ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
246	8 сверху	... $\lvert\beta_{ik}^{-1}\rvert$ ...	... $\lvert\beta_{ik}\rvert^{-1}$ ...
263	7 снизу	... $\hat{A}_\alpha \hat{G}_a = \hat{G}_{\alpha/\alpha^2}\hat{A}_\alpha$	... $\hat{A}_\alpha \hat{G}_a = \hat{G}_{a/\alpha^2}\hat{A}_\alpha$
267	6 снизу	$\tilde{v\Psi} = \hat{K}_\vartheta \tilde{\psi}$	$\tilde{v\psi} = \hat{K}_\vartheta \tilde{\psi}$
268	10 сверху	$b = \ldots$	$b = \ldots$
276	14 снизу	... для m_ν ...	... для m_ν ...
298	6 снизу	... $\pm\{4\ \ (H_0 - \varkappa M_0) -$	.. $\pm\{4[(H_0 - \varkappa M_0) -$
317	13 сверху	... $= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{(\pi 2\bar{E} - \bar{K})}$ ...	... $= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\pi(2\bar{E} - \bar{K})}$ ...
320	9 снизу	.. $+ \frac{1}{2} j \frac{\omega_1}{u_0} \frac{V_{c_1}}{V_0} = 0$	... $+ \frac{1}{2} j \frac{\omega_1}{u_0} \frac{V_{c_2}}{V_0} = 0$
331	8 снизу	... преобразуется в точку $\bar{M}$ ...	... преобразуется в точку $\tilde{M}$ ...
344	4 снизу	$A(y) \lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta}$ ...	$A(y) = \lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta}$ ...
345	2 сверху	$B(y) = \ldots - x(t))^2] \lvert_{x(t)-y}]\} =$	$B(y) = \ldots - x(t))^2 \lvert_{x(t)=y}]\} =$
347	4 снизу	... $k_2 = 2a_1(a_2 + a_1)$	... $k_2 = 2a_1/(a_2 + a_1)$
362	7 сверху	$\frac{dy}{d\tau} = -y(\xi + x)x$ ...	$\frac{dy}{d\tau} = -y + (\xi + x)x$ ...

СОДЕРЖАНИЕ

Каменская С. А., Кисляков А. Г., Кротиков В. Д., Наумов А. И., Никонов В. Н., Порфирьев В. А., Плечков В. М., Стержнева К. М., Троицкий В. С., Федосеев Л. И., Лубяко Л. В., Сорокина Э. П. Наблюдение радиозатмений Луны на миллиметровых волнах 219

Брауде С. Я. О частотной зависимости и временном ходе отношения плотности потоков дискретных источников Кассиопея-А и Лебедь-А на декаметровых волнах 229

Сидоров В. В., Павлов А. Ф., Фахрутдинов Р. Ю. Использование фазовой техники для изучения поляризационных явлений при отражении радиоволн от метеорных следов 234

Балклав А. Редукция при учете полосы пропускания радиоинтерферометра . 244

Самохин М. В. Излучение необыкновенной волны токовым слоем магнитоактивной плазмы 251

Таланов В. И. Операторный метод описания волновых пучков в комбинированных квазиоптических системах 260

Фрейдман Г. И. О влиянии тонкого расщепления нижнего уровня Cr^{+3} в рубине на некоторые характеристики когерентного излучения 272

Островский Л. А. Взаимодействие ударных электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи 285

Филиппов Ю. Ф. К теории распространения стационарных волн конечной амплитуды в ферритах 292

Шишкин Л. А. Возбуждение магнитостатических колебаний намагниченного феррита электронным потоком 301

Гвоздовер С. Д. О воздействии слабого высокочастотного поля на электронный поток, создающий виртуальный катод 308

Железовский Б. Е. К вопросу о преобразовании частоты в ЛБВ и ЛОВ . . . 319

Неймарк Ю. И. и **Шильников Л. П.** Об одном случае рождения периодических движений 330

Тай М. Л. Условия сопряжения для плотности вероятности перехода марковского процесса с разрывными коэффициентами сноса и диффузии 341

Синицкий Л. А. О работе параметрона в режиме заданного тока возбуждения 350

Большаков В. М., Зельдин Е. С., Минц Р. М., Фуфаев Н. А. К динамике системы осциллятор—ротатор 359

Раков М. А., Шумков Ю. М. Кратные режимы в делителе частоты с двумя нелинейными элементами 372

Гостев В. И. Анализ систем автоматического управления, содержащих модулятор и однополупериодный демодулятор 380

Постников Л. В. и **Тарантович Т. М.** К теории электронно-дырочного перехода 392

Краткие сообщения и письма в редакцию

Белов И. Ф. Измерение поляризации солнечного радиоизлучения, обусловленной общим магнитным полем Солнца 400

Дымский В. Н. К теории синтеза антенн 401

Марченко В. Ф. Об энергетических соотношениях на границе нелинейной среды 405

Семенов Г. Ф. Расчет резонаторов и волноводов с многослойным диэлектриком 407

Воропаев Н. Д., Ораевский А. Н. Режимы в квантовом генераторе при наличии поглощающей примеси 409

Гончаров И. Г. Экспериментальное исследование модуляции газового оптического квантового генератора 411

Грошков Л. М., Нечаев В. Е. Экспериментальное исследование движения электронов в генерирующем магнетроне 413

Айнбиндер Н. Е., Гречишкин В. С. Уровни энергии и относительные интенсивности линий ЯКР для некоторых целых спинов 416
Соболь Г. А. О детектировании сантиметровых волн в газоразрядной плазме 420
Карманова Е. С., Эткин В. С. Некоторые вопросы теории систем с модулируемыми емкостью и сопротивлением 422
Валеев К. Г. К теории преобразования Лапласа 424

Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т IV, № 6, 1964 426

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 523.164.34

НАБЛЮДЕНИЕ РАДИОЗАТМЕНИЙ ЛУНЫ НА МИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛНАХ

С. А. Каменская, А. Г. Кисляков, В. Д. Кротиков, А. И. Наумов, В. Н. Никонов, В. А. Порфирьев, В. М. Плечков, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Л. В. Лубяко, Э. П. Сорокина

Разработана методика наблюдения радиоизлучения Луны в период затмения. Она позволила измерить во время затмений 7.VII и 30.XII 1963 года изменение эффективной температуры Луны на миллиметровых волнах. Максимальные относительные падения эффективной температуры во время затмения 7.VII на волнах $\lambda = 1{,}2$; 2,1; 4,0, 7,5 и 16 *мм* составили $>17\%$; $>8\%$; $8\% \pm 2\%$, $5\% \pm 2\%$ и $3\% \pm 2\%$, а во время затмения 30.XII на $\lambda = 1{,}2$; 4,0 и 6,0 *мм* $22{,}5\% \pm 2{,}5\%$, $12\% \pm 2\%$ и $8\% \pm 2\%$ соответственно Наилучшее согласие данных наблюдений с результатами расчета хода затмения для однородной модели Луны получается, если $\gamma/b = \left(6 \pm \frac{1{,}5}{1{,}0}\right) \cdot 10^4$ ($\gamma = (k\rho c)^{-1/2}$, k — теплопроводность, ρ — плотность, c — теплоемкость, b—удельный тангенс угла потерь вещества Луны). Найденная величина γ/b для верхнего слоя лунной породы в пределах точности измерений совпадает со значением, полученным ранее из измерений фазовой зависмости радиоизлучения Луны и характеризующим свойства нижележащих слоев вещества.

ВВЕДЕНИЕ

Наблюдение затмений Луны на радиоволнах позволяет исследовать электрические и тепловые свойства лунного покрова глубиной до 1 *дм* Это связано с тем, что изменение температуры во время затмения происходит в слое порядка нескольких сантиметров. Поэтому наблюдаемый эффект падения интенсивности радиоизлучения будет связан только со свойствами охлаждающегося во время затмения слоя, протяженность которого в глубину не зависит от оптической толщины для исследуемой длины волны.

Между тем на изменение радиотемпературы во время лунаций влияют и более глубокие слои в пределах оптической толщины, так как прогреваемый слой вещества во время лунаций в 6—8 раз больше.

Подобно тому, как при исследовании фазового хода радиоизлучения (относительные измерения) мы получаем лишь значение отношения электрических параметров к тепловым (см., например, [1]), так и при относительных измерениях во время затмения будет определяться лишь отношение этих параметров, характерное, однако, лишь для самого верхнего слоя поверхности [2]. Точные абсолютные измерения радиотемпературы во время лунаций позволяют определить сами тепловые параметры слоя лунита и, в частности, найти величину $\gamma = (k\rho c)^{-1/2}$. Абсолютные измерения температуры на радиоволнах во время затмения тоже позволили бы установить эту величину для самого верхнего слоя поверхности.

Радиозатмение Луны исследовалось ранее на ряде волн. Синтон [3], наблюдая затмение 19.I.54 г. на волне 0,15 *см*, получил падение температуры к концу полной фазы на 45%. Гибсон [4] изучал на волне

0,86 *см* два затмения, причем при наблюдении полного затмения 13.III.60 г. он не обнаружил падения радиотемпературы более, чем на 1°, т. е. более, чем полпроцента. Это явилось довольно неожиданным результатом. В то же время, наблюдая частное затмение 5.IX.60 г. на той же волне 0,86 *см*, Тейлор и Коупленд (см., например, [5]) отметили падение интенсивности на 20°, т. е. около 7%. Митчел и Вестерхаут [5] наблюдали затмение 18.II.56 г. на волне 0,75 *см*, Кайдановский, Турусбеков, Хайкин [5] 29.I.53 г. на волне 3,2 *см*, Мецгер и Штрасл [5] 13.VI.57 г. на волне 21 *см*, Костелли, Фериоли и Аарон [5] 13.III.60 г. на волнах 10 *см* и 23 *см*. Во всех этих измерениях не было обнаружено падение радиотемпературы, превышающее 2,5%. Падение радиотемпературы на $\lambda = 0{,}43$ *см*, составившее, согласно [5], всего $4\% \pm 1\%$, было зафиксировано во время затмения 1961 г.

Таким образом, в настоящее время нет надежных и согласованных данных о величине падения радиотемпературы Луны во время затмений.

Для получения надежных данных нами были предприняты измерения радиоизлучения в широком интервале длин волн 1,2; 2,1; 4,0; 6,0; 7,5 и 16 *мм* во время затмений Луны 7.VIII.63 г. и 30.XII.63 г. Следует отметить значительные трудности измерений вариаций радиоизлучения во время лунных затмений. Это связано, во-первых, с малой величиной регистрируемого эффекта, а во-вторых (и это главное), с большой длительностью периода затмения (4—5 часов), требующей очень высокой стабильности аппаратуры. Наконец, немаловажным обстоятельством, затрудняющим измерения, служит значительное изменение высоты Луны в течение затмения. Это обстоятельство при обычной методике измерений может приводить к ложным эффектам, либо усиливающим падение радиоизлучения, либо, наоборот, компенсирующим его. При наблюдении первого затмения, по существу, опробовалась методика наблюдений и анализа. Значительно скорректированная и усовершенствованная методика применялась при наблюдении затмения 30.XII.63 г. На наш взгляд, разноречивость данных предыдущих измерений связана с некорректностью применявшейся разными наблюдателями методики измерений, не учитывающей указанной выше специфики затменных радиоизмерений.

Для получения физических выводов были рассчитаны на электронной вычислительной машине тепловые режимы центра лунного диска во время затмения (в предположении об однородности свойств слоя) для разных γ, а также кривые хода радиоизлучения на разных волнах при различной величине затухания электромагнитных волн в лунных породах. Сравнение с опытом позволило оценить величину отношения электрических и тепловых параметров верхнего слоя лунита.

1. АППАРАТУРА, УСЛОВИЯ НАБЛЮДЕНИЙ И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Затмение 7.VII.63 г. Наблюдения этого затмения Луны проводились на волнах длиной 1,2; 2,1; 4,0; 7,5 и 16 *мм*. В связи с тем, что в летнее время волны миллиметрового диапазона испытывают сильное поглощение в атмосфере Земли, для наблюдений было выбрано место в высокогорном районе на высоте 3250 *м* над уровнем моря (гора Арагац, Армения).

Все радиотелескопы имели параболические зеркала, смонтированные на азимутально-вертикальных установках. В таблице 1 указаны размеры использовавшихся зеркал и соответствующие значения ширины диаграмм направленности антенн по уровню 3 *дб*. Во всех радиотелескопах были применены модуляционные радиометры; регистрация радиоизлучения Луны производилась с помощью самопишущих приборов,

Таблица 1

λ (*мм*)	Диаметр зеркала (*м*)	Ширина диаграммы на уровне 3 *дб* (угл. *мин*)	Экспериментальные значения $(\Delta T_Л/T_Л)_{max}$ (%)		Теоретические значения $(\Delta T_Л/T_Л)_{max}$ при $\gamma/b=7\cdot10^4$ (%)			
					$\gamma=400$; $b=5{,}5\cdot10^{-3}$		$\gamma=1000$ $b=14\cdot10^{-3}$	
			Арагац	Уссурийск	Арагац	Уссурийск	Арагац	Уссурийск
1,2	0,6	7	$\geqslant$17	22,5±2,5	17*	18,7	21*	22,5
2,1	0,95	10	$\geqslant$ 8		10,5*		13*	
4,0	0,95	20	8±2	12 ±2	7	8	8,5	12
6,0	0,95	35		8 ±2		6		9
7,5	0,95	36	5±2		4		5	
16	1,5	44	3±2		2		2,7	

Таблица 2

Характеристики моментов лунных затмений	Московское время		Высота Луны над горизонтом		Примечание	
	Арагац 6. VII. 1963	Уссурийск 30. XII. 1963	Арагац	Уссурийск	Арагац	Уссурийск
Полутень касается края лунного диска	22 *час* 17,5 *мин*	11 *час* 25,9 *мин*	22°,2	8°	Ясная погода (сопровождение визуальное)	Ясная погода (сопровождение визуальное)
Полутень касается центра лунного диска	22 *час* 52,5 *мин*	11 *час* 55,4 *мин*	24°,7	12°		
Тень касается края лунного диска	23 *час* 32,6 *мин*	12 *час* 24,9 *мин*	26°,2	17°		
Тень касается центра лунного диска	0 *час* 18,3 *мин*	12 *час* 55,4 *мин*	26°,6	23°	Кульминация Луны. Сплошная облачность появилась в 0 *час* 40 *мин*	Во время полной фазы диск виден плохо, сопровождение по координатам
Тень касается противоположного края лунного диска (начало полного затмения)	—	13 *час* 27,9 *мин*	—	28°		
Наибольшая фаза	1 *час* 03,0 *мин*	14 *час* 07,4 *мин*	26°,7	35°		
Тень начинает покидать лунный диск (к концу полного затмения Г)	—	14 *час* 46,8 *мин*	—	42°	С 1 *час* 30 *мин* моросит дождь (сопровождение по координатам)	
Тень касается центра лунного диска	1 *час* 47,7 *мин*	15 *час* 19,4 *мин*	22°,5	47°		
Тень покидает лунный диск	2 *час* 33,3 *мин*	15 *час* 48,9 *мин*	18°,5	53°		Легкие облака, временами закрывающие Луну
Полутень касается центра лунного диска	3 *час* 13,4 *мин*	16 *час* 19,5 *мин*	14°,5	57°		
Полутень покидает лунный диск	3 *час* 48,4 *мин*	16 *час* 48,9 *мин*	9°,3	61°		

* Теоретические значения рассчитаны соответственно для λ=0,1 *см* и 0,2 *см*.

С электрической осью каждого радиотелескопа была сопряжена ось оптической трубы, служившей оптическим визиром.

Затмение 6—7 июля было частным: во время максимальной фазы тенью Земли было закрыто около 70% площади видимого диска Луны. Характерные моменты затмения приведены в таблице 2. Из нее видно, что условия затмения были неблагоприятны для наблюдений, так как оно происходило при сравнительно малой высоте Луны над горизонтом и, кроме того, эта высота в течение наблюдений существенно менялась. Наконец, атмосферные условия во время затмения также не оставались неизменными.

В отличие от обычной методики измерения интенсивности источников в миллиметровом диапазоне, когда для калибровки используется разность уровней излучения атмосферы на высоте источника и горизонта (или горы) [7], здесь применялся другой метод. Дело в том, что при измерении временных вариаций интенсивности радиоизлучения какого-либо источника, когда его высота за время наблюдения существенно меняется, прежний метод приводит к искажению получаемой кривой. Это происходит потому, что эталонный сигнал меняется не только регулярно за счет изменения излучения атмосферы по мере изменения высоты (это «полезное» изменение, приводящее результаты измерения к внеатмосферным условиям), но и нерегулярно за счет изменения вклада в эталонный сигнал от боковых лепестков. В самом деле, по мере опускания источника поворот антенны на горизонт делается все меньше и меньше, что дает все меньшее изменение интенсивности за счет приема через боковые лепестки. Искажение результата измерений при таком методе было установлено экспериментально на $\lambda = 16$ *мм* при внезатменном наблюдении Луны. Сильное ложное падение температуры Луны наблюдалось, начиная с угла высоты $h < 15°$.

Поэтому была принята методика калибровки по эталонному сигналу, образованному разностью радиоизлучения неба на определенной и неизменной в течение наблюдения высоте и радиоизлучения горизонта (горы). При обработке тех же контрольных наблюдений Луны по новой методике ложного падения температуры Луны не наблюдалось вплоть до высоты 5°. Недостатком этого способа является то, что приведение к внеатмосферным условиям должно совершаться путем расчета поглощения волн в атмосфере. Однако измерения атмосферного поглощения до затмения и после делают этот расчет достаточно точным.

Измерение радиоизлучения Луны заключалось в том, что температура антенны, наведенной на Луну, периодически сравнивалась с эталонной и неизменной разницей яркостных температур участка небосвода с высотой $h = 10°$ и склона горы, имеющего температуру, близкую к температуре окружающего воздуха T_0. Как известно, разность показаний выходного прибора радиометра при наведении антенны радиотелескопа на Луну и на область неба, соседнюю с Луной, равна

$$n_{\text{Л}} \sim \overline{T}_{\text{Л}}\, \eta\, e^{-\Gamma}\,(1-\beta_{\text{Л}}), \qquad (1)$$

где $\overline{T}_{\text{Л}} = \int\limits_{\Omega_{\text{Л}}} T_{\text{Л}}\, F d\Omega \Big/ \int\limits_{\Omega_{\text{Л}}} F d\Omega$, причем $T_{\text{Л}}(\Omega)$ — распределение яркостной температуры по диску Луны, $F(\Omega)$ — диаграмма направленности радиотелескопа, $\Omega_{\text{Л}}$ — телесный угол, занимаемый диском Луны. Величина $\beta_{\text{Л}} = \int\limits_{4\pi-\Omega_{\text{Л}}} F d\Omega \Big/ \int\limits_{4\pi} F d\Omega$ — фактор рассеяния антенны радиотелескопа вне телесного угла $\Omega_{\text{Л}}$, η — КПД антенны, $\Gamma = \Gamma_0 \sec\vartheta$, где Γ_0 — полное вертикальное поглощение атмосферы, а ϑ — зенитный угол Луны.

Разность показаний выходного прибора радиометра при наведении антенны на склон горы и на область неба с $\vartheta_к = 80°$ равна [7]

$$n_к \sim \eta(1-\beta)\, e^{-\Gamma_к}\,[T_0 + aHS(\Gamma_к)]. \qquad (2)$$

Здесь β — фактор рассеяния антенны радиотелескопа вне телесного угла, в котором яркостную температуру небосвода можно считать постоянной; $\Gamma_к = \Gamma_0 \sec\vartheta_к$ — поглощение атмосферы в калибровочной опорной области; a — градиент температуры в атмосфере над местом наблюдения; H — эффективная высота атмосферы и $S(\Gamma_к) = \sum_1^\infty \frac{\Gamma_к^m}{m\cdot m!}$.

Составив отношения (1) и (2), можно получить

$$\overline{T}_л = \frac{n_л}{n_к} T_0 \frac{1-\beta_л}{1-\beta} e^{\Gamma-\Gamma_к}\left[1 + \frac{aH}{T_0} S(\Gamma_к)\right]. \qquad (3)$$

Величины Γ и $\Gamma_к$ определялись по результатам измерений, сделанных в начале и в конце наблюдений.

Описанная методика применялась на волнах 0,4; 0,75 и 1,6 *см* и позволила обеспечить достаточную точность измерений в сложных условиях, когда высота Луны над горизонтом изменялась в довольно широких пределах (от $h = 26°$, 5 до $h = 8°$; см. таблицу 2).

Процедура измерений на всех волнах была такова. Вначале (при оптической видимости Луны) сопровождение ее осуществлялось с помощью оптического визира. После 1—2 минут сопровождения антенна отводилась по азимуту на небольшой угол и в течение такого же времени регистрировалось излучение соседнего с Луной участка небосвода. Измерение радиоизлучения Луны повторялось 2—3 раза и затем проводилась калибровка по разности излучения одного и того же склона горы и атмосферы на высоте $h = 10°$. В $0^h 40^m$ Луна стала закрываться облаками и слежение за ней (на волнах 4,0; 7,5 и 16 *мм*) осуществлялось по координатам. На волнах 1,2 и 2,1 *мм* с появлением сплошной облачности наблюдения сделались невозможными из-за большого поглощения на этих волнах в облаках и были прекращены. На остальных волнах измерения радиоизлучения Луны были окончены перед заходом ее за горизонт (при $h \sim 7°$), когда поглощение в атмосфере сделалось слишком большим и надежность измерений стала недостаточной.

Затмение 30.XII.63г. Наблюдения этого полного затмения (обстоятельства затмения приведены в таблице 2) проводились одновременно на трех волнах длиной 1,2; 4,0 и 6,0 *мм* в Уссурийске Приморского края. На волнах 1,2 *мм* и 4 *мм* использовалась та же аппаратура, что и для наблюдения предыдущего затмения. Измерения на волне 6 *мм* велись с помощью радиотелескопа, аналогичного примененному на волне 7,5 *мм*.

На волнах 4,0 и 6,0 *мм* использовалась описанная выше методика калибровки. Обработка этих измерений велась по формуле (3). Необходимая для расчета величина полного вертикального поглощения Γ_0 измерялась до начала и после конца затмения.

С целью выявления возможных систематических методических ошибок, связанных с изменением высоты Луны, за сутки до затмения по этой же методике были проведены контрольные измерения ее температуры. Результаты измерений показали, что возможная систематическая ошибка не превышает величины случайного разброса экспериментальных точек, обусловленного флуктуационным порогом чувствительности аппаратуры.

На волне 1,2 *мм* поглощение в водяном паре даже в зимнее время

составляет значительную часть полного поглощения в атмосфере. Распределение влажности, определяющее эту часть поглощения, может заметно отличаться от принятого для стандартной атмосферы (особенно при наличии даже небольшой облачности) и подвержено существенным вариациям во времени. Поэтому излучение какой-либо части небосвода на этой волне нельзя было считать эталонным, как это делалось на волнах 4 и 6 *мм*, и пришлось использовать обычный метод калибровки, аналогичный описанному в [7] (однако с коррекцией изменения вклада в калибровочный сигнал от излучения фона в боковые лепестки). Эта коррекция делалась на основе контрольных измерений до затмения.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Согласно [7], радиотемпература Луны $T_Л$ выражается через выходной сигнал $n_Л$, получающийся при небольшом отклонении антенны по азимуту от направления на Луну, и через изменение n_0, возникающее при отведении антенны с участка небосвода, имеющего тот же угол места, что и Луна, на «черную» область:

$$T_Л = \frac{n_Л}{n_0}\left[T_0 + \Delta T + e^{\Gamma} T_0 \frac{\beta_н}{1-\beta_Л}\left(\frac{\overline{T}_{0б} - \overline{T}_{нб}}{T_0}\right)\right], \qquad (4)$$

где $\beta_Л$ — фактор рассеяния антенны вне телесного угла Луны, $\beta_н$ — неизотропная часть рассеяния антенны вне угла Луны, $\overline{T}_{0б}$ — температура фона, усредненная по неизотропным лепесткам антенны, направленной на «черную» область, $\overline{T}_{нб}$ — температура фона, усредненная по неизотропным лепесткам антенны, направленной в небо, ΔT — поправка на неизотермичность атмосферы и Γ — атмосферное поглощение в направлении на Луну.

Так как метеоусловия в день затмения отличались незначительно от метеоусловий в день контрольных измерений накануне затмения, естественно считать, что

$$\left(\frac{\overline{T}_{0б} - \overline{T}_{нб}}{T_0}\right)_з = \left(\frac{\overline{T}_{0б} - \overline{T}_{нб}}{T_0}\right)_к. \qquad (5)$$

Здесь и ниже индексом «з» помечены величины, относящиеся ко дню затмения, и индексом «к» — относящиеся ко дню контрольных измерений. Записывая выражение (4) для затменных и контрольных измерений и учитывая (5), получим следующее выражение для радиотемпературы Луны во время затмения:

$$T_{Лз} = \left(\frac{n_Л}{n_0}\right)_з \left\{T_{0з} + \Delta T_з + \frac{T_{0з}}{T_{0к}} e^{\Gamma_з - \Gamma_к}\left[T_{Лк}\left(\frac{n_0}{n_Л}\right)_к - T_{0к} - \Delta T_к\right]\right\}. \qquad (6)$$

Здесь неизвестные параметры, связанные с рассеянием, выражены через результаты контрольных измерений, при которых температура Луны $T_{Лк}$ известна заранее. При расчете в формулу (6) подставлялись измеренные величины $(n_Л/n_0)_з$ и $(n_Л/n_0)_к$, $T_{0з}$ и $T_{0к}$, соответствующие одним и тем же зенитным углам Луны; $\Gamma_з$ и $\Gamma_к$ определялись по результатам измерений Γ_0, сделанным в начале, в середине и в конце наблюдений. Радиотемпература Луны до затмения $T_{Лк}$ определялась по данным [1, 8]. При определении поправок $\Delta T_з$ и $\Delta T_к$ на неизотермичность атмосферы полагалось (так же, как на волнах 4 и 6 *мм*), что атмосфера не отличается от стандартной; расчет проводился по формуле, учитывающей аддитивно поглощение в кислороде и водяном паре*:

* Формулу (7) легко вывести, проделав операции, аналогичные выполненным в [7], для случая поглощения двумя газами.

$$\Delta T = a\left\{H_{O_2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{O_2}^{m}}{m\cdot m!}+H_{H_2O}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{H_2O}^{n}}{n\cdot n!}\left[1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\Gamma_{O_2}^{p}}{\left(n\left(H_{O_2}/H_{H_2O}\right)+p\right)p!}\right]\right\}. \quad (7)$$

Здесь индексом O_2 помечены величины, характеризующие поглощение кислородом, а H_2O — водяным паром.

Описанная методика позволила обеспечить достаточную точность измерений в сложных условиях, когда высота Луны над горизонтом менялась в пределах от 7° до 68°. Следует отметить также, что метеорологические условия во время контрольных измерений и в день затмения были довольно благоприятными (абсолютно ясно, ветра нет, температура — 10° ÷ —19°С, влажность приземного слоя 1,8 ÷ 1,0 $г \cdot м^{-3}$) и в моменты, соответствующие одним и тем же углам Луны, практически не отличались. Исключение составляет лишь небольшой отрезок времени от 15 *час* 50 *мин* до 17 *час* 30 *мин* московского времени 30 декабря, когда появились редкие облака, временами закрывавшие Луну.

На волне 1,2 *мм* сопровождение центра Луны осуществлялось с помощью оптической трубы на протяжении всех измерений, на волнах 4 и 6 *мм* вблизи максимальной фазы затмения — по координатам, а остальное время с помощью трубы.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Затмение 7.VII.63 г. Результаты измерений в относительных величинах приведены на рис. 1. Максимальные значения относительных изменений яркостной температуры $(\Delta T_Д/T_Д)_{max}$, определенные по данным рис. 1, приведены в таблице 1. Как видно из таблицы и рисунка,

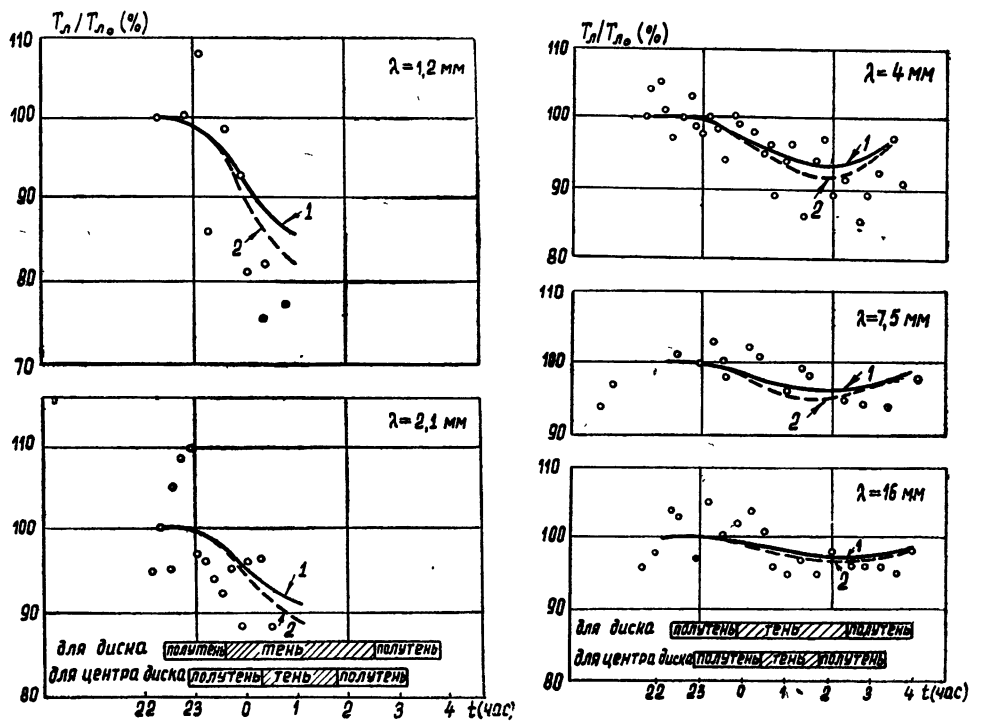


Рис. 1. Относительное изменение эффективной температуры Луны на волнах а) 1,2 и 2,1 *мм*; б) 4,0; 7,5 и 16 *мм* во время затмения 6—7 июля 1963 г. (время московское): 1 — теоретическая кривая для $\gamma=400$, $b=5{,}5\cdot10^{-3}$; 2 — то же для $\gamma=1000$, $b=14\cdot10^{-3}$. В обоих случаях $\gamma/b=7\cdot10^{4}$.

никаких неожиданностей (вроде отсутствия или чрезмерно большого падения интенсивности радиоизлучения) не обнаруживается.

На волнах 1,2 и 2,1 *мм* наблюдения были прекращены, как это уже указывалось выше, несколько раньше момента максимальной фазы затмения; поэтому на этих волнах оказалось возможным определить лишь нижнюю границу для $\Delta T_Л/T_Л$. На рисунке приведены теоретические кривые радиозатмения, рассчитанные на электронной вычислительной машине для рассматриваемого затмения в предположении об однородности свойств лунита в глубину для значений параметра $\gamma = (k\rho c)^{-1/2} = 400$ и 1000. При этом расчете, однако, соблюдалось одинаковое отношение тепловых параметров к электрическим: $\gamma/b = 7 \cdot 10^4$, где $b = \operatorname{tg}\Delta/\rho$ — удельный тангенс угла потерь*. Как показывает теория радиозатмения Луны [2], величина относительного падения радиотемпературы во время затмения определяется главным образом величиной отношения γ/b и поэтому может служить, как указывалось во введении, лишь для определения соотношения тепловых и электрических параметров.

Сравнение теоретических кривых с опытом, обнаруживая удовлетворительное согласие, является новым подтверждением справедливости ранее построенной модели при найденных значениях параметров. Величина $\gamma/b \simeq 7 \cdot 10^4$ для верхнего слоя лунита совпадает со значением γ/b, полученным из измерений во время лунаций и характеризующим это отношение для более глубоких слоев вещества Луны. Следует отметить, что рассчитанные значения $(\Delta T_Л/T_Л)_{max}$ относятся к центральному элементу диска Луны, тогда как измеренные значения $(\Delta T_Л/T_Л)_{max}$ характеризуют относительные изменения яркостной температуры либо некоторой части диска (на волнах 1,2; 2,1 и 4 *мм*), либо практически всего лунного диска (на волнах 7,5 и 16 *мм*). Однако предварительные оценки показывают, что при достигнутой точности это отличие является несущественным.

Затмение 30.XII.63 г. Проведенные наблюдения позволили четко зафиксировать изменение радиотемпературы Луны на волнах 1,2; 4 и 9 *мм* во время затмения.

Результаты измерений радиотемпературы Луны в относительных единицах представлены на рис. 2 в виде экспериментальных точек. Здесь же приведены теоретические кривые изменения яркостной температуры центра лунного диска, полученные для однородной модели Луны с параметрами** 1) $\gamma=400$, $b=5{,}5\cdot10^{-3}$, $\gamma/b=7{,}3\cdot10^4$; 2) $\gamma=400$ и $b=8\cdot10^{-3}$, $\gamma/b = 5\cdot10^4$; 3) $\gamma = 400$ и $b = 16{,}5\cdot10^{-3}$, $\gamma/b = 2{,}4\cdot10^4$; 4) $\gamma = 1000$ и $b = 14\cdot10^{-3}$, $\gamma/b = 7\cdot10^4$. При сравнении надо учитывать, что теоретические кривые для интегрального радиозатмения при тех же параметрах будут идти несколько ниже. В самом деле, теоретическая кривая для центра

$$\frac{T_Л}{T_{Л0}} = \frac{T_{Л0} - \Delta T}{T_{Л0}} = 1 - \frac{\Delta T}{T_{Л0}}$$

может быть приближенно трансформирована в кривую интегрального затмения в виде

$$1 - \frac{\Delta T_{инт}}{T_{Л\,инт}} \simeq 1 - \frac{\Delta T}{T_{Л0}} \frac{T_{Л0}}{T_{Л\,инт}} = 1 - 1{,}1\frac{\Delta T}{T_{Л0}}.$$

* Это соответствует экспериментальному соотношению $\delta = 2\lambda$, найденному для лунита из фазовых измерений, $\delta = l_э/l_Г$, $l_э$ и $l_Т$ — глубины проникания соответственно электрической и тепловой волн, λ — длина волны, на которой ведется наблюдение

** Расчеты кривых приведены на электронно-вычислительной машине О. Б Щуко.

Здесь предполагается, что падение температуры ΔT как для центра, так и в среднем для всего диска практически одно и то же. Это предположение оправдывается тем обстоятельством, что во время тени температура меняется мало. С учетом этой коррекции сравнение рассчитан-

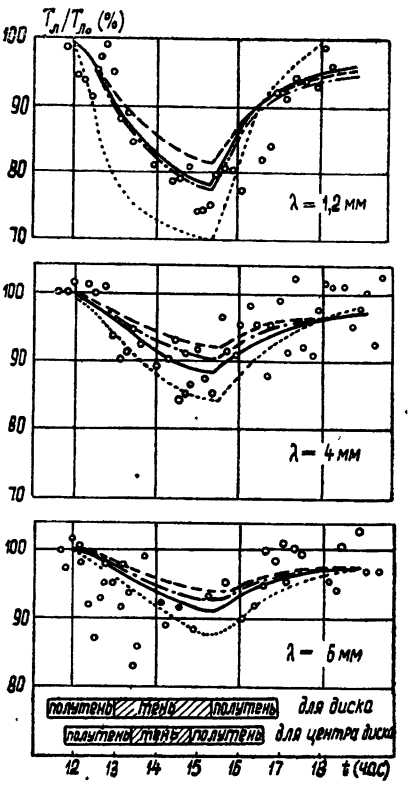


Рис. 2. Относительное изменение эффективной температуры на волнах 1,2; 4 и 6 *мм* во время полного затмения 30 XII.63 г. Теоретические кривые для однородной модели Луны:

	γ	$b=\operatorname{tg}\Delta/\rho$	γ/b
— — — —	400	$5{,}5\ 10^{-3}$	$7\ 10^4$
— · — · —	1000	$14\cdot10^{-3}$	$7\cdot10^4$
———	400	$8\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^4$
·····	400	$1{,}6\ 10^{-2}$	$2{,}4\ 10^4$

ных для однородной модели закономерностей изменения интенсивности Луны с результатами наблюдений затмения показывает, что совокупность результатов, полученных на всех трех волнах, наилучшим образом соответствует модели при $\gamma/b = \left(6 \pm \begin{smallmatrix}1{,}5\\1{,}0\end{smallmatrix}\right)\cdot 10^4$ (например, с параметрами $\gamma = 400$, $b = 8\cdot10^{-3}$ или $\gamma = 1000$, $b = 14\cdot10^{-3}$).

Отметим, что полученный вывод не противоречит результатам работ [9, 10], где на основании измерений в период лунаций даются значения $\gamma \simeq 400$ и $b = (5 \pm 3)\cdot10^{-3}$.

В заключение авторы пользуются случаем отметить внимание Уссурийского городского совета депутатов трудящихся, сделавшего со своей стороны все необходимое для успешного проведения работы экспедиции, и поблагодарить директора института физики Армянской АН А. И. Алиханяна за возможность проведения работ на высокогорной базе института и помощь.

В настоящей статье, поступившей в редакцию 23 ноября 1964 г., объединены статья С. А. Каменской, А. Г. Кислякова, В. Д. Кротикова, А. И. Наумова, В. Н. Никонова, В. А. Порфирьева, В. М. Плечкова, К. М. Стрежневой, В. С. Троицкого, Л. И. Федосеева «Радиозатмение Луны на волнах 0,12; 0,21; 0,4; 0,75 и 1,6 *см*», поступившая 10 февраля 1964 г., и статья Л. В. Лубяко, В. Н. Никонова, В. М. Плечкова, В. А.

Порфирьева, Э. П. Сорокиной, К. М. Стрежневой, Л. И. Федосеева «Наблюдение полного затмения Луны 30 декабря 1963 г. на волнах 1,2; 4 и 6 *мм*», поступившая 6 июня 1964 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, **81**, 589 (1963).
2. В. С Троицкий, Астрон. ж. (в печати).
3. W. N. Sinton, Astrophys. J, **123**, 325 (1956).
4. J. E. Gibson, Astrophys. J., **133**, 1072 (1961); Proc. IRE, **46**, 280 (1960)
5. R. B. Baldwin, The Measure of the Moon, 1963, Univer. Chicago Press.
6. J. P. Castelly, IEEE Inter. Conv, Rec., **11**, 362 (1963).
7. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **4**, 433 (1961).
8. Л. И. Федосеев, Изв высш. уч зав.—Радиофизика, **6**, 655 (1963)
9. В. Д Кротиков, В С Троицкий, Астрон. ж., **40**, 158 (1963)
10. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 1059 (1962)

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

OBSERVATIONS OF RADIO ECLIPSE OF THE MOON AT MILLIMETER WAVES

S. A. Kamenskaya, A. G. Kislyakov, V. D. Krotikov, A. I. Naumov, V. N. Nikonov, V. A. Porfiriev, V. M. Plechkov, K. M. Strezhnyova, V. S. Troitskii, L. I. Fedoseev, L. V. Lubyako, E. P. Sorokina

The observation method has been developed of lunar radio emission in the period of eclipses. It has permitted to measure. The effective temperature variation of the Moon at millimeter waves during the eclipses 7 VII 1963 and 30 XII 1963. During the eclipse of 7 VII the maximum relative decreases in the effective temperature were $>17\%$; $>8\%$; $8\%\pm2\%$; $5\%\pm2\%$ and $3\%\pm2\%$ at the waves $\lambda=1{,}2$; 2,1; 4,0; 7,5 and 16 mm, and during the eclipse of 30 XII $22{,}5\%+2{,}5\%$, $12\%\pm2\%$ and $8\%\pm2\%$ at $\lambda=1{,}2$; 4,0 and 6,0 mm, respectively. The best agreement of observation data with calculation results of eclipse process for an uniform model of the Moon is achieved when $\gamma/b=\left(6\,^{+1,5}_{-1,0}\right)\cdot 10^4$ ($\gamma=(k\rho c)^{-1/2}$, k is a thermal conductivity, ρ is the density, c is the specific heat, b is the specific angle oflosses for the lunar matter). The obtained value γ/b of the upper layer of lunar rock within the limits of measurement accuracy coincides with that obtained early from the measurements of phase dependence of radio emission of the Moon and characterizing the properties of lower layers.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 523.164.4

О ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ И ВРЕМЕННОМ ХОДЕ ОТНОШЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПОТОКОВ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ КАССИОПЕЯ-А И ЛЕБЕДЬ-А НА ДЕКАМЕТРОВЫХ ВОЛНАХ

С. Я Брауде

Рассмотрены возможные причины «излома» частотного спектра источников Кассиопея-А и Лебедь-А и предложена методика, позволяющая по экспериментальным данным выяснить механизм такого излома. Показано, что на декаметровых волнах наблюдаемое уменьшение потока Кассиопеи-А во времени превышает соответствующее теоретическое значение.

В последние годы получен ряд весьма важных экспериментальных данных об излучении наиболее интенсивных радиоисточников Кассиопея-А и Лебедь-А в диапазоне декаметровых волн [1–3]. Как следует из этих работ, у обоих источников вблизи 30 *Мгц* наблюдается «излом» частотного спектра.

Как было показано в работах [4, 5], излом частотного спектра дискретного источника может быть связан либо с поглощением излучения в облаках ионизированного водорода HII, находящихся в галактическом диске, либо с наличием в самом источнике среды, у которой показатель преломления μ меньше единицы [6, 7]. Попытки выяснить, какой из этих механизмов обусловливает наблюдаемый излом спектра источников Кассиопея-А и Лебедь-А [4, 5] пока не дали результатов, ибо измерение абсолютных потоков этих источников производилось с заметными ошибками [3]. Так как на относительных величинах потоков экспериментальные ошибки сказываются меньше, имеет смысл попытаться разделить оба указанные выше механизма, используя такие данные.

Измеренные в диапазоне частот 12,5—40 *Мгц* отношения потоков источника Кассиопея-А $s_К$ к потоку Лебедь-А $s_Л$ приведены в таблице 1. В первой строке дана частота, во второй — отношение $s_К/s_Л$ и в третьей — средняя случайная ошибка Δ. Эти данные взяты из работы [3], проведенной в ИРЭ АН УССР в период с августа 1961 г. по июнь 1962 г.

Таблица 1

f *Мгц*	12,5	16,7	20	24	30	35	40
$\frac{s_К}{s_Л}$	2,28	1,96	1,61	1,64	1,54	1,42	1,42
$\pm\Delta$	0,30	0,14	0,08	0,11	0,05	0,07	0,07

Как видно из таблицы, с понижением частоты отношение $s_К/s_Л$ заметно возрастает.

Посмотрим, как должна изменяться величина $s_К/s_Л$ с частотой, если

излом частотного спектра дискретного источника связан с поглощением в HII.

Следуя [1,4,5], запишем $s_{к,л}$ в виде

$$s_{к,л}=A_{к,л}f^{-\alpha}e^{-\tau_{к,л}}. \quad (1)$$

Здесь $A_{к,л}$ — постоянные, α — спектральный индекс, равный для обоих источников 0,75 (при $f<800$ *Мгц* [8]), $\tau_{к,л}$ — оптические толщины [9]:

$$\tau_{к,л}=\frac{9{,}8\cdot10^{-3}}{T_e^{3/2}f^2}\left[17{,}7+\ln\frac{T_e^{3/2}}{f}\right]ME_{к,л}=\frac{\gamma}{f^2}ME_{к,л}; \quad (2)$$

$$ME_{к,л}=\int_0^l n_e^2\,dl. \quad (3)$$

Здесь T_e — электронная температура, n_e — плотность электронов в слое HII толщиной l, ME — мера эмиссии.

Из (1)—(3) получаем выражение для $s_к/s_л$:

$$\lg\frac{s_к}{s_л}=\lg A-\frac{\gamma(ME_к-ME_л)}{f^2}\lg e, \quad (4)$$

где $A=A_к/A_л$.

Найдем теперь изменение величины $s_к/s_л$ с частотой, если излом частотного спектра связан с отличием показателя преломления в источнике от единицы ($\mu<1$). Согласно [6,7] имеем

$$S_{к,л}=A_{к,л}f^{-\alpha}\int_0^\infty F\left(t+\frac{\delta_{к,л}}{f\sqrt{t}}\right)t^{\frac{3\alpha-1}{2}}dt=A_{к,л}f^{-\alpha}I\left(\frac{\delta_{к,л}}{f},\ \alpha\right). \quad (5)$$

Здесь $F(t)$ — протабулированная функция, $\delta=ecn_e/H_\perp$, $H_\perp=H_0\sin\theta$, H_0 — магнитное поле в источнике, θ — угол между направлением скорости электрона с зарядом e и магнитного поля, c — скорость света.

Вычисляя значение интеграла $y=I\left(\frac{\delta_{к,л}}{f},\ \alpha\right)$ при $\alpha=0{,}75$, получаем для различных $x=f/\delta_{к,л}$ значения $y=y_1$, приведенные в таблице 2*.

Таблица 2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	0,75	3,0	4,6	5,5	6,2	6,7	7,1	7,7	7,8	8,0
y_2	0,79	3,2	4,8	5,8	6,4	6,8	7,1	7,3	7,5	7,6

Функцию $I(x,\ 0{,}75)=y_1$ можно приближенно аппроксимировать следующим выражением:

$$y_2\simeq 8{,}6\,e^{-2{,}4/x^{1{,}3}}. \quad (6)$$

Такая аппроксимация, как следует из таблицы 2, является практически удовлетворительной.

* Эти вычисления были проведены И. Н. Жуком, которому автор выражает свою признательность.

Воспользовавшись (5) и (6), получаем для $s_К/s_Л$

$$\lg\frac{s_К}{s_Л}=\lg A-\frac{2{,}4\,(\delta_К^{1,3}-\delta_Л^{1,3})}{f^{1,3}}\lg e\,. \qquad (7)$$

Формулы (4) и (7) позволяют сопоставить расчеты с экспериментом. На рис. 1 построена зависимость $\lg(s_К/s_Л)$ от $10^4 f_{(Мгц)}^{-2}$. В указанных координатах, согласно (4), эта зависимость должна быть прямой. На-

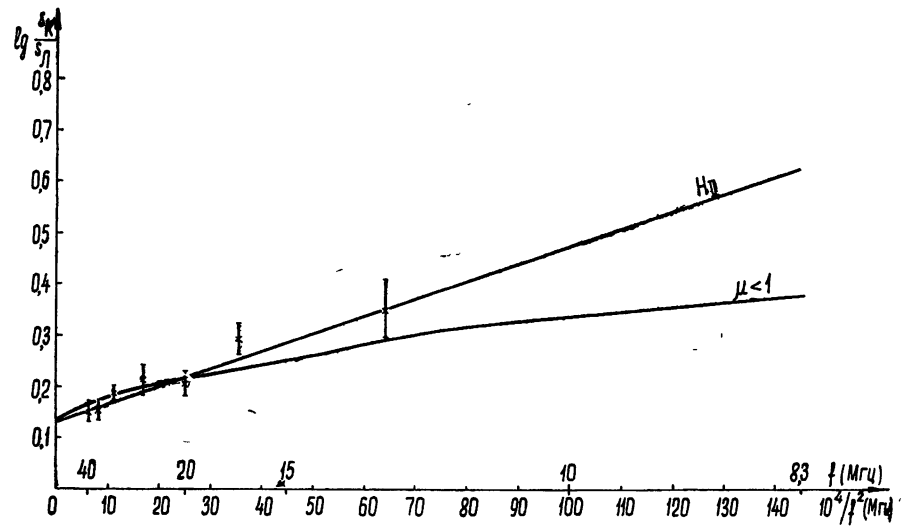


Рис. 1.

неся на рисунок экспериментальные данные для $s_К/s_Л$, взятые из таблицы 1, и проведя методом наименьших квадратов прямую, можно определить ее параметры. Они таковы:

$$A = 1{,}35 \pm 0{,}05\,; \qquad (8а)$$

$$\gamma\,(ME_К - ME_Л) = -3\cdot 10^{-3}\,. \qquad (8б)$$

Если в (2) принять $T_e = 10^4$°K, а в логарифмическом члене положить $f = 20$ *Мгц*, то из (8б) получим, взяв l в парсеках:

$$ME_К - ME_Л \simeq -30. \qquad (8в)$$

Это значение разности мер эмиссий для Кассиопеи-А и Лебедя-А отличается от значения, приведенного в [1], всего на 60. Если учесть, что $ME_К \simeq 700$ [3], то совпадение данных с работой [1] следует считать вполне удовлетворительным. Значение для A также хорошо совпадает с величиной, полученной для частоты 400 *Мгц* [2], где

$$\overline{A}=\overline{(s_К/s_Л)}_{f=400Мгц}=\frac{6100}{4500}\simeq 1{,}36$$ (черта означает усреднение).

Для того, чтобы построить зависимость (7), необходимо определить постоянную $\delta_К^{1,3}-\delta_Л^{1,3}$. Для этого нанесем на график экспериментальные значения $\lg(s_К/s_Л)$ от $10^4 f_{(Мгц)}^{-1/3}$ (этот график в тексте не приведен); учитывая, что $A = 1{,}35$, проведем прямую через экспериментальные точки, используя метод наименьших квадратов. Тогда получим, что

$$\delta_{К}^{1,3} - \delta_{Л}^{1,3} \simeq 2{,}4 \cdot 10^{8}. \qquad (9)$$

Если положить, в соответствии с [3], для Кассиопеи-А $(H_{\perp} / n_e)_{К} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$, то из (9) получаем, что $(H_{\perp}/n_e)_{Л} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$. Пользуясь (7) и (9), нанесем на рис. 1 кривую (μ) — $s_К/s_Л = \psi(1/f^2)$. Как видно из рисунка, для $f < 20$ *Мгц* кривая (μ) идет ниже прямой (HII).

К сожалению, имеющиеся в распоряжении экспериментальные данные для частот $f \geqslant 12{,}5$ *Мгц* (см. рис. 1) еще не позволяют с достаточной достоверностью выбрать тот или другой механизм, обусловливающий излом спектра. Однако, как видно из рис. 1, уже на частотах 8—10 *Мгц* разделение обоих механизмов может быть произведено, если точность измерения $s_К/s_Л$ будет не хуже $\pm 10\%$.

Полученные в настоящей заметке величины $s_К/s_Л$ для «высоких» частот (когда $f^{-2} \to 0$) позволяют определить в диапазоне декаметровых волн временное изменение плотности потока Кассиопеи-А. Как было показано в работе [10], для источника Кассиопея-А должно наблюдаться уменьшение плотности потока $s_К$ со временем по закону

$$\frac{\Delta s_К}{s_Л} = -\frac{2(1+2\alpha)}{T}. \qquad (10)$$

Здесь $\Delta s_К / s_Л$ — относительное изменение плотности потока, а T — возраст источника в годах. Так как $\alpha = 0{,}75$, а $T \simeq 258$ лет, то $\Delta s_К/s_К \simeq 2\%$.

Предсказанное в [10] уменьшение плотности потока Кассиопеи-А было проверено экспериментально на частотах 81,5 *Мгц* [11] и 1400 *Мгц* [12]. В работах определялось отношение $s_К/s_Л$, причем величина потока $s_Л$ считалась неизменной в течение $T = 258$ лет, так как этот промежуток мал по сравнению с тем временем, которое необходимо радиовол-

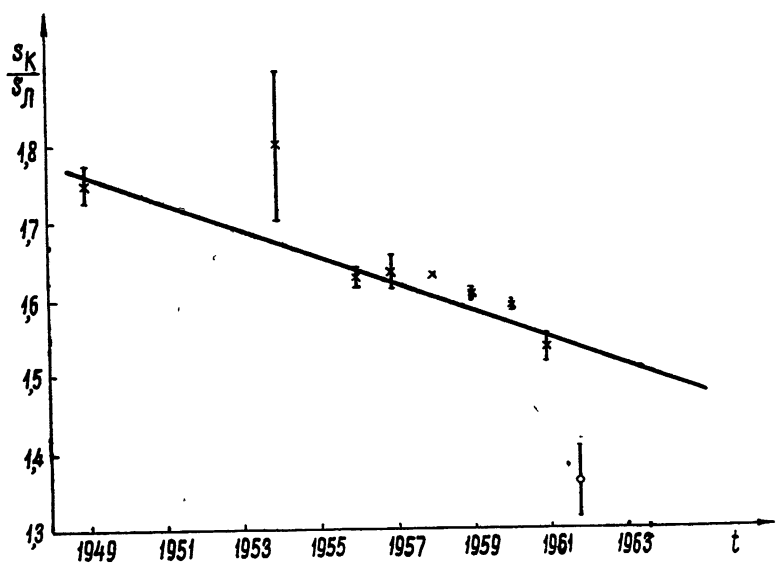


Рис. 2.

нам, чтобы пройти через источник Лебедь-А [11]. Было обнаружено, что на $f = 81{,}5$ *Мгц* $\Delta s_К/s_К = 1{,}06 \pm 0{,}14\%$, а на $f \simeq 1400$ *Мгц* $\Delta s_К/s_К \simeq 0{,}9 \div 2{,}3\%$ в год.

Расчетный и экспериментальный ход изменения потока Кассиопеи-А

приведен на рис. 2, где по оси абсцисс отложено время в годах, а по оси ординат $s_к/s_л$. Сплошной прямой дана расчетная зависимость; крестиками указаны данные [11, 12], а кружком отмечен результат настоящей работы.

Как видно из рисунка, данные, полученные из измерений на декаметровых волнах, лежат значительно ниже расчетных. Причиной такого расхождения могут оказаться различные факторы, например, наличие частотной зависимости потока источника, отличной от $f^{-\alpha}$, различное временное изменение $\Delta s_к/s_к$ на разных частотах и т. п. Вместе с тем следует напомнить, что величина $s_к/s_л$ на декаметровых волнах не отличается от значения $\overline{(s_к/s_л)}$, полученного в [2] для $f = 400$ *Мгц* при обработке результатов измерений в широком диапазоне частот от 38 до 3200 *Мгц* в 1961—1962 гг. Таким образом, значения $s_к/s_л$, полученные в этот период в частотном диапазоне $10 \div 400$ *Мгц*, значительно меньше ($s_к/s_л \simeq 1{,}35$), чем число, полученное при экстраполяции данных более ранних работ [10–12]. Для выяснения причин такого расхождения необходимы дальнейшие измерения величины $s_к/s_л$ в возможно более широком диапазоне частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. C. B. Lovell, H. W. Wells, Monthy Notices Roy. Astr Soc., **121**, 111 (1960).
2. R. G. Conway, K. I. Kellermann, R. J. Long, Monthy Notices Roy. Astron. Soc., **125**, 261 (1963).
3. Л. Л. Базелян, С Я Брауде, Ю М. Брук, И Н. Жук, А В. Мень, Б. П Рябов, Л Г. Содин, Н. К Шарыкин, Изв. высш уч зав —Радиофизика, **6**, 897 (1963)
4. Е В. Чаевский, С Я. Брауде, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, **5**, 211 (1962).
5. С Я Брауде, ДАН УССР, 193 (1963)
6. В А. Разин, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, **3**, 584 (1960).
7. В А. Разин, Изв высш уч зав.—Радиофизика, **3**, 921 (1960)
8. Н С. Кардашев, Астрон ж, **40**, 965 (1963)
9. В. Л Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М, 1960
10. И С. Шкловский, Астрон ж, **37**, 256 (1960)
11. J. A. Högbom, J. R. Shakeshaft, Nature, **189**, 561 (1961).
12. D. S. Heeschen, B L. Meredith, Nature, **190**, 705 (1961).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
24 июня 1964 г.

ON FREQUENCY AND TIME DEPENDENCE OF RELATION OF FLUX DENSITY OF DESCRETE SOURCES OF CASSIOPEIA-A AND CYGNUS-A AT DECAMETER WAVES

S. Ya. Braude

The possible reasons of a break in the frequency spectrum of Cassiopeia-A and Cygnus-A have been considered and the method has been proposed enable to find the mechanism of such breaking according to the experimental data. The time decreasing of Cassiopeia-A flux observed at decameter waves is shown to exceed the corresponding theoretical value.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 523.164.85

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФАЗОВОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ ОТРАЖЕНИИ РАДИОВОЛН ОТ МЕТЕОРНЫХ СЛЕДОВ

В. В. Сидоров, А. Ф. Павлов, Р. Ю. Фахрутдинов

Приведены результаты исследования прямым фазовым методом поляризационных явлений при отражении радиоволн от метеорных следов. Предлагается способ индикации поляризационных явлений при наблюдениях дрейфа метеорных следов. Отмеченный эффект увеличения длительности резонанса при переходе к более плотным следам свидетельствует против теории «металлического» резонанса.

Если причиной анизотропии в следах, дающих длительные отражения, служит магнитное поле Земли, то структура следа должна быть более «рыхлой», чем структура, реализующаяся в случае чисто амбиполярной диффузии в метеорном следе.

В работах по теории отражения радиоволн от метеорных следов много места уделяется поляризационным явлениям [1-6]; экспериментальные исследования в этой области касаются, прежде всего, измерения отношений амплитуд метеорных эхо-сигналов. Наблюдения резонансных фазовых смещений при когерентных измерениях [7] страдали от наложения дифракционных и ветровых эффектов. Прямое сравнение фаз сигналов в скрещенных антеннах с помощью фазовой техники позволилс нам отделить поляризационные явления от дифракционных и ветровых и наблюдать поляризационные смещения фазы в отражениях всех типов, независимо от их длительности.

1. ОРИЕНТАЦИЯ МЕТЕОРНОГО СЛЕДА ПО ОТНОШЕНИЮ К АНТЕННОЙ СИСТЕМЕ

Обобщая приведенное в [4] выражение для наведенных в скрещенных антеннах ЭДС на случай произвольной поляризации излучаемых сигналов, получим

$$E_x^* = K[E_x \cos^2\alpha + E_y \sin\alpha\cos\alpha + me^{i\varphi}(E_x \sin^2\alpha - E_y \sin\alpha\cos\alpha)]; \quad (1)$$

$$E_y^* = K[E_y \sin^2\alpha + E_x \sin\alpha\cos\alpha + me^{i\varphi}(E_y \cos^2\alpha - E_x \sin\alpha\cos\alpha)], \quad (2)$$

E_x и E_y — компоненты излучаемого поля, α — угол между метеорным следом и осью x (оси координат параллельны приемным антеннам), m — отношение амплитуд перпендикулярной и параллельной составляющих сигнала, отраженного от метеорного следа в случае, если соответствующие компоненты падающей волны равны, φ — разность фаз между перпендикулярной и параллельной составляющими сигнала при условии, что облучение производится в фазе. Предполагается, что точка отражения лежит на оси z координатной системы; K — фактор, пропорциональный коэффициенту отражения (вообще говоря, $K = K(t)$).

При облучении следа линейно-поляризованными волнами [4] поляризационное отношение отраженных от метеорного следа и наведенных в скрещенных антеннах сигналов будет равно

$$n = |E_x^*| / |E_y^*| . \tag{3}$$

Разность фаз между E_x^* и E_y^*

$$\Theta = \arg E_x^* - \arg E_y^* . \tag{4}$$

На рис. 1 приведены графики зависимости $n(t)$ и $\Theta(t)$ при разных α, построенные по формулам (3), (4) и теоретическим кривым $m(t)$ и $\varphi(t)$, которые приведены в работе Кайзера [3] для резонансных отражений.

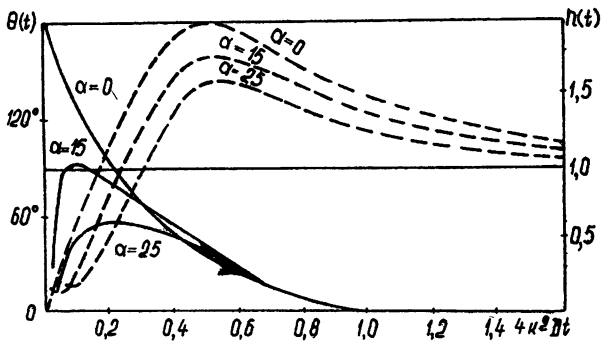


Рис. 1.

При круговой поляризации падающей на след волны $E_y = E_x e^{i\pi/2}$ Соответственно зависимости $n(t)$ и $\Theta(t)$ при разных α, построенные с помощью (2), (3) для случая $E_y = E_x e^{i\pi/2}$ и теоретических кривых Кайзера [3] $m(t)$ и $\varphi(t)$, приведены на рис. 2.

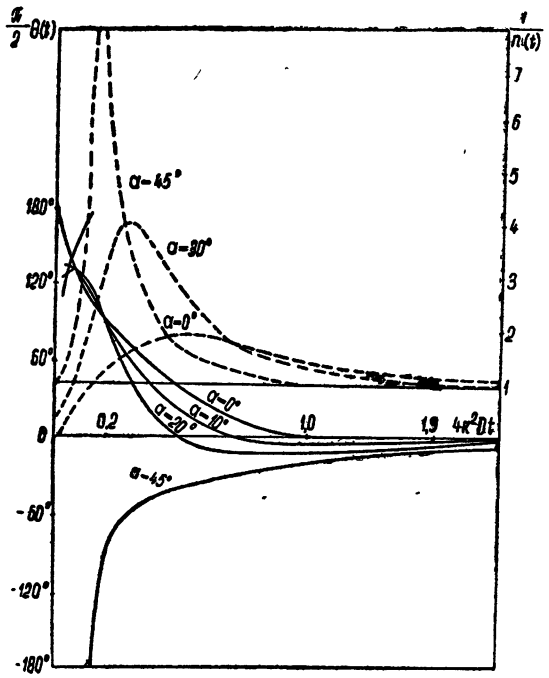


Рис. 2.

Таким образом, в зависимости от поляризации передающей антенны влияние ориентации метеорных следов по отношению к приемным вибраторам оказывается существенно различным, что необходимо учитывать при проведении поляризационных измерений.

Случай, когда вектор поляризации параллелен одной из измерительных антенн, будет рассмотрен ниже.

2. АППАРАТУРА

Измерения производились на метеорной станций, описанной в [8]. Передатчик на частоте 33,5 *Мгц* мощностью 120 *квт* в импульсе работал на слабонаправленную антенну с круговой поляризацией (два горизонтальных скрещенных петлевых вибратора на высоте 0,35 λ над поверхностью земли). Два одинаковых приемных вибратора через антенные усилители подключались к входам фазометрического устройства. Принимаемые сигналы регистрировались фотоиндикатором в виде двух векторов, один из которых являлся опорным, а положение второго определяло искомое фазовое соотношение. Кроме этого регистрировались одна из координат измерительного вектора в функции времени, дальность до метеорного следа и поляризационное отношение амплитуд. Пример регистрации резонансного отражения для переходного типа следа дан на рис. 3.

Приведенные в настоящей работе данные относятся к наблюдениям

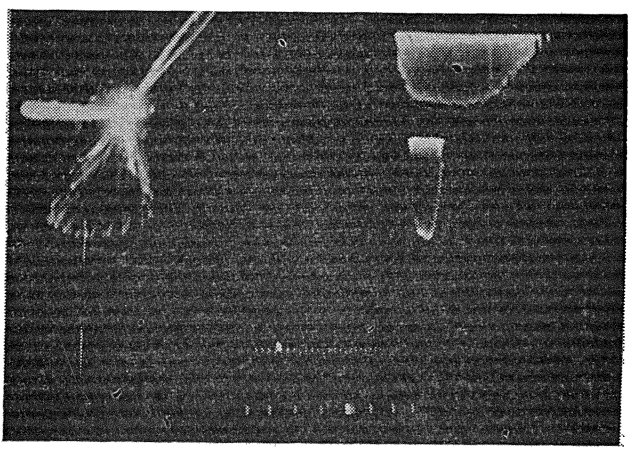


Рис. 3.

в июне 1962 г. Экспериментальный материал содержит в основном спорадические метеоры, хотя период наблюдений частично перекрывался с временем действия слабого метеорного потока из созвездия Овен. Ниже мы приведем в основном классификацию наблюдаемых явлений и их сопоставление с существующими теориями.

3. РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Из 2465 отражений, зарегистрированных за время наблюдения, 1069 не обнаружили фазовых изменений за время регистрации и были квалифицированы как отражения от ослабленных следов. Из остальных 1396 отражений, проявивших так или иначе поляризационные свойства, 720 по виду амплитудно-временной характеристики были отнесены к отражениям от переуплотненных следов. Сюда же были отнесены «незеркальные» отражения от переуплотненных следов.

Поскольку, с одной стороны, по форме амплитудной характеристики не удается уверенно отделить недоуплотненные следы от слабопереуплотненных, а с другой стороны, судя по предсказываемым теорией [1] величинам фазовых изменений и временам их проявления, нет существенного различия между резонансом плазмы в недоуплотненных следах и явлениями типа резонанса на металлическом цилиндре, мы не принимали специальных мер для тщательного разделения этих двух видов резонансных явлений, отбирая для обработки все случаи, когда вращения фазы можно было наблюдать в начальной стадии отражения. Поэтому в число отобранных для анализа 676 отражений было включено небольшое количество отражений от слабопереуплотненных следов.

Оценивались максимальный угол поворота измерительного вектора фазометра и время, через которое процесс установления фазы заканчивается. Распределение наблюдаемых величин фазовых изменений приведено на рис. 4а. Для сравнения на график пунктиром нанесены резуль-

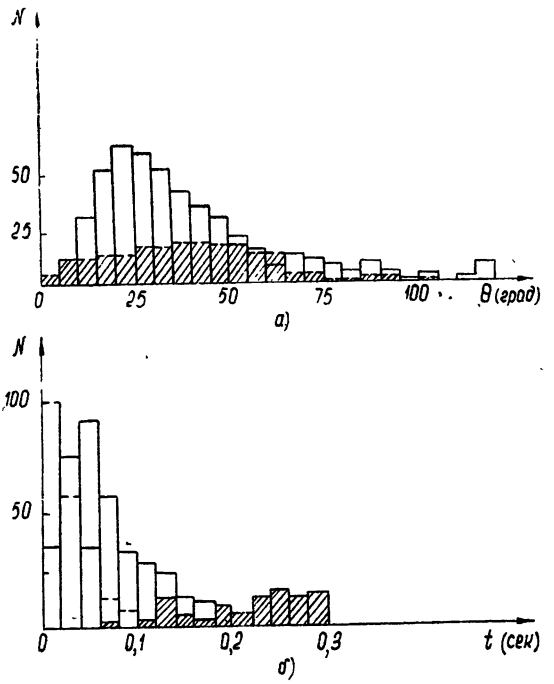


Рис. 4.

таты, полученные в [7]. В нашем случае максимум распределения на 20° смещен в сторону меньших углов, в то время как максимально наблюдаемые величины одинаковы ($\simeq 120°$). Возможности занижения результатов в наших измерениях связаны только с наличием задержки начала регистрации на время порядка 10 *мсек;* однако это не объясняет наблюдаемое расхождение.

На рис. 4б приведено распределение времен от начала эхо до моментов, к которым изменение фазы прекращалось, в сравнении (пунктирная гистограмма) с результатами [7] (последние предварительно суммировались по интервалам 0,02 *сек*). Из этого рисунка видно, что масштаб времени нашего распределения растянут почти втрое по сравнению с [7]. Чтобы оценить, какой вклад в это распределение могли дать неопознанные слабопереуплотненные следы, мы помечали отражения с признаками переуплотненности (заштрихованные части гистограммы на рис. 4б).

Оказалось, что увеличение длительности резонанса связано с переходом к более плотным следам. Этот результат противоречит теоретическим расчетам [1], основанным на «металлической» модели переуплотненного следа, согласно которым по мере увеличения электронной плотности сокращается время резонанса.

4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФАЗЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

Примеры наблюдаемых изменений фазы приведены на рис. 5. Мгновенные фазовые соотношения измерялись в скользящей шкале с нулем в конце отражения и приведены для каждого метеора вместе с x- и y-компонентами амплитуды отраженного сигнала. Первые три примера

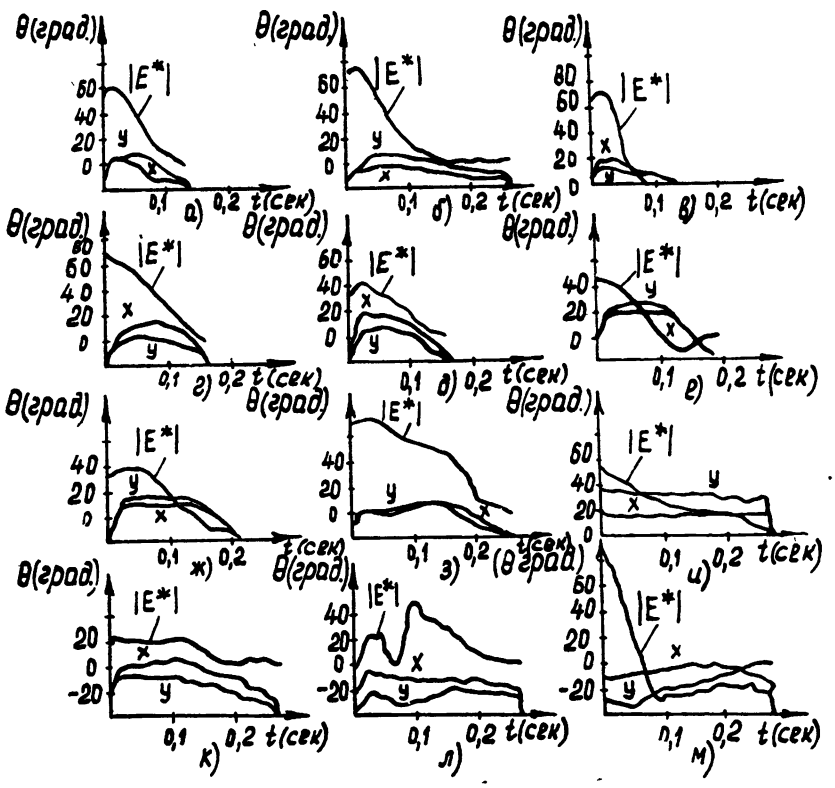


Рис. 5.

а, б, в — недоуплотненные следы с резонансом. Экстремумы в начале некоторых фазовременных регистраций, вероятно, обусловлены поворотом оси следа относительно антенной системы (см. рис 2). Случаи г и д могут быть отнесены к отражениям от слабопереуплотненных следов (рост амплитуды после первого максимума дифракционной картины); однако характер изменения разности фаз во времени остается прежним — непрерывное вращение в течение почти всего эхо. Переуплотненность еще сильнее выражена в случае е и особенно ж, однако изменение фазы замедляется и даже меняет направление лишь к концу отражения.

Длительность резонанса в последнем случае уже нельзя объяснить с точки зрения резонанса на металлическом цилиндре. Если считать [3], что «металлический» резонанс должен прекращаться, когда $(2\pi/\lambda)\, r_c = 1$ (r_c — критический радиус следа), то время резонанса

$$\tau_p(h, \alpha) = \frac{r_t^{*2}(\alpha) - r_н^2(h)}{4D(h)}. \qquad (5)$$

Здесь r_t^* — наименьшее из двух решений уравнения для r_t (r_t — диффузионный радиус, $r_н$ — начальный радиус):

$$\frac{2\pi}{\lambda} r_t \left[\ln \frac{\alpha e^2}{\pi^2 m \nu^2 r_t^2} \right]^{1/2} = 1 \qquad (6)$$

(выражение для r_c взято для гауссовского распределения электронов по радиусу следа).

Из (6) следует, что максимальная длительность резонанса — около 0,15 *сек* для слабопереуплотненных эхо с высоты 80 *км* ($r_н(h)$ и $D(h)$ взяты из [9]). Для приведенного на рис. 5ж случая $h \simeq 90$ *км* и $\alpha \simeq 4 \cdot 10^{12}$ *эл·см*$^{-1}$ и, следовательно, «металлический резонанс» такого эхо должен быть «скрыт» начальным радиусом следа; однако наблюдаемое время вращения фазы составляло 0,2 секунды.

Необходимо отметить еще характерное замедление скорости изменения фазы в средней части отражения. Процесс разбивается как бы на два этапа: быстрое вращение фазы в период роста ионизированного цилиндра со временем замедляется, но к концу «переуплотненности» скорость изменения разности фаз опять увеличивается. Этот эффект проявляется сильнее с увеличением электронной плотности (см. примеры з и и). В некоторых отражениях наблюдается задержка начала вращения фазы. Для отражений на рис. 5 а, б, в задержки могут быть объяснены геометрией следа (см. также рис. 2). Напротив, задержка начала фазовых изменений для примера на рис. 5к, возможно, обусловлена тем, что первый этап изменения разности фаз «скрыт» начальным радиусом (отметим, что скачок фазы на рис. 5 к совпадает с периодом разрушения переуплотненного следа).

Перечисленные выше особенности поведения поляризационного соотношения фаз для переходных следов не являются неожиданными. Непонятное поведение поляризационного отношения амплитуд в переходных следах уже отмечалось в работах [4,6]. Все сказанное выше позволяет сделать вывод о том, что теория поляризационных явлений в переуплотненных следах, построенная в предположении «металлической» модели метеорного следа, не объясняет наблюдаемых явлений по крайней мере для области переходных следов.

Для полноты классификации наблюдавшихся поляризационных явлений на рис. 5 л, м приведены примеры типичного поляризационного фединга, который является результатом поворота оси следа относительно антенн (случаи увеличения поляризационного отношения см. на рис. 2).

5. ОПОЗНАВАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ДРЕЙФОВ МЕТЕОРНЫХ СЛЕДОВ

Поляризационные вращения фазы могут наложиться на дрейфовые и повлечь за собой ошибки в измерении скорости ветра. Если на резкие кратковременные повороты фазы можно обратить внимание по нарушению регулярности поведения фазовременной характеристики, то плавные и длительные поляризационные изменения фазы, как правило, нельзя отличить от дрейфовых. Для решения проблемы эффективного обнаружения поляризационных явлений при измерении допплеровских сдвигов частоты можно воспользоваться связями между амплитудно-временными и фазо-временными характеристиками отражений, принимаемых на скрещенные вибраторы.

Рассмотрим еще случай, когда вектор поляризации передающей антенны параллелен одному из приемных вибраторов. Полагая в (1) и (2) $E_y = 0$, имеем

$$|E_x^*| = K[\cos^4\alpha + m^2\sin^4\alpha + 2m\cos^2\alpha\sin^2\alpha\cos\varphi]^{1/2}; \quad (7)$$

$$|E_y^*| = K\sin\alpha\cos\alpha[1 + m^2 - 2m\cos\varphi]^{1/2}. \quad (8)$$

На рис. 6а приведены графики зависимостей $|E_x^*|K^{-1}$ и $|E_y^*|K^{-1}$ от времени при разных α; из них видно, что сигнал в y-антенне появляется только во время резонанса, когда отраженная волна эллиптически поляризована.

Пусть к x- и y-антеннам подключены два независимых идентичных

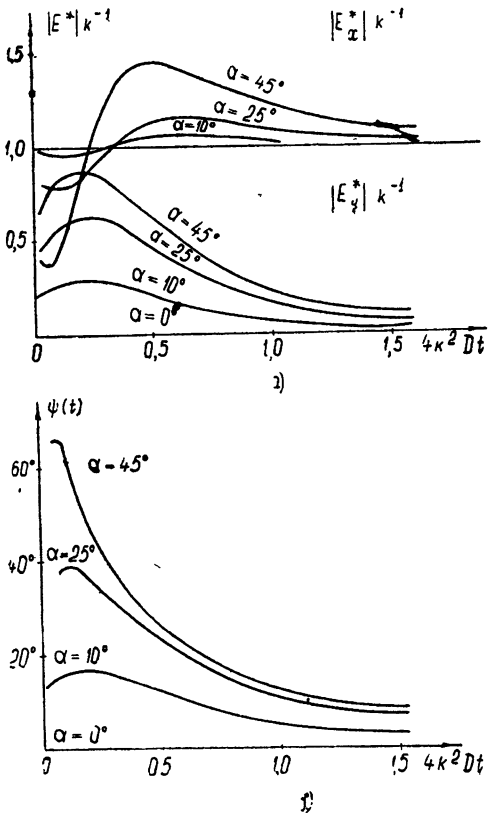


Рис. 6.

приемных устройства, одно из которых входит в комплект ветровой аппаратуры. Предположим, что сигналы с амплитудного детектора основного канала ($|E_x^*|$) поступают на X-, а с дополнительного канала на Y-пластины осциллографического индикатора. Эти сигналы будут отклонять луч осциллографа под углом $\Psi(t) = \operatorname{arcctg} n(t)$ к оси x, который будет меняться со временем в соответствии с изменением поляризационного соотношения фаз, затемняя на фотопленке сектор с некоторыми угловыми размерами. Характер этого изменения иллюстрируется графиками на рис. 6б, из которых следует, что описываемый здесь метод имеет наибольшую чувствительность при $\alpha = 45°$ ($\Psi_{\text{макс}} = 65°$). Однако

даже при $\alpha=10°$ и $\alpha=80°$ $\Psi_{макс}$ превышает 15°, что может быть легко замечено.

В случае, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$, подобным методом поляризационные эффекты обнаружить не удается; однако опасность представляет фактически только случай $\alpha = \pi/2$, так как при $\alpha = 0$ за отражение ответственна лишь «нерезонансная» компонента поля, параллельная метеорному следу [1]. Считая, что предлагаемая методика нечувствительна в области $\alpha = \pi/2 \pm \Delta\alpha_{мин}$, где $\Delta\alpha_{мин} \simeq 10°$, для равновероятных ориентаций следов получим девяностопроцентную вероятность того, что поляризационные явления будут исключены. При использовании направленных антенн с вертикальной поляризацией надежность обнаружения повысится, так как из-за отсутствия следов, параллельных горизонту, случаи $\alpha = \pi/2$ маловероятны.

6. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ДЛИТЕЛЬНЫХ ОТРАЖЕНИЯХ

При достаточно больших диаметрах метеорного следа анизотропия, связанная с различием радиусов кривизны отражающей области, уменьшается и, казалось бы, поляризационные эффекты должны исчезнуть. Однако уже первые наблюдения показали, что переуплотненные следы сохраняют анизотропные свойства в течение десятков секунд. Характерные качания разности фаз, начинающиеся вместе с замираниями и продолжающиеся в течение всего эхо, указывают на существенные различия поляризационных свойств по длине следа.

Для анализа было отобрано 63 отражения с длительностью более 2 *сек*, которые можно было классифицировать как зеркальные. Фазовые изменения регистрировались в течение 0,3 *сек* через интервалы в 2 *сек*. Начальное и конечное положения измерительного вектора рассматривались как два самостоятельных отсчета. Отсчет проводился от значения разности фаз в начале эхо.

На рис. 7а приведено общее распределение регистрируемых таким

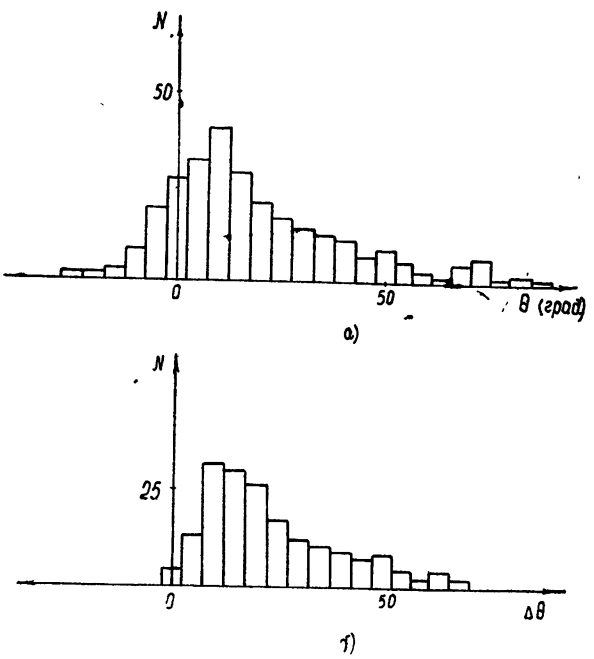


Рис. 7.

образом разностей фаз. Распределение асимметрично: преобладают вращения одного знака, хотя с точки зрения возможных ориентаций следов x- и y-антенны совершенно равноправны. По-видимому, это свидетельствует о том, что анизотропия в длительных отражениях не обусловлена ориентацией следа.

Распределение размахов колебаний фазы, связанных с флюктуациями амплитуды (рис. 7б), показывает, что различие поляризационных свойств вдоль следа может достигать по фазе 70°. Четкой зависимости между флюктуациями фазы и временем проследить не удается. На рис. 8а приведены характерные примеры изменения средней (за время регистрации) фазы во времени для 5 отражений; из них видно, что наряду со случаями явного роста разности фаз наблюдаются примеры более сложного ее поведения. На рис. 8б виден некоторый рост средней по ансамблю разности фаз во времени.

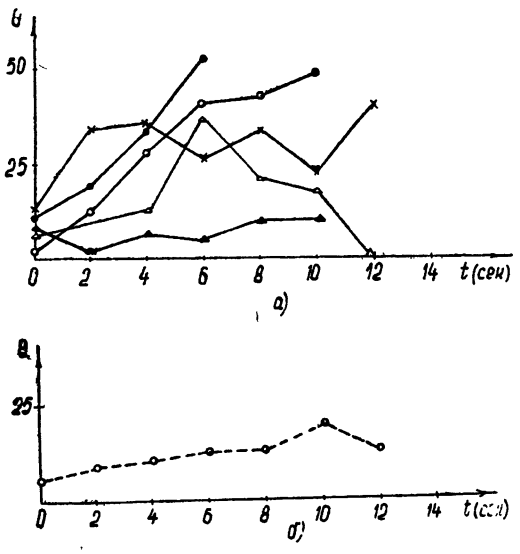


Рис. 8.

Необходимо отметить, что перечисленные выше поляризационные свойства длительных отражений, очевидно, проявлялись и в экспериментах Биллама и Брауна [4], которые отмечали изменения поляризационного отношения во время глубоких замираний отраженного сигнала. Согласно [4], при радиолокации метеоров могут наблюдаться повороты плоскости поляризации до 40° за счет ионизации в слое D. Однако для объяснения наблюдаемых эффектов необходимо предположить, что такого и даже более высокого порядка разность фаз должны обеспечить флюктуации электронной плотности на длине порядка $1 \div 5$ *км* (характерное расстояние между отражающими центрами флюктуирующего метеорного отражения). Кроме того, влияние ионизированных слоев должно иметь резко выраженный суточный ход; однако разделение имеющегося в нашем распоряжении экспериментального материала на дневной и ночной не позволило обнаружить какого-либо различия поляризационных свойств.

Двойное лучепреломление во внешних частях следа с точки зрения вращения фазы можно оценить соотношением [10]

$$\Theta = \frac{2\omega}{c}\int_{-\infty}^{r_c}\left\{(1-v_0)^{1/2} - \left[1 - \frac{v_0^*(1-v_0^*)}{1-v_0^*-u_0^*}\right]^{1/2}\right\}dr. \qquad (9)$$

Здесь $v_0^* = v_0$, если $v_0 \leqslant 1 - u_0$, и $v_0^* = 1$, если $1 - u_0 < v_0 \leqslant 1$; r — текущий радиус ионизированного следа, v_0 — отношение резонансной частоты ионизированной плазмы к рабочей частоте, u_0 — отношение квадратов гирочастоты электронов к рабочей частоте. Предполагается, что вектор магнитного поля перпендикулярен направлению распространения и совпадает с вектором поляризации одной из приемных антенн. Для гауссовского распределения электронов в следе

$$v_0 = \frac{e^2\alpha}{m\pi^2\nu^2 r_t^2} e^{-(r/r_t)^2} \qquad (10)$$

(α — линейная электронная плотность, ν — рабочая частота, $r_t^2 = r_н^2 + 4Dt$, D — коэффициент диффузии).

Проведя численное интегрирование (9) для $\alpha = 10^{14}$ *эл·см*$^{-1}$, $\nu = 33{,}5$ *Мгц*, $D = 6 \cdot 10^4$ *см*^{2}*·сек*$^{-1}$, $h \simeq 95 \div 100$ *км*, получим, что через 4,5 *сек* после начала отражения Θ может достигнуть 5,7°. Это почти на порядок меньше измеренных нами значений.

Таким образом, согласовать приведенные результаты эксперимента с гипотезой магнитного вращения можно лишь на основе значительно более «рыхлой» модели переуплотненного следа, чем это предполагалось в [1]. Возможно, что для объяснения наблюдаемых эффектов придется либо снова привлечь турбулентную диффузию [11], либо рассматривать с этой точки зрения неоднородные «вспышки» слабой ультрафиолетовой ионизации вдоль следа. Во всяком случае, асимметрия распределения на рис. 7а и некоторое увеличение поляризационных эффектов со временем заставляют искать причину анизотропии во влиянии магнитного поля Земли.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. R. Kaiser, R. L. Closs, Phil. Mag., **43**, 1 (1952).
2. R. L. Closs, J. A. Clegg, T. R. Kaiser, Pilos. Mag., **44**, 313 (1953).
3. Т. Р. Кайзер, Сб Метеоры, ИЛ, М., 1959, стр. 55.
4. E. R. Billam, J. C. Browne, Proc. Phys. Soc., **B69**, 98 (1956).
5. Э. К. Немирова, Астрон. ж., **36**, 377 (1959).
6. Э. К. Немирова, Тр. Сиб. физ-техн. ин-та, вып. 37, 247 (1959).
7. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, Proc. Phys. Soc., **B69**, 1069 (1956).
8. В. В. Сидоров, Диссертация, Казань, 1963.
9. J. S. Greenhow, I. E. Hall, Monthy. Not. Roy. Astr. Soc., **121**, 183 (1960).
10. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960
11. H. G. Booker, R. Cohen, J. Geophys. Res., **61**, 707 (1956).

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию
6 июля 1963 г.

THE USE OF THE PHASE TECHNICS TO THE STUDY OF THE POLARIZATION PHENOMENA AT RADIOWAVES REFLECTION FROM THE METEOR TRAILS

V. V. Sidorov, A. F. Pavlov, P Yu. Fakhrytdinov

The investigation results are given of the polarization phenomena at the radiowaves reflection from the meteor trails by the direct phase method. The indication method is proposed of the polarization phenomena in observation of meteoric trails drift. The observed effect of magnification of resonance duration at the transition to more dense trails testifies against the theory of „metallic" resonance. If the anisotropy in the trail giving the prolonged reflections is caused by the Earth's magnetic field, the structure of trail must be more „loose" than the structure realized in case of purely ambipolaric diffusion in meteor trail.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621 396 67 . 523 164

РЕДУКЦИЯ ПРИ УЧЕТЕ ПОЛОСЫ ПРОПУСКАНИЯ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРА

А. Балклав

Рассмотрена задача о восстановлении истинного распределения радиояркости по источнику космического радиоизлучения при учете конечной полосы пропускания как обычных, так и «пространственных» частот радиоинтерферометра

При решении так называемой задачи редукции [1, 2] необходимо знать спектр пространственных частот диаграммы направленности по мощности радиоинтерферометра. Диаграмма направленности радиоинтерферометра по мощности $A(\varphi)$ обычно определяется для одной, центральной частоты ν_0 полосы пропускания приемника радиоинтерферометра (см., например, [2, 3]). То же самое можно сказать о спектре пространственных частот $\overline{A}(s)$. Такой фактор, как ширина полосы пропускания приемника, редко учитывается при решении задачи восстановления истинного распределения. Исключением является работа Виткевича [4], где исследуется влияние полосы пропускания приемника и других факторов на глубину модуляции интерференционной картины двухантенного радиоинтерферометра. Так как задача восстановления истинного распределения радиояркости протяженных источников космического радиоизлучения по наблюдательным данным, полученным с помощью радиоинтерферометра, является очень важной для радиоастрономической практики, то вопрос о влиянии конечности полосы пропускания приемника, несомненно, требует более подробного рассмотрения, что и является целью настоящей статьи.

1. ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ ПО МОЩНОСТИ И СПЕКТР ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ *N*-ЭЛЕМЕНТНОГО РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРА

Диаграмму направленности по мощности N-элементного радиоинтерферометра $A_\nu(\varphi)$ при учете высокой направленности составных антенн можно выразить следующим образом [3]:

$$A_\nu(\varphi) = \sum_{i,\,k=1}^{N} a_i(\varphi)\, a_k(\varphi) \cos\left[\frac{2\pi}{c}(b_{1i} - b_{1k})\,\varphi\nu\right]. \qquad (1)$$

Строго говоря, функции a_i тоже зависят от ν, т. е. $a_i = a_i(\varphi, \nu)$, но практически можно принять, что $a_i \simeq a_i(\varphi, \nu_0)$, так как a_i мало меняется от ν в пределах полосы пропускания приемника.

Действительную диаграмму направленности по мощности радиоинтерферометра $A(\varphi)$ с учетом влияния полосы пропускания приемника можно выразить следующим образом:

$$A(\varphi) = \int_0^\infty \Pi\left(\frac{\nu_0 - \nu}{\Delta\nu}\right) F(\nu_0 - \nu)\, A_\nu(\varphi)\, d\nu\,, \qquad (2)$$

где $F(\nu_0 - \nu)$ — частотная характеристика приемника, а

$$\Pi\left(\frac{\nu_0-\nu}{\Delta\nu}\right)=\begin{cases}1, & \text{если } |\nu_0-\nu|<\Delta\nu/2\\ 0, & \text{если } |\nu_0-\nu|>\Delta\nu/2\end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\Delta\nu$ — ширина полосы пропускания приемника, ν_0 — резонансная частота. Чтобы упростить дальнейшие преобразования, допустим, что $F(\nu_0-\nu)=\text{const}=1$. Подставляя (1) и (3) в (2), получаем

$$A(\varphi)=\Delta\nu\sum_{i,k=1}^{N}a_i(\varphi)\,a_k(\varphi)\cos[2\pi(\sigma_{1i}-\sigma_{1k})\varphi]\times \tag{4}$$
$$\times\frac{\sin[\pi\alpha(\sigma_{1i}-\sigma_{1k})\varphi]}{\pi\alpha(\sigma_{1i}-\sigma_{1k})\varphi},$$

где $\sigma_{1i}=b_{1i}/\lambda_0$, $\alpha=\Delta\nu/\nu_0$.

Зная $A(\varphi)$, можно найти

$$\bar{A}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\varphi)\exp(-2\pi j s\varphi)\,d\varphi. \tag{5}$$

Действительно, подставляя (4) в (5), получим

$$\bar{A}(s)=\Delta\nu\sum_{i,k=1}^{N}\frac{1}{|\beta_{ik}|}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{A}_{ik}(s-\gamma_{ik}-\xi)\,\Pi\left(\frac{\xi}{|\beta_{ik}|}\right)d\xi, \tag{6}$$

где $\gamma_{ik}=\sigma_{1i}-\sigma_{1k}$, $\beta_{ik}=\alpha\gamma_{ik}$, и

$$\bar{A}_{ik}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{a}_i(s-x)\,\bar{a}_k(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_i(s-x)\,E_k(x)\,dx,$$

так как $\bar{a}_l(s)=E_l(s)$ (см., например, [5]). Нетрудно убедиться, что $\gamma_{ik}=-\gamma_{ki}$, а $\bar{A}(s)$ является четной функцией относительно параметра β_{ik}. Поэтому (6) можно переписать так:

$$\bar{A}(s)=\Delta\nu\sum_{i=1}^{N}\bar{A}_{ii}(s)+\Delta\nu\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{N}\frac{1}{|\beta_{ik}|}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{A}_{ik}(s-\gamma_{ik}-\xi)\,\Pi\left(\frac{\xi}{|\beta_{ik}|}\right)d\xi. \tag{7}$$

В случае, когда радиоинтерферометр имеет одинаковые антенны, выражение (7) принимает следующую форму:

$$\bar{A}(s)=\Delta\nu\,N\,\bar{A}_0(s)+\Delta\nu\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{N}\frac{\Phi(s-\gamma_{ik},\,\beta_{ik})}{|\beta_{ik}|}, \tag{8}$$

где

$$\Phi(s-\gamma_{ik},\,\beta_{ik})=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{A}_0(s-\gamma_{ik}-\xi)\,\Pi\left(\frac{\xi}{|\beta_{ik}|}\right)\times$$

$$\times d\xi\begin{cases}\equiv 0, & \text{если } |s|\geqslant s_0+|\gamma_{ik}|+\dfrac{|\beta_{ik}|}{2}\\ \not\equiv 0, & \text{если } |s|<s_0+|\gamma_{ik}|+\dfrac{|\beta_{ik}|}{2}\end{cases} \tag{9}$$

Интегрирование проводится с учетом того, что $E_0(s) \neq 0$, если $|s| < s_0/2$ и $E_0(s) = 0$, если $|s| \geqslant s_0/2$; это обычно имеет место. Как видно из (9), $\Phi(s - \gamma_{ik}, \beta_{ik})$ при достаточно больших величинах β_{ik} будет постоянной:

$$\Phi(s - \gamma_{ik}, \beta_{ik}) = \text{const} = \int_{-s_0}^{s_0} \bar{A}_0(\xi)\, d\xi, \qquad (10)$$

если $|\beta_{ik}| > 2s_0$ и $|s| \leqslant 2^{-1}|\beta_{ik}| + |\gamma_{ik}| - s_0$. Поэтому из (8) следует, что при увеличении базисного расстояния между антеннами $\bar{A}(s)$ уменьшается пропорционально $|\beta_{ik}^{-1}|$, т. е. радиоинтерферометр с увеличением β_{ik} все хуже и хуже пропускает высокие пространственные частоты s. Без учета полосы пропускания такое явление не наблюдалось [6]. Перекрытие всей полосы пропускания пространственных частот является более плавным благодаря соотношению (10).

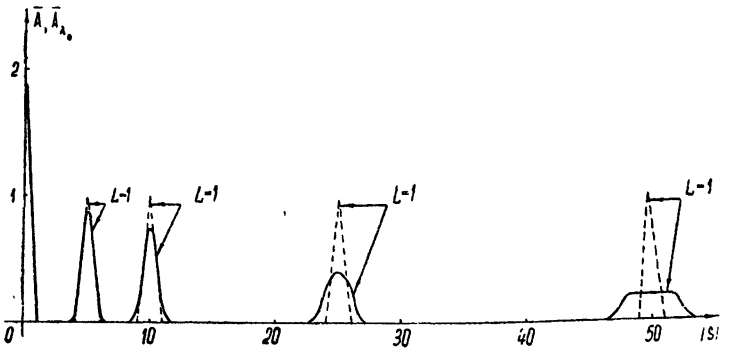


Рис. 1.

Чтобы лучше понять сказанное, на рис. 1 сплошной кривой представлен спектр пространственных частот двухантенного радиоинтерферометра с одинаковыми антеннами $\bar{A}(s)$. Для простоты принято, что $E_0(s) = \Pi(s/s_0)$. В этом случае

$$\bar{A}(s) = 2\Delta\nu\, \bar{A}_0(s) + \frac{\Delta\nu}{\beta_{12}} [\Phi(s - \gamma_{12}, \beta_{12}) + \Phi(s + \gamma_{12}, \beta_{12})], \qquad (11)$$

где

$$\bar{A}_0(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{s-\xi}{s_0}\right) \Pi\left(\frac{\xi}{s_0}\right) d\xi = \Lambda\left(\frac{s}{s_0}\right) = \begin{cases} 1 - |s/s_0|, & \text{если } |s| < s_0 \\ 0, & \text{если } |s| \geqslant s_0 \end{cases};$$

$$\Phi(s, \beta_{12}) = \int_{-\frac{\beta_{12}}{2}}^{\frac{\beta_{12}}{2}} \Lambda\left(\frac{s-\xi}{s_0}\right) d\xi = \frac{1 + \operatorname{sgn}\left(\frac{\beta_{12}}{2} - |s|\right)}{2} s_0 +$$

$$+ \operatorname{sgn}\left(|s| - \frac{\beta_{12}}{2}\right) \frac{1}{4s_0}\left[1 + \operatorname{sgn}\left(s_0 - \left|\frac{\beta_{12}}{2} - |s|\right|\right)\right]\left(\left||s| - \frac{\beta_{12}}{2}\right| - s_0\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{4s_0}\left[1 + \operatorname{sgn}\left(s_0 - \frac{\beta_{12}}{2} - |s|\right)\right]\left(s_0 - \frac{\beta_{12}}{2} - |s|\right)^2.$$

Расчет проводился на вычислительной машине БЭСМ-2М при $\alpha = 10\%$;

$b_{12}/a_0 = 5,\ 10,\ 25,\ 50$. На рисунке для сравнения нанесена пунктиром также функция $\bar{A}_{\lambda_0}(s)$ $(\alpha = 0)$.

Если $F(\nu_0 - \nu) \neq \text{const}$, то расчеты усложняются, но общие закономерности, такие, как гладкое перекрывание значительной полосы пропускания пространственных частот при больших значениях β_{ik} и подавление высоких пространственных частот s, остаются в силе. Действительно, подставляя (1) в (2), находим

$$A(\varphi) = \Delta\nu \sum_{i,\,k=1}^{N} A_{ik}(\varphi) \cos\left[2\pi(\sigma_{1i} - \sigma_{1k})\varphi\right] B_{ik}(\varphi), \tag{12}$$

где

$$B_{ik}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\nu) F(\nu\Delta\nu) \cos\left[2\pi\alpha(\sigma_{1i} - \sigma_{1k})\varphi\nu\right] d\nu,$$

если $F(-\nu) = F(\nu)$, т. е. если $F(\nu)$ симметричная функция, что обычно имеет место. В противном случае выражение для $A(\varphi)$ имеет более сложный вид. Подставляя (12) в (5), находим:

$$\bar{A}(s) = \Delta\nu \sum_{i,\,k=1}^{N} \frac{1}{|\beta_{ik}|} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}_{ik}(s - \gamma_{ik} - \xi) F_0\left(\frac{\xi}{|\beta_{ik}|}\right) d\xi, \tag{13}$$

где

$$F_0\left(\frac{\xi}{|\beta_{ik}|}\right) = \Pi\left(\frac{\xi}{|\beta_{ik}|}\right) F\left(\frac{\xi\Delta\nu}{|\beta_{ik}|}\right).$$

Выражение (13), как видно, аналогично выражению (6), являясь интегралом свертки. Поэтому общие закономерности, установленные для (6), остаются в силе.

2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИСТИННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИОЯРКОСТИ ПО ИСТОЧНИКУ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Если известны искажения пространственных частот истинного распределения радиояркости по источнику космического радиоизлучения $T(\varphi)$, т. е. если известна $\bar{A}(s)$, то можно решить вопрос о редукции этих искажений. Рассмотрим, как провести редукцию, основываясь на том факте, что $T(\varphi) = 0$ при $|\varphi| \geqslant a$. Из этого следует, что $\bar{T}(s)$ является функцией с ограниченным спектром, которую можно разлагать в ряд Котельникова:

$$\bar{T}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{T}(n\tau) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\tau}(s - n\tau)\right]}{\frac{\pi}{\tau}(s - n\tau)}, \tag{14}$$

где $\tau = 1/2a$. Равенство (14) существует, если $T(\varphi)$ абсолютно интегрируема в бесконечных пределах, что вполне можно допустить для реальных $T(\varphi)$. Ряд Котельникова, как известно [7], сходится равномерно, и его можно интегрировать почленно. Из этого следует, что $T(\varphi)$ можно найти при помощи выражения

$$T(\varphi) = \tau\Pi\left(\frac{\varphi}{2a}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{T}(n\tau) \exp(2\pi j n\tau\varphi), \tag{15}$$

если мы знаем значения $\overline{T}(n\tau)$. Как известно (см., например, [1]), $\overline{T}(n\tau)$ можно выразить так:

$$\overline{T}(n\tau) = \frac{\overline{T}_a(n\tau)}{\overline{A}(n\tau)}, \tag{16}$$

где $T_a(\varphi)$ — кривая прохождения источника. Таким образом, неизвестные коэффициенты $\overline{T}(n\tau)$ в ряде (15) можно найти при помощи (16), поскольку $\overline{T}_a(n\tau)$ и $\overline{A}(n\tau)$ определяются из экспериментальных данных, т. е. из $T_a(\varphi)$ и $A(\varphi)$.

Для примера рассмотрим двухантенный радиоинтерферометр с одинаковыми антеннами. Функция $\overline{A}(s)$ в этом случае выражается через (11), откуда можно определить коэффициенты $\overline{A}(n\tau)$. Выбирая расстояние между антеннами $b_{12} = n\tau\lambda_0$ (что необходимо вследствие ограниченности по аргументу функций $\overline{A}_0(s)$ и $\Phi(s, \beta_{12})$ и возможного равенства нулю функции $\overline{A}(s)$ при больших значениях s), получим кривую прохождения источника через диаграмму направленности радиоинтерферометра $T_a^{(n)}(\varphi)$. Функция $T_a^{(n)}(\varphi)$ является функцией с ограниченным спектром [1]. Граничная частота спектра функции $T_a^{(n)}(\varphi)$

$$s_{\text{гр}} = s_n = s_0 + |n|\tau\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Поэтому $T_a^{(n)}(\varphi)$ разлагается в ряд Котельникова следующим образом:

$$T_a^{(n)}(\varphi) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} T_a^{(n)}(i\tau_n)\,\frac{\sin[(\pi/\tau_n)(\varphi - i\tau_n)]}{(\pi/\tau_n)(\varphi - i\tau_n)}\,;\quad \tau_n = \frac{1}{2s_n}. \tag{17}$$

Ряд (17) также сходится равномерно, поэтому $\overline{T}_a^{(n)}(n\tau)$ определяется при помощи следующего выражения [10]:

$$\overline{T}_a^{(n)}(n\tau) = 2\pi\tau_n \Pi\left(\frac{n\tau}{2s_n}\right) \sum_{i=-\infty}^{\infty} T_a^{(n)}(i\tau_n)\exp(2\pi j\, i\, n\tau_n\tau) = \alpha_n + j\beta_n. \tag{18}$$

Как следует из физических соображений, а также из (11), $\overline{A}(-n\tau) = \overline{A}(n\tau)$, если $b_{12} = n\tau\lambda_0 \geqslant s_0$. Поэтому $T_a^{(-n)}(\varphi) = T_a^{(n)}(\varphi)$; из этого следует (см. также [10]), что $\alpha_{-n} = \alpha_n$, а $\beta_{-n} = -\beta_n$. Как известно (см., например, [8, 9]), спектр $\overline{A}(s)$ также может быть комплексной функцией. В этом случае

$$\overline{A}(s) = \overline{A}_1(s) - j\,\overline{A}_2(s),$$

где $\overline{A}_1(s)$ является четной, а $\overline{A}_2(s)$ — нечетной функцией. Но так как значения $\overline{A}(s)$ определяются в точках $s = n\tau$, то, согласно (9) и (11), $\overline{A}_2(n\tau) = 0$ и $\overline{A}(-n\tau) = \overline{A}(n\tau)$ являются реальными числами. Имея в виду сказанное и подставляя (18) в (16), из (15) окончательно получаем

$$T(\varphi) = \tau\Pi\left(\frac{\varphi}{2a}\right)\left[\frac{\alpha_0}{\overline{A}(0)} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{A}(n\tau)}(\alpha_n\cos 2\pi n\tau\varphi - \right.$$
$$\left. -\beta_n\sin 2\pi n\tau\varphi)\right]. \tag{19}$$

Выражение (19) является основным результатом, показывающим, как рассчитать $T(\varphi)$, если при определенных базисных расстояниях $b_{12} = n\tau\lambda_0$ с двухантенным регулярным радиоинтерферометром получены кривые прохождения источника через диаграмму $T_a^{(n)}(\varphi)$. Результат (19) можно легко обобщить на многоантенные радиоинтерферометры, если выбрать расстояния между соседними антеннами $b_{l(l+1)} = \tau\lambda_0$. Таким образом можно определить $T(\varphi)$ с точностью до $s = N\tau$. Если требуется большая точность, то можно выбрать $b_{12} = N\tau\lambda_0$, $b_{l(l+1)} = \tau\lambda_0$ (где $l \neq 1$) и определить $T(\varphi)$ вплоть до $s = 2N\tau$ и т. д.

Как следует из (6), а также из более общего выражения (13), $\bar{A}(s) \sim |b_{lk}|^{-1}$. Это накладывает серьезные ограничения на разрешающую способность радиоинтерферометра, так как реальная диаграмма направленности искажена шумами приемника, т. е. реально имеет место следующее соотношение [9]:

$$A_p(\varphi) = A(\varphi) + \eta(\varphi), \tag{20}$$

где $\eta(\varphi)$ — некоторая случайная функция. Спектры пространственных частот функций выражения (20) связаны между собой так:

$$\bar{A}_p(s) = \bar{A}(s) + \bar{\eta}(s).$$

Шумы в радиоаппаратуре, если внешние помехи отсутствуют, можно считать «белыми»; поэтому можно считать, что $\bar{\eta}(s) \simeq \text{const}$ во всей полосе пространственных частот. Из этого следует, что, начиная с некоторого расстояния b_{1N} и некоторого s_{kp}, имеет место соотношение $\bar{A}(s) \leqslant \bar{\eta}(s)$ для всех $s \geqslant s_{kp}$, хотя для этих s $\bar{A}(s) \neq 0$. Последнее означает, что шумы в радиоаппаратуре настолько искажают высокие пространственные частоты $\bar{A}(s)$, что теряется всякая уверенность в их истинных значениях и дальнейшее увеличение базы радиоинтерферометра с целью увеличения разрешающей способности не имеет смысла. Дальнейшее увеличение базы интерферометра целесообразно только при уменьшении уровня шумов в радиоаппаратуре.

Относительно редукции необходимо заметить, что зная точные значения $\bar{A}_{lk}(s)$ и $F(\nu_0 - \nu)$ (т. е. $\bar{A}(s)$), можно значительно сократить время наблюдения источника с целью нахождения $T(\varphi)$, сняв кривую прохождения источника $T_a(\varphi)$ при максимальной базе и еще некоторых промежуточных базисах, добиваясь полного перекрытия всей полосы «пространственных» частот, обусловленной максимальной базой. Истинное распределение $T(\varphi)$ можно найти, обрабатывая эти кривые прохождения согласно методу, изложенному в разделе 2 настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Балклав, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 629 (1962).
2. А. Балклав, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **6**, 437 (1963).
3. А. Балклав, Изв. АН Латв. ССР, № 5 (178), 89 (1962).
4. В. В. Виткевич, Астрон. ж., **29**, 450 (1952).
5. H. G. Booker, P. C. Clemmow, Proc. IEE, **III 97**, 11 (1950).
6. А. Балклав, Изв. АН Латв. ССР, № 3 (176), 45 (1962).
7. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, Физматгиз, М., 1962.
8. А. Балклав, Изв. АН Латв. ССР, серия физ.-техн. наук, № 6, 50 (1964).
9. А. Балклав, Изв. АН Латв. ССР, № 9 (182), 73 (1962).
10. А. Э. Балклав, Изв. АН Латв. ССР, серия физ.-техн. наук, № 4, 47 (1964).

Астрофизическая лаборатория
АН Латвийской ССР

Поступила в редакцию
29 апреля 1964 г.

REDUCTION BY MEANS OF FINITE PASS BAND RADIOINTERFEROMETER

A. Balklav

The problem has been considered of the determination of real distribution of radio brightness from the cosmic radiation source when taking into account the finite pass band of both the time and „spatial" interferometer frequencies.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 533.95 : 538.4

ИЗЛУЧЕНИЕ НЕОБЫКНОВЕННОЙ ВОЛНЫ ТОКОВЫМ СЛОЕМ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

М. В. Самохин

Рассмотрена задача об излучении плоского слоя магнитоактивной плазмы с током. Предполагается, что магнитное поле перпендикулярно к границам слоя, а изменения магнитного поля и плотности малы. Показатель преломления необыкновенной волны имеет полюс в точке, где частота излучения совпадает с гирочастотой электронов, и волновое управление сводится к неоднородному вырожденному гипергеометрическому уравнению, для которого найдено решение и его асимптотические разложения. Приведен график распределения электрического и магнитного полей в слое. Рассмотрен способ определения плотности электронов в таком слое по коэффициентам отражения или прохождения необыкновенной волны.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в слое магнитоактивной плазмы вектор плотности тока параллелен границам слоя и перпендикулярен постоянному магнитному полю. Если ось z направлена по магнитному полю и все величины* меняются только вдоль оси z, перпендикулярной к границам слоя, уравнения для x- и y-составляющих электрического поля при продольном распространении имеют вид [1]

$$\frac{d^2E_x}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(AE_x+iCE_y)=\frac{4\pi i\omega}{c^2}j_x;$$
$$\frac{d^2E_y}{dz^2}+\frac{\omega^2}{c^2}(-iCE_x+BE_y)=\frac{4\pi i\omega}{c^2}j_y, \qquad (1.1)$$

где

$$A=B=\frac{u+v-1}{u-1},\quad C=\frac{v\sqrt{u}}{u-1},\quad u=(\omega_H/\omega)^2,\ v=(\omega_p/\omega)^2, \qquad (1.2)$$

ω_H и ω_p — ларморовская и плазменная частоты. Уравнения (1.1) легко свести к волновому уравнению для $E=E_x+iE_y$ с диэлектрической проницаемостью вида $\varepsilon'=1-v/(1-\sqrt{u})$, где $j=j_x+ij_y$, а зависимость от времени принята в виде $e^{i\omega t}$.

Рассмотрим излучение необыкновенной волны. В этом случае $E_x=iE_y$, $j_x=ij_y$. Если в некоторой точке внутри плазмы $\omega=\omega_H$, то в этой точке наступает резонанс: вектор электрического поля необыкновенной волны и электрон в магнитном поле вращаются с одинаковой

* Относительно магнитного поля следует заметить, что оно, вообще говоря, должно зависеть и от координат x и y, поскольку $\operatorname{div} H=0$. Будем считать, однако, что составляющие H_x и H_y в слое малы и не оказывают влияния на тензор диэлектрической проницаемости.

угловой скоростью, а диэлектрическая проницаемость ε' имеет в этой точке особенность. Разложим постоянное магнитное поле H и плотность электронов n в ряд Тэйлора в этой точке, пренебрегая вторыми производными:

$$H = H_0 + H_0'(z - z_0), \quad n = n_0 + n_0'(z - z_0). \tag{1.3}$$

Здесь штрих означает производную, а индекс 0 — значения функции в точке z_0, где $H(z_0) = H_0 = mc\omega/e$. Тогда диэлектрическая проницаемость примет вид

$$\varepsilon' = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{z - z_0}\right), \tag{1.4}$$

где

$$\alpha = 1 + \frac{4\pi mc^2 n_0'}{H_0 H_0'}, \quad \beta = -\frac{4\pi mc^2 n_0}{H_0 H_0'}\left(1 + \frac{4\pi mc^2 n_0'}{H_0 H_0'}\right)^{-1}.$$

Будем считать, что $4\pi mc^2 n_0'/H_0 |H_0'| < 1$, $H_0' < 0$. Тогда величины α и β неотрицательны. В уравнении (1.2) с диэлектрической проницаемостью вида (1.4) введем замену переменных и новые обозначения $\xi = k\sqrt{\alpha}\ (z - z_0)$, $b = k\beta\sqrt{\alpha}$, $a = 4\pi ij/\omega\alpha$, где k — волновое число в пустоте. Тогда уравнение примет следующий вид:

$$\frac{d^2E}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{b}{\xi}\right)E = a. \tag{1.5}$$

На границе слоя плазмы слева ($\xi = \xi_1$) и справа ($\xi = \xi_2$) электрическое и магнитное поля непрерывны. Если слой соприкасается со средой, в которой $\varepsilon' = 1$, то граничные условия могут быть записаны следующим образом:

$$\left(\sqrt{\alpha}\,\frac{dE}{d\xi} - iE\right)_{\xi=\xi_1} = 0, \quad \left(\sqrt{\alpha}\,\frac{dE}{d\xi} + iE\right)_{\xi=\xi_2} = 0. \tag{1.6}$$

Заметим, что амплитуда тока в уравнении (1.2) считается медленно меняющейся в слое и может быть представлена в форме

$$j = j_0 + \frac{dj_0}{dz}(z - z_0).$$

Здесь индекс нуль означает величину функции в точке $z = z_0$. Тогда величина a в уравнении (1.5) имеет вид $a = a_0 + a_1\xi$, где $a_0 = (4\pi i/\omega\alpha)\,j_0$, $a_1 = (4\pi ic/\omega^2\alpha^{3/2})\,dj_0/dz$.

Если в уравнении (1.5) сделать замену $E = \mathcal{E} + a_1\xi$, то оно принимает следующий вид:

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{b}{\xi}\right)\mathcal{E} = a_0 + ba_1,$$

т. е. в правой части линейная функция заменяется константой. Учитывая это обстоятельство, будем искать решение волнового уравнения (1.5) с правой частью $a = \text{const}$.

2. РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Волновое уравнение (1.5) можно свести к неоднородному вырожденному гипергеометрическому уравнению; однако для наших целей удобнее получить интегральные представления общего и частного решений, исходя непосредственно из (1.5).

Сначала рассмотрим случай $\xi \geqslant 0$. Следуя методу Лапласа, в качестве линейно независимых общих решений однородного волнового уравнения, соответствующего (1.5), можно взять действительную и мнимую части интеграла:

$$F = \int_{\Gamma} e^{\xi z - b \operatorname{arctg} z} \frac{dz}{1+z^2}. \tag{2.1}$$

Контур интегрирования Γ в комплексной плоскости z указан на рис. 1. На этом рисунке проведен разрез, обозначенный жирной линией. Частное решение уравнения (1.5) можно представить в виде

$$\Phi = a\left(1 + be^{b\pi/2} \int_0^{\pi/2} e^{-\xi \operatorname{ctg} u - bu}\, du\right). \tag{2.2}$$

Делая замену переменных $z = \operatorname{tg} w$, получим из (2.1) другое интегральное представление для F:

$$F = 2 \operatorname{sh} \frac{b\pi}{2} \int_{\mu} e^{-\xi \operatorname{ctg} w - bw}\, dw, \tag{2.3}$$

где контур интегрирования μ в комплексной плоскости w указан на рис. 1.

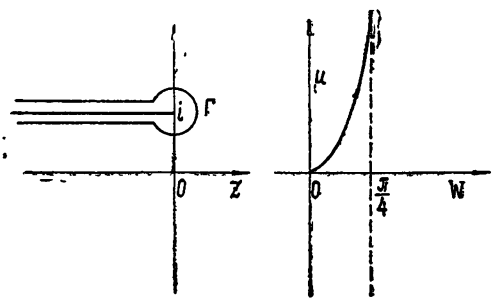


Рис. 1.

Решение уравнения (1.5) окончательно можно написать в виде

$$E(\xi) = A_1 F_1(\xi) + A_2 F_2(\xi) + \Phi(\xi), \tag{2.4}$$

где $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ — действительная и мнимая части $F(\xi)$, определяемой (2.3).

При $\xi < 0$ в качестве частного решения неоднородного уравнения следует взять

$$\Phi = a\left(1 + be^{b\pi/2} \int_{\lambda} e^{-\xi \operatorname{ctg} w - bw}\, dw\right),$$

а в качестве общего решения однородного уравнения —

$$F = 2 \operatorname{sh} \frac{b\pi}{2} \int_{\eta} e^{-\xi \operatorname{ctg} w - bw}\, dw.$$

Контуры интегрирования λ и η указаны на рис. 2. В этом случае Φ имеет также и мнимую часть.

Функция $F_2(\xi)$, являющаяся решением однородного уравнения (1.5) и не имеющая особенности при $\xi = 0$, должна быть связана с вырожденной гипергеометрической функцией. Эту связь легко установить, если в (1.5) сделать замену переменных $\xi = it/2$, $E = te^{-t/2}u(t)$ и рассмотреть поведение решения при $\xi \to 0$:

$$F_2(\xi) = \pi e^{-b\pi/2}\xi e^{i\xi}\Phi\left(1 + \frac{ib}{2},\ 2,\ -2i\xi\right).$$

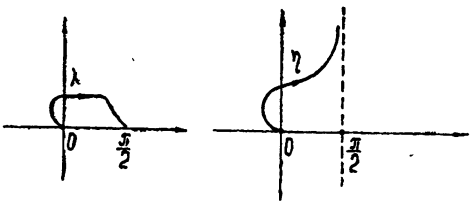


Рис. 2.

Следует заметить, что в [2] имеются таблицы функции

$$e^{-ix}\Phi(m + 1 - i\alpha,\ 2m + 2,\ 2ix).$$

Рассмотрим асимптотику решений. Асимптотическое разложение по параметру $\sqrt{b\xi} \gg 1$ имеет различный вид в зависимости от величины $\zeta = \xi/b$. Обозначим $S_1(\xi)$ и $S_2(\xi)$ действительную и мнимую части интеграла $S(\xi)$:

$$S(\xi) = e^{b\pi/2}\int_{\nu} e^{bf(w)}\,dw, \tag{2.5}$$

где контур интегрирования ν в комплексной плоскости w представляет собой полупрямую $\operatorname{Re} w = \pi/2$, $\operatorname{Im} w \geqslant 0$, а $f(w) = -(w + \zeta \operatorname{ctg} w)$. Если ввести также функции $S_3(\xi) = \int_0^{\pi/2} e^{bf(w)}dw$ при $\xi > 0$ и $S_3(\xi) = \int_{\lambda} e^{bf(w)}\,dw$ при $\xi < 0$ (контур λ указан на рис. 2), то решения (2.2) и (2.3) могут быть выражены через $S_1(\xi)$, $S_2(\xi)$ и $S_3(\xi)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1(\xi) &= 2\operatorname{sh}\frac{b\pi}{2}\left[\operatorname{Re} S_3(\xi) + e^{-b\pi/2}S_1(\xi)\right];\\ F_2(\xi) &= 2\operatorname{sh}\frac{b\pi}{2}\left[\operatorname{Im} S_3(\xi) + e^{-b\pi/2}S_2(\xi)\right];\\ \Phi(\xi) &= a[1 + be^{b\pi/2}S_3(\xi)]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Функции $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ представляют собой линейно независимые решения однородного вырожденного гипергеометрического уравнения. С точностью до множителей (некоторых элементарных функций) $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ являются линейной комбинацией функций Уиттекера. Однако частное решение неоднородного уравнения $\Phi(\xi)$ нельзя представить в виде конечной суммы известных специальных функций, и асимптотику этого интеграла нужно рассмотреть особо. Асимптотические представления функций Уиттекера приведены в [3,4]. Для нахождения асимптотики

$\Phi(\xi)$ удобно построить сначала кривые $\operatorname{Im} f(w) = \text{const}$, проходящие через седловые точки. Если деформировать контур интегрирования так, чтобы он проходил по этим линиям уровня, то соответствующее выражение сведется к интегралу от действительной функции, который оценивается методом Лапласа. Заметим, что и асимптотика $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ может быть получена точно таким же образом.

Рассмотрим линии уровня $\operatorname{Im} f(w) = \text{const}$. При $\zeta < 0$ седловые точки первого порядка расположены на прямых $\operatorname{Re} w = \pm \pi n$; при $0 < \zeta < 1$ седловые точки первого порядка находятся на действительной оси; при $\zeta = 1$ седловые точки второго порядка также расположены на действительной оси; при $\zeta > 1$ седловые точки первого порядка находятся на прямых $\operatorname{Re} w = \pi/2 \pm \pi n$. На рис. 3 представлены кривые $\operatorname{Im} f(w) = \text{const}$, проходящие через седловые точки, для четырех случаев:

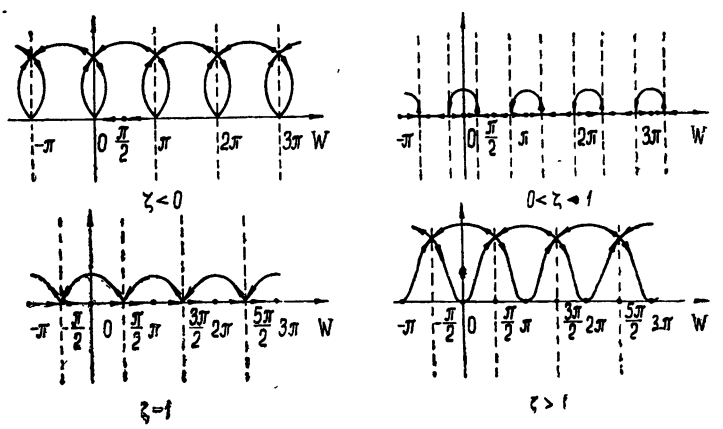


Рис. 3.

$\zeta < 0$, $0 < \zeta < 1$, $\zeta = 1$ и $\zeta > 1$. Стрелками указаны направления роста $\operatorname{Re} f(w)$.

В соответствии с общим методом получения асимптотических разложений деформируем контур ν таким образом, чтобы он проходил по кривым $\operatorname{Im} f(w) = \text{const}$ через седловые точки направо до бесконечности. Это допустимо, поскольку интеграл по бесконечно удаленной четверти окружности с центром в начале координат, расположенной в области $\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Im} w > 0$, сходится, причем в этой области нет особых точек подынтегрального выражения. Легко видеть, что вклад в седловой точке, лежащей справа, по отношению к соседней седловой точке слева, равен $e^{-b\pi}$. Поэтому при $b \gg 1$ нужно рассмотреть лишь вклад в первой седловой точке, встречающейся на контуре интегрирования. Остальные контуры (для $S_3(\xi)$) деформируем аналогичным образом; оканчиваются они не на бесконечности, а в точке $\pi/2$.

В результате вычислений получаем при $\zeta < 0$

$$S(\xi) = \frac{1}{b(1+|\zeta|)} + \sqrt{\frac{\pi}{b}} \sqrt[4]{\frac{|\zeta|}{1+|\zeta|}} \exp\left\{ -\frac{b\pi}{2} - \right.$$

$$\left. - i\left[b\left(\sqrt{|\zeta|(1+|\zeta|)} + \operatorname{arsh}\sqrt{|\zeta|}\right) + \frac{\pi}{4} \right] \right\},$$

$$S_3(\xi) = -\frac{e^{-b\pi/2}}{b(1+|\zeta|)} + \sqrt{\frac{\pi}{b}}\sqrt[4]{\frac{|\zeta|}{1+|\zeta|}}\exp\left\{-i\left[b\left(\sqrt{|\zeta|(1+|\zeta|)} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \operatorname{arsh}\sqrt{|\zeta|}\right) + \frac{\pi}{4}\right]\right\};$$

при $0 < \zeta < 1$

$$S(\xi) = \frac{1}{b(1-\zeta)} + \frac{i}{2}e^{-b\pi/2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\sqrt[4]{\frac{\zeta}{1-\zeta}}\exp\left\{b\left[\arcsin\sqrt{\zeta} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{\zeta(1-\zeta)}\right]\right\},$$

$$S_3(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\sqrt[4]{\frac{\zeta}{1-\zeta}}\exp\left\{b\left[\arcsin\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta(1-\zeta)}\right]\right\};$$

при $\zeta = 1$

$$S(b) = \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{9}}\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\cos\frac{\pi}{3}, \quad S_3(b) = \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt[3]{9}}\frac{1}{\sqrt[3]{b}}e^{-b\pi/2};$$

при $\zeta > 1$

$$S(\xi) = -\frac{1}{b(\zeta-1)} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt[4]{\frac{\zeta}{\zeta-1}}\exp\left\{i\left[b\left(\sqrt{\zeta(\zeta-1)} - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \operatorname{arch}\sqrt{\zeta}\right) + \frac{\pi}{4}\right]\right\},$$

$$S_3(\xi) = \frac{e^{-b\pi/2}}{b(\zeta-1)}.$$

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СЛОЕ

При разложении в ряд напряженности магнитного поля и плотности электронов мы пренебрегали вторыми производными, считая $|H_0''l/H_0'| \ll 1$, где l — характерный размер, равный расстоянию между точкой обращения диэлектрической проницаемости в нуль (в этой точке происходит

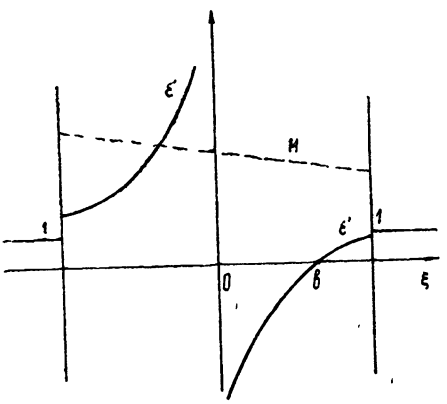


Рис. 4.

отражение) и в бесконечность (в этой точке происходит резонансное поглощение).

Вводя в указанные выше неравенства характерный размер изменения поля и плотности L, легко найти, что $4\pi m n_0 c^2/H_0^2 \ll 1$. Таким образом, можно считать, что $\alpha \simeq 1$. График изменения в слое диэлектрической проницаемости (сплошная линия) и магнитного поля (пунктирная линия) приведен на рис. 4. Параметр b представляет собой отношение толщины слоя с $\varepsilon' < 0$ (назовем ее эффективной толщиной) к длине волны в пустоте. Параметр ζ есть отношение расстояния данной точки z от особой точки к эффективной толщине слоя. Параметр $\sqrt{\xi b}$ — геометрическое среднее двух отношений—расстояния от особой точки до точки наблюдения к длине волны в пустоте и эффективной толщины к длине волны в пустоте. Все асимптотические разложения, приведенные в конце предыдущего раздела, дают хорошую аппроксимацию при $\sqrt{\xi b} \gg 1$.

Электрическое поле в слое имеет вид (2.4), где A_1 и A_2 — коэффициенты, определяемые из граничных условий (1.6). При $\alpha \simeq 1$

$$A_1 = \frac{[\Phi'(\xi_1) - i\Phi(\xi_1)][F_2'(\xi_2) + iF_2(\xi_2)] - [\Phi'(\xi_2) + i\Phi(\xi_2)][F_2'(\xi_1) - iF_2(\xi_1)]}{[F_1'(\xi_2) + iF_1(\xi_2)][F_2'(\xi_1) - iF_2(\xi_1)] - [F_1'(\xi_1) - iF_1(\xi_1)][F_2'(\xi_2) + iF_2(\xi_2)]};$$

$$A_2 = \frac{[\Phi'(\xi_2) + i\Phi(\xi_2)][F_1'(\xi_1) - iF_1(\xi_1)] - [\Phi'(\xi_1) - i\Phi(\xi_1)][F_1'(\xi_2) + iF_1(\xi_2)]}{[F_1'(\xi_2) + iF_1(\xi_2)][F_2'(\xi_1) - iF_2(\xi_1)] - [F_1'(\xi_1) - iF_1(\xi_1)][F_2'(\xi_2) + iF_2(\xi_2)]}.$$

Магнитное поле определяется по формулам

$$H = H_x + iH_y = -dE/d\xi, \quad H_x - iH_y = 0.$$

Следует заметить, что эти формулы получены для случая постоянной амплитуды стороннего тока. Согласно замечанию в начале статьи, для получения таких формул при $a = a_0 + a_1\xi$ следует к полю E, определяемому формулой (2.4), добавить слагаемое $a_1\xi$ и, заменив во всех формулах a на $a_0 + ba_1$, использовать те же граничные условия (1.6).

Очевидно, геометрическая оптика применима лишь при $\sqrt{b\xi} \gg 1$;

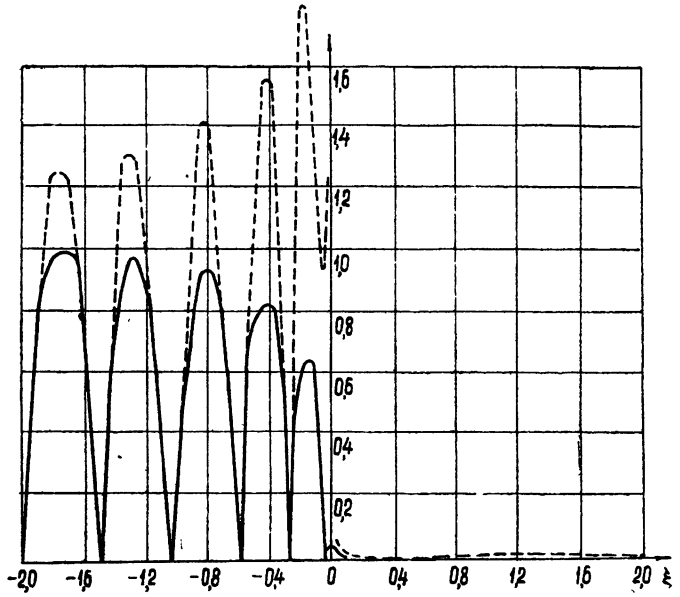


Рис. 5.

первое приближение геометрической оптики в этих областях совпадает с первым членом асимптотики. Магнитное поле в точке $\xi = 0$ имеет логарифмическую особенность, и его величина остается конечной только в том случае, когда учитывается поглощение энергии из-за отличной от нуля проводимости плазмы. Графики изменения амплитуды и фазы электрического и магнитного полей в слое для $b = 5$, $\xi_1 = -10$, $\xi_2 = 10$,

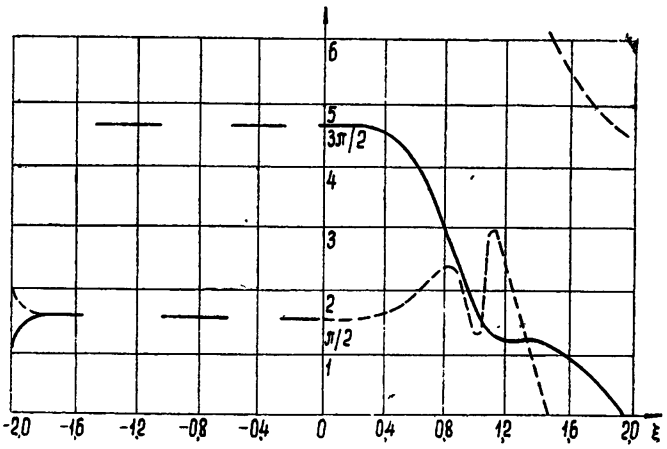


Рис. 6.

приведены на рис. 5 и 6. По оси абсцисс отложена величина ξ. На рис. 5 сплошной кривой показан ход амплитуды электрического поля в слое, отнесенной к наибольшему значению амплитуды $|E|_m = 25580\,|a|$. На этом же рисунке пунктиром показан ход амплитуды магнитного поля $H = H_x + iH_y$ в слое, также отнесенной к $|E|_m$. Амплитуда плоской волны, распространяющейся влево, равна 0,34 $|a|$, а амплитуда волны справа 3,28 $|a|$. При $\xi_1 \leqslant \xi < 0$ существует стоячая волна, причем амплитуда электрического поля стоячей волны в $4 \cdot 10^3$ раз превосходит амплитуду плоской волны, распространяющейся в сторону положительных z. На рис. 6 приведены фазы E/a (сплошная кривая) и H/a (пунктирная кривая).

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ И ГРАДИЕНТА ПЛОТНОСТИ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

В магнитоактивной плазме при продольном распространении необыкновенной волны без поглощения диэлектрическая проницаемость определяется соотношениями (1.4) (график $\varepsilon'(z)$ представлен на рис. 4). Отражение волны от такого слоя рассмотрено в [5].

При падении волны справа амплитудный коэффициент отражения

$$|R_0| = 1 - e^{-\pi\omega\beta/c}, \tag{4.1}$$

а коэффициент прохождения

$$|D_0| = e^{-\pi\omega\beta/2c}. \tag{4.2}$$

Если же волна падает слева, то коэффициент отражения равен нулю, и для определения плотности можно воспользоваться коэффициентом прохождения $|D_\infty| = |D_0|$.

В районе $\varepsilon' = 0$ происходит отражение волны, а в районе $\varepsilon' = \infty$ —поглощение. Поэтому, чем ближе эти точки, тем больше поглощение. Если же эти точки достаточно отдалены, то амплитуда волны настолько затухает около $\varepsilon' = 0$, что поведение $\varepsilon'(z)$ правее этой точки становится несущественным [6]. Таким образом, основную роль играет область

между этими точками размера $l = \beta$, и в этой области должны выполняться неравенства

$$|n_0'' l/n_0'| \ll 1, \qquad |H_0'' l/H_0'| \ll 1.$$

Измеряя коэффициенты отражения двух необыкновенных волн с небольшой разностью частот $\Delta\omega = \omega^{(2)} - \omega^{(1)}$, распространяющихся вдоль магнитного поля в плазме, можно определить плотность и градиент плотности электронов из соотношений

$$2 \ln |D_0^{(1)}|^{-1} = \ln\left(1 - |R_0^{(1)}|\right)^{-1} = \frac{4\pi^2 e n_0}{|H_0'|},$$
$$2 \ln \frac{|D_0^{(1)}|}{|D_0^{(2)}|} = \ln \frac{1 - |R_0^{(1)}|}{1 - |R_0^{(2)}|} = \frac{4\pi^2 mc\Delta\omega}{H_0'^2} n_0', \tag{4.3}$$

являющихся следствием (4.1) и (4.2). В (4.3) полагаем $\sqrt{1 + 4\pi mc^2 n_0'/H_0 H_0'} \simeq 1$, что выполняется в пределах применимости этого метода (см. ниже). Формулы (4.3) определяют плотность и градиент плотности электронов в точке $z = z_0$, где $\varepsilon' = \infty$.

В этой точке, определяемой частотой волны $H(z_0) = H_0 = mc\omega^{(1)}/e$, происходит поглощение энергии падающей волны вследствие резонанса, вектор электрического поля необыкновенной волны и электрон в магнитном поле имеют одинаковую угловую скорость вращения.

Вводя в указанные выше неравенства характерный размер изменения поля и плотности L, легко получить $H_0 \gg c\sqrt{2\pi m n_0}$, так что, например, для $n_0 = 10^{10}$ *см*$^{-3}$ должно быть $H_0 \gg 10^2$ *эрстед*. Таким образом, этот метод измерения можно применять при малой плотности и большом магнитном поле, например, в установке с магнитными пробками.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960, стр. 122.
2. A. N. Lowan, W. Horenstein, J. Mathem. Phys., 21, 264 (1942).
3. Higher Transcendental Functions, 1, New York, Toronto, London, 1953.
4. Э. М. Гюннинен и Г. И. Макаров, сб. Проблемы дифракции и распространение волн, 1, изд. ЛГУ, Л, 1962.
5. K. G. Budden, Phys. Ionosphere, Repts. on the Phys. Soc. Conf., 1955, p. 320.
6. С М. Рытов и Ф. С. Юдкевич, ЖЭТФ, **10**, 887 (1940).

Поступила в редакцию
10 декабря 1963 г.

EXTRA-ORDINARY WAVE RADIATION BY CURRENT IN A LAYER IN MAGNETOACTIVE PLASMA

M. V. Samokhin

The problem has been considered of the plane layer radiation of magnetoactive plasma with current. The magnetic field is assumed to be perpendicular to the layer boundaries and the change of the magnetic field and plasma density to be small. The refractive index for an extra-ordinary wave has the pole in the point where the radiation frequency coincides with the electron gyro-frequency so the wave equation reduces to the nonhomogeneous degenerated hypergeometric equation for which the solution and its asymptotic expansion have been found. The plot is given of the electric and magnetic field distribution in a layer.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 535.1

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В КОМБИНИРОВАННЫХ КВАЗИОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В. И. Таланов

Прохождение волнового пучка через систему амплитудно-фазовых преобразователей, образующих квазиоптический волновод или резонатор, описывается рядом линейных операторов, соответствующих отдельным элементам системы. Указаны основные соотношения между этими операторами, позволяющие осуществлять эквивалентные преобразования квазиоптических систем. Применение операторного метода описания волновых пучков иллюстрируется рядом примеров

В практике использования квазиоптических волноводов и резонаторов все чаще возникает необходимость в построении комбинированных систем, состоящих из различных амплитудно-фазовых преобразователей волнового пучка: линз, зеркал, призм, плоскопараллельных пластинок и т. п. [1, 2]. Естественно, что расчет комбинированной системы усложняется по мере увеличения числа ее элементов. В связи с этим наглядно выявляются преимущества операторного метода описания квазиплоских волновых пучков, позволяющего в значительной степени формализировать всю процедуру вычислений. В данной работе приведены основные тождества для операторов, встречающихся в теории волновых пучков, и на примерах иллюстрируется возможность их применения при расчете сложных квазиоптических систем.

1. ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

Укажем прежде всего ряд наиболее важных операторов преобразования волновых пучков. Для простоты ограничимся рассмотрением преобразователей, осуществляющих амплитудно-фазовую трансформацию поля в плоскостях, перпендикулярных оси пучка z. Обобщение на системы преобразователей, расположенных наклонно к оси пучка (например, зеркальные волноводы), легко достигается методом, описанным в работе [3].

1. Оператор Грина $\hat{G}_a$ [3]:

$$\psi = \hat{G}_a\psi_0 = \frac{i}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_0(x',y')\times$$
$$\times \exp\left[-i\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{2a}\right]dx'\,dy'. \qquad (1.1)$$

При $a = L/k$ этот оператор связывает между собой медленно меняющиеся комплексные амплитуды распределения поля

$$\Psi(x, y, z) = \psi(x, y, z)\,e^{-ikz} \qquad (1.2)$$

в двух разных сечениях пучка $z = 0$ и $z = L$ в однородной среде с волновым числом $k=2\pi/\lambda$. Интеграл в (1.1) берется по всему поперечному сечению пучка. При $a = \int_0^L k(z)^{-1}dz$ оператор $\hat{G}_a$ описывает поле в волновом пучке

$$\Psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{k(0)}{k(z)}}\,\psi(x, y, z)\exp\left[-i\int_0^z k(z)\,dz\right], \qquad (1.3)$$

распространяющемся без отражения в плоскослоистой среде с переменным волновым числом $k(z)$. Представление (1.3) применимо как в случаях медленного изменения $k(z)$, так и (с точностью до постоянных фазовых множителей) при скачкообразном изменении свойств среды, если на границах отдельных слоев имеются согласующие («просветляющие») покрытия.

При действительных значениях параметра a оператор $\hat{G}_a$ является унитарным ($\hat{G}_a^{-1} \equiv \hat{G}_{-a} = \hat{G}_a^{*}$) и, следовательно, сохраняет неизменным скалярное произведение двух функций $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$, определяемое соотношением

$$(\psi^{(1)}\psi^{(2)}) = \int\!\!\int_S \psi^{(1)}\psi^{(2)*}\,ds,$$

где S — полное поперечное сечение пучка. В частности, два пучка, ортогональные в сечении $z = 0$, будут описываться ортогональными функциями и в произвольном сечении $z = \text{const}$. Унитарность преобразования $\hat{G}_a$ отражает закон сохранения потока энергии в волновом пучке. Заметим, что оператор $\hat{G}_a$ аддитивен:

$$\hat{G}_{a_1}\hat{G}_{a_2} = \hat{G}_{a_1+a_2}\,. \qquad (1.4)$$

2. Оператор трансформации одиночного пучка произвольным преобразователем:

$$\psi = \hat{T}\psi_0\,. \qquad (1.5)$$

Оператор $\hat{T}$, вообще говоря, осуществляет нелокальную связь распределений поля ψ_0 и ψ в двух сечениях пучка. Однако в ряде случаев (тонкая линза, слабо искривленная зеркальная поверхность и т. п.) он может быть сведен к простому оператору умножения

$$\hat{T} = T_0(x, y)\,e^{i\varphi(x, y)}\,, \qquad (1.6)$$

где $T_0(x, y)$ — модуль локального значения коэффициента трансформации, а $\varphi(x, y)$ — его фаза. Для теории лучевых волноводов и резонаторов особый интерес представляют два частных вида оператора (1.6): оператор фазовых аберраций первого порядка

$${}_1T_\beta = e^{-i\beta r_\perp}\,, \qquad (1.7)$$

где β — постоянный вектор с компонентами β_x, β_y, а $r_\perp$ — радиус-вектор в плоскости x, y, и оператор фазовых аберраций второго порядка

$$ {}_2T_b = {}_2T_{b_x}\,{}_2T_{b_y} = \exp\left(i\,\frac{b_x x^2 + b_y y^2}{2}\right). \qquad (1.8а) $$

Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что аберрации второго порядка аксиально симметричны:

$$ {}_2T_b = e^{ibr_\perp^2/2}. \qquad (1.8б) $$

Операторы ${}_1T_\beta$ и ${}_2T_b$ обладают следующим свойством аддитивности:

$$ {}_1T_{\beta_1}\,{}_1T_{\beta_2} = {}_1T_{\beta_1+\beta_2}; \quad {}_2T_{b_1}\,{}_2T_{b_2} = {}_2T_{b_1+b_2}. \qquad (1.9) $$

При действительных β и b операторы (1.7), (1.8а), (1.8б) унитарны. Оператор $\hat{T}$ в (1.5) будет унитарным, если преобразование пучка происходит без потерь энергии. Операторы ${}_1T_\beta$ и ${}_2T_b$ можно рассматривать и при комплексных значениях параметров β и b. При этом они будут описывать не только фазовые, но и амплитудные изменения поля в пучке*. В дальнейшем индексы 1, 2 у операторов ${}_1T_\beta$, ${}_2T_b$ будут опускаться, так что первый будет отличаться от второго только векторным характером индекса.

Очевидно, что рассеяние волнового пучка на произвольном внесенном в него объекте не всегда может быть описано соотношением (1.5). В большинстве случаев образуется волновое поле, не сводящееся к одиночному пучку. Такое поле может быть описано матрицей рассеяния для плоских волн, являющейся наиболее полной характеристикой рассеивающих свойств данного объекта [4]. Это, как правило, существенно усложняет все исследование. Однако, если при рассеянии пучка происходит его разбиение на несколько вторичных пучков, то рассеивающий объект может быть охарактеризован матрицей операторов рассеяния $\hat{T}_{lk}$, связывающей между собой распределения поля в падающих и рассеянных пучках. В зависимости от возможного числа вторичных пучков такой трансформатор является аналогом того или иного многополюсного соединения одномодовых линий передач. Простейшим примером четырехполюсного пучкового трансформатора может служить плоскопараллельная пластинка прозрачного диэлектрика, помещенная перпендикулярно оси волнового пучка. Та же пластинка, внесенная в пучок наклонно к его оси, будет играть роль восьмиполюсного соединения. Примером многополюсного трансформатора пучков служит периодическая структура рассеивателей и, в частности, обыкновенная дифракционная решетка. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением преобразователей, для которых справедливо простейшее соотношение (1.5) в двух его частных формах (1.7) и (1.8б).

3. Оператор фурье-преобразования волнового пучка:

$$ \psi = \hat{\Phi}_a\psi_0 = \frac{i}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(xx'+yy')/a}\,\psi_0(x', y')\,dx'dy'. \qquad (1.10) $$

Рассмотрение такого оператора оказывается полезным ввиду очевидного соотношения

* Операторам ${}_1T_\beta$ и ${}_2T_b$ с комплексными параметрами отвечает, очевидно, изменение прозрачности преобразователя по экспоненциальному закону и кривой Гаусса.

$$\hat{G}_a = T^{-1}_{1/a}\hat{\Phi}_a T^{-1}_{1/a}. \tag{1.11}$$

При действительных значениях a оператор $\hat{\Phi}_a$ унитарен.

4. Оператор поперечного смещения пучка на некоторый вектор ρ_0:

$$\psi = \hat{\Pi}_{\rho_0}\psi_0(r_\perp) = \psi_0(r_\perp - \rho_0). \tag{1.12}$$

5. Оператор масштабного преобразования пучка:

$$\psi = \hat{A}_{\alpha_1\alpha_2}\psi_0(x, y) = \psi_0(\alpha_1 x, \alpha_2 y). \tag{1.13}$$

В дальнейшем будем полагать $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $\hat{A}_{\alpha_1\alpha_2} = \hat{A}_\alpha$.

6. Оператор диафрагмирования пучка идеально поглощающим экраном с апертурой S:

$$\psi = \hat{D}_S\psi_0 = \begin{cases} \psi_0(x, y) & \text{для } (x, y) \text{ внутри } S \\ 0 & \text{для } (x, y) \text{ вне } S \end{cases}.$$

Очевидно, что $\hat{D}^r_S = D_S$ и $\hat{D}_{S_1}\hat{D}_{S_2} = \hat{D}_{S_1S_2}$, где через S_1S_2 обозначено пересечение областей S_1 и S_2. Оператор диафрагмирования является частным случаем неунитарного оператора $\hat{T}$ в (1.5).

2. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА

В дополнение к уже отмеченным выше свойствам операторов, введенных в разделе I укажем ряд операторных тождеств, полезных при расчете квазиоптических систем:

$$\hat{\Phi}_{a_1}T^{-1}_b\hat{\Phi}_{a_2} = T_{1/ba_1^2}\hat{\Phi}_{ba_1a_2}T_{1/ba_2^2}; \tag{2.1}$$

$$\hat{A}_\alpha\hat{\Phi}_a = \hat{\Phi}_{a/\alpha^2}A_\alpha = \frac{1}{\alpha^2}\hat{\Phi}_a\hat{A}_{1/\alpha}; \quad \hat{\Phi}_a\hat{A}_\alpha = \frac{1}{\alpha}\hat{\Phi}_{\alpha a}; \tag{2.2}$$

$$\hat{A}_\alpha T_\beta = T_{\alpha\beta}\hat{A}_\alpha; \quad \hat{A}_\alpha T_b = T_{b\alpha^2}\hat{A}_\alpha; \quad \hat{A}_\alpha\hat{G}_a = \hat{G}_{a/\alpha^2}\hat{A}_\alpha; \tag{2.3}$$

$$\hat{A}_\alpha\hat{D}_S = \hat{D}_{S/\alpha^2}\hat{A}_\alpha, \tag{2.4}$$

где

$$\hat{D}_{S/\alpha^2}\psi(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y), & \text{если } (\alpha x, \alpha y) \text{ внутри } S \\ 0, & \text{если } (\alpha x, \alpha y) \text{ вне } S \end{cases};$$

$$\hat{\Phi}_a\hat{\Phi}_b = -\frac{b}{a}\hat{A}_{-b/a}; \tag{2.5}$$

$$\hat{\Phi}_a\hat{G}_b = T_{b/a^2}\hat{\Phi}_a; \quad \hat{\Phi}_a T_b = \hat{G}_{b/a^2}\hat{\Phi}_a; \tag{2.6}$$

$$\hat{\Phi}_a T_\beta = \hat{\Pi}_{\beta a}\hat{\Phi}_a; \quad \hat{\Phi}_a\hat{\Pi}_{\rho_0} = T_{-\rho_0/a}\hat{\Phi}_a; \tag{2.7}$$

$$\hat{\Pi}_{\rho_0} T_\beta = e^{i\beta\rho_0} T_\beta \hat{\Pi}_{\rho_0} ; \quad \hat{\Pi}_{\rho_0} T_b = e^{ib\rho_0^2/2} T_{b\rho_0} T_b \hat{\Pi}_{\rho_0} ; \tag{2.8}$$

$$\hat{\Pi}_{\rho_0} \hat{G}_b = \hat{G}_b \Pi_{\rho_0} ; \tag{2.9}$$

$$\hat{G}_b T_\beta = e^{-i\beta^2 b/2} \hat{\Pi}_{\beta b} T_\beta \hat{G}_b . \tag{2.10}$$

Эти тождества легко проверяются на основе данных выше определений операторов. Содержащиеся в них параметры должны определяться таким образом, чтобы все операции имели смысл.

3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

Операторные тождества, приведенные в разделе 2, наиболее эффективно могут быть использованы при расчете прохождения волновых пучков через квазиоптические системы с квадратичными и линейными преобразователями, помещенными в плоскослоистую среду. Любой последовательности операторов в них легко сопоставляется некоторая последовательность элементов системы. Очевидно, что изменению последовательности и типа операторов соответствует и изменение структуры квазиоптической системы. Тем самым приведенные тождества позволяют осуществлять эквивалентные преобразования систем трансформаторов пучка, аналогичные преобразованиям оптических систем, производимым на основе лучевой теории. В простейшем случае при таких преобразованиях операторы, связывающие медленно меняющиеся части распределения поля в некоторых фиксированных сечениях системы, остаются без изменения. В более сложных случаях эти операторы, а следовательно, и описываемые ими элементы системы преобразуются в соответствии с операторным преобразованием самого пучка при переходе к эквивалентной системе. Ниже приведены примеры эквивалентных преобразований.

Рассмотрим прежде всего эквивалентные преобразования одиночного квадратичного трансформатора (рис. 1). Пусть F — его фокусное расстояние. Преобразование произвольного пучка из плоскости O перед преобразователем в плоскость O' за ним описывается оператором

$$\hat{K}_{oo'} = \hat{G}_{L_2/k} T_{k/F} \hat{G}_{L_1/k} , \tag{3.1}$$

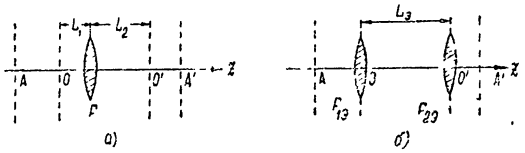


Рис. 1.

где L_1 и L_2 — соответственно расстояния от O до преобразователя и от преобразователя до O'. Учитывая (1.11), перепишем оператор (3.1) в виде

$$\hat{K}_{oo'} = T^{-1}_{k/L_2} \hat{\Phi}_{L_2/k} T^{-1}_{kC} \hat{\Phi}_{L_1/k} T^{-1}_{k/L_1} , \tag{3.2}$$

где

$$C = L_1^{-1} + L_2^{-1} - F^{-1} .$$

При $C \neq 0$, используя тождества (2.1) и (1.11), заменим (3.2) эквивалентным ему соотношением

$$\hat{K}_{oo'} = T_{k/F_{2э}} \hat{G}_{L_э/k} T_{k/F_{1э}}, \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned} L_э &= L_1 L_2 C = L_1 + L_2 - L_1 L_2 / F ; \\ F_{1э} &= F \frac{L_э}{L_2} = F(1 + L_1/L_2) - L_1 ; \\ F_{2э} &= F \frac{L_э}{L_1} = F(1 + L_2/L_1) - L_2 . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Из (3.3) вытекает, что одиночный квадратичный преобразователь осуществляет такую же трансформацию пучка из O в O', как и два преобразователя с фокусными расстояниями $F_{1э}$ и $F_{2э}$, расположенные в тех же сечениях O и O', но раздвинутые на расстояние $L_э$ одно от другого (рис. 1б).

Очевидно, что обе системы (рис. 1а и рис. 1б) эквивалентны и с точки зрения преобразования пучка между произвольными сечениями A и A', если только расстояния AO и $O'A'$ при переходе от одной системы к другой остаются без изменения. В частности, остается неизменным относительно O и O' положение кардинальных точек системы, что, между прочим, ясно и непосредственно из соотношений (3.4), которые не зависят от длины волны λ, а следовательно, могут быть получены на основе обычных лучевых представлений.

При $C = 0$ соотношения (3.4) неприменимы, и одиночный квадратичный преобразователь не может быть заменен эквивалентной ему парой преобразователей. В этом случае, используя тождества (2.5) и (1.9), имеем

$$\hat{K}_{oo'} = -\frac{L_1}{L_2} T^{-1}_{k\,(1+L_1/L_2)/l_2} \hat{A}_{-L_1/L_2} . \tag{3.5}$$

Согласно (3.5), в сечении O' воспроизводится (с коэффициентом увеличения L_2/L_1) амплитудная структура пучка, имевшаяся в O, что согласуется, естественно, с геометрической оптикой (при $C = 0$ сечения O и O' являются сопряженными). Фазовая структура воспроизводится с точностью до дополнительного искривления фазового фронта, описываемого оператором $T^{-1}_{k\,(1+L_1/L_2)/L_2}$. Этот оператор соответствует сферической волне, исходящей из фокуса, находящегося в пространстве изображений. Поэтому для точного воспроизведения на некотором расстоянии от исходного сечения O амплитуды и фазы произвольного волнового пучка требуется по крайней мере два преобразователя. Это обстоятельство уже отмечалось в работах [3,5].

В качестве примера использования эквивалентных преобразований квадратичных трансформаторов поля рассмотрим задачу о прохождении пучка по квазиоптическому волноводу, состоящему из периодически повторяющихся пар преобразователей F_1 и F_2 и диафрагмированному повторяющимися апертурами S_1 и S_2 (рис. 2а). Заменив каждый из преобразователей эквивалентной ему парой преобразователей, расположенных в плоскостях диафрагм S_1 и S_2, придем к более простой системе диафрагмированных преобразователей, изображенной схематически на рис. 2б. Обе системы эквивалентны в смысле равенства дифракционных потерь и совпадения распределений поля в плоскостях апертур S_1 и S_2. Если исходная система (рис. 2в) представляет собой диафрагмирован-

ный равными апертурами ($\hat{D}_{S_1} = \hat{D}_{S_2}$) лучевой волновод, составленный из одинаковых ($F_1 = F_2$) конфокальных преобразователей, то эквивалентный ему волновод с диафрагмированными преобразователями $F_э$ (рис. 2г) тоже будет конфокальным. Характеристики такого волновода хорошо известны [6–8]. Они определяются параметром

$$c = 2\pi a^2/\lambda L_э,$$

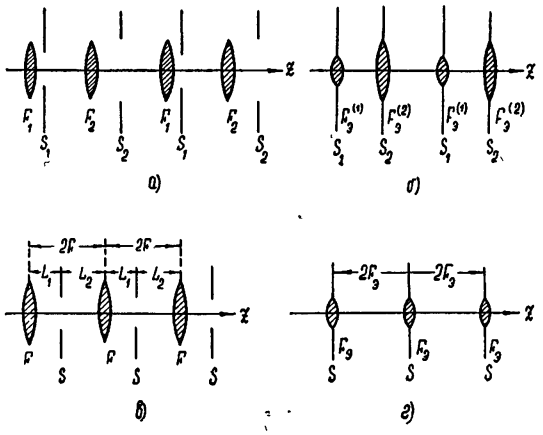


Рис. 2.

где a — радиус диафрагм, $L_э$ — расстояние между преобразователями. По отношению к исходной конфокальной системе с произвольно расположенными диафрагмами эта величина имеет тот же смысл, что и в эквивалентной системе [7], а именно, она равна $2a^2/\rho_s^2$, где $\rho_s = \sqrt{2L_э/k}$ — радиус пучка основной моды (по уровню спадания амплитуды в e раз) в плоскости диафрагмы в исходной недиафрагмированной системе.

Эквивалентные преобразования оказываются особенно полезными при рассмотрении недиафрагмированных комбинированных квазиоптических волноводов и резонаторов, состоящих из различных квадратичных фазовых преобразователей. Используя вышеприведенные операторные тождества (в первую очередь (1.11) и (2.1)), интегральное уравнение для пучков в таких системах всегда можно привести к симметричному виду:

$$p\psi = T^{-1}_{gk/b}\hat{\Phi}_{b/k}T^{-1}_{gk/b}\psi, \tag{3.6}$$

где p — собственное значение, характеризующее коэффициент трансформации пучка на один период системы, g и b — действительные постоянные величины, зависящие от геометрии системы и параметров преобразователей.

В одномерном случае решением уравнения (3.6) являются функции Эрмита [7]:

$$\psi_n = H_n(u)\, e^{-u^2/2}, \tag{3.7}$$

где

$$u = \sqrt[4]{1-g^2}\,\sqrt{\frac{k}{|b|}}\,x, \tag{3.8}$$

при собственных значениях

$$p_n = (g \pm i\sqrt{1-g^2})^{n+1/2}, \tag{3.9}$$

где верхний знак соответствует $b > 0$, а нижний $b < 0$.

В двухмерном случае уравнение (3.6) может быть решено разделением переменных.

Собственные функции (3.7) квадратично интегрируемы (и, следовательно, соответствующие пучки энергетически реализуемы) лишь при выполнении условия

$$|g| < 1, \tag{3.10}$$

определяющем область существования в системе локализованных типов колебаний*. Условие (3.10) определяет и область существования слабозатухающих типов волн, если система преобразователей будет диафрагмирована. Таким образом, все исследование недиафрагмированной периодической системы квадратичных преобразователей сводится в конечном счете к изучению зависимости решений эталонного уравнения (3.6) от конкретных параметров системы.

В качестве примера исследуем типы колебаний резонатора, образо-

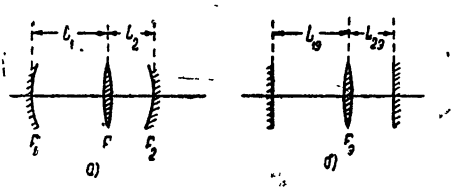


Рис. 3.

ванного парой сферических зеркал с расположенной между ними тонкой линзой (рис. 3а).

Уравнение такого резонатора

$$p\psi = \hat{K}\psi, \tag{3.11}$$

где

$$\hat{K} = \hat{G}_{L_1/k} T_{k/F_1} \hat{G}_{L_1/k} T_{k/F} \hat{G}_{L_2/k} T_{k/F_2} \hat{G}_{L_2/k} T_{k/F}, \tag{3.12}$$

путем замены

$$\tilde{\psi} = \frac{T^{-1}_{k}}{2F_1 - L_1}\psi$$

и использования тождеств (2.1) и (1.11) приводится к виду

$$p\tilde{\Psi} = \hat{K}_э \tilde{\psi}, \tag{3.13}$$

где

$$\tilde{K}_э = \hat{G}_{2L_{1э}/k} T_{k/F_э} \hat{G}_{2L_{2э}/k} T_{k/F_э}; \tag{3.14}$$

$$L_{1э} = L_1(1 - L_1/2F_1); \quad L_{2э} = L_2(1 - L_2/2F_2); \tag{3.15}$$

* В литературе принят также термин «устойчивые (или неустойчивые) типы колебаний» [9].

$$\frac{1}{F_э} = \frac{1}{F} + \frac{1}{2F_1 - L_1} + \frac{1}{2F_2 - L_2}. \tag{3.16}$$

Оператор (3.14) соответствует, очевидно, плоскопараллельному резонатору (рис. 3б) с линзой $F_э$ и эквивалентными размерами $L_{1э}$ и $L_{2э}$.

Опять прибегая к тождеству (2.1) и симметрируя уравнение (3.13) заменой

$$\tilde{\psi} = T_{k/f_э}\bar{\psi},$$

где

$$\frac{1}{f_э} = -\frac{1}{2F_э}\left(1 + \frac{L_{1э} - L_{2э}}{L_{1э} + L_{2э} - 2L_{1э}L_{2э}/F_э}\right),$$

получим уравнение (3.6), где следует положить

$$b = 2F_э(g_1 + g_2 - 2g_1g_2); \tag{3.17}$$

$$g = 2g_1g_2 - 1; \tag{3.18}$$

$$g_1 = 1 - L_{1э}/F_э; \qquad g_2 = 1 - L_{2э}/F_э. \tag{3.19}$$

Следовательно, в соответствии с (3.10) локализованные типы колебаний резонатора будут существовать в области

$$0 < g_1g_2 < 1 \tag{3.20}$$

или соответствующей ей области параметров L_1, L_2, F_1, F_2, F.

Полезным примером применения преобразований квазиоптических систем является расчет короткого комбинированного резонатора, эквивалентного по своим характеристикам более длинному конфокальному резонатору. Интерес к этой задаче связан с тем, что конфокальные резонаторы обладают высокой степенью самофильтрации высших типов колебаний [8]. Однако применение их для одномодовой генерации при не слишком больших длинах резонатора ограничено системами лишь с очень тонкими образцами активного вещества из-за высокой степени

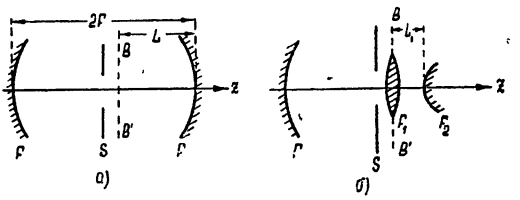


Рис. 4.

концентрации поля основной моды вблизи оси резонатора. Это, естественно, ограничивает выходную мощность таких систем. На рис. 4а показан конфокальный резонатор длины $2F$, диафрагмированный в среднем сечении. Роль диафрагмы в реальных устройствах играет обычно оправа, поддерживающая кристалл вещества.

Заменим отрезок резонатора, лежащий справа от плоскости BB', эквивалентной системой, состоящей из линзы и сферического зеркала, отстоящей от линзы на заданное расстояние L_1 (рис. 4б). Приравнивая друг другу операторы преобразования пучка $\hat{K}_1$ в исходной системе и $\hat{K}_2$ в комбинированной системе

$$\hat{K}_1 = \hat{G}_{L/k}T_{k/F}\hat{G}_{L/k}\,; \quad \hat{K}_2 = T_{k/F_1}\hat{G}_{L_1/k}T_{k/F_2}\hat{G}_{L_1/k}T_{k/F_1}\,,$$

получим следующие соотношения для определения фокусных расстояний линзы F_1 и зеркала F_2 в эквивалентной комбинированной системе:

$$F_1 = \frac{LL_1}{L - L_1}\,; \quad F_2 = \frac{L_1}{2}\left[1 - \frac{L}{L_1}\left(1 - \frac{L}{2F}\right)\right]^{-1}. \tag{3.21}$$

Из (3.21) видно, что при $L_1 < L(1 - L/2F)$ внешнее зеркало комбинированной системы должно быть выпуклым*.

Для иллюстрации применения ряда других операторных тождеств, приведенных в разделе 2, рассмотрим отражение волнового пучка от квадратичного преобразователя с расположенным за ним плоским зеркальным экраном, наклоненным к оптической оси системы z (рис. 5). Пусть ψ_i — распределение поля в падающем пучке в плоскости преобразователя. Поле отраженного пучка в той же плоскости будет описываться функцией

$$\psi_r = T_{k/F}\hat{G}_{L/k}T_{2\beta}\hat{G}_{L/k}T_{k/F}\psi_i, \tag{3.22}$$

где β — вектор, характеризующий линейный сдвиг фазы в пучке, обусловленный наклоном отражателя.

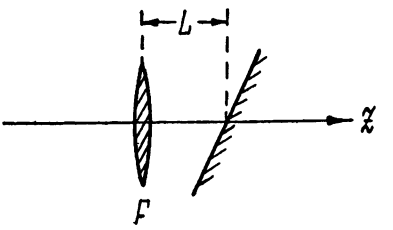


Рис. 1.

Применяя тождества (2.1), (2.8), (2.10), преобразуем соотношение (3.22) к виду

$$\psi_r = \exp\left[-i\frac{2\beta^2 L}{k}\left(1 - \frac{L}{F}\right)\right]\hat{\Pi}_{2\beta L/k}\,T_{2\beta(1-L/F)}\psi_r^0\,, \tag{3.23}$$

где

$$\psi_r^0 = T_{k/F}\hat{G}_{2L/k}T_{k/F}\,\psi_i$$

— поле в отраженном пучке при $\beta = 0$. В частном случае, когда $L = F$,

$$\psi_r = \hat{\Pi}_{2\beta L/k}\psi_r^0\,, \tag{3.24}$$

т. е. перекосы зеркала приводят только к смещению отраженного пучка на величину $2\beta L/k$.

Если $L \neq F$, то из (3.23) следует, что отраженный пучок отклоняется на угол, определяемый фазовой постоянной $2\beta(1 - L/F)$. При $|1 - L/F| < 1$ этот угол будет меньше, чем угол отклонения луча, падающего непосредственно на плоское зеркало. Это обстоятельство может быть использовано для уменьшения требований к точности юстировки зеркал в резонаторах квантовых оптических генераторов.

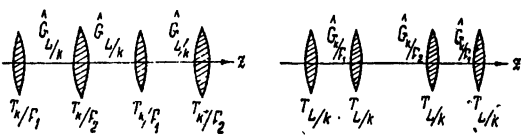
Интересные преобразования квазиоптических систем связаны с применением тождеств (2.6)—(2.7), содержащих оператор фурье-преобра-

---

* Предложение об улучшении селекции поперечных типов колебаний с помощью комбинированного отражателя, состоящего из линзы и выпуклого зеркала, было высказано в работе [1] на основе чисто лучевых соображений. Однако указанная там геометрия системы соответствует эквивалентному резонатору с плоскопараллельными зеркалами, уступающему по степени селекции мод конфокальному резонатору.

зования $\hat{\Phi}_a$. При $a = 1$ этот оператор преобразует волновой пучок в его угловой спектр. Применяя преобразование $\hat{\Phi}_1$ к пучку в реальной квазиоптической системе, можно перейти к рассмотрению некоторой сопряженной системы, роль «пучка» в которой будет играть угловой спектр волнового пучка в исходной системе. Сопоставление элементов исходной и сопряженной систем производится на основе тождеств (2.6)—(2.7). Из (2.6) вытекает, что плоскому однородному слою в реальной системе (оператор $\hat{G}_b$) соответствует квадратичный преобразователь (оператор T_b) в сопряженной и, наоборот, квадратичному преобразователю в исходной системе соответствует слой однородного пространства в сопряженной системе: $T_b \to \hat{G}_b$. Аналогичное взаимное соотношение имеется между оператором аберраций первого порядка и оператором смещения пучка (соотношения (2.7)).

Пример сопряженных систем показан на рис. 6: это лучевой волновод, составленный из неодинаковых квадратичных преобразователей, расположенных эквидистантно (рис. 6а), и лучевой волновод, содержа-



а) б)

Рис. 6.

щий одинаковые, но неэквидистантно расположенные преобразователи (рис. 6б). Заменяя в схеме на рис. 6б $L/k \to k/F$ и $k/F_1 \to L_1/k$, $k/F_2 \to L_2/k$ из условия

$$0 \leq (1 - L/2F_1)\,(1 - L/2F_2) < 1,$$

определяющего область существования локализованных волн в схеме на рис. 6а [10], сразу же получим аналогичное условие для волновода с неэквидистантными одинаковыми преобразователями:

$$0 < (1 - L_1/2F)\,(1 - L_2/2F) < 1.$$

Не останавливаясь на других примерах, отметим лишь, что переход к рассмотрению эквивалентной сопряженной системы оказывается особенно полезным в тех случаях, когда отдельные элементы квазиоптической системы проще могут быть охарактеризованы реакцией на падающую плоскую волну, чем на заданный волновой пучок. В частности, пусть на некотором объекте происходит разбиение падающей плоской волны единичной амплитуды на дискретный набор плоских волн, характеризующихся амплитудами $T^{(k)}(\boldsymbol{k}_\perp)$, где $\boldsymbol{k}_\perp$ — проекция волнового вектора k-ой вторичной волны на плоскость, ортогональную к направлению распространения k-го вторичного волнового пучка. Положим

$$T^{(k)}(\boldsymbol{k}_\perp) = \exp[\ln | T^{(k)}(\boldsymbol{k}_\perp) | + i\varphi^{(k)}(\boldsymbol{k}_\perp)].$$

Разлагая показатель этого выражения в ряд по степеням $\boldsymbol{k}_\perp$ и учитывая только члены до второго порядка включительно, мы можем сопоставить объекту ряд операторов $T_\beta^{(k)}$ и $T_b^{(k)}$ (в общем случае с комплексными параметрами β и b). Очевидно, что такое представление имеет смысл лишь для тех пучков в сопряженной системе, ширина которых не выходит за пределы применимости разложения $T^{(k)}(\boldsymbol{k}_\perp)$.

В заключение заметим, что, хотя в приведенных выше примерах мы ограничились рассмотрением одних лишь фазовых преобразователей волнового пучка, общие соотношения, приведенные в разделе 2, могут быть использованы и при анализе систем линейных и квадратичных амплитудно-фазовых преобразователей с комплексными параметрами. Это относится и к эталонному уравнению (3.6). В большинстве случаев все необходимые результаты могут быть получены простой заменой действительных параметров β и b, характеризующих операторы T_β и T_b, соответствующими комплексными величинами. Одной из задач, где такой подход оказывается полезным, является учет влияния неоднородности подсветки активного вещества на типы колебаний открытого резонатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Akira Okaya, Proc. IEEE, **51**, 1033 (1963).
2. D. A. Kleinman, P. D. Kisliuk, Bell System Tech. J., **41**, 453 (1962).
3. Н Г. Бондаренко, В И Таланов, Изв высш уч. зав. — Радиофизика, 7, 313 (1964).
4. Теория линий передачи сверхвысоких частот, 2, изд. Сов радио, М., 1951.
5. G. Goubau, Symposium on electromagnetic theory and antennas, Copenhagen, June, 1962, p. 332.
6. A. G. Fox, Tingye Li, Bell System Tech. J., **40**, 453 (1961).
7. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell System Tech. J., **40**, 489 (1961).
8. G. Goubau, F. Schwering, IRE Trans., **AP-9**, 248 (1961).
9. Tingye Li, Bell System Tech. J., **42**, 2609 (1963).
10. G. D. Boyd, H. Kogelnic, Bell System Tech. J., **41**, 1347 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 мая 1964 г.

OPERATIONAL METHOD OF THE WAVE BEAMS THEORY IN COMPLEX QUASI-OPTICAL SYSTEMS

V. I. Talanov

The wave beam passing through the system of the amplitude phase-transformers, forming the quasi-optical waveguide or the resonator is described by a set of linear operators for proper elements of the system. The main relationship between these operators have been given allowing to perform the equivalent mutual transformations of the quasi-optical systems. The usage of the operator method oi the description of the wave beams is illustrated by some examples

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.378.001

О ВЛИЯНИИ ТОНКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ НИЖНЕГО УРОВНЯ Cr^{+3} В РУБИНЕ НА НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Г. И. Фрейдман

Получены укороченные уравнения, которые описывают когерентное излучение возбужденных ионов хрома в рубине, помещенном в резонатор бегущей волны, с учетом тонкого расщепления нижнего уровня иона хрома. Показано, что это расщепление приводит к изменению средней частоты излучения в течение переходного процесса, обнаруженному экспериментально в работах [3]

При анализе работы оптических генераторов, в которых активным веществом является рубин, обычно пользуются моделью примесных ионов с двумя уровнями. Однако исследования, проведенные в области температур 100—150°К, указывают [1–3] на существование эффектов, которые не могут быть объяснены в рамках этой модели. К ним относится регулярное изменение частоты в течение некоторого времени после начала генерации, противоположное по знаку изменению, связанному с переменной температурой кристалла [3], и излучение двух заметно отличающихся частот [1–3].

В настоящей работе показано, что эти эффекты могут быть объяснены, если учесть тонкое расщепление нижнего уровня иона хрома в кристаллическом поле. Действительно, вследствие того, что расстояние между подуровнями сравнимо с шириной линии, возбудившееся вначале колебание влияет на населенности подуровней, но в разной степени. Поэтому и после возбуждения колебаний той или иной частоты может происходить регулярное изменение населенностей подуровней, а следовательно, и коэффициента усиления на частотах, отличающихся от частоты возбудившегося сначала колебания. Это и приводит к последовательному возбуждению соседних типов колебаний резонатора (квазинепрерывному изменению частоты), а через некоторое время после начала генерации — к возбуждению второй линии излучения.

Рассмотрение проводится для лазера бегущей волны, работа которого, как показано в первом разделе, может быть описана сравнительно простыми уравнениями. Однако основные результаты справедливы и для систем с резонаторами типа Фабри-Перо, так как различие структуры поля колебаний в различных резонаторах, по-видимому, незначительно сказывается на усредненных по некоторому промежутку времени характеристиках генерируемого излучения.

1. УКОРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛАЗЕРА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим простейшую модель лазера бегущей волны, в котором поле внутри слоя активного вещества толщины L_1 не зависит от поперечных координат, нет отражений от границ слоя, а внешняя по отношению к активному веществу система позволяет волнам распространяться

только в одном направлении, осуществляя преобразование поля на границе слоя $z = L_1$ в поле на границе $z = 0$ по закону*

$$E(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\, r(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau} E\left(L_1, \tau - \frac{L\sqrt{\varepsilon}}{c}\right). \quad (1.1)$$

Здесь L — эффективная длина внешней системы, ε — диэлектрическая проницаемость кристалла без учета поляризации активных ионов, $r(\omega)$ — коэффициент передачи, который будем считать действительным**.

Оптическую ось кристалла будем считать параллельной его граням. Составляющие дипольных моментов рабочих переходов ионов хрома в рубине, параллельные оптической оси, как известно [4], гораздо меньше перпендикулярных ей составляющих. Поэтому возможна генерация только волн, поляризованных перпендикулярно оси кристалла. При исследовании волн с такой поляризацией можно, как легко показать, не учитывать двухкратного вырождения рабочих уровней $\overline{E}$, $^4A_2(1/2)$, $^4A_2(3/2)$ (в дальнейшем будем их обозначать номерами 1, 2, 3 соответственно), считая электрические дипольные моменты*** для переходов между ними параллельными электрическому полю волны E. Зависимость поля E от z и t в слое активного вещества определяется при этом уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \qquad P = N\,\mathrm{Sp}\,\hat{p}\,\hat{\sigma}, \quad (1.2)$$

где $\hat{p}$ — оператор эффективного дипольного момента, $\hat{\sigma}$ — матрица плотности иона хрома, N — число этих ионов в единице объема.

При температуре жидкого азота и выше ширина линий R_1, R_2 для розового рубина не зависит от концентрации ионов хрома и определяется их взаимодействием с колебаниями кристаллической решетки [5]. Поэтому вид уравнений для $\hat{\sigma}$, за исключением особых случаев (см. сноску на стр. 274), не зависит от концентрации и определяется в основном взаимодействием с этими колебаниями и полем излучения. Если пренебречь смещением равновесных положений ионов решетки при возбуждении ионов хрома****, которое для рубина аномально мало [4, 5], то для матрицы $\hat{\sigma}$ методом, аналогичным изложенному в работах [6, 7], легко получаются сравнительно простые уравнения, коэффициенты которых могут быть определены из экспериментальных данных по ширине линий поглощения и парамагнитному резонансу:

$$\dot{\sigma}_{lk} - i\omega_{lk}\sigma_{lk} + \frac{\sigma_{lk}}{T_\perp^{lk}} = i\hbar^{-1}\,[\hat{W}\,\hat{\sigma}]_{lk} \quad (l \neq k); \quad (1.3)$$

---

* Строго говоря, эти предположения могут быть выполнены только при фиксированном состоянии слоя активного вещества. Однако в процессе генерации это состояние, как будет показано ниже, меняется мало. Поэтому предположения об отсутствии отражения от границ слоя и независимости коэффициента передачи от состояния активного вещества могут быть в принципе выполнены с неменьшей точностью, чем используемые в настоящей работе укороченные уравнения.

** В общем случае $r(\omega)$ — комплексная величина. Учет этого не вносит принципиальных трудностей

*** Магнитные дипольные моменты для рабочих переходов в рубине много меньше электрических, и мы их будем считать равными нулю

**** Взаимодействие примесных центров с колебаниями решетки, связанные с этим смещением, обусловливает оптический аналог эффекта Мессбауэра [8] и приводит к замене последних слагаемых в левых частях уравнений для σ_{lk} $(l \neq k)$ на интегральные операторы.

$$\dot{\sigma}_{ll} - \sum_k \frac{1}{T_{lk}} \left(\sigma_{kk} - \sigma_{ll} e^{-\omega_{kl}/\omega_T}\right) = i\hbar^{-1} [\hat{W}\hat{\sigma}]_{ll} - \sum_k \alpha_{lk}\sigma_{kk}.$$

Здесь $T_{\perp}^{ik} = T_{\perp}^{ki}$, $T_{lk} = T_{kl} \exp(-\omega_{kl}/\omega_T)$, $\omega_T = k\hbar^{-1}T$, $\hat{W} = \hat{p}E$.

Так как время жизни уровней, лежащих выше уровня $2\bar{A}$ (индекс нуль) и возбуждаемых подсветкой, мало, то можно считать, что их населенности равны нулю, $\alpha_{33} = \alpha_{22} = \alpha/2T_2$, $\alpha_{21} = \alpha_{31} = 0$, $\alpha_{12} = \alpha_{13} = -\alpha/2T_2$. Величина α пропорциональна мощности подсветки, а T_2 удобно определить выражением $T_2^{-1} = (1/4)\left(3T_{12}^{-1} + 3T_{02}^{-1} + T_{13}^{-1} + T_{03}^{-1}\right)$. Времена спонтанного излучения T_{02}, T_{03}, T_{12}, T_{13} равны, примерно, $5 \cdot 10^{-3}$ *сек* и мало отличаются друг от друга. Используя экспериментальные результаты измерения ширины линий поглощения R_1, R_2 и зависимости их средней частоты от температуры [5], легко показать, что в интервале температур 80—300°К времена $T_{\perp}^{13} = T_{\perp}^{12} = T_{\perp}$, $T_{10} \simeq 1{,}3T_{\perp}$ и меняются, примерно, от 10^{-10} *сек* до 10^{-12} *сек*. В этом же интервале температур времена $T_{\perp}^{23}$, T_{23} гораздо больше [6, 9]; в частности, при $T = 100$°К. $T_{23} = 10^{-4}$ *сек* *.

Будем искать поле E и резонансные недиагональные элементы σ_{12}, σ_{13} в виде

$$E = \sum_\nu \mathcal{E}_\nu \cos(\omega_{0\nu} t - k_{0\nu} z - \varphi_\nu);$$

$$\sigma_{12} = i \sum_\nu \sigma_\nu \exp[i(\omega_{0\nu} t - k_{0\nu} z - \psi_\nu)]; \quad \sigma_{13} = \tag{1.4}$$

$$= i \sum_\nu \eta_\nu \exp[i(\omega_{0\nu} t - k_{0\nu} z - \theta_\nu)],$$

где частоты $\omega_{0\nu} = \nu c^{-1}\sqrt{\varepsilon}\,(L + L_1)$ близки к частотам переходов ω_{12}, ω_{13}; $k_{0\nu} = \omega_{0\nu}\sqrt{\varepsilon}/c$; $\mathcal{E}_\nu$, σ_ν, η_ν, $\Psi_\nu = \varphi_\nu - \psi_\nu$, $\theta_\nu = \varphi_\nu - \theta_\nu$ и φ_ν — функции, мало меняющиеся за время $\tau_0 = c^{-1}\sqrt{\varepsilon}\,(L + L_1)$.

Из уравнений (1.3) видно, что диагональные элементы матрицы $\hat{\sigma}$, кроме мало меняющихся за время τ_0 составляющих, будут содержать малые слагаемые с характерным временем изменения τ_0. Как показывают оценки, учет этих слагаемых приводит к умножению коэффициентов a_ν, b_ν в полученных ниже уравнениях на $\left(1 + \sum_\mu \tau_0 m_\mu F_{\mu\nu}\right)$, где $F_{\mu\nu}$ — множители порядка единицы, а m_μ — величина, пропорциональная квадрату амплитуд $\mathcal{E}_\mu$. Такое же влияние на эти уравнения оказывает учет изменения σ_{23}, если разность частот одновременно возбуждаемых колебаний отличается от частоты ω_{23} не меньше, чем на величину $\Delta_{\mu\nu} \gtrsim 2\pi\tau_0^{-1}$ **. Как будет видно из сказанного ниже, за исключением особых случаев $\tau_0 m_\mu \ll 1$. Поэтому диагональные элементы

---

* Ввиду сравнительно большого значения $T_{\perp}^{23} = 2T_{23}$ при учете только взаимодействия с колебаниями решетки на изменение σ_{23} существенное влияние оказывают взаимодействие между ионами хрома Это приводит к изменению вида последнего слагаемого в левой части уравнения для σ_{23} (оно будет некоторым интегральным оператором от σ_{23}) и зависимости ее величины от концентрации Однако в дальнейшем мы ограничимся случаем, когда при анализе работы лазера изменением σ_{23} можно пренебречь.

** Случай, когда $\Delta_{\mu\nu} \ll 2\pi\tau_0^{-1}$, нуждается в особом рассмотрении, и мы не будем на нем останавливаться.

матрицы σ можно считать медленными функциями, а $\sigma_{23} = 0$, так же как и другие нерезонансные значения σ_{ik} $(i \neq k)$.

Учитывая, кроме того, что $T_\perp$, $T_{10} \ll \tau_0$, можно пренебречь производными по времени от σ_ν, γ_ν, Ψ_ν, θ_ν, $[\sigma_{00} - \sigma_{11}]\exp(-\omega_{01}/\omega_T)$ и записать уравнения, определяющие изменение поля, в виде

$$\dot{n}_2 = -An_2 \sum_\nu a_\nu m_\nu - Bn_3 \sum_\nu b_\nu m_\nu + T_2^{-1}(q\sigma_2 - \beta_{22} n_2 + \beta_{23} n_3); \tag{1.5а}$$

$$\dot{n}_3 = -Bn_2 \sum_\nu a_\nu m_\nu - An_3 \sum_\nu b_\nu m_\nu + T_2^{-1}(q\alpha_3 + \beta_{32} n_2 - \beta_{33} n_3);$$

$$\dot{m}_\nu + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} m_\nu' = \frac{L_1 + L}{T_p L_1} m_\nu (a_\nu n_2 + b_\nu n_3);$$

$$\dot{\varphi}_\nu + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi_\nu' = 2\frac{L_1 + L}{T_p L_1}\left(\frac{\delta_{2\nu} n_2}{1+\delta_{2\nu}^2} + \frac{k\delta_{3\nu} n_3}{1+\delta_{3\nu}^2}\right). \tag{1.5б}$$

Здесь

$$m_\nu = \frac{\hbar^{-2}|p_{12}|^2 T_1}{4}\mathcal{E}_\nu^2; \quad n_2 = q(\sigma_{11} - \sigma_{22}); \quad n_3 = q(\sigma_{11} - \sigma_{33});$$

$$q = \frac{4\pi}{\varepsilon}\hbar^{-1}|p_{12}|^2 T_1 T_p \frac{NL_1}{L + L_1};$$

$$T_p = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\frac{L + L_1}{1 + r_{\max}}; \quad a_\nu = (1 - \delta_{2\nu}^2)^{-1}; \quad b_\nu = k(1 + \delta_{3\nu}^2)^{-1}; \quad \delta_{2\nu} = T_1(\omega_\nu - \omega_{12});$$

$$\delta_{3\nu} = T_1(\omega_\nu - \omega_{13}); \quad \omega_\nu = \omega_{0\nu} - \varphi_\nu; \quad k = |p_{13}|^2 |p_{12}|^{-2},$$

а коэффициенты A, B, α_2, α_3 и β_{ik} зависят от температуры, времен T_{ik} и интенсивности подсветки. При $\omega_{01}/\omega_T \ll 1$; $\omega_{23}/\omega_T \ll 1$ эти зависимости имеют сравнительно простой вид:

$$A = \frac{3}{2}; \quad B = \frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\alpha - 1 + \frac{\omega_{23}}{2\omega_T}\beta\right); \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\alpha - T_3 T_2^{-1} - \frac{\omega_{23}}{2\omega_T}\beta\right);$$

$$\beta_{22} = \left(\alpha + \frac{1}{2} + \beta\right); \quad \beta_{33} = (\alpha - T_2(2T_3)^{-1} + \beta); \quad \beta_{23} = \left(\beta - \frac{1}{2}\right);$$

$$\beta_{32} = (\beta - T_2(2T_3)^{-1},$$

где

$$T_3^{-1} = \frac{1}{4}(3T_{13}^{-1} + 3T_{03}^{-1} + T_{12}^{-1}), \quad \beta = T_2 T_{23}^{-1} \gg 1.$$

При коэффициенте передачи $r(\omega)$, близком к 1, амплитуды m_ν, а следовательно, и разности населенностей n_2, n_3 мало меняются вдоль z. Это позволяет при усреднении (1.5) по z полагать $\overline{m_\nu n_i} = \overline{m_\nu}\,\overline{n_i}$, а $\overline{m_\nu}$ и $\overline{\varphi_\nu}$ считать равными соответственно $\left[\overline{m_\nu}\,2(1 - r(\omega_\nu))/L_1 + (L\sqrt{\varepsilon}/L_1 c)\overline{m_\nu}\right]$ и $(L\sqrt{\varepsilon}/L_1 c)\overline{\varphi_\nu}$. Тогда уравнения для средних по слою разностей населенностей совпадут с уравнениями (1.5а), а уравнения для $\overline{m_\nu}$, $\overline{\varphi_\nu}$ (знак усреднения будем в дальнейшем опускать) можно записать в виде

$$\dot{m}_\nu = \frac{1}{T_\nu}\left[\frac{T_\nu}{T_p}(a_\nu n_2 + b_\nu n_3) - 2\right]m_\nu; \tag{1.5в}$$

$$\dot{\varphi}_\nu = \frac{1}{4T_p}\left[\frac{\delta_{2\nu}}{1+\delta_{2\nu}^2}\,n_2 + \frac{k\,\delta_{3\nu}}{1+\delta_{3\nu}^2}\,n_3\right], \qquad (1.5г)$$

где $T_\nu = \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\,\dfrac{L+L_1}{1+r(\omega_\nu)}$ *.

Из (1.5в) видно, что предположение о малости изменения всех величин за время τ_0 выполняется при $T_\nu \gg \tau_0$. Это позволяет в области не слишком больших значений n_2, n_3 считать $\dot{\varphi}_\nu = 0$, т. е. полагать собственные частоты ω_ν постоянными и равными $\omega_{0\nu}$, что значительно упрощает исследование уравнений (1.5), так как a_ν, b_ν становятся при этом постоянными коэффициентами. Только эта область значений n_2, n_3 будет рассматриваться ниже, так как из сказанного в разделах 2, 3 видно, что именно она представляет основной интерес.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ОДНОГО ТИПА КОЛЕБАНИЙ

Итак, несмотря на сделанные упрощения, поведение системы описывается системой уравнений (1.5а), (1.5в) высокого порядка. Но если коэффициент передачи $r(\omega)$ имеет максимум на частоте $\omega_{0\nu}$, так что $T_\nu = T_p$, а $T_{\mu\neq\nu} \ll T_p$, то за исключением особых случаев возбудится лишь один тип колебаний, а $m_{\mu\neq\nu}$ останется равным нулю в течение всего времени. При этом можно провести довольно подробное исследование решений уравнений (1.5а), (1.5в).

Нетрудно видеть, что прямая

$$a_\nu n_2 + b_\nu n_3 - 2 = 0 \qquad (2.1)$$

(будем называть ее прямой самовозбуждения) делит плоскость n_2, n_3 в фазовом пространстве уравнений для m_ν, n_2, n_3 на области устойчивости и неустойчивости относительно приращений m_ν. В дальнейшем будем считать, что интенсивность подсветки достаточно велика, так что положение равновесия в плоскости $m_\nu = 0$ находится в области неустойчивости далеко от прямой самовозбуждения. В области не слишком больших значений n_2; n_3, которая, как уже упоминалось, только и рассматривается в дальнейшем, это позволяет считать в уравнениях (1.5а) $\beta_{ik} = \beta$.

Отметим, что в широком интервале реализуемых значений параметров выполняется неравенство $qT_p \ll T_2$. При этом в фазовом пространстве уравнений для m_ν, n_2, n_3 существует линия медленного движения, вдоль которой m можно считать равной нулю. Проекция линии медленного движения на плоскость n_2, n_3 совпадает, очевидно, с прямой самовозбуждения (2.1), а изменения величин $m_\nu = M_\nu$; n_3 вдоль нее определяются уравнениями**

$$M_\nu(n_3) = \frac{q}{T_2 A_\nu(n_3)}\left\{a_\nu \alpha_2 + b_\nu \alpha_3 + \frac{2\beta}{q}\,\frac{a_\nu - b_\nu}{a_\nu}\,[(a_\nu + b_\nu)\,n_3 - 1]\right\}; \qquad (2.2а)$$

$$\dot{n}_3 = \frac{q}{T_2 A_\nu(n_3)}\,\frac{n_{03\nu} - n_3}{a_\nu b_\nu\,[\alpha_2 + \alpha_3 + (4\beta/q)\,(a_\nu + b_\nu)/a_\nu b_\nu]}. \qquad (2.2б)$$

* Легко показать, что в рамках сделанных выше упрощений учет потерь внутри слоя, например, за счет рассеяния, приведет просто к увеличению T_ν^{-1} на величину, не зависящую от $r(\omega_\nu)$.

** Мы не будем рассматривать область изменения n_2, n_3 около прямой самовозбуждения, где $A_\nu(n_3) < 0$ и линии медленного движения не существует, так как из сказанного ниже следует, что при реализуемых начальных условиях и величине параметра q изображающая точка не может попасть в эту область.

Здесь $A_\nu(n_3) = 3a_\nu + b_\nu - b_\nu(a_\nu - b_\nu)n_3$, а значения

$$n_{03\nu} = \frac{3\alpha_3 - \alpha_2 + 8\beta/qa_\nu}{b_\nu[\alpha_2 + \alpha_3 + 4\beta(a_\nu + b_\nu)/qa_\nu b_\nu]}, \qquad n_{02\nu} = \frac{2}{a_\nu} - \frac{b_\nu}{a_\nu} n_{03\nu} \tag{2.3}$$

определяют положение равновесия как точных уравнений для m_ν, n_2, n_3, так и уравнений (2.2) медленного движения. Нетрудно показать, что в обоих случаях это положение равновесия устойчиво.

В конечной, но достаточно малой окрестности линии медленного движения можно найти приближенное решение уравнений для m_ν, n_2, n_3, используя метод медленно меняющихся амплитуд. Рассмотрение при этом мало чем отличается от рассмотрения в случае двухуровневой модели активных ионов [10, 11]. Однако имеются и некоторые особенности, связанные с медленным изменением разностей населенностей. Поэтому проведем исследование полностью. Для этого удобно ввести новые переменные $x = n_3 - N_\nu$, $n = [a_\nu n_2 + b_\nu n_3 - 2]$, где N_ν — медленно меняющаяся величина, x и n — быстрые, но малые переменные. Уравнения для m_ν, n_2, n_3 в этих переменных примут вид

$$\dot{N} + \dot{x} = \frac{q}{T_2 A_\nu(N_\nu)} \frac{n_{0\nu 3} - N_\nu}{a_\nu b_\nu[\alpha_2 + \alpha_3(4\beta/q)(a_\nu + b_\nu)/a_\nu b_\nu]} - (1 - b_\nu N_\nu)[m_\nu - M_\nu(N_\nu)] - \left(b_\nu x - \frac{n}{2}\right) m_\nu; \tag{2.4}$$

$$\dot{n} = -A_\nu(N_\nu)[m_\nu - M_\nu(N_\nu)] + \left[b_\nu(a_\nu - b_\nu)x - \frac{3a_\nu + b_\nu}{2} n\right] m_\nu;$$

$$\dot{m}_\nu = \frac{n m_\nu}{T_p}.$$

Рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\dot{x} = -(1 + b_\nu N_\nu)[m_\nu - M_\nu(N_\nu)]; \qquad \dot{n} = -A(N_\nu)[m_\nu - M_\nu(N_\nu)], \tag{2.5}$$

считая $N_\nu = \text{const}$. Уравнения (2.5) имеют периодические решения, которые легко найти в неявном виде*:

$$t + \Phi = \pm \sqrt{\frac{T_p}{2A_\nu(N)}} \int_{M_\nu}^{m_\nu} \frac{dy}{y[M - y - M_\nu \ln(M/y)]^{1/2}}; \qquad n = A_\nu(N_\nu)x = \pm \sqrt{2T_p A_\nu(N_\nu)} \left[M - m_\nu - M_\nu \ln \frac{M}{m_\nu}\right]^{1/2}. \tag{2.6}$$

Здесь M — максимальное значение m_ν на данной фазовой траектории (амплитуда пичка). Период движения по фазовой траектории зависит от амплитуды M и определяется выражением

* Заметим, что функции $n(t)$, $x(t)$ ортогональны $[m_\nu(t) - M_\nu]$ в том смысле, что среднее от произведений $n[m_\nu - M_\nu]$, $x[m_\nu - M_\nu]$ по периоду равно нулю

$$T = \sqrt{\frac{2T_p}{A_\nu (N_\nu)}} \int_m^M \frac{dy}{y\,[M - y - M_\nu \ln (M/y)]^{1/2}}, \tag{2.7а}$$

где m — минимальное значение m_ν на данной фазовой траектории. При уменьшении амплитуды колебаний интенсивности ($M;\ m \to M_\nu$) период T стремится к постоянной величине: $T = 2\pi\,(T_p/A_\nu M_\nu)^{1/2}$. При $M \gg M_\nu$ период имеет смысл разделить на время пичка $T_\text{п}$ и время между пичками ΔT:

$$T_\text{п} = \sqrt{\frac{2T_p}{A_\nu}} \int_{M_\nu}^M \frac{dy}{y\,[M - y - M_\nu \ln (M/y)]^{1/2}} \simeq \sqrt{\frac{2T_p}{M}} \ln \frac{4M}{M_\nu}; \tag{2.7б}$$

$$\Delta T = \sqrt{\frac{2T_p}{A_\nu}} \int_m^{M_\nu} \frac{dy}{y\,[M - y - M_\nu \ln (M/y)]^{1/2}} \simeq 2 \sqrt{\frac{M}{M_\nu}} \sqrt{\frac{2T_p}{A_\nu M_\nu}}.$$

Решение уравнений (2.4) будем искать, считая, что m_ν, n, x связаны с t, $m_\nu (t - \tau_2)$, $m_\nu (t - \tau_1)$ соответственно соотношениями (2.6), где Φ, N_ν, M, τ_i — медленные функции времени. Считая, кроме того, $\tau_i \ll T_\text{п}$, T, пренебрежем в дальнейшем величинами, пропорциональными τ_i^2.

Усредняя первое из уравнений (2.4), получим, что с точностью до величин порядка $\left[T_p M \left(\frac{M - M_\nu}{M_\nu}\right)^2\right]$* уравнение для N_ν не зависит от M и совпадает с уравнением (2.2б). Умножив первые два уравнения (2.4) на x, n, а последнее на $(m_\nu - M_\nu)$ соответственно, и затем усреднив их, получим уравнения, определяющие изменение амплитуды пичков M**. Условие их совместности определяет $\tau_1\,\tau_2$, причем они оказываются по порядку величины равными T_p.

При $M \simeq M_\nu$ разность $(M - M_\nu)$ пропорциональна

$$\exp\left[-\frac{1}{4}\int_0^t A_2(N_\nu)\, M_\nu\, (N_\nu)\, dt\right],$$

где

$$A_2 = \left[9a_\nu^2 - 4a_\nu b_\nu + 3b_\nu^2 - 3b_\nu \left(a_\nu^2 - b_\nu^2\right) N_\nu\right].$$

При $M \gg M_\nu$ решение уравнения для амплитуды M можно приближенно записать в виде

$$M = \frac{M\,(0)}{1 - M\,(0) \int_0^t B\,(t)\, dt}, \tag{2.8}$$

---

* Эта величина в пределах применимости метода медленно меняющихся амплитуд может быть как меньше, так и порядка единицы. Однако учет ее конечного значения не вносит существенных изменений в поведение системы, так как $(M - M_\nu)$ стремится с течением времени к нулю.

** Уравнение для Φ получается умножением первых двух уравнений (2.4) на $(m_\nu - M_\nu)$, а последнего на x или n и последующим усреднением по периоду. Все три полученных при этом соотношения удовлетворяются при $\dot{\Phi} = 0$.

где

$$B(t)=\frac{5}{8}\left(1+\frac{2}{3}\ln\frac{M(0)}{M_\nu}\right)^{-1}\left(3a_\nu+b_\nu-\frac{2b_\nu(a_\nu-b_\nu)}{A_\nu(N_\nu)}\right)$$

— величина порядка единицы.

Из (2.2б), (2.7), (2.8) видно, что применение метода медленно меняющихся амплитуд оправдано при выполнении неравенств

$$\left(\frac{A_\nu}{T_pM_\nu}\right)^{1/2}\simeq\left(\frac{T_p^{-1}T_2}{q(a_\nu\alpha_2+b_\nu\alpha_3)}\right)^{1/2}>1;\quad\frac{M}{M_\nu}<\frac{A}{T_pM_\nu}. \tag{2.9}$$

Первое неравенство выполняется в широком интервале реализуемых значений параметров. При этом начальная амплитуда пичка, определяемая шумами [10], не превышает, по-видимому, значений, удовлетворяющих второму неравенству (2.9). Поэтому в этом случае проведенное выше рассмотрение практически полностью описывает процесс установления стационарного состояния. Если же первое неравенство (2.9) не выполняется, то характерное время этого процесса — порядка нескольких интервалов между пичками ΔT.

3. НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В МНОГОМОДОВОМ РЕЗОНАТОРЕ

В обычных случаях времена T_ν слабо зависят от частоты, и их можно считать постоянными, равными T_p. При этом вследствие сравнительно медленного изменения усредненных за некоторое время разностей населенностей n_2, n_3 в течение переходного процесса будут последовательно возбуждаться различные типы колебаний, и средняя частота генерируемого сигнала станет меняться. Хотя в этом случае такое же полное рассмотрение переходного процесса, как при возбуждении только одного типа колебаний, провести не удается, однако некоторые не только качественные, но и количественные результаты получить довольно просто.

При учете возможности возбуждения многих типов колебаний плоскость n_2, n_3 делится на область устойчивости и неустойчивости линией, состоящей из отрезков прямых самовозбуждения (2.1) некоторых типов колебаний. Эти прямые, как нетрудно видеть, касаются определенной ветви (будем называть ее в дальнейшем линией самовозбуждения) кривой, на которой функция $z(\omega_\nu)=(a_\nu n_2+b_\nu n_3-2)$ имеет максимум по частоте и равна нулю. Уравнение этой кривой легко записать в параметрическом виде:

$$\begin{aligned}kN_3&=2z\frac{[1+\delta^2(1-z)^2]^2}{1+\delta^2z(1-z)};\\ N_2&=\frac{2}{a_\nu}-\frac{b_\nu N_3}{a_\nu}=2(1-z)\frac{(1+\delta^2z^2)^2}{1+\delta^2z(1-z)}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $\delta=T_\perp\omega_{23}$, а $z=(\omega_\nu-\omega_{12})\omega_{23}^{-1}$ определяет частоту типа колебания, прямая самовозбуждения которого касается линии самовозбуждения в заданной ее точке (N_2, N_3).

При $\delta>2\sqrt{3}/3$ качественный вид зависимости $N_3(z)$, $N_2(z)$ показан на рис. 1б и кривая (3.1) имеет три ветви. Линия самовозбуждения (рис. 1б) состоит из отрезков этой кривой, соответствующих на рис. 1а

сплошной линии (ветви, соответствующие пунктирным линиям, лежат в области неустойчивости). Зависимость z вдоль линии самовозбуждения в этом случае, очевидно, является разрывной функцией. Если для определения зависимости $T_\perp$ от температуры воспользоваться экспериментальными результатами работы [5], то зависимость скачка частоты

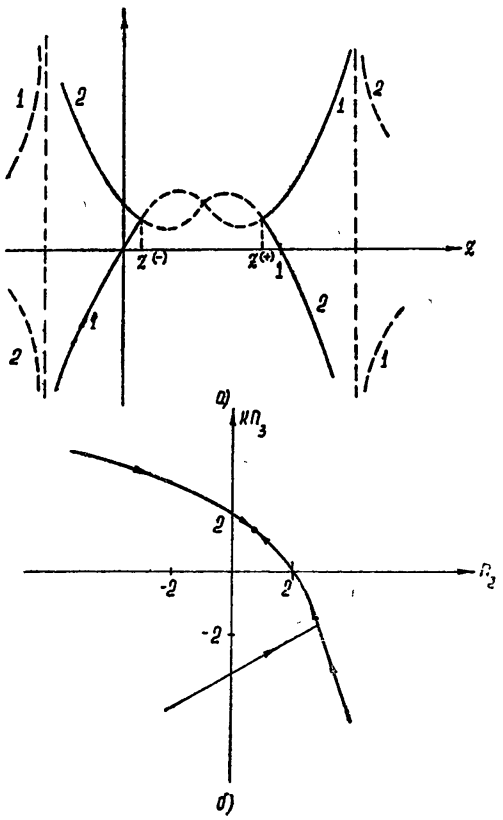


Рис. 1. а) Качественный вид зависимости $N_2(z)$ (кривая 2) и $N_3(z)$ (кривая 1).
б) Кривая самовозбуждения. Стрелками показано движение среднего положения проекции изображающей точки на плоскость n_2, n_3.

$\omega_{23}(z^+ - z^-)$ от T имеет вид, показанный на рис. 2*. При $\delta < 2\sqrt{3}/3$ одна из ветвей кривой (3.1) (соответствующая пунктирной линии в центре рис. 1) исчезает, и z вдоль линии самовозбуждения меняется непрерывно.

Положения равновесия системы уравнений (1.5а) и (1.5в) могут соответствовать, как нетрудно видеть, либо генерации только одного типа колебаний ($m_\nu > 0$, $m_{\mu \neq \nu} = 0$ — одномодовые положения равно-

* Следует отметить, что соотношения, определяющие связь $(z^+ - z^-)$ с температурой не зависят от отношения квадратов дипольных моментов k Поэтому они совпадают с соотношениями, приведенными в работе [1] для случая $k = 1$. Однако при конкретных расчетах в этой работе использована [3, 5] неправильная зависимость $T_\perp$ от температуры.

весия), либо генерации только двух типов колебаний ($m_{\mu\nu}>0$, $m_{\tau_i\neq\mu\nu}=0$ — двухмодовые положения равновесия)*.

Одномодовые положения равновесия определяются соотношениями (2.2а), (2.3) предыдущего раздела. В этих особых точках всегда есть три характеристических корня с отрицательной действительной частью, соответствующих отклонениям от равновесного значения m_ν, не равной в этой точке нулю. Непосредственно из уравнений (1.5в) видно, что относительно приращений амплитуд $m_{\mu\neq\nu}$ одномодовое состояние неустойчиво, если его проекция на плоскость n_2, n_3 лежит в области неустойчивости, соответствующей этим типам колебаний ($a_\mu n_2 + b_\mu n_3 - 2 > 0$).

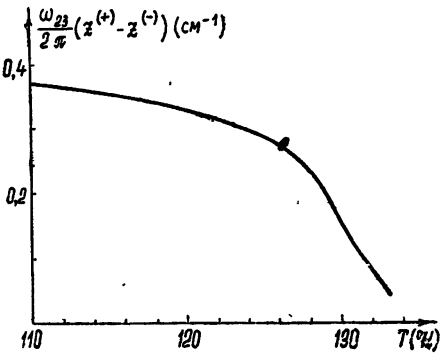


Рис. 2.

Проекции двухмодовых положений равновесия на плоскость n_2, n_3, лежат в точках пересечения прямых самовозбуждения соответствующих типов колебаний:

$$n_{2,\mu\nu}=2(b_\mu-b_\nu)/(a_\nu b_\mu-a_\mu b_\nu);\quad n_{3,\mu\nu}=2(a_\nu-a_\mu)/(a_\nu b_\mu-a_\mu b_\nu).$$

Амплитуды $m_{0\nu}$, $m_{0\mu}$ в этих положениях равновесия удобно записать в виде

$$\begin{aligned} m_{0\nu}&=\frac{q}{T_2}C_{\mu\nu}(a_\nu b_\mu-a_\mu b_\nu)(n_{3,\mu\nu}-n_{0\mu 3});\\ m_{0\mu}&=\frac{q}{T_2}C_{\nu\mu}(a_\nu b_\mu-a_\mu b_\nu)(n_{0\nu 3}-n_{3,\mu\nu}),\end{aligned}\qquad(3.2)$$

где $C_{\mu\nu}=[16(\alpha_2+\alpha_3+4\beta(a_\mu+b_\mu)(qa_\mu b_\nu)^{-1}b_\mu(a_\nu-a_\mu)^2]^{-1}$, а $n_{0\nu 3}$ определяются равенствами (2.3). Учитывая, что $m_\nu>0$, легко показать, что двухмодовые состояния равновесия в некоторой конечной окрестности линии самовозбуждения существуют только при

$$n_{0\mu 3}<n_{3\mu\nu}<n_{0\nu 3}\quad(\omega_{0\mu}>\omega_{0\nu}),\qquad(3.3)$$

т.е. когда одномодовые состояния равновесия ν-го и μ-го типов колебаний неустойчивы относительно приращений амплитуд m_μ и m_ν соответственно. При этом двухмодовое положение равновесия устойчиво относительно изменений этих амплитуд. Его устойчивость относительно других типов колебаний, амплитуды которых равны в этой точке нулю, определяется так же, как и устойчивость одномодовых положений равновесия относительно возмущений такого типа.

Обычно разность частот соседних типов колебаний много меньше ω_{23}. Поэтому из сказанного выше ясно, что проекция на плоскость n_2, n_3 положения равновесия системы, устойчивого относительно всех

* При двухуровневой модели активных ионов двухмодовые положения равновесия в системе бегущей волны могут появиться [12] только при учете быстроменяющейся (с характерным временем изменения τ_0), но малой составляющей разности населенностей. Поэтому в отличие от уравнений, полученных в [12] для системы с несколькими типами колебаний при двухуровневой модели примесных ионов уравнения, полученные в разделе 1 настоящей работы, являются негрубыми по отношению к поправкам (см. раздел 1), связанным с быстрыми составляющими разностей населенностей

видов возмущений, лежит в малой окрестности линии самовозбуждения. Приближенное положение этой проекции на частоту, генерируемую системой в устойчивом стационарном состоянии (с точностью до разности частот соседних типов колебаний), можно определить, исследуя взаимное расположение линии (2.3), на которой лежат проекции одномодовых положений равновесия на плоскость n_2, n_3 и линии самовозбуждения. Из (2.3), (3.1) видно, что линия (2.3) касается линии самовозбуждения* в точке, определяемой корнями уравнения

$$n_{0\nu 3}(z_0) = N_3(z_0), \tag{3.4}$$

лежащими в каком-либо из интервалов

$$\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1+4\delta^{-2}}\right) \gtrless z_0 \gtrless z^{\pm}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим случай сравнительно низких температур, когда $\delta > 2\sqrt{3}/3$.

Если корня z_0, удовлетворяющего условиям (3.5), не существует (это будет при достаточно сильной подсветке, когда $\alpha_2 \simeq \alpha_3 \simeq \alpha$; $\beta/\alpha q \simeq 0$), то все одномодовые положения равновесия неустойчивы (при достаточно малой разности частот соседних типов колебаний). Единственным устойчивым относительно всех видов возмущений положением равновесия системы является в этом случае, как видно из (2.3), (3.2), (3.3), двухмодовое положение равновесия, соответствующее колебаниям, частота одного из которых близка к $\omega_{12} + z^{+}\omega_{23}$, а другого к $\omega_{12} + z^{-}\omega_{23}$. При конечном значении отношения $\beta/\alpha q$, когда существует корень $2^{-1}(1+\sqrt{1+4\delta^{-2}}) > z_0 > z^{+}$, это двухмодовое положение равновесия, как следует из неравенства (3.3), исчезает, и система в стационарном состоянии будет генерировать одну или две соседних** частоты ω_{ν}, близких к $\omega_{12} + z_0\omega_{23}$. При слабой подсветке (мы не будем в дальнейшем рассматривать этот случай), когда $\alpha_2 \neq \alpha_3$ в стационарном состоянии, возможна также генерация частоты, меньшей $\omega_{12} + z^{-}\omega_{23}$.

Частота излучения в начале переходного процесса определяется тем, где изображающая точка после включения подсветки впервые пересечет линию самовозбуждения. Ее движение до этого момента можно, конечно, определить точно. Однако при температурах выше 70°К T_{23} значительно меньше времен спонтанного излучения. Поэтому для оценок можно считать, что до начала генерации изображающая точка движется вблизи линии $\sigma_{33} - \sigma_{22}\exp(\omega_{23}/\omega_T) = 0$ или, поскольку $\omega_{23}/\omega_T \ll 1$, близ линии***

$$n_3 = n_2 - \frac{\omega_{23}}{\omega_T} q\,\sigma_{22}. \tag{3.6}$$

Результаты совместного решения уравнений (3.1), (3.6) при двух значениях температуры приведены на графиках рис. 3. Из них видно, что в большом интервале значений параметра q генерация начинается на частоте $\omega_н = \omega_{12} + z_н\omega_{23}$, заметно меньшей частоты $\omega_{12} + z^{-}\omega_{23}$. Ограничимся в дальнейшем только этим случаем. При этом после начала генерации среднее за несколько пичков положение проекции изображающей точки на плоскость будет двигаться вблизи линии самовозбуж-

---

* Пересекать ее она, очевидно, не может.

** Это зависит, в сущности, от случайных соотношений между длиной резонатора, частотами ω_{12}, ω_{13} и параметрами α, β, q.

*** Населенность σ_{22} при $q \gg 1$ и не слишком больших n_2, n_3 практически не зависит от n_2, n_3 и равна $[3+\exp(-\omega_{01}/\omega_T)]^{-1}$.

дения к проекции на эту плоскость положения равновесия системы, устойчивого относительно всех возмущений (рис. 1б). Поэтому средняя частота генерации будет сначала квазинепрерывно увеличиваться до $\omega_{12} + z^- \omega_{23}$, после чего появится излучение на частотах, близких к $\omega_{12} + z^+\omega_{23}$. Генерация на частоте, близкой к $\omega_{12} + z^- \omega_{23}$, может при этом остаться или через некоторое время исчезнуть в зависимости от интенсивности подсветки.

Во втором разделе мы видели, что изменение усредненной за несколько пичков населенности n_3 слабо зависит от амплитуды пичков в довольно широком интервале значений n_3. Это дает основание считать, что при последовательной генерации различных типов колебаний с близкими частотами изменение во времени средней населенности и, следовательно, средней частоты генерации можно приближенно описать уравнением

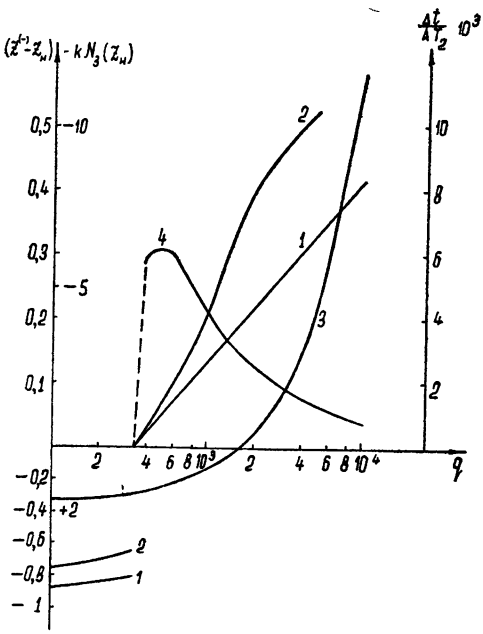


Рис. 3. Графики зависимостей от q:
1,2 - $(z^- - z_н)$ при $T=128°K$ и $T=133°K$ соответственно, 3 - $kN_3(z_н)$ при $T = 133°K$, 4 - $\Delta t/AT_2$ при $[N_0 - N_3(z^-)] = 10^{-2}$ и $T=133°K$.

$$\dot{N}_3 = \frac{q}{T_2} \frac{N_0 - N_3}{A_\nu (N_3) a_\nu b_\nu [\sigma_2 + \alpha_3 + (4\beta/q)(a_\nu + b_\nu)/a_\nu b_\nu]}. \qquad (3.7)$$

Здесь N_0 — значение N_3 в устойчивом положении равновесия системы, а частоту ω_ν, входящую в коэффициенты a_ν, b_ν, A_ν, следует считать функцией N_3, определяемой соотношением (3.1). Уравнение (3.7) позволяет оценить время Δt между моментом самовозбуждения системы и моментом скачка частоты генерации*

$$\Delta t = \frac{T_2}{q} A \ln \frac{N_0 - N_3(z_н)}{N_0 - N_3(z^-)}. \qquad (3.8)$$

Здесь близкое к единице A — среднее значение знаменателя правой части уравнения (3.7). Из (3.8) и рис. 3 видно, что зависимость Δt (q) имеет довольно резкий максимум.

Случай сравнительно высоких температур, когда $\delta < 2\sqrt{3}/3$, отличается от рассмотренного выше только тем, что частота генерации в течение переходного процесса меняется квазинепрерывно. Не будем останавливаться на нем подробно. Заметим только, что величина изменения частоты может возрастать в некотором интервале увеличения температуры. Однако при температурах, близких к комнатным, вследствие

* Если $N_0 = N_3(z^-)$, то в знаменатель дроби в правой части равенства (3.8) следует подставить величину изменения n_3 в течение одного пичка, по порядку равную $\sqrt{T_p M_\nu} \ll 1$.

уменьшения T_1 и, следовательно, параметра q частота в начале генерации меньше частоты в стационарном состоянии и отличается от нее не больше, чем на 0,1 ω_{23}.

Проведенное выше рассмотрение позволяет, по крайней мере качественно, объяснить результаты измерения зависимости частоты от времени в начальный период генерации при температурах 80 ÷ 130°К, которые приведены в работах [3]. В частности, различная картина изменения частоты излучения для различных кристаллов и коэффициентов отражения зеркал объясняется, очевидно, тем, что качество кристалла. так же, как и коэффициент отражения, определяет величину времени T_p и параметра q.

Следует заметить, что точность измерения частоты излучения в этом диапазоне температур позволяет провести более подробное количественное сравнение полученных теоретических результатов с экспериментальными, чем это можно сделать по данным [3]. Такое сравнение представляет интерес хотя бы потому, что позволяет независимо определить значения некоторых параметров, в частности параметра q, а также максимально возможной добротности резонатора, связанной с потерями в слое активного вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Конюхов, Л. А. Кулевский, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, **45**, 857 (1963).
2. В. К. Конюхов, Л А Кулевский, А М Прохоров, ДАН СССР, **149**, 571 (1963).
3. А. М. Кубарев, В. И. Пискарев, ЖЭТФ, **46**, 508 (1964), ЖЭТФ (в печати).
4. S. Sugano, J. Tanabe, J. Phys. Soc. Japan, **13**, 880 (1958).
5. D. E. Mc Cumber, M. D. Sturge, J. Appl. Phys., **34**, 1682 (1963).
6. F. Bloch, Phys. Rev., **105**, 1206 (1957).
7. В М. Файн, УФН, **79**, 641 (1963)
8. Е. Д. Трифонов, ДАН СССР, **147**, 826 (1962); ФТТ, **6**, 462 (1964).
9. Г. М. Зверев, ЖЭТФ, **40**, 1667 (1961).
10. В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Изв высш. уч. зав—Радиофизика (в печати).
11. А. М. Ратнер, ЖЭТФ, **45**, 1908 (1963)
12. Л. А Островский, ЖЭТФ (в печати)

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 5 августа 1964 г.

ON INFLUENCE OF FINE SPLITTING OF LOWER LEVEL Cr^{+3} IN RUBY UPON SOME CHARACTERISTICS OF COHERENT RADIATION

G. I. Freidman

The abbreviated equations have been obtained for coherent radiation of excited crom ions in ruby placed in a traveling wave resonator, the fine splitting of the lower level of crom ions being taken into account. This splitting is shown to yield the deviation of the mean frequency in the transient regime, the effect being observed experimentally [3].

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.371 · 621.391.814.2

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

Л. А. Островский

Рассматривается задача о взаимодействии ударных волн в линии с произвольной квазистатической нелинейной характеристикой. Изучен также вопрос о прохождении ударной волны через границу раздела двух линий.

В довольно обширной литературе по ударным электромагнитным волнам основное внимание уделяется вопросам, связанным с образованием разрывов в бегущих волнах и структурой стационарных ударных волн. Очевидно, что вследствие неприменимости принципа суперпозиции для нелинейных сред с помощью таких волн нельзя построить общего решения исходных уравнений. Уже при наличии в линии двух бегущих волн возникает задача об их нелинейном взаимодействии; решение этой задачи требует иных методов, чем исследование каждой из этих волн в отдельности.

Некоторые случаи взаимодействия (падение слабого сигнала на фронт ударной волны, отражение ударной волны от замкнутого конца нелинейной линии и т. д.) рассматривались в работах [1–3]. Сравнительно подробно исследовано взаимодействие ударных волн в линии, содержащей феррит, с прямоугольной квазистатической характеристикой намагничения [4]. Отметим, что во всех рассмотренных случаях в результате взаимодействия разрывов возникают также лишь разрывы.

В настоящей работе рассматривается общая задача о взаимодействии двух ударных волн в линии передачи с произвольной квазистатической зависимостью между током I и погонным магнитным потоком Φ (связь между погонным зарядом Q и напряжением U считаем для простоты линейной $Q = CU$), а также о падении ударной волны на границу раздела двух линий передачи. Если не интересоваться структурой ударных волн, то в окрестности точки взаимодействия (большой по сравнению с длительностью фронта) каждую из них можно считать стационарным разрывом постоянных значений тока и напряжения.

Не задаваясь какой-либо определенной аналитической зависимостью $\Phi(I)$, примем для определенности, что качественный ход ее соответствует кривой, изображенной на рис. 1. Подобная зависимость типична для большинства применяемых сейчас нелинейных материалов — ферритов, сегнетоэлектриков, полупроводников (для двух последних нелинейна зависимость $Q(U)$, но задача совершенно аналогична рассматриваемой ниже).

Воспользуемся здесь графоаналитическим методом, разработанным для анализа взаимодействий в газодинамике [5]. Этот метод,

однако, приходится несколько видоизменить вследствие существенных различий между электродинамическими и газодинамическими задачами. В частности, принятый вид кривой намагничения (рис. 1) необычен для соответствующих зависимостей в газодинамике (и допускает, как будет ясно из дальнейшего, большее разнообразие типов бегущих волн). Явления на границе раздела двух сред вообще не рассматривались таким методом в газодинамике.

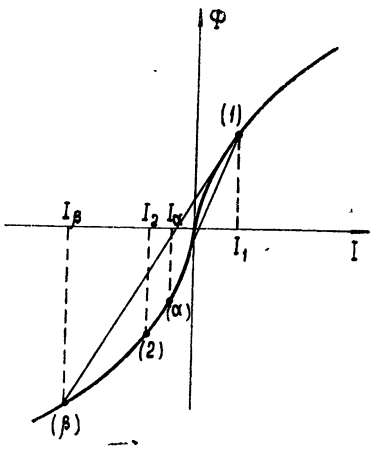


Рис. 1.

Большинство полученных ниже результатов справедливо не только для волн в двухпроводной линии, но и для поляризованных в одной плоскости волн в безграничной нелинейной среде (уравнения Максвелла для полей в такой среде полностью аналогичны телеграфным уравнениям для токов и напряжений в линии); имеются, однако, и различия, относящиеся к эволюционности образующихся волн (см. ниже).

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН В ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ

Пусть при $t < 0$ в линии распространяются две заданные стационарные ударные волны, координаты которых в момент $t = 0$ (момент взаимодействия) совпадают ($z = 0$). Задача о дальнейшем распространении имеет начальные условия в виде разрыва, разделяющего области постоянных значений искомых величин. Так как граничные условия, вообще говоря, не выполнены, разрыв не может существовать конечное время и распадается. При этом волна, отходящая в каждую сторону от разрыва, должна быть автомодельной, т. е. I, U в ней зависят от отношения z/t (действительно, в задаче нет каких-либо параметров, имеющих размерность z или t в отдельности; имеются лишь параметры с размерностью скорости [6]). Перечислим возможные типы бегущих автомодельных волн.

а) Стационарный разрыв в виде перепада постоянных значений величин, связанных между собой граничным условием

$$\pm\sqrt{C}\,(U_2-U_1)=\sqrt{(I_2-I_1)(\Phi_2-\Phi_1)}. \qquad (1)$$

(Индексы 1 и 2 относятся здесь к величинам соответственно перед и за разрывом; выбор знака определяет направление распространения.) Скорость распространения такого разрыва $v_y = \pm\{(I_2 - I_1)/C(\Phi_2 - \Phi_1)\}^{1/2}$. Отметим, что величина $1/Cv_y^2$ равна тангенсу угла наклона прямой, соединяющей точки 1 и 2 на кривой намагничения (рис. 1).

б) Простая волна с расширяющимся фронтом; токи и напряжения в любых двух ее точках (в том числе на концах) связаны соотношением

$$\pm\sqrt{C}\,(U_2-U_1)=\int_{I_1}^{I_2}\sqrt{\frac{d\Phi}{dI}}\,dI. \qquad (2)$$

Скорость распространения каждой точки простой волны v зависит от значения тока в этой точке и равна $\pm\,(Cd\Phi/dI)^{-1/2}$. Величина $1/Cv^2$

равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $\Phi(I)$ в соответствующей точке.

в) «Комбинированная» волна, связывающая, например, величины, отвечающие точкам (1) и (2) на рис. 1. Она состоит из ударной волны, соединяющей точки (1) и (α) (в точке (α) прямая, выходящая из точки (1), касается кривой намагничения), и простой волны на участке (α) — (2); скорость разрыва, очевидно, равна скорости точки (α) простой волны. Связь полей на концах комбинированной волны имеет вид

$$\pm\sqrt{C}\,(U_1-U_2)=\int_{I_2}^{I_\alpha}\sqrt{\frac{d\Phi}{dI}}\,dI+\sqrt{(I_1-I_\alpha)(\Phi_1-\Phi_\alpha)}\,. \qquad (3)$$

Существование такой волны связано с особенностями нелинейных характеристик в электродинамике; в известных газодинамических случаях оно невозможно. Заметим, что для волн в безграничном феррите ударная волна, входящая в состав комбинированной, неэволюционна и распадается на два других разрыва (вращательный и ударную волну). Поэтому решения, в которых присутствует комбинированная волна, справедливы только для двухпроводных линий передачи*.

Нетрудно видеть, что только для перечисленных волн значения тока на концах волны могут оставаться неизменными сколь угодно долго (отражения не появляются). Важным свойством таких волн, легко проверяемым непосредственно, является то, что если в одном направлении распространяются любые две из них, то следующая позади во всяком случае не отстает от передней. Поэтому при распаде произвольного разрыва в каждую сторону от него отходит лишь одна из этих волн. В результате на месте разрыва, разделявшего области I и II постоянных значений I_1, U_1 и I_2, U_2, остается область III новых постоянных значений I_3, U_3, ограниченная указанными волнами. Если заранее известно, какая именно из волн отошла в каждую сторону, то по известным значениям $I_{1,2}$, $U_{1,2}$ можно с помощью (1)—(3) найти I_3, U_3 и тем самым полностью решить задачу. Исходной является, таким образом, одна из пар нелинейных уравнений (1)—(3) (для двух волн одинаковых или различных типов), графоаналитическое решение которых проводится ниже.

Соотношение (1) при заданном состоянии I_1, U_1 по одну сторону разрыва определяет зависимость между I_2, U_2 по другую сторону (рис. 2); разные знаки в (4) определяют две ветви кривой, соответствующие противоположным направлениям распространения разрыва. Именно, кривая (аа) определяет волны, бегущие вправо, а (бб) — бегущие влево; благодаря линейной зависимости $Q(U)$ вся картина симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через точку (1). Следует учесть, что точки, лежащие в области $I_\beta < I_2 < I_\alpha$ **, не могут вместе с точкой (1) определять устойчивую ударную волну.

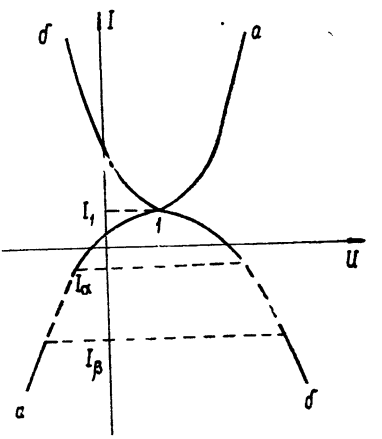


Рис. 2.

* Такие волны наблюдались экспериментально [6].

** Прямая, выходящая из точки (β) на рис 1, касается кривой намагничения в точке (1).

Аналогичное построение можно провести для простой и комбинированной волн, пользуясь уравнениями (2) и (3).

Для нахождения величин в области III нужно найти точку пересечения кривых рис. 2, проходящих через точки, отвечающие значениям

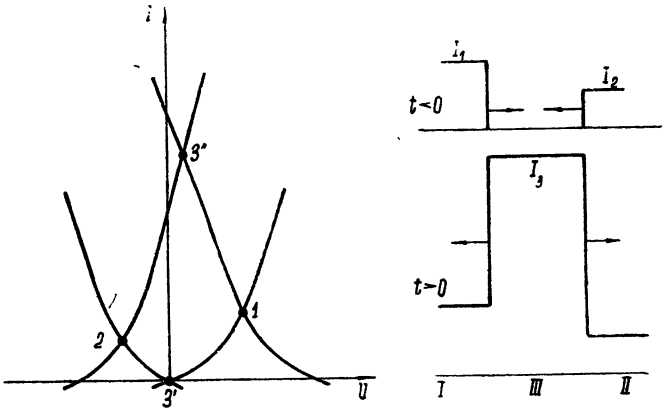


Рис. 3.

I и U в областях I и II. На рис. 3 проведено такое построение для взаимодействия двух распространяющихся навстречу ударных волн с одинаковыми знаками I. Точка (3′) отвечает состоянию в области III до взаимодействия, а (3″) — искомому состоянию после взаимодействия (что однозначно определяется направлениями движения волн). Поскольку $I_3 > I_1, I_2$, то в каждую сторону действительно отходит ударная волна.

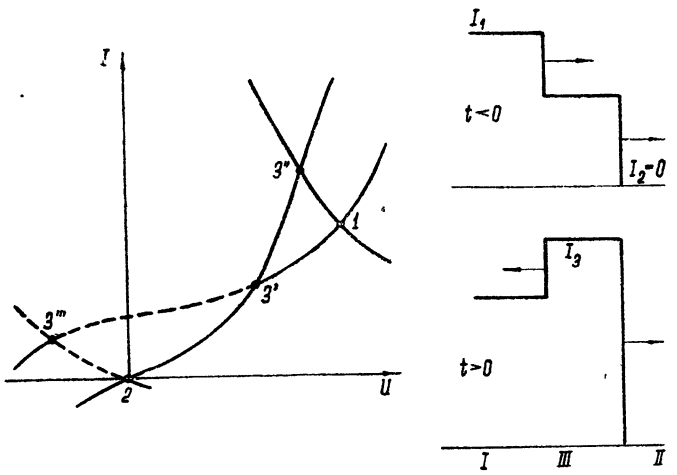


Рис. 4.

На рис. 4 представлен случай, когда одна ударная волна догоняет другую. Искомым состоянием является (3″), т. е. в результате взаимодействия снова возникают две ударные волны. Дополнительное решение (3‴) не имеет смысла, так как дает сходящиеся волны.

При взаимодействии ударных волн могут образоваться также простые или комбинированные волны. Рассмотрим, например, «столкновение» двух ударных волн с противоположно направленными токами (рис. 5). Результат взаимодействия отображается точкой (3‴) и представляет собой две расходящиеся простые волны ($I_3 < I_1, I_2$). Построе-

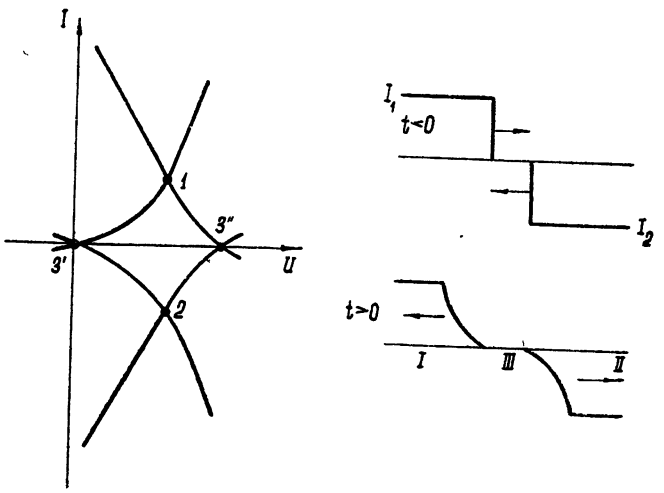


Рис. 5.

ние не является теперь симметричным относительно вертикальной оси, так как ветви слева от точки (1) должны быть построены по формуле (1), а справа — по формуле (2). Следовательно, при $I_1 = -I_2$ величина $U_3 \neq 2U_1$. Заметим, что этот случай не имеет прямой аналогии в газодинамике.

2. ПАДЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

Практически важная задача о прохождении ударной волны через границу раздела двух линий также является частным случаем задачи о произвольном разрыве; только здесь свойства среды различны по разные стороны от разрыва (совпадающего с границей раздела). По тем же причинам, что и в однородной линии, в каждую сторону от границы пойдет не более одной автомодельной волны (прошедшая и отраженная). Эти волны ограничивают область постоянных значений I_3, U_3 (непрерывных на границе), которые можно определить с помощью такого же построения, что и выше.

Рассмотрим, например, падение ударного фронта из линейного участка на границу нелинейного, имеющего волновое сопротивление ρ (или на активную нагрузку ρ). Линейному случаю соответствуют на плоскости (I, U) прямые линии $U = \pm \rho I$. На рис. 6 приведено построение для случая $\rho < \rho_y = U_1/I_1$; при этом отраженная и прошедшая волны — ударные.

Частный случай $\rho = 0$ описывает и падение ударной волны на короткозамкнутый конец линии, и рассмотренное выше «столкновение» двух ударных волн при $I_1 = I_2$. В этом случае уравнения (1) могут быть решены аналитически [2]. Однако уже на рис. 3 виден специфический нелинейный эффект: ток на конце линии возрастает при отражении более чем вдвое. Последнее возможно и при $\rho \neq 0$ (в линейном случае, разумеется, всегда $I_3 \leqslant 2I_1$). Падение на разомкнутый ко-

нец линии ($\rho=\infty$) описывается таким же решением, что и «столкновение» двух разрывов с $I_1 = -I_2$ (рис. 5). Как уже отмечалось, напряжение здесь меняется нелинейным образом ($U_3 \neq 2U_1$).

Приведем еще пример, когда в результате взаимодействия образуется комбинированная волна. Пусть разрыв проходит из линейного

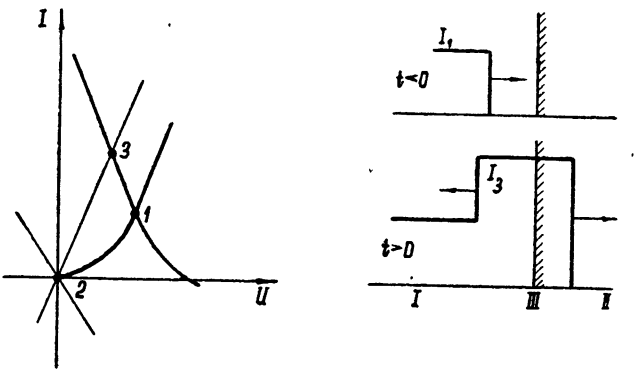


Рис. 6.

участка в нелинейный, причем ток I_2 перед разрывом отрицателен (благодаря постоянному подмагничивающему току или в результате прохождения фронта отрицательного импульса). Если для данного I_1 имеет место неравенство $I_\beta < I_2 < I_\alpha$ (рис. 1), то поршедшая волна

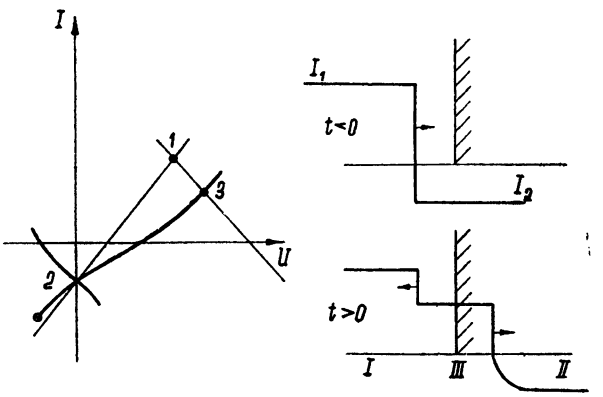


Рис. 7.

будет комбинированной (рис. 7). Кривая, соединяющая точки 2 и 3 на рис. 7, должна быть построена по формуле (3).

Представляет интерес случай согласования двух линий, т. е. отсутствия отраженной волны. В соответствующем построении (рис. 8) кривые пересекаются только в точках (1) и (2), изображающих исходные состояния, т. е. I и U не изменяются при переходе через границу. Из рис. 8 нетрудно видеть, что нелинейная линия не может быть согласована с линейной нагрузкой по отношению к ударной волне произвольной величины*.

* Если нелинейны не только магнитные, но и электрические свойства линии, то исключение составляет случай, когда зависимости $\Phi(I)$ и $Q(U)$ имеют одинаковый вид.

Использованный метод может быть обобщен на ряд других, более сложных классов задач. Так, если до взаимодействия в линии имеется простая или комбинированная волна, то процесс взаимодействия происходит не мгновенно и для его описания недостаточно условий (1)—(3). Однако во многих случаях (например, «встречи» двух простых волн)

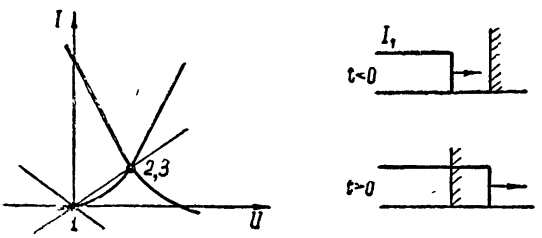


Рис. 8.

через конечный интервал времени в линии вновь остаются лишь волны типа (1)—(3)*. Тогда эти волны можно найти таким же методом, что и выше. Аналогичное построение может быть пригодно и в случаях, когда взаимодействуют более двух волн, когда зависимость $\Phi(I)$ в линии неоднозначна (гистерезис) и т. д., если только результатом взаимодействия является конечное число ударных, простых или комбинированных волн.

В заключение пользуюсь случаем выразить признательность А. В. Гапонову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В Гапонов, Л. А Островский, Г И Фрейдман, Доклад на XIII Генеральной Ассамблее Международного Радиосоюза, Лондон, 1960
2. Л А Островский, Изв высш уч зав—Радиофизика, **2**, 833 (1959)
3. Л. А Островский, Изв. высш уч зав—Радиофизика, **6**, 413 (1963).
4. И. Г Катаев, Ударные электромагнитные волны, изд Сов радио, М, 1963
5. Г. Курант, К Фридрихс, Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, М, 1950
6. Л. Д. Ландау, Е. М Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953
7. А. М. Белянцев, Ю. К Богатырев, Изв высш уч. зав—Радиофизика, **5**, 116 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 23 июля 1964 г.

INTERACTION OF SHOCK ELECTROMAGNETIC WAVES IN NONLINEAR TRANSMISSION LINES

L. A. Ostrovskii

The problem of shock wave interaction in the line with an arbitrary quasistatic nonlinear characteristic is considered. The question has been also studied of shock wave propagation in the line with step variation of parameters.

---

* Заметим, что в нелинейном случае условие максимума потока энергии прошедшей волны (при заданном потоке падающей волны) может не совпадать с условием согласования. Здесь эти волны не обязательно автомодельны в смысле зависимости от z/t, так как задача может иметь другие параметры, кроме скорости (например, длительность исходной простой волны в заданный момент).

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 538.245

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ФЕРРИТАХ

Ю. Ф. Филиппов

Показано, что наличие дисперсии прекращает вызванное нелинейными эффектами искажение фронта волны, распространяющейся в феррите. Частота стационарной волны, возникающей при этом, зависит не только от свойств среды и угла между магнитным полем и направлением распространения волны, но и от амплитуды последней Наблюдается изменение постоянной составляющей намагниченности феррита.

При определенном соотношении между параметрами феррита и амплитудой в нем могут распространяться стационарные импульсы.

В последнее время все больше внимания уделяется исследованию распространения электромагнитных волн конечной амплитуды в ферритовых материалах. В ряде работ (см., например, [1]) проведено исследование таких волн в предположении, что зависимость магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля $\mu = \mu(H)$ известна (это соответствует пренебрежению влиянием на волну дисперсии и диссипации). Показано, что в этом случае влияние нелинейных эффектов приводит к искажению фронта волны и к образованию разрыва. Дисперсия, как известно, также приводит к искажению фронта. Однако одновременное действие дисперсии и нелинейных эффектов может остановить дальнейшее искажение фронта волны, в результате чего в феррите будет распространяться установившаяся волна. В отличие от газовой динамики, где рост крутизны ограничивается диссипацией, в феррите роль «ограничителя» может играть дисперсия.

Если в некоторой области ферритовой среды вследствие начального возмущения возникла волна, то с течением времени влияние начальных условий ослабевает, а ее форма в конечном счете будет определяться нелинейными эффектами, дисперсией и диссипацией. Пренебрегая эффектами диссипации и внутренними полями анизотропии, на основе исследования точного самосогласованного решения системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}),$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (1а)$$

и уравнения для магнитного момента

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = -\gamma[\boldsymbol{M}\boldsymbol{H}] \qquad (1б)$$

мы покажем, что в неограниченной ферритовой среде могут распространяться стационарные электромагнитные волны конечной амплитуды. Последние представляют собой плоские волны, распространяющиеся в данном направлении с постоянной скоростью без изменения своей

формы. Возможность распространения таких волн в двухпроводных линиях, содержащих феррит, показана в работах Богатырева [2] и Фрейдмана [3].

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль направления распространения волны, а внешнее магнитное поле лежало в плоскости xz. В системе (1а), (1б) положим

$$H_z = H_{0z} + h_z, \quad H_x = H_{0x} + h_x, \quad H_y = h_y,$$
$$M_z = M_{0z} + m_z, \quad M_x = M_{0x} + m_x, \quad M_y = m_y,$$
$$E_x = e_x, \quad E_y = e_y,$$

где H_{0z}, M_{0z} и H_{0x}, M_{0x} — соответственно продольные и поперечные компоненты постоянного магнитного поля и постоянной намагниченности феррита. При этом будем считать, что m_x, m_y, m_z, h_x, h_y, h_z не малы по сравнению с постоянными компонентами M_{0z}, M_{0x}, H_{0x}, H_{0z}.

Для стационарных волн все компоненты полей зависят от времени t и пространственной координаты z через комбинацию $\xi = z - ut$, где постоянная u является параметром задачи. Как будет показано ниже, при конечных амплитудах волны u зависит не только от постоянных полей, но и от амплитуды распространяющейся волны m_0.

Переходя к новой переменной $\xi = z - ut$, приведем исходную систему к виду (рассматриваем одномерный случай, когда все величины зависят только от z, t*)

$$e_x = \frac{\varkappa c}{\varepsilon u} m_y, \qquad e_y = -\frac{\varkappa c}{\varepsilon u} m_x, \qquad \varkappa = \frac{\varepsilon u^2}{c^2 - \varepsilon u^2},$$
$$h_x = \varkappa m_x, \quad h_y = \varkappa m_y, \quad h_z = -m_z, \quad H_{0x} M_{0z} = H_{0z} M_{0x},$$
$$u m_y' = \gamma(H_{0x} + M_{0x})\, m_z - \gamma(H_{0z} - \varkappa M_{0z})\, m_x + \gamma(\varkappa + 1)\, m_x m_z, \tag{1в}$$
$$u m_x' = \gamma(H_{0z} - \varkappa M_{0z})\, m_y - \gamma(\varkappa + 1)\, m_y m_z,$$
$$u m_z' = \gamma(\varkappa M_{0x} - H_{0x})\, m_y.$$

Здесь ε — диэлектрическая постоянная среды, c — скорость света, γ — гиромагнитное отношение.

В продольном внешнем магнитном поле ($H_{0x} = M_{0x} = 0$, $H_{0z} = H_0$, $M_{0z} = M_0$) распространение электромагнитных волн любой амплитуды описывается решением линейной системы уравнений:

$$m_x = m_x^0 \sin \gamma \frac{|\varkappa M_0 - H_0|}{u} \xi,$$
$$m_y = -m_x^0 \cos \gamma \frac{|\varkappa M_0 - H_0|}{u} \xi, \quad m_z = 0.$$

Параметр u, введенный выше, и частота волны ω связаны, очевидно, в этом случае соотношением

$$\omega = \gamma \left| \frac{\varepsilon u^2}{c^2 - \varepsilon u^2} M_0 - H_0 \right|.$$

Предположим, что один из максимумов волны ($m_z' = 0$) достигается в точке $\xi = 0$. Легко показать, что решение системы (1в), описывающее распространение стационарных волн, можно привести к виду

* Штрихом везде будем обозначать дифференцирование по переменной ξ.

$$\int_{m_z}^{m_0} \frac{dm_z}{f(m_z)} = -\frac{\gamma}{2u}\xi, \tag{2а}$$

$$m_y = -\frac{1}{2(\varkappa M_0 - H_0)\sin\theta} f(m_z), \tag{2б}$$

$$m_x = -\frac{1}{2(\varkappa M_0 - H_0)\sin\theta}\left[(\varkappa+1)\, m_z - 2(H_0 - \varkappa M_0)\cos\theta\right] m_z, \tag{2в}$$

где

$$f^2(m_z) = A - m_z^2\left\{\left[(\varkappa+1)\, m_z - 2(H_0 - \varkappa M_0)\cos\theta\right]^2 - \right.$$
$$\left. - 4(H_0 + M_0)(\varkappa M_0 - H_0)\sin^2\theta\right\},$$
$$A = m_0^2\left\{\left[(\varkappa+1)\, m_0 - 2(H_0 - \varkappa M_0)\cos\theta\right]^2 - 4(H_0 + M_0)\times\right.$$
$$\left.\times(\varkappa M_0 - H_0)\sin^2\theta\right\},$$

θ — угол между внешним магнитным полем и направлением распространения волны, m_0 — амплитуда m_z-компоненты волны ($m_z = m_0$ при $dm_z/d\xi = 0$).

Задаваясь различными значениями постоянной A, можно построить различные типы решений. В частности, если амплитуда m_0 такова, что

$$m_0 = \frac{2}{\gamma(\varkappa+1)}(H_0 - \varkappa M_0)\cos\theta\left[1 \pm \operatorname{tg}\theta\sqrt{\frac{H_0 + M_0}{H_0 - \varkappa M_0}}\right], \tag{3}$$

то постоянная A обращается в нуль. При заданных амплитуде волны m_0, угле θ, напряженности магнитного поля H_0 и намагниченности M_0 условие (3) определяет фазовую скорость волны u:

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_0}{M_0} + 2\cos\theta\right)^2\left(1 + \frac{H_0}{M_0}\right)^{-1}\left[1 + \cos\theta\left(\frac{m_0}{M_0} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \cos\theta\right) \pm \sin\theta\sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{M_0} + \cos\theta\right)^2}\right]^{-1}\right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Из (4) замечаем, что $m_0 \leqslant M_0(1 - \cos\theta)$ (для определенности ниже рассматриваем случай, когда $m_0 > 0$).

Волну, у которой $m_0 = M_0(1 - \cos\theta)$, назовем предельной. На рис. 1 приведена зависимость отношения амплитуды этой волны к постоянной намагниченности от угла наклона θ. Так как $m_z = 0$ при $\theta = n\pi$ (где $n = 1, 2, \ldots$), то решение (2) при $\theta = n\pi$ не имеет смысла, эти углы в дальнейшем из рассмотрения исключаются. Из рис. 1 замечаем, что при углах $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ амплитуда может превышать значение постоянной намагниченности, оставаясь, однако, меньше ее удвоенной величины: $m_0 < 2M_0$. Из (4) замечаем, что в феррите могут распространяться два типа волн u_+, u_-, соответствующие двум различным знакам в соотношении (4). Эти волны различаются не только фазовыми скоростями, но и формой.

На рис. 2 представлена зависимость безразмерной скорости $\sqrt{\varepsilon}\, u/c$ от отношения m_0/M_0 при разных углах наклона магнитного поля θ для случая $M_0 \gg H_\rho$. В поперечном магнитном поле $\theta = \pi/2$ скорость u_+ волны по мере уменьшения амплитуды стремится к скорости света

в среде с диэлектрической постоянной ε, а скорость u_- волны — к нулю. Если $\theta<\pi/2$, то скорости обоих типов волн ни при какой амплитуде не достигают скорости света в среде. Если же $\theta>\pi/2$, то скорость u_+ волны достигает скорости света в среде при амплитуде $m_0 = 2M_0\cos(\pi-\theta)$.

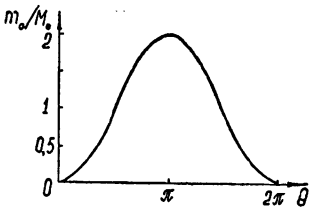


Рис. 1.

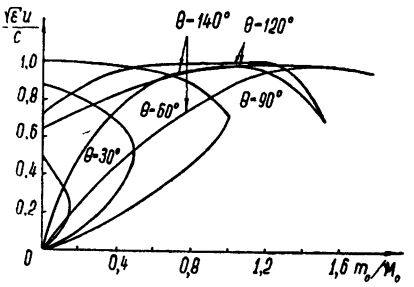


Рис. 2.

При дальнейшем уменьшении амплитуды скорость u_+ волны уменьшается и стремится к $(c/\sqrt{\varepsilon})\sin\theta$. Фазовая скорость u_- волны при уменьшении амплитуды стремится к нулю. При $m_0 = M_0(1-\cos\theta)$, соответствующей максимально возможной амплитуде стационарной волны в феррите, обе волны u_+ и u_- вырождаются в одну — с фазовой скоростью $u = (c/\sqrt{\varepsilon})\sin(\theta/2)$.

При выполнении условия (3) могут быть реализованы два существенно различных типа решений.

1. Пусть

$$\sigma \equiv \frac{4}{m_0}\left[\frac{H_0+M_0}{\varkappa+1} - M_0\right]\cos\theta < 1. \tag{5}$$

В этом случае, как нетрудно убедиться, решение (2) сводится к виду

$$m_z = 2\frac{(1-\sigma)(1-\sigma/2)\,e^{\varphi}}{(1-\sigma)+[(1-\sigma/2)\,e^{\varphi}-\sigma/2]^2}\,m_0, \tag{6}$$

где

$$\varphi = -\frac{\gamma m_0}{2u}\sqrt{1-\sigma}\,\xi.$$

Это решение описывает распространение в феррите импульса конечной амплитуды, соответствующего симметричному относительно $\xi = 0$ горбу [4].

Для предельного импульса, у которого $m_0 = M_0(1-\cos\theta)$, условие (5) и решение (6) упрощаются и принимают вид

$$0<\theta<\frac{2}{3}\pi, \quad \frac{4}{3}\pi<\theta<2\pi, \tag{5a}$$

$$m_z = 2M_0\frac{(1+2\cos\theta)(1+\cos\theta)\,e^{\varphi}}{1+2\cos\theta+[(1+\cos\theta)\,e^{\varphi}+\cos\theta]^2}, \tag{6a}$$

где

$$\varphi = -\sqrt{(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)}\,\frac{\gamma M_0\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}c}\,\xi.$$

Из (5а) замечаем, что предельный стационарный импульс может распространяться в феррите, если угол между внешним магнитным полем и направлением распространения волны не заключен между 120° и 240°.

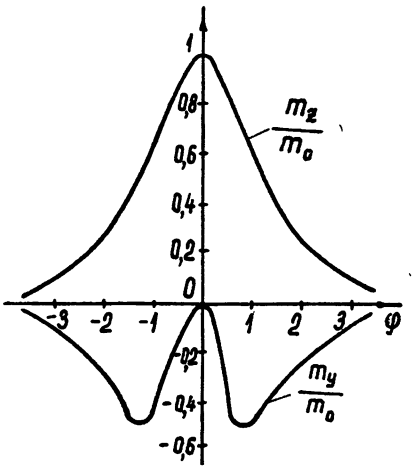


Рис. 3.

Поведение остальных компонент поля легко может быть исследовано при помощи соотношений (2) и (6). Зависимость m_y-компоненты от ξ в поперечном магнитном поле представлена на рис. 3. Из него следует, что при $m_z > 0$ m_y отрицательна и имеет вид двойного горба: она обращается в нуль не только при $\xi \to \pm\infty$, но и в центре импульса $\xi = 0$, когда $m_z = m_0$. Аналогичная зависимость от ξ существует для h_y- и e_x-компонент поля.

Исследование, проведенное выше для импульсов, у которых $m_z > 0$, без изменения переносится на импульсы с $m_z < 0$.

II. Пусть теперь

$$1 < \sigma \equiv \frac{4}{m_0}\left[\frac{H_0 + M_0}{\varkappa + 1} - M_0\right]\cos\theta < 2. \tag{7}$$

Решение (1в) сводится в этом случае к

$$m_z = 2m_0 \frac{\sigma - 1}{\sigma - (2 - \sigma)\cos\psi}, \tag{8}$$

где

$$\psi = \frac{\gamma(\varkappa+1)}{2u} m_0 \sqrt{\sigma - 1}\,\xi.$$

Решение (8) описывает распространение периодической стационарной волны; m_z-компонента этой волны, в отличие от волн малой амплитуды, колеблется не близ нулевого уровня, а около

$$M_z^0 = 2m_0(1 - 1/\sigma). \tag{9}$$

Таким образом, влияние волны приводит к изменению постоянной намагниченности феррита.

Изменение постоянной составляющей вектора намагниченности ($\Delta M_z^0 = M_z^0 - M_{0z}$), происходящее при воздействии на феррит переменных полей достаточно большой амплитуды, подробно исследовано как экспериментально, так и теоретически (см., например, [5, 6]). Результаты теории, приведенные в этих работах, справедливы лишь для случая малых нелинейных эффектов. Выражение (9) показывает, что эффект детектирования постоянной составляющей должен наблюдаться и при прохождении через феррит электромагнитной волны конечной амплитуды. ΔM_z^0 при этом зависит как от параметров феррита, так и от амплитуды волны и угла между направлением распространения волны и направлением внешнего магнитного поля. Из (8) и (9) следует также, что частота этой волны $\omega = 2^{-1}\gamma(\varkappa + 1)\, m_0 \sqrt{\sigma - 1}$ зависит не только от параметров феррита и напряженности внешнего магнитного поля, но и

от амплитуды волны. Для предельной волны (7) и решение (8), (9) принимают простой вид:

$$\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi, \tag{7а}$$

$$m_z = M_0 \frac{(1+2\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\cos\theta + (1+\cos\theta)\cos\psi}, \tag{8а}$$

где

$$\psi = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{c}\gamma M_0 \sqrt{(1-\cos\theta)\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)}\,\xi.$$

Частота такой предельной волны

$$\omega = 2\gamma M_0 \operatorname{tg}^2\theta/2\,\sqrt{2\cos(\pi-\theta)-1}.$$

Зависимость отношения величины m_z/M_0 от безразмерной координаты $\xi_0 = (2\sqrt{\varepsilon}/c)\,\gamma M_0 \xi$ при разных углах наклона θ приведена на рис. 4. Из него видно, например, что с ростом угла наклона частота волны растает, а амплитуда колебаний m_z-компоненты вокруг «новой постоянной намагниченности» падает. Изменение постоянной намагниченности для предельной волны определяется сотношением

$$\Delta M_z^0 = -M_0\cos(2\theta).$$

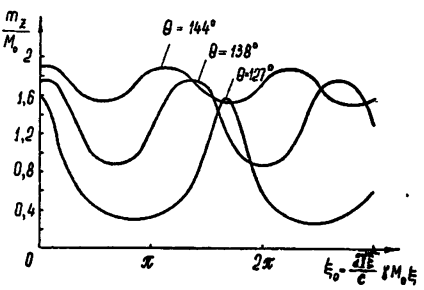


Рис. 4.

Зная зависимость m_z от ξ и параметров M_0, H_0, ε, θ, при помощи соотношений системы (1в) можно найти остальные компоненты поля. Для предельной волны

$$m_x = \frac{M_0}{2(1+\cos 2\theta)}\left[\frac{m_z}{M_0} + \cos\theta(1-\cos\theta)\right]\frac{m_z}{1+\cos\theta};$$

$$m_y = -\frac{1+\cos\theta}{2}\left\{(1+\cos\theta)^2 - \left(\frac{m_z}{M_0}\,\frac{1}{1+\cos\theta} + \cos\theta\right)^2\right\}^{1/2} m_z. \tag{10}$$

Из (10) ясно, что m_y и m_x также являются периодическими функциями ξ. На рис. 5 представлена зависимость m_x/M_0-, m_y/M_0-, m_z/M_0-компонент намагниченности этой волны от безразмерной координаты $\xi_0 = (2\sqrt{\varepsilon}/c)\,\gamma M_0 \xi$ при угле наклона $\theta = 138°$. Из него замечаем, что периоды колебаний m_x- и m_z-компонент совпадают, причем в месте максимума m_z-компоненты находится минимум m_x-компоненты; m_y-компонента намагниченности, перпендикулярная магнитному полю и направлению распространения волны, мала, а период колебания ее равен половине периода m_x- и m_z-компонент. Согласно (8), изменение постоянной намагниченности наблюдается не только для m_z-составляющей, но и для других компонент намагниченности.

Аналогичное исследование может быть проведено для случая $m_0 < 0$.

Если условие (3) не выполняется, то для определения фазовой скорости необходимо задать еще один параметр. В линейной теории в качестве такого параметра задают частоту, а при помощи дисперсионного уравнения находят фазовую скорость.

Зададим в качестве нового условия наименьшее значение m_z-компоненты вектора намагниченности: $\tilde{m} \equiv \min \tilde{m}_z$. Нетрудно убедиться, что $\tilde{m} \neq \pm m_0$. Величины m_0 и $\tilde{m}$ оцениваются условием, описывающим изменение постоянной составляющей намагниченности феррита из-за влияния распространяющейся стационарной волны конечной амплитуды, и амплитудой колебания волны около нового уровня. Величина $\tilde{m}$ при этом удовлетворяет соотношению

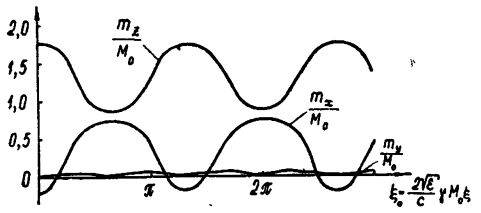


Рис. 5.

$$[m_0(\varkappa+1) - 2(H_0 - \varkappa M_0)\cos\theta]^2 + 4(H_0 - \varkappa M_0)\times$$
$$\times\left[(H_0 + M_0)\sin^2\theta - (\varkappa+1)\frac{\tilde{m}^2}{m_0+\tilde{m}}\cos\theta\right] = 0. \qquad (11)$$

При заданных m_0, $\tilde{m}$, M_0, θ это условие полностью определяет фазовую скорость волны:

$$\frac{\varepsilon u^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{2(H_0+M_0)}\left[(m_0 + 2M_0\cos\theta)^2 + \tilde{m}^2\left(1 + 4\frac{M_0}{m_0+\tilde{m}}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\cos\theta\right)\right]\left\{\left(m_0 + \frac{\tilde{m}^2}{m_0+\tilde{m}}\right)\cos\theta + M_0(1+\cos^2\theta) \pm \left[\left(m_0 + \right.\right.\right. \qquad (11a)$$
$$\left.\left.\left. + \frac{\tilde{m}^2}{m_0+\tilde{m}}\cos\theta - 2M_0\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 - (m_0^2 + \tilde{m}^2)\right]^{1/2}\right\}^{-1}.$$

Если ввести обозначения

$$m_{1,2} = 4(H_0 - \varkappa M_0)\cos\theta - (\varkappa+1)(m_0+\tilde{m}) \pm \left\{4^2(H_0 - \varkappa M_0) - \right.$$
$$\left. - (\varkappa+1)(m_0 - \tilde{m})]^2 + 16(H_0 - \varkappa M_0)(\varkappa+1)m_0\left(1 + \frac{\tilde{m}}{m_0+\tilde{m}}\right)\right\}^{1/2},$$

где

$$\varkappa = \frac{1}{1 - \varepsilon u^2/c^2} - 1,$$

u — скорость волны, определяемая (11а), то уравнение (1в) сводится к

$$\int_{m_z}^{m_0} \frac{dm_z}{[(m_0 - m_z)(m_z - \tilde{m})(m_z - m_1)(m_z - m_2)]^{1/2}} = -\frac{\gamma}{2u}\xi. \qquad (12)$$

Интеграл слева выражается через эллиптический интеграл. В частности, при $m_0 > m_z \gg m_1 > m_2 > \tilde{m}$ выражение (12) сводится к

$$\frac{2}{[(m_0 - m_2)(m_1 - \tilde{m})]^{1/2}} F(\mu, r) = -\frac{\gamma}{2u}\xi, \tag{12a}$$

где $F(\mu, r)$ — эллиптический интеграл 1 рода,

$$\mu = \arcsin\left[\frac{(m_0 - m_z)(m_1 - \tilde{m})}{(m_z - \tilde{m})(m_0 - m_1)}\right]^{1/2},$$

$$r^2 = \frac{(m_0 - m_1)(m_2 - \tilde{m})}{(m_0 - m_2)(m_1 - \tilde{m})}.$$

Интегрируя (12) по периоду колебаний, находим частоту волны, которая, очевидно, зависит не только от параметров феррита, но и от амплитуды волны. В поперечном магнитном поле выражения для μ и r приводятся к более простому виду:

$$\mu = \arcsin \frac{m_z}{\sqrt{m_0^2(1 - r^2) + m_z^2}},$$

$$r = \frac{m_0(\varkappa + 1)}{2[m_0^2/2 + (H_0 + M_0)(\varkappa M_0 - H_0)]^{1/2}}.$$

Ясно, что решение (12а) описывает периодическую волну, частота которой однозначно связывается со скоростью u соотношением ($\theta = \pi/2$)

$$\omega = \frac{\pi}{4} \frac{\gamma(\varkappa + 1)}{rF(\pi/2, r)}, \tag{13}$$

где $F\left(\frac{\pi}{2}; r\right)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. При малой амплитуде волны, когда

$$m_0^2 \ll \frac{2}{\varkappa + 1}(H_0 + M_0)(\varkappa M_0 - H_0),$$

выражение (13) сводится к следующему:

$$\omega = \gamma[(H_0 + M_0)(\varkappa M_0 - H_0)]^{1/2}\left\{1 + \frac{3}{16} m_0^2 \frac{\varkappa + 1}{(H_0 + M_0)(\varkappa M_0 - H_0)}\right\}. \tag{14}$$

Из (14) замечаем, что в первом приближении частота волны совпадает с частотой, определяемой линейной теорией, в которой, как и следовало ожидать, частота не зависит от амплитуды волны. Следующий член разложения приводит к квадратичной зависимости от амплитуды m_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 79 (1960).
2. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 680 (1961).
3. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 324 (1963).

4. А. В. Введенов, Е. П. Велихов, Р. З Сагдеев, Ядерный анализ, **1**, 82 (1961).
5. А. Г. Гуревич, Ферриты на СВЧ, Физматгиз, М., 1960.
6. Д. Джаффе, Дж. Кагерас, Н. Караянис, Сб. Ферриты в нелинейных устройствах, ИЛ, М., 1961.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
10 декабря 1963 г.

TO THE PROPAGATING THEORY OF STATIONARY FINITE AMPLITUDE WAVES IN FERRITE

Yu. F. Philipov

The presence of dispersion is shown to cease the front distortion of the wave (propagating in ferrite) caused by nonlinear effects. The frequency of a stationary wave appearing in this case depends not only on the medium properties and the angle between a magnetic field, as well as on the direction of wave propagation but also on the amplitude of the latter. The change of constant component of ferrite magnetization is observed. At the definite relation between the ferrite parameters and the amplitude the stationary impulses may propagate in it.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 538.245

ВОЗБУЖДЕНИЕ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НАМАГНИЧЕННОГО ФЕРРИТА ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ

Л. А. Шишкин

Исследуется возможность возбуждения магнитостатических колебаний намагниченного ферритового образца электронным потоком. Найден коэффициент нарастания колебаний.

1. В работах [1,2] показано, что когерентное взаимодействие потока электронов с колебаниями магнитного момента в ферро и антиферромагнетиках приводит к усилению блоховских спиновых волн. В [1,2] рассматривается взаимодействие безграничного электронного потока с безграничной средой. Однако, как известно, в образцах конечных размеров существенное влияние на спектр колебаний намагниченности оказывают граничные условия на поверхности образца [3,4]. Если размеры образца достаточно велики для того, чтобы пренебречь пространственной дисперсией магнитной восприимчивости, и достаточно малы, чтобы не учитывать эффекты, обусловленные распространением электромагнитных волн, то длинноволновая часть спектра колебаний (с длиной волны, сравнимой с размерами образца) описывается уравнениями магнитостатики и уравнением движения магнитного момента.

Для исследования спектра, а также выяснения возможности применения этих колебаний для генерирования и усиления электромагнитных волн сверхвысоких частот имеет большое значение выяснение возможности их усиления.

В данной работе показывается, что усиление таких колебаний может быть получено за счет когерентного взаимодействия потока электронов с колебаниями намагниченности образца. Коэффициент нарастания намагниченности в образце зависит от плотности пучка и имеет резонансный характер. Максимальное значение инкремента для разных типов колебаний пропорционально квадратному корню от плотности пучка и соответствует частотам $\omega_n = \beta_n v_0$, где $\beta_n = 2\pi n / L_z$ — волновое число, L_z — размер образца вдоль оси z, n — целое число, v_0 — постоянная составляющая скорости электронов пучка.

2. Чтобы установить принципиальную возможность усиления магнитостатических колебаний, а также получить основные зависимости инкремента от параметров пучка и величины подмагничивающего поля, рассмотрим простейшие типы колебаний в образце, имеющем форму прямоугольной пластины.

Пусть размеры пластины вдоль осей x, y и z соответственно равны L_x, L_y и L_z. Вдоль оси z приложено постоянное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$. Пучок электронов занимает полупространство $x < 0$. Постоянная составляющая скорости электронов v_0 направлена вдоль оси z. Феррит расположен в области $x > 0$; при этом одна грань пластины совпадает с плоскостью $y0z$.

Определим сначала спектр магнитостатических колебаний пластины в отсутствие пучка. Пусть $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{h}$ — векторы магнитного поля в феррите и вне его. Уравнения поля имеют вид

$$\begin{array}{ll} x>0 & x<0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H}=0; & \operatorname{rot} \boldsymbol{h}=0; \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{m})=0; & \operatorname{div} \boldsymbol{h}=0; \\ \boldsymbol{H}=\operatorname{grad}\Psi; & \boldsymbol{h}=\operatorname{grad}\psi; \\ \boldsymbol{m}=\overline{\overline{\chi}}\boldsymbol{H}, & \end{array} \tag{1}$$

где тензор магнитной восприимчивости

$$\overline{\overline{\chi}}=\begin{vmatrix} \dfrac{\varkappa}{4\pi} & \dfrac{i\nu}{4\pi} & 0 \\ -\dfrac{i\nu}{4\pi} & \dfrac{\varkappa}{4\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\varkappa=\frac{\omega_M\omega_H}{\omega_H^2-\omega^2};\quad \nu=\frac{\omega_M\omega}{\omega_H^2-\omega^2};\quad \omega_H=\gamma H_0;\ \omega_M=4\pi\gamma M_0,$$

ω — частота, H_0 — внешнее подмагничивающее поле, M_0 — постоянная составляющая намагниченности феррита, γ — коэффициент гиромагнитного отношения, Ψ и ψ — потенциалы магнитного поля в образце и вне его. Тензор $\overline{\overline{\chi}}$ получен из линеаризованного уравнения движения магнитного момента. Из системы уравнений (1) следуют уравнения для потенциалов

$$(1+\varkappa)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0; \tag{2}$$

$$\Delta\psi=0. \tag{3}$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\Psi=\sum_{mn} Q_{mn}\exp\{-B_x x+i(\beta_m y+\beta_n z)\}; \tag{4}$$

$$\psi=\sum_{mn} q_{mn}\exp\{\beta_x x+i(\beta_m y+\beta_n z)\}, \tag{5}$$

где

$$B_x=\sqrt{\beta_m^2+\alpha^2\beta_n},\quad \beta_x=\sqrt{\beta_m^2+\beta_n^2},\quad \alpha=\frac{1}{1+\varkappa},$$

Q_{mn} и q_{mn} — константы. При этом мы для простоты ограничиваемся рассмотрением только «поверхностных» колебаний, т. е. полагаем, что при $x\to\pm\infty$, $\Psi\to 0$, $\psi\to 0$ соответственно.

Учитывая граничные условия при $x=0$:

$$\Psi=\psi,\quad H_x+4\pi m_x=h_x,$$

получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{1}{\alpha^2}\sqrt{1+\alpha^2\zeta^2}+\sqrt{1+\zeta^2}+\nu=0, \tag{6}$$

где $\zeta = \beta_n/\beta_m = \beta \operatorname{ctg} \delta_0$; δ_0 — угол между направлениями оси z и волнового вектора β. Уравнение (6) приводится к виду

$$\omega^3 + b\omega^2 + c\omega + d = 0;$$

$$b = -\frac{\omega_H(\zeta^2+\eta+2)}{2\sqrt{1+\zeta^2}}; \qquad c = -\omega_H; \tag{7}$$

$$d = bc; \quad \eta = \omega_M/\omega_H.$$

Анализ уравнения (7) показывает, что оно имеет 3 действительных корня:

$$\omega_0^{(1)} = \operatorname{sgn} q\left\{-\frac{2\omega_H}{\sqrt{3}}\sqrt{1+3\xi^2}\right\}\cos\frac{\varphi}{3} - \omega_H\xi;$$

$$\omega_0^{(2)} = \operatorname{sgn} q\left\{\frac{2\omega_H}{\sqrt{3}}\sqrt{1+3\xi^2}\right\}\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right) - \omega_H\xi; \tag{8}$$

$$\omega_0^{(3)} = \operatorname{sgn} q\left\{\frac{2\omega_H}{\sqrt{3}}\sqrt{1+3\xi^2}\right\}\cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right) - \omega_H\xi,$$

где

$$q = -\frac{b^3}{27} - \frac{bc}{6} + \frac{d}{2}, \qquad \cos\varphi = \left|\frac{1-1/\xi^2}{(1+1/3\xi^2)^{3/2}}\right|,$$

$$\xi^2 = \frac{h^2+\eta+2}{36(1+\zeta^2)}.$$

В предельном случае, когда $\xi^2 \gg 1$, $\omega_0^{(1)} \simeq \omega_H\xi$, а $\omega_0^{(2)}$ и $\omega_0^{(3)}$ — отрицательны и не имеют физического смысла, если же $\xi^2 \ll 1$, $\omega_0^{(1)} < 0$, $\omega_0^{(2)} \simeq \omega_H(1-\xi)$, $\omega_0^{(3)} = 0$.

3. Учтем теперь влияние электронного потока. Рассмотрим следующую систему уравнений, описывающих электромагнитное поле и движение электронов в поле:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{e} = ik\boldsymbol{h}; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{h} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = -ik\boldsymbol{e} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{e} = 4\pi\rho; \tag{9}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e_0}{m}\boldsymbol{e} + \frac{e_0}{mc}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}],$$

где $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{h}$ — электрическое и магнитное поля, $\boldsymbol{j}$ и ρ — плотности тока и заряда пучка, e_0, m, $\boldsymbol{v}$ — заряд, масса и скорость электрона, $k = \omega/c$. Мы предполагаем, как обычно, постоянный заряд электронов скомпенсированным, а все переменные величины пропорциональными множителю $\exp\{-i(\omega t - \beta_n z)\}$. Положим также

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}, t), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{r}, t),$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\boldsymbol{r}, t), \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{r}, t),$$

где индексом 0 и 1 отмечены постоянные и переменные составляющие соответствующих величин.

Считая переменные составляющие всех величин значительно меньшими соответствующих постоянных составляющих и линеаризуя уравнения (9), можно выразить переменную составляющую плотности тока j_1 в следующей форме:

$$\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_1 = \overline{\overline{s}}\,\boldsymbol{e} + \overline{\overline{\tau}}\,\boldsymbol{h},$$

$$\overline{\overline{s}} = \begin{bmatrix} s_1 & -s_2 & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\overline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_1 & -\tau_2 & 0 \\ \tau_2 & \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$s_1 = K\frac{ic}{\omega_H}; \quad s_2 = -K\frac{c}{\delta v_0}; \quad s_3 = K\left[\frac{ic}{\omega_H} - \frac{i\omega_H c}{\delta^2 v_0^2}\left(1 - \frac{\beta_n f}{\delta}\right)\right];$$

$$\tau_1 = K\frac{1}{\delta}; \qquad \tau_2 = K\frac{iv_0}{\omega_H}; \qquad \tau_3 = K\frac{f}{\delta},$$

где $\omega_p = (4\pi e\rho_0/m)^{1/2}$ — плазменная частота пучка,

$$K = \frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{\omega_H\delta/v_0}{(\omega_H/v_0)^2 - \delta^2}; \qquad \delta = \beta_n - \omega/v_0;$$

$$f = \frac{\omega_H^2 - v_0^2\delta^2}{\omega_H^2 + \omega_p^2 - v_0^2\delta^2}.$$

Будем искать магнитное поле полупространства $x < 0$, занятого пучком в виде

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2, \quad \boldsymbol{h}_1 = \operatorname{grad}\psi; \quad \boldsymbol{h}_2 = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}.$$

Допустим, что обычные условия применимости магнитостатики почти выполняются, т. е. вихревая составляющая магнитного поля мала ($\boldsymbol{h}_2 \ll \boldsymbol{h}_1$). Вместе с тем, разумеется, только учет $\boldsymbol{h}_2$ может привести к взаимодействию пучка с колебаниями намагниченности ферритового образца. Так как

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2) = \Delta\psi = 0,$$

то

$$\psi = \sum_{mn} q_{mn}\exp\left[\beta_x x + i(\beta_m y + \beta_n z)\right]. \tag{11}$$

Пренебрегая полем h_2 и используя (10) и (11), найдем из уравнения

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h} = -ik\boldsymbol{e} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$$

величину электрического поля $\boldsymbol{e}$, индуцируемого движением электронов пучка в магнитном поле:

$$e_x = \frac{\psi}{D}\{(ik - s_1)(\beta_x\tau_1 - i\beta_m\tau_2) - s_2(\beta_x\tau_2 + i\beta_m\tau_1)\},$$

$$e_y = \frac{\psi}{D}\{(ik - s_1)(\beta_x\tau_2 + i\beta_m\tau_1) + s_2(\beta_x\tau_1 - i\beta_m\tau_2)\}, \tag{12}$$

$$e_z = \psi\frac{i\beta_n\tau_3}{ik - s_3},$$

где $D = (ik - s_1)^2 + s_2^2$.

Из первого уравнения системы (9)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{e} = ik\boldsymbol{h}_2$$

получим

$$h_{2x} = \lambda_x \psi; \quad h_{2y} = i\lambda_y \psi; \quad h_{2z} = i\lambda_z \psi;$$

$$\lambda_x = \frac{\beta_m}{k}\left(\frac{i\beta_n\tau_3}{ik - s_3}\right) - \frac{\beta_n}{k}\,\frac{1}{D}\,[(ik - s_1)(\beta_x\tau_2 - i\beta_m\tau_1) + s_2(\beta_x\tau_1 - i\beta_m\tau_2)];$$

$$\lambda_y = \frac{\beta_x}{k}\left(\frac{i\beta_n\tau_3}{ik - s_3}\right) - \frac{i\beta_n}{k}\,\frac{1}{D}\,[(ik - s_1)(\beta_x\tau_1 - i\beta_n\tau_2) - s_2(\beta_x\tau_2 + i\beta_m\tau_1)]; \tag{13}$$

$$\lambda_z = -\frac{\beta_n^2}{Dk}\,[(ik - s_1)\tau_2 + s_2\tau_1].$$

Пусть в феррите решения для потенциала совпадают с (4). Тогда компоненты магнитного поля в образце и в пучке можем теперь записать в виде

$$\begin{aligned} H_x &= -B_x Q e^{-B_x x}; & h_x &= q(\beta_x + \lambda_x)e^{\beta_x x};\\ H_y &= i\beta_m Q e^{-B_x x}; & h_y &= iq(\beta_m + \lambda_y)e^{\beta_x x}; \\ H_z &= i\beta_n Q e^{-B_x x}; & h_z &= iq(\beta_n + \lambda_z)e^{\beta_x x}. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь мы для краткости опускаем индексы m и n у Q и q, а также не выписываем множителей $\exp\{i(\beta_m y + \beta_n z)\}$.

Из граничных условий при $x = 0$ можно получить две независимых системы уравнений

$$\begin{aligned} H_x + 4\pi m_x &= h_x;\\ H_y &= h_y \end{aligned} \tag{15}$$

и

$$\begin{aligned} H_x + 4\pi m_x &= h_x;\\ H_z &= h_z. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда получается следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{B_x}{\alpha^2} + \nu\beta_m + \beta_x \simeq F, \tag{17}$$

где

$$F = \begin{cases} -\lambda_x + \dfrac{\beta_x}{\beta_m}\lambda_y \\ -\lambda_x + \dfrac{\beta_x}{\beta_n}\lambda_z \end{cases}. \tag{17a}$$

При выводе уравнения (17) имелось в виду, что

$$\lambda_x \ll \beta_x, \quad \lambda_y \ll \beta_m, \quad \lambda_z \ll \beta_n. \tag{18}$$

Последние неравенства следуют из условия малости вихревой части магнитного поля по сравнению с потенциальной. Они имеют место, если плотность пучка достаточно мала и не выполняются условия резонанса $\omega_H^2 - v_0^2\delta^2 = 0$. В отсутствие пучка $F = 0$ и уравнение (17) переходит в дисперсионное уравнение (6).

Учитывая в дальнейшем (18), будем считать, что F мало и поэтому $F(\omega) = F(\omega_0)$, где ω_0 — корни уравнения (6). Ищем решение уравнения (17) в виде

$$\omega = \omega_0 + \omega_1, \quad \omega_0 \gg \omega_1,$$

где ω_1 — поправка к собственным частотам колебаний намагниченности, обусловленная наличием пучка. Уравнение (17) тогда можно записать в виде

$$\omega_1^3 + \omega_1^2 b_1 + \omega_1 c_1 + d_1 = 0. \tag{19}$$

Здесь

$$b_1 = 3\omega_0 + b, \quad c_1 = 3\omega_0^2 + 2\omega_0 b + c,$$

$$d_1 = \frac{F(\omega_0)}{\beta_m \beta_x \omega_M}\left[\beta_m \omega_M \omega_0(\omega_H^2 - \omega_0^2) + \beta_x(\omega_H^2 - \omega_0^2)^2\right].$$

Уравнение (19) имеет комплексные корни при условии

$$\frac{d_1}{A} > 0; \qquad A = \frac{b_1^3}{27} - \frac{b_1 c_1}{6}. \tag{20}$$

Эти комплексные корни равны

$$\omega_1^{(1),(2)} \simeq \sqrt[3]{A} - \frac{b_1}{3} \pm i\sqrt[3]{A}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{d_1}{A}}.$$

При этом мы предполагаем, что $A \gg d_1$. Отсюда следует, что коэффициент нарастания колебаний намагниченности

$$\omega'' = |\operatorname{Im}\omega| \simeq \sqrt[3]{A}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{d_1}{A}}. \tag{21}$$

Найдем значение инкремента ω'' в некоторых частных случаях.

1 случай. Наряду с условиями (18) предположим, что

$$\delta = \beta_n - \omega/v_0 \neq 0.$$

В этом случае $\omega/c \gg s_1, s_2, s_3$ и

$$F \simeq \begin{cases} \zeta\beta_n G & \text{(I)} \\ -\beta_m G & \text{(II)} \end{cases}; \qquad G = \frac{\omega_p^4}{\omega_0^3 \omega_H} \frac{1}{(1 - \omega_0/v_0\beta_n)}.$$

При $\xi^2 \gg 1$, $A \sim 0$ и $\omega'' \sim 0$; при $\xi^2 \ll 1$ $A \simeq 2\omega_H^3\xi$. Из условия (20) видно, что комплексные корни для уравнения (19) возникают тогда, когда магнитное поле имеет составляющие h_x и h_y (система (1)). Инкремент ω'' имеет вид

$$\omega'' \sim \omega_p \frac{\omega_p}{\omega_H} \frac{\beta_n}{\beta_m} \frac{1}{1 - \omega_H/v_0\beta_n}.$$

Таким образом, инкремент нарастания амплитуды намагниченности в этом случае оказывается пропорциональным плотности пучка.

2 случай. Наряду с условиями (18) предположим, что $\delta \to 0$. По тем же причинам, что и в предыдущем случае, при $\xi^2 \gg 1$ $\omega'' \to 0$, а при $\xi^2 \ll 1$ комплексные корни для уравнения (19) имеют место только для системы (1), когда

$$F \simeq \frac{\beta_n^3}{\beta_m} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{v_0}{\omega_H}.$$

По формуле (21) получаем

$$\omega'' \sim (\beta_n/\beta_m)\, \omega_p. \tag{22}$$

Таким образом, в случае, когда фазовая скорость волны вдоль оси z совпадает с постоянной составляющей скорости электронов, ω'' пропорциональна корню квадратному из плотности пучка и достигает максимального значения.

Автор благодарит В. Г. Барьяхтара за обсуждение работы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, Phys. Letters, **4**, 129 (1963).
2. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С В. Пелетминский, ЖЭТФ, **45**, 337 (1963).
3. L. R. Walker, Phys. Rev., **105**, 390 (1957).
4. R. I. Joseph, E. Schlömann, J. Appl. Phys., **32**, 1001 (1961).

Физико-технический институт низких температур
АН УССР

Поступила в редакцию
30 июня 1964 г.

ELECTRON BEAM EXCITATION OF MAGNETOSTATIC OSCILLATIONS OF MAGNETIZED FERRITE

L. A. Shishkin

The possibility is investigated of excitation of magnetostatic oscillations of a magnetized ferrite by an electron beam. The increment of oscillation has been determined.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 537.12 · 537.228

О ВОЗДЕЙСТВИИ СЛАБОГО ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ НА ЭЛЕКТРОННЫЙ ПОТОК, СОЗДАЮЩИЙ ВИРТУАЛЬНЫЙ КАТОД

С. Д. Гвоздовер

Исследуется динамический режим виртуального катода. Получены формулы, показывающие, насколько слабое переменное поле изменяет величину постоянного тока в цепи собирающего электрода. Знак этого изменения тока зависит от отношения тока с катода к току на собирающий электрод в статическом режиме Установлены области параметров для положительных и отрицательных приращений тока

При достаточно больших плотностях токов и надлежащих размерах электронного промежутка потенциал между его электродами падает ниже потенциала катода и проходит через минимум (см. рис. 1). В та-

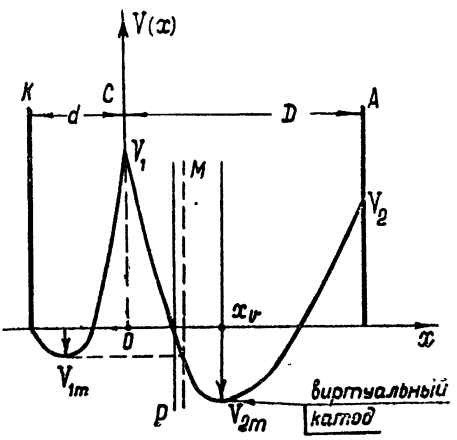


Рис. 1. Схематический ход распределения потенциала в изучаемом приборе.

ком случае эквипотенциальную поверхность с минимальным потенциалом принято называть виртуальным катодом (в. к.). В настоящей статье рассматривается случай, когда виртуальный катод возникает между «холодными» электродами, не эмитирующими электроны. Заметим, что свойства в. к. в постоянных полях изучаются давно [1–3]. Динамическому же режиму в. к. посвящено совсем мало работ [4, 11–13], результаты которых нуждаются в подтверждении и уточнении.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УПРОЩЕНИЯ

Схематически изучаемое плоское устройство показано на рис. 1. Оно состоит из катода К, испускающего электроны, сетки С и анода А, которые относительно К находятся под постоянными напряжениями V^1

и V_2. От сетки катод и анод отстоят на расстояниях d и D. Будем считать сетку идеальной, т. е. предположим, что она совершенно прозрачна для электронов и непрозрачна для электрических полей. Все поля считаем плоскими и пренебрежем краевыми эффектами.

При определенных условиях (см. [3], § 2, 5—2, 9) между сеткой и анодом возникает стабильный в. к., отстоящий от сетки на расстоянии x_v.

Между сеткой и анодом возбуждается еще внешнее переменное соленоидальное поле

$$\mathcal{E}_x(t) = -\mathcal{E}_0\cos(\omega t), \tag{1}$$

период колебаний которого значительно меньше времени пролета электрона T от сетки до в. к. Назовем динамическим или возмущенным режимом такой, когда между сеткой и анодом существует стабильный в. к. и действует поле (1). Невозмущенное состояние возникает, когда при неизменной температуре катода и постоянных напряжениях выключается высокочастотное поле.

Расположим систему координат так, чтобы плоскость y, z совпала с сеткой, а ось x была направлена от сетки к аноду. Тогда движение электрона будет описываться уравнением

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{e_0}{m_0}E_{0x}(x) + f''(t) - \frac{e_0}{m_0}E_{1x}(x,\ t); \tag{2}$$

$$v = \dot{x},$$

где e_0, m_0 — абсолютный заряд и масса электрона, E_{0x} — x-составляющая постоянного поля, искаженного объемными зарядами,

$$f''(t) = \frac{e_0}{m_0}\mathcal{E}_0\cos(\omega t), \tag{3}$$

а E_{1x} — переменная составляющая поля, вызванного силами отталкивания между электронами. Под действием переменного поля заряды в потоке перераспределяются, благодаря чему поле E_{0x}, вообще говоря, может отличаться от невозмущенного поля. Мы предположим, однако, что это различие в постоянных полях достаточно мало. Поле E_{1x} связано с переменной составляющей плотности электронного тока j_{1x} известным соотношением (см. [5] или [6])

$$j_{1x} + \epsilon_0\frac{\partial E_{1x}}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

В дальнейшем возмущение, вызванное переменным полем, будет считаться малым. Физически ясно, что при этом плотность постоянного электронного тока, летящего через сетку I_c, должна быть больше амплитуды плотности тока смещения и амплитуды переменной слагающей электронного тока:

$$I_c > \epsilon_0\omega\mathcal{E}_0; \quad I_c > |j_{1x}|. \tag{5}$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Пренебрежем влиянием переменной составляющей сил расталкивания, которые, если необходимо, можно учесть обычным путем в следующих приближениях ([6], стр. 253—258). Отбросив в (2) поле E_{1x}, получим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v;$$

$$\dot{x} = \frac{dv}{dt} = F(x) + f''(t), \tag{6}$$

где

$$F(x) = -\frac{e_0}{m_0} E_0(x).$$

Чтобы построить асимптотическое решение, приспособленное к особенностям решаемой задачи, преобразуем уравнение (6), следуя [7], введя новые переменные x_1 и x_2, связанные со старыми соотношениями

$$x = x_1 + f(t); \quad v = x_2 + f'(t). \tag{7}$$

Подстановка (7) в (6) дает

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = F[x_1 + f(t)] = F(x_1) + f(t)\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} + \frac{1}{2} f^2(t)\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x_1^2} + \ldots \tag{8}$$

Если в разложении $F(x)$ в (8) можно ограничиться только первым членом, отбросив остальные, то система (8) совпадает с невозмущенным движением, которое получается, если в исходной системе (6) исключить зависящий от времени член $f'(t)$. Таким образом, при условии, что

$$|F(x)| \gg \left| f(t)\frac{\partial F}{\partial x_1} \right| \gg \left| \frac{1}{2} f^2(t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right| \gg \ldots, \tag{9}$$

асимптотическим решением системы (6) будет

$$x \simeq x_0(t, \tau) + f(t);$$
$$v \simeq v_0(t, \tau) + f'(t). \tag{10}$$

Здесь x_0 и v_0 — координата и скорость известного нам невозмущенного движения электрона, пролетающего сетку в начальный момент времени τ, а $f'(t)$ и $f(t)$ — скорость и смещение электрона под действием переменного поля $\mathcal{E}(t)$, удовлетворяющие начальным условиям

$$f(\tau) = f'(\tau) = 0. \tag{11}$$

Интегрируя (3) с учетом (11), найдем:

$$f'(t) = \frac{2e\mathcal{E}_0}{m_0\omega} \sin\frac{\theta}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right);$$

$$f(t) = \frac{e\mathcal{E}_0\theta}{m_0\omega^2}\left[\sin(\omega t - \theta) - M\sin\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right)\right];$$

$$M = \frac{2}{\theta}\sin\frac{\theta}{2}; \tag{12}$$

$$\theta = \omega(t - \tau).$$

Порядок $f(t)$ в диапазоне сверхвысоких частот даже при больших пролетных углах, но достаточно слабых полях $\mathcal{E}$ оказывается очень малым, и условие (9) легко можно реализовать практически, так как

$$F(x) = \frac{e_0}{m_0}\frac{\partial V_0(x)}{\partial x}, \tag{13}$$

где V_{0x} — потенциал статического поля между сеткой и анодом.

Согласно (10) и (12), скорость электрона вблизи в. к.

$$v = v_0(x_v) + A_0 \cos(\omega t - \theta_0/2);$$
$$A_0 = \frac{2e\mathcal{E}_0}{m_0\omega}\sin\frac{\theta_0}{2}, \tag{14}$$

где θ_0 — пролетный угол, связанный с временем пролета T_0 электрона от сетки до в. к. соотношением (см. [3], формулу (12.1))

$$\theta_0 = \omega T_0 = \frac{9534}{\sqrt{V_1}}\frac{x_v}{\lambda}, \tag{15}$$

а λ — длина волны колебаний в свободном пространстве. Формула (15) имеет место, когда ток через диод полностью ограничен объемными зарядами, причем в (14) порядок отброшенных членов больше

$$|f(t)|_{\max} = \frac{e\mathcal{E}_0}{m_0\omega^2}\theta_0. \tag{16}$$

Таким образом, с точностью до величин порядка (16) между сеткой и анодом происходит простая суперпозиция скоростей движений (14). Отметим, что формулы теории малых сигналов приводят к тому же самому выражению (12) (см. [3], соотношение (5.78с)).

3. АНОДНЫЙ ТОК

Чтобы определить, как изменяется анодный ток под действием возмущения, рассмотрим, каким образом вблизи в. к. происходит сортировка электронов по их скоростям. Электроны, вылетающие нормально к катоду с начальными скоростями, лежащими в интервале от u до $u + du$, создают плотность тока, элемент которого (см. [3], (6.4)) есть

$$dI_u = -I_0 de^{-hm_0u^2}, \tag{17}$$

где I_0 — суммарная плотность тока, образованная электронами всех скоростей, $h = 1/2kT$, k — постоянная Больцмана, T — температура катода.

Без возмущения постоянный ток электронов I_a, прорывающихся у в. к. через минимум потенциала глубиной $|V_{m_a}|$, определяется формулой Больцмана ((2.18) в [3]), благодаря чему целесообразно ввести параметр

$$\xi^2 = \ln\frac{I_0}{I_a} = \frac{e_0|V_{m_a}|}{kT} = \frac{\pi}{4}\frac{u_{m_a}^2}{\bar{u}^2} = \frac{\pi}{4}\frac{V_{m_a}}{V_T}, \tag{18}$$

где

$$u_{m_a} = \sqrt{2\frac{e_0}{m_0}|V_{m_a}|}, \tag{19}$$

$\bar{u}$ — средняя начальная скорость электронов, вылетающих из катода, а V_T — эквивалентное ей напряжение (см. (6.14—16) в [3]):

$$\frac{m_0\bar{u}^2}{2} = \frac{\pi}{4} kT = e_0 V_T . \tag{20}$$

Если

$$u \gg u_{m_1} = \sqrt{2\frac{e_0}{m_0}|V_{m_1}|} , \tag{21}$$

то электроны проходят через первый минимум потенциала глубиной $|V_{m_1}|$, расположенный вблизи катода, и, согласно разделу 2, приобретают между сеткой и анодом скорость

$$v(x, t) = \sqrt{2\frac{e_0}{m_0} V_0(x) + u^2 + A(x, u)\cos\psi}, \tag{22}$$

где $V_0(x)$ — потенциал невозмущенного поля, A — амплитуда переменной слагающей скорости,

$$\psi = \omega t - \varphi_1(u),$$

где φ_1 — некоторая фаза.

В дальнейшем не будем связывать себя конкретным видом A. Мы интересуемся приращением постоянного анодного тока δI_a, величина которого через любую эквипотенциальную плоскость одинакова. Поэтому рассмотрим сортировку электронов по скоростям в плоскости P (см. рис. 1), находящейся под нулевым потенциалом и расположенной вблизи в. к. (см. [3], (2.40)). Через эту плоскость пролетают все электроны, прошедшие через первый минимум потенциала у катода. Электроны, не проходящие через в. к, между плоскостью P и в. к., меняют направление своего движения, причем обратные электроны в невозмущенном режиме обязательно оседают на катоде, не усложняя общей картины явлений. Вообще в (22) A зависит от x и u; однако в области в. к. мы пренебрежем этой зависимостью (см. Дополнение) и будем считать A постоянной величиной.

Из-за сложности решаемой задачи в этом месте мы вынуждены сделать наиболее существенное упрощение. Именно, в дальнейшем будем считать возмущение настолько слабым, что оно пренебрежимо мало влияет на условия сортировки электронов по скоростям между плоскостью P и в. к. Тогда электрон, движущийся к в. к., сможет пройти к аноду, если его скорость v_P в плоскости нулевого потенциала P будет больше u_{m_2} (см. (19) и (21)):

$$v_P = u + A\cos\psi \geqslant u_{m_2}; \tag{23}$$
$$u \geqslant u_{m_1} .$$

Без возмущения ($A = 0$) на анод попадают электроны, обладающие начальной скоростью

$$u \geqslant u_{m_2} \quad (A = 0); \tag{24}$$

напротив, те электроны, у которых начальные скорости лежат в пределах

$$u_{m_1} \leqslant u \leqslant u_{m_2} \quad (A = 0), \tag{25}$$

не проходят через в. к., отражаясь обратно к катоду между плоскостями P и в. к. При этом на плоскость P электроны обеих групп (24) и (25) прибывают со скоростью

$$[v_P]_{A=0} = u \quad (A = 0).$$

Некоторая часть электронов группы (24), которые без возмущения проходили на анод, в динамическом режиме при некоторых значениях фазы ψ затормозятся настолько, что уже не смогут попасть на анод, благодаря чему произойдет уменьшение анодного тока $\delta I'_a$. Начальные скорости таких электронов по (23) лежат в интервале

$$u_{m_2} \leqslant u \leqslant u_{m_2} + A \quad (\delta I'_a < 0). \tag{26}$$

Наоборот, некоторые электроны группы (25), не проходившие ранее через в. к., ускорятся переменным полем и попадут на анод. Их начальные скорости по (23) лежат в интервале

$$u_{m_2} - A \leqslant u \leqslant u_{m_2} \quad (\delta I''_a > 0); \tag{27}$$

они вызовут увеличение тока $\delta I''_a$.

Пусть u — некоторое фиксированное значение начальной скорости, лежащей в интервале (26) и создающей с катода элемент плотности тока (17). В моменты времени, когда фаза изменяется в пределах

$$\pi - \varphi_0 \leqslant \psi \leqslant \pi + \varphi_0; \qquad \cos \varphi_0(u) = \frac{u - u_{m_2}}{A}, \tag{28}$$

ток перестает приходить на анод. На графике зависимость тока от времени изобразится в виде последовательности прямоугольных импульсов, причем в пределах каждого цикла для интервала фаз (28) происходит отсечка тока.

Поэтому постоянная слагающая тока, определяемая первым членом ряда Фурье, будет

$$\frac{1}{\pi} \varphi_0(u) dI_u = \frac{dI_u}{\pi} \arccos \frac{u - u_{m_2}}{A}.$$

Результирующее уменьшение тока найдем, интегрируя последнее выражение в интервале (26):

$$dI'_a = \frac{I_0}{\pi} \int_{u_{m_2}}^{u_{m_2}+A} \varphi_0(u)\, de^{-hm_0u^2}.$$

Отсюда

$$\delta I'_a = \frac{I_0}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} e^{-hm_0 u_{m_2}^2} - \int_{\pi/2}^{\pi} \exp\left[- hm_0 (u_{m_2}^2 - A \cos\theta)^2 \right] d\theta \right].$$

Совершенно так же найдем увеличение тока $\delta I''_a$, вызванное электронами группы (27). Искомое изменение анодного тока

$$\delta I_a = |\delta I''_a| - |\delta I'_a|.$$

Используя (18), введем обозначения

$$\eta^2 = A^2 h m_0 = \frac{m_0 A^2}{2kT} = \frac{\pi}{4} \frac{A^2}{\overline{u^2}};$$

$$\xi^2 = \ln \frac{I_0}{I_a} = \frac{\pi}{4} \frac{u_{m_2}^2}{\overline{u^2}} = \frac{\pi}{4} \frac{V_{m_2}}{V_T}. \tag{29}$$

Если для A подставить выражение (15), то

$$\eta^2 = \pi \frac{e_0^2 \mathcal{E}_0^2}{m_0^2 \omega^2 \bar{u}^2} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \simeq \frac{\pi}{2} \left[\frac{e\mathcal{E}_0}{m\omega\bar{u}} \right]^2, \tag{30}$$

поскольку среднее значение квадрата синуса близко к половине (см. Дополнение).

После несложных преобразований получим

$$\frac{\delta I_a}{I_a} = P(\xi, \eta) - 1,$$

где

$$P(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp\left(2\xi\eta \cos\theta - \eta^2 \cos^2\theta\right) d\theta \tag{31}$$

— интеграл, который встречается в теории выделения гармонического сигнала из шума [8]. Для наших целей более подходит разложение, которое получается, если в (31) положить $t = \eta \cos\theta$. Тогда подынтегральное выражение совпадет с функцией, порождающей полиномы Эрмита $H_k(\xi)$ (см. [9], (8.957.1)):

$$\exp\left[-t^2 \pm 2t\xi\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\pm\eta \cos\theta)^k H_k(\xi). \tag{32}$$

Таким образом,

$$\frac{\delta I_a}{I_a} = P(\xi, \eta) - 1 = \eta^2 \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\eta^4 \left(\xi^4 - 3\xi^2 + \frac{3}{4}\right) + \ldots + \frac{1}{[(2k)!!]^2} \eta^{2k} H_{2k}(\xi) + \ldots \tag{33}$$

Для тех случаев, когда можно ограничиться первым членом (см. [9], (8.956)),

$$\left(\frac{\delta I_a}{I_a}\right) = \eta^2 \left(\xi^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \frac{A^2}{\bar{u}^2} \left[\ln \frac{I_0}{I_a} - 0{,}5 \right]. \tag{34}$$

Для значения $\xi = 0$ интеграл (31) выражается через модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка ([9], (3.915.4)):

$$P(0,\eta) = e^{-\frac{1}{2}\eta^2} I_0\left(\frac{1}{2}\eta^2\right) = 1 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{16}\eta^4 + \ldots \tag{35}$$

Таким образом, величина изменения тока, вызванная переменным полем, зависит от двух параметров ξ^2 и η^2 (см. (26)). Параметр ξ^2 определяется по характеристикам статического режима и изменяется в пределах

$$0 < \xi^2 < \infty. \tag{36}$$

В действительности допустимые значения ξ^2 лежат в более узких пределах, которые определяются условиями существования в. к. (см. [3], § 2,7—2,9), а параметр η^2 обычно лежит в пределах

$$0 < \eta < 1. \tag{37}$$

Уже первое приближение (34) показывает, что при малых значениях параметра ξ^2 возмущение вызывает уменьшение анодного тока. Действительно, при $\xi^2 < 1/2$; $I_0/I_a < 1{,}65$

$$\delta I_a < 0. \tag{38}$$

Когда $\xi^2 = 0{,}5$, необходимо учесть второй член в ряде (33):

$$\xi^2 = \frac{1}{2}; \quad \frac{I_0}{I_a} = 1{,}65; \quad \frac{\delta I_a}{I_a} = -\frac{1}{8}\eta^4 \simeq 0. \tag{39}$$

При $\xi^2 > 1/2$; $I_0/I_a > 1{,}65$

$$\delta I_a > 0, \tag{40}$$

т. е. возмущение вызывает уже увеличение тока в цепи анода.

Для значений параметров, лежащих в интервалах

$$0 < \eta \leqslant 0{,}5, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 5, \tag{41}$$

приближенная формула (33) дает значения $P - 1$, которые даже у верхних границ с точностью до нескольких процентов совпадают со значениями, полученными на счетной машине.

В заключение оценим значения параметров ξ и η, при которых в плоскости нулевого потенциала P выполняется условие (9), обеспечивающее (10) и (14). Предположим, что в изучаемой нами области вблизи в к. потенциал изменяется по параболическому закону:

$$V(x) = V_{m_2} + a(x_v - x)^2,$$

и определим постоянную a из уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2a = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_0 = \frac{I_0}{\epsilon_0 u}.$$

Тогда напряженность поля в плоскости P

$$|(E)_P| = 2a\sqrt{|V_{m_2}|/a}. \tag{42}$$

Согласно (6) и (15), условие (9) примет вид

$$\xi^2 \gg \sqrt{\frac{V_1}{V_T}}\eta^2. \tag{43}$$

При выводе (42) использовано уравнение Пуассона и соотношения

$$v_1 = \sqrt{2\frac{e_0}{m_0}V_1} = \frac{eI_0T_0^2}{2\epsilon_0 m_0}; \quad E_1 = \frac{4}{3}\frac{V_1}{x_v} = \frac{1}{\epsilon_0}I_0T_0, \tag{44}$$

имеющие место в диоде, где ток полностью ограничен объемными зарядами (см. [3], (5.66.3)).

Условия сортировки электронов по скоростям от плоскости нулевого потенциала до в. к. не будут зависеть от возмущения, если амплитуда переменного напряжения будет значительно меньше $|V_{m_2}|$:

$$\mathcal{E}_0(x_v - x_P) \ll |V_{m_2}|.$$

Судя по (42) и (44), это эквивалентно требованию

$$\frac{\mathcal{E}_0}{E_1} \ll \frac{\xi^2}{[V_1/V_T]^{1/4}}, \tag{45}$$

где E_1 — поле у сетки. Для сравнения отметим, что

$$\frac{x_v - x_P}{x_v} = \frac{6}{\pi} \frac{\xi^2}{[V_1/V_T]^{3/4}}. \tag{46}$$

Конечно, полученные формулы применимы только в случае, когда в. к. действительно существует.

ДОПОЛНЕНИЕ

Для обоснования сделанных ранее упрощающих допущений оценим в приближении заданного поля влияние начальных скоростей электронов на времена пролета электронов.

1) Электрон, вылетевший из катода с достаточно большой начальной скоростью u, будет перемещаться между сеткой и в. к. в течение

$$T(u) = \int_0^{x_v} \frac{dx}{v(x, u)}; \quad v(x, u) = \sqrt{2\frac{e_0}{m_0} V(x) + u^2}, \tag{Д.1}$$

где $V(x)$ является заданным распределением потенциала.

Чтобы не загромождать выкладки мало существенными деталями, допустим, что ток с накаленного катода полностью ограничен объемными зарядами, причем на катоде и поле и глубина минимума потенциала равны нулю ($V_{1m} = 0$). Те же самые предположения сделаем и относительно в. к. ($V_{2m} = 0$). Тогда, усреднив по всем начальным скоростям (17), получим:

$$\bar{T}(u) = -\int_0^{\infty} de^{-hm_0u^2} \int_0^{x_v} \frac{dx}{v(x, u)}. \tag{Д.2}$$

Если сначала выполнить интеграцию по начальным скоростям, то, согласно [9], (3.362.2),

$$\bar{T}(u) = \sqrt{\pi h m_0} \int_0^{x_v} e^{y^4} [1 - \Phi(y^2)]\, dy,$$
$$y^4 = 2\, e_0 h V(x), \tag{Д.3}$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности ([9], (8.250)).

При сделанных упрощениях между сеткой и в. к. имеет место простой закон трех вторых и, следовательно, (см. [6], (1.11))

$$V(x) = V_1 \left(1 - \frac{x}{x_v}\right)^{4/3}. \tag{Д.4}$$

Ограничимся сначала величинами первого порядка малости относительно

$$a = \sqrt{u/v_1}, \tag{Д.5}$$

где v_1 из (44), и подставим (Д.4) в (Д.1). Тогда в соответствии с [9], (3.166.2) $T(u)$ выразится через эллиптические интегралы первого и второго рода от амплитуды $k^2 = k'^2 = 1/2$ и угла φ:

$$\cos\varphi = \frac{a^2-1}{a^2+1},$$

откуда видно, что при малых a угол φ тупой. Поэтому, если ввести острый угол φ_0:

$$\sin\varphi_0 = \frac{2a}{a^2+1}$$

и полные эллиптические интегралы $\bar{E}$ и $\bar{K}$ ([9], (8.121)), а также ограничиться величинами первого порядка относительно a, учтя [9], (8.129), то

$$\left(\frac{T(u)}{T_0}\right)_1 = 1 - a[2\bar{E}-\bar{K}] = 1 - \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma^2(1/4)}\sqrt{\frac{u}{v_1}} \simeq 1 - 0{,}847\sqrt{\frac{u}{v_1}}, \quad (Д.6)$$

где Γ — гамма-функция, а T_0 определяется выражением (15). Используя [9], (8.326), усредним (Д.6) по начальным скоростям:

$$\left[\frac{\overline{T(u)}}{T_0}\right] = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{(\pi 2\bar{E}-\bar{K})}\sqrt{\frac{\bar{u}}{v_1}} = 1 - \frac{\pi^{5/4}}{\sqrt{2}\,\Gamma(1/4)}\sqrt{\frac{\bar{u}}{v}} =$$

$$= 1 - 0{,}816\sqrt{\frac{\bar{u}}{v_1}}. \quad (Д.7)$$

Чтобы найти последующие приближения, целесообразно воспользоваться (Д.3) и подставить для Φ асимптотическое выражение [9], (8.254). Окончательно найдем:

$$\frac{\bar{T}(u)}{T_0} = 1 - \frac{0{,}816}{[V_1/V_T]^{1/4}} + \frac{0{,}212}{V_1/V_T} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k+1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^k \frac{(2k-1)!!}{4k-1}\,\frac{1}{[V_1/V_T]^k} + \ldots \quad (k \geqslant 1). \quad (Д.8)$$

Более приближенно та же задача решена в [10]. Из (Д.8) видно, что тепловой разброс начальных скоростей электронов в обычных условиях очень слабо влияет на время пролета, что оправдывает переход от (22) к (23).

В формулу (30) входит $\sin^2(\theta_0/2)$. При усреднении по всем скоростям и при больших $\theta_0(V_1/V_T)^{1/4}$ среднее значение

$$\overline{\sin^2\frac{\theta_0}{2}}^{u} \simeq \frac{1}{2},$$

что, вообще говоря, и следовало ожидать на основании общих теорем статистики. Поэтому мы опустим выкладки, отметив только, что изучаемый эффект мало чувствителен к значению θ_0. Это обстоятельство опять-таки оправдывает сделанные в тексте упрощения.

2) Определим еще время пролета T_2 электрона от плоскости нулевого потенциала P до в. к., считая, что между ними потенциал изменяет-

ся по параболическому закону. Примем во внимание, что к в. к. проходят лишь те электроны, для которых выполняется условие (24). Из (Д.3), найдем:

$$\frac{\overline{T_2(u)}}{T_0} = \sqrt{\frac{\bar{u}}{2v_1}}\, f(\xi),$$

где T_0 — из (15), а

$$f(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2} \int_0^{\xi} e^{z^2} [1-\Phi(z)]\, dz.$$

Для $\xi < 1$

$$f(\xi) \simeq \sqrt{\pi}\, \xi - \xi^2 + \ldots,$$

а для $\xi > 1$

$$f(\xi) \simeq 0{,}42 + e^{-\xi^2} \ln \xi.$$

Обычно $\bar{T}_2(u) \ll 2\pi/\omega$. Следовательно, достаточно слабое поле не может существенно изменить условия сортировки электронов по скоростям между плоскостями P и в. к.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. W. B. Jill, Phil. Mag., 49, 993 (1925).
2. В. С. Лукошков, ЖТФ, 6, 624 (1936).
3. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов сверхвысоких частот, Гостехиздат, М., 1956, глава II
4. A. B. Brohwell, P. Wang, Proc. IRE, 42, 1117 (1954)
5. С. Д. Гвоздовер и Л Н. Лошаков, Уч зап МГУ, сер физ, 74, 87 (1943).
6 Радиофизическая электроника, под ред Н А Капцова, изд. МГУ, 1960, стр. 249
7. Н. Н. Боголюбов и Ю. М Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М, 1958, § 25, стр 315
8. S. D. Rice, BSTJ, 27, 109 (1948).
9. И. С. Градштейн и И М Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М, 1962
10. D. K. C. Mac Donald, Phil. Mag., 41, 863 (1950).
11. А. И. Костиенко, М. Н. Девятков, А. А. Лебедь, Радиотехника и электроника, 4, 482 (1959).
12. Г. Я. Мякишев, Радиотехника и электроника, 6, 303 (1961).
13. Г. Я Мякишев, Радиотехника и электроника, 8, 791 (1963).

Физический факультет МГУ

Поступила в редакцию
2 июля 1964 г.

ON THE EFFECT OF WEAK HIGH-FREQUENCY FIELD ON ELECTRON CURRENT YIELDING VIRTUAL CATHODE

S. D. Gvozdover

The dynamic regime of a virtual cathode is investigated The formulae have been obtained showing how a weak alternating field changes the magnitude of a constant current in the circuit of a collecting electrode. The sign of this current change depends on ratio of current of the cathode and that of collecting electrode in a static regime. The parameter regions have been derived for positive and negative current deviations.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.385.6

К ВОПРОСУ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЧАСТОТЫ В ЛБВ И ЛОВ*

Б. Е. Железовский

Рассмотрен преобразователь частоты на ЛБВ и ЛОВ. Получено и проанализировано характеристическое уравнение преобразователя; сформулированы начальные условия и записано в общем виде распределение амплитуд волн тока, скорости и напряжения вдоль пространства взаимодействия

В приборах параметрического типа при определенном соотношении частот модуляции ω и сигнала ω_1 возможно преобразование частоты [1, 2]. Энергия волн на частоте сигнала переходит в энергию волн частоты $\omega_2 = \omega_1 - \omega$ и наоборот. В электронно-лучевых приборах это явление изучено еще недостаточно. Правда, в работах [2, 3, 6] выяснены возможности преобразования частоты колебаний в дрейфующем электронном потоке; однако связь потока с замедляющей системой при этом не учитывалась. Поэтому представляет определенный интерес рассмотрение преобразования частоты в электронном потоке, взаимодействующем с высокочастотным полем замедляющей системы, т. е. рассмотрение преобразователей частоты на ЛБВ и ЛОВ.

1. ВЫВОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть поток электронов, предварительно промодулированный по скорости и плотности на частоте ω, движется в поле замедляющей системы. Модуляция считается значительной в том смысле, что высокочастотные процессы ее не нарушают, и в то же время достаточно малой для того, чтобы можно было рассматривать задачу методами линейной теории [4].

Совместное решение уравнения Пуассона, уравнения непрерывности, уравнения движения и уравнения для передающей линии позволяет получить следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \{v^2/2\}}{\partial z \partial t} - \omega^2_{q_{1,2}} \frac{u_0}{I_0} i - \eta \frac{\partial^2 V_{c_{1,2}}}{\partial z \partial t} = 0; \tag{1}$$

$$v^2 \frac{\partial i}{\partial z} + v \frac{\partial i}{\partial t} - i \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 V_{c_{1,2}}}{\partial z^2} - \frac{\Gamma^2_{1,2}}{\omega^2_{1,2}} \frac{\partial^2 V_{c_{1,2}}}{\partial t^2} \mp \frac{K_{1,2}\Gamma_{1,2}}{\omega_{1,2}} \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = 0, \tag{3}$$

где η — удельный заряд электрона, I_0, i, u_0, v — соответственно постоянная и переменная составляющие тока и скорости электронного потока, $V_{c_{1,2}}$ — напряжение в линии, $K_{1,2}$ — характеристическое сопротивление замедляющей системы на частотах ω_1 и ω_2, где ω_1 — частота сигнала, а $\omega_2 = \omega_1 - \omega$, $\omega_{q_{1,2}} = R_{1,2}\omega_p$ [2], $\Gamma_{1,2} = (\omega_{1,2}/u_0)(1 + b_{1,2} C_{1,2} \mp j C_{1,2} d_{1,2})$

* Усилительный режим рассмотрен автором в работе «Некоторые вопросы теории предварительной модуляции в лампах бегущей и обратной волны» («Радиотехника и электроника», 1964, IX, 9, 1642—1658).

— постоянная распространения в отсутствие пучка на частотах ω_1 и ω_2 («холодная» постоянная распространения), $b_{1,2}$, $C_{1,2}$ — параметры несинхронности и усиления [5]. Знак «—» относится к ЛБВ, знак «+» — к ЛОВ.

Решение уравнений (1)—(3) будем искать в виде волн тока, скорости и напряжения [2]:

$$i(z,t) = -I_0 + \left\{\frac{m}{2} I_0 \exp\left\{j\left[\omega t - \frac{\omega}{u_0}(1-\alpha)z\right]\right\} + (\text{к. с.})\right\} + \sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{1}{2} i_i(z) \exp\left\{j\left[\omega_i t - \frac{\omega_i}{u_0}(1-\alpha)z\right]\right\} + (\text{к. с.})_i\right\}; \tag{4}$$

$$v(z,t) = u_0 - \left\{\alpha u_0 \frac{m}{2} \exp\left\{j\left[\omega t - \frac{\omega}{u_0}(1-\alpha)z\right]\right\} + (\text{к. с.})\right\} + \sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{1}{2} v_i(z) \exp\left\{j\left[\omega_i t - \frac{\omega_i}{u_0}(1-\alpha)z\right]\right\} + (\text{к. с.})_i\right\}; \tag{5}$$

$$V_c(z,t) = \sum_{i=1}^{2}\left\{\frac{1}{2} V_{c_i}(z) \exp\left\{j\left[\omega_i t - \frac{\omega_i}{u_0}(1-\alpha)z\right] + (\text{к. с.})_i\right\}\right., \tag{6}$$

где $m = |m| e^{j\varphi}$ — комплексный параметр, характеризующий глубину и фазу модуляции на частоте предварительной модуляции (накачки), $\alpha = \pm\, \omega_q/\omega$, $\alpha_{1,2} = \omega_{q_{1,2}}/\omega_{1,2}$.

Положительное α соответствует накачке на быстрой волне пространственного заряда, отрицательное α — на медленной волне [4].

Подставляя (4)—(6) в уравнения (1)—(3), группируем члены на частотах ω_1 и ω_2:

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{d}{dz} + j\frac{\omega_1}{u_0}\alpha\right\}\frac{i_1}{I_0} + j\frac{\omega_1}{u_0}\frac{v_1}{u_0} - j\frac{\omega_1}{u_0}\frac{m}{2}\frac{v_2}{u_0} + j\frac{\omega_1}{u_0}\frac{m}{2}\alpha\frac{i_2}{I_0} = 0;\\
&\left\{\frac{d}{dz} + j\frac{\omega_2}{u_0}\alpha\right\}\frac{i_2}{I_0} + j\frac{\omega_2}{u_0}\frac{v_2}{u_0} - j\frac{\omega_2}{u_0}\frac{m^*}{2}\frac{v_1}{u_0} + j\frac{\omega_2}{u_0}\frac{m^*}{2}\alpha\frac{i_1}{I_0} = 0;\\
&\left\{\frac{d}{dz} + j\frac{\omega_1}{u_0}\alpha\right\}\frac{v_1}{u_0} + j\frac{\omega_1}{u_0}\alpha_1^2\frac{i_1}{I_0} + j\frac{\omega_1}{u_0}\frac{m}{2}\alpha\frac{v_2}{u_0} + \frac{1}{2}j\frac{\omega_1}{u_0}\frac{V_{c_1}}{V_0} = 0;\\
&\left\{\frac{d}{dz} + j\frac{\omega_2}{u_0}\alpha\right\}\frac{v_2}{u_0} + j\frac{\omega_2}{u_0}\alpha_2^2\frac{i_2}{I_0} + j\frac{\omega_2}{u_0}\frac{m^*}{2}\alpha\frac{v_1}{u_0} + \frac{1}{2}j\frac{\omega_2}{u_0}\frac{V_{c_1}}{V_0} = 0;\\
&\frac{d}{dz}V_{c_1} + j\frac{\omega_1}{u_0}(1+b_1C_1 \mp jC_1d_1)V_{c_1} \mp j\frac{\omega_1}{u_0}K_1 i_1 = 0;\\
&\frac{d}{dz}V_{c_2} + j\frac{\omega_2}{u_0}(1+b_2C_2 \mp jC_2d_2)V_{c_2} \mp j\frac{\omega_2}{u_0}K_2 i_2 = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

(верхний знак — ЛБВ, нижний — ЛОВ). Система уравнений (7) позволяет проанализировать изменение вдоль пространства взаимодействия конвекционного тока, скорости и напряжения на частотах ω_1 и ω_2.

В данной работе изменение переменных величин по z ищется в виде

$$f(z) = f(0)\exp\left[C_2\frac{\omega_2}{u_0}(\delta_n - ja'a_0)z\right] = f(0)\exp(\Gamma_n z). \tag{8}$$

Из условия совместности системы уравнений (7) получаем характеристическое уравнение преобразователя частоты, записанное в форме определителя:

$$\begin{vmatrix} \delta_n - ja'a_0(1-\nu) & j\nu a'a_0 & j\nu & -j\nu & 0 & 0 \\ j\frac{|m|^2}{4}a'a_0 & \delta_n & -j\frac{|m|^2}{4} & j & 0 & 0 \\ j\frac{1}{\nu}a_0^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 & 0 & \delta_n - ja'a_0(1-\nu) & j\nu a'a_0 & j\nu & 0 \\ 0 & ja_0^2 & j\frac{|m|^2}{4}a'a_0 & \delta_n & 0 & j \\ \mp j\nu\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^3\begin{pmatrix}\text{ЛБВ}\\ \text{ЛОВ}\end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & \delta_n - ja'a_0(1-\nu) + \nu\frac{C_1}{C_2}(jb_1 \pm d_1) & 0 \\ 0 & \mp j\begin{pmatrix}\text{ЛБВ}\\ \text{ЛОВ}\end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & \delta_n + jb_2 \pm d_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

где $\delta_n = x_n + jy_n$ — величина, характеризующая изменение «холодной» постоянной распространения в результате взаимодействия волн в потоке и замедляющей системе,

$$a' = \frac{1}{1-\nu}\frac{R}{R_2}; \quad a_0 = \sqrt{4QC_2}; \quad \nu = \frac{\omega_1}{\omega_2};$$

$$R = 1 - \exp[-0{,}7\gamma b]; \quad R_{1,2} = 1 - \exp[-0{,}7\gamma_{1,2} b],$$

R, R_1, R_2 — коэффициенты редукции плазменной частоты на частотах ω, ω_1, ω_2, b — радиус электронного потока, $\gamma = \omega/u_0$, $\gamma_{1,2} = \omega_{1,2}/u_0$.

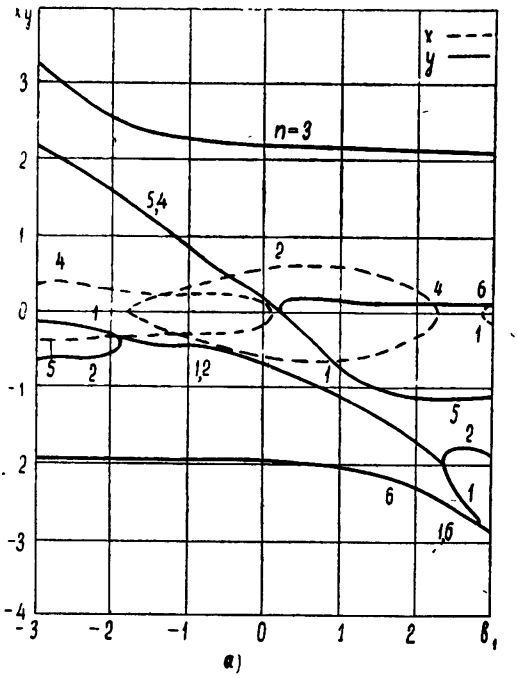
Из (9) (см. [2, 5]) видно, что процесс взаимодействия волн электронного потока с полем замедляющей системы в преобразователе частоты на ЛБВ и ЛОВ описывается шестью волнами тока, скорости и напряжения. При этом изменение амплитуды и фазовой скорости каждой из этих волн для различных значений параметров a_0, γ_2, b, ν, m, b_1, b_2, C_1, C_2, d_1, d_2, характеризующих пучок и линию, может быть получено при численном решении определителя (9). Сразу можно отметить, что корни данного уравнения не зависят от фазы φ сигнала накачки.

На рис. 1, 2 приведены значения действительных и мнимых частей $\delta_n = x_n + jy_n$ $(n = 1, 2, ..., 6)$ в зависимости от b_1, вычисленные для некоторых конкретных значений указанных параметров:

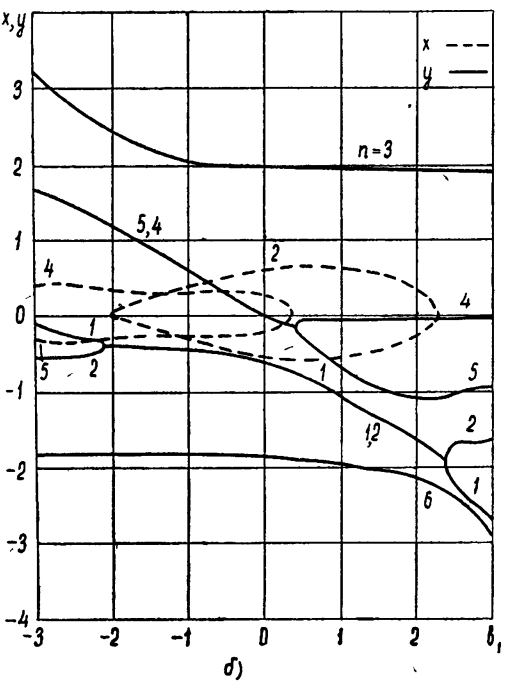
$$a_0 = 1, \ |m|^2 = 1, \ C_1 = C_2, \ b_1 = b_2, \ d_1 = d_2 = 0, \ \gamma_2 b = 1.$$

Модуляция частотой ω осуществляется на быстрой волне пространственного заряда $(a' > 0)$. Параметр ν принимает последовательно значения 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2 для ЛБВ и 1,1; 1,2; 1,6; 2 для ЛОВ. Расчеты проводились на электронной вычислительной машине с шагом по b_2, равным 0,05.

Из графиков следует, что одна из шести волн имеет постоянную амплитуду; остальные при определенных значениях параметров могут экспоненциально возрастать или затухать $(x_n \neq 0)$. Интервал изменений параметра несинхронности b_2, в котором еще сохраняются действительные части δ_n, в значительной мере зависит от соотношения между сигнальной и преобразованной частотами $(\nu = \omega_1/\omega_2)$. При этом в случае ЛБВ изменение интервала происходит в основном за счет $b_2 < 0$ (т. е., когда

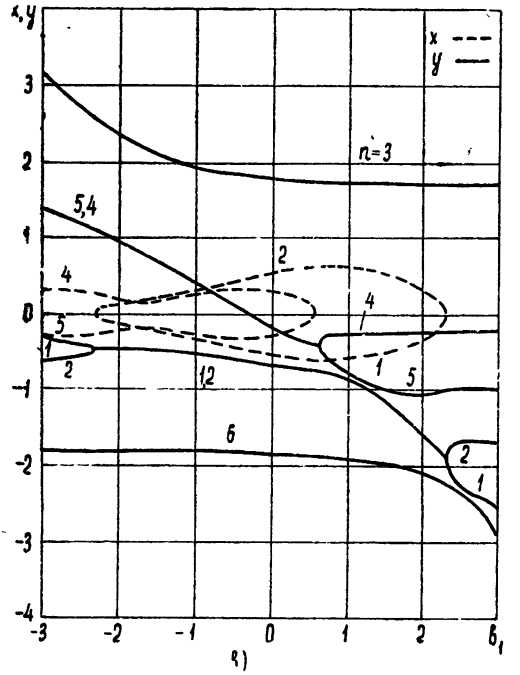


а)

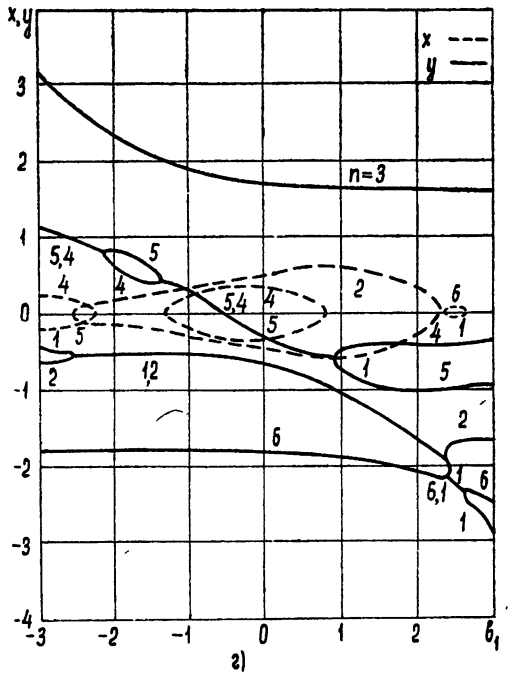


б)

Рис. 1. Корни характеристического уравнения $\delta_n = x_n + jy_n$ (преобразователь на ЛБВ):
а) $\nu = 1{,}2$; б) $\nu = 1{,}4$.



а)



г)

Рис. 1. Корни характеристического уравнения $\delta_n = x_n + jy_n$ (преобразователь на ЛБВ):
в) $\nu = 1{,}6$, г) $\nu = 1{,}8$.

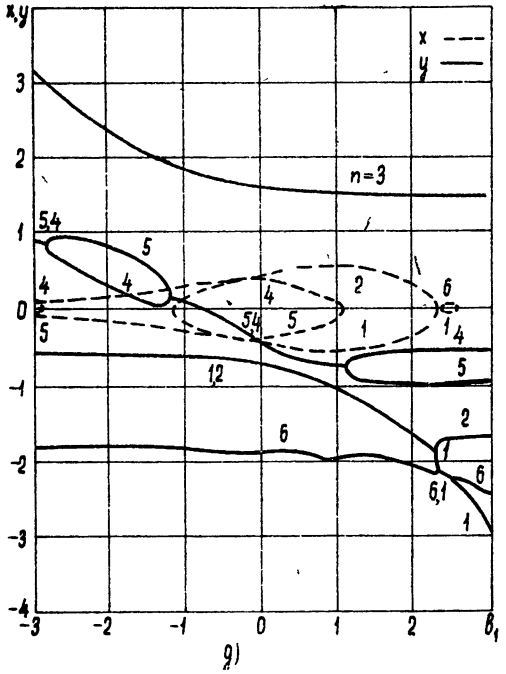


Рис. 1. Корни характеристического уравнения $\delta_n = x_n + jy_n$ (преобразователь на ЛБВ):
д) $\nu = 2$.

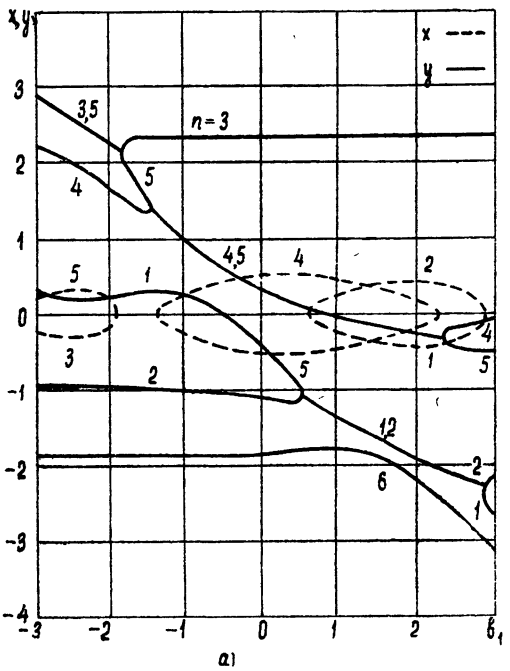
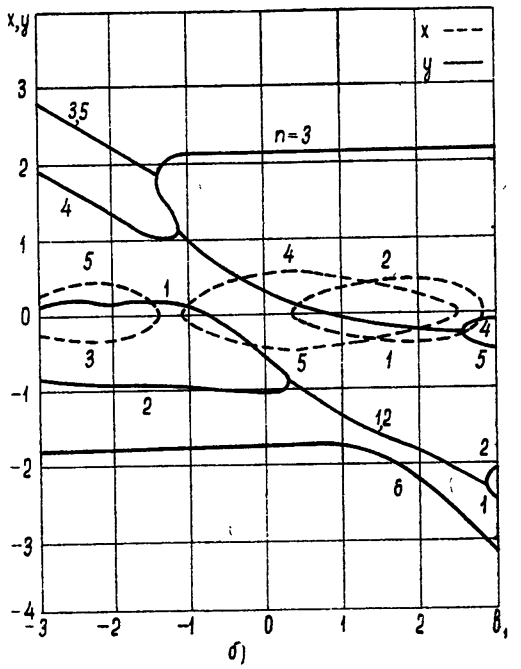
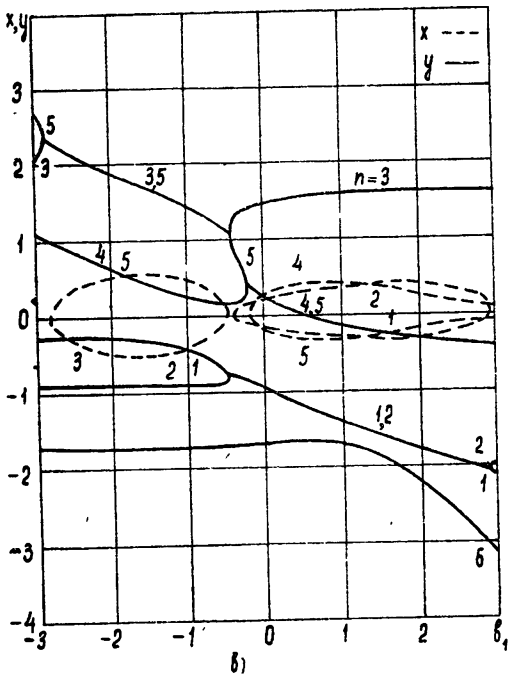


Рис. 2. Корни характеристического уравнения $\delta_n = x_n + jy_n$ (преобразователь на ЛОВ):
а) $\nu = 1,1$.



б)



в)

Рис. 2. Корни характеристического уравнения $\delta_n = x_n + jy_n$ (преобразователь на ЛОВ):
б) $\nu = 1{,}2$; в) $\nu = 1{,}6$.

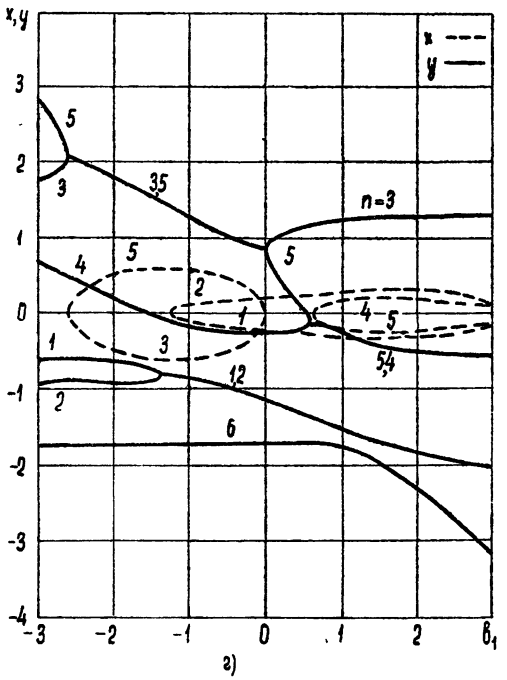


Рис. 2. Корни характеристического уравенния $\delta_n = x_n + jy_n$ (преобразователь на ЛОВ):
г) $\nu = 2$.

$v_0 < v_{\Phi x}$); однако положение $\max x_n$ сохраняется ($b_2 \simeq +0{,}75$ и $b_2 \simeq -0{,}25$). В ЛОВ интервал по b_2, в котором $x_n \neq 0$, также сильно зависит от ν, но положение $\max x_n$ сдвигается вправо по оси b_2. При этом в отличие от случая преобразователя на ЛБВ величина $\max x_n$ также значительно изменяется.

Поскольку в ЛБВ и ЛОВ $\mathrm{Re}\,\delta_n$ в известной степени характеризует усиление прибора, то, как следует из графиков, преобразование колебаний на лампах бегущей или обратной волны сопровождается усилением преобразованного сигнала.

Как известно, в ЛБВ на достаточно большом расстоянии z вдоль пространства взаимодействия нарастающие по амплитуде волны становятся преобладающими; тогда происходит экспоненциальное усиление сигнала частоты ω_2. При этом можно ожидать достаточно широкополосного усиления, поскольку действительные значения δ_n сохраняются в значительном интервале нарушения синхронизма между скоростью электронов и фазовой скоростью преобразованного сигнала. В ЛОВ усиление также достигает значительных величин, а дисперсионные свойства обратной гармоники могут быть использованы для создания регенеративного избирательного преобразователя на СВЧ с достаточно широкой перестройкой напряжением по частоте. Отмеченные обстоятельства выгодно отличают рассматриваемые приборы от аналогичных систем, использующих для преобразования колебаний дрейфующие электронные потоки, поскольку в последних усиление преобразованного сигнала не наблюдается [2].

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУД ПО ДЛИНЕ ПРОСТРАНСТВА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Прежде чем сформулировать условия на входе в замедляющую систему, выразим электронную скорость, конвекционный ток на каждой из рассматриваемых частот, а также напряжение в замедляющей системе на преобразованной частоте через напряжение сигнала V_1. Воспользовавшись системой дифференциальных уравнений (7) и уравнением (8) для n-ой парциальной волны, можно записать

$$
\begin{aligned}
v_{1n} &= j\nu \frac{u_0}{2V_0C_2} \frac{D_{v1n}}{D_n} V_{1n} = A_n V_{1n};\\
i_{1n} &= j\nu \frac{I_0}{2V_0C_2^2} \frac{D_{i1n}}{D_n} V_{1n} = B_n V_{1n};\\
i_{2n} &= j\nu \frac{I_0}{2V_0C_2^2} \frac{D_{i2n}}{D_n} V_{1n} = C_n V_{1n};\\
v_{2n} &= j\nu \frac{u_0}{2V_0C_2} \frac{D_{v2n}}{D_n} V_{1n} = \mathcal{E}_n V_{1n};\\
V_{c_{2n}} &= j\nu \frac{D_{v2n}}{D_n} V_{1n} = F_n V_{1n},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где

$$
D_{v1n} = \begin{vmatrix} b & c & d & 0\\ f & g & h & 0\\ 0 & m & n & q\\ 0 & 0 & p & r \end{vmatrix};\quad
D_{i1n} = -\begin{vmatrix} a & c & d & 0\\ e & g & h & 0\\ l & m & n & q\\ 0 & 0 & p & r \end{vmatrix};
$$

$$
D_{i2n} = -\begin{vmatrix} a & b & c & 0\\ e & f & g & 0\\ l & 0 & m & q\\ 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix};\quad
D_{v2n} = \begin{vmatrix} a & b & d & 0\\ e & f & h & 0\\ l & 0 & n & q\\ 0 & 0 & p & r \end{vmatrix};
\tag{11}
$$

$$
D_{v2n} = \begin{vmatrix} a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ l & 0 & m & n\\ 0 & 0 & 0 & p \end{vmatrix};\quad
D_n = \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0\\ e & f & g & h & 0\\ i & j & k & 0 & 0\\ l & 0 & m & n & q\\ 0 & 0 & 0 & p & r \end{vmatrix}.
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&a = j\nu; && g = j; && m = \delta_n;\\
&b = \delta_n - ja'a_0(1-\nu); && h = \delta_n; && n = ja_0^2;\\
&c = -j\nu\frac{m}{2}; && i = \delta_n - ja'a_0(1-\nu); && q = j;\\
&d = j\nu a'a_0\frac{m}{2}; && j = j\frac{1}{\nu}a_0^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 && p = \mp j;\\
&e = -j\frac{m^*}{2}; && k = j\nu\frac{m}{2}a'a_0; && r = \delta_n + jb_2 \pm d_2;\\
&f = j\frac{m^*}{2}a'a_0; && l = j\frac{m^*}{2}a'a_0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Как и в предыдущих выражениях, верхние знаки относятся к ЛБВ, нижние — к ЛОВ.

Начальные условия для ламп прямой и обратной волны будут несколько различны. В общем виде они запишутся следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{6} v_{1n}(0) = \sum_{n=1}^{6} A_n V_{1n}(0) = v_{1\,\text{вх}}; \quad \sum_{n=1}^{6} v_{2n}(0) = \sum_{n=1}^{6} \mathcal{E}_n V_{1n}(0) = v_{2\,\text{вх}};$$

$$\sum_{n=1}^{6} i_{1n}(0) = \sum_{n=1}^{6} B_n V_{1n}(0) = i_{1\,\text{вх}}; \quad \sum_{n=1}^{6} V_{2n}(0)\begin{pmatrix}1\\ \exp(\Gamma_n l)\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{n=1}^{6} F_n V_{1n}(0)\begin{pmatrix}1\\ \exp(\Gamma_n l)\end{pmatrix} = V_{2\,\text{вх}}; \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{6} i_{2n}(0) = \sum_{n=1}^{6} C_n V_{1n}(0) = i_{2\,\text{вх}}; \quad \sum_{n=1}^{6} V_{1n}(0)\begin{pmatrix}1\\ \exp(\Gamma_n l)\end{pmatrix} = V_{1\,\text{вх}},$$

где l — длина замедляющей системы лампы.

Если на вход прибора ($z = 0$ для ЛБВ или $z = l$ для ЛОВ) подается только сигнал, то правые части пяти первых уравнений (13) относительно $V_{1n}(0)$ будут равны нулю. В этом случае из системы уравнений (13) по формулам Крамера находим амплитуды парциальных волн напряжения сигнала:

$$V_{1n}(0) = V_{1\,\text{вх}} \frac{\boldsymbol{D}_{1n}}{\boldsymbol{D}_n}, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{D}_n$ — определитель системы (13), $\boldsymbol{D}_{1n}$ — раскрытый по элементам n-го столбца определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных $V_{1n}(0)$, после замены n-го столбца начальными условиями. Очевидно, что элементы определителей $\boldsymbol{D}_n$ и $\boldsymbol{D}_{1n}$ для ЛБВ и ЛОВ будут различными вследствие различий в начальных условиях.

Пользуясь выражениями (14) для амплитуд $V_{1n}(0)$ парциальных волн на входе и системой начальных условий (13), нетрудно записать в любой точке амплитуды волн тока, скорости и напряжения в виде

$$v_1(z) = V_{1\,\text{вх}} \sum_{n=1}^{6} A_n \frac{\boldsymbol{D}_{1n}}{\boldsymbol{D}_n} \exp(\Gamma_n z);$$

$$i_1(z) = V_{1\,\text{вх}} \sum_{n=1}^{6} B_n \frac{\boldsymbol{D}_{1n}}{\boldsymbol{D}_n} \exp(\Gamma_n z);$$

$$i_2(z) = V_{1\,\text{вх}} \sum_{n=1}^{6} C_n \frac{\boldsymbol{D}_{1n}}{\boldsymbol{D}_n} \exp(\Gamma_n z); \tag{15}$$

$$v_2(z) = V_{1\,\text{вх}} \sum_{n=1}^{6} \mathcal{E}_n \frac{\boldsymbol{D}_{1n}}{\boldsymbol{D}_n} \exp(\Gamma_n z);$$

$$V_2(z) = V_{1\,\text{вх}} \sum_{n=1}^{6} F_n \frac{\boldsymbol{D}_{1n}}{\boldsymbol{D}_n} \exp(\Gamma_n z);$$

$$V_1(z) = V_{1\,\text{вх}} \sum_{n=1}^{6} \frac{\boldsymbol{D}_{1n}}{\boldsymbol{D}_n} \exp(\Gamma_n z).$$

Соотношения (15) могут быть решены численно.

ЛИТЕРАТУРА

1. P Tien, J. Appl. Phys., **29**, № 9 (1958).
2. W. H. Louisell, J. Electron. Control, **6**, 1 (1959).
3 В А. Солнцев, Изв. высш уч. зав—Радиофизика, **4**, 712 (1961)
4. W. H. Louisell, C. F. Quate, Proc. IRE, **46**, 707 (1958).
5. Д Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, перевод с английского, изд. Сов. радио, М., 1957.
6. W. H. Louisell, Coupled mode and parametric electronics, London, 1960.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
22 мая 1963 г., после переработки 24 августа 1964 г

TO THE PROBLEM OF FREQUENCY CONVERSION IN TWT AND BWT

B. E. Zhelezovsky

The frequency converter in TWT and BWT has been considered. A characteristic converter equation has been obtained and analysed The initial conditions have been formulated and the amplitude distribution of the wave of current, velocily and voltage along the interaction space has been writen in a general form.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 513.83 : 517.3

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Ю. И. Неймарк и Л. П. Шильников

Рассмотрена задача о рождении периодических движений из траектории, идущей из седла в седло, в случае динамической системы типа кусочно-линейной.

Допустим, что у рассматриваемой нами динамической системы, зависящей от параметра μ, при $\mu = 0$ имеется фазовая траектория Γ_0, идущая из состояния равновесия O в него же, и что в окрестности этого состояния равновесия фазовая траектория Γ_0 может быть пересечена двумя секущими поверхностями S и $\bar{S}$. Эти поверхности таковы, что порождаемое фазовыми траекториями точечное отображение поверхности $\bar{S}$ в S в окрестности точек пересечения $\bar{S}$ и S с Γ_0 достаточно гладкое, а уравнения движения в окрестности состояния равновесия между поверхностями S и $\bar{S}$ могут быть записаны в виде*

$$\dot{x}_i = \lambda_i(\mu)\, x_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где

$$\operatorname{Re}\lambda_m(0) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_1(0) < 0 < \operatorname{Re}\lambda_n(0) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\lambda_{m+1}(0)\,.$$

Допустим далее, что отображение поверхности $\bar{S}$ в S и величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ достаточно гладко зависят от параметра μ.

Основной задачей настоящей работы является выяснение условий, при которых при изменении параметра μ от нуля из фазовой траектории Γ_0 рождается единственное устойчивое периодическое движение. Для системы второго порядка условия рождения предельного цикла из петли сепаратрисы были найдены в работах Андронова и Леонтович [1, 2]. Случай произвольного n и $m = 1$ или $m = n - 1$ рассматривался в работе Шильникова [3].

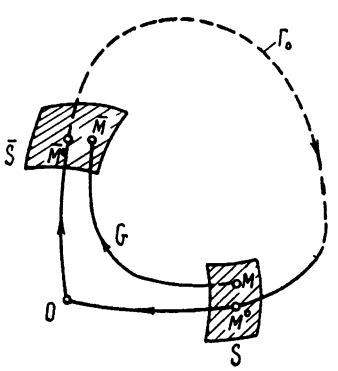


Рис. 1.

В настоящей работе рассматривается сформулированная выше задача при условии, что при $t \to -\infty$ траектория Γ_0 входит в состояние равновесия O с определенной касательной. Показывается, что случай $m = n - 1$ является единственным общим случаем рождения устойчивого периодического движения и что условия рождения устойчивого периоди-

* Этот случай возможен, например, когда система в указанной окрестности линейна или когда система приводится к линейному виду с помощью достаточно гладкой замены переменных.

ческого движения состоят в следующем: 1) при малом изменении параметра μ от нуля фазовая точка, выходящая из состояния равновесия в ту же седловую область, что и траектория Γ_0, должна возвращаться в нее же; 2) и чтобы $-\operatorname{Re}\lambda_i(0) > \lambda_n(0)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$*.

Попутно в статье устанавливаются некоторые основные случаи рождения единственных неустойчивых периодических движений, а также обнаруживается существование в некоторых случаях при $\mu = 0$ бесчисленного множества периодических движений. В применении к релейным системам условия рождения простейших устойчивых периодических движений найдены в явном виде. Отметим, что тем самым изучен последний из возможных типов бифуркаций устойчивых периодических движений релейной системы [4, 5].

1. Интегрируя уравнения (1), найдем:

$$x_i(t) = x_i(0)\, e^{\lambda_i t} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Из (2) видно, что фазовые траектории, выходящие из состояния равновесия O, заполняют плоскость π^-: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_m = 0$, а входящие в O — плоскость π^+: $x_{m+1} = 0$, ..., $x_n = 0$. Кроме того, согласно (2), все траектории, лежащие в π^+ (π^-), касаются ведущей оси $x_1(x_n)$, если $\lambda_1(\lambda_n)$ действительно и $\lambda_1 \neq \operatorname{Re}\lambda_2$ ($\lambda_n \neq \operatorname{Re}\lambda_{n-1}$), или ведущей плоскости x_1, x_2 (x_{n-1}, x_n), если λ_1 и λ_2 (λ_{n-1} и λ_n) — комплексно сопряженные и $\operatorname{Re}\lambda_1 \neq \operatorname{Re}\lambda_3$ ($\operatorname{Re}\lambda_n \neq \operatorname{Re}\lambda_{n-2}$). Поэтому в общем случае фазовая кривая Γ_0 выходит из седла и входит в него, касаясь соответствующих ведущих осей или плоскостей. По предположению, Γ_0 при $t \to -\infty$ входит в седло с определенным наклоном. Поэтому мы будем считать, что λ_n действительно и Γ_0 касается ведущей оси x_n. Очевидно, можно считать, что уравнения S и $\bar{S}$ имеют вид: $S(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ и $x_n - d = 0$, где S — гладкая функция, а d — достаточно малая величина, которую без ограничения общности можно считать положительной.

Обозначим через $M^0(x_1^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)$ и $\bar{M}^0(0, \ldots, 0, \bar{x}_{m+1}^0, \ldots, \bar{x}_n^0)$ точки пересечения Γ_0 с секущими поверхностями S и $\bar{S}$. Пусть $M(x_1, \ldots, x_n)$ — точка S, близкая к M^0. Выходящая из точки M фазовая траектория пересечет $\bar{S}$ в точке $\bar{M}$ с координатами

$$\bar{x}_j = x_j e^{\lambda_j \bar{t}} = x_j \left(\frac{x_n}{d}\right)^{-\lambda_j/\lambda_n} \qquad (j = 1, \ldots, n-1), \tag{3}$$

где $\bar{t}$ — корень уравнения

$$d = x_n e^{\lambda_n \bar{t}}.$$

Отображение (3) мы обозначим через T_0. Очевидно, T_0 определено при $x_n > 0$. По предположению, точка $\bar{M}$, лежащая в некоторой ε-окрестности точки $\bar{M}^0$, преобразуется в точку $\tilde{M}$ поверхности S так, что

$$\begin{gathered} \tilde{x}_j = f_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}; \mu) \qquad (j = 1, \ldots, n); \\ S(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Отображение (4) $\bar{S}$ в S обозначим через T_1. Очевидно, отображение $T = T_1 T_0$ поверхности S в себя, порождаемое траекториями, близкими к Γ_0, может быть записано в виде

* Аналогичный результат для случая системы n-го порядка с гладкими правыми частями установлен в работе [3].

$$\tilde{x}_j = f_j\left[x_1\left(\frac{x_n}{d}\right)^{\nu_1}, \ldots, x_{n-1}\left(\frac{x_n}{d}\right)^{\nu_{n-1}}; \mu\right] \quad (j = 1, \ldots, n);$$
$$S(x_1, \ldots, x_m) = 0; \qquad S(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) = 0, \tag{5}$$

где $\nu_j(\mu) = -\lambda_j\lambda_n^{-1}$ для $j = 1, \ldots, m$ и $\nu_j(\mu) = \lambda_j\lambda_n^{-1}$ для $j = m+1, \ldots, n-1$ ($\operatorname{Re}\nu_j(0) > 0$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n-1$). Отображение T определено для всех точек M окрестности M^0, для которых

$$\rho(T_0M, \overline{M^0}) < \varepsilon. \tag{6}$$

Введем новые переменные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ согласно формулам

$$x_i = x_i^0 + \xi_i; \; x_j\left(\frac{x_n}{d}\right)^{-\nu_j} = \bar{x}_j^0 + \xi_j; \; x_n = \xi_n \; (i = 1, \ldots, m; \; j = m+1, \ldots, n-1). \tag{7}$$

В новых переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ координаты неподвижных точек $M^*(\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*)$ преобразования T будут удовлетворять системе уравнений

$$\xi_i^* = f_i\left[(x_1^0 + \xi_1^*)\left(\frac{\xi_n^*}{d}\right)^{\nu_1}, \ldots, \bar{x}_{n-1}^0 + \xi_{n-1}^*; \mu\right] \quad (i = 1, \ldots, m);$$
$$(\bar{x}_j^0 + \xi_j^*)\left(\frac{\xi_n^*}{d}\right)^{\nu_j} = f_j\left[(x_1^0 + \xi_1^*)\left(\frac{\xi_n^*}{d}\right)^{\nu_1}, \ldots, \bar{x}_{n-1}^0 + \xi_{n-1}^*; \mu\right]$$
$$(j = m+1, \ldots, n-1);$$
$$\xi_n^* = f_n\left[(x_1^0 + \xi_1^*)\left(\frac{\xi_n^*}{d}\right)^{\nu_1}, \ldots, \bar{x}_{n-1}^0 + \xi_{n-1}^*; \mu\right], \tag{8}$$
$$S(x_1^0 + \xi_1^*, \ldots, x_m^0 + \xi_m^*) = 0.$$

Близость точки M^* к $M^0(x_1^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)$ и T_0M^* к $\overline{M}_0(0, \ldots, 0, \bar{x}_{m+1}^0, \ldots, \bar{x}_n^0)$ будет иметь место, если $\xi_n^* > 0$ и если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ достаточно малы.

2. Перейдем к отысканию неподвижных точек преобразования T. Предварительно заметим, что ввиду малости величин ξ_i^* уравнения (8) можно записать в виде

$$\xi_i^* = A_i(\mu) + \sum_{p=1}^{m} B_{ip}x_p^0\left(\frac{\xi_n^*}{d}\right)^{\nu_p} + \sum_{p=2}^{m}\bar{B}_{ip}\xi_p^* + \sum_{q=m+1}^{n-1} B_{iq}\xi_q^* + \ldots \quad (i=2, \ldots, m);$$
$$(\bar{x}_j^0 + \xi_j^*)\left(\frac{\xi_n^*}{d}\right)^{\nu_j} = A_j(\mu) + \sum_{p=1}^{m} B_{jp}x_p^0\left(\frac{\xi_n^*}{d}\right)^{\nu_p} + \sum_{p=2}^{m}\bar{B}_{jp}\xi_p^* + \sum_{q=m+1}^{n-1} B_{iq}\xi_q^* + \ldots$$
$$(j = m+1, \ldots, n-1); \tag{9}$$
$$\xi_n^* = A_n(\mu) + \sum_{p=1}^{m} B_{np}x_p^0\left(\frac{\xi_n^*}{d}\right)^{\nu_p} + \sum_{p=2}^{m}\bar{B}_{np}\xi_p^* + \sum_{q=m+1}^{n-1} B_{nq}\xi_q^* + \ldots,$$

где

$$A_k(\mu) = \begin{cases} f_k(0, \dots, 0, \overline{x}^0_{m+1}, \dots, \overline{x}^0_{n-1}; \mu) - x^0_k & (k \leqslant m) \\ f_k(0, \dots, 0, \overline{x}^0_{m+1}, \dots, \overline{x}^0_{n-1}; \mu) & (k > m) \end{cases};$$

$$B_{ks}(\mu) = \frac{\partial f_k(0, \dots, 0, \overline{x}^0_{m+1}, \dots, \overline{x}^0_{n-1}; \mu)}{\partial \overline{x}_s}; \tag{10}$$

$$\lim_{\xi^*_n \to 0} \overline{B}_{kp} = 0.$$

Якобиан первых $n-1$ уравнений этой системы в точке $\xi^*_1=0, \dots, \xi^*_n=0$ отличен от нуля, если только определитель, составленный из коэффициентов B_{jq} $(j, q = m+1, \dots, n-1)$, не равен нулю. Предполагая этот определитель отличным от нуля, из первых уравнений найдем, что

$$\xi^*_j = \Phi_j(\mu) + \sum_{s=1}^{n} \varphi_{js}(\mu) \left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{\nu_s(\mu)} + o(\xi^{*\nu_1}_n). \tag{11}$$

После подстановки найденных значений ξ^*_j в последнее уравнение системы (9) придем к уравнению вида

$$\xi^*_n = \Phi_n(\mu) + \sum_{s=1}^{m} C_s(\mu) \left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{(\nu_s \mu)} + o\left[\sqrt{(\xi^*_n)^{2\nu_1} + \xi^{*2}_n}\right], \tag{12}$$

где

$$\Phi_n(\mu) = \Delta^{-1} \begin{vmatrix} & & & A_{m+1} \\ & \Delta & & \vdots \\ & & & A_{n-1} \\ B_{n\,m+1} & \dots & B_{n\,n-1} & A_n \end{vmatrix} \quad C_s(\mu) = \frac{x^0_s}{\Delta} \begin{vmatrix} & & & B_{m+1\,s} \\ & \Delta & & \vdots \\ & & & B_{n-1\,s} \\ B_{n\,m+1} & \dots & B_{n\,n-1} & B_{ns} \end{vmatrix}.$$

Каждому решению $\xi^*_n(\mu)$ этого уравнения, стремящемуся к нулю справа при $\mu \to 0$, соответствует рождение периодического движения от Γ_0 при обратном изменении μ.

Если действительные части всех величин ν_s больше единицы, то уравнение (12) имеет единственное решение

$$\xi^*_n = \Phi_n(\mu) + \dots, \tag{13}$$

обращающееся в нуль вместе с μ. Этому решению будет соответствовать рождение периодического движения, если $\Phi_n(\mu) > 0$. Заметим, что в случае $m = n-1$ $\Phi_n(\mu) = A_n(\mu)$ есть n-ая координата точки пересечения фазовой кривой, выходящей из состояния равновесия O в область $x_n > 0$ $(\xi_n > 0)$, с поверхностью S.

Среди $\nu_1, \dots, \nu_m$ наименьшую действительную часть имеет $\nu_1(0)$. Пусть $\operatorname{Re} \nu_1(0) < 1$. Если $\nu_1(0)$ действительно и $\Phi_n(\mu)\, C_1(0) < 0$, то уравнение (12) имеет единственное решение, обращающееся в нуль при $\mu \to 0$. Напротив, при комплексном ν_1 число решений уравнения (12) при $\mu \to 0$ бесчисленно возрастает. Однако в этом случае нет решений $\xi^*_n(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$ и поэтому нет рождения периодического движения.

3. Характеристическое уравнение в неподвижной точке M^* преобразования T можно записать в виде определителя

$$= \begin{vmatrix} & & x(z) = & \\ \overline{B}^*_{ip} - \delta_{ip} z & B^*_{iq} & \sum_{s=1}^{m} B^*_{is}(x^0_s + \xi^*_s)\left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{\nu_s - 1} \nu_s & \\ \overline{B}^*_{jp} & B^*_{jq} - \delta_{jq}\left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{\nu_j} z & \sum_{s=1}^{m} B^*_{js}\nu_s(x^0_s + \xi^*_s)\left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{\nu_s - 1} - & \\ & & - \nu_j(x^0_j + \xi^*_j)\left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{\nu_j - 1} & \\ \overline{B}^*_{np} & B^*_{nq} & \sum_{s=1}^{m} B^*_{ns}\nu_s(x^0_s + \xi^*_s)\left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{\nu_s - 1} - z & \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$(p = 2, \ldots, m; \quad q = m+1, \ldots, n-1;$$
$$i = 2, \ldots, m; \quad j = m+1, \ldots, n-1),$$

где

$$B^*_{ks} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_s}\right)_{T, M^*}, \quad \overline{B}^*_{ip} = B_{ip}\left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{\nu_p} - B_{i1}\left[\frac{\partial S}{\partial x_p}\right]_{M^*}\left[\frac{\partial S}{\partial x_1}\right]^{-1}_{M^*}\left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{\nu_1}.$$

Здесь предположено для определенности, что $[\partial S/\partial x_1]_{M^0} \neq 0$.

При $n - m - 1 > 0$ из-за обращения в нуль при $\mu \to 0$ коэффициента при z^{n-1} и представимости коэффициента при z^m в виде $\Delta|_{\mu=0} + O(\mu)$ (в случае, когда $\operatorname{Re}\nu_i(0) > 1$ при $i = 1, \ldots, m$) и представимости коэффициента при z^{m-1} в виде $[\nu_1 c_1(0) + O(\mu)]\left(\frac{\xi^*_n}{d}\right)^{\nu_1 - 1}$ (в случае, когда $\nu_1(0) < 1$) следует, что уравнение (14) имеет корень $|z| \to \infty$ при $\mu \to 0$. При $m = n - 1$ и действительных частях $\nu_s(0)$, больших единицы, все элементы определителя $\chi(0)$ обращаются в нуль вместе с μ, а коэффициент при z^{n-1} равен $(-1)^{n-1}$. В силу этого все корни $\chi(z) = 0$ при $\mu \to 0$ стремятся к нулю и поэтому в этом случае рождающееся периодическое движение устойчиво. Напротив, если $\nu_1(0) < 1$, то в общем случае заведомо коэффициент при z^{n-2} стремится к бесконечности при $\mu \to 0$. Следовательно, есть корень $|z| \to \infty$ при $\mu \to 0$ и имеет место неустойчивость периодического движения.

Таким образом, единственным общим случаем, в котором возможно рождение устойчивого периодического движения из фазовой траектории, идущей из состояния равновесия O в него же, является случай, когда характеристические числа λ_i этого состояния равновесия удовлетворяют неравенствам: $\lambda_n(0) > 0$; $-\operatorname{Re}\lambda_i(0) > \lambda_n(0)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Заметим, что период τ рождающегося устойчивого периодического движения неограниченно возрастает при $\mu \to 0$, точнее,

$$\tau = \left(\frac{1}{\lambda_n(0)} + O(\mu)\right)|\ln A(\mu)|. \quad (15)$$

4. Применим полученные выше результаты для отыскания условий рождения простейших по типу устойчивых периодических движений релейной системы с коэффициентом передачи линейного звена

$$K(p) = \frac{A_m(p)}{B_n(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p + \lambda_i} \quad (16)$$

и характеристикой реле

$$x = \Omega(y) = \begin{cases} h^+ \text{ при } y > 0, \\ \text{любое число между } h^- \text{ и } h^+ \text{ при } y = 0, \\ h^- \text{ при } y < 0. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения такой системы, как известно [6], можно записать в виде

$$\dot{y}_i + \lambda_i y_i = c_i x \quad (i = 1, \ldots, n); \qquad x = \Omega(y_1 + \ldots + y_n). \tag{17}$$

Ясно, что точки $O_1\left(\frac{c_1}{\lambda_1}h^+, \ldots, \frac{c_n}{\lambda_n}h^+\right)$ и $O_2\left(\frac{c_1}{\lambda_1}h^-, \ldots, \frac{c_n}{\lambda_n}h^-\right)$ будут состояниями равновесной релейной системы, если соответственно $h^+K(0) > 0$ и $h^-K(0) < 0$. Кроме того, возможно еще состояние равновесия O на пластинке скользящих движений.

В соответствии с этим у релейной системы возможно рождение периодического движения из фазовой траектории, идущей из состояния равновесия $O_1(O_2)$ в него же, и из траектории, идущей из состояния равновесия O в него же. Дальнейшая задача состоит в отыскании наличия фазовой траектории Γ_0, идущей из состояния равновесия $O_1(O_2)$ или O в него же, и установлений условий рождения из Γ_0 устойчивого периодического движения.

Первый случай. Пусть $\lambda_n < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_i > -\lambda_n$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и точка O_1 принадлежит области G_1: $\sum_{i=1}^{n} y_i > 0$. Если выходящая из седла O_1 фазовая траектория пересекает плоскость переключения реле S в точке M_0 и затем приходит на линию пересечения плоскости S с сепаратрисной плоскостью седла π_1^+, то затем она вновь по плоскости π_1^+ идет в состояние равновесия (рис. 2).

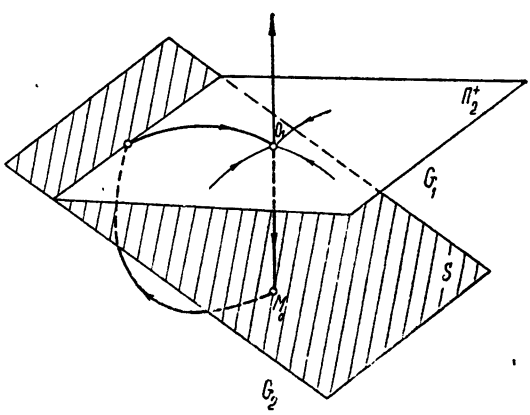


Рис. 2.

Уравнение π_1^+ имеет вид

$$y_n = (c_n/\lambda_n)\, h^+ ,$$

уравнение π_1^-

$$y_i = c_i h^+ \lambda_i^{-1} \quad (i = 1, \ldots, n-1);$$

координаты точки M_0 таковы:

$$y_1^0 = c_1 h^+ \lambda_1^{-1}, \ \dots, \ y_{n-1}^0 = c_{n-1} h^+ \lambda_{n-1}^{-1}, \ y_n^0 = -h^+ K(0) + h^+ c_n \lambda_n^{-1}.$$

Найдем условия, при которых траектория будет возвращаться в седло. Очевидно, для этого нужно выполнение условия

$$y_1(t_0) + y_2(t_0) + \dots + y_n(t_0) = 0, \tag{18}$$

где

$$y_i(t) = \left(y_i^0 - \frac{c_i}{\lambda_i} h^- \right) e^{-\lambda_i t} + \frac{c_i}{\lambda_i} h^- \quad (i = 1, \dots, n) \tag{19}$$

— уравнение траектории L, проходящей через точку M_0, а t_0 — время перехода фазовой точки из точки M_0 на плоскость π_1^+ — определяется из уравнения

$$\frac{c_n}{\lambda_n} h^+ = \left(y_n^0 - \frac{c_n}{\lambda_n} h^- \right) e^{-\lambda_n t_0} + \frac{c_n}{\lambda_n} h^-. \tag{20}$$

Подставив выражение для t_0

$$t_0 = -\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{(c_n/\lambda_n)(h^+ - h^-)}{-h^+ K(0) + (c_n/\lambda_n)(h^+ - h^-)} \tag{21}$$

в (18), найдем в $2n+2$-мерном пространстве параметров уравнение поверхности

$$F(c, \lambda, h) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{c_i}{\lambda_i} (h^+ - h^-) \left(\frac{(c_n/\lambda_n)(h^+ - h^-)}{-h^+ K(0) + (c_n/\lambda_n)(h^+ - h^-)} \right)^{\lambda_i \lambda_n^{-1}} + \frac{c_i}{\lambda_i} h^- \right] + \frac{c_n}{\lambda_n} h^+ = 0, \tag{22}$$

каждой точке которой в фазовом пространстве соответствует описанный выше замкнутый контур. Очевидно, что из этого контура будет рождаться устойчивое периодическое движение, если точка $M^1(y_1^1, \dots, y_n^1)$ пересечения траектории L с поверхностью π_1^+ при достаточно малых изменениях параметров будет лежать в области положительных значений функции $S = y_1 + \dots + y_n$, т. е. если

$$F(c, \lambda, h) > 0. \tag{23}$$

Рассмотрим случай симметричного реле ($h = h^+ = -h^-$). Без ограничения общности можно считать, что $h = 1$. Здесь мы рассмотрим ряд возможностей, связанных со значениями величины

$$A = -K(0) + 2(c_n/\lambda_n). \tag{24}$$

1) $A < 0$. В этом случае, как нетрудно видеть, замкнутых контуров, составленных из траекторий, в состав которых входили бы седло O_1 или седло O_2, система не имеет.

2) $A > 0 (n > 2)$. Здесь в силу симметричности фазового пространства возможно существование двух замкнутых контуров, симметричных относительно начала координат. Рассмотрение этого случая полностью аналогично рассмотрению общего случая; здесь возможно рождение двух устойчивых симметричных (относительно начала координат) периодических движений с несимметричными моментами переключения реле.

3) В случае, когда $A = 0$, имеет место замкнутый контур, в состав

которого входят оба седла O_1 и O_2. Здесь при тех достаточно малых изменениях параметров, когда A принимает положительные значения, из рассматриваемого контура родится единственное устойчивое периодическое движение с симметричными моментами переключения реле.

Второй случай. Предположим, что в системе (17) возможны скользящие движения. Как известно [6], необходимое условие существования скользящих движений состоит в выполнении условия $m = n - 1$, где m — степень $A_m(p)$. Уравнения движения на пластинке скользящих движений, уравнение которой

$$y_1 + \ldots + y_n = 0;$$
$$(h^+ - h^-)\, h^+ C \leqslant (h^+ - h^-) \sum c_i y_i \leqslant (h^+ - h^-)\, h^- C, \tag{25}$$

где $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \neq 0$, записываются в следующем виде:

$$\dot{y}_i + \lambda_i y_i = c_i \eta(t) \qquad (h^- \leqslant \eta \leqslant h^+) \qquad (i = 1, \ldots, n);$$
$$y_1 + \ldots + y_n = 0. \tag{26}$$

Для того, чтобы точка $O(0, \ldots, 0)$ лежала на пластинке скользящих движений и, следовательно, являлась состоянием равновесия, нужно, чтобы $h^+ h^- < 0$.

Выясним, при каких условиях точка O будет седлом, и найдем уравнения интегральных поверхностей, на которых лежат O-кривые. Будем искать решения системы (26) в виде

$$y_i(t) = A_i e^{pt}; \quad \eta(t) = B e^{pt} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{27}$$

Подставив (27) в (26), получим следующую систему

$$pA_i + \lambda_i A_i = c_i B;$$
$$A_1 + \ldots + A_n = 0. \tag{28}$$

Эта система будет иметь нетривиальное решение, если определитель

$$\begin{vmatrix} p + \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1 \\ 0 & p + \lambda_2 & \ldots & 0 & -c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p + \lambda_n & -c_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{29}$$

равен нулю. Как известно [6], определитель (29) равен $A_{n-1}(p)$. Поэтому $O(0, \ldots, 0)$ будет состоянием равновесия типа седло, если среди корней $p_1, \ldots, p_{n-1}$ нет корней с нулевыми реальными частями и имеются корни как с положительными, так и с отрицательными реальными частями.

Ограничиваясь изучением рождения устойчивого периодического движения, предположим, что $\operatorname{Re} p_i < 0$ $(i = 1, \ldots, m-1)$, $p_m > 0$ и $-\operatorname{Re} p_i > p_m$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1 = n-2)$. В этом случае многообразием π^- будет прямая, проходящая через 0 и имеющая направление вектора $\gamma_m \left(\frac{c_1}{p_m + \lambda_1}, \ldots, \frac{c_n}{p_m + \lambda_n} \right)$. Найдем точки пересечения π^- с краями l^+ и l^- пластинки скользящих движений, уравнения которых

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \pm C. \tag{30}$$

Подставляя $y_i = \alpha c_i (p_m + \lambda_i)^{-1}$ $(i = 1, ..., n)$ в (30), получим уравнение относительно α:

$$\alpha \sum_{i-1}^{n} \frac{\lambda_i c_i}{p_m + \lambda_i} = \pm C.$$

Очевидно, прямая π^- пересечется с краями l^+ и l^- только в том случае, если

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i c_i}{p_m + \lambda_i} \neq 0. \tag{31}$$

Мы будем считать, что условие (31) выполнено. Обозначим точку пересечения π^- с краем l^+ через $M_0(y_1^0, \ldots, y_n^0)$, где $y_i^0 = c_i C (p_m + \lambda_i)^{-1} R^{-1}$ $(i = 1, ..., n)$. При этом заметим, что с края l^+ траектории уходят в область $G_1 : \sum_{i=1}^{n} y_i > 0$, а с края l^- — в область $G_2 : \sum_{i=1}^{n} y_i < 0$.

Уравнения π^+ в параметрической форме запишутся в следующем виде:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{c_i}{p_j + \lambda_i} u_j \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{32}$$

Так как $K(p_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{p_j + \lambda_i} = 0$, одно соотношение есть линейная комбинация остальных. Поэтому, отбросив без ограничения общности, например, первое из этих уравнений, запишем уравнение π^+ в виде

$$\sum_{i-2}^{n} \Delta_i y_i = \begin{vmatrix} y_2 & \frac{c_2}{p_1 + \lambda_2} & \cdots & \frac{c_2}{p_{m-1} + \lambda_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & \frac{c_n}{p_1 + \lambda_n} & \cdots & \frac{c_n}{p_{m-1} + \lambda_n} \end{vmatrix} = 0. \tag{33}$$

Предположим, что траектория, выходящая из точки $M_0 \in l^+$, при $t \to \infty$ возвращается в седло. Так как мы интересуемся периодическими движениями простейшего типа, ограничимся рассмотрением случая, изображенного на рис. 3, когда Γ_0 состоит из трех кусков, два из которых — участки скольжения, а третий принадлежит интегральной кривой, описываемой уравнениями (17). Обозначим через $M_1(y_1^1, \ldots, y_n^1)$ точку пересечения интегральной кривой, выходящей из M_0, с плоскостью $\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$. Очевидно, для существования замкнутой кривой Γ_0 нужно, чтобы $M_1 \in \pi^+$, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=2}^{n} \Delta_i \left[\left(\frac{c_i C h^+}{R(p_m + \lambda_i)} - \frac{c_i}{\lambda_i} h^- \right) e^{-\lambda_i t_0} + \frac{c_i}{\lambda_i} h^- \right] = 0, \tag{34}$$

где t_0 — первый положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{c_i h^+ C}{(p_m+\lambda_i)R}-\frac{c_i}{\lambda_i}h^-\right)e^{-\lambda_i t_0}+\frac{c_i}{\lambda_i}h^-\right]=0.$$

Используя указанное выше условие рождения периодического движения, получаем, что при изменениях параметров, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{i=2}^{n}\Delta_i\left[\left(\frac{c_i C h^+}{(p_m+\lambda_i)R}-\frac{c_i}{\lambda_i}h^-\right)e^{-\lambda_i t_0}+\frac{c_i}{\lambda_i}h^-\right]\sum_{i=2}^{n}\frac{\Delta_i c_i C h^+}{(p_m+\lambda_i)R}>0, \quad (35)$$

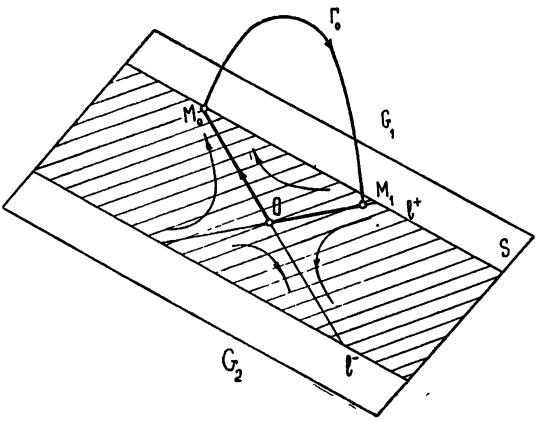


Рис. 3.

из траектории Γ_0 рождается устойчивое периодическое движение (рис. 4).

Аналогично можно рассмотреть случай, когда траектория, выходя-

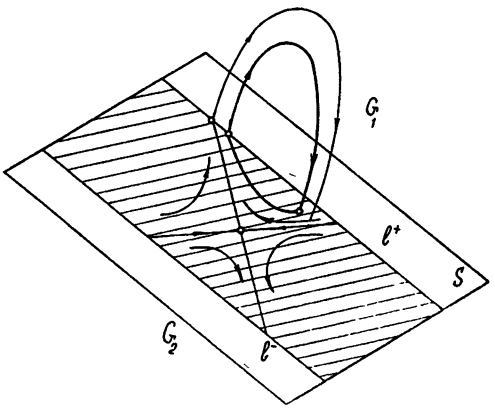


Рис. 4.

щая из седла и пересекающая другой край пластинки скользящих движений, возвращается в седло. Заметим, что при симметричном реле в системе могут быть два контура (рис. 5). Здесь одновременно будут рождаться два периодических движения, симметричных относительно начала координат.

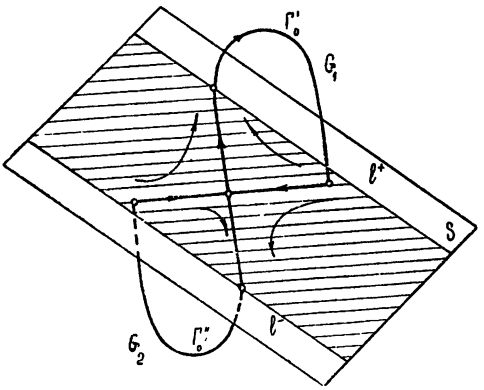


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. А А. Андронов, Е. А. Леонтович, Уч. зап. ГГУ, вып. 6, 3 (1937).
2. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, Матем. сб., 48 (90), 3, 335 (1959).
3 Л П. Шильников, Матем. сб., 61 (104), 4, 443 (1963).
4. Ю. И. Неймарк и С. Д. Киняпин, Изв высш. уч зав. — Радиофизика, **5**, 1196 (1962).
5. В А. Брусин, Ю. И. Неймарк, М. И. Фейгин, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **6**, 785 (1963).
6 Ю. И. Неймарк, Уч. зап ГГУ, сер физ, **30**, 159 (1956).

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 2 июля 1964 г.

ON ONE CASE OF ONSET OF PERIODIC MOTIONS

Ju. I. Neimark, L. P. Shil'nikov

The problem has been considered of the onset of periodic motions from the trajectory passing from saddle to saddle in the case of dynamic system of piecewise-linear type.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.391.8

УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕХОДА МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СНОСА И ДИФФУЗИИ

М. Л. Тай

Из уравнения Смолуховского найдены условия, которым удовлетворяет функция плотности вероятности перехода однородного по времени марковского процесса с разрывными коэффициентами сноса и диффузии Сравнение теоретических и экспериментальных данных показывает, что использование найденных условий сопряжений дает верный результат.

Изучение влияния случайных воздействий на нелинейные динамические системы приводит к случайным марковским процессам с разрывными коэффициентами сноса и диффузии [1–3]. Поэтому представляет значительный интерес рассмотрение таких марковских процессов. Ранее в работах Хазен [1–3] показано, что в точках разрыва функция плотности вероятности перехода удовлетворяет условиям сопряжения, а в остальных точках — уравнению Фоккера—Планка*.

Приведенные ниже условия сопряжения получены в [1–3], где плотность вероятности перехода интерпретировалась как плотность неисчезающих и невозникающих частиц, движущихся по фазовой плоскости.

1) Непрерывность плотности потока вероятности перехода в точках разрыва, т. е. непрерывность величины $A(t, y) f(s, x, t, y) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[B(t, y) f(s, x, t, y)]$, где $A(t, y)$ и $B(t, y)$ — коэффициенты сноса и диффузии, определяемые по формулам (2) и (3) (см. ниже).

2) Непрерывность функции плотности вероятности перехода в точках разрыва.

Условия сопряжения, полученные в настоящей работе непосредственно из уравнения Смолуховского, отличаются от условий 1) и 2). В связи с этим был проведен прямой эксперимент по проверке условий сопряжения для одного конкретного случая. Результаты эксперимента даны в конце работы.

Функция плотности вероятности перехода одномерного марковского процесса удовлетворяет уравнению Смолуховского

$$f(s, x, \tau, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y) f(t, y, \tau, z)\, dy, \qquad (1)$$

где $s < t < \tau$.

Известно [7], что в тех случаях, когда функции

---

* Существует много работ по решению параболического дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами (см., например, [4–6]). Однако в этих работах интересующие нас условия сопряжения не выводились, а постулировались.

$$A(x,\ t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x) f(t, x, t + \Delta, y)\, dy; \tag{2}$$

$$B(x,\ t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 f(t, x, t + \Delta, y)\, dy, \tag{3}$$

называемые соответственно коэффициентами сноса и диффузии, непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы по x, а величина

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |y - x|^3 f(t, x, t + \Delta, y)\, dy \tag{4}$$

равна нулю, функция плотности вероятности перехода удовлетворяет уравнению Колмогорова по переменным t и y:

$$\frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} [A(t, y) f(s, x, t, y)] = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [B(t, y) f(s, x, t, y)]. \tag{5}$$

Последнее называется также уравнением Фоккера—Планка.

Переходим к выводу условий сопряжения.

Пусть $f(s, x, t, y)$,— функция плотности вероятности перехода однородного по времени одномерного марковского процесса. Пусть y_0 является единственной точкой разрыва типа конечного скачка хотя бы одной из функций $A(y)$, $\partial A/\partial y$, $\partial^2 A/\partial y^2$, $B(y)$, $\partial B/\partial y$, $\partial^2 B/\partial y^2$.

Домножив равенство (1) на произвольную непрерывную функцию $q(z)$, имеющую ограниченную третью производную и обращающуюся в нуль вместе с двумя первыми производными на бесконечности (такие функции назовем удовлетворяющими условию А), после интегрирования по dz, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, \tau, z)\, q(z)\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} q(z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y) f(t, y, \tau, z)\, dy. \tag{6}$$

Преобразуем интеграл в правой части:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(z) dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y) f(t, y, \tau, z)\, dy = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y)\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y, \tau, z)[q(y) + (z - y) q'_y(y) + \tag{6a}$$

$$+ \frac{1}{2}(z - y)^2 q''_{y^2}(y) + \frac{1}{6}(z - y)^3 q'''_{y^3}(y + \theta z - \theta y)] dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y)[q(y) +$$

$$+ q'_y(y) \int_{-\infty}^{+\infty} (z - y) f(t, y, \tau, z)\, dz + \frac{1}{2} q''_{y^2}(y) \int_{-\infty}^{+\infty} (z - y)^2 f(t, y, \tau, z) dz +$$

$$+\frac{1}{6}\,q'''_{y^3}(y+\theta z-\theta y)\int_{-\infty}^{+\infty}(z-y)^3 f(t, y, \tau, z)\,dz\Big\}\,dy,$$

где $0<\theta<1$. Заменив переменную интегрирования в левой части равенства (6) на y, после деления на $\tau-t$ и перехода к пределу при $\tau\to t$, стремящемся к нулю, получаем (используя равенства (2), (3) и (4)):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial t}\,q(y)-f(s, x, t, y)\left[A(y)q'_y(y)+\frac{1}{2}B(y)\,q''_{y^2}(y)\right]\right\}dy=0. \tag{7}$$

Разобьем область интегрирования $(-\infty, +\infty)$ на три $(-\infty, y_0-\varepsilon]$, $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, $[y_0+\varepsilon, \infty)$, где ε — произвольно малое положительное число. Интегрируя по частям интегралы по областям $(-\infty, y_0-\varepsilon]$ и $[y_0+\varepsilon, \infty)$, имеем из равенства (7)

$$\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon}\left\{\frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial t}\,q(y)-\left[A(y)q'_y(y)+\frac{1}{2}B(y)\,q''_{y^2}(y)\right]f(s, x, t, y)\right\}dy+$$

$$+\int_{-\infty}^{y_0-\varepsilon}q(y)L\{f(s, x, t, y)\}\,dy+\int_{y_0+\varepsilon}^{\infty}q(y)L\{f(s, x, t, y)\}\,dy- \tag{8}$$

$$-G\{f(s, x, t, y)\}q(y)\Big|_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon}-B(y)f(s, x, t, y)\,q'_y\Big|_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon}=0,$$

где

$$G\{f\}=A(y)f(s, x, t, y)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\{B(y)f(s, x, t, y)\};$$

$$L\{f\}=\frac{\partial f(s, x, t, y)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}[A(y)f(s, x, t, y)]-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[B(y)f(s, x, t, y)]. \tag{9}$$

При сделанных предположениях подынтегральное выражение первого интеграла в равенстве (8) ограничено, поэтому при $\varepsilon\to 0$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{y_0}q(y)L\{f(s, x, t, y)\}+\int_{y_0}^{\infty}q(y)L\{f(s, x, t, y)\}\,dy- \tag{10}$$

$$-[G\{f\}q(y)+B(y)f(s, x, t, y)q'_y(y)]=0,$$

где $q^+(y_0)$ и $q^-(y_0)$ — соответственно пределы справа и слева в точке y_0 для произвольной функции $q(y)$, а через $[q(y)]$ обозначена величина скачка функции $q(y)$ в точке y_0, равная $q^+(y_0)-q^-(y_0)$. В частности, равенство (10) выполняется для любой функции $q(y)$, удовлетворяющей условию А и тождественно равной нулю вместе с производной при $y\leqslant y_0^+$.

Следовательно, по лемме Лагранжа при $y>y_0^+$ функция плотности вероятности перехода удовлетворяет уравнению (5). Аналогично, полагая $q(y)$ тождественно равной нулю вместе с производной при $y\geqslant y_0^-$, заключаем, что уравнение (5) имеет место при $y<y_0^-$.

Это означает, что интегральные члены в равенстве (10) равны нулю при любой функции $q(y)$, удовлетворяющей условию А, поэтому

$$\left[\left\{A(y)f(s, x, t, y) - \frac{1}{2}(B(y)f(s, x, t, y)'_y\right\} q(y) + \right.$$
$$\left. + B(y)f(s, x, t, y)q'_y\right] = 0. \qquad (10a)$$

При $q(y)$, имеющих равную нулю производную q'_y в точке y_0, из (10а) получаем

$$\left[A(y)f(s, x, t, y) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\{B(y)f(s, x, t, y)\}\right] = 0. \qquad (11)$$

Учитывая (11), из (10а) получаем

$$[B(y)f(s, x, t, y)] = 0. \qquad (12)$$

Равенства (11) и (12) являются искомыми условиями сопряжения*

Аналогично показывается, что в тех случаях, когда имеется несколько точек разрыва типа конечного скачка функций $A(y)$, $\partial A/\partial y$, $B(y)$, $\partial B/\partial y$, $\partial^2 B/\partial y^2$, в каждой такой точке выполняются условия сопряжения, а на интервалах между ними — уравнение Фоккера—Планка

Условия сопряжения (11) и (12) не совпадают с условиями 1) и 2). Поэтому для следующей конкретной задачи было проведено сравнение результатов, полученных с помощью условий сопряжения 1), 2) и (11), (12), и результата эксперимента на электронной вычислительной машине.

Рассмотрим стационарное распределение координаты точки, двигающейся по окружности длиной l под действием случайного возмущения, зависящего от положения точки на окружности. Пусть случайное возмущение в каждый момент времени определяет скорость точки, так что

$$x(t) = \xi(t, x), \qquad (13)$$

где x — координата, равная длине дуги окружности, отсчитываемой от фиксированной точки по часовой стрелке, а $\xi(t, x)$ — зависящее от времени и координаты x случайное возмущение.

Предположим, что среднее значение случайного процесса $\xi(t, x)$ равно нулю при всех t и x, а функция корреляции

$$R_\xi(\tau) = \begin{cases} a_1^2\delta(\tau) & (0 \leqslant x < l/2) \\ a_2^2\delta(\tau) & (l/2 \leqslant x < l) \end{cases}. \qquad (14)$$

При сделанных предположениях случайный процесс $x(t)$ является марковским и однородным по времени.

Для коэффициента сноса процесса $x(t)$ имеем

$$A(y)\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - y)f(y, t, x, t + \Delta)\,dx =$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}M[\xi(t + \theta\Delta, y)\Delta] = 0, \qquad (15)$$

* Аналогично получаются условия сопряжения для плотности перехода многомерного марковского процесса с разрывными коэффициентами сноса и диффузии.

где $0 < \theta < 1$. Аналогично для коэффициента диффузии

$$B(y) = \lim_{\Delta \to 0} \left\{ \frac{1}{\Delta} M[(x(t+\Delta) - x(t))^2] \,|_{x(t)=y} \right\} =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} M[\xi^2(t + \theta\Delta,\ y)\Delta^2] = \begin{cases} a_1^2 & (0 \leqslant y < l/2) \\ a_2^2 & (l/2 \leqslant y < l) \end{cases} \tag{16}$$

Поэтому функция плотности вероятности перехода является решением уравнений

$$\frac{\partial f(s,\ x,\ t,\ y)}{\partial t} = \frac{1}{2} a_1^2 \frac{\partial^2 f(s,\ x,\ t,\ y)}{\partial y^2} \tag{17}$$

при $0 \leqslant y < l/2$ и

$$\frac{\partial f(s,\ x,\ t,\ y)}{\partial t} = \frac{1}{2} a_2^2 \frac{\partial^2 f(s,\ x,\ t,\ y)}{\partial y^2} \tag{18}$$

при $l/2 \leqslant y < l$. В точках $y = l/2$ и $y = 0$ имеют место условия сопряжения.

Поскольку плотность вероятности одномерного распределения случайного процесса $W(y,\ t)$ равна $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(x,\ s) f(x,\ s,\ y,\ t)\, dx$; функция $W(y,\ t)$ также удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка и условиям сопряжения. Стационарная плотность распределения не зависит от времени и поэтому, если она существует, является решением уравнения

$$\frac{d}{dy}[A(y)W(y)] = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2}[B(y)W(y)]. \tag{19}$$

Заметим, что при переходе от уравнения Фоккера—Планка к уравнению (19) теряется зависимость от начального распределения, которое удовлетворяет условию нормировки

$$\int W(x,\ s)\, dx = 1. \tag{20}$$

Этому же условию удовлетворяет решение уравнения Фоккера—Планка при всех t. Поэтому стационарная плотность распределения также удовлетворяет условию нормировки.

В рассматриваемом примере уравнение (19) сводится к

$$\frac{d^2 W}{dy^2} = 0 \tag{21}$$

при $0 < y < l/2$ и $l/2 < y < l$. Используя условия сопряжения 1) и 2), после интегрирования уравнения (21) с условием нормировки получаем гипотезу H_0 (равномерное распределение). Используя условия сопряжения (11) и (12), получаем гипотезу H_1:

$$W(y) = \begin{cases} \dfrac{2a_2^2}{l(a_1^2 + a_2^2)} & (0 < y < l/2) \\ \dfrac{2a_1^2}{l(a_1^2 + a_2^2)} & (l/2 < y < l) \end{cases} \tag{22}$$

Гипотезы H_0 и H_1 с помощью электронной вычислительной машины* были проверены при значениях $l = 8, a_1^2 = 1/12$, $a_2^2 = 1/3$. При этом дифференциальное уравнение заменялось разностным аналогом $x_{n+1} = x_n + \xi_n$, где случайное число ξ_n выбиралось на каждом шаге из датчика псевдослучайных чисел с равномерным распределением на интервале $[-0{,}5;\ 0{,}5]$ при $0 \leqslant x_n < l/2$ и на интервале $[-1,\ 1]$ при $l/2 \leqslant x_n < l$.

Рассмотрение отдельных реализаций случайной последовательности x_n показывает, что при попадании точки в интервал $0 < x_n < l/2$ ее движение замедляется. Это приводит к неравномерности стационарного распределения. Результаты экспериментов при различных начальных положениях точки показывают, что после 160 шагов распределение ее координаты почти не зависит от начального положения.

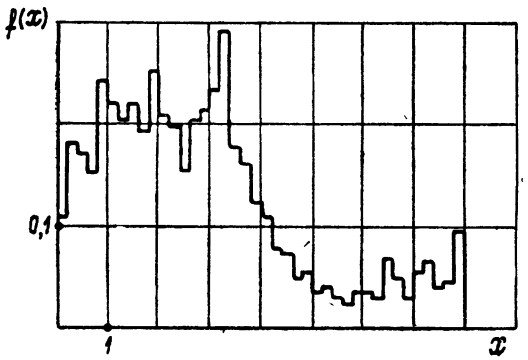


Рис. 1.

На рис. 1 показана плотность вероятности стационарного распределения координаты и плотность вероятности через 160 шагов по результатам 1000 испытаний. При построении вся длина окружности разбивалась на 40 равных частей и подсчитывались частоты значений x_{160} для каждого частичного интервала.

Соответствие гипотез H_0 и H_1 с экспериментом проверялось по критерию согласия Колмогорова [8]. Максимальное отклонение эмпирической функции распределения от функции распределения, соответствующей гипотезе H_0, равно 0,251. Вероятность получить распределение с таким максимальным отклонением меньше 10^{-5} (см. приложение XIV в [8]). Максимальное отклонение эмпирической функции распределения от функции распределения, соответствующей гипотезе H_1, равно 0,0425. Вероятность получить распределение с таким максимальным отклонением равна 0,056. Таким образом, при 5% уровне значимости гипотезу H_1 следует считать согласованной с экспериментом, а гипотезу H_0 — отбросить.

Приведем примеры использования условий сопряжения (11) и (12).

Пример 1. Пусть $A(y) = 0$, а $B(y)$ — кусочно-постоянная функция, равная $2a_1^2$ при $y<0$ и $2a_2^2$ при $y>0$. При этих условиях функция плотности вероятности перехода марковского процесса удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial f(s,\ x,\ t,\ y)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 f(s,\ x,\ t,\ y)}{\partial y^2} \qquad (y < 0), \tag{23}$$

$$\frac{\partial f\ (s,\ x,\ t,\ y)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 f(s,\ x,\ t,\ y)}{\partial y^2} \qquad (y > 0), \tag{24}$$

* Программирование выполнено В. И. Алексеевым.

начальному условию

$$f(s,\ x,\ s_{+0},\ y) = \delta(y - x) \tag{25}$$

и условиям сопряжения

$$a_1^2 f(s,\ x,\ t,\ 0_{-0}) = a_2^2 f(s,\ x,\ t,\ 0_{+0}); \tag{26}$$

$$a_1^2 f'_y(s,\ x,\ t,\ 0_{-0}) = a_2^2 f'(s,\ x,\ t,\ 0_{+0}). \tag{27}$$

Для определенности считаем, что исходное положение $x < 0$.

Для решения задачи используем искусственный прием [9]. Сначала решаем уравнение (13) при $-\infty < y < \infty$ и начальном условии

$$f_1(s,\ x,\ s_+,\ y) = \delta(y - x) + k_1\delta(y - x_1),$$

где k_1 и $x_1 > 0$ — пока неизвестные константы.

Аналогично решаем уравнение (14) при всех y и начальном условии

$$f_2(s,\ x,\ s_+,\ y) = k_2\delta(y - x_2),$$

где k_2 и $x_2 < 0$ — неизвестные константы. Решение имеет вид

$$f(s,\ x,\ t,\ y) = \frac{1}{2a_1\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s,\ x,\ s_+,\ \xi) \exp\left\{-\frac{(\xi - y)^2}{4a_i^2 t}\right\} d\xi. \tag{28}$$

Для определения констант k_1, k_2, x_1 и x_2 из равенств (16)—(18) получаем систему уравнений

$$a_1\left\{\exp\left(-\frac{x^2}{4a_1^2(t-s)}\right) + k_1\exp\left(-\frac{x_1^2}{4a_1^2(t-s)}\right)\right\} = k_2 a_2 \exp\left\{-\frac{x_2^2}{4a_2^2(t-s)}\right\}; \tag{29}$$

$$\frac{1}{a_1}\left\{x\exp\left(-\frac{x^2}{4a_1^2(t-s)}\right) + k_1 x_1 \exp\left(-\frac{x_1^2}{4a_1^2(t-s)}\right)\right\} = \frac{x_2 k_2}{a_2}\exp\left\{-\frac{x_2^2}{4a_2^2(t-s)}\right\}.$$

Поскольку k_1, k_2, x_1 и x_2 не зависят от t, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\frac{x}{a_1} = -\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2};$$

$$a_1(1 + k_1) = a_2 k_2; \tag{30}$$

$$a_2(x + k_1 x_1) = a_1 k_2 x_2.$$

Тогда

$$x_1 = -x,\ x_2 = \frac{a_2}{a_1}x,\quad k_1 = (a_2 - a_1)/(a_2 + a_1),\quad k_2 = 2a_1(a_2 + a_1). \tag{31}$$

Таким образом, при $x < 0$

$$f(s,\ x,\ t,\ y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2a_1\sqrt{\pi(t-s)}}\left[\exp\left(-\dfrac{(y-x)^2}{4a_1^2(t-s)}\right) + \dfrac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}\exp\left(-\dfrac{(y+x)^2}{4a_1^2(t-s)}\right)\right] & (y < 0) \\ \dfrac{a_1}{a_2(a_2 + a_1)\sqrt{\pi(t-s)}}\exp\left[-\dfrac{(ya_1 - xa_2)^2}{4a_2^2(t-s)a_1^2}\right] & (y > 0). \end{cases} \tag{32}$$

Используя симметрию, получаем решение при $x>0$:

$$f(s, x, t, y) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2a_2\sqrt{\pi(t-s)}}\left[\exp\left(-\dfrac{(y-x)^2}{4a_2^2(t-s)}\right)+\dfrac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\exp\left(-\dfrac{(y+x)^2}{4a_2^2(t-s)}\right)\right] & (y>0) \\ \dfrac{a_2}{a_1(a_1+a_2)\sqrt{\pi(t-s)}}\exp\left[-\dfrac{(ya_2-xa_1)^2}{4a_1^2a_2^2(t-s)}\right] & (y<0). \end{cases} \tag{33}$$

Пример 2. Определим стационарную плотность вероятности перехода для одномерного марковского процесса с кусочно-линейным коэффициентом сноса и кусочно-постоянным коэффициентом диффузии.

Пусть

$$A(x) = \beta_i(x-\alpha_i); \quad B(x) = 2b_i, \tag{34}$$

где

$$\gamma_i \leqslant x < \gamma_{i+1}, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad \gamma_0 = -\infty \text{ и } \gamma_n = \infty.$$

Стационарная плотность вероятности перехода является решением уравнения

$$\beta_i\frac{d[(x-\alpha_i)f]}{dx} - b_i\frac{d^2f}{dx^2} = 0 \quad (\gamma_i \leqslant x < \gamma_{i+1}) \tag{35}$$

и удовлетворяет условиям сопряжения. Учитывая, что в бесконечности f и f'_x равны нулю, а в точках γ_i имеет место (11), получаем

$$b_i\frac{df}{dx} - \beta_i(x-\alpha_i)f = 0, \tag{36}$$

откуда

$$f = c_i\exp\left\{\frac{\beta_i}{b_i}\left(\frac{x}{2}-\alpha_i\right)x\right\} \qquad (\gamma_i \leqslant x < \gamma_{i+1}). \tag{37}$$

Для определения $n+1$ констант $c_0,\ldots,c_n$ используем n условий сопряжения (12) и условие нормировки. В частности, при $n=2$ получаем

$$f = \begin{cases} c\exp\left[\dfrac{\beta_0}{b_0}x\left(\dfrac{x}{2}-\alpha_0\right)\right] & (x<\gamma_1) \\ \dfrac{b_0c}{b_1}\exp\left[\dfrac{\beta_1}{b_1}x\left(\dfrac{x}{2}-\alpha_1\right)\right] & (x>\gamma_2) \end{cases}, \tag{38}$$

где

$$c = \left\{\int_{-\infty}^{\gamma_1}\exp\left[\frac{\beta_0}{b_0}\left(\frac{x}{2}-\alpha_0\right)x\right]dx + \frac{b_0}{b_1}\int_{\gamma_1}^{\infty}\exp\left[\frac{\beta_1}{b_1}\left(\frac{x}{2}-\alpha_1\right)x\right]dx\right\}^{-1}. \tag{39}$$

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Ю. И. Неймарку, под руководством которого выполнена работа.

ЛИТЕРАТУРА

1 Э. М. Хазен, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, **3**, 58 (1961).
2 Э. М. Хазен, Теория вероятности и ее применение, **6**, 130 (1961).
3 Э. М. Хазен, Теория вероятности и ее применение, **6**, 234 (1961).
4. О. Л. Олейник, Изв. АН СССР, сер. мат., **25**, 3 (1961).

5. А. А. Самарский, ДАН СССР, **121**, 225 (1958).
6 С. А. Каменомостская, Мат. сб, **53**, 489 (1961).
7 А. Н. Колмогоров, УМН, № 5, 5 (1938).
8. А. К. Митропольский, Техника статистических вычислений, гл. 6, § 3, Физматгиз, М, 1961.
9. Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. 17, § 2, ОНТИ, М., 1937.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 мая 1964 г.

CONJUGATE CONDITIONS FOR TRANSITION PROBABILITY DENSITY OF MARKOV'S PROCESS WITH DISCONTINUOUS TRANSFER AND DIFFUSION COEFFICIENTS

M. L. Tay

From Smolukhovsky's equation the conditions have deen found for the function of transition probability density of time uniform Markov's process being with discontinuous transfer and diffusion coefficients. The comparison of theoretical and experimental data shows that using the conjugate conditions found leads to the correct result.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621.372.4

О РАБОТЕ ПАРАМЕТРОНА В РЕЖИМЕ ЗАДАННОГО ТОКА ВОЗБУЖДЕНИЯ

Л. А. Синицкий

Рассматриваются процессы в индуктивном параметроне при идеальной кривой намагничивания сердечников и «прямоугольном» токе возбуждения. Показано существование устойчивого режима субгармонических колебаний, при котором сердечники поочередно находятся в насыщенном состоянии. Режим субгармонических колебаний с одновременным насыщением обоих сердечников невозможен Эти результаты свидетельствуют о том, что выводы, сделанные в работе [1], неверны

Исследование параметрона при заданном токе возбуждения проведено в статье [1]. Однако выводы этой работы относительно рассматриваемого режима несправедливы. Поэтому представляется целесообразным обратиться вновь к этому вопросу, интересному как с практической, так и с теоретической точек зрения.

Следуя [1], предположим «прямоугольную» форму тока возбуждения

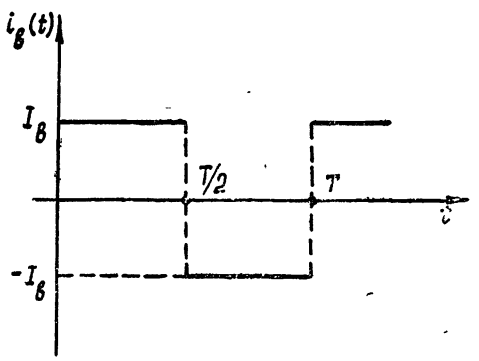


Рис. 1.

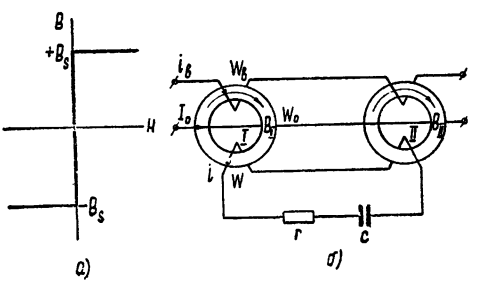


Рис. 2.

(рис. 1) и идеальную кривую намагничивания материала сердечника

(рис. 2а). Исследуемая схема приведена на рис. 2б. Уравнения, описывающие процессы в схеме, имеют вид

$$-wS\frac{d}{dt}(B_{\text{I}}-B_{\text{II}})=ir+u_C; \tag{1}$$

$$C\frac{du_C}{dt}=i. \tag{2}$$

Напряженности поля в сердечниках I и II соответственно равны

$$H_{\text{I}}=\frac{w_{\text{в}}i_{\text{в}}+w_0I_0+wi}{l};$$
$$H_{\text{II}}=\frac{w_{\text{в}}i_{\text{в}}+w_0I_0-wi}{l}, \tag{3}$$

а зависимость B от H определяется рис. 2а.

Сразу же заметим, что при принятой аппроксимации кривой намагничивания ампервитки возбуждения $w_{\text{в}}I_{\text{в}}$ не могут превосходить ампервитков подмагничивания w_0I_0. Иначе при изменении знака тока возбуждения хотя бы в одном из сердечников индукция должна изменяться скачком, что невозможно. Отсюда следует, что для рассматриваемой схемы возможны три различных состояния, которые мы условно будем обозначать, как и в [2]: 1-й сердечник насыщен, 2-й не насыщен — состояние 2^{I}; 2-й сердечник насыщен, 1-й не насыщен—состояние 2^{II}; оба сердечника насыщены — состояние 3. Состояние 1, когда оба сердечника не насыщены, возможно только в случае $w_0I_0=w_{\text{в}}I_{\text{в}}$, не представляющем интереса. Из сказанного следует, что режим заданного тока должен существенно отличаться от режимов, близких к режимам заданного напряжения возбуждения (для последних состояние 1 во время периодического режима чередуется с состояниями 2^{I}, 2^{II} [2]).

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры

$$x=\frac{t}{T};\quad y=\frac{u_C}{u_g};\quad z=\frac{wS(B_{\text{I}}-B_{\text{II}})}{u_gT};\quad v=\frac{ir}{u_g};\quad \nu=\frac{T}{rC};\quad \lambda=\frac{u_l}{u_g},$$

где

$$u_g=r\frac{w_0I_0+w_{\text{в}}I_{\text{в}}}{w};\quad u_l=r\frac{w_0I_0-w_{\text{в}}I_{\text{в}}}{w}.$$

При этом уравнения (1), (2) примут вид

$$-\frac{dz}{dx}=y+v; \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx}=\nu v. \tag{5}$$

Дальнейшее исследование производится на плоскости y, z. Поэтому вместо уравнения (4), (5) рассмотрим уравнение

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{y+v}{\nu v}, \tag{6}$$

В состоянии 2 v может принимать четыре дискретных значения:

$$v = \begin{cases} \lambda & (n < x < n + 0{,}5) \\ 1 & (n + 0{,}5 < x < n + 1) \end{cases} \text{ состояние } 2^{\text{I}}$$

$$\begin{cases} -\lambda & (n < x < n + 0{,}5) \\ -1 & (n + 0{,}5 < x < n + 1) \end{cases} \text{ состояние } 2^{\text{II}}$$

В этих равенствах n обозначает произвольное целое число. В состоянии 3 переменная z равна либо нулю (когда знаки индукций в сердечниках совпадают), либо $\pm z_s$ (при противоположных знаках индукций), где $z_s = 2wSB_s/u_gT$. При этом $dz/dx = 0$ и в состоянии 3 y в соответствии с (4) и (5) изменяется по закону

$$\frac{dy}{dx} + \nu y = 0. \tag{7}$$

Возможные движения изображающей точки на плоскости y, z ограничены полосой $\pm z_s$, причем полоса шириной z_s, расположенная выше оси абсцисс, соответствует состоянию 2^{I}; ниже оси абсцисс лежит полоса, соответствующая 2^{II}.

Уравнения фазовых траекторий для верхней полосы в зависимости от значения x имеют вид

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2\lambda\nu}(\lambda + y)^2 + C \quad (n < x < n+0{,}5); \\ z &= -\frac{1}{2\nu}(1 + y)^2 + C \quad (n+0{,}5 < x < n + 1). \end{aligned} \tag{8}$$

Аналогично для нижней полосы

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2\lambda\nu}(-\lambda + y)^2 + C \quad (n < x < n+0{,}5); \\ z &= \frac{1}{2\nu}(-1 + y)^2 + C \quad (n + 0{,}5 < x < n+1). \end{aligned} \tag{9}$$

В приведенных равенствах C — произвольная постоянная, определяемая по координатам какой-либо точки, через которую проходит данная фазовая траектория.

Таким образом, в зависимости от значения x через каждую точку плоскости y, z могут проходить только две фазовые траектории. В этом и состоит существенное упрощение задачи при скачкообразном законе изменения тока возбуждения, принимающем только два дискретных значения. При непрерывно изменяющейся форме тока через каждую точку проходило бы бесчисленное множество траекторий.

Прежде всего отметим, что в схеме существует устойчивое положение равновесия $y = z = 0$, соответствующее режиму, когда оба сердечника все время находятся в насыщении. Поэтому периодические режимы могут возникать только при определенных начальных условиях.

Покажем теперь, что в исследуемой схеме вопреки утверждениям, содержащимся в [1], существует режим субгармонических колебаний порядка 1/2, в котором состояния 2^{I} и 2^{II} чередуются. С другой стороны, периодический режим, в котором происходит смена состояний 2^{I}—3—2^{II}—3, рассмотренный в [1], невозможен.

Пусть искомому периодическому режиму отвечают начальные условия

$$x = 0,\ y = y_в,\ z = z_в.$$

Не ограничивая общности, можно полагать $z_в > 0$, так как субгармоническим колебаниям порядка 1/2 соответствуют два периодических режима, отличающиеся только знаками переменных y, z в каждый момент времени.

Итак, начнем рассмотрение периодического процесса с состояния 2^I, при котором движение происходит по фазовой траектории

$$z = z_в + \frac{1}{2\lambda\nu}[(\lambda + y_в)^2 - (\lambda + y)^2], \tag{10}$$

пока $0 < x < 0{,}5$ и $z > 0$.

Изменение уравнения траектории произойдет либо в момент x_0, когда z обращается в нуль (если $x_0 < 0{,}5$), либо при $x = 0{,}5$. В дальнейшем исследуются оба возможных случая последовательно. Пусть $x_0 < 0{,}5$. При $x = x_0$

$$z_в + \frac{1}{2\lambda\nu}[(\lambda + y_в)^2 - (\lambda + y_0)^2] = 0 \tag{11}$$

и, начиная с момента x_0, движение системы происходит в нижней полуплоскости по фазовой траектории

$$z = \frac{1}{2\lambda\nu}[(-\lambda + y)^2 - (-\lambda + y_0)^2], \tag{12}$$

где y_0 — координата точки пересечения фазовой траектории с осью абсцисс. При этом из (5) следует, что

$$y_0 - y_в = \lambda\nu x_0. \tag{13}$$

В момент $x = 0{,}5$ изображающая точка переходит с фазовой траектории (12) на траекторию

$$z = z_i + \frac{1}{2\nu}[(-1 + y)^2 - (-1 + y_i)^2], \tag{14}$$

где y_i, z_i — точка пересечения траекторий (12) и (14). Поэтому величины y_i, z_i связаны соотношением

$$z_i = \frac{1}{2\lambda\nu}[(-\lambda + y_i)^2 - (-\lambda + y_0)^2], \tag{15}$$

в котором

$$y_0 - y_i = \lambda\nu(0{,}5 - x_0). \tag{16}$$

Движение по траектории (14) продолжается до значения $x = 1{,}0$. При этом координаты конечной точки y_f и z_f удовлетворяют равенствам

$$z_f = z_i + \frac{1}{2\nu}[(-1 + y_f)^2 - (-1 + y_i)^2]; \tag{17}$$

$$y_i - y_f = \nu/2. \tag{18}$$

Для того, чтобы рассматриваемое движение соответствовало периодическому процессу с периодом $2T$, должны соблюдаться два равенства:

$$z_f = -z_в;\ \ y_f = -y_в,$$

на основании которых и определяются начальные условия, отвечающие периодическому процессу. Из (13), (16) и (18) имеем

$$y_f = -\frac{1}{2}(1+\lambda)\nu + 2y_0 - y_в. \tag{19}$$

Сопоставляя это равенство с условием периодичности, находим

$$y_0 = (1+\lambda)\frac{\nu}{4}.$$

Определив y_0, из соотношений (11), (15), (17)—(19) с учетом периодичности находим значения $y_в$ и $z_в$:

$$y_в = \frac{\nu}{4} + \lambda\frac{1+\lambda}{1-\lambda}; \tag{20}$$

$$z_в = \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\nu}{2} + \lambda\left(2 + \frac{\nu}{4} + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\right]\left(\frac{\nu}{4} - \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right). \tag{21}$$

Из (21) следует, что такой режим реализуется только при

$$\nu > 4\frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \tag{22}$$

так как в противном случае $z_в < 0$, что противоречит принятому порядку чередования состояний. Еще одно условие реализуемости режима сводится к требованию

$$|z_{max}| < z_s. \tag{23}$$

Из вида фазовых траекторий ясно, что наибольшее значение z достигается при $y = 1$; при этом

$$|z_{max}| = \frac{1}{2\nu} + \frac{3}{32}\nu + \frac{\lambda\nu}{32} - \frac{\lambda}{2\nu}\frac{(1+\lambda)^2}{1-\lambda}.$$

Неравенство (23) ограничивает сверху значение суммы ампервитков возбуждения и подмагничивания, при котором еще возможно существование субгармонических колебаний.

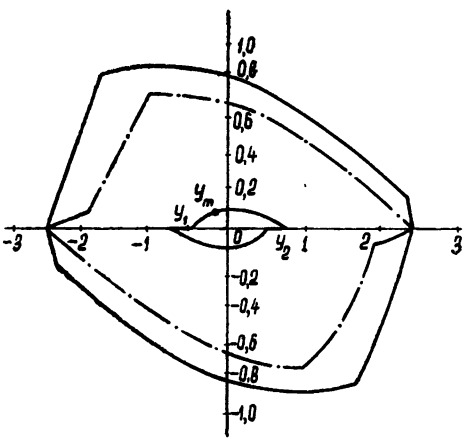


Рис. 3. ———— фазовая траектория устойчивых субгармонических колебаний, — · — · — фазовая траектория неустойчивых субгармонических колебаний.

Аналогичным путем можно построить периодический режим в случае, когда $x_0 > 0{,}5$. Интересно, что в этом случае фазовая траектория периодического режима пересекает ось абсцисс в тех же точках $\pm y_0$, что и для найденного выше периодического режима. Замкнутые фазовые траектории, соответствующие указанным периодическим режимам, приведены на рис. 3.

Обратимся теперь к исследованию устойчивости периодических режимов. Для этого используем метод точечных отображений [3]. В случае $x_0 < 0{,}5$ соотношения (11), (15), (17), (19) определяют точечное отображение

$$\bar{y}_f = F_1(y_в, z_в), \quad \bar{z}_f = F_2(y_в, z_в), \tag{24}$$

где $\bar{y}_f = -y_f$, $\bar{z}_f = -z_f$. Неподвижная точка отображения, координаты которой даны равенствами (20), (21), определяет периодический режим исследуемой системы. Для суждения об устойчивости неподвижной точки преобразования произведем линеаризацию соотношений (24). В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta\bar{y}_f &= \alpha\Delta y_в + \beta\Delta z_в; \\ \Delta\bar{z}_f &= \gamma\Delta y_в + \delta\Delta z_в. \end{aligned} \tag{25}$$

Линеаризация равенств (11)—(19) в окрестности неподвижной точки дает следующие значения коэффициентов преобразования (25):

$$\alpha = -1 + \frac{\lambda\nu/2 - 2\lambda(1+\lambda)/(1-\lambda)}{\lambda + (1+\lambda)\nu/4};$$

$$\beta = -\frac{2\lambda\nu}{\lambda + (1+\lambda)\nu/4};$$

$$\gamma = 1 - \lambda\frac{3\nu/2 + 4/(1-\lambda)}{\lambda + (1+\lambda)\nu/4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\nu}\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right);$$

$$\delta = -1 + \lambda\frac{3\nu/2 + 4/(1-\lambda)}{\lambda + (1+\lambda)\nu/4}.$$

Для устойчивости периодического движения необходимо и достаточно, чтобы корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha - r & \beta \\ \gamma & \delta - r \end{vmatrix} = 0$$

по модулю были меньше единицы. Если записать это квадратное уравнение в виде

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{26}$$

то для приведенных значений α, β, γ, δ

$$p = \frac{1}{2}\nu\frac{1-3\lambda}{\lambda + (1+\lambda)\nu/4}; \tag{27}$$

$$q = 1 - \frac{2\lambda}{\lambda + (1+\lambda)\nu/4}. \tag{28}$$

Легко проверить, что при ν, удовлетворяющем неравенству (22),

$$p^2/4 < q.$$

Следовательно, корни характеристического уравнения — комплексно сопряженные, причем их модуль равен $\sqrt{q}$. Так как $q < 1$, то неподвижная точка преобразования, а вместе с ней периодический режим асимптотически устойчивы.

Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что периодический режим, для которого $x_0 > 0{,}5$, является неустойчивым.

Отметим, что корни характеристического уравнения позволяют судить о времени установления периодического режима, по крайней мере, для достаточно малых отклонений начальных условий от значений, соответствующих этому режиму. Действительно, значения y и z в конце n-го периода могут быть представлены в следующем виде:

$$y(n) = [C_{11} r_1^n + C_{12} r_2^n] (-1)^n;$$
$$z(n) = [C_{21} r_1^n + C_{22} r_2^n] (-1)^n,$$

причем постоянные C определяются по заданным начальным условиям $\Delta y_в$, $\Delta z_в$. Эти равенства удобно представить в виде

$$y(n) = R^n [C_{11} e^{jn\varphi} + C_{12} e^{-jn\varphi}] (-1)^n;$$
$$z(n) = R^n [C_{21} e^{jn\varphi} + C_{22} e^{-jn\varphi}] (-1)^n,$$

где R и $\pm\varphi$ — модуль и аргументы комплексно сопряженных корней уравнения (26) r_1 и r_2. Отсюда следует, что R служит декрементом затухания, определяющим скорость приближения системы к периодическому режиму.

На основании равенства (28) нетрудно установить, что длительность переходного процесса в параметроне велика по сравнению с периодом возбуждающего напряжения. Наиболее быстрое затухание соответствует минимальному значению ν, определяемому соотношением (22), при котором

$$q = 1 - \frac{2\lambda(1-\lambda)}{1+3\lambda}.$$

Минимальное значение $q = 7/9$ достигается при $\lambda = 1/3$. При этом $R_{\min} = 0{,}88$, т. е. даже при наилучших условиях отклонения параметров y и z от значений, соответствующих периодическому режиму, убывают со скоростью не больше 12% за период. Для большей наглядности укажем, что такая скорость установления колебаний для обычного линейного колебательного контура наблюдается при добротности порядка 25. Следует, конечно, иметь в виду, что для начальной стадии процесса установления полученные оценки неверны.

В заключение покажем, что в течение периодического режима не может происходить смена состояний в последовательности $2^{I} - 3 - 2^{II} - 3$.

Начнем рассмотрение с состояния 2^{I}. Фазовая траектория для этого режима (рис. 3) должна начинаться на оси абсцисс в точке с координатой — y_1, удовлетворяющей неравенству

$$\lambda < y_1 < 1.$$

Уравнение этой траектории

$$z = \frac{1}{2\lambda\nu}[(\lambda - y_1)^2 - (\lambda + y)^2]. \qquad (28а)$$

При

$$y_m = -y_1 + \frac{1}{2}\lambda\nu \qquad (29)$$

в соответствии с (6) происходит изменение уравнения фазовой траектории. Уравнение этой фазовой траектории (в случае, если она достигает оси абсцисс при $y = y_2$) имеет вид

$$z = \frac{1}{2\nu}[(1 + y_2)^2 - (1 + y)^2]. \qquad (30)$$

Для реализуемости режима необходимо выполнение неравенства

$$y_1 < y_2 < 1. \qquad (31)$$

Тогда вслед за состоянием 2^I наступает состояние 3, в течение которого $z = 0$, а y изменяется по закону

$$y = Ke^{-\nu x}, \tag{32}$$

где K — постоянная интегрирования. Значение параметра x в момент начала состояния 3 равно

$$x_н = 0{,}5 + \frac{y_2 - y_m}{\nu}$$

(см. (5)). Отсюда следует, что

$$K = y_2 e^{0{,}5\nu + y_2 - y_m}.$$

Для существования периодического режима необходимо, чтобы при $x = 1$ $y = y_1$. Тогда из (32) с учетом (29) следует, что

$$y_1 = y_2 e^{-0{,}5\nu(1+\lambda) + y_1 + y_2}. \tag{33}$$

Еще одно уравнение для определения y_1 и y_2 получим, приравняв значения z из (28) и (30) при $y = y_m$ и выразив y_m через y_1 из (29). В результате имеем

$$y_2^2 + 2y_2 = y_1^2 + [\nu(1-\lambda) - 2]\, y_1 - \frac{1}{4}\lambda(1-\lambda)\nu^2. \tag{34}$$

Существование режима возможно, если имеется решение системы (33), (34), удовлетворяющее неравенству (31). Из (34) следует, что для этого необходимо соблюдение неравенства

$$(1-\lambda)\nu\left(1 - \frac{\lambda\nu}{4}\right) > 4. \tag{35}$$

Однако можно показать, что и при значениях параметров λ и ν, удовлетворяющих этому неравенству, такого решения не существует.

Для доказательства введем новые неизвестные

$$\tilde{y} = y_1 + y_2, \quad \bar{y} = y_1/\tilde{y}.$$

Тогда (33) и (34) примут вид

$$\bar{y} = \frac{1}{e^{(\nu/2)(1+\lambda) - \tilde{y}} + 1}; \tag{36}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{[(\nu/2)(1-\lambda) - 2]\,\tilde{y} - (1/4)\lambda(1-\lambda)\nu^2}{\tilde{y}^2 + (\nu/2)(1-\lambda)\,\tilde{y}}\right\}. \tag{37}$$

При этом должны выполняться неравенства

$$\tilde{y} < 2; \quad \bar{y} < 0{,}5.$$

Функция $\bar{y} = f_1(\tilde{y})$, определяемая соотношением (36), монотонно возрастает и достигает значения 0,5 при $\tilde{y}_k = (\nu/2)(1+\lambda)$, а функция $\bar{y} = f_2(\tilde{y})$, определяемая (37), достигает значения 0,5 при

$$\tilde{y}_n = 4^{-1}\lambda(1-\lambda)\nu^2\,[(\nu/2)(1-\lambda) - 2]^{-1},$$

причем на участке $0 \div \tilde{y}_n$ величина f_2 монотонно убывает.

Из неравенства (35) легко получить, что $\tilde{y}_n > \tilde{y}_k$. Отсюда ясно, что в точке пересечения кривых (36) и (37), определяющей решение системы, $\bar{y} > 0{,}5$ и, следовательно, режим $2^{I} - 3 - 2^{II} - 3$ невозможен.

Рассмотренные режимы не исчерпывают всех возможных периодических процессов. В частности, в исследованной схеме принципиально возможно существование субгармонических колебаний сколь угодно высокого порядка. Для этого требуется выполнение условий (22) и достаточно большое значение параметра z_s. Однако подробное рассмотрение субгармонических режимов более высокого порядка выходит за рамки настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Lavi, L. A. Finzi, Proc. IRE, **49**, 779 (1961).
2. Л. А. Синицкий, М. А. Раков, Тр международного симпозиума по нелинейным колебаниям, **3**, изд АН УССР, Киев, 1963.
3. Ю. И. Неймарк, Тр. международного симпозиума по нелинейным колебаниям, **2**, изд. АН УССР, Киев, 1963

Физико-механический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
14 апреля 1964 г.

ON OPERATION OF PARAMETRON EXCITED BY AN EXTERNAL CURRENT

L. A. Sinitskii

The processes are considered in the inductive parametron with the ideal curve of magnetizing the cores and rectangular pulse current excitation. A stable regime of subharmonic oscillations is shown to exist in which cores are consequently saturated. The regime of subharmonic oscillations with simultaneous saturation of both the cores is impossible. These results testify that the conclusions made in the paper [1] are not true.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 531.35

К ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ ОСЦИЛЛЯТОР—РОТАТОР

В. М. Большаков, Е. С. Зельдин, Р. М. Минц, Н. А. Фуфаев

Методом малого параметра изучаются движения, возникающие при вращении неуравновешенного ротора электромотора, укрепленного на упругой балке. Рассматривается случай, когда угловая скорость вращения якоря близка к циклической частоте вертикальных свободных колебаний мотора вместе с балкой. Исследована топологическая структура разбиения плоскости Ван-дер-Поля и дано разбиение пространства физических параметров на области различного качественного поведения системы.

В 1901 году Зоммерфельд [1] описал явление, наблюдающееся при вращении неуравновешенного ротора электромотора, укрепленного на упругой балке. Эффект Зоммерфельда представляет интерес как пример колебаний, имеющих место в системе, состоящей из двух связанных парциальных систем: гармонического осциллятора и ротатора. Для такого рода нелинейных систем характерно физическое явление, при котором гармонический осциллятор как бы навязывает свою частоту автовращательной системе и, таким образом, стибилизирует число оборотов в определенных пределах изменения параметров.

Исследованием нелинейных колебаний в системах, содержащих взаимодействующие ротатор и осциллятор, занимались многие авторы [2—5]; однако все они ограничивались отысканием периодических движений и выводом условий их устойчивости. Вопрос о поведении фазовых траекторий в большом оставался открытым. Вместе с тем не было проведено разбиение пространства физических параметров на области различного качественного поведения системы.

В 1941 г. А. А. Андронов поставил эту задачу перед Е. С. Зельдиным, который получил укороченные уравнения и исследовал на плоскости Ван-дер-Поля устойчивость состояний равновесия. В связи с тем, что Е. С. Зельдин в 1941 году погиб на фронте, решение задачи осталось незаконченным.

В настоящей работе решение этой задачи в постановке А. А. Андронова проводится методами качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка [6]. Исследована топологическая структура разбиения плоскости Ван-дер-Поля на траектории и дано разбиение пространства физических параметров на области различного качественного поведения системы. В работе приведены также результаты экспериментального изучения эффекта Зоммерфельда.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим электромотор постоянного тока с независимым возбуждением, установленный на упругой балке (рис. 1). Пусть время переходных процессов в электрических цепях этой электромеханической системы значительно меньше времени установления механических движений. В этом случае уравнения электрической части системы можно рассмотреть отдельно. Введем следующие обозначения: u — подведенное напряжение, i_1, i — токи в обмотке возбуждения и в цепи якоря, r_1, r — сопротивления, $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности между угловой

скоростью ω вращения якоря и эдс, индуктируемой в обмотке якоря, Ψ_1, Ψ — потокосцепления обмоток возбуждения и якоря. В этих обозначениях уравнения Кирхгофа имеют вид

$$u = ir + \varkappa\omega + \frac{d\Psi}{dt}; \quad u = i_1 r_1 + \frac{d\Psi_1}{dt}.$$

При сделанных предположениях достаточно рассмотреть эти уравнения в стационарном случае; тогда

$$u = ir + \varkappa\omega, \quad u = i_1 r_1, \tag{1.1}$$

причем $\varkappa = \varkappa(i_1) = \text{const}$. Из (1.1) следует, что

$$ui - i^2 r = \varkappa i \omega,$$

т. е. механическая мощность $W_{\text{мех}}$ на валу двигателя определяется выражением $W_{\text{мех}} = \varkappa i \omega$. С другой стороны, $W_{\text{мех}} = M\omega$; поэтому вращающий момент $M = \varkappa i = \frac{\varkappa}{r}(u - \varkappa\omega)$.

Составим теперь уравнения механического движения рассматриваемой системы. Приняв за обобщенные координаты вертикальное смещение z балки вместе с электромотором и угол φ поворота якоря электромотора, будем моделировать неуравновешенность якоря дополнительной массой m, которая укреплена на расстоянии a от оси вращения. Пусть m_0 — приведенная масса системы при ее вертикальных смещениях, I — момент инерции якоря мотора и массы m относительно оси вращения, k — приведенный коэффициент жесткости балки.

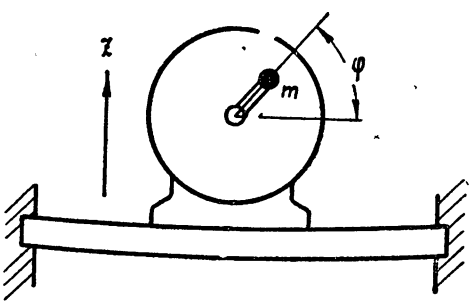


Рис. 1.

Составим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} I \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m_0 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + ma \frac{dz}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \cos\varphi - \frac{1}{2} kz^2 \tag{1.2}$$

и выражения обобщенных сил

$$Q_\varphi = -\beta \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\varkappa}{r}\left(u - \varkappa \frac{d\varphi}{dt}\right),$$

$$Q_z = -\alpha \frac{dz}{dt},$$

где $-\beta\, d\varphi/dt$ — момент сил трения на валу мотора, $-\alpha\, dz/dt$ — результирующая сил трения, действующих на приведенную массу m_0. Отсюда получаем уравнения движения в безразмерном виде:

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau_0^2} + \zeta = \frac{m}{m_0}\left[\left(\frac{d\varphi}{d\tau_0}\right)^2 \sin\varphi - \frac{d^2\varphi}{d\tau_0^2}\cos\varphi\right] - \frac{a\omega_0}{k}\frac{d\zeta}{d\tau_0};$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau_0^2} + p\frac{d\varphi}{d\tau_0} = q - \frac{ma^2}{I}\frac{d^2\zeta}{d\tau_0^2}\cos\varphi, \tag{1.3}$$

где

$$p = \frac{\varkappa^2}{Ir\omega_0} + \frac{\beta}{I\omega_0}; \quad q = \frac{\varkappa\varphi}{Ir\omega_0^2}; \quad \zeta = \frac{z}{a}; \quad \tau_0 = \omega_0 t; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m_0}.$$

При значениях $m = 0$, $\alpha = 0$ эта система сводится к соотношениям

$$\frac{d^2\zeta}{d\tau_0^2} + \zeta = 0; \quad \frac{d^2\varphi}{d\tau_0^2} + p\frac{d\varphi}{d\tau_0} = q, \tag{1.4}$$

представляющим уравнение гармонического осциллятора с циклической частотой, равной единице, и уравнение автовращательной системы, стационарная угловая скорость которой равна q/p. Если $m \neq 0$, то уравнения (1.3) описывают движение связанной системы, состоящей из двух парциальных систем: гармонического осциллятора и ротатора.

Исследуем движение системы при следующих упрощающих предположениях:

1) затухание гармонического осциллятора очень мало, т. е. $\alpha/\sqrt{\varkappa\omega_0} \ll 1$;

2) масса m эксцентрика мала по сравнению с приведенной массой m_0 всей системы;

3) момент инерции эксцентрика много меньше приведенного момента I, т. е. $ma^2/I \ll 1$;

4) стационарная угловая скорость ротатора близка к циклической частоте осциллятора, т. е. $|p/q - 1| \ll 1$.

Введем малый параметр μ так, чтобы при $\mu = 0$ система (1.3) превратилась в систему уравнений (1.4) с отношением $p/q = 1$. Для этого положим

$$\mu = \frac{m}{m_0}; \quad \alpha_0 = \frac{\alpha}{m\omega_0}; \quad \gamma_0 = \frac{a^2 m_0}{I}; \quad \xi_0 = \frac{m_0}{Im\omega_0^2}\left[\frac{\varkappa}{r}(u - \varkappa\omega_0) - \beta\omega_0\right], \tag{1.5}$$

где предполагается, что $\lim\limits_{m\to 0}\frac{\alpha}{m} = A_1 \neq \infty$, $\lim\limits_{m\to 0}\frac{(q-p)}{m} = A_2 \neq \infty$, после чего система уравнений (1.3) записывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + \zeta &= \mu(-\alpha_0\dot{\zeta} + \dot{\varphi}^2\sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi); \\ \dot{\varphi} + q\dot{\varphi} &= q + \mu(\xi_0\dot{\varphi} - \gamma_0\ddot{\zeta}\cos\varphi), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ_0.

2. УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Считая параметр μ достаточно малой величиной, исследуем систему уравнений (1.6) при помощи метода Ван-дер-Поля. Будем искать решение уравнений (1.6) в виде

$$\zeta = A\cos\varphi + B\sin\varphi; \quad \varphi = 1 + \Omega, \tag{2.1}$$

где A, B, Ω — медленно изменяющиеся функции переменной τ_0 (Ω — малая величина порядка μ). Подставим выражения (2.1) в систему уравнений (1.6). Сделанные предположения совместно с допущением Ван-дер-Поля о возможности отбрасывания членов, содержащих $\cos 2\varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$ и т. д. позволяют получить так называемые укороченные уравнения Ван-дер-Поля относительно переменных $\dot{A}$, $\dot{B}$, Ω:

$$\dot{A} = -B\Omega - \frac{\mu}{2}(\alpha_0 A + 1);$$

$$\dot{B} = A\Omega - \frac{\mu}{2}\alpha B; \qquad (2.2)$$

$$\Omega = \frac{\mu}{q}\left(\xi_0 + \frac{1}{2}\gamma_0 A\right).$$

Эти уравнения сводятся к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{d\tau} = -[x + (\xi + x)y + \delta] \equiv P(x, y);$$

$$\frac{dy}{d\tau} = -y(\xi + x)x \equiv Q(x, y). \qquad (2.3)$$

Здесь введены обозначения

$$x = \frac{\gamma_0 A}{q\alpha_0}; \quad y = \frac{\gamma_0 B}{q\alpha_0}; \quad \tau = \tau_0 \frac{\alpha_0}{2}; \quad \xi = \frac{2\xi_0}{q\alpha_0}; \quad \delta = \frac{\gamma_0}{q\alpha_0^2}. \qquad (2.4)$$

Из (2.3) следует, что рассматриваемая система характеризуется двумя существенными физическими параметрами ξ, δ, которые связаны с исходными величинами при помощи соотношений

$$\xi = \frac{2m_0 a}{u \varkappa \alpha}\left[\frac{\varkappa}{r\omega_0}(u - \varkappa\omega_0) - \beta\right];$$

$$\delta = \frac{m^2}{\alpha^2}\frac{m_0 a^3 \omega_0^4}{\varkappa u}. \qquad (2.5)$$

По своему физическому смыслу параметры ξ и δ положительны. Параметр ξ характеризует расстройку угловой скорости ротатора по отношению к циклической частоте осциллятора, а δ характеризует связь парциальных систем (ротатора и осциллятора). Таким образом, изучение динамики системы сводится к исследованию топологической структуры разбиения плоскости (x, y) Ван-дер-Поля на траектории при различных значениях параметров в первом квадранте плоскости (ξ, δ).

3. КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УКОРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

В настоящем разделе будет установлено разбиение фазовой плоскости на траектории для системы (2.3).

Качественная картина поведения траекторий, как известно [7], определяется 1) числом и характером состояний равновесия, 2) характером и расположением предельных циклов, 3) поведением сепаратрис. Качественную картину системы (2.3) можно рассматривать не на всей фазовой плоскости, а лишь внутри некоторого цикла без контакта. В самом деле, рассмотрим семейство окружностей $x^2 + y^2 = c$. Дифференцируя это выражение и подставляя правые части системы (2.3), получим

$$\frac{dc}{d\tau} = 2x\frac{dx}{d\tau} + 2y\frac{dy}{d\tau} = -2(x^2 + y^2 + \delta x) < 0$$

при $x^2 + y^2 > \delta^2$. Таким образом, траектории системы (2.3), проходящие через точки окружности $x^2 + y^2 = R^2$ достаточно большого радиуса, с ростом τ входят внутрь этой окружности.

Число и характер состояний равновесия. Координаты состояний равновесия удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} -P(x, y) &\equiv x + (\xi + x)\, y + \delta = 0; \\ Q(x, y) &\equiv -y + (\xi + x)\, x = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

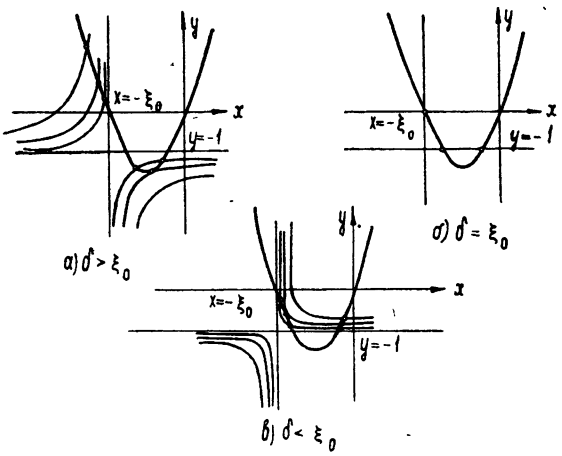


Рис. 2.

На рис. 2 изображена изоклина $Q(x, y) = 0$ и семейство изоклин $P(x, y) = 0$ при фиксированном $\xi = \xi_0 > \sqrt{3}$*. Для абсцисс состояний равновесия получаем следующее уравнение:

$$x^3 + 2\xi x^2 + (1 + \xi^2)x + \delta = 0. \tag{3.2}$$

Для ординат состояний равновесия имеем соответственно $y = (\xi + x)\, x$

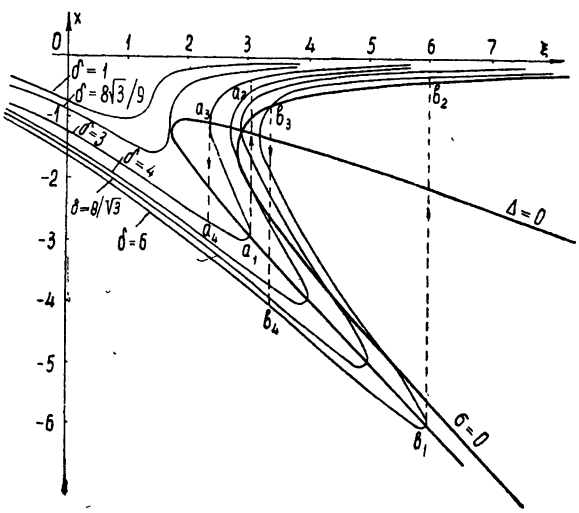


Рис. 3.

* Ниже будет показано, что при $\xi \leqslant \sqrt{3}$ система (2.3) имеет при всех δ одно состояние равновесия.

Найдем выражения σ и Δ, определяющие характер состояния равновесия:

$$\sigma \equiv P'_x + Q'_y = -(x^2 + \xi x + 2);$$

$$\Delta \equiv P'_x Q'_y - P'_y Q'_x = 3x^2 + 4\xi x + \xi^2 + 1.$$

Можно рассмотреть также выражение $\sigma^2 - 4\Delta$ для различения узлов и фокусов. Кривые $\sigma = 0$ и $\Delta = 0$ при $\xi > 0$ имеют одну общую точку: $\xi = 5/\sqrt{3}$, $x = -2/\sqrt{3}$. На этой же плоскости ξ, x построим семейство кривых (3.2) для различных значений параметра δ (см. рис. 3). Этот рисунок иллюстрирует, как по заданной паре значений ξ и δ установить число и характер состояний равновесия системы. Точки пересечения кривых (3.2) и $\Delta = 0$ соответствуют кратным корням уравнения (3.2). В этих точках кривые (3.2) имеют вертикальную касательную. Ветви кривых (3.2), лежащие в области $\Delta < 0$, соответствуют седлам системы (2.3), а ветви кривых (3.2), лежащие в области $\Delta > 0$ — узлам или фокусам системы (2.3).

Решая совместно уравнение (3.2) и уравнение $\sigma = 0$, найдем точки пересечения этих кривых, соответствующие состояниям равновесия, в которых происходит смена устойчивости, если они лежат в области $\Delta > 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} - 4}; \quad \xi_{1,2} = \frac{\delta}{2} \mp \frac{\sqrt{\delta^2 - 16}}{2} - \frac{2}{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 16}}. \qquad (3.3)$$

Таким образом, при $\delta > 4$ кривые имеют две точки пересечения, при $\delta = 4$ — одну точку пересечения (касание) и при $\delta < 4$ кривые не пересекаются. При $\delta > 4$ либо обе точки пересечения лежат в области $\Delta < 0$, либо одна точка пересечения лежит в области $\Delta > 0$, а другая в области $\Delta < 0$. Кривая (3.2) при $\delta = 8/\sqrt{3}$ проходит через точку пересечения кривых $\sigma = 0$ и $\Delta = 0$. При $\delta > 8/\sqrt{3}$ одна из точек пересечения кривых (3.2) и $\sigma = 0$ является фокусом или узлом. Нетрудно убедиться, что имеет место неравенство $\xi_1 < \xi_2$ (см. (3.3)). Отсюда следует, что если система имеет единственное состояние равновесия, то это состояние равновесия является устойчивым фокусом; если же имеется неустойчивый фокус или узел, то система имеет три состояния равновесия.

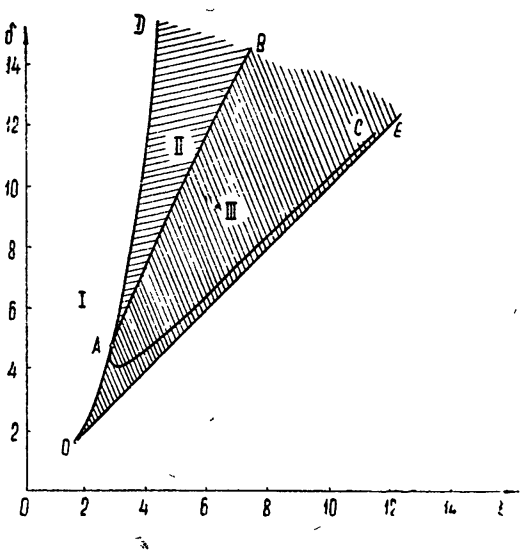


Рис. 4.

Граница областей, соответствующих наличию одного или трех состояний равновесия, есть кривая, соответствующая наличию кратного корня у уравнения (3.2). Исключая x из системы уравнений $\Delta = 0$ и (3.2), получим соотношение

$$S \equiv \frac{27}{4}\delta^2 - \xi(\xi^2 + 9)\delta + \frac{1}{27}\xi^2(\xi^2 + 9)^2 - \frac{1}{27}(\xi^2 - 3)^3 = 0, \qquad (3.4)$$

которое изображается кривой DOE на рис. 4.

Найдем на плоскости ξ, δ кривую, на которой происходит смена устойчивости состояний равновесия. Исключая x из системы уравнений $\sigma = 0$ и (3.2), получим

$$\delta^2 + 2\xi^2 - 3\xi\delta + 2 = 0. \tag{3.5}$$

Эта кривая является гиперболой с асимптотами $\delta = \xi$ и $\delta = 2\xi$. Нетрудно проверить, что кривые (3.4) и (3.5) в точке $A(5/\sqrt{3},\ 8/\sqrt{3})$ касаются. На ветви AB гиперболы (3.5) (см. рис. 4) происходит смена устойчивости фокуса, а на ветви AC величина σ обращается в нуль в седле.

Мы получили разбиение плоскости параметров на следующие области, соответствующие определенному числу и характеру состояний равновесия: 1) одно состояние равновесия — устойчивый фокус или узел; 2) три состояния равновесия — устойчивый фокус (или узел), седло, неустойчивый фокус (или узел); 3) три состояния равновесия — два устойчивых фокуса (или узла) и седло*.

Рассмотрим бифуркации состояний равновесия, происходящие на границах этих областей. Границы эти следующие: 1) ветви кривой (3.4), за исключением двух точек: $O(\sqrt{3},\ 8\sqrt{3}/9)$ — вершины кривой (3.4) и $A(5/\sqrt{3},\ 8/\sqrt{3})$ — точки касания кривых (3.4) и (3.5); 2) точка $O(\sqrt{3},\ 8\sqrt{3}/9)$; 3) ветвь AB кривой (3.5), за исключением точки $A(5/\sqrt{3},\ 8/\sqrt{3})$; 4) точка $A(5/\sqrt{3},\ 8/\sqrt{3})$.

1) Для значений параметров, соответствующих ветвям кривой (3.4), система имеет два состояния равновесия, причем одно из них будет типа седло—узел [8].

2) Точка $O(\sqrt{3},\ 8\sqrt{3}/9)$ соответствует тройному корню уравнения (3.2). Согласно [8] это состояние равновесия является устойчивым узлом.

3) С помощью замены переменных $x_1 = x + 2\xi - \delta$; $y_1 = y + 2$ система (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + (\xi - \delta)\, y_1 - x_1 y_1; \\ \dot{y}_1 &= (2\delta - 3\xi)\, x_1 - y_1 + x_1^2 + \delta^2 + 2\xi^2 - 3\xi\delta + 2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для точек плоскости ξ, δ, лежащих на гиперболе (3.5), свободный член в правой части системы (3.6) равен нулю. Отсюда легко найти координаты всех состояний равновесия. Корни характеристического уравнения для состояния равновесия $O(0, 0)$ определяются из уравнения $\lambda^2 - 1 - (\xi - \delta)(2\delta - 3\xi) = 0$. Отсюда следует, что если точка ξ, δ лежит на ветви AB, то корни этого уравнения чисто мнимые, а если точка ξ, δ лежит на ветви AC, то—действительные и разных знаков, т. е. система, соответствующая точке на ветви AB, имеет сложный фокус или центр, а на ветви AC — седло, для которого $\sigma = 0$.

4) Система, соответствующая точке A, имеет сложное состояние равновесия; оба корня характеристического уравнения для него равны нулю. Следуя [8], можно установить поведение траекторий в окрестности этого состояния равновесия (см. рис. 7, Γ_6).

Предельные циклы и сепаратрисы. Покажем, что существуют области на плоскости параметров, свободные от предельных циклов. Для этого воспользуемся критерием Дюлака, согласно которому предельных циклов нет, если выражение $D(x, y) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(PF) + \frac{\partial}{\partial y}(QF)$ не обра-

* Можно найти также граничную кривую между узлами и фокусами, исключая x из уравнения $\sigma^2 - 4\Delta = 0$ и уравнения (3.2); однако в силу топологической эквивалентности узлов и фокусов эту кривую мы приводить не будем.

щается в нуль. ($F(x, y)$ — некоторая однозначная дифференцируемая функция.)

В качестве функции Дюлака возьмем $F(x, y)=1/(x+\xi)$. Тогда выражение $D(x, y) = \dfrac{-x+\delta-2\xi}{(x+\xi)^2}$ меняет знак на прямой $x=\delta-2\xi$*. Нетрудно видеть, что прямая $x=-\xi$ при $\xi\neq\delta$ является прямой без контакта, а при $\xi=\delta$ — интегральной прямой. При $\xi=\delta$ прямая $x=\delta-2\xi$ совпадает с прямой $x=-\xi$ и, значит, при $\xi=\delta$ предельных циклов система не имеет.

Покажем, что предельных циклов нет в области $\xi>\delta$. Принимая во внимание тот факт, что все состояния равновесия при $\xi>\delta$ лежат по одну сторону от прямой без контакта $x=-\xi$ (см. рис. 2в), а прямая $x=\delta-2\xi$ — по другую, мы можем заключить, что при $\xi>\delta$ предельных циклов нет.

Покажем, что в области $S>0$ (см. (3.4)), где система имеет единственное состояние равновесия, предельных циклов также нет. Нетрудно видеть (см. рис. 2), что в этом случае состояние равновесия и прямая $x=\delta-2\xi$ лежат по разные стороны от прямой без контакта $x=-\xi$. Значит, при $S>0$ предельных циклов быть не может. Легко видеть, что при $S=0$ предельных циклов также нет, так как между фокусом и прямой $x=\delta-2\xi$ в этом случае проходит прямая без контакта $x=-\xi$, а вокруг седло—узла предельный цикл существовать не может.

Покажем, что в области $S<0$ при значениях параметров ниже ветви AC и на самой ветви AC ($S<0$, $\delta^2+2\xi^2-3\xi\delta+2\geqslant 0$, $5\delta\leqslant 8\xi$) система предельных циклов не имеет.

В области $S<0$ при $\delta>\xi$ изоклина вертикальных наклонов $y=-(x+\delta)/(x+\xi)$ и изоклина горизонтальных наклонов $y=x(x+\xi)$ разбивают часть плоскости $x>-\xi$ на области, в которых выражения $\dot{x}$ и $\dot{y}$ сохраняют знак (см. рис. 5).

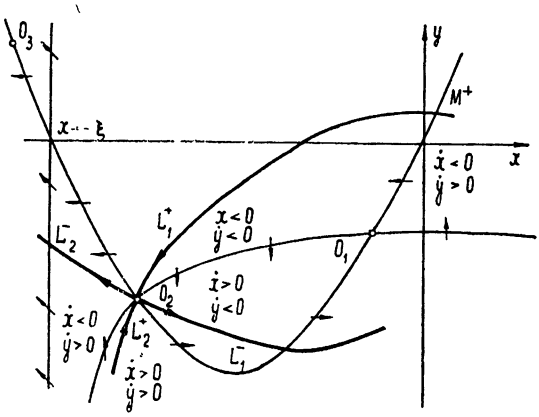


Рис 5.

Рассмотрим поведение сепаратрисы L_1^+, входящей в седло в области, где $\dot{x}<0, \dot{y}<0$. Очевидно, L_1^+ с убыванием τ либо пересечет параболу $y=x(x+\xi)$ и выйдет в область, где $\dot{x}<0$, $\dot{y}>0$, либо, не пересе-

* Отметим, что в некоторых случаях выражение $D(x, y)$ хотя и обращается в нуль на некоторой кривой, однако можно показать, используя индивидуальные особенности системы, что при определенных значениях параметров предельный цикл не может пересекать эту кривую. Тогда в этих областях пространства параметров циклов быть не может (см. [9]).

кая параболы, асимптотически приблизится к прямой $x=x_0 \geqslant -\xi$. Однако выражение $\frac{dy}{dx} = \frac{-y+(x+\xi)x}{-[x+(x+\xi)y+\delta]}$ при $x \to x_0$, $y \to \infty$ остается ограниченным; следовательно, сепаратриса L_1^+ пересекает изоклину $\dot{y} = x(x+\xi)$. Сепаратриса L_1^-, выходящая из седла в область, где $\dot{x} > 0$, $\dot{y} < 0$, с ростом τ пересечет изоклину $\dot{y} = x(x+\xi)$, выйдя в область, где $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$ (см. рис. 5).

Отметим, что если прямая $x = \delta - 2\xi$ расположена левее седла или проходит через седло, то предельный цикл существовать не может. Найдем соответствующие значения параметров. Решая совместно уравнение изоклины вертикальных наклонов и прямой $x = \delta - 2\xi$, находим, что ордината точки пересечения $y = -2$ при всех $\delta \neq \xi$. Принимая во внимание тот факт, что при $\delta = \xi$ ордината седла $y = -1$, а при значениях параметров, соответствующих ветви AC, ордината $y = -2$, получаем, что при значениях параметров в области $S < 0$ ниже ветви AC прямая $x = \delta - 2\xi$ расположена левее седла; при значениях параметров, соответствующих ветви AC, прямая $x = \delta - 2\xi$ проходит через седло, а при значениях параметров в области $S < 0$ выше ветви AC прямая $x = \delta - 2\xi$ проходит правее седла.

Объединяя полученные результаты, сформулируем.

Предложение I. Система (2.3) не имеет предельных циклов в следующих областях значений параметров: 1) $S \geqslant 0$; 2) $S < 0$; $\delta^2 + 2\xi^2 - 3\xi\delta + 2 \geqslant 0$; $5\delta \leqslant 8\xi$.

Принимая во внимание взаимное расположение прямой $x = \delta - 2\xi$, прямой без контакта $x = -\xi$ и состояний равновесия при $S < 0$, получаем

Предложение II. Система (2.3) не имеет предельных циклов, охватывающих три состояния равновесия. Если существуют предельные циклы, то они окружают тот фокус, который при изменении параметров меняет устойчивость.

Предложение III. Из сложного фокуса системы (2.3) при смене устойчивости родится один и только один неустойчивый предельный цикл.

Действительно, проводя соответствующее исследование (см. [10]), получаем, что при значениях параметров, отвечающих точкам AB гиперболы (3.5), система (2.3) имеет сложный неустойчивый фокус, из которого при переходе в область $\delta^2 + 2\xi^2 - 3\xi\delta + 2 < 0$ родится единственный неустойчивый предельный цикл.

Из предложения I следует, что у системы (2.3) предельные циклы не могут родиться при исчезновении седло—узла.

Покажем, что возможно рождение предельного цикла из петли сепаратрисы. Рассмотрим поведение сепаратрисы L_1^- (см. рис. 5) после пересечения с изоклиной горизонтальных наклонов. Предположим, что сепаратриса L_1^- не образует петлю. Пусть $\delta_1 > 8/\sqrt{3}$ фиксировано и ξ_1 таково, что соответствующая точка ξ_1, δ_1 лежит достаточно близко к ветви AD кривой $S = 0$ в области $S < 0$, так что при этих значениях параметров система не имеет предельных циклов. O_1 — неустойчивый фокус, бесконечность также абсолютно неустойчива; следовательно, сепаратриса L_1^- при $\tau \to \infty$ должна стремиться к узлу или фокусу O_3. Сепаратриса L_1^- должна еще раз пересечь изоклину $\dot{y} = x(x+\xi)$ в точке M^-, лежащей выше точки M^+. Пусть $\delta = \delta_1$ и ξ_2 таково, что соответствующая точка ξ_2, δ_1 лежит на ветви AC гиперболы (3.5). Предельных циклов система не имеет, O_1 — устойчивый фокус или узел. Сепаратриса

L_1^- стремится либо к фокусу или узлу O_1, либо к O_3. Она должна еще раз пересекать параболу $y = x(x + \xi)$ в точке M^-. Легко видеть, что точка M^- не может лежать выше точки M^+, так как это противоречит поведению сепаратрисы L_1^+. Значит, точка M^- лежит ниже точки M^+ на отрезке O_1M^+ изоклины $y = x(x + \xi)$.

Легко видеть, что при $\delta = \delta_1$ и непрерывном изменении параметра ξ от ξ_1 до ξ_2 найдется хотя бы одно значение $\xi = \xi^*$, при котором точки M^+ и M^- совпадут, т. е. сепаратриса идет из седла в седло, образуя петлю. Кривая на плоскости параметров, соответствующая наличию у системы (2.3) петли сепаратрисы, аналитически не найдена. Эта кривая Γ_4 (рис. 6) получена с помощью электронной вычислительной машины МН-7, на которой была смоделирована система уравнений (2.3). Для того, чтобы можно было судить о точности проведения границы Γ_4, с помощью машины МН-7 были проведены другие границы, для которых известны аналитические выражения. Сравнение соответствующих кривых, полученных аналитически и с помощью МН-7, показало, что расхождение не превышает 5%. Согласно [11], из полученной петли сепаратрисы родится единственный неустойчивый предельный цикл, поскольку в рассматриваемой области выражение $\sigma \equiv P'_x + Q'_y$ в седле положительно.

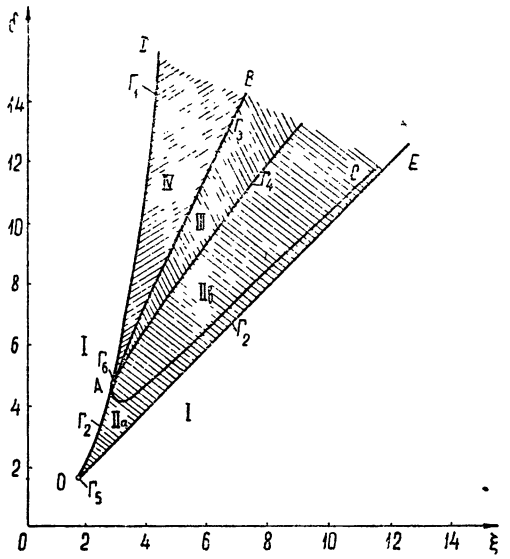


Рис 6.

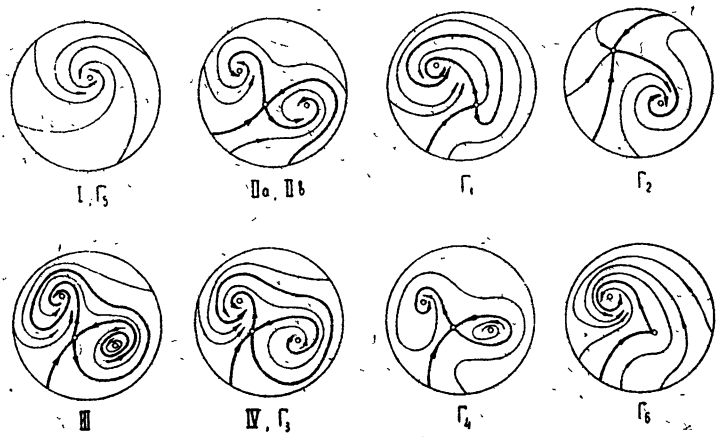


Рис 7.

Таким образом, при $\delta = \delta_1 > 8/\sqrt{3}$ и увеличении параметра ξ от нуля появление и исчезновение предельного цикла происходит следующим образом: при смене устойчивости фокуса (граница Γ_3 на рис. 6) родится единственный неустойчивый предельный цикл, который растет и на границе Γ_4 влипает в петлю сепаратрисы, которая при дальнейшем увеличении параметра ξ исчезает.

Вопрос о возможности рождения предельных циклов из уплотнения траекторий остается открытым*. В предположении, что предельные циклы не родятся из уплотнения траекторий, на рис. 6 дано разбиение плоскости параметров ξ, δ на области различного качественного поведения системы. Областям I—IV соответствуют грубые качественные картины, а границам Γ_1—Γ_6 — негрубые. На рис. 7 показаны фазовые портреты плоскости (x, y), соответствующие значениям параметров ξ, δ в областях I—IV и на границах $\Gamma_1 - \Gamma_6$, разделяющих эти области.

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И СРАВНЕНИЕ ИХ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Приведенное на рис. 6 разбиение плоскости физических параметров (ξ, δ) на области различного качественного поведения системы осциллятор—ротатор позволяет сделать следующие выводы.

1) При любых значениях** физических параметров в областях I и IV рис. 6 в системе устанавливается единственный устойчивый автоколебательный процесс Частота и амплитуда этих автоколебаний определяется параметрами системы.

2) При значениях физических параметров в областях II и III (рис. 6) на плоскости Ван-дер-Поля имеется 2 устойчивых состояния равновесия. Следовательно, в фазовом пространстве системы имеется 2 устойчивых предельных цикла со своими областями притяжения. В зависимости от начальных условий в системе устанавливается тот или другой режим устойчивых автоколебаний.

3) При достаточно медленном изменении физических параметров системы, т. е. при перемещении изображающей точки на плоскости ξ, δ амплитуда и частота автоколебаний будут изменяться. Характер этого изменения зависит от пути изображающей точки на плоскости (ξ, δ).

Рассмотрим в качестве примера случай, когда параметр δ фиксирован, а параметр ξ возрастает от значения $\xi = 0$. Проследим за изменением амплитуды автоколебаний с возрастанием ξ при значениях $\delta = 1$, $\delta = 3$ и $\delta = 6$. Заметим, что для этого достаточно знать зависимость $x = x(\xi, \delta)$, так как амплитуда автоколебаний R связана с x простым соотношением $R^2 = x^2 + y^2 = -\delta x$, которое следует из уравнений (3.1). Обратимся к рис. 3, где представлены кривые $x = x(\xi, \delta)$, построенные, согласно уравнению (3.2), при нескольких значениях параметра $\delta = \text{const}$. Кривая $x = x(\xi, 1)$ является однозначной и в соответствии с рис. 6 при $\delta = 1$ и любых значениях $\xi > 0$ на плоскости Ван-дер-Поля существует единственное устойчивое состояние равновесия. При любых начальных условиях в системе устанавливается режим устойчивых автоколебаний с амплитудой, определяемой ординатой кривой $x = x(\xi, 1)$ на рис. 3. При медленном изменении параметра ξ амплитуда автоколебаний будет изменяться в соответствии с кривой $x = x(\xi, 1)$.

В случае $\delta = 3$ и возрастании ξ от значения $\xi = 0$ изображающая

---

* Исследование системы (2.3) на вычислительной машине не обнаружило уплотнения траекторий ни при каких значениях параметров $(0 < \xi < 20,\ 0 < \delta < 20)$.

** Имеются в виду значения параметров, удовлетворяющие условиям 1 — 4 (см. стр. 361), при выполнении которых справедливо проведенное рассмотрение.

точка на плоскости (x, ξ) будет двигаться по кривой $x = x(\xi, 3)$ рис. 3 вправо до точки a_1. Точке a_1 соответствует значение ξ на границе $\Gamma_2(OE)$ рис. 6. При этом значении ξ происходит скачок изображающей точки из a_1 в a_2 (рис. 3), что соответствует скачкообразному изменению амплитуды автоколебаний. Дальнейшее возрастание ξ приводит к плавному изменению амплитуды автоколебаний в соответствии с поведением кривой $x = x(\xi, 3)$ справа от точки a_2. Если затем уменьшать параметр ξ, то амплитуда автоколебаний будет непрерывно изменяться в соответствии с движением изображающей точки на плоскости ξ, x по кривой $x = x(\xi, 3)$ влево до точки a_3. Точка a_3 соответствует значению ξ на границе $\Gamma_2(OA)$ рис. 6, при котором происходит скачок изображающей точки из a_3 в a_4 (рис. 3), т. е. происходит снова скачкообразное изменение амплитуды автоколебаний, но уже при другом значении параметра ξ. Это явление, имеющее гистерезисный характер, и называется эффектом Зоммерфельда*.

Случай $\delta = 6$ отличается от случая $\delta = 3$ лишь тем, что при уменьшении параметра ξ срыв изображающей точки на плоскости ξ, x происходит в точке b_3, а не в точке с вертикальной касательной. Точка b_3 соответствует значению ξ на границе Γ_3 (рис. 6). При этом значении ξ происходит смена устойчивости фокуса, в котором находилась фазовая точка на плоскости Ван-дер-Поля. Переход через границу Γ_3 с убыванием ξ соответствует переходу от фазового портрета III, рис. 7 к фазовому портрету IV, рис. 7. Отметим, что поведение системы, описанное для $\delta = 1$, имеет место и при всех значениях $\delta \leqslant 8\sqrt{3}/9$. Аналогично, случай $\delta = 3$ имеет место для $8\sqrt{3}/9 < \delta \leqslant 8/\sqrt{3}$, а случай $\delta = 6$ — при всех $\delta > 8/\sqrt{3}$.

Экспериментальное изучение эффекта Зоммерфельда было проведено с электромотором постоянного тока мощностью 200 *вт*, установленным по середине железной пластины с закрепленными концами. На оси якоря был эксцентрично укреплен груз в 100 *г*, расстояние которого от оси вращения можно было изменить. В цепь якоря было включено пере-

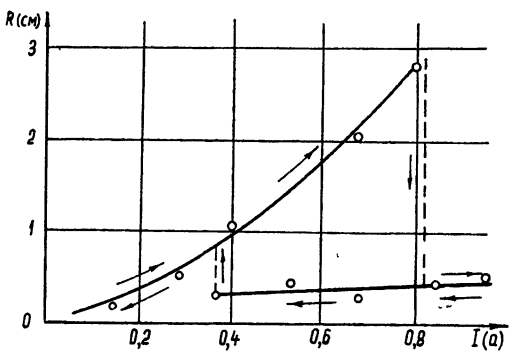


Рис. 8.

менное сопротивление, которое позволило изменять параметр ξ при постоянном δ. Результаты эксперимента (зависимость амплитуды колебаний R от тока в якоре I) представлены на рис. 8. Сравнение графиков на рис. 8 и на рис. 3 указывает на вполне удовлетворительное качественное совпадение теории с экспериментом.

* Используя третье уравнение системы уравнений (2.2) и соотношения (2.4), можно получить кривые, описывающие эффект Зоммерфельда, для угловой частоты $\dot{\varphi} = 1 + \Omega$ вращения якоря электромотора.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Sommerfeld, Phys Zeitschr., 266 (1901—1902).
2. J. Weinacht, Archiv, fur Electrotechnik, **9**, 319 (1920).
3 И. И. Блехман, ПММ, **28**, 193 (1964).
4. V. Rocard, Dynamique generale des vibrations, Paris, 1949,
5. В О Кононенко, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 75 (1959).
6 А А Андронов, А А Витт, С Э Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М, 1959.
7 Е А. Леонтович, А Г Майер, ДАН СССР, **14**, 251 (1937)
8 Н. А Губарь, Мат- сб, **40** (82), 23 (1956)
9. Л. Н Белюстина, Изв. высш уч зав —Радиофизика, **1**, № 1, 118 (1958).
10. Н. Н. Баутин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М., 1949
11. А. А. Андронов, Е А Леонтович, Мат сб, **48** (90), 335 (1959)

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 мая 1964 г.

TO THE DYNAMICS OF OSCILLATOR—ROTATOR SYSTEM

V. M. Bol'shakov, E. S. Zeldin, R. M. Mints, N A. Fufaev

By the method of small parameter the movements are investigated caused by rotation of the nonbalanced rotor of the electric motor, fixed on the elastic beam. The case is considered when the angular velocity of the armature rotation is near to the cyclic frequency of the vertical free oscillations of fhe motor with the beam. The topological structure of Van der Paul plane has been investigatet as well as the division of the space of physical parameters into the regions of different qualitative behaviour of the system.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 621 374.4

КРАТНЫЕ РЕЖИМЫ В ДЕЛИТЕЛЕ ЧАСТОТЫ С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

М. А. Раков, Ю. М. Шумков

Проведено теоретическое исследование режимов деления частоты в 4 и 6 раз в магнитном делителе частоты с вентилем в цепи обмотки возбуждения. Анализ выполнен методом припасовывания с использованием динамической кривой размагничивания материала. Приводятся результаты сопоставления теоретических и экспериментальных данных.

Магнитный делитель частоты с вентилем в цепи возбуждения (рис. 1а) отличается возможностью получения разнообразных периодических режимов, существующих в широком диапазоне изменения входного напряжения и частоты и представляющих в связи с этим значительный практический интерес. Основным режимом в данной схеме является режим деления частоты в два раза, отличающийся мягким возбуждением и весьма широкой областью устойчивости. Аналитическое исследование этого режима при кусочно-линейной аппроксимации характеристик магнитного материала и вентиля проведено в [1]. Вместе с тем в схеме делителя с вентилем возможны режимы деления частоты в число раз, кратное по отношению к основному режиму, т. е. в $2n$ раз, где $n = 2, 3, \ldots$. Практически легко осуществляются и отличаются значительной устойчивостью режимы деления в 4 и 6 раз. Аналитическое и экспериментальное исследование этих кратных режимов и составляет предмет настоящей статьи .

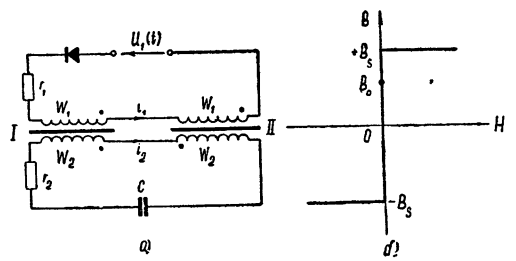


Рис. 1. а)—схема магнитного делителя частоты; б)—аппроксимация кривой намагничивания.

Для анализа воспользуемся методом припасовывания при идеальной аппроксимации кривой намагничивания сердечников (рис. 1б) и в предположении идеальности характеристики вентиля.

Процессы в магнитном делителе частоты с вентилем в цепи возбуждения при синусоидальном напряжении $u_1 = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\theta}(b_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{II}}) + v_{\mathrm{в}} + j_1 = \sin(\theta + \varphi);$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\theta}(b_{\mathrm{I}} - b_{\mathrm{II}}) + v_c + j_2 = 0; \qquad (1)$$

$$j_2 = m_2 \frac{dv_c}{d\theta},$$

где

$$\theta = \omega t; \quad b = \frac{B}{B_s}; \quad v_в = \frac{u_в}{U_m}; \quad v_c = \frac{u_c w_1}{U_m w_2};$$

$$i_1 = \frac{r_1 i_1}{U_m}; \quad j_2 = \frac{r_2 i_2 w_1}{U_m w_2}; \quad \varepsilon = \frac{U_m}{w_1 S \omega B_s}; \tag{2}$$

$$m_2 = \omega r_2 C; \quad m_1 = \omega r_1 C \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2,$$

S — площадь поперечного сечения сердечника.

В рассматриваемой схеме возможны два основных состояния сердечников: 1) один сердечник насыщен, другой не насыщен, 2) оба сердечника не насыщены. При принятой аппроксимации кривой намагничивания для возможности существования первого из этих состояний (с учетом встречного включения обмоток) необходимо выполнение равенства ампервитков первичной и вторичной цепей. Реально это условие соблюдается достаточно хорошо.

Наличие второго состояния при идеальной аппроксимации соответствует факту малости токов в цепях делителя при работе на ненасыщенном участке реальной петли намагничивания по сравнению с токами на насыщенном участке или, иными словами, факту глубокого насыщения дросселей. Пренебрежение токами на ненасыщенных участках, в свою очередь, приводит к предположению о неизменности на этих участках напряжения на емкости, что существенно упрощает анализ.

Приступим с учетом сделанных оговорок к исследованию кратных

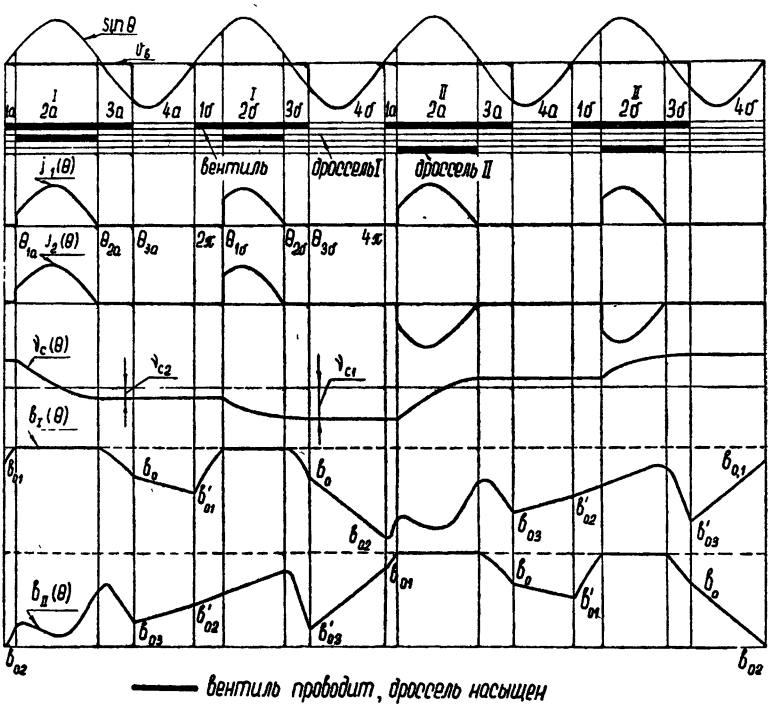


Рис. 2. Кривые токов, напряжений и индукций в схеме для случая деления частоты в 4 раза.

режимов. Кривые токов, напряжений и индукций для режима деления частоты в четыре раза представлены на рис. 2.

На участке изменения угла θ от нуля до $\theta_{1а}$ (состояние 1а) оба сердечника не насыщены. Токи равны нулю, все напряжение возбуждения приложено к дросселям, а напряжение на емкости сохраняется неизменным и равно v_{c1}. Индукции в сердечниках I и II изменяются под воздействием напряжений на дросселях, представляющих соответственно полусумму и полуразность напряжения возбуждения и напряжения на емкости.

При $\theta = \theta_{1а}$ один из сердечников (например, первый) входит в насыщение и наступает состояние 2а. При этом происходит скачок токов i_1 и i_2 от нуля до одной и той же величины (с учетом отношения витков). Вследствие встречного включения обмоток второй сердечник остается ненасыщенным, а напряженность поля в первом сердечнике определяется удвоенной величиной скачка тока. Напряжение возбуждения распределяется между активным сопротивлением первичной цепи и ненасыщенным дросселем. Напряжение на емкости изменяется за счет импульса тока i_2 и в конце состояния 2а (при $\theta = \theta_{2а}$) достигает величины v_{c2}.

При $\theta = \theta_{2а}$ сердечник выходит из насыщения и наступает состояние 3а, при котором все напряжение возбуждения (как и во время состояния 1а) приложено к дросселям, токи равны нулю, а напряжение на емкости неизменно. Однако величина этого напряжения уже иная — v_{c2}. Индукции изменяются, как и в состоянии 1а, под воздействием полусуммы и полуразности напряжений до тех пор, пока индукция первого сердечника не достигнет значения B_0, после чего произойдет запирание вентиля. Значение индукции B_0, при котором происходит запирание вентиля, будем определять, исходя из динамической кривой размагничивания материала [2]. Допустимость этой предпосылки при анализе схемы с вентилем уже апробировалась для случая деления частоты в 2 раза.

Момент запирания вентиля ($\theta = \theta_{3а}$) соответствует началу состояния 4а. Во время этого состояния все напряжение возбуждения приложено к вентилю, напряжение на емкости распределяется поровну между дросселями и вызывает в них изменение индукции по линейному закону. Состояние 4а длится до момента $\theta = 2\pi$, при котором происходит открытие вентиля.

Далее, после открытия вентиля при $\theta = 2\pi$, процесс развивается следующим образом. В отличие от режима деления частоты в два раза, когда после открытия вентиля уже второй сердечник стремится в насыщение, здесь первый сердечник снова достигает насыщения, тогда как второй все еще остается ненасыщенным. При $\theta = 2\pi$ наступает состояние 1б, аналогичное состоянию 1а, за исключением того, что безразмерное напряжение на емкости имеет величину v_{c2}. При $\theta = \theta_{1б}$ это состояние переходит в состояние 2б, когда первый сердечник вторично входит в насыщение. В этом заключается основное отличие рассматриваемого режима от режима деления в 2 раза, в котором сердечники входят в насыщение поочередно.

Дальнейшие состояния 2б ($\theta_{1б}$, $\theta_{2б}$), 3б($\theta_{2б}$, $\theta_{3б}$) и 4б($\theta_{3б}$, 4π) аналогичны состояниям 2а, 3а, 4а с учетом сделанной выше оговорки о напряжении на емкости. Далее все состояния повторяются с той лишь разницей, что вследствие изменения знака напряжения на емкости дроссели I и II меняются местами.

В соответствии с рассмотренной выше физической картиной процесса при расчете будем предполагать, что при запертом вентиле все напряжение питания приложено к последнему. Легко показать, что при этом угол φ равен нулю.

Используя условия непрерывности изменения индукции в сердеч-

никах, условие периодичности процесса и условия для напряжения и тока емкости на границах состояний 2а и 2б, получим закон изменения индукции в сердечниках, формулы для мгновенного значения напряжения на емкости в течение состояний 2а и 2б и систему трансцендентных уравнений для определения углов коммутации и постоянных напряжений ν_{c1}, ν_{c2} на емкости Подробных выкладок приводить не будем; запишем только окончательные формулы.

Состояние 1а $(0, \theta_{1a})$:

$$b_{\text{I}} = b_{01} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos\theta - \nu_{c1}\theta);$$

$$b_{\text{II}} = b_{02} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos\theta + \nu_{c1}\theta). \tag{3}$$

Состояние 2а $(\theta_{1a}, \theta_{2a})$:

$$\nu_c = \cos\alpha \sin(\theta - \alpha) + [\nu_{c1} - \cos\alpha \sin(\theta_{1a} - \alpha)]\, e^{-\frac{\theta-\theta_{1a}}{m}};$$

$$b_{\text{II}} = b_{02} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos\theta_{1a} + \nu_{c1}\theta_{1a}) + \varepsilon[\cos\theta_{1a} - \cos\theta + m_1(\nu_{c1} - \nu_c(\theta))]. \tag{4}$$

Состояние 3а $(\theta_{2a}, \theta_{3a})$:

$$b_{\text{I}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}[\cos\theta_{2a} - \cos\theta + \nu_{c2}(\theta - \theta_{2a})];$$

$$b_{\text{II}} = b_{03} + \frac{\varepsilon}{2}[\cos\theta_{3a} - \cos\theta + \nu_{c2}(\theta_{3a} - \theta)]. \tag{5}$$

Состояние 4а $(\theta_{3a}, 2\pi)$:

$$v_{\text{в}} = \sin\theta;$$

$$b_{\text{I}} = b_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\nu_{c2}(\theta - \theta_{3a});$$

$$b_{\text{II}} = b_{03} - \frac{1}{2}\varepsilon\nu_{c2}(\theta - \theta_{3a}). \tag{6}$$

Состояние 1б $(2\pi, \theta_{1б})$:

$$b_{\text{I}} = b'_{01} + \frac{\varepsilon}{2}[1 - \cos\theta - \nu_{c2}(2\pi - \theta)];$$

$$b_{\text{II}} = b'_{02} + \frac{\varepsilon}{2}[1 - \cos\theta + \nu_{c2}(2\pi - \theta)]. \tag{7}$$

Состояние 2б $(\theta_{1б}, \theta_{2б})$:

$$\nu_c = \cos\alpha \sin(\theta - \alpha) - [\nu_{c2} + \cos\alpha \sin(\theta_{1б} - \alpha)]\, e^{-(\theta-\theta_{1б})/m};$$

$$b_{\text{II}} = b'_{02} + \frac{\varepsilon}{2}[1 - \cos\theta_{1б} + \nu_{c2}(2\pi - \theta_{1б})] + \varepsilon[\cos\theta_{1б} - \cos\theta - m_1(\nu_{c2} + \nu_c(\theta))]. \tag{8}$$

Состояние 3б ($\theta_{2б}$, $\theta_{3б}$):

$$b_{\text{I}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}\left[\cos\theta_{1б} - \cos\theta + \nu_{c1}(\theta - \theta_{2б})\right];$$

$$b_{\text{II}} = b'_{03} + \frac{\varepsilon}{2}\left[\cos\theta_{3б} - \cos\theta + \nu_{c1}(\theta_{3б} - \theta)\right]. \tag{9}$$

Состояние 4б ($\theta_{3б}$, 4π):

$$v_{\text{в}} = \sin\theta;$$

$$b_{\text{I}} = b_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\nu_{c1}(\theta - \theta_{3б}); \tag{10}$$

$$b_{\text{II}} = b'_{03} - \frac{1}{2}\varepsilon\nu_{c1}(\theta - \theta_{3б}).$$

Значения индукций b_{01}, b_{02}, b_{03}, b'_{01}, b'_{02}, b'_{03} определятся из следующих уравнений:

$$b_{01} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos\theta_{1а} - \nu_{c1}\theta_{1а});$$

$$b'_{01} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}\left[1 - \cos\theta_{1б} - \nu_{c2}(2\pi - \theta_{1б})\right];$$

$$b_{02} = b_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\nu_{c1}(4\pi - \theta_{3б});$$

$$b'_{03} = b_{01} + \frac{1}{2}\varepsilon\nu_{c1}(4\pi - \theta_{3б}); \tag{11}$$

$$b'_{02} + \frac{\varepsilon}{2}\left[1 - \cos\theta_{1б} + \nu_{c2}(2\pi - \theta_{1б})\right] + \varepsilon[\cos\theta_{1б} - \cos\theta_{2б} -$$

$$- m_1(\nu_{c2} - \nu_{c1})] = b'_{03} + \frac{\varepsilon}{2}\left[\cos\theta_{3б} - \cos\theta_{2б} + \nu_{c1}(\theta_{3б} - \theta_{2б})\right];$$

$$b_0 + \frac{\varepsilon}{2}(1 - \cos\theta_{1а} + \nu_{c1}\theta_{1а}) + \varepsilon[\cos\theta_{1а} - \cos\theta_{2а} +$$

$$+ m_1(\nu_{c1} + \nu_{c2})] = b'_{03} + \frac{\varepsilon}{2}\left[\cos\theta_{3а} - \cos\theta_{2а} + \nu_{c2}(\theta_{3а} - \theta_{2а})\right].$$

Система трансцендентных уравнений для определения углов коммутации и величин ν_{c1}, ν_{c2} имеет следующий вид:

$$\sin\theta_{2а} = -\nu_{c2}; \tag{12}$$

$$\cos\theta_{3а} + \nu_{c2}\theta_{3а} = \gamma_0 + \cos\theta_{2а} - \nu_{c2}\theta_{2а}; \tag{13}$$

$$\cos\theta_{1б} - \nu_{c2}\theta_{1б} = 1 - \gamma_0 - \nu_{c2}\theta_{3а}; \tag{14}$$

$$\sin\alpha\cos(\theta_{2б} - \alpha) + [\nu_{c2} + \cos\alpha\sin(\theta_{1б} - \alpha)]\, e^{-(\theta_{2б} - \theta_{1б})/m} = 0; \tag{15}$$

$$\sin\theta_{2б} = -\nu_{c1}; \tag{16}$$

$$\gamma_0 + \cos\theta_{2б} - \nu_{c1}\theta_{2б} = \cos\theta_{3б} - \nu_{c1}\theta_{3б}; \tag{17}$$

$$\cos\theta_{3a} = 2(1 + m_1\nu_{c1}) - \cos\theta_{3б}; \qquad (18)$$

$$\sin\alpha\cos(\theta_{2a} - \alpha) - [\nu_{c1} - \cos\alpha\sin(\theta_{1a} - \alpha)]\, e^{-(\theta_{2a}-\theta_{1a})/m} = 0. \qquad (19)$$

Выше дополнительно введены обозначения

$$\frac{2(1 - b_0)}{\varepsilon} = \gamma_0, \quad \operatorname{tg}\alpha = m = m_1 + m_2.$$

Проведение по той же схеме анализа для случая деления частоты в шесть раз приводит к аналогичной системе 12 трансцендентных уравнений относительно девяти неизвестных углов и трех уровней напряжения на емкости.

Необходимо отметить, что уже система уравнений (12) ÷ (19) для режима деления частоты в 4 раза достаточно сложна, и решение ее без вычислительных машин представляет достаточно трудоемкий процесс. Практически в случаях, когда требуемая точность расчета может быть порядка 10%, можно рекомендовать использование при расчете данных режима деления частоты в 2 раза. В этом случае вместо величины ν_{c1} необходимо в систему подставлять удвоенное значение амплитуды напряжения на емкости, определенной для режима 1 : 2. При этом отпадает необходимость решения полной системы и расчет сводится к решению всего четырех уравнений; в то же время при таком подходе задача не идеализируется чрезмерно и сохраняется возможность исследования даже такой особенности, как распределение величины напряжения на емкости по скачкам.

На рис. 3 приведены для различных ε, m_1 и $b_0 = 0{,}857$ значения величины ν_{c1}, полученной из решения на электронной вычислительной машине трансцендентных уравнений, которые описывают режим деления частоты в два раза. Определяя из рис. 3 значение ν_{c1}, можно из системы (12)—(19), решив только четыре трансцендентных уравнения (13), (14), (17), (19), получить все интересующие нас величины. Проведенный расчет режимов деления частоты в 2 и 4 раза при одних и тех же значениях параметров ($m_1 = 10$, $m = 10{,}5$, $\gamma_0 = 0{,}3$) дал следующие результаты: режим деления частоты в два раза — $\nu_{c1} = -0{,}08828$; режим деления частоты в четыре раза — $\nu_{c1} = -0{,}16320$. Таким образом, расхождение между точным и приближенным расчетом в данном случае составляет 8%.

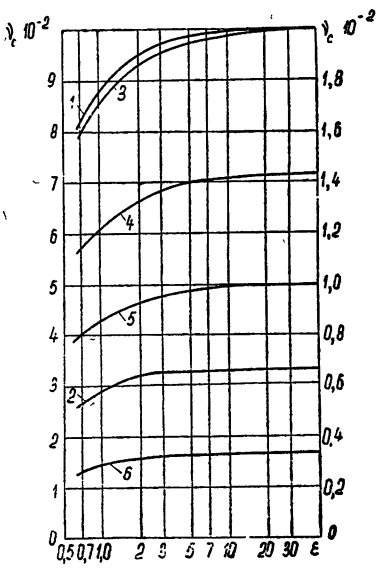


Рис. 3. Зависимость ν_c от параметров схемы для случая деления частоты в 2 раза (масштаб слева для 1) $m_1 = 10$, 2) $m_1 = 30$; масштаб справа для 3) $m_1 = 50$, 4) $m_1 = 70$, 5) $m_1 = 100$, 6) $m_1 = 300$).

Описанные выше режимы наблюдались экспериментально в делителе со следующими данными: сердечники из пермаллоя $D = 42$ *мм*, $d = 30$ *мм*, $h = 4$ *мм*, $w_1 = 500$ витков, $w_2 = 2000$ витков, $C = 0{,}1$ *мкф*, $r_1 = r_2 = 62$ *ом*. Области существования режимов лежат в диапазоне изменения частоты возбуждения порядка 1 ÷ 3 *кгц*. При этом области режимов деления в 2, 4 и 6 раз частично перекрывают друг друга, а ширина области уменьшается с увеличением коэффициента деления.

Переход от одного режима к другому происходит следующим образом. Пусть при $f = 2$ *кгц* в схеме имеет место режим деления частоты в 2 раза. При увеличении частоты возбуждения до 2,9 *кгц* этот режим плавно переходит в режим 1 : 4, который далее при $f = 2{,}95$ *кгц* переходит в режим 1 : 6, остающийся устойчивым до $f = 3$ *кгц*. Режим деления в 6 раз при снижении частоты до 1,75 *кгц* переходит в режим 1 : 4, а при дальнейшем снижении ее до 1,26 *кгц* — в режим 1 : 2. Последний остается устойчивым при снижении частоты вплоть до 0,8 *кгц*. Таким образом, области устойчивости с увеличением кратности деления смещаются вправо. Относительная ширина области в рассмотренном случае составляет 3,6 при делении в 2 раза, 2,3 при делении в 4 раза и 1,7 при

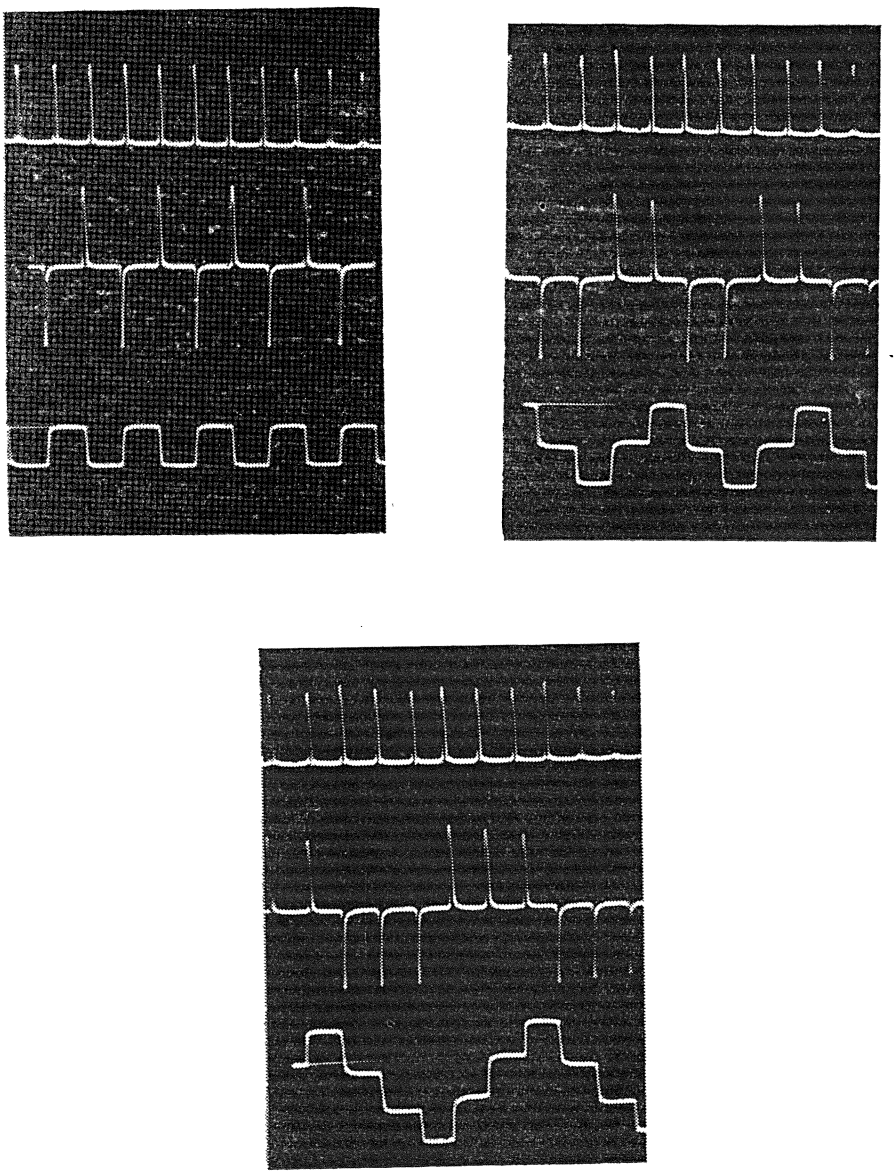


Рис. 4. Осциллограммы токов и напряжений:
а)—деление частоты в 2 раза; б)—деление частоты в 4 раза; в)—деление частоты в 6 раз.

делении в 6 раз. Примерно такие же данные получаются и при экспериментальном исследовании делителей с другими значениями параметров.

Режимы деления остаются устойчивыми и в случае изменения напряжения возбуждения до 10 *дб* (при неизменной частоте).

Осциллограммы процессов в схеме для случая деления частоты в 2, 4 и 6 раз представлены соответственно на рис. 4 а, б и в. На осциллограммах показаны формы входного (верхняя кривая) и выходного (средняя кривая) токов, а также напряжения на емкости. Здесь отчетливо видна зависимость величины импульса от его номера в пределах группы. Разница импульсов тока приводит, в свою очередь, к различию отдельных скачков напряжения на емкости. Приняв за единицу величину скачка U_c при делении частоты в 2 раза, получим, что относительные величины первого и второго скачков при делении в 4 раза составляют соответственно 1,2 и 0,9. Относительные величины скачков при делении в 6 раз равны 1,3; 1,0 и 0,8.

Эксперименты подтверждают сделанный ранее вывод о том, что для определения амплитуды напряжения на емкости для кратных режимов целесообразно использовать данные режима 1 : 2, вычисленные для тех же значений параметров. Получаемая при этом погрешность не превышает 10% и может считаться вполне допустимой. Решение полных систем трансцендентных уравнений может оказаться оправданным лишь в том случае, если интерес представляет не только амплитуда выходного напряжения схемы, но и закон распределения напряжения по отдельным скачкам.

Наиболее важным экспериментальным результатом следует считать хорошую чистоту рассмотренных режимов и большую ширину областей устойчивого деления. Эти свойства особенно существенны при их практических применениях, к числу которых в первую очередь можно отнести создание элементов с большим количеством устойчивых состояний.

ЛИТЕРАТУРА

1 М А Раков, Ю М Шумков, Nonlinear Vibration Problems, 5, Warsaw, 1964.
2. Р А Липман, И Б Негневицкий, Быстродействующие магнитные и магнитно-полупроводниковые усилители, Госэнергоиздат, М, 1960.

Физико-механический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
4 мая 1964 г.

MULTIPLE REGIMES IN A FREQUENCY DIVIDER WITH TWO NONLINEAR ELEMENTS

M. A. Rakov, Yu. M. Shumkov

The theoretical investigation has been made of the regimes into 4 and 6 times of 4-folded frequency division in a magnetic frequency divider, having the valve in a circuit of field coil. The analysis has been carried out by the „adjusting" method, using the dynamic demagnetizing curve. The results are given comparing the theoretical and experimental data.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 62-504.2

АНАЛИЗ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЯТОР И ОДНОПОЛУПЕРИОДНЫЙ ДЕМОДУЛЯТОР

В. И. Гостев

Системы автоматического управления (с трактом передачи информации на несущей частоте, состоящим из модулятора, безынерционного усилительного блока и однополупериодного демодулятора) рассматриваются как линейные импульсные системы. Получены передаточные функции рассматриваемых систем с модуляцией, даны примеры анализа и расчета таких систем.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему автоматического управления с обратной связью, состоящую из элемента сравнения С, модулятора М, безынерционного усилительного блока У, однополупериодного демодулятора Д

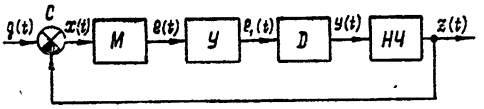


Рис. 1. Система автоматического управления с модулятором и однополупериодным демодулятором.

и постоянной линейной непрерывной части НЧ (рис. 1). На систему воздействует управляющий (или возмущающий) сигнал $g(t)$. На выходе модулятора вырабатывается гармонический сигнал $e(t)$ (на несущей частоте $\omega_н$), промодулированный сигналом ошибки $x(t)$, который подается на вход модулятора:

$$e(t) = K_м x(t) \sin(\omega_н t). \tag{1}$$

Проходя через усилительный блок, этот сигнал усиливается в $K_у$ раз и поступает на вход демодулятора. Сигнал на входе демодулятора

$$e_1(t) = K_1 x(t) \sin(\omega_н t), \tag{2}$$

где $K_1 = K_у K_м$. Выходной сигнал демодулятора выражается уравнением

$$y(t) = \begin{cases} K_1 x(t) \sin(\omega_н t), & 2n\pi \leqslant \omega_н t \leqslant (2n+1)\pi \\ 0, & (2n+1)\pi \leqslant \omega_н t \leqslant (2n+2)\pi \end{cases} \tag{3}$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$), т. е. представляет собой последовательность полусинусоид, промодулированную сигналом рассогласования $x(t)$.

Будем полагать, что сигнал рассогласования $x(t)$ (или, другими словами, огибающая последовательности модулированных полусинусоид

на выходе демодулятора) изменяется незначительно за один период несущей частоты. Это справедливо, если спектр входного сигнала $g(t)$ существенно отличен от нуля только на частотах, значительно меньших несущей частоты $\omega_н$, причем амплитудная частотная характеристика линейной непрерывной части практически равна нулю при частотах $|\omega| \geqslant \omega_c$, где $\omega_c < \omega_н/2$.

Введем в рассмотрение относительное время $\bar{t} = t/T = n + \varepsilon$, где $T = 2\pi/\omega_н$ — период следования модулированных полусинусоид на выходе демодулятора, равный периоду несущей частоты ($n = 0, 1, 2, ...,$; $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$). Тогда выражение (3) перепишется в виде

$$y(\bar{t}) = \begin{cases} K_1 x(\bar{t}) \sin(2\pi\varepsilon) & (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma) \\ 0 & (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1) \end{cases}, \qquad (4)$$

где $\gamma = 0{,}5$ — относительная длительность полусинусоид. Графики изменения во времени сигнала рассогласования $x(\bar{t})$ и выходного сигнала демодулятора $y(\bar{t})$ показаны на рис. 2а, в.

Можно представить, что сигнал на выходе однополупериодного демодулятора $y(\bar{t})$ образуется следующим образом: модулирующая (огибающая) функция $x(\bar{t})$ поступает на простейший импульсный элемент, который формирует мгновенные импульсы $y_1(\bar{t})$, площадь которых пропорциональна значению сигнала $x(\bar{t})$ в соответствующие моменты времени (рис. 2б); далее эти мгновенные импульсы поступают на формирующий элемент, который характеризуется тем, что его реакция на мгновенный импульс, т. е. на воздействие типа дельта-функции, представляет собой половину волны синусоиды. Таким образом, после формирующего элемента получаются полусинусоиды с амплитудой, пропорциональной сигналу $x(\bar{t})$ в соответствующие моменты времени (см. рис. 2в*). Тогда рассматриваемую систему автоматического управления

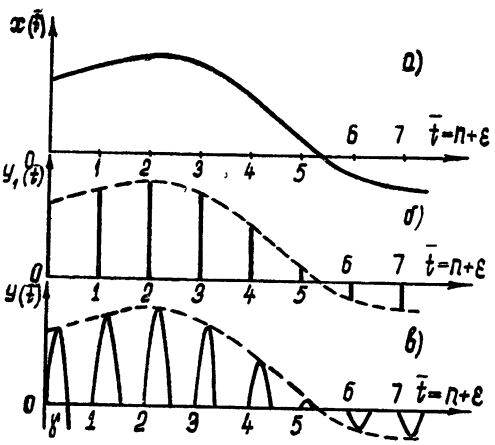


Рис. 2. Графики изменения во времени а) сигнала рассогласования $x(\bar{t})$, б) выходного сигнала фиктивного импульсного элемента $y_1(\bar{t})$ и в) выходного сигнала однополупериодного демодулятора $y(\bar{t})$. Время—в относительных единицах.

(рис. 1), содержащую модулятор и однополупериодный демодулятор, можно представить эквивалентной импульсной системой (см. рис. 3). Передаточная функция формирующего элемента (которая определяется как изображение в смысле обычного преобразования Лапласа соответствующего импульса)

* На рис. 2 коэффициент усиления K_1 принят равным единице.

$$K_{\Phi}(q) = \frac{2\pi}{q^2 + 4\pi^2}(1 + e^{-\gamma q}), \tag{5}$$

где $\gamma = 0{,}5$ — относительная длительность полусинусоидальных импульсов, $q = pT$ — параметр преобразования Лапласа. Передаточную функцию постоянной непрерывной части обозначим $K_{н}(q)$. В непрерывную часть отнесем коэффициенты усиления всех элементов системы.

Система рис. 3 может быть проанализирована при помощи теории линейных импульсных систем, развитой Цыпкиным [1]. Теория импульсных систем использовалась при анализе систем с модуляцией, работающих на несущей частоте [4, 5].

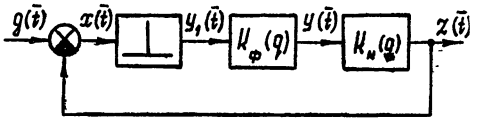


Рис. 3. Импульсная система, эквивалентная системе (рис 1) с модулятором и однополупериодным демодулятором.

Нужно отметить, что системы, структурную схему которых можно представить рис. 1, часто встречаются в технике автоматического управления. В качестве примера можно указать на следящую систему, где элементом сравнения и модулятором являются сельсины, демодулятором — фазовый детектор, а непрерывной частью — усилитель и двигатель. Такая система рассматривалась и исследовалась экспериментально в работе [3] В [3] задача определения передаточной функции системы автоматического регулирования, содержащей модулятор и однополупериодный демодулятор, решалась (с учетом дискретности сигнала ошибки после демодулятора) методом модулированных гармоник.

Как показано ниже, анализ таких систем методом дискретного преобразования Лапласа (на основе теории импульсных систем) является более простым и имеет лучшую физическую интерпретацию.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ РАЗОМКНУТЫХ СИСТЕМ С МОДУЛЯТОРОМ И ОДНОПОЛУПЕРИОДНЫМ ДЕМОДУЛЯТОРОМ

Передаточная функция приведенной непрерывной части импульсной системы (рис. 3), эквивалентной системе с модулятором и однополупериодным демодулятором (рис. 1), определится следующим образом:

$$K(q) = K_{\Phi}(q)\, K_{н}(q) = \frac{2\pi K_{н}(q)}{q^2 + 4\pi^2}(1 + e^{-\gamma q}) = K_1(q) + K_2(q), \tag{6}$$

где

$$K_1(q) = \frac{2\pi K_{н}(q)}{q^2 + 4\pi^2}, \tag{7}$$

$$K_2(q) = K_1(q)\, e^{-\gamma q}. \tag{8}$$

Найдем передаточные функции эквивалентных импульсных систем (рис. 3) (т. е. отношение изображения в смысле дискретного преобразования Лапласа от выходной величины $z(t)$ к изображению в смысле дискретного преобразования Лапласа от величины сигнала рассогласования $x(t)$ для различных $K_{н}(q)$.

а) Передаточная функция постоянной непрерывной части системы имеет простые и отличные от нуля полюса:

$$K_{\text{н}}(q) = P(q)/Q(q). \tag{9}$$

Тогда на основании (7) можно получить (используя формулы разложения; см., например, [2], стр. 357)

$$K_1(q) = \frac{2\pi}{q^2+4\pi^2}\frac{P(q)}{Q(q)} = 2\pi\sum_{\nu=1}^{l+2} c_{\nu 0}\frac{1}{q-q_\nu}, \tag{10}$$

где l — число полюсов $K_{\text{н}}(q)$,

$$c_{\nu 0} = \left.\frac{P(q)}{[Q(q)(q^2+4\pi^2)]'}\right|_{q=q_\nu};$$

$$q_{l+1} = j2\pi; \quad q_{l+2} = -j2\pi.$$

Отсюда на основании таблиц дискретного преобразования Лапласа (см. [1], стр. 906) находим

$$K_1^*(q, \varepsilon) = 2\pi\sum_{\nu=1}^{l+2} c_{\nu 0}\frac{e^q}{e^q - e^{q_\nu}}e^{q_\nu \varepsilon}. \tag{11}$$

Учитывая (8), где $\gamma = 0{,}5$, на основании теоремы дискретного преобразования Лапласа об умножении на $e^{-\gamma q}$, $\gamma < 1$ (см. [1], стр. 912, теорема (28)), находим

$$K_2^*(q, \varepsilon) = \begin{cases} e^{-q}K_1^*(q, 1+\varepsilon-\gamma) & (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma) \\ K_1^*(q, \varepsilon-\gamma) & (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1) \end{cases}. \tag{12}$$

Подставляя в (12) выражение $K_1^*(q, \varepsilon)$ из (11), получаем

$$K_2^*(q, \varepsilon) = 2\pi\sum_{\nu=1}^{l+2} c_{\nu 0}\frac{e^{q_\nu(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_\nu}}e^{q_\nu \varepsilon} \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma);$$

$$K_2^*(q, \varepsilon) = 2\pi\sum_{\nu=1}^{l+2} c_{\nu 0}\frac{e^q}{e^q - e^{q_\nu}}e^{q_\nu(\varepsilon-\gamma)} \quad (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1). \tag{13}$$

На основании (6) можно записать, что

$$K^*(q, \varepsilon) = K_1^*(q, \varepsilon) + K_2^*(q, \varepsilon). \tag{14}$$

Подставляя в (14) выражения (11) и (13), получаем

$$K^*(q, \varepsilon) = 2\pi\sum_{\nu=1}^{l+2} c_{\nu 0}\frac{e^q + e^{q_\nu(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_\nu}}e^{q_\nu \varepsilon} \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma);$$

$$K^*(q, \varepsilon) = 2\pi\sum_{\nu=1}^{l+2} c_{\nu 0}\frac{e^q(1+e^{q_\nu\gamma})}{e^q - e^{q_\nu}}e^{q_\nu(\varepsilon-\gamma)} \quad (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1). \tag{15}$$

Выражение (15) определяет передаточную функцию системы (рис. 1) с модулятором и однополупериодным демодулятором, когда передаточная функция постоянной непрерывной части имеет простые и отличные от нуля полюса.

б) Передаточная функция постоянной непрерывной части имеет один нулевой полюс:

$$K_{\text{н}}(q) = \frac{P(q)}{Q(q)} \frac{1}{q}. \tag{16}$$

Тогда на основании (7) можно получить

$$K_1(q) = \frac{2\pi}{q(q^2+4\pi^2)} \frac{P(q)}{Q(q)} = 2\pi c_{00} \frac{1}{q} + 2\pi \sum_{\nu=1}^{l-1+2} c_{\nu 0} \frac{1}{q-q_\nu}, \tag{17}$$

где l — число всех полюсов $K_{\text{н}}(q)$,

$$c_{00} = \left.\frac{P(q)}{Q(q)(q^2+4\pi^2)}\right|_{q=0}; \quad c_{\nu 0} = \left.\frac{P(q)}{q[Q(q)(q^2+4\pi^2)]'}\right|_{q=q_\nu};$$

$$q_{l-1+1} = j2\pi; \qquad q_{l-1+2} = -j2\pi.$$

Отсюда на основании таблиц дискретного преобразования Лапласа находим

$$K_1^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{00} \frac{e^q}{e^q-1} + 2\pi \sum_{\nu=1}^{l-1+2} c_{\nu 0} \frac{e^q}{e^q - e^{q_\nu}} e^{q_\nu \varepsilon}. \tag{18}$$

На основании формулы (12) получаем

$$K_2^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{00} \frac{1}{e^q-1} + 2\pi \sum_{\nu=1}^{l-1+2} c_{\nu 0} \frac{1}{e^q - e^{q_\nu}} e^{q_\nu \varepsilon} e^{q_\nu (1-\gamma)} \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma);$$

$$K_2^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{00} \frac{e^q}{e^q-1} + 2\pi \sum_{\nu=1}^{l-1+2} c_{\nu 0} \frac{e^q}{e^q - e^{q_\nu}} e^{q_\nu (\varepsilon-\gamma)} \quad (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1). \tag{19}$$

Используя равенство (14), окончательно находим

$$K^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{00} \frac{e^q+1}{e^q-1} + 2\pi \sum_{\nu=1}^{l-1+2} c_{\nu 0} \frac{e^q + e^{q_\nu (1-\gamma)}}{e^q - e^{q_\nu}} e^{q_\nu \varepsilon} \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma);$$

$$K^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{00} \frac{2e^q}{e^q-1} + 2\pi \sum_{\nu=1}^{l-1+2} c_{\nu 0} \frac{e^q(1+e^{q_\nu \gamma})}{e^q - e^{q_\nu}} e^{q_\nu (\varepsilon-\gamma)} \quad (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1). \tag{20}$$

Выражение (20) определяет передаточную функцию системы (рис. 1) с модулятором и однополупериодным демодулятором, когда передаточная функция постоянной непрерывной части имеет один нулевой и другие простые и отличные от нуля полюсы.

в) Передаточная функция постоянной непрерывной части имеет нулевой полюс второй кратности:

$$K_{\text{н}}(q) = \frac{P(q)}{Q(q)} \frac{1}{q^2}. \tag{21}$$

На основании (7) получаем

$$K_1(q) = \frac{2\pi}{q^2(q^2+4\pi^2)} \frac{P(q)}{Q(q)} = 2\pi c_{01} \frac{1}{q} + 2\pi c_{00} \frac{1}{q^2} + 2\pi \sum_{\nu=1}^{l-2+2} c_{\nu 0} \frac{1}{q-q_\nu}, \tag{22}$$

где l — число всех полюсов $K_{\text{н}}(q)$,

$$c_{01} = \left[\frac{P(q)}{Q(q)(q^2+4\pi^2)}\right]'_{q=0}; \quad c_{00} = \left.\frac{P(q)}{Q(q)(q^2+4\pi^2)}\right|_{q=0};$$

$$c_{\nu 0} = \left.\frac{P(q)}{q^2[Q(q)(q^2+4\pi^2)]'}\right|_{q=q_\nu}; \quad q_{l-2+1} = j2\pi; \; q_{l-2+2} = -j2\pi.$$

Отсюда на основании таблиц дискретного преобразования Лапласа (см. [1], стр. 906) находим

$$K_1^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{01}\frac{e^q}{e^q-1} + 2\pi c_{00}\frac{e^q}{(e^q-1)^2}[\varepsilon e^q + (1-\varepsilon)] + 2\pi\sum_{\nu=1}^{l-2+2}\times$$

$$\times c_{\nu 0}\frac{e^q}{e^q-e^{q_\nu}}e^{q_\nu\varepsilon}. \tag{23}$$

На основании формулы (12) получаем

$$K_2^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{01}\frac{1}{e^q-1} + 2\pi c_{00}\frac{(1+\varepsilon-\gamma)e^q+(\gamma-\varepsilon)}{(e^q-1)^2} + 2\pi\sum_{\nu=1}^{l-2+2}\times$$

$$\times c_{\nu 0}\frac{e^{q_\nu(1-\gamma)}}{e^q-e^{q_\nu}}e^{q_\nu\varepsilon} \qquad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma); \tag{24}$$

$$K_2^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{01}\frac{e^q}{e^q-1} + 2\pi c_{00}\frac{e^q[(\varepsilon-\gamma)e^q+(1-\varepsilon+\gamma)]}{(e^q-1)^2} + 2\pi\sum_{\nu=1}^{l-2+2}\times$$

$$\times c_{\nu 0}\frac{e^q}{e^q-e^{q_\nu}}e^{q_\nu(\varepsilon-\gamma)} \qquad (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1).$$

На основании (14) окончательно находим

$$K^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{01}\frac{e^q+1}{e^q-1} + 2\pi c_{00}\frac{\varepsilon e^{2q}+(2-\gamma)e^q+(\gamma-\varepsilon)}{(e^q-1)^2} + 2\pi\sum_{\nu=1}^{l-2+2}c_{\nu 0}\times$$

$$\times\frac{e^q+e^{q_\nu(1-\gamma)}}{e^q-e^{q_\nu}}e^{q_\nu\varepsilon} \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma); \tag{25}$$

$$K^*(q, \varepsilon) = 2\pi c_{01}\frac{2e^q}{e^q-1} + 2\pi c_{00}\frac{e^q[(2\varepsilon-\gamma)e^q+(2-2\varepsilon+\gamma)]}{(e^q-1)^2} + 2\pi\sum_{\nu=1}^{l-2+2}c_{\nu 0}\times$$

$$\times\frac{e^q(1+e^{q_\nu\gamma})}{e^q-e^{q_\nu}}e^{q_\nu(\varepsilon-\gamma)} \qquad (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1).$$

Выражение (25) определяет передаточную функцию системы (рис. 1) с модулятором и однополупериодным демодулятором, когда передаточная функция постоянной непрерывной части имеет нулевой полюс второй кратности, в то время как другие полюса — простые и отличные от нуля.

Аналогичным образом можно определить передаточную функцию системы (рис. 1) с модулятором и однополупериодным демодулятором при любой передаточной функции ее непрерывной части НЧ.

Рассмотрим примеры использования полученных формул при расчете систем автоматического управления с модулятором и однополупериодным демодулятором.

Пример 1. Определим передаточную функцию системы рис. 1, имеющей передаточную функцию непрерывной части:

$$K_{\text{н}}(q) = \frac{K(q-q_{\text{к}})}{q(q-q_1)}, \tag{26}$$

т. е.

$$P(q) = K(q - q_к);\ Q(q) = q - q_1;\ l = 2.$$

Затем определяем коэффициенты разложения по формулам (17):

$$c_{00} = \frac{P(q)}{Q(q)(q^2 + 4\pi^2)}\Big|_{q=0} = \frac{Kq_к}{4\pi^2 q_1};$$

$$c_{10} = \frac{P(q)}{q[Q(q)(q^2+4\pi^2)]'}\Big|_{q=q_1} = \frac{K(q_1 - q_к)}{q_1(q_1^2 + 4\pi^2)};$$

$$c_{20} = \frac{P(q)}{q[Q(q)(q^2+4\pi^2)]'}\Big|_{q=j2\pi} = -\frac{K(j2\pi - q_к)}{j8\pi^2(2\pi + jq_1)};$$

$$c_{30} = \frac{P(q)}{q[Q(q)(q^2+4\pi^2)]'}\Big|_{q=-j2\pi} = -\frac{K(-j2\pi - q_к)}{j8\pi^2(-2\pi + jq_1)}.$$

Подставляя полученные коэффициенты в формулы (20) и производя несложные преобразования, получим передаточную функцию системы (рис. 1) с модулятором и однополупериодным демодулятором с непрерывной частью (26) в виде

$$K^*(q, \varepsilon) = \frac{Kq_к}{2\pi q_1}\frac{e^q+1}{e^q-1} + \frac{2\pi K(q_1 - q_к)}{q_1(q_1^2 + 4\pi^2)}\frac{e^q + e^{q_1(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_1}}e^{q_1\varepsilon} -$$

$$- \frac{K(q_1 q_к + 4\pi^2)}{2\pi(q_1^2 + 4\pi^2)}\cos(2\pi\varepsilon) - \frac{K(q_1 - q_к)}{q_1^2 + 4\pi^2}\sin(2\pi\varepsilon) \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma); \tag{27}$$

$$K^*(q, \varepsilon) = \frac{Kq_к e^q}{\pi q_1(e^q - 1)} + \frac{2\pi K(q_1 - q_к)}{q_1(q_1^2 + 4\pi^2)}\frac{e^q(1 + e^{q_1\gamma})}{e^q - e^{q_1}}e^{q_1(\varepsilon-\gamma)}. \quad (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1).$$

При $\varepsilon = 0$ из (27) после простых преобразований получаем

$$K^*(q) = \frac{Kq_к}{\pi q_1}\frac{1}{e^q - 1} + \frac{2\pi K(q_1 - q_к)}{q_1(q_1^2 + 4\pi^2)}\frac{e^{q_1} + e^{q_1(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_1}}. \tag{28}$$

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) системы определяется из (28) заменой $q = j\bar{\Omega}$, где $\bar{\Omega} = \Omega T$ (Ω — частота в спектре входного сигнала). Учитывая, что $e^q = e^{j\bar{\Omega}} = \cos\bar{\Omega} + j\sin\bar{\Omega}$, после незначительных преобразований находим амплитудно-фазовую характеристику данной системы:

$$K^*(j\bar{\Omega}) = B^*(\bar{\Omega}) + jM^*(\bar{\Omega}), \tag{29}$$

где

$$B^*(\bar{\Omega}) = -\frac{Kq_к}{2\pi q_1} + \frac{2\pi K(q_1 - q_к)[e^{q_1} + e^{q_1(1-\gamma)}]}{q_1(q_1^2 + 4\pi^2)}\frac{\cos\bar{\Omega} - e^{q_1}}{1 - 2\cos\bar{\Omega}\,e^{q_1} + e^{2q_1}}$$

— вещественная частотная характеристика,

$$M^*(\bar{\Omega}) = -\frac{Kq_к}{2\pi q_1}\operatorname{ctg}\frac{\bar{\Omega}}{2} - \frac{2\pi K(q_1 - q_к)[e^{q_1} + e^{q_1(1-\gamma)}]}{q_1(q_1^2 + 4\pi^2)}\frac{\sin\bar{\Omega}}{1 - 2\cos\bar{\Omega}\,e^{q_1} + e^{2b_1}}$$

— мнимая частотная характеристика.

Пример 2. Определим передаточную функцию системы (рис. 1), имеющей передаточную функцию непрерывной части:

$$K_{\text{н}}(q) = \frac{K(q - q_{\text{к}})}{q(q-q_1)(q-q_2)}, \tag{30}$$

т. е.

$$P(q) = K(q - q_{\text{к}}); \; Q(q) = q^2 - (q_1 + q_2)\, q + q_1 q_2.$$

Коэффициенты разложения находим по формулам (17):

$$c_{00} = \frac{P(q)}{Q(q)(q^2 + 4\pi^2)}\Big|_{q=0} = -\frac{Kq_{\text{к}}}{4\pi^2 q_1 q_2};$$

$$c_{10} = \frac{P(q)}{q[Q(q)(q^2 + 4\pi^2)]'}\Big|_{q=q_1} = \frac{K(q_1 - q_{\text{к}})}{q_1(q_1 - q_2)(q_1^2 + 4\pi^2)};$$

$$c_{20} = \frac{P(q)}{q[Q(q)(q^2 + 4\pi^2)]'}\Big|_{q=q_2} = \frac{K(q_2 - q_{\text{к}})}{q_2(q_2 - q_1)(q_2^2 + 4\pi^2)};$$

$$c_{30} = \frac{P(q)}{q[Q(q)(q^2 + 4\pi^2)]'}\Big|_{q=j2\pi} = \frac{K(j2\pi - q_{\text{к}})}{j8\pi^2[j(q_1 q_2 - 4\pi^2) + 2(q_1 + q_2)\pi]};$$

$$c_{40} = \frac{P(q)}{q[Q(q)(q^2 + 4\pi^2)]'}\Big|_{q=-j2\pi} = \frac{K(-j2\pi - q_{\text{к}})}{-j8\pi^2[2\pi(q_1 + q_2) - j(q_1 q_2 - 4\pi^2)]}.$$

Подставляя полученные коэффициенты в формулу (20) и производя несложные преобразования, получим передаточную функцию данной системы с модулятором и однополупериодным демодулятором:

$$K^*(q, \varepsilon) = -\frac{Kq_{\text{к}}}{2\pi q_1 q_2}\,\frac{e^q + 1}{e^q - 1} + \frac{2\pi K(q_1 - q_{\text{к}})}{q_1(q_1 - q_2)(q_1^2 + 4\pi^2)}\,\frac{e^q + e^{q_1(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_1}}\,e^{q_1\varepsilon} +$$

$$+ \frac{2\pi K(q_2 - q_{\text{к}})}{q_2(q_2 - q_1)(q_2^2 + 4\pi^2)}\,\frac{e^q + e^{q_2(1-\gamma)}}{e^q - e^{q_2}}\,e^{q_2\varepsilon} + \frac{K[(q_1 q_2 - 4\pi^2) - q_{\text{к}}(q_1 + q_2)]}{(q_1^2 + 4\pi^2)(q_2^2 + 4\pi^2)} \times$$

$$\times \sin(2\pi\varepsilon) + \frac{K[4\pi^2(q_1 + q_2) + q_{\text{к}}(q_1 q_2 - 4\pi^2)]}{2\pi(q_1^2 + 4\pi^2)(q_2^2 + 4\pi^2)}\cos(2\pi\varepsilon) \quad (0 \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma); \tag{31}$$

$$K^*(q, \varepsilon) = -\frac{Kq_{\text{к}}}{q_1 q_2 \pi}\,\frac{e^q}{e^q - 1} + \frac{2\pi K(q_1 - q_{\text{к}})}{q_1(q_1 - q_2)(q_1^2 + 4\pi^2)}\,\frac{e^q(1 + e^{q_1\gamma})}{e^q - e^{q_1}}\,e^{q_1(\varepsilon-\gamma)} +$$

$$+ \frac{2\pi K(q_2 - q_{\text{к}})}{q_2(q_2 - q_1)(q_2^2 + 4\pi^2)}\,\frac{e^q(1 + e^{q_2\gamma})}{e^q - e^{q_2}}\,e^{q_2(\varepsilon-\gamma)} \quad (\gamma \leqslant \varepsilon \leqslant 1).$$

При $\varepsilon = 0$ из (31) после простых преобразований находим

$$K^*(q) = -\frac{Kq_{\text{к}}}{q_1 q_2 \pi}\,\frac{1}{e^q - 1} + \frac{2\pi K(q_1 - q_{\text{к}})}{q_1(q_1 - q_2)(q_1^2 + 4\pi^2)}\,\frac{e^{q_1(1-\gamma)} + e^{q_1}}{e^q - e^{q_1}} +$$

$$+ \frac{2\pi K(q_2 - q_{\text{к}})}{q_2(q_2 - q_1)(q_2^2 + 4\pi^2)}\,\frac{e^{q_2(1-\gamma)} + e^{q_2}}{e^q - e^{q_2}}. \tag{32}$$

Подставляя $e^q = e^{j\bar{\Omega}} = \cos\bar{\Omega} + j\sin\bar{\Omega}$, из (32) получаем амплитудно-фазовую характеристику системы:

$$K^*(j\bar{\Omega}) = B^*(\bar{\Omega}) + jM^*(\bar{\Omega}), \tag{33}$$

где

$$B^*(\bar{\Omega}) = \frac{Kq_к}{2\pi q_1 q_2} + \frac{2\pi K(q_1 - q_к)\left[e^{q_1(1-\gamma)} + e^{q_1}\right]}{q_1(q_1 - q_2)(q_1^2 + 4\pi^2)} \frac{\cos\bar{\Omega} - e^{q_1}}{1 - 2e^{q_1}\cos\bar{\Omega} + e^{2q_1}} +$$

$$+ \frac{2\pi K(q_2 - q_к)\left[e^{q_2(1-\gamma)} + e^{q_2}\right]}{q_2(q_2 - q_1)(q_2^2 + 4\pi^2)} \frac{\cos\bar{\Omega} - e^{q_2}}{1 - 2e^{q_2}\cos\bar{\Omega} + e^{2q_2}}$$

— вещественная частотная характеристика,

$$M^*(\bar{\Omega}) = \frac{Kq_к}{2\pi q_1 q_2}\operatorname{ctg}\frac{\bar{\Omega}}{2} - \frac{2\pi K(q_1 - q_к)\left[e^{q_1(1-\gamma)} + e^{q_1}\right]}{q_1(q_1 - q_2)(q_1^2 + 4\pi^2)} \frac{\sin\bar{\Omega}}{1 - 2e^{q_1}\cos\bar{\Omega} + e^{2q_1}} -$$

$$- \frac{2\pi K(q_2 - q_к)\left[e^{q_2(1-\gamma)} + e^{q_2}\right]}{q_2(q_2 - q_1)(q_2^2 + 4\pi^2)} \frac{\sin\bar{\Omega}}{1 - 2e^{q_2}\cos\bar{\Omega} + e^{2q_2}}$$

— мнимая частотная характеристика.

Пример 3. Изложенную выше теорию применим к анализу конкретной системы, содержащей модулятор, однополупериодный демодулятор и постоянную непрерывную часть, а именно, проанализируем систему, рассмотренную и экспериментально исследованную в работе [3]. Структурная схема данной системы изображена на рис. 4. В состав звеньев

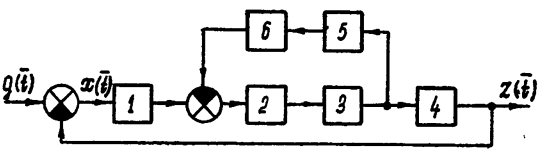


Рис. 4. Структурная схема следящей системы.

включены следующие элементы системы: в звено 1 — сельсины и однополупериодный демодулятор, 2 — электронный усилитель, 3 — двигатель, 4 — редуктор, 5 — тахогенератор, 6 — дифференцирующий контур. Обычные передаточные функции звеньев имеют вид

$$K_1(p) = K_1;\quad K_2(p) = \frac{K_2(pT_2 + 1)}{pT_1 + 1};\quad K_3(p) = \frac{K_3}{pT_д + 1};$$

$$K_4(p) = \frac{1}{p};\quad K_5(p) = K_5;\quad K_6(p) = \frac{pT_к}{pT_к + 1}.$$

Значения коэффициентов и постоянных времени равны соответственно $K_1 = 0{,}36$ *в·град*$^{-1}$; $K_2 = 900$; $K_3 = 118$ *град·в*$^{-1}$ *·сек*$^{-1}$; $K_5 = 1{,}8\cdot10^{-3}$ *в·сек·град*$^{-1}$; $T_к = T_2 = 17{,}5\cdot10^{-3}$ *сек*; $T_1 = T_д = 0{,}106$ *сек*. Питание сельсинов может производиться от сети с частотой 50 *гц* ($T = 0{,}02$ *сек*) и от сети с частотой 400 *гц* ($T = 0{,}0025$ *сек*).

Данную систему можно рассматривать как импульсную систему автоматического регулирования (рис. 3), постоянная непрерывная часть которой [3]

$$K_н(p) = K_1K_2K_3\frac{pT_к + 1}{p\left[(pT_д + 1)^2 + pK_2K_3K_5T_к\right]}. \qquad (34)$$

Подставляя $p = q/T$ ($q = pT$), получим

$$K_н(q) = \frac{K(q - q_к)}{q(q - q_1)(q - q_2)}, \qquad (35)$$

где

$$K = \frac{K_1 K_2 K_3 T_к T^2}{T_д^2}; \quad q_к = -\frac{T}{T_к};$$

$$q_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{(2T_д + T_к K_2 K_3 K_5) T}{T_д^2} \mp \sqrt{\left(\frac{2T_д + T_к K_2 K_3 K_5}{T_д^2}\right)^2 T^2 - 4\frac{T^2}{T_д^2}}\right].$$

Вычисленные по этим формулам значения K, $q_к$, q_1, q_2 для частот 50 и 400 *гц* указаны в таблице 1.

Таблица 1

	Несущая частота 50 *гц* T=0,02 *сек*	Несущая частота 400 *гц* T=0,0025 *сек*
K	23,6	0,37
$q_к$	— 1,14	—0,143
q_1	— 0,0056	—0,00071
q_2	— 6,33	—0,79

Таким образом, рассматриваемая система с модулятором и однополупериодным демодулятором приводится к амплитудной импульсной системе первого рода, показанной на рис. 3. Система имеет передаточную функцию непрерывной части:

$$K_н(q) = \frac{23{,}6\,(q + 1{,}14)}{q\,(q + 0{,}0056)\,(q + 6{,}33)}, \tag{36}$$

если она работает на несущей частоте 50 *гц*, т. е. период следования полусинусоидальных импульсов после демодулятора (см. рис. 2в) равен 0,02 *сек*, а длительность импульсов 0,01 *сек*. Если же система работает на несущей частоте 400 *гц*, т. е. период следования полусинусоидальных импульсов после однополупериодного демодулятора равен 0,0025 *сек* и длительность импульсов 0,00125 *сек*, то передаточная функция непрерывной части

$$K_н(q) = \frac{0{,}37\,(q + 0{,}143)}{q\,(q + 0{,}00071)\,(q + 0{,}79)}. \tag{37}$$

Найденная по формулам (20) передаточная функция данной системы с модулятором и однополупериодным демодулятором как импульсной системы автоматического управления определяется, как это показано в примере 2, формулами (31). Амплитудно-фазовая характеристика рассматриваемой системы находится по формулам (33). После подстановки в эти формулы численных значений из таблицы 1 получим: а) для амплитудно-фазовой характеристики системы, работающей на частоте 50 *гц*,

$$K^*(j\bar{\Omega}) = B^*(\bar{\Omega}) + jM^*(\bar{\Omega});$$

$$B^*(\bar{\Omega}) = -120{,}8 - 239\,\frac{\cos\bar{\Omega} - 0{,}9944}{1{,}9889 - 1{,}9888\cos\bar{\Omega}} - 0{,}01\,\frac{\cos\bar{\Omega} - 0{,}0017}{1{,}042 - 0{,}0034\cos\bar{\Omega}}; \tag{38}$$

$$M^*(\bar{\Omega}) = -120{,}8\operatorname{ctg}\frac{\bar{\Omega}}{2} + 239\,\frac{\sin\bar{\Omega}}{1{,}9889 - 1{,}9888\cos\bar{\Omega}} + 0{,}01\,\frac{\sin\bar{\Omega}}{1{,}042 - 0{,}0034\cos\bar{\Omega}};$$

б) для амплитудно-фазовой характеристики системы, работающей на частоте 400 *гц*,

$$K^*(j\bar{\Omega}) = B^*(\bar{\Omega}) + jM^*(\bar{\Omega});$$

$$B^*(\bar{\Omega}) = -15 - 29{,}8\,\frac{\cos\bar{\Omega} - 0{,}9993}{1{,}9986(1-\cos\bar{\Omega})} - 0{,}069\,\frac{\cos\bar{\Omega} - 0{,}4538}{1{,}206 - 0{,}9076\cos\bar{\Omega}}; \quad (39)$$

$$M^*(\bar{\Omega}) = -0{,}09\operatorname{ctg}\frac{\bar{\Omega}}{2} + 0{,}069\,\frac{\sin\bar{\Omega}}{1{,}206 - 0{,}9076\cos\bar{\Omega}}.$$

На основании формул (38) и (39) с помощью таблиц [6] построены амплитудно-фазовые характеристики системы, которые показаны на рис. 5. Годограф I построен по формуле (38) и представляет собой ам-

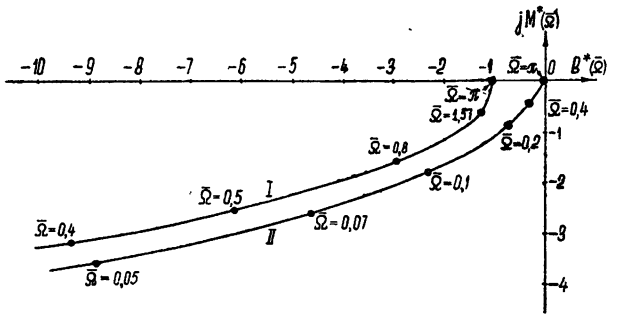


Рис. 5. Амплитудно-фазовые частотные характеристики следящей системы:
I—несущая частота 50 *гц*, II—несущая частота 400 *гц*.

плитудно-фазовую характеристику системы при несущей частоте модулятора 50 *гц*. Годограф II построен по формуле (39) и представляет собой аналогичную характеристику системы при несущей частоте модулятора 400 *гц*. Из годографов ясно, что рассматриваемая следящая система, удовлетворительно стабилизированная при несущей частоте модулятора 400 *гц*, оказывается неустойчивой при несущей частоте 50 *гц*. Этот вывод подтверждает экспериментальное исследование [3].

Отметим, что, строго говоря, следящая система (рис. 1) относится к классу линейных импульсных систем II рода, поскольку форма импульсов на выходе демодулятора непрерывно меняется при изменении огибающей. Условия, при которых данная система может быть рассчитана предложенным методом, т. е. как линейная импульсная система I рода, отмечены во введении. Нетрудно видеть, что система переменного тока, рассмотренная в примере 3, при частоте несущей 50 *гц* имеет частоту среза приведенной линейной части около 25 *гц*, т. е. не удовлетворяет одному из этих условий. Поэтому тот факт, что результаты расчета устойчивости системы при частоте несущей 50 *гц* совпадают с экспериментом, свидетельствует о том, что как реальная система II рода, так и соответствующая ей система I рода неустойчивы. Однако последнее не означает, что они полностью идентичны.

Системы автоматического управления, содержащие тракт передачи информации на несущей частоте, который состоит из модулятора, безынерционного усилительного блока и демодулятора, могут быть проана-

лизированы как амплитудные линейные импульсные системы методом дискретного преобразования Лапласа.

Полученные в работе формулы позволяют определить передаточные функции, а по передаточным функциям произвести полный анализ рассматриваемых систем.

Анализ систем с модуляцией на основе теории линейных импульсных систем при помощи полученных формул позволяет выявить влияние тракта модулятор — однополупериодный демодулятор (наличие этого тракта при определенных параметрах систем и соотношении частот спектра входного сигнала и несущей может весьма значительно повлиять на динамику систем и даже привести к их неустойчивости. Такой анализ является сравнительно простым и имеет хорошую физическую интерпретацию.

ЛИТЕРАТУРА

1 Я З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, Физматгиз, М., 1963
2. А. А. Красовский и Г. С. Поспелов, Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, М, 1962
3 Е. Л. Львов, Автоматика и телемеханика, 22, 338 (1961)
4 Н П. Власов, Изв. высш уч зав. — Электромеханика, № 2, 24 (1960).
5. В И. Гостев, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 78 (1963).
6. Л. М Милн-Томсон, Л. Дж. Комри, Четырехзначные математические таблицы. Физматгиз, М., 1961.

Поступила в редакцию
27 февраля 1964 г.

ANALYSIS OF AUTOMATIC CONTROL SYSTEM WITH MODULATOR AND HALF-WAVE DEMODULATOR

V. I. Gostev

The automatic control system (with information channel at the carrier frequency, consisting of modulator, inertionless amplifier and half-wave demodulator) is considered as a linear impulse system. The transmission function of the considered system with modulation have been obtained. The examples of the analysis and calculation of such systems have been given.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 РАДИОФИЗИКА 1965

УДК 539.293 011.4

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОННО-ДЫРОЧНОГО ПЕРЕХОДА

Л. В. Постников и Т. М. Тарантович

Метод малого параметра применяется для нахождения приближенного решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей электронно-дырочный переход. Получена операторная зависимость между током через $n-p$-переход и приложенным к нему напряжением. Для достаточно низких частот операторная зависимость сводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучению физики электронно-дырочного перехода за последние четверть века уделялось очень большое внимание. Идея о роли $n-p$-перехода в механизме выпрямления была выдвинута еще в 1938 г. [1, 2]; к 1947—49 гг. теория n—p-перехода получила достаточно строгое обоснование [3], а сам переход нашел ряд практических применений. Однако изучение n—p-перехода на этом не закончилось. Система уравнений, описывающая его поведение, несмотря на ряд упрощающих предположений*, допущенных при ее выводе, очень сложна и не имеет точного аналитического решения. Поэтому дальнейшее теоретическое исследование n—p-перехода, наряду с уточнением самой системы [4], идет по линии поиска ее различных приближенных решений [3–5, 7–9]. В данной работе такое приближение ищется для случая, когда диффузионная длина много больше радиуса Дебая и отклонения концентраций носителей зарядов от их равновесных значений достаточно малы. При этих предположениях удается найти нелинейную динамическую вольтамперную зависимость для n—p-перехода, содержащую как диффузионную, так и зарядную емкости.

Рассмотрим полупроводник, в котором примеси распределены неравномерно только вдоль координаты x, а все доноры и акцепторы полностью ионизированы. Такой полупроводник описывается известной системой уравнений [3, 7]**:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{1}{L^2}[p - n - N(x)];$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p - p_0}{\tau_p} - \frac{n - n_0}{\tau_n} - \frac{1}{qn_i}\frac{\partial i_p}{\partial x}; \tag{1}$$

* Эта система, в частности, не учитывает эффекта ударного возбуждения, имеющего место вблизи n—p-перехода при больших обратных смещениях.

** В литературе уравнение непрерывности для дырок (второе уравнение системы (1)) обычно не содержит члена $(n - n_0)\,\tau_n^{-1}$, учитывающего рекомбинацию электронов. Это пренебрежение справедливо только для достаточно больших значений концентраций примесей ([9], стр. 174). То же самое относится и к уравнению непрерывности для электронов.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{p-p_0}{\tau_p} - \frac{n-n_0}{\tau_n} + \frac{1}{qn_i}\frac{\partial i_n}{\partial x};$$

$$i_p = -qn_i D_p\left(p\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right);$$

$$i_n = -qn_i D_n\left(n\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial x}\right),$$

где $\varphi = (q/kT)\tilde{\varphi}$ — безразмерный электростатический потенциал, $L = \sqrt{\varepsilon kT/4\pi q^2 n_i}$ — радиус Дебая, p и n — безразмерные концентрации дырок и электронов, отнесенные к n_i-концентрации электронов в беспримесном полупроводнике, N — концентрация примесей.

Будем считать, что p—n-переход резкий, т. е.

$$N(x) = \begin{cases} N_p & \text{при } x < 0 \\ -N_n & \text{при } x > 0 \end{cases}.$$

Концентрации дырок и электронов в полупроводнике при термодинамическом равновесии p_0 и n_0 определяются системой (1), если в ней положить $i_p = i_n = 0$, $p = p_0$, $n = n_0$.

Введем безразмерные переменные

$$\tilde{i}_p = \frac{\tau'}{qn_i\sqrt{D\tau'}}\, i_p, \quad \tilde{i}_n = \frac{\tau'}{qn_i\sqrt{D\tau'}}\, i_n, \quad x = Lx^*,$$

где D — минимальное значение для D_p и D_n, τ' — максимальное значение для τ_p и τ_n, и выразим величины p и n через квазиуровни Ферми Φ_p и Φ_n при помощи соотношений

$$\begin{aligned} p &= e^{-(\varphi-\Phi_p)}, \\ n &= e^{\varphi-\Phi_n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда систему (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{*2}} = 2e^{v/2}\left[\operatorname{sh}\left(\varphi - \frac{u}{2}\right) + \frac{N}{2}e^{-v/2}\right]; \\ &\frac{L_0}{L\tau'}\frac{\partial \tilde{i}_p}{\partial x^*} = -\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p-p_0}{\tau_p} - \frac{n-n_0}{\tau_n}; \\ &\frac{L_0}{L\tau'}\frac{\partial \tilde{i}_n}{\partial x^*} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{p-p_0}{\tau_p} + \frac{n-n_0}{\tau_n}; \\ &\tilde{i}_p = -\frac{D_p}{D}\frac{L_0}{L}\, p\frac{\partial \Phi_p}{\partial x^*}; \\ &\tilde{i}_n = -\frac{D_n}{D}\frac{L_0}{L}\, n\frac{\partial \Phi_n}{\partial x^*}, \end{aligned} \tag{3}$$

где p и n определяются соотношениями (2), $L_0 = \sqrt{D\tau'}$ — диффузионная длина, $u = \Phi_p + \Phi_n$, $v = \Phi_p - \Phi_n$ — напряжение, приложенное к p—n-переходу [3].

Поскольку $L/L_0 \ll 1$, то аналогично тому, как это делается в дис-

кретных динамических системах [10], систему (3) можно разбить на две подсистемы, одна из которых описывает быстрые изменения искомых функций, а другая — медленные.

2. ПОДСИСТЕМА С БЫСТРЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ

Совершая предельный переход при $L/L_0 \to 0$ в системе (3)*, получим подсистему с быстрыми изменениями переменных:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{*2}} = 2e^{v/2}\left[\operatorname{sh}\psi + \frac{N}{2}e^{-v/2}\right];$$

$$\mu\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{i}_p}{\partial x^*} = 0;$$

$$\mu\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{i}_n}{\partial x^*} = 0; \qquad (4)$$

$$\Phi_p = \frac{v+u}{2} = \text{const};$$

$$\Phi_n = \frac{-v+u}{2} = \text{const},$$

где

$$\psi = \varphi - u/2, \quad \mu = L\tau'/L_0,$$

$$p = e^{v/2-\psi}, \qquad (5)$$

$$n = e^{v/2+\psi}.$$

Анализ решения первого уравнения системы (4) показывает, что быстрые изменения переменных происходят в пределах достаточно узкой переходной области $-l_p < x^* < l_n$, величину которой можно оценить из приближенного решения этого уравнения. Как показано в работе [9], приближенное решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi_p &= N_p(x^* + l_p)^2 - \psi_{p0} \quad \text{при} \quad -l_p < x^* < 0; \\ \psi_n &= -N_n(x^* - l_n)^2 + \psi_{n0} \quad \text{при} \quad 0 < x^* < l_n, \end{aligned} \qquad (6)$$

где

$$\psi_{p0} = \ln\left(\sqrt{\frac{N_p^2}{4}e^{-v} + 1} + \frac{N_p}{2}e^{-v/2}\right);$$

$$\psi_{n0} = \ln\left(\sqrt{\frac{N_n^2}{4}e^{-v} + 1} + \frac{N_n}{2}e^{-v/2}\right);$$

$$l_n = \sqrt{\frac{N_p\psi_k}{N_n(N_p+N_n)}}; \quad l_p = \sqrt{\frac{N_n\psi_k}{N_p(N_p+N_n)}}.$$

Величина $\psi_k = \psi_{p0} + \psi_{n0}$, при $v = 0$ представляет собой контактную разность потенциалов. Из соотношений (5), в которых ψ определяется выражениями (6), можно получить значения плотностей неосновных носителей зарядов на границах переходной области:

* Как видно из первого уравнения системы (3), этот переход справедлив, если выполняется неравенство $(L/L_0)\,e^{-v/2} \ll 1$.

$$p(l_n) = -\frac{N_n}{2} + \sqrt{\frac{N_n^2}{4} + e^v};$$
$$n(-l_p) = -\frac{N_p}{2} + \sqrt{\frac{N_p^2}{4} + e^v}. \tag{7}$$

Интегрируя второе и третье уравнения системы (4) внутри переходной области $-l_p < x^* < l_n$, получим связь между плотностями токов на границах этой области:

$$i_{pn} - i_{pp} = qn_i L \int_{-l_p}^{l_n} \frac{\partial p}{\partial t}\, dx^* = c_p \dot{v};$$
$$i_{np} - i_{nn} = qn_i L \int_{-l_p}^{l_n} \frac{\partial n}{\partial t}\, dx^* = c_n \dot{v}, \tag{8}$$

где

$$c_p = qn_i L \int_{-l_p}^{l_n} \frac{\partial p}{\partial v}\, dx^*, \quad c_n = qn_i L \int_{-l_p}^{l_n} \frac{\partial n}{\partial v}\, dx^*, \tag{9}$$

а p и n определяются выражениями (5), в которые вместо ψ следует подставить решение (6) первого уравнения системы (4).

Для значений напряжения, удовлетворяющих неравенству $e^v \ll N_p^2/4$, $N_n^2/4$,

$$\psi_{p0} = \ln N_p - v/2;$$
$$\psi_{n0} = \ln N_n - v/2.$$

В этом случае можно получить приближенные выражения величин c_p и c_n в следующем виде:

$$c_p = qn_i L N_p \frac{\partial l_p}{\partial v}\left(1 - e^{-N_p l_p^2}\right) - \frac{qn_i L}{N_n^{3/2}} e^v \int_0^{\sqrt{N_n}\, l_n} e^{z^2}\, dz -$$
$$- \frac{qn_i L}{N_n} \frac{\partial l_n}{\partial v} e^{v+N_n l_n^2} \simeq -\sqrt{\frac{N_n N_p}{N_p + N_n}} \frac{qn_i L}{2\sqrt{\ln N_p N_n - v}} -$$
$$- \frac{qn_i L}{N_n^{3/2}} e^v \int_0^{\sqrt{N_n}\, l_n} e^{z^2}\, dz.$$

При больших отрицательных значениях v вторым членом последнего выражения можно пренебречь, так как он убывает гораздо быстрее первого. Тогда, переходя к размерным величинам, получим

$$c_p = -\frac{\varepsilon}{8\pi L}\sqrt{\frac{N_p N_n}{(N_p + N_n) n_i \left[\ln(N_n N_p / n_i^2) - (q/kT) v\right]}}. \tag{10}$$

Из симметрии последнего выражения относительно индексов p и n можно заключить, что $c_n = c_v = -c$.

3. ПОДСИСТЕМА С МЕДЛЕННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПЕРЕМЕННЫХ

Вне переходной области $-l_p < x^* < l_n$ в первом уравнении системы (1) можно пренебречь членом $\partial^2\varphi/\partial x^2$ по сравнению с членами, стоящими в правой части; тогда система (1) запишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{p-p_0}{\tau_p} - \frac{n-n_0}{\tau_n} - \frac{1}{qn_i}\frac{\partial i_p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{n-n_0}{\tau_n} - \frac{p-p_0}{\tau_p} + \frac{1}{qn_i}\frac{\partial i_n}{\partial x};$$

$$i_p = -qn_i D_p\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right);$$

$$i_n = -qn_i D_n\left(n\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial x}\right);$$

$$p - n = N.$$

Поскольку при термодинамическом равновесии вне переходной области $p_0 - n_0 = N$, то отклонения концентраций дырок и электронов от их равновесных значений будут одинаковыми:

$$p - p_0 = n - n_0 = y.$$

При $y \ll p_0, n_0$ уравнения медленных изменений переменных запишутся в виде

$$\tau\frac{\partial y}{\partial t} + y + \frac{\tau}{qn_i}\frac{\partial i_p}{\partial x} = 0;$$

$$\tau\frac{\partial y}{\partial t} + y - \frac{\tau}{qn_i}\frac{\partial i_n}{\partial x} = 0;$$

$$i_p = -qn_i D_p\left(p_0 z + \frac{\partial y}{\partial x}\right); \qquad (11)$$

$$i_n = -qn_i D_n\left(n_0 z - \frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

где $z = \partial(\varphi-\varphi_0)/\partial x$, а $1/\tau = 1/\tau_p + 1/\tau_n$.

Для нахождения решения системы (11) перейдем к преобразованным по Лапласу величинам $\bar{y}$, $\bar{i}_p$, $\bar{i}_n$, $\bar{z}$. Решение преобразованной системы для p-области при граничных условиях

$$\bar{y} = 0 \quad \text{при} \quad x \to -\infty;$$

$$\bar{y} = \bar{u}_p = \bar{n}(-l_p) - \bar{n}_{0p} \quad \text{при} \quad x = 0$$

имеет вид

$$\bar{i}_{pp} = \frac{qn_i D_{pp} p_{0p}}{\sigma_p}\bar{I} - \frac{qn_i(1+\lambda\tau_p)}{\tau_p\nu_p}\bar{u}_p e^{\nu_p x};$$

$$\bar{i}_{np} = \frac{qn_i D_{np} n_{0p}}{\sigma_p}\bar{I} + \frac{qn_i(1+\lambda\tau_p)}{\tau_p\nu_p}\bar{u}_p e^{\nu_p x}; \qquad (12)$$

$$\bar{z}_p = -\frac{\bar{I}}{\sigma_p} - \frac{(1+\lambda\tau_p)\,(L_{pp}^2 - L_{np}^2)}{L_{pp}^2 L_{np}^2 (p_{0p} + n_{0p})\,\nu_p}\,\bar{u}_p\, e^{\nu_p x};$$

$$\bar{y}_p = \bar{u}_p\, e^{\nu_p x}.$$

Для n-области при граничных условиях

$$\bar{y} = 0 \qquad \text{при} \qquad x \to \infty;$$

$$\bar{y} = \bar{u}_n = \bar{p}(l_n) - \bar{p}_{0n} \qquad \text{при} \qquad x = 0$$

решение имеет вид

$$\begin{aligned}
\bar{i}_{pn} &= \frac{qn_i D_{pn} p_{0n}}{\sigma_n}\,\bar{I} + \frac{qn_i(1+\lambda\tau_n)}{\tau_n \nu_n}\,\bar{u}_n\, e^{-\nu_n x};\\
\bar{i}_{nn} &= \frac{qn_i D_{nn} n_{0n}}{\sigma_n}\,\bar{I} - \frac{qn_i(1+\lambda\tau_n)}{\tau_n \nu_n}\,\bar{u}_n\, e^{-\nu_n x};\\
\bar{z}_n &= -\frac{\bar{I}}{\sigma_n} + \frac{(1+\lambda\tau_n)\,(L_{nn}^2 - L_{pn}^2)}{L_{nn}^2 L_{pn}^2 (p_{0n} + n_{0n})\,\nu_n}\,\bar{u}_n\, e^{-\nu_n x};\\
\bar{y}_n &= \bar{u}_n\, e^{-\nu_n x};
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\bar{I} = \bar{i}_p + \bar{i}_n$ — изображение плотности полного тока в полупроводнике, $\sigma_p = qn_i(D_{pp} p_{0p} + D_{np} n_{0p})$ и $\sigma_n = qn_i(D_{pn} p_{0n} + D_{nn} n_{0n})$ — проводимости соответственно p- и n-областей, λ — комплексная частота,

$$\nu_p = \sqrt{\frac{(1+\lambda\tau_p)\,(L_{pp}^2 p_{0p} + L_{np}^2 n_{0p})}{L_{np}^2 L_{pp}^2 (p_{0p} + n_{0p})}},$$

$$\nu_n = \sqrt{\frac{(1+\lambda\tau_n)\,(L_{pn}^2 p_{0n} + L_{nn}^2 n_{0n})}{L_{nn}^2 L_{pn}^2 (p_{0n} + n_{0n})}}$$

— корни характеристического уравнения системы (11) соответственно для p- и n-областей ($L_p = \sqrt{D_p \tau}$, $L_n = \sqrt{D_n \tau}$).

Используя полученные выше граничные условия (7) и (8), можно уравнения для токов в решениях (12) и (13) свести к одной вольтамперной зависимости:

$$\begin{aligned}
\bar{J} = S\bar{I} = Skqn_i \Bigg\{ \sqrt{1+\lambda\tau_p}\,\gamma_p \left(-\frac{N_p}{2} + \sqrt{\frac{N_p^2}{4} + e^v} - \bar{n}_{0p} \right) +\\
+ \sqrt{1+\lambda\tau_n}\,\gamma_n \left(-\frac{N_n}{2} + \sqrt{\frac{N_n^2}{4} + e^v} - \bar{p}_{0n} \right) \Bigg\} + \lambda k S \bar{Q},
\end{aligned} \tag{14}$$

где S — площадь p—n-перехода,

$$\frac{1}{k} = qn_i \left(\frac{D_{pp} p_{0p}}{\sigma_p} - \frac{D_{pn} p_{0n}}{\sigma_n} \right) = qn_i \left(\frac{D_{nn} n_{0n}}{\sigma_n} - \frac{D_{np} n_{0p}}{\sigma_p} \right);$$

$$\gamma_p = \frac{L_{np} L_{pp} \sqrt{p_{0p} + n_{0p}}}{\tau_p \sqrt{L_{pp}^2 p_{0p} + L_{np}^2 n_{0p}}};$$

$$\gamma_n = \frac{L_{nn} L_{pn} \sqrt{p_{0n} + n_{0n}}}{\tau_n \sqrt{L_{pn}^2 p_{0n} + L_{nn}^2 n_{0n}}};$$

$$Q = \int c dv.$$

Нетрудно усмотреть, что для стационарного случая ($\lambda = 0$) малых напряжений ($e^v \ll N_n^2/4$, $N_p^2/4$) и больших концентраций примесей ($p_{0p} \gg n_{0p}$, $n_{0n} \gg p_{0n}$) выражение (14) совпадает с хорошо известной вольтамперной зависимостью [3, 9]:

$$J = J_s(e^v - 1),$$

где

$$J_s = qSn_i\left(\frac{D_{pn} p_{0n}}{L_{pn}} + \frac{D_{np} n_{0p}}{L_{np}}\right).$$

Из выражения (14) следует также, что для однородного полупроводника ($N_p = -N_n$, $p_{0p} = p_{0n}$, $n_{0p} = n_{0n}$) падение напряжения на переходе становится равным нулю. Зависимость (14) в общем случае не может быть записана в виде обыкновенного дифференциального уравнения; однако для достаточно малых частот ($\lambda\tau_n$, $\lambda\tau_p \ll 1$) можно написать ее приближенное выражение в виде

$$\bar{J} = Skqn_i\left\{\gamma_p\left(1 + \lambda\frac{\tau_p}{2}\right)\bar{u}_p + \gamma_n\left(1 + \lambda\frac{\tau_n}{2}\right)\bar{u}_n\right\} + \lambda kS\bar{Q}.$$

Тогда, переходя к уравнению в оригиналах, получим

$$J = f(v) + [c_д(v) + c_з(v)]\frac{dv}{dt},$$

где

$$f(v) = Skqn_i\left[\gamma_p\left(-\frac{N_p}{2} + \sqrt{\frac{N_p^2}{4} + e^v} - n_{0p}\right) + \right.$$

$$\left. + \gamma_n\left(-\frac{N_n}{2} + \sqrt{\frac{N_n^2}{4} + e^v} - p_{0n}\right)\right]$$

— активная составляющая тока через p—n-переход,

$$c_д(v) = \frac{Skqn_i}{4} e^v\left\{\frac{\gamma_p\tau_p}{\sqrt{\frac{N_p^2}{4} + e^v}} + \frac{\gamma_n\tau_n}{\sqrt{\frac{N_n^2}{4} + e^v}}\right\}$$

— диффузионная емкость перехода, а величина

$$c_з(v) = kSc,$$

где c определяется выражениями (9), — его зарядная емкость.

Из рассмотренного следует, что в эквивалентной схеме p—n-перехода зарядная емкость действует параллельно нелинейной активной проводимости и диффузионной емкости, что до сих пор принималось, вообще говоря, без достаточных оснований*. Выражение для зарядной

* Вольтамперная зависимость, аналогичная (14), для несколько иной исходной системы и в другом приближении получена в работе [7]

емкости (10) дает ту же зависимость от напряжения, какая получается при проведении аналогии с плоским конденсатором [9]; величина же емкости оказывается вдвое меньшей, что обусловлено распределением заряда внутри всей переходной области, в то время как в плоском конденсаторе заряд сосредоточен на обкладках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И Давыдов, Д И. Блохинцев, ДАН СССР, 21, 22 (1938).
2. Б. И. Давыдов, ДАН СССР, 20, 279 (1938).
3. W. Shockly, Bell System Tech. J., 28, 435 (1949).
4. А. И. Губанов, Теория выпрямляющего действия полупроводников, Гостехиздат, М., 1956
5. Б. М. Вул, Б. И. Сегал, ЖТФ, 28, 681 (1958).
6. Б М. Вул, Физика твердого тела, 3, 204 (1961).
7. Э. И. Рашба, К. Б. Толпыго, ЖТФ, 25, 1335 (1955).
8. Э. И Рашба, ЖТФ, 25, 1663 (1955).
9. Г. Е. Пикус, Сб под ред А. Ф. Иоффе, Полупроводники в науке и технике, изд АН СССР, М.—Л, 1957, стр. 148
10. А. А Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 18 мая 1964 г.

TO THE THEORY OF ELECTRON-HOLE TRANSITION

L. V. Postnikov, T. M Tarantovich

The method of a small parameter is used to find the approximate solution of the system of partial derivative equation describing the electron-hole transition. The operator dependence has been obtained between current through the n—p transition and applied voltage. For frequencies low enough the operator dependence is reduced to the ordinary nonlinear differential equation.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VIII, № 2 *РАДИОФИЗИКА* *1965*

УДК 523.164 32 : 522.617

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ СОЛНЕЧНОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ОБЩИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ СОЛНЦА

И. Ф. Белов

Измерения общего магнитного поля Солнца до настоящего времени удалось осуществить только в оптическом диапазоне [1]. Попытки измерить это поле в радиодиапазоне из-за сравнительно невысокой точности измерений не привели к положительным результатам [2] Результаты работы [3] вызывают сомнение ввиду сравнительно большой измеренной степени поляризации.

18-го июня 1963 г в трехсантиметровом диапазоне были проведены первые измерения поляризации, обусловленной общим магнитным полем Солнца, методом сканирования диаграммы направленности антенны с управляемой поляризацией излучения, позволившим значительно повысить точность измерений [4]. В экспериментах было использовано параболическое зеркало диаметром 4 *м* Сканирование диаграммы направленности осуществлялось только в плоскости меридиана путем переключения двух излучателей, установленных в фокальной плоскости зеркала Излучатели представляли собой ферритовые стержни, помещенные в раскрывы двух прямоугольных волноводов Управление поляризацией производилось путем изменения величины и направления внешнего магнитного поля, приложенного к ферритам Сопровождение Солнца осуществлялось с помощью экваториальной установки

При наведении антенны с линейной поляризацией на эффективный центр радиоизлучения сигнал на выходе приемника равнялся нулю*. При изменении поляризации с линейной на круговую на ленте самописца было отмечено приращение сигнала $\sim 1°$К; при изменении знака круговой поляризации отмечалось такое же приращение, но уже другого знака Температура антенны в отсутствие сканирования $T_a = 3000°$К, Степень поляризации $p \simeq 3{,}3 \cdot 10^{-4}$.

Для того, чтобы оценить величину общего магнитного поля Солнца из этих измерений, необходимо знать его распределение по диску Солнца, так как в эксперименте получено значение степени поляризации, усредненное по части диска. В случае однородного распределения магнитного поля оценку легко провести, например, по формуле [5]

$$p \simeq 2 \frac{\omega_H}{\omega} \cos \alpha,$$

где $\omega_H = 1{,}76 \cdot 10^7$, H— гирочастота, ω — циклическая частота, α — угол между направлением на источник излучения и магнитным полем. Из формулы находим, что $H \cos \alpha \simeq 0{,}6$ *гаусса*. Однако, если принять, что распределение общего магнитного поля носит дипольный характер [6] (что, вероятно, значительно ближе к истинному), то приведенная оценка окажется заниженной в несколько раз. Кроме того, следует иметь в виду, что в некоторой области диска диаграммы направленности при сканировании перекрываются. Это обстоятельство также приводит к уменьшению полезного эффекта.

Точность выполненных измерений недостаточно высокая, так как приращение температуры антенны было примерно равно полной ширине шумовой дорожки приемника, которая при постоянной времени $\tau = 36$ *сек* равнялась 1,5°К. Тщательное рассмотрение возможных аппаратурных ошибок показало, что они были меньше полезного эффекта

В дальнейшей серии наблюдений отмечены большие величины поляризованной по кругу компоненты (~ 20 — 30°К), которые, вероятно, обусловлены приемом радиоизлучения, связанного с пятнами. В те дни, когда наблюдаемый эффект поляризации $\sim 1°$К, на Солнце заметных пятен нами не наблюдалось. Однако не исключено, что вс

* Эффективный центр радиоизлучения Солнца находился на равносигнальном направлении.

время наблюдений на Солнце присутствовали локальные образования (например, флокулы) со слабыми магнитными полями Вклад от таких образований можно отделить от полезного сигнала, если проводить измерения от восхода до захода Солнца при неизменном направлении плоскости сканирования при сопровождении. В нашей аппаратуре осуществить это условие было довольно трудно.

В настоящее время заканчивается разработка приемной аппаратуры с меньшим уровнем собственных шумов Результаты наблюдений будут изложены в следующем сообщении.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность М. А. Семеновой, Б. В. Тимофееву, В. С. Господчикову за помощь при подготовке аппаратуры и за участие в проведении наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. де Ягер, Строение и динамика атмосферы Солнца, ИЛ, М, 1962
2. W. N. Ghristiansen, D. E. Yabsley, B. Y. Mills, Austral. J. Sci. Res., **A-2**, 506 (1949).
3. Н Л. Кайдановский, Э. Г Мирзабекян, С Э Хайкин, Труды 5 совещания по вопросам космогонии, изд АН СССР, М, 1956.
4. И. Ф. Белов, Геомагнетизм и аэрономия, **6**, 1106 (1964).
5. В. В. Железняков, Астрон ж, **5**, 829 (1963).
6. S. F. Smerd, Austral. J. Sci. Res., **A-2**, 265 (1950).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 14 января 1965 г

УДК 621.396.671

К ТЕОРИИ СИНТЕЗА АНТЕНН

В. Н. Дымский

Как известно, векторная комплексная диаграмма направленности $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_0)$ произвольной излучающей системы электрических токов может быть представлена линейным оператором вида

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_0) = U\boldsymbol{I} = \int\limits_v [\boldsymbol{r}_0 [\boldsymbol{I}\, \boldsymbol{r}_0]]\, e^{jk\boldsymbol{r}_0 \boldsymbol{\rho}}\, dv, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r}_0$ — радиальный орт сферической системы координат, $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор области v, в которой распределены токи с плотностью $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\rho})$, $k = \omega/c = \text{const}$ — волновое число.

Считая диаграммы направленности и функции распределения тока элементами пространства Гильберта, оператору U всегда можно сопоставить сопряженный оператор V, определенный равенством

$$(\boldsymbol{PU\rho}) = (V\boldsymbol{P}\boldsymbol{\rho}). \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}_0)$ — произвольная векторная комплексная функция, определенная на сфере единичного радиуса и тангенциальная этой сфере, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\rho})$ — произвольная векторная комплексная функция области v. Скобки в выражении (2) обозначают скалярное произведение функций.

Соотношение (2) однозначно определяет оператор V Интегральная форма последнего имеет вид

$$V\boldsymbol{P} = \oint \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}_0)\, e^{-jk\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{\rho}}\, ds \tag{3}$$

(интегрирование выполняется по единичной сфере—области задания диаграмм направленности).

Заметим, что если какая-либо функция $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\rho})$, определенная в области v, ортогональна подпространству значений оператора V (т е. $(\boldsymbol{qVP}) = 0$ при любой тангенциальной сфере функции $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}_0)$), то в силу соотношения (2) имеет место следующее равенство:

$$\| U\boldsymbol{q} \|^2 = (U\boldsymbol{q}\ U\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{q}V U\boldsymbol{q}) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$U\boldsymbol{q} = 0, \tag{4}$$

т. е. функция $q(\rho)$ может представлять лишь неизлучающее распределение тока. Поскольку любое распределение тока, рассматриваемое как функция гильбертова пространства, можно единственным образом представить в виде ортогональной суммы:

$$I = VP + q,$$

то, согласно условию (4),

$$UI = UVP.$$

Отсюда следует, что любая диаграмма направленности $F(r_0)$, представимая в виде (1), т е реализуемая источниками, распределенными в заданной конечной области v произвольной геометрической конфигурации, может быть воспроизведена током, представленным в этой области в виде интеграла поперечных плоских волн (3).

Расчет этого распределения тока по заданной диаграмме направленности сводится к решению уравнения

$$F = UVP, \tag{5}$$

где оператор UV является линейным самосопряженным оператором Этот оператор использован в работе [3] при расчете объемного распределения источников. Распределение тока

$$I(\rho) = \begin{cases} V(UV)^{-1}F & \text{в области } v \\ 0 & \text{вне } v \end{cases}, \tag{6}$$

удовлетворяющее уравнению (5) и точно решающее задачу синтеза, обладает минимальной нормой, так как любое другое распределение, точно реализующее заданную диаграмму направленности, может отличаться от (6) на некоторое неизлучающее распределение $q(\rho)$. Последнее будет приводить к увеличению нормы токов, а следовательно, к увеличению реактивности антенного устройства

Таким образом, введение оператора V позволяет указать общий метод решения задачи синтеза антенны произвольной (заданной) конфигурации, при котором обеспечивается минимальная норма токов

При расчете токов в фиксированной области вместо оператора UV может быть также использован оператор VU При этом решение будет иметь вид

$$I(\rho) = \begin{cases} (VU)^{-1}VF & \text{в области } v \\ 0 & \text{вне } v. \end{cases}$$

Самосопряженный оператор VU фактически совпадает с оператором, полученным на основе анализа дифференциальных соотношений в работе [2] и рассмотренным там на примере дискретной системы источников

Сказанное естественно распространяется и на хорошо изученную задачу синтеза линейной антенны конечной длины $2l$ с непрерывным распределением тока. В этом случае $\rho = zz_0$ ($-l \leqslant z \leqslant l$) и при диаграмме направленности, заданной в виде $F(r_0)=\theta_0 R(\zeta)\sin\theta$; $\zeta = k\cos\theta$ (z_0, θ_0 — координатные орты), операторы (1) и (3) принимают вид

$$R(\zeta) = UI = \int_{-l}^{l} I(z)\, e^{i\zeta z}\, dz; \tag{7}$$

$$VP = \int_{-k}^{k} P(\zeta)\, e^{-i\zeta z}\, d\zeta. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) может быть найдено в форме

$$I(z) = \begin{cases} VP = V(UV)^{-1}R & \text{при } |z| \leqslant l \\ 0 & \text{при } |z| > l \end{cases}. \tag{9}$$

На основании теоремы Винера-Палея из выражений (8), (9) следует, что любое излучающее распределение тока линейной антенны заданной длины $2l$ может быть доопределено в комплексной плоскости как целая функция конечной степени, меньшей или равной k

Как известно (см., например, [1], § 4, 1), любая непрерывная функция, заданная на конечном отрезке $[-l, l]$, с любой степенью точности может быть аппроксимирована целой функцией заданной конечной степени $\leqslant k$ Ввиду этого решение задачи синтеза в форме (9) пригодно для любой диаграммы направленности, реализуемой линейной антенной с непрерывным распределением тока.

Наряду с отмеченной выше возможностью точного решения задачи синтеза с помощью оператора V этот оператор можно использовать для качественных приближенных решений этой задачи в условиях, когда геометрическая конфигурация области v

предварительно не задается В этой связи укажем ряд свойств векторного поля $\boldsymbol{p}(\rho)$, определяемого оператором V по заданной диаграмме направленности.

$$\boldsymbol{p}(\rho) = V\boldsymbol{F}. \tag{10}$$

Сравнивая поле $\boldsymbol{p}(\rho)$ в произвольной конечной области пространства v с произвольным распределением тока $\boldsymbol{I}(\rho)$, обладающим в этой области той же нормой $\| \boldsymbol{I} \| = \| p \|$, используя соотношение (2) и неравенство Коши—Буняковского, легко получим

$$|(\boldsymbol{FUI})| = |(\boldsymbol{pI})| \leqslant \| p \|^2 = (\boldsymbol{FUp}),$$

причем равенство достигается лишь при условии, что $\boldsymbol{I}(\rho) = \boldsymbol{p}(\rho)$ Последнее означает, что в области произвольной конфигурации при одной и той же норме токов источники

$$\boldsymbol{I}(\rho) = \begin{cases} \boldsymbol{p}(\rho) & \text{в области } v \\ 0 & \text{вне } v \end{cases}$$

воспроизводят диаграмму направленности, проекция которой на заданную диаграмму $|(\boldsymbol{FUI})|$ максимальна.

Последнее справедливо и локально для сколь угодно малой области v, т. е. для одиночного точечного источника. В этом случае для равных по модулю векторов $\boldsymbol{I}$ и $\boldsymbol{p}$, в любой точке пространства справедливо соотношение

$$|(\boldsymbol{FUI})| = |\boldsymbol{pI}^*| \leqslant |\boldsymbol{p}(\rho)|^2 = (\boldsymbol{FUp}). \tag{11}$$

Согласно (11), проекция индивидуальной комплексной векторной диаграммы направленности точечного источника на заданную диаграмму максимальна при условии, что он ориентирован и сфазирован в соответствии с полем $\boldsymbol{p}(\rho)$ Из неравенства (11) также следует, что наиболее эффективными в указанном смысле местами размещения точечных источников являются области наибольших значений поля $|\boldsymbol{p}(\rho)|$.

Ясно, однако, что источники $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{p}$ в общем случае не воспроизводят точно заданной диаграммы Из сравнения (10) и (6) очевидно, что поле $\boldsymbol{p}(\rho)$ может совпадать с точностью до постоянного множителя (собственного значения оператора UV) с искомым распределением тока лишь при условии, что заданная диаграмма направленности является собственной функцией оператора UV. Можно гарантировать также достаточную близость поля $\boldsymbol{p}(\rho)$ к точному решению задачи, если для рассматриваемой области пространства спектр собственных значений оператора UV на участке представления функции $\boldsymbol{F}(r_0)$ достаточно равномерен Последнее может быть выполнено лишь для достаточно больших по сравнению с длиной волны областей v

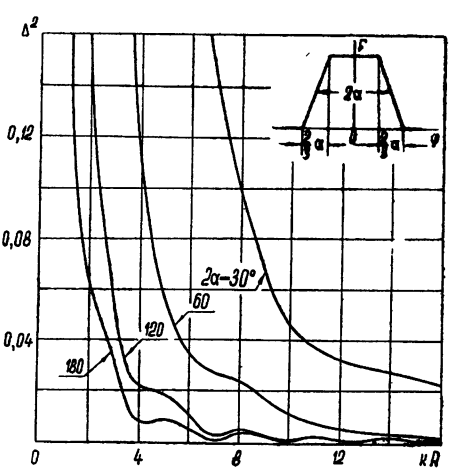


Рис. 1.

Можно показать, что при неограниченном расширении области v источники $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{p}$ асимптотически решают задачу синтеза, обеспечивая среднеквадратичную сходимость воспроизводимой диаграммы к заданной На рис. 1 сходимость такого решения иллюстрируется на примере двухмерной задачи при задании диаграммы направленности в виде трапеции со средней шириной 2α и непрерывном распределении источников $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{p}$ в круге радиуса R. С ростом R среднеквадратичное отклонение Δ воспроизводимой диаграммы от заданной стремится к нулю тем быстрее, чем шире заданная диаграмма

Поле $\boldsymbol{p}(\rho)$ может быть использовано и для качественного выбора эффективной формы излучающего устройства На рис 2 приведен рельеф модуля $|\boldsymbol{p}(\rho)|$ и эквифазные кривые поля $\boldsymbol{p}(\rho)$ для трапецоидальной диаграммы, имеющей среднюю ширину 120° и поляризованную ортогонально рассматриваемой плоскости В силу симметрии

$$p(\rho, \varphi) = p(\rho, -\varphi) = p^*(\rho, \varphi \mp \pi)$$

на рисунке показан лишь один квадрант

Жирными точками показан вариант размещения дискретных источников $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{p}$ расположенных по одному на эквифазных поверхностях с интервалами $\pi/2$ в точках, максимума $|p|$ для данной поверхности Источники размещены симметрично в четырех квадрантах На рис 3 показана диаграмма, воспроизводимая этой системой источников, в сравнении с заданной трапецией (пунктирная линия)

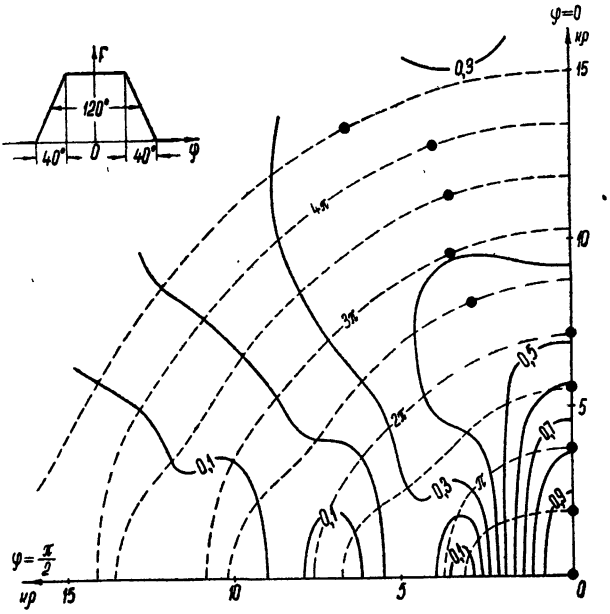


Рис. 2. Рельеф поля $p(\rho)=VF$, соответствующего трапециодальной диаграмме направленности: ——— — линии уровня $|p|=\text{const}$, — — — линии равной фазы.

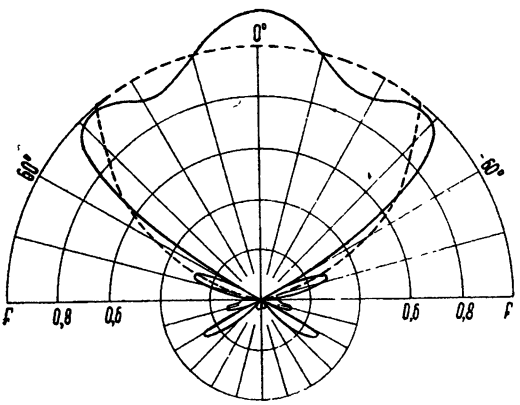


Рис. 3.

При выбранном числе излучателей эта диаграмма не является оптимальной в смысле среднеквадратичного отклонения и может быть улучшена. Однако при фиксированной норме токов любая их коррекция приведет к уменьшению величины $|(\bar{F}U\bar{I})|$, что будет связано со снижением уровня излучаемой мощности, а следовательно, с увеличением реактивности излучающей системы

Большая общность, относительная простота и наглядность построения приближенных решений с помощью поля $p(\rho)$ часто могут оправдать его использование при расчете антенных устройств с малой реактивностью

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Хургин, В. П Яковлев, Методы теории целых функций, Физматгиз, М., 1962.
2. C. Müller, Trans. IRE, **AP-4**, 3 (1956).
3. В. Н. Дымский, Труды Казанского авиац. ин-та, 82 (1964).

Казанский авиационный институт

Поступила в редакцию
10 июня 1964 г.

УДК 539.294

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ НА ГРАНИЦЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

В. Ф. Марченко

Законы отражения и преломления световых волн на границе нелинейного диэлектрика, материальное уравнение которого при больших амплитудах распространяющихся волн имеет вид

$$D_l = \varepsilon_{ik} E_k + 4\pi\chi_{l,\,kk'} E_k E_{k'}, \tag{1}$$

рассматривались в работах [1, 2]. Вычисление поправок к формулам Френеля, обусловленных нелинейным характером зависимости (1), производилось путем «сшивания» первого приближения решения волнового уравнения в слабонелинейной среде ($|\chi| \sim \sim \mu \ll 1$) с соответствующим решением волнового уравнения в линейной среде с помощью граничных условий. В настоящей заметке рассматривается вопрос об энергетических соотношениях на границе нелинейного диэлектрика.

Поскольку формирование отраженных и преломленных волн оптического диапазона происходит в слое толщиной порядка длины волны, будем считать, следуя [3] и учитывая малость параметра нелинейности χ, что вблизи границы преломленную волну можно представить в виде

$$\boldsymbol{E}_{\text{пр}} = \boldsymbol{E}^{(0)}_{\text{пр}} + \mu\, \boldsymbol{E}^{(1)}_{\text{пр}} + \mu^2 \boldsymbol{E}^{(2)}_{\text{пр}} + \ldots \tag{2}$$

Из граничных условий следует, что отраженная волна будет иметь такой же вид:

$$\boldsymbol{E}_{\text{отр}} = \boldsymbol{E}^{(0)}_{\text{отр}} + \mu\, \boldsymbol{E}^{(1)}_{\text{отр}} + \mu^2 \boldsymbol{E}^{(2)}_{\text{отр}} + \ldots \tag{3}$$

Очевидно, что аналогичным образом могут быть представлены и магнитные поля $\boldsymbol{H}_{\text{отр}}$ и $\boldsymbol{H}_{\text{пр}}$. При сделанных предположениях закон сохранения усредненного по времени потока энергии $\widetilde{\boldsymbol{S}} = \frac{c}{4\pi}[\widetilde{\boldsymbol{EH}}]$, протекающего через границу раздела линейного и нелинейного диэлектрика, будет иметь вид

$$\boldsymbol{n}\widetilde{\boldsymbol{S}}^{(0)}_{\text{пр}} - \boldsymbol{n}\widetilde{\boldsymbol{S}}^{(0)}_{\text{отр}} = \boldsymbol{n}\widetilde{\boldsymbol{S}}^{(0)}_{\text{пад}}; \tag{4а}$$

$$\mu\,(\boldsymbol{n}\widetilde{\boldsymbol{S}}^{(1)}_{\text{пр}} - \boldsymbol{n}\widetilde{\boldsymbol{S}}^{(1)}_{\text{отр}}) = 0; \tag{4б}$$

$$\mu^2\,(\boldsymbol{n}\widetilde{\boldsymbol{S}}^{(2)}_{\text{пр}} - \boldsymbol{n}\widetilde{\boldsymbol{S}}^{(2)}_{\text{отр}}) = 0 \tag{4в}$$

($\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности раздела).

Соотношения (4) непосредственно следуют из условий непрерывности на границе тангенциальных составляющих полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Поскольку выражения для $\boldsymbol{S}^{(m)}_{\text{пр, отр}}$ ($m = 1, 2, \ldots$) учитывают нелинейное взаимодействие волн различных частот, возникающих на границе раздела, представляет интерес вычислить величины $\boldsymbol{S}^{(m)}_{\text{пр, отр}}$ на конкретном примере. С этой целью рассмотрим частный случай нормального падения линейно поляризованной электромагнитной волны

$$\boldsymbol{E}_{\text{пад}} = \boldsymbol{e}\,\mathcal{E}_{\text{пад}}\, e^{i[\omega t - k(\omega)y]} + \boldsymbol{e}\,\mathcal{E}^{*}_{\text{пад}}\, e^{-i[\omega t - k(\omega)y]} \qquad (|\boldsymbol{e}| = 1)$$

на поверхность одноосного прозрачного кристалла. Чтобы упростить выкладки, ограничимся случаем полубесконечного кристалла класса C_{3v} (например, турмалина), оптическая ось z которого параллельна поверхности раздела. При выбранных условиях в выражении (1) отличными от нуля будут лишь члены, содержащие компоненту тензора $\chi_{z,\,zz} = \chi$ (поскольку для вычисления первого и последующих приближений существенны лишь z-компоненты электрического поля, индекс z в дальнейшем опускаем). Таким образом, решение волнового уравнения в нелинейном диэлектрике будет слагаться из нулевого приближения и поправок, последовательно находимых из уравнений

$$\frac{\partial^2 E^{(1)}_{\text{пр}}}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon^{(0)}_e}{c^2}\frac{\partial^2 E^{(1)}_{\text{пр}}}{\partial t^2} = \frac{4\pi\chi}{c^2}\frac{\partial^2 [E^{(0)}_{\text{пр}}]^2}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon^{(1)}_e}{c^2}\frac{\partial^2 E^{(0)}_{\text{пр}}}{\partial t^2}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 E^{(2)}_{\text{пр}}}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon^{(0)}_e}{c^2}\frac{\partial^2 E^{(2)}_{\text{пр}}}{\partial t^2} = \frac{8\pi\chi}{c^2}\frac{\partial^2 [E^{(0)}_{\text{пр}} E^{(1)}_{\text{пр}}]}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon^{(1)}_e}{c^2}\frac{\partial^2 E^{(1)}_{\text{пр}}}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon^{(2)}_e}{c^2}\frac{\partial^2 E^{(0)}_{\text{пр}}}{\partial t^2}, \tag{6}$$

где параметр χ и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_e = \varepsilon_e^{(0)} + \mu\varepsilon_e^{(1)} + \mu^2\varepsilon_e^{(2)} + \ldots$, соответствующая необыкновенной волне, являются функциями частоты. Линейную среду предполагаем изотропной с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$.

Первое приближение (ср. [1])*:

$$E_{\text{пр}}^{(1)} = \mathcal{E}_c^{(1)} e^{i[2\omega t - k_e(2\omega)y]} - \frac{4\pi\chi(2\omega)\left[\mathcal{E}_{\text{пр}}^{(0)}\right]^2}{\varepsilon_e(2\omega) - \varepsilon_e(\omega)} e^{i[2\omega t - 2k_e(\omega)y]} + \text{к. с.}; \tag{7}$$

$$E_{\text{отр}}^{(1)} = \mathcal{E}_{\text{отр}}^{(1)} e^{i[2\omega t + k(2\omega)y]} + \text{к. с.}, \tag{8}$$

где

$$\varepsilon_e = \varepsilon_e^{(0)}, \qquad \varepsilon_e^{(1)} = 0,$$

$$\mathcal{E}_c^{(1)} - \frac{4\pi\chi(2\omega)\left[\varepsilon^{1/2}(2\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(\omega)\right]\left[\mathcal{E}_{\text{пр}}^{(0)}\right]^2}{\left[\varepsilon^{1/2}(2\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\right]\left[\varepsilon_e(2\omega) - \varepsilon_e(\omega)\right]},$$

$$\mathcal{E}_{\text{отр}}^{(1)} = -\frac{4\pi\chi(2\omega)\left[\mathcal{E}_{\text{пр}}^{(0)}\right]^2}{\left[\varepsilon^{1/2}(2\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\right]\left[\varepsilon_e^{1/2}(2\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(\omega)\right]}.$$

Второе приближение

$$E_{\text{пр}}^{(2)} = \mathcal{E}_c^{(2)} e^{i[\omega t - k_e(\omega)y]} - \frac{2\pi\chi(\omega)\,\mathcal{E}_{\text{пр}}^{*(0)}\,\mathcal{E}_c^{(1)}}{\varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\left[\varepsilon_e^{1/2}(\omega) - \varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\right]} e^{i[\omega t - [k_e(2\omega) - k_e(\omega)]y]} + \text{к. с.}; \tag{9}$$

$$\varepsilon_e^{(2)} = \frac{32\pi^2\chi(2\omega)\,\chi(\omega)\left|\mathcal{E}_{\text{пр}}^{(0)}\right|^2}{\varepsilon_e(2\omega) - \varepsilon_e(\omega)}.$$

Появляющуюся во втором приближении волну третьей гармоники мы не рассматриваем, поскольку вклад ее в общий поток энергии имеет порядок μ^4. Для определения $\mathcal{E}_c^{(2)}$ и $\mathcal{E}_{\text{отр}}^{(2)}$ запишем граничные условия для волны с частотой ω:

$$\mathcal{E}_{\text{отр}}^{(2)} = \mathcal{E}_c^{(2)} - \frac{2\pi\chi(\omega)\,\mathcal{E}_{\text{пр}}^{*(0)}\,\mathcal{E}_c^{(1)}}{\varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\left[\varepsilon_e^{1/2}(\omega) - \varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\right]} = \mathcal{E}_{\text{пр}}^{(2)}; \tag{10}$$

$$H_{\text{отр}}^{(2)} = -\varepsilon^{1/2}(\omega)\,\mathcal{E}_{\text{отр}}^{(2)} = \frac{\varepsilon_e^{(2)}(\omega)}{2\varepsilon_e^{1/2}(\omega)}\mathcal{E}_{\text{пр}}^{(0)} + \varepsilon_e^{1/2}(\omega)\,\mathcal{E}_c^{(2)} - \frac{2\pi\chi(\omega)\,\mathcal{E}_{\text{пр}}^{*(0)}\,\mathcal{E}_c^{(1)}\left[2\varepsilon_e^{1/2}(2\omega) - \varepsilon_e^{1/2}(\omega)\right]}{\varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\left[\varepsilon_e^{1/2}(\omega) - \varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\right]} = H_{\text{пр}}^{(2)}. \tag{11}$$

(Чтобы сохранить непрерывность магнитного поля (11) во втором приближении, необходимо учесть поправку, обусловленную изменением диэлектрической проницаемости $\varepsilon_e^{(2)}$.)

Из (10) и (11) следует:

$$\mathcal{E}_{\text{отр}}^{(2)} = -\frac{16\pi\chi(2\omega)\,\chi(\omega)\left|\mathcal{E}_{\text{пр}}^{(0)}\right|^2\left[\varepsilon_e(2\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\,\varepsilon^{1/2}(2\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(\omega)\,\varepsilon^{1/2}(2\omega) + \varepsilon_e(\omega)\right]}{\varepsilon_e^{1/2}(\omega)\,\varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\left[\varepsilon^{1/2}(2\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\right]\left[\varepsilon^{1/2}(\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(\omega)\right]\left[\varepsilon_e(2\omega) - \varepsilon_e(\omega)\right]}\mathcal{E}_{\text{пр}}^{(0)}. \tag{12}$$

Перейдем теперь к вычислению соотношений (4б) и (4в). Очевидно, что для квадратичной зависимости $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})$ $\widetilde{S}_{\text{отр}}^{(1)} = \widetilde{S}_{\text{пр}}^{(1)} = 0$, поскольку первое приближение не содержит членов основной частоты. Для членов порядка μ^2 (4в) при $y = 0$ справедливо следующее выражение:

---

* В отсутствие дисперсии, когда $\varepsilon_e(2\omega) = \varepsilon_e(\omega)$, вынужденные решения необходимо искать в виде волн, амплитуда которых линейно зависит от y. Последующие выкладки в этом случае, который естественно назвать резонансным, аналогичны приведенным в работе.

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\text{отр}} H^{*(1)}_{\text{отр}} - \mathcal{E}^{(1)}_{\text{пр}} H^{*(1)}_{\text{пр}} + \mathcal{E}^{(2)}_{\text{отр}} H^{*(0)}_{\text{отр}} + \mathcal{E}^{(0)}_{\text{отр}} H^{*(2)}_{\text{отр}} - \mathcal{E}^{(0)}_{\text{пр}} H^{*(2)}_{\text{пр}} - \mathcal{E}^{(2)}_{\text{пр}} H^{*(0)}_{\text{пр}} = 0. \quad (13)$$

Первые два члена выражают поток энергии второй гармоники, излучаемой на границе раздела:

$$\mathcal{E}^{(1)}_{\text{отр}} H^{*(1)}_{\text{отр}} = \mathcal{E}^{(1)}_{\text{пр}} H^{*(1)}_{\text{пр}} = \frac{16\pi^2\chi^2(2\omega)\,\varepsilon^{1/2}(2\omega)\,\left|\mathcal{E}^{(0)}_{\text{пр}}\right|^4}{\left[\varepsilon^{1/2}(2\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(2\omega)\right]^2\left[\varepsilon_e^{1/2}(2\omega) + \varepsilon_e^{1/2}(\omega)\right]^2}. \quad (14)$$

(Отметим, что выражению (14) можно придать форму, соответствующую линейному случаю (4а), если рассматривать вынужденное решение уравнения (5) как «падающую» волну.) Остальные члены в (14) характеризуют обратную реакцию возникшей второй гармоники на основную волну:

$$\Delta S_{\text{отр}}(\omega) = \mathcal{E}^{(2)}_{\text{отр}} H^{*(0)}_{\text{отр}} + \mathcal{E}^{(0)}_{\text{отр}} H^{*(2)}_{\text{отр}} = -2\varepsilon^{1/2}(\omega)\,\mathcal{E}^{(0)}_{\text{отр}}\,\mathcal{E}^{*(2)}_{\text{отр}};$$

$$\Delta S_{\text{пр}}(\omega) = \mathcal{E}^{(2)}_{\text{пр}} H^{*(0)}_{\text{пр}} + \mathcal{E}^{(0)}_{\text{пр}} H^{*(2)}_{\text{пр}} = \varepsilon_e^{1/2}(\omega)\,\mathcal{E}^{(0)}_{\text{пр}}\,\mathcal{E}^{*(2)}_{\text{отр}} - \quad (15)$$

$$-\varepsilon^{1/2}(\omega)\,\mathcal{E}^{(0)}_{\text{пр}}\,\mathcal{E}^{*(2)}_{\text{отр}} = -2\varepsilon^{1/2}(\omega)\,\mathcal{E}^{(0)}_{\text{отр}}\,\mathcal{E}^{*(2)}_{\text{отр}},$$

где $\mathcal{E}^{(2)}_{\text{отр}}$ определяется формулой (12)

Из (14) и (15) следует, что, например, в отраженном свете наряду с появлением второй гармоники должно иметь место изменение мощности отраженной основной волны на величину $\Delta S_{\text{отр}}(\omega)$. Оба эффекта порядка $|\chi|^2$, причем последний для прозрачной границы ($\varepsilon = \varepsilon_e$) будет отсутствовать Если рассмотреть случай, когда на кристалл падают две волны с частотами ω_1 и ω_2, то в выражении (13) появятся члены, соответствующие потокам энергии для волн комбинационных частот $\omega_1 \pm \omega_2$, каждый из которых на границе непрерывен и может быть найден аналогично тому, как вычислялся поток энергии второй гармоники (ср (14)) Величины $\Delta S_{\text{отр}}(\omega_{1,2}) = \Delta S_{\text{пр}}(\omega_{1,2})$ легко подсчитать, если учесть дополнительные комбинационные члены в правой части уравнения (6).

Таким образом, изложенный выше метод расчета позволяет оценить в рамках феноменологического рассмотрения (1) величину мощности любой частоты, возникающей на границе нелинейного диэлектрика, зная характеристики кристалла и величину падающего излучения. Однако следует подчеркнуть, что справедливость представлений (2) и (3) имеет место лишь в тех случаях, когда пространственным взаимодействием распространяющихся в кристалле волн можно пренебречь вследствие малости граничного формирующего слоя

Автор признателен Р. В Хохлову за внимание к работе

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Bloembergen, P. Pershan, Phys. Rev., **128**, 606 (1962).
2. В. Ф. Марченко, Вестник МГУ, сер физ. и астрон., **6**, 3 (1964).
3. С. А. Ахманов, Р В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
30 марта 1964 г.

УДК 621.372.826.001.24

РАСЧЕТ РЕЗОНАТОРОВ И ВОЛНОВОДОВ С МНОГОСЛОЙНЫМ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Г. Ф. Семенов

Поля в прямоугольных, круглых и коаксиальных регулярных волноводах и волноводных резонаторах с диэлектриком можно исследовать точными методами, если диэлектрические слои расположены параллельно какой-либо стенке волновода (резонатора). Наиболее простой метод решения подобных задач состоит в замене волновода (резонатора) со слоистым диэлектриком двухпроводной линией с участками, имеющими соответствующие волновые сопротивления Затем к такой системе применяется теория длинных линий [1, 2]. Такой метод, однако, применим лишь для ограниченного числа типов волн. Электродинамический (полевой) метод решения подобных задач [3–5] является достаточно универсальным; к сожалению, он отличается чрезвычайной

громоздкостью Поэтому в настоящее время полевым методом получены общие решения для резонаторов и волноводов лишь с двух и трехслойным диэлектриком.

Полевой метод решения можно существенно упростить, если воспользоваться граничными условиями для производных поля. Как показано в [6], это позволяет рассматривать лишь одну составляющую поля, нормальную к поверхностям раздела диэлектрических слоев; если же эта составляющая равна нулю, то следует рассматривать тангенциальную составляющую. Ниже таким путем будут получены выражения, пригодные для расчета резонаторов и волноводов с любым числом диэлектрических слоев.

Например, для колебаний ТМ ($E_z \neq 0$) в прямоугольном резонаторе с многослойным диэлектриком (см рис 1) можно воспользоваться составляющей поля E_z, которая для i-го диэлектрического слоя может быть записана в следующем виде:

$$E_{zi} = A_i \sin(K_x x) \sin(K_y y) [\sin(K_{zi} z) + B_i \cos(K_{zi} z)].$$

Применяя граничные условия на поверхности $z = z_l$, разделяющей i-ый и k-й диэлектрические слои

$$\varepsilon_i E_{zi}|_{z_l} = \varepsilon_k E_{zk}|_{z_l}, \quad \left.\frac{\partial E_{zi}}{\partial z}\right|_{z_l} = \left.\frac{\partial E_{zk}}{\partial z}\right|_{z_l},$$

можно получить решение резонатора с пятислойным диэлектриком в следующем виде:

$$\frac{K_1}{\varepsilon_1} t_1 + \frac{K_2}{\varepsilon_2} t_2 + \frac{K_3}{\varepsilon_3} t_3 + \frac{K_4}{\varepsilon_4} t_4 + \frac{K_5}{\varepsilon_5} t_5 - \frac{K_1 \varepsilon_2 K_3}{\varepsilon_1 K_2 \varepsilon_3} t_1 t_2 t_3 - \frac{K_1 \varepsilon_3 K_4}{\varepsilon_1 K_3 \varepsilon_4} t_1 t_3 t_4 -$$

$$- \frac{K_2 \varepsilon_3 K_4}{\varepsilon_2 K_3 \varepsilon_4} t_2 t_3 t_4 - \frac{K_1 \varepsilon_2 K_5}{\varepsilon_1 K_2 \varepsilon_5} t_1 t_2 t_5 - \frac{K_1 \varepsilon_3 K_5}{\varepsilon_1 K_3 \varepsilon_5} t_1 t_3 t_5 - \frac{K_1 \varepsilon_2 K_4}{\varepsilon_1 K_2 \varepsilon_4} t_1 t_2 t_4 - \qquad (1)$$

$$- \frac{K_2 \varepsilon_3 K_5}{\varepsilon_2 K_3 \varepsilon_5} t_2 t_3 t_5 - \frac{K_1 \varepsilon_4 K_5}{\varepsilon_1 K_4 \varepsilon_5} t_1 t_4 t_5 - \frac{K_2 \varepsilon_4 K_5}{\varepsilon_2 K_4 \varepsilon_5} t_2 t_4 t_5 -$$

$$- \frac{K_3 \varepsilon_4 K_5}{\varepsilon_3 K_4 \varepsilon_5} t_3 t_4 t_5 + \frac{K_1 \varepsilon_2 K_3 \varepsilon_4 K_5}{\varepsilon_1 K_2 \varepsilon_3 K_4 \varepsilon_5} t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 = 0.$$

Здесь для сокращения записи обозначено. $t_l = \mathrm{tg}(K_{zl} l_l)$, $K_l = K_{zl}$ (l_l — толщина. l-го диэлектрического слоя) При решении (1) необходимо учитывать также соотношение

$$\omega^2 \varepsilon_l \mu_l = K_{zl}^2 + K_y^2 + K_x^2, \qquad (2)$$

где $K_x = (\pi/b)m$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$), $K_y = (\pi/a)n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), a и b — размеры поперечного сечения резонатора.

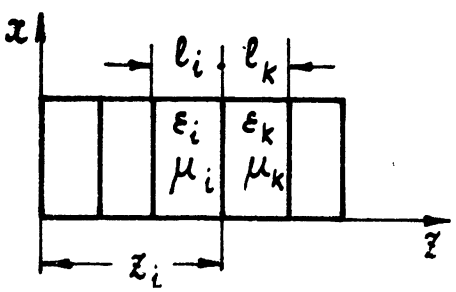


Рис. 1 Прямоугольный резонатор с многослойным диэлектриком.

Легко установить формальный закон, в соответствии с которым получается выражение (1). Если обозначить через m' число диэлектрических слоев, то, как видно из (1), произведения величин t_i представляют собой всевозможные сочетания m' элементов по n', где n' — целое нечетное число Положительный знак сохраняется только для тех членов, у которых число сомножителей величин t_l равно $2p' - 1$, где p' — также целое нечетное число Коэффициенты при этих произведениях построены из величин K_l/ε_l с теми же индексами, что и t_l, причем, если расположить коэффициенты в порядке возрастания индексов, то величины K_l/ε_l последовательно чередуются между числителем и знаменателем, начиная с числителя.

Для колебаний типа ТЕ ($E_z = 0$) окончательное выражение получается из (1) заменой K_l/ε_l на μ_l/K_l; кроме того, для таких колебаний одно из чисел m или n в (2) может принимать значение, равное нулю.

Выражение (1) применимо для расчета постоянной распространения прямоугольного волновода с диэлектрическими слоями, расположенными параллельно какой-либо стенке волновода В этом случае искомой продольной постоянной следует считать величину K_x или K_y.

Нетрудно проверить, что выражение (1) справедливо также и для круглых и коаксиальных резонаторов с диэлектрическими слоями, расположенными параллельно торцевым стенкам резонатора В этом случае, очевидно, вместо (2) следует использовать выражение

$$\omega^2\varepsilon_l\mu_l = K_{zl}^2 + \gamma^2,$$

где γ — радиальная постоянная, зависящая от типа колебаний и размеров резонатора

Аналогичным путем можно легко получить решения для коаксиальных и круглых резонаторов и волноводов с диэлектрическими слоями в виде круглых цилиндров, расположенных симметрично относительно оси

В заключение отметим, что решение резонаторов и волноводов с большим числом диэлектрических слоев может найти практическое применение, в частности, для приближенного расчета резонаторов и волноводов с таким распределением ε и μ вещества в объеме, которое допускает аппроксимацию этого распределения слоистым диэлектриком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по волноводам, изд. Сов радио, М., 1952.
2. Г. И Гладышев, Л. В. Касаткин, С П. Шашурина, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, **6**, 77 (1963).
3 А. Н. Иванов, Изв высш уч. зав.—Радиотехника, **2**, 48 (1959).
4. А И. Ахиезер, Я Б Файнберг, УФН, **44**, 321 (1951)
5 Зарубежная радиоэлектроника, **3**, 2 (1959)
6. Г. Ф. Семенов, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, **6**, 191 (1963).

Киевский политехнический институт

Поступила в редакцию
30 сентября 1963 г.

УДК 621.378

РЕЖИМЫ В КВАНТОВОМ ГЕНЕРАТОРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПРИМЕСИ

Н. Д. Воропаев, А. Н. Ораевский

Для получения мощных импульсов светового излучения в лазерах с модулированной добротностью используется накопление частиц на метастабильных энергетических уровнях рабочего вещества с малым значением дипольных моментов перехода. В таких системах можно получить значительную инверсию. Как известно [1], условие самовозбуждения квантового генератора имеет вид

$$\frac{4\pi Q_0 N_1 \mu_1^2 \tau_1}{\hbar} > 1, \qquad (1)$$

где Q_0 — добротность резонатора, N_1 — число активных частиц, μ_1 — матричный элемент дипольного момента перехода, τ_1 — эффективное время жизни.

Если в системе содержится примесь, поглощающая излучение на рабочей частоте, то условие самовозбуждения можно записать так

$$\frac{4\pi Q_0}{\hbar}(N_1\mu_1^2\tau_1 - N_2\mu_2^2\tau_2) > 1. \qquad (2)$$

(Здесь индексом «2» отмечены величины, относящиеся к примеси.) В случае $\mu_2 \gg \mu_1$ неравенство (2) может нарушаться даже при небольших концентрациях примеси n_2. Однако за счет эффекта насыщения, приводящего, в первую очередь, к выравниванию населенностей уровней примеси, в больших внешних полях при $N_1 \gg N_2$ можно ожидать реализации лазерного режима, даже если условие самовозбуждения (2) не выполнено. Этот вопрос рассмотрен на модели двухуровневой системы с примесью.

Система уравнений, описывающая поля в резонаторе и активную среду, получена

в [2, 3]. Ее необходимо дополнить уравнениями, описывающими поглощающую примесь. В результате имеем

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q_0}\frac{d\mathcal{E}}{dt}+\omega_0^2\mathcal{E}=-4\pi\left\{\frac{d^2P_1}{dt^2}+\frac{d^2P_2}{dt^2}\right\};$$

$$\frac{d^2P_1}{dt^2}+\frac{2}{\tau_1}\frac{dP_1}{dt}+\omega_1^2P_1=-\frac{2\mu_1^2\omega_1\mathcal{E}N_1}{\hbar};$$

$$\frac{dN_1}{dt}+\frac{1}{\tau_1}(N_1-N_{01})=2\frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega_1}\frac{dP_1}{dt}; \qquad (3)$$

$$\frac{d^2P_2}{dt^2}+\frac{2}{\tau_2}\frac{dP_2}{dt}+\omega_2^2P_2=-\frac{2\mu_2^2\omega_2}{\hbar}\mathcal{E}N_2;$$

$$\frac{dN_2}{dt}+\frac{1}{\tau_2}(N_2+N_{02})=2\frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega_2}\frac{dP_2}{dt_2},$$

где обозначения соответствуют работе [3], индекс «1» относится к рабочему веществу, а «2»—к примеси.

Оценки показывают, что подобная система обладает малой нелинейностью, т. е относится к системам томсоновского типа При исследовании таких систем эффективен метод малого параметра Для существования режима генерации необходимо, чтобы

$$\mathcal{E}_0^2>0, \qquad (4)$$

где $\mathcal{E}_0$— амплитуда поля в резонаторе, меняющегося по закону $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$. Исследование системы уравнений (3) для случая $\omega_1=\omega_2=\omega_0$ показывает, что (4) будет выполнено, 1) если выполнено неравенство (2) (при этом возникает обычный мягкий режим самовозбуждения) или 2) если неравенство (2) не выполнено, но

$$\frac{4\pi Q_0}{\hbar}\left(\frac{N_{01}}{\tau_1}-\frac{N_{02}}{\tau_2}\right)>\frac{1}{\mu_2^2\tau_2^2}+\frac{1}{\mu_1^2\tau_1^2}. \qquad (5)$$

Если положить

$$N_{01}\gg N_{02},\quad \mu_1\ll\mu_2,\quad \tau_1=\tau_2=\tau, \qquad (6)$$

то (5) примет вид

$$\frac{4\pi Q_0 N_{\text{эфф}}\mu_{\text{эфф}}^2\tau}{\hbar}>1, \qquad (7)$$

$$N_{\text{эфф}}=N_{01}-N_{02},\quad \mu_{\text{эфф}}^2=\frac{\mu_1^2}{1+\mu_1^2/\mu_2^2}, \qquad (8)$$

т е. перейдет в обычное условие самовозбуждения генератора, записанное для эффективных значений числа частиц и дипольного момента. При этом возникает жесткий лазерный режим, начинающийся с некоторого конечного значения амплитуды поля. Поле. необходимое для возникновения генерации, должно быть таким, чтобы мощность, испускаемая активными частицами, превосходила поглощаемую мощность, т е

$$\overline{\mathcal{E}\dot{P}_1}>\overline{\mathcal{E}P_2}+\frac{\overline{\mathcal{E}^2}}{4\pi}\frac{\omega}{Q_0} \qquad (9)$$

(черта означает усреднение по периоду колебаний). Раскрывая условие (9), получаем

$$\mathcal{E}_0^2>\frac{A_1\beta_2-A_2\beta_1-\beta_1-\beta_2}{2\beta_1\beta_2}-\sqrt{\frac{(A_1\beta_2-A_2\beta_1-\beta_1-\beta_2)^2-4(A_2-A_1+1)\beta_1\beta_2}{4\beta_1^2\beta_2^2}}, \qquad (10)$$

где

$$A_1=4\pi\frac{|\mu_1|^2}{\hbar}\tau_1 Q_0 N_{10};\quad A_2=4\pi\frac{|\mu_2|^2}{\hbar}\tau_2 Q_0 N_{02};\quad \beta_1=\frac{|\mu_1|^2}{\hbar^2}\tau_1^2;\quad \beta_2=\frac{|\mu_2|^2}{\hbar^2}\tau_2^2.$$

Расмотрим численный пример. Примем для метастабильного уровня значение $\mu_1\simeq 10^{-20}$ *CGSE*, $\tau_1\simeq 10^{-10}$ *сек*. В оптической области добротность резонатора $Q_0\simeq\simeq 10^6$. Условие (1) будет выполнено при $N_{01}\simeq 10^{16}$ *см*$^{-3}$. Пусть $N_{01}\simeq 10^{18}$ *см*$^{-3}$, для

примеси $\mu_2 \simeq 10^{-18}$ *CGSE* и $\tau_2 \simeq 10^{-11}$ *сек*. Условие (2) будет выполняться для значений концентрации примеси $N_{02} \leqslant 10^{15}$ *см*$^{-3}$, в этом случае имеет место мягкий режим самовозбуждения. При 10^{15} *см*$^{-3} \leqslant N_{02} \leqslant 10^{17}$ *см*$^{-3}$ (верхняя граница определяется (5)) возможен жесткий режим Необходимая для его начала амплитуда поля задается неравенством (10). Для $N_{02} \simeq 10^{15}$ *см*$^{-3}$ необходимо поле $\mathcal{E}_0 \geqslant 3 \cdot 10^4$ *в* . *см*$^{-1}$; при $N_{02} \simeq 10^{16}$ *см*$^{-3}$ $\mathcal{E}_0 \geqslant 10^5$ *в* . *см*$^{-1}$, а при $N_0 \simeq 10^{17}$ *см*$^{-3}$ $\mathcal{E}_0 \geqslant 3 \cdot 10^5$ *в* *см*$^{-1}$.

Полученные результаты легко обобщить на тот случай, когда ширина линии и обратное время жизни частиц на уровне—различные величины В этом случае, как показывает расчет, все предыдущие результаты остаются в силе, если в них заменить μ_i^2 на $\mu_i^2 \tau_i^{(1)} / \tau_i^{(2)}$, а число частиц N_i заменить на $N_i \tau_i^{(2)} / \tau_i^{(1)}$, где $\tau_i^{(1)}$ — время жизни частицы на уровне, а $\tau_i^{(2)}$ — обратная ширина линии уровня

Свойство просветления систем при конечных значениях амплитуды поля может быть использовано при разработке затворов в цепи последовательных лазеров

ЛИТЕРАТУРА

1 Н. Г. Басов, О Н Крохин, Ю М Попов, УФН, 161 (1960)
2. А. Н Ораевский, Труды физического института им П Н Лебедева, **21**, 3 (1963)
3 В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 945 (1957).

Физический институт им. П Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
13 июля 1964 г.

УДК 621.378.325

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДУЛЯЦИИ ГАЗОВОГО ОПТИЧЕСКОГО КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА

И. Г. Гончаров

1 В литературе [1] имеются сообщения об увеличении мощности в импульсе оптических квантовых генераторов (ОКГ) на смеси He—Ne при импульсной модуляции по питающему напряжению (линия $\lambda = 1{,}15$ *мк*). Настоящее сообщение касается исследования импульсного режима ОКГ на смеси He—Ne на другой линии $\lambda = 0{,}63$ *мк*.

Квантовый генератор первоначально запускался в непрерывном режиме в оптимальных условиях по отношению к выбору давления и состава смеси He—Ne для генерации на линии 0,63 *мк*. Кювета (с окнами под углом Брюстера из стекла для подавления линии 3,39 *мк*) имела длину 1,5 *м* и внутренний диаметр 7 *мм*. Излучение было промодулировано прерывателем и наблюдалось при помощи ФЭУ-51, импульсы с которого через катодный повторитель поступали на усилитель осциллографа.

При исследовании модуляции применялись схемы, позволяющие модулировать ток разряда как положительными, так и отрицательными импульсами напряжения. Для модуляции положительными импульсами генератор прямоугольных импульсов подключался к аноду разрядного промежутка через импульсный трансформатор, на вторичную обмотку которого через балластное сопротивление подавалось напряжение от регулируемого выпрямителя Цепь переменного тока замыкалась последовательно включенными сопротивлениями $R = 1$ *ком* и емкостью $C = 500$ *пф*.

При отсутствии импульсов напряжения и при увеличении постоянного тока разряда генерация возникала при некотором пороговом значении тока $I_п = 10 \div 15$ *ма*, затем при токе 45÷50 *ма* достигалась максимальная мощность и при дальнейшем увеличении тока мощность падала Когда подавались положительные импульсы напряжения амплитудой от 0 до 2 *кв* и постоянный ток разряда увеличивался от 1 *ма*, генерация в импульсном режиме не наблюдалась до тех пор, пока постоянный ток через разряд не увеличивался до $I_п$. Длительность импульсов напряжения составляла 1 и 2 *мксек*, при частоте следования 40 *кгц* Импульсы тока были задержаны приблизительно на 0,5 *мксек*, причем это время уменьшалось при увеличении постоянного тока разряда Ток в импульсе при $U = 2$ *кв* составлял 0,5 *а*

При этом наблюдаемая в импульсе мощность генерируемого света не превышала по величине соответствующего значения мощности, полученного при питании постоянным током в оптимальном режиме Длительность импульсов свечения составляла 3 ÷4 *мксек*. Максимумы уровней генерации в импульсном и непрерывном режимах в завн-

симости от давлений смеси при соотношении концентраций гелия к неону 6 · 1 совпадают.

2. В работе была осуществлена модуляция генерируемого света газового ОКГ отрицательными импульсами. В этом случае последовательно с разрядом в цепь выпрямителя включалась лампа ГУ-50 в пентодном режиме. Подавая на сетку лампы отрицательные импульсы напряжения и работая на срыв генерации, можно было осуществлять модуляцию импульсами длительностью 1 и 2 *мксек*. Изменение генерируемой мощности происходило при изменении тока разряда в соответствии с зависимостью генерируемой мощности от величины постоянного тока, снятой в непрерывном режиме. Возможность повышения частоты следования выше 40 *кгц* не исследовалась.

В настоящей работе, таким образом, показана возможность импульсной модуляции газового ОКГ по питающему напряжению с частотой следования импульсов 40 *кгц*. Кроме того, установлено, что генерация не наблюдается при питании разряда положительными короткими импульсами длительностью 1 и 2 *мксек*, если постоянный ток меньше $I_п$ Ниже мы попытаемся объяснить полученный результат

3. Генерация в газовом ОКГ при питании его короткими импульсами, по-видимому, не наблюдается потому, что велико время установления генерации. Оценим это время. Положительные импульсы напряжения, поданные на разрядный промежуток непрерывно генерирующего ОКГ, при токе, близком к пороговому, не увеличивают мощность (по сравнению с той мощностью, которая получается в оптимальных условиях в непрерывном режиме). Следовательно, коэффициент усиления в импульсном режиме не превышает коэффициента усиления, получающегося в непрерывном режиме Это позволяет при оценке времени возбуждения резонатора в импульсном режиме пользоваться значением коэффициента усиления $\alpha = 10^{-4}$ *см*$^{-1}$, который обычно приводится для газового ОКГ, работающего в непрерывном режиме на линии 0,63 *мк* [2]. Если даже пренебречь потерями и явлением насыщения и считать, что энергия колебаний в резонаторе нарастает экспоненциально от некоторого значения W_1 до величины W_2, то время нарастания может быть рассчитано по формуле $\tau = (0{,}43/\alpha c)\lg(W_2/W_1)$. Здесь время τ слабо зависит от отношения W_2/W_1; поэтому более точный расчет этих величин не сильно изменяет конечный результат.

Величина W_1 — это энергия спонтанного излучения, запасенная в объеме V, в телесном угле, равном по величине углу расходимости выходящего луча При этом считается, что расходимость луча определяется апертурой системы. Величина W_1 может быть рассчитана по формуле

$$W_1 = (h\nu/c)\,ANV\eta,$$

где $A = 6 \cdot 10^7$ *сек*$^{-1}$ — вероятность спонтанного излучения, $N = 10^7$ *см*$^{-3}$ — концентрация атомов на верхнем рабочем уровне, $\eta = 5 \cdot 10^{-6}$ — коэффициент, учитывающий геометрию системы для резонатора длиной $L = 2$ *м* и радиусом $r = 0{,}6$ *см*, величина $\eta = \pi r^2/2\pi L^2 = r^2/2L^2 = 5 \cdot 10^{-6}$ при $r/L = 0{,}003$, что соответствует углу расходимости 10′. Подставляя в выражение для W_1 указанные величины, получим

$$W_1 \simeq 2 \cdot 10^{-18}\ дж.$$

При генерации когерентного излучения мощностью $P = 1$ *мвт* в резонаторе запасена энергия $W_2 = PL/c(1 - R)$, где R — коэффициент отражения зеркал. При $R = 0{,}96$ величина $W_2 \simeq 10^{-10}$ *дж*. Подставляя найденные величины в выражение для τ, получим

$$\tau \simeq 10^{-6}\ сек.$$

По-видимому, в нашем случае генерация не возникала при питании разряда положительными импульсами из-за того, что необходимая для генерации инверсия населенностей существовала в течение времени, меньше необходимого для установления генерации

В заключение приношу благодарность Л. А Биргеру за полезные обсуждения и В. Н. Курятову, предоставившему возможность провести измерения

ЛИТЕРАТУРА

1. H. A. H. Boot, D. M. Clunie, R. S. A. Thorn, Nature, **198**, 773 (1963).
2. A. D. White, J. D. Rigden, Proc. IRE, **50**, 1697 (1962).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
15 июня 1964 г

УДК 621 385 64

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ГЕНЕРИРУЮЩЕМ МАГНЕТРОНЕ

Л. М. Грошков, В. Е. Нечаев

В настоящей работе была осуществлена попытка наблюдения за движением электронов по первым петлям их траекторий в прикатодной области многорезонаторного магнетрона в режиме установившихся автоколебаний. Для этого был использован метод продольного «зондирования» междуэлектродного пространства тонким электронным лучом. Указанный метод, применявшийся ранее для измерения траекторий электронов в статическом магнетроне, подробно описан в работах [1—3]. Основная идея метода сводится к тому, что в поперечной плоскости электроны самого магнетрона и зондирующего луча движутся по одним и тем же законам, так что электроны луча, попадая на флюоресцирующий экран в торце лампы, дают информацию о характере движения электронов в магнетроне. Использование этого метода при изучении движения электронов в генерирующем магнетроне встречает определенные трудности, связанные с тем, что электроны зондирующего луча, инжектированные в междуэлектродное пространство магнетрона в различных фазах высокочастотного поля, движутся по-разному; это неизбежно приводит к размытию изображения на экране Тем не менее и здесь оказалось возможным получить некоторые опытные данные о движении электронов в прикатодной области.

Изучение движения электронов проводилось на специальном экспериментальном макете разборной конструкции. В этом макете магнетрон непрерывного действия (близкий по параметрам к известному американскому магнетрону LCW с 16-резонаторным анодным блоком) был совмещен с устройством для электронного зондирования. Принципиальная часть конструкции экспериментальной лампы и ее основные размеры показаны на рис. 1. Проверка электронно-оптической системы и оценка погрешностей эксперимента были проведены аналогично тому, как это было сделано в работе [3].

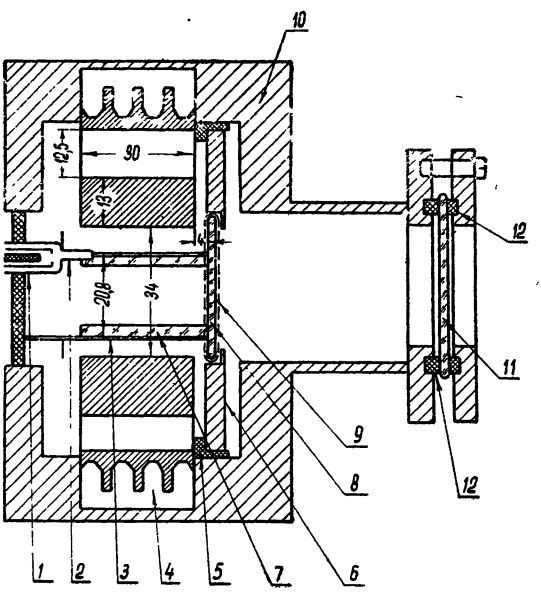


Рис. 1. Конструкция экспериментальной лампы:

1—электронная пушка; 2—коллиматорная трубка; 3—катод магнетрона; 4—водяная рубашка; 5—керамические крепления-изоляторы; 6—медное кольцо; 7—кварцевая трубка; 8—флюоресцирующий экран; 9—сетка, обжимающая экран; 10—анодный блок (связки не показаны), 11—кварцевое стекло, 12—резиновые прокладки.

При этом было установлено, что электронно-оптическая система лампы выбранной конструкции удовлетворяет необходимым требованиям, и краевые поля несущественно искажают ход луча при наблюдении первых петель траекторий электронов

В процессе наблюдений было обнаружено, что при напряжениях, ниже порогового, траектории имеют петлевой вид. Это лишний раз подтверждает правильность результатов работ [1, 3] и расходится с выводами в [2] об однопоточном состоянии электронного облака в предосцилляционном режиме По мере того, как анодное напряжение приближается к пороговому, размеры светящегося пятна на экране увеличиваются, что свидетельствует о нарастании флуктуационных полей в пространстве взаимодействия. Когда, наконец, возникают мощные когерентные колебания ($\lambda = 26{,}7$ *см*), след электронного луча на экране вытягивается в виде дужки по азимуту (рис. 2) Затем с увеличением мощности колебаний угловой размер этой дужки возрастает, что сви-

детельствует о начале группировки электронов в благоприятных областях фаз уже в прикатодной области.

Фотографируя последовательно положения следа зондирующего луча на экране при различных временах пролета, т е при различных скоростях электронов луча, и обрабатывая затем результаты наблюдений, удалось получить картину движения

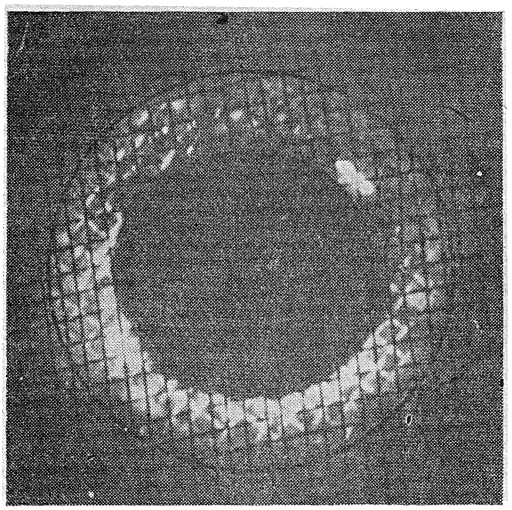


Рис. 2. Типичный след электронов зондирующего луча на экране при установившихся автоколебаниях.

электронов по второй петле траекторий (рис 3) Учитывая положение точки влета луча, а также пролетные времена, можно видеть, что полученные фотографии отображают движение правильнофазных электронов по вторым петлям их траекторий (угол пролета меняется как раз вдвое по мере прохождения электронами этой петли траектории). Здесь необходимо отметить, что траектории электронов с различными фазами вылета из катода имеют близкие по высоте петли и почти одно и то же время пролета по второй петле, что подтверждает выводы адиабатической теории [4, 5] . Высота первых петель сравнима с их высотой в отсутствие пространственного заряда. (Однако из-за влияния полей пространственного заряда высота этих петель примерно вдвое меньше рассчитанной без учета пространственного заряда) Иногда удавалось при больших магнитных полях видеть в околокатодной области начало третьей петли траектории или при меньших магнитных полях—конец первой петли Из этих наблюдений следует, что электроны в среднем медленно дрейфуют вверх в основании спицы Это согласуется с выводами адиабатической теории, но расходится с результатами численных расчетов по методу самосогласованного поля [6], согласно которым электроны на всем пути к аноду делают всего три-четыре витка на траектории Надо отметить весьма интересный факт, что угол пролета электронов относительно циклотронной частоты по второй петле траектории составил по расчетам от 2,08 π до 4,02 π, т. е. частота вращательного движения была очень близка к циклотронной, что также находится в согласии с адиабатической теорией.

На рис 4 показаны положения электронов, движущихся в окрестности вершины второй петли траектории, при последовательном увеличении анодного тока и мощности колебаний Из этого рисунка видно, что с увеличением мощности и анодного тока занимаемые электронами области не только расширяются, но и смещаются (по углу). Последнее свидетельствует о том, что электроны не движутся строго синхронно с волной поля (даже в среднем), а их угловая скорость увеличивается с ростом мощности Из рис. 4 видно также, что с увеличением анодного тока и мощности примерно вдвое ($I_0 = 80 \div 180$ *ма*) угловой размер дужки увеличивается пропорционально высокочастотному полю (примерно в полтора раза) Это соответствует представлениям, развитым в работах [4, 5], и иллюстрирует процесс группировки электронов в основании спицы пространственного заряда В самом деле, согласно [5], при неизменных радиусах и скоростях вращения дрейфовые скорости электронов, покинувших катод в различных фазах поля, отличаются друг от друга на величину, пропорциональную высокочастотным полям в точках дрейфа.

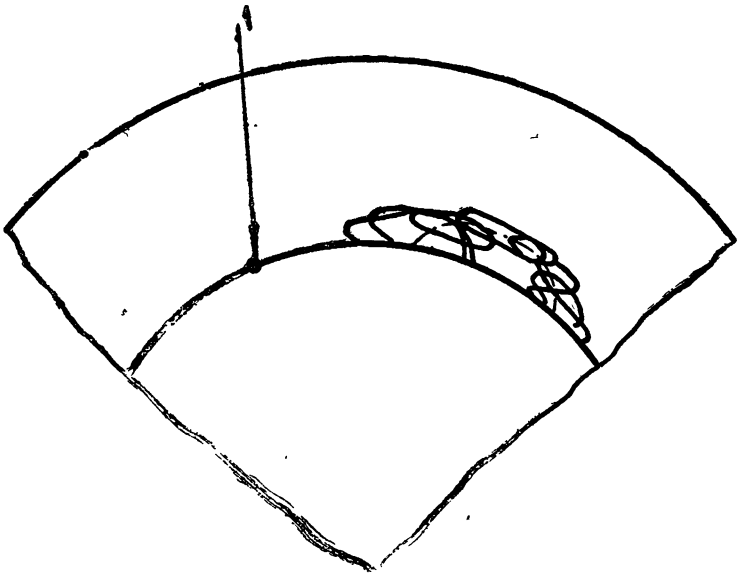


Рис. 3. Последовательность положений электронов при ступенчатом изменении времени пролета ($V_{уск}=800\div3000$ *в*) и фиксированной мощности ($H=430$ *эрстед*; $V_0=2{,}25$ *кв*; $I_0=120$ *ма*; 1—точка влета луча).

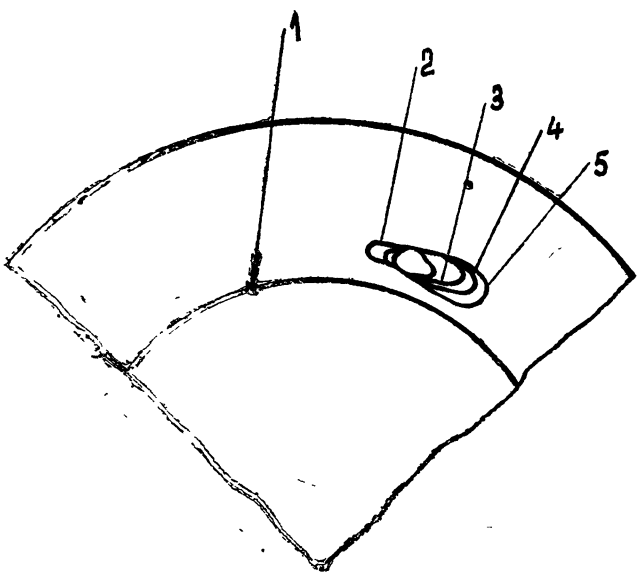


Рис. 4. Последовательность положений электронов при ступенчатом изменении мощности и фиксированном угле пролета ($H=440$ *эрстед*, $V_0=2{,}3$—$2{,}4$ *кв*, 1—точка влета луча, 2, 3, 4, 5—$I_0=80$, 110, 150, 180 *ма*).

Проведенное исследование показало, что наиболее близкими к действительности являются те расчетные модели, которые опираются на приближенные аналитические методы и согласно которым электроны с самого начала движутся по возмущенным эпициклоидальным траекториям. Поэтому можно утверждать, что расчетные модели со скользящим потоком «по Бриллюэну» у катода неправомерны. Однако, поскольку

размеры первых петель меньше рассчитанных без учета пространственного заряда, то уточнение соответствующего теоретического рассмотрения, в первую очередь, следует связать с учетом поправок, вносимых полями пространственного заряда.

Авторы выражают благодарность М. И. Кузнецову, по предложению которого была проведена настоящая работа, за обсуждение и важные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Swensson, Proc. IRE, **39**, 838 (1951).
2. I. Verweel, Le Vide, **67**, 32 (1957).
3. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 1104 (1961).
4. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, изд. АН СССР, М., 1962.
5. В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 146 (1964).
6. C. G. Lehr, J. Lotus, I. Silberman, Mikrowellenröhren, München, 195 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 10 июня 1964 г.

УРОВНИ ЭНЕРГИИ И ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛИНИЙ ЯКР ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЦЕЛЫХ СПИНОВ

Н. Е. Айнбиндер, В. С. Гречишкин

Вычисление уровней энергии и относительных интенсивностей линий квадрупольного резонанса в случае целых спинов производилось лишь для $J = 1$ [1—3]. Если $J \geqslant 2$, то сложность квантово-механических расчетов резко возрастает. Между тем, исследование ЯКР B^{10} ($J = 3$) приобрело большое значение [4]. Здесь желательно получить точные формулы для уровней энергии и для относительных интенсивностей линий, которые были бы справедливы для произвольных значений параметра асимметрии.

Гамильтониан квадрупольного взаимодействия в нулевом магнитном поле можно записать в виде [1]

$$\tilde{H}_Q = \frac{eQq_{zz}}{4J(2J-1)}\left[3\hat{I}_z^2 - \hat{I}^2 + \frac{\eta}{2}\left(\hat{I}_+^2 + \hat{I}_-^2\right)\right], \qquad (1)$$

где eQq_{zz} — константа квадрупольного взаимодействия, J — спин резонирующего ядра, $\hat{I}_z$, $\hat{I}$, $\hat{I}_+$, $\hat{I}_-$ — спиновые операторы, η — параметр асимметрии. С помощью (1) можно получить блок-диагональные матрицы, которые диагонализируются методом, описанным ранее [3].

В таблице 1 приведены собственные значения оператора $\tilde{H}_Q$, выраженные в единицах eQq_{zz}. Если известны собственные значения, то нахождение собственных векторов, а следовательно, и относительных интенсивностей представляет собой хотя и громоздкую, но тривиальную операцию. Интересно отметить, что в случае $J = 2$ можно возбудить лишь 9 переходов. Переход $\nu_{1,5}$ с помощью радиочастотного поля возбудить не удается. Данный переход является запрещенным.

Зависимость интенсивности линий от η приведена на рис. 1. Интенсивность переходов $\nu_{2,4}$, $\nu_{3,4}$ и $\nu_{2,3}$ не зависит от η. Поскольку при ориентировке оси радиочастотной катушки вдоль каждой из главных осей тензора градиента электрического поля возбуждается по 3 различных перехода, то в принципе все 9 переходов можно наблюдать в порошкообразном образце или в монокристалле при произвольной ориентации радиочастотного поля.

Результаты аналогичных расчетов для $J = 3$ приведены в таблице 2. Все уровни энергии λ_i выражены здесь в единицах eQq_{zz}. Интересно отметить, что в этом случае запрещенными будут уже три перехода, т. е. с помощью радиочастотного поля можно возбудить не $J(2J + 1) = 21$, а всего лишь 18 переходов. Если ось радиочастотной

Таблица 1. Спин $J = 2$

Уровни энергии	Собственные функции	Ориентация поля	Переход	Относительные интенсивности
$\lambda_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{1+\eta^2/3}$	$\Psi_1 = C_2^{(1)}\psi_2 + C_0^{(1)}\psi_0 + C_{-2}^{(1)}\psi_{-2}$ $C_2^{(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2/3}}} = C_{-2}^{(1)}$ $C_0^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2/3}}}$	$H_1 \parallel X$	$\nu_{1,3}$ $\nu_{2,4}$ $\nu_{3,5}$	$2+\frac{1-\eta}{\sqrt{1+\eta^2/3}}$ 1 $2-\frac{1+\eta}{\sqrt{1+\eta^2/3}}$
$\lambda_2 = -\frac{1}{8}(1+\eta)$ $\lambda_3 = -\frac{1}{8}(1-\eta)$ $\lambda_4 = \frac{1}{4}$	$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-1}$ $\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-1}$ $\Psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-2}$	$H_1 \parallel Y$	$\nu_{1,2}$ $\nu_{2,5}$ $\nu_{3,4}$	$2+\frac{1+\eta}{\sqrt{1+\eta^2/3}}$ $2-\frac{1-\eta}{\sqrt{1+\eta^2/3}}$ 1
$\lambda_5 = \frac{1}{4}\sqrt{1+\frac{\eta^2}{3}}$	$\Psi_5 = C_2^{(5)}\psi_2 + C_0^{(5)}\psi_0 + C_{-2}^{(5)}\psi_{-2}$ $C_2^{(5)} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2/3}}} = C_{-2}^{(5)}$ $C_0^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2/3}}}$	$H_1 \parallel Z$	$\nu_{1,4}$ $\nu_{2,3}$ $\nu_{4,5}$	$2-\frac{2}{\sqrt{1+\eta^2/3}}$ 1 $2+\frac{2}{\sqrt{1+\eta^2/3}}$

Таблица 2. Спин $J=3$

Уровни энергии	Собственные функции	Ориентация поля	Переход	Относительные интенсивности
$\lambda_1=-\frac{1}{10}\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{3}\eta^2}\right)$	$\Psi_1=C_2^{(1)}\psi_2+C_0^{(1)}\psi_0+C_{-2}^{(1)}\psi_{-2}$ $C_2^{(1)}=\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+5\eta^2/3}}}=C_{-2}^{(1)}$ $C_0^{(1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+5\eta^2/3}}}$	$H_1 \parallel Z$	$\nu_{1,4}$	$2-\frac{2}{\sqrt{1+5\eta^2/3}}$
			$\nu_{4,5}$	$2+\frac{2}{\sqrt{1+5\eta^2/3}}$
			$\nu_{2,3}$	$\left[6C_3^{(2)}C_3^{(3)}+2C_1^{(2)}C_1^{(3)}\right]^2$
			$\nu_{2,7}$	$\left[6C_3^{(2)}C_3^{(7)}-2C_1^{(2)}C_1^{(7)}\right]^2$
			$\nu_{3,6}$	$\left[6C_3^{(3)}C_3^{(6)}-2C_1^{(3)}C_1^{(6)}\right]^2$
			$\nu_{6,7}$	$\left[6C_3^{(6)}C_3^{(7)}+2C_1^{(6)}C_1^{(7)}\right]^2$
$\lambda_2=\frac{1-\eta}{20}-\sqrt{\frac{1}{150}(6+3\eta+\eta^2)}$	$\Psi_2=C_3^{(2)}\psi_3+C_1^{(2)}\psi_1+C_{-1}^{(2)}\psi_{-1}+C_{-3}^{(2)}\psi_{-3}$ $C_3^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+240\,(1/4-\lambda_2)^2}}=-C_{-3}^{(2)}$ $C_1^{(2)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{15}\,(1/4-\lambda_2)}{\sqrt{\eta^2+240\,(1/4-\lambda_2)^2}}=C_{-1}^{(2)}$	$H_1 \parallel X$	$\nu_{1,3}$	$\left[C_2^{(1)}\left(\sqrt{6}\,C_3^{(3)}+\sqrt{10}\,C_1^{(3)}\right)+2\sqrt{3}\,C_0^{(1)}C_1^{(3)}\right]^2$
			$\nu_{1,7}$	$\left[C_2^{(1)}\left(\sqrt{6}\,C_3^{(7)}+\sqrt{10}\,C_1^{(7)}\right)+2\sqrt{3}\,C_0^{(1)}C_1^{(7)}\right]^2$
$\lambda_3=\frac{1+\eta}{20}-\sqrt{\frac{1}{150}(6-3\eta+\eta^2)}$	$\Psi_3=C_3^{(3)}\psi_3+C_1^{(3)}\psi_1+C_{-1}^{(3)}\psi_{-1}+C_{-3}^{(3)}\psi_{-3}$ $C_3^{(3)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+240\,(1/4-\lambda_3)^2}}=C_{-3}^{(3)}$ $C_1^{(3)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{15}\,(1/4-\lambda_3)}{\sqrt{\eta^2+240\,(1/4-\lambda_3)^2}}=C_{-1}^{(3)}$		$\nu_{2,4}$	$\left[\sqrt{3}\,C_3^{(2)}+\sqrt{5}\,C_1^{(2)}\right]^2$
			$\nu_{4,6}$	$\left[\sqrt{3}\,C_3^{(6)}+\sqrt{5}\,C_1^{(6)}\right]^2$
$\lambda_4=0$	$\Psi_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-2}$			

$\lambda_5 = \frac{1}{10}\left(\sqrt{1+5\eta^2/3}-1\right)$	$\Psi_5 = C_2^{(5)}\psi_2 + C_0^{(5)}\psi_0 + C_{-2}^{(5)}\psi_{-2}$ $C_2^{(5)} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+5\eta^2/3}}} = C_{-2}^{(5)}$ $C_0^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+5\eta^2/3}}}$		$\nu_{3,5}$ $\left[C_2^{(5)}\left(\sqrt{6}\,C_3^{(3)}+\sqrt{10}\,C_1^{(3)}\right)+2\sqrt{3}\,C_0^{(5)}C_1^{(3)}\right]^2$ $\nu_{5,7}$ $\left[C_2^{(5)}\left(\sqrt{6}\,C_3^{(7)}+\sqrt{10}\,C_1^{(7)}\right)+2\sqrt{3}\,C_0^{(5)}C_1^{(7)}\right]^2$
$\lambda_6 = \frac{1-\eta}{20}+\sqrt{\frac{1}{150}(6+3\eta+\eta^2)}$	$\Psi_6 = C_3^{(6)}\psi_3 + C_1^{(6)}\psi_1 + C_{-1}^{(6)}\psi_{-1} + C_{-3}^{(6)}\psi_{-3}$ $C_3^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+240\,(1/4-\lambda_6)^2}} = -C_{-3}^{(6)}$ $C_1^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{15}\,(1/4-\lambda_6)}{\sqrt{\eta^2+240\,(1/4-\lambda_6)^2}} = -C_{-1}^{(6)}$	$H_1 \parallel Y$	$\nu_{1,2}$ $\left[C_2^{(1)}\left(\sqrt{6}\,C_3^{(2)}-\sqrt{10}\,C_1^{(2)}\right)+2\sqrt{3}\,C_0^{(1)}C_1^{(2)}\right]^2$ $\nu_{1,6}$ $\left[C_2^{(1)}\left(\sqrt{6}\,C_3^{(6)}-\sqrt{10}\,C_1^{(6)}\right)+2\sqrt{3}\,C_0^{(1)}C_1^{(6)}\right]^2$ $\nu_{2,5}$ $\left[C_2^{(5)}\left(\sqrt{6}\,C_3^{(2)}-\sqrt{10}\,C_1^{(2)}\right)+2\sqrt{3}\,C_0^{(5)}C_1^{(2)}\right]^2$ $\nu_{5,6}$ $\left[C_2^{(5)}\left(\sqrt{6}\,C_3^{(6)}-\sqrt{10}\,C_1^{(6)}\right)+2\sqrt{3}\,C_0^{(5)}C_1^{(6)}\right]^2$ $\nu_{3,4}$ $\left[\sqrt{3}\,C_3^{(3)}-\sqrt{5}\,C_1^{(3)}\right]^2$ $\nu_{4,7}$ $\left[\sqrt{3}\,C_3^{(7)}-\sqrt{5}\,C_1^{(7)}\right]^2$
$\lambda_7 = \frac{1+\eta}{20}+\sqrt{\frac{1}{150}(6-3\eta+\eta^2)}$	$\Psi_7 = C_3^{(7)}\psi_3 + C_1^{(7)}\psi_1 + C_{-1}^{(7)}\psi_{-1} + C_{-3}^{(7)}\psi_{-3}$ $C_3^{(7)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+240\,(1/4-\lambda_7)^2}} = C_{-3}^{(7)}$ $C_1^{(7)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4\sqrt{15}\,(1/4-\lambda_7)}{\sqrt{\eta^2+240\,(1/4-\lambda_7)^2}} = C_{-1}^{(7)}$		

катушки ориентирована вдоль одной из главных осей тензора градиента электрического поля кристалла, то возбуждается 6 переходов. Таким образом, все 18 переходов вообще говоря, можно наблюдать в поршкообразном образце или в монокристалле при произвольной ориентации радиочастотного поля

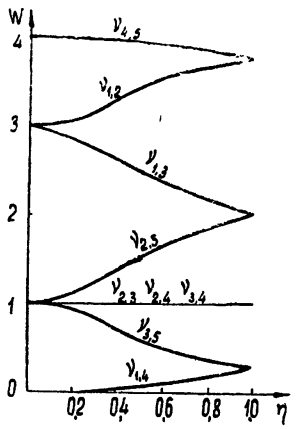


Рис. 1. Зависимость относительных интенсивностей линий ЯКР от величины параметра асимметрии для спина 2.

Полученные соотношения справедливы для любых монокристаллов С помощью формул, приведенных в таблицах 1 и 2, можно по экспериментальным данным определять параметр асимметрии, а также идентифицировать линии поглощения.

Целыми спинами обладают многие радиоактивные изотопы ядер, период полураспада которых меняется в широких пределах Поэтому расчеты уровней энергии и относительных интенсивностей переходов для таких ядер представляют большой интерес при исследовании резонансного поглощения γ-квантов (эффект Мессбауэра).

С другой стороны, в электронном парамагнитном резонансе ионы Cr^{2+} и Mn^{3+} обладают спином, равным 2. Следовательно, полученные здесь результаты при соответствующей замене [3] констант спинового гамильтониана (1) можно легко переписать на случай ЭЛР в нулевом магнитном поле.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. P. Das, E. L. Hahn, Solid State Phys., Suppl. 1 (1958).
2. В. С. Гречишкин, УФН, **69**, 181 (1959).
3. В. С. Гречишкин, Н Е Айнбиндер, УФН, **80**, 597 (1963).
4. P. Love, J. Chem. Phys., **39**, 3044 (1963).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
14 мая 1964 г.

УДК 533.951

О ДЕТЕКТИРОВАНИИ САНТИМЕТРОВЫХ ВОЛН В ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЕ

Г. А. Соболь

При измерениях с помощью зонда одновременно снимались зондовая $I_з = f_1(V_з)$ и детекторные характеристики $I_д = f_2(V_з)$ тлеющего разряда для трех частот (50 *гц*, 10^9 *гц*, 10^{10} *гц*). На рис. 1 представлены графики указанных характеристик (неон, давление 1 *мм* рт. ст).

Сопоставление трех детекторных характеристик для одного и того же режима разряда показывает, что детектирующие свойства плазмы присущи ей в весьма широком диапазоне частот. Это дает возможность создать плазменный детектор неограниченной мощности для весьма широкого диапазона частот (от 20 *гц* до 10^{10} *гц*), настройка которого на соответствующую частоту может осуществляться изменением напряжения на зонде $V_з$ относительно анода

Можно утверждать, что детекторный эффект определяется прежде всего процессами на катоде при облучении его полем СВЧ Об этом свидетельствуют следующие экспериментальные факты

а) Детекторный эффект наблюдается лишь при облучении полем СВЧ прикатодной области разряда и совершенно отсутствует при облучении других областей разряда (в том числе анода и зонда) На рис 2 представлены графики зависимости $I_д$ от относительного расстояния L между катодом и центром волновода

б) В дуговом разряде детекторный эффект не обнаружен. Это объясняется, очевидно, тем, что процессы на катоде в дуговом разряде имеют иную природу: выход электронов из катода обусловливается его температурой накала

в) При облучении катодного вывода максимальный $I_д$ наблюдается в том случае, когда на катоде располагается пучность $E_\sim$ поля СВЧ При облучении вывода отведения анода или зонда детекторного тока не обнаружено На рис. 3 представлены графики кривых зависимости $I_д$ от относительного расстояния $L^{0к}$ между катодом

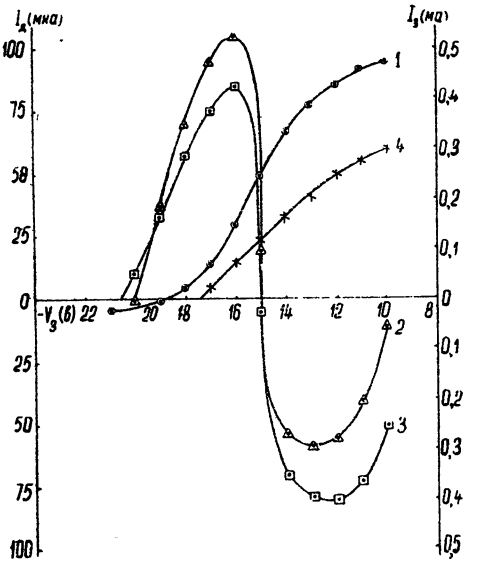


Рис. 1.

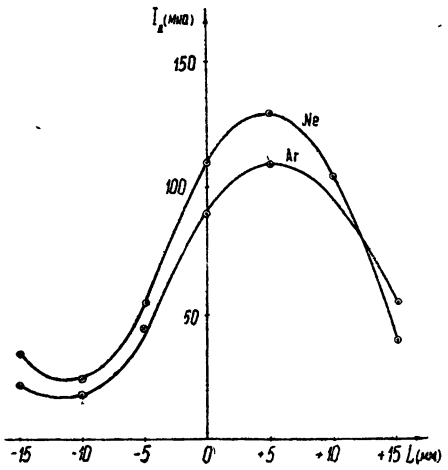


Рис. 2.

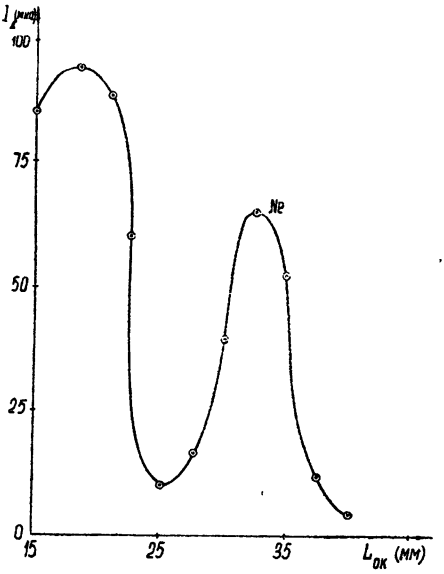


Рис. 3.

и центром волновода, когда катодный вывод (цилиндрический проводник из молибдена), перемещавшийся вдоль оси отверстия волновода, облучался полем СВЧ.

г) Величина детекторного эффекта зависит также от материала катода и газа в трубке, но не зависит от материала анода и зонда. Максимальный $I_д$ наблюдается при плоском катоде, ориентированным перпендикулярно вектору $E\sim$ поля СВЧ

д) В процессе измерений нами обнаружен аномальный эффект детектирования, наблюдаемый во вновь изготовленных трубках Этот эффект, если он появляется, имеет место, как правило, при слабых разрядных токах, т е в начале вольтамперной характеристики разряда. Величина этого аномального тока $I_{д\,а}$ в 10—100 раз превышает величину нормального тока $I_д$. В рабочем режиме $I_{д\,а}$ наблюдается непродолжительное время, затем постепенно исчезает В момент появления $I_{д\,а}$ режим разряда становится не весьма устойчивым.

Черновицкий медицинский институт

Поступила в редакцию
16 ноября 1963 г.

Таблица 1

Коэффициенты усиления			Коэффициенты шума		
	C-модулятор	*RC*-модулятор		*C*-модулятор	*RC*-модулятор
G_{00}	$\frac{D_{00}}{K^2}$	$\frac{D_{00}}{K_1^2}$	F_{00}	$1+A_{00}+A_{01}\frac{\beta_1^2\omega_0}{\omega_1}+A_{0,-1}\frac{\beta_{-1}^2\omega_0}{\omega_{-1}}$	$1+A_{00}+A_{01}\frac{\lvert B_1^2\alpha^{-1}\rvert\omega_0}{\omega_1}+A_{0,-1}\frac{\lvert B_{-1}^2\gamma^{-1}\rvert\omega_0}{\omega_{-1}}$
G_{01}	$\frac{D_{01}\beta_1^2\omega_1}{\omega_0 K^2}$	$\frac{D_{01}\lvert\alpha B_1^2\rvert\omega_1}{\omega_0 K_1^2}$	F_{01}	$1+A_{00}+A_{01}\frac{(1-\beta_{-1}^2)^2\omega_0}{\beta_1^2\omega_1}+A_{0,-1}\frac{\omega_0}{\beta_{-1}^2\omega_{-1}}$	$1+A_{00}+A_{01}\left\lvert\frac{(1-B_{-1}^2)^2}{\alpha B_1^2}\right\rvert\frac{\omega_0}{\omega_1}+A_{0,-1}\frac{\lvert B_{-1}^{-2}\gamma^{-1}\rvert\omega_0}{\omega_{-1}}$
$G_{0,-1}$	$\frac{D_{0,-1}\beta_{-1}^2\omega_{-1}}{\omega_0 K^2}$	$\frac{D_{0,-1}\lvert\gamma B_{-1}^2\rvert\omega_{-1}}{\omega_0 K_1^2}$	$F_{0,-1}$	$1+A_{00}+A_{01}\frac{\beta_1^2\omega_0}{\omega_1}+A_{0,-1}\frac{(1+\beta_1^2)^2\omega_0}{\beta_{-1}^2\omega_{-1}}$	$1+A_{00}+A_{01}\frac{\lvert B_1^2\alpha^{-1}\rvert\omega_0}{\omega_1}+A_{0,-1}\left\lvert\frac{(1+B_1^2)^2}{\gamma B_{-1}^2}\right\rvert\frac{\omega_0}{\omega_{-1}}$
G_{10}	$\frac{D_{10}\beta_1^2\omega_0}{\omega_1 K^2}$	$\frac{D_{10}\lvert B_1^2\alpha^{-1}\rvert\omega_0}{\omega_1 K_1^2}$	F_{10}	$1+A_{11}+A_{1,-1}\frac{\beta_{-1}^2\omega_1}{\beta_1^2\omega_{-1}}+A_{10}\frac{\omega_1}{\beta_1^2\omega_0}$	$1+A_{11}+A_{1,-1}\left\lvert\frac{\alpha B_{-1}^2}{\gamma B_1^2}\right\rvert\frac{\omega_1}{\omega_{-1}}+A_{10}\frac{\lvert\alpha B_1^{-2}\rvert\omega_1}{\omega_0}$
G_{11}	$\frac{D_{11}(1-\beta_{-1}^2)^2}{K^2}$	$\frac{D_{11}(1-B_{-1}^2)^2}{K_1^2}$	F_{11}	$1+A_{11}+A_{1,-1}\frac{\beta_1^2\beta_{-1}^2\omega_1}{(1-\beta_{-1}^2)^2\omega_{-1}}+A_{10}\frac{\beta_1^2\omega_1}{(1-\beta_{-1}^2)^2\omega_0}$	$1+A_{11}+A_{1,-1}\left\lvert\frac{\alpha B_1^2 B_{-1}^2}{\gamma(1-B_{-1}^2)^2}\right\rvert\frac{\omega_1}{\omega_{-1}}+A_{10}\left\lvert\frac{\alpha B_1^2}{(1-B_{-1}^2)^2}\right\rvert\frac{\omega_1}{\omega_0}$
$G_{1,-1}$	$\frac{D_{1,-1}\beta_1^2\beta_{-1}^2\omega_{-1}}{\omega_1 K^2}$	$\frac{D_{1,-1}\lvert\gamma\alpha^{-1}B_1^2B_{-1}^2\rvert\omega_{-1}}{\omega_1 K_1^2}$	$F_{1,-1}$	$1+A_{11}+A_{1,-1}\frac{(1+\beta_1^2)^2\omega_1}{\beta_1^2\beta_{-1}^2\omega_{-1}}+A_{10}\frac{\omega_1}{\beta_1^2\omega_0}$	$1+A_{11}+A_{1,-1}\left\lvert\frac{\alpha(1+B_1^2)^2}{\gamma B_1^2 B_{-1}^2}\right\rvert\frac{\omega_1}{\omega_{-1}}+A_{10}\frac{\lvert\alpha B_1^{-2}\rvert\omega_1}{\omega_0}$
G_{-10}	$\frac{D_{-10}\beta_{-1}^2\omega_0}{\omega_{-1}K^2}$	$\frac{D_{-10}\lvert B_{-1}^2\gamma^{-1}\rvert\omega_0}{\omega_{-1}K_1^2}$	F_{-10}	$1+A_{-1,-1}+A_{-11}\frac{\beta_1^2\omega_{-1}}{\beta_{-1}^2\omega_1}+A_{-10}\frac{\omega_{-1}}{\omega_0\beta_{-1}^2}$	$1+A_{-1,\ -1}+A_{-11}\left\lvert\frac{\gamma B_1^2}{\alpha B_{-1}^2}\right\rvert\frac{\omega_{-1}}{\omega_1}+A_{10}\frac{\lvert\alpha B_{-1}^{-2}\rvert\omega_{-1}}{\omega_0}$
G_{-11}	$\frac{D_{-11}\beta_1^2\beta_{-1}^2\omega_1}{\omega_{-1}K^2}$	$\frac{D_{-11}\lvert\alpha\gamma^{-1}B_1^2B_{-1}^2\rvert\omega_1}{\omega_{-1}K_1^2}$	F_{-11}	$1+A_{-1,-1}+A_{-11}\frac{(1-\beta_{-1}^2)^2\omega_{-1}}{\beta_1^2\beta_{-1}^2\omega_1}+A_{-10}\frac{\omega_{-1}}{\omega_0\beta_{-1}^2}$	$1+A_{-1,-1}+A_{-11}\left\lvert\frac{\gamma(1-B_{-1}^2)^2}{\alpha B_1^2B_{-1}^2}\right\rvert\frac{\omega_{-1}}{\omega_1}+A_{-10}\frac{\lvert\gamma B_{-1}^{-2}\rvert\omega_{-1}}{\omega_0}$
$G_{-1,-1}$	$\frac{D_{-1,-1}(1+\beta_1^2)^2}{K^2}$	$\frac{D_{-1,-1}(1+B_1^2)^2}{K_1^2}$	$F_{-1,-1}$	$1+A_{-1,-1}+A_{-11}\frac{\beta_1^2\beta_{-1}^2\omega_{-1}}{(1+\beta_1^2)^2\omega_1}+A_{-10}\frac{\beta_{-1}^2\omega_{-1}}{(1+\beta_1^2)^2\omega_0}$	$1+A_{-1,-1}+A_{-11}\left\lvert\frac{\gamma B_1^2B_{-1}^2}{\alpha(1+B_1^2)^2}\right\rvert\frac{\omega_{-1}}{\omega_1}+A_{-10}\left\lvert\frac{\gamma B_{-1}^2}{(1+B_1^2)^2}\right\rvert\frac{\omega_{-1}}{\omega_0}$

УДК 621.376

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ С МОДУЛИРУЕМЫМИ ЕМКОСТЬЮ И СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Е. С. Карманова, В. С. Эткин

В настоящее время в ряде работ [1—4] исследуются системы, в которых производится модуляция емкости и сопротивления одновременно Интерес к этим системам вызван тем, что в такого рода преобразователе на суммарную частоту возможно получение большего усиления, чем в чисто емкостном преобразователе Однако в работах посвященных этому вопросу, не анализируется подробно общий случай *RC*-модулятора (*RC-M*) с двумя боковыми полосами и не получен коэффициент шума таких систем.

В этой заметке приведены результаты расчета характеристик *RC-M* на основе метода, использованного в [5, 6].

Эквивалентная схема *RC*-модулятора приведена на рис 1

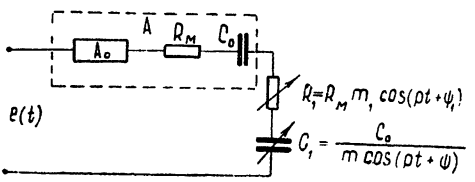


Рис 1.

Будем искать отклик системы на действующую ЭДС в виде напряжения U на конденсаторе C_0 Обозначим отклик системы A_0 с постоянными параметрами через $g(t-\tau)$. Уравнение для определения спектра отклика $U(\omega)$ [5]:

$$U(\omega)+jC_0R_м m_1/2\,g(\omega)\,[(\omega-p)\,e^{j\psi_1}U(\omega-p)+e^{-j\psi_1}(\omega+p)\,U(\omega+p)]+ \\ +m/2g(\omega)\,[U(\omega-p)\,e^{j\psi}+U(\omega+p)\,e^{-j\psi}]=g(\omega)\,e(\omega). \tag{1}$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$U(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,\delta(\omega-\omega_0-kp). \tag{2}$$

Примем, что *RC*-модулятор имеет полосы пропускания в окрестности частот ω_0, $\omega_0\pm p$; тогда, подставляя (2) в (1), получим следующую систему уравнений:

$$a_1+\frac{g(\omega_0+p)}{2}a_0\,e^{j\psi}(m+C_0R_м m_1\omega_0\,e^{j(\psi_1-\psi+\pi/2)})=0; \\ a_0+\frac{g(\omega_0)}{2}\{a_{-1}\,e^{j\psi}[\omega_{-1}\,e^{j(\psi_1-\psi+\pi/2)}C_0R_м m_1+m]+ \\ +a_1e^{-j\psi}[m-m_1C_0R_м\omega_1e^{-j(\psi_1-\psi+\pi/2)}]\}=g(\omega_0), \\ a_{-1}+\frac{g(\omega_0-p)}{2}a_0\,e^{-j\psi}[m-m_1C_0R_м\omega_0\,e^{-j(\psi_1-\psi+\pi/2)}]=0. \tag{3}$$

Введем обозначения

$$m+m_1C_0R_м\omega_i\,e^{j(\psi_1-\psi+\pi/2)}=M_i; \\ m-m_1C_0R_м\omega_i\,e^{-j(\psi_1-\psi+\pi/2)}=N_i \tag{4}$$

и назовем M_i, N_i обобщенными «глубинами модуляции» цепи обратной связи

Решая систему (3), получим

$$a_{00}=\frac{Q_0\,e^{-j\pi/2}}{1\cdot B_{-1}^2+B_1^2}; \tag{5}$$

$$a_{01} = \frac{(M_0/2)\, Q_0\, Q_1\, e^{j\psi}}{1 - B_{-1}^2 + B_1^2}; \tag{6}$$

$$a_{0,-1} = \frac{-(N_0/2)\, Q_0\, Q_{-1}\, e^{-j\psi}}{1 - B_{-1}^2 + B_1^2}, \tag{7}$$

где

$$B_{-1}^2 = \frac{N_0\, M_{-1}}{4} Q_0\, Q_{-1}, \quad B_1^2 = \frac{M_0\, N_1}{4} Q_0\, Q_1, \quad Q_l = \frac{1}{R_l\, C_0\, \omega_l}.$$

Если $\psi - \psi_1 = \pm\pi/2$, то M_l и N_l действительны:

$$M_l = m \pm \omega_l C_0 R_{\text{м}} m_1, \quad N_l = m \mp \omega_l C_0 R_{\text{м}} m_1. \tag{8}$$

Аналогично, если ЭДС действует на частотах $\omega_0 + p$ и $\omega_0 - p$, то

$$a_{10} = \frac{(N_1/2)\, Q_0\, Q_1\, e^{-j\psi}}{1 - B_{-1}^2 + B_1^2}; \tag{9}$$

$$a_{11} = \frac{Q_1 \left(1 - B_{-1}^2\right) e^{-j\pi/2}}{1 - B_{-1}^2 + B_1^2}; \tag{10}$$

$$a_{1,-1} = \frac{(N_1/M_{-1})\, Q_1\, B_{-1}^2\, e^{-j(2\psi + \pi/2)}}{1 - B_{-1}^2 + B_1^2}; \tag{11}$$

$$a_{-10} = \frac{-(M_{-1}/2)\, Q_0\, Q_{-1}\, e^{j\psi}}{1 - B_{-1}^2 + B_1^2}; \tag{12}$$

$$a_{-11} = \frac{(M_{-1}/N_1)\, Q_{-1}\, B_1^2\, e^{j(2\psi - \pi/2)}}{1 - B_{-1}^2 + B_1^2}; \tag{13}$$

$$a_{-1,-1} = \frac{Q_{-1} \left(1 + B_1^2\right) e^{j\pi/2}}{1 - B_{-1}^2 + B_1^2}. \tag{14}$$

Коэффициент усиления может быть записан в виде

$$G_{lk} = \frac{4R_{\text{г}_l}\, R_{\text{н}_k}\, |J_k|^2}{\varepsilon_i^2} = 4R_{\text{г}_l}\, R_{\text{н}_k}\, |a_{lk}|^2\, \omega_k^2\, C_0^2. \tag{15}$$

Коэффициент шума находится аналогично тому, как это сделано в [6] для модуляторов и демодуляторов:

$$F_{lk} = \frac{\sum_j |a_{lj}|^2\, \bar{\varepsilon}_j^2}{|a_{lk}|^2 \left(\bar{\varepsilon}_l^2\right)_0}. \tag{16}$$

В случае усилителя на отражение необходимо положить $R_{\text{н}_0} = 0$.

Для удобства и сравнения в таблице 1 приведены результаты расчета резонансных G_{lk} и F_{lk} для C-модуляторов и RC-модуляторов с двумя боковыми частотами. Для краткости в таблице использованы обозначения: $\alpha = M_0/N_1$; $\gamma = N_0/M_{-1}$; $A_{kl} = (R_s T_s + R_{\text{н}_l} T_{\text{н}_l}) R_k / R_{\text{г}_k}\, T_0\, R_l$; $\beta_{-1}^2 = (m/2)^2 Q_0\, Q_{-1}$; $\beta_1^2 = (m/2)^2\, Q_0\, Q_1$; $R_l = R_{\text{н}_l} + R_s + R_{\text{м}} + R_{\text{г}_l}$; $i = 0, \pm 1$; $K = 1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2$; $K_1 = 1 + B_1^2 - B_{-1}^2$; $D_{lk} = R_{\text{г}_l}\, R_{\text{н}_k} / R_l\, R_k$.

Отметим, что данные, по C-модуляторам совпадают с результатами [4], а данные по RC-модуляторам с одной боковой частотой—с результатами [3], полученными другими методами.

Из таблицы 1 видно, что форма характеристик C-модуляторов практически совпадает с формой характеристик RC-модуляторов. Однако в последнем случае характерные параметры выражаются через обобщенные «глубины модуляции» M_i и N_i. При этом в зависимости от характера изменения эквивалентных параметров при стремлении $\beta_i \to B_i$, $m \to M_i$, N_i происходят различные изменения в системах. Эти изменения определяются как появлением дополнительного переменного параметра-сопротивления K, так и разностью фаз между модуляциями емкости и сопротивления. Так при сдвиге фаз $\psi - \psi_1 = \pi/2$ в усилителе с суммарной частотой возникает регенерация. Если $B_1^2 < 0$ при $m/m_1 < \omega_1 C_0 R_м$, $B_{-1}^2 < 0$ при $m/m_1 < \omega_0 C_0 R_м$, то поведение C-модулятора с различным сочетанием частот $\omega_0 \pm p$ существенно меняется.

Полученные результаты, сведенные в таблицу 1, могут быть использованы при выборе оптимальных характеристик устройств с модуляцией емкости и сопротивления. Такое устройство, в частности, реализуется в преобразователе частоты на туннельном диоде, так как при подаче напряжения гетеродина происходит модуляция не только сопротивления, но и емкости $p-n$-перехода, зависящей от напряжения. С другой стороны, в преобразователе частоты на обычном диоде за счет модуляции емкости диода может наблюдаться дополнительная регенерация, приводящая к уменьшению потерь преобразования. Последнее отмечалось еще в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Maurer, K. Löcherer, Archiv Electr. Übertragung, **15**, 71 (1961).
2. R. Maurer, Archiv Electr. Übertragung, **17**, 29 (1963).
3. Энгельбрехт, ТИРИ, **50**, 341 (1962).
4. В. И. Трифонов, Радиотехника и электроника, **8**, 1637 (1963).
5. В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 5 (1964).
6. Е. С. Карманова, В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 6 (1964).
7. D. B. Anderson, J. C. Aucklang, Trans. IEE, **ED-10**, 13 (1963).
8. В. И. Трифонов, Радиотехника и электроника, **8**, 1418 (1963).
9. Кристаллические детекторы, **1**, изд. Сов. радио, М., 1950.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 10 ноября 1963 г.

УДК 517.942.82

К ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

К. Г. Валеев

В приложениях часто используют теорему запаздывания ([1], стр. 473). Так, при исследованиях, связанных с частотной модуляцией [2], возникает следующая задача. Пусть оригинал $y(t)$ имеет изображение $f(p)$; требуется найти изображение для $y(t-\varphi(t))$, где функция (φt) считается периодической, и выразить его через $f(p)$. При изучении устойчивости решений уравнений с запаздыванием также требуется знать изображение функции с периодическим запаздыванием Этот вопрос решается в данной заметке.

1. Предположим, что дифференцируемая периодическая (с периодом 2π) неотрицательная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} > -1, \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{1.1}$$

Вводя обозначение

$$f(p) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-pt}\, dt, \qquad y(t) \equiv 0 \quad (t < 0), \tag{1.2}$$

выразим через $f(p)$ интеграл

$$F(p) = \int_0^\infty y(t - \varphi(t))\, e^{-pt}\, dt. \tag{1.3}$$

Совершим в (1.3) замену переменной интегрирования

$$t - \varphi(t) = s, \qquad \varphi(t + 2\pi) \equiv \varphi(t). \tag{1.4}$$

В силу (1.1) уравнение (1 4) однозначно разрешимо относительно t:

$$t = s + \psi(s). \tag{1.5}$$

Очевидно, что $\psi(s)$ периодична по s с периодом 2π.

Функция $\psi(s)$ удовлетворяет функциональным уравнениям

$$\psi(s) = \varphi(s + \psi(s)), \qquad \varphi(t) = \psi(t - \varphi(t)). \tag{1.6}$$

Для $F(p)$ (1 3) получаем выражение

$$F(p) = \int_0^\infty y(s) e^{-ps}\, \Psi(s, p)\, ds, \qquad \Psi(s, p) = e^{-p\psi(s)} \left[1 + \frac{d\psi(s)}{ds}\right]. \tag{1.7}$$

Разложим функции $\Psi(s, p)$, периодическую по s, в ряд Фурье

$$\Psi(s, p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(p)\, e^{iks}, \qquad a_k(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(s, p)\, e^{-iks}\, ds. \tag{1.8}$$

Переходя в интеграле (1.8) к переменной t (1.4), выразим $a_k(p)$ через $\varphi(t)$:

$$a_k(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(p - ik)\varphi(t)}\, e^{-ikt}\, dt. \tag{1.9}$$

Если разложить в ряд Фурье функцию $e^{-p\varphi(t)}$:

$$e^{-p\varphi(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(p)\, e^{ikt}, \tag{1.10}$$

то, согласно (1.9),

$$a_k(p) = b_k(p - ik). \tag{1.11}$$

Подставляя $\Psi(s, p)$ в (1.7) и (1.8) и используя теорему смещения ([1], стр. 474), приходим к формуле

$$\int_0^\infty y(t - \varphi(t))\, e^{-pt}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(p - ik)\, f(p - ik). \tag{1.12}$$

2 Формулу (1 12) используем для исследования устойчивости решений уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} + y\left(t - \frac{\pi}{2} + \mu \cos t\right) = 0, \quad y(t) \equiv 0, \quad t < 0, \quad y(0) = 1. \tag{2.1}$$

Используя свойства цилиндрических функций ([1], стр. 607), получим разложение

$$e^{p(-0{,}5\pi + \mu \cos t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-0{,}5\pi p} I_k(p\mu)\, e^{ikt}. \tag{2.2}$$

Предполагая $|\mu| < 1$, находим для изображения $f(p)$ решения уравнения (2.1) $y(t)$ разностное уравнение:

$$pf(p) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-0{,}5\pi p}\, i^k I_k(p\mu - ik\mu)\, f(p - ik) = 1. \tag{2.3}$$

Будем считать далее μ малым параметром На основе работы [3] можно построить трансцендентное уравнение для определения полюсов изображения $f(p)$. Оно имеет вид

$$p + e^{-0{,}5\,\pi p}(1 + 0{,}25\,\mu^2 p^2) -$$

$$- 0{,}25\,\mu^2 p e^{-0{,}5\,\pi p}\left(\frac{(p-i)\,i}{p - i + e^{-0{,}5\,\pi(p-i)}} - \frac{(p+i)\,i}{p + i + e^{-0{,}5\,\pi(p+i)}}\right) = O(\mu^4). \qquad (2.4)$$

Из (2.4) находим характеристические показатели уравнения (2.1) с наибольшей вещественной частью.

$$p_{1,2} = \pm i + \mu^2 \frac{-8 - 4\pi \pm (2\pi - 3)\,i}{10\,(4 + \pi^2)} + O(\mu^4). \qquad (2.5)$$

При достаточно малых значениях $\mu > 0$ решения уравнения (2.1) будут асимптотически устойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, ГИФМЛ, М, 1958.
2. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, ГИФМЛ, М., 1962.
3. К Г. Валеев, Прикладная математика и механика, **14**, 585 (1960).

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию
14 ноября 1964 г.