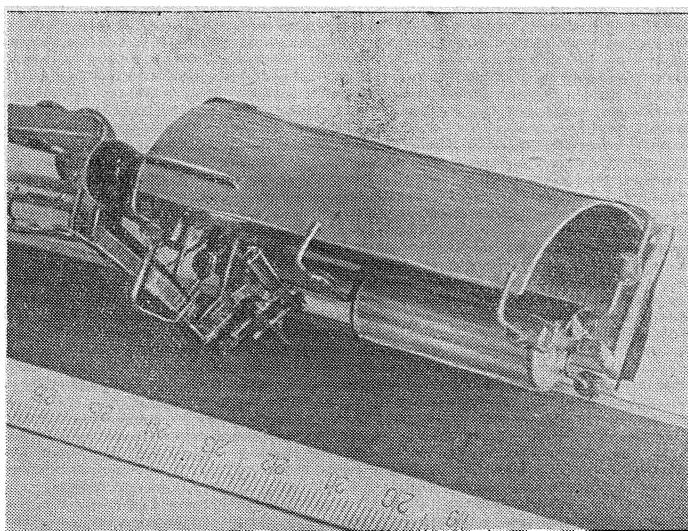


Рис. 4. Фотография спектрометра.

анодного отверстия, соизмеримого в данном случае с расстоянием между анодом и катодом пушки и пространственным зарядом пучка. При сборке пушки располагалась на расстоянии в 12 мм от входной щели

спектрометра, имеющей ширину 0,22 мм, и внутренний цилиндр конденсатора всегда находился под тем же потенциалом, что и анод пушки. Таким образом, учитывая данные рис. 3, простым геометрическим построением можно определить, что расходимость электронного пучка, ускоренного напряжением в интервале от 35 в до 300 в и введенного через входную щель в спектрометр под углом 58° к его нижней обкладке, значительно меньше, чем расходимость пучка перед щелью и фактически не превышает 6°.

На фотографии (см. рис. 4) показана конструкция спектрометра с прикрепленной к нему электронной пушкой.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СПЕКТРОМЕТРА

Исследование спектрометра было проведено в колбе со шлифом при давлении не выше ($2 \div 3$) 10^{-6} тор. Питание анодной, отклоняющей и накальной цепей осуществлялось от аккумуляторов.

Спектральные характеристики прибора изучались методом, изложенным в работе [2]. В спектрометр вводился сформированный пушкой электронный пучок. При каждом фиксированном ускоряющем напряжении, приложенном к аноду пушки, снималась зависимость тока на коллектор спектрометра от тормозящего напряжения между его обклад-

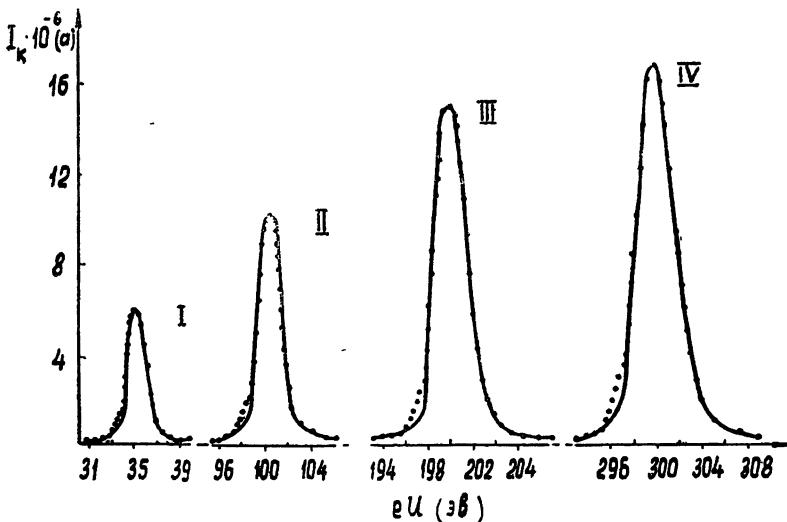


Рис. 5. Кривые зависимости тока на коллектор спектрометра от энергии частиц (при напряжении накала $U_f=2,1$ в и токе накала $I_f=4,8$ а): I—ускоряющее напряжение $U=35$ в, ток пучка, сформированного пушкой, $I_p=0,35$ ма; II— $U=100$ в; $I_p=0,75$ ма; III— $U=200$ в; $I_p=1$ ма; IV— $U=300$ в; $I_p=1,07$ ма.

ками. На основании этой зависимости строилась зависимость (см. рис. 5) тока на коллектор I_k (т. е. величины, пропорциональной числу частиц) от энергии частиц (т. е. от ускоряющего напряжения, связанного с тормозящим напряжением соотношением (5)).

Известно [2, 9, 10], что при вводе в спектрометр моноэнергетического пучка частиц указанная кривая будет иметь резкий максимум. Удвоенная ширина пика на половинном уровне равна интервалу неразрешимых спектрометром энергий частиц $\Delta(eU)$. Если же в спектрометр введен немонокинетический поток, то ширина зависимости тока на коллектор от энергии частиц определяется и величиной интервала $\Delta(eU)$, и шириной действительного распределения частиц по энергиям. Функция распределения частиц по энергиям может быть снята с помощью спек-

трометра лишь в том случае, если $\Delta(eU)$ значительно меньше ширины действительного распределения частиц по энергиям. При этом ошибка будет тем меньше, чем меньше интервал неразрешимых энергий $\Delta(eU)$. Если ширина функции распределения меньше, чем интервал неразрешимых спектрометром энергий, то с помощью последнего можно измерить лишь среднюю энергию частиц пучка.

Кривые I, II, III и IV, представленные на рис. 5, сняты при напряжении накала $U_f = 2,1$ в, токе накала $I_f = 4,8$ а, ускоряющих напряжениях 35 в, 100 в, 200 в, 300 в и токах пучка, равных соответственно 0,35 ма, 0,75 ма, 1 ма и 1,07 ма. По оси абсцисс на рис. 5 отложена энергия электронов в электрон-вольтах, а по оси ординат — величина коллекторного тока I_k .

Так как в спектрометр вводился немонокинетический электронный поток из электронного прожектора с вольфрамовым катодом, разброс частиц по энергии в котором, по-видимому, соизмерим в данном случае с интервалом $\Delta(eU)$ ($\Delta(eU)/eU \approx 1,5\%$), то представленные кривые должны рассматриваться лишь как юстировочные кривые прибора. Очевидно, ширина этих кривых слагается из интервала неразрешимых спектрометром энергий и ширины кривой действительного распределения частиц по энергии в вводимом потоке.

Как видно из рассмотрения рис. 5, при изменении ускоряющего напряжения от 35 до 300 в форма кривых почти не меняется; ширина же кривых все время растет, что соответствует росту $\Delta(eU)$ при увеличении eU .

Графики, аналогичные приведенным выше, были сняты также при ускоряющих напряжениях $U = 50$ в, 80 в, 120 в, 130 в, 140 в, 150 в, 230 в, 250 в и 300 в. При каждом ускоряющем напряжении было тщательно определено тормозящее напряжение ΔU_t , которое необходимо приложить между обкладками конденсатора, чтобы провести через анализатор на коллектор максимальное количество электронов, обладающих при входе в конденсатор энергией eU . Результат этого исследования представлен в виде графика на рис. 6. Здесь по горизонтальной оси отложено ускоряющее напряжение U , по вертикальной — необходимое тормозящее напряжение ΔU_t . График зависимости ΔU_t от U представляет собой прямую линию, что характерно для всех электростатических анализаторов; для цилиндрического конденсатора это следует из соотношения (1). Тангенс угла наклона прямой равен 1,02. Расчетная величина коэффициента пропорциональности при приведенных выше значениях параметра ξ и расстояния между щелями, как это видно из соотношения (5), равна 1,005. Таким образом, теоретическое значение коэффициента отличается от экспериментально определенного значения всего лишь на 1,5%, что является достаточно хорошим экспериментальным подтверждением правильности выражений (1) и (2).

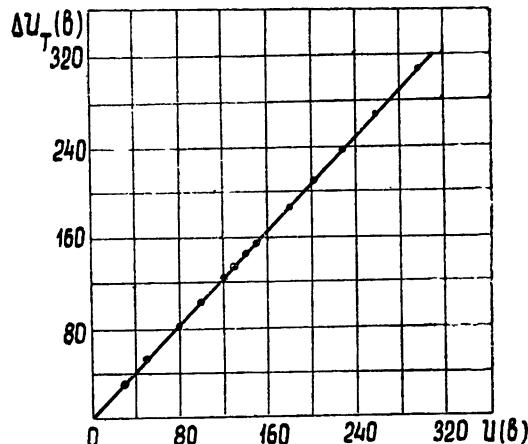


Рис. 6. Зависимость тормозящего напряжения между обкладками конденсатора ΔU_t от ускоряющего напряжения U .

Экспериментальное определение разрешения $\Delta(eU)/eU$ цилиндрического анализатора было выполнено по методике, описанной в работе [2].

Расширение кривых рис. 5 с ростом ускоряющего напряжения обусловлено лишь линейным ростом $\Delta(eU)$ с увеличением eU (см. соотношение (4)). Поэтому, построив график зависимости ω (ширины указанных юстировочных кривых, определенной на уровне 1/2) от соответствующего им ускоряющего напряжения U , мы должны получить прямую линию.

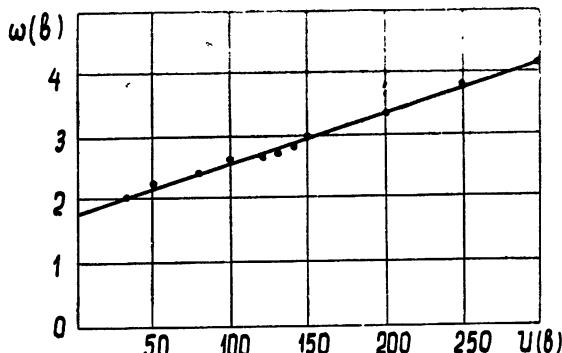


Рис. 7. Зависимость ширины ω кривой тока на коллекторе (на половине ее высоты) от ускоряющего напряжения U .

Лено тем фактом, что электронный пучок на немонокинетический; и он имеет конечный интервал начальных энергий, обусловленный тепловым распределением электронов по энергиям, падением напряжения вдоль эмиттера [2] и т. д.

Тангенс угла наклона прямой рис. 7 равен 0,008; следовательно, разрешение прибора $\Delta(eU)/eU$ составляет 1,6%. Расчетная величина разрешения 1,105%. Некоторое расхождение экспериментального и теоретического значений разрешения прибора, по-видимому, обусловлено неточностью выражения (4), так как оно не учитывает угол раствора частиц при входе в конденсатор, а также технологические ошибки: известную непараллельность щелей, нестрогую соосность цилиндров и т. д.

В заключение сравним разрешающую способность описанного спектрометра с разрешающей способностью спектрометра с полем плоского конденсатора в качестве диспергирующего элемента [2]. Плоский конденсатор имел щели приблизительно тех же размеров, что и исследованный цилиндрический конденсатор ($0,25 \text{ мм} \times 6,3 \text{ мм}$). Угол раствора электронного пучка при вводе его в плоский конденсатор такой же, как и при вводе в цилиндрический (6°). Оба анализатора исследовались с помощью электронных пушек с прямонакальными вольфрамовыми эмиттерами. Основное различие в геометрических размерах спектрометров заключалось в расстояниях между щелями. У плоского конденсатора расстояние между щелями равно $50,8 \text{ мм}$, т. е. более, чем в 2 раза превышает соответствующее расстояние в цилиндрическом конденсаторе ($22,94 \text{ мм}$). Несмотря на это, разрешение спектрометра с цилиндрическим конденсатором (1,6%) не уступает разрешению спектрометра с плоским конденсатором (2%). Указанный факт, по-видимому, подтверждает вывод относительно высоких дисперсионных свойств поля цилиндрического конденсатора, сделанный в [1].

Авторы выражают глубокую благодарность П. В. Голубкову за интерес к работе и ценное обсуждение полученных результатов, Е. И. Мар-

кину за тщательное изготовление экспериментальной конструкции, Л. Л. Страховой и Г. Ф. Шаповаловой за помощь в проведении измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Козлов, А. С. Шаповалов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 531 (1964).
2. G. A. Haggoweg, Rev. Sci. Instr., 26, 850 (1955).
3. И. Г. Козлов, Доклад на конференции МВО по радиоэлектронике, Саратов, 1957.
4. П. В. Голубков, И. Г. Козлов, Доклад на конференции МВО по радиоэлектронике, Киев, 1959.
5. И. Г. Козлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 192 (1962).
6. Н. С. Зинченко, Курс лекций по электронной оптике, изд. Харьк. ун-та, Харьков, 1961.
7. C. C. Cutler, J. A. Saloom, Proc. IRE, 43, 299 (1955).
8. Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.
9. Л. Н. Добрецов и П. Я. Уваров, Труды совещания по катодной электронике, Киев, 1951; изд. АН УССР, Киев, 1952, стр. 43.
10. В. М. Кельман и С. Я. Явор, Электронная оптика, изд. АН СССР, М—Л., 1963.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
22 сентября 1964 г.

SOME RESULTS OF EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF ELECTROSTATIC CHARGED PARTICLE ENERGY ANALYSER PROPERTIES

A. S. Shapovalov, I. G. Kozlov

The main characteristics of charged particle energy analyser with a dispersive element in the form of a cylindrical capacitor have been investigated. The charged particle beam is injected at an acute angle to the axis.

УДК 537.525

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ИОНОВ, ПОПАДАЮЩИХ НА КАТОД В АНОМАЛЬНОМ ТЛЕЮЩЕМ РАЗРЯДЕ

P. M. Баширова, A. B. Бондаренко

Исследовано распределение энергии ионов каналовых лучей. Полученные данные позволяют заключить, что перераспределение энергии ионов на пути к катоду и в закатодном пространстве обязано, главным образом, перезарядке, эффективность которой в области разряда оказывается меньшей, чем вне его.

ВВЕДЕНИЕ

Для построения теории тлеющего разряда на постоянном токе весьма существенны вопросы о месте образования ионов в катодной области и о распределении по энергиям положительных ионов, достигающих катода и вызывающих эмиссию электронов. Эти вопросы в известной степени связаны между собой. Ответы на них будут, по-видимому, различны для двух основных форм тлеющего разряда: нормального и аномального.

Вопрос о месте образования положительных ионов в том и другом случае довольно подробно обсуждался Резикяном [1,2]. Что касается энергетического распределения ионов в каналовом пучке, то между известными нам данными [3—6] имеются значительные расхождения как в отношении общего вида распределения, так и его изменения в зависимости от режима разряда. Кроме того, в [3] утверждается, что основным внешним фактором, определяющим вид энергетического распределения ионов, достигающих катода, является начальное давление p_0 , а в работе [6] — разрядный ток I_r .

Энергетический анализ в указанных работах проводился однотипным образом с помощью электростатического анализатора с углом раствора $127^{\circ}17'$. Но размеры и геометрия разрядных трубок, катодов, выходных каналов и щелей, по-видимому, сильно различались, что могло отразиться на результатах.

В 1958 г. одним из авторов настоящей статьи были начаты эксперименты по масс-спектральному анализу положительных каналовых ионов, выводимых из аномального разряда. При этом получались масс-спектры с отчетливо выраженным узкими «пиками» (масс-линиями) и сравнительно небольшим фоном. Отсюда можно было заключить, что в каналовых лучах имеется интенсивная ионная компонента, обладающая энергией, заключенной в узком интервале значений. Этот вывод не согласовался с данными работы [3]. Предварительная обработка результатов масс-анализа показала, что энергия этих ионов была близка по величине к той, которая соответствовала полному падению напряжения на разрядной трубке.

В результате оставался неясным вид распределения по энергиям ионов, бомбардирующих катод в тлеющем разряде, и причины расхож-

дения между различными данными. Это обстоятельство, а также предстоящее проведение масс-анализа каналовых пучков, заставило нас подробно исследовать их энергетический спектр, широко варьируя условия опыта (режим разряда, геометрию катода и т. п.).

2. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для энергетического анализа каналовых пучков был применен известный метод цилиндрического конденсатора [7]. Пластины располагались по дуге окружности со средним радиусом 150 м.м. Внутренняя пластина заземлялась, а внешняя, изолированная, соединялась с вводом для подачи потенциала. У входа в анализатор щель отсутствовала. Выходная щель имела ширину 0,7 м.м. К одному из концов вакуумной камеры с пластинами конденсатора присоединялся катод разрядной трубки; к другому концу крепился фланец с коллектором ионов. В камере анализатора поддерживалось давление порядка $1 \div 5 \cdot 10^{-5}$ м.м рт. ст. Управляющий потенциал V_0 на пластине конденсатора регулировался с точностью до 1 в. Для измерения ионных токов, поступающих на коллектор анализатора, применялся ламповый электрометрический усилитель с чувствительностью до 10^{-13} а.

Постоянная анализатора определялась экспериментально с помощью соотношения: $V_t = kV_0$, где V_t — потенциал, соответствующий энергии eV_t ионов, попадающих на коллектор. Для этого использовался ионный источник от масс-спектрометра со схемой питания, обеспечивающей определенную величину энергии ионов в пучке и егоmonoхроматичность с точностью до 0,1%. Эти опыты позволили также найти максимально возможный разброс значений энергии ионов в пучке на выходе анализатора, оказавшийся равным $\pm 1,5\%$ от величины V_t .

Применявшиеся разрядные трубы представляли собой стеклянные цилинды диаметром 30 \div 40 м.м и длиной 20 \div 25 см. Разряд осуществлялся в потоке газа. По пути в трубку рабочий газ проходил через «ловушку» с жидким азотом.

Ионы из катодной области разряда попадали в анализатор через диафрагму с отверстием в центре катода. Диафрагмой служила никелевая или латунная пластинка толщиной 0,05 \div 0,10 м.м, с отверстием — каналом диаметром 50 \div 70 μ . Геометрия катодов и расположение диафрагмы вдоль их оси варьировались, вследствие чего условия формирования ионного канального пучка в каждом случае были различны.

Основной вариант катода в соединении с разрядной трубкой и анализатором изображен на рис. 1а. Собственно катодом служил выступ (2—3) со сквозным каналом, закрытым диафрагмой (4). Угол входа ионов в анализатор α составлял около 5°. На стальной выступ катода плотно одевалось такой же высоты плоское алюминиевое кольцо (3); зазор между кольцом и стенкой трубы составлял 3 \div 4 м.м. Такое устройство повышало стабильность разряда, предотвращая искрение между катодом и стенкой трубы, а также уменьшало распыление катода. Другой образец катода был плоским; в центре его имелось углубление (рис. 1б). Диафрагма располагалась на глубине 6 м.м от поверхности катода. Здесь угол входа α был около 9°.

Напряжение на электродах трубы измерялось калиброванным электростатическим киловольтметром с точностью ± 20 в. Исследовался разряд в воздухе в интервале давлений $3 \div 30 \cdot 10^{-2}$ м.м рт. ст. Напряжение разряда варьировалось от ~ 1000 в до ~ 3100 в, ток разряда изменялся от долей ма до ~ 40 ма. Разряд в этих условиях относился к аномальному типу. Отрицательное свечение заполняло почти всю трубку, т. е. разряд состоял только из катодных частей, что позволяло

считать напряжение V_i на электродах трубы весьма близким по величине к катодному падению потенциала.

Измерение на коллекторе анализатора величины тока ионов I_i в зависимости от управляющего потенциала V_0 на пластине конденсатора при неизменном режиме разряда давало дифференциальную кривую

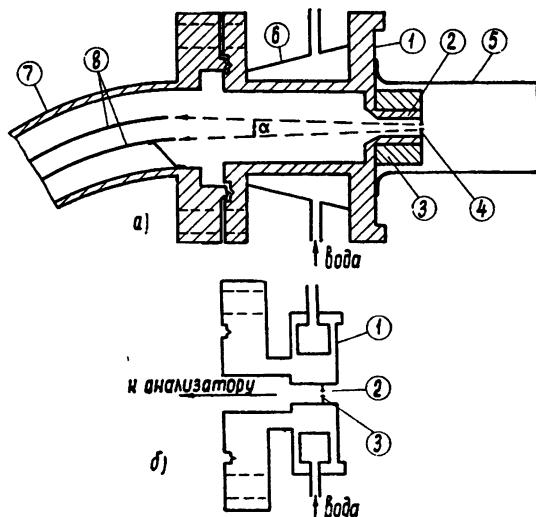


Рис. 1. Устройство катодов и соединения с анализатором:

а) 1 — корпус катода, 2 — стальной выступ, 3 — алюминиевое кольцо, 4 — диафрагма, 5 — разрядная трубка, 6 — кожух водяного охлаждения, 7 — корпус камеры анализатора, 8 — пластины анализатора; б) 1 — плоскость катода, 2 — углубление, 3 — диафрагма.

распределения ионов по энергиям $I_i^{\Delta E}(E)$. Относительная ошибка измерений I_i составляла $1 \div 2\%$. Кривые $I_i^{\Delta E}(E)$ изображались в координатах $I_i^{\Delta E}$, V_i , т. е. энергию $E = eV_i$ относили к единице заряда. Снималась также обычная вольтамперная характеристика разряда $I_r(V_r)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Один из главных результатов исследований состоит в том, что распределение сильно зависит от условий формирования канального пучка. Для двух катодов (рис. 1а и 1б), отличавшихся в основном расположением диафрагмы, картина распределения и ее изменение в зависимости от режима разряда были совершенно различными. В одном случае имело место согласие с данными работы [6], в другом — сходство с результатами предыдущих работ [3, 4].

Типичные кривые $I_i^{\Delta E}(V_i)$, полученные для катода с выступом (рис. 1а) при $p_r = \text{const}$, представлены на рис. 2. Аналогичные семейства существуют и для ряда других начальных давлений. Во всех случаях после небольшого количества медленных ионов ($V_r = (0,05 \div -0,1)V_0$) отмечался быстрый рост содержания ионов с большими энергиями. В интервале энергий от 30% до 80% eV_r кривые имели широкий максимум или даже плоскую часть. Характерной особенностью большинства кривых было резкое увеличение содержания ионов с энергиями выше 95% eV_r . Здесь появлялся интенсивный острый максимум

(«пик»), после которого количество ионов резко убывало. Во многих случаях было зарегистрировано некоторое число ионов с энергией, превышающей eV , на 7–8% («хвосты» у основания пиков). Подобное явление наблюдалось и в ряде предыдущих работ по энергетическому анализу ионных пучков [3–5, 8]. По-видимому, его надо считать след-

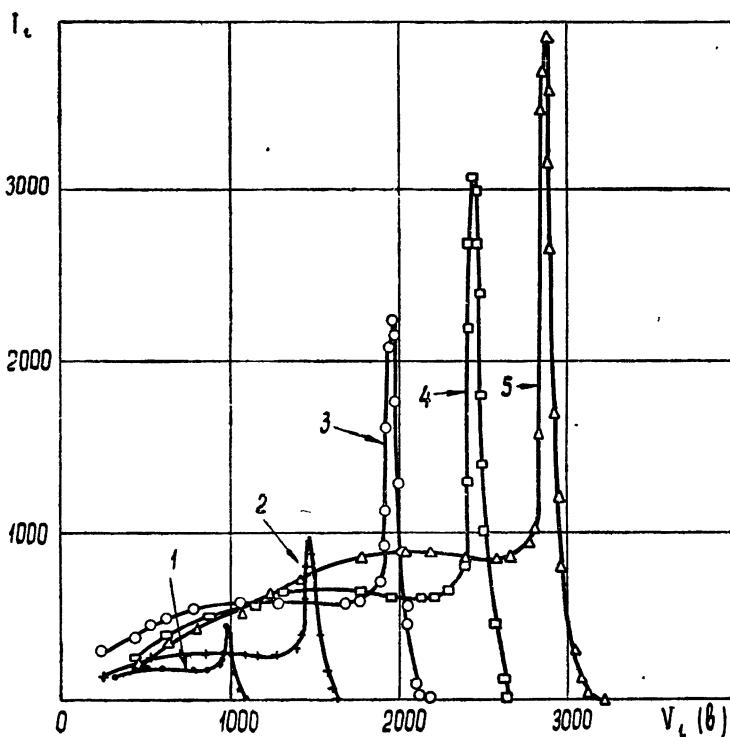


Рис. 2. Кривые распределения для катода, изображенного на рис. 1а, при $p_r = 0,1$ мм рт. ст.:

1— $V_r = 1010$ в, $I_t = 2,3$ ма; 2— $V_r = 1500$ в, $I_t = 6,8$ ма; 3— $V_r = 2000$ в, $I_t = 12,7$ ма;
4— $V_r = 2430$ в, $I_t = 14,2$ ма; 5— $V_r = 2930$ в, $I_t = 20,8$ ма. Значения I_t на кривой 1 следует умножить на 4, значения I_t на кривых 2 и 3—на 1,6.

ствием упругого рассеяния ионов в разряде, поскольку длина этих «хвостов» превышает величину разброса энергий ионов в анализаторе, найденную при калибровке ($\pm 1,5\%$). Характер кривых распределения не оставался неизменным при всех режимах разряда. При понижении давления и одновременном уменьшении V_r до 1500–1000 в кривые трансформировались так, что широкий максимум становился более выраженным, а относительная величина острого пика уменьшалась вплоть до полного его исчезновения (рис. 3). Повышение давления до 0,2–0,3 мм рт. ст. не сказывалось на обычной форме кривых.

Для катода с углублением в центре (рис. 1б) кривые $I_t^{\Delta E}(V_i)$ оказались совершенно другими. На рис. 4 представлены семейства для $p_r = \text{const}$ и $V_r = \text{const}$. Здесь полностью отсутствует острый пик при V_i , близких к V_r . Содержание быстрых ионов в пучке невелико и уменьшается с увеличением p_r и понижением V_r . Большинство кривых имеет хорошо выраженный максимум при небольших V_i и второй максимум в области $\sim 50\%$ V_r . С повышением давления второй максимум нивелировался и исчезал. Первый, более острый максимум располагался

в области 200–500 эв, в зависимости от величины напряжения и давления. С возрастанием V_r и p_r он смещался в сторону больших энергий. Относительное его положение при $p_r = \text{const}$ практически не зависело от V_r , а при увеличении p_r перемещалось пропорционально давлению. При понижении V_r максимум исчезал, причем тем раньше, чем ниже было p_r .

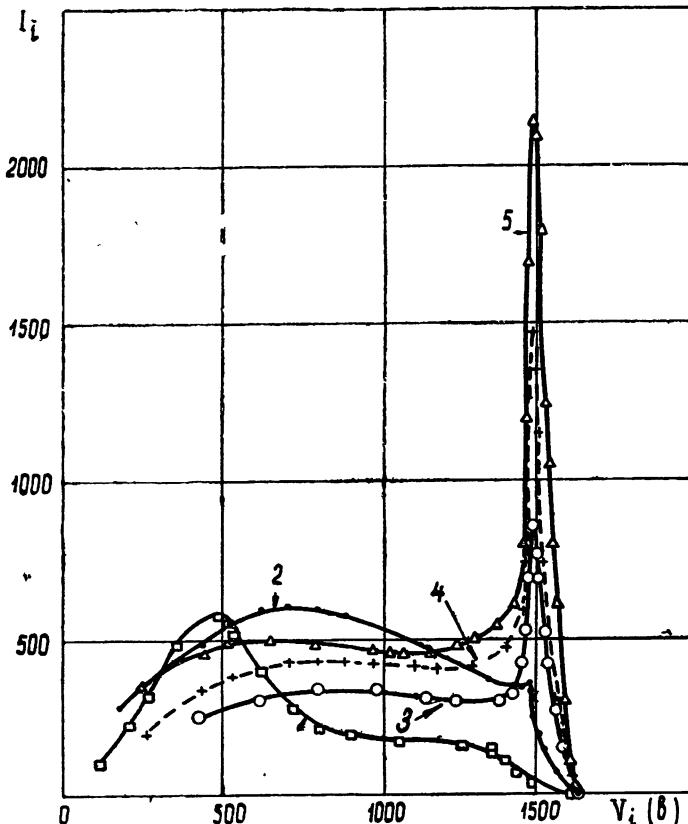


Рис. 3. Кривые распределения для катода (а) при $V_r = 1500$ эв:
 1— $p_r = 0,035$ мм, $I_r < 0,1$ ма; 2— $p_r = 0,05$ мм, $I_r = 0,45$ ма; 3— $p_r = 0,075$ мм,
 $I_r = 3,3$ ма; 4— $p_r = 0,1$ мм, $I_r = 6,8$ ма; 5— $p_r = 0,2$ мм, $I_r = 23,8$ ма. Значения I_i на кривых 1 и 2 следует умножить на 10, значения I_i на кривых
 3 и 4 — на 2,5.

Отличительной особенностью кривых $I_i^E(V_t)$ для катода (рис. 1а) является интенсивный «пик», происхождение и свойства которого мало изучены. Его высота по отношению к остальной части кривой изменялась от 1 до 5 и более. Графическая оценка показала, что доля ионов, содержащихся в этом пике (в пределах его полуширины), по отношению к общему числу ионов в пучке составляет 10–15% и почти не изменяется с режимом разряда, за исключением области самых низких V_r и p_r . Полуширина пика заключалась в пределах 40–100 эв (что составляет 2–5% от eV_r) и несколько возрастала с уменьшением V_r и p_r .

Положение этого пика, т. е. соответствующая энергия ионов совершенно не зависела от p_r в исследованном интервале давлений (рис. 3). При изменении V_r относительное положение пика оставалось неизменным и составляло в среднем 97,9 $eV_r \pm 0,5\%$. При определении абсол-

лютного положения пика, возможно, допускалась систематическая ошибка порядка $1 \div 2\%$. Поэтому не исключено, что энергия ионов, соответствующая вершине максимума, в действительности весьма близка к величине eV_r , или eV_k , где V_k — катодное падение потенциала.

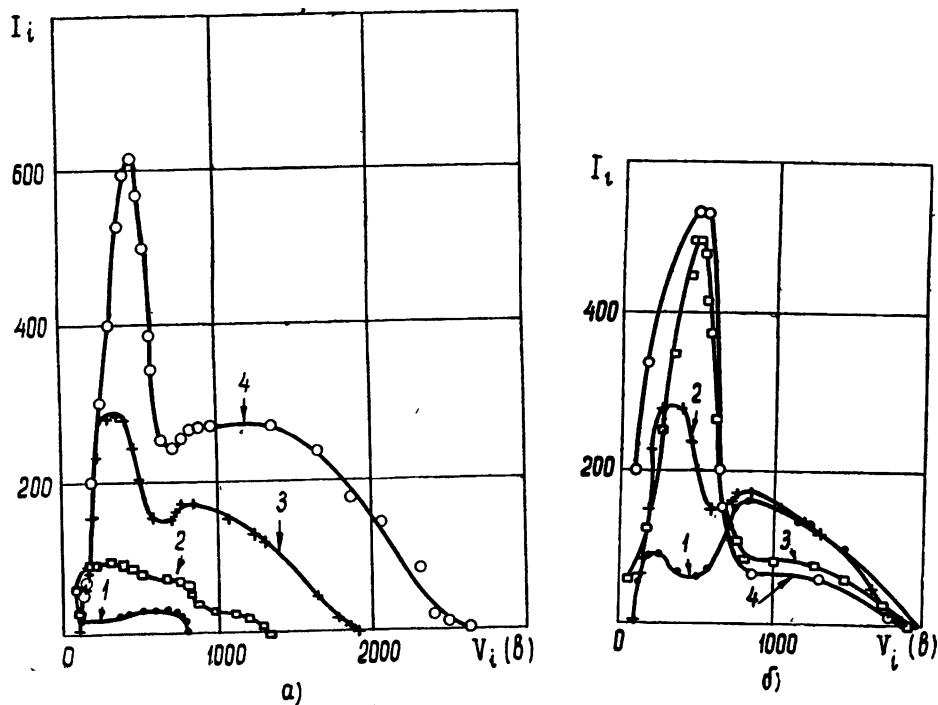


Рис. 4. а) Кривые распределения для катода, изображенного на рис. 1б, при $p_r = 0,11$ мм рт. ст.:

1 — $V_r = 1030$ в, $I_r = 1,0$ ма; 2 — $V_r = 1540$ в, $I_r = 5,0$ ма; 3 — $V_r = 2060$ в, $I_r = 8,0$ ма; 4 — $V_r = 2560$ в, $I_r = 12,5$ ма. Значения I_i на кривой 1 умножить на 2. б) То же при $V_r = 2060$ в: 1 — $p_r = 0,09$ мм, $I_r = 5,0$ ма; 2 — $p_r = 0,11$ мм, $I_r = 8,0$ ма; 3 — $p_r = 0,15$ мм, $I_r = 15,0$ ма; 4 — $p_r = 0,17$ мм, $I_r = 21,0$ ма.

Пик в области больших энергий появляется только, начиная с некоторых минимальных значений p_r , V_r и I_r . При $p_r = 3,5 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. и $I_r \leq 0,3$ ма пик отсутствовал даже при 3060 в. Повышение p_r и, следовательно, I_r не всегда приводит к появлению пика, если V_r недостаточно высоко, а остается в пределах 1000 \div 1500 в. При $p_r = 5 \cdot 10^{-2}$ мм пик появлялся при $V_r > 1500$ в и $I_r > 0,4$ ма. Дальнейшее увеличение p_r соответственно снижает необходимую величину V_r до 1000 в и менее. По-видимому, необходимым условием появления пика является некоторая минимальная величина напряжения, а не только разрядного тока, как это утверждается в работе [6].

Влияние режима разряда на интенсивность ионных токов в различных участках кривых распределения, в том числе на величину пика I_i^{\max} целесообразно сопоставить с общей вольтамперной характеристикой аномального разряда. В условиях наших опытов зависимость $I_r(V_r)$ при $p_r = \text{const}$ графически выражалась прямыми линиями, которые, по-видимому, являлись лишь аппроксимацией более сложных кривых для небольших интервалов V_r . Обработка данных при $p_r = \text{const}$ и $V_r = \text{const}$ дала следующую объединенную зависимость: $I_r \sim \sim p_r^{1,9 \div 2} V_r^{1,7 \div 2}$, из которой при $I_r = \text{const}$ следует связь между V_r и p_r .

Экспериментальные данные, имеющиеся в литературе [9] для давлений от тысячных до десятых долей мм рт. ст. и напряжений до 3000 в, выражаются следующей эмпирической зависимостью для плотности тока: $j \sim p_r^2 V^{2.5+3}$. Близкое к нашему выражение $j \sim p_r^2 (V_r - A)^2$ получается из более ранних данных Астона [10].

Аналогичным образом были найдены эмпирические зависимости $I_i^{\max}(V_r, p_r, I_r)$. Для $p_r = \text{const}$ графики $I_i^{\max}(V_r)$ уже не были прямолинейными: ток ионов возрастал с V_r быстрее, чем разрядный ток. Первая зависимость получилась в виде $I_i^{\max} \sim p_r^{1.9+2} V_r^{2.7-3.2}$. Отсюда с помощью вольтамперной характеристики находятся остальные выражения: $I_i^{\max} \sim I_r V_r^{1+1.2}$, $I_i^{\max} \sim I_r^{1.5+1.6} p_r^{-1}$. Они показывают, что величина ионного тока определяется не только разрядным током, так как при $I_r = \text{const}$ ток I_i^{\max} возрастает с V_r ; зависимость же $I_i^{\max}(p_r)$ получается убывающей, т. е. несмотря на возрастание давления, одновременное уменьшение V_r оказывается сильнее. Подобные соотношения можно найти и для ионов других энергий, соответствующих, например, широкому максимуму или плоской части кривой распределения. Оказалось, что здесь $I_i \sim p_r^{1.5} V_r^{2.5+3}$. Зависимости I_i от V_r и p_r , при $I_r = \text{const}$ были близки к найденным для I_i^{\max} .

Влияние начального давления на положение широкого максимума не было столь определенным, как в работе [3]. Скорее здесь даже наблюдалась противоположная тенденция: смещение в сторону больших энергий при увеличении p_r . То же самое происходило при возрастании V_r , так что относительное положение широкого максимума почти не зависело от напряжения и составляло $50-60\% V_r$.

У кривых $I_i^{\max}(V_r)$ для катода (рис. 1б) величина максимума при небольших энергиях изменялась в зависимости от напряжения и, в особенности, давления более резко: $I_i^{\max} \sim p_r^3 V_r^{3.5}$.

Общий вывод из этих наблюдений состоит в том, что зависимость тока положительных ионов в катодной области от условий разряда не идентична общей вольтамперной характеристике. Степень расхождения для наиболее характерных участков кривых распределения была различной.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вид экспериментальных кривых $I_i^{\max}(E)$ зависит, в основном, от распределения поля и распределения интенсивности образования первичных ионов в катодной области, а также от эффективности процессов обмена энергией и зарядами при движении частиц к катоду и в закатном пространстве. При этом следует иметь в виду, что метод канального пучка и цилиндрического конденсатора позволяет найти энергетическое распределение только той ионной компоненты, направление скорости которой близко к нормали к плоскости катода.

Режимы разряда в предыдущих работах, а следовательно, и распределения поля в катодной области, мало отличались один от другого. Возмущение в распределение поля могли вносить каналы, щели и другие элементы устройств для получения канальных пучков; различия в этих устройствах могли существенно сказаться на форме энергетического спектра.

Давление (плотность) среды в темном пространстве и в выходных каналах является фактором, способствующим упругому рассеянию и перезарядке направленно движущихся ионов; это ведет к перераспределению их энергии. Однако указанные два процесса не равнозначны. Известно, что при упругом рассеянии пучка быстрых ионов наиболь-

шая интенсивность пучка сохраняется в направлении их движения. При малых углах рассеяния потери энергии невелики; поэтому даже после значительного числа соударений распределение будет обладать отчетливо выраженным максимумом в области исходного значения энергии ионов. В результате благоприятных соударений появляется некоторое количество ионов с энергией, превышающей начальную. Но в общем этот процесс не приводит к слишком быстрому энергетическому расщеплению направленного пучка. В этом отношении значительно эффективнее перезарядка. Здесь тоже преобладают малые углы рассеяния первичных частиц; поэтому перезарядка ведет к образованию большого количества медленных ионов, т. е. к интенсивному перераспределению энергии после небольшого числа соударений.

Перезарядка в темном пространстве разряда приводит к тому, что ионы с максимально возможным значением энергии, определяемым катодным падением, должны практически отсутствовать: будут преобладать медленные ионы и максимум кривой распределения окажется ближе к ее началу. Согласно имеющимся данным, ионы каналового гучка имеют непрерывный спектр, однако относительное содержание ионов тех или иных энергий в разных экспериментах неодинаково. В [3, 4] основная часть ионного пучка заключена в интервале $10 \div 50\% eV$, а ионы больших энергий имеются лишь в небольшом количестве. В [6] количество ионов с энергиями, превышающими $50\% eV$, достаточно велико, а некоторая часть их ($10 \div 15\%$) обладает энергиями, близкими к максимально возможной. Поэтому центр тяжести кривых распределения и их форма оказывается совершенно различными.

Весьма интересной особенностью некоторых распределений (рис. 2 и 3) является пик в области больших энергий. Его положение очень близко к V , (или к V_k) и совершенно не зависит от давления, тока, природы газа и материала катода. Его интенсивность с увеличением давления не уменьшается, а растет.

Так как эта компонента ионного пучка обладает энергией, соответствующей полному катодному падению, то отсюда следует, что местом ее возникновения может быть только область за пределами темного пространства. Другие источники высокoenергетической ионной компоненты маловероятны. Объяснение Энгеля [11], согласно которому появление у катода ионов с большими энергиями объясняется вторичной ионизацией быстрыми нейтральными частицами, возникшими при перезарядке, по-видимому, недостаточно, так как энергия этих частиц, как правило, меньше eV_k ; кроме того, эффективность ионизации нейтральными частицами невелика.

Общая протяженность пути быстрых ионов была, по-видимому, значительной. Приведенная ширина темного катодного пространства p, d составляла в наших опытах около $0,1 \text{ см} \times \text{мм}$ рт. ст. Как видно, на расстоянии d укладывалось около 15 свободных молекулярных пробегов, большая часть которых в случае ионов, движущихся в собственном газе, должна заканчиваться перезарядкой. Тот факт, что значительная доля ионного пучка проходит темное пространство без потери энергии, позволяет сделать вывод о преобладании там упругих соударений над перезарядкой.

Специфическое влияние давления на I_i^{\max} отсутствовало, так как при $V_r = \text{const}$ оно не отличалось от влияния p , на общий разрядный ток. Уменьшение I_i^{\max} с увеличением p , (при $I_r = \text{const}$) было скорее кажущимся, так как одновременно уменьшалось V_r . Следовательно, главным определяющим величину I_i^{\max} параметром остается V_r ; ток I_i^{\max} возрастает пропорционально V_r в степени выше первой даже при $I_r = \text{const}$.

В другом варианте поток ионов после достижения плоскости катода проходил еще дополнительный промежуток $h = 6 \text{ мм}$ — углубление в катоде, где давление среды совпадало с разрядным, но распределение поля было иным. В углублении имелось лишь «провисающее» поле с меньшей напряженностью. В результате энергетический спектр потока ионов, достигавших выходной диафрагмы, резко изменялся. Наблюдалась усиленная потеря и перераспределение энергии ионов, в частности, пик высоких энергий исчезал совсем (рис. 4).

При повышении давления содержание ионов с энергиями $> 50\% eV$, (второй максимум) резко уменьшалось, а с энергиями в интервале $10 \div 30\% eV$, (первый максимум), наоборот, возрастало пропорционально p^3 , т. е. быстрее, чем разрядный ток. Различное поведение этих максимумов в зависимости от давления говорит о том, что при увеличении p , все большее количество быстрых ионов теряет энергию и превращается в медленные. При этом наибольшее значение энергии последних (в области первого максимума) возрастает пропорционально p . Учитывая то, что новое приращение энергии ионов, потерявших ее, определяется напряженностью поля в этой точке, можно полагать, что область основной потери энергии быстрыми ионами сдвигается с увеличением p , из глубины выемки в катоде ближе к его поверхности, т. е. в область более сильного поля. Аналогично при $p_r = \text{const}$ наибольшая энергия увеличивается пропорционально V , что объясняется возрастанием напряженности поля с V , в том месте, где происходит преимущественная потеря энергии ионами. Общая картина энергетического распределения в этом случае может быть интерпретирована как результат интенсивного действия перезарядки.

Характер происходящих изменений энергетического спектра канального пучка позволяет предположить, что некоторые процессы перераспределения энергии ионов протекают неодинаковым образом в области собственно разряда и вне его. Можно полагать, что это относится главным образом к перезарядке ионов. В этой связи заслуживают внимания соображения Дэпеля [12]. Оценивая роль перезарядки в катодной области тлеющего разряда, Дэпель на основании ряда косвенных данных приходит к выводу, что величина сечения перезарядки в электрическом поле должна быть меньше, чем измеренная, как обычно, в отсутствие поля.

Преобладание эффекта перезарядки над упругим рассеянием при переходе ионного пучка из области с высокой напряженностью электрического поля (темное пространство) в область, где поле мало, может служить дополнительным аргументом в пользу предположения, что сечения процесса перезарядки различаются в том и другом случае.

Несомненно, что часть ионов испытывает перезарядку и в темном пространстве. Например, широкий максимум на кривых I_i^{AE} (рис. 3) при $50 \div 60\% V$, может быть интерпретирован как последнее проявление эффекта перезарядки ионов на пути к катоду в той области, где напряженность поля еще недостаточно велика. В случае усиления по каким-либо причинам перезарядки на более близком к катоду расстоянии максимум кривых должен смещаться в область меньших энергий, как это и наблюдается при $p_r < 5 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$ (рис. 3), когда напряженность поля даже вблизи катода была малой (из-за большого d).

Следовательно, вид энергетического распределения у катода допускает значительные вариации в зависимости от преобладания того или иного процесса взаимодействия ионов со средой в темном пространстве. При этом данные, полученные с плоским катодом и небольшим выходным отверстием-каналом (чтобы уменьшить провисание поля и улучшить вакуум за диафрагмой), должны быть близкими к истинному

распределению энергии ионов с нормальной к катоду компонентой скорости. Поэтому кривые рис. 2 и 3, по-видимому, больше соответствуют действительности, чем другие. Расхождение с результатами предыдущих работ [3, 4] можно объяснить тем, что там применялись выходные цели и отверстия значительно большего размера. Это влекло за собой образование в них газовых «подушек» и как следствие — усиление эффекта перезарядки уже вне темного пространства. Наблюдавшееся в [3] смещение максимума кривых в область малых энергий с увеличением p_r , вероятно, отражает результат неоднократной перезарядки ионов в закатодном пространстве. При таких условиях опыта влияние начального давления на вид распределения будет превалирующим, что и было обнаружено в работе [3]. Совершенно очевидно, что эти результаты, подобно полученным нами с катодом (рис. 1б), отражают в основном эффект перезарядки ионов вне разряда, а не действительную картину распределения их энергий у катода. Для аномального разряда более характерно распределение с преобладанием быстрых ионов, чья энергия близка к величине общего разрядного потенциала..

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Резикян, Изв. АН Арм. ССР, 13, 63 (1960).
2. А. М. Резикян, Изв. АН Арм. ССР, 14, 87 (1961).
3. R. M. Chaudri, M. L. Oliphant, Proc. Roy. Soc., A 137, 662 (1932).
4. С. М. Левитский, ЖТФ, 27, 1001 (1957).
5. Е. Г. Кучеренко, А. Г. Федорус, Радиотехника и электроника, 4, 1233 (1959).
6. Е. Г. Кучеренко, И. Грошев, Укр. физ. журн., 7, 566 (1962).
7. A. Hughes, V. Rojansky, Phys. Rev., 34, 284 (1929).
8. А. Б. Растрепин, И. М. Золототрубов, Ю. П. Бугай, Изв. АН СССР, сер. физ., 27, 1113 (1963).
9. A. Günterschulze, Z. Phys., 59, 433 (1930).
10. К. К. Дарроу, Электрические явления в газах, гл. 12, ГНТИУ, Харьков, 1937.
11. А. Энгель, Ионизованные газы, гл. 8, Физматгиз, М., 1959.
12. R. Döpel, Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 7, 233 (1961).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
2 июля 1964 г.

INVESTIGATION OF ENERGY SPECTRUM OF POSITIVE IONS FALLING ON CATHODE IN ABNORMAL GLOW DISCHARGE

R. M. Bashirova, A. V. Bondarenko

The energy distribution of ions of canal rays has been investigated. The data obtained permit to draw a conclusion that the over-distribution of ion energy on the way to a cathode and in space behind it is mainly caused by overcharge the effectiveness of which inside of discharge turns out to be less than outside of it.

УДК 621.372.5

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ В КОЛЬЦЕВОЙ ЛИНИИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. И. Рабинович

Рассматриваются условия самовозбуждения и стационарные решения для кольцевой линии с распределенными нелинейными активными и реактивными параметрами. Показано, что в линии без низкочастотных потерь возможны стационарные решения в виде бегущих волн; обсуждается устойчивость этих решений.

В большинстве работ, посвященных автоколебаниям распределенных систем, рассматриваются системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с нелинейными граничными условиями (см., например, [1–4]). В последнее время, однако, значительно возрос интерес к автоколебательным системам с распределенными нелинейными параметрами, описываемыми нелинейными уравнениями в частных производных. К числу таких систем относятся, в частности, оптические квантовые генераторы (лазеры), которым уделяется большое внимание в литературе, а также генераторы, содержащие нелинейные линии передачи.

Волновые процессы в нелинейных линиях передачи подробно исследованы теоретически [5–10] и экспериментально [11–14], в то время как вопросы генерации колебаний в таких линиях затрагиваются лишь в работах [14–16], где рассматривается линия с нелинейными низкочастотными потерями.

В настоящей статье рассматриваются автоколебания в кольцевой линии передачи с распределенными нелинейными активными и реактивными параметрами. Показано, что если выполнены условия самовозбуждения, в линии без низкочастотных потерь возможно установление периодического стационарного режима в виде бегущих волн, амплитуда и форма которых определяется параметрами линии. Для слабонелинейной линии получено аналитическое выражение стационарных решений, устойчивость которых рассматривается с помощью метода усреднения.

1. Примером рассматриваемой системы может служить искусственная линия, содержащая тунNELьные диоды и нелинейные емкости* (рис. 1а), или соответствующая ей дуальная линия (рис. 1б) с нелинейными индуктивностями и четырехслойными диодами или любыми другими элементами, зависимость напряжения от тока которых имеет падающий участок. Рассмотрение проводится для распределенной модели, т. е. для модели, описываемой уравнениями в частных производных.

Уравнения для тока I и напряжения u в кольцевой линии, длины l (рис. 1а) имеют вид**

* Нелинейной емкостью может служить запертый $p-p$ переход [11, 12].

** Уравнения для токов и напряжений в линии, представленной на рис. 1б, получаются из (1.1) заменой $I \rightleftarrows u$, $Q \rightleftarrows \Phi$, $L \rightleftarrows C$ и $G \rightarrow R$, $\Psi(u_{\text{т.д}}) \rightarrow \Psi(I_{\text{н.с}})$, где $\Psi(I_{\text{н.с}})$ — зависимость напряжения от тока для нелинейного сопротивления.

$$\frac{\partial I}{\partial z} = - \frac{\partial Q}{\partial t} - Gu, \quad Q = Q(u),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$LC \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + L\varphi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \Phi = LI,$$

$$I(z, t) = I(z + l, t), \quad u(z, t) = u(z + l, t), \quad \Phi(z, t) = \Phi(z + l, t).$$

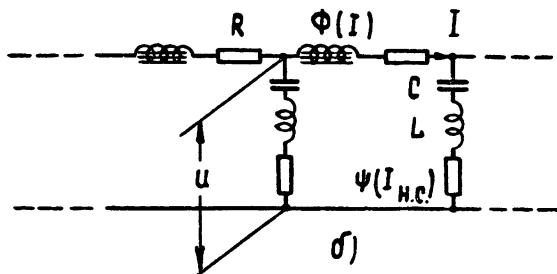
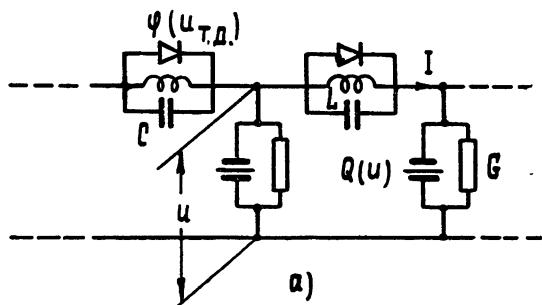


Рис. 1.

Здесь Φ — магнитный поток в индуктивности звена, $Q(u)$ — заряд на нелинейной емкости, $\varphi \left(u_{т.д.} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)$ — ток туннельного диода в зависимости

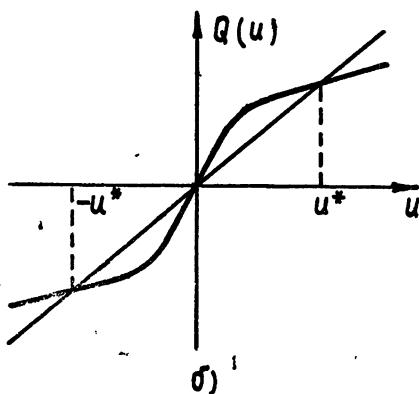
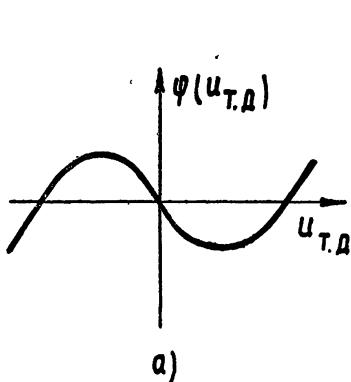


Рис. 2.

сти от напряжения на нем, C — суммарная емкость катушки и p — n перехода диода, G — проводимость низкочастотных потерь и распределенной нагрузки.

Зависимости $Q(u)$ и $\varphi(u_{\text{тл}})$ представлены на рис. 2; обе функции — нечетные. Характеристика $\varphi(u_{\text{тл}})$ представляет собой суммарную проводимость туннельного диода, рабочая точка которого находится на падающем участке, и шунтирующей диод проводимости, которая определяет величину высокочастотных потерь.

2. Рассмотрим условия самовозбуждения исследуемой системы.

Исключив из уравнений (1.1) ток I и поток Φ , получим уравнение для u :

$$LC \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} - L \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \varphi \left(-\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - L \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(u) - LG \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(z, t) &= u(z + l, t), \quad u_z(z, t) = u_z(z + l, t), \\ u_{zt}(z, t) &= u_{zt}(z + l, t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Линеаризовав уравнение (2.1) вблизи стационарного решения $u_{\text{ст}} = \text{const}$, получим (в тех же обозначениях) уравнение для возмущений:

$$LC \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} + Lg \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - LC_n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - LG \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

где

$$g = \varphi' \left(-\frac{\partial u}{\partial z} \right) \Big|_{\frac{\partial u}{\partial z} = 0}, \quad C_n = Q'(u) \Big|_{u=u_{\text{ст}}}.$$

Условия (2.2) остаются в силе и для возмущений. В изображениях при нулевых начальных условиях система (2.3), (2.2) имеет вид

$$(p^2 LC + pLg + 1) \frac{d^2 u}{dz^2} - (pLG + p^2 LC_n) u = 0, \quad (2.4)$$

$$u(z, p) = u(z + l, p), \quad u_z(z, p) = u_z(z + l, p). \quad (2.5)$$

Здесь для изображений сохранены те же обозначения, что и для функций.

Как известно [17], вопрос об устойчивости линеаризованных распределенных систем сводится к исследованию корней так называемого характеристического уравнения

$$\Delta(p) = 0, \quad (2.6)$$

а именно: линеаризованная система устойчива, если $\Delta(p)$ не имеет корней с $\text{Re} p > 0$, и неустойчива, если имеется хотя бы один корень с $\text{Re} p > 0$.

Характеристическое уравнение системы (2.4), (2.5), как нетрудно убедиться, имеет вид

$$(x_1 - x_2)(e^{x_1 l} - 1)(e^{x_2 l} - 1) = 0, \quad (2.7)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения

$$(p^2 LC + pLG + 1)x^2 - (p^2 LC_n + pLg) = 0. \quad (2.8)$$

Поскольку в соответствии с (2.8) $x_1 = -x_2 = x$, уравнение (2.7) эквивалентно уравнению

$$x = \pm jk,$$

где $k = 2\pi n/l$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Учитывая это, вместо (2.8) получаем

$$p^2 L (Ck^2 + C_n) + pL(gk^2 + G) + k^2 = 0. \quad (2.9)$$

Положив $p = j\omega$ и разделив действительные и мнимые части (2.9), найдем на плоскости действительных параметров g, G границы D -разбиения [18] в виде

$$\begin{aligned} k^2 - L(Ck^2 + C_n)\omega^2 &= 0; \\ \omega(gk^2 + G) &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Легко видеть, что граница области устойчивости состоит из двух особых прямых $G = 0$ и $g = 0$, которые определяются из (2.10) при $k = 0$ ($\omega = 0$) и $k = \infty$ ($\omega = 1/\sqrt{LC}$) соответственно.

Переход точки на плоскости g, G через прямую $g = 0$ означает возбуждение волны с $\lambda = 0$. Однако для искусственной линии бесконечно малые длины волн λ не имеют физического смысла, поскольку при $\lambda \rightarrow 0$ неизбежно должна сказываться дискретность ее параметров. Поэтому для нахождения границы, отделяющей область устойчивости от области возбуждения волны с $\lambda = \lambda_{\min}$, необходимо исследовать дискретную модель линии.

Пусть кольцевая линия состоит из $2N$ идентичных ячеек, представленных на рис. 1а. В изображениях уравнения для возмущений в такой линии имеют вид

$$\begin{aligned} (2\zeta_1 + \zeta_2) u_k - \zeta_1(u_{k-1} + u_{k+1}) &= 0, \\ k = 1, 2, \dots, 2N, \quad u_0 &= u_{2N}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\zeta_1 = Cp + g + 1/Lp$; $\zeta_2 = C_n p + G$. Характеристическое уравнение рассматриваемой системы записывается в виде

$$e^{2N\delta} - 1 = 0; \quad (2.12)$$

здесь e^δ — коэффициент передачи одной ячейки. Полагая $u_k = Ae^{k\delta}$, из (2.11) находим

$$\frac{e^{-\delta} + e^\delta}{2} = \frac{1}{2} \zeta_1^{-1} \zeta_2 + 1. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.12) удовлетворяется лишь при $\delta = j(\pi n/N)$, $n = 0, 1, 2, \dots$; подставляя это выражение для δ в (2.13) и полагая $p = j\omega$, получим для границ D -разбиения

$$\begin{aligned} 2(1 - LC\omega^2) \left(1 - \cos \frac{\pi n}{N}\right) - LC_n\omega^2 &= 0; \\ \omega \left[LG + 2Lg \left(1 - \cos \frac{\pi n}{N}\right)\right] &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Интересующая нас граница области устойчивости определяется из (2.14) при $n = N$ ($\lambda = 2$). Этой границей является прямая $g = -\frac{1}{4}G$.

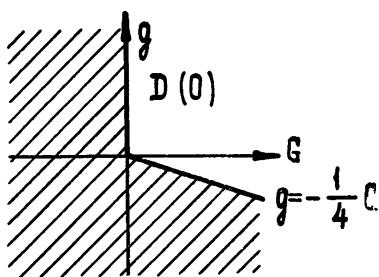


Рис. 3.

При переходе точки на плоскости g , G из области устойчивости $D(0)$ (рис. 3) через найденную границу в системе возникают колебания с частотой $\omega = \left[L \left(\frac{1}{4} C_L + C \right) \right]^{-1/2}$ — максимальной частотой возбуждения рассматриваемой линии.

Из проведенного рассмотрения следует, что при любом постоянном смещении, поданном на линию, в ней нарастают колебания, если учетверенная проводимость туннельных диодов в рабочей точке, находящейся на по-

дающем участке характеристики, превышает по величине проводимость низкочастотных потерь.

3. Перейдем к анализу установившихся волновых процессов в исследуемой системе (1.1) в отсутствие низкочастотных потерь ($G = 0$).

Не рассматривая вопрос о существовании в этой системе установившихся решений других типов, будем интересоваться лишь стационарными решениями в виде бегущих волн, распространяющихся со скоростью v в $+z$ - или в $-z$ -направлении. Поскольку все величины (напряжение, ток и т. д.) в бегущей волне зависят лишь от координаты $\xi = vt \mp z$, искомое стационарное решение удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в обычных производных:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\xi} &= \pm \frac{dQ}{d\xi}, \quad \frac{du}{d\xi} = \pm v \frac{d\Phi}{d\xi}, \\ LCv \frac{d^2u}{d\xi^2} + L\varphi \pm \frac{du}{d\xi} \pm \Phi &= LI, \\ Q &= Q(u) \end{aligned} \tag{3.1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} I(\xi) &= I(\xi + l), \quad u(\xi) = u(\xi + l), \\ \Phi(\xi) &= \Phi(\xi + l). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Исключив из (3.1) поток Φ и ток I , получаем уравнение*

$$LCv \frac{d^3u}{d\xi^3} + L \frac{d}{d\xi} \varphi \left(\frac{du}{d\xi} \right) + \frac{1}{v} \frac{du}{d\xi} - Lv \frac{dQ}{d\xi} = 0,$$

которое после интегрирования принимает вид

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{Cv} \varphi \left(\frac{du}{d\xi} \right) + \frac{1}{LCv^2} [u - Lv^2 Q(u)] = e. \tag{3.3}$$

Здесь $\varphi \left(\frac{du}{d\xi} \right)$ и $Q(u)$ — зависимости, представленные на рис. 2. Константу e в правой части положим равной нулю. Это возможно в случае, когда отсутствует постоянное смещение на линии.

* Это уравнение описывает волны, бегущие и в $+z$ - и в $-z$ -направлениях.

Решением краевой задачи (3.1), (3.2) будет любое решение уравнения (3.3) с периодом λ , где λ удовлетворяет условию

$$\lambda = \frac{l}{n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.4)$$

Очевидно, такие решения уравнения (3.3) могут существовать лишь при дискретных значениях параметра $v = v(n)$. Число этих значений, соответствующих различным n , в общем случае бесконечно*.

Рассмотрим предварительно случай, когда зависимость $Q(u)$ линейна. Полагая $Q = C_u u$, получим вместо (3.3)

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{Cv} \varphi \left(\frac{du}{d\xi} \right) + (1 - LC_u v^2) (LCv^2)^{-1} u = 0 \quad (3.5a)$$

или эквивалентную этому уравнению систему

$$\frac{du}{d\xi} = U, \quad \frac{dU}{d\xi} = -\frac{1}{Cv} \varphi(U) - (1 - LC_u v^2) (LCv^2)^{-1} u = 0. \quad (3.5b)$$

При $v < v_{kp}$, где $v_{kp} = (LC_u)^{-1/2}$, система (3.5) имеет в нуле единственную особую точку — неустойчивый фокус или узел и, как известно [19], единственный предельный цикл. Этому предельному циклу соответствует единственное периодическое решение уравнения (3.5a). Заметим, что устойчивость предельного цикла является необходимым, но не достаточным условием устойчивости искомого стационарного решения (вопрос об устойчивости стационарных решений обсуждается в разделе 5).

Если $v > v_{kp}$, то уравнение (3.5a), очевидно, не имеет периодических решений. Действительно, в этом случае единственная особая точка системы (3.5b) имеет индекс — 1 (седло) и, следовательно, предельные циклы на фазовой плоскости этой системы отсутствуют.

Таким образом, в случае линейности реактивных параметров в рассматриваемой системе возможны стационарные решения в виде бегущих волн, распространяющихся лишь с определенными скоростями, не превышающими v_{kp} .

Когда зависимость $Q(u)$ нелинейна (рис. 2б), однородная система, соответствующая уравнению (3.3), записывается в виде

$$\frac{du}{d\xi} = U, \quad \frac{dU}{d\xi} = -\frac{1}{Cv} \varphi(U) - \frac{u - Lv^2 Q(u)}{LCv^2}. \quad (3.6)$$

При некоторых весьма общих предположениях относительно функций $\varphi(U)$ и $Q(u)$ для системы (3.6) справедливо следующее утверждение (см. Приложение). На фазовой плоскости системы (3.6) существует замкнутая кривая I , ограничивающая двухмерную область Ω , такую, что при $\xi \rightarrow \infty$ все траектории входят в Ω . Это утверждение справедливо при всех $v < (LC_u)^{-1/2} = v_{max}^{**}$, где $C_u = Q'(\infty)$.

В случаях $v < v_{kp} = [LQ'(0)]^{-1/2}$ и $v > v_{kp}$ фазовые портреты системы (3.6) будут существенно различны.

При $v < v_{kp}$ начало координат является единственной особой точкой системы (3.6) (как и в случае $Q = C_u u$). Поскольку эта единственная особая точка неустойчива, из доказанного утверждения вытекает,

* Этот результат получен при рассмотрении распределенной модели. В линии с сосредоточенными параметрами число волн различной длины, очевидно, не превышает половины от числа ячеек

** При $v > v_{max}$ система (3.6) имеет единственную особую точку типа седла и предельные циклы на ее фазовой плоскости отсутствуют.

что система (3.6) обладает по меньшей мере одним устойчивым предельным циклом [20, 21]. Иначе говоря, уравнение (3.3) имеет хотя бы одно периодическое решение.

При переходе параметра v через бифуркационное значение v_{kp} единственная особая точка с индексом +1 распадается на три; две из

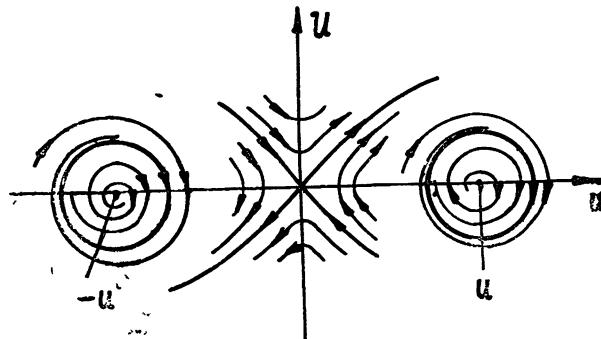


Рис. 4.

них, расположенные симметрично на оси u , имеют индексы +1, и одна, лежащая в начале координат — индекс — 1, причем все три точки неустойчивы (рис. 4) и содержатся в области Ω . Следовательно, и при $v > v_{kp}$ система (3.6) обладает не менее чем одним устойчивым предельным циклом, т. е. и в этом случае уравнение (3.3) имеет устойчивое периодическое решение. Число и форма предельных циклов на фазовой плоскости системы (3.6) (они могут соответствовать различным n) определяются параметрами системы и характером нелинейностей. Полное исследование системы (3.6) представляется возможным лишь в частных случаях, например, для кусочно-линейных зависимостей $\varphi(U)$ и $Q(u)$.

Таким образом, учет нелинейности $Q(u)$ показывает, что в рассматриваемой системе, в отличие от системы с линейными реактивными параметрами, возможны* стационарные решения в виде быстрых бегущих волн, распространяющихся со скоростями $v > v_{kp}$. Число быстрых волн, распространяющихся с различными скоростями, будет конечно, поскольку ни при каком $v \in (v_{kp}, v_{max})$ длина волны λ не стремится к нулю и, следовательно, $n = l/\lambda$ остается ограниченным.

4. Считая нелинейность $\varphi(U)$ малой, рассмотрим более подробно волны, близкие к синусоидальным.

Пусть

$$\varphi\left(\frac{du}{d\xi}\right) = -\varepsilon g \left[1 - b \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 \right] \frac{du}{d\xi}, \quad (4.1)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый безразмерный параметр. Будем интересоваться периодическими решениями (3.6), которые существуют при $v \ll v_{kp}$ — (медленные волны), и при $v \gg v_{kp}$ (быстрые волны).

Медленные волны ввиду малости v удовлетворяют приближенной системе

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= U, \quad \frac{dU}{dx} = \frac{\varepsilon g \sqrt{L/C}}{\sqrt{1 - Lv^2 Q'(0)}} \times \\ &\times \left[1 - b \frac{1 - Lv^2 Q'(0)}{LCv^2} U^2 \right] U - u, \end{aligned} \quad (4.2)$$

* Говоря возможны, мы еще не имеем в виду устойчивости этих стационарных движений.

где $x = \xi \frac{\sqrt{1 - Lv^2 Q'(0)}}{v \sqrt{LC}}$, и условию (3.4). При $\epsilon \ll 1$, когда в системе (4.2) возможны квазигармонические решения*, это условие может быть удовлетворено лишь в случае

$$\frac{1 - Lv^2 Q(0)}{LCv^2} = k^2 \quad (k = 2\pi n/l), \quad (4.3)$$

где n — целое. Поскольку при $v \rightarrow 0$ величина k неограниченно возрастает, число медленных волн, распространяющихся с различными скоростями, бесконечно**.

Для отыскания периодического решения системы (4.2), (4.3) при определенном k воспользуемся методом Ван-дер-Поля [20]. Решение ищем в виде

$$u = K \cos(x + \psi), \quad U = -K \sin(x + \psi). \quad (4.4)$$

Укороченные уравнения для K и ψ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dx} &= \mu \Theta(K), \\ \frac{d\psi}{dx} &= \mu \Psi(K), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\mu = \epsilon g \sqrt{\frac{L/C}{1 - Lv^2 Q'(0)}},$$

$$\Theta(K) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(-k K \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (4.6a)$$

$$\Psi(K) = -\frac{1}{2\pi K} \int_0^{2\pi} \varphi(-k K \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \equiv 0, \quad (4.6b)$$

$$\vartheta = x + \psi.$$

Здесь $\Psi(K) \equiv 0$ ввиду нечетности подынтегральной функции.

После подстановки в (4.6а) выражения (4.1) и последующего интегрирования находим

$$\Theta(K) = \frac{K}{2} \left(1 - \frac{3k^2}{4} b K^2 \right).$$

Радиусы предельных циклов определяются из уравнения $\Theta(K) = 0$, которое имеет единственный ненулевой корень:

$$K_0 = 2/k \sqrt{3b}. \quad (4.7)$$

Следсвательно, система (4.2) обладает единственным предельным циклом, который соответствует искомому периодическому решению системы (3.6).

* Случай $l \gg 2\pi$, когда даже при малом ϵ в системе возможны существенно несинусоидальные решения, здесь не рассматривается.

** См. сноску на стр. 799.

Для линейной зависимости $Q(u) = C_n u$ полученный результат справедлив при всех $v < v_{kp}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1 - LC_n v^2}{LCv^2} = k^2 \quad \left(k = \frac{2\pi}{l} n \right). \quad (4.8)$$

Предельная скорость распространения стационарных волн в этом случае равна $v_{pred} = [L(C^* + C_n)]^{-1/2} \left(C^* = C \frac{2\pi}{l} \right)$.

Близкие к синусоидальным быстрые волны описываются периодическими решениями (3.6), которые существуют при $v \gg v_{kp}$ и при всех ξ удовлетворяют условию $u > 0$ ($u < 0$). Предельный цикл, соответствующий таким периодическим решениям, должен охватывать лишь одну особую точку $(u^*, 0)$ (или $-u^*, 0$) (рис. 4), где u^* определяется из соотношения

$$u^* - Lv^2 Q(u^*) = 0. \quad (4.9)$$

Как следует из вида функции $Q(u)$ (рис. 2) и уравнения (4.9), при достаточно больших v зависимость $Q(u)$ для искомых периодических решений малой амплитуды может быть представлена лишь первым членом разложения $Q(u)$ в ряд около точки $u = u^*$.

В системе координат $u = u_{\text{стар}} - u^*$, U интересующее нас периодическое решение должно удовлетворять системе

$$\frac{du}{d\xi} = U, \quad \frac{dU}{d\xi} = \varepsilon \frac{g}{Cv} (1 - bU^2) U - \frac{C_2 - C_1}{C} u, \quad (4.10)$$

где $C_1 = Q'(u^*)$, $C_2 = Q(u^*)/u^*$ и $C_2 > C_1$, поскольку $v < v_{\text{max}}$. Кроме того, на искомое решение по-прежнему накладывается условие (3.4), для удовлетворения которого необходимо, чтобы

$$\frac{C_2 - C_1}{C} = k^2. \quad (4.11)$$

В данном случае число k конечно, причем решения искомого вида вообще отсутствуют в системе (3.6), если при достаточно большом $v > v_{kp}$ не выполнено неравенство $\frac{C_2(v) - C_1(v)}{C} > \frac{2\pi}{l}$. Из (4.11) при $k = \frac{2\pi}{l}$ и (4.9) находим величину предельной скорости

$$v_{pred} = \frac{1}{\sqrt{L[C^* + Q'(u^*)]}} \quad \left(C^* = C \frac{2\pi}{l} \right), \quad (4.12)$$

с которой возможно распространение в рассматриваемой кольцевой линии бегущих волн, близких к синусоидальным*. Таким образом, даже если для зависимости $Q(u)$ характерно насыщение, величина v_{pred} не может превышать значения $1/\sqrt{LC^*}$.

Амплитуда быстрых волн, близких к синусоидальным, определяется из соотношения (4.7), поскольку заменой $x = \frac{\sqrt{C_2 - C_1}}{C} \xi$ система (4.10) сводится к системе (4.2), где вместо $Q'(0)$ должно быть C_1 . Зависимость амплитуды стационарных бегущих волн, близких к синусоидальным, от частоты $\omega = kv$ представлена на рис. 5. Кривые 1 и 2

* Предельная скорость распространения сильно несинусоидальных волн может существенно отличаться от (4.12).

относятся соответственно к быстрым и медленным волнам*, а кривая 3—к волнам в системе с линейной зависимостью $Q(u) = Q'(0)u$.

Найденное стационарное решение в виде бегущих волн, близких к синусоидальным, устойчиво по отношению к стационарным же возмущениям, т. е. возмущениям, распространяющимся со скоростью, харак-

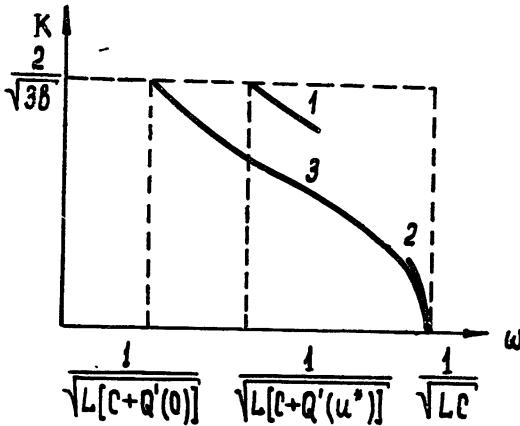


Рис. 5.

терной для стационарного решения, поскольку единственный предельный цикл системы (4.2) (или (4.10)) устойчив (это следует из условия

$$\Theta' (K_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'_u (-k K_0 \sin \vartheta) d\vartheta < 0.$$

5. Исследование устойчивости периодического стационарного решения по отношению к нестационарным возмущениям приводит к исследованию устойчивости тривиального решения системы линейных уравнений в частных производных с периодическими коэффициентами.

В общем случае решение этой задачи вызывает значительные математические трудности. Однако для некоторого класса систем, содержащих малый параметр, исследование устойчивости стационарного решения может быть проведено с помощью тех или иных приближенных методов.

Рассмотрим устойчивость найденного в разделе 4 синусоидального стационарного решения системы (1.1). Это решение получено в предположении, что $G = 0$, $Q = C_u u$, $\varphi = \varepsilon \Phi$, $\varepsilon \ll 1$.

Линеаризованная вблизи исследуемого стационарного решения система для возмущений, согласно (1.1) и (4.7), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dz} &= -C_u \frac{du}{dt}, \quad \frac{du}{dz} = -F, \quad \frac{d\Phi}{dt} = F, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{1}{C} I - \frac{\varepsilon}{C} \varphi' (F_{ct}) F - \frac{1}{LC} \Phi, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$F_{ct} = -\frac{2}{V3b} \sin (\omega_i t - k_i z + \eta_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

* На рис. 5 $Q' \equiv \bar{Q}'$, где $\bar{Q}' = \frac{l}{2\pi} Q'$.

с краевыми условиями

$$I, u, \Phi, F(z, t) = I, u, \Phi, F(z + l, t).$$

При $\epsilon = 0$ полученная система имеет собственные решения вида

$$I = I_j \cos(\omega_j t \mp k_j z + \psi_j), \quad u = u_j \cos(\omega_j t \mp k_j z + \psi_j), \quad (5.2)$$

$$\Phi = \Phi_j \cos(\omega_j t \mp k_j z + \psi_j), \quad F = -\omega_j \Phi_j \sin(\omega_j t \mp k_j z + \psi_j),$$

где

$$\omega_j = k_j [L(Ck_j^2 + C_n)]^{-1/2} \quad \left(k_j = \frac{2\pi}{l} j; \quad j = 1, 2, \dots \right).$$

При $\epsilon \ll 1$ ищем решение (5.1) в виде бесконечной системы (5.2), считая I_j, u_j, Φ_j, F_j и ψ_j медленно меняющимися функциями времени.

Укороченное уравнение для амплитуд Φ_j (усреднение производится по длине кольца) имеет вид

$$\frac{d\Phi_j}{dt} = -\epsilon \frac{g}{C} \Phi_j \begin{cases} 1/2 & \text{при } k_i \neq k_j \\ \cos^2(\eta_i - \phi_i) & \text{при } k_i = k_j \end{cases}. \quad (5.3)$$

Это уравнение при любом $j = 1, 2, \dots$ имеет единственное и устойчивое состояние равновесия $\Phi_j = 0$. Следовательно, в первом приближении все собственные решения системы (5.1) затухают, т. е. ее тривиальное решение устойчиво.

Автор благодарен А. В. Гапонову и А. С. Алексееву за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов и Г. И. Фрейдману за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем содержащееся в статье утверждение о том, что на фазовой плоскости системы (3.5) существует замкнутая область Ω , такая, что при $\xi \rightarrow \infty$ все траектории входят в Ω .

Доказательство сформулированного утверждения сводится к непосредственному построению области Ω^* . Запишем (3.5) в виде

$$\frac{du}{d\xi} = U, \quad \frac{dU}{d\xi} = -f(U) - g(u). \quad (I)$$

Здесь $f(U) = \varphi(U)/Cv$; $g(u) = [u - Lv^2 Q(u)]/LCv^2$. Полагая $G(u) = \int_0^u g(u) du$, введем следующие условия:

а) функции $\varphi(U)$ и $Q(u)$ нечетные, всюду непрерывны и удовлетворяют условию Липшица; б) для больших u выполнено условие $uQ(u) > 0$, а модуль $Q(u)$ ограничен или монотонно возрастает до бесконечности вместе с u ; в) существует такое $a' > 0$, что $\varphi(U) > M' > 0$ при $U > a'$ и $|\varphi(U)| < m' > 0$ при $|U| \leq a'$. Из перечисленных условий следует: 1) функции $f(U)$ и $g(u)$ — нечетные, непрерывные и удовлетворяют условию Липшица; 2) для больших u при любом $v < v_{\max}$, где $v_{\max}^2 = (LC_v)^{-1}$, справедливо неравенство $ug(u) > 0$ и $|g(u)|$ монотонно возрастает до бесконечности вместе с $|u|$; 3) существует такое $a > 0$, что $f(U) > M > 0$ при $U > a$ и $|f(U)| \leq m > 0$ при $|U| \leq a$.

Введем кривые постоянной энергии

$$\Gamma = \frac{U^2}{2} + G(u) \quad (II)$$

* Один из приемов подобных построений изложен в [21].

и дадим оценку углового коэффициента траекторий в полосе $|U| \leq a$. Из (1) находим

$$\frac{dU}{du} = \frac{-f(U) - g(u)}{U},$$

следовательно, с учетом 3) для всех $|u| \geq u_1$ будем иметь

$$\left| \frac{dU}{du} \right| \geq m_0 = \frac{|g(u_1)| - m}{a}; \quad (\text{III})$$

здесь u_1 выбрано достаточно большим, удовлетворяющим условию 2 и условию

$$g(u_1) > m. \quad (\text{IV})$$

Фазовый портрет системы (1) симметричен относительно начала координат, поскольку $f(U)$ и $g(u)$ — нечетные функции: симметричной будет и кривая J , ограничивающая область Ω .

Построенная область Ω представлена на рис. 6. Кривой J служит замкнутая кривая 1234. Отрезки 12 и 34 имеют угловой коэффициент — m_0 . Дуги 23 и 41 представляют собой дуги кривой $\Gamma = \text{const}$.

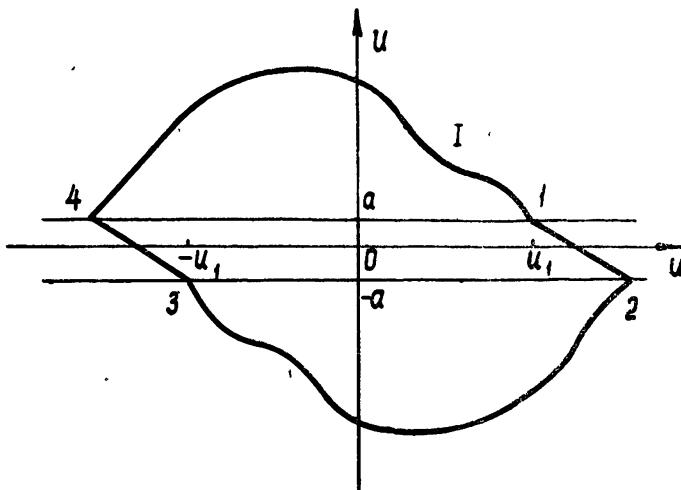


Рис. 6.

Покажем, что а) все траектории пересекают J в направлении снаружи внутрь; б) все траектории входят в Ω при $\xi \rightarrow +\infty$.

Поскольку выполнено (III) и $U' < 0 (> 0)$ справа (слева) от оси U (учтено (IV)), то фазовые траектории пересекают отрезки 12 и 34 в направлении снаружи внутрь.

Из (11) и (1) находим, что вдоль фазовой траектории

$$d\Gamma = -U f(U) d\xi. \quad (\text{V})$$

Кроме того, $f(U) > M (< -M)$ при $U \geq a (U \leq -a)$, следовательно, Γ все время убывает вдоль траектории при $|u| \geq a$. Поскольку кривая $\Gamma_1 < \Gamma_2$ охватывается кривой Γ_2 , дуги 23 и 41 пересекаются траекториями в направлении снаружи внутрь; так как вектор (u', U') направлен снаружи внутрь на 12 и 34, то по непрерывности это имеет место и в точках 1, 2, 3 и 4. Таким образом, требование а) доказано.

Докажем требование б) [21]. Пусть построение выполнено для $u_1 = u_1^0$,

которому соответствует Ω , J и пусть Ω_α , J_α соответствует $u_1 = |\alpha| > u_1^0$. Семейство $\{J_\alpha\}$, очевидно, непрерывно и заполняет всю область W снаружи кривой J . Пусть траектория γ начинается в некоторой точке $p \in W$. С возрастанием $|\alpha(p)|$ монотонно убывает (это следует из (V)). Пусть ее предел $\sigma > u_1^0$. Это значит, что γ стремится к J_α извне и, следовательно, спирально наматывается на J_α . Поэтому $|d\Gamma/d\xi| \rightarrow 0$ с ростом $|\xi|$ вдоль γ . Однако это противоречит (V), откуда следует, что $|d\Gamma/d\xi| > M|U|$, так как это выражение в точках 1 и 4 (2 и 3), удаленных от оси $U(u > u_1)$, будет существенно отличено от нуля. Таким образом, $\sigma = u_1^0$ и γ входит в Ω .

Исходное утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Витт, ЖТФ, 4, 144 (1934).
2. Ю. И. Неймарк, И. М. Кубланов, Автоматика и телемеханика, 14, 84 (1953).
3. Н. Н. Коцин, ПММ, 27, 609 (1963).
4. Ю. И. Неймарк, Ю. К. Маклаков, Л. П. Елкина, Радиотехника и электроника, 3, 1348 (1958).
5. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 36, 957 (1959).
6. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 3, 70 (1960).
7. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 1116 (1961).
8. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 917 (1961).
9. А. С. Scott, IREE Trans., CT-9, 192 (1962).
10. Т. М. Ильинова, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 8, 2006 (1963).
11. А. М. Белянцев, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 183 (1962).
12. И. Г. Катаев, Ударные электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1963.
13. Ю. А. Воронцов, Радиотехника и электроника, 9, 500 (1964).
14. Ю. А. Воронцов, Радиотехника и электроника, 9, 1709 (1964).
15. А. С. Scott, IREE Trans., CT-10, 53 (1963).
16. А. С. Scott, IREE Trans., CT-11, 146 (1964).
17. Ю. И. Неймарк, Ю. И. Городецкий, Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 967 (1959).
18. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, Л., 1949.
19. Н. Н. Богояков, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
20. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
21. С. Левшец, Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1961.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
2 ноября 1964 г.

ON AUTO-OSCILLATIONS IN RING LINE WITH DISTRIBUTED NONLINEAR PARAMETERS

M. I. Rabinovich

The self-excitation conditions and stationary solutions for a ring line with distributed nonlinear active and reactive parameters are considered. The stationary solutions of traveling wave type are shown to be possible in the line without low-frequency losses. The stability of these solutions are discussed.

УДК 62—505 7

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Б. А. Арефьев

Рассматривается задача автоматической оптимизации одностадийного рециркуляционного процесса регулятором с исполнительным устройством, имеющим постоянную скорость. Производится выбор алгоритма управления

В ряде промышленных объектов по переработке сырья часть материала, оставшаяся непереработанной при прохождении через рабочую часть, возвращается в виде так называемого рецикла на вход того же объекта (в одностадийных системах). Особенно много объектов подобного рода встречается в химическом производстве, например, в установках по катализу некоторых веществ. В общем плане здесь может подразумеваться целый участок любого производства с возвратом на вход его исправимого брака.

В литературе ([1] и др.) обсуждаются, главным образом, установленные режимы в рециркуляционных системах и решаются задачи о рациональном выборе параметров устройств. Вопросы оптимизации в смысле выбора подачи исходного материала, обеспечивающей в конкретных, меняющихся от случая к случаю, условиях максимальный выход готовой продукции, мало исследованы. Более того, насколько нам известно, до сего времени нет обоснованного алгоритма оптимизации, что мешает применению вычислительной техники и автоматики в такого типа производстве.

Рассматривая ниже возможные процессы в системе, состоящей из инерционного однокомпактного объекта и регулятора с постоянной скоростью исполнительного устройства, мы укажем один из возможных алгоритмов управления и исследуем сходимость рециркуляционного процесса к его экстремальному режиму.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБЪЕКТА И ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Схема объекта изображена на рис. 1. Обозначения следующие: X — входная величина (исходная подача сырья), Y — выходная (выход готового продукта), Z — непереработанная часть сырья, идущая в объектах с замкнутым циклом обратно на его вход (рецикл).

В установленном режиме для объекта с разомкнутым циклом должно быть справедливо равенство

$$X = Y + Z, \quad (1.1)$$

а для объекта с замкнутым циклом — равенство

$$X = Y, \quad (1.2)$$

что следует из баланса массы материалов, поступающих и выходящих из объекта в единицу времени.

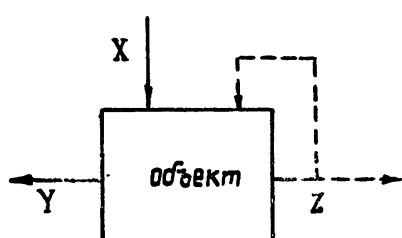


Рис. 1.

Для объекта с разомкнутым циклом характеристика

$$Y = f(X) \quad (1.3)$$

существенно нелинейна и, как правило, имеет вид, изображенный на рис. 2а. Выход готового продукта Y растет вместе с увеличением подачи сырья до известного предела (точка Y_*) и затем начинается и прогрессирует спад кривой: объект уже не справляется со всей массой посту-

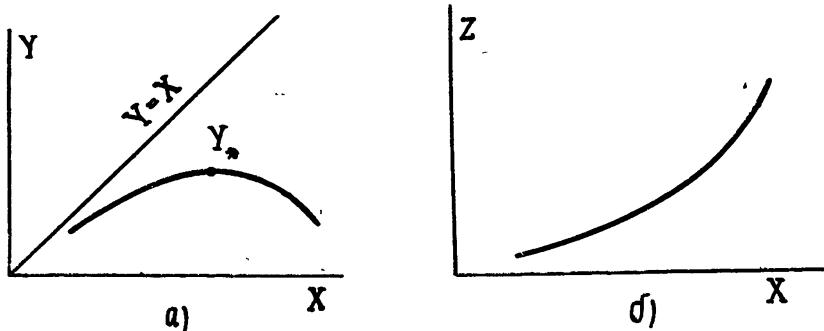


Рис. 2.

пающего сырья и все большая и большая часть материала остается непереработанной.

Характеристика

$$Z = \varphi(X) \quad (1.4)$$

является дополнением $Y = f(X)$ до прямой $Y = X$; она изображена на рис. 2б. Отметим, что в точке, где Y достигает максимального значения, касательная к кривой $Z = \varphi(X)$ имеет угловой коэффициент, равный единице.

Указанные особенности характеристик (1.3) и (1.4) ограничивают область определения равенства (1.2): характеристика замкнутого объекта, представленная прямой линией (рис. 3), остается справедливой

только до точки M , отвечающей максимальной производительности объекта с разомкнутым циклом. Дальнейшее увеличение подачи сырья влечет за собой быстрое увеличение рецикла, что, в свою очередь, переводит объект в неустойчивый режим и создает аварийную обстановку.

В дальнейшем будем аппроксимировать характеристику объекта с разомкнутым циклом (1.3) многочленом второй степени

$$Y = bX - cX^2, \quad (1.5)$$

в котором свободный член отсутствует, поскольку полезный продукт не может получаться при нулевой подаче сырья (b и c — постоянные).

Как легко видеть, максимальный полезный выход получается при

$$X = \frac{b}{2c}. \quad (1.6)$$

Оптимизация процесса (в его установившемся режиме) формально сводится к выводу изображающей точки на верхний конец характеристики замкнутого объекта (рис. 3). Чем меньше будет расстояние между

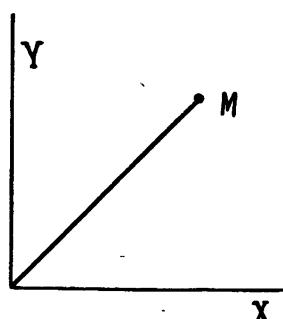


Рис. 3.

изображающей точкой и точкой M , тем больше будет получаться готового продукта, но тем больше будет и опасность получения неустойчивого режима, который в безынерционном неуправляемом объекте возникает сразу же после превышения подачи сырья ее оптимального значения. Допустимое сближение указанных точек определяется конкретными условиями производства.

2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПРИРАЩЕНИЯМИ ВХОДА И РЕЦИКЛА В ИНЕРЦИОННОМ ОБЪЕКТЕ

Прежде чем исследовать процессы в системе с оптимизатором непрерывного действия, рассмотрим действие шагового оптимизатора, изменяющего за один шаг подачу сырья на постоянную величину ΔX . Рабочую часть инерционного одноемкостного объекта представим себе в виде последовательно включенных нелинейного звена НЗ, описываемого уравнением вида (1.5), и линейного звена с импульсной переходной

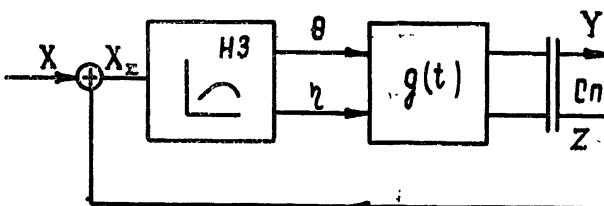


Рис. 4.

функцией $g(t) = e^{-t/T}$ (см. рис. 4). Инерционными свойствами сепаратора Сп, разделяющего выход на полезный продукт и рецикл, будем пренебречь или относить их к постоянной времени T . Выход нелинейной части по существу уже содержит продукт двух видов: полезный продукт θ (удовлетворяющий заданным кондициям) и незавершенную часть η , идущую затем в рецикл.

Зависимость (1.5) по существу сохраняется и здесь, но она будет связывать вход и выход нелинейного звена

$$\theta = bX - cX^2. \quad (2.1)$$

Сохраняется и формула (1.1), принимающая теперь вид

$$X = \theta + \eta. \quad (2.2)$$

Из двух последних выражений получаем

$$\eta = (1 - b)X + cX^2. \quad (2.3)$$

В установившихся режимах η совпадает с Z и (2.3) может быть названо статической характеристикой рецикла.

Теперь будем считать, что объект работает с замкнутым циклом. Сделаем упрощающее предположение о том, что приращение рецикла суммируется с исходным питанием и имеющимся рециркулярным потоком до начала каждого такта только в конце такта. Величина X в предыдущих уравнениях теперь имеет смысл суммарного питания рабочей части объекта, которую будем обозначать через X_e . Разумеется, при сделанных предположениях $\Delta X = \Delta X_e$. В соответствии с принятыми допущениями X_e изменяется скачком; такой же характер изменения имеют выходы θ и η нелинейного звена.

Обозначим через X_{ek} , Z_k и θ значения переменных в момент времени перед k -м срабатыванием исполнительной части регулятора. На

каждом такте после изменения X на ΔX для переменной Z будет справедливо уравнение

$$T\dot{Z} + Z = (1 - b)(X_{ik} + \Delta X) + c(X_{ik} + \Delta X)^2; \quad (2.4)$$

его решение

$$Z = Z_k e^{-t/T} + [(1 - b)(X_{ik} + \Delta X) + c(X_{ik} + \Delta X)^2] (1 - e^{-t/T}). \quad (2.5)$$

По истечении времени τ в конце такта Z примет значение

$$Z_{\tau k} = Z_k E + [(1 - b)(X_k + \Delta X) + c(X_k + \Delta X)^2] D, \quad (2.6)$$

где

$$E = e^{-\tau/T}, \quad D = 1 - e^{-\tau/T}. \quad (2.7)$$

Изменение Z на такте

$$\begin{aligned} \Delta Z = Z_{\tau k} - Z_k = & -Z_k D + [(1 - b)(X_k + \Delta X) + \\ & + c(X_k + \Delta X)^2] D. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Пренебрегая членами, содержащими множитель $(\Delta X)^2$, получим

$$\Delta Z = -Z_k D + [(1 - b)X_k + cX_k^2] D + (1 - b + 2cX_k)\Delta XD. \quad (2.9)$$

Поскольку в силу (2.3)

$$(1 - b)X_k + cX_k^2 = \eta_k,$$

приращение рецикла на такте

$$\Delta Z = (\eta_k - Z_k)D + (1 - b + 2cX_k)D\Delta X. \quad (2.10)$$

3. УРАВНЕНИЯ И ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОПТИМИЗАТОРА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

Теперь рассмотрим процессы в системе, снабженной оптимизатором непрерывного действия. Переходя к непрерывному процессу — предельному для шагового при уменьшении времени такта τ до $d\tau$, мы прежде всего заметим, что $D = 1 - e^{-\tau/T}$ обратится теперь в $d\tau/T$. Шаговый процесс изменения состояния исполнительного устройства перейдет в движение с постоянной (по модулю) скоростью q , среднее значение которой вычисляется для шаговых систем по формуле

$$q_{cp} = \pm \Delta X/\tau,$$

из которой следует, что

$$\Delta X = q_{cp} \tau.$$

Шаг делается за такт, продолжительность которого τ считаем бесконечно убывающей ($\tau \rightarrow d\tau$); следовательно, перемещение «на такте» продолжительностью $d\tau$ будет иметь тот же порядок малости, что и $d\tau$, а произведение $D\Delta X$ при переходе к непрерывному процессу окажется величиной второго порядка малости. Поэтому членом, содержащим это произведение, далее можно пренебречь.

Для непрерывного процесса

$$q = \sigma dX/d\tau; \quad \sigma = \pm 1. \quad (3.1)$$

Если (в отличие от ранее проведенных рассуждений) рассматривать изменение суммарного питания за целый такт, то

$$dX_{\Sigma} = dX + dZ. \quad (3.2)$$

Однако, поскольку $dX = \sigma q d\tau$, величина

$$dX_{\Sigma} = \sigma q d\tau + dZ. \quad (3.3)$$

Используя (3.2) и (3.3), приходим к выражению для $d\tau$:

$$d\tau = \frac{dX_{\Sigma} - dZ}{\sigma q}. \quad (3.4)$$

Следовательно, после предельного перехода в наших выражениях D можно заменить на $(dX_{\Sigma} - dZ)/\sigma q T$. Подстановка этого значения в (2.9) и учет сказанного относительно $D\Delta X$ приведет к уравнению

$$\frac{dZ}{dX_{\Sigma}} = \frac{(1-b)X + cX^2 - Z}{\sigma q T + (1-b)X + cX^2 - Z}. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) позволяет в каждой точке плоскости (X_{Σ}, Z) построить направление касательной к фазовой траектории, а затем и сами траектории. «Фазовый портрет» пока еще неуправляемой системы показан на рис. 5. Сплошными линиями на этом рисунке показаны траектории изображающей точки при $\sigma = -1$, пунктиром — для $\sigma = 1$. Линия $M - M'$ означает изоклину, для которой $dZ/dX_{\Sigma} \rightarrow \infty$. Уравнение ее

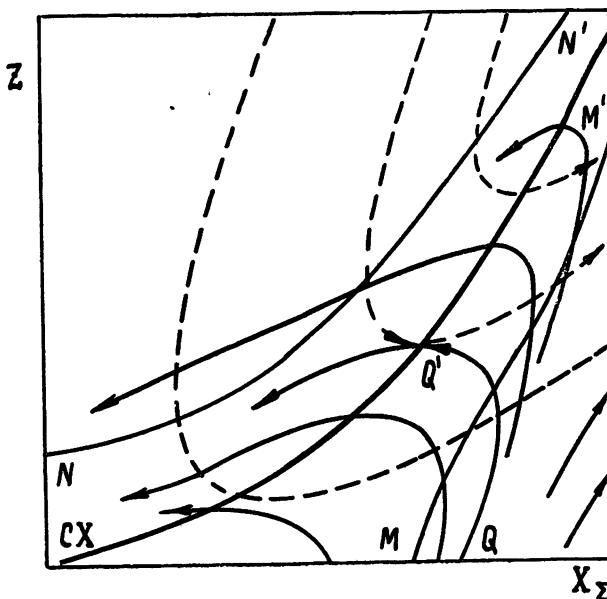


Рис. 5:

получается приравниванием нулю знаменателя в (3.5) при $\sigma = -1$. Линия $N - N'$ означает изоклину $dZ/dX_{\Sigma} \rightarrow \infty$ при $\sigma = 1$. Статическая характеристика рецикла CX сама представляет собой изоклину $dZ/dX_{\Sigma} = 0$.

4. ВЫБОР АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ

Положим в основу алгоритма оптимизатора часто используемый в экстремальных системах способ «управления по производной», применив его в нашей системе в соответствии с формулой

$$\sigma = -\zeta \operatorname{sgn} dZ / |dX_\Sigma|. \quad (4.1)$$

Этот идеализированный способ управления (поскольку в нем не учитывается такой важный фактор, как нечувствительность управляющего устройства) определит для каждого начального состояния единственную траекторию (например, $Q-Q'$ на рис. 5), оканчивающуюся на статической характеристике в точке Q' , вообще говоря, не совпадающей с экстремальной. В этой же точке заканчивается одна из траекторий, проходящей в части плоскости, расположенной над характеристикой. Принятый закон управления (4.1) требует осуществления реверса исполнительного устройства в точках пересечения со статической характеристикой траекторий, построенных как для $\sigma = 1$, так и для $\sigma = -1$. На первый взгляд может показаться, что изображающая точка, попав на статическую характеристику, там и останется, не выйдя к положению, соответствующему экстремуму. Однако более детальное исследование показывает, что частые переключения у статической характеристики (теоретически — бесконечно частые) сопровождаются постепенным перемещением изображающей точки по направлению к экстремуму. В целом процесс носит характер скользящего движения, которое встречается и в экстремальных системах [2, 3].

5. РОЛЬ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В УПРАВЛЯЮЩЕМ УСТРОЙСТВЕ

Характер «скользящих движений» по статической характеристике можно выяснить, если учесть нечувствительность, всегда имеющуюся в реальных устройствах.

Будем считать, что работа оптимизатора определяется формулой

$$\sigma = -\operatorname{sgn} \left(\frac{dZ}{|dX_\Sigma|} - \xi \operatorname{sgn} \frac{dX_\Sigma}{dt} \right), \quad (5.1)$$

где величина нечувствительности ξ — положительная постоянная, меньшая единицы. Иными словами, здесь полагается, что изменение знака σ , а вместе с тем и направления движения исполнительного устройства происходит, когда угловой коэффициент касательной к траектории превышает заданную величину ξ . Такой закон управления обуславливает петлеобразные движения изображающей точки у статической характеристики (рис. 6).

Если путь $\Delta_{\text{пр}}$, проходимый проекцией изображающей точки на ось X_Σ при движении по нижней стороне петли (между точками 1—2), окажется больше проекции пути, проходимого изображающей точкой при ее движении по верхней стороне $\Delta_{\text{лев}}$ (между точками 2—3), то процесс в целом развивается по направлению увеличения суммарного питания; в противном случае — наоборот.

Мы поставим своей дальнейшей задачей выяснить направление «скользящего движения» по отношению к экстремальному режиму.

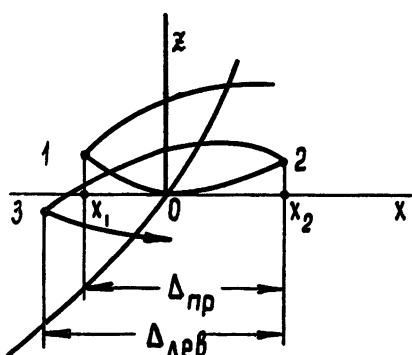


Рис. 6.

© 1993

Прежде всего отметим, что точки переключения, в которых изменяется знак σ (т. е. точки 1, 3... над статической характеристикой и 2, 4... под ней), лежат на одинаковом расстоянии s от характеристики (в сторону оси Z). Это следует из формулы (3.5), в которой выражение $(1 - b)X_2 + cX_2^2 - Z$ означает расстояние от характеристики, взятое с соответствующим знаком. При фиксированном в момент переключения значении dZ/dX_2 и постоянном знаке σ из (3.5) везде получим одинаковые s . Более того, и для разных σ будем получать одинаковые s , если учтем, что изменению знака σ соответствует и изменение знака s . При $\sigma = 1$ точки переключения лежат под характеристикой, при $\sigma = -1$ — над ней.

Выражение (3.5), которое может быть сведено к обобщенному уравнению Риккати, не интегрируется в элементарных функциях. Не желая загромождать изложение сложными расчетами, несколько упростим математическую сторону задачи, предположив, что ξ выбрано достаточно малым и весь «скользящий процесс» развивается, мало отклоняясь от режимов, отвечающих статической характеристике.

Взяв координатную систему xOz с началом координат на статической характеристике в точке X_{2k} , Z_k (рис. 6) и перейдя к новым координатам $x = X_2 - X_{2k}$, $z = Z - Z_k$ при рассмотрении части траектории (петли), расположенной около начала координат новой системы, можно пренебречь квадратами малых величин x и z .

При этом уравнение (3.5) сводится к виду

$$\frac{dz}{dx} = \frac{ax - z}{\mu + ax - z}, \quad (5.2)$$

где введены такие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= 1 - b + 2cX_k, \\ \mu &= \sigma qT. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Подстановкой

$$v = ax - z + \mu \quad (5.4)$$

уравнение (5.2) приводится к виду

$$\frac{vdv}{(a-1)v + \mu} = dx; \quad (5.5)$$

после интегрирования находим [4]

$$\frac{1}{a-1} \left(v - \frac{\mu}{a-1} \ln |(a-1)v + \mu| \right) = x + K, \quad (5.6)$$

где K — постоянная интегрирования. Возвращаясь к переменным x , z , из (5.6) получаем

$$(a-1)(ax - z + a\mu)^{\mu/a-1} = K_0 e^{z-x}. \quad (5.7)$$

Здесь $K_0 = e^{K(a-1)}$.

Будем считать, что координатная система xOz выбрана так, что траектория 1—2 (рис. 6) проходит через начало координат. Статическую характеристику в окрестности точки O можно считать прямой с угловым коэффициентом $a = 1 - b + 2cX_{2k}$. Из рисунка ясно, что ордината z точки 1 равна

$$z_1 = s - a|x_1|, \quad (5.8)$$

а ордината точки 2 равна

$$x_2 = ax_2 - s . \quad (5.9)$$

Подставляя координаты 1 и 2 в (5.7), получим два уравнения:

$$(a - 1)(-s + a\mu)^{\mu/a-1} = K_0 e^{s-(a-1)|x_1|}, \quad (5.10)$$

$$(a - 1)(s + a\mu)^{\mu/a-1} = K_0 e^{(a-1)|x_2-s|}. \quad (5.11)$$

Поделив друг на друга левые и правые части этих уравнений, будем иметь

$$\left(\frac{-s + a\mu}{s + a\mu} \right)^{\mu/a-1} = e^{-2s+(a-1)(|x_1|+|x_2|)}. \quad (5.12)$$

Формула (5.12) связывает величину увеличения суммарной подачи $\Delta_{np} = |x_1| + x_2$ с параметрами системы.

Такую же операцию повторим, рассматривая уравнение (5.7) при отрицательном знаке μ , что означает движение в сторону уменьшения x по верхней стороне петли. Вычислим также изменение подачи $\Delta_{lev} = |x_3| + x_2$. Несложные преобразования приведут нас к формуле

$$\left(\frac{-s + a\mu}{s + a\mu} \right)^{-\mu/a-1} = e^{-2s+(a-1)(x_2+|x_3|)}, \quad (5.13)$$

аналогично (5.12). А теперь, перемножив левые и правые части выражений (5.12) и (5.13), после элементарных преобразований получим формулу

$$\Delta_{np} - \Delta_{lev} = \frac{4s}{a-1}. \quad (5.14)$$

Вспомнив смысл коэффициента a (см. (5.3)), отмечаем, что для значений X_{ik} , меньших экстремальных, $a-1$ оказывается положительным, для X_{ik} , больших экстремальных, $a-1$ отрицательно. Следовательно, формула (5.14) показывает, что в результате петлеобразных движений изображающая точка приближается к экстремальному ее положению. В экстремуме $a = 1$ и уравнения (5.6), (5.14) смысла не имеют.

В заключение заметим, что полученные результаты нельзя формально распространять на случай безынерционных объектов, поскольку в рассуждениях существенно использовать условие ограниченности величины $1/T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ф. Нагиев, Теоретические основы рециркуляционных процессов в химии, изд. АН СССР, М., 1962.
2. Г. А. Новинская, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 566 (1961).
3. Б. А. Арефьев. Изв. высш. уч. зав.—Приборостроение, 7, 21 (1964).
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.

Ленинградский институт точной механики и оптики

Поступила в редакцию
16 ноября 1964 г.

OPTIMIZATION OF RECIRCULAR PROCESS B. A. Arefiev

The problem is considered of automatic optimization of one-stage recircular process by regulator with a power unit having a constant speed. The choice of a control algorithm is made.

УДК 52—507

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА МИНИМАЛЬНЫХ СХЕМ НА ПОРОГОВЫХ ЭЛЕМЕНТАХ С ТРЕМЯ ВХОДАМИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

И. В. Котельников

Рассмотрен алгоритм синтеза всевозможных изоморфных форм минимальных схем двоичных функций трех переменных на пороговых элементах с тремя входами, построенных по мажоритарному принципу.

Разработка эффективных алгоритмов для синтеза экономичных переключательных схем является одним из основных вопросов теории переключательных цепей. Имеющиеся методы синтеза схем [1, 2] на рассматриваемых логических элементах не всегда позволяют найти их минимальную логическую форму и минимальное число последовательно включенных ступеней; это значительный недостаток, если время задержки элемента — существенный параметр. Кроме того, они не дают изоморфных форм схемы, что во многих случаях бывает очень полезным. Предлагаемый алгоритм синтеза лишен указанных недостатков, однако его применимость ограничена лишь случаем трех переменных.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Известно, что любую двоичную функцию n переменных можно представить в нормальной совершенной дизъюнктивной форме, число различных слагаемых которой, называемых конституентами, не превышает 2^n .

Если теперь переменным x, y, z придать веса соответственно 4, 2 и 1, то каждому из восьми возможных конституентов функций трех переменных можно поставить во взаимно-однозначное соответствие восьмеричное число (номер), равное сумме весов его неинверсных переменных, и каждую функцию характеризовать в скобках набором номеров конституентов, соответствующих ее нормальной совершенной дизъюнктивной форме. Так, например,

$$F(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} = (0, 1, 2).$$

В соответствии с этим для переменных и их инверсий, которые ниже будут рассматриваться как самостоятельные переменные, можно написать

$$x = (4, 5, 6, 7); \quad y = (2, 3, 6, 7); \quad z = (1, 3, 5, 7); \\ \bar{x} = (0, 1, 2, 3); \quad \bar{y} = (0, 1, 4, 5); \quad \bar{z} = (0, 2, 4, 6).$$

Будем говорить, что переменная i не совпадает с функцией F по значениям истинности, или единицам, если среди номеров ее набора нет каких-либо номеров набора функции F , и по значениям ложности, или нулям, если в ее наборе есть номера, не входящие в набор для функции.

Тогда любую функцию F можно характеризовать таблицами несовпадений, пример которых для функции $\bar{F} = (0, 1; 2)$ дан в таблице несов-

падений по единицам (1) и таблице несовпадений по нулям (2). Единицами в строках переменных помечаются номера конституентов, соответствующих случаям несовпадения.

переменные	Номера конституентов							
	0	1	2	3	4	5	6	7
x	1	1	1					
y	1	1						
z	1		1					
\bar{x}								
\bar{y}				1				
\bar{z}		1						

Таблица 1

переменные	Номера конституентов							
	0	1	2	3	4	5	6	7
x						1	1	1
y					1			1
z						1	1	1
\bar{x}					1			
\bar{y}						1	1	
\bar{z}						1		1

Таблица 2

Условимся каждую пару одноименных строк таблиц 1 и 2 характеризовать двухзначным номером, первая цифра слева у которого соответствует сумме единиц в строке таблицы 1, а вторая — сумме единиц в одноименной строке таблицы 2. Тогда совокупность таблиц несовпадений можно характеризовать столбцом возрастающих сверху вниз трехзначных чисел, старшие две цифры которых соответствуют номерам пар одноименных строк, а младшая — кратности пар строк с указанным номером в рассматриваемой совокупности таблиц. Ниже такие столбцы трехзначных чисел для кратности будем называть матрицами несовпадений.

Матрица несовпадений для функции $F = (0, 1, 2)$, например, имеет вид

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix}$$

Рассмотрение матриц несовпадений 256 функций трех переменных показало, что

- 1) число различных матриц — девятнадцать;
- 2) четырнадцать из них образуют пары взаимно переходящих друг в друга матриц перестановкой первых двух столбцов; матрицам каждой пары соответствуют группы инверсных функций;
- 3) функции, имеющие различное число номеров конституентов в наборе, принадлежат различным матрицам несовпадений.

2. СИНТЕЗ МИНИМАЛЬНЫХ СХЕМ

Для синтеза схем, описываемых рассматриваемыми функциями, был выбран пороговый элемент M с тремя выходами, реализующий функцию $M(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$, т. е. дающий на выходе единичный сигнал только в том случае, если такие сигналы будут поданы не менее, чем на два любых его входа. Такие элементы, как известно [6], реализуются, например, на туннельных диодах.

В литературе [1] указывается, что любую функцию трех переменных с помощью элементов M можно реализовать не более, чем на двух ступенях, т. е. при помощи схемы, описываемой формулой не сложнее, чем

$M(M(., .), M(., .), M(., .))$. Учитывая это, уместно построить структурный ряд, т. е. упорядочить возможные структурные схемы по степени возрастания их сложности, считая схему более сложной, если она содержит большее число элементов M , а в случае равенства — использует большее число неконстантных входов. Схемы, отличающиеся лишь значениями и местоположением одинакового числа константных входов, рассматривались при этом как равноценные.

Построенный таким образом структурный ряд содержал в качестве своих элементов двенадцать различных структурных групп равноценных схем. Минимальные схемы, реализующие заданную функцию, находились перебором элементов этого ряда в естественном порядке с использованием таблиц несовпадений по единицам и нулям.

Практически для каждой из 256 функций трех переменных по аналогии с таблицами 1 и 2 строились таблицы несовпадений по единицам и нулям со всевозможными пороговыми функциями, лежащими в пределах структурного ряда и расположеными в таблицах в соответствии с последним. Порядок расположения функций внутри структурных групп равноценных схем определялся исключительно соображениями удобства.

Вырожденные функции типа $M(i, j, i) = j$, включающие инверсные аргументы (i и j — произвольные функции), относились к более простой структуре функции j и исключались из структурной группы, соответствующей левой части равенства. Заполнение таблиц производилось в направлении увеличения сложности структуры функций и заканчивалось на той структурной группе равноценных схем, которая первой давала комбинации одноименных строк таблиц с номером 00. Из смысла таблиц несовпадений следует, что такие функции совпадают с синтезируемой. Так как в структурной группе равноценных схем по построению всегда присутствуют все функции данной структуры, то всегда получались все изоморфные формы синтезируемой функции.

Следует отметить, что при заполнении таблиц несовпадений не обязательно пользоваться методом построения таблиц 1 и 2, занимающих в заполняемых таблицах первые шесть строк. К тому же результату можно прийти, вычисляя поразрядно (по столбцам) значения соответствующей строке функции для табличных значений ее аргументов в рассматриваемом столбце, которые по построению таблиц всегда присутствуют в их верхних строках. При этом нужно только помнить, что при заполнении таблицы несовпадений по единицам все имеющиеся константные аргументы функции должны быть заменены на инверсные.

Синтез и последующий анализ полученных результатов показали следующее.

1) Группа функций с одной и той же матрицей несовпадений имеет одинаковую структуру минимальной схемы. Исключение составляют три матрицы, имеющие по две различных структуры, каждая из которых объединяет свою группу функций. Две из последних матриц — перестановочные по первым двум столбцам.

2) Перестановочным по первым двум столбцам матрицам соответствуют равноценные структуры (или наборы из двух структур), отличающиеся инверсией входов, включая и константные. Это позволило ограничиться при синтезе рассмотрением лишь шести из четырнадцати перестановочных матриц (пара перестановочных матриц, соответствующая тривиальным функциям, не рассматривалась совсем).

3. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА

Анализ переменных, образующих конкретные функции на одной и той же структуре, показал, что синтез можно записать в виде алгоритма, использующего таблицы несовпадений 1 и 2 и матрицу несовпадений

синтезируемой функции, построение которых должно предшествовать синтезу. Число номеров конституентов в наборе синтезируемой функции и ее матрица несовпадений позволяет сразу обратиться к нужной части рассматриваемого ниже алгоритма.

В описании алгоритма используется следующее определение, не встречавшееся ранее: пересекающиеся по той или иной таблице несовпадений будем называть переменные, имеющие одновременно единицы в общих столбцах соответствующей таблицы.

1. Число номеров конституентов в наборе функции — один. Матрица несовпадений для всех функций этого вида единственная; она имеет вид

$$\begin{array}{ccc} 0 & 3 & 3 \\ & 1 & 4 \end{array}$$

Минимальными реализациями функций являются

- 1) $M(M(i, j, 0), k, 0),$
- 2) $M(M(i, k, 0), j, 0),$
- 3) $M(M(j, k, 0), i, 0),$

где i, j, k — переменные с номером 03.

2. Число номеров конституентов в наборе функции — два

а) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 2 \\ & 1 & 3 \\ & 2 & 4 \end{array}$$

Из переменных i, j с номером 02 нужно образовать функцию $M(i, j, 0)$, которая будет искомой.

б) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ & 1 & 3 \\ & 2 & 4 \end{array}$$

Выбрать переменные i, j с номером 13, пересекающиеся по таблице 1, и переменную k с номером 02. Функции

- 1) $M(M(i, j, 0), M(\bar{i}, \bar{j}, 0), k),$
- 2) $M(M(i, \bar{j}, k), M(\bar{i}, j, 1), 0),$
- 3) $M(M(\bar{i}, j, k), M(i, \bar{j}, 1), 0)$

будут искомыми.

в) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 6 \end{array}$$

Выбрать переменные i, j , неинверсные и непересекающиеся по таблице 1, и переменную k , пересекающуюся с \bar{i} и $k \neq j$. Функции

- 1) $M(M(i, j, 1), M(\bar{i}, k, 0), M(\bar{j}, \bar{k}, 0)),$
- 2) $M(M(j, \bar{k}, 1), M(i, \bar{j}, 0), M(\bar{i}, k, 0)),$
- 3) $M(M(i, k, 1), M(\bar{i}, j, 0), M(\bar{j}, \bar{k}, 0)),$
- 4) $M(M(\bar{i}, \bar{k}, 1), M(j, k, 0), M(i, \bar{j}, 0)),$

- 5) $M(M(\bar{i}, \bar{j}, 1), M(j, k, 0), M(i, \bar{k}, 0)),$
 6) $M(M(\bar{j}, k, 1), M(\bar{i}, j, 0), M(i, \bar{k}, 0))$

будут искомыми.

3. Число номеров конституентов в наборе функции — три.
 а) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1. \end{matrix}$$

Из переменных i с номером 01 и j, k с номером 12 образовать функцию $M(M(j, k, 1), i, 0)$, которая будет искомой.

- б) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3. \end{matrix}$$

1) Определить, есть ли среди переменных с номером 12 пересекающиеся по таблице 1. Если есть, выполнить 2), если нет — перейти к 3).

2) Взять переменные i, j, k с номером 12 так, чтобы i, j пересекались по таблице 1. Функции

- 1) $M(M(i, j, 0), M(\bar{i}, \bar{j}, 0), M(i, k, 1)),$
 2) $M(M(i, j, 0), M(\bar{i}, \bar{j}, 0), M(j, k, 1)),$
 3) $M(M(i, j, 0), M(\bar{i}, k, 0), M(i, \bar{j}, 1)),$
 4) $M(M(i, j, 0), M(\bar{j}, k, 0), M(\bar{i}, j, 1))$

будут искомыми.

- 3) Из переменных i, j, k с номером 12 образовать функции

- 1) $M(M(i, j, k), M(i, \bar{j}, \bar{k}), M(\bar{i}, j, 0)),$
 2) $M(M(i, j, k), M(i, \bar{j}, \bar{k}), M(\bar{i}, k, 0)),$
 3) $M(M(i, j, k), M(\bar{i}, j, \bar{k}), M(i, \bar{j}, 0)),$
 4) $M(M(i, j, k), M(\bar{i}, j, \bar{k}), M(\bar{j}, k, 0)),$
 5) $M(M(i, j, k), M(\bar{i}, \bar{j}, k), M(i, \bar{k}, 0)),$
 6) $M(M(i, j, k), M(\bar{i}, \bar{j}, k), M(j, \bar{k}, 0)),$

которые будут искомыми.

4. Число номеров конституентов в наборе функции — четыре.
 а) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1. \end{matrix}$$

Переменная с номером 00 реализует искомую функцию.

- б) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3. \end{matrix}$$

Из переменных i, j, k с номером 11 образовать функцию $M(i, j, k)$, которая будет искомой.

в) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{matrix}$$

Взять переменные i, j с номером 11 и переменную k с номером 22 и непересекающуюся с i по таблице 1. Функции

- 1) $M(M(i, k, 1), M(j, \bar{k}, 1), 0),$
- 2) $M(M(j, k, 0), M(i, \bar{k}, 0), 1)$

будут искомыми.

г) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Выбрать переменную i с номером 11 и j, k с номером 22 и пересекающиеся с i по таблице 1. Функции

- 1) $M(M(\bar{i}, \bar{j}, 0), M(i, j, k), M(i, \bar{k}, 1)),$
- 2) $M(M(\bar{i}, \bar{k}, 0), M(i, j, k), M(i, \bar{j}, 1)),$
- 3) $M(M(i, j, 0), M(\bar{i}, \bar{j}, k), M(i, \bar{k}, 1)),$
- 4) $M(M(i, k, 0), M(i, \bar{j}, \bar{k}), M(\bar{i}, j, 1)),$
- 5) $M(M(i, k, 0), M(\bar{i}, j, \bar{k}), M(i, \bar{j}, 1)),$
- 6) $M(M(i, j, 0), M(i, \bar{j}, \bar{k}), M(\bar{i}, k, 1))$

будут искомыми.

д) Матрица несовпадений имеет вид

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 6 \end{matrix}$$

1) Проверить, есть ли среди переменных пересекающиеся по двум столбцам таблицы 1. Если есть, выполнять 2), если нет — перейти к 3).

2) Из переменных i, j , пересекающихся по двум столбцам таблицы 1, образовать функции

- 1) $M(M(i, j, 0), M(\bar{i}, \bar{j}, 0), 1),$
- 2) $M(M(i, \bar{j}, 1), M(\bar{i}, j, 1), 0),$

которые будут искомыми.

3) Взять два любых (не пустых) столбца таблицы 1 и из переменных, имеющих в них единицы, образовать функции $M(i, j, k)$ и $M(i, l, m)$. Функция $M(M(i, j, k), M(i, l, m), \bar{i})$ будет одной из искомых. Перебирая всевозможные сочетания столбцов таблицы 1 по два, получим 6 возможных минимальных схем синтезируемой функции.

Функции, имеющие в наборе число номеров конституентов больше четырех, соответствуют перестановочным матрицам и могут быть получены из рассмотренных инверсией переменных и констант.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. С. Алексееву за ценное участие в обсуждении и оформлении полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. S. Miller, R. O. Winder, IRE Trans. Electr. Comput., 11, 89 (1962).
2. B. Akers Sheldon, IRE Trans. Electr. Comput., 10, 604 (1961).
3. B. Stram Oscar, Proc. IRE, 49, 210 (1961).
4. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, ИЛ, М., 1954.
5. Д. Гильберт, В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, М., 1947
6. Туннельные диоды, Сб. статей, ИЛ, М., 1961.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 июля 1964 г.

ALGORITHM OF MINIMUM CIRCUITS SYNTHESIS ON THRESHOLD ELEMENTS WITH THREE INPUTS FOR THE CASE OF THREE VARIABLES

I. V. Kotel'nikov

The algorithm has been considered of all possible isomorphous forms synthesis of minimum circuits of binary functions of three variables assembled on threshold elements with three inputs building up according to the majoritary principle.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 528.85

**К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИОНИЗИРОВАННОГО ГАЗА В БЛИЗИ
ГАЛАКТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ**

B. A. Разин, И. П. Хижнякова

В работе [1] на основании данных об изменении спектра космического радиоизлучения в диапазоне частот $1 \div 10$ Мгц [2] высказано предположение о том, что вблизи галактической плоскости имеется ионизированный газ с концентрацией $N \sim 0,1 \text{ см}^{-3}$ и температурой $T \sim 10^4 \text{ К}$, образующий слой полутолщиной $\sim 300 \text{ pc}$; поглощение радиоволн в этом слое и приводит к изменению спектра низкочастотного космического радиоизлучения. Однако этот вывод не является однозначным, так как средний коэффициент поглощения радиоволн пропорционален $N^2 T^{-3/2}$, а соотношения $N^2 \sim (N)^2$ и $T \sim 10^4 \text{ К}$ могут не выполняться. Кроме того, нужно иметь в виду следующие два момента. Во-первых, поглощение космического радиоизлучения может быть в какой-то мере связано с областью HII, окружающей солнечную систему (наличие такой области предполагается в работах [3, 4]). Во-вторых, если в длинноволновом космическом радиоизлучении преобладает метагалактическая компонента [5], то изменение спектра космического радиоизлучения на низких частотах может быть обусловлено поглощением радиоволн в метагалактической среде [6]. Следовательно, для выяснения характера распределения ионизированного межзвездного газа необходимо рассмотреть дополнительные экспериментальные данные. Ниже мы проанализируем некоторые из результатов поляризованных измерений.

В опубликованной недавно работе [7] приведен обзор неба в поляризованном излучении на частоте $\nu = 408$ Мгц. В этом обзоре обращает на себя внимание ряд характерных особенностей: 1) около 90% поляризованного излучения сосредоточено в полосе шириной 50° , проходящей своей средней частью через полюса Галактики [7]; интенсивность поляризованной компоненты распределена в полосе весьма неравномерно (пятнами); 2) с удалением от центра полосы на $\pm 15^\circ$ интенсивность поляризованной компоненты в среднем практически не убывает; 3) в нескольких протяженных областях электрический вектор направлен преимущественно вдоль полосы [7], причем в пределах $\pm 15^\circ$ от ее центра разности позиционных углов не превосходят в среднем одного радиана.

Такое распределение поляризованного излучения по небосводу должно отражать характерные особенности структуры галактического магнитного поля, распределения релятивистских электронов и ионизированного межзвездного газа. Для того, чтобы получить представление о распределении последнего, рассмотрим две простейшие модели области Галактики, из которой приходит поляризованное радиоизлучение. Предположим, что поляризованное излучение возникает в галактическом рукаве с радиусом R_p , на оси которого находится солнечная система [7, 11]. Будем считать концентрацию релятивистских электронов и магнитное поле постоянными в рукаве. Пусть магнитное поле параллельно оси рукава, а направления скоростей релятивистских электронов распределены изотропно. В первой модели примем, что ионизированный газ распределен равномерно в рукаве с радиусом $R_i < R_p$. Во второй модели будем предполагать газ сконцентрированным в сравнительно плотных облаках.

Рассмотрим сначала первую модель. При сделанных выше предположениях можно показать, что степень поляризации излучения

$$p = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 7/3} \frac{R_i}{R_p} \sqrt{\frac{\sin^2(\psi \operatorname{ctg} \theta)}{(\psi \operatorname{ctg} \theta)^2} + \frac{R_p - R_i}{R_i} \frac{\sin(2\psi \operatorname{ctg} \theta)}{\psi \operatorname{ctg} \theta} + \left(\frac{R_p - R_i}{R_i}\right)^2}, \quad (1)$$

где γ — показатель степени в энергетическом спектре релятивистских электронов, $\psi = 2,4 \cdot 10^4 N H R_i / v^2$ — фактор, определяющий величину фарадеевского вращения плоскости поляризации космического радиоизлучения в газовом рукаве, H — напряжен-

нность магнитного поля в эрстедах (в выражении для ψ радиус рукава R_i должен быть выражен в сантиметрах, частота v — в герцах), θ — угол между направлением магнитного поля и лучом зрения. При изотропном распределении скоростей релятивистских электронов интенсивность поляризованной компоненты пропорциональна

$$p(H \sin \theta)^{\frac{\gamma+1}{2}} R_p / \sin \theta. \quad (2)$$

Представив в эту формулу выражение для p и выполнив интегрирование по телесному углу, мы получим величину, пропорциональную интенсивности поляризованного излучения, приходящего из данного телесного угла. Для ряда значений параметров путем численного интегрирования была определена доля α поляризованного излучения в полосе шириной 50° с центральным сечением, перпендикулярным оси рукава. Если R_p существенно превосходит R_i , то при любой концентрации газа (пока не сказывается деполяризация из-за конечной ширины диаграммы направленности антенны) $\alpha < 90\%$. Например, при $R_p = 2R_i$ и $\gamma = 3^*$ величина α не превосходит 65%. Значения $\alpha \sim 90\%$ возможны лишь при $R_p \approx R_i$. В этом случае из формулы (1) получается известное выражение [12]

$$p \propto |\sin(\psi \operatorname{ctg} \theta)/\psi \operatorname{ctg} \theta|. \quad (3)$$

Величина α довольно слабо зависит от концентрации газа. Так, при $R_p = R_i = 250 \text{ нс} = 7,5 \cdot 10^{20} \text{ см}$ [8, 9], $\gamma = 3$, $H = 10^{-5} \text{ эрстед}$, $v = 408 \text{ мгц}$, параметр $\alpha = 94,5\%$, если $N = 0,1 \text{ см}^{-3}$ и $\alpha = 87,6\%$, если $N = 0,01 \text{ см}^{-3}$. Однако для оценки N можно воспользоваться тем, что интенсивность поляризованного излучения и позиционный угол меняются мало при удалении от центра полосы на $\pm 15^\circ$. Как видно из формул (2) и (3), это возможно при $\psi \operatorname{ctg} 75^\circ \lesssim 1$. Отсюда следует, что $\psi \lesssim 3,7$ радиана; на частоте $v = 408 \text{ мгц}$ это соответствует значениям $N H R_i \lesssim 2,6 \cdot 10^{13} \text{ э} \cdot \text{см}^{-2}$. Полагая $R_i = 250 \text{ нс}$ и $H = 10^{-5} \text{ эрстед}$, получим $N \lesssim 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}$. При этом $\alpha = 84\%$.

Рассмотрим теперь вторую модель: весь ионизированный газ сконцентрирован в плотных облаках. Будем считать, что излучение областей, находящихся за облаками, полностью деполяризуется из-за фарадеевского вращения в облаках [10]. Чтобы найти величину α , нужно определить среднее расстояние до первого облака на луче зрения \bar{R} . Решая задачу аналогично тому, как это делается при нахождении средней длины свободного пробега молекул в газе, получаем выражение

$$\bar{R} = a \left[1 - \exp \left(- \frac{R_p}{a \sin \theta} \right) \right], \quad (4)$$

где $a = 1/\sigma n$, σ — средняя площадь проекции облаков на плоскость, перпендикулярную лучу зрения, n — число облаков в единице объема.

Согласно (4), в случае $\alpha \gg \frac{R_p}{\sin \theta}$ среднее расстояние $\bar{R} \sim \frac{R_p}{\sin \theta}$. При этом $\alpha(\gamma=3) = 52,5\%$ (как и в модели 1 при отсутствии фарадеевского вращения). При $\alpha \ll R_p$ величина $\alpha(\gamma=3) = 56,4\%$. Максимальное значение $\alpha(\gamma=3) = 59,4\%$ получается при $\alpha \ll R_p (\bar{R} \sim a)$. Таким образом, основываясь на второй модели, нельзя получить значение α , соглашающееся с экспериментальными данными, если, конечно, не предполагать заметной анизотропии в распределении направлений скоростей релятивистских электронов для чего нет оснований.

Из сказанного можно сделать следующие выводы.

1) Наблюдения поляризации космического радиоизлучения не подтверждают предположения о существовании вблизи галактической плоскости слоя ионизированного газа с концентрацией $\sim 0,1 \text{ см}^{-3}$ и полутолщиной $\sim 300 \text{ нс}$.

2) Ни одна из двух рассмотренных моделей распределения ионизированного газа в галактическом рукаве не позволяет объяснить все характерные особенности углового распределения поляризованного радиоизлучения на частоте 408 Мгц. Но это можно сделать, комбинируя обе модели. Таким образом, действительное распределение ионизированного газа должно характеризоваться облачной структурой с концентрацией газа между облаками $N \lesssim 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}$, причем облака не должны полностью деполяризовать излучение частоты 408 Мгц, проходящее через них. Эти представления подтверждаются данными о поляризации космического радиоизлучения на частоте 207 Мгц [13] и оценками фарадеевского вращения в межзвездной среде по данным поляризационных измерений на частотах 408 Мгц и 610 Мгц [14].

3) Имеющиеся поляризационные данные не противоречат предположению об изо-

* Вариации γ в пределах $2,5 \pm 3,5$ мало сказываются на величине α . В отсутствие фарадеевского вращения $\alpha(\gamma=3)=52,5\%$, $\alpha(\gamma=2,5)=50\%$ и $\alpha(\gamma=3,5)=54,3\%$.

тропном распределении направлений скоростей космических электронов в межзвездном пространстве.

4) Поглощение длинноволнового космического радиоизлучения обусловлено, по-видимому, облаками ионизированного газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. H. Hoyle, V. R. A. Ellis, *Austral. J. Phys.*, **16**, 1 (1963).
2. V. R. A. Ellis, M. Waterworth, M. S. Bessell, *Nature*, **196**, 1079 (1962).
3. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 395 (1964).
4. D. Walsh, F. T. Haddock, H. F. Shulte, *Space Research IV*, Proc. Fourth Intern. Space Sci. Symp., New York, 1964, p. 935.
5. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 921 (1960).
6. D. W. Sciama, *Nature*, **204**, 767 (1964).
7. D. S. Mathewson, D. K. Milne, *Nature*, **203**, 1273 (1964).
8. B. Y. Mills, *Publ. ASP*, **71**, 267 (1959).
9. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, Происхождение космических лучей изд АН СССР, М., 1963.
10. V. Westerhout, V. L. Seeger, W. N. Brouw, I. Tinbergen, *BAN*, **16**, 187 (1962).
11. H. Tupper, *Phil. Mag.*, **3**, 370 (1958).
12. В. А. Разин, Радиотехника и электроника, **1**, 846 (1956).
13. В. А. Разин, Астрон. ж., **35**, 241 (1958).
14. C. A. Muller, E. M. Verkhuijsen, W. N. Brouw, I. Tinbergen, *Nature*, **200**, 155 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 апреля 1965 г.

УДК 621.378.33

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА С ДВУМЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ НА ДВУХ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКАХ

А. Ф. Мухамедгалиев, Г. М. Страховский

В настоящей заметке сообщается о результатах экспериментального исследования молекулярного генератора с двумя последовательными резонаторами и с двумя встречными пучками. Известно, что если через два резонатора последовательно пропустить пучок молекул, то во втором резонаторе могут существовать собственные автоколебания и колебания на частоте генерации в первом резонаторе, называемые «молекулярным звоном» [1, 2]. При сближении частот резонатора «молекулярный звон» может захватить автоколебания. Если пропустить встречный пучок молекул, то в системе установится режим взаимной синхронизации, при которой оба резонатора имеют одну и ту же частоту и постоянную разность фаз.

Теоретический анализ двухрезонаторной двухпучковой системы проведен в работе [3]. Зависимость частоты колебаний от перестройки частоты обоих резонаторов в режиме взаимной синхронизации имеет вид

$$\frac{\omega - \omega_l}{\omega_l} = \frac{\omega_l - (1/2)(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_l} \frac{Q}{Q_l} \frac{\tau}{\chi T + 2\tau}, \quad (1)$$

где ω_l — частота спектральной линии, ω_1 , ω_2 — собственные частоты резонаторов, $Q_1 = Q_2 = Q$ — добротность резонаторов, τ — время пролета через резонатор, T — время пролета между резонаторами, Q_l — добротность линии, χ — коэффициент ослабления молекулярного пучка при пролете между резонаторами.

Из выражения (1) следует, что эффективная добротность в двухрезонаторной системе с двумя встречными пучками в $(\chi T + 2\tau)^{-1}$ раз больше, чем в генераторе с одним резонатором и временем пролета τ . Выигрыш будет существенным, если $(\chi T + 2\tau)^{-1} \gg 1$, что сводится фактически к двум условиям: $T \gg \tau$, $\chi \approx 1$.

В исследованном двухрезонаторном генераторе два резонатора длиной $l = 23 \text{ мм}$ были разнесены на расстояние 140 м.м. Было установлено, что в такой системе имеет место режим взаимной синхронизации, причем величина области синхронизации составляет $\sim 4 \text{ кГц}$ по генерации. На рис. 1 представлена снятая экспериментально в режиме взаимной синхронизации зависимость частоты генерации от перестройки

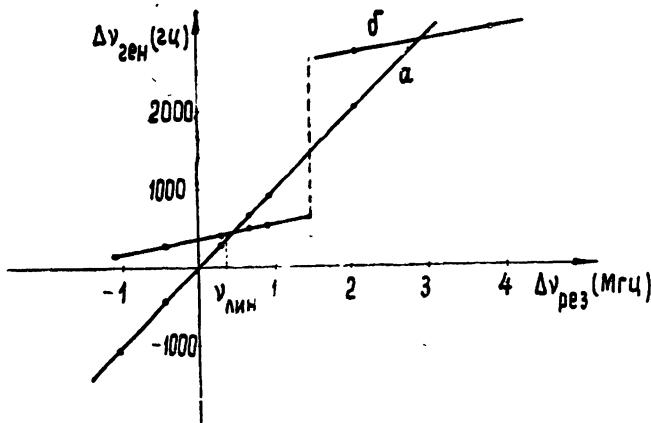


Рис. 1. Зависимость частоты генерации от перестройки резонатора:

а) в однорезонаторном молекулярном генераторе, б) в двухрезонаторном двухпучковом молекулярном генераторе.

одного из резонаторов Из сравнения графиков для однорезонаторного и для двухрезонаторного двухпучкового генератора можно видеть, что в последнем наклон в 5 раз меньше, чем в однорезонаторном длиной $l = 23 \text{ мм}$. Как следует из выражения (1), это означает, что в двухрезонаторной системе (при нашем способе измерения, когда частота одного резонатора постоянна, а у второго изменяется) эффективная добротность линии увеличилась примерно в 2,5 раза по сравнению с одним резонатором длиной 23 м.м. Отношение $(T + 2\tau)^{-1}$ для нашей системы равно примерно 7; однако такого выигрыша в сужении линии достичь не удается из-за ослабления пучка при прохождении между резонаторами. Сравнивая (1) с экспериментальной кривой, можно, приближенно оценить коэффициент ослабления молекулярного пучка, который в нашем случае оказался равным 0,3. Было обнаружено, кроме того, что при некоторой настройке резонатора имеет место скачок синхронной частоты (см. рис. 1). Теоретический анализ устойчивости для такой системы, проведенный в [4], не обнаружил такого скачка синхронной частоты.

Было проведено также исследование зависимости мощности излучения во втором резонаторе от параметров первого резонатора — его длины и добротности. Величина молекулярного звона определяется $P(\tau_1)$ — поляризацией пучка и $D(\tau_1)$ — величиной, пропорциональной разности числа частиц на верхнем и нижнем уровнях на выходе из первого резонатора. Максимум звона соответствует случаю $D(\tau_1) = 0$, при этом $P(\tau_1)$ имеет максимальное значение. В момент вылета из первого резонатора величина D (в приближении моноскоростного пучка) может быть записана в виде [5]

$$D(\tau_1) = D_0 \left[\frac{\mu^2 E^2}{\hbar^2 \gamma^2} \cos(\gamma \tau_1) + \frac{\delta^2}{\gamma^2} \right], \quad (2)$$

где D_0 — значение D на входе в первый резонатор, μ — дипольный момент молекулы, E — амплитуда колебаний в первом резонаторе, δ — расстройка резонатора относительно частоты молекулярного перехода, $\gamma^2 = \mu^2 E^2 \hbar^{-2} + \delta^2$.

Анализируя (2), можно показать, что величина звона увеличивается при укорочении длины первого резонатора или же при уменьшении его добротности. Это ясно из следующего. Условия максимальной величины звона ($D(\tau_1) \approx 0$, $P(\tau_1) \approx P_{\max}$) осуществляются, согласно (2), при следующих значениях параметра $\gamma \tau_1 = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ (для простоты рассматриваем случай $\delta = 0$). В коротких резонаторах значение $\gamma \tau_1 = \pi/2$ реализуется при больших γ , чем в длинных резонаторах (параметр γ обычно называют фактором насыщения). Большие значения γ достигаются увеличением числа частиц; поскольку величина звона во втором резонаторе пропорциональна числу влетающих в него в единицу времени частиц, интенсивность колебаний звона в случае короткого первого резонатора будет больше. Аналогично объясняется зависимость звона от добротности первого резонатора.

Нами было проведено экспериментальное исследование указанных выше зависимостей. Эксперимент подтвердил такую зависимость звона от длины первого резонатора и его добротности. Интенсивность звона от резонатора с длиной $l = 23 \text{ м.м.}$ была примерно в 5 раз больше интенсивности звона от резонатора с длиной $l = 80 \text{ м.м.}$ При этом максимум звона в случае, когда первым стоит короткий резонатор, достигался при больших давлениях в источнике пучка, чем в случае первого длинного резонатора. Интенсивность колебаний звона от резонатора с $Q = 10^4$ оказалась в 2 раза меньше интенсивности колебаний звона от резонатора с $Q = 5 \cdot 10^3$. Оптимальные значения длины первого резонатора составляют $20 \div 40 \text{ м.м.}$, оптимальное значение добротности $(3 \div 5) \cdot 10^3$.

Зависимость величины звона от перестройки частоты первого резонатора в слу-

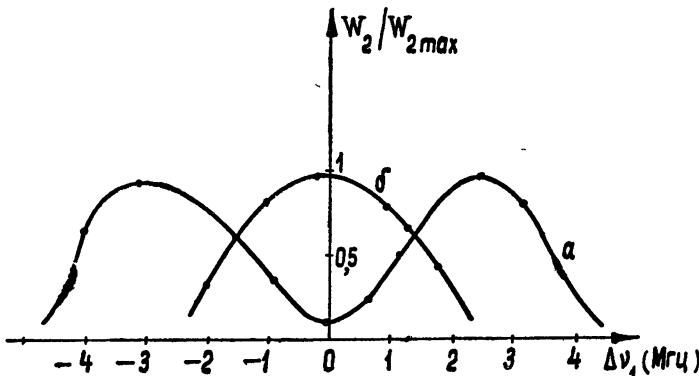


Рис. 2. Зависимость интенсивности колебаний во втором резонаторе от перестройки первого резонатора:

а) для первого резонатора длиной 80 м.м., б) для первого резонатора длиной 23 м.м.

чае резонаторов разной длины также различна. На рис. 2 приведена эта зависимость для резонаторов с $l = 80 \text{ м.м.}$ и $l = 23 \text{ м.м.}$ Разный вид кривых может быть объяснен из анализа выражения (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. F. H. Reder, C. J. Vickart, Rev. Sci. Instr., 31, 1164 (1960).
2. Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, ЖЭТФ, 42, 907 (1962).
3. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 8, 158 (1963).
4. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 479 (1964).
5. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ, 42, 1529 (1962).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
26 марта 1965 г.

УДК 538.3

К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИИ ПЛОТНОСТИ ФОТОНОВ В РЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЕ

А. И. Алексеев

Колебания плотности фотонов в резонансной среде, состоящей из двухуровневых молекул, рассматривались ранее в [1, 2]. Обобщим полученные в [1, 2] результаты на тот случай, когда идентичные двухуровневые молекулы хаотично разбросаны в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ . Кроме того, будем учитывать магнито-дипольное и квадрупольное излучение (поглощение) молекул.

Гамильтониан H системы N идентичных двухуровневых примесных молекул, хаотично разбросанных в среде, и поля излучения в объеме V запишем в виде

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} N_- + \sum_{k\lambda} \hbar\omega_k c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda}^- + \sum_{k\lambda} \hbar(c_{k\lambda}^- b_{k\lambda}^+ + c_{k\lambda}^+ b_{k\lambda}^-), \quad (1)$$

где

$$b_{k\lambda}^+ = \sum_j \sigma_z^j \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega_k \epsilon V}} (M^j l_k^\lambda) e^{ikx_j}, \quad b_{k\lambda}^- = \sum_l \sigma_z^l \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega_k V \epsilon}} (M^{*j} l_k^\lambda) e^{-ikx_j}, \quad (2)$$

$$N_- = \sum_j \sigma_z^j, \quad \sigma_z^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+^j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_-^j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь первое и второе слагаемое в H — операторы энергии соответственно примесных молекул и поля излучения в среде без примесных молекул, а последнее слагаемое — оператор их энергии взаимодействия; $\hbar\omega_0$ — разность энергии верхнего и нижнего уровня отдельной примесной молекулы в отсутствие поля излучения, $c_{k\lambda}^-$ и $c_{k\lambda}^+$ — операторы соответственно поглощения и излучения фотона с волновым вектором k и поляризацией l_k^λ , причем

$$c_{k\lambda}^- c_{k'\lambda'}^+ - c_{k'\lambda'}^+ c_{k\lambda}^- = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda = 1, 2, \quad \omega_k^2 = k^2 c^2 / \epsilon, \quad (3)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды без примесных молекул. Поскольку в данной задаче существует узкий интервал частот вблизи основной частоты ω_0 , то диэлектрическую проницаемость ϵ среды можно считать постоянной в этой полосе частот. Далее, x_j — координата центра тяжести j -й примесной молекулы, а $M^j(k)$ — ее матричный элемент перехода с нижнего уровня на верхний с одновременным поглощением фотона с импульсом hk :

$$M_a^j(k) = -i\omega_0 d_a^j + i\epsilon [k\mu^j]_a + \frac{\omega_0}{6} \sum_\beta Q_{\alpha\beta}^j k_\beta,$$

где d_a^j , μ_a^j и $Q_{\alpha\beta}^j$ — матричные элементы дипольного, магнито-дипольного и квадрупольного моментов j -й примесной молекулы. При этом предполагается, что среднее квантовомеханическое значение магнитного дипольного момента изолированной молекулы, находящейся в одном из двух рассматриваемых состояний, равно нулю. Это предположение сделано для того, чтобы гамильтониан системы сохранял прежний вид (1) при учете в M_a^j матричных элементов μ_a^j и $Q_{\alpha\beta}^j$. В гамильтониане (1) отброшены слагаемые, пропорциональные квадрату векторного потенциала, а также члены, приводящие к нарушению закона сохранения числа частиц (фотонов и возбужденных примесных молекул), поскольку эта часть гамильтониана вносит пренебрежимо малый вклад (см. [1, 2]).

Для написания уравнений движения необходимо установить перестановочные соотношения между операторами, входящими в (1). Кроме (3), имеем

$$b_{k\lambda}^- N_- - N_- b_{k\lambda}^- = 2b_{k\lambda}^-, \quad b_{k\lambda}^+ N_- - N_- b_{k\lambda}^+ = -2b_{k\lambda}^+, \quad (4)$$

$$b_{k\lambda}^+ b_{k'\lambda'}^- - b_{k'\lambda'}^- b_{k\lambda}^+ = -\frac{1}{4\tau_0^2} N_- \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (5)$$

где

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{|N_-^0|}{\tau_0^2}, \quad \frac{1}{\tau_0^2} = \frac{2\pi c^3 W}{\omega_0^2 V \epsilon^{3/2}}, \quad W = W_d + W_\mu + W_Q. \quad (6)$$

Здесь W_d , W_μ и W_Q — вероятность спонтанного дипольного, магнито-дипольного и квадрупольного излучения в единицу времени кванта уединенной примесной молекулой в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , а N_-^0 — разность числа молекул на верхнем и нижнем уровне в начальный момент времени. При написании (5) отброшены малые члены, связанные с радиационным затуханием возбужденного уровня примесной молекулы, так как предполагается, что $W\tau \ll 1$. В (5) использовано также что ориентация осей диполей d^j , μ^j и тензора $Q_{\alpha\beta}^j$ примесных молекул хаотична.

Из (3) — (5) получаем все формулы работ [1, 2], в которых, однако, вместо

τ и τ_0 входят теперь величины, данные в (6). Наличие ϵ в τ_0 обобщает результаты [1, 2] на тот случай, когда диэлектрическая проницаемость среды без примесных молекул заметно отлична от единицы.

Рассмотрим далее другую возможность, когда внешнее поле или поле среды (например, кристаллической решетки) выстраивает векторы M^j всех примесных молекул параллельно друг другу $M^j \equiv M$. Тогда при вычислении коммутатора (5) нет необходимости усреднять по направлениям M^j и вместо (5) получим

$$b_{k\lambda}^+ b_{k'\lambda'} - b_{k'\lambda'} b_{k\lambda}^+ = B_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) \delta_{kk'} N_{--}, \quad (7)$$

$$B_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) = \frac{2\pi}{\hbar\omega_k V\epsilon} (M(\mathbf{k}) l_k^\lambda) (M^*(\mathbf{k}) l_k^{\lambda'}).$$

В этом случае поляризация фотонов в среде находится в прямой зависимости от ориентации осей d , μ и Q_{ab} , если в начальный момент фотоны отсутствовали и было задано распределение молекул по уровням. Пусть, например, $\mu = 0$ и $Q_{ab} = 0$, а дипольное излучение (поглощение) происходит с изменением Δm проекции m полного механического момента примесной молекулы ($\Delta m = 0$). Тогда вектор d можно считать вещественным и в качестве векторов поляризации для каждого фиксированного направления k и d удобно взять

$$l_k^{(1)} = [dk]/|[dk]|, \quad l_k^{(2)} = [[dk] k]/|[dk] k|.$$

Составляя уравнения движения при помощи (3), (4) и (7), убеждаемся, что фотоны с вектором поляризации $l_k^{(1)}$ излучаться не будут: $n_{k1} \equiv \langle c_{k1}^+ c_{k1} \rangle = 0$, а вектор поляризации $l_k^{(2)}$ излученных фотонов n_{k2} лежит в плоскости векторов k и d . При этом вектор поляризации в настоящих обозначениях направлен вдоль вектора напряженности электрического поля, так как в принятой калибровке скалярный потенциал тождественно равен нулю и $\operatorname{div} A = 0$. Адиабатический выход излучения из объема дает пучок света, линейно поляризованный в плоскости векторов k и d . В других случаях исследование поляризации излучения производится аналогично. Таким образом, исследуя степень поляризации генерируемого пучка света, можно сделать определенное заключение о природе оптических переходов и об ориентации отдельных примесных молекул в среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Алексеев, Ю. А. Вдовин, В. М. Галицкий, ЖЭТФ, 46, 320 (1964).
2. А. И. Алексеев, В. М. Галицкий, ЖЭТФ, 47, 1893 (1964).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
15 сентября 1964 г.

УДК 621.382.31

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ КОЭФФИЦИЕНТА-УСИЛЕНИЯ ТРАНЗИСТОРОВ

Е. А. Здорнова, А. Н. Малахов

В настоящее время для характеристики свойств плоскостных транзисторов чаще всего используются параметры h_{ik} , наиболее легко определяемые на эксперименте. Наличие флюктуаций в полупроводниках делает естественным предположение о том, что эти флюктуации сказываются на величине параметров h_{ik} . Как будет видно ниже, эксперимент действительно подтвердил наличие флюктуаций у параметра $a_i = -h_{12}$. Исследование характеристик этих флюктуаций позволит глубже проникнуть в механизм низкочастотных (фликкерных) флюктуаций, отвечающих, в частности, за стабильность полупроводниковых приборов.

В данной работе с помощью низкочастотного анализатора спектра [1, 2] выполнены измерения спектральной плотности относительных флюктуаций коэффициента

усиления по току α_t в схеме с общей базой (диапазон частот от 1 до 80 гц). Для измерения флуктуаций была использована схема, представленная на рис. 1. В цепь эмиттера и коллектора исследуемого полупроводникового триода вводились проволочные сопротивления R_1 и R_2 порядка 10 ком; при этом в эмиттерной цепи выполнялись условия работы генератора тока ($R_1 \gg h_{11}$), а в коллекторной цепи — условия короткого замыкания ($1/h_{22} \gg R_2$). Амплитуда синусоидального сигнала, вводимого в цепь эмиттера от лампового генератора ($f = 30$ кгц), составляла около 0,3 в для сохранения условия дифференциальности параметра α_t . (При постоянном токе эмиттера $I_{\text{э}} = 1$ ма переменная часть эмиттерного тока $I_{\text{э}} = 0,03$ ма.)

Для устранения непосредственного действия фликкер-шума транзистора на анализатор и получения режима линейного детектирования сигнал с сопротивления R_2 поступал на детектор через резонансный усилитель, настроенный на частоту 30 кгц и не пропускающий низкочастотный фликкер-шум.

Исследование флуктуаций α_t велось путем сравнения амплитудных флуктуаций синусоидальных сигналов с сопротивлений R_1 и R_2 . Относительные амплитудные флуктуации напряжения δV_{R_1} , на сопротивлении R_1 связаны с флуктуациями амплитуды лампового генератора $\delta \varepsilon$ и флуктуациями δh_{11} входного сопротивления транзистора h_{11} следующим образом:

$$\delta V_{R_1} = \delta \varepsilon - \delta h_{11} \frac{1}{1 + R_1/h_{11}}.$$

Так как входная цепь транзистора в нашей работе подчиняется условию $h_{11} \ll R_1$, то с большой степенью точности можно считать, что $\delta V_{R_1} \approx \delta \varepsilon$. Эти флуктуации и являются

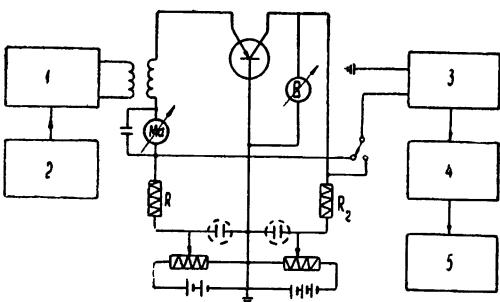


Рис. 1. Блок-схема:
1—буферный каскад, 2—ламповый генератор, 3—резонансный усилитель, 4—детектор, 5—анализатор.

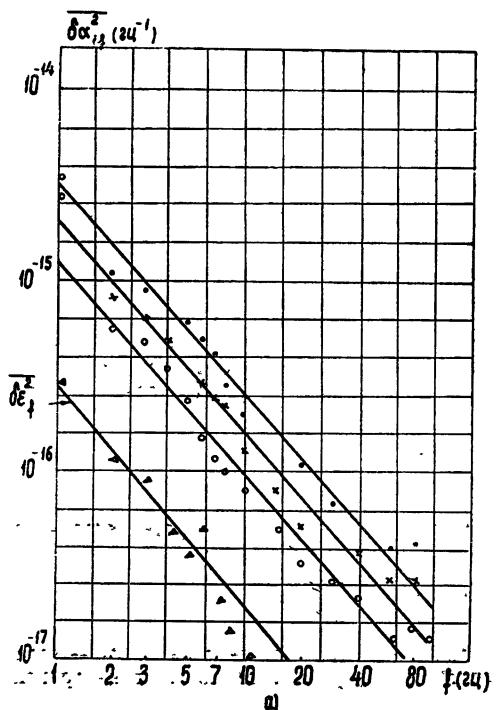


Рис. 2а. Зависимость $\delta \alpha_t^2$ от f :
для триода П5А. ●● — $u_K = 10$ в, $I_{\text{э}} = 1$ ма;
 $\times \times$ — $u_K = 5,7$ в, $I_{\text{э}} = 1$ ма; ○○ — $u_K = 5,7$ в,
 $I_{\text{э}} = 0,5$ ма

(на рисунке указана также зависимость $\delta \varepsilon_f^2$ от f для генератора на лампе 6Ж1П).

ются основным фоном, на котором измеряются флуктуации тока коллектора I_k , связанные с флуктуациями a_t .

В проведенных экспериментах были исследованы диффузионные триоды П5А, П15, П13 и дрейфовые триоды П401 и П403 (несколько экземпляров каждого типа). Значения h -параметров исследуемых транзисторов не выходили за пределы, указываемые в справочниках.

На рис. 2 приведены усредненные частотные зависимости $\overline{\delta a_{if}^2}$ и спектры $\overline{\delta a_{if}^2}$ для диффузионного триода П5А и дрейфового триода П403.

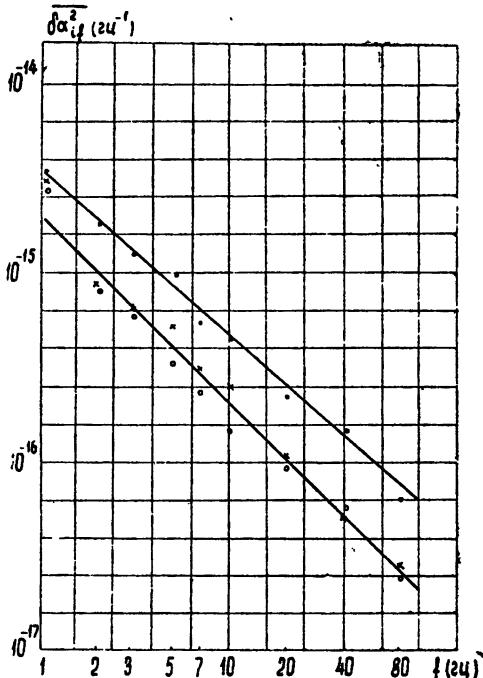


Рис. 26. Зависимость $\overline{\delta a_{if}^2}$ от f :
для триода П403: ●● — $u_k = 5$ в, $I_{g0} = 1,6$ ма;
 $\times \times$ — $u_k = 6$ в, $I_{g0} = 1$ ма; ○○ — $u_k = 10$ в, $I_{g0} = 1$ ма.

Из экспериментов следует, что спектральная плотность относительных флуктуаций коэффициента усиления исследованных транзисторов подчиняется закону фликкершума:

$$\overline{\delta a_{if}^2} = A/f^\beta.$$

Усредненные значения A и β и их зависимость от режимов для разных триодов представлена в таблице 1. Из нее видно, что при изменении режима питания транзисторов [3] величины коэффициентов A и β немного изменяются, оставаясь в среднем в пределах

$$1,9 \cdot 10^{-15} < A < 5,6 \cdot 10^{-14},$$

$$0,8 < \beta < 1,2.$$

Для схемы с общей базой коэффициент усиления по току α_t определяется через параметры транзистора следующим образом [4]:

$$\alpha_t = \frac{I_{k0}}{I_{g0}} = \frac{r_t + r_6}{r_t + r_6},$$

где r_k — сопротивление коллекторного перехода, r_6 — сопротивление базы, r_t — коэффициент пропорциональности ЭДС эквивалентного генератора входному току транзистора.

Таблица 1

	$-u_k$ (в)	I_{ϑ_0} (ма)	$A \cdot 10^{15}$	β	$\bar{\alpha}_l$
П15	4,75 4,75 9,5	1,4 0,5 0,5	~ 1	~ 1,2	0,98
П5А	5,7 5,7 10	0,5 1 1	1,3 2 3	1,0 1,0 1,0	0,96
П13	6 6 10	0,5 1 1	4,4 4,4 5,6	0,8 0,8 0,8	0,98
П401	5 6 10	1,6 1 1	4,2 3,5 2,7	1,1 1,0 1,0	0,97
П403	5 6 10	1,6 1 1	3,4 1,9 1,9	0,9 1,0 1,0	0,98

Существование флюктуаций α_l может быть в принципе связано с флюктуациями r_k , r_b и r_g . Каждый из этих параметров может иметь свои флюктуационные характеристики, интенсивность и форму спектра. Если допустить статистическую независимость флюктуаций r_k , r_b и r_g , то относительные флюктуации коэффициента усиления по току $\delta\alpha_l = \Delta\alpha_l/\alpha_l$ будут связаны с относительными флюктуациями названных выше параметров соотношением

$$\delta\alpha_l = \delta r_g \frac{r_g}{r_g + r_b} + \delta r_b \frac{r_b}{r_g + r_b} - \delta r_k \frac{r_k}{r_k + r_b} - \delta r_g \frac{r_g}{r_k + r_b}.$$

Ввиду малости второго и четвертого членов этого выражения ($r_b \ll r_g, r_k$) величину $\delta\alpha_l$ можно записать приближенно так:

$$\delta\alpha_l = \delta r_g - \delta r_k.$$

Исследования флюктуаций сопротивления коллекторного перехода r_k представляется возможным, несмотря на ряд технических трудностей; знание законов и характера флюктуаций α_l и r_k позволит на основании полученного соотношения оценить и флюктуации сопротивления r_g , ответственного за механизм инжекции в транзисторе.

Авторы выражают благодарность А. Чухланцевой за участие в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, ПТЭ, № 1, 79 (1958).
2. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 438 (1957).
3. А. Ван-дер-Зил, Флюктуационные явления в полупроводниках, ИЛ, М., 1961.
4. Я. Федотов, Ю. Шмарцев, Транзисторы, изд. Сов. радио, М., 1960.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
3 марта 1965 г.

УДК 538.56 : 519.25.538.2

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ШУМА ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИИ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ

M. P. Прокопович, A. Г. Иванков

1. Статистические характеристики шума при перемагничивании ферромагнетиков (скаклов Баркгаузена) изучались ранее при очень медленном перемагничивании. В результате усреднялось сравнительно малое число реализаций, что неизбежно увели-

чивала погрешность измерений [1]. В работах [2, 3] указывается, что скачки наибольших размеров могут быть при напряженности магнитного поля $H = H_c$, где H_c — коэрцитивная сила образца; однако в этих работах не изучалось распределение числа скачков по величинам магнитного момента в зависимости от напряженности поля образца. Такое распределение исследовано авторами статьи [4].

В данной работе изучалась одномерная плотность вероятности скачков Баркгаузена (т. е. временной производной скачков намагниченности $\dot{J} = \partial\tilde{J}/\partial t$) путем исследования статистических характеристик случайной составляющей ЭДС индукции, возникающей при циклическом перемагничивании образца. Здесь

$$\tilde{J} = J - \bar{J} = \Delta M/V, \quad (1)$$

ΔM — магнитный момент скачка, V — объем образца, J — его намагниченность, $\bar{J} = \bar{J}(H)$ — средняя статистическая намагниченность образца, соответствующая ординатам точек петли гистерезиса. Частота перемагничивания выбиралась такой, что время распространения зародыша обратной намагниченности в образце было намного меньше периода перемагничивания. Время распространения зародыша оценивалось с помощью работы [6].

Исследование проводилось на тороидальных образцах, приготовленных из ленты пермаллоя толщиной $0,24 \pm 0,01$ мм. Применение двух одинаковых образцов с встречным включением обмоток [7] исключало влияние внешних помех и в наших условиях уменьшало в 800 раз ЭДС индукции, возникающую при изменении средней намагниченности. Усилитель ЭДС скачков имел на входе фильтр верхних частот, который давал затухание в 60 дБ на частоте 2 кГц. Полоса пропускаемых усилителем частот — от 10 кГц до 200 кГц при неравномерности частотной характеристики ± 3 дБ. Таким образом, ЭДС индукции была намного меньше 4 мкв (уровня собственных шумов усилителя). В интервале полей, при которых производились измерения, изменение скорости нарастания поля было не более 20%.

Шум циклического перемагничивания является периодически нестационарным процессом. Осциллографический метод снятия распределения плотности вероятности [5] позволял преобразовать такой процесс в стационарный путем применения синхронизации генератора развертки и генератора тока перемагничивания.

2. Экспериментальное исследование ЭДС от скачков Баркгаузена почти во всех участках петли гистерезиса с $H_{\max} = 7,6$ э после усиления показало, что этот процесс имеет нормальное распределение плотности вероятности ω . Поэтому можно предположить, что распределение \tilde{J} (как величины линейно связанной с ЭДС) является нормальным для всего цикла перемагничивания (рис. 1).

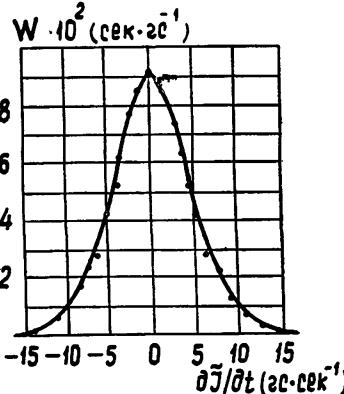


Рис. 1. Плотность вероятности ω ($\partial\tilde{J}/\partial t$) при напряженности поля 2,2 э и частоте перемагничивания 24 Гц. Сплошная линия — нормальный закон распределения.

Величина \tilde{J} линейно связана с J и поэтому распределена по нормальному закону. Из уравнения

(1) следует, что среднее значение \tilde{J} равно нулю. Поэтому число скачков намагниченности в единицу времени больше ΔJ [8] можно выразить формулой

$$\lambda(\Delta J) = \frac{\sigma_1}{2\pi\sigma^3} \exp\left[-(\Delta J)^2/2\sigma^2\right], \quad (2)$$

где σ^2 — дисперсия \tilde{J} , σ_1^2 — дисперсия J .

В работе [2] было обнаружено несоответствие экспериментального графика дифференциального закона распределения числа скачков магнитного момента нормальному распределению. Из этого делался вывод, что распределение магнитных моментов скачков не является нормальным. Однако, согласно (2), дифференциальное распределение числа скачков по величинам ΔJ имеет вид

$$(L \Delta J) \doteq \left| \frac{\partial \lambda}{\partial (\Delta J)} \right| = \frac{\sigma_1}{2\pi\sigma^3} \Delta J \exp\left[-\frac{(\Delta J)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (3)$$

т. е. не выражается гауссовым законом, хотя является следствием нормального закона распределения \tilde{J} . Автором [2] ошибочно отождествлен закон распределения числа

выбросов случайной величины с законом распределения самой случайной величины.

Исследование собственного шума применяемого усилителя показало, что шум имеет нормальное распределение. Поэтому дисперсия \hat{J} имеет вид

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2(4\pi n S)^2} \left(\frac{1}{2\pi w^2(0)} - \sigma_2^2 \right), \quad (4)$$

где n — число витков вторичной обмотки образца, S — площадь поперечного сечения образца, $w(0)$ — максимальная плотность вероятности суммы шума перемагничиваний и шума усилителя, σ_2^2 — дисперсия шума усилителя.

Обнаружено, что один и тот же закон изменения дисперсии \hat{J} за цикл повторяется дважды, причем дисперсия зависит от частоты перемагничивания. О форме этой зависимости сказать что-либо трудно, так как измерения производились для малого диапазона частот. Максимум дисперсии находится в точке $H \approx H_c$ (рис. 2). Дисперсия связана с дифференциальной магнитной восприимчивостью образца прямой зависимостью и с увеличением амплитуды поля при малых полях возрастает. Скачки Баркгаузена могут происходить и в участках петли гистерезиса, соответствующих уменьшению абсолютной величины поля, хотя дисперсия \hat{J} , а следовательно, и число скачков в единицу времени здесь очень малы. Это указывает, по-видимому, на присутствие слабых необратимых процессов в этой части петли гистерезиса, которые не вызваны процессом зародышеобразования

3. Существующие методы получения распределения скачков Баркгаузена по размерам и длительности позволяют снимать указанные распределения только для скачков, ЭДС которых превышает уровень собственных шумов усилителя. Знание же статистических свойств шума перемагничивания позволяет вычислять распределение скачков по величинам моментов и среднюю длительность скачка над нулевым уровнем [8].

В экспериментальных работах [2, 3] исследовались статистические характеристики скачков Баркгаузена при медленном перемагничивании с применением врашающегося реостата. В этих работах не учитывались флюктуации тока перемагничивания, возникающие при перемещении контакта. Авторами настоящей работы произведено исследование контактного шума пары алюминий—медь (к врачающемуся алюминиевому диску прижимался медный ролик) при среднем токе 0,314 а и скорости перемещения контакта 2 см сек⁻¹. При указанных выше условиях дисперсия тока была порядка $10^{-4} a^2$, и флюктуации тока могли вызывать при перемагничивании ЭДС, значительно большие, чем ЭДС скачков Баркгаузена. Контактный шум не имеет нормального распределения. Можно считать, что отступления от нормального закона распределения, обнаруженные в работах [2, 3], объясняются и наличием контактного шума, влияние которого в указанных работах не устранилось.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Саланский, А. М. Родичев, Изв. АН СССР, 28, 131 (1964).
2. В. М. Рудяк, Диссертация, Красноярский педагогический институт, 1958.
3. В. Ф. Ивлев, В. М. Рудяк, ДАН СССР, 120, 465 (1958).
4. В. Ф. Ивлев, В. С. Прокопенко, Изв. высш. уч. зав.—Физика, 1, 154 (1962).
5. В. Н. Иванов, Вестник Моск. ун-та, сер. физ.-мат., 6, 47 (1956).
6. K. J. Sixtus, A. L. Tonks, Phys. Rev., 37, 930 (1931).
7. Г. А. Грачев, Диссертация, Горьковский университет, 1960.
8. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1960.

УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДА МНОГОМЕРНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

M. L. Tai

В данной заметке результаты, полученные в [1], обобщаются для многомерных марковских процессов с разрывными коэффициентами сноса и диффузии или с разрывными производными от этих коэффициентов.

Известно [2], что плотность вероятности перехода всякого непрерывного во времени марковского процесса удовлетворяет уравнению Чепмена—Колмогорова:

$$f(s, x, t, y) = \int_{(V)} f(s, x, \tau, z) f(\tau, z, t, y) dV_z \quad (s < \tau < t), \quad (1)$$

которое при условии, что существуют ограниченные коэффициенты сноса и диффузии и равны нулю пределы

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{(V)} |y_l - x_l| |y_j - x_j| |y_k - x_k| f(s, x, s + \Delta, y) dV_y,$$

после известных преобразований приводится к виду

$$\int_{(V)} N(z) dV_z = 0, \quad (2)$$

где

$$N(z) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t, z) q(z) - f(x, t, z) \sum_{i=1}^n \left\{ A_i(z) \frac{\partial q(z)}{\partial z_i} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n B_{ij}(z) \frac{\partial^2 q(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right\}$$

и $q(z)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям A : 1) непрерывна вместе с двумя первыми производными по всем переменным, 2) имеет ограниченные третья производные, 3) обращается в нуль вместе с двумя производными на бесконечности.

Пусть S

$$z_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n)$$

— двухсторонняя поверхность без особенностей*, разделяющая пространство на две области. Предположим, что хоть одна из функций $A_i(x)$, $\partial A_i / \partial x_\alpha$, $B_{ij}(x)$, $\partial B_{ij} / \partial x_\alpha$, $\partial^2 B_{ij} / \partial x_\alpha \partial x_\beta$ имеет разрыв первого рода на поверхности S , т. е. ограниченные односторонние пределы этих функций. Естественно считать плотность вероятности перехода, производную $\partial f / \partial t$ и коэффициенты A_i и B_{ij} ограниченными на поверхности S .

Введем переменную u_n так, чтобы

$$z_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_{n-1}) + u_n \Delta_{in}(u_1, \dots, u_{n-1}, 0), \quad (3)$$

где $\Delta_{ik}(u_1, \dots, u_n)$ — алгебраическое дополнение элемента i -й строки k -го столбца якобиана преобразования (3):

$$\frac{D(z_1, \dots, z_n)}{D(u_1, \dots, u_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} (\varphi_1 + u_n \Delta_{1n}) & \dots & \Delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial u_1} (\varphi_n + u_n \Delta_{nn}) & \dots & \Delta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что на поверхности $S (u_n = 0)$ якобиан равен $\Delta = \sum_{i=1}^n \Delta_{in}^2 (u_1, \dots, u_{n-1}, 0) > 0$

* Это означает, что в каждой точке поверхности отлично от нуля хоть одно Δ_{in} (см. ниже).

и преобразование (3) взаимнооднозначно в окрестности $\delta(S)$. Единичный вектор $n \left\{ n_l = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Delta_{ln}(u_1, \dots, u_{n-1}) \right\}$ нормален к поверхности S в точке u_1, \dots, u_{n-1} .

При достаточно малом $\epsilon > 0$ поверхности $S_{1\epsilon}(u_n = \epsilon)$ и $S_{2\epsilon}(u_n = -\epsilon)$ разделяют пространство на три области: V_ϵ , содержащую S , и $V_{1\epsilon}$, $V_{2\epsilon}$. Представляя интеграл в левой части (3) как сумму интегралов по областям V_ϵ , $V_{1\epsilon}$ и $V_{2\epsilon}$, после преобразования двух последних по формуле Грина [3] имеем

$$\int_{V_{1\epsilon} + V_{2\epsilon}} L\{f\} q(z) dV_z + \int_{V_\epsilon} N(z) dV_z + \int_{S_{1\epsilon}} G(u) dV_u - \int_{S_{2\epsilon}} G(u) dV_u = 0, \quad (4)$$

$$L\{f\} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t, z) + \operatorname{div} P,$$

$$G(u) = \sum_{l=1}^n \{P_l(u) \Delta_{ln}(u)\} q(u) + \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n B_{lj}(u) \frac{\Delta_{ln}(u)}{\Delta(u)} \Delta_{jk}(u) f(x, t, u) \frac{\partial q(u)}{\partial u_k}; \quad (5)$$

$$P(u) = \{P_l(u)\}, \quad P_l(u) = A_l(u) f(x, t, u) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial(B_{lj} f)}{\partial z_j}(u).$$

Равенство (4) справедливо при всех достаточно малых $\epsilon > 0$ и произвольных функциях $q(z)$, удовлетворяющих условиям A . В частности, при всех $q(z)$, тождественно равных нулю вне $V_{1\epsilon}$, получаем: $\int_{V_{1\epsilon}} q(z) L\{f\} dV_z = 0$. Тогда в области $V_{1\epsilon}$ $L\{f\} = 0$ по лемме Лагранжа из вариационного исчисления, следовательно, плотность вероятности перехода удовлетворяет в области $V_{1\epsilon}$ уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t, y) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} [A_i(y) f(x, t, y)] = \frac{1}{2} \sum_{l, j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_l \partial y_j} [B_{lj}(y) f(x, t, y)]. \quad (6)$$

Таким же рассуждением получаем аналогичный результат для области $V_{2\epsilon}$.

Так как (6) справедливо в областях $V_{1\epsilon}$ и $V_{2\epsilon}$ при всех достаточно малых $\epsilon > 0$, а подынтегральное выражение во втором интеграле равенства (5) ограничено после перехода к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\int_S [G(u)] dV_u = 0, \quad (7)$$

где через $[F]$ обозначена величина разности $F(u_1, \dots, u_{n-1}, +0) - F(u_1, \dots, u_{n-1}, -0)$ односторонних пределов F на поверхности S . Дополнительные преобразования приводят к равенству

$$\begin{aligned} \int_S \left\{ \sum_{l=1}^n \Delta_{ln}(u) [P_l(u)] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial u_k} \left[\Delta_{jk}(u) B_{lj}(u) \frac{\Delta_{ln}(u)}{\Delta(u)} f(x, t, u) \right] \right\} q(u) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{l, j=1}^n \left[f(x, t, u) B_{lj}(u) \frac{\Delta_{ln}(u) \Delta_{jn}(u)}{\Delta(u)} \right] \frac{\partial q(u)}{\partial u_n} dV_u = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Применяя упомянутую лемму Лагранжа для произвольных функций $q(u)$, удовлетворяющих условиям A и имеющих на поверхности S равную нулю производную $\frac{\partial q}{\partial u_n}$, получаем

$$\sum_{l=1}^n \frac{\Delta_{ln}(u)}{\sqrt{\Delta(u)}} [P_l(u)] - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\Delta(u)}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial u_k} \left[\Delta_{jk}(u) B_{lj}(u) \frac{\Delta_{ln}(u)}{\Delta(u)} f(x, t, u) \right] = 0. \quad (9)$$

Учитывая (9) и еще раз используя лемму Лагранжа, имеем из (7)

$$\left[\sum_{l, j=1}^n B_{lj}(u) f(x, t, u) \frac{\Delta_{ln}(u) \Delta_{jn}(u)}{\Delta(u)} \right] = 0. \quad (10)$$

Равенства (9) и (10) являются искомыми условиями сопряжения.

Скаляр $\sum_{l, j=1}^n B_{lj} \frac{\Delta_{ln} \Delta_{jn}}{\Delta}$ в (10) представляет собой коэффициент диффузии $B_n(u)$

по нормали к поверхности S ; поэтому условие (10) есть

$$[B_n(u) f(x, t, u)] = 0. \quad (11)$$

Первое слагаемое в (9) есть проекция потока плотности вероятности перехода на нормаль к поверхности S , а второе формально является дивергенцией $(n-1)$ -мерного векторного поля Q с компонентами

$$\sum_{l, j=1}^n \Delta_{jk}(u) B_{lj}(u) \frac{\Delta_{ln}(u)}{\Delta(u)} f(x, t, u) \quad (k = 1, \dots, n-1).$$

В заключение выражаю искреннюю благодарность Ю. И. Неймарку, под руководством которого выполнена работа

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Тай, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 341 (1965).
2. А. Колмогоров, Mathematische Annalen, 108, 149 (1933).
3. J. L. Synge, A. Schild, Tensor calculus, Toronto, 1949.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 августа 1964 г.

УДК 621.396.677.75

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА СИСТЕМ С ҚАЗИПОВЕРХНОСТНЫМИ ВОЛНАМИ

Д. М. Браво-Животовский

В настоящей работе рассматривается один из приближенных методов расчета модулированных систем замедления, применимый в тех случаях, когда выделение быстрой гармоники из поля поверхностной волны осуществляется с помощью небольших сосредоточенных неоднородностей, расположенных периодически в поле поверхностной волны, и основанный на возможности сведения излучающей системы к цепочки однотипных четырехполюсников. Этот метод аналогичен известным методам расчета волноводных фильтров [1].

Пусть неоднородные вкрапления, расположенные на расстоянии l друг от друга, размещены над направляющей поверхностью, канализирующей поверхностную волну с постоянной распространения h . Тогда эту систему можно представить в виде цепочки четырехполюсников, каждый из которых состоит из отрезка регулярной линии передачи длиной l и отдельной неоднородности. Для упрощения дальнейших расчетов представим неоднородность в виде последовательного сопротивления (рис. 1). Рас-

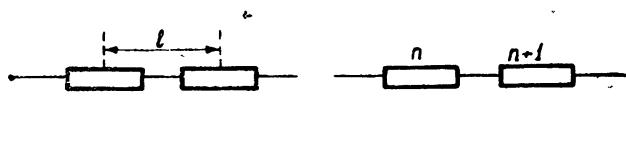


Рис. 1.

смотрим участок нерегулярной линии вблизи n -ой неоднородности. К нему примыкают n -ый и $(n+1)$ -ый регулярные отрезки линии. Если амплитуды волн, распространяющихся на этих участках в прямом и обратном направлениях, обозначить соответственно $E_n^{(+)}$; $E_n^{(-)}$; $E_{n+1}^{(+)}$ и $E_{n+1}^{(-)}$, а через R и T обозначить соответственно коэффициенты отражения и прохождения для отдельной неоднородности, то (см., например, [1]) получим разностное уравнение для полей в нерегулярной линии в виде*

$$E_{n-1}^{(+)} + E_{n+1}^{(+)} = \frac{1 + T^2 e^{2ihl} - R^2 e^{-2ihl}}{T e^{ihl}} E_n^{(+)}. \quad (1)$$

Будем искать решение уравнения (1) в виде $E_n^{(+)} = E_0 e^{\Gamma n}$; тогда постоянную распространения Γ вдоль такой линии можно определить из уравнения**

$$\operatorname{ch} \Gamma = \frac{1 + T^2 e^{2ihl} - R^2 e^{-2ihl}}{2 T e^{ihl}}. \quad (2)$$

Таким образом, определение постоянной распространения с помощью (2) сводится фактически к отысканию параметров неоднородности R , T . В общем случае нахождение этих характеристик связано с большими трудностями; однако для ряда антенных приложений (когда можно ограничиться случаем малых размеров неоднородностей) параметры неоднородности сравнительно просто могут быть определены с помощью метода возмущений***. Кроме того, трудности при определении R и T могут быть связаны и с учетом взаимного влияния неоднородностей друг на друга, но это перекрестное влияние практически мало уже начиная с расстояний между отдельными элементами $\sim \lambda/4$, в то время как для антенн наиболее характерен случай $\lambda/4 < l < \lambda/2$ (увеличение углочастотной чувствительности для сканирующих антенн, уменьшение потерь, улучшение согласования и т. д.)****.

Итак, в дальнейшем для простоты мы будем считать неоднородные элементы малыми и расположеннымными на таком расстоянии друг от друга, что их взаимное влияние можно не учитывать. Тогда коэффициенты отражения R и прохождения T для отдельной неоднородности, определяемые соответственно как отношение поля, переизлученного нерегулярностью влево от себя, к падающему полю и как отношение суммы прошедшего поля и поля, переизлученного нерегулярностью вправо от себя, к падающему полю, целесообразно записать в виде

$$R = -(a + ib); \quad T = (1 - a) - ib. \quad (3)$$

Здесь a и b — постоянные величины, определяемые для отдельной неоднородности либо из решения задачи о дифракции заданной поверхностью волны на этой неоднородности, либо измеренные на ней.

При сделанных выше предположениях ($a \ll 1$, $b \ll 1$) можно искать поправку к постоянной распространения в виде малой добавки к невозмущенному решению:

$$\Gamma = -ih + \alpha + i\beta, \quad (4)$$

где h — постоянная распространения в регулярной линии; α — характеризует затухание в линии из-за потерь на излучение, а β — поправку к фазовой скорости ($|\alpha| \ll h$, $|\beta| \ll h$). Подставляя в (2) выражения (3) и (4), удерживая в разложении члены, содержащие a или b только в первой степени, и проводя соответствующие преобразования, получим

* Особым является случай, когда $hl = 2\pi n$, что имеет место на частоте так называемых 2π -колебаний, т. е. когда антenna излучает по нормали к поверхности. Разностное уравнение (1) при таких значениях hl принимает вид $E_{n-1}^{(+)} + E_{n+1}^{(+)} = 2E_n^{(+)}$, Это уравнение имеет решение непериодического типа $E_n^{(+)} = E_0 \Gamma n + C_0$, аналогичное непериодическим решениям уравнения Матье на границах областей неустойчивости [2]. Постоянные величины E_0 и C_0 определяются из граничных условий на первой и последней неоднородностях.

** Для упрощения выкладок при выводе (2) учтено, что вход и выход согласованы с линией.

*** Заметим, что для достаточно протяженных антенн это довольно-таки важный случай, в то время как внесение крупных неоднородностей более специфично при расчете волноводных трактов.

**** При необходимости в каждом конкретном случае учет поправок в R и T из-за взаимного влияния соседних неоднородностей для близко расположенных неоднородностей может быть проведен в квазистатическом приближении, как это делается, например, при расчете сложных систем замедления [3].

$$\beta l = \frac{b}{1-2a}, \quad al = -\frac{a}{1-2a}. \quad (5)$$

Следовательно, рассматриваемая антenna представляет собой цепочку излучателей, записываемых волной $\exp(-i\Gamma_1 z - \Gamma_2 z)$ (где $\Gamma_1 = h - \beta$, $\Gamma_2 = a$). При расположении отдельных излучателей на расстояниях $l \ll \lambda_0/2$ (λ_0 — длина волны в свободном пространстве) друг от друга диаграмма направленности антенны будет иметь один основной лепесток, направленный под углом Θ_{\max} к плоскости антенны. Этот угол можно определить из выражения

$$\cos \Theta_{\max} = \frac{\lambda_0}{\lambda_c} - n \frac{\lambda_0}{l}, \quad (6)$$

где $\lambda_c = 2\pi(h - \beta)^{-1}$ — длина волны в системе, n — число целых длин волны λ_c , укладывающихся в l . Амплитуды токов, возбуждаемых в излучателях, уменьшаются к концу антенны пропорционально $e^{-\Gamma_2 z}$.

В качестве примеров, иллюстрирующих применение рассмотренного выше метода для расчета антенн с квазиверхностными волнами, рассмотрим замедляющую систему с TE и TM-волнами, над которой расположены цепочки из маленьких горизон-

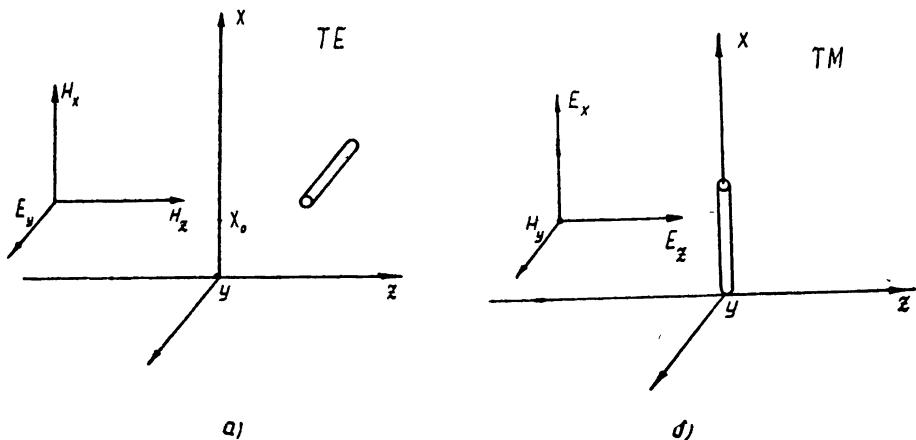


Рис. 2.

тальных металлических стержней (рис. 2а) и небольших вертикальных металлических стержней, размещенных на расстояниях l друг от друга (рис. 2б). Тогда задача об отыскании коэффициентов R и T для отдельной неоднородности сводится к задачам о дифракции TE-волны на горизонтальном стержне и дифракции TM-волны на вертикальном стержне.

Если на горизонтальный металлический стержень, расположенный в точке x_0 над направляющей плоскостью, падает поверхностная TE-волнна с компонентой $E_1 = E_0 \sqrt{2} k_x \exp[-k_x x - ihz]$ ($k_x = \sqrt{h^2 - k^2}$), то, определив значения полей, дифрагированных на отдельной нерегулярности при малых радиусах стержня ($kd/2 \ll 1$ и $D \ll \lambda$; см., например, [3, 4]), нетрудно получить выражения для a и b в (3) в виде

$$a_{\text{TE}} = \frac{2k_x}{h} e^{-k_x x_0} \left[1 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2 \frac{\gamma}{2} \frac{kd}{2} \right]^{-1};$$

$$b_{\text{TE}} = \frac{2k_x}{h} e^{-k_x x_0} \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma}{2} \frac{kd}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2 \frac{\gamma}{2} \frac{kd}{2} \right]^{-1}. \quad (7)$$

Для случая падения TM-волны на вертикальный стержень получим

$$a_{\text{TM}} = 2 \frac{h}{k} \frac{e^{-k_x D}}{kd} \left[1 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2 \frac{\gamma}{2} \frac{kd}{2} \right]^{-1}; \quad (8)$$

$$b_{\text{TM}} = 2 \frac{k_x}{k} \frac{e^{-k_x D}}{kd} \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma}{2} \frac{kd}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2 \frac{\gamma}{2} \frac{kd}{2} \right]^{-1}.$$

После подстановки (7) или (8) в выражения (5) получаем поправки к постоянной распространения в нерегулярной линии. Из уравнения энергетического баланса ($|R|^2 + |T|^2 < 1$) следует, что

$$e^{k_x x_0} > k_x/k, \quad k D e^{k_x D} > h/k, \quad (9)$$

причем, если первое неравенство в (9) выполняется при любых x_0 и k_x , то второе требуется, чтобы замедление в системе было не очень большим.

В заключение отметим возможность формирования с помощью подобных антенн диаграмм с круговой поляризацией поля излучения. Для этого необходимо использовать систему замедления, вдоль которой ТЕ- и ТМ-волны могут распространяться с одинаковой фазовой скоростью [6]. Тогда, возбудив в системе эти волны с фазовым сдвигом $\sim \pi/2$ и расположив над ней цепочку крестообразных металлических излучателей таким образом, чтобы горизонтальный стержень излучателя был расположен в точке

$$x_0 = D - \frac{1}{k_x(k_x D)} \ln \frac{h^2}{k^2}, \quad (10)$$

можно получить из (7) и (8) равенство $R_{\text{TE}} = R_{\text{TM}}$ и $T_{\text{TE}} = T_{\text{TM}}$ для обоих типов волн.

Поскольку соотношение осей эллипса поляризации поля излучения определяется в основном разницей в направлениях главных лепестков для ТЕ- и ТМ-волн (разницей фазовых скоростей), то при фиксированной длине антенны L допустимое расхождение параметров возмущающих объектов для обоих типов волн можно сформулировать в виде

$$\left| \frac{b_{\text{TE}}}{1 - 2a_{\text{TE}}} \mp \frac{b_{\text{TM}}}{1 - 2a_{\text{TM}}} \right| \leq \frac{2\pi}{L}, \quad (11)$$

где верхний знак относится к случаю, когда реактивности объектов для ТЕ- и ТМ-волн одного знака, а нижний—когда разных знаков. Предельное значение неравенства (11) соответствует случаю, когда направления основных лепестков отличаются на полуширину диаграммы направленности.

Автор благодарит М. А. Миллера за замечания, сделанные при просмотре рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах. ИЛ, М., 1959.
- Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, I, ИЛ, М., 1958.
- А. И. Потехин, Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1948.
- Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
- А. М. Белянцев, Кандидатская диссертация, Горький, НИРФИ, 1963.
- R. E. Plumbe, R. C. Hansen, Proc. IEE, **104**, 465 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 октября 1964 г

УДК 621.372.061.1

ОБ ОСУЩЕСТВИМОСТИ ЗАДАННОГО ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

M. З. Литвин-Седой

1. Рассматривается задача о построении автоколебательных систем, описываемых системами дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\dot{X} = Y, \quad \dot{Y} = \Phi(X, Y),$$

в которых вид первого уравнения предписан заранее, например, характером кинематической связи. Заменой переменных $\tau = \omega t$, $x = X/\zeta$ (где размерность ω есть $[1/t]$, а размерность ζ есть $[X]$, $\zeta = \text{const} > 0$, $\omega = \text{const} > 0$) система приводится к виду

$$dx/d\tau = Y/(\omega \zeta) = y;$$

$$dy/d\tau = (1/\zeta \omega^2) \Phi (\zeta x, \zeta y) = f(x, y).$$

Требуется построить функцию f так, чтобы система была определена всюду, кроме, быть может, узкой области D около начала координат, и имела единственный предельный цикл C , охватывающий начало координат и описываемый в полярных координатах r и θ уравнением

$$r \equiv r(\theta) = r_0 + s(\theta), \quad s = \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\theta), \quad r_0 = \text{const} > 0,$$

причем постоянные a_k таковы, что $r(\theta) \geq r_*$, $r_* = \text{const} > 0$. Примем, что

$$r_0 > \sum_{k=1}^n |a_k| = s^* \quad (1)$$

и обозначим $r^* = \max r(\theta)$; $r_* < r^* < r_0 + s^*$. Цикл C должен быть асимптотически устойчивым. На рис. 1 $r_0 = 10$, $n = 2$; $a_1 = 1,2$; $a_2 = 0,5$; $s^* = 1,7$.

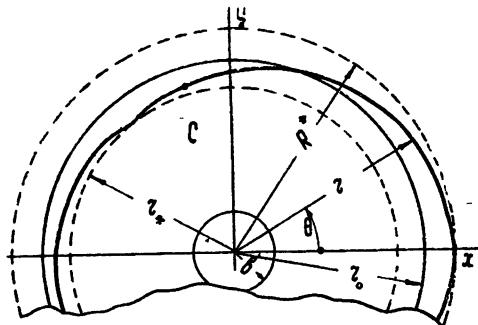


Рис. 1.

Вводя полярный радиус R изображающей точки в переходном движении и отклонение $\rho = R - r$ и переходя известным образом [1] от переменных x и y к переменным R и θ , выпишем дифференциальные уравнения системы в переходном движении:

$$dv/d\tau = G, \quad (2)$$

$$v = \rho^2; \quad G = \frac{2\rho}{R} \{ [R \sin \theta - s'(\theta) \cos \theta] f + R [R \cos \theta + s'(\theta) \sin \theta] \sin \theta \},$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{f}{R} \cos \theta - \sin^2 \theta. \quad (3)$$

2. Введем неотрицательную функцию $F(\rho, \theta)$, всюду непрерывную по обеим переменным. Следуя приему построения управляющих функций колебательных систем, изложенному ранее [2], определим функцию F из условия

$$G = -2vF \sin^2 \theta. \quad (4)$$

Очевидно, что $G \leq 0$. В силу равенств (1), (2), (4) и $s'(\theta) = \sigma(\theta) \sin \theta$ (σ — целая функция от синусов и косинусов угла θ [3]), получим

$$f = -\frac{R}{V} \{ R \cos \theta + [s'(\theta) + \rho F] \sin \theta \}, \quad (5)$$

где

$$V = R - \sigma(\theta) \cos \theta = \rho + r_0 + 2a_1 \cos \theta + a_2 (6 \cos^2 \theta - 1) + a_3 \times \\ \times [\cos 3\theta + 3(4 \cos^2 \theta - 1) \cos \theta] + \dots$$

Пусть $\rho_0 = \rho(0) < 0$. Зададим область D в виде круга радиуса $b < r_*$ с центром в начале координат. Тогда $0 > \rho_0 \geq -(r^* - b)$ и $0 \geq \rho \geq \rho_0$. Оценим функцию V , заменив отклонение его наименьшим возможным значением $-(r_0 + s^* - b)$:

$$V \geq r_0 - (r_0 + s^* - b) + 2a_1 \cos \theta + \dots \geq b - \sum_{k=1}^n |a_k| - 2|a_1| - 5|a_2| - \\ - 10|a_3| - 17|a_4| - \dots$$

Применяя способ индукции, найдем, что в кольцевой области $(r - b) < \rho < 0$, за- ведомо будет $V > 0$ при

$$\sum_{k=1}^n a_k |a_k| < b; \\ a_{k+1} = a_k + 2k + 1; \quad a_1 = 3. \quad (6)$$

Условие (6) сильнее неравенства (1). Легко показать, что условия (6) достаточно для соблюдения неравенства $V > 0$ и при $\rho_0 \geq 0$.

Подобным же рассуждением убедимся, что неравенство

$$0 < F < F^*, \quad (7)$$

где

$$F^* < \min [c(b), d(|\rho_0|)], \quad F^* = \text{const},$$

$$c = 2 \frac{b - 2s^*}{r^* - b} > 0, \quad d = 2 \frac{r_0 - s^*}{|\rho_0|} > 0,$$

влечет за собой неравенство $d\theta/dt < 0$, соблюдающееся во все время движения.

3. Исследуем переходное движение при выполнении условий (4), (6) и (7). В силу уравнений (2) и (3) и соотношения (4)

$$\sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{vW} (R + \rho F \sin \theta \cos \theta) dv,$$

$$W = 2FV, \quad 0 < W \leq W_*, \quad W_* = \text{const}.$$

Следовательно,

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} (\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta) + I_1 + I_2,$$

где

$$\theta_0 = \theta(0),$$

$$I_1 = \int_{v_0}^v \frac{Rdv}{vW}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{F \sin 2\theta}{\rho W} d\rho,$$

причем

$$|I_1| \leq \frac{|R_0|}{W_*} \ln \frac{v}{v_0} = A(\tau), \quad |I_2| \leq \frac{F^*}{2W_*} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = B(\tau).$$

Таким образом, справедлива оценка

$$|\theta(\tau)| \leq |\theta_0| + 1 + A(\tau) + B(\tau).$$

В силу уравнения (3) и соотношения (4)

$$\tau = \frac{1}{2} \int_v^{v_0} \frac{dv}{vF \sin^2 \theta} \geq \frac{1}{2F^*} \ln \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2;$$

тождество $\rho \equiv 0$ достигается только при $\tau = \infty$, т. е. предельный цикл C асимптотически устойчив при всех начальных положениях изображающей точки вне области D .

4. На основании изложенного искомый вид управляющей функции определяется соотношением (5):

$$f = g + h,$$

где

$$g = -\frac{R}{V} [R \cos \theta + s'(\theta) \sin \theta] = -\frac{Rx + ys'(\theta)}{V}$$

— восстанавливающая сила ($R = \sqrt{x^2 + y^2}$),

$$h = -\frac{F}{V} \rho R \sin \theta = -\frac{F}{V} \rho r$$

— сила трения. На предельном цикле C всегда $\rho = 0$ и $h = 0$.

5. В исходных переменных амплитуда автоколебания

$$Z = \zeta(r_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

В силу условия (1) $Z > 0$. В качестве примера отметим, что когда все $a_k = 0$, колебание—гармоническое, с частотой ω и амплитудой $Z = \zeta r_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. М. З. Литвин-Седой, Введение в механику управляемого полета, изд. Высшая школа, М., 1962.
3. С. И. Новоселов, Специальный курс тригонометрии, изд. Сов. наука, М., 1957.

Научно-исследовательский институт механики
Московского университета

Поступила в редакцию
26 августа 1964 г.

УДК 681.142.65

ПОСТОЯННОЕ ЗАПОМИНАЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО, СОВМЕЩЕННОЕ С УСТРОЙСТВОМ ОПЕРАТИВНОЙ ПАМЯТИ

Н. С. Анишин

В соответствии с двумя основными типами магнитных постоянных запоминающих устройств (ПЗУ) [1] возможны две схемы совмещения устройств оперативной (ОЗУ) и постоянной памяти. Рассмотренное в [2] совмещенное ЗУ использовало ПЗУ с одним сердечником на число. Заслуживает внимания способ совмещения ОЗУ и ПЗУ с одним сердечником на разряд по схеме, приведенной на рис. 1

Основу ПЗУ составляет q разрядных оксидеровых сердечников, имеющих по одной выходной обмотке считывания. Кроме того, имеется m опросных обмоток, причем каждая проходит через сердечники по-разному (либо внутрь, либо мимо сердечника), что зависит от прошиваемого числа. Каждая опросная обмотка включена в числовую линейку одного из m адресов ОЗУ и имеет с ним одинаковый номер адреса ПЗУ. При обращении к совмещенному таким образом ЗУ по каждому адресу можно считывать одно из двух чисел—оперативное или постоянное.

При чтении оперативной информации сердечники ПЗУ удерживаются от перемагничивания токами $I_{\text{чт}}$ и $I_{\text{зп1}}$ с помощью специальной накоротко замкнутой обмотки (на каждый разряд слова или общая для всех разрядов). Закорачивание обмотки производится диодным ключом путем подачи тока I_p . Поэтому в обмотках считывания ПЗУ, которые включены последовательно с одноименными обмотками считывания ОЗУ, сигналы не возникают, и к усилителям считывания будут подведены сигналы лишь от ОЗУ.

При обращении к ПЗУ ток I_b выключается: специальная обмотка w_b размыкается, и сигналы от ПЗУ подводятся к усилителям считывания. Чтобы при чтении постоянной информации не происходило чтения (или разрушения) оперативной, необходимо в числовую линейку посыпал токи, недостаточные для чтения и, тем более, разрушения состояний сердечников числовой линейки. В описываемой схеме в качестве такого тока используется адресный полуток записи $I_{\text{зп1}}$. Таким образом, чтение постоянной информации производится тактом записи по данному адресу в ОЗУ числа, имеющего во всех разрядах нули. Это для ОЗУ типа « z » без компенсационных сер-

дечников фактически означает сохранение старого числа, если ток чтения $I_{\text{чт}}$ перед записью нулевого числа не посыпается. Если же используется постоянное смещение числовых сердечников ОЗУ, то при записи «0» не посыпаются и разрядные полуутоки записи $I_{\text{зап}}$.

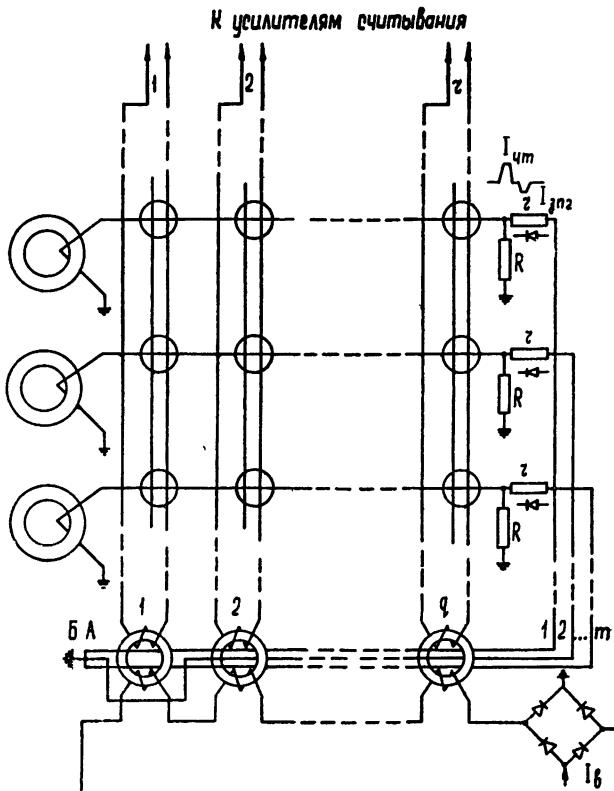


Рис. 1.

Схема (см. рис. 1) может быть изменена и приспособлена для получения ПЗУ, емкость которого больше, чем емкость ОЗУ. В этом случае сопротивления r заменяются диодами, включенными в направлении тока $I_{\text{зап}}$. Ограничительное сопротивление, равное r , включается между точками «А» и «Б». В точку «Б» подается либо нулевой потенциал, если данный набор прошивывающих проводов избран, либо отрицательный, если он не выбран, а также, если обращение производится к ОЗУ. Таким образом, потенциальный дешифратор на несколько выходов позволяет реализовать ПЗУ с большой емкостью. Диод в цепи опроса не допускает считывание постоянной информации при чтении оперативной, ибо ток $I_{\text{чт}}$ через опросную обмотку не идет. Необходимость в специальной накоротко замкнутой обмотке исчезает.

В схеме эксперимента использовались ОЗУ от электронно-вычислительной машины «Раздан-2», сопротивления $R = 8 \text{ ом}$ и $r = 180 \text{ ом}$ соответственно, обмотки опроса одновитковые, обмотки считывания $w_{\text{сч}} = 20 \text{ в}$, оксиферы ($\mu = 2000$) размером $7 \times 4 \times 2$, диоды Д9А \div Д9Ж.

Совмещение ОЗУ и ПЗУ позволило часть информации типа констант и программ из ОЗУ перенести в ПЗУ за счет использования того же управляющего оборудования. Разработанное автором совмещенное ЗУ использовано в управляющей вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. П. Краймер, Быстродействующие ферромагнитные запоминающие устройства, Энергия, М.-Л., 1964.
- Н. С. Анишин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1258 (1963).

Государственный Всесоюзный центральный научно-исследовательский институт комплексной автоматизации

Поступила в редакцию
12 октября 1964 г.