

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
454	7 снизу	$\beta_{0\sigma} = \dots \frac{\dots [1-R(\varphi, \psi) \dots d\varphi d\psi]}{\dots}$	$\beta_{0\sigma} = \dots \frac{\dots [1-R(\varphi, \psi)] \dots d\varphi d\psi}{\dots}$
469	1 снизу	$\text{rot } H^{(n)} = \dots \sum_q \dots$	$\text{rot } H^{(n)} = \dots \sum_q e_q \dots$
474	2 сверху	$\dots + \dots + m_l u^2 / m_e v_{Te}^2 \}^{-2} \dots$	$\dots + \dots + m_l u^2 / m_e v_{Te}^2 \}^{2} \}^{-1} \dots$
475	11 сверху	$\dots + \frac{k'_e v_j}{\omega_{k'} - k\bar{v}} \dots + \frac{k''_e v_\beta}{\omega_{k''} - k\bar{v}} \frac{\partial f_q}{\partial v_e} \}$	$\dots + \frac{k'_l v_j}{\omega_{k'} - k\bar{v}} \dots + \frac{k''_l v_\beta}{\omega_{k''} - k\bar{v}} \frac{\partial f_q}{\partial v_e} \}$
523	16 сверху	$\psi_k^-(r) \simeq \dots \frac{e^{ikr}}{r}$	$\psi_k^-(r) \simeq \dots \frac{e^{-ikr}}{r}$
526	6 снизу	$\dots \psi_d \simeq \zeta(n') \exp(ik_d r/r) \dots$	$\dots \psi_d \simeq \zeta(n') \exp(ik_d r)/r \dots$
542	3 сверху	$\text{где } H_n^{(2)'}(ka) \text{ и } H_n^{(2)}(ka) \dots$	$\text{где } H_n^{(2)}(ka) \text{ и } H_n^{(2)'}(ka)$
562	6 сверху	$\frac{d}{dt} [mr] = \dots$	$\frac{d}{dt} [mr] = \dots$
571	12 снизу	$\dots w_1(\varphi'_N); \dots$	$\dots w_1(\varphi'_{1N}); \dots$
597	2 снизу	$\dots \alpha/\delta < \dots (1+qe^{-\alpha/\delta \ln p}) \dots$	$\dots \alpha/\delta < \dots (1+qe^{-(\alpha/\delta) \ln p}) \dots$
618	6 снизу	$\dots x_{2s_2} = \dots$	$\dots x_{2s_2}(s_1) = \dots$
620	20 сверху	$a_{ij}^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$	$a_{ij}^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} a_{1j} \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix}$
		Замеченные опечатки в журнале № 6 за 1964 г.	
	14 снизу	$n_p^r = \dots$	$n_p^2 = \dots$
1197	4 снизу	$n^2 = \frac{16 \pi^2}{\cos^2 \alpha} \frac{e^2 N^2 c^2}{\omega^2 H^2}$	$n^2 = \frac{4\pi e N c}{\omega H \cos \alpha}$
	3 снизу	$\Theta = \Theta_0 [\dots]^{1/(r+l)}$	$\Theta = \Theta_0 [\dots]^{1/l}$

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Бондарь Л. Н., Кротиков В. Д., Станкевич К. С., Цейтлин Н. М.</b> Спектры некоторых остатков сверхновых в дециметровом диапазоне . . . . .	437
<b>Лотова Н. А.</b> О влиянии сверхкороны Солнца на «видимое положение и форму» просвечивающих радиоисточников . . . . .	441
<b>Тарасенко Ф. П.</b> Некоторые аспекты задачи определения истинного распределения радиояркости по небу . . . . .	446
<b>Кротиков В. Д.</b> Учет усредняющего действия диаграммы направленности антенны при измерениях радиоизлучения Луны . . . . .	453
<b>Горбунов Л. М., Пустовалов В. В., Силин В. П.</b> О рассеянии электромагнитных волн в плазме . . . . .	461
<b>Данелия И. А., Цинцадзе Н. Л.</b> Трансформация электромагнитных волн в неравновесной плазме . . . . .	469
<b>Якименко И. П.</b> Тепловое излучение плазменного цилиндра . . . . .	476
<b>Скрыпник Г. И.</b> К теории рефракции в слоисто-неоднородной среде . . . . .	485
<b>Гуревич Г. Л., Хронопуло Ю. Г.</b> Некоторые вопросы теории двухфотонных процессов . . . . .	493
<b>Цареградский В. Б.</b> Взаимодействие молекулярного пучка с электромагнитным полем резонатора. II. Стационарные колебания молекулярного генератора с неоднородным, полем . . . . .	504
<b>Клышко Д. Н., Константинов Ю. С., Туманов В. С.</b> Параметрическое возбуждение двухуровневой системы при насыщении . . . . .	513
<b>Зельдович Б.</b> Излучение в открытых резонаторах . . . . .	522
<b>Марков Г. Т., Петров Е. М.</b> Возбуждение полосы импеданса на полуплоскости	531
<b>Наймушин М. П.</b> Возбуждение цилиндра с переменным поверхностным импедансом	540
<b>Гордон Н. И.</b> Распространение и возбуждение поверхностных волн на границе раздела магнетик—вакуум . . . . .	547
<b>Третьякова С. С., Третьяков О. А., Шестопалов В. П.</b> Излучение электромагнитных волн электронным потоком, движущимся внутри кольцевого волновода	552
<b>Советов Н. М.</b> Приближенный расчет поперечных колебаний электронов в ЛБВ с учетом зависимости массы частиц от скорости . . . . .	561
<b>Ахманов С. А., Чиркин А. С.</b> О детектировании фазовых флуктуаций многомодовых генераторов в нелинейной среде . . . . .	569
<b>Нелепин Р. А.</b> Об исследовании точными методами систем с двумя нелинейными элементами . . . . .	579
<b>Кирьянов К. Г.</b> Об одной системе с самонастройкой . . . . .	589
<b>Брусин В. А.</b> Абсолютная устойчивость одного класса регулируемых систем	605
<b>Чубаров М. А.</b> О применении вычислительных машин для расчета транзistorных схем . . . . .	615
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Цытович В. Н.</b> О возможности статистического «ускорения» фотонов в турбулентной плазме . . . . .	622
<b>Гинзбург Э. И.</b> Влияние отрицательных ионов на диффузию заряженных частиц в нижней ионосфере . . . . .	626

Патарая А. Д. и Свимонишвили В. И. Тормозное излучение из плазмы . . . . .	628 .
Газазян Э. Д. и Мергелян О. С. Черенковское излучение заряженной частицы в круглом волноводе, заполненном гиротропным ферритом . . . . .	629 .
Агабекян А. С., Грасюк А. З., Ораевский А. Н. О спонтанном излучении частицы в резонаторе с несколькими связанными типами колебаний . . . . .	631 .
Брусин В. А. Достаточные условия абсолютной устойчивости следящей системы с люфтом при учете инерции объекта и гипотезе абсолютно неупругого удара	634
Шевченко В. Н. Задача оптимального календарного планирования с ограничением на число рабочих . . . . .	635

### Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. V, № 1, 1965 . . . . .

---

УДК 523.164.4

## СПЕКТРЫ НЕКОТОРЫХ ОСТАТКОВ СВЕРХНОВЫХ В ДЕЦИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ

*Л. Н. Бондарь, В. Д. Кротиков, К. С. Станкевич, Н. М. Цейтлин*

Исследовались спектры источников SN 1572, IC 443 и W 44 на волнах дециметрового диапазона. У источника SN 1572 обнаружено изменение спектрального индекса в диапазоне  $178 \pm 427$  Мгц

Интересной особенностью остатков сверхновых является возможное уменьшение потока радиоизлучения и связанное с этим изменение спектрального индекса [1,2]. Для молодых остатков сверхновых подобные эффекты доступны экспериментальной проверке, поскольку годичное изменение потока может быть порядка процента, как, например, для источника Кассиопея-А [3]. Источников, надежно отождествленных со сверхновыми, пока немного (около 10); однако в настоящее время высказываются предположения о том, что все источники с нетепловым спектром, концентрирующиеся к галактической плоскости, являются остатками сверхновых [5]. Представляется возможным, что отождествление некоторых из них (прежде всего источников с малыми угловыми размерами) удастся провести по признаку эволюции спектра.

Для выполнения этой программы необходимы точные данные о распределении энергии по спектрам дискретных источников этого типа. Однако, несмотря на имеющееся обилие экспериментальных данных о потоках, полученных на отдельных частотах, спектры большинства источников нуждаются в уточнении. Иллюстрацией к этому может служить сводная таблица потоков сверхновых IC 443, W 44, приведенная в [2].

В настоящей работе сообщаются результаты измерений потоков на частотах 960 Мгц, 740 Мгц и 513 Мгц остатков сверхновых 3C 10 (SN 1572), 3C 157 (IC 443) и 3C 392 (W 44), а также радиогалактик Дева-А и Лебедь-А, принятых в качестве эталонов для определения в дальнейшем векового изменения интенсивностей. Координаты источников были взяты из [6] и пересчитаны на эпоху 1964 г. Диаграммы направленности антennы хорошо аппроксимировались в  $E$ - и  $H$ -плоскостях гауссовыми кривыми; их ширина на уровне половинной мощности приведена в таблице 1.

Таблица 1

Частота (Мгц)	$\theta_E$	$\theta_H$
960	35'5	42",4
740	48',6	55"
513	66'	78'

В качестве приемника использовался диапазонный радиометр, имевший чувствительность порядка  $1^{\circ}\text{K}$  при постоянной времени 1 сек.

с весьма хорошей линейностью в рабочем участке динамического диапазона (возможная нелинейность меньше 0,5%).

Регистрация принимаемого сигнала в единичной записи продолжалась две-три минуты, в течение которых велось сопровождение источника. Нулевая линия отсчета фиксировалась при отведении антенны по азимуту вправо и влево от источника на углы порядка 1,5 ширины диаграммы. Калибровка принятых потоков осуществлялась путем сравнения их с потоками от дискретного источника Кассиопея-А, проэталонированного в этом диапазоне по методу искусственной Луны [7]. Чтобы избежать ошибок, связанных с уходом усиления аппаратуры, калибровка повторялась через  $30 \pm 40$  минут в начале и конце цикла, включавшего несколько записей исследуемого источника. Измерения проводились в ночное время.

Полученные величины потоков исправлялись за поглощение радиоволн в атмосфере. На частотах, указанных выше, поглощение в направлении зенита составляет 0,055 дБ [8]. Связанная с этим поправка в отдельных случаях достигала 3%. Следует отметить, что все известные зарубежные результаты в дециметровом диапазоне никогда не исправляются за поглощение в атмосфере, что может являться источником существенных ошибок при оценке величин потоков.

Результаты измерений приведены в таблице 2. Величина  $\frac{T_i}{T_k}$  в таб-

лице есть отношение антенных температур от исследуемого источника и Кассиопеи,  $\sigma$  — случайная величина этого отношения, обусловленная аппаратурными флуктуациями. Поправка на протяженность источника делалась на основании данных, приведенных в работах [5, 9]. Угловые размеры во втором столбце таблицы представляют ширину источника на уровне половинной интенсивности (в предположении о круговой симметрии источника и гауссовом распределении радиояркости). Для источника Дева-А отношение потоков в протяженной части и в выбросе принималось равным 0,66, т. е. таким же, как на 1420 Мгц [9].

Поскольку диаграммы хорошо аппроксимировались гауссовыми кривыми, то для принятых выше распределений яркости интеграл по диаграмме легко вычисляется и поправка на протяженность источника определяется выражением

$$g = \sqrt{1 + \left(\frac{\Theta_i}{\Theta_H}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Theta_i}{\Theta_E}\right)^2}.$$

392

При обработке наблюдений источника ЗС 932 с помощью изофот [10] была введена поправка на неоднородность непрерывного космического излучения в районе источника. В таблице приведено исправленное отношение  $T_i/T_k$  на  $-7\%$  для частоты 513 Мгц,  $-4\%$  для 740 Мгц и  $-2,5\%$  для 960 Мгц.

По приведенным величинам потоков вычислены спектральные индексы источников, которые приведены в предпоследнем столбце. В длинноволновом диапазоне наиболее точные измерения потоков исследуемых источников выполнены на частоте 178 Мгц [5]. Используя их, можно найти спектральные характеристики в диапазоне  $178 \pm 513$  Мгц. Сравнение их показывает, что для протяженных источников ЗС 392 и ЗС 157 спектральный индекс в метровом и дециметровом диапазонах одинаков (величины их приведены в последнем столбце таблицы). Это свидетельствует об отсутствии заметного вклада теплового излучения ионизированного газа внутри оболочки сверхновой.

Следует отметить некоторые особенности полученного спектра сверхновой 1572 года (3C 10). В указанном выше диапазоне спектральный индекс источника равен  $\alpha = 0,68$ . Такая же величина спектрального индекса получена в работе [11]. Однако величины потоков, приведенные в таблице 2, примерно на 10% больше указанных в [11]. Расхождение результатов на такую величину значительно превышает погрешности измерений.

В [11] в качестве эталонного источника использовалась Дева-А, которая в часы измерений имела значительно большую высоту, чем 3C 10 и, следовательно, результаты [11] нужно исправлять на поглощение радиоволн в атмосфере. Учет последнего обстоятельства уменьшает расхождение до 7%. Для уточнения поведения спектра с этой же антенной были произведены дополнительные измерения на длине волн  $\lambda = 70 \text{ см}$  с радиометром, имевшим чувствительность  $0,2^{\circ}\text{K}$  при  $\tau = 1 \text{ сек}$ . На этой длине волн поток равен  $S_{\nu} \text{ при } \nu = 10^{24} \text{ Гц} = 1,1 \cdot 10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$  ( $\pm 6\%$ ), что хорошо согласуется с результатами в таблице 2.

Таблица 2.

Источник	3C 10	3C 157	3C 392	Дева-А	Лебедь-А	Кассиопея-А
Угловые размеры $\theta_H$	6' [9]	29' $\pm$ 5" [6]	16' $\pm$ 3" [5]	Протяженный источник 10' выброс 40" [1]	2" $\times$ 38"	4'
Частота 513 Мгц						
$T_{\text{и}} / T_{\text{K}}$ $\sigma (\%)$	0,0183 $\pm 1,3$	0,0333 $\pm 0,7$	0,0526 $\pm 2,5$	0,0918 $\pm 0,5$	0,784* $\pm 0,7*$	—
Поправка на поглощение (%)	-1,5	-1,5	0	-3	-1*	—
Поправка на протяженность источника	—	1,57 $\pm$ 0,19	1,17 $\pm$ 0,07	—	0	—
Поток $S_{\nu} \cdot 10^{26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$	95	205	297	470	3800*	5250
Погрешность (%)	3	13	10	3	3	2
Частота 740 Мгц						
$T_{\text{и}} / T_{\text{K}}$ $\sigma (\%)$	0,0192 $\pm 2$	0,0325 $\pm 1,2$	0,0572 $\pm 2$	0,0882 $\pm 0,6$	0,740 $\pm 1$	—
Поправка на поглощение (%)	0	-2,5	0	-3	-1	—
Поправка на протяженность источника	1,015	1,32 $\pm$ 0,11	1,11 $\pm$ 0,03	1,016	0	—
Поток $S_{\nu} \cdot 10^{26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$	76	164	249	340	2900	3890
Погрешность (%)	3	9	6	3	3	2
Частота 960 Мгц						
$T_{\text{и}} / T_{\text{K}}$ $\sigma (\%)$	0,0192 $\pm 5$	0,0332 $\pm 1,7$	0,062 $\pm 5$	0,0880 $\pm 1$	0,721 $\pm 1,2$	—
Поправка на поглощение (%)	-1,5	-2,5	0	-3	-2	—
Поправка на протяженность источника	1,025	1,17 $\pm$ 0,06	1,05 $\pm$ 0,02	1,025	0	—
Поток $S_{\nu} \cdot 10^{26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$	62	165	230	277	2230	3160
Погрешность (%)	6	6	6,5	3	3	2
Спектральный индекс	0,68 $\pm$ 0,14	0,33 $\pm$ 0,3	0,40 $\pm$ 0,15	0,84 $\pm$ 0,1	0,97 $\pm$ 0,13	0,8
Спектральный индекс в диапазоне 178+513 Мгц	0,23	0,2 $\pm$ 0,03	0,33 $\pm$ 0,06	—	—	—

\* Частота 556 Мгц  $S_{\nu} = 4,9 \cdot 10^{-23} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ .

В диапазоне от 427 до 178  $M\mu$  спектральный индекс источника равен  $\alpha = 0,23$ . Отсюда следует, что распределение энергии по спектру в источнике ЗС 10 не может быть охарактеризовано одним спектральным индексом.

Для проверки этого обстоятельства на частоте 178  $M\mu$  были произведены измерения потоков источника ЗС 10 и (для сравнения) Девы-А, которые соответственно равны  $S_{\text{ЗС-10}} = 1,15 \cdot 10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$  ( $\pm 30\%$ ) и  $S_{\text{Дева-А}} = 10^{-23} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$  ( $\pm 10\%$ ). Эти результаты совпали в пределах погрешности измерений с данными [1], и из них следует, что спектральный индекс ЗС 10 не может быть больше  $\alpha = 0,23$  в интервале 427  $\div$  178  $M\mu$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Шкловский, Астрон. ж., 37, 256 (1960).
2. Ю. П. Псковский, Астрон. ж., 40, 23 (1963).
3. J. Högbom, J. Shakenhaft, Nature, 189, 561 (1961).
4. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Астрон. ж., 41, 769 (1964).
5. A. S. Bennett, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 127, 3 (1963).
6. D. Harris, J. Roberts, Publ. ASP, 72, 237 (1960).
7. В. П. Ласточкин, В. А. Порфириев, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Н. Н. Холодилов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 629 (1963).
8. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1098 (1963).
9. F. Birard, J. Lequeux, E. Le Roux, Observatory, 80, 116 (1960).
10. R. W. Wilson, J. C. Bolton, Publ. ASP, 72, 331 (1960).
11. R. G. Conway, K. I. Kellermann, R. J. Long, MN, 125, 260 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 августа 1964 г.

## SPECTRA OF SOME REMNANTS OF SUPERNOVAE IN DECIMETER BAND

*L. N. Bondar', V. D. Krotikov, K. S. Stankevich, N. M. Tseytlin*

The spectra of sources SN 1572, IC 443 and W 44 have been investigated at waves of decimeter band. The source SN 1572 has been discovered to have the change of spectral index in band 178  $\div$  427 Mc/s.

УДК 523.75

## О ВЛИЯНИИ СВЕРХКОРОНЫ СОЛНЦА НА ВИДИМОЕ ПОЛОЖЕНИЕ И ФОРМУ ПРОСВЕЧИВАЮЩИХ РАДИОИСТОЧНИКОВ

*H. A. Лотова*

Рассматривается совместное влияние рассеяния и рефракции радиоволн в двухкомпонентной модели солнечной короны на наблюдаемое положение дискретного источника при его затмении сверхкороной. Приводятся оценки искажения формы источника на угловых расстояниях от центра Солнца порядка  $(3 \div 10) R_C$ .

В работе [1] было развито представление о сверхкороне Солнца как о двухкомпонентной структуре, которая состоит из регулярной компоненты электронной плотности и статистически неоднородной (или лучевой) компоненты с относительно медленным убыванием электронной концентрации при увеличении расстояния от центра Солнца.

При исследовании сверхкороны Солнца методом «просвечивания» радиоисточниками типа Крабовидной туманности естественно предположить, что вторая компонента ответственна в основном за рассеяние радиоволн и приводит к увеличению видимых угловых размеров радиоисточника, в то время как первая компонента ответственна за рефракцию радиоволн. Поскольку первая компонента характеризуется относительно быстрым убыванием электронной концентрации при увеличении расстояния от Солнца, можно предположить, что на больших угловых расстояниях от центра Солнца ( $r \sim 10 R_C$ ) будет преобладать эффект рассеяния радиоволн, а рефракцией волн можно пренебречь. Однако на расстояниях  $\sim (3 \div 10) R_C$ , когда существенны оба эффекта, необходимо решить задачу о совместном влиянии рассеяния и рефракции радиоволн: при прохождении радиоволной больших расстояний последний эффект может привести к искажению видимой формы радиоисточника и дополнительному усилению рассеяния.

Для предварительной оценки ожидаемого искажения формы источника рассмотрим случай, когда после прохождения радиоволной статистически неоднородной среды, содержащей только вторую компоненту электронной плотности, на картину рассеяния налагается рефракционное смещение.

Зависимость [2] средней электронной концентрации  $N_e$  от расстояния до центра Солнца хорошо аппроксимируется формулой

$$N_e(\rho) = \frac{k_1}{\rho^{n_1}} + \frac{k_2}{\rho^{n_2}}, \quad (1)$$

где  $k_1 = 0,9198 \cdot 10^7$ ,  $k_2 = 0,6596 \cdot 10^5$ ,  $n_1 = 2,9658$ ,  $n_2 = 1,3517$ ,  $\rho$  — расстояние от центра Солнца, выраженное в единицах солнечного радиуса. Вычислим рефракцию  $R$  в этой модели солнечной короны.

Показатель преломления регулярной компоненты сверхкороны можно записать так:

$$n(\rho) = 1 - \Delta n, \quad \Delta n \ll 1, \quad (2)$$

$$\Delta n = 4,47 \cdot 10^{-10} \lambda_m^2 \left( \frac{0,91 \cdot 10^7}{\rho^{2,96}} + \frac{0,65 \cdot 10^5}{\rho^{1,35}} \right),$$

где  $\lambda_m$  — длина волны в меграх. Рассмотрим систему координат  $(z, r)$  с началом отсчета в центре Солнца, в которой плоская электромагнитная волна распространяется вдоль направления, параллельного оси  $z$ . Рефракция в направлении  $r$  в пренебрежении искривлением лучей ( $\Delta n \ll 1$ ) составит

$$R = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} n(r, z) dz - \int_{-\infty}^{\infty} n(r + \Delta r, z) dz}{\Delta r} = \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n(r, z) dz. \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), интегрируя и дифференцируя по  $r$ , получим выражение

$$R(r, \lambda) = -7,92 \cdot 10^{-10} \lambda_m^2 \left( \frac{2,04 \cdot 10^7}{r^{2,96}} + \frac{0,89 \cdot 10^5}{r^{1,35}} \right), \quad (4)$$

характеризующее зависимость рефракции от длины волны и расстояния до центра Солнца. Отметим, что в нашей задаче зависимость  $R(\lambda)$  не является квадратичной, поскольку в (4) входит величина  $r$  (положение границ источника), которая зависит от степени рассеяния, являющейся функцией  $\lambda$ .

Используем известные из экспериментов по просвечиванию Крабовидной туманности значения  $\Phi_p$  углов рассеяния [3, 4], приведенные в таблице 1, и оценим ожидаемое смещение эффективного центра тяжести излучения источника, а также искажение его формы в зависимости от  $r$  и  $\lambda^*$ .

Таблица 1

	$m$	$\lambda(\mu)$	$\Phi_p(r=15)$	$\Phi_0$
1954 г.	1,64	3,5	1',05	6',5
		5,8	2',88	7',0
		7,5	4',81	7',5
1958 г.	1,36	3,5	3',50	6',5
		5,8	9',60	7',0
		7,5	16',05	7',5
1963 г.	1,15	3,5	3',32	6',5
		5,8	9',10	7',0
		7,5	15',20	7',5

Значения  $\Phi_p(r)$  были рассчитаны по данным таблицы 1. При этом было использовано представление [3]

\* В настоящей работе используются значения углов рассеяния [3, 4], относящиеся к 1954, 1963 гг., когда Солнце приближалось к периоду минимума своей активности. В статье [4] показано, что эффект рассеяния радиоволн зависит от фазы солнечной активности. Очевидно, подобная зависимость существует и для первой компоненты, характеризующей поведение средней концентраций электронов. Однако эксперимент, выполненный Блэккуллом [2] в 1954 г., никем не повторялся и в литературе нет каких-либо других данных. Поэтому при численных оценках будем пользоваться характеристиками первой компоненты, относящимися к 1954 г.

$$\Phi_p = k/r^m. \quad (5)$$

Для известных  $\Phi_p(r)$  можно вычислить положение границ источника  $r_1, r_2$  после рассеяния радиоволн на неоднородностях солнечной короны и для найденных  $r_1, r_2$  вычислить величину рефракции\*. Значения  $R_1(r_1), R_2(r_2)$  определяют искажение видимой формы источника. Результаты расчетов приведены в таблице 2, где  $(R_2 - R_1)/2 = \Delta R/2$  — смещение эффективного центра излучения; а  $\Delta R/2 \sqrt{\Phi_0^2 + \Phi_p^2}$  характеризует относительную величину искажения формы (рис. 1).

Таблица 2

Год	$\lambda(\text{м})$	$r = 3$	4	5	6	7	8	9	10
1954 г.	3,5	10'37"	2'28"	52"	23"	12"	7"	4"	2"
	5,8	1°30'18"	14'52"	4'24"	1'41"	48"	26"	15"	10"
	7,5	7°39'30"	44'57"	11'47"	4'20"	1'55"	59"	33"	20"
1958 г.	3,5	22'54"	4'32"	1'26"	35"	27"	9"	5"	3"
	5,8	11°24'12"	43'16"	10'39"	3'51"	1'42"	51"	28"	16"
	7,5	—	4°10'26"	36'6"	11'31"	4'48"	2'20"	1'15"	44"
1963 г.	3,5	21'16"	4'20"	1'22"	29"	16"	9"	5"	3"
	5,8	9°10'34"	39'36"	9'54"	3'39"	1'37"	49"	27"	16"
	7,5	—	3°28'10"	33'27"	10'45"	4'36"	2'12"	1'11"	41"

Расчет показывает, что учет совместного влияния рефракции и рассеяния радиоволн приводит к незначительному смещению эффективного центра излучения в области  $r > 10R_{\text{C}}$ , этот эффект становится значительным на расстояниях  $r \sim (3-7)R_{\text{C}}$ , причем он сильно зависит от  $\lambda$ . Рис. 1 иллюстрирует эту зависимость; сплошные кривые построены, исходя из данных таблицы 1 для 1954 г., пунктирные — для 1963 г. Относительное влияние собственных угловых размеров источника  $\Phi_0$  сильнее сказывается при малых  $\Phi_p$ . Полагая  $\Phi_0 = 0$ , можно получить оценки для точечного источника радиоизлучения. Эти результаты позволяют, в принципе, по наблюдаемому искажению формы источника определять средние градиенты электронной концентрации на небольших угловых расстояниях от центра Солнца, а также по искажению формы источника находить его собственные угловые размеры.

В работах по статистической теории рассеяния радиоволн обычно предполагается постоянство среднего значения показателя преломления. Однако в случае двухкомпонентной модели сверхкороны Солнца необходимо принять во внимание малые регулярные изменения среднего значения показателя преломления, которые на небольших угловых расстояниях от центра Солнца имеют примерно тот же порядок, что и статистические флуктуации.

Рассмотрим распространение радиоволн в статистически неоднородной среде, в которой показатель преломления наряду с малыми статистическими флуктуациями  $\mu$  испытывает также плавные регулярные изменения  $\Delta n$ :

\* Поскольку рефракция максимальна в области малых  $z$ , т. е. в области, где углы рассеяния равны  $\Phi_p/\sqrt{2}$ , будем вычислять  $r_1, r_2$  для источника с угловыми размерами  $\sqrt{\Phi_0^2 + \Phi_p^2}/2$ .

$$n(r, z) = [1 - \Delta n(r, z)] [1 + \mu(r, z)], \quad \overline{\mu(r, z)} = 0, \quad (6)$$

$$\mu \ll 1, \quad \Delta n \ll 1.$$

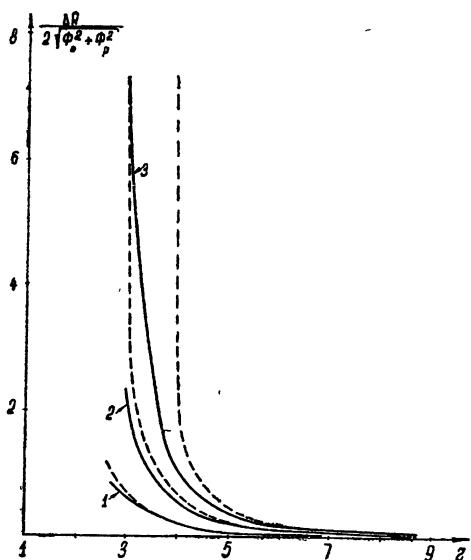


Рис. 1. Зависимость относительного искажения формы источника от расстояния до центра Солнца:

1)  $\lambda = 3,5 \text{ м}$ ; 2)  $\lambda = 5,8 \text{ м}$ ; 3)  $\lambda = 7,5 \text{ м}$ .

Регулярные изменения показателя преломления настолько малы, что рефракцией волн можно пренебречь и рассматривать только рассеяние, которое вследствие статистических флюктуаций и регулярных изменений показателя преломления приводит на больших расстояниях к значительным эффектам рассеяния.

Функция корреляции показателя преломления (6)

$$\begin{aligned} \overline{n(r, z) n(r', z')} - \overline{n(r, z)} \overline{n(r', z')} &= [1 - \Delta n(r, z)] \times \\ &\times [1 - \Delta n(r', z')] \overline{\mu(r, z) \mu(r', z')} = B_0 [1 - \Delta n(r, z)] \times \\ &\times [1 - \Delta n(r', z')] \exp \left[ -\frac{(r - r')^2 + (z - z')^2}{2l^2} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где  $B_0 = \overline{\mu^2}$ ,  $l$  — средний размер неоднородностей.

Используем известное из [5] выражение для угла рассеяния радиоволн:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi^2} &= 4\psi(r, z) \int_0^\infty \rho''(0, s) ds, \\ \psi(r, z) &= \int_0^z \varphi(r, z) dz, \end{aligned} \quad (8)$$

где множитель  $\varphi(r, z)$  характеризует медленные изменения дисперсии показателя преломления, а  $\rho(r - r', z - z')$  — изменения, происходящие на расстояниях порядка радиуса корреляции. Из (2) и (7) получим выражение функции корреляции для волны, распространяющейся вдоль направления  $z$  на расстояния  $r$  от центра Солнца. При достаточно больших  $z$ :

$$z = 2 \sqrt{r^2 - r'^2}$$

дисперсия угла рассеяния (8) в среде с  $\Delta n \sim \mu$

$$\Phi^2(r) = 2\sqrt{2\pi} B_0 \frac{R_C}{l} \left[ z - \frac{\lambda_\mu^2 0,164 \cdot 10^{-1}}{r^{1,96}} - \frac{\lambda_\mu^2 0,558 \cdot 10^{-3}}{r^{0,35}} + \dots \right]. \quad (9)$$

Численный расчет отношения

$$\sqrt{\Phi^2(r)/\Phi^2(r=15)}$$

по формуле (9) при  $l = \text{const}$  позволяет оценить изменения величины рассеяния вследствие регулярных изменений  $\Delta n$ . При  $3 < r < 30$  оно изменяется в интервале  $1,022 \div 0,915$ . Так как в действительности при изменении  $r$  в указанных пределах размер неоднородностей изменяется в широких пределах (в  $10^2 \div 10^3$  раз), учет зависимости  $l = l(r)$  изменит величину вычисленного отношения в  $\sqrt{l(r=15)/l(r)}$  раз. Сравнение наблюдаемых изменений углов рассеяния с соответствующими расчетными значениями при  $l = \text{const}$  позволяет судить о размерах неоднородностей как функции расстояния от центра Солнца.

Автор выражает благодарность В. В. Виткевичу за дискуссии и полезные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Виткевич, Астрон. ж. (в печати).
2. D. E. Blackwell, Mon. Not., 116, 56 (1956).
3. В. В. Виткевич, Астрон. ж., 37, 32 (1960).
4. В. И. Бабий, В. В. Виткевич, В. И. Власов, М. В. Горелова, А. Г. Суховей, Астрон. ж. (в печати).
5. Н. А. Лотова, Астрон. ж., 36, 907 (1959).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
6 сентября 1964 г

#### ON INFLUENCE OF SOLAR SUPERCORONA UPON VISIBLE POSITION AND FORM OF TRANSLUCENT RADIO SOURCES

*N. A. Lotova*

The simultaneous effect is considered both of the scattering and refraction of radio waves in the two-component model of the solar corona on the observed position of a discrete source when it is eclipsed by the supercorona. The evaluations are given of the distortion of the source form at the angular distance from the centre of the Sun about  $(3 \div 10) R_\odot$ .

УДК 522.1 523 164

## НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТИННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИОЯРКОСТИ ПО НЕБУ

Ф. П. Тарасенко

Показано, что задача отыскания истинного распределения радиояркости по небосводу сводится к решению интегрального уравнения (1) только при специфическом режиме работы радиотелескопа. Даны оценки времени усреднения выходного сигнала радиотелескопа, обеспечивающего обнаружение радиоисточников различной мощности. Обсуждаются возможности решения задачи редукции аналоговым методом. Последний позволяет всю обработку снятого специальным способом распределения радиояркости свести к пропусканию сигнала, пропорционального этой функции распределения, через линейный фильтр.

1. Одной из важных задач радиоастрономии является определение истинного распределения радиоизлучения по небосводу. Основной идеей всех рассматриваемых в литературе методов нахождения истинного распределения радиояркости является мысль об обратимости преобразования, осуществленного антенной, которое в одномерном случае выражается уравнением

$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - x_0) \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Здесь  $f(x)$  — измеряемое распределение интенсивности радиоизлучения по угловой координате  $x$ ,  $g(x)$  — диаграмма направленности антенны по мощности,  $\varphi(x)$  — истинное распределение интенсивности; предполагается, что антenna линейна и сигналы некогерентны.

Все разнообразие способов нахождения  $\varphi(x)$  связано с различными методами решения уравнения (1) и разными способами их реализации. Главное внимание обычно уделяется точности вычислений. При этом предполагается, что измеренное распределение мощности  $f(x)$  получено с достаточной точностью и что связь между  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  выражается уравнением (1).

Обсудим, какие условия должны быть выполнены, чтобы эти предположения удовлетворялись.

На эксперименте распределение мощности по углу получается путем усреднения квадрата выходного сигнала антенны. Эта процедура, очевидно, выражается соотношением

$$f(x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} B(t - t_0) \int_{-\pi}^{\pi} g[x - x_0(t)] s^2(x, t) dx dt, \quad (2)$$

где  $B(\tau)$  — импульсный отклик усредняющей системы,  $s^2(x, t)$  — квадрат реализации сигнала, идущего от источника с угловой координатой  $x$ ,  $x_0(t)$  — функция, описывающая перемещение оси диаграммы антенны с течением времени,  $t_0$  — момент времени, в который измеряется

функция  $f$ ,  $x_0$  — угловая координата, которой приписывается измеренное значение функции  $f$ .

Легко видеть, что (2) переходит в (1) лишь при выполнении некоторых вполне определенных условий. Во-первых, это очевидное условие «достаточной узости» диаграммы и отсутствия источников вблизи границ просматриваемого сектора, которое позволяет в интегrale по  $x$  перейти к бесконечным пределам. Во-вторых, в течение всего времени усреднения диаграмма антенны должна быть неподвижной относительно источников излучения (т. е.  $x_0(t)$  должно быть константой); только тогда (2) можно переписать в форме, близкой к (1):

$$f(x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - x_0) \left[ \int_{-\infty}^{t_0} B(t_0 - t) s^2(x, t) dt \right] dx. \quad (3)$$

Наконец, для того, чтобы выражение в квадратных скобках можно было заменить истинным распределением  $\phi(x)$ , функция  $B(\tau)$  также должна удовлетворять определенным условиям (см. раздел 2).

Таким образом, вопреки установившемуся мнению, сведение задачи редукции к решению уравнения (1), строго говоря, возможно только при специфическом режиме работы всей системы, когда

1) сканирование дискретно; в течение необходимого интервала времени усреднения  $T$ , в конце которого берется отсчет измеряемой функции  $f(x)$ , антenna остается неподвижной относительно источника (необходимая величина  $T$  оценивается в разделе 2);

2) в конце интервала  $T$  ось антенны перемещается на некоторый угол  $\Omega$  и вновь останавливается на  $T$  секунд для взятия следующего отсчета; затем процедура повторяется, пока не будет пройден весь заданный сектор (величина  $\Omega$  связана с разрешающей способностью системы; параметры системы, влияющие на  $\Omega$ , обсуждаются в разделе 4).

Вопрос о том, какова точность редукции при получении функции  $f(x)$  путем непрерывного сканирования и последующей формальной ее подстановки в уравнение (1), остается открытым. Однако именно так поступают некоторые исследователи (см. цитированную литературу в конце статьи). Поэтому указанный вопрос требует специального рассмотрения, которое не входит в цели настоящей статьи. Можно только сказать, что в этом случае исходным для анализа уравнением должно быть не уравнение (1), а (2).

**2.** Предположим, что выполнены условия, при которых эксперимент описывается уравнением (3). Необходимо количественно оценить условия, при которых выражение (3) сводится к (1). Дело в том, что показание прибора, измеряющего мощность радиоизлучения, есть случайная величина, которая лишь в пределе (при увеличении времени усреднения) стремится к действительно искомой величине. Можно оценить, какое время усреднения необходимо, чтобы измерение мощности производилось с гарантированной точностью. Важно отметить, что это время даже в отсутствие шумов зависит от диапазона значений мощности источников.

Допустим, что излучение радиоисточников подчиняется нормальному распределению. Пусть далее мощность излучения  $P$  оценивается путем усреднения  $N$  отсчетов квадратов амплитуды принимаемого излучения. Это означает, что весовая функция  $B(\tau)$  представляет собой прямоугольный импульс длительностью  $T$ , на которую приходится  $N$  отсчетов:

$$\int_{-\infty}^{t_0} B(t_0 - t) s^2(x, t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0-T}^{t_0} s^2(x, t) dt = \frac{1}{N} \sum_{t_0-N}^{t_0} s^2(x, t_k). \quad (4)$$

Известно [1], что при этом стандартное отклонение измеряемой мощности

$$\sigma_p = \sqrt{2/N P}. \quad (5)$$

Для того, чтобы на фоне флюктуаций интенсивности сильного источника можно было уверенно обнаружить слабый источник, а также для того, чтобы флюктуации мощности сильного источника не давали впоследствии фиктивных «слабых источников», надо потребовать, чтобы в заданное число  $n$  раз было меньше, чем  $P_{\min}$ , где  $P_{\min}$  и  $P_{\max}$  — ожидаемые мощности соответственно слабейшего и сильнейшего источников излучения:

$$P_{\min}/\sigma_{P_{\max}} = n. \quad (6)$$

Пусть далее задан динамический диапазон приемника радиотелескопа, т. е. известно отношение между минимальным и максимальным возможным сигналами:

$$P_{\max}/P_{\min} = m. \quad (7)$$

Из формул (5) — (7) следует, что число отсчетов, необходимых для усреднения,

$$N = 2(mn)^2. \quad (8)$$

С другой стороны,  $N$  связано с полосой пропускания приемника и временем усреднения. Действительно, в случае, если отсчеты некоррелированы, для равномерного спектра радиоизлучения в полосе приемника

$$N = 2FT, \quad (9)$$

где  $F$  — полоса приемника, а  $T$  — время усреднения. Отсюда следует, что необходимое время усреднения

$$T = \frac{1}{F} (mn)^2. \quad (10)$$

Согласно (10) при расширении диапазона мы вынуждены либо увеличивать полосу приемника, либо увеличивать время усреднения.

Если взять не очень завышенные требования, при которых  $n = 10 \div 100$ ,  $m = 10 \div 1000$ , то

$$T = \frac{1}{F} (10^4 \div 10^{10}) \text{ сек.} \quad (11)$$

Например, при полосе  $F = 10^7$  гц в зависимости от  $m$  и  $n$  величина  $T$  может изменяться от  $10^{-3}$  до  $10^3$  сек. Этот пример может служить основой для ориентировочного вывода о том, что (поскольку  $T \sim 10^{-3}$  достаточно малый интервал времени) пользование уравнением (1) при подстановке в него функции  $f(x)$ , полученной при непрерывном сканировании, может дать достаточно точное выражение для  $\varphi(x)$  только при невысоких требованиях к  $m$  и  $n$ . Необходимо отдавать себе отчет в том, что даже «медленность» сканирования при неравномерном распределении мощности по углу и больших  $m$  и  $n$  не спасает положения;

чтобы убедиться в этом, достаточно провести расчет нестационарности выходного сигнала секторной антенны.

3. В аналоговой вычислительной технике нередко для проведения вычисления используются некоторые физические явления, описываемые соответствующей математической операцией. Такой подход можно попытаться применить и в рассматриваемом случае. Если принять, что переменная  $x$  в уравнении (1) характеризует время, то это уравнение опишет прохождение сигнала  $\phi(x)$  через линейный фильтр с откликом  $g(x)$ , в результате чего на выходе фильтра получится сигнал  $f(x)$ . Естественно поэтому для получения искомой функции  $\phi(x)$  пропустить сигнал, пропорциональный известной измеренной функции  $f(x)$ , через фильтр, осуществляющий обратное преобразование. Таким образом, вместо сопряжения радиотелескопа с электронной вычислительной машиной, осуществляющей громоздкие вычисления, достаточно сопрячь приемник с достаточно простым линейным фильтром. Если характеристика прямого фильтра есть  $G(i\omega)$ , то характеристика обратного фильтра должна выражаться функцией  $G^{-1}(i\omega)$ . Критерий Пэйтли-Винера [8] утверждает, что характеристика физически реализуемого линейного фильтра должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log G(i\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (12)$$

Отсюда немедленно следует, что для всякого физически реализуемого фильтра существует обратный ему физически реализуемый фильтр (так как  $|\lg G^{-1}(i\omega)| = |\lg G(i\omega)|$ ).

Далее вопрос ставится так: реализуемы ли такие диаграммы направленности антенн, которые соответствовали бы физически реализуемым фильтрам? Чтобы показать существование не удовлетворяющих этому требованию диаграмм, достаточно взять круговую (ненаправленную) диаграмму. Из общих соображений следует, что нужная нам диаграмма должна быть отлична от нуля в ограниченном интервале углов, меньшем  $2\pi$ , желательно — в значительно меньшем интервале. (Простым примером такой диаграммы является секторная диаграмма.) Таким образом, вопрос сводится фактически к задаче о возможности создания линейной антенны, обладающей диаграммой из заданного класса функций.

Укажем на одну возможность практической реализации обратного фильтра (помимо его синтеза прямыми методами). Эта возможность основана на известном в аналоговой вычислительной технике методе обратной функции. Иногда гораздо проще синтезировать прямой фильтр. Тогда обратный фильтр можно получить включением прямого фильтра в обратную связь усилителя с высоким коэффициентом усиления. Таким образом, включение прямого фильтра, отклик которого отражает antennу диаграмму, в обратную связь усилителя даст соответствующий обратный фильтр.

4. При учете влияния внешних и аппаратурных шумов на точность решения рассматриваемой задачи возникает две независимых проблемы. Первая проблема состоит в учете шумов фона, антennы, приемной аппаратуры и схемы, измеряющей мощность. Эти шумы приведут к появлению некоторой добавочной аддитивной постоянной (равной мощности этих шумов), которая легко может быть исключена перед входом обратного фильтра. В самом деле, при учете этих шумов вместо (3) имеем:

$$f_1(x_0, t_0) = f(x_0, t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} B(t_0 - t) n^2(t) dt = f(x_0, t_0) + c \sigma_{\text{ш}}^2. \quad (13)$$

(Здесь,  $n(t)$  — реализация суммарного шума до схемы измерения мощности.) Однако после вычета указанной постоянной составляющей останутся флуктуации благодаря конечности времени усреднения. Оценим величину этих флуктуаций. Согласно (5), стандартное отклонение флуктуаций  $\beta_{\text{ш}} = \sqrt{2/N}$ ,  $\sigma_{\text{ш}}^2 = \sigma_{\text{ш}}^2 / mn$ ,  $N$  — определяет время усреднения.<sup>1</sup> При переходе к последнему равенству принята во внимание формула (8). Если суммарная мощность шумов равна минимальной мощности полезного источника ( $\sigma_{\text{ш}}^2 = P_{\min}$ ), то  $\beta_{\text{ш}}$  в  $mn$  раз (т. е. на практике на несколько порядков) меньше минимального выброса измеряемой функции\*.

Итак, учет шумов, накладывающихся на полезный сигнал до схемы измерения мощности, не приводит к серьезным осложнениям.

Второй, весьма существенной проблемой является учет шумов аппаратуры между схемой измерения мощности и обратным фильтром (шумов линейных усилителей, которые могут стоять перед обратным фильтром, шумов элементов самого обратного фильтра). Поскольку характеристика обратного фильтра неограниченно возрастает по мере убывания характеристики прямого фильтра, возникает естественное сомнение, не сведут ли эти шумы к нулю весь эффект обратной фильтрации. Сужение полосы обратного фильтра, ограничивая мощность выходного шума, одновременно ограничит и разрешение источников при достаточно малых угловых расстояниях между ними. Поэтому имеет смысл рассмотреть количественную сторону этого вопроса.

Так как схема обращения линейна, можно рассматривать воздействие на нее полезной и шумовой компонент раздельно. Пусть, например, отклик фильтра, эквивалентного антенне, характеризуется кривой Гаусса. Тогда измеренное распределение интенсивности, соответствующее точечному источнику, определится функцией

$$f(t) = K P e^{-\beta^2 t^2}. \quad (14)$$

Здесь  $K$  — коэффициент усиления сигналов, выдаваемых схемой измерения мощности,  $P$  — интенсивность источника, умноженная на максимальное значение диаграммы антенны,  $\beta$  — коэффициент, определяемый шириной диаграммы и скоростью считывания функции  $f(t)$ ;  $\beta = 0,8 t_0^{-1}$ , где  $t_0$  — ширина импульса  $f(t)$ , измеренная по половинному уровню. Спектр функции (14) определяется соотношением

$$F_f(\omega) = P \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\omega^2/4\beta^2} \quad (15)$$

и, следовательно, характеристика обратного фильтра описывается функцией

$$G(\omega) = C e^{\omega^2/4\beta^2} \quad (16)$$

( $C > 0$  — коэффициент передачи фильтра на нулевой частоте).

Желая ограничить мощность шумов на выходе схемы обращения, мы ограничиваем полосу частот  $[0, \Omega]$ , в которой характеристика реаль-

\* Кстати, при слабых требованиях к  $m$  и  $n$  (а именно это позволяет использовать уравнение (1) в случае непрерывного сканирования) — влияние шумов станет существенным. Это еще раз ставит под сомнение общепринятую методику и требует ее тщательного анализа.

ногого фильтра совпадает с (16) (вне этого интервала она равна нулю). Тогда мощность полезной компоненты не выходе обратного фильтра

$$S = \int_0^{\Omega} F_f^2(\omega) G^2(\omega) d\omega = \pi \left( \frac{KCP}{\beta} \right)^2 \Omega. \quad (17)$$

При этом  $\delta$ -образной действительной функции распределения мощности соответствует функция типа  $\sin x/x$ , ширина которой определяется (по пересечению с осью  $\varphi = 0$ ) величиной  $\pi/\Omega$ . Таким образом, величина  $\Omega$  связана с разрешающей способностью всей системы.

Оценим теперь дисперсию шумов на выходе приближенного обратного фильтра с ограниченной полосой. Положим, например, что шумы усилителя  $N_1$  и элементов обратного фильтра  $N_2$  имеют равномерные спектры, так что суммарный спектр мощности шума выразится функцией

$$N(\omega) = K^2 N_1 + N_2 = N_0. \quad (18)$$

Тогда мощность шумовой компоненты на выходе обратного фильтра

$$N = N_0 \int_0^{\Omega} G^2(\omega) d\omega = \sqrt{2} N_0 C^2 \beta M \left( \frac{\Omega}{\sqrt{2} \beta} \right), \quad (19)$$

где  $M(x) = \int_0^x e^t dt$ ; отношение сигнала к шуму на выходе обратного фильтра

$$\frac{S}{N} = \pi \frac{(KP/\beta)^2}{K^2 N_1 + N_2} D_1 \left( \frac{\Omega}{\sqrt{2} \beta} \right), \quad (20)$$

где  $D_1(x) = x/M(x)$ .

На практике встречаются случаи неравномерного спектра шумов. Если, например, спектр шума имеет вид  $N(\omega) = N_0 \omega^{-\alpha}$ , интеграл (19) сводится к выражению

$$N = C^2 N_0 \int_0^{\Omega} e^{\omega^2/4\beta^2} \omega^{-\alpha} d\omega = \frac{C^2 N_0}{2} B \left( 1, 1 - \frac{\alpha+1}{2} \right) {}_1F_1 \left( 1 - \frac{\alpha+1}{2}; 2 - \frac{\alpha+1}{2}; \left( \frac{\Omega}{2\beta} \right)^2 \right). \quad (21)$$

Отсюда получаем, что отношение сигнала к шуму

$$\frac{S}{N} = \pi \frac{(KP)^2}{N_0 \beta} D_2 \left( \frac{\Omega}{2\beta} \right), \quad (22)$$

где  $D_2 = (\Omega/2\beta) B^{-1} {}_1F_1^{-1}$  и аргументы у функций  $B$  и  ${}_1F_1$  те же, что и в (21).

Самым характерным (и самым многообещающим) является то обстоятельство, что (20) и (22) состоят из двух сомножителей, которые в эксперименте могут задаваться независимо. Функции  $D(x)$  определяются только тем, насколько мы хотим увеличить разрешение двух близких источников. Функции  $D(x)$  быстро убывают, так что при увеличении требований к разрешению при прочих равных условиях отношение  $S/N$  падает. Однако при постоянной степени увеличения разрешающей

способности (т. е. при постоянном отношении  $\Omega/\beta$ ) мы имеем возможность независимо увеличить  $S/N$  за счет первого сомножителя. Весьма перспективным является уменьшение коэффициента  $\beta$ , что физически соответствует замедленному воспроизведению функции  $f(x)$ , подаваемой на вход обратного фильтра; при этом с точки зрения теории здесь никаких ограничений не возникает.

Несмотря на то, что мы обсуждали лишь конкретный вид функции (14), физически ясно, что выводы останутся справедливыми для любого вида этой функции (если только она соответствует реализуемому фильтру), так как эффект повышения  $S/N$  за счет первого сомножителя основан на эквивалентном сужении полосы частот; последнее возможно при постоянном коэффициенте увеличения разрешающей способности системы за счет замедленного воспроизведения функции  $f(x)$ .

Таким образом, можно получить необходимое разрешение близких источников при любом заданном отношении сигнала к шуму на выходе обратного фильтра. Это является сильным аргументом в пользу указанного метода решения задачи редукции; единственным усложнением здесь является необходимость предварительной записи функции  $f(x)$ , а затем воспроизведения ее в нужном темпе перед подачей на обратный фильтр.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А Хальд, Математическая статистика с техническими приложениями, ИЛ, М., 1956, гл. XI
2. А Балклав, Изв высш уч зав —Радиофизика, 5, 692 (1962).
3. Ламповые усилители, 2, изд. Сов. радио, М, 1958.
4. А. Балклав, Изв АН Латв ССР, № 6, 59 (1963).
5. R. N. Brás e well, Austr. J. Phys., 137, 175 (1963).
6. H. Wilhelms on, Arkiv Astron., 3, 187 (1963).
7. И. И Хиршман, Д В Уиддер, Преобразования типа свертки, ИЛ, М., 1958
8. Ламповые усилители, 2, изд Сов радио, М, 1958

Сибирский научно-исследовательский  
физико-технический институт

Поступила в редакцию  
18 декабря 1963 г.

#### SOME ASPECTS OF THE PROBLEM OF DETERMINATION OF TRUE RADIO BRIGHTNESS DISTRIBUTION OVER THE SKY

F. P. Tarasenko

It is shown that the problem of determination of true radio brightness distribution over the sky is reduced to the integral equation solution (I) only under the specific regime of radio-telescope operation. The evaluations have been given of the time and averaged output signal of radio-telescope providing detection of radio sources of different powers. The possibility is discussed of the reduction problem solution by the analogue method. The latter permits to reduce by the special method the whole precessing of brightness distribution obtained to the transmission of the signal proportional to this distribution function through a linear filter.

УДК 523.164.34 522.617

## УЧЕТ УСРЕДНЯЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕННЫ ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ

*B. D. Кротиков*

Рассмотрены характеристики радиоизлучения Луны при учете усредняющего действия диаграммы направленности антенны. Показано, что, если ширина диаграммы больше  $40'$ , то принимаемое радиоизлучение Луны фактически является интегральным. Результаты расчета используются для более точного определения параметра  $\delta_1$  по экспериментальным данным.

Для определения физических свойств верхнего покрова Луны по характеру ее радиоизлучения, принимаемого на различные антенны, необходимо установить связь этих свойств и наблюдаемых характеристик радиоизлучения. В настоящее время количественная связь установлена в двух крайних случаях, соответствующих ширине диаграммы направленности антенны много меньше или много больше угловых размеров Луны [1, 2]. В [1] также рассмотрен случай, когда ширина диаграммы направленности антенны равна угловым размерам Луны. Однако ввиду значительных математических трудностей в [1] проведены расчеты радиоизлучения Луны при упрощенных предположениях о распределении поверхностной температуры. На основании расчетов теплового режима поверхностного слоя Луны, проведенных в [3], установлена функция распределения поверхностной температуры. Использование этой функции и существующей теории [1] в настоящей работе дало возможность установить общие теоретические соотношения, связывающие между собой радиоизлучение центра диска и радиоизлучение, усредненное с учетом диаграммы направленности антенны. Это позволит производить сравнение экспериментальных данных, полученных с различными диаграммами направленности.

### 1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Как известно [1], при измерении радиоизлучения Луны определяется только усредненная по диаграмме направленности эффективная температура Луны

$$\bar{T}_{e\sigma} = \frac{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} T_e(\varphi, \psi, t) F(\varphi, \psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} F(\varphi, \psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi}, \quad (1)$$

где  $T_e(\varphi, \psi, t)$  — эффективная температура участка поверхности с селенографическими координатами  $\varphi, \psi$ ,  $F(\varphi, \psi)$  — диаграмма направленности, выраженная в лунных координатах. Будем предполагать, что диаграмма направленности антенны, характеризуемая шириной  $\sigma$  на половинном

уровне мощности, представляет собой тело вращения, ось диаграммы проходит через центр лунного диска, а боковые лепестки отсутствуют. Диаграмму направленности, характеризуемую одним главным лепестком, удобно представить гауссовой кривой. Записанная в лунных координатах часть диаграммы направленности по мощности, ограниченная угловыми размерами Луны, как нетрудно убедиться, имеет вид

$$F(\varphi, \psi) = \exp \left[ -\ln 2 (1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \psi) \frac{d^2}{\sigma^2} \right], \quad (2)$$

где  $\sigma$  — ширина диаграммы направленности антенны на половинном уровне мощности, выраженная в радианах,  $d$  — средний угловой диаметр Луны.

Поскольку дифференциальные характеристики радиоизлучения Луны наиболее просто выражаются для центра лунного диска, радиоизлучение Луны, усредненное с учетом диаграммы направленности антенны, удобно представить через радиоизлучение центра диска, введя при этом необходимые пересчетные коэффициенты. Подставляя в (1) соотношение (2) и выражение  $T_e(\varphi, \psi, t)$  в виде гармонического ряда (см., например, [4]) и производя необходимые преобразования, получим выражение  $\bar{T}_{e\sigma}$  через эффективную температуру центра диска Луны\*:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{e\sigma} = & (1 - R_{\perp}) \beta_{0\sigma} T_0(0) + (1 - R_{\perp}) \sum (-1)^n \times \\ & \times \frac{T_n(0)\beta_{n\sigma}}{\sqrt{1+2\delta_n+2\delta_n^2}} \cos [n \Omega t - \varphi_n - \xi(0, 0) - \Delta\xi_n]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $(1 - R_{\perp})$  — излучательная способность центра диска,  $\xi_n(0, 0) = -\operatorname{arctg} \frac{\delta_n}{1+\delta_n}$  — сдвиг по фазе радиоизлучения центра диска по отношению к фазе нагрева поверхности  $(1 - R_{\perp}) \beta_{0\sigma} T_0(0)$  и  $(1 - R_{\perp}) \times T_n(0) \beta_{n\sigma} / \sqrt{1+2\delta_n+2\delta_n^2}$  — соответственно постоянная составляющая и  $n$ -я гармоника усредненной по координатам, с учетом диаграммы, эффективной температуры. Знак  $n$ -ой гармоники определяется показателями  $\alpha_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ).

Коэффициент  $\beta_{0\sigma}$  дается соотношением

$$\beta_{0\sigma} = \frac{1}{1 - R_{\perp}} \frac{\iint_{-\pi/2}^{+\pi/2} [1 - R(\varphi, \psi)] F(\varphi, \psi) \eta_0(\psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi}{\iint_{-\pi/2}^{+\pi/2} F(\varphi, \psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi}. \quad (4)$$

Коэффициент

$$\beta_{n\sigma} = \frac{\sqrt{1 + 2\delta_n + 2\delta_n^2} \sqrt{A_n^2 + B_n^2}}{1 - R_{\perp}}, \quad (5)$$

а дополнительный сдвиг по фазе  $\Delta\xi_n = \operatorname{arctg}(B_n/A_n)$ . Величина  $A_n$  и  $B_n$  выражаются следующими интегралами:

\* В рассматриваемом случае, в отличие от [2], коэффициенты усреднения зависят от ширины диаграммы направленности антенны.

$$A_n = \frac{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [1 - R(\varphi, \psi)] F(\varphi, \psi) \cos[n\varphi + \xi(\varphi, \psi) - \xi(0, 0)] \frac{\eta_n(\psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{1 + 2\delta_n \cos r' + 2\delta_n^2 \cos^2 r'}}}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} F(\varphi, \psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi}; \quad (6)$$

$$B_n = \frac{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [1 - R(\varphi, \psi)] F(\varphi, \psi) \sin[n\varphi + \xi(\varphi, \psi) - \xi(0, 0)] \frac{\eta_n(\psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi}{\sqrt{1 + 2\delta_n \cos r' + 2\delta_n^2 \cos^2 r'}}}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} F(\varphi, \psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi}. \quad (7)$$

В соотношениях (6) и (7)  $\eta_n(\psi)$  — нормированные зависимости амплитуд гармоник от широты (см., например, [2]), а  $\cos r' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon - 1 + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}$ .

Выражение (3) позволяет пользоваться для интерпретации экспериментальных результатов, полученных с произвольными диаграммами направленности, известными для центра диска соотношениями, в связи с чем необходимо знать коэффициенты  $\beta_{0\sigma}$  и  $\beta_{n\sigma}$  и дополнительный сдвиг по фазе  $\Delta\xi_n$ . Расчет этих коэффициентов аналитически не представляется возможным; поэтому он был выполнен на электронной вычислительной машине для различных значений  $\varepsilon$ ,  $\lambda$  и для широкого интервала изменения величины  $\sigma$ .

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Зависимости коэффициентов  $\beta_{0\sigma}$ ,  $\beta_{1\sigma}$ ,  $\beta_{2\sigma}$ ,  $\beta_{3\sigma}$  и  $\beta_{4\sigma}$  от ширины диаграммы на половинном уровне по мощности представлены на рис. 1—4. Как видно из рисунков, в случае, если ширина диаграммы направленности больше  $40'$ , коэффициенты усреднения  $\beta_{n\sigma}$  практически не изменяются при дальнейшем увеличении  $\sigma$  и соответствуют значениям коэффициентов  $\beta_n$ , полученным в [2] для интегрального радиоизлучения. Это означает, что для  $\sigma \geq 40'$  при расчетах эффективной температуры

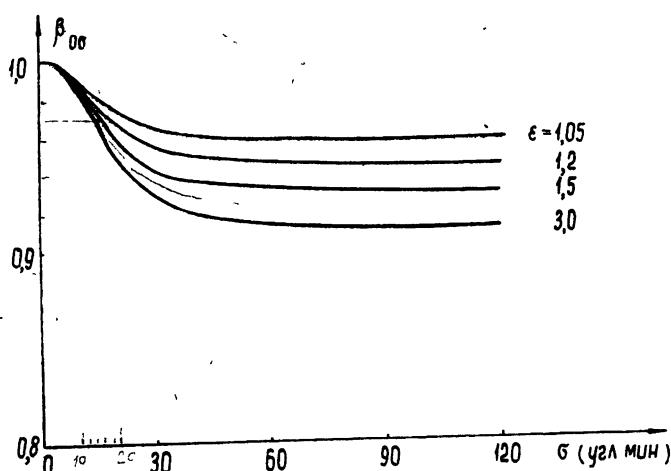


Рис. 1. Зависимость коэффициента  $\beta_{0\sigma}$  от  $\sigma$  для различных значений  $\varepsilon$ .

Луны можно не учитывать ширину диаграммы (в соотношениях (1), (4), (6), (7) положить  $F(\varphi, \psi)=1$ ), что соответствует случаю интегрального радиоизлучения Луны, рассмотренному нами ранее [2]. Если ширина диаграммы менее 5°, коэффициенты  $\beta_{n\sigma}$  близки к единице и, следовательно, эффективная температура в этом случае соответствует яркостной температуре в центре лунного диска.

Как видно из рис. 1, постоянная составляющая эффективной температуры зависит от величины диэлектрической постоянной верхнего покрова Луны и уменьшается примерно на 5% при изменении  $\epsilon$  от 1 до 3. Первая гармоника радиоизлучения зависит как от диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , так и от длины волн  $\lambda$  (рис. 2, 3).

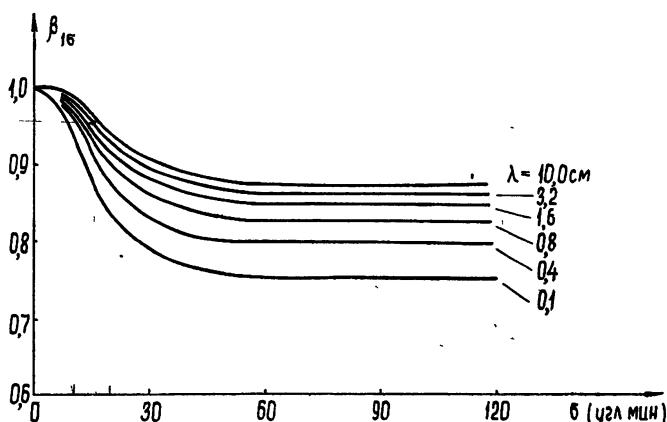


Рис. 2. Зависимость коэффициента  $\beta_{1\sigma}$  от  $\sigma$  для различных длин волн и  $\epsilon = 1,5$ .

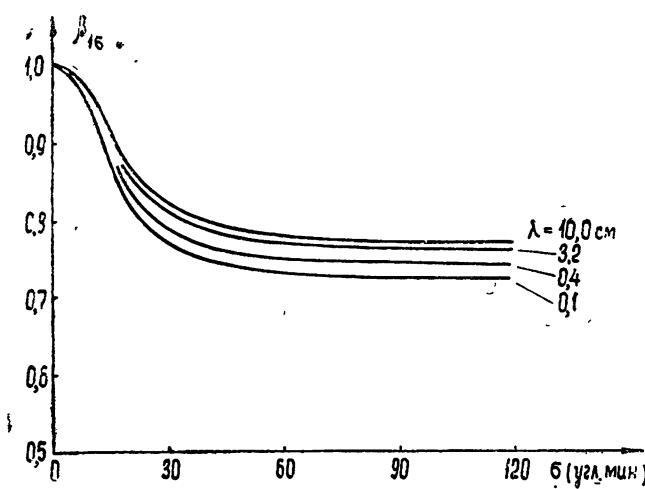


Рис. 3. Зависимость коэффициента  $\beta_{1\sigma}$  от  $\sigma$  для различных длин волн и  $\epsilon = 3$ .

Как показали проведенные расчеты, высшие гармоники эффективной температуры весьма слабо зависят от  $\epsilon$  и  $\lambda$ . При изменении диэлектрической постоянной и длины волн в пределах  $1,2 \leq \epsilon \leq 3$  и  $0,1 \leq \lambda \leq 10 \text{ см}$  соответствующие коэффициенты  $\beta_{n\sigma}$  ( $n = 2, 3, 4$ ) изменяются не

более, чем на 1%. В практических расчетах радиоизлучения Луны этим изменением можно пренебречь и считать  $\beta_{2\sigma}$ ,  $\beta_{3\sigma}$  и  $\beta_{4\sigma}$  не зависящими от  $\varepsilon$  и  $\lambda$ . Третья и четвертая гармоники эффективной температуры быстро убывают при увеличении ширины диаграммы до пренебрежимо малой величины (рис. 4). Для  $\sigma \geq 40'$  в принимаемом радиоизлучении Луны практически присутствуют лишь две гармоники. Как следует из проведенных расчетов, коэффициенты  $\beta_{n\sigma}$  (случай произвольной ширины диаграммы направленности) можно с достаточной точностью представить через коэффициенты  $\beta_n$  для интегрального радиоизлучения Луны в виде простого аналитического соотношения:

$$\beta_{n\sigma} = (1 - \beta_n) \exp \left[ -\ln 2 \frac{\sigma^2}{\sigma_{0n}^2} \right] + \beta_n.$$

Значения коэффициентов  $\beta_n$  для различных  $\varepsilon$  и  $\lambda$  определяются из рис. 1—4 (пределным значением  $\beta_n$  для  $\sigma > 40'$ ), а величины  $\sigma_{0n}$  не зависят от  $\lambda$  и принимают значения, приведенные в таблице 1.

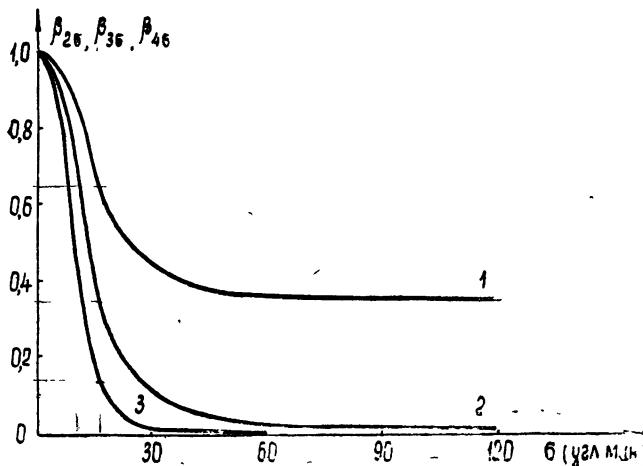


Рис. 4. Зависимость коэффициентов  $\beta_{2\sigma}$  (кривая 1),  $\beta_{3\sigma}$  (кривая 2),  $\beta_{4\sigma}$  (кривая 3) от  $\sigma$ . Коэффициенты  $\beta_{2\sigma}$ ,  $\beta_{3\sigma}$  и  $\beta_{4\sigma}$  практически не зависят от  $\lambda$  и  $\varepsilon$ .

Таблица 1

$\varepsilon$	$\sigma_{00}$ (угл. мин.)	$\sigma_{01}$ (угл. мин.)	$\sigma_{02}$ (угл. мин.)	$\sigma_{03}$ (угл. мин.)	$\sigma_{04}$ (угл. мин.)
1,05	16,5	—	—	—	—
1,2	17,0	—	—	—	—
1,5	17,5	17,5	14,5	13,0	10,0
3,0	18,0	16,5	14,5	13,0	10,0

Усредненная с учетом диаграммы эффективная температура несколько запаздывает по отношению к изменению яркостной температуры центра лунного диска.

Возникающий при усреднении дополнительный сдвиг по фазе не превышает  $-3^\circ$ , если  $\sigma \geq 40'$  (случай интегрального радиоизлучения Луны), и, по-видимому, вызван неравномерностью нагрева лунной по-

верхности\*. При уменьшении ширины диаграммы направленности величина  $\Delta\xi$  уменьшается и ею можно пренебречь.

На рис. 5 для примера приведены рассчитанные для различных  $\sigma$  и численных значений  $T_0(0)$  и  $\varphi_0$ , соответствующих  $\gamma = (K \rho c)^{-1/2} = 400$  [6], фазовые зависимости эффективной температуры Луны, наглядно демонстрирующие влияние усредняющего действия диаграммы направленности антенны.

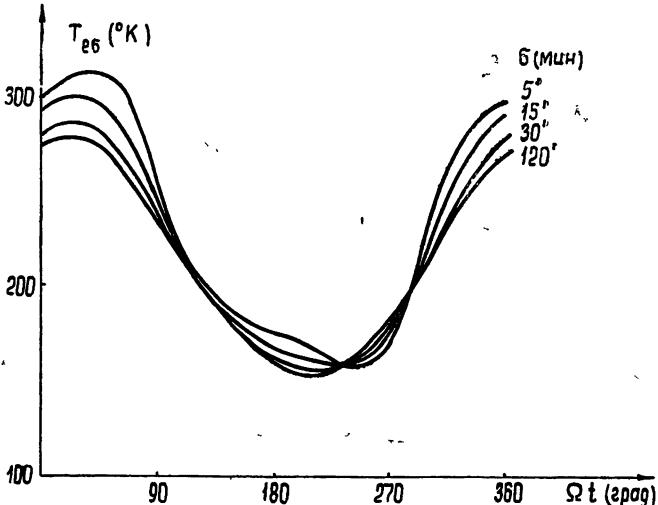


Рис. 5. Фазовая зависимость радиоизлучения Луны на волне 0,4 см для различных значений ширины диаграммы направленности  $\sigma$ .

### 3. НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ

Полученные результаты позволяют более точно производить расчет характерного параметра  $\delta_1$  по экспериментальным данным, полученным с любой диаграммой направленности. Как известно, при экспериментальных исследованиях радиоизлучения Луны на волнах короче 10 см определяется отношение постоянной составляющей эффективной температуры к амплитуде первой гармоники:

$$M_{\text{эксп}} = \bar{T}_{e0}/\bar{T}_{e1}. \quad (8)$$

Это же отношение, полученное из наших расчетов, равно

$$M_{\text{теор}} = \frac{T_0(0)}{T_1(0)} \frac{\beta_{0\sigma}}{\beta_{1\sigma}} \sqrt{1 + 2\delta_1 + 2\delta_1^2}. \quad (9)$$

Приравнивая (8) и (9) и учитывая, что, согласно [5],  $T_0(0)/T_1(0) = 1,5$ , получим соотношение для определения параметра  $\delta_1$  по данным наблюдений:

$$\sqrt{1 + 2\delta_1 + 2\delta_1^2} = \frac{M_{\text{эксп}}}{1,5} \frac{\beta_{0\sigma}}{\beta_{1\sigma}}.$$

Для  $\sigma = 1,5$  (см., например, [4]) был произведен расчет параметра  $\delta_1$  по имеющимся экспериментальным данным. Результаты расчета

\* Этот случай рассмотрен в [2].

Таблица 2

$\lambda$ (см.)	$\sigma$ (угл. мин.)	$\bar{T}_{0e}$ (°К)	$T_{1e}$ (°К)	$M_{\text{эксп}}$	$\beta_{0\sigma}$	$\beta_{1\sigma}$	$\delta_1$	$\delta_1/\lambda$	$\bar{\delta}_1/\lambda$	Литера- тура
0,13	10	216	120	1,8	0,99	0,96	0,2	1,4	1,4	[6]
0,18	6	240	115	2,08	0,995	0,99	0,35	1,95	1,95	[7]
0,4	25	230	73	3,15	0,95	0,85	0,73	1,80	—	[8]
0,4	1,6	228	85	2,7	1	1	0,67	1,7	1,97	[9]
0,4	38	204	54	3,8	0,935	0,81	0,97	2,40	—	[10]
0,8	18	197	32	6,16	0,96	0,91	2,20	2,7	—	[11]
0,8	2	211	40	5,28	1	1	1,95	2,4	2,4	[12]
0,86	12	180	35	5,14	0,985	0,97	1,8	2,1	—	[13]
1,25	45	215	36	6,0	0,935	0,85	2,0	1,6	1,6	[14]
1,63	26	224	36	6,22	0,95	0,89	2,2	1,35	—	[15]
1,6	44	208	37	5,63	0,935	0,86	1,9	1,2	1,35	[16]
1,6	44	207	32	6,47	0,935	0,86	2,3	1,45	—	[17]
2,0	4	190	20	9,5	1	0,99	3,9	1,95	1,95	[18]
3,15	9	195	12	16,2	0,99	0,985	7,1	2,25	—	[19]
3,2	6	223	17	13,1	0,995	0,995	5,6	1,75	—	[20]
3,7	40	245	15,5	16,1	0,94	0,88	6,6	2,05	2,0	[21]
3,2	72	210	13,5	15,5	0,93	0,86	6,3	1,97	—	[22]
3,2	87	213	14	15,2	0,93	0,86	6,1	1,9	—	[23]
9,6	100	218	7	31	0,93	0,87	13,2	1,4	1,4	[24]

представлены в таблице 2. Из нее видно, что средняя величина отношения  $\delta_1$  близка к двум. Некоторое уменьшение этой величины наблюдается на волнах 0,13 и 1,6 см, что, по-видимому, вызвано увеличением коэффициента поглощения этих радиоволн в веществе Луны. Для выявления природы этого эффекта желательно проведение дополнительных измерений на близких волнах. На волне 9,6 см переменная составляющая радиоизлучения весьма мала и параметр  $\delta_1$  измеряется с большей погрешностью, чем на других волнах.

Автор благодарен В. Г. Рябиковой за программирование задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 511 (1954).
2. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 889 (1963).
3. В. Д. Кротиков, О. Б. Щуко, Астрон. ж., 40, 297 (1963).
4. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, 40, 589 (1963).
5. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 39, 73 (1962).
6. Л. Н. Федосеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 655 (1963).
7. А. И. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 848 (1963).
8. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 433 (1961).
9. А. Г. Кисляков, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 431 (1963).
10. А. Г. Кисляков, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 46, (1964).
11. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 35, 129 (1958).
12. А. Е. Саломонович, Б. Я. Лосовский, Астрон. ж., 39, 1074 (1962).
13. I. E. Gibson, Proc. IRE, 46, 480 (1958).
14. I. H. Piddington, N. C. Minnett, Austr. J. Sci. Res., A2, 643 (1949).
15. М. Р. Зелинская, В. С. Троицкий, Л. Н. Федосеев, Астрон. ж., 36, 643 (1959).
16. С. А. Каменская, Б. И. Семенов, В. С. Троицкий, В. П. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 882 (1962).
17. Д. А. Дмитренко, С. А. Каменская, В. Л. Рахлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 555 (1964).
18. А. Е. Саломонович, В. Н. Кощенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 425 (1961).
19. С. Н. Mayeg, T. R. McCullough, R. M. Slonaker, Solar System, 3 Univ. Chicago, 1961.

20. В. Н. Кощенко, Б. Я. Лосовский, А Е Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 596 (1961).
21. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Новое о Луне, изд. АН СССР, М., 1963.
22. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1004 (1964).
23. Л. Н. Бондарь, М Р Зелинская, В А Порфириев, К. М Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 802 (1962).
- 24 В Д Кротиков, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 5, 604 (1962)

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
22 октября 1964 г.

## AVERAGING EFFECT OF ANTENNA RADIATION PATTERN IN MEASUREMENTS OF RADIO EMISSION OF THE MOON

*V. D. Krotikov*

The characteristics of the radio emission of the Moon have been considered when the averaging effect of radiation pattern is taken into account. The radio emission of the Moon obtained is shown to be integral in fact if the pattern width is more than  $40'$ . The calculation results are used for more accurate estimation of the parameter  $\delta_1$  according to the experimental data

УДК 621.371.18

## О РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов, В. П. Силин

С помощью нелинейных интегральных уравнений, описывающих взаимодействие электромагнитных волн в плазме, найдены сечения рассеяния ленгмюровских и поперечных волн с частотами, близкими к электронной ленгмюровской частоте.

Явление рассеяния волн в плазме привлекает в последнее время все большее внимание. Оказывается возможным получить выражения для сечений рассеяния с помощью нелинейного уравнения, описывающего изменение во времени спектральной плотности квадрата флуктуаций электромагнитного поля  $(E_i E_j)_{\omega, k}$  в плазме. Это уравнение имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (E_i E_j)_{\omega, k} & \left\{ \frac{\partial(\omega \varepsilon_{ij}^H(\omega, k))}{\partial \omega} + \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right\} = \\ & = i [\varepsilon_{ij}(\omega, k) - \varepsilon_{ji}^*(\omega, k)] (E_i E_j)_{\omega, k} - 2 \operatorname{Im} \left\{ (E_{j(1)} E_i)_{\omega, k} \times \right. \\ & \times \int d\omega' dk' (E_{j(2)} E_{j(3)})_{\omega', k'} V_{i, j(2), j(1), j(3)}(\omega, k, \omega', k', \omega', k') \} + \quad (1) \\ & + \operatorname{Im} \int d\omega' dk' \left\{ A_{ir}^*(\omega, k) S_{i, j(1), j(2)}(\omega, k, \omega', k') S_{r, j(3), j(4)}^*(\omega, k, \omega', k') \times \right. \\ & \times (E_{j(2)} E_{j(4)})_{\omega', k'} (E_{j(1)} E_{j(3)})_{\omega-\omega', k-k'} + 2 S_{i, j(1), j(2)}(\omega, k, \omega', k') \times \\ & \times A_{j(1), r}(\omega - \omega', k - k') S_{r, j(4), j(3)}(\omega - \omega', k - k', \omega, k) (E_{j(2)} E_{j(4)})_{\omega', k'} \times \\ & \left. \times (E_{j(3)} E_i)_{\omega, k} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_{i, j(2), j(1), j(3)}(\omega, k, \omega', k') & = \varepsilon_{i, j(2), j(1), j(3)}(\omega, k, \omega + \omega', k + k', \omega', k') + \\ & + \varepsilon_{i, j(2), j(3), j(1)}(\omega, k, \omega + \omega', k + k', \omega, k); \quad (2) \end{aligned}$$

$$S_{i, j(1), j(2)}(\omega, k, \omega', k') = \varepsilon_{i, j(1), j(2)}(\omega, k, \omega', k') + \varepsilon_{i, j(2), j(1)}(\omega, k, \omega - \omega', k - k'); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i, j(1), \dots, j(n)}(\omega, k, \omega^{(1)}, k^{(1)}, \dots, \omega^{(n-1)}, k^{(n-1)}) & = \delta_{ni} \delta_{ij} \delta(\omega_1) \delta(k_1) - \\ & - \sum 4\pi (-ie)^{n+1} \int dp \frac{v_i}{\omega} g_+(\omega, k, v) \Gamma_{j(1)} g_+^{(1)} \Gamma_{j(2)} \dots g_+^{(n-1)} \Gamma_{j(n)} f_0(p). \quad (4) \end{aligned}$$

Для случая изотропной плазмы тензор  $A_{ij}(\omega, k)$  и входящие в формулу (4) функции имеют вид

$$A_{ij}(\omega, k) = \left[ \varepsilon_{ij}(\omega, k) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right]^{-1}; \quad (5)$$

$$g_+^{(n)} \equiv g_+(\omega^{(n)}, \mathbf{k}^{(n)}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\omega^{(n)} - \mathbf{k}^{(n)} \cdot \mathbf{v} + i0} ; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{j(n)} &\equiv \Gamma_{j(n)}(\omega^{(n-1)} - \omega^{(n)}, \mathbf{k}^{(n-1)} - \mathbf{k}^{(n)}, \mathbf{p}) = \\ &= \frac{1}{\omega^{(n-1)} - \omega^{(n)} + i0} \left[ \delta_{ij(n)} (\omega^{(n-1)} - \omega^{(n)} - (\mathbf{k}^{(n-1)} - \mathbf{k}^{(n)}) \cdot \mathbf{v}) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{k}^{(n-1)} - \mathbf{k}^{(n)})_i v_{j(n)} \right] \frac{\partial}{\partial p_i}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $f_0(\mathbf{p})$  — медленно изменяющаяся по сравнению с периодом колебаний функция распределения частиц; в формуле (4) суммирование ведется по сортам частиц.

При использовании уравнения (1) для рассмотрения взаимодействия конкретных типов волн надо учитывать, что индекс « $i$ » содержит информацию и о поляризации волны. Тогда, например, для изотропной плазмы уравнение (1) позволяет рассмотреть изменение во времени флюктуаций как продольного, так и поперечного поля.

Пользуясь обычной процедурой расчета, из уравнения (1) можно найти сечения рассеяния, понимая под этой величиной отношение интенсивности рассеянного излучения (с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega$ ) к плотности электронов  $N$  и плотности потока энергии в падающей волне (с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega_1$ ).

Говоря о рассеянии, будем иметь в виду как процесс, при котором тип падающей и рассеянной волн одинаков (например, обе волны поперечные или обе продольные), так и процесс, когда эти волны различны (иногда о последнем процессе говорят как о трансформации волн).

1. Рассмотрим рассеяние ленгмюровской волны с законом дисперсии  $\omega = \omega_{L_e} \left[ 1 + \frac{3}{2} (kr_{D_e})^2 \right]$ , приводящим к образованию ленгмюровской волны. При выполнении неравенства

$$(\omega - \omega_1)^2 = \frac{9}{4} v_{T_e}^2 r_{D_e}^2 (k^2 - k_1^2)^2 \ll v_{T_i}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 \ln \left( \frac{e_i^2 M T_e^3}{e^2 m T_i^3} \right) \quad (8)$$

и при условии, что длины падающей и рассеянной волн меньше  $\lambda_0 \equiv c/\omega_{L_e}$ , сечение определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} d\sigma^u(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) &= \left( \frac{e^2}{m v_{T_e}^2} \right)^2 \frac{d\mathbf{k}}{3\sqrt{2\pi}} \frac{T_i}{T_e} \frac{v_{T_e}}{v_{T_i}} \frac{r_{D_e}}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|} \left[ \frac{r_{D_i}/r_{D_e}}{F + (r_{D_i}/r_{D_e})^2} \right]^2 \left( \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1}{k k_1} \right)^2 \times \\ &\quad \times \exp \left\{ - \frac{9}{8} \frac{v_{T_e}^2}{v_{T_i}^2} r_{D_e}^2 \frac{(k^2 - k_1^2)^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $e$ ,  $e_i$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $T_e$ ,  $T_i$  — заряд, масса и температура соответственно электронов и ионов,  $\omega_{L_e} = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$  — ленгмюровская частота электронов,  $v_{T_e} = \sqrt{\pi T_e/m}$ ,  $v_{T_i} = \sqrt{\pi T_i/M}$ ,  $r_{D_e} = \sqrt{\pi T_e/4\pi Ne^2}$ ,  $r_{D_i} = \sqrt{\pi T_i/4\pi |e| e_i N}$  — соответственно тепловые скорости и дебаевские радиусы электронов и ионов, наконец,

$$F = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{v_{T_i}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2}{(\omega - \omega_1)^2} \gg \left[ \ln \left( \frac{e_i^2 M T_e^3}{e^2 m T_i^3} \right) \right]^{-1} \\ 1 & \text{при } v_{T_i}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 \gg (\omega - \omega_1)^2 \end{cases}. \quad (10)$$

В случае выполнения неравенства, противоположного неравенству (8), имеет место следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma^{ll}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \left( \frac{e^2}{m v_{T_e}^2} \right)^2 d\mathbf{k} \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} r_{D_e}^3 \frac{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1]^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^3}. \quad (11)$$

Формулы (9) и (11) соответствуют учету рассеяния ленгмюровских волн на продольных флюктуациях плотности в плазме. Для длин волн больше  $\lambda_0$  становится существенным и рассеяние на поперечных флюктуациях плотности\*. Соответствующее выражение для сечения рассеяния можно записать в виде

$$d\sigma^{ll}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \left( \frac{e^2}{m v_{T_e}^2} \right)^2 d\mathbf{k} \frac{4}{27\sqrt{2\pi}} r_{D_e}^{-1} \frac{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1]^2}{k_1 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2} \times \times \left[ 2 \frac{c^2}{v_{T_e}^2} + \frac{\pi}{2 r_{D_e}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} + \frac{4}{9} \frac{c^4 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^4}{v_{T_e}^4 (k^2 - k_1^2)^2} \right]^{-1}. \quad (12)$$

Для длин волн больше  $\lambda_0$  сечение определяется наибольшим из выражений (9), (11) и (12). В частности, для некоторых углов между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$  и при некоторых параметрах плазмы (плотности, температуре электронов и ионов) рассеяние происходит на поперечных флюктуациях плотности. Это имеет место, например, при  $k \sim k_1$ ,  $\Delta k = |k - k_1| \sim k$ ,  $\lambda_0^{-1} > k > r_{D_e}^{-1} (v_{T_i}/v_{T_e})$  в случае, когда  $v_{T_i} c^2 \ll v_{T_e}^3$ .

2. Рассмотрим рассеяние ленгмюровских волн с образованием поперечных линейно поляризованных волн с длиной волны больше  $\lambda_0^{**}$ . Частота поперечной волны близка к ленгмюровской частоте и закон дисперсии имеет вид  $\omega = \omega_{L_e}(1 + k^2 \lambda_0^2/2)$ , где  $k \lambda_0 \ll 1$ .

В зависимости от соотношения между частотами и длинами падающей и рассеянной волн сечение имеет различный вид. Если выполнено неравенство

$$(\omega - \omega_1)^2 = \frac{1}{4} \omega_{L_e}^2 (3 k_1^2 r_{D_e}^2 - \lambda_0^2 k^2)^2 \ll v_{T_i}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 \ln \left( \frac{e_i^2 M T_e^3}{e^2 m T_i^3} \right), \quad (13)$$

то сечение определяется формулой

$$d\sigma^{ll}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \left( \frac{e^2}{m v_{T_e}^2} \right)^2 d\mathbf{k} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \frac{v_{T_e}}{v_{T_i}} \frac{T_i}{T_e} r_{D_e} \frac{1}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|} \left( \frac{\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{e}}{k_1} \right)^2 \times \times \left[ \frac{r_{D_i}/r_{D_e}}{F + (r_{D_i}/r_{D_e})^2} \right]^2 \exp \left\{ - \frac{v_{T_e}^2 (3 k_1^2 r_{D_e}^2 - \lambda_0^2 k^2)^2}{8 v_{T_i}^2 r_{D_e}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} \right\}, \quad (14)$$

\* Влияние поперечных флюктуаций плотности на рассеяние поперечных волн в плазме с пучком рассмотрено в работе [3].

\*\* Рассеяние энергии ленгмюровской волны на частицах плазмы с образованием поперечных волн с длинами  $\lambda \ll \lambda_0$  рассмотрено в работе [2].

где  $F$  определено соотношением (10),  $e$  — единичный вектор, совпадающий по направлению с электрическим полем в поперечной волне.

Проведя в формуле (14) усреднение по поляризации поперечной волны, получим сечение рассеяния ленгмюровской волны с образованием неполяризованной поперечной волны с частотой, близкой к ленгмюровской электронной частоте:

$$d\sigma^{lt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \left( \frac{e^2}{mv_{T_e}^2} \right)^2 \frac{dk}{3\sqrt{2\pi}} \frac{v_{T_e} T_i}{v_{T_i} T_e} r_{D_e} \frac{1}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|} \left( \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}_1]}{kk_1} \right)^2 \times \\ \times \left[ \frac{r_{D_i}/r_{D_e}}{F + (r_{D_i}/r_{D_e})^2} \right]^2 \exp \left\{ - \frac{v_{T_e}^2 (3k_1^2 r_{D_e}^2 - \lambda_0^2 k^2)^2}{8 v_{T_i}^2 r_{D_e}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} \right\}. \quad (15)$$

В случае выполнения неравенства, обратного неравенству (13), имеет место следующее выражение для сечения рассеяния:

$$d\sigma^{lt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \left( \frac{e^2}{mv_{T_e}^2} \right)^2 dk \frac{r_{D_e}^3}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k_1^3 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^3} \times \\ \times \{ (\mathbf{k}_1 \mathbf{e})^2 [\mathbf{k} \mathbf{k}_1]^2 + 2 (\mathbf{k} \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}, \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}_1 \mathbf{e})^2 + (\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2 [\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{e}]^2 \}. \quad (16)$$

Сечение рассеяния с образованием неполяризованной поперечной волны получим, проводя соответствующее усреднение в формуле (16):

$$d\sigma^{lt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = (e^2/mv_{T_e}^2)^2 dk \frac{r_{D_e}^3}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^3} \times \\ \times \left\{ \frac{[\mathbf{k} \mathbf{k}_1]^2}{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2} [k^2 k_1^2 - 4(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2 + 2k^2(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)] + 2 \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2}{k_1^2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 \right\}. \quad (17)$$

Если длина поперечной волны много больше длины продольной волны ( $k_1 \gg k$ ), формула (17) может быть также получена из уравнения для нелинейного взаимодействия волн, рассмотренного в работе [4].

Рассеяние ленгмюровских волн на поперечных флуктуациях плотности, в результате которого образуется линейно поляризованная поперечная волна с длиной  $\lambda > \lambda_0$ , определяется сечением

$$d\sigma^{lt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = (e^2/mv_{T_e}^2)^2 dk \frac{r_{D_e}^3}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k_1^3 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^3} \times \\ \times \left\{ \lambda_0^4 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^4 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{v_{T_e}^2} \left[ 1 + \frac{\pi}{4} \lambda_0^{-2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^{-2} \right] [3k_1^2 r_{D_e}^2 - \lambda_0^2 k^2]^2 \right\}^{-1} \times \\ \times \{ [\mathbf{k} \mathbf{k}_1]^2 (\mathbf{k} \mathbf{e})^2 + 2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k}_1) (\mathbf{k} \mathbf{e})^2 + (\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 [\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{e}]^2 \}. \quad (18)$$

Из формулы легко получить сечение рассеяния с образованием неполяризованной волны:

$$d\sigma^{lt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = (e^2/mv_{T_e}^2)^2 dk \frac{r_{D_e}^3}{3\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|} \left[ \frac{(\mathbf{k} \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2}{k^2} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 \right] \times$$

$$\times \left\{ \lambda_0^4 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^4 + \frac{1}{2} \frac{c^2}{v_{T_e}^2} (3 k_1^2 r_{D_e}^2 - \lambda_0^2 k^2)^2 \left[ 1 + \frac{\pi}{4} \lambda_0^{-2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^{-2} \right] \right\}^{-1}. \quad (19)$$

Переход энергии ленгмюровских волн в поперечные волны за счет рассеяния на флуктуациях плотности рассматривался в работе [5]. В полученных там результатах пренебрегалось зависимостью спектральной плотности флуктуаций от длины волны. Поэтому сечение рассеяния с образованием поперечных волн, согласно [5], равно нулю. Этот же вывод следует при предельном переходе  $k_1 \gg k$ ,  $k_1 \rightarrow 0$  в формуле (19).

В заключение этого параграфа укажем, что с помощью уравнения (1) легко получить сечение обратного процесса (рассеяние поперечной волны длиной  $\lambda \gg \lambda_0$  с образованием ленгмюровской волны), а также выражения для сечений при выполнении неравенства  $(\omega - \omega_1)^2 \gg \gg (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 v_{T_e}^2$ , что соответствует рассеянию на крыльях.

3. Переидем к рассмотрению рассеяния линейно поляризованных поперечных волн ( $\lambda \gg \lambda_0$ ) с образованием вновь линейно поляризованной поперечной волны с частотой, близкой к ленгмюровской частоте электронов. Сначала будем считать, что выполнено неравенство

$$(\omega - \omega_1)^2 = \frac{1}{4} \frac{c^4}{\omega_{L_e}^2} (\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_1^2)^2 \ll v_{T_i}^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 \ln \left( \frac{e_i^2 M T_e^3}{e^2 m T_i^3} \right). \quad (20)$$

В этом случае сечение определяется формулой

$$d\sigma^{tt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = (e^2/mc^2)^2 d\mathbf{k} \frac{r_{D_e}}{\sqrt{2\pi}} \frac{c^2}{v_{T_e} v_{T_i}} \frac{T_i}{T_e} (ee_1)^2 \frac{1}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|} \times \\ \times \left[ \frac{(r_{D_i}/r_{D_e})}{F + (r_{D_i}/r_{D_e})^2} \right]^2 \exp \left\{ - \frac{c^4}{8 v_{T_i}^2 \omega_{L_e}^2} \frac{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_1^2)^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} \right\}, \quad (21)$$

где  $e_1$  и  $e$  — вектора поляризации соответственно падающей и рассеянной волн.

Если произвести усреднение по поляризации рассеянной волны, иными словами, считать ее неполяризованной, то из формулы (21) получаем

$$d\sigma^{tt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = (e^2/mc^2)^2 d\mathbf{k} \frac{2 r_{D_e}}{\sqrt{2\pi}} \frac{c^2}{v_{T_e} v_{T_i}} \frac{T_i}{T_e} \left( 1 - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e})^2}{\mathbf{k}^2} \right) \times \\ \times \left[ \frac{(r_{D_i}/r_{D_e})}{F + (r_{D_i}/r_{D_e})^2} \right]^2 \frac{1}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|} \exp \left\{ - \frac{c^4}{8 v_{T_i}^2 \omega_{L_e}^2} \frac{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_1^2)^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} \right\}. \quad (22)$$

Эта формула при  $|e| = |e_1|$  и  $k = k_1$  сводится к соответствующему выражению работы [6] (см. также [7]), где рассмотрено рассеяние поперечных волн произвольной длины волны. Если не только рассеянная волна, но и падающая не поляризованы, сечение имеет вид

$$d\sigma^{tt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = (e^2/mc^2)^2 d\mathbf{k} \frac{r_{D_e}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{c^2}{v_{T_e} v_{T_i}} \frac{T_i}{T_e} \left( 1 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2} \right) \times \\ \times \left[ \frac{(r_{D_i}/r_{D_e})}{F + (r_{D_i}/r_{D_e})^2} \right]^2 \frac{1}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|} \exp \left\{ - \frac{c^4}{8 v_{T_i}^2 \omega_{L_e}^2} \frac{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_1^2)^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} \right\}. \quad (23)$$

Остановимся теперь на случае, когда выполнено неравенство, обратное неравенству (20). Сечение рассеяния поперечных волн тогда определяется формулой

$$\begin{aligned} d\sigma^{tt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = & (e^2/mc^2)^2 d\mathbf{k} \frac{r_{D_e}^3 c^3}{\sqrt{2\pi} v_{T_e}^3} \left\{ 1 + 4 \frac{v_{T_e}^5}{c^5} r_{D_e}^{-4} (\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_1^2)^{-2} \times \right. \\ & \times \left[ 4 \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^4}{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_1^2)^2} + \frac{\pi}{2} \frac{c^2}{v_{T_e}^2} \lambda_0^{-2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^{-2} \right]^{-1} \left. \right\} \frac{1}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^3} \times \\ & \times [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1)^2 [\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{e}]^2 + 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{e})(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_1) + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{e})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_1)] + \\ & + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{e})^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{e}_1]^2]. \end{aligned} \quad (24)$$

Второе слагаемое в фигурной скобке соответствует рассеянию на поперечных флюктуациях; оно может быть при некоторых длинах волн большие единицы.

Усредняя по начальной и конечной поляризациям волн, получим из формулы (24) сечение рассеяния неполяризованных волн:

$$\begin{aligned} d\sigma^{tt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = & (e^2/mc^2)^2 d\mathbf{k} \frac{r_{D_e}^3 c^3}{\sqrt{2\pi} v_{T_e}^3} \frac{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1]^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2} \frac{(\mathbf{k}^2 + \mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)}{k_1 |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|} \times \\ & \times \left\{ 1 + 4 \frac{v_{T_e}^5}{c^5} r_{D_e}^{-4} (\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_1^2)^{-2} \left[ 4 \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^4}{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{k}_1^2)^2} + \frac{\pi}{2} \frac{c^2}{v_{T_e}^2} \frac{1}{\lambda_0^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} \right]^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (1) позволяет написать сечение не только в центре линии, что было сделано выше, но и сечение на крыльях. Здесь эти формулы не приводятся из-за их громоздкости.

4. В этом параграфе рассмотрим два случая комбинационного рассеяния ленгмюровских волн. А именно, благодаря слиянию ленгмюровской волны с другой ленгмюровской волной или с поперечной волной частоты  $\sim \omega_{L_e}$  возможно образование поперечной волны с частотой  $\sim 2\omega_{L_e}$  и абсолютной величиной волнового вектора  $\sqrt{3}\lambda_0^{-1}$ . Сечение для этих процессов имеет вид

$$\begin{aligned} d\sigma^{tt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = & \frac{1}{3} (e^2/mv_{T_e}^2)^2 d\mathbf{k} \frac{r_{D_e}^4}{k_1} \delta \left( 3 - \frac{\mathbf{k}^2 c^2}{\omega_{L_e}^2} \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^t}{\times T_e} \frac{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1]^2}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2} \frac{(\mathbf{k}^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1)^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2} + \frac{W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{tr}}{\times T_e} \frac{k_1^2 [\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}]^2}{\mathbf{k}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $W_{\mathbf{k}}^t$ ,  $W_{\mathbf{k}}^{tr}$  — соответственно плотность энергии на интервал волновых векторов продольных и поперечных волн, на которых происходит рассеяние,  $\mathbf{e}$  — вектор поляризации рассеивающей поперечной волны.

Заметим, что сечение комбинационного рассеяния продольной ленгмюровской волны не зависит от поляризации образующейся поперечной волны, а зависит только от поляризации поперечной волны, на которой происходит рассеяние.

Проведя усреднение по направлению вектора поляризации во втором слагаемом формулы (26), получим

$$d\sigma^{lt}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}) = \frac{2}{3} \left( \frac{e^2}{mv_{T_e}^2} \right)^2 dk \frac{r_{D_e}^4}{k_1} \delta(3 - k^2 c^2 / \omega_{L_e}^2) \times \\ \times \left\{ \frac{W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^l}{xT_e} \frac{[\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}_1]^2}{(k \cdot k_1)^2} \frac{(k^2 - 2kk_1)^2}{(k - k_1)^2} + \frac{1}{2} \frac{W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{lr}}{xT_e} k_1^2 \left( 1 + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2}{k^2(k - k_1)^2} \right) \right\}. \quad (27)$$

Остановимся на случае, когда рассеяние происходит на тепловых шумах. Тогда в формуле (27) следует положить  $W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^l = W_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^{lr} = xT_e$ . (Сечение рассеяния на равновесных флюктуациях может быть также получено с помощью результатов работы [8].) Проведя интегрирование в формуле (27) по  $dk$ , найдем полное сечение. Для рассеяния на продольных флюктуациях оно имеет вид

$$\sigma^{lt}(k_1) = \frac{2\pi}{9} \left( \frac{e^2}{mv_{T_e}^2} \right)^2 r_{D_e}^4 \frac{k}{k_1} k^2 \left\{ \frac{4}{3} (k^2 - k_1^2) + \frac{k_1^2}{2k^2} (k^2 + k_1^2) - \right. \\ \left. - \frac{(k^2 - k_1^2)^2}{4k^3} k_1 \ln \frac{k + k_1}{|k - k_1|} \right\}, \quad (28)$$

где  $k = \sqrt{3} \lambda_0^{-1} \equiv \sqrt{3} (\omega_{L_e}/c)$ . Из формулы (28) следует, что при  $k_1 \gg k$   $\sigma^{lt}(k_1) = \frac{32\pi}{15} r_0^2 \frac{k}{k_1}$ , где  $r_0 = e^2/mc^2$ . В обратном предельном случае  $k_1 \ll k$   $\sigma^{lt}(k_1) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{k}{k_1}$ . Следует заметить, что при  $k_1$ , стремящемся к нулю, сечение бесконечно возрастает по закону  $1/k_1$ .

Для рассеяния ленгмюровской волны на поперечных тепловых флюктуациях полное сечение имеет вид

$$\sigma^{lt}(k_1) = \frac{\pi}{18} \left( \frac{e^2}{mv_{T_e}^2} \right)^2 r_{D_e}^4 k k_1 \left[ 7k^2 - k_1^2 + \frac{(k^2 - k_1^2)^2}{2kk_1} \ln \frac{k + k_1}{|k - k_1|} \right]. \quad (29)$$

В предельном случае  $k_1 \ll k$  сечение принимает значение

$$\sigma^{lt}(k_1) = 4\pi r_0^2 \frac{k_1}{k},$$

а в противоположном предельном случае  $r_{D_e}^{-1} \gg k_1 \gg k$

$$\sigma^{lt}(k_1) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{k_1}{k}.$$

Комбинационное рассеяние ленгмюровских волн на тепловых флюктуациях рассматривалось в работе [5], где были использованы результаты работы [9]. Полученное в [5] выражение для полной интенсивности рассеянной ленгмюровской волны в объеме  $V$  соответствует рассеянию на поперечных флюктуациях при  $k_1 \ll k$ . Заметим, что из сравнения формул (28) и (29) в этом предельном случае видно, что рассеяние на продольных флюктуациях много больше, чем на поперечных.

Наконец, следует отметить, что рассеяние волн в плазме может изучаться также с помощью методики, развитой в работе Гайлитиса и Цытовича [10] применительно к задаче возникновения неполяризованного излучения при рассеянии заряженных частиц на продольных волнах изотропной плазмы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 47, 1437 (1964).
2. А. Гайлитис, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 46, 1726 (1964).
3. Н. В. Шолохов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 452 (1964).
4. А. Гайлитис, В. Н. Цытович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1190 (1964).
5. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж., 35, 699 (1958).
6. M. N. Rosenbluth, N. Rostoker, Phys. Fluids, 5, 776 (1962).
7. В. Д. Шафранов, Сб. Вопросы теории плазмы, 3, Атомиздат, М., 1963.
8. Ф. Г. Васс, В. Я. Бланк, ЖЭТФ, 43, 1479 (1962).
9. А. И. Ахиезер, А. Г. Прихода, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 33, 750 (1957).
10. А. Гайлитис, В. Н. Цытович, ЖЭТФ (в печати).

Физический институт им П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
12 сентября 1964 г.

### ON ELECTROMAGNETIC WAVES SCATTERING IN PLASMA

*L. M. Gorbunov, V. V. Pustovalov, V. P. Sillin*

By nonlinear integral equations describing the electromagnetic wave interaction in plasma there have been determined the scattering effective area for Langmuir and transverse waves when frequencies being near to Langmuir's frequency for electron.

УДК 533.951

## ТРАНСФОРМАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

*И. А. Данелия, Н. Л. Цинцадзе*

Исследованы процессы трансформации электромагнитных и плазменных волн на критических флюктуациях поперечного и продольного поля в плазме. Показано, что коэффициенты трансформации сильно возрастают вблизи границы неустойчивости. Изучено влияние поля вторичной волны на усредненное распределение частиц по скоростям.

**1.** Теорию рассеяния и трансформации электромагнитных волн на тепловых флюктуациях в равновесной, а также в неравновесной плазме можно считать в достаточной мере разработанной [1–6]. Нелинейность уравнений, описывающих плазму, приводит к взаимодействию волн друг с другом, в результате чего происходит рассеяние волн, а также трансформация волны одного типа в волну другого типа. В неравновесной плазме благодаря росту флюктуаций электромагнитных полей вблизи границы неустойчивости наблюдается аномальное рассеяние [8–9] и трансформация [8] волн—явление, аналогичное явлению «критической опалесценции». В неравновесной плазме (системе пучок—плазма) возможны неустойчивости не только по отношению к продольным, но и по отношению к низкочастотным поперечным волнам [12].

В настоящей работе рассмотрены вопросы трансформации поперечных и продольных электромагнитных волн на критических флюктуациях поперечного (продольного) поля. Показано, что коэффициент трансформации в этих процессах сильно нарастает при приближении плазмы к неустойчивому состоянию. Исследовано явление «спонтанного поглощения», связанное с превращением двух флюктуационных поперечных волн в продольную. Приведено кинетическое уравнение для функции распределения частиц с учетом обратного влияния вторичных волн, порожденных нелинейным взаимодействием колебаний.

**2.** Запишем выражение для амплитуды вторичной волны, образующейся в результате взаимодействия двух волн, распространяющихся в плазме.

Будем исходить из полной системы уравнений, описывающих плазму. Разлагая функции распределения частиц, электрическое и магнитное после в ряд по малым амплитудам взаимодействующих волн, для членов  $n$ -го порядка получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \right) f_q^{(n)} + \frac{e_q}{m_q} \left( \mathbf{E}^{(n)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}^{(n)}] \right) \frac{\partial f_q^{(0)}}{\partial \mathbf{v}} = \\
 & = - \frac{e_q}{m_q} \sum_{n'=1}^{n-1} \left( \mathbf{E}^{(n')} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}^{(n')}] \right) \frac{\partial f_q^{(n-n')}}{\partial \mathbf{v}}; \\
 & \text{rot } \mathbf{H}^{(n)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{(n)}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_q l_q \int \mathbf{v} f_q^{(n)} d\mathbf{v}; \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\text{div } \mathbf{E}^{(n)} = 4\pi \sum_q e_q \int f_q^{(n)} d\mathbf{v};$$

$$\text{rot } \mathbf{E}^{(n)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial t};$$

$$\text{div } \mathbf{H}^{(n)} = 0,$$

где  $f_q$  — функция распределения частиц  $q$ -го сорта, имеющих массу  $m_q$  и заряд  $e_q$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — электрическое и магнитное поле волны.

Решая уравнения (1), для фурье-компонент поля вторичной волны получим следующее выражение:

$$E_i^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \sum_q e_q^3 D_{ij}^{-1} \int d\mathbf{k}' d\omega' E_\alpha^{(1)}(\mathbf{k}', \omega') E_\beta^{(1)}(\mathbf{k}'', \omega'') Q_{j\alpha\beta}^q,$$

где

$$\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \quad \omega'' = \omega - \omega'; \quad (2)$$

$$D_{ij} = k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega).$$

В случае, когда фазовая скорость рассеянной волны больше направленной скорости электронов, для вторичной продольной волны

$$D_{ij}^{-1l}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{k_i k_j}{k^2} \frac{1}{\epsilon^l(\mathbf{k}, \omega)};$$

для поперечной волны

$$D_{ij}^{-1tr}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\delta_{ij} - k_i k_j / k^2}{k^2 - \epsilon^{tr}(\mathbf{k}, \omega)}$$

( $\epsilon^l$ ,  $\epsilon^{tr}$  — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости плазмы).

Выражение (2) описывает как процесс рассеяния и трансформации поперечной сторонней (флуктуационной) волны на критических флуктуациях продольных (поперечных) волн, так и рассеяние и трансформацию продольных волн.

Коэффициент трансформации имеет вид

$$Q_{j\alpha\beta}^q = \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \left\{ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}'\mathbf{v}}{\omega'} \right) \frac{\partial}{\partial p_\alpha} + \frac{k'_i v_\alpha}{\omega'} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\partial f_q^{(0)}}{\partial p_\beta} \frac{1 - \mathbf{k}''\mathbf{v}/\omega''}{\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}} + \frac{k''_i v_\beta}{\omega''} \frac{\partial f_q^{(0)}/\partial p_i}{\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}} \right\}.$$

Для процессов взаимодействия высокочастотной электромагнитной волны с поперечными низкочастотными флуктуациями

$$Q_{j\alpha\beta}^q = -\pi i n_0 \left( \frac{m_q}{2\pi T_q} \right)^{1/2} \frac{1}{k'' m_q^2 \omega} \left( \frac{k_\beta \delta_{\alpha j} + k_\alpha \delta_{j\beta}}{\omega} + \frac{k'_\beta \delta_{\alpha i} + k'_i \delta_{\alpha\beta}}{\omega'} \right). \quad (3)$$

В случае трансформации высокочастотного поля на продольных критических флуктуациях

$$Q_{j\alpha\beta}^q = \frac{n_0}{m_q^2 \omega \omega''} \left( \frac{k_\beta \delta_{\alpha j} + k_\alpha \delta_{j\beta}}{\omega} + \frac{k'_\beta \delta_{\alpha i} + k'_i \delta_{\alpha\beta}}{\omega'} \right). \quad (4)$$

Интенсивность трансформации волн будем характеризовать изменением квадрата амплитуды вторичной волны в единицу времени:

$$\Sigma \equiv \frac{d}{dt} \langle E^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) \rangle^2 = \int d\mathbf{k} \quad (5)$$

(символ  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по флюктуациям). Для случаев, когда одна из сталкивающихся волн является сторонней ( $E^{(1)}(\mathbf{r}, t) = E^{(1)}(\mathbf{k}_0, \omega_0) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega_0 t}$ ), введем коэффициент трансформации в виде

$$d\sigma = \frac{d\Sigma}{|E_0^{(1)}|^2}. \quad (6)$$

Запишем общее выражение интенсивности трансформации, справедливое для любого процесса, рассматриваемого ниже:

$$d\Sigma = \frac{4\pi^2 \omega^4}{c^4} \sum_{k' \omega'} \sum_q \sum_{q'} e_q^3 e_{q'}^3 Q_{j\alpha\beta}^q Q_{jpl}^{q'} \langle E_\alpha^{(1)} E_p^{(1)*} \rangle_{k' \omega'} \times \\ \times \langle E_\beta^{(1)} E_l^{(1)} \rangle_{k'' \omega''} \frac{dk}{(2\pi)^3}. \quad (7)$$

3. Исследуем трансформацию сторонней поперечной электромагнитной волны  $T(E^{(1)}(\mathbf{k}_0, \omega_0))$  на продольных критических флюктуациях  $L^k$  с выходом в продольную высокочастотную волну:

$$T + L^k \rightarrow L.$$

Поскольку трансформация происходит на флюктуациях продольного поля,

$$\langle E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(1)} \rangle_{k'' \omega''} = |\varphi_\alpha|^2_{k'' \omega''} k''_\alpha k''_\beta. \quad (8)$$

Коррелятор продольных флюктуационных колебаний в неравновесной плазме имеет вид [10, 11]:

$$|\varphi_\alpha|^2_{k'' \omega''} = \frac{4\pi T_1 \Omega^2}{k''^2 (\omega'' - k'' u)} \delta(\omega''^2 - \Omega_k^2), \quad (9)$$

где

$$\Omega_k^2 = \Omega^2 + 3\Omega^2(a k'')^2 - (\Omega \Omega_1)^2 \frac{m}{k''^2 T_1},$$

$\Omega$ ,  $\Omega_1$  — ленгмюровская частота плазмы и пучка соответственно,  $T_1$  — температура пучка (температура везде записана в энергетических единицах).

Проведем усреднение по всем направлениям поля подающей сторонней волны  $E^{(1)}(\mathbf{k}_0, \omega_0)$  в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{k}$ :

$$\langle E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(1)} \rangle_{k_0 \omega_0} = \frac{1}{2} |E_0|^2 \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_{0\alpha} k_{0\beta}}{k_0^2} \right). \quad (10)$$

После соответствующих подстановок в выражение (7) и несложного интегрирования для коэффициента трансформации получим следующее выражение:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{12\pi^3 n^2 Q^2}{c^4 u^5} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} \sum_q \sum_{q'} \frac{e_q^3 e_{q'}^3 T_q^{1/2} T_{q'}^{1/2}}{m_q^2 m_{q'}^2} \left| \ln \left( 1 - \frac{k_0 u \cos \theta}{\Omega} \right) \right|, \quad (11)$$

где  $d\theta = 2\pi \sin \theta d\theta$ ,  $\theta$  — угол между направлением распространения сто-

ронней волны и волновым вектором флуктуационной волны. В выражении (11) оставлен только логарифмический член, вносящий основной вклад в коэффициент трансформации при  $k_0 u \cos \theta / \Omega \sim 1$ .

В работе [12] было показано, что низкочастотные электромагнитные волны при распространении под углом  $\pi/2$  к направлению пучка могут стать неустойчивыми. Исследуем дисперсионное соотношение для таких волн:

$$\Delta = \left[ \left( \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2} - \frac{c^2 k^2}{\omega_{Li}^2} - \frac{m_i}{m_e} J_+(z_e) - J_+(z_i) \right) \left( k^2 R_{Di}^2 + \frac{T_i}{T_e} (1 - J_+(z_e)) \right) + \right. \\ \left. + (1 - J_+(z_i)) + \frac{u^2}{v_{Te}^2} \frac{m_i}{m_e} (1 - J_+(z_e)) (1 + k^2 R_{Di}^2 - J_+(z_e)) \right] = 0, \quad (12)$$

где

$$J_+(z) = ze^{-z^2/2} \int_0^z e^{x^2/2} dx - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} ze^{-z^2/2},$$

$$R_D = \sqrt{\frac{T}{4\pi n e^2}}, \quad z_q = \frac{\omega}{kv_{Tq}} = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m_q}{T_q}}.$$

Разлагая функции  $J_+(z_e)$  и  $J_+(z_i)$  в ряд Тейлора в области частот  $z_i, z_e \ll 1$  из (12), получим

$$z_i = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(c^2 k^2 / \omega_{Li}^2) (1 + T_i / T_e + k^2 R_{Di}^2) - (m_i u^2 / m_e v_{Te}^2) (1 + k^2 R_{Di}^2)}{(1 + m_i v_{Ti} / m_e v_{Te}) (1 + T_i / T_e + k^2 R_{Di}^2) + m_i u^2 / m_e v_{Te}^2}. \quad (13)$$

При условии

$$u^2 \sim u_{kp}^2 = c^2 k^2 R_{De}^2 \frac{1 + T_i / T_e + k^2 R_{Di}^2}{1 + k^2 R_{Di}^2} \quad (14)$$

величина  $z_i$  стремится к нулю. Таким образом, выражение (14) определяет границу неустойчивости.

Очевидно, представляет интерес изучить процессы трансформации волн на флуктуациях поперечных полей вблизи границы неустойчивости. Коррелятор электромагнитных полей имеет вид

$$\langle E_\beta^{(1)} E_p^{(1)} \rangle_{k'' \omega''} = \sum_q \left( \frac{4\pi e_q \omega''}{c} \right)^2 D_{\beta r}^{-1}(\omega'' \mathbf{k}'') D_{pl}^{*-1}(\omega'' \mathbf{k}'') \times \\ \times \int \frac{v'_q v'_q}{c^2} n_q f_q \delta(\omega'' - (\mathbf{k}'' \mathbf{v})) d\mathbf{p}_q, \quad (15)$$

где

$$D_{ij}(\omega'' \mathbf{k}'') = \frac{k'_i k'_j}{k''^2} \left\{ \frac{\omega''^2}{c^2} \epsilon^{(2)ij} + \frac{(\omega'' - \mathbf{k}'' \mathbf{u})^2}{c^2} (\epsilon^{(1)ij} - 1) \right\} + \\ + \left( \delta_{ij} - \frac{k'_i k'_j}{k''^2} \right) \left\{ \frac{\omega''^2}{c^2} \epsilon^{(2)tr} + \frac{(\omega'' - \mathbf{k}'' \mathbf{u})^2}{c^2} (\epsilon^{(1)tr} - 1) - k''^2 \right\} + \\ + \frac{k'_i u_j - k'_j u_i}{k''^2 u} \left\{ \frac{(\omega'' - \mathbf{k}'' \mathbf{u}) \mathbf{k}''}{c^2} (\epsilon^{(1)ij} - 1) \right\} + \frac{u_i u_j}{u^2} \left\{ \frac{k''^2 u^2}{c^2} (\epsilon^{(1)ij} - 1) \right\}.$$

С учетом условия  $(\mathbf{k}'' \mathbf{u}) = 0$  после несложных, но громоздких преобразований получим

$$\begin{aligned}
\langle E_{\beta}^{(1)} E_p^{(1)} \rangle_{k'' \omega''} = & \sum_q \left( \frac{4\pi e_q \omega}{c} \right)^2 \frac{n_q I_q^{(1)}}{2\pi k'' v_{Tq}} \left\{ \frac{|b+d|^2}{|\Delta|^2} \frac{k_{\beta}'' k_p''}{k''^2} \left( \frac{\omega''}{ck''} \right)^2 + \right. \\
& + \frac{1}{|b|^2} \left( \frac{v_a^2}{c^2} \left( \delta_{\beta p} - \frac{k_{\beta}'' k_p''}{k''^2} \right) + \frac{u_{\beta} u_p}{c^2} \right) + \frac{(b+d)}{b^* \Delta} \frac{\omega''}{ck''} \frac{k_{\beta}'' u_p}{ck''} - \\
& - \frac{(b+d)g^*}{|\Delta|^2} \frac{\omega''}{ck''} \left( \frac{k_{\beta}'' k_p''}{k''^2} \frac{u}{c} + \frac{k_{\beta}'' u_p}{k'' u} \frac{\omega''}{ck''} \right) + \\
& + \frac{(b+d)(g^2 - ad)^*}{b^* |\Delta|^2} \frac{\omega''}{ck''} \frac{k_{\beta}'' u_p}{ck''} - \frac{g^*}{b^* \Delta} \left( \frac{\omega''}{ck''} \frac{u_{\beta} u_p}{cu} + \frac{u_{\beta} k_p''}{ck''} \frac{u}{c} \right) - \quad (16) \\
& - \frac{(b+d)^* g}{|\Delta|^2} \frac{\omega''}{ck''} \left( \frac{u}{c} \frac{k_{\beta}'' k_p''}{k''^2} + \frac{\omega''}{ck''} \frac{k_p'' u_{\beta}}{k'' u} \right) - \frac{g}{b^* \Delta} \left( \frac{\omega''}{ck''} \frac{u_{\beta} u_p}{cu} \right) + \\
& + \left( \frac{k_{\beta}'' u_p}{ck''} \frac{u}{c} \right) + \frac{(g^2 - ad)}{|b|^2 \Delta} \frac{u_{\beta} u_p}{c^2} \left( 1 + \frac{v_a^2}{u^2} \right)^2 - \frac{g}{b^* \Delta} \left( 1 + \frac{v_a^2}{u^2} \right) \frac{k_{\beta}'' u_p}{ck''} \frac{u}{c} + \\
& \left. + \frac{(g^2 - ad)}{|b|^2 \Delta} \frac{u_{\beta} u_p}{c^2} \left( 1 + \frac{v_a^2}{u^2} \right) \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\omega''^2}{c^2} \epsilon^{(2)\ell} + \frac{\omega''^2}{c^2} (\epsilon^{(1)\ell} - 1); \\
b &= \frac{\omega''^2}{c^2} \epsilon^{(2)\ell r} + \frac{\omega''^2}{c^2} (\epsilon^{(1)\ell r} - 1) - k''^2; \\
g &= \frac{\omega'' k'' u}{c^2} (\epsilon^{(1)\ell} - 1); \\
d &= \frac{k''^2 u^2}{c^2} (\epsilon^{(1)\ell} - 1); \\
I_q &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-z_q^2/2}.
\end{aligned} \quad (17)$$

Исследуем процесс трансформации сторонней поперечной естественно поляризованной волны на критических флуктуациях низкочастотного поперечного поля:

$$T + T^* \rightarrow L.$$

(Процесс  $L + T^* \rightarrow L$  рассчитывается аналогично; достаточно учесть, что  $E_2^{(1)}(\mathbf{k}_0 \omega_0) = -ik_0^0 \varphi(\mathbf{k}_0 \omega_0)$ .) Подставляя в (7) выражение (3) и учитывая (10), после несложных преобразований получаем, что коэффициент трансформации

$$\begin{aligned}
d \sigma(k, \omega) = & \frac{4\sqrt{2} \pi^{5/2} n^4 \omega^2 c^2 v_{\pi}^3}{\Omega_i^4} \sum_q \sum_{q'} \left( \frac{1}{m_{q'}^3 T_{q'}} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{m_q^3 T_q^3} \right)^{1/2} \times \\
& \times e_q^5 e_{q'}^5 \left[ \frac{(k - k_0)^4 - k_0(k - k_0)^3}{\omega^2} + \frac{k_0(k - k_0)^3}{\omega \omega_0} + \frac{\frac{2}{3} k_0^2 (k - k_0)^2}{\omega_0^2} \right] \times
\end{aligned} \quad (18)$$

$$\times (k - k_0)^6 \{ [c^2 \omega_{Li}^{-2} (k - k_0)^2 (1 + T_i/T_e) - m_i u^2/m_e v_{Te}^2]^2 + \\ + (\pi/2) z_i^2 [(1 + m_i v_i/m_e v_e)(1 + T_i/T_e) + m_i u^2/m_e v_{Te}^2] \}^{-2} dk/(2\pi)^3.$$

Если состояние плазмы близко к неустойчивому:  $(u \sim u_{kp})$ ,  $z_i \rightarrow 0$ , коэффициент трансформации стремится к бесконечности как  $1/z_i^2$ . С этим связана и расходимость полного сечения трансформации  $\sigma = \int d\Omega$ .

Таким образом, учет низкочастотных электромагнитных волн приводит к появлению полюса второго порядка в дифференциальном сечении трансформации на частоте  $\omega = 0$  при приближении к неустойчивому состоянию, тогда как вблизи неустойчивого состояния продольных волн имеется полюс первого порядка в дифференциальном сечении трансформации на частоте  $\omega \approx kv_0 \cos \vartheta$ .

5. В плазме всегда возможно существование различных флуктуационных волн, которые в линейном приближении оказываются не зависящими друг от друга. В действительности же из-за нелинейности уравнений, описывающих плазму, каждая из этих волн может рассеяться или трансформироваться в волну другого типа.

В частности, возможен процесс трансформации продольной флукутационной волны на поперечных низкочастотных флукутациях  $L^\Phi + T^k \rightarrow T$  (индекс ф означает флукутационную волну); возможен также процесс рассеяния  $L^\Phi + T^k \rightarrow L$ .

Для примера рассмотрим процесс  $T^\Phi + T^k \rightarrow L$ , соответствующий «спонтанному поглощению» высокочастотной поперечной волны флукутационного происхождения. Для нахождения коэффициента трансформации в этом случае воспользуемся выражением (7). Подставляя в (7) выражение (3), учитывая, что коррелятор флукутаций высокочастотного поперечного поля в плазме без столкновений

$$\langle E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(1)} \rangle_{k' \omega'} = \frac{4\pi T}{\omega'} \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k'_\alpha k'_\beta}{k'^2} \right) \delta \left( \varepsilon^{tr} - \frac{k'^2 c^2}{\omega'^2} \right)$$

и принимая во внимание выражение (17) для флукутаций низкочастотного поперечного поля  $\langle E_\alpha^{(1)} E_\beta^{(1)} \rangle_{k'' \omega''}$ , после несложного интегрирования по  $k'$  получим

$$d\Sigma = \frac{24\pi^3 n^4 \Omega_i^6 v_{Ti}^3}{\omega c^8} \sum_q \sum_{q'} \left( \frac{1}{m_q^3 T_q} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{m_{q'}^3 T_{q'}} \right)^{1/2} e_q^5 e_{q'}^5 \times \\ \times \left( \frac{m_i}{m_e} \frac{u^2}{v_{Te}^2} \right)^5 \left( 1 + \frac{T_i}{T_e} \right)^5 \frac{1}{[(1 + m_i v_i/m_e v_e)(1 + T_i/T_e) + m_i u^2/m_e v_{Te}^2]^2} \frac{1}{z_i} \frac{dk}{(2\pi)^3}. \quad (19)$$

Из выражения (19) следует, что в случае, если удовлетворяется условие (14), коэффициент трансформации растет как  $1/z_i$ .

6. Как известно, квазилинейная теория [12] учитывает обратное влияние колебаний плазмы на усредненное распределение частиц по скоростям, но не учитывает нелинейное взаимодействие между волнами, которое в ряде случаев может существенно влиять на распределение частиц. В работе [13] получено кинетическое уравнение для частиц, которое отличается от квазилинейного кинетического уравнения дополнительными членами, описывающими влияние взаимодействия волн на релаксационные процессы.

Как было показано выше, а также в работе [6], нелинейное взаимодействие волн в устойчивой плазме приводит к рождению нового типа

вторичных волн, поле  $E^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)$  которых будет со своей стороны влиять на усредненное распределение частиц по скоростям. Учитывая обратное влияние вторичных волн и взаимодействие волн между собой на функцию распределения частиц, получим

$$\frac{\partial f_q^{(0)}}{\partial t} = \frac{e^2}{m^2} \sum_{\mathbf{k}} N_{ij} \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\gamma_k}{(\omega_k - \mathbf{k}v)^2 + \gamma_k^2} \frac{\partial f_q}{\partial v_j} + \frac{e^2}{m^2} \sum_{\mathbf{k}} M_{ij} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{\gamma_k}{(\omega_k - \mathbf{k}v)^2 + \gamma_k^2} \times$$

$$\times \frac{\partial f_q}{\partial v_j} + J_m \left( \frac{e}{m} \right)^2 \sum_{\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' = \mathbf{k}} D_{ij}^{-1} L_{j\alpha\beta}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') \{N_{\alpha j}(\mathbf{k}') N_{\beta e}(\mathbf{k}'') +$$

$$+ N_{\alpha e}(\mathbf{k}'') N_{\beta j}(\mathbf{k}')\} \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{1}{\omega_{k'} - \mathbf{k}'v} \frac{\partial}{\partial v_j} \frac{1}{\omega_{k''} - \mathbf{k}''v} \frac{\partial f_q}{\partial v_e},$$

где  $N_{ij} = \langle E_i^{(1)} E_j^{(1)} \rangle$ ;  $M_{ij} = \langle E_i^{(2)} E_j^{(2)} \rangle$ ,  $E_i^{(2)}$  определяется выражением (2),

$$L_{j\alpha\beta}(\mathbf{k}' \mathbf{k}'') = - \sum_q \frac{8\pi e_q^2}{m_q^2 \omega_k \omega_k''} \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega_k - \mathbf{k}v} \times$$

$$\times \left\{ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}'v}{\omega'} \right) \frac{\partial}{\partial v_j} + \frac{k'_e v_j}{\omega_{k'}} \frac{\partial}{\partial v_e} \right\} \times \left\{ \frac{\partial f_q}{\partial v_\beta} + \frac{k'_e v_\beta}{\omega_{k''} - \mathbf{k}v} \frac{\partial f_q}{\partial v_e} \right\}.$$

Квадратичные по  $N_{ij}$  члены становятся существенными, когда из-за образования «плато» на функции распределения слагаемые, пропорциональные  $\partial f_q / \partial v$  при  $v \sim \omega/k \gg v_T$  ( $v_T$  — тепловая скорость частиц), обращаются в нуль.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 41, 644 (1961).
- 2 J. P. Dougherty, D. T. Farley, Proc. Roy. Soc., A259, 79 (1960).
- 3 M. N. Rosenbluth, N. Rostoker, Phys. Fluids., 5, 776 (1962).
- 4 Ф. Г. Басс, А. Я. Бланк, ЖЭТФ, 43, 1479 (1962).
- 5 А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, ЖЭТФ, 33, 1354 (1963).
- 6 В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж., 36, 964 (1958).
- 7 И. А. Даниэлия, Н. Л. Цинцадзе, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 95 (1964).
- 8 И. А. Ахиезер, И. А. Даниэлия, Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ, 46, 300 (1964).
- 9 Н. В. Шолохов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 452 (1964).
- 10 S. Ishimura, D. Pines, N. Rostoker, Phys. Rev. Letters, 8, 23 (1962).
- 11 Л. С. Богданович, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1093 (1962).
- 12 В. П. Маханьков, А. А. Рухадзе, Ядерный синтез, 2, 4 (1962).
- 13 А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, Приложение 2, 465 (1962).

Институт физики АН Груз. ССР,  
Тбилисский государственный университет

Поступила в редакцию  
25 апреля 1964 г.

#### ELECTROMAGNETIC WAVE TRANSFORMATION IN NONEQUILIBRIUM PLASMA

I. A. Daneliya, N. L. Tsintsadze

The processes have been investigated of electromagnetic and plasma waves transformation on the critical fluctuations of transverse and longitudinal field in plasma. The transformation coefficients are shown to increase greatly near the instability threshold. The influence of the secondary wave field upon the averaged velocity distribution of particles has been studied.

УДК 533.91

## ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА

И. П. Якименко

Найдено спектральное распределение мощности теплового излучения магнитоактивной плазмы, ограниченной цилиндрической поверхностью. В случае изотропной плазмы соотношения, полученные в работе, переходят в известные формулы Рытова [1] для теплового излучения диэлектрического цилиндра. Исследован случай тонкого плазменного стержня, когда условия геометрической оптики не выполняются и применение классической теории теплового излучения становится невозможным.

1. Теория электромагнитных флюктуаций в неограниченной плазме, находящейся в магнитном поле, получила в последнее время интенсивное развитие во многих работах [2–4]. Последовательное изложение большинства интересных вопросов, относящихся к этой теории, проведено в недавно вышедшей книге Ситенко [5]. Эта теория позволяет провести строгое решение таких прикладных задач, как определение спектрального состава теплового излучения плазмы, вычисление характеристик волн, рассеянных на флюктуациях, и т. д. При решении этих задач естественно предполагать, что плазма заключена в некотором конечном объеме, например, ограничена цилиндрической поверхностью конечного радиуса. Поскольку дисперсионные свойства плазменного волновода резко отличаются от дисперсионных соотношений для неограниченной плазмы, характеристики флюктуирующих величин также претерпевают резкое изменение.

Некоторые результаты, относящиеся к вычислению корреляционных функций флюктуирующих полей, а также дифференциального коэффициента рассеяния волн на флюктуациях плотности заряда в плазменном волноводе, изложены в работе [6]. В этой работе, однако, рассматривается только случай изотропной плазмы; кроме того, функция корреляции вычисляется только для симметричных волн.

При вычислении мощности теплового излучения плазменного волновода произвольного радиуса  $a$ , находящегося во внешнем постоянном магнитном поле  $H_0$  (что является целью настоящей работы), необходимо рассматривать всю сумму несимметричных волн с индексами  $n$  (этот индекс определяет угловую зависимость поля). Лишь последующий анализ полученных общих результатов позволяет выяснить, в каких случаях можно выделить какое-либо колебание с индексом  $n$ .

Полученное в работе решение задачи о тепловом излучении плазменного волновода может быть использовано как для определения тепловых шумов различных систем с магнитоактивной плазмой (например, для строгого анализа работы шумовых генераторов), так и для диагностики плазмы (определения ее температуры и плотности).

2. Средние значения квадратичных форм любых электромагнитных флюктуирующих величин могут быть вычислены на основании флюктуационно-диссипационной теоремы с помощью известных тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей среды.

Ограничивааясь гидродинамическим приближением, запишем тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы в виде

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon & i\eta & 0 \\ -i\eta & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Компоненты  $\epsilon_{ik}$  являются комплексными и без учета движения ионов:

$$\begin{aligned} \epsilon' &= 1 + \frac{(1 - x^2/u^2 - \delta^2) l^2}{(1 - x^2/u^2 + \delta^2)^2 + 4(x^2/u^2) \delta^2}; \\ \epsilon'' &= \frac{(1 + x^2/u^2 + \delta^2)(u/x) l^2 \delta}{(1 - x^2/u^2 + \delta^2)^2 + 4(x^2/u^2) \delta^2}; \\ \eta' &= - \frac{(u/x)(1 - x^2/u^2 - \delta^2) l^2}{(1 - x^2/u^2 + \delta^2)^2 + 4(x^2/u^2) \delta^2}; \\ \eta'' &= - \frac{2l^2 \delta}{(1 - x^2/u^2 + \delta^2)^2 + 4(x^2/u^2) \delta^2}; \\ \epsilon'_z &= 1 - \left(\frac{lu}{x}\right)^2; \quad \epsilon''_z = \left(\frac{lu}{x}\right)^2 \frac{u\delta}{x}, \end{aligned} \quad (2)$$

где для удобства вычислений введены следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\omega a}{c}, \quad u = \frac{\omega_H a}{c}, \quad l = \frac{\omega_0}{\omega_H}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m}}, \\ \delta &= \frac{v}{\omega_H}, \quad \omega_H = |\gamma| H_0 \end{aligned} \quad (3)$$

( $n_e$  — плотность электронов в плазме,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $v$  — эффективная частота соударений,  $a$  — характерный размер системы).

Представим поля в виде интегралов Фурье по  $z$  и  $t$  и рядов Фурье по  $\varphi$ :

$$E(z, t, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{n\beta\omega} e^{-i(\omega t - \beta z - n\varphi)} d\beta d\omega. \quad (4)$$

Поскольку для плазмы  $\mu = 1$ , исходная система уравнений для фурье-компонент флуктуационного электромагнитного поля с учетом «сторонних» электрических индукций  $K$  имеет вид (индексы  $n$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  мы в дальнейшем писать не будем)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= ikH, \\ (\operatorname{rot} H)_t &= -ik(\epsilon_{ik} E_k + K_t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $k = \omega/c$  — волновое число в свободном пространстве. Введем линейную комбинацию

$$\psi' = H_z + i\Lambda \sqrt{\epsilon_z} E_z. \quad (6)$$

Тогда система (5) преобразуется в неоднородные уравнения для  $\psi'$ :

$$\Delta \psi'_i + \gamma_i^2 \psi'_i = F_i, \quad (7)$$

где  $\gamma_i^2$  определяются из соотношений

$$\gamma_{1,2}^2 = a_1 - b\Lambda_{2,1} = a_2 + b\Lambda_{1,2}. \quad (8)$$

При этом

$$a_1 = \frac{\epsilon_z}{\epsilon} (k^2 \epsilon - \beta^2), \quad a_2 = k^2 \frac{\epsilon^2 - \eta^2}{\epsilon} - \beta^2, \quad b = \frac{\beta k \eta \sqrt{\epsilon_z}}{\epsilon}, \quad (9)$$

а  $\Lambda_{1,2}$  являются корнями квадратного уравнения

$$\Lambda^2 + \frac{a_2 - a_1}{b} \Lambda - 1 = 0. \quad (10)$$

$F_i$  в (7) — линейные функционалы от «сторонних» индукций  $K$ :

$$F_{1,2} = - \frac{i\Lambda_{1,2}\gamma_{1,2}^2}{\sqrt{\epsilon_z}} K_z + \frac{nk}{r} K_r - \frac{inkb_{1,2}}{r} K_\varphi - \\ - \frac{kb_{1,2}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rK_r) + \frac{ik}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rK_\varphi), \quad (11)$$

где

$$b_{1,2} = - \frac{\beta^2 - k^2 \epsilon + \gamma_{1,2}^2}{k^2 \eta}. \quad (12)$$

Пользуясь уравнениями (5) и (6), можно выразить все составляющие поля в плазме через функции

$$\psi_{1,2} = \pm \frac{ik\Lambda_{2,1}}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)\gamma_{1,2}^2} \psi'_{1,2}. \quad (13)$$

Действительно,

$$E_z = - \frac{\Lambda_1 \gamma_1^2}{k \sqrt{\epsilon_z}} \psi_1 - \frac{\Lambda_2 \gamma_2^2}{k \sqrt{\epsilon_z}} \psi_2; \\ E_\varphi = - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{nb_1}{r} \psi_1 - \frac{nb_2}{r} \psi_2 - \frac{ik^4 \eta}{\delta_1} K_r + \\ + \frac{k^2 (\beta^2 - k^2 \epsilon)}{\delta_1} K_\varphi; \quad (14)$$

$$E_r = ib_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + ib_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{in}{r} \psi_1 + \frac{in}{r} \psi_2 + \frac{k^2 (\beta^2 - k^2 \epsilon)}{\delta_1} K_r + \frac{ik^4 \eta}{\delta_1} K_\varphi;$$

$$H_z = - \frac{i\gamma_1^2}{k} \psi_1 - \frac{i\gamma_2^2}{k} \psi_2;$$

$$H_\varphi = - i\Lambda_1 \sqrt{\epsilon_z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - i\Lambda_2 \sqrt{\epsilon_z} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{i\beta}{k} \frac{n\psi_1}{r} + \frac{i\beta}{k} \frac{n\psi_2}{r} + \\ + \frac{i\beta k^3 \eta}{\delta_1} K_\varphi + \frac{\beta k (\beta^2 - k^2 \epsilon)}{\delta_1} K_r;$$

$$H_r = \frac{\beta}{k} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\beta}{k} \frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \Lambda_1 V \bar{\epsilon}_z \frac{n \psi_1}{r} - \Lambda_2 V \bar{\epsilon}_z \frac{n \psi_2}{r} + \\ + \frac{i \beta k^3 \gamma}{\delta_1} K_r - \frac{\beta k (\beta^2 - k^2 \bar{\epsilon}_z)}{\delta_1} K_\varphi,$$

где

$$\delta_1 = \frac{\bar{\epsilon}_z}{\epsilon_z} \gamma_1^2 \gamma_2^2. \quad (15)$$

Функции  $\psi_{1,2}$ , которые необходимы теперь для решения задачи, находятся из неоднородных уравнений (7) с помощью функции Грина для рассматриваемой задачи:

$$\psi_{1,2} = A_{1,2} J_n(\gamma_{1,2} r) + \Phi_{1,2}, \quad (16)$$

где

$$\Phi_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2} \frac{k \Lambda_{2,1}}{(\Lambda_2 - \Lambda_1) \gamma_{1,2}^2} H_n^{(1)}(\gamma_{1,2} a) \int_0^a dr r f_{1,2}, \quad (17)$$

$$f_{1,2} = - \frac{i \Lambda_{1,2} \gamma_{1,2}^2}{V \bar{\epsilon}_z} J_{n+1,2} K_z - \frac{i n k b_{1,2}}{r} J_{n+1,2} K_\varphi + \\ + \frac{n k}{r} J_{n+1,2} K_r + k b_{1,2} J'_{n+1,2} K_r - i k J'_{n+1,2} K_\varphi. \quad (18)$$

Здесь  $J_{ni} = J_n(\gamma_i, r)$ ,  $A_{1,2}$  — постоянные.

3. Поля в свободном пространстве ( $\epsilon = 1$ ,  $K = 0$ ) являются решениями волновых уравнений для вакуума и могут быть представлены в виде

$$E_z = B_1 H_n^{(1)}(\gamma r); \\ E_\varphi = - \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{n \beta}{r} B_1 H_n^{(1)}(\gamma r) + i k B_2 \frac{\partial H_n^{(1)}(\gamma r)}{\partial r} \right\}; \\ H_z = B_2 H_n^{(1)}(\gamma r); \\ H_\varphi = - \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{n \beta}{r} B_2 H_n^{(1)}(\gamma r) - i k B_1 \frac{\partial H_n^{(1)}(\gamma r)}{\partial r} \right\}; \\ \gamma^2 = k^2 - \beta^2. \quad (19)$$

Тогда интересующий нас поток мощности теплового излучения в радиальном направлении с единицы длины цилиндра

$$P_\omega = \frac{2 c k}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 e^{i(\beta-\beta_1)} \frac{|B_1|^2 + |B_2|^2}{\gamma^2}. \quad (20)$$

Черта сверху означает усреднение по равновесному распределению состояний.

Как показано в работе [1], область интегрирования по  $\beta$  сведена в (20) к интервалу  $(-k, +k)$  из-за наличия в подынтегральном выражении множителя  $H'H^* - H^*H$ ; физически это означает дифракционное сглаживание структуры поля, связанное с конечностью размеров

цилиндра. При излучении в среду с комплексными параметрами этот эффект, очевидно, уже не будет иметь места; тогда, как будет видно из дальнейшего, более существенную роль в тепловом излучении плазменного цилиндра будут играть особенности дисперсионного уравнения для волн в этой системе.

4. Пользуясь граничными условиями на поверхности раздела плазма—вакуум (равенство тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей), можно представить коэффициенты  $B_i$  в виде линейных функционалов от  $\mathbf{K}$ :

$$B_i = \frac{\delta_{ik}\varphi_k}{\Delta} \quad (k = 1, 2), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{1,1,2} &= \frac{k(\alpha_1\Lambda_{2,1} + \beta_1\sqrt{\epsilon_z})}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)\gamma_{1,2}^2 J_{1,2} H}; \quad \delta_{2,1,2} = -\frac{ik(\alpha_2\Lambda_{2,1} + \alpha_1\sqrt{\epsilon_z})}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)\gamma_{1,2}^2 J_{1,2} H}; \\ \varphi_{1,2} &= \pm \frac{i}{a} \int_0^a dr r f_{1,2}; \quad \Delta = \alpha_1^2 - \beta_1 \alpha_2; \\ \alpha_1 &= -\frac{k\sqrt{\epsilon_z}}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)\gamma_1^2} \frac{J'_1}{J_1} + \frac{k\sqrt{\epsilon_z}}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)\gamma_2^2} \frac{J'_2}{J_2} + \frac{n\beta\epsilon_z(\beta^2 - k^2\epsilon)}{a\epsilon\gamma_1^2\gamma_2^2} + \\ &\quad + \frac{n\beta}{a\gamma^2}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= k \left\{ \frac{\Lambda_1\epsilon_z}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\gamma_1^2} \frac{J'_1}{J_1} + \frac{\Lambda_2\epsilon_z}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)\gamma_2^2} \frac{J'_2}{J_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\beta^2\eta\epsilon_z}{a\epsilon\gamma_1^2\gamma_2^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{H'}{H} \right\}; \end{aligned}$$

$$\beta_1 = k \left\{ -\frac{\Lambda_2}{(\Lambda_1 - \Lambda_2)\gamma_1^2} \frac{J'_1}{J_1} - \frac{\Lambda_1}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)\gamma_2^2} \frac{J'_2}{J_2} + \frac{n\kappa^2\eta\epsilon_z}{a\epsilon\gamma_1^2\gamma_2^2} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{H'}{H} \right\};$$

$$J_{1,2} = J_n(\gamma_{1,2}a); \quad H = H_n^{(1)}(\gamma a).$$

Равенство

$$\Delta = 0 \quad (23)$$

представляет собой дисперсионное уравнение для несимметричных электромагнитных волн в плазменном волноводе, помещенном в продольное магнитное поле.

Поскольку коэффициенты  $B_i$ , как видно из (21), представлены в виде линейных функционалов от  $\mathbf{K}$ , квадратичные формы, входящие в (20), могут быть усреднены с помощью известных корреляционных функций для «сторонних» индукций  $\mathbf{K}$ :

$$\langle K_{i\omega\beta}^{(1)} K_{k\omega\beta_1}^{(2)*} \rangle = \frac{i\hbar}{4\pi^2} (\epsilon_{kl}^* - \epsilon_{ik}) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_1} \delta(\beta - \beta_1). \quad (24)$$

После усреднения и интегрирования (одно интегрирование по  $r$  выполняется сразу из-за наличия  $\delta$ -функции, второе производится с по-

мощью известных свойств функций Бесселя) приходим к следующему окончательному результату для мощности теплового излучения на частоте  $\omega$  с единицы поверхности плазменного цилиндра, находящегося в продольном магнитном поле (в классическом случае  $\hbar\omega \ll T$ ):

$$P_\omega = \frac{T}{\pi^4 a^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} \frac{d\beta}{\gamma^2 |\Delta|^2} (-1)^{i+k} f_{ik} \delta_{il} \delta_{lk}^*. \quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_{ik} &= \frac{\epsilon''_z}{|\epsilon_z|} \gamma_i^2 \gamma_k^{*2} \Delta_i \Delta_k^* I_1^{ik} + k^2 [\epsilon'' (1 + b_i b_k^*) - \eta'' (b_i + b_k^*)] I_2^{ik} + \\ &\quad + nk^2 [\epsilon'' (b_i + b_k^*) - \eta'' (1 + b_i b_k^*)] I_3^{ik}; \\ I_1^{ik} &= \frac{J_{ni} J_{nk}^{*'} - J_{ni}' J_{nk}^*}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}} a; \quad I_2^{ik} = \frac{\gamma_i^2 J_{ni} J_{nk}^{*'} - \gamma_k^{*2} J_{nk}^* J_{ni}'}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}} a; \\ I_3^{ik} &= J_{ni} J_{nk}^*. \end{aligned}$$

Все индексы в (25) принимают значения 1 и 2.

Как видно из (25), флюктуационное излучение плазменного цилиндра состоит из бесконечной суммы колебаний с индексами  $n$ . Заметим, что функция  $\Delta$  — левая часть дисперсионного уравнения для волн, распространяющихся в плазменном волноводе, имеет корни лишь при  $\beta > k$ . Таким образом, мощность теплового излучения имела бы резкие максимумы, связанные с дисперсионными свойствами системы, если интегрировать по всем значениям  $\beta$ . Это возможно, как было отмечено выше, при излучении в среду с комплексными параметрами, а также при вычислении запасенной флюктуационной энергии.

Если магнитное поле равно нулю (изотропная плазма), то

$$\begin{aligned} \epsilon_z = \epsilon, \quad \eta = 0, \quad \Delta_{1,2} = \mp 1, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = k^2 \epsilon - \beta^2 = \lambda^2, \\ b_{1,2} = \pm \frac{\beta}{k \sqrt{\epsilon}}, \quad \gamma^2 = \lambda_0^2. \end{aligned} \quad (26)$$

При' условиях (26)

$$\begin{aligned} f_{ik} &= \frac{\epsilon''}{|\epsilon|} \{ (-1)^{i+k} |\lambda|^4 I_1 + [k^2 |\epsilon| + \beta^2 (-1)^{i+k}] I_2 + nk^2 |\epsilon| (b_i + b_k^*) I_3 \}; \\ I_1 &= \frac{J_n J_n^* - J_n' J_n^*}{\lambda^2 - \lambda_0^{*2}} a; \quad I_2 = \frac{\lambda^2 J_n J_n^* - \lambda^{*2} J_n^* J_n'}{\lambda^2 - \lambda_0^{*2}} a; \quad I_3 = J_n J_n^*; \\ \delta_{1,2} &= \frac{k^2 (\pm \delta - \sqrt{\epsilon} \Delta_1)}{2\lambda^2 \lambda_0^2 J^2 H^2}; \quad \delta_{2,1} = - \frac{i k^2 (\mp \Delta_2 + \sqrt{\epsilon} \delta)}{2\lambda^2 \lambda_0^2 J^2 H^2}; \quad (27) \end{aligned}$$

$$\Delta = - \frac{k^2}{\lambda_0^2 J^2 H^2} (\Delta_1 \Delta_2 - \delta^2); \quad \Delta_1 = H' J - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} H J';$$

$$\Delta_2 = H' J - \frac{\epsilon \lambda_0^2}{\lambda^2} H J'; \quad \delta = \frac{\beta n}{ka} \left( 1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) H J.$$

Последние обозначения введены в книге Рытова [1].

Подставляя (27) в (25), получим для потока мощности с единицы поверхности изотропного цилиндра с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  следующее выражение:

$$P_\omega = \frac{\epsilon'' T}{\pi^4 a^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} d\beta \frac{\lambda_0^2}{|\lambda|^4 |\Delta_1 \Delta_2 - \delta^2|^2} \{ k^2 (|\delta|^2 + |\Delta_2|^2) I_2 + \quad (28)$$

$$+ (|\delta|^2 + |\Delta_1|^2) (|\lambda|^4 I_1 + \beta^2 I_2) - n \beta k [\delta (\Delta_1^* + \Delta_2^*) + \delta^* (\Delta_1 + \Delta_2)] I_3 \}.$$

Формула (28) — известный результат для мощности теплового излучения диэлектрического цилиндра, полученный в [1].

5. Особый интерес представляет случай тонкого цилиндра, когда условия геометрической оптики не выполняются и классическая теория теплового излучения не может быть применена. Полагая, что

$$\gamma_i a \ll 1, \quad (29)$$

воспользуемся приближенными значениями функций Бесселя при малых аргументах:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n, \quad J'_0(\gamma_i a) = -\frac{\gamma_i^2 a}{2}, \quad J'_n(\gamma_i a) = \frac{1}{(n-1)! a} \left( \frac{\gamma_i a}{2} \right)^n, \\ H_0^{(1)}(x) &= \frac{2i}{\pi} \ln \frac{x}{2}, \quad H_n^{(1)}(x) = -\frac{i(n-1)!}{\pi} \left( \frac{2}{x} \right)^n, \\ H_0^{(1)\prime}(\gamma a) &= \frac{2i}{\pi a}, \quad H_n^{(1)\prime}(\gamma a) = \frac{in!}{\pi a} \left( \frac{2}{\gamma a} \right)^n. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (25), легко получить, что мощность колебаний с  $n = 0$  пропорциональна радиусу стержня  $a$  (с единицы поверхности цилиндра), а мощность колебаний с  $n \geq 1$  пропорциональна  $a^{2|n|-1}$ . Таким образом, при малых  $a$  основной вклад в полную мощность теплового излучения дают колебания с  $n = 0$  и  $n = 1$ . При этом, как следует из (25) при условиях (30), для  $n = 0$

$$P_{\omega 0} = \frac{T k^3 a \epsilon_z''}{6 \pi^2} \quad (31)$$

и для  $n = 1$

$$P_{\omega 1} = \frac{2 T k^3 a}{3 \pi^2} \frac{\epsilon'' - \eta''}{|1 + \epsilon - \eta|^2}. \quad (32)$$

Как видно,  $P_{\omega 0}$  и  $P_{\omega 1}$  пропорциональны  $a$ , тогда как уже при  $n = 2$

$$P_{\omega 2} = \frac{T k^5 a^3}{20 \pi^2} \frac{\epsilon'' - \eta''}{|1 + \epsilon - \eta|^2}. \quad (33)$$

Нетрудно видеть, что при малых  $a$

$$P_{\omega 2} \ll P_{\omega 1}.$$

Интересно, что мощность  $P_{\omega 0}$ , излучаемая плазменным цилиндром, равна мощности излучения диэлектрического цилиндра с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_z$  [1]. Однако даже в случае тонкого диэлектрического цилиндра существенен учет колебания  $n = 1$ , если только  $|\epsilon + 1|^2$  не слишком велико. В случае плазмы при определенных условиях основной вклад дает именно это колебание. Если

$$\operatorname{Re}(1 + \varepsilon - \eta) = 0, \quad (34)$$

что имеет место, как видно из (2), при

$$l^2 = -2 \frac{x}{u} \left(1 - \frac{x}{u}\right) \quad (\delta \ll 1, \frac{x}{u} \neq 1), \quad (35)$$

то

$$\frac{\varepsilon'' - \eta''}{|1 + \varepsilon - \eta|^2} = \frac{1}{\varepsilon'' - \eta''} = \frac{ul^2}{4x\delta}. \quad (36)$$

Поскольку  $\delta = v/\omega_H$  обычно мало ( $< 10^{-3}$ ), то при условии (34) действительно имеется резкий максимум теплового излучения.

6. Как показано в работах Рытова [1], поток мощности флукуационного излучения может быть вычислен без привлечения флукуационно-диссипационной теоремы на основании известных коэффициентов поглощения парциальных волн в рассматриваемой системе. Падающую волну естественно представить в виде суперпозиции  $E$ - и  $H$ -волн. Обозначив коэффициенты поглощения этих волн через  $A_E$  и  $A_H$ , представим поток мощности теплового излучения с единицы поверхности цилиндра в виде

$$P_\omega = \frac{T}{8\pi^2 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} (A_E + A_H) d\beta. \quad (37)$$

Коэффициенты  $A_E$  и  $A_H$  можно определить, зная падающее и отраженное поля, а также поле в области, занятой плазмой ( $r < a$ ). Отраженное поле сохраняет вид (19), поле в плазме получается из (14) при  $K=0$ , а падающее поле отличается от отраженного заменой  $H \rightarrow H^*$  и постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} E_z &= C_1 H_n^{(1)*}(\gamma r), \\ E_\varphi &= -\frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{n\beta}{r} C_1 H_n^{(1)*}(\gamma r) + ik C_2 H_n^{(1)*}(\gamma r) \right\}, \\ H_z &= C_2 H_n^{(1)*}(\gamma r), \\ H_\varphi &= -\frac{1}{\gamma^2} \left\{ \frac{n\beta}{r} C_2 H_n^{(1)*}(\gamma r) - ik C_1 H_n^{(1)*}(\gamma r) \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Если падает  $E$ -волна, то отраженное поле содержит  $E$ - и  $H$ -волны. Поэтому

$$A_E = 1 - \frac{(|B_1|^2 + |B_2|^2)_{C_2=0}}{|C_1|^2}, \quad A_H = 1 - \frac{(|B_1|^2 + |B_2|^2)_{C_1=0}}{|C_2|^2}. \quad (39)$$

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих на границе раздела можно выразить  $B_i$  через  $C_i$ , что позволяет установить коэффициенты поглощения, а следовательно, и мощность  $P_\omega$ . Окончательный результат имеет вид

$$\begin{aligned} P_\omega = -\frac{kT}{2\pi^4 a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-k}^{+k} \frac{d\beta}{\gamma^2 |H|^2} &\left\{ 2 \operatorname{Im} \frac{\alpha_2 + \beta_1}{\Delta} + \frac{4k}{\pi a \gamma^2 |H|^2 |\Delta|^2} \times \right. \\ &\left. \times (|\beta_1|^2 + |\alpha_2|^2 + 2|\alpha_1|^2) \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Можно показать, что (40) эквивалентно (25). В частности, для тонкого цилиндра при  $n = 1$

$$\Delta = - \frac{2k^2(\epsilon - \eta + 1)}{a^2\gamma^2 [k^2(\epsilon - \eta) - \beta^2]}, \quad (41)$$

$$\frac{\alpha_2 + \beta_1}{\Delta} = - \frac{a}{k} \left\{ \frac{3k^2 - \beta^2}{2} - \frac{\beta^2 + k^2}{\epsilon - \eta + 1} \right\}$$

и из (40) получаем

$$P_{\omega_1} = \frac{2Tk^3a}{3\pi^2} \frac{\epsilon'' - \eta''}{|1 + \epsilon - \eta|^2}.$$

Последнее выражение совпадает с (32). Следует подчеркнуть, однако, что для численных расчетов формула (40) предпочтительнее.

Метод, основанный на определении коэффициентов поглощения, пригоден, к сожалению, только при определении потока мощности теплового излучения и не может быть применен при решении других вопросов, например, при вычислении полной плотности флюктуационной энергии. Такие вопросы должны решаться на основании общей теории электромагнитных флюктуаций, последовательно примененной в настоящей работе к вычислению мощности теплового излучения плазменного цилиндра в магнитном поле. Поля в объеме, занятом плазмой, в частности, могут быть записаны в виде (14), где учитываются «сторонние» электрические индукции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Теория электрических флюктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953
2. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 41, 288 (1961); ЖЭТФ, 41, 1859 (1961)
3. В. П. Силин, ЖЭТФ, 41, 969 (1961).
4. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 41, 644 (1961).
5. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флюктуации в плазме, изд. Харьк. ун-та, 1965
6. И. П. Якименко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 375 (1964).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
7 сентября 1964 г

#### THERMAL RADIATION OF PLASMA CYLINDER

I. P. Yakimenko

The spectral power distribution has been found of the thermal radiation of a magneto-active plasma cylinder. In the case of an isotropic plasma the relations obtained yield the known Rylov's formulae [1] for the thermal radiation of the dielectric cylinder. The case of a thin plasma rod has been studied. Here the geometric optics approximation is invalid and the classical theory of thermal radiation is not applied.

УДК 621.371

## К ТЕОРИИ РЕФРАКЦИИ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Г. И. Скрыпник

Предложен вариационный метод расчета угла рефракции в слоисто-неоднородной среде, основанный на приближенном суммировании ряда по степенным функционалам от электронной концентрации  $\Phi(z)$  (или по отклонению показателя преломления от единицы). На конкретных примерах линейного и параболического профилей проиллюстрирована точность этого метода расчета рефракции

1. Рассмотрим сначала случай плоско-слоистой среды. Интегрирование уравнения луча дает в данном случае следующее соотношение для угла рефракции  $\alpha$  (см. [1]):

$$\operatorname{tg}(\theta_0 + \alpha) = \frac{\sin \theta_0}{h} \int_0^h \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta_0}}, \quad (1)$$

где  $n$  — показатель преломления, а остальные обозначения пояснены на рис. 1. Здесь предполагается, что в точке наблюдения  $n = 1$ .

При заданных  $n$ ,  $h$  и  $\theta_0$  (1) представляет собой уравнение, из которого должен быть определен угол рефракции\*. Последний можно найти из (1), разлагая правую часть в ряд по степеням  $1 - n^2(z) = a\Phi(z)^{**}$  (см. [2]) или, что то же самое, разлагая  $\alpha(\Phi)$  в функциональный ряд Тейлора [1]. Ниже мы получим достаточно простые и точные соотношения для  $\alpha$ , выполняя приближенное суммирование ряда.

Разложим  $\alpha(\Phi)$  в функциональный ряд Тейлора следующего вида:

$$\alpha[\Phi(\zeta)] = \alpha[0] + \int_0^h F(z) \Phi(z) dz + \frac{1}{2!} \int_0^h \int_0^h G(z_1, z_2) \Phi(z_1) \times$$

$$\times \Phi(z_2) dz_1 dz_2 + \frac{1}{3!} \int_0^h \int_0^h \int_0^h H(z_1, z_2, z_3) \Phi(z_1) \Phi(z_2) \Phi(z_3) dz_1 dz_2 dz_3 + \dots, \quad (2)$$

$$\times \Phi(z_2) dz_1 dz_2 + \frac{1}{3!} \int_0^h \int_0^h \int_0^h H(z_1, z_2, z_3) \Phi(z_1) \Phi(z_2) \Phi(z_3) dz_1 dz_2 dz_3 + \dots,$$

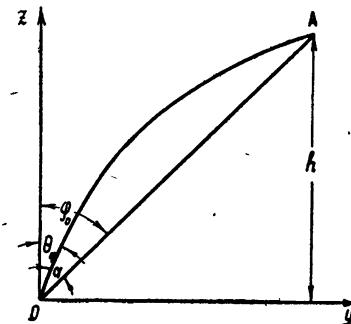


Рис. 1.

\* Если вместо угла прихода  $\theta_0$  задано зенитное расстояние источника  $\varphi_0$ , то решение данной рефракционной задачи  $\alpha(\varphi_0)$  может быть найдено из  $\alpha(\theta_0)$  с помощью линейного преобразования  $\varphi_0 = \alpha + \theta_0$ .

\*\* В случае ионосферы  $a = f_c^2/f^2$  и  $\Phi$  — функция распределения электронной концентрации по высоте.

где функции  $F(z)$ ,  $G(z_1, z_2)$ ,  $H(z_1, z_2, z_3)$  и т. д. являются вариационными производными функционала  $\alpha(\Phi)$  в точке  $\Phi = 0$ :

$$F(z) = \left[ \frac{\delta \alpha[\Phi(\zeta)]}{\delta \Phi(z)} \right]_{\Phi=0}, \quad G(z_1, z_2) = \left[ \frac{\delta^2 \alpha[\Phi(\zeta)]}{\delta \Phi(z_1) \delta \Phi(z_2)} \right]_{\Phi=0}, \quad (3)$$

$$H(z_1, z_2, z_3) = \left[ \frac{\delta^3 \alpha[\Phi(\zeta)]}{\delta \Phi(z_1) \delta \Phi(z_2) \delta \Phi(z_3)} \right]_{\Phi=0}.$$

Выполняя функциональное дифференцирование соотношения (1) (см., например, [3]) и полагая затем  $\Phi = 0$ ,  $\alpha = 0$ , найдем функции (3). Подставляя их значения в (2), приходим к следующему разложению для угла рефракции:

$$\begin{aligned} \alpha(\Phi) = & \frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta_0 \bar{\Phi} + a^2 \left[ \frac{3}{8} \operatorname{tg} \theta_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \bar{\Phi}^2 - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^3 \theta_0 (\bar{\Phi})^2 \right] + \\ & + a^3 \left[ \frac{5}{16} \operatorname{tg} \theta_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0)^2 \bar{\Phi}^3 - \frac{3}{8} \operatorname{tg}^3 \theta_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0) \bar{\Phi} \bar{\Phi}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{24} \operatorname{tg}^3 \theta_0 (3 \operatorname{tg}^2 \theta_0 - 1) (\bar{\Phi})^3 \right] + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где введены обозначения

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{h} \int_0^h \Phi(z) dz, \quad \bar{\Phi}^2 = \frac{1}{h} \int_0^h \Phi^2(z) dz, \quad \bar{\Phi}^3 = \frac{1}{h} \int_0^h \Phi^3(z) dz.$$

Выполним приближенное суммирование ряда (4). Для этой цели найдем значение угла рефракции в точке  $\Phi = \Phi^*(z, b_1, b_2, \dots)$ , соответствующей некоторой интегрируемой, зависящей от нескольких параметров функции. Аналитический вид функции  $\Phi^*(z, b_1, b_2, \dots)$  выберем так, чтобы вновь полученный ряд суммировался. В этом случае интеграл в правой части соотношения (1) должен выражаться через элементарные функции. Параметры  $b_1, b_2, \dots$ , от которых зависит суммирующая функция  $\Phi^*$ , подберем таким образом, чтобы несколько последующих приближений ряда (4) и вновь составленного ряда совпадали. Тогда выражение  $\alpha[\Phi^*(b_1, b_2, \dots)]$  будет давать приближенное значение угла рефракции  $\alpha[\Phi(z)]$  тем точнее, чем большее число членов выше упомянутых рядов совпадают. При этом точность получаемого выражения заведомо лучше точности, даваемой тем приближением, до которого производится сравнение членов разложений  $\alpha(\Phi)$ ,  $\alpha(\Phi^*)$ .

Получим несколько приближенных соотношений для угла рефракции, используя различные суммирующие функции  $\Phi^*$ . Выберем в качестве  $\Phi^*$  наиболее простую функцию (рис. 2)

$$\Phi_1^*(z, b_1, h_1) = \begin{cases} b_1 & (0 \leq z \leq h_1) \\ 0 & (z > h_1) \end{cases}, \quad (5)$$

зависящую от двух параметров  $b_1$ ,  $h_1$ .

Подставляя (5) в (1), выполняя интегрирование и производя несложные тригонометрические преобразования, приходим к следующему выражению:

$$\operatorname{tg} \alpha(\Phi_1^*) = \operatorname{tg} \theta_0 \frac{[(1 - a_0 b_1)^{-1/2} - 1] h_1 h^{-1}}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 [(1 - a_0 b_1)^{-1/2} h_1 h^{-1} + 1]}, \quad (6)$$

где  $a_0 = a \cos^{-2} \theta_0$ . Значения неизвестных параметров  $b_1, h_1$  определяем из условия равенства первых двух членов ряда  $\alpha(\Phi)$  и  $\alpha(\Phi^*)$ , которое имеет место при  $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1^*$  и  $\bar{\Phi}^2 = \bar{\Phi}_1^{*2}$ . Решая эти уравнения, получим

$$b_1 = \frac{\bar{\Phi}^2}{\bar{\Phi}}, \quad h_1 = \frac{(\bar{\Phi})^2}{\bar{\Phi}^2} h. \quad (7)$$

Аналогичным образом для более сложной суммирующей функции

$$\Phi_2^*(z, b_2, h_1, h_2) = \begin{cases} b_2 z & (h_1 \leq z \leq h_2) \\ 0 & (z < h_1, z > h_2) \end{cases}, \quad (8)$$

зависящей от трех параметров, находим приближенное выражение угла рефракции:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha(\Phi_2^*) = \operatorname{tg} \theta_0 \left[ \frac{2}{h a_0 b_2} (\sqrt{1 - a_0 b_2 h_1} - \sqrt{1 - a_0 b_2 h_2}) - \right. \\ \left. - \frac{h_2 - h_1}{h} \right] \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \left[ 1 - \frac{h_2 - h_1}{h} + \frac{2}{h a_0 b_2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\sqrt{1 - a_0 b_2 h_1} - \sqrt{1 - a_0 b_2 h_2}) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Три независимых параметра  $b_2, h_1, h_2$  должны удовлетворять алгебраической системе уравнений, вытекающей из равенства третьих приближений  $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_2^*$ ,  $\bar{\Phi}^2 = \bar{\Phi}_2^{*2}$ ,  $\bar{\Phi}^3 = \bar{\Phi}_2^{*3}$ :

$$\begin{aligned} b_2(h_2^2 - h_1^2) = 2h\bar{\Phi}, \quad b_2^2(h_2^3 - h_1^3) = 3h\bar{\Phi}^2, \\ b_2^3(h_2^4 - h_1^4) = 4h\bar{\Phi}^3. \end{aligned} \quad (10)$$

Данная система имеет различные решения при  $\bar{\Phi}^3 \bar{\Phi} > (\bar{\Phi}^2)^2 \geq 0,889 \bar{\Phi}^3 \bar{\Phi}$  и  $(\bar{\Phi}^2)^2 > \bar{\Phi}^3 \bar{\Phi}$ . Во втором случае, охватывающем наибольший класс функций  $\Phi$ , оно имеет следующий вид:

$$b_2 = \frac{1}{2h\bar{\Phi}} AB, \quad h_2 = h\bar{\Phi} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right), \quad h_1 = h\bar{\Phi} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right). \quad (11)$$

Здесь

$$A = \left( 6 \frac{\bar{\Phi}^3}{\bar{\Phi}} - 3 \frac{\bar{\Phi}^2}{\bar{\Phi}} B \right)^{1/2}, \quad B = \frac{3}{2} \frac{\bar{\Phi}^2}{\bar{\Phi}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{8}{9} \frac{\bar{\Phi}^3 \bar{\Phi}}{(\bar{\Phi}^2)^2} \right)^{1/2} \right].$$

С помощью функции (8) можно получить более простую, но менее точную, чем (9), формулу угла рефракции, если, например, вместо (10) удовлетворить условиям  $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_2^*$ ,  $\bar{\Phi}^2 = \bar{\Phi}_2^{*2}$ . Один из трех параметров подберем так, чтобы соотношение (9) заметно упростилось. Положим в (9)  $h_1 = 0$ ; тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha(\Phi_2^*) = \operatorname{tg} \theta_0 \left[ \frac{2}{h a_0 b_2} (1 - \sqrt{1 - a_0 b_2 h_2}) - \frac{h_2}{h} \right] \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \frac{h_2}{h} + \frac{2}{h a_0 b_2} (1 - \sqrt{1 - a_0 b_2 h_2}) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

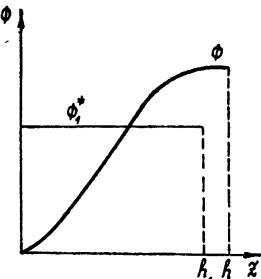


Рис. 2.

Величины  $b_2, h_2$  в этом случае будут определяться также более простыми выражениями:

$$b_2 = \frac{9}{8} \frac{(\bar{\Phi}^2)^2}{(\bar{\Phi})^3} \frac{1}{h}, \quad h_2 = \frac{4}{3} \frac{(\bar{\Phi})^2}{\bar{\Phi}^2} h. \quad (13)$$

Рассмотренным выше методом можно произвести суммирование ряда (4), применяя другие функции (например, параболическую, экспоненциальную и т. д.), для которых интеграл в (1) берется. Для повышения точности получаемых выражений необходимо вводить большее число параметров (например, вместо функции (5) можно использовать ступенчатую функцию с большим числом параметров).

Отметим еще одну важную особенность соотношений, получаемых методом приближенного суммирования. Конечное число членов разложения (4), как нетрудно убедиться, всегда дает заниженное значение угла рефракции. Знак погрешности любого приближения положителен. В отличие от этого вариационные соотношения могут давать как заниженный, так и завышенный результат в зависимости от вида суммирующей функции. Найдем выражение, определяющее знак погрешности формул (6) и (12). Для этого вычтем из (4) аналогичное разложение  $\alpha(\Phi^*)$  для суммирующей функции, зависящей от двух параметров. В результате получим

$$\alpha(\Phi) - \alpha(\Phi^*) = \frac{5}{16} \alpha^3 \operatorname{tg} \theta_0 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0)^2 (\bar{\Phi}^3 - \bar{\Phi}^{*3}) + \dots \quad (14)$$

Знак погрешности в данном случае определяется знаком первого члена, т. е.  $\operatorname{sgn} [\alpha(\Phi) - \alpha(\Phi^*)] = \operatorname{sgn} (\bar{\Phi}^3 - \bar{\Phi}^{*3})$ . Подставляя сюда значения функций (5), (7) и (8), (13), окончательно найдем

$$\operatorname{sgn} [\alpha(\Phi) - \alpha(\Phi^*)] = \operatorname{sgn} \left[ \bar{\Phi}^3 - \frac{(\bar{\Phi}^2)^2}{\bar{\Phi}} \right];$$

$$\operatorname{sgn} [\alpha(\Phi) - \alpha(\Phi_2^*)] = \operatorname{sgn} \left[ \bar{\Phi}^3 - \frac{9}{8} \frac{(\bar{\Phi}^2)^2}{\bar{\Phi}} \right]. \quad (15)$$

2. В случае сферически-слоистой среды (1) заменяется соотношением

$$\alpha + \theta_0 - \arcsin \left[ \frac{R_0}{r} \sin (\alpha + \theta_0) \right] = R_0 \sin \theta_0 \int_{R_0}^r \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2 - R_0^2 \sin^2 \theta_0}}, \quad (16)$$

где  $R_0$  — радиус планеты, а остальные обозначения ясны из рис. 3. Разрешим уравнение (16) относительно  $\operatorname{tg} \alpha$ . В результате получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{r^2 - R_0^2 \sin^2 \theta_0} \sin I + R_0 \sin \theta_0 (1 - \cos I)}{\cos I \sqrt{r^2 - R_0^2 \sin^2 \theta_0} + R_0 \sin \theta_0 \sin I - R_0 \cos \theta_0}, \quad (17)$$

где введено обозначение

$$I = R_0 \sin \theta_0 \int_{R_0}^r \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 n^2 - R_0^2 \sin^2 \theta_0}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - R_0^2 \sin^2 \theta_0}} \right) \frac{dr}{r}, \quad (18)$$

Как видно из выражения (17), угол рефракции полностью определяется значением интеграла (18). В частном случае бесконечно удаленного источника, когда  $r \rightarrow \infty$ ,  $\alpha = I/r_{\infty}$ .

Найдем приближенные соотношения для  $I(r)$  рассмотренным выше методом. Разложение (18) в функциональный ряд Тейлора вида (2) дает

$$I(\Phi) = R_0 \sin \theta_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k \prod_{j=1}^k (2j-1)}{k! 2^k} \int_{R_0}^r \frac{r^{2k-1} \Phi^k(r) dr}{(r^2 - R_0^2 \sin^2 \theta_0)^{k+1/2}}. \quad (19)$$

Приближенное суммирование (19) не вызывает принципиальных затруднений в тех случаях, когда известны значения нескольких первых членов этого ряда, т. е. когда несколько последовательно входящих в него интегралов вычисляются. Для сложной (и тем более произвольной) функции  $\Phi(r)$  последнее затруднительно.

Разлагая функции  $f_k(r) = r^{2k-1} (r^2 - R_0^2 \sin^2 \theta_0)^{-k-1/2}$  в ряды Тейлора в некоторой промежуточной точке  $R_0 < r_m < r$ , приходим к двойному ряду:

$$I(\Phi) = R_0 \sin \theta_0 \sum_{k=1, l=0}^{\infty} \frac{a^k \prod_{j=1}^k (2j-1) f_k^{(l)}}{k! 2^k l!} \times \left( \int_{R_0}^r \Phi^k(r - r_m)^l dr \right), \quad (20)$$

где  $f_k^{(l)} = \frac{d^{(l)}}{dr^l} f_k|_{r=r_m}$ .

Произведем приближенное суммирование (20), используя функцию

$$\Phi_1^*(b_1, r_1, r_2) = \begin{cases} b_1 & (r_1 \leq r \leq r_2) \\ 0 & (r < r_1, r > r_2) \end{cases}.$$

Подставляя ее значение в (18), найдем

$$I(\Phi_1^*) = \left( \arcsin \frac{R_0 \sin \theta_0}{r_1 \sqrt{1 - ab_1}} - \arcsin \frac{R_0 \sin \theta_0}{r_2 \sqrt{1 - ab_1}} \right) - \left( \arcsin \frac{R_0 \sin \theta_0}{r_1} - \arcsin \frac{R_0 \sin \theta_0}{r_2} \right). \quad (21)$$

Составим разность

$$I(\Phi) - I(\Phi^*) = A_1 \sum_{k=1, l=0}^{\infty} C_{kl} (S_{kl} - S_{kl}^*). \quad (22)$$

Здесь введены обозначения

$$A_1 = R_0 \sin \theta_0, \quad C_{kl} = \frac{a^k \prod_{j=1}^k (2j-1) f_k^{(l)}}{k! 2^k l!}, \quad S_{kl} = \int_{R_0}^r \Phi^k(r - r_m)^l dr,$$

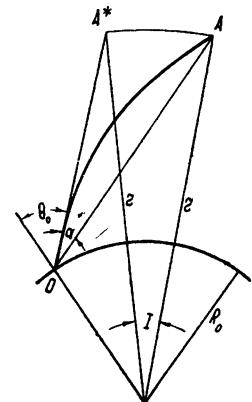


Рис. 3.

Подберем значения параметров  $b_1, r_1, r_2$  таким образом, чтобы (22) было минимально. Если сходимость по  $l$  быстрее, чем по  $k$  (случай  $r_{\text{кон}} = R_0 \ll R_0$ ), последнее достигается при  $S_{10} = S_{10}^*, S_{20} = S_{20}^*, S_{11} = S_{11}^*$ . Отсюда

$$b_1 = \frac{S_{20}}{S_{10}}, \quad r_1 = r_m + \frac{S_{11}}{S_{10}} - \frac{S_{10}^2}{2S_{20}}, \quad r_2 = r_m + \frac{S_{11}}{S_{10}} + \frac{S_{10}^2}{2S_{20}}. \quad (23)$$

Ясно, что возникающая погрешность расчета рефракции по формулам (21) и (23) определяется соотношением (22), в котором отсутствуют члены с индексами  $k = 1, l = 0; k = 1, l = 1; k = 2, l = 0$ . Если же ряд по  $k$  сходится быстрее, чем по  $l$  (случай  $a \ll 1$ ), то целесообразнее неизвестные параметры находить из соотношений  $S_{10} = S_{10}^*, S_{11} = S_{11}^*, S_{12} = S_{12}^*$ . В этом случае

$$b_1 = \frac{S_{10}^2}{\sqrt{12(S_{10}S_{12} - S_{11}^2)}}, \quad r_1 = r_m + \frac{S_{11}}{S_{10}} - \frac{1}{S_{10}} \sqrt{3(S_{10}S_{12} - S_{11}^2)}, \\ r_1 + r_2 = 2 \left( r_m + \frac{S_{11}}{S_{10}} \right). \quad (24)$$

Из сказанного ясно, что можно построить относительно большой класс интегрируемых функций  $\Phi^*(b_1, b_2r^{-1}, b_3r^{-2}$  и т. д.), для которых ряд (20) приближенно суммируется. Кроме этого, необходимо отметить, что для некоторого вида профиля  $\Phi(r)$  можно подобрать такие две суммирующие функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , для которых истинное значение угла рефракции будет заключено между приближенными.

3. В качестве примера рассмотрим среду с линейной зависимостью  $\Phi$  от высоты (плоский случай):  $\Phi(z) = \gamma z$ . В этом случае можно получить точное решение задачи о рефракции, так как интегрирование в (1) выполняется:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \theta_0 \left[ \frac{2}{a_0 \Phi_0} (1 - \sqrt{1 - a_0 \Phi_0}) - 1 \right] \times \\ &\times \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \left[ \frac{2}{a_0 \Phi_0} (1 - \sqrt{1 - a_0 \Phi_0}) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\Phi_0 = \gamma h$  — значение  $\Phi$  в верхней точке траектории луча.

Сравним значение  $\alpha$ , найденное по этой точной формуле, со значениями, вычисленными по формуле (6). В случае  $\Phi = \gamma z$  величины  $b_1$  и  $h_1$ , определяемые равенствами (7), принимают следующие значения:

$$b_1 = \frac{2}{3} \Phi_0, \quad h_1 = \frac{3}{4} h.$$

Заметим, что для данного конкретного вида профиля соотношения (9) и (12) переходят в (25) и дают точное значение угла рефракции.

На рис. 4 приведены зависимости  $\alpha(\theta_0)$  для случая  $a\Phi_0 = 0,2$ ,

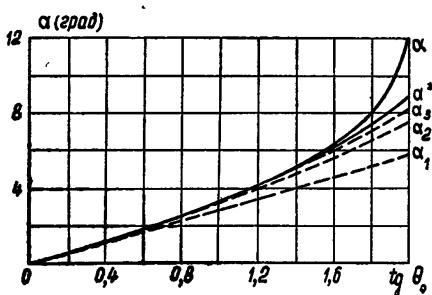


Рис. 4.

$n_0 = 0,894$ , построенные по точной формуле и приближенной формуле (6) (на рисунке эта кривая обозначена через  $\alpha^*$ ). На этом же рисунке нанесены значения угла рефракции в первом ( $\alpha_1$ ), втором ( $\alpha_2$ ) и третьем ( $\alpha_3$ ) приближении, рассчитанные по формуле (4). Кривая, вычисленная по точной формуле, обрывается в точке максимально возможной рефракции, соответствующей горизонтальному выходу луча из верхней точки его траектории. На рис. 4 видно, что соотношение (6), построенное с помощью первых двух членов ряда (4), дает результат точнее третьего приближения.

Аналогичная картина наблюдается и для среды с параболической зависимостью  $\Phi$  от высоты

$$\Phi(z) = \frac{2z}{h_m} - \frac{z^2}{h_m^2}.$$

В данном случае при  $h = 2h_m$  точное решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \theta_0 \left( \frac{1}{\sqrt{a_0}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{a_0}{1-a_0}} - 1 \right) \times \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta_0}{\sqrt{a_0}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{a_0}{1-a_0}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для сравнения на рис. 5 приведены зависимости  $\alpha(\theta_0)$  в параболическом слое для случая  $a = 0,2$ , построенные по точной формуле и вариационным формулам (6), (9) и (12) (соответственно кривые  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$ ,  $\alpha_3^*$ ). На рисунке нанесены также значения угла рефракции в первом, втором и третьем приближении ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ). Как видно из рис. 5, формула (6) дает заниженное, а формула (12) — несколько завышенное значение угла рефракции, что непосредственно следует из (15).

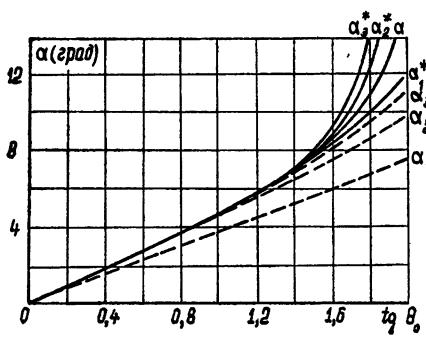


Рис. 5.

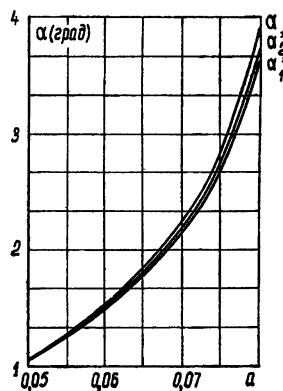


Рис. 6.

Некоторое представление о точности вариационных соотношений (21), (23) и (21), (24) для сферического случая дает рис. 6. На нем приведены зависимости  $\alpha = \alpha(a)$  в параболическом слое для случая  $h_m = 100 \text{ км}$ ,  $r = r_m = r_0 + h_m = 6670 \text{ км}$ ,  $R_0 = 6370 \text{ км}$  и  $\theta_0 = 90^\circ$ , рассчитанные на электронной счетной машине (кривая  $\alpha$ ) и по приближенным формулам (кривые  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$ ).

4. Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что расчет рефракции по вариационным формулам (6), (9) и (12) (или по (21), (23) для сферической модели) дает более точные результаты по сравнению с формулой третьего приближения. Данные соотношений обладают достаточной для практических расчетов точностью в области значений  $\alpha \leq 10^\circ$ , которая непосредственно прилегает к точке максимально возможной рефракции. Для получения более удовлетворительных результатов вблизи точки отражения луча необходимо построить рассмотренным выше методом соотношение  $\alpha(\Phi^*)$  (или  $I(\Phi^*)$ ), учитывающее более высокие члены разложения  $\alpha(\Phi)$  (или  $I(\Phi)$ ). Это не представляет особых трудностей и связано лишь с решением алгебраической системы уравнений для параметров  $b_1, b_2, b_3, \dots$ , от которых зависит суммирующая функция.

### ЛИТЕРАТУРА

- 1 В И Татарский, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, 5, 923 (1962).
- 2 Е. Chvojkova, Bull. Astronom. Inst. Czechoslovakia, 5, 104 (1954); 9, 1 (1958)
- 3 И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, Вариационное исчисление, Физматгиз, М., 1961, § 6.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию  
19 июля 1964 г

### TO REFRACTION THEORY IN STRATIFIED-NONHOMOGENEOUS MEDIUM

*G. I. Skrypnik*

The variation calculation method has been suggested of the beam refraction angle in the stratified-nonhomogeneous medium based on the approximate summation of power series of electron concentration functionals  $\Phi(z)$  (or summation of power series of refractive index deviation from the unity). The accuracy of this calculation method of the refraction has been illustrated for the cases of linear and parabolic profiles.

УДК 621.378.3

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДВУХФОТОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Г. Л. Гуревич, Ю. Г. Хронопуло

Рассмотрены процессы комбинационного и «двойного» излучения\* в веществе, помещенном в резонатор с собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Показано, что в случае, когда второй рабочий уровень метастабильный, при определенных условиях даже в отсутствие некогерентной накачки возможен антистоксов процесс. Возбуждение стоксова процесса в такой системе происходит лишь в определенном интервале значений амплитуды внешнего поля. Если  $\omega_1 + \omega_2 \approx \omega_{21}$ , где  $\omega_{21}$  — разность рабочих термов вещества, то при достаточной мощности некогерентной накачки в системе возможно стационарное излучение полей обеих частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Найдены условия устойчивости такого режима.

## 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В работе [1] были получены уравнения, описывающие процессы комбинационного и двойного излучения и поглощения с учетом эффекта насыщения. Ниже с помощью этих уравнений будет рассмотрено взаимодействие двух полей в случае, когда система частиц, обладающих неэквидистантным спектром, помещена в резонатор с двумя собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

В [1] было показано, что в рассматриваемых процессах в общем случае необходимо учитывать населенности уровней, ближайших к рабочим. При этом исходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} = & \sum_{k \neq 2} \left( W_{k1} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{k1} \right) \sigma_{kk} + \left( W_{21} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{21} \right) \sigma_{22} - \\ & - \sum_k \left( W_{1k} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{k1} \right) \sigma_{11} + \frac{2}{\hbar^2} \operatorname{Im} (\sigma_{12} R^*); \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{22} = & \sum_{k \neq 2} \left( W_{k2} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{k2} \right) \sigma_{kk} + \left( W_{12} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{12} \right) \sigma_{11} - \\ & - \sum_k \left( W_{2k} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{2k} \right) \sigma_{22} - \frac{2}{\hbar^2} \operatorname{Im} (\sigma_{12} R^*); \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\dot{\sigma}_{kk} = \sum_p \left[ \left( W_{pk} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{pk} \right) \sigma_{pp} - \left( W_{kp} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{kp} \right) \sigma_{kk} \right]; \quad (1b)$$

$$\dot{\sigma}_{12} + \left( \frac{1}{T_{12}} - i \Omega_{12} \right) \sigma_{12} = \frac{i}{\hbar^2} R (\sigma_{22} - \sigma_{11}). \quad (1\Gamma)$$

\* Под «двойным» излучением (поглощением) мы будем понимать, в соответствии с терминологией, принятой в [2], двухквантовый процесс излучения (поглощения) полей с частотами, сумма которых совпадает с разностью каких-либо двух термов вещества. В дальнейшем эти термы мы будем называть рабочими и считать, что они являются нижними уровнями материальной системы.

Здесь для комбинационного процесса, когда  $\omega_1 - \omega_2 = \omega_{21} + \Delta\omega$ ,

$$R = E_1 E_2^* \sum_k p_{1k} p_{k2} \left[ \frac{\cos \alpha_{1k}^{(1)} \cos \alpha_{k2}^{(2)}}{\omega_{k2} - \omega_2} + \frac{\cos \alpha_{1k}^{(2)} \cos \alpha_{k2}^{(1)}}{\omega_{k2} + \omega_1} \right] e^{i \Delta\omega t}; \quad (2)$$

взаимодействующие поля записываются в виде

$$E_l e^{i \omega_l t} + E_l^* e^{-i \omega_l t} \quad (l = 1, 2),$$

где комплексные амплитуды медленно (по сравнению с  $e^{i \omega_l t}$ ) зависят от времени;  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  — населенности рабочих уровней,  $\sigma_{kk}$  — населенности остальных уровней,  $p_{lk}$  — матричные элементы дипольного момента\*,  $\omega_{21}$  — разность рабочих термов,  $\alpha_{kl}^{(l)} = \alpha_{lk}^{(l)}$  — угол между  $p_{lk}$  и  $E_l$ ,  $W_{mn}$  — вероятность перехода с  $m$ -го уровня на  $n$ -ный в отсутствие полей  $E_l$ ,  $4\hbar^{-2} Q_{mn}$  — вероятности индуцированных переходов под действием нерезонансных полей:

$$\frac{4}{\hbar^2} Q_{mn} = \sum_{l=1,2} q_{mn}^{(l)} |E_l|^2; \quad q_{mn}^{(l)} = \frac{4}{\hbar^2} \frac{(\omega_{mn}^2 + \omega_l^2) |p_{mn}|^2 \cos^2 \alpha_{mn}^{(l)}}{T_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega_l^2)^2}, \quad (3)$$

$T_{mn}$  — время релаксации соответствующего недиагонального элемента матрицы плотности,  $\Delta\omega < T_{21}^{-1}$ .

Матричные элементы матрицы плотности  $\rho$ , дающие вклад в комбинационный отклик вещества на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \rho_{k2} &= -\frac{\sigma_{12} p_{k1}}{\hbar} \left[ \frac{\cos \alpha_{k1}^{(2)} E_2^* e^{i(\omega_1 - \Delta\omega) t}}{\omega_{k2} + \omega_1} + \frac{\cos \alpha_{k1}^{(1)} E_1^* e^{-i(\omega_2 + \Delta\omega) t}}{\omega_{k2} - \omega_2} \right]; \\ \rho_{1k} &= -\frac{\sigma_{12} p_{2k}}{\hbar} \left[ \frac{\cos \alpha_{2k}^{(2)} E_2^* e^{i(\omega_1 - \Delta\omega) t}}{\omega_{k2} - \omega_2} + \frac{\cos \alpha_{2k}^{(1)} E_1^* e^{-i(\omega_2 + \Delta\omega) t}}{\omega_{k2} + \omega_1} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для двойного излучения  $R$ ,  $\rho_{k2}$  и  $\rho_{1k}$  получаются из (2) и (4) заменой  $\omega_2$  на  $-\omega_2$  и  $E_2$  на  $E_2^*$ .

Отметим, что кроме отклика, связанного с двухфотонными процессами, на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  существует нерезонансный отклик вещества. Однако при используемых далее предположениях (см. стр. 7) нерезонансным эффектом в уравнениях для амплитуд полей  $E_1$  и  $E_2$  можно пренебречь. При тех же предположениях величина  $\Omega_{12}$ , определяемая выражением (14) работы [1], также дает пренебрежимо малый вклад в эти уравнения. Поэтому мы не приводим здесь выражение для  $\Omega_{12}$ .

К системе уравнений (1) необходимо добавить уравнения для медленных амплитуд полей (см., например, [3]):

$$\dot{E}_l + \frac{1}{2\tau_l} E_l = -2\pi i \varepsilon^{-1} \omega_l N P_l. \quad (5)$$

Здесь  $N$  — число частиц в системе,  $P_l$  — проекция комплексной амплитуды нелинейной поляризации на частоте  $\omega_l$  на направление поля  $E_l$ ,

$$P = \text{Sp}(\overset{\wedge}{p} \overset{\wedge}{\rho}) = \sum_k (p_{2k} \rho_{k2} + p_{1k} \rho_{1k}) + \text{к. с.}, \quad (6)$$

\* Мы предполагаем, что матричные элементы  $p_{lk}$  действительны. Обобщение для случая комплексных  $p_{lk}$  очевидно.

$\tau_l = Q_l/\omega_l$ ,  $Q_l$  — добротность резонатора на частоте  $\omega_l$ ,  $\epsilon$  — линейная часть диэлектрической проницаемости вещества\*.

При определенных предположениях система уравнений (1) и (5) может быть упрощена. Можно показать, что при выполнении условий

$$(2\tau_l)^{-1}, W_{mn}, |p_{mn}|^2 |E_l| |E_r| / 2\hbar^2 (\omega_{mn} - \omega_{1,2}) \ll T_{21}^{-1} \quad (7)$$

( $r, l = 1, 2$ ) в (1г) можно пренебречь  $\dot{\sigma}_{12}^{**}$ . Кроме того, мы будем считать, что в уравнениях (1в) (при условиях, которые будут указаны ниже) можно отбросить  $\sigma_{kk}$ . Тогда из (1в) следует, что

$$\sigma_{kk} = \left[ \frac{1}{2} W_{13} (1 - n) \delta_{k3} + \sum_l g_k^{(l)} m_l + n \sum_l f_k^{(l)} m_l \right] (W_{31} + W_{32})^{-1}, \quad (8)$$

где

$$n = \sigma_{22} - \sigma_{11}, \quad \delta_{k3} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 3 \\ 0 & \text{при } k \neq 3 \end{cases}.$$

Здесь учтено, что в оптическом диапазоне  $W_{mn} \gg W_{nm}$  при  $m > n$ , и отброшены члены порядка  $4Q_{mn}/\hbar^2 W_{mn}$ . Далее мы увидим (см. (13)), что в случае, когда можно пренебречь  $\sigma_{kk}$ , эти члены малы по сравнению с единицей. При написании (8) мы предполагаем также, что некогерентная накачка действует через третий уровень системы и может быть учтена в  $W_{13}^{***}$ .

Постоянные коэффициенты  $g_k^{(l)}$  и  $f_k^{(l)}$  легко могут быть найдены из уравнений (1в). Для трехуровневой системы, например,

$$g_3^{(l)} = \frac{q_{31}^{(l)} + q_{32}^{(l)}}{2}; \quad f_3^{(l)} = \frac{q_{32}^{(l)} - q_{31}^{(l)}}{2}. \quad (9)$$

Исключив теперь  $\sigma_{21}$  и  $\sigma_{kk}$  из уравнений (1а) и (1б) и воспользовавшись (2), (4)–(6), получим систему уравнений для  $m_l = |E_l|^2$  и разности населенностей рабочих уровней одной частицы  $n$ :

$$\dot{m}_1 + \tau_1^{-1} m_1 = b_1 m_1 m_2 n, \quad (10a)$$

$$\dot{m}_2 + \tau_2^{-1} m_2 = \pm b_2 m_1 m_2 n, \quad (10b)$$

$$\dot{n} + T^{-1} (n - n_0) = -am_1 m_2 n + \left[ \sum_l (W_{32} q_1^{(l)}_{\text{эфф}} - W_{31} q_2^{(l)}_{\text{эфф}}) m_l - n \sum_l (W_{32} q_1^{(l)}_{\text{эфф}} + W_{31} q_2^{(l)}_{\text{эфф}}) m_l \right] (W_{32} + W_{31})^{-1}. \quad (10b)$$

Здесь

$$\begin{aligned} n_0 &= \frac{W_{13} W_{32} - W_{21} (W_{31} + W_{32})}{W_{13} W_{32} + W_{21} (W_{31} + W_{32})}, \quad T = \frac{W_{31} + W_{32}}{W_{13} W_{32} + W_{21} (W_{31} + W_{32})}; \\ K &= T_{21} [1 + T_{21}^2 (\Delta\omega)^2]^{-1} \left| \sum_k p_{1k} p_{2k} [(\omega_{k2} \pm \omega_2)^{-1} \cos \alpha_{1k}^{(1)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos \alpha_{2k}^{(2)} + (\omega_{k2} + \omega_1)^{-1} \cos \alpha_{2k}^{(1)} \cos \alpha_{1k}^{(2)}] \right|^2; \end{aligned} \quad (11)$$

\* В случае (6) уравнение (5) строго справедливо для равномерного распределения поля по объему вещества.

\*\* В связи с этим см. [4].

\*\*\* Величина  $W_{13}$  при известной мощности некогерентной накачки может быть вычислена, например, с помощью выражений (10!) работы [5].

$$b_l = 4\pi\omega_l NK/\varepsilon \hbar^3; \quad a = 4K/\hbar^4.$$

В правой части уравнения (10б) и в  $K$  из (11) знак (+) берется в случае  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_{21} - \Delta\omega$ , а знак (—) в случае  $\omega_1 - \omega_2 = \omega_{21} + \Delta\omega$ .

При выводе уравнения (10в) предполагалось, что второй уровень является метастабильным. В противном случае, когда  $W_{21}$  порядка  $W_{31}$  и  $W_{32}$ , учет нерезонансного взаимодействия несущественен и в правой части (10в) можно отбросить второй и третий члены (см. [1]). В (10в) введены эффективные параметры

$$\begin{aligned} q_{1\text{эфф}}^{(l)} &= \frac{1}{2W_{32}} \sum_k [(W_{k1} - W_{k2})(f_k^{(l)} - g_k^{(l)}) + (W_{31} + W_{32})q_{k1}^{(l)}]; \\ q_{2\text{эфф}}^{(l)} &= \frac{1}{2W_{31}} \sum_k [(W_{k1} - W_{k2})(f_k^{(l)} + g_k^{(l)}) + (W_{31} + W_{32})q_{k2}^{(l)}]. \end{aligned} \quad (12)$$

Для трехуровневой системы  $q_{2\text{эфф}}^{(l)} = q_{32}^{(l)}$ ,  $q_{1\text{эфф}}^{(l)} = q_{31}^{(l)}$ .

Таким образом, влияние всех уровней, расположенных выше рабочих, на населенности последних эквивалентно влиянию одного эффективного уровня, для которого вероятности переходов на уровни 2 и 1 есть соответственно  $W_{32}$  и  $W_{31}$ , а величины  $q_i^{(l)}$ , характеризующие нерезонансное взаимодействие полей с веществом, могут быть определены из (12). Ниже всюду мы будем вместо  $q_{1\text{эфф}}^{(l)}$ ,  $q_{2\text{эфф}}^{(l)}$  писать просто  $q_1^{(l)}$ ,  $q_2^{(l)}$ .

Заметим, что существенный вклад в величину  $K$  и  $q_i^{(l)}$ , определяющий соответственно интенсивность двухквантовых процессов и нерезонансного взаимодействия, могут давать разные уровни. Например, пусть переход с некоторого  $i$ -го уровня на один из рабочих — электродипольный, а на другой — магнитодипольный. Если у системы имеется некоторый  $j$ -й уровень, переходы с которого на оба рабочих уровня электродипольные и  $\omega_j/\omega_{12} \approx 3$ , то легко видеть, что вклад  $j$ -го уровня в  $K$  может на порядок превышать вклад  $i$ -го уровня, в то время как вклад последнего в  $q_i^{(l)}$  больше, чем  $j$ -го.

Приведем теперь условия, при которых можно пренебречь  $\sigma_{kk}$ . Решая (1в) методом возмущений и используя (8) и (12), нетрудно получить, что учет  $\sigma_{kk}$  дает пренебрежимо малую добавку к  $\sigma_{kk}$  из (8), если\*

$$W_{13} \ll (W_{31} + W_{32}); \quad (W_{31} + W_{32})^{-1} \sum_l q_i^l m_l \ll 1, \quad (W_{31} + W_{32})\tau_l, \quad (13)$$

где  $i = 1, 2$ .

Для трехуровневой системы в случае, когда все  $T_{mn}$  одного порядка,  $(W_{31} + W_{32})\tau_l \gtrsim 1$  и  $(\omega_{mn} - \omega_l)(W_{31} + W_{32}) \gtrsim T_{mn}^{-2}$ , последние условия из (13) и (7) эквивалентны. В дальнейшем мы будем считать, что вия из (13) и (7) эквивалентны. В дальнейшем мы будем считать, что порядки величин, входящих в (11) и (12), следующие:

$$\begin{aligned} N &\leq 10^{21}, \quad \tau_l \leq 10^{-8} \text{ сек}, \quad (W_{31} + W_{32}) \sim 10^8 \text{ сек}^{-1}, \\ a &\geq 4 \cdot 10^{-6} \text{ CGSE}, \quad q_i^l \leq 4 \cdot 10^{-2}, \quad T_{mn} \gtrsim 10^{-10} \text{ сек}. \end{aligned} \quad (14)$$

\* Необходимо отметить, что условия (7) и (13) по существу эквивалентны наличию малых параметров при  $\sigma_{21}$  и  $\sigma_{kk}$ . Как известно, наличие малых параметров само по себе еще недостаточно для пренебрежения этими производными; необходимо еще выполнение условий типа (10.18) из [6]. Легко убедиться, что для системы уравнений (!) и (5) эти условия выполняются.

Можно показать, что при этом учет нерезонансного отклика в уравнениях (10а), (10б) несуществен при величинах полей, больших или равных величине поля возбуждения системы; условия же (7) и (13) выполняются вплоть до  $m_1 \sim 10^8$  CGSE.

## 2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЗАДАННОГО ПОЛЯ

Рассмотрим случай, когда величина одного из полей, участвующих в двухфотонных процессах, может считаться заданной.

Пусть задано поле на частоте  $\omega_2$  (антистоксов процесс, двойное излучение). Тогда уравнение (10б) необходимо отбросить, а в (10а) считать  $m_2$  постоянной величиной. При этом в системе возможны следующие стационарные состояния:

$$m_{1\text{ст}} = 0; \quad n_{\text{ст}} = \frac{n_0 + \beta_2^- T m_2}{1 + \beta_2^+ T m_2}; \quad (15\text{а})$$

$$m_{1\text{ст}} = \frac{b_1 \tau_1 \beta_2^- T m_2^2 + (b_1 \tau_1 n_0 - \beta_2^+ T) m_2 - 1}{[(a - \beta_1^- b_1 \tau_1) m_2 + \beta_1^+] T}; \quad n_{\text{ст}} = (b_1 \tau_1 m_2)^{-1}, \quad (15\text{б})$$

где

$$\beta_l^\pm = (W_{32} q_1^{(l)} \pm W_{31} q_2^{(l)}) (W_{32} + W_{31})^{-1}. \quad (16)$$

Следует заметить, что при выполнении (14)  $(a - \beta_1^- b_1 \tau_1) > 0$ . Если же (14) не выполняется, то учет нерезонансного отклика в уравнениях (10а) и (10б) приводит к тому, что  $m_{1\text{ст}}$  при всех значениях параметров системы остается конечным.

Рассмотрим условия устойчивости состояний равновесия (15). Корни характеристического уравнения для точки (15а) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= b_1 m_2 n_{\text{ст}} - \tau_1^{-1}; \\ \lambda_2 &= -(T^{-1} + \beta_2^+ m_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16) и (17) видно, что  $\lambda_2$  всегда отрицательна. Таким образом, при  $\lambda_1 < 0$  точка (15а) есть устойчивый узел, при  $\lambda_1 > 0$  — седло. Подставляя  $n_{\text{ст}}$  из (15а) в выражение для  $\lambda_1$ , получаем, что условия возбуждения системы выполняются, если

$$b_1 \tau_1 \beta_2^- T m_2^2 + (b_1 \tau_1 n_0 - \beta_2^+ T) m_2 - 1 > 0. \quad (18)$$

При этом  $m_{1\text{ст}}$  из (15б) неотрицательно.

Покажем, что даже в отсутствие некогерентной накачки возможно возбуждение системы при достаточно сильном поле на частоте  $\omega_2$ . Положим в (11)  $W_{13} = 0$ ; тогда поле, при котором выполняется равенство в (18),

$$m_{2\text{возб}} = \frac{\beta_2^+ + W_{21} b_1 \tau_1 + \sqrt{(\beta_2^+ + b_1 \tau_1 W_{21})^2 + 4 W_{21} b_1 \tau_1 \beta_2^-}}{2 b_1 \tau_1 \beta_2^-}. \quad (19)$$

Если  $\beta_2^- > 0$ , то  $m_{2\text{возб}} > 0$  (напомним, что  $m_2 = |E_2|^2$  и не может быть отрицательным).

Существование такого эффекта связано с тем, что при величине когерентной накачки, равной  $m_{2\text{возб}}$ , населенности рабочих уровней оказываются инвертированными. Это нетрудно установить из (19) и выражения для  $n_{\text{ст}}$  из (15а). При  $\beta_2^- < 0$  возбуждение системы прои-

ходит лишь при значительной величине некогерентной накачки. Если  $W_{13}$  таково, что  $b_1 \tau_1 n_0 \gg \beta_2^+ T$ , из (18) легко найти (независимо от знака  $\beta_2^-$ ):

$$m_2 \text{ возб} \simeq (b_1 \tau_1)^{-1}. \quad (20)$$

Такое же условие можно получить, если в уравнении (10в) пренебречь членами, обусловленными нерезонансным взаимодействием. Этот факт связан с возможностью пренебречь действием когерентной накачки на населенности рабочих уровней в присутствии сильной некогерентной накачки.

Можно показать, что положение равновесия (15б) при выполнении (18) устойчиво.

Обсудим теперь некоторые особенности стоксова процесса в рассматриваемой системе (напомним, что мы считаем второй уровень метастабильным). Полагая в уравнении (10б) величину  $m_1$  постоянной и отбрасывая (10а), получим, что условия возбуждения поля частоты  $\omega_2$  выполняются, если

$$b_2 \tau_2 \beta_1^- m_1^2 + (\beta_1^+ - b_2 \tau_2 W_{21}) m_1 + W_{21} \leq 0. \quad (21)$$

При выводе (21) мы считали, что  $W_{13}$  пренебрежимо мало. Из (21) следует, что в случае  $\beta_1^- > 0$  возбуждение возможно лишь при

$$b_2 \tau_2 W_{21} > \beta_1^+ \quad (22)$$

для значений  $m_1$ , заключенных в интервале между корнями уравнения (21).

Стоксов процесс прекращается, когда  $m_1$  превышает величину большего корня этого уравнения, так как при этом разность населенностей  $n$  становится положительной.

Если  $\beta_1^- < 0$ , уравнение (21) имеет один положительный корень, который и дает максимальную величину поля, необходимую для возбуждения системы. Для случая  $b_2 \tau_2 W_{21} \gg \beta_1^+$  условия возбуждения принимают вид

$$m_1 \text{ возб} \simeq (b_2 \tau_2)^{-1}; \quad (23)$$

тогда второе состояние равновесия

$$m_2 \text{ ст} = \frac{b_2 \tau_2 m_1 - 1}{am_1 T}; \quad n_{\text{ст}} = -(b_2 \tau_2 m_1)^{-1}$$

в случае  $m_1 \geq m_1 \text{ возб}$  является устойчивым фокусом.

В заключение параграфа приведем некоторые численные оценки. Пусть  $N \approx 10^{20}$ ,  $b_1 \approx 10^5$  CGSE,  $W_{32} q_1^{(2)} \gg W_{31} q_2^{(2)}$ ,  $W_{32} \approx 10^8$  сек $^{-1}$ ,  $q_1^{(2)} \approx 10^{-2}$  CGSE,  $W_{21} \approx 10^3$  сек $^{-1}$ . Из (19) найдем величину поля, необходимую для возбуждения антистоксова процесса в отсутствие некогерентной накачки:  $m_2 \text{ возб} \approx 10^5$  CGSE. При сильной некогерентной накачке из (20) получаем  $m_2 \text{ возб} \approx 10^3$  CGSE.

### 3. САМОСОГЛАСОВАННОЕ ПОЛЕ

Перейдем к случаю, когда ни одно из полей не является заданным. Такая ситуация имеет место, если длительность когерентной накачки много меньше длительности некогерентной накачки. Рассмотрим случай двойного излучения. Как будет показано ниже, при определенных условиях и в отсутствие когерентной накачки в системе возможен стационарный режим.

Пусть величина некогерентной накачки такова, что наряду с условием (13) выполняется неравенство

$$\sum_{l=2-l_1} q_l^l m_l \ll W_{13}, \quad (24)$$

В дальнейшем мы увидим, что в рассматриваемом случае для принятых значений параметров системы неравенство (13) выполняется. Исходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{m}_1 + \frac{m_1}{\tau_1} &= b_1 m_1 m_2 n; \\ \dot{m}_2 + \frac{m_2}{\tau_2} &= b_2 m_1 m_2 n; \\ \dot{n} + \frac{n - n_0}{T} &= - a m_1 m_2 n.\end{aligned}\quad (25)$$

В безразмерных переменных

$$\begin{aligned}x &= m_1 (ab_2 \tau_2 T / b_1 \tau_1)^{1/2} = m_1 (a \omega_2 \tau_2 T / \omega_1 \tau_1)^{1/2}; \\ y &= m_2 (ab_1 \tau_1 T / b_2 \tau_2)^{1/2} = m_2 (a \omega_1 \tau_1 T / \omega_2 \tau_2)^{1/2}; \\ z &= n (b_1 b_2 \tau_1 \tau_2 / a T)^{1/2}; \quad z_0 = n_0 (b_1 b_2 \tau_1 \tau_2 / a T)^{1/2}; \\ t' &= t T^{-1}\end{aligned}\quad (26)$$

система уравнений (25) принимает вид

$$\begin{aligned}\alpha_1 \dot{x} + x &= xyz; \\ \alpha_2 \dot{y} + y &= xyz; \\ \dot{z} + (z - z_0) &= -xyz.\end{aligned}\quad (27)$$

Здесь  $\alpha_l = \tau_l / T^*$  и точка означает дифференцирование по новому времени.

Рассмотрим подробно случай, когда  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ). Введем новые переменные:

$$u = (x + y)/2; \quad v = (x - y)/2. \quad (28)$$

Тогда система уравнений (27) примет вид

$$\begin{aligned}\alpha \dot{v} + v &= 0; \\ \alpha \dot{u} + u &= (u^2 - v^2) z; \\ \dot{z} + (z - z_0) &= (v^2 - u^2) z.\end{aligned}\quad (29)$$

В системе возможны три положения равновесия:

$$1) \quad v_{cr} = 0; \quad u_{cr} = 0; \quad z = z_0;$$

$$2) \quad v_{cr} = 0; \quad u_{cr} = \frac{z_0}{2} - \sqrt{z_0^2/4 - 1}; \quad z_{cr} = z_0/2 + \sqrt{z_0^2/4 - 1}; \quad (30)$$

$$3) \quad v_{cr} = 0; \quad u_{cr} = z_0/2 + \sqrt{z_0^2/4 - 1}; \quad z_{cr} = z_0/2 - \sqrt{z_0^2/4 - 1}.$$

Отметим, что все положения равновесия лежат в плоскости  $v = 0$ ; два последних существуют лишь при  $z_0 \geq 2$ . Как видно из (29),  $v$  стремится к нулю как  $\exp(-t'/\alpha)$ .

\* Практически всегда  $\alpha_1 + \alpha_2 \ll 1$ .

Рассмотрим поведение системы около этой плоскости. Линеаризуя (29) вблизи  $v = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \alpha \dot{v} + v &= 0; \\ \alpha \dot{u} + u &= u^2 z; \\ \dot{z} + (z - z_0) &= -u^2 z. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда видно, что уравнения для  $u$  и  $z$  не зависят от  $v$ . Поэтому при исследовании движения изображающей точки в окрестности плоскости  $v = 0$  достаточно рассматривать два последних уравнения (31). Обратимся к исследованию характера состояний равновесия. Легко видеть, что первое состояние равновесия является устойчивым узлом; характеристическое уравнение для двух других имеет вид

$$\alpha \lambda^2 - \lambda [1 - \alpha (1 + u_{\text{cr}}^2)] + u_{\text{cr}}^2 - 1 = 0. \quad (32)$$

Второе состояние равновесия всегда является седлом. Характер устойчивости третьего положения равновесия при  $\alpha \ll 1$  меняется в зависимости от величины  $u_{\text{cr}}$  следующим образом:

$$(3 - 2\sqrt{2})\alpha^{-1} > u_{\text{cr}}^2 > 1 \text{ — неустойчивый узел,} \quad (33a)$$

$$\alpha^{-1} > u_{\text{cr}}^2 > (3 - 2\sqrt{2})\alpha^{-1} \text{ — неустойчивый фокус,} \quad (33b)$$

$$\alpha^{-1}(3 + 2\sqrt{2}) > u_{\text{cr}}^2 > \alpha^{-1} \text{ — устойчивый фокус,} \quad (33c)$$

$$u_{\text{cr}}^2 > (3 + 2\sqrt{2})\alpha^{-1} \text{ — устойчивый узел.} \quad (33d)$$

Можно показать, пользуясь обычными методами теории колебаний (см., например, [6]), что при  $u_{\text{cr}}^2 > \alpha^{-1}$  в системе существует неустойчивый предельный цикл, который при смене характера устойчивости третьего состояния равновесия с (33c) на (33b) стягивается в фокус. Таким образом, из (33c) и (30) следует, что при

$$z_0 > \alpha^{-1/2} \quad (34)$$

в системе существует устойчивое состояние равновесия, в котором одновременно излучаются поля с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Число частиц  $N$ , величина  $W_{13}$  и характеристики вещества, необходимые для осуществления такого режима, определяются из (11), (26) и (34):

$$2\pi(\epsilon h)^{-1}\tau^{3/2}N(K\omega_1\omega_2)^{1/2}[W_{13}W_{32}(W_{31} + W_{32})^{-1} - W_{21}] > 1. \quad (35)$$

Фазовая картина движения системы на плоскости  $v = 0$  изображена для случая (33b, в) на рисунке 1 и 2 соответственно.

Если  $\tau_1 \neq \tau_2$ , то положения равновесия в системе по-прежнему определяются выражением (30). Как и выше, первое из них есть устойчивый узел, а характеристическое уравнение для двух других имеет вид

$$\alpha_1\alpha_2\lambda^3 + \alpha_1\alpha_2(1 + u_{\text{cr}}^2)\lambda^2 + [(\alpha_1 + \alpha_2)u_{\text{cr}}^2 - 1]\lambda + u_{\text{cr}}^2 - 1 = 0. \quad (36)$$

Нетрудно показать, что при условии  $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$  второе положение равновесия является седлом. Для третьего же характеристическое уравнение в области  $2(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} > u_{\text{cr}}^2 > 1$  имеет два корня с положительной действительной частью; при  $u_{\text{cr}}^2 > 2(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1}$  действительные части всех корней уравнения (36) отрицательны, и условие устойчивости этого состояния равновесия принимает вид

$$z_0 > \sqrt{2}(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1/2} \quad (37)$$

или, используя (37), (28) и (26),

$$(\varepsilon \hbar)^{-1} \pi N [2K \omega_1 \omega_2 \tau_1 \tau_2 (\tau_1 + \tau_2)]^{1/2} [W_{13} W_{32} (W_{31} + W_{32})^{-1} - W_{21}] \geqslant 1. \quad (38)$$

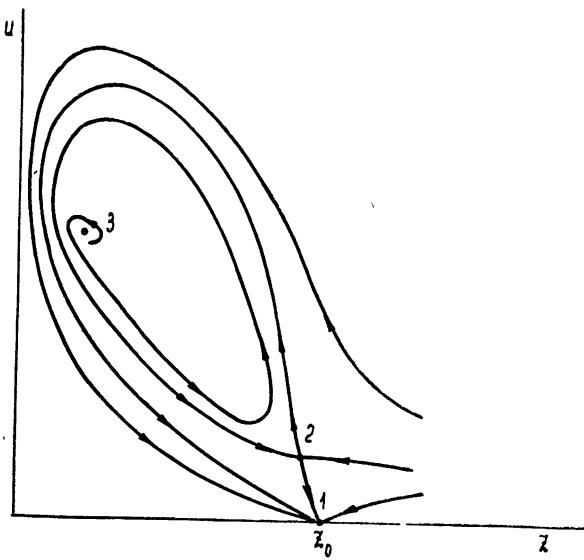


Рис. 1.

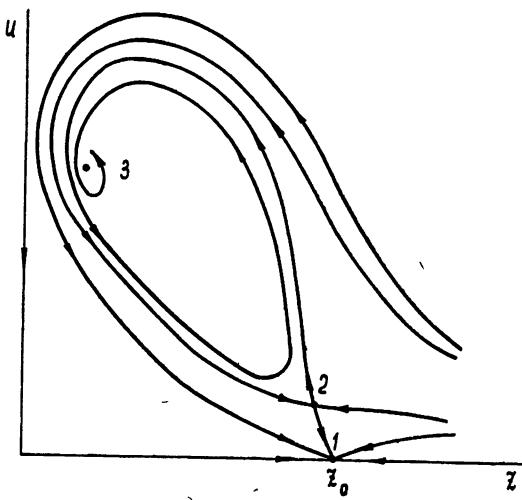


Рис. 2.

Подчеркнем, что рассмотренная система является системой с жестким возбуждением. Порядок величин полей, требуемых для возбуждения системы, дается значениями полей во втором положении равновесия (30)\*. При выполнении условия (38)  $z_0 \gg 1$  и из (30), (26) и (11) легко найти, что

\* Отметим, что, как следует из фазовой картины на рис. 1, 2, при увеличении начальной величины  $z$  значения полей, необходимые для возбуждения системы, убывают.

$$m_1 \simeq \frac{\epsilon \hbar^3}{4\pi N K \omega_2 \tau_2} \frac{W_{13} W_{32} + W_{21} (W_{31} + W_{32})}{W_{13} W_{32} - W_{21} (W_{31} + W_{32})}. \quad (39)$$

Значение  $m_2$  получается из (39) заменой  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ ,  $\tau_2 \rightarrow \tau_1$ . Запуск системы целесообразно производить, подавая поле на одной из частот  $\omega_1$  или  $\omega_2$  (когерентная накачка). В начале процесса величину этого поля можно считать фиксированной; другое поле будет при этом развиваться так, как это было рассмотрено в разделе 2. После прекращения когерентной накачки движение системы описывается уравнениями (25).

Если условия устойчивости третьего положения равновесия не выполняются, но выполняется условие  $z_0 > 2$ , система может излучить только одиночный импульс. Условие возбуждения в этом случае может быть найдено, как и выше, из (30) и (26). Длительность фронта такого импульса для начальных состояний системы, в которых

$$u_n^2 z_n \gg z_n - z_0, \quad u_n z_n \gg 1, \quad (40)$$

может быть легко оценена из (29):

$$t_\phi' = [u_n (\alpha u_n + z_n)]^{-1}. \quad (41)$$

Аналогичные оценки длительности фронта импульса проводились также в [7]. Отметим, что уравнения, используемые в работе [7], справедливы только в области (40) и, естественно, из них не могут быть получены положения равновесия (30) и исследовано движение системы в присутствии некогерентной накачки. Кроме того, принятые в этой работе для оценки значения  $u_n$  и  $z_n$  столь велики, что при них нарушаются условия (7) и становятся неприменимыми используемые в [7] уравнения.

Прежде чем проводить численные оценки, найдем область параметров, в которой выполняется условие (24). В качестве величины  $m_p$ , входящей в (24), возьмем значения полей в третьем положении равновесия. Тогда это условие примет вид

$$\left( \frac{W_{13} W_{32}}{W_{31} + W_{32}} - W_{21} \right) \frac{N \hbar}{\epsilon} \sum_{l=1,2} q_m^l \omega_l \tau_l \ll W_{13}. \quad (42)$$

Если  $W_{13} \gg W_{21}$  и  $W_{31} \simeq W_{32}$ , (42) можно переписать в виде

$$\frac{N \hbar}{\epsilon} \sum_{l=1,2} q_m^l \omega_l \tau_l \ll 1. \quad (43)$$

Отметим, что только при выполнении (24) в исходных уравнениях (10) можно пренебречь нерезонансным взаимодействием и пользоваться уравнениями (25) для описания двухфотонных процессов.

Перейдем к численным оценкам. Если считать  $q_m^l \simeq 4 \cdot 10^{-2}$ ,  $\tau_1 \simeq \tau_2 \simeq 10^{-8}$ , то на световых частотах условие (43) выполняется для числа частиц  $N \leq 10^{21}$ . Оценим теперь  $N$  и  $W_{13}$ , необходимые для существования двух последних равновесных состояний (см. (30)). Из условия  $z_0 > 2$  и (26) при  $W_{13} \gg W_{21}$  получаем

$$W_{13}^{1/2} N > \frac{\epsilon \hbar}{\pi} \left( \frac{W_{31} + W_{32}}{W_{32} K \omega_1 \omega_2 \tau_1 \tau_2} \right)^{1/2}. \quad (44)$$

Если  $K = 10^{-112}$ ,  $\omega_1 \simeq \omega_2 \simeq 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ ,  $\tau_1 \simeq \tau_2 \simeq 10^{-8} \text{ сек}$ ,  $W_{31} = W_{32}$ , то неравенство (44) удовлетворяется при

$$W_{13}^{1/2} N > 10^{28} \text{ сек}^{-1/2}. \quad (45)$$

При  $W_{13} = 10^6 \text{ сек}^{-1}$  полное число частиц должно быть больше  $10^{19}$ .

Заметим, что принятая величина  $K$  получается из (11), если предположить, что в этом выражении действие всех  $k$  уровней равноценно действию некоторого эквивалентного  $s$ -го уровня, отстоящего от рабочих уровней на  $\omega = 10^{15}$  сек $^{-1}$  и имеющего  $|p_{1s}| |p_{2s}| \simeq 10^{-36}$  CGSE. Условие устойчивости третьего положения равновесия (38) при тех же значениях параметров, что и выше, выполняется при  $W_{13} \simeq 10^6$  сек $^{-1}$ ,  $N \geq 10^{20}$ . Поле, необходимое для возбуждения, получается из (39):

$$|E|_{\text{возб}} > 30 \text{ CGSE}.$$

Величина поля в третьем положении равновесия  $|E| \simeq 10^3$  CGSE.

Авторы пользуются случаем выразить благодарность В. И. Беспалову, Л. В. Постникову и В. М. Файну за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Хронопуло, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 674 (1964).
2. В. М. Файн, Э. Г. Яшин, ЖЭТФ, 46, 695 (1964).
3. W. E. Lamb, Phys. Rev., 134, 1431 (1963).
4. Б. Н. Генкин, Я. И. Ханин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 423 (1962).
5. В. М. Файн, УФН, 79, 641 (1963).
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
7. R. L. Garwin, IBM J. Res. Development, 8, 338 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
9 января 1965 г

#### SOME QUESTIONS OF THE THEORY OF TWO-PHOTON PROCESSES

*G. L. Gourevich, Yu. G. Khronopulo*

The processes have been considered of combinational and double radiation of the matter placed in a resonator with natural frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$ . Under certain conditions even in the absence of noncoherent pumping antistokes process is shown to occur in the case when the second operating level is metastable. In such a system the excitation of Stokes' process takes place only in the definite interval of amplitude values of the external field. If  $\omega_1 + \omega_2 \approx \omega_{21}$  when  $\omega_{21}$  is the difference of the operating terms of the matter, in the system there may exist the stationary radiation of the fields of both the frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$ , noncoherent pumping being sufficiently strong. The stability conditions of such a regime have been found.

УДК 621.378.33

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПУЧКА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ РЕЗОНАТОРА

### II. СТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ

*В. Б. Цареградский*

Найдена поляризация монокинетического молекулярного пучка в виде разложения по полю  $E(r, t)$ . Полученное выражение применяется для анализа стационарных колебаний молекулярного генератора с неоднородным синусоидальным полем резонатора. Найдены амплитудные и частотные характеристики генератора. Показано, что при определенных параметрах в генераторе существуют два предельных цикла с разной частотой колебаний.

1. Как известно [1], для исследования процессов в молекулярном генераторе и усилителе необходимо знать поляризацию пучка молекул как функцию поля в резонаторе. Зависимость поляризации от поля чрезвычайно сложна и найдена лишь в небольшом числе частных случаев [1–5].

Для синусоидального распределения поля поляризация пучка детально исследовалась в [5]. Необходимо заметить, что в большинстве случаев [1, 2, 4, 5] находилось стационарное выражение поляризации. Однако для анализа устойчивости стационарных колебаний, а также для отыскания периодических циклов в молекулярном генераторе с неоднородным полем знание этих частных случаев еще недостаточно.

В настоящей заметке поляризация монокинетического пучка определяется в общем случае в виде разложения по полю, удобного для практических применений. В качестве примера применения полученных результатов анализируется стационарный режим колебаний в молекулярном генераторе с неоднородным полем.

Проведенный анализ для синусоидального распределения поля вдоль оси резонатора показывает, что при определенных параметрах (частоте резонатора и числе молекул) в системе возможны два типа колебаний, переходы между которыми совершаются скачком. В заключение найдены амплитудные и частотные характеристики генератора. Сравнение их с известными экспериментальными данными свидетельствует об их качественном совпадении.

2. Уравнения молекулярного генератора с монокинетическим пучком запишем в виде [6–7]

$$E(r, t) \frac{\partial}{\partial \xi} P = \frac{\hbar \omega_{21}}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} D; \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P + \frac{\omega_{21}^2}{4} P = - \frac{\omega_{21}}{2 \hbar} d(E d) D; \quad (1b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_s A_s(t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}); \quad (1\text{в})$$

$$\frac{d^2 A_s}{dt^2} + \frac{\omega_s}{Q_s} \frac{dA_s}{dt} + \omega_s^2 A_s = - \frac{4\pi}{N_s} \int_v \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} E_s(\mathbf{r}) dv, \quad (1\text{г})$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  — электрическое поле резонатора,  $P$  — поляризация молекулярного пучка,  $D$  — плотность активных молекул в пучке,  $d$  — матричный элемент дипольного момента,  $\xi = t + z/v$ ,  $z$  — ось, вдоль которой движется пучок,  $v$  — скорость молекулы,  $\omega_{21}$  — частота перехода молекулы,  $\omega_s$  и  $Q_s$  — соответственно частота и добротность  $s$ -моды резонатора,  $A_s(t) \mathbf{E}_s(\mathbf{r})$  — электрическое поле  $s$ -моды,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $N_s = \int_v E_s^2 dv$ . Интегралы в системе (1) берутся по объему резонатора. Исключив из уравнений (1а) и (1б)  $D$ , получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P + \frac{\omega_{21}^2}{4} P = - \frac{\omega_{21}}{2\hbar} d(E d) D_0 - \frac{(dE)}{\hbar^2} d \int_t^\xi E \frac{\partial}{\partial \xi} P d\xi, \quad (2)$$

где  $D_0$  — плотность активных молекул на входе резонатора ( $z = 0$ ).

Для удобства дальнейших вычислений перепишем уравнение (2) в скалярном виде. С этой целью представим поле в резонаторе в форме  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}^0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)^*$ , умножим (2) на  $\mathbf{e}^0$  и введем обозначения

$$P = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}^0); \quad d = (\mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{d}); \quad A = \frac{\omega_{21} d^2}{2\hbar} D_0; \quad \beta = \frac{d}{\hbar}. \quad (3)$$

В этих обозначениях уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P + \frac{\omega_{21}^2}{4} P = - AE - \beta^2 E \int_t^\xi E \frac{\partial}{\partial \xi} P d\xi. \quad (4)$$

Введем функцию  $\varphi(\xi, t)$ , с помощью которой запишем поляризацию пучка:

$$P = \int_t^\xi \varphi(\xi', t) \sin \left[ \frac{\omega_{21}}{2} (\xi - \xi') \right] d\xi'. \quad (5)$$

Подставим (5) в (4) и, опустив промежуточные преобразования, получим интегральное уравнение для определения функции  $\varphi(\xi, t)$ :

$$\varphi(\xi, t) = f(\xi, t) + \beta^2 \int_t^\xi K(\xi, \xi') \varphi(\xi', t) d\xi', \quad (6)$$

где

$$f(\xi, t) = - \frac{2A}{\omega_{21}} E(\xi, t);$$

$$K(\xi, \xi') = - E(\xi, t) \int_{\xi'}^\xi E(\xi'', t) \cos \frac{\omega_{21}}{2} (\xi' - \xi'') d\xi''. \quad (7)$$

\* В большинстве практически интересных случаев можно считать, что на пучок действует только компонента поля в направлении  $\mathbf{e}^0$ .

В (6), (7) предполагается, что аргументы  $z, t$  функции  $E$  заменены на  $\xi, t$ .

Решение уравнения (6) будем искать методом последовательных приближений. Подставив затем ряд  $\varphi(\xi, t)$  в формулу (5), найдем искомое выражение для поляризации пучка:

$$\begin{aligned}
 P = & -C \int_0^z E \left( z_1; t - \frac{z-z_1}{v} \right) \sin \left[ \frac{\omega_{21}}{v} (z-z_1) \right] dz_1 + \\
 & + BC \int_0^z E \left( z_1; t - \frac{z-z_1}{v} \right) \sin \left[ \frac{\omega_{21}}{v} (z-z_1) \right] dz_1 \int_0^{z_1} E \left( z_2; t - \frac{z-z_2}{v} \right) dz_2 \int_{z_2}^{z_1} E \times \\
 & \times \left( z_3; t - \frac{z-z_3}{v} \right) \cos \left[ \frac{\omega_{21}}{v} (z_2-z_3) \right] dz_3 - \dots + (-1)^n B^{(n-1)} C \times \\
 & \times \int_0^z E \left( z_1; t - \frac{z-z_1}{v} \right) \sin \left[ \frac{\omega_{21}}{v} (z-z_1) \right] dz_1 \int_0^{z_1} E \left( z_2; t - \frac{z-z_2}{v} \right) dz_2 \int_{z_2}^{z_1} E \times \\
 & \times \left( \tau_1; t - \frac{z-\tau_1}{v} \right) \cos \left[ \frac{\omega_{21}}{v} (z_2-\tau_1) \right] d\tau_1 \int_0^{z_2} E \left( z_3; t - \frac{z-z_3}{v} \right) dz_3 \int_{z_3}^{z_2} E \times \\
 & \times \left( \tau_2; t - \frac{z-\tau_2}{v} \right) \cos \left[ (z_3-\tau_2) \frac{\omega_{21}}{v} \right] d\tau_2 \int_0^{z_3} E \left( z_4; t - \frac{z-z_4}{v} \right) dz_4 \int_{z_4}^{z_3} E \times \\
 & \times \left( \tau_3; t - \frac{z-\tau_3}{v} \right) \cos \left[ \left( \frac{z_4-\tau_3}{v} \right) \omega_{21} \right] d\tau_3 \times \dots \times \dots \times \\
 & \times \dots \int_0^{z_{n-1}} E \left( z_n; t - \frac{z-z_n}{v} \right) dz_n \times \\
 & \times \int_{z_n}^{z_{n-1}} E \left( \tau_{n-1}; t - \frac{z-\tau_{n-1}}{v} \right) \cos \left[ \frac{\omega_{21}}{v} (z_n-\tau_{n-1}) \right] d\tau_{n-1},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$C = \frac{2d^2 D_0}{\hbar v}, \quad B = \frac{4d^2}{\hbar^2 v^2}. \tag{9}$$

3. Применим полученный результат к исследованию стационарных колебаний молекулярного генератора. Предположим, что поле в резонаторе имеет вид\*

$$E(r, t) = A_s(t) E_s(z)$$

\* Пучок считается тонким, так что распределением поля в поперечном сечении пучка можно пренебречь.

и введем безразмерные величины

$$P = \frac{1}{4\pi Q_s} \frac{\sqrt{\mu_3}}{\beta \tau_0} p; A_s(t) = \frac{\sqrt{\mu_3}}{\beta \tau_0} a_s(t); x = \frac{z}{L}; t_1 = \omega_{21} t;$$

$$\eta = \frac{4\pi Q_s \tau_0 d^3}{\hbar} D_0; \mu_2 = \frac{1}{Q_s} = \frac{1}{\omega_{21} \tau_0}; \mu_1 = \frac{1}{2Q_s}; \chi = \frac{V_n}{N_s}, \quad (10)$$

где  $L$  — длина резонатора,  $\tau_0 = L/v$  — время пролета молекул,  $V_n$  — объем, занимаемый молекулами в резонаторе.

Величину  $\mu_3$  подберем так, чтобы в стационарном режиме  $p$  и  $a_s(t)$  были порядка единицы. С помощью (10) нетрудно убедиться, что  $n$ -й член в разложении (8) порядка  $\mu_3^{(n-1)}$ . Поэтому, если положить  $\mu_3 \ll 1$ , то достаточно ограничиться в (8) первыми двумя членами:

$$p = -2\eta \int_0^x a_s \left( t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2} \right) E_s(x_1) \sin \frac{x-x_1}{\mu_2} dx_1 +$$

$$+ 8\mu_3 \eta \int_0^x a_s \left( t_1 - \frac{x-x_1}{\mu_2} \right) E_s(x_1) \sin \frac{x-x_1}{\mu_2} dx_1 \times \quad (11)$$

$$\times \int_0^{x_1} a_s \left( t_1 - \frac{x-x_2}{\mu_2} \right) E_s(x_2) dx_2 \int_{x_2}^{x_1} a_s \left( t_1 - \frac{x-x_3}{\mu_2} \right) E_s(x_3) \cos \frac{x_2-x_3}{\mu_2} dx_3.$$

Решение самосогласованной задачи для поля  $a_s(t)$  будем искать в виде

$$a_s(t_1) = a_0(t_1) \cos [\omega_r^* t_1 + \vartheta(t_1)] \quad (12)$$

с медленно меняющимися амплитудой  $a_0(t_1)$  и фазой  $\vartheta(t_1)$ .

В стационарном режиме величины  $a_0$  и  $\vartheta$  не зависят от времени;

$$\frac{da_0}{dt_1} = \frac{d\vartheta}{dt_1} = 0. \quad (13)$$

Подставим выражение (12) в выражение (11). Не выписывая полученных формул в явном виде, ограничимся лишь общим видом поляризации. С точностью до отброшенных гармоник поляризация

$$p(x, t_1) = p_1(x, t_1) \cos [\omega_r^* t_1 + \vartheta(t_1)] + p_2(x, t_1) \sin [\omega_r^* t_1 + \vartheta(t_1)], \quad (14)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — медленно меняющиеся функции времени.

Как следует из (11), в стационарном режиме  $p_1$  и  $p_2$  не зависят от времени  $t_1$  и после ряда упрощений сводятся к выражениям

$$p_1(x) = \eta a_0 \int_0^x E_s(x_1) \sin [\alpha(x-x_1)] dx_1 - \frac{1}{2} \mu_3 \eta a_0^3 \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_{x_2}^{x_1} dx_3 \times$$

$$\times E_s(x_1) E_s(x_2) E_s(x_3) \{ \sin [\alpha(x-x_1-x_2+x_3)] + \sin [\alpha(x-x_1+x_2-x_3)] \}; \quad (15)$$

$$p_2(x) = -\eta a_0 \int_0^x E_s(x_1) \cos [\alpha(x-x_1)] dx_1 + \frac{1}{2} \mu_3 \eta a_0^3 \int_0^x dx_1 \times$$

$$\times \int_0^{x_1} dx_2 \int_{x_3}^{x_1} dx_3 E_s(x_1) E_s(x_2) E_s(x_3) \{ \cos[\alpha(x - x_1 - x_2 + x_3)] + \cos[\alpha(x - x_1 + x_2 - x_3)] \}.$$

В полученных формулах  $\alpha = (\omega_r^* - 1) \mu_2^{-1}$ .

Подставим (12) и (14) в уравнение (1г) и используем стандартную методику вывода укороченных уравнений [8]. Поступая таким образом, сведем уравнение (1г) к системе

$$\frac{d}{dt_1} a_0(t_1) = -\mu_1 \left\{ a_0(t_1) + \chi \int_0^1 p_2(x, t_1) E_s(x) dx \right\}; \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt_1} \vartheta(t_1) = \mu_1 \left\{ u - \frac{\chi}{a_0(t_1)} \int_0^1 p_1(x, t_1) E_s(x) dx \right\}, \quad (17)$$

где  $u = 2 \left( \frac{\omega_s - \omega_{21}}{\omega_{21}} \right) Q_s$ . При выводе (16) — (17) мы отбросили все члены, порядок малости которых выше  $\mu_1$ .

Рассмотрим стационарный режим колебаний. С учетом (13) уравнения (16) — (17) для стационарных величин  $a_0^c$ ,  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$  перепишем в виде

$$\chi \int_0^1 p_1(x) E_s(x) dx = ua_0^c; \quad (18)$$

$$\chi \int_0^1 p_2(x) E_s(x) dx = -a_0^c.$$

Полученная система совместно с (15) полностью решает задачу о стационарных колебаниях молекулярного генератора с неоднородным полем. Для выяснения различных особенностей необходимо рассмотреть частные случаи. В дальнейшем мы ограничимся случаем

$$E_s(z) = \sin \left( \frac{\pi k}{L} z \right), \quad (19)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$

Сделаем подстановку (19) в уравнения (15) и определим  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$ . Затем с помощью этих величин вычислим интегралы, стоящие в левой части системы (18). Не приводя промежуточных выкладок, запишем лишь конечный результат:

$$\begin{aligned} \chi \int_0^1 p_1(x) \sin(\pi k x) dx &= \frac{\chi \eta \alpha_1 a_0^c}{2(1 + |\alpha_1|)} \frac{1}{y} \left[ \frac{2 \sin y}{|\alpha_1|(1 + |\alpha_1|)y} - 1 \right] - \\ &- \frac{\chi \eta \mu_3 \alpha_1 (a_0^c)^3}{16(1 + |\alpha_1|)^3 y^3} \left[ 4(1 - \cos y) - 3(\alpha_1^2 + 3) + \right. \\ &\left. + \frac{24(1 + 7\alpha_1^2) \sin y}{(9 - \alpha_1^2) |\alpha_1|(1 + |\alpha_1|)y} \right]; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \chi \int_0^1 p_2(x) \sin(\pi k x) dx = & -\frac{\chi \eta a_0^c}{(1+|\alpha_1|)^2} \frac{(1-\cos y)}{y^2} + \frac{\chi \eta \mu_3 (a_0^c)^3}{4(1+|\alpha_1|)^3} \times \\ & \times \frac{1}{y^3} \left[ \frac{4(3+5\alpha_1^2)}{(9-\alpha_1^2)(1+|\alpha_1|)} \frac{(1-\cos y)}{y} - |\alpha_1| \sin y \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где  $y = (1-|\alpha_1|)\pi k$ ,  $\alpha_1 = \alpha/\pi k$ . Найденные выражения (20) и (21) подставим в систему (18), получив в результате уравнения для определения амплитуды и частоты генерации:

$$\frac{\alpha_1}{2(1+|\alpha_1|)} \frac{1}{y} \left[ \frac{2 \sin y}{|\alpha_1|(1+|\alpha_1|)y} - 1 \right] - \frac{\mu_3 \alpha_1 (a_0^c)^2}{16(1+|\alpha_1|)^3 y^3} \left[ 4(1-\cos y) - \right. \\ \left. - 3(3+\alpha_1^2) + \frac{24(1+7\alpha_1^2) \sin y}{(9-\alpha_1^2)|\alpha_1|(1+|\alpha_1|)y} \right] = \frac{u}{\chi \eta}; \quad (22)$$

$$-\frac{(1-\cos y)}{(1+|\alpha_1|)^2 y^2} + \frac{\mu_3 (a_0^c)^2}{4 y^3 (1+|\alpha_1|)^3} \left[ \frac{4(3+5\alpha_1^2)(1-\cos y)}{(9-\alpha_1^2)(1+|\alpha_1|)y} - |\alpha_1| \sin y \right] = -\frac{1}{\chi \eta}. \quad (23)$$

Введем обозначения

$$F_1(\alpha_1) = \frac{\alpha_1}{(1+|\alpha_1|)y} \left[ \frac{2}{|\alpha_1|(1+|\alpha_1|)} \frac{\sin y}{y} - 1 \right];$$

$$F_2(\alpha_1) = \frac{(1-\cos y)}{(1+|\alpha_1|)^2 y^2};$$

$$F_3(\alpha_1) = -\frac{\alpha_1}{8(1+|\alpha_1|)^3 y^3} \left[ 4(1-\cos y) - 3(\alpha_1^2 + 3) + \frac{24(1+7\alpha_1^2) \sin y}{(9-\alpha_1^2)(1+|\alpha_1|) |\alpha_1| y} \right];$$

$$F_4(\alpha_1) = \frac{1}{4(1+|\alpha_1|)^2 y^3} \left[ \frac{4(3+5\alpha_1^2)}{(9-\alpha_1^2)(1+|\alpha_1|)} \frac{(1-\cos y)}{y} - |\alpha_1| \sin y \right].$$

В этих обозначениях уравнения (22) — (23) примут вид

$$F_1(\alpha_1) + \mu_3 (a_0^c)^2 F_3(\alpha_1) = \frac{2u}{\chi \eta}; \quad (24)$$

$$\mu_3 (a_0^c)^2 = \frac{F_2(\alpha_1) - 1/\chi \eta}{F_4(\alpha_1)}.$$

При малых  $\mu_3$  (физически это означает малость амплитуды колебаний) вторым членом в первом уравнении (24) можно пренебречь. Окончательно (24) преобразуется к системе

$$\begin{aligned} F_1(\alpha_1) &= \frac{2u}{\chi \eta}; \\ \mu_3 (a_0^c)^2 &= \frac{F_2(\alpha_1) - 1/\chi \eta}{F_4(\alpha_1)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим случай  $k = 2$ . Функции  $F_1(\alpha_1)$ ,  $F_2(\alpha_1)$  при  $k = 2$  представлены графиками на рис. 1. Для удобства на этом же чертеже проведены прямые  $1/\chi\eta$  и  $2u/\chi\eta$ . Из рис. 2 видно, что в физически интерес-

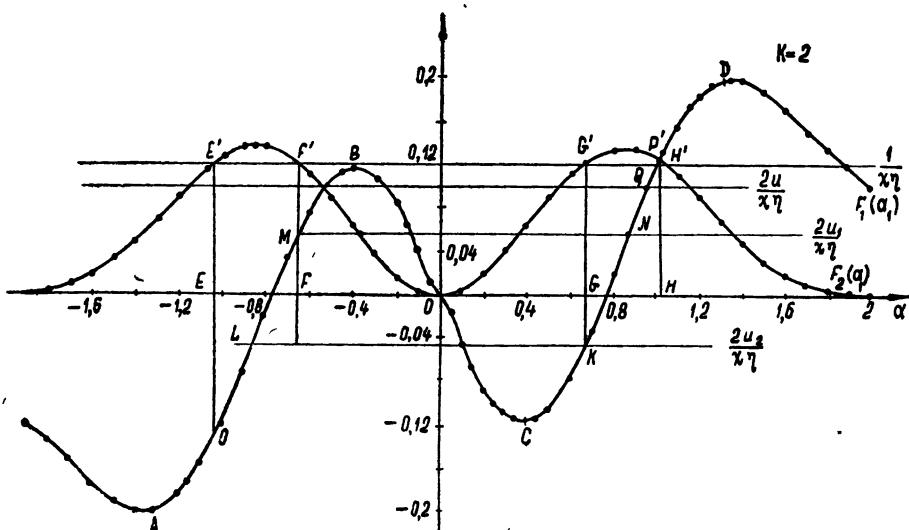


Рис. 1.

ной области  $|\alpha_1| < 2$  при  $k = 2$  функция  $F_4(\alpha_1) > 0$ . Отсюда следует (см. рис. 1), что возможные значения частоты генерации лежат в двух симметричных областях  $EF$  и  $GH$ .

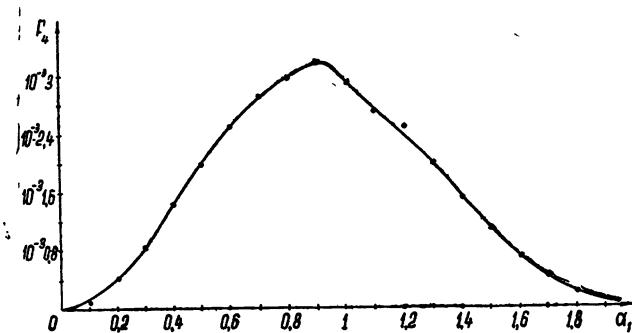


Рис. 2.

Зададимся определенным значением  $\chi\eta$  при условии, что обратная величина  $1/\chi\eta$  близка к 0,14. Последнее требование (как видно из второго уравнения (24)) адекватно требованию малости параметра  $\mu_3$ . В этом случае кривую  $F_1(\alpha_1)$  в областях  $EF$  и  $GH$  можно аппроксимировать отрезками прямой линии, уравнение которых аналитически записывается так:

$$F_1(\alpha_1) = \begin{cases} 0,5(\alpha_1 - 0,77) & \text{при } \alpha_1 > 0 \\ 0,5(\alpha_1 + 0,77) & \text{при } \alpha_1 < 0 \end{cases} \quad (26)$$

Решая совместно (25) и (26), находим

$$\alpha_1 = \begin{cases} 4u/\chi\eta + 0,77 & \text{при } \alpha_1 > 0 \\ 4u/\chi\eta - 0,77 & \text{при } \alpha_1 < 0 \end{cases} \quad (27)$$

Полученное решение (27) и (24) показывает, что в молекулярном генераторе с синусоидальным распределением поля возможны два режима стационарных колебаний, устойчивость которых определяется двумя параметрами  $\chi\eta$  и  $u$ . Физическая сущность этого явления, как подробно разбиралось в [5], связана с эффектом Допплера. Из-за эффекта Допплера молекулы пучка по разному взаимодействуют с бегущими волнами, на которые разлагается стоячее синусоидальное поле резонатора. Так, при  $\alpha_1 \approx -1$  происходит резонансный обмен энергией молекул пучка с обратной волной и слабый (нерезонансный) — с прямой волной. В области  $\alpha_1 \approx 1$  ситуация обратна предыдущей: молекулярная система совершаает интенсивные переходы под действием поля прямой волны.

Предположим, что частота колебаний молекулярного генератора лежит в области  $GH$  рис. 1 или, что то же самое, проекция точки пересечения  $Q$  прямой  $2u/\chi\eta$  с кривой  $F_1(\alpha_1)$  попадает на отрезок  $\alpha_1$ , равный  $GH$ . Будем уменьшать расстройку  $u$ , смещая точку пересечения  $Q$  вниз по отрезку  $PNK$ . При некотором значении  $u = u_1$  точка  $Q$  совпадает с  $N$ . С дальнейшим уменьшением расстройки резонатора относительно частоты перехода в системе становятся одновременно возможны два вида колебаний (см. рис. 1). Переход системы с одного типа генерации на другой осуществляется при  $u_2 \ll u \ll u_1$ .

Точное значение  $u$ , при котором система скачком меняет частоту колебаний, можно установить, исследуя устойчивость режимов  $EF$  и  $GH$ . Поскольку анализ устойчивости является очень громоздким, то он будет изложен в другой заметке. Здесь мы приведем лишь результаты этого анализа, относящиеся к рассматриваемому случаю синусоидального распределения (19).

Как показывает анализ, режимы  $EF$  и  $GH$  являются устойчивыми. Отсюда сразу вытекает, что при  $\chi\eta > 1/0,133$  молекулярный генератор имеет гистерезисную зависимость частоты колебаний от расстройки  $u$  (см. рис. 3). В самом деле, пусть расстройка  $u > 0$  и имеют место колебания с частотой  $\alpha_1 > 0$ , расположенной вблизи значения  $H$  (см. рис. 1). При выбранной таким образом расстройке  $u$  условия самовозбуждения выполнены только для режима  $GH$ . Будем уменьшать  $u$ . Так как колебания  $GH$  устойчивы, то вплоть до значений  $u = u_2 < 0$  генератор работает в режиме  $GH$ . При  $u \ll u_2$  условия самовозбуждения для  $GH$  не выполняются и возникают колебания конечной амплитуды типа  $EF$ . Если изменить теперь расстройку  $u$  в обратную сторону, то в силу устойчивости колебаний  $EF$  мы не получим режима  $GH$ . Режим  $EF$  переходит в  $GH$ , когда  $u = u_1 > 0$ .

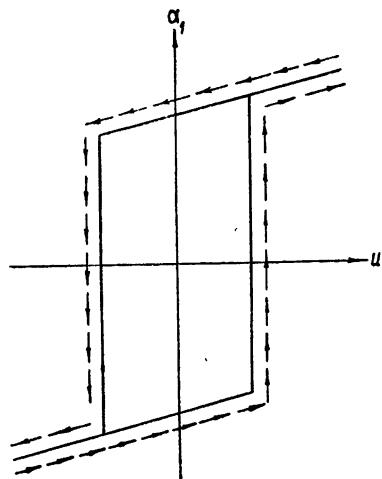


Рис. 3.

На рис. 3 приведены частотные характеристики молекулярного генератора с распределением (19) для  $\chi\eta > 1/0,133$ . Заметим, что площадь петли гистерезиса растет с ростом  $\chi\eta$ . При  $1/\chi\eta = 0,133$  площадь петли равна нулю и гистерезис исчезает. Амплитудно-частотные характеристики для этого случая представлены на рис. 4.

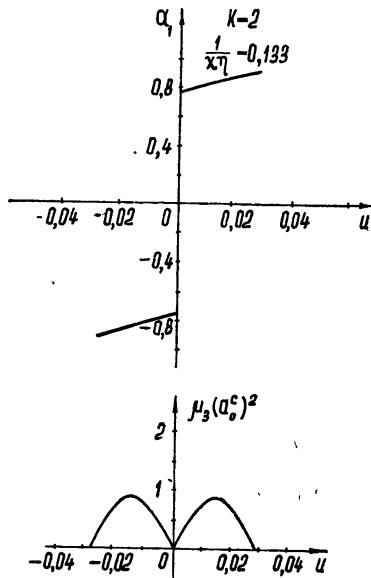


Рис. 4.

В заключение следует указать, что с помощью найденных результатов можно, например, полностью объяснить экспериментальные данные, полученные в работе [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. Н. Прохоров, УФН, 47, 485 (1955).
2. В. Климонтович, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 32, 1151 (1957).
3. Г. П. Любимов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 33, 1396 (1957).
4. I. Волапоти, I. De Prins, I. Herrmann, Helvetica Physica Acta, 31, 282 (1958).
5. В. Б. Цареградский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 6, 275 (1963).
6. А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 4, 718 (1959).
7. А. Н. Ораевский, Труды ФИАН, 21, 3 (1963).
8. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
18 сентября 1964 г.

INTERACTION OF MOLEKULAR BEAM WITH ELECTROMAGNETIC FIELD OF  
RESONATOR II. STATIONARY OSCILLATIONS OF MOLEKULAR GENERATOR  
WITH NONHOMOGENEOUS FIELD

V. B. Tsaregradskii

The polarization of the monokinetic molecular beam has been found as the expansion with respect to  $E(r, t)$ . The expression obtained is used to the analysis of stationary oscillations of the molecular generator with a nonhomogeneous sinusoidal field of resonator. It is shown that at the definite parameters there exist two limit cycles with different oscillation frequency in a generator.

УДК 539.28

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАСЫЩЕНИИ

Д. Н. Клышико, Ю. С. Константинов, В. С. Туманов

Анализируется возможность параметрического усиления электромагнитных колебаний при облучении вещества, обладающего узкой линией поглощения, вспомогательным монохроматическим сигналом (накачкой). Предполагается, что частоты усиливаемого и вспомогательного сигналов близки к боровской частоте системы и что рабочее вещество находится в резонаторе. Показано, что отношение «отрицательного» поглощения к обычному резонансному поглощению может достигать 1/8. Эксперимент, проведенный на линии электронного парамагнитного резонанса свободного радикала ДФПГ, подтвердил возможность получения отрицательного поглощения.

В работе [1] показано, что двухуровневая квантовая система с боровской частотой  $\omega_0$  при частичном насыщении ее вспомогательным излучением (накачкой) частоты  $\omega_1 \sim \omega_0$  может усиливать слабое поле частоты  $\omega_2 \sim \omega_0$ .\*. В этой работе анализировался случай электродипольного взаимодействия при условии, что спин-решеточное  $T_1$  и спин-спиновое  $T_2$  времена релаксации одинаковы, а третье поле с «зеркальной» частотой  $2\omega_1 - \omega_2 \equiv \omega_3$  равно нулю; кроме того, предполагалось, что частоты  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $1/T_1$  находятся между собой в определенном соотношении. Авторы работ [3, 4] теоретически и экспериментально исследовали близкий эффект — усиление боковых компонент амплитудно-модулированного резонансного ( $\omega_1 = \omega_0$ ) излучения с помощью узкой линии поглощения в газе.

В настоящей работе параметрическое возбуждение при насыщении рассмотрено при несколько более общих по сравнению с [1, 3, 4] предположениях. Получено выражение для намагниченности (или поляризации в случае электрического дипольного взаимодействия) двухуровневой системы при наличии интенсивного поля накачки с частотой  $\omega_1$  и двух слабых полей с частотами  $\omega_2$  и  $2\omega_1 - \omega_2$ . Это выражение используется при обсуждении возможности применения рассматриваемых параметрических эффектов для усиления СВЧ-сигналов в случае, когда активное вещество помещено в объемный резонатор. В заключение приведены результаты эксперимента, подтвердившего возможность получения отрицательного поглощения на частично насыщенной линии электронного парамагнитного резонанса.

### 1. РАСЧЕТ НАМАГНИЧЕННОСТИ

При расчете намагниченности будем исходить из уравнений движения матрицы плотности  $\rho_{mn}$  с феноменологическими релаксационными параметрами  $T_1$ ,  $T_2$  (см., например, [5]). В случае двухуровневой системы эти уравнения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \hat{L}\rho &= V\Delta + W\rho; \\ \hat{D}\Delta &= -i\Omega_1\Delta_e/2 + V^*\rho - V\rho^*, \end{aligned} \quad (1)$$

\* Эта возможность следует также из результатов статьи [2].

где  $\rho \equiv \rho_{12}$ ,  $\Delta \equiv \rho_{11} - \rho_{22}$  — нормированная разность населенностей,  $\Delta_e$  — равновесная разность населенностей,  $\hat{L} \equiv -id/dt - \omega_0 - i\Omega_2$ ,  $2\hat{D} \equiv -id/dt - i\Omega_1$ ,  $\omega_0$  — боровская частота системы,  $\Omega_k \equiv 1/T_k$  ( $k = 1, 2$ ),  $\hbar V = -\mu_{12} \bar{H}(t)$ ,  $\hbar W \equiv (\mu_{11} - \mu_{22}) \bar{H}(t)$ ,  $\bar{\mu}$  — оператор дипольного момента,  $\bar{H}(t)$  — поле, действующее на систему.

Рассмотрим случай, когда на систему действуют поля произвольной поляризации с частотами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 = 2\omega_1 - \omega_2$ :

$$\bar{H}(t) = \frac{1}{2} \sum_1^3 \bar{H}_n e^{-i\omega_n t} + \text{к. с.} \quad (2)$$

При этом  $V = \Sigma(V_n e^{i\omega_n t} + V_{-n} e^{-i\omega_n t})$ , где  $V_n = -\bar{\mu}_{12} \bar{H}_n / 2\hbar$  и  $V_{-n} = -\bar{\mu}_{12} \bar{H}_n^* / 2\hbar$ . Будем считать поля  $H_2$  и  $H_3$  настолько малыми, что выполняются условия  $V_2, V_3 \ll \Omega_1$  и при расчете можно ограничиться линейным приближением по  $H_2$  и  $H_3$ ; пусть также  $\omega_n \sim \omega_0$ ,  $\omega_0 \gg \Omega_2$ . Тогда стационарное решение (1) естественно искать в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_1^3 \rho_n e^{i\omega_n t}; \\ \Delta &= \Delta_0 + \Delta_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + \Delta_3 e^{-i(\omega_3 - \omega_1)t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) и (2) в (1), получим следующие выражения для  $\Delta_0$  и  $\rho_n$ :

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \Delta_e/s; \quad \rho_1/\Delta_0 = V_1/L_1; \\ (4) \end{aligned}$$

$$\frac{\rho_2}{\Delta_0} = \frac{V_2[D_2 L_3^* + |V_1|^2(1 - L_3^*/L_1^*)] - V_3^* V_1^2(1 - L_3^*/L_1)}{D_2 L_2 L_3^* + |V_1|^2(L_2 - L_3^*)}.$$

Здесь  $L_n = \omega_n - \omega_0 - i\Omega_2$ ,  $2D_n = \omega_n - \omega_1 - i\Omega_1$ ,  $s = 1 + 4|V_1/L_1|^2\Omega_2/\Omega_1$  — фактор насыщения. Величина  $\rho_3$  получается путем циклической подстановки индексов 2,3 в выражении для  $\rho_2$ .

Воспользовавшись выражениями (4), определяющими элементы матрицы плотности, найдем комплексные амплитуды  $\bar{M}_n$  намагниченности  $\bar{M}(t)$  (или поляризации при электрическом дипольном взаимодействии):

$$\begin{aligned} \bar{M}(t) &= N_0 \operatorname{Sp} \bar{\mu} \rho = \frac{1}{2} \sum_1^3 (M_n e^{i\omega_n t} + \text{к. с.}); \\ (5) \quad \bar{M}_n &= 2N_0 \bar{\mu}_{21} \rho_n, \end{aligned}$$

где  $N_0$  — число частиц в единице объема. Формулы (4), (5) определяют компоненты намагниченности двухуровневой системы на частоте накачки  $M_1$ , частоте сигнала  $M_2$  и «зеркальной» частоте  $M_3$  в линейном приближении по  $H_2$  и  $H_3$ . Отметим, что при  $\bar{H}_3^* = \bar{H}_2$ ,  $\bar{H}_1 \parallel \bar{H}_2$  (амплитудно-модулированное поле накачки)  $\omega_1 = \omega_0$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2$ ; при  $\bar{\mu}_{12}$ , действительном и параллельном  $H_1$ , из (4), (5) следует формула (21) работы [3].

## 2. РЕЗОНАТОРНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая, когда рабочее вещество находится в резонаторе\*. Будем считать, что резонатор имеет два невзаимодействующих типа колебаний с собственными частотами  $\omega_{3p}$  и  $\omega_{3p}$ , близкими к  $\omega_2$  и  $\omega_3$  соответственно, и поле  $\bar{H}_3$  на зеркальной частоте обусловлено лишь реакцией резонатора на намагниченность  $\bar{M}_3$ :

$$\bar{H}_3 = \bar{h}_3 4\pi \eta_3 Q_3 \bar{M}_3 \bar{h}_3 / (i - y_3). \quad (6)$$

Здесь  $\bar{h}_3$  — единичный вектор в направлении поля резонатора в области, занимаемой веществом (поле в объеме вещества  $V_0$  предполагается однородным),  $\eta_3 = |\bar{H}_3|^2 V_0 / \int |\bar{H}_3|^2 dV_p$  — коэффициент заполнения ( $V_p$  — объем резонатора),  $Q_3$  — нагруженная добротность моды резонатора с частотой  $\omega_{3p}$ ,  $y_3 = 2Q_3(\omega_3/\omega_{3p} - 1)$ .

Подставляя (5) (при  $n = 3$ ) в (6), получаем

$$V_3 = -\Omega_2 q_3 p_3 / \Delta_0, \quad q_n \equiv -\frac{Q_n}{Q_{mn} s(y_n + i)}, \quad (7)$$

где  $Q_{mn} \equiv (4\pi \eta_n \Delta_e N_0 |\bar{\mu}_{12} \bar{h}_n|^2 / \hbar \Omega_2)^{-1}$  — магнитная добротность [6]. Исключая с помощью (7)  $V_3$  из (4), имеем

$$\rho_2 = R_2 \Delta_e V_2 / \Omega_2; \quad (8)$$

$$R_2 = \frac{x - i}{1 + x^2 + 2b/k} \frac{(x+i)(z+ik)(x+z+i+q_3) + b[z+2q_3/(1+ix)]}{(x-z-i)(z+ik)(x+z+i+q_3) + b[2z+2i+izq_3/(1+ix)]},$$

где

$$x = (\omega_1 - \omega_0) / \Omega_2, \quad z = (\omega_1 - \omega_2) / \Omega_2, \quad b = 2|V_1/\Omega_2|^2, \quad k = \Omega_1/\Omega_2.$$

Введем комплексный тензор восприимчивости  $\chi_{ij}^{(n)}$ , определяемый равенством  $(\bar{M}_n)_i = \chi_{ij}^{(n)} (\bar{H}_n)_j$ . Тогда из (4), (5) следует

$$\chi_{ij}^{(2)} = -\Delta_e N_0 (\bar{\mu}_{21})_i (\bar{\mu}_{12})_j R_2 / \hbar \Omega_2. \quad (9)$$

Рассеиваемая в единице объема вещества за счет поля  $\bar{H}_n$  мощность  $P_n = \operatorname{Re} i \omega_n \bar{M}_n \bar{H}_n^*/2 = \operatorname{Re} i \omega_n \sum \chi_{ij}^{(n)} H_{ni} H_{nj}$ . В случае линейной поляризации поля в направлении одной из осей координат

$$P_2 = -\omega_2 |H_2|^2 \operatorname{Im} \chi_{ij}^{(2)} / 2 = \omega_2 \Delta_e N_0 |\bar{\mu}_{12} \bar{H}_2|^2 \operatorname{Im} R_2 / 2\hbar \Omega_2. \quad (10)$$

Таким образом, коэффициент  $R_2' = \operatorname{Im} R_2$  равен отношению поглощающей мощности при параметрическом возбуждении системы к той же мощности при  $H_1 = 0, \omega_2 = \omega_0$ , т. е. при обычном резонансном поглощении. Поэтому для усиления поля  $H_2$  необходимо, чтобы  $R_2'$  было отрицательно. Величина  $R_2'$  в этом смысле эквивалентна коэффициенту инверсии, вводимому в теории парамагнитных усилителей [6].

Определим, наконец, комплексную магнитную добротность  $\tilde{Q}_{m2}$  на частоте  $\omega_2$ :

\* Совместное решение волнового уравнения и (4), (5) определит свойства усилителя бегущей волны (в работе [3] эта задача решена для частного случая). Отметим, что при использовании в качестве рабочего вещества парамагнетика такой усилитель может быть сделан односторонним.

$$\tilde{Q}_{m2}^{-1} = 8\pi \tilde{P}_2 V_0/\omega_2 \int |H_2|^2 dV_p = Q_{m2}^{-1} R_2,$$

где  $\tilde{P}_2 = -\omega_2 |H_2|^2 \chi_{ij}^{(2)}/2$ . Используя  $\tilde{Q}_{m2}$ , дальнейший расчет можно проводить методом эквивалентных схем (о применении этого метода к расчету параметров резонаторных усилителей см., например, в [6]).

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выражение для  $R_2''$  нетрудно получить из (8); однако ввиду его громоздкости анализ в общем случае сложен. Поэтому мы ограничимся рассмотрением нескольких частных случаев. На рис. 1 приведены графики зависимости  $R_2''(z)$  при некоторых значениях параметров  $x, k, q_3$  и  $b$ .

а) При  $x = 0, k = 1, q_3 = 0$

$$R_2'' = \frac{1}{s(w+1)} \left[ 1 + b \frac{w^2 + w(3 - 2b) - 2(1 + 2b)}{(w - 1 - 2b)^2 + 4w} \right], \quad (11)$$

где  $w = z^2$ . Зависимость  $R_2''(|z|)$  представлена на рис. 1а. Нетрудно видеть, что  $R_2''$  минимально при  $s \approx 12$ ,  $z \approx 2,2$  и равно — 0,03; при  $s \approx 12$   $R_2'' < 0$ , когда  $0,4 < |z| < 3$ .

б) При  $x \neq 0, k = 1, q_3 = 0$  минимальное значение  $R_2''$  также близко к — 0,03. Характер зависимости  $R_2''(z)$  в этом случае иллюстрируется рис. 1б.

в) При  $x = 0$ , произвольном  $k$  и  $q_3 = 0$

$$R_2'' = \frac{1}{s(w+1)} \left[ 1 + b \frac{w^2 + w(3 - 2b) - 2(k + 2b)}{(w - k - 2b)^2 + w(k + 1)^2} \right]. \quad (12)$$

Если  $k \ll 1$  ( $\Omega_1 \ll \Omega_2$ ), то  $R_2'' < 0$  при  $b > 1/2$ ; при этом  $R_2'' \sim -k$ .

г) Заметное увеличение  $-R_2''$  дает резонатор, настроенный на зеркальную частоту  $\omega_3$ . В этом случае  $y_3 = 0$  и  $q_3 = ir_3$ , где  $r_3$  — действительная величина. Согласно (8), при  $r_3 \gg 1$  и  $b \gg 1$   $R_2''$  может достигать — 1, однако практически увеличение  $r_3$  может привести к возникновению автоколебаний при выполнении условия  $-R_3(r_2)/Q_{m3} \geq 1/Q_3$ . Последнее с помощью (7) можно записать в виде:  $-R_3(r_2)s r_3 \geq 1$  ( $R_3$  получается из (8) заменой  $z$  на  $-z$  и  $q_3$  на  $q_2$ ). Точно также колебания могут возникнуть при  $-R_2'' s r_2 \geq 1$ . Если  $Q_2 = Q_3$ ,  $Q_{m2} = Q_{m3}$  и, следовательно,  $r_2 = r_3 = r$ , максимальное значение  $r$  определяется из уравнения

$$-R_2''(r_{\max}) s r_{\max} = 1. \quad (13)$$

Например, при  $x = 0, y_{2,3} = 0$  и  $z \ll 1$  из (8) следует:

$$R_2'' = \left[ 1 - \frac{\beta(r+1)}{\beta+r+1} \right] / s, \quad (14)$$

где  $\beta = 2b/k$ . Из (13), (14) получаем максимальное значение  $r$  и  $R_2''(r_{\max})$ :

$$r_{\max} = \frac{\beta+1}{\beta-1}, \quad R_2''(r_{\max}) = \frac{1-\beta}{(1+\beta)^2}. \quad (15)$$

Отметим, что  $R_2''(r_{\max})$  совпадает с аналогичным коэффициентом в случае амплитудной модуляции накачки при  $x = 0, z \ll 1$  (см. [3]). Мини-

мальное значение  $R_2''(r_{\max})$  равно  $-1/8$  и достигается при  $\beta = 3$ , при этом  $r_{\max} = 2$ .

Зависимость  $R_2''(|z|)$  при  $x = 0$ ,  $k = 1$ ,  $r_3 \neq 0$  иллюстрируется рис. 1в, г. Характерно, что  $R_2'' < 0$  и в области  $z \approx 0$ , как и в случае амплитудно-модулированной накачки.

д) При  $x = 0$ , произвольном  $k$ ,  $r = 1$

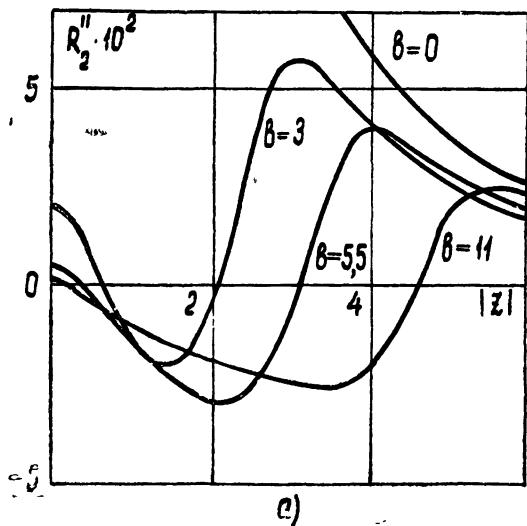
$$R_2'' = \frac{1}{s} \frac{w(b+1) + k^2 - b^2}{(w - k - b)^2 + w(k+1)^2}. \quad (16)$$

Здесь  $R_2'' < 0$  при  $w < \frac{b^2 - k^2}{b+1}$ ;

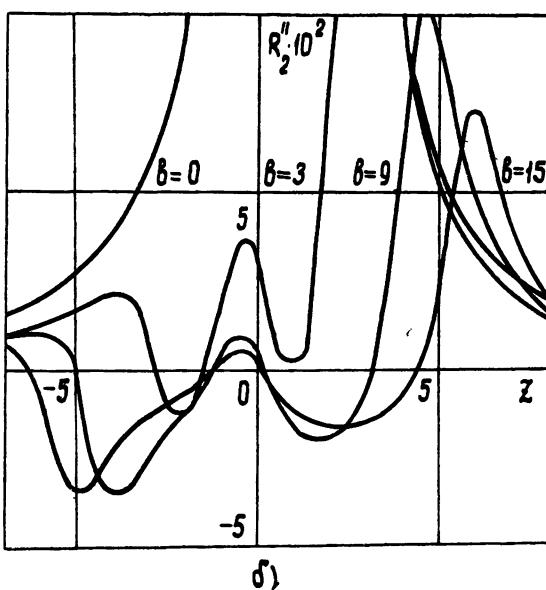
если  $b \sim 2k$ , то  $R_2'' < 0$   
при  $\omega_2 - \omega_0 \ll \Omega_1$ .

Таким образом, анализ выражения (8) показывает, что при оптимальном выборе параметров  $R_2''$  отрицательно в полосе частот  $\sim \Omega_1$  и его минимальное значение составляет —  $(0,03 \div 0,125)$ .

Произведем оценку необходимой мощности накачки  $P$  и полосы усиления  $\Delta\nu$  при условии  $b = 1,5$  для случаев магнитного ( $P_M$ ) и электрического ( $P_E$ ) дипольных взаимодействий. Если пренебречь потерями в резонаторе, то при  $\omega_1 = \omega_0$



а)



б)

Рис. 1. Зависимость  $R_2''$  от  $z$ : а)  $x=0$ ,  $k=1$ ,  $q_3=0$ ;  
б)  $x=1$ ,  $k=1$ ,  $q_3=0$ .

$$P_M = \frac{\omega_1 V_0 H_1^2}{8\pi Q_{m1} s}; \quad P_E = \frac{c V_0 E_1^2 \gamma}{8\pi s}, \quad (17)$$

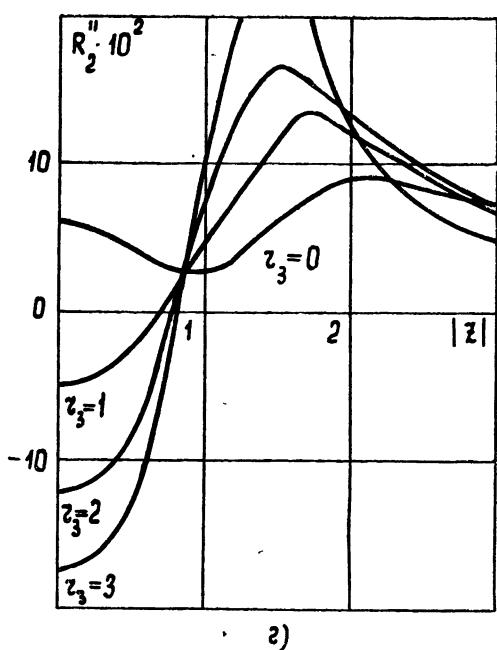
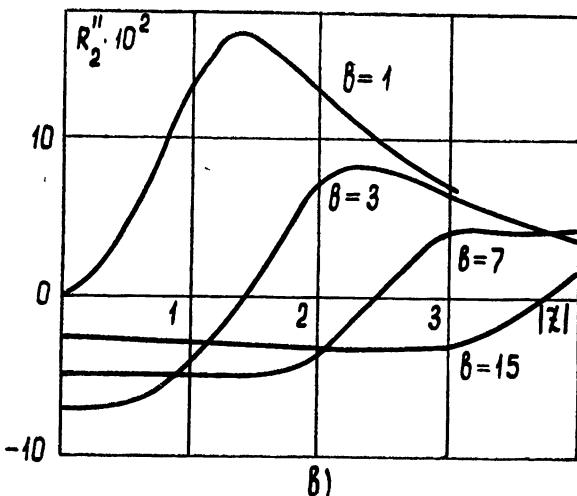


Рис. 1. Зависимость  $R''_2$  от  $z$ : в)  $x=0, k=1, r_3=1$ ; г)  $x=0, k=1, b=1,5$ .

дах) и  $Q_m^{-1} = 6 \cdot 10^{-2}$  (при комнатной температуре и  $\eta = 1$  в диапазоне 3 см). Чтобы  $b = 1,5$ , при  $\omega_1 = \omega_0$  должно быть:  $H_1 = \sqrt{3} \Delta H = 3,5$  э. Тогда, согласно (17), при  $V_0 = 1 \text{ см}^3$   $P_M = 133 \text{ вт}$ , параметр регенерации  $x = 150 \text{ Мгц}^*$ ,  $\Delta v \approx 2,8 \text{ Мгц}$  при  $G < 30 \text{ дБ}$ .

где  $\gamma$  — коэффициент поглощения газа,  $E_1$  — напряженность электрического поля накачки. Полоса усиления  $\Delta v$  в случае резонаторного усиления определяется или областью  $\Delta v_{\text{опт}}$ , в которой  $R''_2 < 0$ , или параметром регенерации [6]:

$$\begin{aligned} x &= \Delta v \sqrt{G} = \\ &= -2v_2 R''_{2 \min} / Q_{m2} = \quad (18) \\ &= -\frac{c}{\pi} \gamma R''_{2 \min}, \end{aligned}$$

где  $G$  — коэффициент усиления,  $v = \omega/2\pi$ .

В качестве примера „магнитного“ рабочего вещества рассмотрим свободный радикал дифенилпикрилгидразил, для которого  $T_1 = T_2 = 6 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$  (т. е.  $\Omega/2\pi = 1,4 \cdot 10^6 \Delta H = 2,8 \text{ Мгц}$ , где  $\Delta H$  — ширина линии в эрстедах) и  $Q_m^{-1} = 6 \cdot 10^{-2}$  (при комнатной температуре и  $\eta = 1$  в диапазоне 3 см).

\* Считалось, что  $r_2 = r_3$  и, следовательно,  $R''_{2 \min} = -0,125$ ; см. рис. 1 г.

В случае электрического дипольного перехода в газе необходимая мощность накачки  $P_E$  значительно меньше. Пусть  $\mu = 3$  деб; тогда при  $b = 1,5$ ,  $E \sim \sqrt{3} \frac{\hbar}{\mu} \Delta\nu_{\text{отр}} \sim 3,8 \cdot 10^{-9} \Delta\nu_{\text{отр}}$  и если  $\gamma = 0,1 \text{ см}^{-1}$ ,  $\omega_1 = \omega_0$ , то  $P_E = 4 \cdot 10^{-10} V_0 (\Delta\nu_{\text{отр}})^2$  ед. CGS. Чтобы получить  $\Delta\nu_{\text{отр}} = 10 \text{ Мгц}$  при  $V_0 = 1 \text{ см}^3$ , нужна мощность  $P_E = 4 \text{ мвт}$ ; при этом  $x = 120 \text{ Мгц}$  (если  $r_2 = r_3$ ). Если задаваться условием  $\Delta\nu_{\text{отр}} = x/\sqrt{G} \equiv B$ , то, используя (18), можно исключить  $\gamma$  из (17):  $P_E/V_0 \sim (h/\mu)^2 B^3 / G^{1/2}$  ( $b = 1,5$ ). Например, при  $\mu = 3$  деб,  $G = 100$ ,  $V_0 = 100 \text{ см}^3$ ,  $P_E \approx 4B^3$ , где  $P_E$  выражено в микроваттах,  $B$  — в мегагерцах.

#### 4. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ ПРИ НАСЫЩЕНИИ ЛИНИИ ЭПР

Экспериментальная проверка формулы (8) была осуществлена в радиодиапазоне. Ниже приведены результаты наблюдения отрицательного поглощения на частоте  $\nu_2 = \omega_2/2\pi = 20 \text{ Мгц}$  на линии ЭПР в свободном радикале ДФПГ при ее насыщении вспомогательным сигналом с частотой  $\nu_1 = \omega_1/2\pi = 24 \text{ Мгц}$ .

В эксперименте использовались 2 катушки с перпендикулярными осями, настроенные на частоты 20 и 24 Мгц; оси катушек были перпендикулярны направлению постоянного магнитного поля  $H_0$ , которое изменялось в интервале от нуля до 20 э. Катушка на 24 Мгц питалась мощным генератором и создавала в поликристаллическом образце ДФПГ, помещенном во вторую катушку, насыщающее поле с амплитудой до 11 э. Вторая катушка являлась датчиком сигнала ЭПР в обычном радиочастотном магнитном спектроскопе, собранном по схеме Роллина; для повышения чувствительности спектроскопа применялись магнитная модуляция и синхронное детектирование на частоте 100 кгц. Для подавления сигнала индукции, наводимого во второй катушке намагнченностью образца, прецессирующей с частотой 24 Мгц, перед первым детектором включался режекторный фильтр.

На рис. 2 представлены образцы записей производной по  $H_0$  от мнимой части  $\chi''$  восприимчивости образца для частоты сигнала 20 Мгц в зависимости от  $H_0$  при выключененной накачке (а) и при амплитуде поля накачки  $H_1 = 7,7$  э (б); при записи кривой (б) усиление спектроскопа было увеличено в 5 раз.

Аналогичные записи при различных значениях  $H_1$  были численно проинтегрированы; полученные зависимости  $\chi''(H_0, H_1)$ , нормированные к  $\chi''(\omega_2/\gamma, 0)$ , представлены на рис. За ( $\gamma$  — гиromагнитное отношение ДФПГ). Из рисунка видно, что при  $H_1 \geq 5$  э  $\chi''$  отрицательно в определенной области изменения  $H_0$ .

На рис. 3б приведены графики зависимости

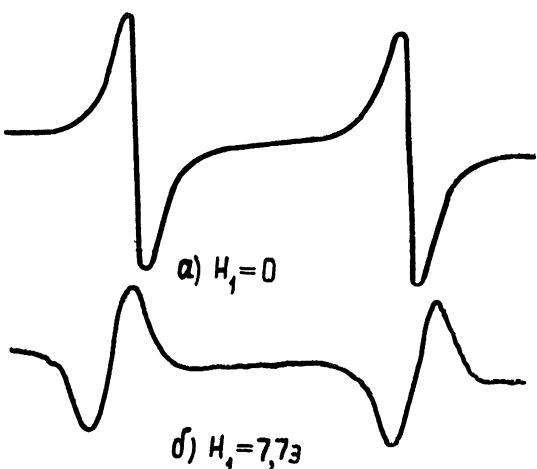


Рис. 2. Зависимость от поля  $H_0$  производной  $d\chi''/dH_0$  при  $H_1=0$  (а) и  $H_1=7,7$  э (б); кривая б записана при впятеро большем усилении, чем кривая а.

$$\begin{aligned}
 R_2'' &= \chi''(H_0, H_1)/\chi''(\omega_2/\gamma, 0) = \\
 &= \{x^4 + x^3 z (2 - b/a) + x^2 (1 + b/a) (a+1) + xz [2 + (3z^2 - s) b/a] + \\
 &+ (z^4 - z^2 + 2)b/a - 2b^2 z^2/a + a\} \{(x^2 + s)[(x^2 + s - z^2)^2 + 4z^2]\}^{-1},
 \end{aligned}$$

полученной из формулы (8) при  $q_3 = 0$ . Здесь

$$x = (\omega_1/\gamma - H_0)/\Delta H,$$

$$z = (\omega_1 - \omega_2)/\gamma\Delta H, \quad 2b = (H_1/\Delta H)^2, \quad a = 1 + z^2, \quad s = 1 + (H_1/\Delta H)^2,$$

$\Delta H$  — ширина линии, равная в условиях нашего эксперимента 2,1 э.  
( $z = 1,36$ ).

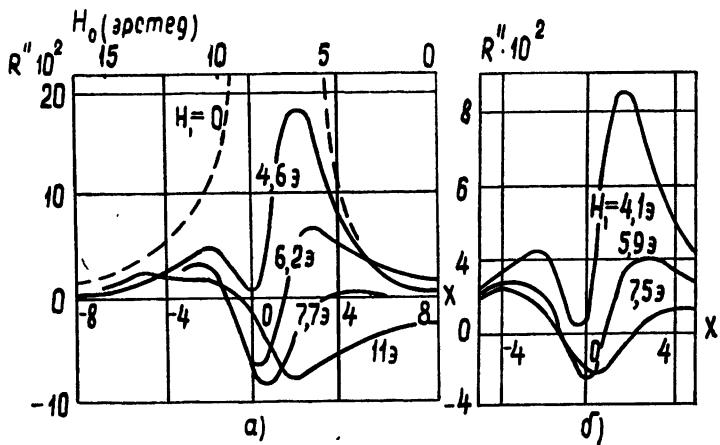


Рис. 3. Экспериментальная (а) и теоретическая (б) зависимости  
 $R_2'' = \chi''(H_0, H_1)/\chi''(\omega_2/\gamma, 0)$ .

Сравнение рис. 3а и 3б показывает, что характеры экспериментальных и теоретических зависимостей совпадают. Количественное расхождение объясняется, по-видимому, неточностью определения базисной линии при численном интегрировании и нестрогим выполнением условия  $\omega_0 \gg \gamma\Delta H$ , при котором справедлива формула (19).

Описанный эксперимент подтверждает возможность получения отрицательного поглощения в частично насыщенном двухуровневом paramagnитике; величина этого поглощения порядка 5% обычного резонансного поглощения.

Основные преимущества рассматриваемого метода возбуждения квантовых систем — широкий выбор рабочих веществ, одинаковый диапазон частот сигнала и накачки, простота конструкции (например, нет необходимости в охлаждении). Накачка здесь может одновременно выполнять функции гетеродина, причем шумы накачки при надлежащем выборе параметров  $x$ ,  $z$  и  $b$  будут, по-видимому, малы.

В заключение авторы выражают благодарность С. Д. Гвоздоверу за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Fontana, R. H. Pantell, R. G. Smith, *J. Appl. Phys.*, **33**, 2085 (1962).
2. С. Г. Раутян, И. И. Собельман, *ЖЭТФ*, **41**, 456 (1961).
3. B. Senitzky, G. Gordon, S. Cutler, *Phys. Rev.*, **130**, 1460 (1963).
4. B. Senitzky, S. Cutler, *Microwave J.*, **7**, 62 (1964).
5. A. M. Clogston, *J. Phys. Chem. Solids*, **4**, 271 (1958).
4. А. Вейлстеке, *Основы теории квантовых усилителей и генераторов*, ИЛ, М., 1963.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
21 марта 1964 г.

## PARAMETRIC EXCITATION OF TWO-LEVEL SYSTEMS IN SATURATING REGIME

*D. N. Klyshko Yu. S. Konstantinov, V. S. Toumanov*

The possibility is investigated of parametric excitation of electromagnetic oscillations, the matter with a narrow absorption line being irradiated by an auxiliary monochromatic signal (pumping). The frequencies of amplified and auxiliary signals are assumed to be near Bor's frequency of the system and operating matter to be placed in a resonator. The ratio of "negative" absorption to the ordinary resonance one is shown to approach to 1/8. The experiment carried out with the line of electron paramagnetic resonance of free radical DPPG affirmed the existence of negative absorption

УДК 621.372

## ИЗЛУЧЕНИЕ В ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРАХ

Б. Зельдович

Дается описание мод открытого резонатора (которые сами по себе не образуют ортогональной полной системы) с помощью волновых функций непрерывного спектра типа функций  $\psi_k$  квантовой механики. Произведена оценка отношения резонансного члена в выбранных функциях к нерезонансному. Показан предельный переход к идеальному закрытому резонатору.

При рассмотрении открытых резонаторов, используемых для лазеров, электромагнитное поле в резонаторе обычно разлагается по собственным колебаниям системы. Эти собственные колебания квазистационарны и затухают со временем. Поэтому система собственных функций, соответствующих этим состояниям, не обладает свойствами полноты и ортогональности. Для резонаторов на СВЧ это обстоятельство не имеет существенного значения, так как для всех собственных колебаний добротности  $Q$  весьма высоки и затухание (как из-за потерь в стенах, так и из-за вывода мощности наружу) учитывается как малое возмущение. В противоположность этому в открытых резонаторах оптического диапазона лишь для очень узкого телесного угла направлений волнового вектора существуют колебания с большими  $Q$ ; для всех остальных направлений вообще не имеет смысла вводить понятие квазистационарного состояния. В данной работе указанные выше затухающие моды описываются с помощью системы волновых функций непрерывного спектра. При этом выбор системы функций определяется условием применимости к главной задаче о резонаторных системах — нахождению интенсивности излучения в определенном направлении.

### 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ НА ОСЦИЛЛЕТОРЫ: ВЫБОР СИСТЕМЫ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Для исследования взаимодействия излучающей системы с электромагнитным полем (в свободном пространстве, в резонаторе) поле принято разлагать по полной ортогональной системе собственных функций оператора Лапласа с соответствующими граничными условиями. Напомним, что для ортогональности и полноты в обычном смысле нужно, чтобы в системе отсутствовало поглощение (диссипация). При наличии диссипации становится затруднительным и применение квантовой механики с ее обычными методами ввиду неэрмитовости гамильтониана, описывающего излучение. Поэтому мы предположим, что поглощение в стенах резонатора (зеркалах) отсутствует и что затухание мод определяется лишь уходом излучения из системы. Реально существующие линейные потери можно формально описать как процесс излучения в некотором (для удобства узком) интервале углов. Заметим, что именно таково по своей природе затухание, вносимое в моду плоскопараллельной прозрачной пластинкой, поставленной под углом к оси резонатора.

Если в результате расчетов получится, что с некоторой вероятностью

$\omega$  атом излучил фотон именно в этот узкий интервал углов, то  $\omega$  будет просто вероятностью поглощения фотона. Узость же интервала нам нужна для того, чтобы поглощенное поле не интерферировало с «реальным излучаемым».

При выборе системы волновых функций следует учесть, что в конечном счете нас интересует вероятность (интенсивность) излучения в том или ином направлении. В свободном пространстве для этой цели используются бегущие плоские волны  $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ . Однако при наличии резонатора последние не удовлетворяют граничным условиям на зеркалах. Поэтому точные волновые функции системы непрерывного спектра кроме плоской волны включают в себя на бесконечности еще и сферическую часть. Поступая так, как это делается в аналогичных задачах нерелятивистской квантовой механики (см. [1], § 134), выберем в качестве основной системы функции типа  $\psi_{\mathbf{k}}^-(\mathbf{r})$ , имеющие на бесконечности асимптотику в виде суммы плоской и сходящейся сферической воли:

$$\psi_{\mathbf{k}}^-(\mathbf{r}) \simeq (2\pi)^{-3/2} \left[ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f_1 \left( \mathbf{k}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} \right]. \quad (1)$$

С учетом принципа излучения (правило обхода полюса при интегрировании по  $d\mathbf{k}$ ) на бесконечность уйдет только содержащая  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/r$  часть волновой функции. Но в функциях  $\psi^-$  выходящая часть соответствует только плоской волне, что и означает, что вероятность перехода в состояние  $\psi^-$  есть вероятность излучения на бесконечность кванта с импульсом  $\hbar\mathbf{k}$ .

Полную систему образуют также функции  $\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r})$ :

$$\psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r}) \equiv \{\psi_{-\mathbf{k}}^-\}^* \simeq (2\pi)^{-3/2} \left[ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{n}') \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{r} \right]; \quad (2)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}/k; \quad \mathbf{n}' = \mathbf{r}/r, \quad (2a)$$

где  $f(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{n}')$  — амплитуда рассеянных нашей системой волн в направлении  $\mathbf{n}'$  с направления  $\mathbf{n}$ .

Строго говоря, мы должны решать уравнение Д'Аламбера для векторной функции — вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ . Это сводится к учету поляризационной переменной и не изменяет существенно результатов, получаемых для скалярного случая. Поэтому учет поляризационной переменной вынесен в Приложение 3. Дальнейшая процедура разложения обычна: нормируем волновые функции на  $4\pi c^2$  в объеме  $V$  ( $V \rightarrow \infty$ ):

$$A_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} (2\pi)^{3/2} \psi_{\mathbf{k}}^-(\mathbf{r}) \quad (3)$$

и представляем вещественное поле  $A(\mathbf{r}, t)$  в виде ряда

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \left[ q_{\mathbf{k}}(t) A_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + q_{\mathbf{k}}^*(t) A_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \right], \quad (4)$$

где

$$q_{\mathbf{k}}(t) \sim e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = ck. \quad (5)$$

Отметим, что для разложения вещественного поля нам требуются одновременно обе системы функций  $\psi_{\mathbf{k}}^+$  и  $\psi_{\mathbf{k}}^-$ , являющиеся комплексно сопряженными друг к другу. Однако «основной» является, в связи со сделанным выбором, именно  $\psi_{\mathbf{k}}^-$ , а комплексно сопряженной —  $\psi_{\mathbf{k}}^+$ . Введем вещественные канонические переменные

$$Q_{\mathbf{k}} = q_{\mathbf{k}} + q_{\mathbf{k}}^*, \quad P_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}}(q_{\mathbf{k}} - q_{\mathbf{k}}^*) \equiv Q_{\mathbf{k}}, \quad (6)$$

в которых гамильтониан поля (пока классический) принимает вид

$$H = \sum_k H_k; \quad H_k = \frac{1}{2} P_k^2 + \frac{1}{2} \omega_k^2 Q_k^2. \quad (7)$$

Как известно, именно такой способ осуществляет разложение поля на осцилляторы типа бегущих волн. Вполне естественно, что для случая свободного пространства

$$\psi_k^- (\mathbf{r}) \equiv (2\pi)^{-3/2} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (1a)$$

и все формулы совпадают с обычным разложением по бегущим плоским волнам. Столь же легко теперь и прокантовать поле (если это нужно), записав коммутационные соотношения между  $P_k$  и  $Q_k$ .

## 2. СВОЙСТВА ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Свойства мод открытого резонатора (поле пока рассматриваем как классическое) весьма близки к свойствам квазистационарных ( $\alpha$ -распадных) состояний, подробно изученных в нерелятивистской квантовой механике (см. [1], § 132). Основным отличием является отсутствие в случае открытого резонатора сферической симметрии. Нижеследующее рассмотрение справедливо для любой системы, описываемой волновым уравнением типа Д'Аламбера или Шредингера. Выкладки для конкретности произведем с помощью функций  $\psi_k^+ (\mathbf{r})$ , облегчающих использование нерелятивистской квантовой теории рассеяния.

Известно, что при определенных условиях наряду с полной системой функций (например,  $\psi_k^+ (\mathbf{r})$ ) имеет смысл рассматривать волновые функции  $\psi_d (\mathbf{r})$  состояний квазидискретного спектра с комплексным значением энергии (частоты) и волнового вектора:

$$\omega_d = \omega_1 - \frac{i\gamma}{2}; \quad \mathbf{k}_d = \mathbf{k}_1 - i\mathbf{k}_2; \quad \omega_1, \gamma, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 > 0, \quad (8)$$

характеризуемые тем, что в их асимптотике содержится лишь расходящаяся волна:

$$\psi_d (\mathbf{r}) \simeq \zeta(n') \frac{1}{r} \exp(i \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r}). \quad (9)$$

В асимптотику  $\psi_d$  при  $r \rightarrow \infty$  входит экспоненциально нарастающий множитель  $\exp(i \mathbf{k}_d \cdot \mathbf{r})$ , вследствие чего  $\psi_d$  не может быть нормирована обычными методами. Напомним, что это экспоненциальное нарастание имеет вполне ясный физический смысл: к данному моменту времени (например,  $t = 0$ ) на большие расстояния  $r$  от системы ушли волны, испущенные весьма давно. Но так как временная зависимость  $\psi_d$  дается выражением  $e^{-i\omega_1 t} e^{-i\gamma t/2}$ , то в давние моменты времени  $t \rightarrow -\infty$  амплитуда колебаний в системе (а следовательно, и волн, излучаемых системой) была экспоненциально велика. В приложении приведено определение нормы  $\psi_d$  (см. [2]), и фигурирующая в тексте функция считается нормированной именно с помощью этого метода. Впрочем, обычно оказывается достаточным нормировать  $\psi_d$  на единицу по объему резонатора (системы). Это возможно потому, что рассмотрение данного квазистационарного состояния имеет смысл лишь в случае достаточно большой его добротности:

$$Q = \frac{\omega_1}{\gamma} \simeq \frac{k_1}{2k_2}, \quad (10)$$

а при этом условии значение  $\psi_d(r)$  весьма мало вне системы и нарастающая экспонента  $\exp(k_2 r)$  будет играть заметную роль лишь на очень больших расстояниях  $r \sim 1/k_2$ .

Более того, внутри системы  $\psi_d$  является приблизительно вещественной функцией, что отвечает наглядному представлению о почти стоячей волне; поэтому нормировку  $\psi_d$  можно записывать в виде

$$\int_{V_0} \psi_d^2 dV = 1, \quad (11)$$

где  $V_0$  — объем системы. В то же время  $\zeta(n')$  отнюдь не обязана быть вещественной. Для  $\psi_d$ , нормированной таким образом, величина, обратная среднему времени жизни (вероятность распада, которую мы предполагаем малой), будет равна полному потоку частиц (энергии) из системы. Считая плотность потока в плоской бегущей волне равной  $a|\psi|^2$  ( $a = v$  для уравнения Шредингера и  $a = c$  для уравнения Д'Аламбера), мы получим, что

$$\gamma = a \int |\zeta(n')|^2 d\Omega_n. \quad (12)$$

Поскольку для рассматриваемого основного уравнения должно существовать уравнение непрерывности (сохранения числа частиц), коэффициент  $a$  можно выразить на основании закона дисперсии  $\omega(k)$  ( $\omega = ck$  для уравнения Д'Аламбера):

$$a = d\omega/dk. \quad (13)$$

При малых  $\gamma$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{d\omega}{dk} k_2,$$

откуда

$$\int |\zeta(n')|^2 d\Omega_n = 2k_2. \quad (12a)$$

### 3. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ В ТЕРМИНАХ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Естественно, что, допуская комплексные значения для  $k$  в функции  $\psi^+(k, n, r, n')$ , мы получим при стремлении  $k \rightarrow k_1 - ik_2$  волновую функцию квазистационарного состояния с некоторым коэффициентом\*. Вид коэффициента можно определить, используя асимптотику  $\psi_d$  и  $\psi^+$ . При  $k \rightarrow k_1 - ik_2$  члены в  $\psi_k^+$ , содержащие расходящуюся волну (и тем самым  $\psi_d$ ), должны быть велики по сравнению с остальными. Но так как  $\exp(ikrnn')$  входит в  $\psi_k^+$  с не зависящим от  $k$  коэффициентом  $(2\pi)^{-3/2}$ , то следует предположить, что коэффициент при  $\psi_d$  в  $\psi^+$  имеет вид  $B/(k - k_d)$ , где  $B$  может зависеть от  $n = k/k$ :  $B = \eta(n)$ .

Таким образом, вблизи  $k = k_1 - ik_2$  функцию  $\psi_k^+(r)$  можно представить в виде

$$\psi^+(k, n, r) = \frac{\eta(n)}{k - k_d} \psi_d(r) + \psi_1, \quad (14)$$

где  $\psi_1$  регулярна при  $k = k_d$ , или

$$\eta(n) \psi_d(r) = \text{res}_{k=k_d} \psi^+(k, n, r). \quad (14a)$$

\* Дальнейшее рассмотрение справедливо и для строгого стационарных состояний ( $E < 0$  для уравнения Шредингера); для них  $k_d = ix, x > 0$ .

Переходя к асимптотикам (при  $r \rightarrow \infty$ ) в обеих частях равенства, мы получим

$$\eta(n)\zeta(n') = (2\pi)^{-3/2} \operatorname{res}_{k=k_d} f(k, n, n'), \quad (15)$$

где  $f(k, n, n')$  — из (2).

По теореме взаимности, следующей из инвариантности основного уравнения относительно обращения времени (см. [1], § 124),

$$f(n, n') = f(-n', -n), \quad (16)$$

поэтому  $\eta(n)$  должна удовлетворять функциональному уравнению

$$\eta(x)\zeta(y) = \eta(-y)\zeta(-x),$$

откуда

$$\eta(x) = b\zeta(-x).$$

Таким образом,

$$\operatorname{res}_{k=k_d} f(k, n, n') = (2\pi)^{3/2} b \zeta(-n)\zeta(n'). \quad (146)$$

Утверждение, что резонансный член в амплитуде рассеяния пропорционален  $\zeta(-n)\zeta(n')$ , где  $\zeta(n)$  — угловое распределение амплитуды распадающегося состояния, имеет весьма наглядный смысл. С некоторой вероятностью падающая волна возбуждает поле внутри резонатора, соответствующее квазистационарному состоянию, затем оно распадается. Зависимость от угла для распадающегося состояния характеризуется функцией  $\zeta(n')$ . Вероятность же возбуждения (точнее, амплитуда вероятности) волной, идущей в направлении  $n$ , по принципу детального равновесия (который является следствием инвариантности  $t \rightarrow -t$ ) должна быть пропорциональна  $\zeta(-n)$ .

В нерелятивистской квантовой теории рассеяния для сферически симметричного случая известно соотношение (см. [1], § 128), согласно которому вычет амплитуды рассеяния  $f$  в полюсе при  $k$ , соответствующем дискретному (связанному)  $S$ -состоянию, определяется коэффициентом в асимптотике нормированной волновой функции этого состояния\*:

$$\psi_{cb} \simeq A_0 \frac{\exp(i k_{cb} r)}{r}; \quad k_{cb} = i \alpha,$$

а именно:

$$\operatorname{res}_{k=k_{cb}} f = -\frac{4\pi A_0'^2}{2k_{cb}}. \quad (17)$$

Эта же теорема имеет место (см. Приложение 1) и для квазистационарных состояний, с той лишь разницей, что понятие нормы будет более сложным. В случае несферически симметричного рассеивателя после замены  $\psi_d \simeq \zeta(n') \exp(ik_d r/r)$  формула (17) приобретает вид

$$\operatorname{res}_{k=k_d} f(k, n, n') = -\frac{2\pi \zeta(-n)\zeta(n')}{k_d}. \quad (17a)$$

Отсюда следует, что

$$b = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} k_d} \quad (18)$$

и, следовательно, вблизи  $k = k_1 - ik_2$

\* Нам удобнее включать угловую часть  $1/\sqrt{4\pi}$  в этот коэффициент.

$$\psi^+(k, n, r) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} k_d} \frac{\zeta(-n)}{k - k_d} \psi_d(r) + \psi_1; \quad (19)$$

$$\psi^-(k, n, r) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} k_d^*} \frac{\zeta^*(n)}{k - k_d^*} \psi_d^*(r) + \psi_1^*. \quad (20)$$

Именно  $\psi_k^-$  нужно использовать для подсчета вероятности излучения в направлении  $n = k/k$ . Вполне естественно поэтому, что зависимость резонансного члена в  $\psi_k^-$  от  $n$  дается асимптотикой  $\zeta^*(n)$  излучения самого квазистационарного состояния.

При работе с функциями  $\psi^-$  следует выделить полюса тех мод, влияние которых наиболее существенно для рассматриваемой задачи (т. е. те члены, у которых при вещественных  $k$  в интересующей нас области  $\psi_{\text{рез}} \sim 1$ ); остальную часть функции  $\psi^-$  надо относить к нерезонансной части  $\psi_1$ . Заметим, что для направлений  $n$ , далеких от оси резонатора (они занимают почти весь телесный угол  $4\pi$ ), функции  $\psi^-$  внутри резонатора с большой точностью совпадают с плоскими волнами  $(2\pi)^{-3/2} \exp(ikr)$ . Можно показать, что, устремляя  $\psi_1$  и  $k_{2l}$  к нулю для всех квазистационарных колебаний данного резонатора, мы получим описание закрытого резонатора (см. Приложение 2).

Вернемся к наиболее интересному для нас случаю открытого резонатора. Внутри системы (резонатора) порядок величины  $\psi_1$  не зависит от  $k$  резонансным образом; условно можно считать, что  $\psi_1 \sim 1$  (так же, как  $\psi^-$  на больших расстояниях от резонатора).

Из (11), (12а) следуют оценки  $\psi_d \sim 1/\sqrt{V_0}$ ,  $\zeta \sim \sqrt{k_2}$  ( $V_0$  — объем резонатора); поэтому относительный порядок резонансного члена по сравнению с  $\psi_1$  в самом резонансе (при  $k = k_1$ ) есть

$$\sqrt{Q/V_0 k^3}. \quad (21)$$

В этой весьма грубой оценке не принимается во внимание обычно весьма резкая зависимость  $\zeta(n)$  от угла. При учете такой зависимости величина  $(\psi_{\text{рез}}/\psi_1)$  внутри будет порядка

$$\sqrt{\frac{Q}{k^3 V_0} \frac{1}{\Omega}}, \quad (22)$$

где  $\Omega$  — телесный угол, в пределах которого  $\zeta(n)$  заметно отлична от нуля.

Для резонаторов из двух зеркал с площадью  $S$

$$\Omega \sim 1/k^2 S, \quad (23)$$

откуда

$$\frac{\psi_{\text{рез}}}{\psi_1} = \sqrt{\frac{QS}{V_0 k}} = \sqrt{\frac{Q}{kL}}, \quad (24)$$

где  $L$  — длина резонатора. Напомним, что хотя зеркала предполагаются идеально отражающими и  $Q$  есть добротность относительно «дифракционных» потерь, рассмотрение годится и при наличии поглощения (см. сделанное в разделе 2 замечание).

С помощью введенной системы волновых функций непрерывного спектра обычным способом решается задача Коши и задача о возбуждении внешними источниками с заданной частотой для рассматриваемого волнового уравнения. Смешая при этом в получаемых интегралах

но  $dk$  контур интегрирования вниз (где  $\text{Im}k < 0$ ), мы будем выделять резонансные члены, соответствующие собственным колебаниям поля (ср. [3]; для открытых резонаторов эта методика использована Вайнштейном [4]).

Рассматривая с помощью разложения (20) функции  $\psi^-$  процесс излучения одного атома в резонаторе, когда на соседнюю по частоте моду приходится  $N$  квантов, можно получить, что отношение вероятности процесса атом—мода—распад моды к вероятности нерезонансного излучения прямо в пространство в основном определяется величиной

$$\frac{(N+1)Q_{\text{моды}}}{V_0 k^3}. \quad (25)$$

Развитая методика, по-видимому, может быть применена для рассмотрения формы спектральной линии спонтанного и индуцированного излучения атома в оптическом резонаторе.

В заключение автор приносит благодарность Я. Б. Зельдовичу за ценные указания, Л. А. Вайнштейну за возможность ознакомиться с его рукописью до опубликования и Р. В. Хохлову за большую поддержку.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Определим норму (для простоты в сферически симметричном случае) радиальной части квазистационарной волновой функции как ин-

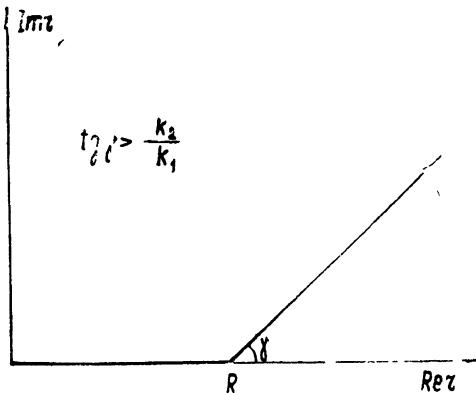


Рис. 1.

теграл от квадрата (не квадрата модуля!) функции по пути в плоскости комплексного переменного  $r$ , указанному на рис. 1. При этом точка  $r = R$  определяется тем, чтобы в ней было справедливо асимптотическое выражение для  $\psi_d$ :

$$\psi_d \simeq A \frac{\exp(ik_d r)}{r}.$$

Повторяя для нормированных таким образом функций квазидискретных состояний рассуждения § 128 [1] и интегрируя по пути на рис. 1, получим указанное в тексте утверждение.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство того, что развитый метод в пределе (для закрытого резонатора без потерь) переходит в обычный способ рассмотрения, удобнее всего провести с помощью функции Грина уравнения

$$\Delta_r G(k_0^2, r, r') + k_0^2 G(k_0^2, r, r') = \delta(r - r'). \quad (\text{П.1})$$

Как известно,

$$G(k_0^2, r, r') = \int d^3k \frac{\psi_k^*(r') \psi_k(r)}{k_0^2 - k^2}. \quad (\text{П.2})$$

Представляя  $\psi^-$  в виде суммы членов типа (20) и опуская  $\psi_i$  как малую величину, проведем интегрирование по углам и по  $k^2 dk$ . В силу (12а) резонансный знаменатель с  $(k - k_1)^2 + k_2^2$  после интегрирования по углам при  $k_2 \rightarrow 0$  даст  $\delta$ -функцию, и  $G$  примет вид

$$G(k_0^2, r, r') = \sum_l \frac{\psi_{dl}^*(r') \psi_{dl}(r)}{k_0^2 - k_{dl}^2}, \quad (\text{П.3})$$

точно такой же, как при обычном рассмотрении закрытых резонаторов.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Конструктивный подход к построению системы функций  $\psi_k^+$  — «пускаем на систему плоскую волну и смотрим, что получится» — весьма удобен при рассмотрении уравнения Д'Аламбера для векторной функции  $\mathbf{A}$ . Интересующими нас решениями являются поперечные волны ( $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ), обладающие двумя независимыми состояниями поляризации. Выбор этих состояний, вообще говоря, произволен и определяется требованием удобства. Для рассмотрения квазистационарных состояний можно в качестве таковых выбрать право и левополяризованные волны, которым мы припишем поляризационный индекс  $+1$  и  $-1$  соответственно. При заданной поляризации падающей плоской волны рассеянная волна будет суперпозицией обеих поляризаций с коэффициентами, зависящими от  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$ . Мы должны рассматривать амплитуду рассеяния волны, идущей с направления  $\mathbf{n}$  с поляризацией  $i$  в направлении  $\mathbf{n}'$  с поляризацией  $m: f_{im}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ .

Асимптотика распадного состояния  $\zeta(\mathbf{n}')(e^{ikr}/r)$  также должна быть разложена по круговым поляризациям:

$$\zeta(\mathbf{n}') = \zeta_{+1}(\mathbf{n}') e_{+1, n'} + \zeta_{-1}(\mathbf{n}') e_{-1, n'}, \quad (\text{П.4})$$

где

$$e_{+1, z} = \frac{e_x + ie_y}{\sqrt{2}}; \quad e_{-1, z} = \frac{e_x - ie_y}{\sqrt{2}}. \quad (\text{П.5})$$

Коэффициент, с которым  $\psi_d(r)$  входит в полюс функции  $\psi_{k,i}^+(r)$ , зависит теперь и от индекса  $i$ , т. е.  $\eta_i(\mathbf{n})$ . Пользуясь снова теоремой взаимности, мы получим

$$\eta_i(\mathbf{n}) = b \zeta_i(-\mathbf{n}); \quad (\text{П.6})$$

коэффициент  $b$  остается тот же, что и в скалярном случае.

### ЛИТЕРАТУРА

- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
- А. М. Дыхне, А. В. Чаплик, ЖЭТФ, 40, 1427 (1961); Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ, 39, 776 (1960).
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957, § 63.
- Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 34, 1541 (1964).

## RADIATION IN OPENED RESONATORS

*B. . Zel'dovich*

The description of the opened resonators modes which themselves do not form the complete orthogonal system is given by means of wave functions with continuous spectrum similar to functions of  $\psi_k$  type in quantum mechanics. The ratio of resonance term to the nonresonance has been evaluated in the selected functions. The limiting transition to ideally closed resonator has been made.

---

УДК 621.371

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОЛОСЫ ИМПЕДАНСА НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

Г. Т. Марков, Б. М. Петров

Исследуется вопрос о возбуждении полосы неоднородного импеданса на полу平面. С помощью функции Грина получены интегральные уравнения токов на полосе для волн типа ТМ и ТЕ. Интегральное уравнение магнитного тока для волн ТМ решено приближенно методом Крылова—Боголюбова. Приведены графики распределения магнитного тока на ядре и диаграммы направленности импедансной полосы, возбуждаемой щелью конечной ширины.

Реальные импедансные структуры, используемые в качестве антенн, всегда имеют конечную ширину. Исследованию возбуждения импедансных полос конечной ширины, расположенных на металлической плоскости, посвящена работа [1]. Однако антенны чаще всего располагаются на заданном расстоянии от края экрана; поэтому возникает необходимость учета влияния конечного размера экрана на их направленные свойства. Существующий приближенный метод учета влияния положения антенны на диаграмму направленности [2] дает удовлетворительные результаты при условии, что полоса расположена на большом расстоянии от края полу平面, и полосе существует поверхностная волна с заданным замедлением.

Ниже предполагается, что полоса переменного импеданса, возбуждаемая сторонними источниками, расположена на полу平面; приближенным методом находится распределение магнитного тока и диаграмма направленности системы. Используемый метод аналогичен методу, примененному в [1].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим идеально проводящую полу平面 (рис. 1). Введем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$  и совместим ось  $z$  с краем

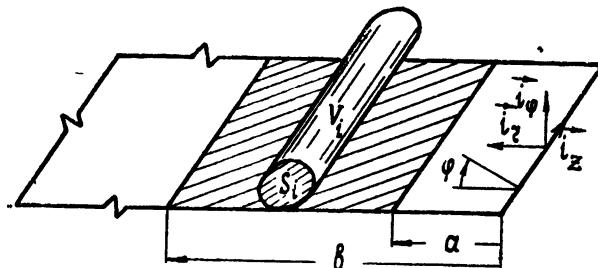


Рис. 1. К постановке задачи о возбуждении полосы импеданса на полу平面.

полу平面. Пусть над полу平面 на конечном расстоянии от начала координат задано распределение объемной плотности сторонних (возбуждающих) электрических и магнитных токов  $j^{e\text{ст}}$  и  $j^{m\text{ст}}$ , а на

поверхности  $\varphi = 0$  полу平面 в пределах полосы  $a \leq r \leq b$  заданы импедансные граничные условия

$$\frac{E_r(r, 0)}{H_z(r, 0)} = \pm Z_E H. \quad (1)$$

Здесь верхний индекс берется для волн типа TM (относительно оси  $r$ ), а нижний — для волн типа TE;  $E_r, E_z$  — компоненты напряженности электрического поля,  $H_r, H_z$  — компоненты напряженности магнитного поля,  $Z_E$  и  $Z_H$  — импедансы полосы для волн типа TM и TE. Рассматривается двухмерная задача; зависимость от времени характеризуется фактором  $e^{j\omega t}$ .

Необходимо определить электромагнитное поле, удовлетворяющее всюду уравнениям Максвелла, на бесконечности — условию излучения, на полу平面 в пределах полосы — уравнению (1), а на остальной части полу平面 — нулевым граничным условиям.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Используя теорему эквивалентных поверхностных токов и соотношения из [3], запишем напряженность магнитного поля в любой точке пространства следующим образом:

$$aH(r, \varphi, z) = - \int_{V_i} (j^{\text{ст}} E^{\text{в}} - j^{\text{мст}} H^{\text{в}}) dv' - \int_S (I^{\text{ст}} E^{\text{в}} - I^{\text{мст}} H^{\text{в}}) ds'. \quad (2)$$

Здесь

$$I^{\text{ст}} = [Hn], I^{\text{мст}} = [nE] \quad (3)$$

— плотности электрических и магнитных поверхностных токов,  $n$  — внешняя нормаль относительности области, в которой ищется поле,  $S$  — поверхность полу平面 (верхняя и нижняя),  $V_i$  — объем, занятый возбуждающими источниками,  $E^{\text{в}}, H^{\text{в}}$  — векторы вспомогательного поля магнитного диполя с единичным моментом, расположенным в точке наблюдения поля и совпадающим по направлению с единичным вектором  $a$ .

Вспомогательное поле  $E^{\text{в}}, H^{\text{в}}$  должно быть выбрано так, чтобы интегральные уравнения для электрических и магнитных поверхностных токов были уравнениями Фредгольма второго рода с конечными пределами интегрирования, т. е. уравнениями, которые могут быть решены приближенными методами. Это будет в том случае, если поле в (2) определяется через магнитные токи, отличные от нуля на интервале  $[a, b]$ . Из (2) следует, что вспомогательное поле должно удовлетворять граничным условиям

$$(i_{r,z} E^{\text{в}}) = 0 \quad \text{при } r > 0, \varphi = 0, \varphi = 2\pi. \quad (4)$$

Рассмотрим отдельно случаи TM- и TE-волн.

Волна TM. Для этой волны отличны от нуля составляющие поля  $H_z, E_{\varphi}, E_r$ . Определим продольную составляющую  $H_z$ . Для этого полагаем  $a = i_z$ ; учитывая двухмерность задачи и условие (4), тогда получим из (2)

$$H_z(r, \varphi) = - \int_S (j^{\text{ст}} E_1^{\text{в}} - j^{\text{мст}} H_1^{\text{в}}) ds' + \int_a^b I_1^{\text{ст}} H_1^{\text{в}} \Big|_{\varphi'=0} dr', \quad (5)$$

так как магнитный ток отличен от нуля при  $r \in [a, b]$ . Полагая в последнем выражении  $\varphi = 0$  и учитывая равенство  $H_z(r, \varphi) = I_z^b(r)$  и условие (1), получаем интегральное уравнение для магнитного тока:

$$\frac{1}{Z_E(r)} I_z^b(r) - \int_a^b I_z^b(r') H_1^B \Big|_{\varphi=\varphi'=0} dr' = - \int_{S_1} (j^{\text{ст}} E_1^B - j^{\text{м ст}} H_1^B) ds'. \quad (6)$$

В качестве вспомогательного источника возьмем бесконечную по  $z$  нить магнитного тока и найдем возбуждаемое нитью магнитного тока поле  $E_1^B, H_1^B$ , удовлетворяющее граничному условию (4). Решение последней задачи дано в [4]. Используя полученное в [4] выражение функции Грина  $G(r, \varphi | r', \varphi')$ , имеем

$$H_1^B(r, \varphi) = H_z^B i_z = \frac{k}{i W_0} G(r, \varphi | r', \varphi') i_z, \quad (7)$$

$$E_1^B = -\frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \varphi} i_r + \frac{\partial G}{\partial r} i_\varphi, \quad (8)$$

где

$$G(r, \varphi | r', \varphi') = \frac{1}{4i} H_0^{(2)} \{ k[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')]^{1/2} \} + \\ + \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi \right] \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi' \right] \left\{ \begin{array}{l} J_{n+1/2}(kr) H_{n+1/2}^{(2)}(kr') (r \leq r') \\ J_{n+1/2}(kr') H_{n+1/2}^{(2)}(kr) (r \geq r') \end{array} \right\}, \quad (9)$$

$J_n(kr)$  и  $H_n^{(2)}(kr)$  — функции Бесселя и Ганкеля 2-го рода,  $W_0$  — волновое сопротивление свободного пространства.

Подставляя выражения для  $E_1^B, H_1^B$  в (6) и учитывая, что для возбуждения волны ТМ надо задать возбуждающие токи в виде

$$j^{\text{ст}} = j_r^{\text{ст}} i_r + j_\varphi^{\text{ст}} i_\varphi, \quad j^{\text{м}} = j_z^{\text{м ст}} i_z,$$

получаем

$$\frac{1}{Z_E^0(x)} I_z^b(x) + i \int_{a_0}^{b_0} G(x, 0 | x', 0) I_z^b(x') dx' = -F_1(x, 0), \quad (10)$$

где

$$F_1(x, \varphi) = \frac{1}{k} \int_{S_1} \left[ -\frac{1}{x} \frac{\partial G}{\partial \varphi} W_0 j_r^{\text{ст}} + \frac{\partial G}{\partial x} W_0 j_\varphi^{\text{ст}} + i G j_z^{\text{м ст}}(x', \varphi') \right] x' dx' d\varphi',$$

$x = kr$  — электрическое расстояние от начала координат,  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $a_0 = ka$ ,  $b_0 = kb$ ,  $Z_E^0 = Z_E/W_0$ . Полученное интегральное уравнение магнитного тока (10) является интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода.

**Волна ТЕ.** В этой волне отличны от нуля составляющие поля  $E_z, H_\varphi, H_r$ .

Определим составляющую  $H_r$ . Для этого положим  $a = i_r$ ; учитывая двухмерность задачи и условия (4), получаем из (2)

$$H_r(r, \varphi) = - \int_{S_1} (j^{\text{ст}} E_2^B - j^{\text{м ст}} H_2^B) ds' + \int_a^b I_2^M H_2^B \Big|_{\varphi'=0} dr'. \quad (11)$$

В качестве вспомогательного источника возьмем бесконечную по  $z$

полоску магнитных диполей; тогда, используя результаты работы [1], получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2^{\text{B}} &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] \mathbf{i}_z = E_{2z}^{\text{B}} \mathbf{i}_z; \\ \mathbf{H}_2^{\text{B}} &= -i \frac{k}{W_0} G_2 \mathbf{i}_r - i \frac{k}{W_0} G_3 \mathbf{i}_{\varphi} = H_{2r} \mathbf{i}_r + H_{2\varphi} \mathbf{i}_{\varphi}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} G_2(r, \varphi | r', \varphi') &= A_r + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} \right], \\ G_3(r, \varphi | r', \varphi') &= A_{\varphi} + \frac{1}{k^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} \right], \\ A_r(r, \varphi | r', \varphi') &= \frac{1}{8i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \left( \frac{n}{2} \varphi \right) \times \\ &\times \cos \left( \frac{n}{2} \varphi' \right) \left\{ \begin{array}{l} J_{n/2+1}(kr') H_{n/2+1}^{(2)}(kr) + J_{n/2-1}(kr') H_{n/2-1}^{(2)}(kr) \quad (r \geq r') \\ J_{n/2+1}(kr) H_{n/2+1}^{(2)}(kr') + J_{n/2-1}(kr) H_{n/2-1}^{(2)}(kr') \quad (r \leq r') \end{array} \right. \\ A_{\varphi}(r, \varphi | r', \varphi') &= \frac{1}{4i} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left( \frac{n}{2} \varphi' \right) \times \\ &\times \sin \left( \frac{n}{2} \varphi \right) \left\{ \begin{array}{l} J_{n/2+1}(kr') H_{n/2+1}^{(2)}(kr) - J_{n/2-1}(kr') H_{n/2-1}^{(2)}(kr) \quad (r \geq r') \\ J_{n/2+1}(kr) H_{n/2+1}^{(2)}(kr') - J_{n/2-1}(kr) H_{n/2-1}^{(2)}(kr') \quad (r \leq r') \end{array} \right. \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая в (11)  $\varphi = 0$  и учитывая, что сторонние токи при возбуждении волны ТЕ должны иметь вид  $j^{\text{ст}} = j^{\text{ст}} \mathbf{i}_z$ ,  $j^{\text{ст}} = j_r^{\text{ст}} \mathbf{i}_r + j_{\varphi}^{\text{ст}} \mathbf{i}_{\varphi}$  получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{Z_H^0(x)} I_r^{\text{m}}(x) + i \int_{a_0}^{b_0} I_r^{\text{m}}(x') G_2(x, 0 | x', 0) dx' = -F_2(x, 0), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} F_2(x, \varphi) &= \frac{1}{k} \int_{S_i^0} [W_0 j_z^{\text{ст}}(x', \varphi') E_{2z}^{\text{B}}(x, \varphi | x', \varphi') + \\ &+ ij_r^{\text{ст}}(x', \varphi') G_2(x, \varphi | x', \varphi') + ij_{\varphi}^{\text{ст}}(x', \varphi') G_3(x, \varphi | x', \varphi')] x' dx' d\varphi', \\ Z_H^0(x) &= Z_H(x)/W_0. \end{aligned}$$

Уравнение (14) является уравнением Фредгольма 2-го рода для магнитного тока.

Итак, если найдены токи  $I_z^{\text{m}}(x)$  и  $I_r^{\text{m}}(x)$  из уравнений (10) и (14), то электромагнитное поле определяется по формулам (5) и (11). Интегральные уравнения токов (10) и (14) в замкнутой форме, по-видимому, не решаются, но они могут быть решены приближенными методами; при этом необходимо учитывать, что при  $x' \rightarrow x$  ядра интегральных уравнений имеют интегрируемую особенность.

Нами численно исследовался более важный для практики случай волны ТМ. Для приближенного решения уравнения (10) был применен метод Крылова—Боголюбова [5]. Изучался случай чисто реактивного

импеданса  $Z_E^0(r) = iB$  при условии, что сторонние токи заданы только на щели в полуплоскости:

$$j_z^{\text{ст}}(x, \varphi) = j_z^{\text{ст}}(x, \varphi) i_z = \begin{cases} I_{0z}^{\text{ст}}(x) k \frac{\delta(\varphi - 0)}{x} i_z & \text{при } x \in \left[ x_0 - \frac{\Delta x}{2}, x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right] \\ 0 & \text{при } x \notin \left[ x_0 - \frac{\Delta x}{2}, x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right], \end{cases} \quad (15)$$

где  $\delta(\varphi - \varphi_0)$  — дельта-функция.

Подставляя значение тока из (15) в (10) и применяя метод Крылова—Боголюбова, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{4}{B(x_s)} I_z^M(x_s) + i \sum_{j=1}^Q I_z^M(x_j) \rho(x_s, x_j) = -i I_{0z}^{\text{ст}}(x_0) \rho(x_s, x_0), \quad (16)$$

где

$$\rho(x_s, x_j) = d_{sj} + ig_{sj} = \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} dx' H_0^{(2)} \left( \sqrt{x_s^2 + x'^2 - 2x_s x'} \right) + \quad (17)$$

$$+ \int_{x_j - \frac{\Delta x}{2}}^{x_j + \frac{\Delta x}{2}} dx' \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} J_{n+1/2}(x_s) H_{n+1/2}^{(2)}(x') (x_s < x') \\ J_{n+1/2}(x') H_{n+1/2}^{(2)}(x_s) (x_s \geq x') \end{array} \right.$$

Решение системы (16) состоит из двух этапов: 1) расчета коэффициентов  $d_{sj}$  и  $g_{sj}$  и 2) решения системы алгебраических уравнений.

При расчете коэффициентов  $d_{sj}$  и  $g_{sj}$  необходимо иметь в виду, что при  $x' \rightarrow x_s = x_j$ , т. е. для диагональных элементов (16), подынтегральное выражение первого интеграла (17) имеет интегрируемую особенность логарифмического типа. Для вычисления второго интеграла в (17) функции Бесселя и Ганкеля при больших значениях индекса (при  $qn > x_s, x'$ ) заменялись их асимптотическими представлениями [6]. Полученный в результате этого ряд, расходящийся только при  $x' = x_s$ , можно проинтегрировать. Интеграл же от оставшихся первых  $N$  членов ряда, для которых функции Бесселя и Ганкеля нельзя заменить их асимптотическими представлениями, вычислялся приближенно с помощью формул Симпсона.

Для недиагональных элементов  $d_{sj}$  и  $g_{sj}$  интегралы в (17) вычислялись приближенно путем линейной аппроксимации подынтегральной функции. Результаты расчета коэффициентов  $d_{sj}$  и  $g_{sj}$  хорошо аппроксимируются формулами

$$d_{sj} \simeq 2 \Delta x \left( 1 - \frac{0,1}{x_s^{1/2}} \cos 2x_s \right) J_0(x_j - x_s) (x_j > x_s \geq 0,25\pi); \quad (18)$$

$$g_{sj} \simeq -2 \Delta x \left( 1 + \frac{0,1}{x_s^{3/4}} \sin 2x_s \right) \left\{ \begin{array}{l} N_0(x_j - x_s) (x_j > x_s \geq 0,25\pi) \\ \frac{2}{\pi} (\ln \Delta x - 1,807) (x_s = x_j \geq 0,25\pi) \end{array} \right.$$

где  $N_0(x)$  — функция Неймана. Отметим, что из выражения для функции Грина (9) следует

$$d_{si} = d_{js}, \quad g_{si} = g_{js}. \quad (18a)$$

Система линейных алгебраических уравнений (16), имеющая симметричную матрицу, решалась методом квадратных корней; этот метод дает возможность задавать порядок системы (определенный числом точек на импедансной полосе, в которых определяется ток) от  $Q = 1$  до  $Q = 28$ .

На рис. 2 и 3 приведены некоторые результаты расчета магнитных токов на полосе шириной  $(a - b) = \lambda$  для разных положений полосы

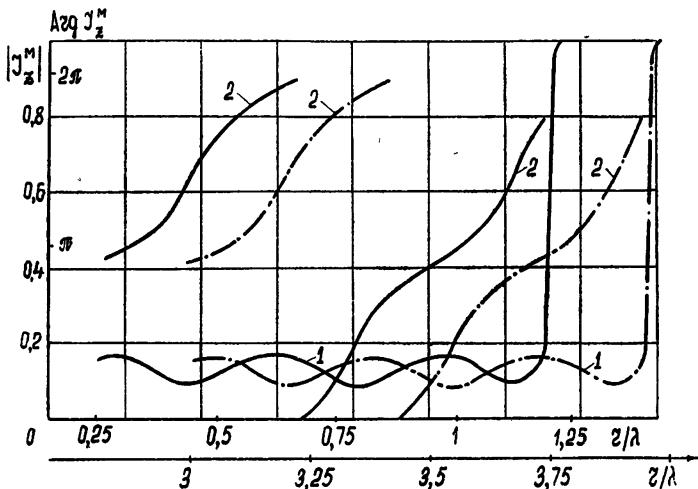


Рис. 2. Распределение магнитного тока на полосе с импедансом  $Z_E = iW_0$ :

1) модуль тока, 2) фаза тока (— для  $a=0,25\lambda$ ; -·- для  $a=3\lambda$ ). Возбуждающая щель — при  $r_0=a+1,0172\lambda$ .

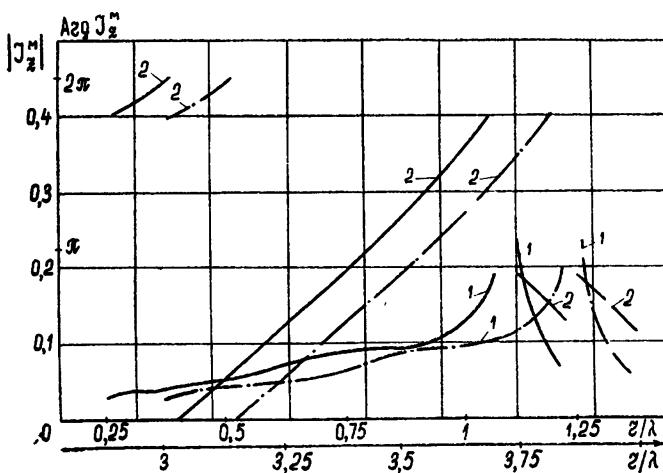


Рис. 3. Распределение магнитного тока на полосе с импедансом

$$Z_E(r) = iW_0 \left[ 0,32 + \frac{0,68}{r_0 - r} \right] \text{ при } r < r_0 \text{ и } Z_E = -i3W_0 \text{ при } r > r_0:$$

1) модуль тока, 2) фаза тока (— для  $a=0,25\lambda$ ; -·- для  $a=3\lambda$ ). Возбуждающая щель — при  $r_0=a+0,844\lambda$ .

стносительно края полуплоскости. Закон изменения импеданса в пределах полосы указан в подписях под соответствующими рисунками.

Характеристику направленности системы получаем из (5) при  $x \rightarrow \infty$ :

$$H_z(\varphi) = \sum_{s=0}^Q I_s^M(x_s) \left[ e^{ix_s \cos \varphi} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n+1/2)\varphi e^{i(\pi n/2 + \pi/4)} J_{n+1/2}(x_s) \right], \quad (19)$$

где учтено, что импедансная полоса разделена на  $Q$  отрезков, в средних точках которых решением системы (16) определяются значения токов.

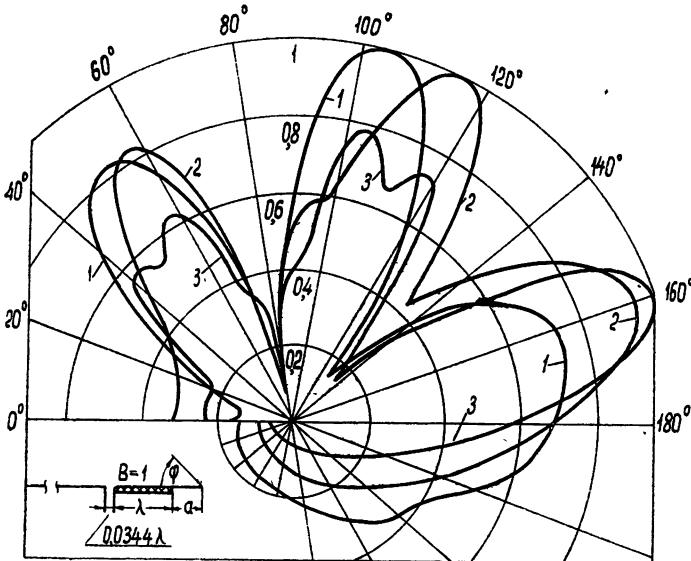


Рис. 4. Диаграммы направленности антенны с постоянным импедансом  $Z_E(r) = iW_0$ ; ( $r_0 = a + 0,0172\lambda$ ):  
1)  $a = 0,25\lambda$ , 2)  $a = \lambda$ , 3)  $a = 3\lambda$ .

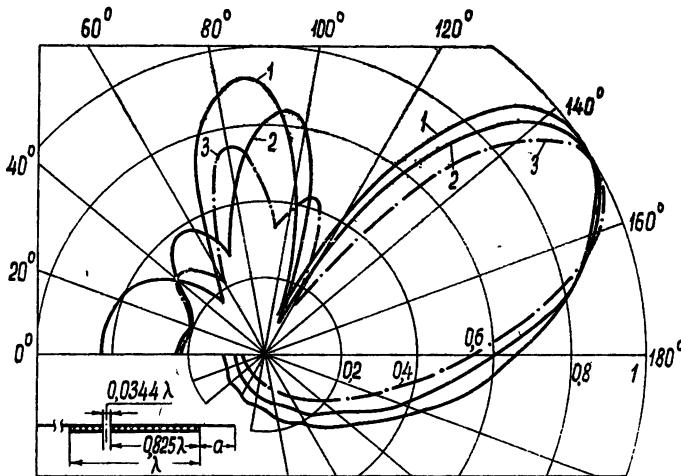


Рис. 5. Диаграммы направленности антенны с импедансом  $Z_E(r) = iW_0 \left[ 0,32 + \frac{0,68}{r_0 - a} (r - a) \right]$  при  $r < r_0$  и  $Z_E(r) = -i3W_0$  при  $r > r_0$  ( $r_0 = a + 0,844\lambda$ ):  
1)  $a = 0,25\lambda$ , 2)  $a = 0,5\lambda$ , 3)  $a = \lambda$ .

Первое слагаемое в квадратных скобках (19) соответствует полосе, расположенной на бесконечной металлической плоскости, а второе учитывает возмущающее действие края этой плоскости.

Диаграммы направленности, рассчитанные по формуле (19), приведены на рис. 4—6. Как видно из приведенных графиков, положение импедансной полосы относительно края полуплоскости слабо влияет на

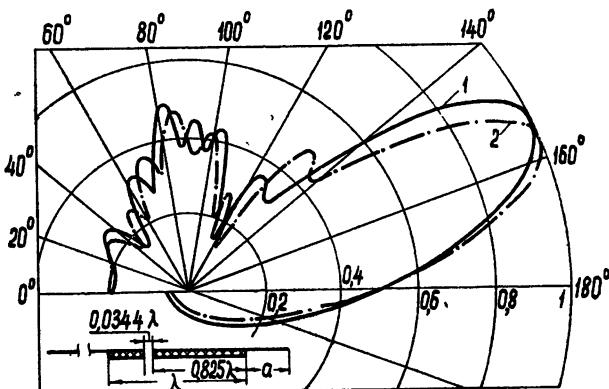


Рис. 6. Диаграммы направленности антенны с импедансом

$$Z_E(r) = iW_0 \left[ 0,32 + \frac{0,68}{r_0 - a} (r - a) \right] \text{ при } r < r_0 \text{ и } Z_E = -i3W_0$$

при  $r > r_0$  ( $r_0 = a + 0,844\lambda$ ):

1)  $a = 2\lambda$ , 2)  $a = 3\lambda$ .

распределение магнитного тока на полосе. С уменьшением расстояния от полосы до края полуплоскости несколько уменьшается коэффициент бегущей волны тока (рис. 2). Но этот эффект очень мал, в то время как вид диаграмм направленности существенно изменяется (рис. 4). Для постоянного импеданса  $Z_E = iW_0$  при малых расстояниях от кромки полуплоскости до полосы слабое излучение «вперед» ( $\varphi = 180^\circ$ ) постепенно увеличивается, если антенна отодвигается от кромки полуплоскости. Если же импеданс полосы линейно убывает, а рефлектор отбрасывает излучение к краю экрана, то фаза тока почти соответствует закону бегущей волны, а амплитуда медленно убывает. На распределении тока положение полосы на полуплоскости и в этом случае сказывается мало. Однако диаграмма направленности антенны тоже существенно зависит от положения последней относительно края полуплоскости: при изменении расстояния от края экрана до полосы от  $0,25\lambda$  до  $3\lambda$  ширина диаграммы направленности по половинной мощности уменьшается почти в 2 раза, уровень максимального бокового лепестка уменьшается примерно в полтора раза; монотонно уменьшается излучение «назад» ( $\varphi = 0^\circ$ ). Направление максимума излучения в этом случае слабо зависит от положения антенны.

Авторы благодарны Л. С. Якобсону, составившему программу для решения задачи на электронной вычислительной машине.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Чаплин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 6, 585 (1963).
2. Я. Ф. Фельд и Л. С. Бененсон, Антенно-фильтровые устройства, ч. II, 1959.
3. Г. Т. Марков, Научн. докл. высшей школы — Радиотехника и электроника, № 4, 22 (1958).

4. Г. Т. Марков, Труды МЭИ, Радиотехника, вып. 21 (1956).
5. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматлит, М.—Л., 1962.
6. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1, ИЛ, М, 1949.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
17 августа 1964 г.

## EXCITATION OF IMPEDANCE BAND ON A HALF-PLANE

*G. T. Markov, B. M. Petrov*

The problem is investigated of the band excitation of nonhomogeneous impedance on a half-plane. Using Grin's functions, the integral equations for band current have been obtained for TM and TE waves. The integral equation of a magnetic current for TM wave has been solved approximately by Krylov—Bogolyubov's method. The plots of the magnetic current distribution on the band have been given as well as those of antenna radiation patterns of impedance band excited by slot of the finite width.

УДК 621.396.671

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ

*М. П. Наймушин*

Рассматривается двухмерная задача о возбуждении кругового цилиндра с поверхностным импедансом, величина которого изменяется вдоль окружности цилиндра. Интегральное уравнение для поверхностной плотности электрического или магнитного тока решается численно методом Крылова—Боголюбова. Приведены результаты расчетов распределения тока и диаграммы направленности излучения для двух законов изменения импеданса и нескольких значений кривизны поверхности при возбуждении цилиндра щелью.

Рассмотрение криволинейных импедансных поверхностей представляет большой интерес с точки зрения расчета антенн поверхностных волн, расположенных на кривой поверхности, а также изгибов линий передачи с поверхностными волнами. Известно, что при этом излучение энергии, переносимой поверхностной волной, происходит за счет кривизны поверхности и неоднородности импеданса. Исследованию поверхностных волн, бегущих вдоль кривой поверхности, посвящен ряд работ (см., например, [1–3]). Однако в большинстве этих работ исследовался случай малой кривизны и постоянного значения поверхностного импеданса.

В работе [3] рассматривалось возбуждение кругового цилиндра с поверхностным импедансом, модулированным по синусоидальному закону, но с малой глубиной модуляции. Между тем для практики, особенно для расчета антенн поверхностных волн, важен случай значительной кривизны и произвольного, в том числе непериодического изменения импеданса. Ниже предлагается метод, позволяющий рассчитывать системы с переменным поверхностным импедансом, расположенные на круговом цилиндре.

### 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу: бесконечный импедансный цилиндр радиуса  $a$  возбуждается сторонними электрическими и магнитными токами, расположенными в области  $S$ . Используется цилиндрическая система координат  $r, \phi, z$ , причем ось  $z$  совпадает с осью цилиндра. Будем рассматривать двухмерную задачу, считая, что распределение сторонних источников и поверхностного импеданса от координаты  $z$  не зависит. Пусть сторонние источники создают поле, соответствующее  $H$ -волне относительно оси цилиндра, т. е. отличны от нуля только составляющие поля  $E_r, E_\phi, H_z$ . При этом сторонние электрические и магнитные токи могут быть представлены следующими составляющими вектора объемной плотности тока:  $j_r^{\text{ст}}, j_\phi^{\text{ст}}, j_z^{\text{ст}}$ .

На цилиндре наводятся электрические и магнитные поверхностные токи  $I_\phi^s$  и  $I_z^s$  и выполняется граничное условие

$$\left. \frac{E_\varphi}{H_z} \right|_{r=a} = \frac{I_z^m}{I_\varphi^s} = -z_1(\varphi), \quad (1)$$

где  $z_1(\varphi)$  — поверхностный импеданс цилиндра. Здесь использованы соотношения

$$I^s = [H, n]|_{r=a}, \quad I^m = [n, E]|_{r=a}, \quad (2)$$

где  $n$  — внешняя нормаль относительно области, занимаемой полем.

Применяя теорему эквивалентности, например, в форме, данной в [4], определим напряженность магнитного поля, создаваемого в точке  $P$  сторонними и наведенными поверхностными токами. Для двухмерного случая поле определяется следующим образом:

$$H_z(P) = \int_S (j_z^m H_{z0} - j_r^s E_{r0} - j_\varphi^s E_{\varphi0}) dS + \\ + \oint_l (I_z^m H_{z0} - I_\varphi^s E_{\varphi0}) dl. \quad (3)$$

Здесь  $E_0$  и  $H_0$  — поля вспомогательной нити магнитного тока единичной амплитуды, проходящей через точку  $P$  параллельно оси цилиндра,  $S$  — поперечное сечение области, занятой сторонними токами,  $l$  — окружность цилиндра.

Наложим на вспомогательное поле граничное условие

$$\left. \frac{E_{\varphi0}}{H_{z0}} \right|_{r=a} = -z_0 = \text{const}. \quad (4)$$

Расположим точку  $P$  на поверхности цилиндра. Тогда выражение (3) при использовании граничных условий (1) и (4) дает интегральное уравнение для поверхностной плотности электрического тока:

$$-I_\varphi^s = \int_S (j_z^m H_{z0} - j_r^s E_{r0} - j_\varphi^s E_{\varphi0}) dS + \\ + \oint_l I_\varphi^s (z_0 - z_1) H_{z0} dl. \quad (5)$$

Первый интеграл в правой части (5) представляет собой поле сторонних источников на поверхности цилиндра при граничных условиях (4). Действительно, если положить  $z_1 = z_0$ , то второй интеграл в (5) обращается в нуль. Назовем этот интеграл первичным электрическим током

$$-I_\varphi^{\text{перв}} = H_z(P) \Big|_{\substack{r=a \\ z_1=z_0}} = \\ = \int_S (j_z^m H_{z0} - j_r^s E_{r0} - j_\varphi^s E_{\varphi0}) dS. \quad (6)$$

Поле вспомогательного источника легко определить, используя разложение поля нити магнитного тока с координатами  $r, \varphi$  по собственным функциям кругового цилиндра. На поверхности цилиндра вспомогательное поле определяется следующей формулой:

$$H_{z_0}(r, \varphi; a, \varphi') = \frac{-1}{2\pi aiW} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos[n(\varphi - \varphi')] \times \\ \times \frac{H_n^{(2)}(kr)}{H_n^{(2)'}(ka) + (z_0/iW) H_n^{(2)}(ka)}, \quad (7)$$

где  $H_n^{(2)'}(ka)$  и  $H_n^{(2)}(ka)$  — функция Ханкеля второго рода и ее производная по аргументу,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $W$  — волновое сопротивление свободного пространства.

При подстановке (7) в (5) следует также положить  $r = a$ , и тогда окончательно придет к интегральному уравнению

$$I_{\varphi}(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{\varphi}(\varphi') \frac{z_1(\varphi') - z_0}{iW} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos[n(\varphi - \varphi')] \times \\ \times \frac{d\varphi'}{H_n^{(2)'}(ka)/H_n^{(2)}(ka) + z_0/iW} = I_{\varphi}^{\text{перв}}(\varphi). \quad (8)$$

Уравнение (8) является неоднородным интегральным уравнением Фредгольма второго рода со слабой особенностью. Действительно, ядром уравнения является выражение

$$K(\varphi, \varphi') = \frac{z_1(\varphi') - z_0}{iW} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos[n(\varphi - \varphi')] \frac{1}{H_n^{(2)'}(ka)/H_n^{(2)}(ka) + z_0/iW}. \quad (9)$$

Поскольку

$$H_n^{(2)'}(ka)/H_n^{(2)}(ka) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{ka},$$

при  $\varphi = \varphi'$  члены ряда с большими номерами убывают как  $1/n$ , и ядро имеет логарифмическую особенность. На тех участках поверхности цилиндра, где  $z_1 = z_0$ , ядро обращается в нуль, и эти участки можно исключить из общего интервала интегрирования. Если называть величину  $-I_{\varphi}(z_1 - z_0)$  «разностной» плотностью магнитного тока  $I_z^{\text{разн}}$ , то можно записать интегральное уравнение непосредственно для нее. Для этого умножим обе части (8) на  $z_0 - z_1$ . Тогда получим

$$I_z^{\text{разн}}(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_z^{\text{разн}}(\varphi') K_1(\varphi, \varphi') d\varphi' = -[z_1(\varphi) - z_0] I_{\varphi}^{\text{перв}}(\varphi). \quad (10)$$

Ядро  $K_1(\varphi, \varphi')$  в (10) отличается от ядра  $K(\varphi, \varphi')$  только тем, что в него вместо  $z_1(\varphi')$  входит  $z_1(\varphi)$ .

## 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнения (8) и (10) при неоднородном  $z_1$  не имеют точного решения; поэтому необходимо применять тот или иной приближенный метод. Наиболее удобным в данном случае является численный метод Крылова—Боголюбова, так как он позволяет решать уравнения для широкого класса законов изменения импеданса и применим к уравнениям со слабой особенностью. По этому методу интеграл заменяется конечной суммой и интегральное уравнение сводится к системе алгебраических уравнений. Точность решения зависит от величины элемен-

тарных интервалов  $\Delta\phi$  (на которые разбивается общий интервал интегрирования), величины и закона изменения импеданса. Так как для переменного импеданса плотность поверхностного магнитного тока в общем случае является более быстро меняющейся функцией, чем плотность электрического тока, то большая точность достигается при решении уравнения (8), чем (10).

Как показывают результаты расчетов, точность в  $3 \div 5\%$  может быть получена при длине элементарного интервала  $a\Delta\phi \ll 0,1\lambda$  и величине импеданса  $z_1/iW \ll (1 \div 1,5)$ . При этом даже для сравнительно небольшой длины участка с переменным импедансом система алгебраических уравнений получается высокого порядка, и ее решение возможно только с помощью электронных вычислительных машин.

### 3. ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ

После решения интегрального уравнения и определения поверхностных токов легко найти поле в любой точке пространства по формуле (3). Для вычисления поля в дальней зоне следует отнести точку наблюдения на бесконечность и заменить функцию Ханкеля  $H_n^{(2)}(kr)$  ее асимптотическим выражением для больших аргументов.

После выделения из выражений для поля в дальней зоне множителя, характеризующего угловую зависимость, получим формулу для диаграммы направленности:

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= F^{\text{перв}}(\varphi) + F^{\text{втор}}(\varphi) = \\ &= F^{\text{перв}}(\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} e_n \frac{e^{i\pi n/2}}{H_n^{(2)'}(ka) + (z_0/iW) H_n^{(2)}(ka)} \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} I_\varphi^\alpha(\varphi') [z_1(\varphi') - z_0] \cos[n(\varphi - \varphi')] d\varphi'. \end{aligned} \quad (11)$$

Первое слагаемое  $F^{\text{перв}}$  представляет собой диаграмму направленности сторонних источников для цилиндра с постоянным импедансом  $z_0$ . Второе слагаемое  $F^{\text{втор}}$  является диаграммой направленности токов, обусловленных неоднородностью импеданса. Сумма обоих слагаемых дает полную диаграмму направленности сторонних источников для цилиндра с переменным импедансом.

### 4. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью указанного метода для определения поверхностных токов и диаграмм направленности был проведен ряд расчетов на электронной вычислительной машине. Некоторые результаты представлены на рис. 1—4. На рис. 1 даны графики распределения плотности электрического и магнитного токов вдоль антенны длиной  $2\lambda$ , расположенной на идеально проводящем цилиндре различного размера и возбуждаемой узкой продольной щелью. Так как графики фазы тока для рассмотренных случаев мало отличаются один от другого, на рис. 1 приведен лишь график для  $ka = 4$ . Величина возбуждаемого магнитного тока в щели численно бралась равной  $W$ . На графиках магнитный ток также нормирован относительно этой величины. По оси абсцисс отложено расстояние  $l$  вдоль окружности цилиндра, отнесенное к длине волны.

Распределение импеданса одинаково для всех антенн и показано на рис. 1. Участок с емкостным импедансом, расположенный позади щели, играет роль рефлектора, т. е. подавляет излучение источника в обратном направлении. С другой стороны щели расположены участок

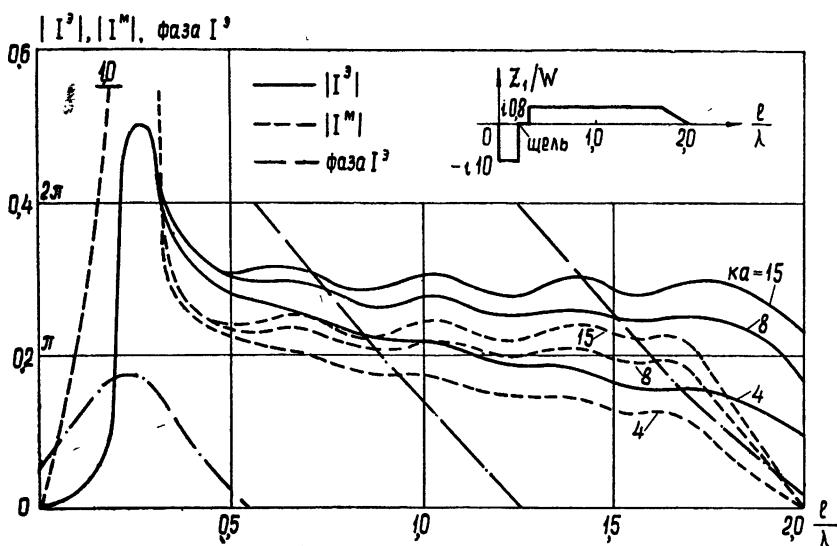


Рис. 1. Распределение электрического и магнитного токов вдоль антенны.

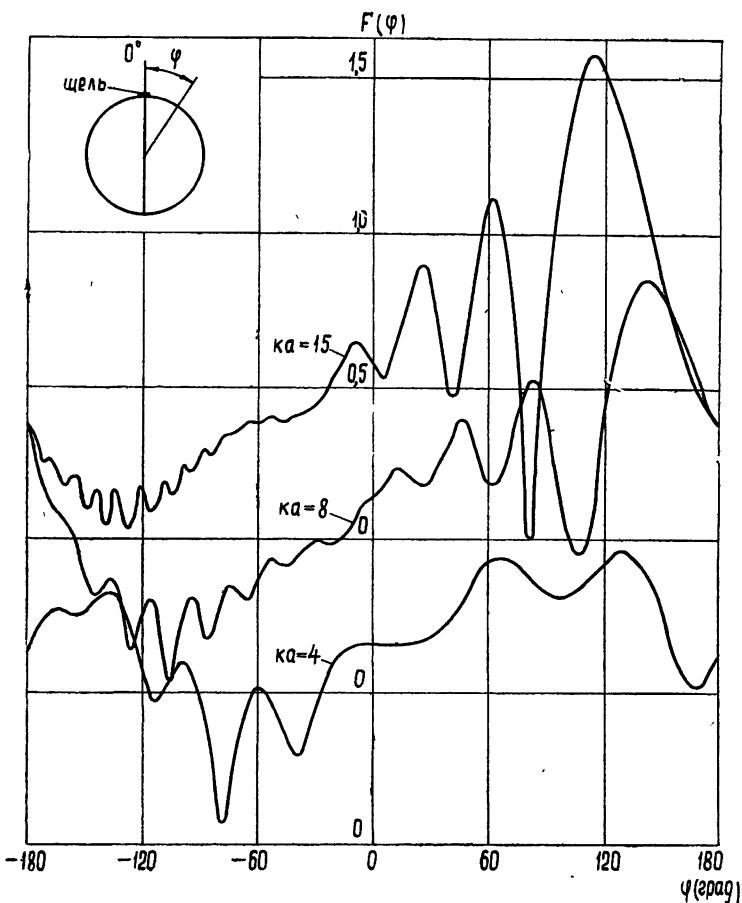


Рис. 2. Диаграммы направленности.

с индуктивным импедансом. В конце участка импеданс линейно спадает до нуля для уменьшения отражения от конца антенны. Линейное изменение фазы показывает, что ток имеет характер бегущей волны. Это также видно по небольшим колебаниям величины тока вдоль антенны. Вследствие срыва поверхностной волны происходит излучение со всей длины антенны и уменьшение амплитуды бегущей волны тока. Для  $ka = 4$  это затухание наиболее сильно выражено, для  $ka = 15$  оно мало заметно.

На рис. 2 приведены диаграммы направленности, соответствующие распределениям тока на рис. 1. Отдельные графики для удобства смешены по оси ординат на 0,5. Из рис. 2 видно, что изгибание антенны приводит к повышению минимумов диаграммы направленности и расширению ее полосы.

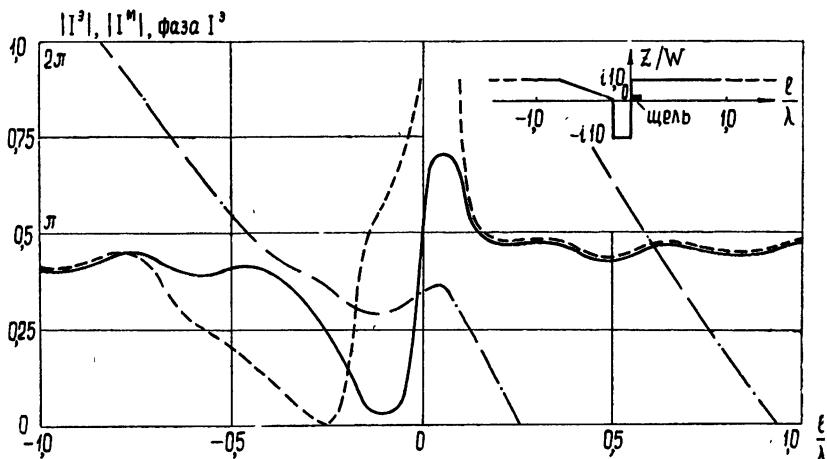


Рис. 3. Распределение электрического и магнитного токов вблизи возбуждающей щели ( $z_0/W = i1,0$ ;  $ka = 10$ ).

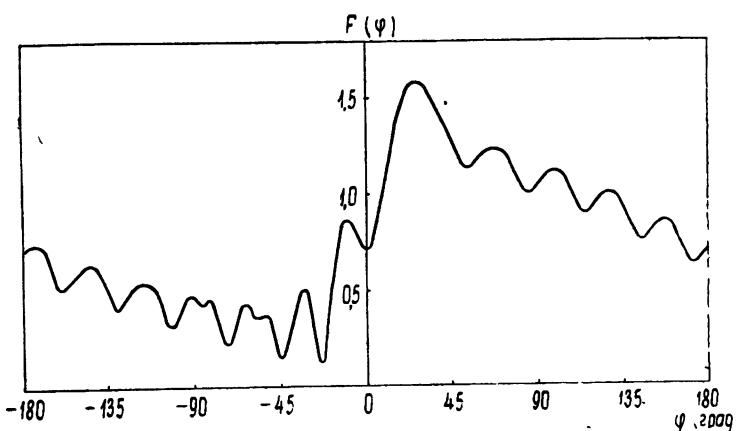


Рис. 4. Диаграмма направленности ( $ka = 10$ ).

нию главного лепестка. В случае большой кривизны поверхности ( $ka = 4$ ) главный и боковые лепестки полностью сливаются.

На рис. 3 и 4 изображены распределения тока и диаграмма направленности антенны, занимающей всю окружность цилиндра  $ka = 10$ . При этом на большей части цилиндра импеданс имеет постоянное значение

$z_0/iW = 1,0$ , а вблизи щели изменяется по закону, изображенном на рис. 3 и обеспечивающему бегущую волну тока по окружности цилиндра. Ток показан на участке длиной  $2\lambda$ , непосредственно прилегающем к щели. Из графика видно, что бегущая волна тока после обхода цилиндра затухает незначительно вследствие высокого значения импеданса и сравнительно небольшой кривизны. Диаграмма направленности в этом случае также изменяется приблизительно по закону затухающей бегущей волны, но с более сильно выраженной неравномерностью, обусловленной собственным излучением щели.

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность Г. Т. Маркову за руководство работой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Эллиот, Вопросы РПТ, № 6, 41 (1955).
2. Н. М. Barlow, Proc. IEE, **106**, 180 (1959).
3. L. B. Felsen, Proc. Roy. Soc., A-**267**, 329 (1962).
4. Г. Т. Марков, Научн. докл. высш. школы—Радиотехника и электроника, № 4, 22 (1958).
5. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИФМЛ, М.—Л., 1962.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
7 сентября 1964 г.

#### EXCITATION OF CYLINDER WITH NONHOMOGENEOUS SURFACE IMPEDANCE

*M. P. Naymushin*

Two-dimensional problem is considered of circular cylinder excitation with azimuthal variation of surface impedance. The integral equation for the surface density of an electron and magnetic current is numerically solved by the Krylov—Bogolubov's method. For the case of slot excitation the calculation results are given of current distribution and radiation pattern for two variants of impedance change and some values of surface curvature.

УДК 621.371.222.5

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАГНЕТИК—ВАКУУМ

*H. I. Гордон*

Выяснена частотная зависимость фазовой скорости поверхности волн на границе магнетика с вакуумом. Вычислен поток энергии от антенны, расположенной на высоте  $a$  от поверхности.

В работе [1] Гинцбург показал, что возможно распространение волн вдоль границы раздела магнетик—вакуум, амплитуды которых экспоненциально убывают по мере удаления от границы (поверхностные волны). В этой работе для этих волн получено дисперсионное уравнение

$$\mu_{\perp} \sqrt{u^2 - 1} + \sqrt{u^2 - \mu_{\perp}^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} u, \quad (1)$$

где  $\mu_{\perp} = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1}$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — компоненты тензора магнитной проницаемости магнетика [2]:

$$\mu_{ik} \sim \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & i\mu_2 \\ 0 & \mu_3 & 0 \\ -i\mu_2 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (1) инвариантно относительно преобразования  $\omega \rightarrow -\omega$ ,  $u \rightarrow -u$ ,  $H_0 \rightarrow -H_0$ .

Пусть магнетик заполняет полупространство  $x < 0$ , а волна распространяется вдоль оси  $Z$ . Тогда

$$E, H \sim e^{-i\omega t - iq_z z - q_x x} \quad (x > 0);$$

$$E, H \sim e^{-i\omega t - iq_z z + q'_x x} \quad (x < 0);$$

$$q_x = \sqrt{q_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}; \quad q'_x = \sqrt{q_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_{\perp}}; \quad q_z = -u \frac{\omega}{c}.$$

Здесь  $\omega$  — частота волны,  $c$  — скорость света в вакууме. Легко видеть, что  $u(\omega) = c/v_{\phi}$  ( $v_{\phi}$  — фазовая скорость волны).

Для исследования частотной зависимости  $u(\omega)$  необходимо конкретизировать значения  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и  $\mu_3$ . Рассмотрим сначала ферромагнетик. В этом случае компоненты тензора линейной восприимчивости имеют вид (см., например, [2])

$$\mu_1 = \frac{t^2 + t - v^2}{t^2 - v^2}; \quad \mu_2 = \frac{v}{t^2 - v^2}. \quad (2)$$

Здесь  $t = \frac{1}{4\pi} \left( \beta + \frac{H_0}{M_0} \right)$ ,  $\nu = \frac{\omega}{4\pi g M_0}$ ,  $M_0$  — магнитный момент насыщения,  $H_0$  — внешнее магнитное поле,  $g$  — гиromагнитное отношение,  $\beta$  — константа анизотропии.

Из дисперсионного уравнения (1) для  $u^2(\nu)$  получаем

$$u^2 = \frac{2\nu^2 - 2t^2 - 3t - 1 - 2\sqrt{\nu^2(\nu^2 - t^2 - t)}}{4[\nu^2 - t^2 - t - 1/4]} . \quad (3)$$

Исследование выражения (3) показывает, что поверхностные волны существуют в интервале  $\sqrt{t^2 + t} < \nu < \sqrt{t^2 + t + 1/4}$ . На частотах  $\nu > \sqrt{t^2 + t + 1/4}$  волна затухает ( $u^2(\nu) < 0$ ). При частоте  $\nu_{\max} = \sqrt{t^2 + t}$  фазовая скорость максимальна:  $v_\phi = c/\sqrt{t+1}$ , а при  $\nu_{\min} = \sqrt{t^2 + t - 1/4}$  она обращается в нуль.

Рассмотрим теперь распространение поверхностных волн вдоль границы антиферромагнитного диэлектрика, у которого равновеликие магнитные моменты двух подрешеток антипараллельны. В этом случае для  $\mu_1$  и  $\mu_2$  имеют место следующие формулы [3]:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1 + \frac{8\pi\gamma[\gamma(\alpha + \gamma) - \nu^2 - t^2]}{[(\nu + t)^2 - \gamma(\alpha + \gamma)][(\nu - t)^2 - \gamma(\alpha + \gamma)]} ; \\ \mu_2 &= \frac{-16\pi\gamma t \nu}{[(\nu + t)^2 - \gamma(\alpha + \gamma)][(\nu - t)^2 - \gamma(\alpha + \gamma)]} . \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\gamma = \lambda + \eta$  ( $\lambda$ ,  $\eta$  — константы анизотропии),  $\alpha$  — удвоенное значение константы взаимодействия подрешеток,  $t = H_0/M_0$ ,  $M_0$  — магнитный момент подрешетки,  $\nu = \omega/g M_0$ . В этих обозначениях

$$u^2 = \frac{-[AB - 8\pi\gamma C][AB - 4\pi\gamma C] + 128(\pi\gamma t \nu)^2 + 2t\nu\sqrt{8\pi\gamma C - AB}}{2AB[\nu^2 - (t + \sqrt{\gamma(\alpha + \gamma + 4\pi)})^2][\nu^2 - (t - \sqrt{\gamma(\alpha + \gamma + 4\pi)})^2]} ,$$

где

$$\begin{aligned} A &= (\nu + t)^2 - \gamma(\alpha + \gamma), \\ B &= (\nu - t)^2 - \gamma(\alpha + \gamma), \\ C &= \gamma(\alpha + \gamma) - \nu^2 - t^2 . \end{aligned} \quad (5)$$

Исследование выражения (5) показывает, что поверхностные волны существуют при

$$\nu > \sqrt{\gamma(\alpha + \gamma + 4\pi)} + \frac{H_0}{M_0}$$

и при

$$\nu < \sqrt{\gamma(\alpha + \gamma + 4\pi)} - \frac{H_0}{M_0} .$$

Оценку этих интервалов можно провести лишь для определенного соотношения параметров.

Схематически зависимость  $\frac{|v_\phi|}{c}$  от  $\nu$  для ферро- и антиферромагнетиков изображена соответственно на рис. 1а и 1б.

В заключение рассмотрим возбуждение поверхностных волн линейным током, направленным по оси  $Y$ :  $j = i_y j_0 \delta(x - a) \delta(z) e^{-i\omega t}$ . Решение для компонент электрического и магнитного полей ищем стандартным способом в виде разложения на неоднородные плоские волны [4]. Из уравнений Максвелла, учитывая непрерывность  $H_z$  и  $E_y$  на гра-

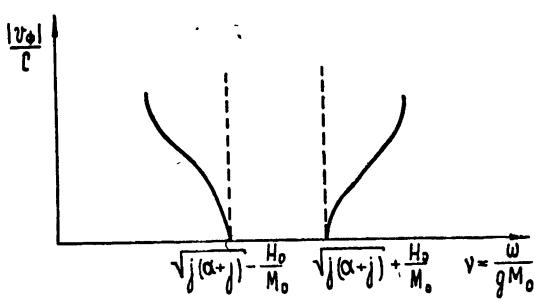
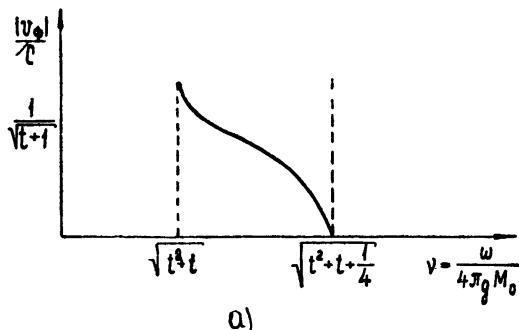


Рис. 1.

нице раздела, получим значения для  $H_x$ ,  $H_z$  и  $E_y$  в верхнем и нижнем полупространствах. Выражения для компонент полей получаются в виде интегралов, имеющих особую точку при всех  $u(\omega)$ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению. Пользуясь теоремой о вычетах, окончательно получаем:

для  $x > 0$

$$\begin{aligned}
 H_x &= 2\pi \frac{\omega}{c} j_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} a\right) \times \\
 &\times u \left(-2\mu_{\perp} \sqrt{u^2 - 1}\right) \exp\left(-\frac{i\omega}{c} uz - \frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} x\right) \times \\
 &\times \left\{ \sqrt{u^2 - 1} [u(u^2 - \mu_{\perp})^{-1/2} + \mu_{\perp} u(u^2 - 1)^{-1/2} - \mu_2/\mu_1] \right\}^{-1}; \\
 H_z &= i2\pi \frac{\omega}{c^2} j_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} a\right) 2\mu_{\perp} \sqrt{u^2 - 1} \exp\left(-\frac{i\omega}{c} uz - \right. \\
 &\left. - \frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} x\right) [u(u^2 - \mu_{\perp})^{-1/2} + \mu_{\perp} u(u^2 - 1)^{-1/2} - \mu_2/\mu_1]^{-1};
 \end{aligned}$$

$$E_y = 2\pi \frac{\omega}{c} j_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} a\right) 2\mu_{\perp} \sqrt{u^2 - 1} \exp\left(-\frac{i\omega}{c} uz - \frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} x\right) \{ \sqrt{u^2 - 1} [u(u^2 - \mu_{\perp})^{-1/2} + \mu_{\perp} u(u^2 - 1)^{-1/2} - \mu_2/\mu_1] \}^{-1};$$

для  $x < 0$

$$H_x = 2\pi \frac{\omega}{c^2} j_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} a\right) \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{u^2 - \mu_{\perp}} - u \right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{i\omega}{c} uz + \frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - \mu_{\perp}} x\right) [u(u^2 - \mu_{\perp})^{-1/2} + \mu_{\perp} u(u^2 - 1)^{-1/2} - \mu_2/\mu_1]^{-1};$$

$$H_z = i4\pi \frac{\omega}{c^2} j_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} a\right) \left( \sqrt{u^2 - \mu_{\perp}} - \frac{\mu_2}{\mu_1} u \right) \times \\ \times \exp\left(-\frac{i\omega}{c} uz + \frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - \mu_{\perp}} x\right) [u(u^2 - \mu_{\perp})^{-1/2} + \mu_{\perp} u(u^2 - 1)^{-1/2} - \mu_2/\mu_1]^{-1};$$

$$E_y = -2\pi \frac{\omega}{c} j_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} a\right) \mu_{\perp} \exp\left(-\frac{i\omega}{c} uz + \frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - \mu_{\perp}} x\right) [u(u^2 - \mu_{\perp})^{-1/2} + \mu_{\perp} u(u^2 - 1)^{-1/2} - \mu_2/\mu_1]^{-1};$$

$$H_y = E_x = E_z = 0.$$

Поток энергии, связанный с поверхностной волной, распространяющейся в верхнем полупространстве,

$$S^{вп} = \frac{\pi\omega}{2} \frac{j_0^2}{c^2} \exp\left(-2 \frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} a\right) 4\mu_{\perp}^2 u \{(u^2 - 1)^{3/2} [u(u^2 - \mu_{\perp})^{-1/2} + \mu_{\perp} u(u^2 - 1)^{-1/2} - \mu_2/\mu_1]^2\}^{-1};$$

в нижнем полупространстве

$$S^{нп} = -\frac{\pi\omega}{2} \frac{j_0^2}{c^2} \exp\left(-2 \frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} a\right) 4\mu_{\perp} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{u^2 - \mu_{\perp}} - u \right) \times \\ \times \{ \sqrt{u^2 - \mu_{\perp}} [u(u^2 - \mu_{\perp})^{-1/2} + \mu_{\perp} u(u^2 - 1)^{-1/2} - \mu_2/\mu_1]^2 \}^{-1}.$$

Суммируя оба потока и нормируя полученный полный поток на поток энергии от такой же антенны в вакууме, получаем

$$S = 2\pi \exp\left(-2 \frac{\omega}{c} \sqrt{u^2 - 1} a\right) \left[ (2\mu_{\perp})^2 u (u^2 - 1)^{-1/2} - \frac{4\mu_{\perp}}{\sqrt{u^2 - \mu_{\perp}}} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{u^2 - 1} - u \right) \right] [u(u^2 - \mu_{\perp})^{-1/2} + \mu_{\perp} u(u^2 - 1)^{-1/2} - \mu_2/\mu_1]^{-2}.$$

Используя дисперсионное уравнение (1), можно показать, что суммарный поток всегда положителен, несмотря на то, что  $S^{нп} < 0$ .

При фиксированной частоте интенсивность излучения экспоненциально убывает с увеличением расстояния от антенны до поверхности раздела. Найдем, чему равен поток энергии на границах области существования волн. Для простоты считаем, что полупространство  $x < 0$  заполнено ферромагнетиком. Если  $v \sim \sqrt{t^2 + t + 1/4}$ ,  $v_\phi \rightarrow 0$ , а  $|u| = c/v_\phi \rightarrow \infty$ , то

$$S \simeq \frac{8\pi(4t+3)^2(4t^2+4t+3)}{(4t^2-1)^2} \exp\left(-\frac{2\omega}{c}|u|a\right),$$

т. е. интенсивность излучения экспоненциально мала.

В другом предельном случае, когда фазовая скорость волны максимальна, а  $u = \sqrt{t+1}$ ,

$$S \simeq 8\pi(4t+1)^{3/2}t^{1/2} \exp\left(-\frac{2\omega}{c}\sqrt{t}a\right).$$

Полученные результаты без изменений переносятся на плазму в магнитном поле заменой  $E, H \rightarrow E, -H$ ;  $\mu_{ik} \rightarrow \epsilon_{ik}$ ,  $\epsilon \rightarrow \mu$ .

В заключение пользуясь случаем искренне поблагодарить Ф. Г. Басса и М. И. Каганова за указание темы и руководство.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гинцбург, ЖЭТФ, 34, 1635 (1958).
2. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, УФН, 71, 534 (1960).
3. М. И. Каганов, В. М. Цукерник, ЖЭТФ, 41, 267 (1961).
4. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, гл. III, § 16, изд. АН СССР, М., 1961.

Поступила в редакцию  
27 марта 1964 г.

#### PROPAGATION AND EXCITATION OF SURFACE WAVES ON MAGNETIC—VACUUM INTERFACE

*N. I. Gordon*

The frequency dependence of phase velocity has been determined of the surface waves on the magnetic vacuum interface. The energy flux from antenna elevated at the height  $a$  above the surface has been calculated.

УДК 621.372.8.09

## ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ВНУТРИ КОЛЬЦЕВОГО ВОЛНОВОДА

*С. С. Третьякова, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов*

Получено строгое решение задачи об излучении электромагнитных волн, возникающем при движении полого монохроматического электронного потока внутри кольцевого волновода. Установлены условия, при которых возможно излучение; для одного частного случая приводятся в явном виде формулы для вектора Умова—Пойнтинга.

При движении электронного потока перпендикулярно щелям плоской дифракционной решетки возникает излучение электромагнитных волн, которое является, очевидно, одним из примеров излучения Вавилова—Черенкова [1—5]. Появление этого излучения можно также объяснить с помощью модели «мигающего диполя» [1].

Для практического применения эффекта Вавилова—Черенкова предпочтительно использовать цилиндрические структуры, так как они обладают некоторыми ценными преимуществами. Известно, например, что мощность излучения Вавилова—Черенкова для полого диэлектрического волновода на порядок больше, чем для плоской пластины такого же диэлектрика. В связи с этим представляет интерес рассмотреть излучение, вызванное движением пучка вдоль оси цилиндрической дифракционной решетки, которой является кольцевой волновод. Как и для плоского случая [2, 3], ограничимся для простоты изложением, обусловленным движением модулированного монохроматического пучка. Полученное решение также легко обобщается на случай пучков произвольной формы (в том числе на случай одиночных сгустков или частиц). Монохроматические электронные пучки с частотой модуляции, лежащей в субмиллиметровом и инфракрасном диапазонах, можно также реализовать практически [5]. Для этого вместо обычного термокатода предлагается применять фотокатод, облучаемый двумя лазерами с различными частотами. Идущий от фотокатода электронный поток, естественно, будет промодулирован частотой, равной частоте биений квантовых источников.

Как и для плоского случая [2, 3], задача об излучении из кольцевого волновода решается строго при любых соотношениях между периодом структуры и длиной волны. При решении граничной электродинамической задачи применяется метод сведения к задаче Римана—Гильберта, который разработан ранее для решения дифракционных задач [6, 7].

1. В кольцевом волноводе, образованном бесконечной периодической последовательностью одинаковых металлических цилиндров радиуса  $b$  (период структуры  $l$ , ширина щелей  $d$ ), вдоль оси волновода движется с постоянной скоростью  $v$  полый цилиндрический электронный поток радиуса  $a$  (рис. 1). Введем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$  так, чтобы ось волновода совпала с осью  $Oz$ , а начало координат было помещено в середину металлического кольца. Будем считать, что электронный поток состоит из непрерывно распределенного заряда с комплексной амплитудой

$$\rho = \rho_0 \delta(r - a) e^{i(\gamma z - \omega t)}, \quad (1)$$

где  $\delta(r - a)$  — дельта-функция,  $\gamma = \omega/v$ ,  $v = \beta c$ ,  $\omega$  — частота излучения,  $c$  — скорость света в вакууме. Задача заключается в отыскании электромагнитного поля, которое может излучаться при движении электронного потока внутри волновода.

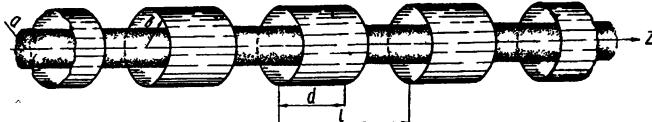


Рис. 1.

Векторы электромагнитного поля  $E(r, \theta, z)$  и  $H(r, \theta, z)$  определяются из известных формул

$$E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad H = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2)$$

Скалярный  $\varphi(r, \theta, z)$  и векторный  $\mathbf{A}(r, \theta, z)$  потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям. Для области пространства внутри волновода ( $0 < r < b$ ) нахождение  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  связано с решением неоднородного волнового уравнения. Это решение может быть представлено в виде частного интеграла неоднородного и общего интеграла однородного волновых уравнений. Физически частный интеграл соответствует потенциалам электронного потока при отсутствии волновода, а общий — потенциалам поля в волноводе без пучка.

Частные решения неоднородных уравнений для  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  внутри волновода

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -4\pi \rho_0 \delta(r - a) e^{i\gamma z}, \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (4)$$

можно искать в виде

$$\varphi_1(r, z) = V(r) e^{i\gamma z}, \quad A_1(r, z) = \beta \varphi_1 z_0, \quad (5)$$

что следует из симметрии рассматриваемой задачи ( $k = \omega/c$ ,  $z_0$  — единичный вектор, направленный вдоль  $0z$ ; множитель  $e^{-i\omega t}$  здесь и в дальнейшем опущен).

Подстановка  $\varphi_1$  и  $A_1$  в (3), (4) и сшивание полей на поверхности пучка (при  $r = a$ ) приводят к следующим выражениям:

$$\varphi_1 = 4\pi \rho_0 a e^{i\gamma z} \begin{cases} I_0(qa) K_0(qr) & \text{при } r \geq a \\ I_0(qr) K_0(qa) & \text{при } r \leq a \end{cases}; \quad (6)$$

$$A_1 = 4\pi \rho_0 a \beta z_0 e^{i\gamma z} \begin{cases} I_0(qa) K_0(qr) & \text{при } r \geq a \\ I_0(qr) K_0(qa) & \text{при } r \leq a \end{cases}, \quad (7)$$

где

$$q = \sqrt{\gamma^2 - k^2} = \gamma \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (8)$$

$I_0(x)$ ,  $K_0(x)$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Вследствие градиентной инвариантности потенциалов общее решение (3), (4) можно определять так:

$$A_2 \neq 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

Векторный потенциал  $A_2(r, z)$  не должен изменяться от прибавления к  $z$  периода  $l$ . Поэтому его можно разложить в ряд Фурье:

$$A_2(r, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{z_0 B_n(r) + r_0 C_n(r)\} e^{i(2\pi n/l)z} e^{i\gamma z}, \quad (9)$$

где  $r_0$  — орт, направленный вдоль оси  $r$ . Благодаря аксиальной симметрии пучка и кольцевого волновода  $\theta$ -составляющая векторного потенциала отсутствует. Подставляя (9) в однородное волновое уравнение, получим для  $B_n(r)$  и  $C_n(r)$  следующие соотношения:

$$B_n(r) = b_n J_0(q_n r), \quad C_n(r) = c_n J_1(q_n r),$$

где

$$q_n = \sqrt{k^2 - \left(\gamma + \frac{2\pi n}{l}\right)^2}, \quad (10)$$

$J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  — функции Бесселя. Тогда из (9) получаем

$$A_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{z_0 b_n J_0'(q_n r) + r_0 c_n J_1'(q_n r)\} e^{i(\gamma+2\pi n/l)z}. \quad (11)$$

Воспользовавшись соотношением Лоренца  $\operatorname{div} A_2 = -(1/c) \partial \varphi_2 / \partial t = 0$ , можно найти связь между  $b_n$  и  $c_n$ :

$$b_n = -\frac{q_n}{i\left(\gamma + \frac{2\pi n}{l}\right)} c_n, \quad c_n = -\frac{q_n}{\beta_n} c_n; \quad \beta_n = i\left(\gamma + \frac{2\pi n}{l}\right). \quad (12)$$

Таким образом, векторный и скалярный потенциалы внутри волновода имеют следующий вид:

$$A_1 = 4\pi\rho_0 a \beta z_0 e^{i\gamma z} \begin{cases} I_0(qa) K_0(qr) & r \geq a \\ I_0(qr) K_0(qa) & r \leq a \end{cases} + \quad (13)$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ J_1(q_n r) r_0 - \frac{q_n}{\beta_n} J_0(q_n r) z_0 \right\} c_n e^{i\beta_n z};$$

$$\varphi_1 = 4\pi\rho_0 e^{i\gamma z} \begin{cases} I_0(qa) K_0(qr) & r \geq a \\ I_0(qr) K_0(qa) & r \leq a \end{cases}. \quad (14)$$

Верхнее выражение в фигурных скобках берется при  $r \geq a$ , а нижнее — при  $r \leq a$ . Величины  $A_{11}$  и  $\varphi_{11}$  вне волновода благодаря отсутствию заряда находятся по аналогии с  $A_2$ ,  $\varphi_2$  и записываются так:

$$A_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ H_1^{(1)}(q_n r) r_0 - \frac{q_n}{\beta_n} H_0^{(1)}(q_n r) z_0 \right\} d_n e^{i\beta_n z}; \quad \varphi_2 = 0, \quad (15)$$

где  $H_0^{(1)}(x)$ ,  $H_1^{(1)}(x)$  — функции Ханкеля первого рода.

Подставляя (13) — (15) в (2), получим выражения для  $E$  и  $H$ :

а) внутри волновода ( $a < r < b$ )

$$\begin{aligned} E_{zI} &= -2\Phi i \gamma I_0(qa) K_0(qr) e^{iz} - ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q_n}{\beta_n} J_0(q_n r) c_n e^{\beta_n z}; \\ E_{rI} &= 2\Phi q I_0(qa) K_1(qr) e^{iz} + ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_1(q_n r) c_n e^{\beta_n z}; \\ H_{\theta I} &= 2\Phi \beta q I_0(qa) K_1(qr) e^{iz} - k^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} J_1(q_n r) c_n e^{\beta_n z}; \end{aligned} \quad (16)$$

б) вне волновода ( $b < r < \infty$ )

$$\begin{aligned} E_{zII} &= -ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{q_n}{\beta_n} H_0^{(1)}(q_n r) d_n e^{\beta_n z}; \\ E_{rII} &= ik \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_1^{(1)}(q_n r) d_n e^{\beta_n z}; \\ H_{\theta II} &= -k^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} H_1^{(1)}(q_n r) d_n e^{\beta_n z}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\Phi = 2\pi\rho_0 a$ .

Как видно из (16), (17), электромагнитное поле, создаваемое электронным потоком (1), движущимся внутри кольцевого волновода, имеет характер симметричных  $E$ -волн.

2. Для отыскания неизвестных коэффициентов  $c_n$  и  $d_n$ , через которые выражаются поля (16), (17), необходимо подчинить  $E$  и  $H$  граничным условиям на поверхности кольцевого волновода (при  $r = b$ ). Будем считать, что выполняются точные граничные условия: тангенциальная составляющая электрического поля обращается в нуль на металлических кольцах, а на щелях поле непрерывно, т. е.

$$\begin{aligned} E_{zI}|_{r=b} &= E_{zII}|_{r=b} = 0 \quad (\text{на металле}), \\ E_{zI}|_{r=b} &= E_{zII}|_{r=b} \quad H_{\theta I}|_{r=b} = H_{\theta II}|_{r=b} \quad (\text{на щелях}). \end{aligned} \quad (18)$$

Благодаря выбору начала координат в середине кольца металлической части волновода соответствует  $|z| < d/2$ , а щели  $d/2 < |z| \leq l/2$ . Подставим (16), (17) в (18). Поскольку равенство  $E_{zI}|_{r=b} = E_{zII}|_{r=b}$  выполняется на всем периоде,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{H_0^{(1)}(q_0 b)}{J_0(q_0 b)} d_0 - 2\Phi \frac{q}{k} I_0(qa) K_0(qb) \frac{1}{J_0(q_0 b)}; \\ c_n &= \frac{H_0^{(1)}(q_n b)}{J_0(q_n b)} d_n \quad (n \neq 0). \end{aligned} \quad (19)$$

Используя (19), можно получить следующие уравнения для отыскания  $d_n$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \frac{q_n}{\beta_n} H_0^{(1)}(q_n b) e^{\beta_n z} = 0 \quad (|z| < d/2);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \frac{1}{q_n \beta_n} \frac{1}{J_0(q_n b)} e^{\beta_n z} = -i\Phi \frac{\beta\pi}{k^2} \frac{I_0(qa)}{I_0(qb)} e^{i\gamma z} \quad (d/2 < |z| \leq l/2). \quad (20)$$

3. Займемся теперь решением системы уравнений (20). Системы такого типа уже встречались ранее при исследовании дифракции электромагнитных волн на плоских металлических решетках [6]. Покажем, что система (20) сводится к уравнениям, которые изучены в [6, 7]. Для этого обозначим

$$d_n = a_n q_n b^3 \beta_n J_0(q_n b); \quad d_0 = i\Phi \frac{\pi \sqrt{1-\beta^2}}{\beta} I_0(qa) - a_0 b^3 q \gamma I_0(qb).$$

Тогда вместо (20) получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q_n^2 b^3 J_0(q_n b) H_0^{(1)}(q_n b) e^{\beta_n z} = -2\Phi \frac{1-\beta^2}{\beta} I_0(qa) K_0(qb) \times$$

$$\times e^{i\gamma z} \quad (|z| < d/2);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{\beta_n z} = 0 \quad (d/2 < |z| \leq l/2). \quad (21)$$

Исследуем поведение функции  $q_n^2 b^3 J_0(q_n b) H_0^{(1)}(q_n b)$  при  $|n| \rightarrow \infty$ . Фактор

$$q_n b = b \sqrt{k^2 - \left(\gamma + \frac{2\pi n}{l}\right)^2} = \frac{1}{\Delta} \sqrt{\kappa^2 - (\nu + n)^2} =$$

$$= \frac{i(\nu + n)}{\Delta} \frac{|n|}{n} \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{(\nu + n)^2}},$$

где

$$\Delta = l/2\pi b, \quad \kappa = kl/2\pi, \quad \nu = \gamma l/2\pi = \kappa/\beta \quad (22)$$

— безразмерные величины. При  $|n| \rightarrow \infty$

$$q_n b = \frac{i}{\Delta} (\nu + n) \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{(\nu + n)^2} \right]$$

и

$$q_n^2 b^2 J_0(q_n b) H_0^{(1)}(q_n b) \rightarrow \frac{q_n b}{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{i(\nu + n)}{\Delta} \frac{|n|}{n}.$$

Введем функцию

$$\chi_n = 1 - \frac{\pi \Delta q_n^2 b^3}{i(\nu + n)} \frac{|n|}{n} J_0(q_n b) H_0^{(1)}(q_n b). \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что  $\chi_n \sim 0 \left( \frac{1}{|n|^2} \right)$  при  $|n| \rightarrow \infty$ . Тогда вместо (21) имеем следующую систему:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{1}{\nu + n} e^{i(\nu+n)\zeta} = 0 \quad (\pi d/l < |\zeta| \leq \pi); \quad (24)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n (1 - \chi_n) \frac{|n|}{n} e^{i(\nu+n)\zeta} = -\Phi_0 e^{i\nu\zeta} \quad (|\zeta| < \pi d/l),$$

где

$$x_n = \frac{i(\nu + n)}{\pi \Delta} a_n, \quad \zeta = \frac{2\pi}{l} z, \quad \Phi_0 = 4\pi \rho_0 a \frac{1 - \beta^2}{\beta} I_0(qa) K_0(qb). \quad (25)$$

Как известно [6], система (24) может быть приведена к следующей форме:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\zeta} &= 0 \quad (\pi d/l < |\zeta| \leq \pi); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\zeta} &= -\Phi_0 + \sum x_n \chi_n \frac{|n|}{n} e^{in\zeta} \quad (|\zeta| < \pi d/l); \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x_n \frac{1}{\nu + n} &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

которая вполне эквивалентна исходной системе (20). Система уравнений (26) хорошо изучена [6], и ее решение сводится к решению задачи Римана—Гильберта для аналитической функции. Решение (26) можно представить в виде следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \chi_n \frac{|n|}{n} V_{\sigma}^n + 2cR_{\sigma} &= \Phi_0 V_{\sigma}^0; \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left( \chi_n \frac{|n|}{n} V_m^n - \delta_{mn} \right) + 2cR_m &= \Phi_0 V_m^0 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (27) \end{aligned}$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}.$$

Здесь  $c$  — неизвестная промежуточная константа задачи, а

$$V_m^n = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+1} \mu_{n+1-p}(u) P_{p-m-1}(u) & (n \geq 0) \\ -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-p}(u) P_{p+m+1}(u) & (n < -1); R_m = \frac{1}{2} P_m(u), \\ \frac{1}{2} [P_m(u) - P_{m+1}(u)] & (n = -1) \end{cases} \quad (28)$$

$$\mu_0(u) = 1, \quad \mu_1(u) = -u, \quad \mu_n(u) = P_n(u) - 2uP_{n-1}(u) + P_{n-2}(u) \quad (n \geq 2),$$

$$R_\sigma = \frac{\pi}{2 \sin \pi v} P_{v-1}(u), \quad V_\sigma^n = \frac{\pi}{2 \sin \pi v} \frac{v-1}{v+n} [P_{v-1}(u) P_{n+1}(u) - \\ - P_{v-2}(u) P_n(u)], \quad (29)$$

( $P_m(u)$  — полиномы Лежандра, а  $P_{v-1}(u)$ ,  $P_{v-2}(u)$  — функции Лежандра аргумента  $u = \cos(\pi d/l)$ ).

Для системы (27) можно доказать теорему существования и единственность решения [8]. Из оценок коэффициентов системы и теорем Коха следует, что решение (27) может быть получено методом редукции.

4. Проанализируем условия излучения, используя для этого формулы (16), (17). Как видно из этих формул, электромагнитное поле, порождаемое пучком, представляет собой наложение бесконечного числа пространственных гармоник, каждая из которых имеет частоту  $\omega$  и различается фазовой скоростью  $v_{\phi n} = v \left(1 - \frac{n}{v+n}\right)$ . Поле каждой  $n$ -ой гармоники определяется функцией Бесселя и Ханкеля, аргументами которых служит величина  $q_n r = r \sqrt{k^2 - (\gamma + 2\pi n/l)^2}$ . Для тех значений  $n$  (при фиксированных  $v$  и  $l$ ), для которых  $q_n = ip_n$ , функции  $J_0(q_n r)$ ,  $J_1(q_n r)$ ,  $H_0^{(1)}(q_n r)$ ,  $H_1^{(1)}(q_n r)$  переходят в  $I_0(p_n r)$ ,  $I_1(p_n r)$ ,  $K_0(p_n r)$ ,  $K_1(p_n r)$ , и гармоники с этими номерами будут экспоненциально убывать с ростом  $r$ , т. е. излучаться не будут.

Для тех же значений  $n$ , для которых  $q_n$  — величина действительная, гармоники будут выражаться через  $J_0(q_n r)$ ,  $H_0^{(1)}(q_n r)$ , осциллируя с ростом  $r$ . Следовательно, условие излучения должно иметь следующий вид:

$$k^2 > \left(\gamma + \frac{2\pi n}{l}\right)^2. \quad (30)$$

Так как  $\gamma > k$  ( $v < c$ ), то неравенство (30) выполняется лишь для отрицательных значений  $n$  при соответствующем выборе параметров волновода и пучка. Условие (30) можно записать несколько иначе:

$$\beta^2 > (1 + n\beta/\kappa)^2; \quad (31)$$

при этом  $\kappa/\beta = v$  должно принадлежать интервалу

$$\frac{|n|}{1+\beta} < v < \frac{|n|}{1-\beta}. \quad (32)$$

Ясно, что (30) — (32) справедливы для областей пространства внутри и вне волновода.

5. Определим энергетические характеристики излучения. Найдем поток комплексной мощности  $S$ , проходящей в единицу времени через единичную площадку поверхности цилиндра радиуса  $r$ , усредняя его по периоду  $l$ .

Для области вне волновода имеем

$$S_{II} = \frac{c}{8\pi} \frac{1}{l} \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} (E_{zII} H_{\theta II}^* r_0 - E_{rII} H_{\theta II}^* z_0) r d\theta dz.$$

Подставляя в эту формулу  $E_{zII}$ ,  $E_{rII}$  и  $H_{\theta II}^*$  из (17), получим

$$\begin{aligned} S_{II} = -\frac{c}{8\pi} k^2 \nu \sum_{n<0} |d_n|^2 \frac{1}{\nu + n} \{J_1^2(q_n r) + N_1^2(q_n r)\} \times \\ \times \left\{ z_0 + \frac{q_n H_0^{(1)}(q_n r)}{\beta_n H_1^{(1)}(q_n r)} r_0 \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Энергия излучения теперь определится как реальная часть нормальной составляющей вектора Умова—Пойнтинга (33):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\kappa c}{8\pi r} k^2 b^2 \sum_{n<0} |x_n|^2 \frac{q_n^2}{(\nu + n)^2} J_0^2(q_n b). \quad (34)$$

В (33), (34) суммирование ведется по тем  $n$ , которые удовлетворяют условию (31), а соответствующие  $x_n$  определяются из (27). В общем случае эта задача может быть решена только численным способом. Кроме того, в кольцевом волноводе так же, как и в любой другой цилиндрической периодической структуре (например, спиральном волноводе), при определенных условиях возникает «пространственный резонанс» [9]. В этом случае будет преобладать одна какая-нибудь гармоника и тогда в выражениях для поля (17), а следовательно, и для энергии излучения (34) можно пренебречь всеми членами ряда, кроме одного.

Рассмотрим для примера случай первого пространственного резонанса. Как известно, он наступает при  $\gamma \approx 2\pi/l$  или  $\nu \approx 1$ . Согласно условию излучения (31),  $\nu$  должно принадлежать интервалу  $\frac{1}{1+\beta} < \nu <$

$\frac{1}{1-\beta}$  или (если считать  $\beta \leq 0,4$ ) интервалу  $1-\beta < \nu < 1+\beta$ . Следо-

вательно, условие первого пространственного резонанса, когда излучается только минус первая гармоника, удовлетворяет также и условию излучения. Физически это будет означать, что для минус первой гармоники поле на протяжении нескольких периодов практически не зависит от  $z$ , и излучение, выходящее из щелей волновода, будет синфазно.

В этом случае можно получить аналитическое выражение для энергии излучения минус первой гармоники. Полагая  $\nu = 1 + \xi$  ( $\xi$  — малая положительная или отрицательная добавка), из решения (27) получим выражение для  $x_{-1}$  (вычисления выполнены так же, как и в работе [3]):

$$\begin{aligned} x_{-1} = -\frac{\Phi_0}{2(1+\xi)} \xi \left[ \xi(1+u) \ln \frac{1+u}{2} + (u-1) \right] \times \\ \times \left[ \xi \ln \frac{1+u}{2} (1-\chi_{-1}) + 1 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\kappa c}{8\pi r} \frac{k^2 l}{\Delta^2} \frac{x^2 - \xi^2}{\xi^2} J_0 \left( \frac{\sqrt{x^2 - \xi^2}}{\Delta} \right) |x_{-1}|^2. \quad (36)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. J. Smith, E. M. Purcell, Phys. Rev., 92, 1069 (1953).
2. С. С. Третьякова, О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, III Всесоюзный симпозиум по дифракции волн (Тбилиси, 1964 г.), Рефераты докладов, изд. Наука, М., 1964.
3. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника.

4. K. Jshiguro, T. Take, Intern J Optica Acta, 8, 1 (1961).
5. A. J. Fox, N. W. W. Smith, Proc IEEE, 52, 672 (1964).
6. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, 342 (1962).
7. З. С. Агранович, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 34, 1950 (1964).
8. Е. Н. Подольский, III Всесоюзный симпозиум по дифракции волн (Тбилиси, 1964 г.), Рефераты докладов, изд. Наука, М., 1964.
9. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Харьковский институт горного машиностроения,  
автоматики и вычислительной техники

Поступила в редакцию  
9 мая 1964 г.

## ELECTROMAGNETIC WAVE RADIATION BY ELECTRON BEAM MOVING IN A RING WAVEGUIDE

*S. S. Tretyakova, O. A. Tretyakov, V. P. Shestopalov*

A strict solution has been obtained of the problem of electromagnetic wave radiation of the hollow monovelocety electron beam moving in a ring waveguide. The conditions have been stated under which the radiation may arise. The Pointing's vector distributions are given in the explicit form for a particular case.

УДК 621.385.632

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В ЛБВ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ МАССЫ ЧАСТИЦ ОТ СКОРОСТИ

*H. M. Советов*

С помощью метода заданного поля составлена приближенная система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поперечные смещения электронов в ЛБВ под действием высокочастотного поля. Найдены траектории электронов, позволяющие оценить величину расхождения пучка при различных параметрах лампы. Получены приближенные формулы для расчета фокусировки электронного пучка

### I. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЗАДАННОГО ПОЛЯ

Если пренебречь силами расталкивания частиц за счет влияния пространственного заряда, то для изучения малых поперечных колебаний электронов в ЛБВ можно воспользоваться методом заданного поля [1, 7]. Рассмотрим типичный случай ЛБВ с цилиндрической замедляющей системой (например, спиралью). При малом угле намотки спирали можно приблизенно считать, что волна в системе будет близка к волне типа  $E$ . Тогда высокочастотное поле (в координатах  $z, r, \psi$ ) запишется следующим образом [3]:

$$E_z = E_1 f(z) I_0(\gamma r) \cos \Phi, \quad (1)$$

$$E_r = -E_1 f(z) \frac{\beta}{\gamma} I_1(\gamma r) \sin \Phi,$$

$$H_\psi = -E_1 f(z) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{k}{\gamma} I_1(\gamma r) \sin \Phi,$$

где  $\beta = \omega/v$  — фазовая постоянная волны в присутствии электронов,  $\Phi$  — фаза высокочастотного поля,  $\gamma = \sqrt{\beta^2 - k^2}$  — радиальное волновое число,  $E_1 = AE_0$  — амплитуда возрастающей волны,  $E_0$  — амплитуда поля в начале лампы,  $f(z)$  — заданная функция распределения поля вдоль  $z$ . В отсутствие электронного потока  $f(z) = 1$ ,  $\beta = \beta_0$ .

Используя методику заданного поля, мы предположим, что в присутствии электронов возмущения поля скажутся лишь на изменении  $\beta$  и  $f(z)$ . Так, например, в случае, если поле задано на основе линейной теории [3], то в (1) следует писать

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{x_1 (\omega C/m_0) z}, \\ \Phi &= \omega t - \beta z, \\ \beta &= \beta_0 (1 - Cy_1), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $C$  — параметр усиления Пирса,  $x_1$  и  $y_1$  — корни характеристического

уравнения ЛБВ,  $A$  — параметр начальных потерь,  $u_0$  — постоянная составляющая скорости вдоль оси  $z$ .

Пусть поток сформирован в виде цилиндра радиуса  $r_0$  постоянным продольным магнитным полем  $H_z$ . Система уравнений, определяющих движение релятивистского электрона, будет тогда иметь вид [6]\*

$$\frac{\partial}{\partial t} [mr] - mr \dot{\psi}^2 = |e| [E_r + r \dot{\psi} B_z - zB_\psi]; \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(mr^2 \dot{\psi})}{dt} = -|e| \dot{r} B_z; \quad (4)$$

$$\frac{d(mz)}{dt} = |e| [E_z + \dot{r} B_\psi], \quad (5)$$

где  $B_z = \mu H_z$ ,  $B_\psi = \mu H_\psi$ .

Сравнивая  $E_r$  и  $H_\psi$  между собой, находим из (1), что при слабом токе ЛБВ, когда можно пренебречь собственным магнитным полем луча,

$$zB_\psi \simeq E_r \frac{u}{c} \frac{k}{\beta}, \quad (6)$$

где  $z = u$  — продольная скорость электронов.

Интегрируя (4) и находя  $\dot{\psi}$ , получим известное выражение теоремы Буша [5, 6]. Полагая теперь  $\dot{\psi}(0) = 0$ , подставляя  $\dot{\psi}$  в (3), используя (6) и условие  $uv/c^2 \simeq (u/c)^2$ , приходим к уравнению

$$\frac{d(mr)}{dt} = \frac{|e|^2 B_z^2}{4m} \left[ r \left( \frac{r_0^2 - r^2}{r^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{r_0^2 - r^2}{r} \right) \right] + |e| E_r \left[ 1 - \left( \frac{u}{c} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Преобразуем левую часть этого уравнения [4]:

$$\frac{d(mr)}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{u}{c} \right)^2}} \left[ \frac{(u/c^2) \dot{r} (du/dt)}{[1 - (u/c)^2]} + \frac{d^2 r}{dt^2} \right]. \quad (8)$$

При малых величинах отклонения переменных составляющих скорости электронов в данном нарастающем поле можно положить

$$u/c \simeq u_0/c \equiv k_0. \quad (9)$$

Тогда, используя уравнение движения электрона в поле  $E_z$ , получим из (8), что

$$\frac{d(mr)}{dt} \simeq m_0 p_0 \left[ \frac{u_0}{c^2} p_0^2 \frac{1}{p_0^3} \frac{|e|}{m_0} E_z \frac{dr}{dt} + \frac{d^2 r}{dt^2} \right], \quad (10)$$

где

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - k_0^2}}. \quad (11)$$

Чтобы исключить из (10) время, применим преобразование координат при дифференцировании:

\* Точками обозначены производные по времени. Производные по продольной координате в дальнейшем будут обозначены штрихами.

$$\frac{d}{dt} = u \frac{d}{dz},$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = u^2 \frac{d^2}{dz^2} + u \frac{du}{dz} \frac{d}{dz}. \quad (12)$$

После подстановки (12) в (10) предположим, что малые продольные изменения скорости электронов не влияют на их поперечные отклонения, благодаря чему можно использовать условие (9). Тогда левая часть (7) запишется так:

$$\frac{d}{dt} (mr) \simeq m_0 u_0^2 p_0 \frac{d^2 r}{dz^2} + m_0 \frac{|e|}{m_0} E_z \frac{dr}{dz} k_0^2. \quad (13)$$

Положим теперь

$$r = r_0 (1 + \alpha), \quad (14)$$

где  $\alpha$  — малый член, определяющий отклонение  $r$  от  $r_0$ . Введя новую переменную

$$y = \frac{\omega C}{u_0} z \quad (15)$$

и заменяя в (13)  $r$  на  $\alpha$  из выражения (14), запишем (7) в форме

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} = m_0 p_0 (\omega C)^2 r_0 \frac{d^2 \alpha}{dy^2} + m_0 \frac{|e|}{m_0} E_z \frac{\omega C}{u_0} r_0 \frac{d \alpha}{dy} k_0^2. \quad (16)$$

Подставим теперь (16) и (15) в (7) и отбросим члены с  $\alpha^2$ . Членом, содержащим  $E_z (d\alpha/dy)$ , также можно пренебречь, ибо он будет иметь порядок малости  $C$ . Тогда

$$r_0 \frac{d^2 \alpha}{dy^2} = - \frac{|e|^2 B_z^2}{m_0^2 p_0^2 (\omega C)^2} r_0 \alpha + \frac{|e| |E_r|}{m_0 p_0^3 (\omega C)^2}. \quad (17)$$

Учитывая малость радиальных отклонений, упростим выражения для полей (1), взяв лишь первые члены разложений функций Бесселя

$$I_0(\gamma r) \simeq 1.0, \quad I_1(\gamma r) \simeq \gamma r / 2. \quad (18)$$

Принимая во внимание (18), подставим (1) в (17) и преобразуем получающиеся при этом коэффициенты уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{|e|}{m_0} \frac{E_r}{p_0^3 (\omega C)^2} &= - \frac{1}{p_0^3} \frac{1}{4C^2} \left( \frac{u_0}{\omega} E_0 \right) \left( \frac{u_0^2}{2|e|m_0^{-1}} \right)^{-1} Arf(z) \sin \Phi = \\ &= - \sigma \frac{A h}{4C} f(y) r_0 (1 + \alpha) \sin \Phi, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $h = \left( \frac{u_0}{\omega} E_0 \right) I_0 / I_0 V_0 C$  — доля входной мощности по отношению к уровню  $I_0 V_0 C$ ,

$$\sigma = \frac{2}{p_0(p_0 + 1)}.$$

Обозначим

$$\frac{|e|B_z}{m_0} = \omega_H, \quad (20)$$

$$Ah/4C = D, \quad (21)$$

где  $\omega_H$  — циклотронная частота потока.

С учетом (15) и (19) получаем из (17) первое уравнение, связывающее поперечные отклонения электронов с параметрами системы:

$$\alpha'' + \sigma Df(y) (1 + \alpha) \sin \Phi + K^2 \alpha = 0, \quad (22)$$

где

$$K^2 = \frac{1}{p_0^2} \left( \frac{\omega_H}{\omega C} \right)^2, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) = 0.$$

Проведем аналогичные преобразования в уравнении (5). Его правая часть с учетом (1) и (18) запишется следующим образом:

$$E_z + rB_\phi = E_1 f(y) \left( \cos \Phi - \frac{r}{c} \beta r \sin \Phi \right). \quad (23)$$

Считая малым отношение радиальной скорости электрона к скорости света  $r/c$ , пренебрежем вторым членом в (23). Тогда из (5) и (23) получаем, подобно тому, как это было сделано в [1], второе уравнение для  $\Phi$ :

$$\Phi'' - 2\sigma Df(y) \cos \Phi = 0. \quad (24)$$

Последнее должно решаться при начальных условиях

$$\Phi(0) = \frac{2\pi i}{l} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, l);$$

$$\Phi'(0) = y_1.$$

Уравнения (22), (24) образуют систему, описывающую в приближении заданного поля поведение электронов в ЛБВ.

## 2. РАСЧЕТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим возможные решения системы (22), (24) для наиболее интересных вариантов задания поля.

а) Простейший случай: электромагнитное высокочастотное поле в ЛБВ отсутствует,

$$D = 0.$$

Из (22) получаем

$$\alpha = \frac{\alpha'(0)}{K} \sin(Ky). \quad (25)$$

Решение такого рода описывает радиальные колебания электрона с пространственным периодом вдоль  $y$ :

$$\Lambda = 2\pi \left( \frac{\omega_H}{p_0 \omega C} \right)^{-1}. \quad (26)$$

Характерно, что параметры  $\omega$  и  $C$ , как и  $H_z$ , входят в выражение для  $K$  в первой степени; поэтому их влияние одинаково по величине и противоположно по действию влиянию фокусирующего магнитного поля  $H_z$ .

Если теперь предположить, что электронный поток входит в систему закрученным с некоторой угловой скоростью  $\dot{\phi}(0) \neq 0$ , то нетрудно показать, что уравнение (22) приобретает постоянную правую часть

$$K^2 p_0 \dot{\phi}(0)/\omega_H.$$

Эта величина определит отклонение электронов, соответствующее уставновившейся кольцевой траектории.

б) Линейный участок взаимодействия ЛБВ. В этом случае, используя (2) и (15) при  $\alpha \ll 1$ , приводим уравнение (22) к виду

$$\alpha'' + K^2 \alpha'' = -\sigma D e^{x_1 y} \sin(\Phi_0 + y_1 y), \quad (27)$$

где  $\Phi_0$  — начальная фаза колебаний. Приближенным решением при  $K^2 \gg 1$  будет

$$\alpha \approx \frac{\alpha'(0)}{K} \sin Ky - \sigma D \frac{e^{x_1 y}}{K^2} \sin(\Phi_0 + y_1 y). \quad (28)$$

в) Результаты решения системы (22), (24) на моделирующей машине при  $l = 8$ . Типичная зависимость  $\alpha$  от  $y$  представлена на рис. 1 для  $C = 0,0025$ ,  $b = 0$ ,  $D = 0,033$ ,  $k_0 \ll 1$ ,  $K^2 = 5 \cdot 10^2$ , и на рис. 2, для тех же параметров, но при  $K^2 = 5 \cdot 10^3$ .

При вычислениях функция  $f(y)$  считалась заданной на основании строгого решения одномерной задачи. Вид функций  $f(y)$  для приведенных выше параметров был взят из [2, 8]. Аналогичные кривые получаются и для других комбинаций параметров, в том числе и при немальных значениях  $k_0$ .

Из рассмотрения кривых рис. 1, 2 видно, что для всех электронов имеются два вида поперечных отклонений; первый вид связан с действием высокочастотного поля и второй вид — наложенное на это отклонение колебание, определяемое решением (25) и зависящее от начальной поперечной скорости  $\alpha'(0)$  и параметра  $K$ . При всех вычислениях принимались меры, чтобы  $\alpha'(0) = 0$ . Однако полностью этого достичь не удавалось; поэтому этот вид колебаний присутствует на всех графиках. Из сравнения кривых на рис. 1 и 2 видно, что в соответствии с (26) период наложенных колебаний с ростом  $K$  уменьшается.

Увеличение параметра  $K$  приводит к уменьшению максимальных поперечных отклонений. С другой стороны, и увеличение скорости потока, определяемое ростом  $p_0$  уменьшает поперечное отклонение, связанное с взаимодействием. Это легко объяснить тем, что за счет возрастания массы электрона его поперечное отклонение силами высокочастотного поля делается все более и более трудным из-за возросшей инерции.

г) Приближенные формулы, описывающие решение системы во всем рабочем диапазоне  $y$ . Анализ уравнения (22) и результатов численного решения системы (22), (24) показывает, что решение вида (28) в хорошем приближении соответствует действительному. В большинстве случаев, как это следует из строгого рассмотрения одномерной ЛБВ [2], точка первого обгона электронов (и следовательно,  $f_{\max}(y)$ ) находится между  $\pi/2$  и  $\pi$ . На этом участке электроны испытывают максимальное отклонение.

Оказывается, что если в (28) положить аргумент синуса равным  $\pi/2$ , то мы получим максимальное отклонение электронов от радиуса  $r_0$ , хорошо согласующееся с данными машинного счета:

$$|\alpha_{\max}| \simeq \sigma D f_{\max}(y) K^{-2}. \quad (29)$$

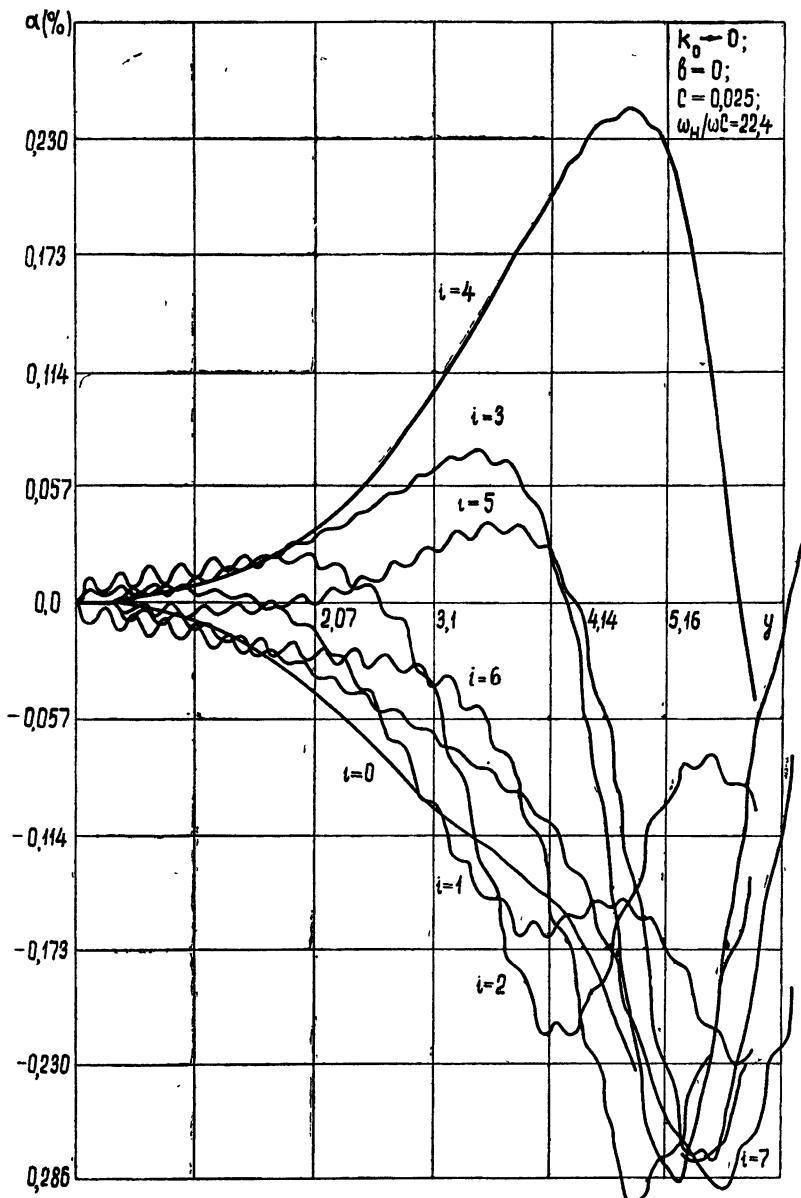


Рис. 1.

Для  $b = 0$ ,  $f_{\max}(y) = 45$ ,  $A = 0,33$ ,  $D = 0,033$ ,  $C = 0,0025$ ,  $k_0 \ll 1$  и  $k_0 = 0,5$ , а также для случая  $b = 1,5$ ,  $f_{\max}(y) = 76$ ,  $A = 0,72$ ,  $D = 0,072$ ,  $C = 0,0025$ ,  $k_0 \ll 1$  зависимости максимального отклонения  $\alpha$  от  $\omega_H/\omega C$  указаны на рис. 3. Для сравнения на этом же графике точками отмечены результаты, полученные путем решения (22), (24) на машине. Не трудно видеть, что при малых  $\omega_H/\omega C$ , модуль  $\alpha_{\max}$  резко возрастает и фокусировка потока ухудшается. С ростом  $k_0$  при постоянном  $K$  максимальные отклонения, как отмечалось, уменьшаются за счет роста

инерции электронов. Формула (29) и графики рис. 3 позволяют по заданному значению отклонения находить величину  $\omega_H/\omega_C$ , а при помощи формулы (20)—необходимое значение фокусирующего магнитного поля  $H_z$ .

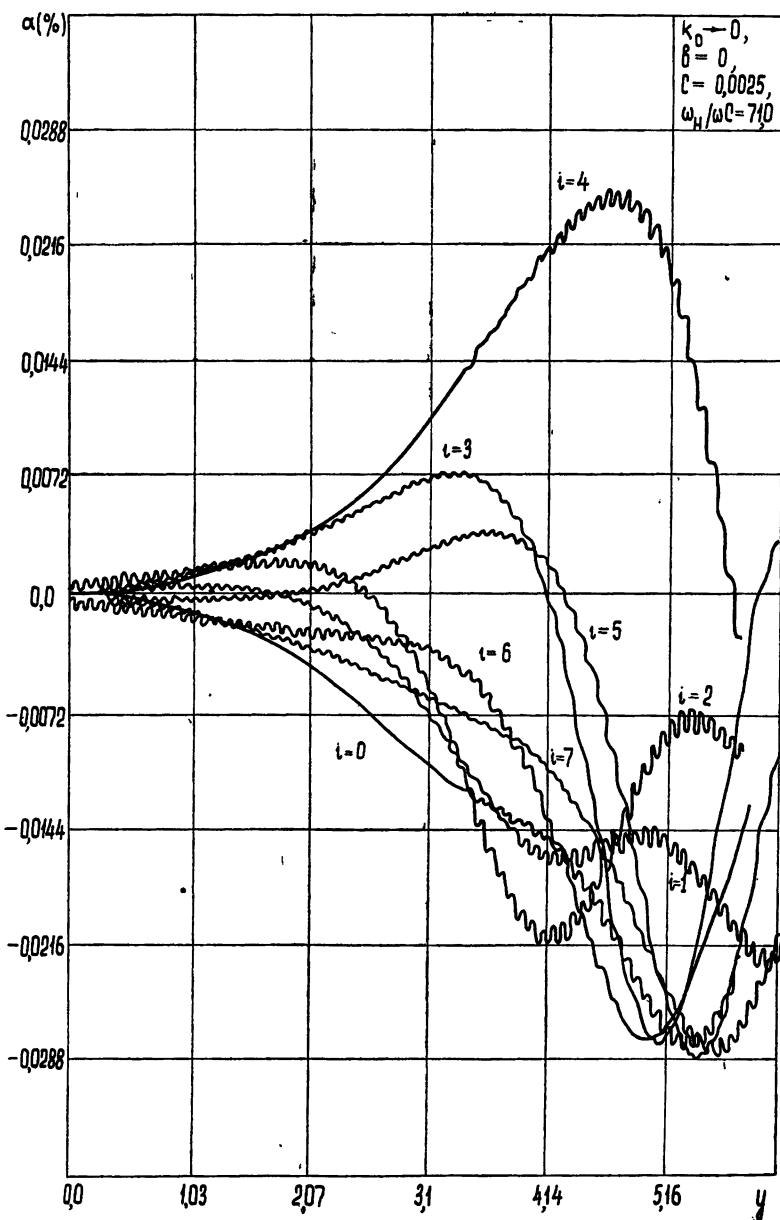


Рис. 2.

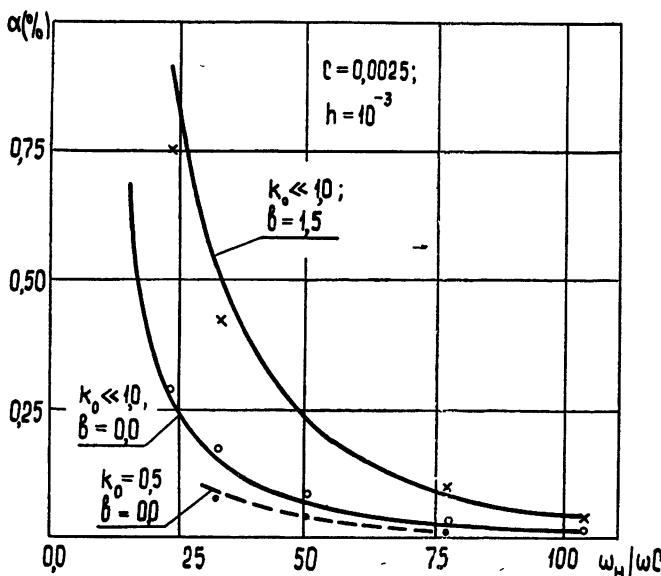


Рис. 3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И Гайдук, Е. П. Нестеров, А. М. Остапенков, Изв высш. уч зав.—Радиотехника, 4, 254 (1961).
2. Д. Роу, Лампа с бегущей волной, Сб статей, ГЭИ, М., 1959
3. Д. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов радио, М., 1952
4. Э. В. Шпольский, Атомная физика, Гостехиздат, М., 1962
5. Д. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956
6. Д. В. Каретников, И. Н. Сливко, В. А. Тепляков, А. П. Федотов, Б. К. Шембель, Линейные ускорители ионогр., Госатомиздат, М., 1962
7. Н. М. Советов, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, № 5, 7, 633 (1964)
8. Н. М. Советов, Г. Т. Казаков, Радиотехника и электроника, 10, 302 (1965).

Саратовский политехнический институт

Поступила в редакцию  
10 апреля 1964 г.APPROXIMATE CALCULATION OF TWT TRANSVERSE ELECTRON OSCILLATIONS  
WITH DEPENDENCE OF ELECTRON MASS ON VELOCITY

N. M. Sovetov

By means of the external field method the approximate system has been written of nonlinear differential equations describing the transverse electron displacement in TWT under the action of high-frequency field. The electron trajectories have been found permitting to estimate the beam divergence at different values of parameters. The approximate formulae have been obtained for calculation of the electron beam focusing.

УДК 53 · 519 25

## О ДЕТЕКТИРОВАНИИ ФАЗОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ МНОГОМОДОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

*С. А. Ахманов, А. С. Чиркин*

Обсуждаются флюктуационные явления в многомодовых генераторах. Показано, что для детектирования некоррелированных составляющих фазовых флюктуаций различных мод удобно использовать нелинейные преобразования исследуемых колебаний. Рассмотрены варианты фазового детектирования, основанные на исследовании суммарных и разностных частот. Показано, что в общем случае наиболее предпочтительно использование суммарных частот. Однако в отдельных случаях, в частности для близко расположенных по частоте мод, более удобно исследование разностных частот. Отмечена возможность выделения естественных флюктуаций фазы на фоне технических уходов.

### ВВЕДЕНИЕ

Эффективным методом измерения ширины спектральной линии автогенератора является, как известно, демодуляционный метод. Поскольку ширина линии определяется прежде всего статистическими характеристиками флюктуаций фазы, соответствующее измерительное устройство состоит обычно из фазового (частотного) детектора и следующего за ним анализатора спектра. Различные варианты схем фазового детектирования, предназначенные для исследования достаточно узких спектральных линий одномодовых генераторов в радиодиапазоне, рассматривались в [1-3]. В настоящее время часто возникает задача детального исследования структуры спектра многомодовых генераторов (генераторов, генерирующих одновременно не одну, а целый набор почти эквидистантных спектральных линий одинаковой или близкой ширины (см., например, [5, 7]). Цель настоящей статьи — обратить внимание на интересные возможности регистрации фазовых флюктуаций таких генераторов за счет использования нелинейных преобразований исследуемого колебания.

Пусть излучение исследуемого генератора имеет вид

$$E(t) = \sum_{m=1}^N e_1 A_{1m}(t) \cos [\omega_0 t + (m-1)\Delta\omega t + \varphi_{1m}(t)]. \quad (1)$$

Здесь  $E(t)$  — напряженность электрического поля, создаваемого генератором, являющаяся суперпозицией  $N$  эквидистантных колебаний (мод) разделенных интервалом  $\Delta\omega$  ( $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ ),  $e_1$  — единичный вектор, характеризующий поляризацию мод,  $A_{1m}(t)$  и  $\varphi_{1m}(t)$  — амплитуда и фаза  $m$ -ой моды, случайные функции времени. Грубо ширина линии многомодового генератора определяется числом генерируемых мод  $N \cdot \Delta\omega$ . Однако в ряде задач весьма существенным является знание тонкой структуры спектра отдельной моды. Изучение этой структуры представляет первоочередной интерес и с точки зрения исследования механизма флюктуационных процессов в многомодовых генераторах. Тонкая структура определяется уровнем флюктуаций амплитуд и фаз ( $A_{1m}$  и  $\varphi_{1m}$ ) и их корреляцией; именно вопросами изучения тонкой структуры мы и будем интересоваться в дальнейшем.

Пусть колебание (1) возбуждает среду с нелинейной зависимостью поляризации  $P$  от  $E^*$ :

$$P = \hat{\chi} E + \hat{\chi} EE. \quad (2)$$

Тогда в рассматриваемой среде возникают волны на комбинационных суммарных ( $2\omega_0, 2\omega_0 + \Delta\omega, \dots, 2\omega_0 + n\Delta\omega$ ) и разностных ( $0; \Delta\omega; 2\Delta\omega; \dots; n\Delta\omega$ ) частотах.

Поскольку обычно  $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ , спектр суммарных частот в дальнейшем для краткости будем называть второй гармоникой сложного колебания (1). Нетрудно убедиться, что амплитуды как суммарных, так и разностных частот, вообще говоря, определяются не только амплитудами, но и фазами колебаний отдельных мод. Последнее обстоятельство и может быть положено в основу метода детектирования фазовых флуктуаций. Рассмотрим возможности детектирования фазовых флуктуаций в отдельности для суммарных и разностных частот.

### 1. СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ МОЩНОСТИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

Подставляя (1) в (2) и удерживая лишь суммарные частоты, получим для напряженности поля второй гармоники выражение

$$E_2(t, r) = \sum_{n=1}^{2N-1} e_2 A_{2n}(t, r) \cos [2\omega_0 t + (n-1)\Delta\omega t - k_{2n}r + \varphi_{2n}(t, r)]. \quad (3)$$

Волна второй гармоники содержит уже не  $N$ , а  $(2N-1)$  мод, разделенных интервалами  $\Delta\omega$ .

Будем считать сначала, что коэффициент преобразования основного излучения во вторую гармонику мал, так что средняя (за время  $\tau_n \gg 1/\Delta\omega$ ) мощность второй гармоники значительно меньше мощности основного излучения:

$$\sum_{m=1}^N A_{1m}^2 \gg \sum_{n=1}^{2N-1} A_{2n}^2. \quad (4)$$

Пользуясь (1) — (3), нетрудно получить в этом случае общую формулу для квадрата амплитуды  $n$ -ой моды второй гармоники:

$$\begin{aligned} A_{2n}^2 &= \beta_c^2 \Gamma_c^2(I) \left\{ A_{1m}^4 + 4 \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ (i < j)}} A_{1i}^2 A_{1j}^2 + \right. \\ &+ 4 A_{1m}^2 \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ (i < j)}} A_{1i} A_{1j} \cos(2\varphi_{1m} - \varphi_{1i} - \varphi_{1j}) + \\ &+ 8 \sum_{\substack{i+j=p+l-n+1 \\ (l < i, p < l, i < p)}} A_{1i} A_{1j} A_{1p} A_{1l} \cos(\varphi_{1i} + \varphi_{1j} - \varphi_{1p} - \varphi_{1l}) \Big\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Суммирование производится по всевозможным  $i, j, p, l$ , удовлетворяющим записанным равенствам;  $\beta_c$  — константа, определяемая нелиней-

\* Здесь все рассуждения проводятся в терминах полей, поскольку изучение флуктуаций в многомодовых генераторах наиболее интересно в оптическом диапазоне. Разумеется, излагаемое здесь в равной мере относится и к цепям с сосредоточенными постоянными, анализируемым в терминах токов и напряжений. Поэтому рассматриваемые ниже методы измерения фазовых флуктуаций приложимы и к многомодовым генераторам радиодиапазона (таким, например, как ламповый генератор с запаздыванием [10], генераторы на ЛБВ с внешней обратной связью [11–13] и т. п.). В качестве нелинейного элемента здесь может быть использован обычный квадратичный детектор.

ностью,  $\Gamma_c(l)$  — функция длины нелинейной среды. В (5) первый член соответствует генерации  $n$ -ой моды гармоники за счет удвоения частоты  $m$ -ой моды основного излучения ( $2\omega_{1m} = \omega_{2n}$ ); второй член — за счет смешения частот мод основного излучения, удовлетворяющих условию  $\omega_{1i} + \omega_{1j} = \omega_{2n}$ . Третий и четвертый члены присутствуют, если мода гармоники образуется одновременно за счет обоих указанных процессов; нетрудно видеть, что указанные члены отличны от нуля для  $N \geq 3$ . Из (5) непосредственно следует, что флуктуации мощности второй гармоники при  $N \geq 3$  определяются не только флуктуациями амплитуд различных мод, но и флуктуациями фаз  $\varphi_{1m}(t)$ . При этом, поскольку фазы  $\varphi_{1m}(t)$  входят в (5) в виде комбинаций  $(\varphi_{1i} + \varphi_{1j} - \varphi_{1p} - \varphi_{1l})$ , этот вклад определяется не только уровнем фазовых флуктуаций, но и корреляцией флуктуаций фаз в разных модах.

Спектр мощности второй гармоники  $P_2(t)$ , регистрируемой посредством прибора с постоянной времени  $\tau_n \gg 1/\Delta\omega^*$ , имеет вид

$$S^{(c)}(\omega) = \int_0^\infty B_2(\tau) \cos \omega \tau d\tau,$$

где корреляционная функция мощности второй гармоники может быть записана следующим образом:

$$B_2(\tau) = \sum_{n=1}^{2N-1} \sum_{n'=1}^{2N-1} \overline{A_{2n}^2(t) A_{2n'}^2(t + \tau)} = B_A(\tau) + B_\varphi(\tau). \quad (6)$$

Здесь через  $B_A(\tau)$  обозначены члены, определяемые только статистическими характеристиками амплитуд, а через  $B_\varphi(\tau)$  — члены, в которые входят также и фазовые флуктуации (см. (5)).

Обратимся, прежде всего, к рассмотрению функции  $B_\varphi(\tau)$ , представляющей наибольший интерес для дальнейшего. В общем случае флуктуационная слагающая фазы  $m$ -ой моды  $\varphi_{1m}(t)$  может быть представлена в виде

$$\varphi_{1m}(t) = \varphi'_{1m}(t) + \varphi''_{1m}(t) + \varphi'''_{1m}(t). \quad (7)$$

Здесь  $\varphi'_{1m}(t)$  — естественные флуктуации фазы, вызванные непосредственным воздействием шума на генератор;  $\varphi''_{1m}(t)$  — технические флуктуации фазы, связанные с уходами параметров активного вещества и резонатора;  $\varphi'''_{1m}(t)$  — флуктуации фазы, связанные с неизохронностью (воздействием амплитудных флуктуаций на фазовые). Отметим прежде всего, что

$$w_N(\varphi'_{11}; \varphi'_{12}; \dots; \varphi'_{1N}) = w_1(\varphi'_{11}) w_1(\varphi'_{12}) \dots w_1(\varphi'_{1N}); \quad w_1(\varphi'_{1m}) = 1/2\pi; \quad (8a)$$

$$w(\varphi'_{1k}, A_{1m}) = w(\varphi'_{1k}) w(A_{1m}) \quad (8b)$$

для любых  $k$  и  $m$ .

Флуктуации фаз, связанные с техническими уходами  $\varphi'''_{1m}(t)$  в значительной мере коррелированы; технические уходы для всех мод данного генератора определяются в основном одними и теми же причинами. При этом, разумеется, отличны от нуля и функции корреляции технических флуктуаций амплитуд и фаз в различных модах. Наконец, коррелированы и флуктуации  $\varphi'''_{1m}(t)$ , поскольку нелинейная поправка к ча-

\* Практически в качестве такого прибора используется ФЭУ, поэтому все результаты, полученные в дальнейшем для статистических характеристик  $P_2(t)$  в равной мере относятся к статистическим характеристикам тока ФЭУ  $I_2(t)$ .

стоте данной моды зависит в общем случае от амплитуд всех мод (см. [16]) и, следовательно,  $\varphi_{1m}'''(t) = \varphi_{1m}'''(A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1N})$ . Таким образом, вместо (7) можно написать

$$\varphi_{1m}(t) = \varphi_{1m}^{(n \ k)}(t) + \varphi_{1m}^{(k)}(t), \quad (9)$$

выделив коррелированную и некоррелированную части фазовых флуктуаций

$$\varphi_{1m}^{(n \ k)} \simeq \varphi_{1m}'(t); \varphi_{1m}^k(t) \simeq \varphi_{1m}''(t) + \varphi_{1m}'''(t).$$

Из (8а) и (8б) непосредственно следует, что члены в  $B_\varphi(\tau)$ , в которых  $\cos(\varphi_{11} + \varphi_{1j} - \varphi_{1p} - \varphi_{1l})$  появляется только один раз, обращаются в нуль; то же самое относится и к членам, в которые входят парные произведения косинусов, содержащие разные комбинации фаз. Таким образом, отличными от нуля в  $B_\varphi(\tau)$  будут лишь члены вида

$$A_{1i}(t) A_{1j}(t) A_{1p}(t) A_{1l}(t) A_{1i}(t+\tau) A_{1j}(t+\tau) A_{1p}(t+\tau) A_{1l}(t+\tau) \cos \Delta \Phi, \quad (10)$$

где  $\Delta \Phi = \Delta \varphi_{1i} + \Delta \varphi_{1j} - \Delta \varphi_{1p} - \Delta \varphi_{1l}$  и, в свою очередь,  $\Delta \varphi_{1m} = \varphi_{1m}(t+\tau) - \varphi_{1m}(t) = \Delta \varphi_{1m}^{(k)} + \Delta \varphi_{1m}^{(n \ k)}$ . В первом приближении дисперсии отклонений коррелированных слагающих фазовых флуктуаций, связанных с техническими уходами, для различных мод можно считать одинаковыми, а соответствующий коэффициент корреляции близок к единице; тогда вклад технических флуктуаций фазы в величину  $\Delta \Phi$  весьма мал. В значительной мере компенсируются также вклады в  $\Delta \Phi$  от коррелированных флуктуаций, связанных с неизохронностью. Поэтому, основную роль во флуктуациях мощности  $P_{2n}(t)$  играют некоррелированные фазовые флуктуации. Тогда вместо (10) запишем приближенно

$$A_{1i}(t) A_{1j}(t) A_{1p}(t) A_{1l}(t) A_{1i}(t+\tau) A_{1j}(t+\tau) A_{1p}(t+\tau) A_{1l}(t+\tau) \cos \Delta \Phi. \quad (11)$$

Пользуясь (7) и (11), можно вычислить спектр флуктуаций мощности второй гармоники. В соответствии с вышеизложенным, имеют место соотношения

$$\overline{\Delta \varphi_{1i} \Delta \varphi_{1k}} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ D_i \tau & \text{при } i = k \end{cases}. \quad (12)$$

В общем случае произвольных амплитудных флуктуаций получение выражений для спектра мощности второй гармоники затруднительно; выкладки существенно упрощаются, если считать флуктуации амплитуд различных мод малым. Тогда можно записать

$$A_{1m} = A_{10}[1 + \alpha_m(t)]; \quad \overline{A_{1m}} = A_{10}; \quad \sqrt{\overline{\alpha_m^2}} \ll 1.$$

Чтобы не усложнять выкладок несущественными деталями, предположим в дальнейшем, что  $D_1 = D_2 = \dots = D_N = D$ ;  $\overline{\alpha_1^2} = \overline{\alpha_2^2} = \dots = \overline{\alpha_N^2} = \overline{\alpha^2}$ . Будем предполагать также флуктуаций амплитуд в разных модах некоррелированными\*, т. е. будем считать, что

$$\overline{\alpha_i(t) \alpha_j(t)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ B_\alpha(\tau) & \text{при } i = j \end{cases}.$$

Учитывая сказанное, для спектра  $S^{(c)}(\omega)$  получаем выражение

\* Учет корреляции здесь может быть выполнен, однако для вопросов, рассматриваемых в статье, он несущественен.

$$S^{(c)}(\omega) = \beta_c^4 \Gamma_c^4(l) A_{10}^8 [S_A^{(c)}(\omega) + S_\varphi^{(c)}(\omega)], \quad (13)$$

где

$$S_A^{(c)}(\omega) = N(8N - 4)^2 S_\alpha(\omega); \quad (14)$$

$$S_\alpha(\omega) = \int_0^\infty B_\alpha(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau;$$

$$S_\varphi^{(c)}(\omega) \simeq 8 \left\{ \sum_{n=1}^{N-2} C_{N-n}^2 + 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} C_{N-2n}^2 \right\} \frac{2D}{4D^2 + \omega^2} \quad (15)$$

( $C$  означает сочетание).

Отношение спектральной плотности флуктуаций мощности второй гармоники, связанных с фазовыми флуктуациями в основном излучении к спектральной плотности мощности второй гармоники, связанной с амплитудными флуктуациями в основном излучении может быть названо коэффициентом дискриминации фазовых флуктуаций на суммарных частотах в нелинейной среде  $K_N^{(c)}(\omega)*$ :

$$K_N^{(c)}(\omega) = S_\varphi^{(c)}(\omega)/S_A^{(c)}(\omega). \quad (16)$$

Для  $\omega = 0$

$$K_N^{(c)}(0) \simeq 4 \cdot \frac{\sum_{n=1}^{N-2} C_{N-n}^2 + 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} C_{N-2n}^2}{N(8N - 4)^2 S_\alpha(0) D}.$$

График зависимости коэффициента дискриминации  $K_N^{(c)}(0)$  от числа мод основного излучения  $N$  показан на рис. 1. При  $N \rightarrow \infty$  коэффициент дискриминации стремится к асимптотическому значению

$$K_\infty^{(c)}(0) \simeq 20,8 \cdot 10^{-3} / S_\alpha(0) D.$$

Дадим в качестве примера точное значение коэффициента дискриминации при  $N = 3$ :

$$K_3^{(c)}(0) = \frac{1}{450 S_\alpha(0) D}. \quad (17a)$$

В некоторых случаях следует учитывать неэквидистантность мод основного излучения. Для  $N = 3$  неэквидистантность характеризуется величиной  $\Omega = 2\omega_{12} - \omega_{11} - \omega_{13}$ . Тогда спектр мощности второй гармоники

$$S^{(c)}(\omega) = \beta_c^4 \Gamma_c^4(l) A_{10}^8 \left\{ 1200 S_\alpha(\omega) + \frac{12D}{9D^2 + (\omega - \Omega)^2} + \frac{12D}{9D^2 + (\omega + \Omega)^2} \right\}.$$

Максимальному значению коэффициента соответствует теперь  $\omega = \Omega$ :

\* В силу приближенности формулы (15) приближенной является и (16). Ошибка в вычислении  $K_N^{(c)}(\omega)$  по формуле (16) составляет около 10% при  $N = 4$ ; при увеличении  $N$  она уменьшается и при  $N = 7$  не превышает  $\sim 5\%$ .

$$K_3^{(c)}(\Omega) = \frac{1}{900 S_a(\Omega) D}. \quad (176)$$

Не представляет труда и обобщение формулы (15) на случай неэквидистантных мод.

Следует еще раз подчеркнуть, что формулы (15) – (17) справедливы лишь при выполнении неравенства (4), т. е. для малых КПД преобразования мощности основного излучения во вторую гармонику. Новые явления возникают в том случае, когда КПД возрастает до единиц и десятков процентов. Здесь становится существенной обратная реакция гармоники на основное излучение; последнее приводит к существенному изменению статистических характеристик фаз  $\varphi_{1m}$  основного излучения. Нетрудно убедиться, в частности, что для больших КПД фазы мод основного излучения становятся коррелированными, а их влияние на величину мощности второй гармоники ослабляется. Чтобы не загромождать выкладок, проиллюстрируем сказанное на простейшем примере, когда  $N = 3$ , считая, что точно выполняются условия синхронизма фазовых скоростей взаимодействующих волн.

Мощность  $P_2(t, l)$  второй гармоники в этом случае в квазистатическом приближении (эффектами «запаздывания» в нелинейной среде можно пренебречь) определяется следующим выражением (см. [8, 15]):

$$P_2(t, l) = \langle A_0^2(t) t h^2 [\beta_c l A_0(t)] \rangle, \quad (18)$$

где

$$A_0^2(t) = \sum_{m=1}^3 A_{1m}^2 + 2 \sum_{l=m+1}^3 \sum_{m=1}^2 A_{1l} A_{1m} \cos [(l-m)\Delta\omega t + \varphi_{1l} - \varphi_{1m}]$$

(угловые скобки означают усреднение по времени за  $\tau_n \gg 1/\Delta\omega$ ). Из (18) следует, что при достаточно больших значениях  $\beta_c A_0(t) l$  флюктуации  $P_2$ , обусловленные флюктуациями фаз  $\varphi_{1m}$  основного излучения, исчезают:

$$P_2(t) = \sum_{m=1}^3 A_{1m}^2(t). \quad (19)$$

Используя (18), можно определить зависимость коэффициента дискриминации фазовых флюктуаций  $K_3^{(c)}$  от длины нелинейной среды (в соответствии со сказанным, значения  $K_3^{(c)}(0)$ , даваемые формулами (16), (17), соответствуют  $l \rightarrow 0$ ). С этой целью, разлагая (18) в ряд около значения  $A_p^2 = 3A_{10}^2$ , получим

$$P_2(t, l) = A_p^2 t h^2 L + 2A_{10}^2 \left\{ \sum_{m=1}^3 \alpha_{1m}(t) \right\} F_1(L) + \quad (20)$$

$$+ \frac{4A_{10}^4}{A_p^2} \left\{ 2 \sum_{m=1}^3 \alpha_{1m} + \cos(2\varphi_{12} - \varphi_{11} - \varphi_{13}) \right\} F_2(L),$$

где

$$F_1(L) = t h^2 L + \frac{L t h L}{c h^2 L}, \quad (21)$$

$$F_2(L) = \frac{3}{2} \frac{L t h L}{c h^2 L} + \frac{1}{2} \frac{L^2}{c h^4 L} - \frac{L^2 t h^2 L}{c h^2 L}$$

и

$$L = \beta_c A_p l. \quad (22)$$

Спектр флюктуаций мощности  $P_2(t, l)$  имеет вид

$$S^{(c)}(\omega, l) = 4A_{10}^4 \left\{ 3[F_1(L) + \frac{4}{3}F_2(L)]^2 S_\alpha(\omega) + \frac{6D}{9(9D^2 + \omega^2)} F_2^2(L) \right\}. \quad (23)$$

Коэффициент дискриминации фазовых флюктуаций оказывается теперь не только функцией частоты, но и функцией приведенного расстояния  $L$ . Пользуясь формулой (23), получим значение коэффициента дискриминации на нулевой частоте в зависимости от  $L$ :

$$K_3^{(c)}(0, L) = \frac{1}{220S_\alpha(0)D} F(L), \quad (24)$$

где

$$F(L) = 3,06 \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{F_1(L)}{F_2(L)} \right]^{-2}. \quad (25)$$

График зависимости  $K_3^{(c)}(0, L)$  от приведенной длины  $L$  представлен на рис. 2; здесь же приведен и график зависимости средней мощности второй гармоники от расстояния.

Следует отметить, что там, где  $P_2 \approx 3A_{10}^2$ , формула (23) наиболее точно оценивает поведение спектра мощности второй гармоники при достаточно больших  $L$ . Этим объясняется различие значений  $K_3^{(c)}(0, 0)$ , получаемых из (24) и формул (16)  $\div$  (17), выведенных в приближении заданного поля основного излучения.

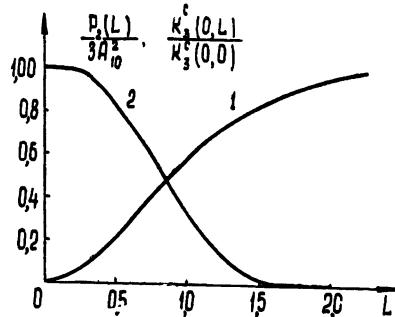


Рис. 2. График зависимости приведенной средней мощности второй гармоники  $P_2(L)/3A_{10}^2$ , генерируемой трехмодовым генератором в среде с поляризаемостью квадратичного вида (кривая 1) и приведенного коэффициента дискриминации  $K_3^{(c)}(0, L)/K_3^{(c)}(0, 0)$  (кривая 2) от приведенной длины  $L = \sqrt{3}A_{10}\beta_c l$ .

## 2. СПЕКТР ФЛУКТУАЦИЙ МОЩНОСТИ РАЗНОСТНЫХ ЧАСТОТ

При малом КПД преобразования мод основного излучения в разностные частоты напряженность поля последних имеет вид

$$E_p = \sum_{k=n+1}^N \sum_{n=1}^{N-1} \beta_p \Gamma_p(l) A_{1k} A_{1n} \cos [(k-n)\Delta\omega t + \varphi_{1k} - \varphi_{1n}], \quad (26)$$

где  $\beta_p = \beta_p(m\Delta\omega)$  зависит от частоты  $m\Delta\omega$ . Поле на частоте  $n\Delta\omega$

$$E_{p, n\Delta\omega} = \beta_p(n\Delta\omega) \Gamma_p(l) \sum_{k=1}^{N-n} A_{1, k+n} A_{1, k} \cos [n\Delta\omega t + \varphi_{1, k+n} - \varphi_k] \quad (27)$$

или

$$E_{p, n\Delta\omega}^2 = \beta_p(n\Delta\omega) \Gamma_p(l) C_n \cos (n\Delta\omega t + \psi_n),$$

где

$$\begin{aligned} C_n^2 = & \sum_{k=1}^{N-n} A_{1, k+n}^2 A_{1, k}^2 + 2 \sum_{m=k+1}^{N-n} \sum_{k=1}^{N-n-1} A_{1, m+n} A_{1, m} A_{1, k+n} A_{1, k} \times \\ & \times \cos [\varphi_{1, m+n} - \varphi_{1, m} - \varphi_{1, k+n} + \varphi_{1, k}]. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, здесь, как и в случае генерации второй гармоники, амплитуда колебаний разностной частоты  $n\Delta\omega$  зависит от фаз  $\varphi_{1m}$ , если частота  $n\Delta\omega$  образуется в результате смещения по крайней мере трех мод основного излучения. Подавая колебание (27) на амплитудный детектор с постоянной времени  $\tau_{\text{дет}} \gg 1/n\Delta\omega$  (для простоты будем считать его квадратичным), получим ток

$$I_d(t) = \gamma \beta_p^2 \Gamma_p^2(l) C_n^2(t), \quad (29)$$

где  $\gamma$  — аппаратурная константа. В тех же предположениях, в которых были получены формулы (13)  $\div$  (16), для спектра флюктуаций тока детектора имеем

$$S^{(p)}(\omega) = \gamma^2 \beta_p^4 \Gamma_p^4(l) A_{10}^8 \{2S_A^{(p)}(\omega) + S_\varphi^{(p)}(\omega)\}, \quad (30)$$

где

$$S_A^{(p)}(\omega) = \begin{cases} (4N - 6n)S_\alpha(\omega) & \text{для } n \leq N/2, \\ 2(N - n)S_\alpha(\omega) & \text{для } n \geq N/2; \end{cases} \quad (31)$$

$$(32)$$

$$S_\varphi^{(p)}(\omega) = \sum_{m=l+1}^{N-n} \sum_{l=1}^{N-n-1} \int_0^{+\infty} \overline{\cos[\Delta\varphi_{1,m+n}^{(h,k)} - \Delta\varphi_{1m}^{(h,k)} - \Delta\varphi_{1,l+n}^{(h,k)} + \Delta\varphi_{1l}^{(h,k)}]} \cos(\omega\tau) d\tau.$$

С помощью (30)  $\div$  (32) можно определить коэффициент дискриминации фазовых флюктуаций в нелинейной среде на разностных частотах. В простейшем случае  $N = 3$  и  $\Omega = 0$

$$K_3^{(p)}(0, 0) = \frac{1}{18DS_\alpha(0)} \quad (33)$$

(ср. (17)). Пользуясь (31), (32), нетрудно оценить зависимость  $K_N^{(p)}(0, 0)$  от числа мод основного излучения:

$$K_E^{(p)}(0, 0) \sim \frac{(N - n)(N - n - 1)}{(N - n)DS_\alpha(0)} = (N - n - 1) \frac{1}{DS_\alpha(0)}. \quad (34)$$

Из (34) следует, что флюктуации фаз основного излучения не влияют на уровень амплитудных флюктуаций разностной частоты  $n\Delta\omega$ , если  $n = N - 1$ . В этом случае, очевидно, разностная частота образуется единственным способом.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ

Приведенные результаты свидетельствуют таким образом о возможности использования нелинейных преобразований для дискриминации некоррелированных фазовых флюктуаций разных мод многомодовых генераторов. При этом огибающая спектра, связанного с фазовыми флюктуациями, имеет форму соответствующей компоненты спектральной линии моды. Из формул (16), (31), (32) следует, что коэффициент дискриминации обратно пропорционален ширине линии, т. е. предлагаемый метод наиболее удобен для узких линий. Для газового лазера, судя по данным работ [6, 7, 17], можно ожидать коэффициенты дискриминации

$$K_3^{(c)}(0, 0) \simeq 10^2 \div 10^3; \quad K_3^{(p)}(0, 0) \simeq 10^3 \div 10^4$$

(здесь  $D \simeq 10^3 \text{ Гц}$ ;  $S_\alpha(0) \simeq 10^{-7} \div 10^{-8} \text{ Гц}^{-1}$ ).

Хотя предлагаемый метод детектирования спектра фазовых флюктуаций в той форме, в которой он описан в статье, практически еще не использовался, эффекты влияния фазовых флюктуаций на одномер-

ный закон распределения мощности второй гармоники уже неоднократно регистрировались (см., например, [4, 8, 14]). При этом специально поставленные в [14] опыты позволили выделить связанные с фазовыми флуктуациями эффекты на фоне других причин, вызывающих флуктуации мощности второй гармоники.

Следует сделать несколько замечаний о сравнительных характеристиках систем фазового детектирования на разностных и суммарных частотах. Из сопоставления, например, формул (17) и (23) видно, что для  $N = 3K_3^{(p)}(0, 0) = 25 K_3^{(c)}(0, 0)$ . Последнее связано с тем, что в случае генерации второй гармоники амплитуда лишь одной моды  $A_{23}$  реагирует на фазовые флуктуации, а моды  $A_{21}, A_{22}, A_{24}, A_{25}$  флуктуируют только вследствие амплитудных флуктуаций основного излучения. Поэтому для увеличения  $K_N^{(c)}$  в спектре второй гармоники целесообразно выделить лишь те моды, амплитуды которых зависят от фаз  $\varphi_{1m}$ . Сказанное не означает, однако, что использование разностных частот всегда предпочтительнее. Для оптических резонаторов небольших размеров величина  $\Delta\omega$  может стать настолько большой, что ее выделение с помощью обычных ФЭУ невозможно\*. С такой ситуацией столкнулись авторы работы [19], измерявшие спектр полупроводникового генератора по спектру биений между соседними модами (в резонаторе длиной  $\sim 0,5 \text{ мм}$   $\Delta\omega/2\pi \approx 85 \text{ кмгц}$ , и для получения  $\Delta\omega/2\pi = 2 \text{ кмгц}$  пришлось просветлять полупроводник и вводить внешнее зеркало). С другой стороны, при использовании суммарных частот такая трудность отсутствует, а мощности второй гармоники, получаемые от полупроводникового генератора, уже сейчас составляют  $\sim 10^{-5} \text{ вт}$  (см. [20]), что достаточно для регистрации спектра амплитудных флуктуаций.

Рассмотренные выше методы наиболее удобны для регистрации фазовых флуктуаций газовых и полупроводниковых генераторов непрерывного действия. Достигнутые здесь значения мощности оптических гармоник ( $\sim 10^{-11} \text{ вт}$  при использовании газового генератора [18] и  $\sim 10^{-5} \text{ вт}$  при использовании полупроводникового [20]) могут быть существенно увеличены за счет больших когерентных длин  $l_{\text{ког}}$  и больших мощностей основного излучения  $P_1$  ( $P_2 \sim l_{\text{ког}}^2 P_1^2$ ). Отношения сигнал/шум на выходе современных ФЭУ составляют  $\sim 10$  при полосе  $\sim 10^4 \text{ гц}$  и мощности сигнала  $\sim 10^{-10} \text{ вт}$ .

В несколько модифицированном виде описанный метод может быть использован и для исследования фазовых флуктуаций в импульсном генераторе на твердом теле; здесь при длительности импульса  $\tau_i$  больше времени корреляции фазовых флуктуаций  $\tau_k$  форма импульса второй гармоники или разностной частоты будет определяться не только амплитудами, но и фазами мод основного излучения. При этом в случае, если  $P_1$  достаточно велико, следует принимать во внимание зависимость  $K_N = K_N(L)$ . С методической точки зрения интересно отметить, что уменьшение  $K_N(L)$  при достаточно больших  $L$  можно наглядно интерпретировать с помощью пространственно-временной аналогии, рассмотренной в [8]. По существу, исследованная задача является задачей о влиянии флуктуаций краевых условий на развитие нелинейного процесса в пространстве; в установившемся режиме флуктуации краевых условий «забываются» точно также, как «забываются» флуктуации начальных условий при установлении автоколебаний (ср. [9]).

Резюмируя сказанное, отметим, что рассмотренные методы целесообразно использовать при исследовании тонкой структуры флуктуаций

\* Получение же разностных частот с помощью кристаллов с нелинейной поляризуемостью менее предпочтительно, нежели суммарных частот, в силу известных ограничений, накладываемых соотношениями Мэнли—Роу.

в многомодовых генераторах; приведенные формулы могут оказаться полезными и в тех случаях, когда спектр многомодового генератора исследуется на основе измерения ширины спектра биений между модами\*. (Такая методика применима при наличии близко расположенных мод [19] или при использовании допплер-эффекта [17].)

Авторы благодарны И. Л. Берштейну, внимательно ознакомившемуся с рукописью статьи и высказавшему замечания, учтенные в окончательной ее редакции.

### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., **14**, 145 (1950).
2. Г. С. Горелик, Г. А. Елкин, Радиотехника и электроника, **2**, 28 (1957).
3. С. А. Ахманов, В. Н. Ештокин, В. Ф. Марченко, Радиотехника и электроника, **7**, 2024 (1962).
4. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, Р. В. Хохлов, О. Н. Чуваев, ЖЭТФ, **45**, 1336 (1963).
5. M. Gorfinkel, W. E. Engelberg, Appl. Phys. Letters, **3**, 10 (1963).
6. J. Bellisio, C. Freed, H. Haus, Appl. Phys. Letters, **4**, 5 (1964).
7. D. Heggiot, J. Opt. Soc. Amer., **52**, 31 (1962).
8. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд АН СССР, М., 1964.
9. С. А. Ахманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 110 (1960).
10. И. С. Гоноровский, Радиотехника, **13**, 19 (1958).
11. V. Met, Proc. IRE, **45**, 1119 (1957).
12. С. А. Ахманов, В. Н. Ештокин, Флуктуации в генераторе с распределенной нелинейностью, Тезисы доклада на IV Всесоюзн. конференции по радиоэлектронике, Харьков, 1960.
13. W. Edson, IRE Trans. Circuit Theory, **CT-2**, 58 (1955).
14. N. Bloembergen, J. Dicusing, Phys. Rev., **133**, A1493 (1964).
15. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Вестник МГУ (в печати).
16. W. E. Lamb, Phys. Rev., **134**, A1429 (1964).
17. P. J. Magill, T. Young, Appl. Phys. Letters, **5**, 13 (1964).
18. A. Ashkin, G. Boyd, J. Dziedzic, Phys. Rev. Letters, **11**, 14 (1963).
19. J. Crowe, R. Craig, Appl. Phys. Letters, **5**, 72 (1964).
20. L. Malmstrom, J. Schlickman, R. Kingston, J. Appl. Phys., **35**, 248 (1964).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
6 июля 1964 г.

### ON PHASE FLUCTUATIONS DETECTION OF MULTI-MODE GENERATORS IN NONLINEAR MEDIUM

S. A. Akhmanov, A. S. Chirkin

Fluctuation phenomena in multi-mode generators are discussed. It is shown that for detecting noncorrelated components of phase fluctuations of different modes it is convenient to use nonlinear transformations of oscillations studied. The variants have been considered of phase detecting based on the investigation of sum and difference frequencies. In general case the use of sum frequencies is shown to be preferred. However, in some cases to study the difference frequencies is more convenient for the neighbouring frequency modes. The possibility is noted of separation of natural phase fluctuations from its technical drifts.

---

\* Строго говоря, и здесь можно определить лишь ту компоненту, которая связана с некоррелированными флуктуациями фаз.

УДК 62 — 501 3

## ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ТОЧНЫМИ МЕТОДАМИ СИСТЕМ С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

P. A. Нелепин

Для аналитического исследования некоторых нелинейных автоматических систем предлагается метод, основанный на рассмотрении ряда специально выбираемых сечений в пространстве параметров системы. В этих сечениях исходная система  $n$ -го порядка несобыим линейным преобразованием переменных приводится к ряду уравнений 1-го и 2-го порядка, связанных между собой так, что они могут интегрироваться последовательно, если некоторые из них рассматривать как неоднородные. Таким путем сложная задача исследования нелинейной системы  $n$ -го порядка приводится к значительно более простой и хорошо изученной задаче исследования систем 1-го и 2-го порядка.

1. Каноническая форма уравнений движения. Рассмотрим систему

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n a_{k\alpha} \eta_\alpha + b_k^{(1)} f_1(\sigma_1) + b_k^{(2)} f_2(\sigma_2) \quad (k = 1, \dots, n);$$

$$\sigma_1 = \sum_{l=1}^n c_l^{(1)} \eta_l; \quad \sigma_2 = \sum_{l=1}^n c_l^{(2)} \eta_l.$$
(1.1)

Здесь  $\eta_k (k = 1, \dots, n)$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  — зависимые переменные,  $a_{k\alpha}$ ,  $b_k^{(1)}$ ,  $b_k^{(2)}$ ,  $c_k^{(1)}$ ,  $c_k^{(2)} (k, \alpha = 1, \dots, n)$  — вещественные коэффициенты,  $f_1(\sigma_1)$ ,  $f_2(\sigma_2)$  — нелинейные функции; точка означает дифференцирование по времени  $t$ .

При  $b_k^{(2)} = c_k^{(2)} = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ) система (1.1) превращается в так называемую систему «прямого» регулирования [1]. При релейных характеристиках  $f_1(\sigma_1)$  и  $f_2(\sigma_2)$  система вида (1.1) рассматривалась в [2].

Преобразовав первые  $n$  уравнений системы (1.1) к любой из переменных  $\eta_\alpha$ , получим

$$D(p)\eta_\alpha = -N_\alpha^{(1)}(p)f_1(\sigma_1) - N_\alpha^{(2)}(p)f_2(\sigma_2) \quad (\alpha = 1, \dots, n),$$

где

$$D(p) = \det \| a_{k\alpha} - \delta_{k\alpha} p \| \quad (k, \alpha = 1, \dots, n),$$

$$N_\alpha^{(j)}(p) = \sum_{k=1}^n b_k^{(j)} D_{k\alpha}(p) \quad (j = 1, 2),$$
(1.2)

$p = d/dt$  — оператор дифференцирования (символический множитель),  $D_{k\alpha}(p)$  — алгебраическое дополнение элемента  $(a_{k\alpha} - \delta_{k\alpha} p)$  определяется  $D(p)$ ,  $\delta_{k\alpha}$  — символ Кронекера.

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — простые корни алгебраического уравнения  $D(p) = 0$ . Разложим на простейшие дроби отношения полиномов

$$\frac{N_\alpha^{(j)}(p)}{D(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{N_\alpha^{(j)}(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)} \frac{1}{p - \lambda_k} \quad (j = 1, 2),$$
(1.3)

где  $D'(\lambda_k)$  есть производная от многочлена  $D(p)$  по  $p$ , в которую подставлено значение  $p = \lambda_k$ . Из известного соотношения [3]

$$D_{\rho\alpha}(\lambda_k) D_{sl}(\lambda_k) = D_{\rho i}(\lambda_k) D_{sa}(\lambda_k) \quad (1.4)$$

и из выражений (1.2) для  $N_\alpha^{(1)}(p)$ ,  $N_\alpha^{(2)}(p)$ , взятых при  $p = \lambda_k$ , имеем

$$N_\alpha^{(1)}(\lambda_k) N_\beta^{(2)}(\lambda_k) = N_\alpha^{(2)}(\lambda_k) N_\beta^{(1)}(\lambda_k) \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

На основании последнего равенства можно записать

$$N_\alpha^{(j)}(\lambda_k) [N_\beta^{(1)}(\lambda_k) + N_\beta^{(2)}(\lambda_k)] = [N_\alpha^{(1)}(\lambda_k) + N_\alpha^{(2)}(\lambda_k)] N_\beta^{(j)}(\lambda_k) \quad (j = 1, 2). \quad (1.6)$$

Выберем число  $\beta$  из чисел  $1, \dots, n$  так, чтобы  $N_\beta^{(1)}(\lambda_k) + N_\beta^{(2)}(\lambda_k) \neq 0$ ; тогда из (1.6) имеем

$$N_\alpha^{(j)}(\lambda_k) = [N_\alpha^{(1)}(\lambda_k) + N_\alpha^{(2)}(\lambda_k)] u_\beta^{(j)}(\lambda_k) \quad (j = 1, 2; \alpha = 1, \dots, n), \quad (1.7)$$

где

$$u_\beta^{(j)}(\lambda_k) = \frac{N_\beta^{(j)}(\lambda_k)}{N_\beta^{(1)}(\lambda_k) + N_\beta^{(2)}(\lambda_k)} \quad (j = 1, 2). \quad (1.8)$$

С учетом выражения (1.7) формула (1.3) перепишется так:

$$\frac{N_\alpha^{(j)}(p)}{D(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{N_\alpha^{(1)}(\lambda_k) + N_\alpha^{(2)}(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)} \frac{u_\beta^{(j)}(\lambda_k)}{p - \lambda_k} \quad (j = 1, 2). \quad (1.9)$$

Используя (1.9), нетрудно определить каноническое преобразование

$$\eta_\alpha = - \sum_{k=1}^n \frac{N_\alpha^{(1)}(\lambda_k) + N_\alpha^{(2)}(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)} x_k \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (1.10)$$

и канонические уравнения для системы (1.1):

$$\dot{x}_k = \lambda_k x_k + u_\beta^{(1)}(\lambda_k) f_1(\sigma_1) + u_\beta^{(2)}(\lambda_k) f_2(\sigma_2) \quad (k = 1, \dots, n); \quad (1.11)$$

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n \gamma_i^{(1)} x_i; \quad \sigma_2 = \sum_{i=1}^n \gamma_i^{(2)} x_i,$$

где

$$\gamma_i^{(j)} = - \frac{1}{D'(\lambda_i)} \sum_{k=1}^n c_k^{(j)} [N_k^{(1)}(\lambda_i) + N_k^{(2)}(\lambda_i)] \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, 2). \quad (1.12)$$

Можно доказать, что матрица преобразования (1.10) будет невырожденной в том и только том случае, если: 1) полином  $D(p)$  имеет только простые нули; 2) векторы

$$H, AH, \dots, A^{n-1}H \quad (1.13)$$

линейно независимы. Здесь  $A = \|a_{kj}\|$  — матрица с числом элементов  $n \times n$ ,

$$H = \begin{vmatrix} b_1^{(1)} + b_1^{(2)} \\ b_2^{(1)} + b_2^{(2)} \\ \dots \\ b_n^{(1)} + b_n^{(2)} \end{vmatrix}. \quad (1.14)$$

Далее полагаем, что оба указанных условия выполнены; в таком случае системы (1.1) и (1.11) будут в процессе исследования взаимозаменяемыми.

Если в канонических уравнениях Троицкого [4] при  $m = 2$  определенным образом выбрать произвольные постоянные, а также использовать выражения (1.4) и (1.7), то их можно привести к рассматриваемому здесь виду. При  $b_k^{(2)} = c_k^{(2)} = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ) из (1.10) — (1.12) получим уравнения канонического преобразования и канонические уравнения А. И. Лурье.

**2. Сечения пространств параметров 1-го, 2-го и 3-го рода.** Числителями выражений (1.12) для коэффициентов  $\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}$  канонической системы (1.11) служат величины, получаемые при подстановке корней  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) уравнения  $D(p) = 0$  в полиномы

$$\Delta^{(1)}(p) = \sum_{k=1}^n c_k^{(1)} [N_k^{(1)}(p) + N_k^{(2)}(p)]; \quad (2.1)$$

$$\Delta^{(2)}(p) = \sum_{k=1}^n c_k^{(2)} [N_k^{(1)}(p) + N_k^{(2)}(p)]. \quad (2.2)$$

Согласно (1.2), полиномы (2.1) и (2.2) имеют соответственно степени  $m^{(1)} \leq n - 1$  и  $m^{(2)} \leq n - 1$ . Пусть степени этих полиномов максимальны, а их нули совпадают между собой и совпадают с  $n - 1$  из числа  $n$  простых корней уравнения

$$D(p) = 0. \quad (2.3)$$

Тогда в канонических уравнениях (1.11)  $2(n-1)$  из числа  $2n$  величин  $\gamma_i^{(1)}$  обращаются в нуль; обозначив в этом случае отличный от нуля коэффициент  $\gamma_s^{(1)}$  через  $\gamma_s^{(j)}$ , получаем каноническую систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \lambda_k x_k + u_\beta^{(1)}(\lambda_k) f_1(\sigma_1) + u_\beta^{(2)}(\lambda_k) f_2(\sigma_2) \quad (k = 1, \dots, n); \\ \sigma_1 &= \gamma_s^{(1)} x_s; \quad \sigma_2 = \gamma_s^{(2)} x_s, \end{aligned} \quad (2.4)$$

откуда для определения  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$  и  $x_s(t)$  имеем систему первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \lambda_s x_s + u_\beta^{(1)}(\lambda_s) f_1(\sigma_1) + u_\beta^{(2)}(\lambda_s) f_2(\sigma_2); \\ \sigma_1 &= \gamma_s^{(1)} x_s; \quad \sigma_2 = \gamma_s^{(2)} x_s. \end{aligned} \quad (2.5)$$

После определения  $\sigma_1(t)$  и  $\sigma_2(t)$  канонические уравнения (2.4) для остальных  $n - 1$  переменных  $x_i(t)$  могут рассматриваться уже как линейные неоднородные уравнения первого порядка.

Пусть какая-то часть коэффициентов линейной части системы (1.1) задана буквенно и служит параметрами. Соотношения между параметрами, для которых переменные  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  описываются дифференциальными уравнениями первого порядка, представляют собой уравнения сечения пространства параметров, которое будем называть сечением 1-го рода. Сечение 1-го рода, полученное при условии, что корень  $\lambda_s$  уравнения (2.3) не обращает в нуль полиномы (2.1) и (2.2), будем обозначать через  $G_1(s)$ . Заметим, что корень  $\lambda_s$  должен быть вещественным.

Необходимое условие существования хотя бы одного сечения 1-го рода в каком-либо подпространстве параметров системы (1.1) состоит в том,

чтобы степени полиномов (2.1) и (2.2) были равны  $n - 1$ . В силу (1.2) степень  $m^{(1)}$  полинома (2.1) будет равна  $n - 1$  тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n c_i^{(1)} (b_i^{(1)} + b_i^{(2)}) \neq 0, \quad (2.6)$$

а степень полинома (2.2) будет равна  $n - 1$  в том и только в том случае, если

$$\sum_{i=1}^n c_i^{(2)} (b_i^{(1)} + b_i^{(2)}) \neq 0. \quad (2.7)$$

Пусть теперь степень каждого из полиномов (2.1) и (2.2) не мénее  $n - 2$  и  $n - 2$  из числа  $n$  простых корней уравнения (2.3) являются одновременно нулями названных полиномов. Тогда  $2(n - 2)$  из числа  $2n$  величин  $\gamma_i^{(j)}$  обратятся в нуль; обозначив отличные от нуля величины  $\gamma_i^{(j)}$  через  $\gamma_s^{(j)}$  и  $\gamma_r^{(j)}$ , из канонической системы (1.11) для определения  $\sigma_1(t)$ ,  $\sigma_2(t)$ ,  $x_s(t)$  и  $x_r(t)$  будем иметь систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \lambda_s x_s + u_\beta^{(1)}(\lambda_s) f_1(\sigma_1) + u_\beta^{(2)}(\lambda_s) f_2(\sigma_2); \\ \dot{x}_r &= \lambda_r x_r + u_\beta^{(1)}(\lambda_r) f_1(\sigma_1) + u_\beta^{(2)}(\lambda_r) f_2(\sigma_2); \\ \sigma_1 &= \gamma_s^{(1)} x_s + \gamma_r^{(1)} x_r; \quad \sigma_2 = \gamma_s^{(2)} x_s + \gamma_r^{(2)} x_r. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Остальные канонические переменные, как и в предыдущем случае, будут определяться из неоднородных уравнений первого порядка.

Сечения пространства параметров системы (1.1), в условиях которых задача сводится указанным образом к исследованию систем уравнений для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  не выше второго порядка, будем называть сечениями 2-го рода. Сечение 2-го рода, образованное так, что корни  $\lambda_s$  и  $\lambda_r$ , уравнения (2.3) не являются нулями полиномов  $\Delta^{(1)}(p)$  и  $\Delta^{(2)}(p)$ , будем обозначать  $C_2^{(s, r)}$ . Заметим, что если  $\lambda_s$  и  $\lambda_r$  комплексные, то они обязательно должны быть сопряженными. Необходимое условие существования хотя бы одного сечения 2-го рода в выбранном (или заданном) пространстве параметров системы (1.1) состоит в том, чтобы степени  $m^{(1)}$  и  $m^{(2)}$  полиномов (2.1) и (2.2) были не ниже  $n - 2$ .

Аналогично, если  $n - 3$  корня уравнения (2.3) являются нулями полиномов (2.1) и (2.2), для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  получим систему третьего порядка, а соотношение между параметрами линейной части системы, приводящее к этому случаю, будем называть сечением 3-го рода.

**3. Построение сечений в совокупности пространств  $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$ .** Рассмотрим подробнее случай, когда в (1.1) параметрами являются коэффициенты  $c_k^{(1)}, c_k^{(2)} (k = 1, \dots, n)$ , а коэффициенты  $a_{k\alpha}, b_k^{(1)}, b_k^{(2)} (k, \alpha = 1, \dots, n)$  фиксированы.

Пусть  $C_n^{(1)}$  —  $n$ -мерное пространство параметров  $c_k^{(1)} (k = 1, \dots, n)$ , а  $C_n^{(2)}$  —  $n$ -мерное пространство параметров  $c_k^{(2)} (k = 1, \dots, n)$ . Пространство  $C_n^{(1)}$  (соответственно  $C_n^{(2)}$ ) можно рассматривать как  $n$ -мерное евклидово пространство, порожденное  $n$ -мерными векторами, составляющими которых в некотором ортонормальном базисе служат числа  $c_k^{(1)}$  (соответственно  $c_k^{(2)}$ ),

Построим сечения 1 и 2-го рода в совокупности пространств  $C_n^{(1)}$  и  $C_n^{(2)}$ . Для этого напишем следующие две линейные неоднородные системы с неизвестными  $c_k^{(1)}, c_k^{(2)} (k = 1, \dots, n)$ :

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(1)} [N_k^{(1)}(\lambda_i) + N_k^{(2)}(\lambda_i)] = A_i^{(1)} \quad (i = 1, \dots, n); \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(2)} [N_k^{(1)}(\lambda_i) + N_k^{(2)}(\lambda_i)] = A_i^{(2)} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.2)$$

Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных системы (3.1) или (3.2), имеет определитель, пропорциональный определителю матрицы преобразования (1.10). Так как последнее в рассматриваемом случае является неособым, то указанный определитель отличен от нуля. Поэтому системы (3.1) и (3.2) совместны и имеют определенные решения, при любых числах  $A_i^{(1)}$  и  $A_i^{(2)} (i = 1, \dots, n)$ . Если хотя бы одно из чисел  $A_i^{(1)} (i = 1, \dots, n)$  и хотя бы одно из чисел  $A_i^{(2)} (i = 1, \dots, n)$  отличны от нуля, то решения систем (3.1), (3.2) будут также отличны от нуля. Если корни  $\lambda_i, \lambda_{i+1}$  в (3.1) или в (3.2) комплексные, то они обязательно сопряженные; в таком случае и постоянные  $A_i^{(1)}, A_{i+1}^{(1)}$  либо  $A_i^{(2)}, A_{i+1}^{(2)}$  полагаем комплексными сопряженными, и поэтому решения систем (3.1), (3.2) будут всегда вещественными.

Пусть при вещественном  $\lambda_s$

$$A_i^{(1)} = A_i^{(2)} = 0 \quad (i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n), \quad (3.3)$$

а  $A_s^{(1)}$  и  $A_s^{(2)}$  — произвольные вещественные постоянные. При названных условиях системы (3.1), (3.2) определяют сечение 1-го рода  $G_1^{(s)}$ , так как в этом случае  $\gamma_i^{(1)} = \gamma_i^{(2)} = 0$  для  $i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$ ,  $\gamma_s^{(1)} \neq 0$ ,  $\gamma_s^{(2)} \neq 0$ .

Заметим, что если значения  $c_k^{(1)} = c_k^*, c_k^{(2)} = c_k^{**} (k = 1, \dots, n)$  определены как решения систем (3.1), (3.2) при условии (3.3), то они обращают эти системы в тождество; поэтому в рассматриваемом случае  $n-1$  корней уравнения (2.3) (кроме  $\lambda_s$ ) будут одновременно служить корнями уравнений.

$$\Delta^{(1)}(p, c_1^*, \dots, c_n^*) = 0, \quad \Delta^{(2)}(p, c_1^{**}, \dots, c_n^{**}) = 0.$$

Рассмотрим геометрический смысл сечения  $G_1^{(s)}$  в пространствах  $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$ . Каждая из систем (3.1), (3.2) при условии (3.3) и произвольных  $A_s^{(1)}, A_s^{(2)}$  может быть заменена эквивалентной однородной системой, образуемой вычеркиванием  $s$ -го уравнения\*. Тогда сечение  $G_1^{(s)}$  будет определяться системами

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(1)} [N_k^{(1)}(\lambda_i) + N_k^{(2)}(\lambda_i)] = 0 \quad (i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n); \quad (3.4)$$

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(2)} [N_k^{(1)}(\lambda_i) + N_k^{(2)}(\lambda_i)] = 0 \quad (i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n). \quad (3.5)$$

\* Это следует из доказанной автором теоремы. общее решение однородной системы  $n-k$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными и рангом матрицы коэффициентов  $n-k$  совпадает с решением неоднородной системы  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными и рангом матрицы коэффициентов  $n$ , если эта последняя система содержит в себе указанную однородную систему, а в остальных ее уравнениях свободные члены суть произвольные постоянные,

Совокупность решений системы (3.4) (или (3.5)) образует подпространство размерности I в  $n$ -мерном пространстве, изоморфном пространству  $C_n^{(1)}$  (или  $C_n^{(2)}$ ). Следовательно, сечение  $G_1^{(s)}$  в пространствах  $C_n^{(1)}$  и  $C_n^{(2)}$  системы (1.1) представляет два подпространства размерности I — одно в пространстве  $C_n^{(1)}$ , другое в пространстве  $C_n^{(2)}$ .

Полагая  $\lambda_s$  любым из  $s$  вещественных корней уравнения (2.3), получим  $N_1 = s$  различных сечений 1-го рода в рассматриваемой совокупности пространств параметров системы (1.1). Для каждого из этих  $N_1$  сечений решения  $c_k^{(1)} = c_k^*$ ,  $c_k^{(2)} = c_k^{**}$  систем (3.1), (3.2) при условии (3.3) будут связаны соотношениями

$$A_s^{(2)} c_k^* = A_s^{(1)} c_k^{**} \quad (k = 1, \dots, n),$$

откуда с учетом (1.12) имеем

$$A_s^{(2)} \gamma_s^{(1)} = A_s^{(1)} \gamma_s^{(2)}. \quad (3.6)$$

Последнее равенство позволяет получить из системы (2.5) уравнения для  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , зависящие от двух произвольно выбираемых параметров  $A_s^{(2)}/A_s^{(1)}$ , и  $\gamma_s^{(1)}$ . В плоскости этих двух параметров либо в плоскости эквивалентной им какой-либо пары параметров  $A_s^{(1)}$  и  $A_s^{(2)}$ ,  $\gamma_s^{(1)}$  и  $\gamma_s^{(2)}$ ,  $c_p^{(1)}$  и  $c_q^{(2)}$  могут быть построены (в результате исследования задачи) соответствующие бифуркационные кривые. Однако в условиях рассматриваемого сечения через эту пару параметров будут определяться (по уравнениям сечения  $G_1^{(s)}$ ) остальные параметры  $c_i^{(1)}$ ,  $c_i^{(2)}$ .

Пусть теперь в (3.1), (3.2)

$$A_i^{(1)} = A_i^{(2)} = 0 \quad (i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, r-1, r+1, \dots, n), \quad (3.7)$$

$A_s^{(1)}$ ,  $A_r^{(1)}$ ,  $A_s^{(2)}$ ,  $A_r^{(2)}$  — произвольные вещественные или комплексные сопряженные (для комплексных  $\lambda_s$  и  $\lambda_r$ ) постоянные. Тогда системы (3.1), (3.2) определяют в пространствах  $C_n^{(1)}$ ,  $C_n^{(2)}$  сечение 2-го рода  $G_2^{(s, r)}$ , так как в рассматриваемом случае в канонической системе (1.11), (1.12)  $\gamma_i^{(1)} = \gamma_i^{(2)} = 0$  при  $i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, r-1, r+1, \dots, n$ ,  $\gamma_s^{(1)} \neq 0$ ,  $\gamma_s^{(1)} \neq 0$ ,  $\gamma_s^{(2)} \neq 0$ ,  $\gamma_r^{(2)} \neq 0$ . При этом  $n-2$  корня уравнения (2.3) будут нулями полиномов (2.1), (2.2). В данном случае системы (3.1), (3.2) с учетом (3.7) могут быть заменены (см. сноску на стр. 583) эквивалентными системами

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(1)} [N_k^{(1)}(\lambda_i) + N_k^{(2)}(\lambda_i)] = 0 \quad (i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, r-1, r+1, \dots, n); \quad (3.8)$$

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(2)} [N_k^{(1)}(\lambda_i) + N_k^{(2)}(\lambda_i)] = 0 \quad (i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, r-1, r+1, \dots, n), \quad (3.9)$$

откуда следует, что сечение  $G_2^{(s, r)}$  в данном случае представляет два подпространства размерности 2 (одно — в пространстве  $C_n^{(1)}$ , другое — в пространстве  $C_n^{(2)}$ ).

Полагая корни  $\lambda_s$ ,  $\lambda_r$  любой парой из  $q/2$  пар сопряженных комплексных корней или любыми вещественными корнями уравнения (2.3), в пространствах  $C_n^{(1)}$ ,  $C_n^{(2)}$  системы (1.1) получим  $N_2 = 0,5[s(s-1) + q]$  различных сечений 2-го рода  $G_2^{(s, r)}$ .

В рассматриваемом случае в условиях сечения  $G_2^{(s, r)}$  каноническая система в силу (3.1), (3.2), (3.7) будет зависеть уже не от  $2n$ , а только от четырех параметров  $A_s^{(1)}, A_r^{(1)}, A_s^{(2)}, A_r^{(2)}$  либо от эквивалентных им каких-либо параметров  $c_p^{(1)}, c_q^{(1)}, c_t^{(2)}, c_i^{(2)}$ , которые могут быть выбраны за свободные неизвестные при решении систем (3.8), (3.9). В пространстве указанных четырех параметров и будут построены в результате исследования задачи соответствующие бифуркационные поверхности; при этом остальные параметры будут определяться через эти четыре параметра по уравнениям изучаемого сечения.

Наконец, в (3.1) и (3.2) для вещественных  $\lambda_s$  и  $\lambda_r$  можно положить

$$A_i^{(1)} = 0 \text{ при } i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n, \quad (3.10)$$

$$A_i^{(2)} = 0 \text{ при } i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, n, r \neq s,$$

считая  $A_s^{(1)}$  и  $A_s^{(2)}$  вещественными произвольными постоянными. В этом случае для определения  $\sigma_1(t)$  и  $\sigma_2(t)$  опять имеем систему 2-го порядка, которая получается из (2.8) при  $\gamma_r^{(1)} = 0, \gamma_s^{(2)} = 0$ , т. е. приходим к рассмотрению сечения 2-го рода.

Покажем, однако, что образуемые таким путем сечения пространств параметров  $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$  содержатся в уже построенных выше сечениях 2-го рода  $G_2^{(s, r)}$ , а не представляют новых геометрических образов. С учетом (3.10) и при произвольных  $A_s^{(1)}, A_s^{(2)}$  системы (3.1), (3.2) эквивалентны (см. сноска на стр. 583) системам

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(1)} [N_k^{(1)}(\lambda_i) + N_k^{(2)}(\lambda_i)] = 0 \quad (i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n); \quad (3.11)$$

$$\sum_{k=1}^n c_k^{(2)} [N_k^{(1)}(\lambda_i) + N_k^{(2)}(\lambda_i)] = 0 \quad (i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, n). \quad (3.12)$$

Так как в данном случае  $\lambda_s$  и  $\lambda_r$  вещественны, то  $s \geq 2$ , поэтому существует сечение  $G_2^{(s, r)}$  с уравнениями (3.8), (3.9). Совокупность решений системы (3.11) образует подпространство  $L_1$  размерности 1, ортогонально дополнительное к подпространству  $L_{n-1}$ , являющемуся линейной оболочкой векторов

$$\alpha_i [N_1^{(1)}(\lambda_i) + N_1^{(2)}(\lambda_i); N_2^{(1)}(\lambda_i) + N_2^{(2)}(\lambda_i); \dots; N_n^{(1)}(\lambda_i) + N_n^{(2)}(\lambda_i)] \quad (3.13)$$

$$(i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n).$$

Совокупность решений системы (3.8) составляет подпространство  $L_2$  размерности 2, ортогонально дополнительное к подпространству  $L_{n-2}$  размерности  $n-2$ , порождаемому системой векторов (3.13), если из нее вычеркнуть вектор  $\alpha_r$ . Так как  $L_{n-2} \subset L_{n-1}$ , то согласно принципу двойственности [5]  $L_1 \subset L_2$ . Точно так же доказывается, что пространство решений системы (3.12) содержится в пространстве решений системы (3.9).

Аналогичным образом в пространствах  $C_n^{(1)}, C_n^{(2)}$  можно построить сечения 3-го рода. Сечения  $k$ -го рода ( $k = 1, 2, 3$ ) можно построить также и в других пространствах параметров системы (1.1). Заметим, что содержание разделов 2 и 3 остается справедливым в частном случае  $b_k^{(2)} = c_k^{(2)} = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

**4. Заключение.** Чтобы яснее представить смысл и значение построенных выше сечений пространств параметров, рассмотрим эти сечения с различных точек зрения.

С точки зрения теории структурных схем [6] эти сечения выглядят следующим образом. На входы суммирующих устройств, заданных двумя последними уравнениями системы (1.1), поступают сигналы  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Эти сигналы можно разложить на канонические составляющие  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ); тогда в условиях сечения  $k$ -го рода ( $k = 1, 2, 3$ ) канонические составляющие, принадлежащие различным сигналам  $\eta_i$ , при их сложении в данном суммирующем устройстве взаимно сокращаются, за исключением  $k$  канонических составляющих. Суммирующее устройство превращается, таким образом, в точный фильтр, пропускающий лишь определенные канонические составляющие. Этих составляющих достаточно, чтобы управляющие сигналы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , подаваемые на входы объекта, возбуждали в нем колебания на всех его собственных частотах, тогда на входы суммирующих устройств непрерывно будут поступать все канонические составляющие.

С точки зрения теории автономного регулирования [7, 8] можно сказать, что в условиях сечения  $k$ -го рода ( $k = 1, 2, 3$ ) переменные  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , входящие в уравнения (1.1) нелинейно, описываются автономными, независимыми системами уравнений  $k$ -го порядка, но переменные  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) изменяются неавтономно, так что порядок исходной системы (1.1) остается равным  $n$ . Однако, поскольку переменные  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) входят в уравнения (1.1) линейно, линейная часть системы обычным путем может быть преобразована к каноническому виду, при котором ее матрица диагональна.

С точки зрения теории наблюдаемости динамических систем [9] система (1.1) в условиях сечений  $k$ -го рода ( $k = 1, 2, 3$ ) не полностью наблюдаема по выходам  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Однако, наблюдая за динамическим поведением системы по изменению  $n$  переменных  $x_i$ , мы не упустим ни одной составляющей  $\eta_i$   $n$ -мерного вектора состояния системы (1.1), если каноническое преобразование — неособое. Можно сказать, что неособенность канонического преобразования является условием полной наблюдаемости системы (1.1) по  $n$  выходам  $x_i$ .

Чтобы пояснить значение рассматриваемых сечений с позиций метода точечных отображений [10, 11], обратимся к простейшему случаю, когда система (1.1) кусочно-линейна, и рассмотрим эту систему при  $b_i^{(2)} = c_i^{(2)} = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в условиях сечения 1-го рода. Уравнения (2.4) в данном случае после введения обозначений  $f_1(\sigma_1) = f(\sigma)$ ,  $\gamma_s^{(1)} = \gamma_s$  запишутся так:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + f(\sigma) \quad (i = 1, \dots, n), \quad \sigma = \gamma_s x_s, \quad (4.1)$$

где

$$f(\sigma) = h_j + k_j \sigma \text{ при } \sigma_j^* \leq \sigma \leq \sigma_{j+1}^* \quad (j = 1, \dots, l), \quad (4.2)$$

$h_j$ ,  $k_j$ ,  $\sigma_j^*$ ,  $\sigma_{j+1}^*$  — вещественные постоянные. Из (4.1), (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= (\lambda_s + k_j \gamma_s) x_s + h_j, \\ \dot{x}_l &= \lambda_l x_l + h_j + k_j \gamma_s x_s(t) \\ (i &= 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.3)$$

при  $\sigma_j^*/\gamma_s \leq x_s \leq \sigma_{j+1}^*/\gamma_s$  ( $j = 1, \dots, l$ ).

Как видим, смысл сечения  $G^{(s)}$  пространства параметров рассматриваемой кусочно-линейной системы состоит в том, что в условиях этого сечения все «плоскости переключения» в координатах  $x_i (i = 1, \dots, n)$  ориентируются ортогонально оси  $x_s$ . Поэтому уравнение (4.3) для  $x_s$  позволит найти время  $\tau_j$ , пробега изображающей точки от одной плоскости переключения до другой как постоянную величину, не зависящую от начального положения этой точки на исходной плоскости переключения. В связи с этим в интегралах уравнений (4.3) для  $x_i$  при  $i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$  (рассматриваемых как неоднородные уравнения с уже найденной функцией  $x_s(t)$ ) после подстановки  $t = \tau_j$ , выражения  $\exp(\lambda_i \tau_j)$ ,  $\cos(\operatorname{Im} \lambda_i \tau_j)$  и т. п. будут постоянными коэффициентами, не зависящими от начальных условий. Поэтому указанные интегралы дадут линейное точечное отображение одной плоскости переключения в другую. Соответствующие упрощения претерпевают уравнения точечных отображений и в условиях сечений 2-го рода. Эти обстоятельства позволяют в условиях данных сечений рассматривать  $n$ -мерные фазовые пространства кусочно-линейных систем аналитически, нелокально и доводить исследования до наглядного результата. Аналогичные упрощения (в «уравнениях периодов») возникают также при исследовании рассматриваемых систем методом припасовывания или методом полных рядов Фурье [1].

Наконец, с точки зрения теории абсолютной устойчивости регулируемых систем [12] значение рассмотренных сечений можно пояснить так. Пусть в (1.1)  $b_i^{(2)} = c_i^{(2)} = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и функция  $f_1(\sigma_i) \equiv f(\sigma)$  задана с точностью до принадлежности к определенному классу функций, например, удовлетворяет условиям  $\operatorname{cf}(\sigma) > 0$ ,  $f(0) = 0$ . В пространстве  $C_n$  параметров  $c_i^{(1)} \equiv c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) сечения  $k$ -го рода ( $k = 1, 2, 3$ ) суть семейства плоскостей размерности  $k$ , проходящих через точку  $c_i = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), в которой рассматриваемая система превращается в линейную. В частности, в проблеме Лурье [1] при  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) эта точка принадлежит области устойчивости. Но тогда каждая из плоскостей, представляющих сечение  $k$ -го рода, пересечет границу области устойчивости в пространстве  $C_n$ . Эти пересечения могут быть найдены точно, и тем самым определяется часть неизвестной до сих пор границы области в пространстве параметров, соответствующей достаточным и необходимым условиям абсолютной устойчивости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. Б. Р. Сергиевский, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 4, 735 (1961).
3. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Гостехиздат, М., 1955.
4. В. А. Троицкий, ПММ, 17, 49 (1953).
5. И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
6. Б. Н. Петров, Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1146 (1945).
7. И. Н. Вознесенский, Автоматика и телемеханика, № 4—5, 65 (1933).
8. H. S. Tsien, Engineering Cybernetics, Mc Grow—Hill Book Company, New York 1954.
9. Р. Е. Калман, Труды I конгресса ИФАК, 2, изд. АН СССР, М., 1961.
10. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958).
11. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 95; № 5—6, 146 (1958).
12. М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, изд. АН СССР, М., 1963.

## ON STRICT ANALYSIS OF SYSTEMS WITH TWO NONLINEAR ELEMENTS

*R. A. Nelepin*

For analytical investigation of some nonlinear automatic systems the method is proposed based on consideration of a set of sections in the space of parameters. In these sections by using the special linear transformation, the initial n-order system transforms into number of equations of the first and second orders, connected with each other so that they may successively be integrated if some of them are considered to be nonhomogeneous. By this way the complex problem of nonlinear n-order system analysis is reduced to the simpler and well studied problems of the 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> orders.

УДК 62—506

## ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ С САМОНАСТРОЙКОЙ

К. Г. Кирьянов

Методом точечных преобразований рассматривается поведение системы с самонастройкой при периодических внешних воздействиях. Выясняются условия устойчивости системы в малом. Рассматривается общий случай обработки системой входных сигналов и содержимого памяти. Приводятся результаты проверки работы системы на цифровой вычислительной машине.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ

В работе рассматривается система, поведение которой описывается  $N+2$ -мерным точечным преобразованием  $T_{N+2}$  величин  $y_j(t_{k-1})$ ,  $\varepsilon(t_{k-1})$ ,  $t_{k-1}$  в величины  $y_j(t_k)$ ,  $\varepsilon(t_k)$ ,  $t_k$  следующего вида:

$$y_j(t_k) = ps_j(t_k) + qy_j(t_{k-1})e^{-\alpha_j(t_k - t_{k-1})} \quad (j = 1, \dots, N), \quad (1)$$

$$T_{N+2} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(t_k) = \rho\varepsilon(t_{k-1})e^{-\delta(t_k - t_{k-1})} + \mu, \\ K \sum_{j=1}^N s_j(t_k) y_j(t_{k-1}) e^{-\alpha_j(t_k - t_{k-1})} - \varepsilon(t_{k-1}) e^{-\delta(t_k - t_{k-1})} = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$K \sum_{j=1}^N s_j(t_k) y_j(t_{k-1}) e^{-\alpha_j(t_k - t_{k-1})} - \varepsilon(t_{k-1}) e^{-\delta(t_k - t_{k-1})} = 0, \quad (3)$$

где  $p$ ,  $q$ ,  $\rho$ ,  $K$ ,  $\mu$ ,  $\alpha_j$ ,  $\delta$  — параметры системы, а  $s_j(t)$  — внешние воздействия. Рассматриваемое точечное преобразование описывает, например, поведение системы, изображенной на рис. 1, при следующих идеализациях\*:

1) система (см. обозначения на рис. 1) содержит  $N$  подсистем каждая с  $1/2$  степенью свободы — емкости «памяти»  $\gamma C_j$ , разряжающиеся через сопротивления  $R_j$  ( $\gamma C_j R_j$  обозначено через  $1/\alpha_j$ );

2)  $N+1$ -я подсистема, также с  $1/2$  степенью свободы, содержится в самом пороговом детекторе, как некоторая ее часть, и представляет собой емкость, разряжающуюся через сопротивление (постоянная времени  $1/\delta$  этой цепи характеризует время запоминания порогового напряжения  $\varepsilon(t)$ );

3) работа умножителей  $M_j$  характеризуется соотношениями

$$r_j(t) = Ks_j(t)y_j(t) \quad (j = 1, \dots, N);$$

4) сумматор характеризуется соотношением  $\sigma(t) = \sum_{j=1}^N r_j(t)$ ;

5) момент  $t_k$   $k$ -го срабатывания (переключения  $\Pi_j$ ) порогового

\* Частный случай такой системы исследовался экспериментально в [1].

детектора определяется условием переключения  $\sigma(t_k - 0) = \varepsilon(t_k - 0)$ ; между срабатываниями порогового детектора всегда выполняется соотношение  $\sigma(t) < \varepsilon(t)$ ;

б) срабатывание порогового детектора вызывает: а) мгновенное изменение напряжения  $y_j(t)$  на емкостях памяти при  $t=t_k$  путем подключения на достаточно малое время емкостей с напряжениями  $s_j(t)$  к емкости памяти  $\gamma C_j$  (пренебрегаем индуктивностью и сопротивлением соответствующих цепей); б) мгновенное изменение напряжения

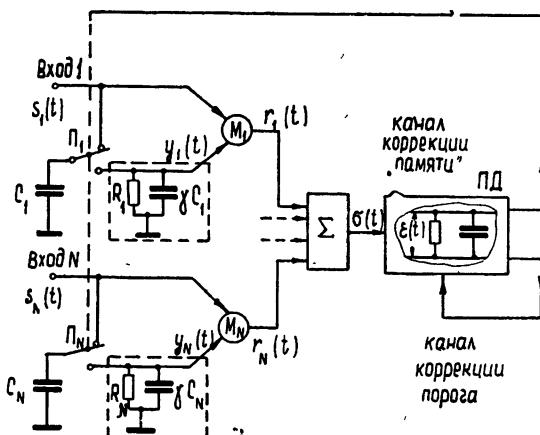


Рис. 1. Блок-схемы системы:  
 $M_i$  — умножители,  $P_j$  — переключатели,  $\gamma C_j$  — емкости „памяти“,  $\Sigma$  — сумматор, ПД — пороговый детектор

$\varepsilon(t)$  путем изменения в момент переключения  $t = t_k$  имеющегося до переключения напряжения в  $\mu$  раз и прибавления к полученному результату величины  $\mu$ .

Работа всей системы заключается в том, что в результате воздействия на входы системы периодических сигналов после некоторого числа срабатываний порогового детектора в системе может установиться некоторое равновесие при определенном среднем уровне напряжения порогового детектора  $\varepsilon(t)$ , соответствующего степени сходства входных сигналов  $s_j(t)$  в определенной фазе  $\tau$  и сигналов  $y_j(t)$ , образовавшихся в емкостях памяти в процессе работы системы путем самокоррекции начальных значений  $y_j^0$  и  $\varepsilon^0$ .

Из предположений 1, 5, 6а и условия сохранения суммарного заряда емкостей  $C_j$  и  $\gamma C_j$  (при их соединении) получим

$$y_j(t_k + 0) = ps_j(t_k) + qy_j(t_k - 0) \quad (j = 1, \dots, N),$$

где  $p = 1 - q = (1 + \gamma)^{-1}$ . Из предположений 2, 5 и 6б имеем  $\varepsilon(t_k + 0) = p\varepsilon(t_k - 0) + \mu$ . Раскрывая очевидным образом выражения для  $y_j(t_k + 0)$ ,  $\varepsilon(t_k + 0)$  и  $\sigma(t_k - 0)$ , получим систему уравнений  $T_{N+2}$ , где для упрощения обозначений под  $\varepsilon(t_k)$ ,  $y_j(t_k)$ ,  $y_j(t_{k-1})$  и т. д. понимаются величины  $\varepsilon(t_k + 0)$ ,  $y_j(t_k + 0)$ ,  $y_j(t_{k-1} + 0)$ .

Приведенная форма записи точечного преобразования  $T_{N+2}$  удобна тем, что каждое уравнение описывает работу самостоятельной части системы. Однако в  $T_{N+2}$  одна переменная точечного преобразования является излишней. Исключив  $\varepsilon(t_k)$ , получим точечное преобразование  $(N + 1)$ -го порядка  $T_{N+1}$ :

$$T_{N+1} \left\{ \begin{array}{l} y_j(t_k) = ps_j(t_k) + qy_j(t_{k-1})e^{-\alpha_j(t_k-t_{k-1})} \quad (j=1, \dots, N) \\ \frac{q}{\rho} \sum_{j=1}^N s_j(t_k)y_j(t_{k-1})e^{(\delta-\alpha_j)(t_k-t_{k-1})} - \sum_{j=1}^N s_j(t_{k-1})y_j(t_{k-1}) + \\ + p \sum_{j=1}^N s_j^2(t_{k-1}) - \mu q/\rho K = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться как точечным преобразованием  $T_{N+1}$ , так и  $T_{N+2}$ .

При периодическом внешнем воздействии работу системы следует характеризовать так же, как и в релейных системах [2], матрицей периодического режима  $\Gamma_{N+1,m}$ :

$$\Gamma_{N+1,m} = \begin{vmatrix} \bar{\tau}_1 & \bar{\tau}_2 & \dots & \bar{\tau}_m \\ \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} & \dots & \bar{y}_{1m} \\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22} & \dots & \bar{y}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{y}_{N1} & \bar{y}_{N2} & \dots & \bar{y}_{Nm} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где  $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots, \bar{\tau}_m$  — повторяющаяся последовательность времен между срабатываниями порогового детектора, а  $\bar{y}_{ji}$  ( $j=1, \dots, N$ ;  $i=1, \dots, m$ ) — значения напряжений на емкостях памяти системы в моменты срабатывания, соответствующие началу или концу промежутка времени  $\bar{\tau}_i$ . Для неавтономной системы должно выполняться соотношение

$$\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 + \dots + \bar{\tau}_m = nT, \quad (6)$$

где  $T$  — период внешней силы, а  $n = 1, 2, \dots$

Предположим, что внешние воздействия  $s_j(t)$  ( $j=1, \dots, N$ ) — периодические функции с периодом  $T$ . Далее рассматривается периодический режим  $\Gamma_{N+1,1}$ , характеризуемый, в силу (6), матрицей-столбцом

$$\Gamma_{N+1,1} = \begin{vmatrix} nT \\ \bar{y}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{y}_N \end{vmatrix} \quad (7)$$

для системы с равными значениями параметров  $\alpha_j$  ( $\alpha_j = \alpha$ ). Заметим, что для существования такого периодического режима, как это следует из вида преобразования  $T_{N+2}$ , а также из условия  $t_k > t_{k-1}$ , необходимо выполнение неравенства  $\alpha < \delta$ .

В следующих разделах находится периодическое движение типа  $\Gamma_{N+1,1}$  для любых периодических  $s_j(t)$  и выясняются условия устойчивости периодического режима в малом.

## 2. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Для нахождения неподвижных точек  $\bar{y}_j$ ,  $\bar{\epsilon}$  преобразования удобнее использовать точечное преобразование  $T_{N+2}$ . Полагая  $t_k = knT + \tau$ , где  $\tau$  — начальная фаза, из (1), (2) и (3) соответственно получим\*

$$\bar{y}_j = \frac{p \bar{s}_j(\tau)}{1 - q e^{-\alpha n T}} ; \quad (8)$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\mu}{1 - \rho e^{-\delta n T}} ; \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau) = \frac{\mu}{Kp} \frac{e^{\alpha n T} - q}{e^{\delta n T} - \rho} = \Omega(nT). \quad (10)$$

Выражение (10), полученное из условия переключения, является уравнением для определения  $\tau$  по параметрам системы и периоду внешнего воздействия. Рассмотрим выражение (10) более подробно. Его левая часть при изменении  $\tau$  может меняться так, что при  $0 \leq \tau \leq T$

$$\underline{\Sigma} \leq \sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau) \leq \bar{\Sigma}, \quad (11)$$

где  $\underline{\Sigma}$  и  $\bar{\Sigma}$  — соответственно нижняя и верхняя грани этой суммы. Поведение правой части  $\Omega(nT)$  выражения (10) при имеющих физический смысл значениях  $\Omega$  и  $nT$  показано на рис. 2. Из (10) и (11) следует (см. рис. 2), что может существовать 0,1 или 2 интервала допустимых значений  $nT$ :

$$\underline{T}_i \leq nT \leq \bar{T}_i \quad (i = 1, 2). \quad (12)$$

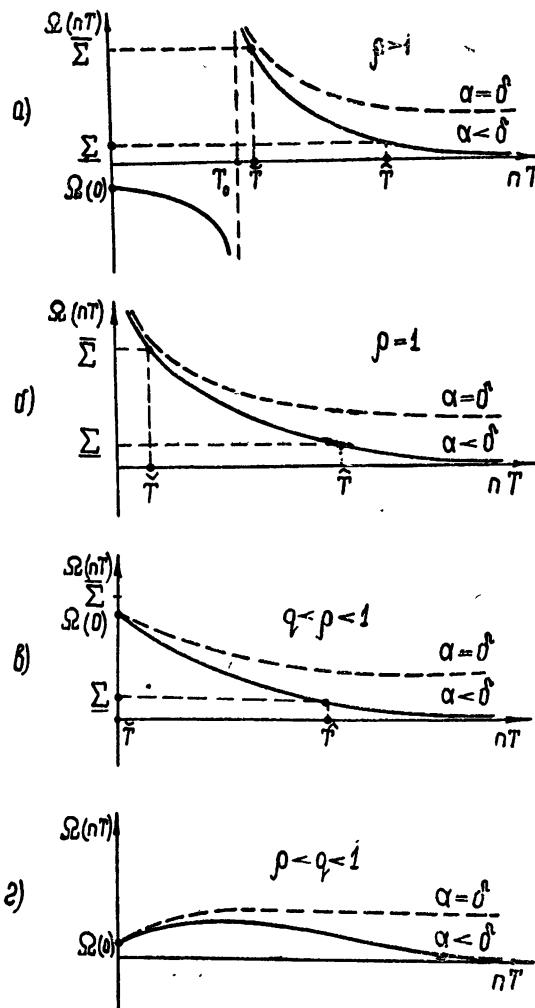
Только при выполнении этого условия существуют значения  $\tau$ , удовлетворяющие условию (10).

Необходимые условия существования неподвижной точки в диапазоне периодов входного сигнала определяются соотношением (12). В периодическом режиме работы системы, характеризуемом  $i = 1$  и  $n = 1$ ,  $\underline{T}$  и  $\bar{T}$  определяют верхнюю и нижнюю границы диапазона периодов входных сигналов  $s_j(t)$ . Из (12) видно, что  $\bar{T}$  определяет границу диапазона при любом  $n$ , в том числе и ту, которая реализуется при  $n = 1$ . Однако нижняя граница диапазона периодов входного сигнала равна  $\bar{T}$  только при  $n = 1$ . При работе системы с  $n > 1$  условие (12) будет выполнено и тогда, когда период входного сигнала  $T < \bar{T}$ , т. е. когда  $T$  лежит вне интервала  $(\underline{T}, \bar{T})$ . Для того, чтобы удовлетворить условию (12) для всех периодов входного сигнала, лежащих в интервале  $(0; \bar{T})$ , как это легко видеть, необходимо выполнение условия  $\bar{T}/\underline{T} \geq 2$ . Если это условие не

\* Можно предполагать, что в [1] речь идет о системе с  $\mu = 0$  и  $\rho > 1$ , т. е., как следует из (9) и (10), эта система в режиме  $T_{N+1,1}$  при  $s_j(t) \neq 0$  ( $j = 1, \dots, N$ ) не имеет состояний равновесия.

выполняется, то найдется хотя бы один интервал  $(T_1, T_2)$  с  $T_1, T_2 < \hat{T}$ , если  $T \in (T_1, T_2)$ , когда условие (12) не выполняется ни при каком  $n$ .

Следует заметить, что величины  $\hat{T}$  и  $\hat{\Gamma}$  зависят не только от параметров системы и периода сигнала, но и от амплитуды входного сигна-



$$\Omega(0) = \frac{\mu}{K(1-\rho)}, \quad \frac{\Omega(\infty)}{\alpha} = \frac{\mu}{K\rho}, \quad T_o = \frac{1}{\delta} \ln \rho.$$

Рис. 2.

ла. В частном случае, когда  $\rho < 1$ ,  $\bar{\Sigma} > \Omega(0)$ ,  $\underline{\Sigma} = 0$ , получаем  $\hat{T} = 0$ .  $\hat{\Gamma} = \infty$ , т. е. с такими параметрами самой системы и параметрами сигнала существует неподвижная точка преобразования для каждого значения  $T$  при любом  $n$ .

Периодические движения в случае постоянных внешних воздействий  $s_j$  нужно также искать в форме (5). В данном случае для режима  $\Gamma_{N+1,1}$  соотношения (8), (9) и (10) примут вид

$$\bar{y}_j = \frac{ps_j}{1 - qe^{-\alpha T}}; \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\mu}{1 - pe^{-\delta T}}; \quad \sum_{j=1}^N s_j^2 = \frac{\mu}{Kp} \frac{e^{\alpha T} - q}{e^{\delta T} - p} = \Omega(T), \quad (13)$$

где  $T$  — в данном случае не период внешней силы, а период установившихся колебаний в системе. Последнее уравнение в (13), в отличие от (10), служит теперь для определения периода установившихся колебаний, а не  $\tau$ .

Точность работы системы можно характеризовать величиной

$$\Delta_0 = \sum_{j=1}^N (\bar{s}_j(\tau) - \bar{y}_j)^2 / \sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau). \quad (14a)$$

Используя уравнение неподвижной точки (8), получим

$$\Delta_0 = \left( q \frac{1 - e^{-\alpha n T}}{1 - qe^{-\alpha n T}} \right)^2. \quad (15a)$$

Из (15a) ясно, что  $\Delta_0$  мало при малых  $nT$ . В этом случае

$$\Delta_0 \approx (q/p)^2 (\alpha n T)^2 = (\gamma \alpha n T)^2. \quad (15b)$$

Физически это означает, что напряжение на емкостях памяти будет близко к соответствующим напряжениям  $s_j(\tau)$  входного сигнала только при возможно более частом подзаряде емкостей памяти, что имеет место либо при периодическом режиме с малым  $n$ , либо при достаточно малых  $T$  (достаточно высоких частотах входного сигнала).

Вопрос о точности рассматриваемой системы может зависеть от назначения этой системы. Например, если система предназначена для фиксации формы некоторого сигнала  $s(t)$ , то следует брать  $s_j(t) = s(t - j\theta)$ , а величину  $\theta$  выбирать согласно теореме Котельникова о представлении функции своими значениями в «дискретные» моменты времени. Здесь точность работы естественно характеризовать величиной

$$\Delta_0 = \sum_{j=1}^N (A \bar{s}_j(\tau) - \bar{y}_j)^2 / \sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau). \quad (14b)$$

При  $A = p(1 - qe^{-\alpha n T})^{-1}$  получаем  $\Delta_0 = 0$ , что означает, что в «памяти» системы «отлагается» в уменьшенном масштабе точная копия входного сигнала.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Для определения условий устойчивости рассматриваемого режима работы системы найдем характеристическое уравнение системы, линеаризовав точечное преобразование. Точечное преобразование  $T_{N+1}^n$ , линеаризованное около неподвижной точки, определяемой соотношениями (8), (9) и (10), имеет вид

$$T_{N+1}^n \left| \begin{array}{c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{N+1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} dy_1(t_k) \\ dy_2(t_k) \\ \dots \\ dy_N(t_k) \\ dt_k \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} a & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & a & \dots & 0 & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & c_N \\ h_1 & h_2 & \dots & h_N & c_{N+1} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} dy_1(t_{k-1}) \\ dy_2(t_{k-1}) \\ \dots \\ dy_N(t_{k-1}) \\ dt_{k-1} \end{array} \right|, \quad (16)$$

где введены следующие обозначения:

$$a = qe^{-\alpha nT}; \quad f = \rho e^{-\delta nT};$$

$$c_j = \alpha a \bar{y}_j; \quad b_j = c_j - p \bar{s}_j(\tau); \quad h_j = (f - a) \bar{s}_j(\tau) \quad (j = 1, \dots, N);$$

$$b_{N+1} = a(\delta - \alpha) \sum_{j=1}^N \bar{s}_j(\tau) \bar{y}_j + a \sum_{j=1}^N \bar{s}'_j(\tau) \bar{y}_j; \quad (17)$$

$$c_{N+1} = a(\delta - \alpha) \sum_{j=1}^N \bar{s}_j(\tau) \bar{y}_j + f \sum_{j=1}^N \bar{s}'_j(\tau) \bar{y}_j - 2fp \sum_{j=1}^N \bar{s}'_j(\tau) \bar{s}_j(\tau) \quad \text{или}$$

$$c_{N+1} = a(\delta - \alpha) \sum_{j=1}^N \bar{s}_j(\tau) \bar{y}_j + af \sum_{j=1}^N \bar{s}'_j(\tau) \bar{y}_j - fp \sum_{j=1}^N \bar{s}'_j(\tau) \bar{s}_j(\tau).$$

Линеаризованное точечное преобразование (16) может быть представлено в стандартной форме, т. е. разрешено относительно приращений  $dy_j(t_k)$  и  $dt_k$ , если

$$b_{N+1} \neq 0. \quad (18a)$$

Используя (8) и (17), представим условие (18а) в форме

$$\delta - \alpha + R \neq 0, \quad (18b)$$

где введено обозначение

$$R = \left| \sum_{j=1}^N \bar{s}_j(\tau) \bar{s}'_j(\tau) \right| / \sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau) \quad (19)$$

и предполагается, что  $\sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau) \neq 0$ . Как увидим далее, в случае устойчивости системы условие (18а) выполняется автоматически.

Характеристический полином системы  $\chi(z)$  степени  $N + 1$  будет иметь вид

$$\chi(z) = \begin{vmatrix} z - a & 0 & \dots & 0 & b_1 z - c_1 \\ 0 & z - a & \dots & 0 & b_2 z - c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & z - a & b_N z - c_N \\ -h_1 & -h_2 & \dots & -h_N & b_{N+1} z - c_{N+1} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Раскрывая определитель, получим характеристическое уравнение

$$\chi_{N+1}(z) = (z - a)^{N-1} [(b_{N+1}z - c_{N+1})(z - a) + \sum_{j=1}^N h_j(b_j z - c_j)]. \quad (21)$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (21) имеет  $N - 1$  одинаковых корня  $z_j = a$  ( $j = 1, \dots, N - 1$ ). В силу соотношений (17) видим, что имеющих физический смысл параметров системы, входящих в  $a$ , все эти  $N - 1$  корня по модулю меньше единицы. Следовательно, устойчивость системы определяется двумя оставшимися корнями характеристи-

ческого уравнения  $\chi_{N+1}(z) = 0$ , которые должны быть по модулю меньше единицы и всегда находятся в явном виде из квадратного уравнения

$$\chi_2(z) = (b_{N+1}z - c_{N+1})(z - a) + \sum_{j=1}^N h_j(b_jz - c_j) = 0. \quad (22a)$$

Используя обозначения (17) и (19), представим уравнение (22a) после преобразований в более простой форме

$$\delta(z - 1)(z - a) - \alpha(z - 1)(z - f) + R(z - f)[z - (2a - 1)] = 0 \quad (22b)$$

или в обычной форме

$$\begin{aligned} a_2 z^2 + a_1 z + a_0 &= 0; \\ a_2 &= \delta - \alpha + R, \end{aligned} \quad (22b)$$

$$a_1 = \alpha f + \alpha - \delta a - \delta - fR - 2aR + R, \quad a_0 = \delta a - \alpha f - fR + 2Rfa.$$

Следует заметить, что характеристическое уравнение содержит только один параметр  $R$ , зависящий от внешних воздействий.

В случае постоянных  $s_j$  линеаризация точечного преобразования около неподвижной точки, определяемой соотношениями (13), приводит к тому же самому характеристическому полиному, если в (17) считать, что

$$\bar{s}_j(\tau) = \bar{s}_j; \quad a = qe^{-\alpha T}; \quad f = pe^{-\delta T} \quad (23)$$

( $T$  — период автоколебаний), а  $R$  положить равным нулю. В этом случае из (22b) два остальных корня характеристического уравнения находятся сразу:

$$z_1 = 1; \quad z_{N+1} = \frac{\delta a - \alpha f}{\delta - \alpha}. \quad (24)$$

При наличии одного корня характеристического уравнения на границе единичного круга для устойчивости автономной системы (в силу теоремы Андронова—Витта, перенесенной на точечные преобразования [3]) необходимо, чтобы все остальные корни характеристического уравнения лежали внутри единичного круга. При постоянных  $s_j(R = 0)$  система автономна. Следовательно, для устойчивости рассматриваемой системы в малом в этом случае необходимо только, чтобы

$$|z_{N+1}| < 1. \quad (25)$$

Таким образом, по уравнению (13) можно, зная  $\sum_{j=1}^N s_j^2$ , найти соответствующий период колебаний в системе, а по условию (25) проверить, являются ли колебания системы с этим периодом устойчивыми.

Из (23) и (24) имеем развернутое условие устойчивости (25):

$$-1 < \frac{\delta qe^{-\alpha T} - \alpha pe^{-\delta T}}{\delta - \alpha} < +1, \quad (26)$$

которое, в силу необходимого условия  $\alpha < \delta$  для существования периодического режима  $\Gamma_{N+1,1}$ , эквивалентно системе неравенств

$$\alpha(1 - pe^{-\delta T}) - \delta(1 - qe^{-\alpha T}) < 0; \quad (27a)$$

$$\alpha(1 + pe^{-\delta T}) - \delta(1 + qe^{-\alpha T}) < 0. \quad (27b)$$

Рассмотрим эти неравенства. Условие (27а) выполняется при любых  $T$ , где  $\Omega(T)$  имеет отрицательный наклон, так как это условие тождественно с условием  $\Omega'(T) < 0$ . Условие (27б) выполняется всегда при больших  $T$ . Для малых  $T$  нужно различать следующие случаи:

а)  $\rho > q$ . Как ясно из (27б), областью неустойчивых периодов будет  $(0, \bar{T})$ , где  $\bar{T}$  находится из уравнения  $\alpha(1 + \rho e^{-\delta T}) = \delta(1 + q e^{-\alpha T})$ .<sup>\*</sup> Условие  $\alpha(1 + \rho) < \delta(1 + q)$ , достаточное для отсутствия области неустойчивых периодов, определяемых неравенством (27б);

б)  $\rho < q$ . Условие (27б) выполняется при любых  $T$ .

Возвращаясь к случаю периодических  $s_j(t)$  и производя  $D$ -разбиение для уравнения (22в) в плоскости параметров  $a_1/a_2$  и  $a_0/a_2$  относительно единичного круга, нетрудно получить условия устойчивости в виде следующей системы неравенств:

$$a_2 + a_1 + a_0 > 0, \quad a_2 - a_0 > 0, \quad a_2 - a_1 + a_0 > 0. \quad (28)$$

В (28) предполагается, что  $a_2 \neq 0$ , что совпадает с принятым ранее условием (18а). Раскрывая неравенства (28) с помощью (17) и (22в), получим условия устойчивости в таком виде:

$$R(1 - \rho e^{-\delta n T})(1 - q e^{-\alpha n T}) > 0; \quad (29а)$$

$$[1 + \rho e^{-\delta n T}(1 - 2q e^{-\alpha n T})]R > \alpha(1 - \rho e^{-\delta n T}) - \delta(1 - q e^{-\alpha n T}); \quad (29б)$$

$$q e^{-\alpha n T}(1 + \rho e^{-\delta n T})R > \alpha(1 + \rho e^{-\delta n T}) - \delta(1 + q e^{-\alpha n T}). \quad (29в)$$

Из выражения (10) для  $\Omega(nT)$  видно, что первое неравенство выполняется всегда, если  $R > 0$  и  $\Omega(nT) > 0$ . Случай  $\Omega(nT) < 0$  (и одновременно  $R < 0$ ) не имеет физического смысла.

Так как правые части выражений (29б) и (29в) совпадают с выражениями (27а) и (27б), а коэффициенты при  $R$  в (29б) и (29в) при  $\rho < \frac{1}{2q - 1} = \rho^*$  положительны, то при  $\rho < \rho^*$  и при других параметрах, обеспечивающих устойчивость системы при постоянных внешних воздействиях, имеет место устойчивость системы и при периодических внешних воздействиях с периодом  $T_{авт}/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) при дополнительном условии

$$R > 0. \quad (30)$$

Здесь  $T_{авт}$  — период автоколебаний автономной системы, удовлетворяющий условию устойчивости (25).

#### 4. ОБОВЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ БОЛЕЕ ОБЩЕГО ЗАКОНА ОБРАБОТКИ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Полученные результаты для случая обработки входных сигналов  $s_j(t)$  и содержимого памяти  $y_j(t)$  по закону

$$\Phi(s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t); y_1(t), \dots, y_N(t)) = \sum_{j=1}^N s_j(t)y_j(t) \quad (31)$$

\* Так как при  $\rho > 1$   $\Omega(T)$  имеет участок  $(0, T_0)$ , где  $\Omega(T) < 0$ , целесообразно сравнить  $\bar{T}$  с  $T_0$ . Для этого следует проверить выполнение неравенства (27б) при  $T = T_0 = (1/\delta) \ln \rho$ . Имеем  $\alpha/\delta < \frac{1}{2}(1 + q e^{-\alpha/\delta} \ln \rho) (= \frac{1}{2}(1 + q/\rho)^{\alpha/\delta})$ . Отсюда получаем, что  $\alpha/\delta < \frac{1}{2}$  есть достаточное условие того, что при  $\rho > 1$   $\bar{T} < T_0$ .

можно распространить на общий случай обработки, полагая, что действительная функция обработки  $\Phi$  непрерывна в окрестностях значений аргументов, соответствующих неподвижным точкам преобразования, и не конкретизируя другие ее свойства.

Точечное преобразование  $T_{N+2}$ , описывающее динамическую систему в этом случае, очевидно, примет такой вид:

$$T_{N+2} \left\{ \begin{array}{l} y_j(t_k) = ps_j(t_k) + qy_j(t_{k-1})e^{-\alpha(t_k-t_{k-1})} \quad (j = 1, \dots, N) \\ \varepsilon(t_k) = \rho\varepsilon(t_{k-1})e^{-\delta(t_k-t_{k-1})} + \mu \\ K\Phi(s_1(t_k), \dots, s_N(t_k); y_1(t_{k-1})e^{-\alpha(t_k-t_{k-1})}, \dots, y_N(t_{k-1})e^{-\alpha(t_k-t_{k-1})}) - \\ \quad - \varepsilon(t_{k-1})e^{-\delta(t_k-t_{k-1})} = 0. \end{array} \right. \quad (32)$$

Соотношения для значений  $y_j$  и  $\varepsilon$  в неподвижной точке преобразования совпадают с рассмотренными ранее (8) и (9), а соотношение (10) теперь имеет вид

$$K\Phi(s_1(\tau), \dots, s_N(\tau); \bar{y}_1 e^{-\alpha n T}, \dots, \bar{y}_N e^{-\alpha n T}) = \frac{\mu e^{-\delta n T}}{1 - \rho e^{-\delta n T}}. \quad (33)$$

Линеаризованное точечное преобразование в данном случае будет иметь прежний вид (16) с сохранением смысла всех обозначений (17), за исключением значений коэффициентов последнего уравнения, которые теперь будут такими:

$$\begin{aligned} b_{N+1} &= q \sum_{j=1}^N \Phi'_{s_j} \bar{s}'_j(\tau) + \delta q \Phi - \alpha a \sum_{j=1}^N \Phi'_{y_j} \bar{y}_j; \\ c_{N+1} &= fq \sum_{j=1}^N \Phi'_{s_j} \bar{s}'_j(\tau) + \delta q \Phi - \alpha a \sum_{j=1}^N \Phi'_{y_j} \bar{y}_j - pf \sum_{j=1}^N \Phi'_{y_j} \bar{s}'_j(\tau); \\ h_j &= (f - a) \Phi'_{y_j} \quad (j = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (34)$$

Раскрывая для данного случая неравенства (28), получим условия устойчивости в следующей форме:

$$\begin{aligned} (1 - f)(1 - a)(U + V) &> 0; \\ (1 - fa)U + f(1 - a)V - \alpha(1 - f)W + \delta(1 - a) &> 0; \\ (1 + f)(1 + a)U - (1 + f)(1 - a)V - 2\alpha(1 + f)W + 2\delta(1 + a) &> 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где введены обозначения

$$U = \frac{\sum_{j=1}^N \Phi'_{s_j} \bar{s}'_j(\tau)}{\Phi}; \quad V = \frac{pe^{-\alpha n T}}{1 - a} \frac{\sum_{j=1}^N \Phi'_{y_j} \bar{s}'_j(\tau)}{\Phi}; \quad W = \frac{pe^{-\alpha n T}}{1 - a} \frac{\sum_{j=1}^N \Phi'_{y_j} \bar{s}_j(\tau)}{\Phi}. \quad (36)$$

Если функция  $\Phi$  — однородная относительно  $y_j$  с показателем однородности  $v$ , то  $W = v$  согласно формуле Эйлера  $\sum_j y_j \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} \equiv v\Phi$ . Заметим, что для случая обработки (31)  $U = V = R$ ,  $W = 1$  и условия (35) переходят в (29), а при постоянных внешних воздействиях  $s_j$  условия (35) переходят в (27a).

Из сказанного ясно, что рассматриваемая система с самонастройкой в общем случае обработки  $\Phi$  внешних сигналов  $s_j(t)$  и содержащим памятью  $y_j(t)$ , согласно (32), может запоминать сигнал и устойчиво хранить его в своей памяти точно так же, как и при обработке  $\Phi$  вида (31), если существует хотя бы одно значение  $\tau$ , удовлетворяющее условию (33), и выполнены при этом условия устойчивости (35).

### 5. ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ПРИ НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ ФОРМАХ СИГНАЛОВ

Ниже мы рассмотрим несколько примеров, которые выясняют до некоторой степени возможности рассмотренной системы. Во всех примерах принято, что  $s_j(t) = s(t - jT)$  и функция обработки  $\Phi$  имеет вид (31), а параметры системы такие, что функция  $\Omega(nT)$  имеет вид, изображенный на рис. 2б при  $\alpha \ll \delta$  и  $\rho = 1$ . Из (29) при этом вытекает, что достаточным условием устойчивости в данном случае является положительность величины  $R$ .

1. Синусоидальный сигнал  $s(t) = A \sin(\omega t)$ ,  $\omega = 2\pi/T$ ,  $N = 1$  ( $\theta = 0$ ). Значение  $s_1(t)$  в момент переключения  $t_k = knT + \tau$  будет таким:

$$s_1(t_k) = A \sin(\omega knT + \omega\tau - \theta) = A \sin(\omega\tau) = \bar{s}_1(\tau);$$

$$\sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau) = \bar{s}_1^2(\tau) = \frac{A^2}{2} [1 - \cos(2\omega\tau)]; \quad \bar{\Sigma} = A^2; \quad \underline{\Sigma} = 0.$$

Нанесем эти величины на график  $\Omega(nT)$  и определим  $\hat{T}$  и  $\check{T}$  (рис. 3).

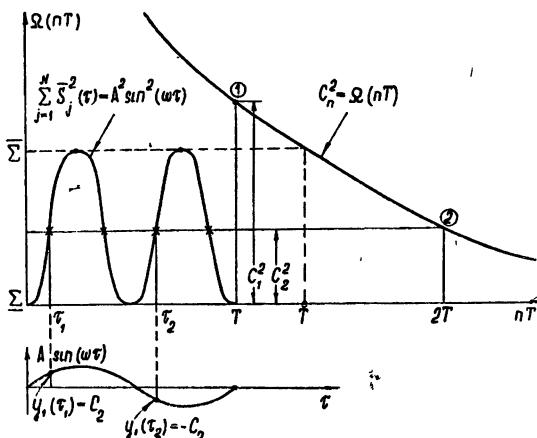


Рис. 3.

Очевидно, что  $\hat{T} = \infty$ . Построим на этом же графике один период функции  $\sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau) = \bar{s}_1^2(\tau)$ . Из построения очевидно, что для принятых параметров системы и формы сигнала в системе существуют неподвижные точки преобразования только при  $n = 2, 3$  и т. д., так как  $T < \check{T}$ . При этом каждому  $n$  соответствуют неподвижные точки преобразования с четырьмя значениями  $\tau$ . Из этих четырех значений устойчивыми являются только два значения, соответствующие положительному наклону

кривой  $\sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau)$ , так как знак  $R$  определяется знаком производной этой кривой. Из рассмотрения рис. 3 следует, что а) имеются два устойчивых положения равновесия  $\tau_1$  и  $\tau_2 = \tau_1 + T/2$  при каждом  $n$ , большим некоторого значения, зависящего от амплитуды входного сигнала и параметров системы; б) с увеличением амплитуды входного сигнала  $\tau_1 \rightarrow 0$  при любом  $n$ ; при этом также будут возможны режимы с меньшим  $n$ ; в) содержимое памяти не меняется при изменении амплитуды входного сигнала в диапазоне, не требующем перехода на другой номер  $n$ , и меняется скачком при изменении  $n$ :

$$\bar{s}^2(\tau_{1,2}) = C_n^2, \quad \bar{y}_1(\tau_1) = \frac{pC_n}{1 - qe^{-\alpha n T}}, \quad \bar{y}_1(\tau_2) = -\bar{y}_1(\tau_1).$$

Таким образом, уровни входного сигнала для существования устойчивого периодического режима могут быть любыми, а содержимое памяти квантовано.

**2.** Синусоидальный сигнал  $s(t) = A \sin(\omega t)$ ,  $\omega = 2\pi/T$ , но входов у системы  $N$ ,  $\theta = kT/2$  ( $k$  — целое).

Тогда

$$\sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau - j\theta) = \sum_{j=1}^N A^2 \sin^2 \omega(\tau - j\theta) = \frac{A^2}{2} \left[ N - \sum_{j=1}^N \cos \left( 4\pi \frac{\tau}{T} - j4\pi \frac{\theta}{T} \right) \right],$$

при  $\theta = kT/2$

$$\sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau) = \frac{A^2}{2} N \left[ 1 - \cos \left( 4\pi \frac{\tau}{T} \right) \right].$$

Мы видим, что случай 2 сводится к 1 при соответствующем изменении амплитуды входного сигнала.

**3.** Случай 2, но  $\theta = T/4$ ,  $N$  — нечетное.

Тогда

$$\sum_{j=1}^N \bar{s}_j^2(\tau) = \frac{A^2}{2} \left[ N - \cos 4\pi \frac{\tau}{T} \right]$$

и, следовательно,

$$\bar{\Sigma} = (A^2/2)(N + 1), \quad \underline{\Sigma} = (A^2/2)(N - 1).$$

В этом случае (рис. 4) устойчивый периодический режим существует при амплитудах входного сигнала, расположенных в дозволенных зонах.

Ширина зоны с номером  $n$  определяется, очевидно, величинами  $\hat{A}^2 = 2C_n^2(N - 1)^{-1}$ ,  $\hat{A}^2 = 2C_n^2(N + 1)^{-1}$ . В пределах зоны существуют два устойчивых значения  $\tau$ :  $\tau_1$  и  $\tau_2 = \tau_1 + T/2$ . При изменении амплитуды входного сигнала в пределах любой зоны величина  $\tau_1$  изменяется в интервале  $(0, T/4)$  согласно соотношению  $C_n^2 = (A^2/2)[N - \cos(4\pi\tau/T)]$ . Зная  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , можно найти значения напряжения на всех емкостях памяти. На рис. 4в показано содержание памяти при  $N = 7$  и  $\tau = \tau_1$ .

Если  $N$  — четное, то  $\bar{\Sigma} = \underline{\Sigma} = \frac{A^2}{2} N$  не зависит от  $\tau$  и зоны

$(\hat{A}^2, \hat{A}^2)$  вырождаются в точки.

4. Случай, когда  $\theta N$  много меньше периода  $T$  (рис. 5) и  $s(t)$  проходит через нуль.

В этом случае при любом внешнем периодическом воздействии

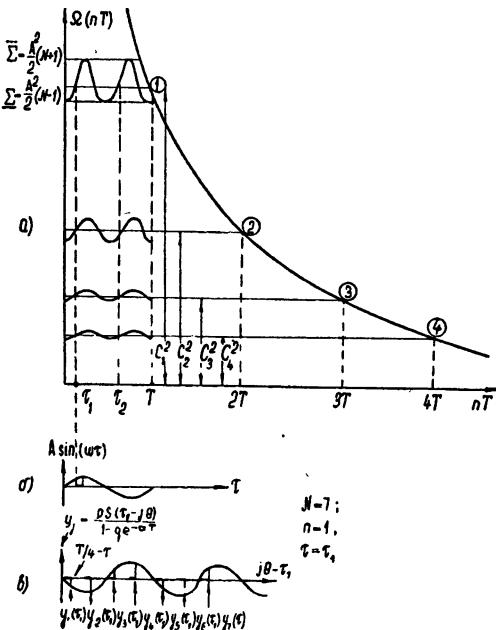


Рис. 4.

с ограниченным спектром за время  $\theta N$  происходит незначительное изменение входного сигнала; поэтому  $\sum \simeq N s_{\max}^2$ ,  $\sum \rightarrow 0 (\hat{T} \rightarrow \infty)$  при  $\frac{\theta N}{T} \rightarrow 0$ .

Следовательно, а) для каждого дозволенного  $n$  система имеет не более  $m$  областей устойчивости (по  $t$ ), где  $m$  — число участков возрастания  $s^2(t)$  за период; б) содержание памяти будет представлять собой  $\theta N/T$  часть периода входного сигнала.

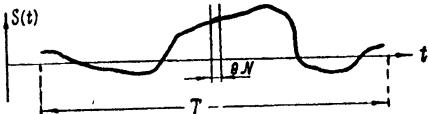


Рис. 5.

5. Периодический импульсный сигнал (рис. 6а) при условии, что  $0N < T$ ,  $\tau_n < \theta N < T - \tau_n$ , где  $\tau_n$  — длительность импульса, и  $N$  велико.

Тогда  $\bar{\Sigma}$  — конечно,  $\Sigma = 0 (\hat{T} = \infty)$ . Из очевидного рассмотрения

(рис. 6б) следует, что а) в памяти системы может устойчиво сохраняться часть импульса длиной  $\tau$  (рис. 6в); б) чем больше входные импульсы, тем меньшая часть импульса будет содержаться в памяти при фиксированном  $n$ .

Если сигнал  $s(t)$  представляет собой периодически повторяющийся радиоимпульс и если начальная фаза высокочастотного заполнения не меняется от импульса к импульсу (только в этом случае радиоимпульс представляет собой периодическую функцию), то все сказанное о работе системы при оговоренных выше условиях остается в силе и для радио-

импульсов. Отличие будет в том, что может существовать много устойчивых положений равновесия ввиду колебательного характера суммы  $\sum_{j=1}^N s_j^2(\tau)$  как функции параметра  $\tau$ . Следует также заметить, что если в случае видеоимпульса последнее условие не выполнено (т. е.  $N$  невелико), то и для видеоимпульса при малом  $N$  функция эта может иметь

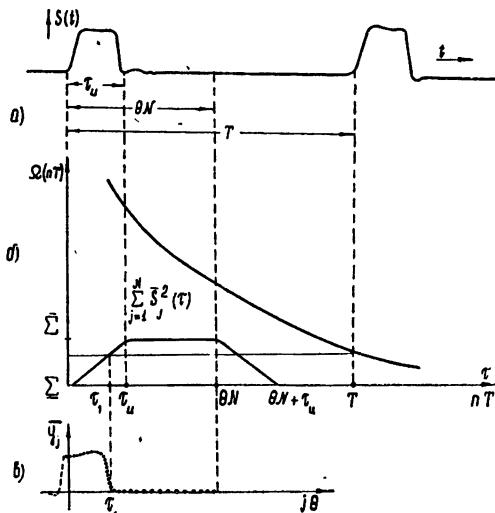


Рис. 6.

колебательный характер. Последнее означает, что система может находиться в нескольких положениях равновесия и в случае видеоимпульса.

Работа системы изучалась также на цифровой вычислительной машине. Моделирование системы состояло в создании специальной программы для БЭСМ-2. Программа состояла в вычислении всех функций времени, описывающих подсистемы в дискретные моменты времени, и в коррекции величин  $y_j(t)$  ( $j = 1, \dots, N$ ) и  $\varepsilon(t)$  согласно точечному преобразованию  $T_{N+2}$ .

Для проверки количественного совпадения результаты численного расчета и теоретического анализа проверялась работа системы в установившемся периодическом режиме для постоянных (A) и периодических (B) внешних воздействий.

A. Случай постоянных внешних воздействий интересен тем, что один из корней характеристического уравнения, как указывалось, находится на границе области устойчивости. Проверялась зависимость величины

установившегося периода от величины параметра  $\varphi = K\mu^{-1} \sum_{j=1}^{100} s_j^2$

(см. (13)). Параметры сигналов  $s_j$  и параметры системы были взяты следующие: параметры сигналов  $s_1 = 100, s_2 = 98, s_3 = 96, \dots, s_{99} = -96, s_{100} = -98$ ; параметры системы  $p = 0,05, q = 0,95, K = 0,005, \alpha = 0$ ,

$\delta = 0,1, \rho = 1, \varepsilon(0) = 100$ ; при этом  $\bar{\sigma} = K \sum_{j=1}^{100} s_j^2 = 1667$ . Параметр  $\varphi$

изменялся за счет  $\mu$  и  $s_j$ . Результаты эксперимента представлены для сравнения с теоретической зависимостью на рис. 7.

В. При периодических внешних воздействиях были взяты  $s_j(t) = s(t - j\theta)$  ( $j = 1, \dots, 32$ ). Временной шаг вычислений  $a = 10^{-3}$ . Параметры сигналов: периодический сигнал  $s(t)$  — треугольный им-

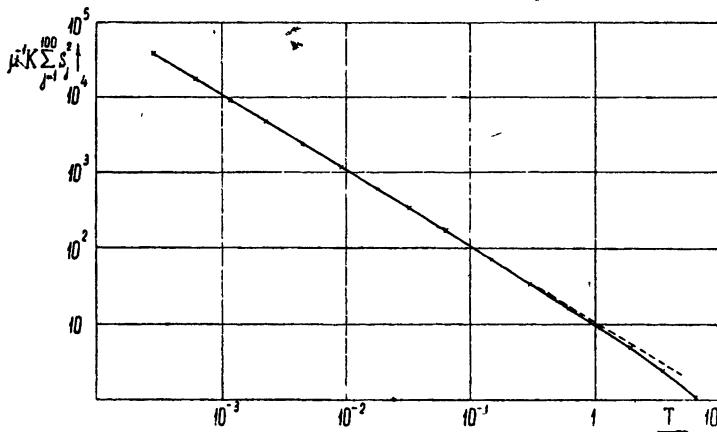


Рис. 7.

пульс с периодом  $T = 0,128$  и скважностью, равной 2. Период характеризовался заданием 128 чисел  $s_0 = 0, s_1 = 3, s_2 = 6, \dots, s_{31} = 93, s_{32} = 96, s_{33} = 93, \dots, s_{63} = 3, s_{64} = 0, \dots, s_{127} = 0, \theta = 2 \cdot 10^{-3}$ . Параметры системы:  $p = 2^{-4}(q = 1 - 2^{-4}), \alpha = 0,01, \delta = 0,5, \rho = 1, \mu = 26, K = 0,005$ .

Начальные значения:  $\varepsilon(0) = 1, y_j(0) = 10, j = 1, \dots, 32$ . Фазу  $\tau$  для  $n = 1$  находим из (10); она равна  $\tau^* = 0,040$ . При  $\tau = \tau^*$  получаем  $\bar{s}_1(\tau^*) = 72, \bar{s}_2(\tau^*) = 78, \bar{s}_3(\tau^*) = 84, \bar{s}_4(\tau^*) = 90, \bar{s}_5(\tau^*) = 96, \bar{s}_6(\tau^*) = 90, \bar{s}_7(\tau^*) = 84, \dots, \bar{s}_{20}(\tau^*) = 6, \bar{s}_{21}(\tau^*) = 0, \dots, \bar{s}_{32}(\tau^*) = 0$ . В силу (8) для взятых параметров с погрешностью, не превышающей 0,1%, можно считать, что  $y_j \approx \bar{x}_j(\tau^*)$  ( $j = 1, \dots, 32$ ).

Экспериментальные и ожидаемые значения  $y_j$  приведены на рис. 8. Экспериментальные значения взяты после прихода сотового импульса. Совпадение получилось хорошее:

$$\Delta = \left[ \sum_{j=1}^{32} (\bar{y}_j^{\text{эксп}} - \bar{y}_j^{\text{теор}})^2 \right] \left[ \sum_{j=1}^{32} \bar{s}_j^2(\tau^*) \right]^{-1} \simeq 3,5 \cdot 10^{-4},$$

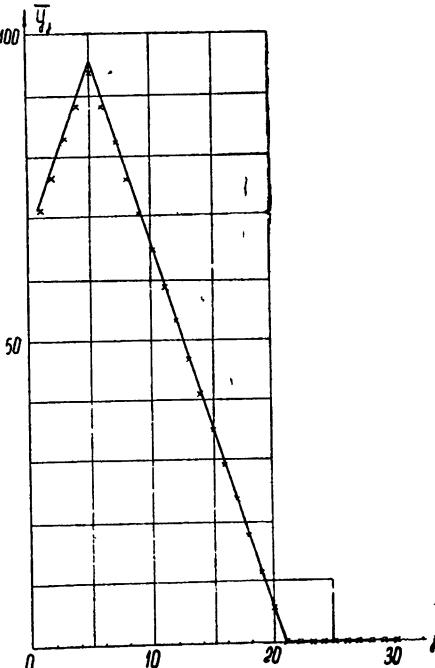


Рис. 8.

в то время как по формуле (15б) получаем  $\Delta_0 = 2,5 \cdot 10^{-4}$ .

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность Ю. И. Неймарку за руководство работой и обсуждение результатов.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. C. V. Jakowatz, G. M. White, Electronics, 34, 117 (1961).
2. Ю. И. Неймарк, Сб. Памяти А. А. Андронова, изд. АН ССР, М., 1955, стр. 242
3. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958).

Поступила в редакцию  
1 июня 1964 г.

**ON ONE SELF-TUNING SYSTEM**

*K. G. Kir'yanov*

The behaviour of the self-tuning system under the periodic external action is considered by the point transformation method. The conditions of system stability in the small are determined. The general case of the processing of the input signal and the memory information is considered. The results are given of checking up the operation of the system by means of the digital computer.

---

УДК 62—50

## АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО КЛАССА РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

*B. A. Брусин*

Методом, аналогичным методу Попова [3], получены достаточные условия абсолютной устойчивости для одного класса регулируемых систем.

В последние годы в теории устойчивости регулируемых систем основное место заняла следующая задача. Задан класс систем регулирования, зависящий от некоторых параметров. Нужно найти область значений этих параметров, при которых имеет место абсолютная устойчивость класса (когда все системы, входящие в этот класс, устойчивы «в большом»).

В работе [1] (первой работе по абсолютной устойчивости) рассматривались системы регулирования, структурная модель которых состоит из линейного и нелинейного звеньев, связанных между собой замкнутой цепью воздействий, с нелинейным звеном вида  $y = \varphi(x)$ , где характеристика нелинейного звена  $\varphi(x)$  является непрерывной функцией, причем  $\varphi(x) x \geq 0$ . В один класс объединялись системы с одинаковой линейной частью и нелинейными звеньями, удовлетворяющими условию  $\varphi(x) = 0$  при  $|x| \leq x^*$ . В [2] задача об абсолютной устойчивости была поставлена для класса систем с одинаковой линейной частью и с характеристикой  $\varphi(x)$ , удовлетворяющей условию  $0 \leq \lambda_1 x \leq \varphi(x) \leq \lambda_2 x$ . В дальнейших работах задача об абсолютной устойчивости была обобщена на системы с неоднородной характеристикой  $\varphi(x)$  и с характеристикой  $\varphi(x)$ , имеющей разрывы первого рода\*.

В данной работе методом, аналогичным методу В. М. Попова (см., например, [3]), решается задача об абсолютной устойчивости для принципиально нового класса регулируемых систем. Следует оговориться, что вводится несколько иное определение абсолютной устойчивости, которое соответствует специфике рассматриваемого класса; в один класс могут входить системы с фазовым пространством различных размерностей.

1. Рассмотрим класс систем регулирования, который описывается свойствами А—С.

А) Структурная модель системы содержит линейное звено с коэффициентом передачи

$$K(p) = \frac{\tau_m p^m + \dots + \tau_1 p + 1}{T_n p^n + \dots + T_1 p} \quad (m < n, n > 1). \quad (1.1)$$

Обозначим входную переменную линейного звена (1.1) через  $y$ , а выходную через  $x$ , и пусть  $G(t)$  — его импульсная переходная функция. Тогда, если при  $t = 0$   $x^{(s)}(t) = x_{0s}$  ( $s = 0, 1, \dots, n - 1$ ), то при  $t \geq 0$

\* Наиболее полный обзор литературы по этому вопросу приводится в [3].

$$-x(t) = \int_{-\infty}^t G(\tau) y(t - \tau) e(t - \tau) d\tau + F(t, x_{0s}), \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} F(t, x_{0s}) \equiv & T_n x_{00} G_0^{(n-1)}(t) + (x_{00} T_{n-1} + x_{01} T_n) G_0^{(n-2)}(t) + \dots + \\ & + (x_{0n-1} T_n + x_{0n-2} T_{n-1} + \dots + x_{01} T_2 + x_{00} T_1) G_0(t); \end{aligned} \quad (1.2a)$$

$$e(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}; \quad G_0(t) = G(t), \text{ при } \tau_i = 0.$$

Предполагается далее, что  $T_n p^{n-1} + \dots + T_2 p + T_1$  — гурвицев полином, так что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |G^k(t)| < \infty \quad (k = 0, 1); \quad \int_{0+0}^{\infty} (G^{(s)}(t))^2 dt < \infty; \\ \int_{0+0}^{\infty} (F^{(s)}(t))^2 dt < \infty \quad (s = 0, 1, \dots); \quad G(t) \rightarrow 1/T_1 \text{ при } t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В)  $x(t)$ ,  $y(t)$  — непрерывные функции, имеющие почти всюду производную, удовлетворяющую соотношению

$$(y - k_0 x)(y - k_1 x) = 0 \quad (k_1 \neq 0, k_1 > k_0, k_1 k_0 \geq 0); \quad (1.4)$$

при  $k_0 = 0$ , если  $\dot{y}(t - 0) \neq 0$ , то  $\dot{y}(t + 0) = \dot{y}(t - 0)$ .

С) Существуют такие  $l > 0$ ,  $M < \infty$ , что

$$|y - lx| \leq M \quad (1.5)$$

и  $K(p)/[K(p) + l]$  — устойчивое звено.

Класс систем регулирования, описываемый свойствами А—С (сокращенно класс А—С), будем называть абсолютно устойчивым, если для любого  $y(t)$  ( $0 < t < \infty$ ), удовлетворяющего (1.2)—(1.5),  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Ниже будет доказана следующая теорема.

**Теорема.** Класс А—С абсолютно устойчив, если существуют такие числа  $\xi > \eta \geq 0$ , что

$$A(\xi, \eta; j\omega) \equiv \xi k_0 k_1 |K(j\omega)|^2 + \xi(k_0 + k_1) \operatorname{Re} K(j\omega) + \eta \geq 0. \quad (1.6)$$

Докажем предварительно лемму.

**Лемма.** Пусть  $p(t)$  и  $q(t)$  — функции, связанные между собой соотношением

$$p(t) = \int_{-\infty}^t G'(\tau) q(t - \tau) d\tau.$$

Если при  $t > 0$   $q(t) > 0$ ,  $\dot{q}(t) > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \infty$ , то найдется такая последовательность  $\{t_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), что  $\lim_i p(t_i) = \infty$ .

Обозначим

$$q_T(t) = \begin{cases} q(t) & \text{при } 0 \leq t \leq T \\ q(t - T_j) & \text{при } T_j \leq t \leq T(j+1) \end{cases} \\ (j = -1, -2, \dots; 1, 2, 3, \dots).$$

Определим далее функционал  $M_T$ , положив  $M_T(f(t)) = T^{-1} \int_0^T f(t) dt$ .

При  $0 < t \leq T$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) q_T(t - \tau) d\tau = p(t) + \int_0^{\infty} G'(\tau) q_T(t - \tau) d\tau.$$

Применяя к обеим частям этого равенства  $M_T$  и замечая, что при  $\tau \geq 0$ ,  $t - \tau \geq 0$   $M_T(q_T(t - \tau)) = M_T(q(t))$ , получим

$$M_T(p(t)) = M_T(q(t)) \int_0^{\infty} G'(\tau) d\tau - M_T \left( \int_t^{\infty} G'(\tau) q_T(t - \tau) d\tau \right).$$

В силу условий, наложенных в лемме на  $q(t)$ ,

$$M_T(p(t)) \geq M_T(q(t)) \int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) d\tau - \left| M_T \left( \int_t^{\infty} G'(\tau) q_T(t - \tau) d\tau \right) \right| \geq \\ \geq c_1 M_T(q) - c_2 T^{-1} q(T),$$

где  $c_1, c_2$  — положительные константы. Поскольку при  $T \rightarrow \infty$   $M_T(q)$  стремится к бесконечности как  $q(T)$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M_T(p(t)) = \infty.$$

Отсюда следует справедливость доказываемой леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. Покажем, что для любого  $y(t)$  существует такое  $\bar{t}$  в интервале  $0 < \bar{t} < \infty$  \*, что  $y(\bar{t}) = 0$ . Предположим противное. Тогда при  $t \geq 0$  функция  $y(t)$  знакопостоянна. Для определенности пусть  $y(t) > 0$ . Обозначим  $v(t) = \int_0^t y(\xi) d\xi$ . В силу условия  $|y(t)| \leq D_1$  (см. Приложение)  $v(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . На основании (1.2)

$$-x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) v(t - \tau) e(t - \tau) d\tau + F(t, x_{0s}).$$

Функции  $-x(t) - F(t, x_{0s})$  и  $v(t)e(t)$  удовлетворяют условиям леммы и, следовательно, для  $x(t)$  существует такая последовательность  $\{t_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), что  $\lim_i x(t_i) = -\infty$ . Однако это противоречит условию (1.5). Утверждение доказано.

Очевидно, это утверждение равносильно одному из следующих утверждений (или обоим вместе): 1)  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; 2) существует такая бесконечная последовательность  $\{T_\alpha\}$  ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ ), что  $y(T_\alpha) = 0$ .

Покажем, что при выполнении условий теоремы для всех  $y(t)$ , для которых существует последовательность  $\{T_\alpha\}$  ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ ), такая, что  $y(T_\alpha) = 0$ , справедливо:  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . (Очевидно, мы можем считать, что  $T_0 = 0$ .)

\* Значение бесконечности понимается в смысле предела при  $t \rightarrow \infty$ .

Обозначим

$$y_\alpha(t) = y(t) e(t) e(T_\alpha - t), \quad \dot{y}_\alpha(t) = \dot{y}(t) e(t) e(T_\alpha - t); \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} -\dot{x}_\alpha(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) y_\alpha(t - \tau) d\tau + F(t) + a(t); \\ a(t) &= \left( -\int_{-\infty}^{\infty} G'(\tau) y_\alpha(t - \tau) d\tau - F(t) \right) e(t - T_\alpha). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Заметим, что в силу (1.3)  $\int_0^\infty a^2(t) dt < \infty$ . Согласно (1.2) и (1.4), при  $t \geq 0$

$$(\dot{y}_\alpha - k_0 \dot{x}_\alpha) (\dot{y}_\alpha - k_1 \dot{x}_\alpha) = 0. \quad (1.4a)$$

Обозначим далее

$$\dot{x}_{\alpha i} = \begin{cases} \dot{x}_\alpha, & \text{если } \dot{y}_\alpha = k_i \dot{x}_\alpha, \\ 0, & \text{если } \dot{y}_\alpha \neq k_i \dot{x}_\alpha \end{cases} \quad (i = 0, 1). \quad (1.9)$$

Учитывая (1.4a), можно написать, что

$$\dot{x}_\alpha = \sum_i \dot{x}_{\alpha i}, \quad \dot{y}_\alpha = \sum_i \dot{y}_{\alpha i}, \quad \dot{y}_\alpha^2 = \sum_i \dot{y}_{\alpha i}^2. \quad (1.9a)$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(\xi k_1^2 \dot{x}_\alpha - \eta k_1 \dot{y}_\alpha) (\dot{y}_\alpha - k_0 \dot{x}_\alpha) - (\xi k_0^2 \dot{x}_\alpha - \\ &\quad - \eta k_0 \dot{y}_\alpha) (\dot{y}_\alpha - k_1 \dot{x}_\alpha)] dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Согласно (1.9), (1.9a),

$$\begin{aligned} \rho_\alpha &= \int_{-\infty}^{+\infty} [(\xi k_1^2 \dot{x}_{\alpha 1} - \eta k_1 \dot{y}_{\alpha 1}) (\dot{y}_{\alpha 1} - k_0 \dot{x}_{\alpha 1}) - (\xi k_0^2 \dot{x}_{\alpha 0} - \\ &\quad - \eta k_0 \dot{y}_{\alpha 0}) (\dot{y}_{\alpha 0} - k_1 \dot{x}_{\alpha 0})] dt = (\xi - \eta) (k_1 - k_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}_\alpha^2(t) dt = \\ &= (\xi - \eta) (k_1 - k_0) \int_0^{T_\alpha} \dot{y}_\alpha^2(t) dt. \end{aligned} \quad (1.10a)$$

С другой стороны, после подстановки в (1.10) выражения (1.8) и после некоторых элементарных преобразований с применением равенства Парсеваля получим

$$\rho_\alpha = (k_0 - k_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 A(\xi, \eta; j\omega) |Y_\alpha(j\omega)|^2 d\omega = (k_0 - k_1) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \alpha_1 k_0 \int_0^{T_\alpha} \dot{F}(t) \dot{x}(t) dt + \alpha_2 \int_0^{T_\alpha} \dot{F}(t) \dot{y}(t) dt + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_3 \int_0^{\infty} \dot{F}^2(t) dt - h_\alpha \right\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $Y_\alpha(j\omega)$  — фурье-изображение функции  $y_\alpha(t)$ ,

$$\alpha_1(t) = 2\xi k_1, \quad \alpha_2 = -(k_0 + k_1)\xi, \quad \alpha_3 = -\xi k_0 k_1,$$

$$h_\alpha = \xi k_0 k_1 \int_{T_\alpha}^{\infty} [(\alpha(t))^2 + 2\alpha(t) \dot{F}(t)] dt.$$

Пусть выполняется условие теоремы. Тогда  $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 A(\xi, \eta; j\omega) \times$   
 $\times |Y_\alpha(j\omega)| d\omega \geq 0$ ; сравнивая правые части (1.10a) и (1.11), получим неравенство

$$\begin{aligned} & -(\xi - \eta) \int_0^{T_\alpha} \dot{y}^2(t) dt + \alpha_1 k_0 \int_0^{T_\alpha} \dot{F}(t) \dot{x}(t) dt + \\ & + \alpha_2 \int_0^{T_\alpha} \dot{F}(t) \dot{y}(t) dt + \alpha_3 \int_0^{\infty} \dot{F}^2(t) dt - h_\alpha \geq 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

откуда на основании очевидных неравенств

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \dot{F}(t) \dot{y}(t) dt \right| & \leq \sqrt{\int_0^T \dot{F}^2(t) dt} \sqrt{\int_0^T \dot{y}^2(t) dt}, \\ \left| k_0 \int_0^T \dot{F}(t) \dot{x}(t) dt \right| & \leq \sqrt{\int_0^T \dot{F}^2(t) dt} \sqrt{\int_0^T \dot{y}^2(t) dt} \end{aligned}$$

следует, что при всех  $\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} & \sqrt{\int_0^{T_\alpha} \dot{y}^2(t) dt} \left( \sqrt{\int_0^{T_\alpha} \dot{y}^2(t) dt} - \frac{|\alpha_1| + |\alpha_0|}{\xi - \eta} \sqrt{\int_0^{T_\alpha} \dot{F}^2(t) dt} \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{\xi - \eta} \left( |\alpha_3| \int_0^{\infty} \dot{F}^2(t) dt + |h_\alpha| \right). \end{aligned} \quad (1.13)$$

В приложении 1 показано, что  $h_\alpha$  равномерно ограничено по  $\alpha$ . Устремляя в (1.13)  $\alpha$  к бесконечности, получим, что  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{T_\alpha} \dot{y}^2(t) dt < \infty$ . Но если выполнено условие (1.6), то для любого  $y(t)$  производная  $\dot{y}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  (см. Приложение 2). Покажем, что отсюда следует стремление  $y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Допустим противное. Тогда на основании вышеизложенного найдется такая последовательность  $\{t_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), что

$$y(t_i) = m > 0, \quad \dot{y}(t_i) \neq 0. \quad (1.14)$$

Покажем, что величины  $x_{is} = x^{(s)}(t_i)$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1; i = 1, 2, \dots$ ) равномерно ограничены. На основании (1.2) и (1.2а) при  $t \geq t_i$  можно записать  $\ddot{x}(t)$  в виде

$$\begin{aligned} -\ddot{x}(t) &= \int_{-\infty}^{t-t_i} G'(\tau) \dot{y}(t-\tau) + \dot{F}(t-t_i, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{in}) ; \\ \dot{F}(t-t_i, x_{i2}, x_{i3}, \dots, x_{in}) &\equiv x_{i2} T_n G_0^{(n)}(t-t_i) + \dots \\ &\dots + (x_{in} T_n + \dots + x_{i3} T_3 + x_{i2} T_2) G_0'(t-t_i). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Так как  $\dot{y}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $\ddot{x}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Пусть теперь в (1.15)  $t \in [t_i, t_i + \Omega]$ , где  $\Omega$  — произвольное положительное число. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $i^* = i^*(\varepsilon)$ , что при  $i^* \leq i$  на отрезке  $[t_i, t_i + \Omega]$   $|\dot{F}(t-t_i, x_{i2}, \dots, x_{in})| < \varepsilon$ . Откуда с учетом (1.14) следует, что  $|x^{(s)}(t_i)| < \delta(\varepsilon)$  ( $s = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots$ ), где  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Обозначим через  $\dot{x}_i(t)$  функцию, являющуюся при  $t \geq t_i$  решением уравнения  $T_n \dot{x}^{(n-1)} + \dots + T_1 \dot{x} = -m$  при начальных условиях  $\dot{x}^{(s-1)}(t_i) = x^{(s)}(t_i) = x_{is}$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ). Введем также следующее обозначение:  $\Delta \dot{x}_i = \max_{t \in \Lambda_i} |\dot{x}_i(t) - \dot{x}(t)|$ , где  $\Lambda_i$  — отрезок  $[t_i, t_i + \Omega_i]$  ( $\Omega_i > 0$ ). Тогда в случае, если величины  $\Omega_i$  равномерно ограничены,

$$\lim_i \Delta \dot{x}_i = 0. \quad (1.16)$$

Действительно,  $\dot{x}_i(t)$  и  $\dot{x}(t)$  при  $t \geq t_i$  являются производными от выходов линейного звена (1.1), соответствующими входам  $m e(t-t_i)$  и  $y(t) e(t-t_i)$  при одних и тех же начальных условиях в момент  $t = t_i$ . Следовательно, на основании (1.2) при  $t \geq t_i$

$$-\ddot{x}_i(t) + \dot{x}(t) = \int_{t_i}^{\infty} G'(t-\tau) (m - y(\tau)) d\tau,$$

откуда

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_i &\leq \max_{t \in \Lambda_i} |m - y(t)| \int_{-\infty}^{\infty} |G'(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \max_{t \in \Lambda_i} |\dot{y}(t)| \Omega_i \int_{-\infty}^{\infty} |G'(\tau)| d\tau \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $i \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\Delta t_i$  — величина, определяемая условием  $-m/T_1 - a \leq \dot{x}_i(t) \leq -m/T_1 + a < 0$  при  $t > t_i + \Delta t_i$ , где  $a$  — некоторое положительное число. Существование такого  $\Delta t_i$  следует из того, что  $\dot{x}_i(t) \rightarrow -m/T_1$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем  $\Delta t_i$  есть непрерывная функция от значений  $x_{is}$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ). Но так как по доказанному выше

величины  $x_{is}$  ( $i = 1, 2, \dots; s = 1, 2, \dots, n - 1$ ) равномерно ограничены, то величины  $\Delta t_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) будут также равномерно ограничены.

Пусть  $k_0 \neq 0$ . Положим  $\Omega_i = \Delta t_i$ . Тогда в силу (1.16) по любому  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N$ , что при  $n \geq N$  —  $m/T_1 - a - \varepsilon < \dot{x}(t_n + \Omega_n) \leq -m/T_1 + a + \varepsilon$ . Поэтому  $\dot{x}(t)$  не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . При  $k_0 \neq 0$  это означает, что  $\dot{y}(t)$  не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Указанное противоречие и доказывает теорему для этого случая.

Пусть теперь  $k_0 = 0$ . Обозначим через  $L$  верхнюю грань промежутков времени, в течение которых  $y \equiv m$ . Поскольку  $x^{(s)}(t_i)$  ( $i = 1, 2, \dots; s = 1, 2, \dots, n - 1$ ) равномерно ограничены и справедливо условие (1.5), величина  $L < \infty$ . Положим  $\Omega_i = \Delta t_i + L$ . Тогда на отрезке  $[t_i + \Delta t_i, t_i + \Delta t_i + L]$  всегда найдется такой момент  $\bar{t}_i$ , что  $\dot{y}(\bar{t}_i) = k_1 \dot{x}(\bar{t}_i)$ . Отсюда так же, как и в предыдущем случае, получим, что  $\dot{y}(t_i)$  не стремится к нулю при  $i \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.

2. С помощью этой теоремы мы можем находить достаточные условия абсолютной устойчивости класса А—С. Ниже излагаются три способа их отыскания.

а) Непосредственно из (1.6) получаем:  $k_0 k_1 |K(j\omega)|^2 + (k_0 + k_1) \times \operatorname{Re} K(j\omega) \geq -\eta/\xi \geq -1$  ( $0 \leq \omega \leq \infty$ ), откуда следует, что для выполнения условия теоремы необходимо и достаточно, чтобы

$$A(1, 1; j\omega) \equiv k_0 k_1 |K(j\omega)|^2 + (k_0 + k_1) \operatorname{Re} K(j\omega) + 1 > 0 \quad (0 \leq \omega \leq \infty). \quad (2.1)$$

б) Подставляя в  $A(\xi, \eta; j\omega)$  выражение для  $K(j\omega)$ , получаем

$$A(\xi, \eta; j\omega) = \frac{\sum_{s=0}^n A_s(\xi, \eta) \omega^{2s}}{|T_n(j\omega)^n + \dots + T_1 j\omega|^2}, \quad (2.2)$$

где

$$A_s(\xi, \eta) = \sum_{i+j=2s} (-1)^{i+s} [\xi k_0 k_1 \tau_i \tau_j + \xi (k_0 + k_1) T_i \tau_j + \eta T_i T_j],$$

$\tau_i = 0$  при  $i > m$ ,  $\tau_0 = 1$ ,  $T_0 = 0$ . При  $k_0 = 0$   $A_0(\xi, \eta) = 0$ . Очевидно, что условия теоремы будут выполнены, если

$$\xi P_s + \eta Q_s \equiv A_s(\xi, \eta) \geq 0 \quad (s = 0, 1, \dots, n); \quad \xi > \eta \geq 0. \quad (2.3)$$

Исключение из (2.3) вспомогательных величин  $\xi, \eta$  приводит к следующим неравенствам, наложенным только на параметры

$P_s + Q_s > 0$  при  $s \in S^+$ ,  $P_s Q_s < 0$  при  $s \in S^-$ ,  $P_s \geq 0$  при  $s \in S^0$ ,

$$\min_{s \in S^+} P_s/Q_s \geq \max_{s \in S^-} P_s/Q_s, \quad (2.4)$$

где  $S^+$ ,  $S^-$ ,  $S^0$  — множества индексов  $s$ , при которых соответственно  $Q_s > 0$ ,  $Q_s < 0$  и  $Q_s = 0$ ;

$$P_s = \sum_{i+j=2s} (-1)^{i+s} [k_0 k_1 \tau_i \tau_j + (k_0 + k_1) T_i \tau_j], \quad Q_s = \sum_{i+j=2s} (-1)^{i+s} T_i T_j.$$

в) Из (2.1) и (2.2) получаем еще одно достаточное условие для выполнения (1.6):

$$\begin{aligned} A_0(1, 1) > 0, \quad A_s(1, 1) \geq 0 & \quad (s > 0) \quad \text{при } k_0 \neq 0; \\ A_1(1, 1) > 0, \quad A_s(1, 1) \geq 0 & \quad (s > 1) \quad \text{при } k_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Каждое из условий (2.1), (2.4) и (2.5) вместе с условиями, наложенными на параметры в пункте А, дают достаточные условия абсолютной устойчивости. Последними двумя способами они получаются в замкнутой форме, а первым способом — в виде условия на частотную характеристику линейной части.

Заметим, что из (2.5) следует (2.4), а из (2.4) условие (2.1); при  $n \leq 2$  эти условия эквивалентны. На рис. 1 для случая  $k_0 = 0$ ,  $k_1 = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\tau \geq 0$  на плоскости  $(\delta_1, \delta_2)$  (где  $\delta_1 = T_1/2\sqrt{T_2}$ ,  $\delta_2 = \tau/2\sqrt{T_2}$ ) построены область, соответствующая условиям (2.5) (кривая (1) — ее граница) и область устойчивости в большой одностепенной модели следящей системы с люфтом (кривая (2) — ее граница), полученная в [4] (штриховка на границах направлена внутрь соответствующих областей).

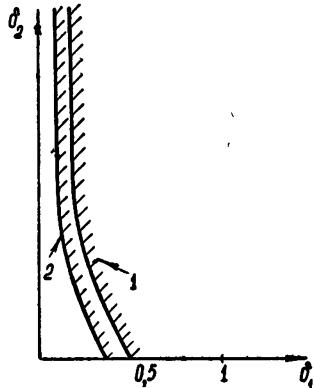


Рис. 1.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Докажем следующее утверждение: существуют такие константы  $C_i$ ,  $D_i$  и  $E$ , зависящие от  $l$ ,  $M$ ,  $x_0^i = x_{(0)}^i$  и  $y_0^s = y_{(0)}^s$ , что

$$\begin{aligned} |x^{(s)}(T_a)| &\leq C_s \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n-1); \\ |y(t)| &\leq D, \quad |\dot{y}(t)| \leq D_1 \quad (t > 0); \quad \int_{T_a}^{\infty} \alpha^2(t) dt \leq E. \end{aligned} \quad (1)$$

Обозначим через  $\tilde{G}(t)$  импульсную переходную функцию звена с коэффициентом передачи

$$\tilde{K}(p) = \frac{K(p)}{K(p) + l} = \frac{\tau_m p^m + \dots + \tau_1 p + 1}{\tilde{T}_n p^n + \dots + \tilde{T}_0}.$$

В силу (1.3) существуют такие  $0 < L_s < \infty$ , что

$$|\tilde{G}^{(k)}(t)| \leq L_k \quad (t > 0); \quad \int_0^{\infty} |\tilde{G}^s(\xi)| d\xi \leq L_s \quad (2)$$

$$(s = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots).$$

На основании (1.2) легко показать, что

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(t - \tau) (-y(\tau) + lx(\tau)) d\tau + \tilde{F}(t, x_0^s); \quad (3)$$

$$\dot{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}'(t - \tau) (-y(\tau) + lx(\tau)) d\tau + \tilde{F}'(t, x_0^s), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t, x_0^s) &= x_0 \tilde{T}_n \tilde{G}_0^{(n-1)}(t) + \dots + (x_0^{n-1} \tilde{T}_n + x_0^{n-2} \tilde{T}_{n-1} + \dots \\ &\quad \dots + x_0^1 \tilde{T}_2 + x_0 \tilde{T}_1) \tilde{G}_0(t), \\ |\tilde{F}(t, x_0^s)| &\leq \gamma, \quad |\tilde{F}'(t, x_0^s)| \leq \gamma_1 \quad (t > 0)\end{aligned}$$

$(\tilde{G}_0(t) = \tilde{G}(t)$  при  $\tau_i = 0$ ).

Имеем

$$|x(t)| \leq \max |y - ly| \int_0^\infty |\tilde{G}(\xi)| d\xi + |\tilde{F}(t, x_0^s)| \leq C(L_s, M, x_0^s). \quad (5)$$

Аналогично из (4)

$$|\dot{x}(t)| \leq C_1(L_s, M, x_0^s). \quad (6)$$

Согласно (1.4), (1.5), из (5), (6) следует, что

$$|y(t)| \leq D_0; \quad |\dot{y}(t)| \leq D_1. \quad (7)$$

Обозначим

$$\dot{x}_a^*(t) = - \int_0^{T_a} G'(t - \tau) y(\tau) d\tau - \dot{F}(t, x_0^s).$$

В силу (2), (7)

$$|\dot{x}_a^*(t)| \leq C^* < \infty \quad (0 \leq t \leq \infty). \quad (8)$$

При  $0 \leq t \leq T_a$ , согласно (1.2), (8),  $\dot{x}_a^*(t) \equiv \dot{x}(t)$ , а при  $t \geq T_a$

$$\begin{aligned}\dot{x}_a^*(t) &= \dot{F}(t - T_a; x_a^s) \equiv x_a T_n G_0^n(t - T_a) + \dots + (x_a^{n-1} T_n + \dots \\ &\quad \dots + x_a^1 T_a + x_a T_1) G_0'(t - T_a)\end{aligned} \quad (9)$$

$(x_a^s = x^{(s)}(t = T_a))$ . Следовательно, имеет место неравенство

$$|\dot{F}(t - T_a; x_a^s)| \leq C_1^*(C^*) \quad (T_a \leq t \leq \infty), \quad (10)$$

откуда простыми рассуждениями получаем, что

$$|x_a^s| \leq C_s(C_1^*) < \infty \quad (s = 0, 1, \dots, n - 1). \quad (11)$$

Заметим, что при  $t \geq T_a$

$$\alpha(t) = F'(t, x_0^s) + F'(t - T_a, x_a^s);$$

$$\int_{T_a}^{\infty} \alpha^2(t) dt \leq E(x_a^s, x_0^s) < \infty \quad (s = 0, 1, \dots, n - 1).$$

Однако в силу (11)  $E(x_a^s, x_0^s) \leq E(x_0^s) < \infty$ , т. е.

$$\int_{T_a}^{\infty} \alpha^2(t) dt \leq E(x_0^s).$$

Отсюда следует также, что и  $h_\alpha$  равномерно ограничено по  $\alpha$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Докажем следующее утверждение: для любого выхода  $y(t)$  системы класса А—С из неравенства

$$\lim_i \int_0^{\tau_i} \dot{y}^2(t) dt < \infty \quad (\tau_i \rightarrow \infty \text{ при } i \rightarrow \infty) \quad (12)$$

следует, что

$$y(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Из формулы (1.15) легко получаем, что при условии (1)

$$|\ddot{x}(t)| \leq K = \text{const}. \quad (14)$$

Пусть  $k_0 \neq 0$ . Тогда из (12) следует, что

$$\lim_i \int_0^{\tau_i} \dot{x}^2(t) dt \leq k_1^{-2} \lim_i \int_0^{\tau_i} \dot{y}^2(t) dt < \infty. \quad (15)$$

Отсюда при условии (14) следует, что  $\dot{x}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е., что справедливо условие (13).

Пусть теперь  $k_0 = 0$ . Предположим, что  $\dot{y}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда существует такое  $\epsilon > 0$  и такая последовательность  $\{t_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), что

$$|\dot{x}(t_i)| \geq \epsilon; \quad |\dot{y}(t_i)| \geq k_1 \epsilon. \quad (16)$$

На основании условия В для каждого  $t_i$  существует такое  $\delta_i > 0$ , что при  $t_i \leq t \leq t_i + \delta_i$   $\dot{y}(t) = k_1 x(t)$ . При этом  $\delta_i$  определяется из условия  $\dot{x}(t_i + \delta_i) = 0$ . Согласно (14) и (16), величины  $\delta_i$  ограничены снизу:  $\delta_i > \delta > 0$ . Таким образом, существует последовательность интервалов  $(t_i, t_i + \delta)$ , такая, что

$$|\dot{y}(t_i)| \geq k_1 \epsilon, \quad |\ddot{y}(t)| = k_1 |\ddot{x}(t)| \leq k_1 K$$

$$t_i + \delta$$

при  $t \in (t_i, t_i + \delta)$ . Но тогда  $\int_{t_i}^{t_i + \delta} \dot{y}^2(t) dt \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$ , что противоречит (12).

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье, В. Н. Постников, ПММ, 8, 246 (1944).
2. М. А. Айзerman, Автоматика и телемеханика, 7, 148 (1946).
3. М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, изд. АН СССР, М., 1962.
4. В. А. Брусин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 539 (1962).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 июня 1964 г.

## ABSOLUTE STABILITY OF ONE CLASS OF CONTROL SYSTEMS

V. A. Brusin

By the method analogous to Popov's one [3] the sufficient conditions of the absolute stability have been determined for one class of control systems.

УДК 681.142:382.501.24

## О ПРИМЕНЕНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН ДЛЯ РАСЧЕТА ТРАНЗИСТОРНЫХ СХЕМ

*M. A. Чубаров*

Проводится разбиение фазового пространства на области линейности и исследуются состояния равновесия произвольной транзисторной схемы при кусочно-линейной аппроксимации характеристик триодов. Для ряда простейших случаев указываются способы сведения этих задач к вычислению определителей. Кратко описана программа расчета определителя произвольного порядка, элементами которого служат многочлены от нескольких неизвестных.

Изучение динамики автоколебательных схем на транзисторах в ряде случаев целесообразно проводить на основе статических уравнений Молла—Эберса [1, 2]:

$$\begin{aligned} I_{\text{э}} &= \frac{I_{\text{э}0}}{1 - \alpha_N \alpha_I} \left( e^{\frac{U_{\text{э}}/\varphi_T}{\alpha_I}} - 1 \right) - \frac{\alpha_I I_{\text{к}0}}{1 - \alpha_N \alpha_I} \left( e^{\frac{U_{\text{к}}/\varphi_T}{\alpha_I}} - 1 \right); \\ I_{\text{к}} &= \frac{I_{\text{к}0}}{1 - \alpha_N \alpha_I} \left( e^{\frac{U_{\text{к}}/\varphi_T}{\alpha_I}} - 1 \right) - \frac{\alpha_N I_{\text{э}0}}{1 - \alpha_N \alpha_I} \left( e^{\frac{U_{\text{э}}/\varphi_T}{\alpha_N}} - 1 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

ограничиваясь учетом эмиттерной или коллекторной емкости и пренебрегая их зависимостью от тока эмиттера и напряжения на коллекторе. Существенное упрощение задачи и единый подход к расчету транзисторных схем достигается с помощью кусочно-линейной аппроксимации [3–5] характеристик (1) в виде

$$I_{\text{э}} = g_{s_1} U_{\text{э}} - \alpha_I g_{s_2} U_{\text{к}}, \quad (2)$$

$$I_{\text{к}} = g_{s_2} U_{\text{к}} - \alpha_N g_{s_1} U_{\text{э}},$$

$$(-1)^{s_2} U_{\text{к}} \leq 0; \quad (-1)^{s_1} U_{\text{э}} \leq 0. \quad (3)$$

Здесь функции  $(e^{U/\varphi_T} - 1)$  представлены двумя полупрямыми с различным наклоном, проводимости  $g_{s_1}$  и  $g_{s_2}$  зависят от угловых коэффициентов этих полупрямых, а двоичные переменные  $s_1$  и  $s_2$  принимают значения 0 или 1 и определяются неравенствами (3).

Плоскость  $U_{\text{э}}$ ,  $U_{\text{к}}$  разбивается неравенствами (3) на четыре области линейности  $x = (s_1 s_2)$ . Заметим, что в силу равенства  $\alpha_N I_{\text{э}0} = \alpha_I I_{\text{к}0}$  [1, 2] выполняются следующие соотношения:

$$g_{s_1=1} \gg g_{s_1=0}; \quad g_{s_2=1} \gg g_{s_2=0}; \quad \alpha_N g_{s_1} = \alpha_I g_{s_2} \quad \text{при } s_1 = s_2. \quad (4)$$

Рассмотрим схему, состоящую из произвольного числа транзисторов, емкостей, индуктивностей и сопротивлений. Пусть  $j$ -й транзистор описывается уравнениями

$$I_{\text{э}j} = g_{s_l} U_l - \alpha_I g_{s_{l+1}} U_{l+1}; \quad I_{\text{к}j} = g_{s_{l+1}} U_{l+1} - \alpha_N g_{s_l} U_l;$$

$$I_{6j} = (1 - \alpha_N)g_{s_l}U_l + (1 - \alpha_I)g_{s_{l+1}}U_{l+1}; \quad (5)$$

$$(-1)^{s_l}U_l \leq 0; \quad (-1)^{s_{l+1}}U_{l+1} \leq 0,$$

где  $l = 2j - 1$ ,  $U_l$  и  $U_{l+1}$  — соответственно напряжения на эмиттере и коллекторе относительно базы. Тогда для исследования движений в этой схеме можно написать систему дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^m a_{lk}\dot{x}_k + \sum_{l=1}^n b_{ll}U_l = \sum_{r=1}^{m_1} c_{lr}x_r + d_l; \quad (6)$$

$$(-1)^{s_1}U_1 \leq 0; \dots; \quad (-1)^{s_n}U_n \leq 0, \quad (7)$$

где  $i = 1 \div [\max(m, m_1) + n]$ , коэффициенты  $a_{lk}$ ,  $c_{lr}$  и  $d_l$  не зависят от проводимостей  $g_{s_l}$  в то время как коэффициент  $b_{ll}$  ( $l = 1 \div n$ ) зависит лишь от  $g_{s_l}$ . Координатами фазового пространства  $x_k$  служат независимые напряжения и токи в линейных частях схемы, а также величины  $I_{9j}$ ,  $I_{kf}$ ,  $I_{6j}$ ,  $U_l$ .

Преобразуем систему (6) к более удобному виду. Если какая-либо переменная  $U_l$  служит фазовой координатой, заменим ее на новую переменную  $x_k$  и добавим алгебраическое уравнение  $U_l = x_k$ . При  $m_1 > m$  из системы (6) исключим неизвестные  $x_p$  ( $p > m$ ) с помощью  $m_1 - m$  разрешаемых относительно  $x_p$  уравнений, которые всегда можно найти вследствие независимости введенных переменных.

Таким образом, рассматриваемую транзисторную схему можно описать системой (6)–(7), в которой  $m_1 = m$ ,  $i = 1 \div (m + n)$ , переменные  $U_l$  не являются координатами фазового пространства, а коэффициенты обладают указанными свойствами.

Вводя матрицы

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1m} b_{11} \dots b_{1n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m+n 1} \dots a_{m+n m} b_{m+n 1} \dots b_{m+n n} \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} c_{11} \dots c_{1m} d_1 \\ \dots \dots \dots \dots \\ c_{m+n 1} \dots c_{m+n m} d_{m+n} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

приведем эту систему к виду

$$M\dot{x}_k = \sum_{r=1}^m M_k^r x_r + M_k^{m+1}; \quad (9)$$

$$\frac{(-1)^{s_l}}{M} \left[ \sum_{r=1}^m M_{m+l}^r x_r + M_{m+l}^{m+1} \right] \leq 0, \quad (10)$$

где  $k = 1 \div m$ ,  $l = 1 \div n$ ,  $M$  — определитель матрицы  $M$ ,  $M_i^r$  — обобщенный минор [6] матрицы  $M$  относительно  $M_0$  (т. е. определитель, получаемый из нее после замены  $i$ -го столбца на столбец  $r$  матрицы  $M_0$ ).

В настоящей работе рассматриваются способы построения областей линейности и изучения состояний равновесия системы (9)–(10), в частности, с применением вычислительных машин. Использование численных методов для решения указанных задач представляется нецелесообразным, так как структура областей линейности, расположение и устойчивость состояний равновесия зависят от большого количества параметров транзисторной схемы. В работе эти задачи решаются аналитическими методами.

1. Разбиение фазового пространства  $x_1, x_2, \dots, x_m$  на области линейности  $\mathbf{x} = (s_1 s_2 \dots s_n)$  производится в соответствии с неравенствами (10). Отметим, что выражения для границ

$$\sum_{r=1}^m M_{m+l}^r x_r + M_{m+l}^{m+1} = 0 \quad (l = 1 \div n), \quad (11)$$

разделяющих группы областей с  $s_l = 0$  и  $s_l = 1$ , не зависят от переменной  $s_l$  (от нее зависят только элементы столбца  $m+l$  матрицы  $M$ ).

Зафиксируем двоичные переменные  $s_1, s_2, \dots, s_n$  и рассмотрим область  $\mathbf{x}$ , определяемую неравенствами (10). Всякая существующая область является непустым выпуклым многограническим множеством [7], которое можно представить в виде векторной суммы некоторого выпуклого замкнутого многогранника и многогранного выпуклого конуса, задаваемого неравенствами

$$\frac{(-1)^{s_l}}{M} \sum_{r=1}^m M_{m+l}^r x_r \leq 0 \quad (l = 1 \div n). \quad (12)$$

При  $m > 2$  и  $n > 4$  разбиение фазового пространства на области линейности весьма трудоемко. Ограничиваюсь в дальнейшем простейшими случаями, покажем, что построение областей линейности можно свести к вычислению некоторого количества определителей.

Разбиение фазовой прямой на области линейности в случае одного транзистора задается неравенствами (10) при  $m = 1, n = 2$ :

$$\frac{(-1)^{s_1}}{M} [M_2^1 x + M_2^2] \leq 0; \quad \frac{(-1)^{s_2}}{M} [M_3^1 x + M_3^2] \leq 0. \quad (13)$$

Расположение четырех границ  $x_{s_1}(s_2) = -M_2^2/M_2^1$  и  $x_{s_2}(s_1) = -M_3^2/M_3^1$  ( $s_1 = 0, 1; s_2 = 0, 1$ ) всегда можно определить из шести соотношений, получаемых с помощью формулы обращения детерминантов [4–6]:

$$\operatorname{sgn}[x_{s_1}(s_2) - x_{s_2}(s_1)] = \operatorname{sgn} \left[ \frac{M(s_1, s_2) M_{23}^{12}}{M_2^1(s_2) M_3^1(s_1)} \right]; \quad s_1=0,1; \quad s_2=0,1; \quad (14)$$

$$\operatorname{sgn}[x_{s_1}(1) - x_{s_1}(0)] = \operatorname{sgn} \left[ \frac{A_2^2}{A_2^1} - \frac{A_3^2}{A_3^1} \right] = \operatorname{sgn} \left[ -\frac{A A_{23}^{12}}{A_3^1 A_2^1} \right] = \operatorname{sgn} \left[ \frac{A M_{23}^{12}}{M_2^1(1) M_2^1(0)} \right]; \quad (15)$$

$$\operatorname{sgn}[x_{s_2}(1) - x_{s_2}(0)] = \operatorname{sgn} \left[ \frac{B_2^2}{B_2^1} - \frac{B_3^2}{B_3^1} \right] = \operatorname{sgn} \left[ \frac{B M_{23}^{12}}{M_3^1(1) M_3^1(0)} \right],$$

где  $A_i^k$  и  $B_i^k$  — обобщенные миноры матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_{12}(s_2=1) & b_{12}(s_2=0) \\ \dots & \dots \\ a_3 b_{32}(s_2=1) & b_{32}(s_2=0) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_1 b_{11}(s_1=1) & b_{11}(s_1=0) \\ \dots & \dots \\ a_3 b_{31}(s_1=1) & b_{31}(s_1=0) \end{pmatrix}$$

относительно  $A_0 = \begin{pmatrix} c_1 d_1 \\ \dots \\ c_3 d_3 \end{pmatrix}$ ,  $A = \det A$ ,  $B = \det B$ . Здесь и в дальней-

шем предполагается, что находящиеся в знаменателях детерминанты не равны тождественно нулю. Рассчитав определители  $M$ ,  $M_2^1$ ,  $M_3^1$ ,  $M_{23}^{12}$ ,  $A$  и  $B$  нетрудно найти последовательность границ на фазовой прямой и,

применяя неравенства (13), провести качественное разбиение этой прямой на области линейности.

В случае  $m = 1, n \geq 4$  области  $x$  определяются неравенствами

$$\frac{(-1)^{s_l}}{M} [M_{l+1}^1 x + M_{l+1}^2] \leq 0, \quad (16)$$

где  $l = 1 \div n$ . Двоичные переменные, от которых зависит координата границы  $x_{s_k} = -M_{k+1}^2 / M_{k+1}^1$  находятся посредством подстановки  $x_{s_k}$  в неравенства (16) при  $k \neq l$ . Последнее приводит к выражениям

$$\frac{(-1)^{s_l}}{M_{k+1}^1} M_{k+1}^{1,2} \leq 0, \quad (17)$$

где  $k = 1 \div n, l = 1 \div n$ , но  $l \neq k$ . Будем считать, что неравенства (17) определяют вспомогательные области линейности  $x_1 = (s_1, \dots, S_k, \dots, s_n)$ , в которые попадают координаты  $x_{s_k}$  ( $k = 1 \div n$ ).

Найдем из неравенств (17) всевозможные вспомогательные области, т. е. получим значения переменных  $s_l$  для всех существующих границ  $x_{s_k}$ . Нетрудно видеть, что для каждой области  $x_1$  можно найти вторую вспомогательную область, которая имеет  $n-2$  двоичных «индексов»  $s_l$ , совпадающих с соответствующими «индексами» первой области. Взяв какую-либо область  $x_1$  и отыскав для нее указанную пару, легко определить знак разности между соответствующими этим областям координатами границ с помощью соотношения, аналогичного (14). Повторяя этот процесс для всех вспомогательных областей, определим знак разности между всеми соседними координатами  $x_{s_k}, x_{s_l}$  и найдем последовательность границ на фазовой прямой. После этого достаточно получить из неравенств (16) значения  $s_l$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

Рассмотренный способ построения областей линейности можно применять и при  $m = 1, n = 2$ , причем в ряде случаев он проще вышеизложенного.

Разбиение фазовой плоскости на области линейности при  $n = 2$ , задаваемое неравенствами

$$\frac{(-1)^{s_1}}{M} [M_3^1 x_1 + M_3^2 x_2 + M_3^3] \leq 0; \quad \frac{(-1)^{s_2}}{M} [M_4^1 x_1 + M_4^2 x_2 + M_4^3] \leq 0, \quad (18)$$

описано в работе [4]. Границы областей

$$x_{2s_1}(s_2) = -\frac{1}{M_3^2} [M_3^1 x_1 + M_3^3]; \quad x_{2s_2} = -\frac{1}{M_4^2} [M_4^1 x_1 + M_4^3] \quad (19)$$

пересекаются в одной точке с координатами  $x_{10} = M_{34}^{23}/M_{34}^2$  и  $x_{20} = -M_{34}^{13}/M_{34}^2$ , не зависящими от переменных  $s_1, s_2$ .

Найдем с помощью формулы обращения детерминантов разность между выражениями (19):

$$x_{2s_1}(s_1) - x_{2s_2}(s_2) = \frac{M}{M_3^2 M_4^2} (M_{34}^{12} x_1 - M_{34}^{23}) = \frac{M(s_1, s_2) M_{34}^{12}}{M_3^2(s_2) M_4^2(s_1)} (x_1 - x_{10}); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x_{2s_1}(1) - x_{2s_1}(0) &= \frac{CM_{34}^{12}}{M_3^2(0)M_3^2(1)} (x_1 - x_{10}); \quad x_{2s_2}(1) - x_{2s_2}(0) = \\ &= \frac{DM_{34}^{12}}{M_4^2(0)M_4^2(1)} (x_1 - x_{10}), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{12}(0) & b_{12}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & b_{42}(0) & b_{42}(1) \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11}(0) & b_{11}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{41} & a_{42} & b_{41}(0) & b_{41}(1) \end{vmatrix}.$$

Пользуясь этими соотношениями и рассчитав необходимые определители, нетрудно установить расположение границ (для простоты можно ограничиться полуплоскостью  $x_1 > x_{10}$ ) и затем построить области линейности.

При  $m = 2, n \geq 4$  неравенства, определяющие области линейности, имеют вид

$$\frac{(-1)^{s_l}}{M} [M_{l+2}^1 x_1 + M_{l+2}^2 x_2 + M_{l+2}^3] \leq 0 \quad (l = 1 \div n). \quad (22)$$

Произвольные границы  $M_{l+2}^1 x_1 + M_{l+2}^2 x_2 + M_{l+2}^3 = 0$  и  $M_{k+2}^1 x_1 + M_{k+2}^2 x_2 + M_{k+2}^3 = 0$  пересекаются в точке с координатами

$$x_{10} = \frac{M_{l+2}^2 M_{k+2}^3}{M_{l+2}^1 M_{k+2}^2}; \quad x_{20} = -\frac{M_{l+2}^1 M_{k+2}^3}{M_{l+2}^1 M_{k+2}^2}. \quad (23)$$

Переменные  $s_l$ , от которых зависят эти координаты, можно найти из неравенств

$$\frac{(-1)^{s_l}}{M_{l+2}^1 M_{k+2}^2} M_{l+2}^1 M_{l+2}^2 M_{k+2}^3 \leq 0 \quad (l \neq i \neq k), \quad (24)$$

получаемых в результате подстановки выражений (23) в (22). Построив все точки пересечения и разбив окрестность каждой из них на области линейности, получим искомое разбиение фазовой плоскости.

2. Исследование состояний равновесия системы (9)–(10) также сводится к расчету некоторых обобщенных миноров матрицы  $M$ . Используя формулу обращения детерминантов, найдем координаты состояний равновесия в виде

$$x_r = -\frac{M_1^1 \dots r-1 \dots m+1 \dots r+1 \dots m}{M_{12}^{12} \dots m}. \quad (25)$$

Подставив их в соотношения (10), получим неравенства

$$\frac{(-1)^{s_l}}{M_1^1 \dots m} M_1^1 \dots m \frac{m+1}{m+l} \leq 0, \quad (26)$$

определяющие области  $x$ , в которых находятся состояния равновесия. Устойчивость этих состояний равновесия задается характеристическим уравнением системы (9):

$$(-1)^n M \lambda^n + (-1)^{n-1} S_m^1(M) \lambda^{n-1} + \dots - S_m^{m-1}(M) \lambda + M_1^1 \dots m = 0, \quad (27)$$

где символ  $S_m^k(M)$  означает сумму обобщенных миноров матрицы  $M$ , верхние и нижние индексы у которых попарно равны и представляют собой всевозможные сочетания из  $m$  по  $k$  для ряда 1, 2, ...,  $m$ . Применяя критерий Гурвица, можно полностью свести изучение устойчивости состояний равновесия к расчету определителей.

В задачах, которые сводятся к изучению системы (9) — (10), вычисление обобщенных миноров встречается, кроме того, при использовании критерия Бендиксона, исследований расположения точек контакта [8] и в некоторых других случаях.

3. Программа для расчета определителя позволяет производить вычисление определителя произвольного порядка с элементами, представляющими собой многочлены от нескольких неизвестных.

Определитель  $|a_{ij}^{(0)}|$  рассчитывается с помощью несколько видоизмененного алгоритма Гаусса [9]. Первое исключение вычисляется в соответствии с выражением

$$a_{ij}^{(1)} = a_{11}^{(0)} a_{ii}^{(0)} - a_{i1}^{(0)} a_{1i}^{(0)},$$

второе и последующие имеют вид

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{a_{kk}^{(k-1)} a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{k-1, k-1}^{(k-2)}}; \quad i > k, j > k. \quad (28)$$

Можно показать, что

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} a_{ij} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{k1} \dots a_{kk} a_{kj} \\ a_{i1} \dots a_{ik} a_{ij} \end{vmatrix}$$

и определитель  $n$ -го порядка  $|a_{ij}^{(0)}| = a_{nn}^{(n-1)}$ . Алгоритм удобен тем, что деление на главные элементы осуществляется сразу же, где это возможно.

Принята следующая запись информации. Одночлен представляется двумя ячейками, в первой из которых записан коэффициент, а во второй — степени букв, расположенные в фиксированных разрядах. Для каждой буквы отводится определенное количество разрядов, в соответствии с наивысшей степенью, которую она принимает в промежуточных результатах. Если максимальная степень некоторой буквы в  $j$ -м столбце определителя есть  $p_j$ , то, как следует из приведенного алгоритма, необходимое число разрядов  $r_j$  для представления этой буквы определяет-

ся из неравенства  $2^{r_j} > 2 \sum^n p_j$ . Количество неизвестных в многочленах, являющихся элементами определителя, ограничивается, таким образом, соотношением  $\sum r_i \leq N$ , где  $N$  — число разрядов в ячейке памяти. Элементы определителя, которые могут состоять из нескольких одночленов, разделяются ячейкой-указателем, представляющим из себя единицу в определенном, нигде более не использованном разряде. Для этой цели особенно удобны машины, имеющие специальный разряд-признак.

Программа вычисления определителя и подпрограммы для расчета обобщенных миноров произвольной матрицы находятся в вычислительном центре ГИФТИ. В качестве примера укажем, что машина, имеющая скорость вычислений 20000 операций в секунду, раскрывает за 10 сек используемый в работе [6] определитель

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -[\lambda + (1 - \beta)m] & 0 & -(1-\alpha)n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -[\lambda + (1 - \beta)\mu] & 0 & -(1-\alpha)v \\ 0 & 0 & 0 & \beta m & 0 & -(1+n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \mu & 0 & -(1+v) \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + m & \lambda + \mu & -\alpha n & -\alpha v \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right| \quad (29)$$

и выдает результат

$$\begin{aligned} mn\alpha\beta - mnv + mn\alpha\beta - mn - mv - m + \mu nv\alpha\beta - \mu nv - \\ - \mu n + \mu v\alpha\beta - \mu v - \mu - 2nv\lambda - 2n\lambda - 2v\lambda - 2\lambda, \end{aligned} \quad (30)$$

расположенный в лексикографическом порядке.

Предлагаемые программы в значительной степени облегчают изучение динамики транзисторных схем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Степаненко, Основы теории транзисторов и транзисторных схем, Госэнергоиздат, М.—Л., 1963, стр. 90
2. Расчет и проектирование полупроводниковых приборов, Оборонгиз, М., 1963.
3. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 766 (1959).
4. Н. И. Ашбель и Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 319 (1961).
5. Л. В. Постников, Диссертация, Горький, 1963
6. М. А. Чубаров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 759 (1964).
7. А. Голдман, Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, М., 1959.
8. В. Г. Аранович, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 4156 (1961).
9. Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматтиз, М., 1960.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
23 октября 1964 г.

#### THE USE OF COMPUTERS IN TRANSISTOR CIRCUITS DESIGN

*M. A. Ghoubarov*

The division of phase space into regions of linear approximation is given, as well as the equilibrium state is investigated of an arbitrary transistor circuit under piece-linear approach of triod characteristics. The ways of reduction of these problems to the evaluation of determinants are pointed out in the certain simplest cases. The program of calculation of the determinants is briefly discussed.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 533.9

### О ВОЗМОЖНОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО «УСКОРЕНИЯ» ФОТОНОВ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЕ

*B. N. Цытович*

1. Цель настоящей заметки — обратить внимание на возможность статистического «ускорения» (точнее, увеличения средней энергии) фотонов турбулентностью. Механизм увеличения энергии фотонов аналогичен индуцированному черенковскому ускорению заряженных частиц плазмонами, исследованному в работах [1, 2]. Для заряженных частиц можно говорить, что ускорение является результатом большого числа актов индуцированного излучения и поглощения плазмонов [1]. Фотон, как и заряженная частица, также может испускать плазмоны; такие процессы носят название распадных [3]. В слаботурбулентной плазме можно ограничиться процессами, в которых фотоны распадаются или сливаются с одним плазмоном. Нас здесь интересуют эффекты индуцированного распада и индуцированного слияния фотонов с плазмонами. Покажем, что такие процессы могут приводить к увеличению средней энергии фотонов

Уравнение для числа поперечных квантов  $N_{\mathbf{k}^t}$  в случае  $N^t \ll N^l$  приобретает вид [3] ( $\hbar = c = 1$ ):

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}^t}^t}{\partial t} = - \int d\mathbf{k}^l \{ w_{\mathbf{k}^t}(\mathbf{k}^l) N_{\mathbf{k}^l}^l (N_{\mathbf{k}^t}^t - N_{\mathbf{k}^t - \mathbf{k}^l}^t) + w_{\mathbf{k}^t + \mathbf{k}^l}(\mathbf{k}^l) N_{\mathbf{k}^l}^l (N_{\mathbf{k}^t}^t - N_{\mathbf{k}^t + \mathbf{k}^l}^t) \}, \quad (1)$$

где  $w_{\mathbf{k}^t}(\mathbf{k}^l)$  — вероятность распада фотона, имеющего импульс  $\mathbf{k}^t$ , с испусканием плазмона (его импульс  $\mathbf{k}^l$ ). Из (1) легко найти изменение средней энергии фотонов (их полное число, согласно (1), сохраняется).

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \omega^t \rangle = \langle \dot{\Omega} \rangle; \quad \langle L \rangle = \frac{1}{\int N_{\mathbf{k}^t}^t d\mathbf{k}^t} \int L N_{\mathbf{k}^t}^t d\mathbf{k}^t; \quad (2)$$

$$\dot{\Omega} = \int \omega^l(\mathbf{k}^l) (w_{\mathbf{k}^t + \mathbf{k}^l}(\mathbf{k}^l) - w_{\mathbf{k}^t}(\mathbf{k}^l)) N_{\mathbf{k}^l}^l d\mathbf{k}^l. \quad (3)$$

Здесь учтено, что  $\omega^t(\mathbf{k}^t) - \omega^t(\mathbf{k}^t - \mathbf{k}^l) = \omega^l(\mathbf{k}^l)$  в силу закона сохранения энергии при распаде.

Эффект систематического ускорения (3) в первом приближении по  $k/k^t \ll 1$ , когда можно говорить о диффузии фотонов в поле плазмонов, для изотропной турбулентности обращается в нуль. Этот результат можно получить, используя найденную в [3] при условии  $\omega^t \gg \omega^l$  вероятность  $w_{\mathbf{k}^t}(\mathbf{k}^l)$ , а также приближенную формулу для  $\dot{\Omega}^*$ :

$$\dot{\Omega} = \int \omega^l(\mathbf{k}^l) N_{\mathbf{k}^l}^l \left( \mathbf{k}^l \frac{\partial w_{\mathbf{k}^t}}{\partial \mathbf{k}^l} \right) d\mathbf{k}^l. \quad (4)$$

При расчете эффекта ускорения следует использовать точное выражение для вероятности  $w_{\mathbf{k}^t}(\mathbf{k}^l)$ , пригодное при  $\omega^t \sim \omega^l$ , и точное выражение (3) для  $\dot{\Omega}$ . Мы приведем здесь результат расчета вероятности методом, изложенным в [4]\*\*:

\* Поскольку для распада необходимо соблюдение неравенства  $k^l > \omega^l$ , условие  $k^l/k^t \ll 1$  автоматически приводит к соотношению  $\omega^l/k^t \sim \omega^l/\omega^t \ll 1$ .

\*\* Тот же результат может быть получен методом, указанным в [5]

$$\begin{aligned}
 w_{k^l}^l(k^l) = & \frac{e^2 \omega_{0e}^4 (k^l)^2}{8\pi m_e^2 [\omega^l(k^l)]^4} \left[ 1 + \frac{(k^t, k^t - k^l)^2}{(k^t)^2 (k^t - k^l)^2} \right] \frac{1}{\sqrt{(k^t)^2 + \omega_{0e}^2}} \times \\
 & \times \frac{1}{\sqrt{(k^t - k^l)^2 + \omega_{0e}^2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \omega^l(k^l)} \epsilon^l(\omega, k^l) \right]^{-1} \times \\
 & \times \delta \left[ \sqrt{(k^t)^2 + \omega_{0e}^2} - \sqrt{(k^t - k^l)^2 + \omega_{0e}^2} - \omega^l(k^l) \right], \quad (5)
 \end{aligned}$$

где

$$\omega_{0e}^2 = 4\pi n e^2 / m_e.$$

Используя (3) и считая, что  $N_{k^l}^l$  для изотропной турбулентности зависит лишь от  $|k^l| = \omega_{0e}/V_\Phi$ , получим

$$\dot{\Omega} = \int \frac{dV_\Phi N^l(V_\Phi)}{V_\Phi^7} \frac{e^2}{2m_e^2} \frac{\omega_{0e}^9}{\omega^2 (\omega^2 - 4\omega_{0e}^2)^{(3/2)}} \left[ 2\omega^2 (1 - V_\Phi^2) - \omega_{0e}^2 (1 + V_\Phi^2)^2 / V_\Phi^2 \right] \quad (6)$$

Здесь положено  $\omega^l(k^l) \approx \omega_{0e}$ . Заметим, что (6) справедливо в том случае, если для данной частоты  $\omega$  одновременно могут выполняться условия слияния

$$\omega > \frac{\omega_{0e}}{2} \left\{ \frac{1}{V_\Phi} \sqrt{\frac{1 + 3V_\Phi^2}{1 - V_\Phi^2}} - 1 \right\} \quad (7)$$

и распада

$$\omega > \frac{\omega_{0e}}{2} \left\{ \frac{1}{V_\Phi} \sqrt{\frac{1 + 3V_\Phi^2}{1 - V_\Phi^2}} + 1 \right\}. \quad (8)$$

Минимальное значение правых частей (7), (8) достигается при  $V_\Phi^2 = 1/3$ . При этом значении  $V_\Phi$  слияние возможно для  $\omega > \omega_{0e}$ , а распад—для  $\omega > 2\omega_{0e}$ . Последнее неравенство тривиально, так как при распаде возникает поперечная волна, частота которой должна быть больше  $\omega_{0e}$  (для того, чтобы она могла распространяться в плазме); кроме того, возникает продольная волна частоты  $\omega_{0e}^*$ .

Из (7), (8) следует, что как нерелятивистские плазменные волны  $V_\Phi \ll 1$ , так и ультрарелятивистские  $V_\Phi \rightarrow 1$  увеличивают энергию фотонов высоких частот  $\omega \gg \omega_{0e}$ . Если при заданном  $V_\Phi$  выполнено (7), а неравенство (8) нарушено\*\*, то  $\dot{\Omega}$  оказывается намного больше (6):

$$\dot{\Omega} = \int \frac{dV_\Phi N^l(V_\Phi)}{V_\Phi^5} \frac{e^2}{2m_e^2} \frac{\omega_{0e}^6 [\omega^2 + \omega \omega_{0e} + 2^{-1} \omega_{0e}^2 (1 + V_\Phi^2)]^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{0e}^2)^{3/2} (\omega + 2\omega_{0e})}. \quad (9)$$

В ограниченной области  $\omega$ , а именно, при

$$\frac{\omega_{0e}}{2} \left\{ \frac{1}{V_\Phi} \sqrt{\frac{1 + 3V_\Phi^2}{1 - V_\Phi^2}} + 1 \right\} < \omega < \frac{\omega_{0e}}{V_\Phi} \frac{1 + V_\Phi^2}{\sqrt{2(1 - V_\Phi^2)}} \quad (10)$$

знак (6) отрицателен. Это указывает на то, что знак эффекта на заданной частоте  $\omega$  зависит от распределения  $N^l$  по фазовым скоростям. При

$$\omega > \frac{\omega_0}{V_\Phi} \frac{1 + V_\Phi^2}{\sqrt{2(1 - V_\Phi^2)}}$$

\* Числитель (6) при  $V_\Phi^2 = 1/3$  пропорционален  $\omega^2 - 4\omega_{0e}^2$ , т. е. (6) не содержит особенностей.

\*\* В приведенном примере  $V_\Phi^2 = 1/3$  и  $2\omega_{0e} > \omega > \omega_{0e}$ .

эффект всегда положительный. Это имеет место, в частности, для нерелятивистских плазменных волн, если  $\omega \gg \omega_{0e}/V_{Te}$ . Энергия фотонов таких частот всегда увеличивается.

Заметим, что неравенство  $\omega \gg \omega_{0e}/V_{Te}$  соответствует условию применимости диффузионного приближения для (1).

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}^t}^t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial k_i^t} D_{ij} \frac{\partial N_{\mathbf{k}^t}^t}{\partial k_j^t}; \quad D_{ij} = \int k_i^l k_j^l w_{\mathbf{k}^t}^{(0)}(\mathbf{k}^l) N_{\mathbf{k}^l}^l dk^l; \quad (11)$$

$$w_{\mathbf{k}^t}^{(0)} = \frac{e^2 \omega_{0e}}{8\pi m_e^2} \frac{(k^l)^2}{(k^t)^2 + \omega_{0e}^2} \delta(\omega_{0e} - k^l V_{rp}^t), \quad (12)$$

где  $V_{rp} = k^t [(k^t)^2 + \omega_{0e}^2]^{-1/2}$  — групповая скорость поперечных волн. Для изотропной турбулентности

$$D_{ij} = D^l \frac{k_i^t k_j^t}{(k^t)^2} + D^t \left( \delta_{ij} - \frac{k_i^t k_j^t}{(k^t)^2} \right). \quad (13)$$

Величина  $D^l$  характеризует систематическое и флюктуационное увеличение энергии фотонов:

$$\dot{Q} = \frac{1}{(k^t)^2} \frac{\partial}{\partial k^t} [(k^t)^2 D^l(k^t) V_{rp}]; \quad \dot{Q}^2 = V_{rp}^2 D^l, \quad (14)$$

где  $\langle \dot{Q}^2 \rangle = \frac{d}{dt} \langle \omega^2 \rangle$ . Систематическое увеличение энергии в приближении (12) равно нулю, что следует из выражения для  $D^l$ :

$$D^l = \frac{e^2}{8\pi} \frac{\omega_{0e}^3 \sqrt{(k^t)^2 + \omega_{0e}^2}}{(k^t)^3 m_e^2} \int k^l N_{\mathbf{k}^l}^l dk^l, \quad (15)$$

тогда как флюктуационное увеличение энергии  $\dot{Q}^2 \simeq D^l$  по порядку величины составляет

$$\frac{\dot{Q}^2}{\omega_{0e}^2} \simeq \omega_{0e}^2 \frac{\pi}{4} \frac{W^l}{nm_e V_\Phi} \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega} \right)^2. \quad (16)$$

Здесь  $W^l$  — энергия продольных волн в единице объема,  $V_\Phi$  — их характерная фазовая скорость. Обращение в нуль систематического увеличения энергии в приближении (12) связано с тем, что оно, согласно (6), является величиной следующего порядка малости по параметру  $(\omega_{0e}/V_\Phi \omega)^2 \ll 1$ . При  $V_\Phi \ll 1$

$$\frac{\dot{Q}}{\omega_{0e}} \simeq \frac{\pi}{2} \omega_{0e} \frac{W^l}{nm_e V_\Phi} \left( \frac{\omega_{0e}}{V_\Phi \omega} \right)^2 \left( \frac{\omega_{0e}}{\omega} \right)^3. \quad (17)$$

Таким образом, для больших частот основной эффект увеличения энергии является флюктуационным.

2. Остановимся на возможных астрофизических приложениях рассмотренного механизма. Здесь представляют интерес два явления: увеличение энергии фотонов с частотами порядка  $\omega_{0e}$  и увеличение энергии фотонов больших частот. Первое явление существенно для рассмотренной в [6] возможности ускорения электронов космических лучей поперечными электромагнитными волнами. Дело в том, что с ростом частоты увеличивается эффективность ускорения; вместе с тем эффективная трансформация плазменных колебаний в поперечные имеет место при  $\omega$ , близком к  $\omega_{0e}$  [7]. Согласно (7), увеличение энергии фотонов частот порядка  $\omega_{0e}$  может быть значительным лишь в случае, если имеется достаточно большое число плазменных волн с фазовыми скоростями, близкими к скорости света ( $V_\Phi \sim c/\sqrt{3}$ ). Нужно отметить, что если плазменные колебания генерируются с фазовыми скоростями, малыми по сравнению со скоп-

ростью света, они при интенсивной турбулентности за время меньше времени соударений могут «перекачиваться» в область фазовых скоростей порядка скорости света. Механизмом такой «перекачки» является нелинейное взаимодействие плазменных волн [8].

Представляет интерес вопрос о возможности увеличения энергии фотонов до больших энергий в межзвездной среде, в радиоисточниках и других объектах. Из формулы (16) для флуктуационного ускорения следует, что энергия фотона, прошедшего путь  $L$  в турбулентной плазме, соответствует частоте

$$\omega \approx \omega_{0e} \sqrt{\frac{2\omega_{0e}L}{c} \frac{W^l}{nm_e V_\Phi c}}, \quad \omega \gg \omega_{\text{нач}}. \quad (18)$$

Сделаем наиболее оптимальные оценки, полагая  $W^l \sim nm_e V_{Te}^2$  и  $V_\Phi \sim V_{Te}$ . Для плотности межзвездной среды  $n \sim 1 \text{ см}^{-3}$ ,  $L \sim 10^{24} \text{ см}$  получим  $\omega \sim 10^4 \omega_{0e} \sim 3 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$ , т. е.  $\omega$  попадает в дециметровый диапазон. Эта оценка указывает на то, что для радиоизлучения в линии  $21 \text{ см}$ , прошедшего большую толщу турбулентной плазмы, должно быть заметное размытие. Этот эффект может служить для оценок степени турбулентности космической плазмы. Увеличение энергии фотонов особенно эффективно в областях высоких температур, сильной турбулентности и больших плотностей плазмы. Так, при  $\omega_0 \sim 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ ,  $L \sim 10^{16} \text{ см}$  и  $V_{Te} \approx 0,1 \text{ с}$  получим  $\omega \sim 10^{16} \text{ сек}^{-1}$  (оптический диапазон). Подобный механизм излучения можно рассматривать, как одну из возможностей объяснить излучения «сверхзвезд» (наряду с излучением электронов космических лучей в магнитных полях [9] и в электрических полях плазменных колебаний [10]).

Наконец, при  $V_\Phi \ll 1$  рассеяние фотонов, описываемое  $D^t$  в (11), (13), оказывается в  $1/V_\Phi^2$  раз более эффективным, нежели увеличение их энергии. Это указывает на то, что для изучения низких частот, попадающих в метровый и сантиметровый диапазон, ситуация может оказаться сходной с той, которая имеет место для космических лучей. А именно, изотропия приходящего на Землю излучения, связанная с интенсивным рассеянием достаточно удаленных объектов, будет затруднять идентификацию источников излучения. Вывод об интенсивном рассеянии следует из выражения для коэффициента  $D^t$ , получаемого из (11), (12):

$$D^t = \frac{e^2}{16\pi} \frac{\omega_{0e}}{m_e^2} \int N'_{k^l} dk^l (k^l)^4 V_{\text{гр}} \left( 1 - \frac{V_\Phi^2}{V_{\text{гр}}^2} \right). \quad (19)$$

Подчеркнем, что при  $V_\Phi \sim 1$  рассеяние и увеличение энергии имеют одинаковый порядок величины.

В лабораторных условиях, по-видимому, наибольший интерес представляет возможность получения больших частот в турбулентной плазме твердого тела, так как частоты  $\omega$  могут попасть в ультрафиолетовый диапазон.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Цытович, ДАН СССР, **142**, 319 (1962); Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **6**, 918 (1963).
2. В. Н. Цытович, Астроном. ж., **40**, 612 (1963), Геомагнетизм и Аэрономия, **3**, 616 (1963).
3. Л. М. Коврижных и В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **47**, 1454 (1964).
4. А. Гайлitis, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **47**, 1468 (1964).
5. И. А. Ахиезер, И. А. Данелия, Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ, **46**, 300 (1964).
6. А. Гайлitis и В. Н. Цытович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **6**, 1103 (1963).
7. А. Гайлitis и В. Н. Цытович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, 1190 (1964).
8. Л. М. Горбунов и В. П. Силин, ЖЭТФ, **47**, 203 (1964).
9. С. И. Сыроватский, В. Л. Гинзбург, Происхождение космических лучей, Гостехиздат, М., 1963.
10. А. Гайлitis, В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **46**, 1726 (1964).

УДК 621.371 З

## ВЛИЯНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ИОНОВ НА ДИФФУЗИЮ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В НИЖНЕЙ ИОНОСФЕРЕ

*Э. И. Гинзбург*

Процесс диффузии в плазме при наличии магнитного поля идет со скоростью более медленных частиц (электронов или положительных ионов), поскольку электрическое поле, возникающее из-за различия в скоростях диффузии электронов и ионов, препятствует дальнейшему разделению этих частиц. Отсюда ясно, что наличие отрицательных ионов может заметно изменить характер диффузационного процесса. В условиях нижней ионосферы влияние отрицательных ионов существенно до высот порядка 80 км [1]; однако в работах по диффузии в ионосфере [2, 3] влияние отрицательных ионов на диффузионный процесс не учитывалось.

Применяемый ниже для решения задачи метод аналогичен предложенному в работе [3], а именно: в случае, если концентрация частиц мало меняется на длине свободного пробега и за время свободного пробега заряженных частиц, для описания движения этих частиц (в нашем случае—электронов, положительных и отрицательных ионов) можно применить макроскопические уравнения. Линеаризированная система этих уравнений совместно с уравнением для продольного электрического поля решается путем разложения искомых функций в интеграл Фурье по координатам:  $\delta n_k = \int \delta n(r) e^{-ikr} dr$  и т. д. При этом для фурье-компонент искомых функций  $\delta n_k$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} \partial \delta n_{ek}/\partial t + \alpha_{He} [D_e k^2 \delta n_{ek} + 4\pi\sigma_e (\delta n_{ek} + \delta n_{lk} - \delta n_{jk})] &= 0; \\ \partial \delta n_{lk}/\partial t + \alpha_{Hl} [D_l k^2 \delta n_{lk} + 4\pi\sigma_l (\delta n_{lk} - \delta n_{ek} - \delta n_{jk})] &= 0; \\ \partial \delta n_{jk}/\partial t + \alpha_{Hj} [D_j k^2 \delta n_{jk} + 4\pi\sigma_j (\delta n_{lk} + \delta n_{ek} - \delta n_{jk})] &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $D_e = \kappa T_e/m \nu_{em}$  — коэффициент продольной диффузии,  $\sigma_e = e^2 n_{oe}/m \nu_{em}$  — проводимость,  $\omega_{He} = eH_0/mc$  — гирочастота для электронов,  $\alpha_{He} = [1 + (\omega_{He}/\nu_{em})^2 \cos^2 \beta]/[1 + (\omega_{He}/\nu_{em})^2]^{-1}$ ,  $\beta$  — угол между  $k$  и  $H_0$ ,  $D_l, D_j, \alpha_l, \alpha_j, \omega_{Hl}, \omega_{Hj}, \alpha_{Hl}$  — соответствующие величины для ионов,  $\delta n_e, \delta n_l, \delta n_j$  — избыточная концентрация соответственно электронов, положительных и отрицательных ионов,  $n_{oe}, n_{ol}, n_{oj}$  — средняя концентрация этих частиц ( $\delta n \ll n_o, n_{oe} + n_{oj} = n_{ol}$ ),  $m, M_l, M_j$  — массы электронов и ионов,  $e$  — заряд электрона,  $T_e, T_l$  — температура электронов и ионов,  $\kappa$  — постоянная Больцмана,  $\nu_{em}, \nu_{lm}, \nu_{jm}$  — частоты столкновений электронов и ионов с нейтральными частицами,  $E$  — напряженность электрического поля,  $H_0$  — постоянное магнитное поле Земли.

Решение системы (1) записываем в виде

$$\begin{aligned} \delta n_{ek}(t) &= \delta n_{ek}^{(1)} e^{-q_1 t} + \delta n_{ek}^{(2)} e^{-q_2 t} + \delta n_{ek}^{(3)} e^{-q_3 t}; \\ \delta n_{lk}(t) &= \delta n_{lk}^{(1)} e^{-q_1 t} + \delta n_{lk}^{(2)} e^{-q_2 t} + \delta n_{lk}^{(3)} e^{-q_3 t}; \\ \delta n_{jk}(t) &= \delta n_{jk}^{(1)} e^{-q_1 t} + \delta n_{jk}^{(2)} e^{-q_2 t} + \delta n_{jk}^{(3)} e^{-q_3 t}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $q_1, q_2, q_3$  — корни характеристического уравнения.

Ограничимся случаем, когда массы и частоты столкновений для разного сорта ионов одинаковы (для нижней ионосферы это реализуется в присутствии только ионов молекулярного кислорода). При этом  $M_l = M_j = M$ ,  $\nu_{lm} = \nu_{jm}$  и

$$q_3 = \alpha_{Hl} D_l k^2, \quad \delta n_{ke}^{(3)} = 0. \quad (3)$$

Если характерные размеры возмущений области велики по сравнению с дебаевским радиусом  $R_D$

$$(kR_D)^2 = k^2 \times T_l T_e / 4\pi e^2 n_0 (T_e + T_l) \ll 1, \quad (4)$$

то для оставшихся величин в (2) имеем

$$q_1 = 4\pi\sigma_e \alpha_{He} + 4\pi\sigma_u \alpha_{Hl}, \quad (5)$$

где

$$\sigma_u = \sigma_l + \sigma_j = e^2(n_{ol} + n_{oj})/M\nu_{lm},$$

$$q_3 = k^2 \frac{(\sigma_u D_e + \sigma_e D_l) \alpha_{He} \alpha_{Hl}}{\sigma_u \alpha_{Hl} + \sigma_e \alpha_{He}}, \quad (6)$$

$$\delta n_{ek}^{(1)}/\sigma_e \alpha_{He} = - \delta n_{lk}^{(1)}/\sigma_l \alpha_{Hl} = \delta n_{jk}^{(1)}/\sigma_j \alpha_{Hl} = \frac{\delta n_{ek}(0) + \delta n_{jk}(0) - \delta n_{lk}(0)}{\sigma_e \alpha_{He} + \sigma_u \alpha_{Hl}}, \quad (7)$$

$$\delta n_{lk}^{(2)}/n_{ol} = - \delta n_{jk}^{(2)}/n_{oj} = \delta n_{ek}^{(2)}/(n_{ol} + n_{oj}),$$

$$\delta n_{ik}^{(3)} = \delta n_{jk}^{(3)} = \{n_{ol} \delta n_{jk}(0) + n_{oj} \delta n_{lk}(0)\}/(n_{ol} + n_{oj}).$$

Здесь  $\delta n_{ek}(0)$ ,  $\delta n_{lk}(0)$ ,  $\delta n_{jk}(0)$  — фурье-компоненты начального возмущения плотности электронов и ионов.

Один из характеристических корней (в нашем случае  $q_1$ ), как и следовало ожидать [3], описывает растекание первоначального заряда в плазме. Поскольку  $q_1$  значительно больше  $q_2$  и  $q_3$ , диффузионный процесс в основном идет при скомпенсированном заряде плазмы (амбиполярная диффузия). При этом  $\delta n_{ek}^{(2)} = \delta n_{ek}(0)$ . В процессе амбиполярной диффузии, описываемой корнем  $q_2$ , принимают участие электроны и нескомпенсированный ионный заряд, равный  $e(\delta n_{lk}^{(2)} - \delta n_{jk}^{(2)}) = e\delta n_{ek}(0)$ . Скомпенсированный ионный заряд расплывается со скоростью ионной диффузии, описываемой корнем  $q_3$ . В этом процессе электроны в первом приближении по  $kR_D$  не принимают участия. Коэффициент амбиполярной диффузии

$$D(\beta) = \kappa(\lambda T_e + T_l)(\lambda m \nu_{em}/\alpha_{He} + M \nu_{lm}/\alpha_{Hl})^{-1}, \quad (8)$$

где  $\lambda = (n_{ol} + n_{oj})/n_{oe}$ .

Отметим, что для нижней ионосферы  $\lambda$  может быть значительно больше единицы; поэтому анизотропия диффузионного процесса может проявляться в ионосфере на очень малых высотах. На высотах, где

$$(\omega_{He}/\nu_{em})^2 \ll 1, \quad (9)$$

характер диффузии изотропный вне зависимости от формы неоднородности. Зависимость процесса расплывания неоднородности от ее начальной структуры подробно обсуждалась в [3]. Здесь лишь отметим, что если неоднородность не очень сильно вытянута вдоль магнитного поля (см. [3]), то изотропия диффузии может иметь место вплоть до высот, где нарушено условие (9). Для этого достаточно, чтобы  $(\omega_{Hl}/\nu_{lm})^2 \ll 1$ . Коэффициент изотропной диффузии

$$D = \kappa(\lambda T_e + T_l)/(M \nu_{lm} + \lambda m \nu_{em}). \quad (10)$$

Если пренебречь влиянием отрицательных ионов на диффузию, то  $\lambda = 1$  и коэффициент диффузии будет существенно занижен.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн в ионосфере, изд. АН СССР, М., 1960.
2. Б. Н. Гершман, Радиотехника и электроника, 1, 720 (1956); В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 50 (1960).
3. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 44, 1302 (1963).

Новосибирский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию  
15 декабря 1964 г.

## ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ИЗ ПЛАЗМЫ

*А. Д. Патарая и В. И. Свимонишвили*

Рассмотрено тормозное излучение из плазмы с учетом теплового движения электронов, ионов и направленного движения электронов. Эффект когерентности излучения в работе не учитывался. Результаты приведены в системе, где  $\hbar = c = 1$ , а температура измеряется в энергетических единицах.

1. Рассмотрим в нерелятивистском случае тормозное излучение электрона из плазмы с учетом теплового движения электронов и ионов. Полную мощность тормозного излучения можно вычислить методами, подобными приведенным в работе [1]. Окончательный вид формулы для мощности излучения таков:

$$P(T_e, T_i) = \frac{64}{3} \frac{e^4}{137} \frac{N_i N_e}{m_e \sqrt{2\pi}} \left[ \frac{T_e}{m_e} + \frac{T_i}{m_i} \right]^{1/2}. \quad (1)$$

Здесь  $T_e$ ,  $m_e$ ,  $N_e$  и  $T_i$ ,  $m_i$ ,  $N_i$  — температуры, массы и концентрации электронов и ионов соответственно.

Заметим что выражение (1) получено в пренебрежении отдачей иона при каждом единичном акте излучения. Очевидно, что при выполнении условия  $T_i \gg (m_i/m_e)T_e$  необходим учет вклада температурных эффектов ионов.

2. Рассмотрим теперь в нерелятивистском случае тормозное излучение из плазмы с учетом направленного движения электронов. Функция распределения электронов по скоростям — максвелловская в системе отсчета, движущейся со скоростью  $v_1$ .

Спектр мощности тормозного излучения имеет вид

$$\begin{aligned} P(T_e, k) dk = & \frac{32}{3} \frac{e^4}{137} \frac{N_i N_e}{m_e v_1} (2\pi m_e T_e)^{-1/2} dk \int dv_0 \exp \left[ -\frac{m_e}{2T_e} (v_0^2 + v_1^2) \right] \times \\ & \times \operatorname{sh} \frac{m_e}{T_e} v_0 v_1 \ln \frac{v_0 + (v_0^2 - 2k/m_e)^{1/2}}{v_0 - (v_0^2 - 2k/m_e)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Точно решить интеграл не удается, поэтому разложим подынтегральное выражение в ряд по степеням малого параметра  $(m_e v_1^2 / 2T_e)^{1/2}$  и ограничимся двумя первыми членами разложения. Окончательно получим

$$\begin{aligned} P(T_e, k) dk = & \frac{16}{3} \frac{e^4}{137} \frac{N_i N_e}{m_e^2} \left( \frac{2m_e}{\pi T_e} \right)^{1/2} \exp \left( -\frac{k}{2T_e} \right) K_0 \left( \frac{k}{2T_e} \right) \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{m_e}{T_e} \right) v_1^2 \left[ 1 + 4\sqrt{\frac{W_{1/2, 1/2}(k/T_e)}{K_0(k/2T_e)}} \right] \right\} dk, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $W_{1/2, 1/2}$  — функция Уиттекера [2],  $K_0$  — одна из разновидностей цилиндрических функций [2].

Приведем выражение для полной мощности тормозного излучения

$$P(T_e) = \frac{64}{3} \frac{e^4}{137} \frac{N_i N_e}{m_e \sqrt{2\pi}} \left( \frac{T_e}{m_e} \right)^{1/2} A(v_1). \quad (4)$$

Здесь

$$A(v_1) = \frac{1}{2} \left[ \exp \left( -\frac{m_e}{2T_e} v_1^2 \right) + \left( 1 + \frac{m_e}{T_e} v_1^2 \right) \left( \frac{2T_e}{m_e v_1^2} \right)^{1/2} \Phi \left( \left( \frac{m_e v_1^2}{2T_e} \right)^{1/2} \right) \right],$$

$\Phi(x)$  — интеграл ошибок Гаусса [2]. Легко показать, что мощность излучения при постоянной температуре увеличивается с увеличением скорости пучка.

3. Исследуем тормозное излучение релятивистского пучка электронов в плазме. Функция распределения, нормированная в пространстве импульсов, выглядит следующим образом:

$$f_e = \frac{1}{4\pi m_e T_e \sqrt{m_e^2 + p_1^2} K_2(m_e/T_e)} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{m_e T_e} \left[ \sqrt{m_e^2 + p_1^2} \sqrt{m_e^2 + p_0^2} - (p_0, p_1) \right] \right\}, \quad (5)$$

где  $p_1$  — макроскопический импульс электронов до столкновения с ионом,  $K_2(m_e/T_e)$  — модифицированная функция Бесселя II рода [2].

Вычисления производятся для крайне релятивистского пучка, когда  $p_1 \gg m_e$  (однако температура  $T_e$  считается нерелятивистской). Разлагая мощность тормозного излучения в ряд и сохраняя члены первого порядка малости относительно  $T_e/m_e$ , получаем

$$P(T_e) = \frac{4}{137} \frac{e^4 N_l N_e}{m_e^2} \left\{ \left[ \ln \frac{2p_1}{m_e} - \frac{1}{3} \right] + \frac{T_e}{2m_e} \right\} p_1. \quad (6)$$

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. И. Коган и А. Б. Мигдал, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, изд. АН СССР, М., 1958.
- 2 И. С. Радштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.

Институт физики АН Груз ССР

Поступила в редакцию  
12 октября 1964 г.

УДК 621.372.853.2/3

## ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ГИРОТРОПНЫМ ФЕРРИТОМ

Э. Д. Газазян и О. С. Мергелян

В работе рассмотрен эффект Вавилова—Черенкова в круглом волноводе, который заполнен средой с магнитной проницаемостью [1]

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu - ig & 0 & 0 \\ ig & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Такой средой, обладающей магнитной гиротропией, может быть феррит, помещенный в постоянное магнитное поле. Ниже вычислены потери энергии частицей на излучение и исследован спектр излучаемых волн.

**1. Поле точечного заряда в гиротропном феррите.** Пусть точечный заряд  $e$  движется со скоростью  $v$  в среде с характеристиками  $\epsilon$  и  $\mu_{ik}$ , где  $\mu_{ik}$  задается формулой (1). В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  заряд имеет координаты  $r = 0, z = vt$ . Поле заряда имеет вид [2]

$$E(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega, r) \exp \left[ i \frac{\omega}{v} (z - vt) \right] d\omega, \quad (2)$$

где

$$E_z(\omega, r) = -\frac{e}{4v^2} \frac{| \omega |}{\epsilon \alpha} \left\{ [(\alpha - 1)\xi + 2] \bar{H}_0^1 \left( \frac{| \omega |}{v} s_1 r \right) + [(\alpha + 1)\xi - 2] \bar{H}_0^1 \left( \frac{| \omega |}{v} s_2 r \right) \right\};$$

$$E_\varphi(\omega, r) = \frac{e}{2v^2} \frac{\mu}{g} \frac{\omega}{\epsilon \alpha} \left[ -s_1 \bar{H}_1^1 \left( \frac{| \omega |}{v} s_1 r \right) + s_2 \bar{H}_1^1 \left( \frac{| \omega |}{v} s_2 r \right) \right]; \quad (3)$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{g^2 \beta^2 \epsilon \mu}}; \quad \xi = \beta^2 \epsilon \mu - 1 - \frac{g^2}{\mu^2} \beta^2 \epsilon \mu;$$

$$s_{1,2} = \sqrt{\beta^2 \epsilon \mu - 1 + \frac{g^2}{2\mu^2} \beta^2 \epsilon \mu (-1 \pm \alpha)};$$

$$H_{0,1}^1(|\alpha|) = J_{0,1}(|\alpha|) + i \frac{|\alpha|}{\alpha} N_{0,1}(|\alpha|).$$

Из формул (2) — (3) видно, что излучение имеет место на частотах  $s_1^2 > 0$  ( $s_2^2 > 0$ ) и право (лево) поляризовано по эллипсу.

2. Пусть теперь заряженная частица движется по оси круглого волновода радиуса  $r_0$ . Отраженное от стенок волновода поле ищем в виде

$$E'(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E'(\omega, r) e^{i \frac{\omega}{v} (z - vt)} d\omega, \quad (4)$$

где

$$E_z'(\omega, r) = a_1(\omega) J_0\left(\frac{\omega}{v} s_1 r\right) + a_2(\omega) J_0\left(\frac{\omega}{v} s_2 r\right); \quad (5)$$

$$E_\varphi'(\omega, r) = b_1(\omega) J_1\left(\frac{\omega}{v} s_1 r\right) + b_2(\omega) J_1\left(\frac{\omega}{v} s_2 r\right);$$

$$b_{1,2} = \frac{2\mu}{gs_{1,2}(-1 \pm \alpha)} a_{1,2}.$$

Из условия обращения в нуль на стенах волновода  $\varphi$ - и  $z$ -компонент полного поля получаются следующие выражения для коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ :

$$a_1 = \frac{e}{4v^2} \frac{\omega}{\epsilon \alpha} \frac{1}{\Delta} \left\{ J_0\left(\frac{\omega}{v} s_2 r_0\right) \left( -s_1 H_1^1\left(\frac{|\omega|}{v} s_1 r_0\right) + s_2 \bar{H}_1^1\left(\frac{|\omega|}{v} s_2 r_0\right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{J_1\left(\frac{\omega}{v} s_2 r_0\right)}{s_2(\alpha+1)} \left\{ c_1 \bar{H}_0^1\left(\frac{|\omega|}{v} s_1 r_0\right) + c_2 H_0^1\left(\frac{|\omega|}{v} s_2 r_0\right) \right\} \frac{|\omega|}{\omega} \right\}; \\ \Delta = \frac{1}{s_1(\alpha-1)} J_1\left(\frac{\omega}{v} s_1 r_0\right) J_0\left(\frac{\omega}{v} s_2 r_0\right) + \frac{1}{s_2(\alpha+1)} J_1\left(\frac{\omega}{v} s_2 r_0\right) J_0\left(\frac{\omega}{v} s_1 r_0\right); \quad (6)$$

$$c_{1,2} = (\alpha \mp 1) \xi \pm 2.$$

Коэффициент  $a_2$  получается из  $a_1$  заменой  $\alpha \rightarrow -\alpha$  и  $s_1 \leftrightarrow s_2$ .

Тормозящая сила, действующая на частицу со стороны полного поля, дает нам потери энергии частицей на единице пути:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW_1}{dz} + \frac{dW_2}{dz} \quad (7)$$

(индекс 1 относится к правополяризованному, индекс 2 — к левополяризованному по эллипсу излучению). Правополяризованное излучение с интенсивностью

$$\frac{dW_1}{dz} = \frac{ie^2}{4v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\omega|}{\epsilon \alpha \Delta} \left\{ \frac{J_1\left(\frac{|\omega|}{v} s_2 r_0\right)}{s_2(\alpha+1)} \left[ c_1 N_0\left(\frac{|\omega|}{v} s_1 r_0\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + c_2 N_0\left(\frac{|\omega|}{v} s_2 r_0\right) \right] + J_0\left(\frac{\omega}{v} s_2 r_0\right) \left[ s_2 N_1\left(\frac{|\omega|}{v} s_2 r_0\right) - s_1 N_1\left(\frac{|\omega|}{v} s_1 r_0\right) \right] \right\} d\omega \quad (8)$$

имеет дискретный спектр: интенсивность отлична от нуля на частотах, удовлетворяющих условиям  $\Delta = 0$ ,  $s_1^2 > 0$ . Интенсивность левополяризованных волн  $dW_2/dz$  получается из  $dW_1/dz$  (8) заменой  $\alpha \rightarrow -\alpha$ ,  $s_1 \leftrightarrow s_2$ . Эти волны имеют спектр, определяемый из условий  $\Delta = 0$ ,  $s_2^2 > 0$ . При  $g = 0$  результаты совпадают с результатами для изотропного случая, исследованного в [3, 4].

Авторы благодарны Г. М. Гарияну за интерес к работе и обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Л. Микаелян, Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах, Гос-техиздат, М.—Л., 1963.
- 2 Э. Д. Газазян и О. С. Мергелян, ЖТФ, 1, 158 (1965).
3. В. М. Болотовский, Диссертация, ФИАН, М., 1954.
- 4 Б. М. Болотовский, УФН, 75, 295 (1961).

Центральная научно-исследовательская  
физико-техническая лаборатория АН Арм. ССР

Поступила в редакцию  
21 июля 1964 г.

УДК 621.378.1

## О СПОНТАННОМ ИЗЛУЧЕНИИ ЧАСТИЦЫ В РЕЗОНАТОРЕ С НЕСКОЛЬКИМИ СВЯЗАННЫМИ ТИПАМИ КОЛЕБАНИЙ

*A. С. Агабекян, A. З. Грасюк, A. Н. Ораевский*

Если на диапазон частот, занимаемый линией излучения, приходится несколько типов колебаний резонатора (несколько мод), то обычно расчеты ведутся в предположении, что моды резонатора независимы (ортогональны) [1]. Однако практически эти моды не являются независимыми. Между ними всегда возможна некоторая связь [2], степень которой определяется геометрическими параметрами резонатора, свойствами вещества и т. д. Ясно, что эта связь должна влиять на физические процессы в резонаторе, в частности, на спонтанное и индуцированное излучение возбужденной частицы в резонаторе.

Расчет вероятности спонтанного излучения будем вести методом, аналогичным использованному в [3]. Так же, как и в [3], считаем, что энергетический спектр частицы, заключенной внутри резонатора, состоит из двух неперекрывающихся непрерывных полос с одинаковой шириной  $\Delta E$  и со средними уровнями  $E_1$  и  $E_2$ . Совокупность непрерывных квантовых чисел, определяющих состояние, обозначим через  $\alpha$ . Энергия состояния  $\alpha$  есть  $E_\alpha$ .

Будем искать вероятность  $W^{(cn)}$  спонтанного перехода частицы в единицу времени из состояния  $\alpha_2$ , соответствующего верхней полосе 2, в какое-то состояние  $\alpha_1$  нижней полосы 1. Если ввести плотность  $w_{\alpha_2 \alpha_1}^{(cn)}$  такой вероятности, определив ее так, что вероятность спонтанного перехода из состояния  $\alpha_2$  в интервал состояний  $(\alpha_1, \alpha_1 + d\alpha_1)$  равна  $w_{\alpha_2 \alpha_1}^{(cn)} d\alpha_1$ , то

$$W^{(cn)} = \int f(E_{\alpha_2}) w_{\alpha_2 \alpha_1}^{(cn)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1)$$

где  $f(E_{\alpha_2})$  — вероятность того, что частица, обладая энергией в полосе 2, находится в интервале  $(\alpha_2, \alpha_2 + d\alpha_2)$ . Интегрирование в (1) ведется по всем значениям  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

Как показано в [3], величина  $w_{\alpha_2 \alpha_1}^{(cn)}$  (для перехода в некоторую изолированную  $i$ -ую моду) определяется формулой

$$w_{\alpha_2 \alpha_1}^{(cn)}(i) = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} |p_{\alpha_1 \alpha_2}|^2 U_i(\omega) (e^{\frac{\hbar\omega ab}{kT}} - 1), \quad (2)$$

где  $p_{\alpha_1 \alpha_2}$  — матричный элемент дипольного момента перехода  $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ ,  $U_i(\omega)$  — спектральная плотность энергии флукутаций (т. е. энергия флукутаций на единичный объем и единичный интервал частот в  $i$ -ой моде).

Выражение для  $U_i(\omega)$  в общем случае нескольких связанных мод можно полу-

чить, рассматривая систему мод как совокупность связанных осцилляторов с затуханием, в каждом из которых действует флуктуационное поле  $F_d(t)$  в соответствии с обобщенной теоремой Найквиста. Система дифференциальных уравнений для полей в каждой из мод резонатора имеет вид

$$\ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \omega_1^2 [F_1(t) + K_{12}x_2 + \dots + K_{1n}x_n];$$

$$\ddot{x}_n + 2\delta_n \dot{x}_n + \omega_n^2 x_n = \omega_n^2 [F_n(t) + K_{n1}x_1 + \dots + K_{n,n-1}x_{n-1}], \quad (3)$$

где  $\omega_1 \dots n$  — парциальные частоты,  $K_{il}$  — коэффициенты связи ( $il = 1, 2, \dots, n$ ),  
 $\delta_1 \dots n$  — затухание в каждой из мод.

Ограничимся для простоты случаем двух связанных мод\* ( $n = 2$ ), которые будем рассматривать как контуры с эквивалентными параметрами  $L_i$ ,  $R_i$ ,  $C_i$ . Значение  $U_{1,2}(\omega)$  в этом случае можно получить из системы (3) методом, аналогичным примененным у [4], где проведен расчет энергии флуктуаций в одиночном контуре. В результате получим:

$$\begin{aligned}
U_1(\omega) = & 4\omega_1 \left[ \frac{\omega_2^2}{Q_2^2} + \left( \omega - \frac{\omega_2^2}{\omega} \right)^2 + \frac{R_2}{R_1} K_{12}^2 \omega^2 \right] V^{-1} Q_1^{-1} \left\{ \left[ \left( \omega - \frac{\omega_1^2}{\omega} \right) \frac{\omega_2}{Q_2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( \omega - \frac{\omega_2^2}{\omega} \right) \frac{\omega_1}{Q_1} \right]^2 + \left[ K_{12} K_{21} \omega^2 + \frac{\omega_1 \omega_2}{Q_1 Q_2} - \left( \omega - \frac{\omega_1^2}{\omega} \right) \left( \omega - \frac{\omega_2^2}{\omega} \right) \right]^2 \right\}^{-1} P_\omega; \\
U_2(\omega) = & V^{-1} Q_2^{-1} \left\{ \left[ \left( \omega - \frac{\omega_1^2}{\omega} \right) \frac{\omega_2}{Q_2} + \left( \omega - \frac{\omega_2^2}{\omega} \right) \frac{\omega_1}{Q_1} \right]^2 + \left[ K_{12} K_{21} \omega^2 + \frac{\omega_1 \omega_2}{Q_1 Q_2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( \omega - \frac{\omega_1^2}{\omega} \right) \left( \omega - \frac{\omega_2^2}{\omega} \right) \right]^2 \right\}^{-1} 4\omega_2 \left[ \frac{\omega_1^2}{Q_1^2} + \left( \omega - \frac{\omega_1^2}{\omega} \right)^2 + \frac{R_1}{R_2} K_{21}^2 \omega^2 \right] P_\omega,
\end{aligned} \tag{4}$$

где  $Q_1, Q_2$  — добродатности контуров,  $P_\omega = \hbar\omega(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1}$ ,  $V$  — объем резонатора.

Искомая вероятность спонтанного излучения  $W^{(\text{сп})}$  получается в результате подстановки (4) в (2) и (1) и интегрирования, которое можно провести, если известны функции  $f(E_{\alpha_i})$  и  $|p_{\alpha_i, \alpha_2}|^2$ . Считая  $|p_{\alpha_i, \alpha_2}|^2$  медленно меняющейся функцией, обозначим ее среднее значение через  $|p_{12}|^2$ . Введем плотности состояний уровней  $\rho_1(E)$  и  $\rho_2(E)$  так, что  $\rho(E)dE$  число состояний в интервале энергий  $(E, E + dE)$ . Тогда на основании (1) и (2) получим для  $W^{(\text{сп})}$  в первую моду (для второй все вычисления проводятся аналогично):

$$W_1^{(\text{cn})} = \frac{16\pi^2\hbar |p_{12}|^2 \omega_1^2}{VQ_1} \int_{\omega_b - \Delta\omega_{12}/2}^{\omega_b + \Delta\omega_{12}/2} \rho_1(\hbar\omega_b') d\omega_b' \int_{\omega_a - \Delta\omega_{12}/2}^{\omega_a + \Delta\omega_{12}/2} f(\hbar\omega_a') \times \\ \times \rho(\hbar\omega_a') \left[ \frac{\omega_2^2}{Q_2^2} + \left( \omega_{ab}' - \frac{\omega_2^2}{\omega_{ab}'} \right)^2 + \frac{R_2}{R_1} K_{12}^2 \omega_{ab}' \right] \left\{ \left[ \left( \omega_{ab}' - \frac{\omega_1^2}{\omega_{ab}'} \right) \frac{\omega_2}{Q_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \omega_{ab}' - \frac{\omega_2^2}{\omega_{ab}'} \right) \frac{\omega_1}{Q_1} \right]^2 + \left[ K_{21} K_{12} \omega_{ab}'^2 + \frac{\omega_1 \omega_2}{Q_1 Q_2} - \left( \omega_{ab}' - \frac{\omega_1^2}{\omega_{ab}'} \right) \left( \omega_{ab}' - \frac{\omega_2^2}{\omega_{ab}'} \right) \right]^2 \right\}^{-1} d\omega_a' , \quad (5)$$

где  $\Delta\omega_L = \Delta E/\hbar$ ;  $\omega_{ab} = \omega_a - \omega_b$ ;  $\omega_{a_1 b_1} = E_{1,2}/\hbar$ .

Рассмотрим два предельных случая.

а)  $\Delta\omega_a \ll \Delta\omega_{p1,2} = \omega_{1,2}/Q_{1,2}$  (ширина линии много меньше полосы пропускания резонатора). В этом случае уровни  $E_1$  и  $E_2$  можно считать дискретными:

\* Обобщение на  $n$ -связанных мод ( $n > 2$ ) не представляет принципиальных затруднений, хотя и связано со значительными вычислительными трудностями.

$$\rho_i(E) = g_i \delta(E - E_i) \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

где  $g_i$  — степень вырождения  $i$ -го уровня. Подставляя (6) в (5) и принимая во внимание условие нормировки  $\int_{\Delta E} f(E) \rho_2(E) dE = 1$ , получаем вероятность спонтанного перехода  $W_1^{(сп)}$  в первую моду:

$$W_1^{(сп)} = \frac{16\pi^2}{\hbar} |p_{12}|^2 g_1 \frac{\omega_1^2}{Q_1 V} \left[ \frac{\omega_2^2}{Q^2} + \left( \omega_{ab} - \frac{\omega_2^2}{\omega_{ab}} \right)^2 + \frac{R_2}{R_1} K_{12}^2 \omega_{ab}^2 \right] \left\{ \left[ \left( \omega_{ab} - \frac{\omega_1^2}{\omega_{ab}} \right) \times \right. \right. \\ \times \frac{\omega_2}{Q_2} + \left. \left( \omega_{ab} - \frac{\omega_2^2}{\omega_{ab}} \right) \frac{\omega_1}{Q_1} \right]^2 + \left[ K_{12} K_{21} \omega_{ab}^2 + \frac{\omega_1 \omega_2}{Q_1 Q_2} - \left( \omega_{ab} - \frac{\omega_1^2}{\omega_{ab}} \right) \left( \omega_{ab} - \frac{\omega_2^2}{\omega_{ab}} \right) \right]^2 \left. \right\}^{-1}. \quad (7)$$

Если  $\omega_{ab} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \omega_1 = \omega_2$ ,  $Q_1 = Q_2$ ,  $K_{12} = K_{21} = K$ , формула (7) дает

$$W^{(сп)} = A Q_{\text{экв}}^2 / Q, \quad (8)$$

где

$$1/Q_{\text{экв}} = K^2 + 1/Q^2; \quad A = \frac{16\pi^2}{\hbar V} |p_{12}|^2 g_1.$$

б)  $\Delta\omega_L \gg \Delta\omega_{pl} = \omega_i/Q_i$  ( $i = 1, 2$ ). Если считать функции  $f(E)$  и  $\rho_2(E)$  достаточно плавными, т. е. мало изменяющимися в полосе  $\hbar\omega_L/Q_i$ , то интеграл (5) по  $d\omega'_a$  можно взять в общем виде, полагая  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ ,

$$W_1^{(сп)} = \frac{16\pi^2}{\hbar} \frac{\omega_0^2}{VQ} \int_{\omega_b - \Delta\omega_L/2}^{\omega_b + \Delta\omega_L/2} \frac{\rho_1(\hbar\omega'_b) \rho_2[\hbar(\omega'_b + \omega_0)] f[\hbar(\omega'_b + \omega_0)] d\omega'_b}{\sqrt{(\omega_0/Q)^2 + K^2 \omega_0^2}}. \quad (9)$$

Предполагая затем, что плотности уровней постоянны  $\rho_i(E) = g_i/\Delta E$  (где  $g_i$  — полное число состояний в  $i$ -ой полосе;  $i = 1, 2$ ), получим из (9)

$$W^{(сп)} = \frac{16\pi^2}{\hbar} |p_{12}|^2 \frac{1}{QV} g_1 \frac{\omega}{\sqrt{1/Q^2 + K^2 \Delta\omega_L}} = A \frac{Q_{\text{экв}}}{Q} Q_L; \\ Q_L = \omega / \Delta\omega_L.$$

Таким образом, в обоих рассматриваемых случаях связь между модами уменьшает вероятность спонтанного излучения.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. В. Карлов, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника (в печати).
- 2 F. F. Bertain, Comptes Rendus, 258, 123 (1964).
- 3 Ф. В. Бункин, А. Н. Ораевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 181 (1959).
- 4 Л. Бриллюэн, Наука и теория информации, гл. II, Физматгиз, М., 1960.

УДК 62 — 503.53

**ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ С ЛЮФТОМ ПРИ УЧЕТЕ ИНЕРЦИИ ОБЪЕКТА И ГИПОТЕЗЕ АБСОЛЮТНО НЕУПРУГОГО УДАРА**

B. A. Брусин

Рассматривается следящая система, структурная модель которой состоит из усилителя, исполнительного двигателя и объекта, связанных между собой замкнутой цепью воздействий. Обозначим выходную переменную усилителя, которая является также входной величиной двигателя, через  $\mu(t)$ , выходную переменную двигателя — через  $x(t)$ , а выходную переменную объекта, являющуюся в то же время выходной переменной всей системы, — через  $y(t) = U_{\text{вых}}(t)$ . Входной переменной усилителя пусть будет величина  $r(t) = r(t) + \tau \dot{r}(t)$ , где  $r(t) = U_{\text{вх}}(t) - y(t)$  — ошибка слежения ( $U_{\text{вх}}(t)$  — входной сигнал следящей системы).

Усилитель, исполнительный двигатель и объект описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} l_s \mu^{(s)}(t) + \dots + l_1 \dot{\mu}(t) + \mu(t) &= k_2(r(t) + \alpha \dot{x}(t)), \\ M \ddot{x}(t) + \delta_1 \dot{x}(t) &= k_1 \mu(t) - N(t), \\ m \ddot{y}(t) + \delta_0 \dot{y}(t) &= N(t) \end{aligned} \quad (1)$$

( $N(t)$  — обобщенная сила, действующая на объект со стороны двигателя). Предполагается, что

$$m > 0, \quad M > 0, \quad \delta_0 > 0, \quad \delta_1 > 0, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad (2)$$

$L_s(p) = l_s p^s + \dots + l_1 p + 1$  — гурвицев полином. Далее, между исполнительным двигателем и объектом имеется люфт\*; следовательно, сила  $N(t)$  на некоторых отрезках времени может тождественно обращаться в нуль.

Обозначим величину люфта, через  $2\Delta$ . Тогда  $|x - y| \leq \Delta$ . В момент  $\bar{t}$  соединения двигателя с объектом происходит удар; при этом  $x$  и  $y$  будут терпеть разрыв первого рода, а  $N(t)$  будет принимать бесконечно большое значение. В работе предполагается, что удар — абсолютно неупругий. Тогда по формуле удара

$$\begin{aligned} \dot{y}(\bar{t}+0) &= \dot{y}(\bar{t}-0) + [M/(m+M)][\dot{x}(\bar{t}-0) - \dot{y}(\bar{t}-0)], \\ \dot{x}(\bar{t}+0) &= \dot{x}(\bar{t}-0) - [m/(m+M)][\dot{x}(\bar{t}-0) - \dot{y}(\bar{t}-0)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Существует круг задач синтеза управляющих систем, в которых требуется, чтобы при входном сигнале, достаточно быстро убывающем по абсолютной величине, выход системы также стремился к нулю; при этом не имеет значения поведение остальных координат системы (см. [1—3]). Этому требованию должна удовлетворять и рассматриваемая следящая система. В связи с этим следящую систему, описываемую уравнениями (1), назовем абсолютно устойчивой, если для всех  $U_{\text{вх}}(t)$ , таких, что

$$\int_0^\infty |U_{\text{вх}}(t)| dt < \infty, \quad |U_{\text{вх}}(t)| < \infty, \quad |\dot{U}_{\text{вх}}(t)| < \infty \quad (0 < t < \infty), \quad (4)$$

$y(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема.** Для абсолютной устойчивости системы (1) — (3) достаточно, чтобы 1) полиномы  $[(M+m)p^2 + (\delta_0 + \delta_1)p]L_s(p) + k(1 + \tau p) - akp$ ,  $(Mp + \delta_1)L_s(p) - ak$  были гурвицевыми.

$$2) \operatorname{Re}[K(j\omega)(-mj\omega + \delta_0)] + \delta_0 > 0 \quad (0 < \omega < \infty),$$

где

$$K(p) = \frac{(mp^2 + \delta_0 p)L_s(p) + k(1 + \tau p)}{p(Mp + \delta_1)L_s(p) - akp}.$$

В частном случае при  $\frac{m}{\delta_0} \rightarrow 0$ ,  $\delta_0 \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  результаты теоремы совпадают с результатами работы [5].

\* В качестве модели люфта берется модель Тастина [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин, ДАН СССР, 145, 52 (1962).
2. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Физматгиз, М., 1958.
3. А. Г. Иосифьян, Б. М. Каган, Основы следящего привода, Госэнергоиздат, М.—Л., 1954.
4. А. Тустин, Proc. IEE, 94, 143 (1947).
5. В. А. Брусиц, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 539 (1964).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
23 декабря 1964 г

УДК 681.142 · 65

### ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ЧИСЛО РАБОЧИХ

*В. Н. Шевченко*

1. Дано  $m$  видов деталей, причем деталь  $k$ -го вида должна пройти последовательно  $l_k$  видов обработки ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Если известна пара  $k, h$ , то будем говорить, что дана  $j$ -я операция, где  $j = \sum_{v=1}^{k-1} l_v + h$  при  $k = 2, 3, \dots, n$  и  $j = h$  при  $k = 1$  (т. е.  $j = 1, 2, \dots, l$ , где  $l = \sum_{v=1}^m l_v$ ). Имеется  $n$  станков и заданы производительности  $i$ -го станка по  $j$ -й операции числа  $a_{ij} \geq 0$ , причем для каждого  $j$  найдется такое  $i$ , что  $a_{ij} > 0$ . Дополним совокупность всех операций операцией с номером  $j = 0$  (простой). Режимом будем называть функцию  $r = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ , которая каждому  $i$  ставит в соответствие некоторое  $j_i$  ( $j_i = 0, 1, \dots, l$ ). Пусть все режимы занумерованы и  $R = \{1, 2, \dots, N\}$  — множество этих номеров. Расписанием  $\rho$  назовем функцию  $\rho(t)$  ( $0 \leq t \leq T_p$ ), которая каждому моменту времени  $t$  из  $[0, T_p]$  ставит в соответствие один из режимов  $r(t) \in R$ , причем  $r(t)$  меняет свое значение лишь в конечном числе точек интервала  $(0, T_p)$  (здесь  $T_p$  — время действия расписания,  $\rho$  — некоторое положительное число).

Рассмотрим  $l$ -мерное пространство  $\mathcal{E}$  векторов  $X$  с компонентами  $x_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ). Каждому режиму  $r \in R$  поставим в соответствие вектор  $P(r) \in \mathcal{E}$  с компонентами  $p_j(r) = \sum a_{ij}$ , где сумма берется по всем индексам  $i$ , которым  $r$ -ый режим поставил в соответствие индекс  $j$ . Таким образом,  $p_j(r)$  есть скорость  $j$ -ой операции при  $r$ -ом режиме.

Обозначим через  $H$  множество тех точек  $X \in \mathcal{E}$ , компоненты которых удовлетворяют неравенствам

$$x_j \geq x_{j+1} \quad (j \neq \sum_{v=1}^k l_v). \quad (1)$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = P(r) \quad (2)$$

с начальными условиями  $x_j(0) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ). Очевидно, каждому расписанию  $\rho = r(t)$  ( $0 \leq t \leq T_p$ ) отвечает решение  $X_\rho(t)$  системы (2), где в правую часть вместо  $r$  подставлено  $r(t)$ , а компоненты  $x_j(t)$  этого решения являются кусочно-линейными функциями от  $t$ . Расписание  $\rho = r(t)$  будем называть возможным, если

$$X_\rho(t) \in H \quad (0 \leq t \leq T_p). \quad (3)$$

Пусть дан  $\pi \in \mathcal{E}$ , для которого  $\pi_j = \pi_{j+1}$  для  $j \neq \sum_{v=1}^l l_v$  и  $\pi_j > 0$  для  $j = \sum_{v=1}^l l_v$ . Тогда  $\pi \in H$  есть плановое задание для рассматриваемого участка. Расписание  $\rho = r(t)$  будем называть  $A$ -допустимым, если оно возможное и если решение  $X_\rho(t)$  системы (2) удовлетворяет условию

$$X_{\rho}(T_{\rho}) = \pi. \quad (4)$$

В задаче *A* требуется среди всех *A*-допустимых расписаний  $\rho$  найти такое, для которого  $T_{\rho}$  является наименьшим.

Назовем режим  $r = (j_1, \dots, j_n)$  *B*-режимом, если не менее чем для  $s (0 < s < n)$  индексов выполняется равенство  $j(i, s) = 0$ . Расписание  $\rho = r(t)$  назовем *B*-допустимым, если оно *A*-допустимо и состоит только из *B*-режимов. В задаче *B* требуется среди всех *B*-допустимых расписаний  $\rho$  найти такое, для которого  $T_{\rho}$  является наименьшим. Такая задача естественно возникает, когда число рабочих на рассматриваемом участке меньше числа станков и один рабочий одновременно обслуживает не более одного станка.

2. Пусть  $g_i$ —множество значений, которое может принимать  $j_i$ , т. е.  $j \in g_i$ , если  $a_{ij} \neq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) и, кроме того,  $0 \notin g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Введем символ  $\sum_{j_i=j}$ , означающий суммирование по всем режимам, в которых  $i$ -ый станок выполняет  $j$ -ую операцию, и символ  $\sum_{j_i \in g_i}$  — суммирование по всевозможным режимам.

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования. Требуется найти минимум  $T = \sum_{j_i \in g_i} \tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$  при условиях

$$\sum_{l=1}^n a_{lj} \sum_{j_i=j} \tau(j_1, j_2, \dots, j_n) = \pi_j \quad (j = 1, 2, \dots, l), \quad (5)$$

$$\tau(j_1, j_2, \dots, j_n) \geq 0,$$

где  $j_i \in g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Нетрудно показать, что (5) имеет решение. Пусть  $T_0 = \min T$ . Связь между (5) и задачей *A* устанавливается теоремой 1 из [1, 2].

*Теорема 1.* Для любого *A*-допустимого расписания выполняется неравенство  $T_{\rho} \geq T_0$ . Каково бы ни было  $\epsilon > 0$ , найдется *A*-допустимое расписание  $\rho$  такое, что  $T_{\rho} < T_0 + \epsilon$ .

Рассмотрим следующие две задачи:

1) найти минимум  $\bar{T}$  при условиях

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n a_{lj} t_{lj} &= \pi_j & (j = 1, 2, \dots, l), \\ \sum_{j \in g_i} t_{lj} &= \bar{T} & (i = 1, 2, \dots, n), \\ t_{lj} &> 0 & (i = 1, 2, \dots, n; j \in g_i); \end{aligned} \quad (6)$$

2) найти решение системы

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \tau(j_1, j_2, \dots, j_n) &= t_{lj} & (i = 1, 2, \dots, n; j \in g_i), \\ \tau(j_1, j_2, \dots, j_n) &\geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } \sum_{j \in g_i} t_{lj}.$$

Как показано в [1], система (7) всегда имеет решение и, следовательно,  $T_0 = \bar{T}_0$ , где  $\bar{T}_0 = \min \bar{T}$ . Обозначим через  $m$  множество решений задачи (7), где  $t_{lj}$  получены в результате решения задачи (6). Нетрудно видеть, что  $m$  совпадает с множеством решений задачи (5).

3. *B*-решением задачи (7) назовем такое ее решение, в которое входят только *B*-режимы. Здесь имеет место следующая теорема.

*Теорема 2.* Для того, чтобы задача (7) имела *B*-решение, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{i=1}^n t_{i0} \geq sT, \quad (8)$$

где  $T = \sum_{j \in g_i} t_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

Пусть  $T_0(s) = \min \tilde{T}$  в следующей задаче: найти минимум  $\tilde{T}$  при условиях

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{ij}t_{ij} &= \pi_j \quad (j = 1, 2, \dots, l), \\ \sum_{j \in g_i} t_{ij} &\geq \tilde{T} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n t_{i0} &= s\tilde{T}, \\ t_{ij} &\geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда из теоремы 2 следует теорема 3.

*Теорема 3.* 1) Для любого  $B$ -допустимого расписания выполняется неравенство  $T_\rho \geq T_0(s)$ . 2) Для любого  $\epsilon > 0$  найдется  $B$ -допустимое расписание  $\rho$ , такое, что

$$T_\rho < T_0(s) + \epsilon.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Глебский и В. Н. Шевченко, Проблемы кибернетики, **10**, 275 (1963).
2. Ю. В. Глебский и В. Н. Шевченко, Труды по вопросам применения электронных вычислительных машин в народном хозяйстве, Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете, Научно-техническое общество радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова, Горький, 1964, стр. 31.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
19 января 1965 г.