

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

| Страница | Строка | Напечатано | Должно быть |
|----------|----------------|--|--|
| 3 | 10 снизу | Коровков | Коробков |
| 23 | 19 и 20 сверху | I_n | I_{π} |
| 24 | 4 сверху | $\dots \varepsilon_{\omega}(\nu) \dots$ | $\dots \varepsilon_{\omega}(v) \dots$ |
| 37 | 7 снизу | $\dots \tilde{\varepsilon}_{\perp} \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow \infty \dots$ | $\dots \varepsilon_{\perp} \rightarrow \infty, \tilde{\varepsilon} \rightarrow \infty \dots$ |
| 46 | 7 сверху | $\dots \cos^2 0]^{1/2})/[2 \dots$ | $\dots \cos^2 0]^{1/2} \{ [2 \dots$ |
| 55 | 14 сверху | $\dots + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [1 - \dots$ | $\dots + \sqrt{\frac{2}{\pi}} [1 - \dots$ |
| 99 | 16 снизу | $F(+)$ | $F(t)$ |
| 105 | 12 сверху | $\dots \left\{ \zeta(\rho) \frac{\partial^2 \Psi(\rho)}{\partial z'^2} \dots \right.$ | $\dots \left\{ \zeta(\rho) \frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\rho)}{\partial z'^2} \dots \right.$ |
| 109 | 10 сверху | $\dots _{\rho=\Delta r_0} \dots _{\rho=0} \dots$ | $\dots _{\rho=\Delta r_0} \dots _{\rho=0} \dots$ |
| 125 | 10 снизу | $\langle y \rangle$ | $ y\rangle$ |
| 131 | 14 сверху | $\dots \left \dots \hat{C} \langle [a_j, a_k]_+ \rangle \hat{C} \right \dots$ | $\dots \left \dots \hat{C} \langle [a_j^*, a_k]_- \rangle \hat{C} \right \dots$ |
| 175 | Рис. 6 б. | ребро AG | ребро AB |
| 182 | Рис. 3. | вертикальная ось P_i | вертикальная ось \tilde{P}_i |
| 188 | 9 снизу | $\dots \int_0^{\infty} \frac{J_0(z\rho)}{\lambda_2 - \varepsilon \lambda_1} \dots$ | $\dots \int_0^{\infty} \frac{J_0(z\rho)}{\lambda_2 - \varepsilon \lambda_1} \dots$ |
| 206 | 4 снизу | $\dots \operatorname{sgn} k_1 \dots$ | $\dots \operatorname{sgn} \underline{k}_1 \dots$ |

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----|
| Кузьмин А. Д. К теории радиоизлучения Венеры | 7 |
| Файнштейн С. М. Об усилении потоком плазменных волн, связанных с переходным излучением на резкой границе двух сред | 19 |
| Патарая А. Д. Распространение волн конечной амплитуды в плазме с учетом эффекта разделения зарядов | 27 |
| Кондратьев И. Г., Миллер М. А. Двухмерные электромагнитные поля, направляемые плазменными слоями II | 34 |
| Тамойкин В. В. Потери энергии при движении заряда в неоднородной магнитоактивной плазме | 42 |
| Росинский С. Е., Рухадзе А. А., Рухлин В. Г. К теории неустойчивости анизотропной плазмы с пучком | 50 |
| Пресняков Л. П., Собельман И. И. О распространении электромагнитных волн в среде с переменным показателем преломления | 57 |
| Городинский Г. В. О реакции излучения в случае продольных волн | 64 |
| Беспалов В. И., Гапонов А. В. Статистические характеристики автомодуляции излучения лазера на твердом теле | 70 |
| Ораевский А. Н., Щеглов В. А. Собственные типы колебаний квантовых оптических резонаторов, заполненных веществом | 81 |
| Островский Л. А., Якубович Е. И. Об установившихся колебаниях лазера с распределенными потерями | 91 |
| Станкевич К. С. О нерезонансном поглощении радиоволны в молекулярном кислороде | 98 |
| Фукс И. М. Корреляционные функции волнового поля над статистически неровной поверхностью | 104 |
| Стратонович Р. Л. Количество информации, передаваемое квантовым каналом связи. I | 116 |
| Стратонович Р. Л. Количество информации, передаваемое квантовым каналом связи. II | 129 |
| Марков Г. Т., Дупленков Д. А., Осипович Н. Ф. Излучение вытянутой сфероидальной импедансной антенны | 142 |
| Юрьев В. И. Параметрический усилитель с поперечным взаимодействием и электростатической фокусировкой электронного потока | 153 |
| Левитский С. М., Явлинский А. Я., Широков И. В. Влияние постоянного электрического и магнитного полей на время формирования сверхвысокочастотного импульсного разряда в газе | 162 |
| Телеснин В. Р. К вопросу о распространении возбуждения в одномерных структурах | 169 |
| Комолов В. П., Рошаль А. С. Логические схемы на троичных параметрах | 177 |

Краткие сообщения и письма в редакцию

| | |
|--|-----|
| Гольнев В. Я., Новожилова Г. Г., Парицкий Ю. Н. Определение склонений некоторых внегалактических радиоисточников с помощью Большого пулковского радиотелескопа | 183 |
| Коровков Ю. С. Некоторые результаты измерений ослабления космического радиоизлучения в ионосфере | 186 |
| Эйдман В. Я. Излучение поверхностью волны зарядом, проходящим границу раздела двух сред | 188 |
| Фукс И. М. Пространственно-временные корреляции поля над морской поверхностью | 191 |
| Черняков Э. И. Излучение пучка, движущегося над дифракционной решеткой, лежащей на экранированном диэлектрике | 193 |
| Власов С. Н., Таланов В. И. О связи лучевого и волнового описаний электромагнитных пучков в квазиоптических системах | 195 |

| | |
|---|-----|
| Зайцев Ю. И., Степанов Д. П. Наблюдение многопучкового режима генерации гелий-неонового лазера | 198 |
| Крупнов А. Ф., Скворцов В. А. О параметре возбуждения пучкового мазера | 200 |
| Ключев А. С. Исследование систем автоматического регулирования с помощью амплитудно-фазовых критериев необходимой устойчивости по модулю и фазе | 203 |
| Брусин В. А. Абсолютная устойчивость некоторых классов управляющих систем | 206 |

Информация

| | |
|---|-----|
| Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. IV, № 5, 1964 | 208 |
|---|-----|

УДК 523.164.4 : 521.52

К ТЕОРИИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ВЕНЕРЫ

А. Д. Кузьмин

Приведены аналитические соотношения, связывающие яркостную температуру радиоизлучения планеты, окруженной поглощающей атмосферой, с физическими параметрами ее поверхности и атмосферы. Для частных случаев поглощения всей толщины атмосферы и поглощения в однородном и параболическом слоях получены численные решения. Последние используются для интерпретации результатов радиоастрономических измерений Венеры.

1. Одним из важных источников информации о физических свойствах Венеры являются радиоастрономические исследования этой планеты. Для интерпретации получаемых результатов необходимо установить связь измеряемых величин с физическими параметрами поверхности и атмосферы Венеры, влияющими на характер ее радиоизлучения. К числу таких параметров относятся температура и излучательная способность поверхности, а также температура и поглощение в атмосфере.

Поскольку большинство современных земных радиотелескопов не имеет разрешающей силы, достаточной для выделения участков, меньших, чем диск Венеры, измеряемой величиной является обычно яркостная температура, усредненная по видимому диску планеты $\bar{T}_{\text{яв}}$. В связи с этим необходимо найти связь усредненной яркостной температуры с упомянутыми параметрами планеты.

Для планеты, лишенной атмосферы, подобная задача была решена Троицким [1,2] (см. также [3]). Однако Венера, как известно, окружена атмосферой, которая может оказаться поглощающей, а следовательно, и излучающей в радиодиапазоне. Кроме того, в общем случае над поверхностью планеты может быть еще какой-либо поглощающе-излучающий слой. Поэтому следует рассматривать как излучение самой поверхности планеты, так и влияние на него указанных поглощающих сред*.

2. Найдем в общем виде излучение элементарной площадки на диске планеты с атмосферой.

Эффективная температура излучения элемента поверхности

$$T_e = T_{e0}(1 - R). \quad (1)$$

Здесь R — коэффициент отражения рассматриваемого элемента в направлении наблюдателя,

$$T_{e0} = \int_0^{\infty} T(y) x(y) \sec \rho' e^{-y \sec \rho'} dy, \quad (2)$$

где $T(y)$ и $x(y)$ — истинная температура и коэффициент поглощения вещества планеты на глубине y , ρ' — угол между направлением излу-

* Баррет [13] рассмотрел подобную задачу лишь для частного случая молекулярного поглощения в H_2O и CO_2 при экспоненциальном распределении поглощающего вещества.

чения, идущего изнутри, и нормалью к поверхности выхода. Атмосфера поглощает и, следовательно, ослабляет излучение поверхности; кроме того, она дает собственное излучение. Слой атмосферы толщиной ds по лучу зрения, находящийся над рассматриваемым элементом поверхности*, дает вклад в поглощение, равный $\chi(\lambda, s) ds$. Полная оптическая

толщина атмосферы $\tau(\lambda) = \int_0^{\infty} \chi(\lambda, s) ds$.

Поэтому яркостная температура суммарного излучения элемента поверхности и лежащей над ним по лучу зрения атмосферы будет равна

$$\begin{aligned} T_a[\tau(\lambda)] &= T_{e0}(1 - R) e^{-\tau(\lambda)} + \\ &+ \int_0^{\infty} T_a(s) \chi(s, \lambda) e^{-\int_s^{\infty} \chi(s, \lambda) ds} ds. \end{aligned} \quad (3)$$

Входящие в эту формулу параметры R , $\tau(\lambda)$, $T_a(s)$ и $\chi(\lambda, s)$ в общем случае зависят от положения элемента поверхности относительно наблюдателя. Экспериментально наблюдаемый фазовый ход яркостной температуры [4-7] указывает, что по крайней мере некоторые из приведенных параметров зависят также от степени освещенности Солнцем, а, следовательно, от положения излучающего элемента относительно Солнца. Кроме того, $T_a(s)$ и $\chi(s)$ являются функциями высоты.

В первом приближении примем, что фазовый ход яркостной температуры, усредненной по видимому диску Венеры, обусловлен лишь различием эффективных температур поверхности T_{e0d} и T_{e0n} и параметров атмосферы τ_d , τ_n , $T_{ad}(s)$, $T_{an}(s)$, $\chi_d(s)$ и $\chi_n(s)$ освещенной и неосвещенной частей планеты и изменением на видимом диске соотношения между этими частями. В пределах же каждой из этих частей все указанные параметры будем считать постоянными. Тогда в нижнем и верхнем соединениях, когда к Земле обращены соответственно полностью неосвещенная или освещенная сторона планеты, можно считать T_{e0} , $\tau(s)$, $T_a(s)$ и $\chi(s)$ не зависящими от положения элемента на поверхности планеты относительно Солнца.

3. Для рассмотрения зависимости указанных величин от положения излучающего элемента относительно наблюдателя в этом случае удобно использовать полярную систему координат a, γ , где a — расстояние элемента от центра диска, выраженное в долях радиуса диска, γ — угол в центре диска между направлением начала отсчета и направлением на излучающий элемент. За начало отсчета примем направление, совпадающее с поляризацией приемной системы.

Зависимость коэффициента отражения от координат излучающего элемента описывается соотношением

$$[1 - R(a, \gamma)] = (1 - R_v) \cos^2 \gamma + (1 - R_r) \sin^2 \gamma,$$

где R_v и R_r — коэффициенты отражения для вертикальной и горизонтальной поляризаций. Для гладкой (по сравнению с длиной волны) поверхности коэффициенты отражения определяются известными формулами Френеля:

$$R_v = \left(\frac{\epsilon \cos \rho - \sqrt{\epsilon - \sin^2 \rho}}{\epsilon \cos \rho + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \rho}} \right)^2;$$

* Мы пренебрегаем рефракцией в атмосфере Венеры, существенной лишь на краю диска и вносящей поэтому лишь незначительные изменения.

$$R_r = \left(\frac{\cos \rho - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \rho}}{\cos \rho + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \rho}} \right)^2.$$

Учитывая, что $a = \sin \rho$, и проводя элементарные преобразования, получим

$$1 - R_s = \frac{4\varepsilon \sqrt{(1-a^2)(\varepsilon-a^2)}}{(\varepsilon \sqrt{1-a^2} + \sqrt{\varepsilon-a^2})^2}; \quad (4)$$

$$1 - R_r = \frac{4 \sqrt{(1-a^2)(\varepsilon-a^2)}}{(\sqrt{1-a^2} + \sqrt{\varepsilon-a^2})^2}.$$

С учетом вышеизложенного яркостная температура элемента поверхности с координатами a, γ и $ds = dh/\sqrt{1-a^2}$ может быть выражена в виде

$$\begin{aligned} T_a(a, \gamma, \lambda) = & T_{e0} \left[\frac{4\varepsilon \sqrt{(1-a^2)(\varepsilon-a^2)}}{(\varepsilon \sqrt{1-a^2} + \sqrt{\varepsilon-a^2})^2} \cos^2 \gamma + \right. \\ & \left. + \frac{4 \sqrt{(1-a^2)(\varepsilon-a^2)}}{(\sqrt{1-a^2} + \sqrt{\varepsilon-a^2})^2} \sin^2 \gamma \right] e^{-\frac{\tau(\lambda)}{\sqrt{1-a^2}}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \int_0^\infty T_a(h) \chi(h, \lambda) e^{-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \int_h^\infty \chi(h, \lambda) dh} dh. \end{aligned} \quad (5)$$

Как уже отмечалось, при приеме на антенну с широкой по сравнению с планетой диаграммой направленности, измеряемой величиной является яркостная температура, усредненная по видимому диску планеты:

$$\overline{T_a(\lambda)} = \frac{\int \overline{T_a(\lambda, a, \gamma)} d\Omega}{\Omega_n}, \quad (6)$$

где Ω_n — телесный угол планеты. В выбранной системе координат элемент телесного угла

$$d\Omega = \frac{\Omega_n}{\pi} adad\gamma. \quad (7)$$

Подставив (5), (7) в (6) и проведя ряд преобразований, получим

$$\overline{T_a(\lambda)} = \overline{T_1(\lambda)} + \overline{T_2(\lambda)}. \quad (8)$$

Здесь $\overline{T_1(\lambda)}$ и $\overline{T_2(\lambda)}$ — составляющие яркостной температуры, усредненной по видимому диску, которые обусловлены излучением поверхности и атмосферы планеты.

4. Величина $\overline{T_1(\lambda)}$ зависит от температуры и электрических свойств поверхности и от полного поглощения в атмосфере:

$$T_1(\lambda) = T_{e0} J_1[\tau(\lambda), \varepsilon], \quad (9)$$

где

$$J_1[\tau(\lambda), \varepsilon] = 4 \int_0^1 a \left[\frac{\varepsilon \sqrt{(1-a^2)(\varepsilon-a^2)}}{(\varepsilon \sqrt{1-a^2} + \sqrt{\varepsilon-a^2})^2} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{(1-a^2)(\varepsilon-a^2)}}{(\sqrt{1-a^2} + \sqrt{\varepsilon-a^2})^2} \right] e^{-\tau(\lambda)/\sqrt{1-a^2}} da.$$

Величина $J_1[\tau(\lambda), \varepsilon]$ является по сути дела усредненной по видимому диску излучательной способностью планеты. Численные ее значения для различных параметров τ и ε , рассчитанные на вычислительной

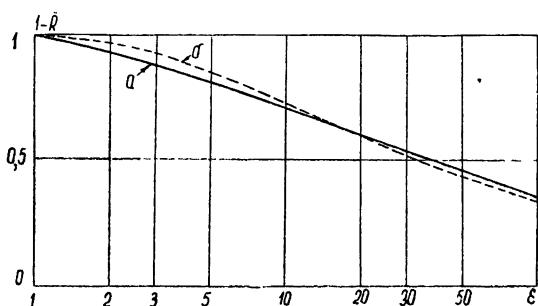


Рис. 1. Зависимость излучательной способности $1 - \bar{R}$ планеты с прозрачной атмосферой от диэлектрической проницаемости материала поверхности
а) усредненной по видимому диску, б) для нормального падения

машине, приведены в таблице 1. На рис. 1 приведен график зависимости $J_1(\varepsilon)$ для случая $\tau = 0$, т. е. для волн, на которых поглощение в атмосфере не имеет места. На этом же рисунке приведена зависимость от ε излучающей способности диска, нормального к лучу зрения. Излучательная способность гладкого шара определяется как

$$1 - \bar{R} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} [(1 - R_b) \cos^2 \gamma + (1 - R_r) \sin^2 \gamma] adad\gamma = J_1(0, \varepsilon). \quad (10)$$

Тогда яркостная температура, усредненная по видимому диску, равна

$$T_a[\tau(\lambda)] = T_{e0} J_1(0, \varepsilon) \int_0^1 e^{-\tau(\lambda)/\sqrt{1-a^2}} da = T_{e0} J_2(\tau, \varepsilon), \quad (11)$$

где

$$J_2(\tau, \varepsilon) = J_1(0, \varepsilon) \int_0^1 e^{-\tau(\lambda)/\sqrt{1-a^2}} da. \quad (12)$$

Интеграл $\int_0^1 e^{-\tau/\sqrt{1-a^2}} da$ вычислен на машине и приведен в таблице 2.

5. Составляющая яркостной температуры $T_2(\lambda)$, обусловленная излучением атмосферы, зависит от температуры и поглощения в атмосфере и от распределения этих параметров по высоте:

Таблица 1

| | | Значения $J_1(\zeta, \varepsilon) \cdot 10^3$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----|---|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| τ | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,06 | 0,08 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 1,0 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,5 | |
| 1,1 | 986 | 985 | 983 | 979 | 968 | 954 | 937 | 917 | 826 | 700 | 513 | 382 | 219 | 113 | 60 | 33 | 18 | 2 | |
| 1,25 | 971 | 969 | 968 | 964 | 954 | 938 | 912 | 880 | 796 | 663 | 509 | 380 | 218 | 113 | 60 | 32 | 18 | 2 | |
| 1,6 | 944 | 943 | 941 | 941 | 918 | 915 | 905 | 889 | 859 | 777 | 662 | 488 | 365 | 210 | 109 | 58 | 31 | 17 | 2 |
| 2,0 | 921 | 919 | 919 | 915 | 890 | 881 | 865 | 837 | 756 | 645 | 476 | 356 | 205 | 107 | 57 | 31 | 17 | 5 | 2 |
| 2,5 | 896 | 895 | 893 | 893 | 869 | 860 | 845 | 817 | 739 | 630 | 465 | 348 | 201 | 104 | 55 | 30 | 16 | 5 | 2 |
| 3,0 | 875 | 874 | 872 | 872 | 845 | 825 | 811 | 783 | 709 | 604 | 445 | 333 | 192 | 100 | 53 | 29 | 16 | 5 | 2 |
| 4,0 | 839 | 838 | 836 | 836 | 804 | 807 | 804 | 795 | 755 | 683 | 681 | 429 | 321 | 185 | 96 | 51 | 28 | 15 | 1 |
| 5,0 | 810 | 808 | 808 | 808 | 771 | 771 | 767 | 759 | 746 | 720 | 651 | 554 | 408 | 305 | 175 | 91 | 48 | 26 | 14 |
| 6,5 | 772 | 771 | 771 | 771 | 739 | 736 | 728 | 716 | 691 | 624 | 531 | 390 | 292 | 168 | 87 | 46 | 25 | 14 | 4 |
| 8,0 | 742 | 740 | 740 | 740 | 705 | 705 | 695 | 683 | 659 | 595 | 505 | 371 | 277 | 159 | 82 | 44 | 24 | 13 | 4 |
| 10 | 708 | 706 | 706 | 706 | 671 | 671 | 668 | 660 | 649 | 626 | 564 | 479 | 351 | 262 | 150 | 78 | 41 | 22 | 12 |
| 12,5 | 672 | 672 | 671 | 671 | 633 | 632 | 631 | 629 | 622 | 610 | 589 | 530 | 449 | 329 | 245 | 141 | 73 | 39 | 21 |
| 16 | 633 | 632 | 632 | 632 | 598 | 597 | 595 | 593 | 586 | 556 | 552 | 423 | 310 | 230 | 132 | 68 | 36 | 20 | 11 |
| 20 | 562 | 561 | 561 | 561 | 534 | 532 | 531 | 529 | 523 | 513 | 495 | 444 | 315 | 213 | 123 | 63 | 34 | 18 | 10 |
| 25 | 534 | 532 | 532 | 532 | 489 | 488 | 487 | 485 | 480 | 470 | 453 | 406 | 342 | 249 | 185 | 105 | 54 | 32 | 17 |
| 30 | 489 | 488 | 488 | 488 | 456 | 455 | 454 | 452 | 447 | 438 | 421 | 377 | 318 | 231 | 171 | 97 | 50 | 26 | 14 |
| 40 | 456 | 455 | 455 | 455 | 418 | 417 | 416 | 414 | 410 | 401 | 386 | 345 | 290 | 210 | 155 | 88 | 45 | 24 | 13 |
| 50 | 418 | 417 | 417 | 417 | 388 | 388 | 386 | 381 | 373 | 359 | 321 | 269 | 194 | 144 | 82 | 42 | 22 | 12 | 7 |
| 65 | 389 | 388 | 388 | 388 | 359 | 358 | 357 | 352 | 345 | 331 | 296 | 248 | 179 | 132 | 75 | 38 | 20 | 11 | 6 |
| 80 | 360 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 100 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |

Таблица 2

| | | Значения $10^3 \int_0^\tau e^{-\tau'/\sqrt{1-\bar{a}^2}} d\tau'$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------------------|------|--|-------|-------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| τ | 0 | 0,001 | 0,002 | 0,004 | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 1,0 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5 | 6,5 |
| $D_1(\tau)$ | 1000 | 998 | 997 | 994 | 985 | 970 | 941 | 863 | 751 | 576 | 447 | 274 | 152 | 85 | 49 | 28 | 9 | 3 | 1 |
| $D_2(\tau) \cdot 10^3$ | 1000 | 998 | 996 | 992 | 980 | 961 | 924 | 833 | 704 | 514 | 383 | 219 | 113 | 61 | 33 | 17 | 7 | 2 | 0 |
| $D_3(\tau) \cdot 10^3$ | 0 | 1 | 1 | 3 | 7 | 20 | 39 | 92 | 163 | 288 | 377 | 494 | 575 | 616 | 639 | 650 | 663 | 664 | 666 |

$$\begin{aligned} \overline{T_2[\tau(\lambda)]} = 2 \int_0^1 \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \int_0^\infty T_a(h) \times (h, \lambda) \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \int_h^\infty x(h, \lambda) dh \right] dh da. \end{aligned} \quad (13)$$

Для дальнейших вычислений сделаем некоторые предположения об этих параметрах. Распределение температуры в атмосфере Венеры будем считать линейным кусочно-ломанным с температурным градиентом β_1 от поверхности до верхней границы облачного слоя и градиентом β_2 выше облачного слоя:

$$T_a(h) = \begin{cases} T_n + \beta_1 h & \text{при } 0 \leq h \leq h_{\text{обл}} \\ T_{\text{обл}} + \beta_2(h - h_{\text{обл}}) & \text{при } h > h_{\text{обл}} \end{cases}. \quad (14)$$

В частном случае при $\beta_2 = 0$ область выше облачного слоя является изотермической с температурой $T_a = T_{\text{обл}}$. В зависимости от природы поглощающего слоя представляют интерес следующие частные случаи распределения поглощения по высоте:

а) поглощает вся толща атмосферы, распределение поглощения — экспоненциальное;

б) поглощает слой, заключенный между h_1 и h_2 ; поглощение в слое постоянно;

в) поглощает слой, заключенный между h_1 и h_2 ; распределение поглощения в слое параболическое.

Рассмотрим эти случаи.

Случай а. Распределение поглощения — экспоненциальное:

$$x(\lambda, h) = x_0(\lambda) e^{-h/H}, \quad (15)$$

где $x_0(\lambda)$ — поглощение на уровне $h = 0$, H — высота однородной атмосферы. Для Земли этот случай соответствует молекулярному поглощению в атмосфере.

В связи с малым вкладом надоблачной части атмосферы примем для упрощения вычислений, что $\beta_2 = 0$, т. е.

$$T_a(h) = \begin{cases} T_n + \beta_1 h & \text{при } 0 \leq h \leq h_{\text{обл}} \\ T_{\text{обл}} & \text{при } h > h_{\text{обл}} \end{cases}. \quad (16)$$

Подставляя (15) и (16) в (13) и проводя ряд преобразований, получим

$$\overline{T_2[\tau(\lambda)]} = T_{\text{обл}} - T_n D_1(\tau) + \beta_1 H J_3(\tau, b), \quad (17)$$

где

$$D_1(\tau) = e^{-\tau} (1 - \tau) - \tau^2 \operatorname{Ei}(-\tau),$$

Ei — интегральная показательная функция.

$$\begin{aligned} J_3(\tau, b) = 2 \int_0^1 a \int_1^b e^{-\tau z / \sqrt{1-a^2}} dz da, \\ b = e^{-h_{\text{обл}}/H}. \end{aligned}$$

Функции $D_1(\tau)$ и $J_3(\tau, b)$ приведены в таблицах 2 и 3. Расчет $J_3(\tau, b)$ также производился на вычислительной машине.

Таблица 3

| | | Значения $J_3(\tau, b) \cdot 10^3$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|-------|------------------------------------|-------|-------|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|---|---|---|---|
| τ | b | 0,001 | 0,002 | 0,004 | 0,01 | -0,02 | 0,04 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 1,0 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 50 | 100 | 300 | 1000 | | | | |
| 0,90 | 105 | 105 | 104 | 103 | 101 | 98 | .88 | .75 | .56 | .42 | .25 | .13 | .07 | .04 | .02 | .01 | .004 | .002 | .001 | .001 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 0,78 | 248 | 247 | 247 | 244 | 240 | 232 | 211 | 182 | 137 | 105 | 64 | 35 | 20 | 12 | 7 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 0,61 | 493 | 493 | 491 | 487 | 479 | 465 | 427 | 373 | 290 | 229 | 147 | 87 | 53 | 33 | 21 | 8 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 0,37 | 933 | 933 | 932 | 930 | 929 | 922 | 919 | 907 | 904 | 901 | 884 | 793 | 647 | 536 | 376 | 250 | 171 | 119 | 84 | 44 | 24 | 10 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 0,20 | 1608 | 1606 | 1603 | 1594 | 1578 | 1549 | 1467 | 1347 | 1151 | 995 | 751 | 562 | 427 | 330 | 259 | 165 | 109 | 62 | 19 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 0,08 | 2524 | 2522 | 2518 | 2508 | 2490 | 2486 | 2360 | 2219 | 1981 | 1787 | 1486 | 1214 | 1014 | 862 | 742 | 566 | 456 | 321 | 166 | 74 | 36 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 0,08 | 3505 | 3503 | 3499 | 3487 | 3469 | 3433 | 3331 | 3180 | 2924 | 2712 | 2377 | 2066 | 1830 | 1643 | 1491 | 1256 | 1082 | 889 | 616 | 386 | 253 | 134 | 43 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 0,0067 | 5004 | 5002 | 4998 | 4986 | 4967 | 4930 | 4826 | 4670 | 4405 | 4184 | 3832 | 3449 | 3243 | 3036 | 2865 | 2563 | 2283 | 2139 | 1750 | 1403 | 1170 | 867 | 541 | 222 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0,00055 | 7498 | 7496 | 7492 | 7480 | 7661 | 7424 | 7319 | 7162 | 6895 | 6672 | 6314 | 5976 | 5713 | 5501 | 53.3 | 5040 | 4819 | 4558 | 4131 | 3731 | 3449 | 3054 | 2564 | 1922 | 1006 | 295 | — | — | — | — | — |
| 0,000015 | 10006 | 10005 | 10001 | 9990 | 9970 | 9932 | 9828 | 9670 | 9403 | 9180 | 8822 | 8483 | 8220 | 8007 | 7829 | 7545 | 7222 | 7060 | 5630 | 5225 | 5533 | 5024 | 4335 | 3254 | 2102 | — | — | — | — | — | |

Таблица 4

| | | Значения $J_4(\tau)$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|--------------------|----------------------|-------|------|------|------|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|--|
| T_m (°K) | $\beta \Delta h_0$ | 0,001 | 0,002 | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 1 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5 | 6,5 | 17 | 18 | | |
| 300 | -10 | 0,6 | 1,2 | 5,8 | 11 | 22 | 50 | 89 | 145 | 185 | 233 | 280 | 288 | 292 | 296 | 296 | 296 | 296 | 296 | | |
| | -40 | 0,60 | 1,2 | 5,8 | 11,4 | 22 | 50 | 87 | 141 | 177 | 220 | 254 | 257 | 285 | 287 | 287 | 287 | 287 | 287 | | |
| | -160 | 0,59 | 1,2 | 5,8 | 11,4 | 22 | 50 | 87 | 141 | 177 | 220 | 254 | 257 | 257 | 257 | 257 | 257 | 257 | 257 | | |
| 400 | -10 | 0,80 | 1,6 | 7,8 | 15,2 | 29 | 67 | 118 | 194 | 246 | 311 | 374 | 385 | 390 | 395 | 395 | 395 | 395 | 395 | | |
| | -40 | 0,8 | 1,6 | 7,8 | 15,2 | 29 | 67 | 118 | 193 | 245 | 308 | 369 | 379 | 384 | 386 | 386 | 386 | 386 | 386 | | |
| | -160 | 0,8 | 1,6 | 7,8 | 15,2 | 29 | 66 | 117 | 190 | 239 | 298 | 348 | 354 | 354 | 356 | 356 | 356 | 356 | 356 | | |
| 600 | +150 | 1,2 | 2,4 | 11,6 | 22,8 | 44 | 101 | 179 | 295 | 482 | 590 | 611 | 623 | 637 | 643 | 643 | 643 | 643 | 643 | | |
| | +500 | 1,2 | 2,4 | 11,7 | 22,9 | 44 | 102 | 183 | 305 | 394 | 513 | 651 | 683 | 705 | 731 | 747 | 747 | 747 | 747 | | |
| | -500 | 2,0 | 4,0 | 19,4 | 38 | 74 | 169 | 301 | 499 | 641 | 825 | 1027 | 1070 | 1098 | 1129 | 1146 | 1162 | 1162 | 1162 | | |
| 2000 | 500 | 4,0 | 7,9 | 38,8 | 76 | 147 | 336 | 597 | 985 | 1258 | 1606 | 1966 | 2038 | 2038 | 2124 | 2124 | 2124 | 2124 | 2124 | | |

Результирующая яркостная температура, усредненная по видимому диску планеты, для гладкой поверхности в этом случае равна

$$T_{\text{я}}[\tau(\lambda)] = T_{e0}J_1(\tau, \varepsilon) - T_nD_1(\tau) + T_{\text{oбл}} + \beta_1HJ_3(\tau, b). \quad (18)$$

Случай б. Поглощающий слой заключен в слое конечной толщины. Распределение поглощения однородно по слою:

$$x(h, \lambda) = \begin{cases} x_0(\lambda) & \text{при } h_1 \leq h \leq h_2 \\ 0 & \text{при } h < h_1, \quad h > h_2 \end{cases}.$$

Считая кроме того

$$h_{\text{oбл}} > h_2 \quad \text{или} \quad h_{\text{oбл}} < h_1,$$

получим

$$\overline{T_2[\tau(\lambda)]} = T_2 - T_1D_1(\tau) + \frac{T_1 - T_2}{\tau} D_2(\tau), \quad (19)$$

где T_1 и T_2 — температуры атмосферы у нижней и верхней границы слоя,

$$D_2(\tau) = \frac{1}{2} \left[2 - e^{-\tau} (2 - \tau + \tau^2) - \tau^3 \operatorname{Ei}(-\tau) \right].$$

Функция $D_2(\tau)$ приведена в таблице 2.

Случай в. Поглощающий слой заключен в слое конечной толщины. Распределение поглощения — параболическое:

$$x(h, \lambda) = x_0(\lambda) \left[1 - \left(2 \frac{h - h_m}{\Delta h_0} \right)^2 \right] \quad \left(h_m - \frac{\Delta h_0}{2} \leq h \leq h_m + \frac{\Delta h_0}{2} \right), \quad (20)$$

где h_m — высота максимума поглощения, $x_0(\lambda)$ — поглощение на высоте h_m , Δh_0 — толщина слоя по уровню нулевого поглощения. В земных условиях этот случай соответствует поглощению в облачном слое или в ионосфере. Обозначая $2(h - h_m)/\Delta h_0 = y$ и проводя ряд преобразований, получим

$$T_2[\tau(\lambda)] = J_4(\tau, T_m, \beta, \Delta h_0), \quad (21)$$

где

$$J_4(\tau, T_m, \beta, \Delta h_0) = \frac{3}{2} \tau \int_0^1 \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} F(a) da,$$

$$F(a) = \int_{-1}^1 \left(T_m + \beta \frac{\Delta h_0}{2} y \right) (1-y^2) \exp \left\{ -\frac{\tau}{2 \sqrt{1-a^2}} \times \right. \\ \left. \times \left[1 - \frac{3}{2} y \left(1 - \frac{y^2}{3} \right) \right] \right\} dy,$$

$$\tau(\lambda) = \int_0^\infty x(\lambda, h) dh = \frac{2}{3} x_0(\lambda) \Delta h_0,$$

T_m — температура слоя на уровне максимума поглощения. Функция $J_4(\tau)$ также рассчитана на вычислительной машине и приведена в таблице 4.

6. Применим полученные соотношения к результатам радиоастрономических измерений Венеры. Как известно, имеются две группы моделей, объясняющих наблюдаемый спектр радиоизлучения Венеры. В одной группе моделей (с «холодной» атмосферой) принимается, что атмосфера планеты является поглощающей для волн короче 2 см и прозрачной для более длинных волн. В этом случае излучение на волнах длиннее 2 см обусловлено поверхностью планеты. Более низкая яркостная температура в миллиметровом диапазоне волн обусловлена поглощением в более холодной атмосфере планеты. В другой группе моделей принимается, что Венера имеет «горячую» ионосферу, поглощающую на волнах длиннее 2 см и прозрачную на более коротких волнах.

Рассмотрим модель с «холодной» атмосферой и определим, какова должна быть зависимость поглощения в слое от длины волны, необходимая для удовлетворения наблюдаемому спектру яркостной температуры. Рассмотрение проведем для неосвещенной стороны Венеры, спектр радиоизлучения которой изучен достаточно хорошо (см., например, [3]).

Для оценки диэлектрической проницаемости привлечем данные радиолокационных измерений Венеры. Судя по радиолокационным измерениям [10–12], для модели с «холодной» атмосферой $\epsilon = 2,5 \div 6$.

Температуру поверхности в этой модели определим из (9) по яркостной температуре, измеренной в диапазоне длин волн, где атмосфера прозрачна ($\tau = 0$):

$$T_{e^0} = \frac{T_{\text{яв}}}{J_1(0, \epsilon)}.$$

Яркостная температура неосвещенной стороны Венеры в диапазоне длин волн $\lambda = 3 \div 20$ см составляет $\sim 585^\circ\text{K}$. Тогда

$$T_{e^0} = \frac{585}{J_1(0, 3)} = \frac{585}{0,87} = 670^\circ\text{K}.$$

При значениях $\epsilon = 2,5 \div 6$ $J_1(0, \epsilon) = 0,89 \div 0,78$, что соответствует $T_{e^0} = 660 \div 750^\circ\text{K}$. Температуру облачного слоя в соответствии с данными измерений примем равной $T_{\text{обл}} \approx 250^\circ\text{K}$. Температурный градиент в тропосфере планеты (т. е. в подоблачном слое) примем равным адиабатическому:

$$\gamma_a = Ag/C_p,$$

где $A = 2,39 \cdot 10^{-8}$ кал·эрз⁻¹ — термический эквивалент работы, g — ускорение силы тяжести, равное на Венере 835 см·сек⁻², C_p — теплоемкость при постоянном давлении. Однако химический состав атмосферы, а следовательно, и величина C_p для Венеры неизвестны. Спектроскопические исследования показали, что, по-видимому, основную часть атмосферы планеты составляют газы, которые не обнаружены спектроскопически. Такими составляющими может быть азот, а также благородные газы. Для азота $C_p = 0,25$ кал·г⁻¹·град⁻¹ и $\gamma_a = 8$ град·км⁻¹. Для аргона $C_p = 0,125$ и $\gamma_a = 16$ град·км⁻¹. Для дальнейших расчетов примем азотную атмосферу и $\beta_1 = \gamma_{aN_2} = 8$ град·км⁻¹. При этом

$$h_{\text{обл}} = \frac{T_{\text{п}} - T_{\text{обл}}}{\beta_1} = 52,5 \text{ км.}$$

На графике рис. 2 приведены зависимости $T_{\text{яв}}[\tau(\lambda)]$, рассчитанные для рассмотренных частных случаев и выбранных выше параметров модели Венеры с «холодной» атмосферой $\epsilon = 3$, $T_{e^0} = 670^\circ\text{K}$, $T_{\text{обл}} = 250^\circ\text{K}$, $\beta_1 = 8$ град·км⁻¹, $h_{\text{обл}} = 52,5$ км для различных вариантов

распределения поглощения по высоте. Сплошные кривые относятся к случаю поглощения всей толщины атмосферы с экспоненциальным распределением по высоте. Выбранные высоты однородной атмосферы $H = 7, 10, 15, 15$ и 21 км соответствуют азотной атмосфере с температурами $200, 300, 420$ и 600°K . Пунктирная кривая соответствует слою с оди-

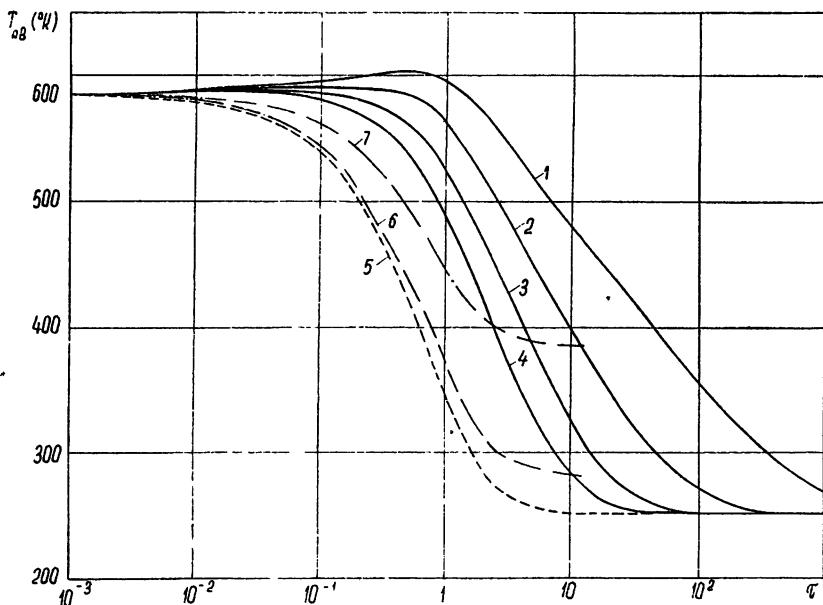


Рис. 2. Зависимость яркостной температуры Венеры $T_{\text{я}_v}$ от оптической толщины поглощающей атмосферы для $\epsilon = 3$, $T_{e_0} = 670^\circ\text{K}$, $T_{\text{обл}} = 250^\circ\text{K}$, $\beta_1 = 8 \text{ град. км}^{-1}$, $h_{\text{обл}} = 52,5 \text{ км}$:

- 1) поглощает вся толща атмосферы ($H=7 \text{ км}$), 2) поглощает вся толща атмосферы ($H=10,5 \text{ км}$),
- 3) поглощает вся толща атмосферы ($H=15 \text{ км}$), 4) поглощает вся толща атмосферы ($H=21 \text{ км}$),
- 5) поглощает однородный слой, заключенный между уровнями с температурами $T_1 = 300^\circ\text{K}$ и $T_2 = 250^\circ\text{K}$, 6) поглощает параболический слой с $T_m = 300^\circ\text{K}$, $\beta\Delta h_0 = -40^\circ\text{K}$; 7) поглощает параболический слой с $T_m = 400^\circ\text{K}$, $\beta\Delta h_0 = -40^\circ\text{K}$.

наковым. поглощением по высоте, заключенному между высотами, температуры на которых равны $T_1 = 300^\circ\text{K}$ и $T_2 = 250^\circ\text{K}$. Штрих-пунктирными кривыми построены зависимости $\bar{T}_{\text{я}_v}[\tau(\lambda)]$ для параболического слоя с $\Delta h_0 = 5 \text{ км}$ для $T_m = 300$ и 400°K .

Рассмотрение приведенных зависимостей показывает, что если поглощении происходит во всей толще атмосферы, то для удовлетворения измеренным в миллиметровом диапазоне волн яркостным температурам Венеры $\bar{T}_{\text{я}_v} \approx 350 \div 400^\circ\text{K}$ требуются высокие значения оптической толщины атмосферы на этих волнах. Так, например, при $H = 7 \text{ км}$, полученной по наблюдениям покрытия Регула, необходима неправдоподобно большая величина $\tau_{\lambda=4+8 \text{ мм}} \approx 100$. Поэтому представляется вероятным, что в подоблачной атмосфере величина H существенно больше 7 км .

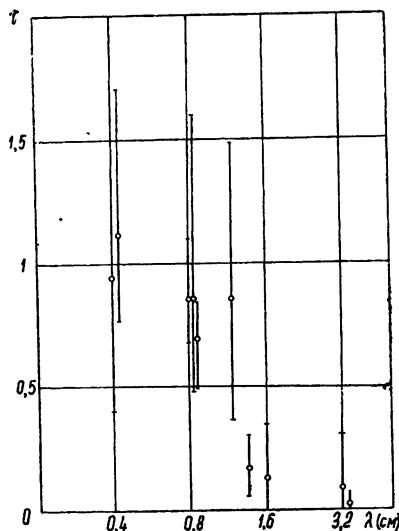
Из этого же рис. 2 видно, что яркостные температуры $\sim 350 \div 400^\circ\text{K}$ могут быть получены при значительно меньшей оптической толщине, если поглощение происходит в слое конечной толщины, расположенному близко к верхней границе облачного слоя. Действительно, слой с $T_m = 300^\circ\text{K}$ и $\Delta h_0 = 5 \text{ км}$ должен иметь $\tau_{\lambda=4+8 \text{ мм}} \sim 1$.

На основании вышеизложенного представляется более вероятным,

что поглощающее вещество, ответственное за уменьшение яркостной температуры Венеры в миллиметровом диапазоне волн, заключено в слое конечной толщины, находящемся близко к верхней границе облачного слоя, а не распределено по всей атмосфере планеты.

На рис. 3 для параболического слоя с $T_m = 300^\circ\text{K}$ и $\Delta h_0 = 5 \text{ км}$

Рис. 3. Зависимость оптической толщины атмосферы с параболическим поглощающим слоем ($T_m = 300^\circ\text{K}$, $\Delta h_0 = -40^\circ\text{K}$), удовлетворяющая экспериментальным данным [9] о частотном спектре радиоизлучения.



построена зависимость оптической толщи τ , а следовательно, и поглощения χ в слое от длины волны, необходимая для удовлетворения наблюдаемому спектру $T_{\text{я}}(\lambda)$ [9].

Автор весьма признателен В. С. Троицкому за плодотворную дискуссию по материалам настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Астрон. ж., **31**, 511 (1954).
2. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 208 (1964).
3. C. E. Heiles, F. D. Drake, Preprint NRAO.
4. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., **37**, 297 (1960).
5. F. D. Drake, Publication NRAO, **1**, 165 (1962).
6. C. H. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, La Physique des planets, XIth colloque Internat. d'Astrophys., Univ. Liege, 1962.
7. J. Dickel, F. T. Haddock, Report to the XIV General Assembly URSI, Tokyo, 1963.
8. А. Е. Башаринов, Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, Б. Г. Кутузов, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., **39**, 707 (1964).
9. Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, Б. Г. Кутузов, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 1054 (1963).
10. В. А. Котельников, В. М. Дубровин, Б. А. Дубинский, М. Д. Кислик, Б. И. Кузнецов, И. В. Лишин, В. А. Морозов, Г. М. Петров, О. Н. Ржига, Г. А. Сыцко, А. М. Шаховской, Докл. АН СССР, **151**, 532 (1963).
11. L. R. Maling, S. W. Golomb, J. Brit. IRE, **22**, 297 (1961).
12. G. H. Pettengill, H. W. Briscoe, J. V. Evans, E. Gehrels, G. M. Hyde, L. G. Kraft, R. Price, W. B. Smith, Astroph. J., **67**, 181 (1962).
13. A. H. Garrett, Astroph. J., **133**, 281 (1961).

TO THE THEORY OF VENUS RADIO EMISSION

A. D. Kuzmin

Analytical relations have been given connecting the bright temperature of radio emission of the planet covered by the absorbing atmosphere with the physical parameters of its surface and atmosphere. For particular cases of absorption by the whole atmosphere thickness and of that in homogeneous and parabolic layers the numerical solutions have been obtained. The latters are applied to the results interpretation of the radio astronomic measurements of Venus.

УДК 533.951

ОБ УСИЛЕНИИ ПОТОКОМ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН, СВЯЗАННЫХ С ПЕРЕХОДНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ НА РЕЗКОЙ ГРАНИЦЕ ДВУХ СРЕД

C. M. Файнштейн

Рассматривается задача об усилении и ослаблении плазменных волн квазинейтральным потоком заряженных частиц на резкой границе двух плазм.

Известно, что система, состоящая из потока и квазинейтральной плазмы, при определенных условиях неустойчива — существует нестабильность, связанная с черенковским и магнитотормозным излучением (см., например, [1, 2, 3]). Представляет интерес также исследование вопроса об усилении плазменных волн потоком при переходе последнего через резкую границу, связанным с так называемым переходным излучением*. Поскольку такое излучение происходит в процессе перехода границы, нельзя ожидать усиления во всем пространстве; поэтому имеет смысл ставить задачу следующим образом.

Пусть граница двух плазм пронизывается потоком частиц со средней скоростью V_0 ; нормально границе падает плазменная волна (см. рис. 1), в результате возникают отраженная и проходящая волны; рассматривается задача об усилении этих волн квазинейтральным потоком заряженных частиц. Исследование проводится квазигидродинамическим методом для случая моноскоростного потока и методом коэффициентов Эйнштейна для потока с тепловым разбросом по скоростям**.

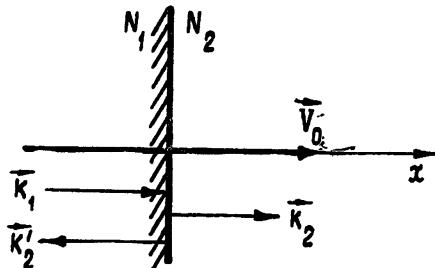


Рис. 1.

1. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Исходная система квазигидродинамических линеаризованных уравнений имеет вид [3] (при условии $V_0 \ll c$; c — скорость света)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} E &= 4\pi e (\rho + \rho_s); \\ m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= eE; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} N \mathbf{v} = 0; \\ m \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + (V_0 \nabla) \mathbf{v}_s \right\} &= eE; \quad \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \operatorname{div} \left\{ N_s \mathbf{v}_s + \rho_s V_0 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

* Вопрос о возбуждении плазменной волны в неоднородной среде, а также о затухании, связанном с переходным излучением, рассмотрен в работах [4, 5].

** В работе [1] метод коэффициентов Эйнштейна применен к магнитотормозному излучению; в статье [3] указанный метод рассмотрен в связи с черенковским излучением.

Здесь N и N_s — равновесные концентрации электронов в основной плазме и в потоке, ρ и ρ_s — соответствующие отклонения указанных величин от их невозмущенных значений, v — скорость электронов плазмы, v_s — отклонение скорости электронов в потоке от величины V_0 — скорости в отсутствие поля. В этом разделе предполагаем для простоты, что граница двух холодных плазм (т. е. $T = 0$) пронизывается потоком, у которого нет теплового разброса по скоростям (т. е. $T_s = 0$).

Найдем граничные условия, исходя из системы (1). Преобразуем уравнение для $\operatorname{div} E$ к виду

$$\operatorname{div}(E + 4\pi P) = 0,$$

где $\operatorname{div} P = -e(\rho + \rho_s)$, P — вектор поляризации. Для $e^{i\omega t - ikx}$ -процессов из системы (1) найдем выражения для ρ и ρ_s через E и подставим в формулу для $\operatorname{div} P$. После необходимых выкладок получим

$$\operatorname{div}(\epsilon E) = 0,$$

где $\epsilon(\omega, k) = 1 - \omega_p^2/\omega^2 - \omega_s^2/(\omega - k v_0)^2$ — «продольная» диэлектрическая проницаемость (см. [7]). Из уравнения для $\operatorname{div}(\epsilon E)$ путем предельного перехода получим граничное условие

$$\epsilon_1 E_{n_1} = \epsilon_2 E_{n_2} \quad (2)$$

для нормальных составляющих электрического поля.

Для получения второго граничного условия используем первые три уравнения системы (1), которые для $e^{i\omega t}$ -процессов имеют вид

$$\operatorname{div} E = 4\pi e(\rho + \rho_s); \quad v = \frac{eE}{i\omega m}; \quad \rho = -\frac{N}{i\omega} \operatorname{div} v.$$

После необходимых преобразований легко получить выражение для ρ_s :

$$\rho_s = -\rho \left(1 - \frac{1}{v}\right),$$

где $v = \omega_p^2/\omega^2$. Используя уравнения, описывающие поток заряженных частиц (см. систему (1)), легко доказать, что величина ρ_s непрерывна; значит, должна быть непрерывна и величина $\rho \left(1 - \frac{1}{v}\right)$, т. е.

$$\rho_1 \left(1 - \frac{1}{v_1}\right) = \rho_2 \left(1 - \frac{1}{v_2}\right). \quad (3)$$

Рассмотрим для простоты случай нормального падения. Граничные условия можно удовлетворить тремя волнами — падающей, отраженной и прошедшей:

$$\epsilon_1 E_n - \epsilon_1 E_R = \epsilon_2 E_T; \quad (4)$$

$$(\rho_n + \rho_R) \left(1 - \frac{1}{v_1}\right) = \rho_T \left(1 - \frac{1}{v_2}\right).$$

Здесь $\epsilon_{1,2} = \epsilon(\omega, k_{1,2})$; $\epsilon'_1 = \epsilon(\omega, k'_1)$, E_n , E_R и E_T — амплитуды электрического поля падающей, отраженной и прошедшей волн; ρ_n , ρ_R , ρ_T — амплитуды плотности электронов в этих волнах, k_1 , k'_1 , k_2 — волновые

вектора падающей, отраженной и прошедшей волн. Из (4) найдем коэффициент отражения R и преломления T :

$$R = \frac{E_R}{E_n}; \quad T = \frac{E_T}{E_n}.$$

Используем полученные выражения для отыскания потока энергии плазменных волн и сопоставления потока энергии падающей волны с потоками энергии отраженной и прошедшей волн. Для $e^{i\omega t - ikr}$ -процессов из системы (1) найдем выражение для ρ через поле E и подставим в (4). После необходимых преобразований получим

$$R = \frac{\varepsilon_1/\varepsilon_2 - (k_1/k_2)(v_1 - 1/v_2 - 1)}{\varepsilon_1/\varepsilon_2 + k_1/k_2}; \quad (5)$$

$$T = \frac{\varepsilon_1/\varepsilon_2 + (k_1/k_2)(v_1 - 1/v_2 - 1)}{\varepsilon_2/\varepsilon_1 + k_2/k_1}.$$

Для нахождения величин $k_{1,2}$ и k' используем дисперсионное уравнение

$$\varepsilon(\omega, k) = 0. \quad (6)$$

Действительные значения k при действительном ω получаются из (6) при условии

$$\omega^2 > \omega_p^2,$$

когда в данной системе нет черенковской неустойчивости (см. [3]). Из (6) получим

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{V_0} \pm \frac{\omega_s}{\sqrt{1-v_{1,2}}}; \quad (7)$$

$$k' = -\frac{\omega}{V_0} \pm \frac{\omega_s}{\sqrt{1-v_1}}.$$

Для правильного выбора знака в выражениях для k_2 и k'_1 при произвольном знаке в k_1 можно использовать формулу для групповой скорости плазменной волны:

$$v_{rp} = + \frac{d\omega}{dk} = - \frac{\partial \varepsilon / \partial k}{\partial \varepsilon / \partial \omega}. \quad (8)$$

Из (8) имеем

$$v_{rp_{1,2}} = + V_0 \frac{1}{\pm 1 + \omega_s \omega_{p_{1,2}}^2 / \omega^3 (1 - v_{1,2})^{1/2}};$$

$$v'_{rp} = - V_0 \frac{\pm 1}{\pm 1 + \omega_s \omega_{p_1}^2 / \omega^3 (1 - v_1)^{1/2}}.$$

В качестве падающей волны возьмем волну с волновым вектором k_1 (знак +). Из непрерывности перехода выражения для v_{rp_1} в v_{rp_2} при $N_1 \rightarrow N_2$ в формуле для k_2 необходимо взять знак +. При $N_s \rightarrow 0$ v_{rp_1} должно непрерывно переходить в v_{rp_2} , поэтому в k'_1 берем +. Тогда из (5) с учетом (7) получим

$$R = \frac{\sqrt{1-v_2} - \sqrt{1-v_1}}{\sqrt{1-v_2} + \sqrt{1-v_1}} \sqrt{\frac{1-v_1}{1-v_2}} + \frac{\omega}{\omega_s} \frac{v_2 - v_1}{(\sqrt{1-v_2} + \sqrt{1-v_1})} \sqrt{\frac{1-v_1}{1-v_2}}; \quad (5a)$$

$$T = \frac{2 - (v_1 + v_2)}{(\sqrt{1-v_1} + \sqrt{1-v_2}) \sqrt{1-v_2}} + \frac{\omega}{\omega_s} \sqrt{\frac{1-v_1}{1-v_2}} \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{1-v_1} + \sqrt{1-v_2}}.$$

Выражение для потока энергии плазменной волны имеет вид (см. [6])

$$|S| = \frac{\omega}{16\pi} \left| \frac{\partial \epsilon}{\partial k} \right| |E|^2. \quad (9)$$

Теперь при помощи (5а) и (9) получим окончательное выражение для $|S_R| + |S_T|$ и сопоставим его с $|S_n| = 1$:

$$|S_R| + |S_T| = R^2 + T^2 \left(\frac{1-v_2}{1-v_1} \right)^{3/2}. \quad (10)$$

Этот результат получен для случая, когда скорость потока V_0 и волновые векторы падающей (k_1), отраженной (k'_1) и прошедшей волн (k_2) имеют направление, указанное на рис. 1; однако формула (10) позволяет провести исследование всех возможных вариантов.

1) Рассмотрим случай, изображенный на рис. 1: $N_1 > N_2$; $V_0 > 0$. Из (10) видно, что, если $v_1 \sim 1$ (но $v_{1,2} < 1$), то

$$|S_R| + |S_T| \simeq \left(\frac{1-v_2}{1-v_1} \right)^{1/2} \gg 1.$$

Это указывает на эффективную передачу энергии от потока к волне. При $v_1 \rightarrow v_2$, естественно, $|S_R| + |S_T| \rightarrow 1$; если $\omega^2 \gg \omega_p^2$, т. е. $v \ll 1$ то $|S_R| + |S_T| \rightarrow 1$.

2) Когда падающая волна распространяется против движения потока (см. рис. 2), необходимо в конечной формуле (10) поменять местами индексы 1 \leftrightarrow 2; при прежнем условии $N_1 > N_2$

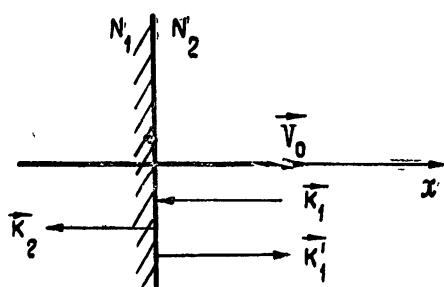


Рис. 2.

полученный против V_0 , то при условии $N_1 < N_2$ и $v_2 \sim 1$ (но $v_{1,2} < 1$) получим, что

$$|S_R| + |S_T| \gg 1,$$

т. е. волна эффективно усиливается потоком.

Можно убедиться, что для волн с $k_{1,2}$ и k'_1 со знаком «—» результаты сохраняются.

$$|S_R| + |S_T| < 1,$$

т. е. имеет место передача энергии от волны к потоку.

3) Когда поток движется в сторону возрастания концентрации основной плазмы, т. е. $N_1 < N_2$, из формулы (10) следует:

$$|S_R| + |S_T| < 1,$$

что означает затухание волны.

4) Если падающая волна имеет волновой вектор, направленный против V_0 , то при условии $N_1 < N_2$ и $v_2 \sim 1$ (но $v_{1,2} < 1$) полу-

2. ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЙНШТЕЙНА

Рассматривается граница двух плазм, которые пронизываются потоком с тепловым разбросом по скоростям ($T_s \neq 0$). В отличие от случаев, изученных в [1] и [3], в нашей задаче излучение проходит не во всем пространстве, а в процессе перехода границы; поэтому необходимо несколько видоизменить метод коэффициентов Эйнштейна применительно к рассматриваемому вопросу.

Пусть число квантов (плазмонов), спонтанно излученных за одну секунду при переходе границы частицей, равно

$$A_m^n j_m d\omega d\Omega,$$

где A_m^n — вероятность излучения кванта при переходе из состояния m в n , определяемая формулой

$$A_m^n = \frac{\varepsilon_\omega}{\hbar\omega},$$

ε_ω — спектральная компонента энергии излучения одной частицей при переходе границы, j — число частиц, пересекающих границу за 1 сек, $d\omega$ — частотный интервал излучения, $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Число квантов, поглощенных за 1 сек,

$$j_n B_n^m I_n d\omega d\Omega,$$

здесь B_n^m — вероятность поглощения, I_n — равновесная интенсивность излучения:

$$I_n = \frac{n^2 \omega^2 \times T_0}{8 \pi^3 c^2},$$

n — показатель преломления плазмы, \times — постоянная Больцмана, T_0 — температура плазмы.

Предполагаем, что число индуцированно излученных квантов за 1 сек

$$j_m B_m^n I_n d\omega d\Omega,$$

B_m^n — вероятность индуцированного излучения.

Найдем отношения коэффициентов A_m^n/B_m^n и связь B_m^n с B_n^m . Из уравнения для баланса энергии легко получить

$$I_n = \frac{A_m^n}{B_m^n} \frac{1}{(j_n/j_m - B_m^n/B_n^m)}. \quad (11)$$

Затем, используя закон сохранения энергии и импульса для частицы, которая излучает плазмон перпендикулярно границе, а также формулу (11), получим

$$B_m^n = B_n^m; \quad A_m^n/B_n^m = I_n \frac{\hbar\omega}{2\pi T_0}. \quad (12)$$

Применим соотношение (12) к нашей задаче и найдем коэффициент поглощения плазменных волн, связанный с переходным излучением. Коэффициент поглощения μ имеет вид [3]

$$\mu = \frac{dI_\mu}{I_n} = \frac{\sum_{m,n} \hbar\omega I_n (j_n B_n^m - j_m B_m^n)}{I_n}.$$

Используя (12), законы сохранения энергии и импульса для одной частицы, получим

$$\mu = \frac{16\pi^3 c^2}{n_2^2 \omega^2 \times T_s} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_\omega(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}) \left(v_{\parallel} - V_0 - \frac{v_T^2}{v_{\parallel}} \right) dv_{\parallel} dv_{\perp}, \quad (13)$$

где v_{\parallel} — проекция скорости частицы, перпендикулярная границе, v_{\perp} — проекция скорости частицы, перпендикулярная v_{\parallel} ,

$$f(\mathbf{v}) = N_s \left(\frac{2\pi \times T_s}{m} \right)^{-3/2} \exp \left[- \frac{m(v_{\parallel} - V_0)^2}{2\pi T_s} - \frac{m v_{\perp}^2}{2 \times T_s} \right].$$

Выражение (13) получено при условии $|V_0| \gg v_{T_s}$, т. е. пренебрегаем частицами, движущимися против V_0 .

Теперь выведем формулу для $\varepsilon_\omega(v)$ — спектральной компоненты энергии излучения плазменной волны частицей, движущейся со скоростью v_1 из одной среды в другую*.

Пусть потери энергии частицы на единице длины пути пренебрежимо малы по сравнению с ее кинетической энергией. Тогда поле этой частицы описывается следующей системой квазигидродинамических ли-неаризованных уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e \rho + 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_1 t); \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= e\mathbf{E} - \frac{\times T_0}{N} \nabla \rho; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} N \mathbf{v} = 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Смысл ρ , \mathbf{v} , N , T_0 такой же, как в системе (1). К этим уравнениям необходимо добавить граничные условия, которые получаются из первых двух уравнений системы (14):

$$\varepsilon_1 E_{n_1} = \varepsilon_2 E_{n_2}; \quad (3a)$$

$$\rho_1/N_1 = \rho_2/N_2. \quad (4a)$$

Здесь $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \omega_0^2/(\omega^2 - v_T^2 \mathbf{k}^2)$. Выполнив вычисления, аналогичные [8], можно получить

$$\begin{aligned} \varepsilon_\omega(\mathbf{v}) &= \frac{e^2 \omega (\omega^2 - \omega_{02}^2)^{3/2}}{2\pi^2 v_{\parallel}^2 v_T \omega_{02}^2 (1 + \sqrt{(\omega^2 - \omega_{01}^2)/(\omega^2 - \omega_{02}^2)} (n_2^2 N_1 / n_1^2 N_2))} \times \\ &\times \left\{ -\frac{v_T \omega_{01}^2}{(\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_{01}^2)^{1/2}} + \frac{v_T \omega_{01}^2}{(\omega^2 - \omega_{01}^2)^{3/2}} - \frac{\omega v_{1\parallel}}{\omega_{02}^2 - \omega^2} - \frac{\omega v_{1\parallel}}{\omega_{01}^2 - \omega^2} \right\}^2 \end{aligned} \quad (15)$$

($v_{1\parallel}$ — проекция скорости частицы, перпендикулярная границе плазмы;

$$n_{1,2}^2 = (1 - \omega_{01,2}^2/\omega^2)/\beta_T^2; \quad \beta_T = v_T / c; \quad v_T^2 = \times T_0 / m.$$

Формула (15) получена при условии

$$v_{1\parallel}^2 / v_T^2 \gg 1.$$

Теперь подставим (15) в (13) и при помощи соотношений, которые справедливы при $V_0/v_{T_s} \gg 1$:

* Случай электромагнитных волн рассмотрен в [8].

$$Y_q = \int_0^\infty \exp [-(v - V_0)^2/2v_{T_s}^2]/v^q \simeq \sqrt{2\pi} v_{T_s}/V_0^q$$

$$(q = -1, 0, 1, 2, 3),$$

вычислим μ^* :

$$\mu = -Y_1 k_\omega A_\omega^2 v_{T_s}^2 \quad (16)$$

Здесь введены обозначения

$$A_\omega = \frac{\omega (\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2)}{(\omega^2 - \omega_{01}^2)(\omega^2 - \omega_{02}^2)} ;$$

$$K'_\omega = \frac{16\pi^3 c^2}{n_2^2 \omega^2 \times T_s} \frac{e^2 \omega (\omega^2 - \omega_{02}^2)^{3/2}}{2\pi^2 v_{T_s} \omega_{02}^2 \left(1 + n_2 N_1/n_1^2 N_2 \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{\omega^2 - \omega_{02}^2}}\right)^2} N_s \left(\frac{2\pi \times T_s}{m}\right)^{-1/2}.$$

Усиление $\mu < 0$ получается в диапазоне частот

$$\omega^2 > \omega_{01,2}^2.$$

Это условие равносильно условию положительности показателей преломления сред ($n_{1,2}^2 > 0$).

Выясним, какие частицы дают основной вклад в усиление плазменных волн. Для этого исследуем зависимость $\epsilon_\omega(v)$ при фиксированной частоте ω . Из (15) следует, что $\epsilon_\omega(v)$ падает с ростом v , т. е. в усилении участвуют частицы на подъеме функции распределения (см. рис. 3).

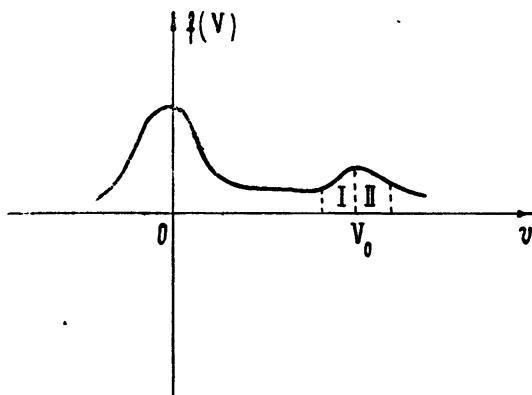


Рис. 3.

Из всего сказанного следует, что при достаточной скорости потока V_0 можно получить усиление плазменных волн в рассматриваемой системе.

Автор признателен В. В. Железнякову за постановку задачи и постоянные указания в работе и В. Я. Эйдману за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 14 (1959).
2. D. Bohm, E. Gross, Phys. Rev., 75, 1864 (1949).
3. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж., 35, 694 (1958).

* Формула (16) справедлива при условии $N_s \ll N$ (см. [1]).

4. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 478 (1962).
5. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 43, 419 (1962).
6. В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 473 (1962).
7. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
8. Г. М. Гарифян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 октября 1963 г.

ON AMPLIFICATION OF PLASMA WAVES BY THE BEAM OF CHARGED PARTICLES ON AN INTERFACE OF TWO PLASMAS

S. M. Feinstein

The problem is considered of amplification and attenuation of plasma waves by the quasi-neutral beam of charged particles on a boundary of two plasmas.

УДК 533.951

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ПЛАЗМЕ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА РАЗДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ

А. Д. Патарая

Методом теории возмущений исследуется (с учетом эффекта разделения зарядов) структура волны конечной амплитуды, распространяющихся вдоль магнитного поля в плазме без соударений. Получены поправки к характерным величинам плазмы, связанные с эффектом разделения зарядов.

В последнее время успешно обсуждаются вопросы, связанные с распространением одномерных установившихся волн в бесстолкновительной плазме, находящейся в магнитном поле. Исследование таких волн способствует выяснению структуры ударных волн в плазме. Существование установившихся волн, распространяющихся поперек магнитного поля, было рассмотрено в работах [1-3], а вдоль магнитного поля — в исследованиях [4-6]. В этих работах плазма предполагалась квазинейтральной; вместе с тем было показано, что если положительные и отрицательные (однозарядные) частицы имеют различные массы, то в плазме появляется разделение. В данном сообщении учитывается влияние эффекта разделения зарядов на характерные величины плазмы для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля. Задача решается с помощью теории возмущений, подобно тому, как в работе [7]. За малый параметр принята величина $v^2/c^2\epsilon^2$, где v и c — скорость волны и скорость света соответственно, $\epsilon^2 = m_e/m_i$, m_i и m_e — массы иона и электрона соответственно. Решение уравнения с членами, не содержащими малого параметра, дано в ряде работ [4-6]. В данном сообщении для холодной плазмы получено точное решение уравнения с учетом членов, содержащих нулевую и первую степени параметра разложения. Для горячей плазмы поправочные члены первого приближения находятся с помощью теории возмущений.

Рассматриваемые в данном сообщении установившиеся волны формируются из хорошо известных в линейной теории обыкновенных и необыкновенных волн, (в области электронной циклотронной частоты), распространяющихся в плазме вдоль магнитного поля. Нелинейные эффекты и закон дисперсии обеспечивают распространение волн конечной амплитуды в плазме без искажения своей формы [8].

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим распространение плоского фронта волны в плазме вдоль оси z , совпадающих по направлению с невозмущенным магнитным полем H_0 . Преобразованием $\xi = (z + vt)\sqrt{1 + v_0^2}$ перейдем в систему с тсчета, связанную с волной; в этой системе плоский стационарный поток плазмы движется в положительном направлении оси ξ , вдоль которой происходит переход плазмы от стационарного состояния при $\xi = \xi_0$ (невозмущенное начальное состояние плазмы) к другому стационарному состоянию при $\xi = \xi_1$.

Если u_i , n_i и u_e , n_e — пространственная часть 4-вектора скорости и плотности иона и электрона соответственно, то уравнения Максвелла, уравнения движения и непрерывности в системе волны примут вид [9, 10]

$$m_e c^2 n_e u_e \xi \frac{d(u_e \omega_e)}{d\xi} = -\nabla P_e - e n_e [j_e E + (u_e \times H)]; \quad (1)$$

$$m_i c^2 n_i u_i \xi \frac{d(u_i \omega_i)}{d\xi} = -\nabla P_i + e n_i [j_i E + (u_i \times H)]; \quad (2)$$

$$\frac{d}{d\xi} (n_e u_e \xi) = \frac{d}{d\xi} (n_i u_i \xi) = 0; \quad (3)$$

$$\text{rot } H = 4\pi e (n_i u_i - n_e u_e); \quad (4)$$

$$\text{rot } E = 0; \quad (5)$$

$$\text{div } E = 4\pi e (j_i n_i - j_e n_e); \quad (6)$$

$$\text{div } H = 0. \quad (7)$$

Здесь $u_i \xi$, P_i и $u_e \xi$, P_e — соответственно ξ -составляющая 4-вектора скорости и давления для ионов и электронов; ω_i и ω_e — тепловые функции иона и электрона, измеренные соответственно в единицах $m_i c^2 n_i$ и $m_e c^2 n_e$; E и H — напряженности электрического и магнитного поля; v_0 — скорость волны в единицах c , а e — заряд электрона, $j_i = \sqrt{1 + u_i^2}$, $i = \sqrt{1 + u_e^2}$.

Ищем решение уравнений (1)–(7), удовлетворяющее следующим граничным условиям при $\xi \rightarrow \xi_0$: напряженность электрического поля, x - и y -составляющие напряженности магнитного поля и макроскопической скорости плазмы стремятся к нулю; ξ -составляющая скорости электронов, ее плотность, тепловая функция и температура стремятся соответственно к значениям $v_0 c$, n_0 , $\omega_{e,0}$, T_e ; для ионов эти величины принимают соответственно значение $v_0 c$, n_0 , $\omega_{i,0}$, T_i ; величина тока стремится к конечному или к нулевому значению; $\arctg(H_y/H_x) \sim (\omega_H/2v_0 c)\xi_0$. Последнее условие означает, что в лабораторной системе координат при приближении плазмы к начальным невозмущенным состояниям частота вращения электрона во внешнем магнитном поле приближается к ларморовской частоте электрона $\omega_H/2$, а радиус вращения стремится к нулю.

Введем безразмерные величины

$$\frac{H_x + iH_y}{\sqrt{8\pi n_0 (m_i + m_e) v_0^2 c^2}} = \Psi \exp(i\vartheta), \quad \eta = \xi l_0^{-1} = \xi \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2 (m_i + m_e)}{m_i m_e c^2}},$$

$$n'_i = \frac{n_0}{n_i}, \quad n'_e = \frac{n_0}{n_e}, \quad M_i^2 = \frac{3m_i v_0^2 c^2}{5T_i}, \quad M_e^2 = \frac{3m_e v_0^2 c^2}{5T_e},$$

$$M^2 = \frac{16\pi n_0 m_i m_e v_0^2 c^2}{(m_i + m_e) H_0^2}, \quad \varphi' = \frac{2e\varphi}{m_i v_0^2 c^2}, \quad v_0 = \frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Здесь H_x и H_y — x - и y -составляющие напряженности магнитного поля, φ — потенциал электростатического поля, который стремится к нулю при $\xi \rightarrow \xi_0$. В работе предполагается, что давление ионного и электронного газа изменяется по адиабатическому закону с показателем адиабаты 5/3.

Используя граничные условия и безразмерные величины, можно получить следующие уравнения (исключив из уравнений (1)–(7) x - и y -составляющие скорости электрона и иона):

$$\omega_i n'_i + \varepsilon^2 \omega_e n'_e = \omega_{i,0} + \varepsilon^2 \omega_{e,0} + (1 + \varepsilon^2) \left\{ \frac{v_0^2}{8\varepsilon^2} \left[\left(\frac{d\varphi'}{d\eta} \right)_0^2 - \left(\frac{d\varphi'}{d\eta} \right)_0^2 \right] - \Psi^2 \right\} - (8)$$

$$- \varepsilon^2 \frac{(P_e - P_{e,0})}{m_e n_e v_0^2 c^2} - \frac{(P_i - P_{i,0})}{m_i n_0 v_0^2 c^2};$$

$$\left(\frac{d\Psi}{dh} \right)^2 - \left(\frac{d\Psi}{dh} \right)_0^2 = \frac{(\omega_{e,0} j_{e,0} K_l + \varepsilon^2 \omega_{i,0} j_{i,0} K_e)}{2(\omega_{i,0} j_{i,0} + \varepsilon^2 \omega_{e,0} j_{e,0})} + \left(\frac{v_0^2}{8\varepsilon^2} \right) \varphi'^2 - M^{-2} \Psi^2; \quad (9)$$

$$\varphi' = \frac{K_l - \varepsilon^4 K_e}{(\omega_{i,0} j_{i,0} + \varepsilon^2 \omega_{e,0} j_{e,0})}; \quad (10)$$

$$\frac{(1 + \varepsilon^2) v_0^2}{2\varepsilon^2} \frac{d^2 \varphi'}{d\eta^2} = \left(\frac{\omega_{e,0} j_{e,0}}{\omega_e n'_e} - \frac{\omega_{i,0} j_{i,0}}{\omega_i n'_i} \right) + \left(\frac{v_0^2}{2\varepsilon^2} \right) \frac{(\omega_i n'_i + \varepsilon^2 \omega_e n'_e)}{\omega_i n'_i \omega_e n'_e} \varphi'; \quad (11)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\eta} = M^{-2} \frac{(\omega_i n'_i - \varepsilon^2 \omega_e n'_e)}{(1 + \varepsilon^2) \omega_i n'_i \omega_e n'_e}; \quad (12)$$

где $(d\Psi/dh)_0 = (d\Psi/dh)|_{\xi=\xi_0}$ пропорциональна величине тока в плазме при

$$\xi = \xi_0; \left(\frac{d\varphi'}{d\eta} \right)_0 = \left(\frac{d\varphi'}{d\eta} \right)_{\xi=\xi_0}; \frac{d}{dh} = \frac{(1 + \varepsilon^2) \omega_i n'_i \omega_e n'_e}{(\omega_i n'_i + \varepsilon^2 \omega_e n'_e)} \frac{d}{d\eta};$$

$$j_e|_{\xi=\xi_0} = j_{e,0}; j_i|_{\xi=\xi_0} = j_{i,0}; K_e = \frac{\omega_{e,0}^2 - \omega_e^2}{v_0^2} + (\omega_{e,0} - \omega_e^2 n_e'^2);$$

$$P_e|_{\xi=\xi_0} = P_{e,0}; P_i|_{\xi=\xi_0} = P_{i,0}; K_i = \frac{\omega_{i,0} - \omega_i^2}{v_0^2} + (\omega_{i,0}^2 - \omega_i^2 n_i'^2).$$

Уравнения (8) и (9) выражают законы сохранения потока импульса вдоль оси ξ и закон сохранения потока энергии соответственно. Уравнение (9) можно привести к виду

$$\frac{d^2\Psi}{dh^2} = \left[\frac{(1 + \varepsilon^2) \omega_i n'_i \omega_e n'_e}{(\omega_i n'_i + \varepsilon^2 \omega_e n'_e)} - M^{-2} \right] \Psi. \quad (13)$$

Будем искать решение (13) в линейном приближении, т. е. предположим, что $\Psi \sim \exp(-p\eta)$, $n'_e \sim n'_i \sim 1$, $\omega_e \sim \omega_{e,0}$, $\omega_i \sim \omega_{i,0}$. Тогда получаем:

$$P^2 = \left[\frac{\omega_{e,0} + \varepsilon^2 \omega_{i,0}}{(1 + \varepsilon^2) \omega_{i,0} \omega_{e,0}} \right]^2 \left\{ \frac{(1 + \varepsilon^2) \omega_{e,0} \omega_{i,0}}{\omega_{i,0} + \varepsilon^2 \omega_{e,0}} - M^{-2} \right\}.$$

Для удовлетворения граничных условий необходимо выполнение неравенства

$$M^{-2} < \frac{(1 + \varepsilon^2) \omega_{e,0} \omega_{i,0}}{(\omega_{i,0} + \varepsilon^2 \omega_{e,0})}. \quad (14)$$

Выражение для x - и y -составляющих скорости электрона и иона дается формулой

$$u_{ex} + iu_{ey} = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon \omega_c} u_1 \exp[i(\vartheta + \vartheta_e)]; \quad (15)$$

$$u_{ix} + iu_{iy} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\omega_i} u_1 \exp [i(\vartheta + \vartheta_i)]; \quad (16)$$

$$u_1^2 = M^{-2} \Psi^2 + \left(\frac{d\Psi}{dh} \right)^2; \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_e = - \operatorname{tg} \vartheta_e = - M \frac{d \ln \Psi}{dh}. \quad (18)$$

Проинтегрировав (12) по η , получим

$$\begin{aligned} \vartheta &= M^{-1} \frac{(\omega_{i,0} j_{i,0} - \varepsilon^2 \omega_{e,0} j_{e,0})}{(\omega_{i,0} j_{i,0} + \varepsilon^2 \omega_{e,0} j_{i,0})} h + \\ &+ \frac{M^{-1} v_0^2}{(\varepsilon^2 \omega_{e,0} j_{e,0} + \omega_{i,0} j_{i,0})} \left\{ \frac{d\varphi'}{d\eta} - \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_0 - \int_{h_0}^h \varphi' dh' \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражение (19) показывает, что при $v_0^2 \ll 1$ электростатическое поле не вызывает изменения фазы магнитного поля.

2. ХОЛОДНАЯ ПЛАЗМА

Представим величины, входящие в уравнения (8)–(12), в виде ряда

$$F = F_1 + F_2 \varepsilon^2 + F_3 \varepsilon^3 + \dots$$

Отбрасывая члены с коэффициентами выше первой степени по ε и $v^2/c^2 \varepsilon^2$ можно получить следующее уравнение (при $T_i = T_e = 0$):

$$\left(\frac{d\varphi'}{d\eta} \right)^2 = \frac{16(1-n'_i) [(d\Psi/dh)_0^2 + j_{e,0} \varphi'/2 - M_0^{-2}(1-n'_i) + (v^2/8\varepsilon^2 c^2)\varphi'^2]}{\{j_{e,0}^2 - 2(v^2/\varepsilon^2 c^2)[(d\Psi/dh)_0^2 - 2M_0^{-2}(1-n'_i)]\}}. \quad (20)$$

Здесь

$$\varphi' = 1 - n'^2, \quad (d\varphi'/d\eta)_0 = 0. \quad (21)$$

Будем искать решение уравнений (20)–(21), всюду непрерывное вместе со своими производными до второго порядка включительно. В зависимости от выбора $(d\Psi/dh)_0$ можно получить различные периодические волны. При $(d\Psi/dh)_0 = 0$ мы имеем единственный симметричный импульс потенциала, простирающегося от $-\infty$ до $+\infty$. Для единенной волны $\xi_0 = -\infty$, а точка $\xi = 0$ является точкой симметрии импульса. Условие $d\varphi/d\eta = 0$ при $\varphi = \varphi_{\max}$ приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\left(\frac{v^2}{c^2 \varepsilon^2} \right) \varphi'_{\max}^2 + 2 \left[1 - \left(\frac{v^2}{c^2 \varepsilon^2} \right) \right] \varphi'_{\max} + 8M_0^{-2} [M_0^{-2} - 1] = 0.$$

Разлагая в ряд выражение (20)–(21) и (11) по параметрам $v^2/c^2 \varepsilon^2$ и отбрасывая члены с коэффициентами $(v^2/c^2 \varepsilon^2)^n$, ε^n при $n \geq 2$, получим:

$$\begin{aligned} n'_i &= n_e + \left(\frac{v^2}{\varepsilon^2 c^2} \right) 2ax_0^2 (1-2ax_0^2) (4a-1-5ax_0^2) = 1 - 2ax_0^2 + \\ &+ \left(\frac{v^2}{\varepsilon^2 c^2} \right) \frac{2ax_0}{1-2ax_0^2} \left[-(1-a)^2 (1-2a) - (1-a)(2-4a^2-3a)(1-x_0^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2(10a-11)}{3} (1-x_0^2)^2 + \frac{2a^3}{5} (1-x_0^2)^3 \right]; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{2e\varphi}{m_i v^2} = 4ax_0^2(1-ax_0^2) - \left(\frac{v^2}{c^2 \epsilon^2}\right) 4ax_0^2 \left[-(1-a)^2(1-2a) - (1-a)(2-4a^2-3a)(1-x_0^2) + \frac{a^2(10a-11)}{3}(1-x_0^2)^2 + \frac{2a^3}{5}(1-x_0^2)^3 \right], \quad (23)$$

где

$$a = 1 - M_0^{-2} = 1 - \frac{v_{\perp}^2}{v^2} = 1 - \frac{H_0^2}{16\pi n_0 m_e v^2}, \quad (24)$$

$$\ln \left[\frac{1}{x_0} + \sqrt{\frac{1}{x_0^2} - 1} \right] - 2a \sqrt{1-x_0^2} = \epsilon_{\pm} \sqrt{a} \eta.$$

Здесь $\epsilon_+ = 1$ соответствует положительному η , а $\epsilon_- = -1$ отрицательному η . В области $x_0^2 < (4a-1)/5a$ электрон тормозится сильнее, чем ион, а в области $x_0^2 > (4a-1)/5a$ — наоборот. Поперечные скорости электрона и иона достигают своего максимального значения при $\eta = 0$:

$$(W_i)_{\max} = \epsilon^2 (W_e)_{\max} = 2\epsilon \sqrt{a} \left(1 + \frac{v^2}{c^2 \epsilon^2} \right) v. \quad (25)$$

3. ГОРЯЧАЯ ПЛАЗМА

Ниже будем рассматривать структуру симметричного уединенного импульса в горячей плазме. В этом случае $(d\Psi/d\eta)_0 = 0$, а точка $\eta=0$ является точкой симметрии импульса.

Величины, входящие в систему уравнений (8)–(12), разложим в ряд следующим образом:

$$K = K_0 + \left(\frac{v^2}{c^2 \epsilon^2} \right) K_1 + \left(\frac{v^2}{c^2 \epsilon^2} \right)^2 K_2 + \dots, \quad (26)$$

где K_0 соответствует решению для квазинейтральной плазмы. Пренебрегая членами с коэффициентами ϵ^n и $(v^2/c^2 \epsilon^2)^n$ при $n \geq 2$ (оставляем $\epsilon^2 M_e^{-2}$, считая его членом нулевого порядка), получим для Ψ_1 неоднородное линейное уравнение. Найдем решение этого уравнения, симметричное относительно точки $\eta=0$ и непрерывное вплоть до производных второго порядка по η . Оно имеет вид

$$\Psi_1 = \frac{\sqrt{v}}{2n'} \left\{ \int_{n_2}^{n_1} \frac{[M_0^{-2} \Psi_0^2 - v]}{2 \Psi_0^3 V^{3/2}} \frac{[-1 + M_T^{-2} (n')^{-8/3}]}{2} \Phi dn' - \frac{\Phi}{\Psi_0 V^2} - C \right\}. \quad (27)$$

Здесь

$$n' = (n'_i)_0 = (n'_e)_0; \quad (28)$$

$$V = \frac{1-n'^2}{2} - (1-n')M_0^{-2} - \frac{3M_{T,0}}{2} [(n')^{-2/3} - 1] + \frac{3M_{T,0}^{-2} M_0^{-2}}{5} [(n')^{-5/3} - 1];$$

$$\Phi = \frac{3}{4} \epsilon^2 M_{e,0}^{-2} (1-n'^2) - \frac{9}{4} \epsilon^2 M_{e,0}^{-2} M_{i,0}^{-2} [(n')^{-2/3} - 1] - \frac{9}{20} (\epsilon^2 M_{e,0}^{-2})^2 [(n')^{-2/3} - 1] [4 + (n')^{-2/3}] + \frac{[1-n'^2-3M_i^{-2}[(n')^{-2/3}-1]]^2}{8} - \frac{2n' \Psi_0^2 V [1 - M_{i,0}^{-2} (n')^{-8/3}]^2}{[1 - M_{T,0}^{-2} (n')^{-8/3}]^2}; \quad (29)$$

$$M_{e,0}^2 = \frac{3m_e v^2}{5T_e}; M_{i,0}^2 = \frac{3m_i v^2}{5T_i}; M_{T,0}^{-2} = M_{i,0}^{-2} + \varepsilon^2 M_{e,0}^{-2}.$$

В выражении (27) величина C подобрана так, чтобы она равнялась значению интеграла на нижнем пределе n'_2 (n'_2 не обращает в нуль функции Ψ_0 и V). Зависимость n' от η определяется следующей формулой:

$$\left\{ [1 - M_{T,0}^{-2} (n')^{-8/3}] n' \frac{dn'}{d\eta} \right\} = 4 \Psi_0^2 V. \quad (30)$$

Приведем результаты для слабых волн. Разложим выражения для Ψ_0 , Ψ_1 в ряды по $(1 - n')$. Сохраняя члены первого порядка, получим $(v^2/c^2 \varepsilon^2 \ll a \ll 1)$:

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_0 + \frac{v^2}{c^2 \varepsilon^2} \Psi_1 &= \sqrt{2a a_T} x_0 + \left(\frac{v^2}{c^2 \varepsilon^2} \right) \frac{3\varepsilon^2 M_{e,0}^{-2}}{2} \sqrt{\frac{a_T}{2a}} \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x_0^2}}{1 + \sqrt{1 - x_0^2}} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $a_T = 1 - M_T^{-2}$. Составляющие ξ скорости электрона и скорости иона в единицах v соответственно пропорциональны n'_e и n'_i , причем

$$\begin{aligned} n'_i = n_e - \left(\frac{v^2}{c^2 \varepsilon^2} \right) 2a_T a x_0^2 &= 1 - \left(\frac{v^2}{c^2 \varepsilon^2} \right) 3\varepsilon^2 M_{e,0}^{-2} x_0^2 \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - x_0^2}}{1 + \sqrt{1 - x_0^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Максимальное значение поперечной скорости электрона и иона

$$(W_i)_{\max} = \varepsilon^2 (W_e)_{\max} = 2v \varepsilon \sqrt{a a_T} \left\{ 1 + \left(\frac{v^2}{c^2 \varepsilon^2} \right) \frac{3\varepsilon^2 M_{e,0}^{-2}}{4a} \right\}. \quad (33)$$

Наконец, приведем значение потенциала электростатического поля:

$$\frac{2\varphi e}{m_i v^2} = 4a a_i x_0^2 - \left(\frac{v^2}{c^2 \varepsilon^2} \right) 6a_i x_0^2 \left[1 + \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{2} \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - x_0^2}}{1 + \sqrt{1 - x_0^2}} \right) \right], \quad (34)$$

где $a_i = 1 - M_{i,0}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

- Р. Э. Сагдеев, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, изд. АН СССР, М., 4, 384 (1958).
- J. H. Adlam, J. E. Allen, Phil. Mag., 3, 448 (1958).
- A. Vanos jr., R. Verner, Nuovo Cimento, 15, 269 (1960).
- R. Saffman, J. Fluid. Mech., 11, 16 (1961).
- Б. А. Тверской, ЖЭТФ, 42, 833 (1962).
- А. Д. Патарая, ЖЭТФ, 32, 139 (1962); 32, 584 (1962).
- C. S. Magawetz, Phys. Fluids, 4, 988 (1961).

8. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р.-З. Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 82 (1961).
9. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, § 125, ГИФМЛ, М., 1954.
10. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, § 26, 30, 33, 35, Физматгиз, М., 1960.

Поступила в редакцию
9 ноября 1963 г.

FINITE AMPLITUDE WAVES PROPAGATING IN PLASMA TAKING INTO
ACCOUNT THE EFFECT OF CHARGES SEPARATION

A. D. Pataraya

By the method of perturbation theory (taking into account the effect of charges separation) the structure is investigated of finite amplitude waves propagating along a magnetic field in collisionless plasma. The corrections due to the effect of charges separation have been obtained for the characteristic plasma parameters.

УДК 533.951

ДВУХМЕРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ПЛАЗМЕННЫМИ СЛОЯМИ. II

И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер

Рассмотрены некоторые варианты двухмерных волноводных систем с гиротропными плазменными стенками. В связи с этим определены коэффициенты отражения и поверхностные импедансы для плазменных слоев с постоянным магнитным полем, ориентированным либо вдоль, либо поперец направления распространения волн. Найдены условия, при которых такие слои могут экранировать высокочастотные электромагнитные поля

1. В первой части работы [1] были рассмотрены возможности существования локализованных электромагнитных волн, направляемых слоями однородной изотропной плазмы. Целесообразно обобщить эту задачу в двух отношениях: во-первых, рассмотреть случай анизотропных слоев (главным образом, гиротропных) и, во-вторых, учесть возможность плавного, а не только кусочно-однородного распределения концентрации.

Ниже мы будем иметь дело с простейшим гиротропным плазменным слоем $-x_0 < x < x_0$, постоянное магнитное поле $H^{(0)}$ внутри которого ориентировано в плоскости $x = \text{const}$ ($H_y^{(0)} = H^{(0)} \sin \delta$, $H_z^{(0)} = H^{(0)} \cos \delta$). Для того, чтобы установить, можно ли из набора таких слоев образовывать волноводные системы с локализованными или квазилокализованными полями, необходимо, как в [1], проанализировать значения коэффициентов отражения волн различных типов от одиночного изолированного слоя*.

Рассматривая по-прежнему электромагнитные волны, распространяющиеся в z -направлении ($e^{i\omega t - ihz}$) и не зависящие от координаты y , для компонент полей внутри слоя плазмы будем иметь

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} - \kappa_H^2 H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} ik_0 \left\{ \epsilon^* \frac{dE_y}{dx} + h (\tilde{\epsilon}_{xy} \epsilon_\perp - \tilde{\epsilon}_{zx} \epsilon^*) E_y \right\}; \quad (1)$$

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} - \kappa_E^2 E_y = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} ik_0 \frac{1}{\epsilon_\perp} \left\{ \epsilon^* \frac{dH_y}{dx} - h (\tilde{\epsilon}_{zy} \tilde{\epsilon}_{zx} + \tilde{\epsilon}_{zz} \tilde{\epsilon}_{xy}) H_y \right\};$$

$$E_z = \frac{1}{i \omega \epsilon_0 \epsilon_\perp} \left(\frac{dH_y}{dx} - h \tilde{\epsilon}_{zx} H_y \right) - \frac{\epsilon^*}{\epsilon_\perp} E_y;$$

$$E_x = \frac{1}{\omega \epsilon_0 \epsilon_\perp} \left(-\tilde{\epsilon}_{zx} \frac{dH_y}{dx} + h \tilde{\epsilon}_{zz} H_y \right) + i \left(\tilde{\epsilon}_{xy} + \tilde{\epsilon}_{zx} \frac{\epsilon^*}{\epsilon_\perp} \right) E_y;$$

$$H_z = -\frac{1}{i \omega \mu_0} \frac{dE_y}{dx}; \quad H_x = -\frac{h}{\omega \mu_0} E_y.$$

* Речь будет идти только о волнах с утечкой; поверхностные волны рассмотрены во многих других работах, в частности, в заметке [2], содержащей необходимые ссылки на литературу

Здесь

$$\chi_H^2 = \hbar^2 \epsilon_{zz} - k_0^2 \epsilon_{\perp}, \quad \chi_E^2 = \hbar^2 - k_0^2 \left[\epsilon_{yy} - \frac{1}{\epsilon_{\perp}} (\tilde{\epsilon}_{zz} |\epsilon_{xy}|^2 + \epsilon_{zy}^2 + i 2 \epsilon_{xy} \epsilon_{zy} \tilde{\epsilon}_{zx}) \right],$$

$$\epsilon^* = \epsilon_{zy} + i \epsilon_{xy} \tilde{\epsilon}_{zx}, \quad \epsilon_{\perp} = \frac{\epsilon_{xx} \epsilon_{zz} - |\epsilon_{xz}|^2}{\epsilon_{xx}}, \quad \tilde{\epsilon}_{xy} = i \frac{\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}},$$

$$\tilde{\epsilon}_{zx} = i (\epsilon_{zx} / \epsilon_{xx}), \quad \tilde{\epsilon}_{zz} = \epsilon_{zz} / \epsilon_{xx},$$

ϵ_{ik} ($i, k = x, y, z$) — компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости (см., например, [3], стр. 114), ϵ_0, μ_0 — проницаемости вакуума (используется практическая рационализированная система единиц), $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

Полагая, что зависимость компонент поля от x определяется множителем $e^{-i \omega x}$, из уравнений (1) получим

$$\chi^4 - \chi^2 \left(\chi_H^2 + \chi_E^2 - \frac{\epsilon^{*2}}{\epsilon_{\perp}} k_0^2 \right) + \left[\chi_H^2 \chi_E^2 - \frac{1}{\epsilon_{\perp}} (\epsilon_{zy} \tilde{\epsilon}_{zx} + \epsilon_{zz} \tilde{\epsilon}_{xy})^2 k_0^2 \hbar^2 \right] = 0. \quad (2)$$

Очевидно, что характеристики волн, направляемых гиротропными слоями (постоянная распространения, структура поля), существенно зависят от угла δ между направлением распространения (ось z) и постоянным магнитным полем. Поэтому для того, чтобы сконструировать трехмерную волну, приходится привлекать целый набор двухмерных волн, распространяющихся под разными углами к магнитному полю. Исключение могут составлять лишь некоторые выделенные направления. Таковым в рассматриваемом случае является направление, перпендикулярное магнитному полю, так как уравнения (1) не меняют своего вида при замене $\delta \rightarrow \pi - \delta$ и одновременном изменении знака у компонент поля E_y, H_z, H_x или H_y, E_z, E_x . Следовательно, трехмерные волны, распространяющиеся в направлении, перпендикулярном $\mathbf{H}^{(0)}$, могут быть сформированы, так же как в изотропном случае, из двух двухмерных. Это утверждение справедливо как для квазилокализованных или волноводных волн, так и для поверхностных.

Выражения для коэффициентов отражения и компонент матрицы входного импеданса при произвольном δ весьма громоздки и их использование затруднительно. Поэтому мы ограничимся в основном двумя частными случаями ориентации постоянного магнитного поля $\delta = \pi/2$ и $\delta = 0$, которые позволяют составить некоторое представление об общей картине.

2. Случай $\delta = \pi/2$ характерен тем, что волны ТЕ и ТМ типов по отношению к z -направлению существуют независимо*. При этом для ТЕ-волн поле $\mathbf{E} = E_y \mathbf{y}^0 \parallel \mathbf{H}^{(0)}$ и, следовательно, все электромагнитные характеристики гиротропного слоя совпадают с характеристиками соответствующего слоя в отсутствие поля $\mathbf{H}^{(0)}$, что подробно рассмотрено в [1]. Остается проанализировать только случай ТМ-волн. Уравнения (1) для этого случая сводятся к следующим:

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} + (k_0^2 \epsilon_{\perp} - \hbar^2) H_y = 0,$$

* В плазменной области эти волны являются нормальными и отвечают соответственно обыкновенной и необыкновенной волнам.

$$E_z = \frac{1}{i \omega \epsilon_0 \epsilon_{\perp}} \left(\frac{dH_y}{dx} - \tilde{\epsilon} h H_y \right), \quad E_x = \frac{1}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{\perp}} \left(-\tilde{\epsilon} \frac{dH_y}{dx} + h H_y \right),$$

причем

$$\epsilon_{\perp} = \frac{(1-i\nu-v)^2-u}{(1-i\nu)(1-i\nu-v)-u}, \quad \tilde{\epsilon} = \frac{v\sqrt{u}}{(1-i\nu)(1-i\nu-v)-u}, \quad v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2},$$

$$u = \omega_H^2/\omega^2, \quad \nu = \nu_{\text{эфф}}/\omega,$$

ω_0 — плазменная частота, ω_H — гирочастота, $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений.

Нетрудно получить выражения для коэффициента отражения и входного импеданса такого слоя в вакууме; опуская вычисления, приведем результаты:

$$\Gamma = e^{i\alpha_0 k_0 x_0} \eta \frac{1 - e^{-4\alpha k_0 x_0}}{1 - \gamma^+ \gamma^- e^{-4\alpha k_0 x_0}}, \quad (3)$$

$$Z_{\text{вх}} = -iZ_0 \frac{\alpha^-}{\epsilon_{\perp}} \frac{1 + (\alpha^+/\alpha^-) \gamma^+ e^{-4\alpha k_0 x_0}}{1 - \gamma^+ e^{-4\alpha k_0 x_0}}, \quad (4)$$

где

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad \gamma_i = \frac{\epsilon_{\perp} \alpha_0 + i \alpha^-}{\epsilon_{\perp} \alpha_0 - i \alpha^-}, \quad \gamma_i^{\pm} = \frac{\epsilon_{\perp} \alpha_0 + i \alpha^{\mp}}{\epsilon_{\perp} \alpha_0 - i \alpha^{\pm}},$$

$$\alpha^{\pm} = \alpha \mp \tilde{\epsilon} \gamma, \quad \alpha_0 = \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_{\perp}}, \quad \gamma = h/k_0.$$

Отличительной особенностью формул (3), (4) является их зависимость от направления распространения волны (знака γ). Это хорошо известное свойство невзаимности гиротропных систем в конечном счете приводит к различию постоянных распространения волн, бегущих в противоположных направлениях, в соответствующих волноводах с гиротропными стенками. Интересно также подчеркнуть, что, если речь идет о волноводах плазма—вакуум—плазма с двумя плазменными стенками $x = \pm a$, то значения импеданса (4) оказываются разными на разных стенах при одинаковом направлении внешнего магнитного поля*. Это приводит к некоторому смещению плоскостей симметрии и антисимметрии для поля относительно центральной плоскости волновода.

Проследим теперь несколько важных частных случаев формул (3), (4).

Скользящее падение. При углах падения, близких к $\pi/2, -\gamma \sim 1$, $\alpha_0 = \sqrt{1 - \gamma^2} \ll 1$, $\alpha \simeq \sqrt{1 - \epsilon_{\perp}}$, $\alpha^{\pm} \simeq \alpha \mp \tilde{\epsilon}$ — входной импеданс (4) может быть представлен в виде

$$Z_{\text{вх}} = -iZ_0 \frac{\alpha^-}{\epsilon_{\perp}} \left\{ \frac{1 - e^{-4\alpha k_0 x_0}}{1 + (\alpha^-/\alpha^+) e^{-4\alpha k_0 x_0}} + \alpha_0 i \frac{\epsilon_{\perp}}{\alpha^+} \frac{(2 + \alpha^+/\alpha^- + \alpha^-/\alpha^+) e^{-4\alpha k_0 x_0}}{[1 + (\alpha^-/\alpha^+) e^{-4\alpha k_0 x_0}]^2} \right\}.$$

Это выражение по своему общему характеру аналогично соответствующей формуле, отвечающей изотропному слою [1]. Поэтому все замечания, касающиеся случая скользящего падения на изотропный слой (см. [1]), сохраняют свою силу и здесь.

* Чтобы совместить импедансы, следует в одном из плазменных слоев поменять направление внешнего магнитного поля на обратное ($-H^{(0)}$).

Сильно концентрированная плазма ($v \gg 1$, u). Пренебрегая в (4) членами порядка $v^{-3/2}$ получаем

$$Z_{bx} = Z_0 \left\langle i \frac{\sqrt{1-i} v}{\sqrt{v}} \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-i} v} 2k_0 x_0 \right) \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{v}} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-i} v} \times \right. \right. \\ \times \gamma \left[1 - \alpha_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-i} v} 2k_0 x_0 \right) \exp \left(- \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-i} v} 2k_0 x_0 \right) \right] + \\ \left. \left. + \frac{1-i v}{v} \frac{1}{\sigma_0} \operatorname{sh}^{-2} \left(\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-i} v} 2k_0 x_0 \right) \right\rangle . \right.$$

Отсюда ясно, что наличие небольшого магнитного поля приводит лишь к малым поправкам к мнимой (в пренебрежении влиянием соударений) части поверхностного импеданса, соответствующего изотропному слою [1].

Плазма с сильным магнитным полем ($u \gg 1$, v). Теперь опустим в (4) члены порядка u^{-1} ; в результате будем иметь

$$Z_{bx} = Z_0 \left[\alpha_0 + i \frac{v}{\sqrt{u}} \gamma (1 - e^{-i\alpha_0 k_0 x_0}) \right].$$

Ясно, что такой слой не экранирует поле; напротив, он практически прозрачен для ТМ-волн (в пределе $u \rightarrow \infty$ величина $Z_{bx} = Z_0 \alpha_0$ совпадает с импедансом свободного пространства).

Плазма с нулевой (при отсутствии соударений — $v = 0$) *эффективной проницаемостью* ($\epsilon_\perp = 0$; $(1-v)^2 = u$). Входной импеданс такого «нулевого» слоя равен

$$Z_{bx} = \begin{cases} Z_0 \left[-i \frac{1}{2\gamma} \left(1 - \gamma^2 \frac{2-v}{1-v} \right) (1 - e^{4\gamma k_0 x_0}) + \alpha_0 e^{4\gamma k_0 x_0} \right] & (1-v = \sqrt{u}), \\ Z_0 \left[i \frac{1}{2\gamma} \left(1 - \gamma^2 \frac{2-v}{1-v} \right) (1 - e^{-4\gamma k_0 x_0}) + \alpha_0 e^{-4\gamma k_0 x_0} \right] & (1-v = -\sqrt{u}). \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что даже при $v \rightarrow \infty$ «нулевой» слой не экранирует поле.

Резонансная плазма. Два резонансных значения параметров следует рассмотреть отдельно: $u = 1$, отвечающее гирорезонансу, и $v + u = 1$, соответствующее плазменному резонансу.

Непосредственно из (3), (4) нетрудно видеть, что случай $u = 1$, когда

$$\epsilon_\perp = \frac{v(2-v)-2iv}{v-2iv}, \quad \tilde{\epsilon} = \frac{-v}{v-2iv},$$

не соответствует какому-либо существенному увеличению коэффициента стражения. При $v = 2$, в частности, выражение для входного импеданса дается формулой (5) (v положено равным нулю).

Иная ситуация имеет место в случае плазменного резонанса $v+u=1$ ($\epsilon_{xx} \rightarrow 0$, $\tilde{\epsilon}_\perp \rightarrow \infty$, $\tilde{\epsilon} \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow 0$). Без учета потерь такой резонансный плазменный слой является идеально отражающим независимо от толщины; причем это свойство в отличие от изотропного случая сохраняется и при нормальном падении.

Нетрудно написать выражение для Z_{bx} в окрестности резонансной точки; исключая случай нормального или почти нормального падения (малые γ), имеем

$$\begin{aligned}
Z_{bx} = & i Z_0 \left(\frac{\gamma}{V^u} + \frac{1}{V^{-\varepsilon_\perp}} + \frac{\gamma V^u}{-\varepsilon_\perp} \right) \left\{ \left(-i \frac{\gamma}{V^u} + \alpha_0 \right) \operatorname{sh}(2V^{-\varepsilon_\perp} k_0 x_0) + \frac{1}{V^{-\varepsilon_\perp}} \times \right. \\
& \times \left[i \left(1 - \frac{\gamma V^u}{V^{-\varepsilon_\perp}} \right) \operatorname{sh}(2V^{-\varepsilon_\perp} k_0 x_0) + \frac{\alpha_0 V^u}{\gamma} \left(1 - \frac{V^u}{V^{-\varepsilon_\perp} \gamma} \right) e^{-2V^{-\varepsilon_\perp} k_0 x_0} \right] \times \\
& \times \left\{ \left(-i \frac{\gamma}{V^u} + \alpha_0 \right) \operatorname{sh}(2V^{-\varepsilon_\perp} k_0 x_0) + \frac{1}{V^{-\varepsilon_\perp}} \left[i \left(1 - \frac{\gamma V^u}{V^{-\varepsilon_\perp}} \right) \times \right. \right. \\
& \times \operatorname{sh}(2V^{-\varepsilon_\perp} k_0 x_0) + \left. \left. i \left(1 + \frac{V^u}{V^{-\varepsilon_\perp} \gamma} \right) e^{-2V^{-\varepsilon_\perp} k_0 x_0} \right] \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Сохранение членов порядка $1/\varepsilon_\perp$ (наряду с $1/V\varepsilon_\perp$) обусловлено тем, что именно эти члены могут оказаться определяющими для действительной части входного импеданса. Так, например, обстоит дело в случае слоя не слишком малой толщины при отрицательных значениях ε_\perp , когда

$$Z_{bx} = Z_0 \left\{ i \left[\frac{\gamma}{V^u} + \frac{1}{V^{-\varepsilon_\perp}} \operatorname{cth}(2V^{-\varepsilon_\perp} k_0 x_0) + O\left(\frac{1}{-\varepsilon_\perp}\right) \right] + O\left(\frac{1}{-\varepsilon_\perp}\right) \right\}.$$

Входной импеданс (6) отличается по своему характеру от Z_{bx} как сильно концентрированного (изотропного или анизотропного) плазменного слоя, так и «резонансного» изотропного слоя: при точном равенстве $u+v=1$ импеданс $Z_{bx}=iZ_0\gamma/V^u$ отличен от нуля и конечен. Это свидетельствует о том, что внутри слоя возбуждаются одновременно и магнитное и электрическое реактивные поля. Действительно, как нетрудно получить, при $1-v-u\simeq 0$ внутри слоя

$$\begin{aligned}
H_y = & e^{i\alpha_0 k_0 x_0} \frac{2\alpha_0 \sqrt{u}}{(\alpha_0 \sqrt{u} + i\gamma)} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon_\perp} \alpha_0 \sqrt{u}} \frac{i 2 \sqrt{u}}{i \sqrt{u} + i \gamma} \right) e^{-2V^{-\varepsilon_\perp} k_0 (x_0 - x)} \right] \times \\
& \times \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon_\perp} \alpha_0 \sqrt{u}} \frac{i \sqrt{u}}{i \sqrt{u} + i \gamma} \right) - \left(1 - \frac{1}{V^{-\varepsilon_\perp}} i \sqrt{u} \frac{3\alpha_0 \sqrt{u} + i \gamma}{\sigma_0^2 u + \gamma^2} \right) e^{-4V^{-\varepsilon_\perp} k_0 x_0} \right] \times \\
& \times e^{-V^{-\varepsilon_\perp} k_0 (x_0 + x)}; \\
E_z = & -i Z_0 \left\{ \frac{\gamma}{V^u} H_y + \frac{1}{k_0 \varepsilon_\perp} \frac{dH_y}{dx} \right\}; \\
E_x = & Z_0 \left\{ \frac{1}{k_0 \sqrt{u}} \frac{dH_y}{dx} + \frac{\gamma}{\varepsilon_\perp} H_y \right\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon_\perp < 0$ и $|\varepsilon_\perp| \rightarrow \infty$ поле плотно прижимается к границе, спадая до нуля в бесконечно тонком слое, аналогично тому как это имеет место в поверхностной волне вдоль границы изотропная плазма—вакуум при $\varepsilon \rightarrow -1$. В случае $\varepsilon_\perp > 0$ и $|\varepsilon_\perp| \rightarrow \infty$ формулы (7) описывают бесконечно осциллирующее вдоль x поле с исчезающими значениями тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на удаленной границе слоя.

Приведем в заключение выражение для коэффициента прохождения через резонансный слой конечной толщины, обусловленного соударениями внутри слоя ($v \neq 0$):

$$T^{(c)} = e^{i\alpha_0 2k_0 x_0} \frac{4\alpha_0 \sqrt{u(1+u)}}{(\alpha_0^2 u + \gamma^2) \sqrt{1-u}} \frac{\sqrt{i\nu}}{1 - \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{-i\nu}} \sqrt{\frac{u(1-u)}{1+u}} 4k_0 x_0 \right]} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{-i\nu}} \sqrt{\frac{u(1-u)}{1+u}} 2k_0 x_0 \right]. \quad (8)$$

Ясно, что по формуле (8) всегда можно провести оценку потерь в волноводе с резонансными стенками.

Промежуточные случаи. — для слоев с произвольными значениями параметров — рассчитываются по формулам (3), (4) численными методами. Пример такого расчета дан на рис. 1, где представлены зависимости модуля коэффициента отражения (при двух значениях $u=0,1; 2$), модуля и фазы входного импеданса ($u=0,1$) от $\epsilon_1 = 1-v$ для волн, распространяющихся в «+» и «-» z -направлениях; параметры γ^2 и $2k_0 x_0$ выбраны равными 0,5. Следует обратить внимание на тот факт, что $|\Gamma|$ не зависит от направления распространения волны, т. е. знака γ , тогда как модуль и фаза входного импеданса различны для волн, распространяющихся в разных направлениях.

3. В случае $\delta = 0$ поля ТЕ и ТМ типов не существуют независимо, так что падающая ТМ-волну частично трансформируется в ТЕ-волну и наоборот. Формулы (1), (2) в этом случае принимают вид (без учета соударений: $v = 0$)

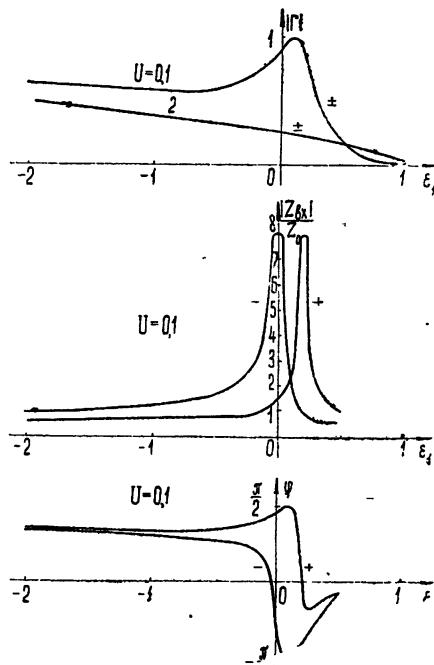


Рис. 1.

$$\frac{d^2 H_y}{dx^2} - \kappa_H^2 H_y = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} ik_0 h (1-v) \frac{\sqrt{u} v}{1-v-u} E_y, \\ \frac{d^2 E_y}{dx^2} - \kappa_E^2 E_y = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (-i) k_0 h \frac{\sqrt{u} v}{1-v-u} H_y, \\ E_z = \frac{1}{i \omega \epsilon_0 (1-v)} \frac{dH_y}{dx}, \\ E_x = \frac{1}{1-v-u} \left[\frac{h}{\omega \epsilon_0} (1-u) H_y + i \sqrt{u} v E_y \right], \quad (9) \\ H_z = -\frac{1}{i \omega \mu_0} \frac{dE_y}{dx}, \quad H_x = -\frac{h}{\omega \mu_0} E_y, \\ \kappa_H^2 = (1-v) \left(h^2 \frac{1-u}{1-v-u} - k_0^2 \right), \quad \kappa_E^2 = h^2 - k_0^2 \epsilon_{\perp},$$

$$\chi^4 - \chi^2 (\chi_H^2 + \chi_E^2) + \left[\chi_H^2 \chi_E^2 - h^2 k_0^2 \frac{uv^2(1-v)}{(1-v-u)^2} \right] = 0. \quad (10)$$

Внутри плазменного слоя существуют две волны — обыкновенная и необыкновенная, каждая из которых представляется в виде суперпозиции TE- и TM-волн с соответствующими постоянными распространения. Падающее поле (независимо от поляризации) возбуждает как обыкновенную, так и необыкновенную волну в слое, что существенно осложняет вычисление отражательных характеристик.

Опуская весьма громоздкие (даже в интересующих нас частных случаях) выражения для Γ . и $(Z_{\text{вх}})_{lk}$, мы ограничимся лишь некоторыми общими замечаниями. Прежде всего отметим, что в обоих предельных случаях, обсуждавшихся выше,—в случае скользящего падения $\alpha_0 \ll 1$ и в случае сильно концентрированной плазмы $v \gg 1, u$ — коэффициент отражения, разумеется, близок к единице. Для плазмы с сильным магнитным полем ($u \gg 1, v$), как ясно непосредственно из (9), (10), TE-волну проходит через слой почти без отражений, а TM-волну отражается тем лучше, чем выше значение параметра v .

Далее, удается показать в общем виде (доказательство опускается), что при конечных значениях параметров v, u, α_0, γ , отличных от нуля, идеального («резонансного») экранирования не существует. Это обусловлено обязательным присутствием в слое двух волн, одна из которых всегда обеспечивает просачивание конечных порций энергии*. В качестве иллюстрации приведем выражения для коэффициентов прохождения сквозь слой с $v + u = 1$. (При этом, согласно (10):

$$\chi_1^2 = k_0^2 \alpha_1^2 \simeq k_0^2 (1 + \gamma^2) \frac{u(1-u)}{1-v-u} \rightarrow \infty, \quad \chi_2^2 = k_0^2 \alpha_2^2 \simeq k_0^2 \frac{\gamma^4 - u}{1 + \gamma^2},$$

т. е. для одной из волн слой является резонансным.) При падении на такой слой конечной толщины ($2k_0x_0$) TM-волны единичной амплитуды коэффициенты прохождения TM-волны (T_{11}) и возникающей TE-волны (T_{12}) оказываются равными:

$$T_{11} = -i 4u \alpha_0 \alpha_2 (1 + \gamma^2) e^{i \alpha_0 2k_0 x_0} \{ [\alpha_0 (u + \gamma^2) - i \alpha_2 (1 + \gamma^2)]^2 e^{\alpha_2 2k_0 x_0} - \\ - [\alpha_0 (u + \gamma^2) + i \alpha_2 (1 + \gamma^2)]^2 e^{-\alpha_2 2k_0 x_0} \}^{-1},$$

$$T_{12} = i(\gamma/\sqrt{u}) T_{11}.$$

При падении TE-волны для коэффициентов прохождения TE- и TM-волн будем иметь соответственно

$$T_{22} = -i 4 \gamma^2 \alpha_0 \alpha_2 (1 + \gamma^2) e^{i \alpha_0 2k_0 x_0} \{ [\alpha_0 (u + \gamma^2) - i \alpha_2 (1 + \gamma^2)]^2 e^{\alpha_2 2k_0 x_0} - \\ - [\alpha_0 (u + \gamma^2) + i \alpha_2 (1 + \gamma^2)]^2 e^{-\alpha_2 2k_0 x_0} \}^{-1},$$

$$T_{21} = \frac{1}{i(\gamma/\sqrt{u})} T_{22} = -T_{12}.$$

Следует обратить внимание на тот факт, что в случае падения TE-волны коэффициенты прохождения (T_{22}, T_{21}) стремятся к нулю не только при углах падения, близких к скользящему ($\alpha_0 \rightarrow 0$), но и при углах, близких к нормальному, когда $\gamma \rightarrow 0$. Эта специфика случая квазинормального падения на слой с $v + u = 1$ сохраняется и при произвольной

* Этот аргумент, кстати, сохраняет силу и для случая произвольной ориентации магнитного поля.

ориентации магнитного поля $H^{(0)}$ для падающей волны определенной поляризации, такой, что в пределе $\gamma = 0$ вектор электрического поля перпендикулярен внешнему магнитному полю.

4. Итак, на основании рассмотрения простейших задач об отражении двухмерных волн от плоских гиротропных плазменных слоев можно составить качественно правильное представление о возможностях построения волноводных систем с соответствующими стенками. Если исключить квазиоптические линии — со скользящими (вдоль стенок) лучами — и системы с сильно концентрированной плазмой (см. [1]), то идеальная экранировка оказывается возможной (разумеется, при отсутствии потерь) лишь в случае резонансного (плазменный резонанс) слоя с постоянным магнитным полем, ориентированным перпендикулярно направлению распространения, для волн типа TM; в круглоцилиндрических волноводах это должно быть азимутальное магнитное поле. Следует отметить, что наряду с учетом поглощения внутри слоя представляется также важным учет пространственной дисперсии. Центральный вопрос здесь — приводит ли наличие пространственной дисперсии к снятию резонансного экранирования или только к смещению соответствующей резонансной частоты, как это имеет место в изотропном случае [4]. К сожалению, сравнительно простое гидродинамическое приближение, которое используется в ряде работ (см., например, [5]) при рассмотрении преобразования волн на границе плазмы, при наличии магнитного поля может претендовать лишь на некоторое качественное соответствие.

При необходимости можно, по-видимому, улучшить отражательные характеристики плазменных стенок, «составляя» их из нескольких слоев с различными значениями концентрации. Впрочем, всегда следует иметь в виду, что в большинстве приложений (в естественных или лабораторных условиях) приходится иметь дело с уже сформированными плазменными волноводами. Поэтому процедура «составления» плазменных стенок не контролируется до такой степени, чтобы их можно было формировать из отдельных слоев нужной концентрации.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 124 (1964).
- 2 И. Г. Кондратьев. Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 987 (1964).
- 3 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
- 4 И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 176 (1964).
- 5 В. М. Конторович, И. Н. Кутик, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1129 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт.
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 марта 1964 г.

TWO-DIMENSIONAL ELECTROMAGNETIC FIELDS GUIDED BY PLASMA LAYERS II

I. G. Kondrat'ev, M. A. Miller

Some types of two-dimensional waveguide systems with gyrotropic plasma walls have been considered. In this connection the reflection coefficient and the surface impedances have been determined for plasma layers with a constant magnetic field oriented either along or across the direction of the wave propagation. The conditions have been found in which such layers may shield the high-frequency electromagnetic fields.

УДК 533.922

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА В НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

B. B. Тамойкин

Вычисляются потери энергии на излучение электромагнитных волн при движении заряда в магнитоактивной плазме со случайными неоднородностями плотности электронов. Предполагается, что заряд движется вдоль магнитного поля. Показано, что излучение обоих типов нормальных волн в неоднородной магнитоактивной плазме возникает, в частности, в частотном диапазоне $\omega > \omega_p$, где невозможно черенковское возбуждение электромагнитных волн. Кроме того, отмечается эффект логарифмического возрастания интенсивности флуктуационного излучения при приближении к черенковскому порогу излучения необыкновенных волн

Излучение заряженных частиц, движущихся в магнитоактивной плазме, рассматривалось в ряде работ (см., например, [1,2]). В [1] проведен расчет потерь энергии заряда, движущегося равномерно вдоль магнитного поля, и показано, что при выполнении условия $\omega_0 < \omega_H$ (ω_0 — ленгмюровская частота, ω_H — гирочастота) спектр возможных частот черенковского излучения обыкновенных волн определяется неравенством $\omega < \omega_0$, в то время как излучение необыкновенных волн возможно лишь в интервале $\omega_0 < \omega < \omega_p$ ($\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$ — плазменная частота)*. При этом в [1] предполагается, что плазма однородна. Естественно ожидать, что при движении заряда в неоднородной плазме должно возникать переходное излучение электромагнитных волн, имеющее широкий спектр излучаемых частот. Излучение такого типа в изотропной плазме рассматривалось в работах [3—6]. Представляет определенный интерес обобщение этой задачи на случай гиротропной плазмы, в связи с тем, что излучение источников в такой среде обладает рядом характерных особенностей.

В настоящей работе рассматривается излучение необыкновенных и обыкновенных волн при равномерном движении заряда вдоль магнитного поля, наложенного на плазму со случайными флуктуациями плотности электронов. Флуктуации плотности предполагаются слабыми ($\Delta N/N \ll 1$); флуктуации магнитного поля и тепловое движение электронов плазмы не учитываются. Расчет проведен методом реакции излучения с использованием тензора эффективной диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы.

* В случае выполнения обратного неравенства $\omega_H < \omega_0$ из общего выражения для показателей преломления необыкновенных и обыкновенных волн легко показать, что черенковское излучение обыкновенных волн возможно на частотах $\omega < \omega_H$, в то время как необыкновенные волны могут возбуждаться в диапазоне $\omega_0 < \omega < \omega_p$ [2].

1. ТЕНЗОР ЭФФЕКТИВНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Система уравнений Максвелла при наличии движущегося заряда имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} qV\delta(\mathbf{r} - Vt) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi q\delta(\mathbf{r} - Vt). \end{aligned} \quad (1)$$

Путем исключения \mathbf{H} из уравнений (1) можно получить следующую систему уравнений для Фурье-компоненты поля:

$$\Delta E_i - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E_j + k_0^2 \varepsilon_{ij} E_j = - \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{i\omega}. \quad (2)$$

Здесь использована связь

$$D_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\mathbf{r}, \omega), \quad (3)$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega)$ — тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы [7], j_ω — компонента Фурье плотности тока, созданного движущимся зарядом.

Компоненты тензора $\varepsilon_{ij}(\omega)$ могут произвольным образом зависеть от координат.

Предположим, что отклонения концентрации электронов плазмы от среднего значения малы и являются случайной функцией координат:

$$N = N_0 + \Delta N(\mathbf{r}), \quad |\Delta N| \ll N_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) &= \varepsilon_{ij}^0 + \Delta \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, \omega); \\ \Delta \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) &= (\varepsilon_{ij}^0 - \delta_{ij}) \frac{\Delta N(\mathbf{r})}{N_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

где ε_{ij}^0 — невозмущенный тензор, компоненты которого не зависят от координат, $\Delta \varepsilon_{ij}$ — тензор, компоненты которого являются случайными функциями.

Представим поле $E_i(\mathbf{r}, \omega)$ в виде

$$E_i(\mathbf{r}) = \bar{E}_i + E'_i. \quad (5)$$

Здесь \bar{E} — электрическое поле движущегося заряда, усредненное по ансамблю, а E' — его флуктуационная часть с нулевым средним значением.

Такое представление поля позволяет свести (2) к следующей системе уравнений, определяющих как среднее поле, так и его флуктуационную часть:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E}_i - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \bar{E}_j + k_0^2 \varepsilon_{ij}^0 \bar{E}_j + k_0^2 \overline{\Delta \varepsilon_{ij} E'_j} &= - \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{i\omega}; \\ \Delta E'_i - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E'_j + k_0^2 \varepsilon_{ij}^0 E'_j &= - k_0^2 \Delta \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) \bar{E}_j. \end{aligned} \quad (6)$$

Дальнейший ход решения состоит в следующем [8, 11–13]. Можно записать решение второго уравнения системы (6) и подставить в первое

уравнение. При этом для \bar{E} получается сложное интегро-дифференциальное уравнение, которое мы здесь приводить не будем. Это уравнение существенно упрощается и сводится к дифференциальному, если предположить, что расстояние $R \simeq v/\omega$, на котором изменяется поле движущегося заряда, много больше масштаба неоднородностей плазмы $\Delta N(r)$. Тогда уравнение, описывающее среднее поле, принимает вид

$$\Delta \bar{E}_i - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \bar{E}_j + k_0^2 \varepsilon_{ij}^{\text{эфф}} \bar{E}_j = - \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{\omega i}, \quad (7)$$

где $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ — тензор эффективной диэлектрической проницаемости слabo-неоднородной магнитоактивной плазмы, связывающий среднюю электрическую индукцию со средним электрическим полем*

$$\bar{D}_i = \varepsilon_{ij}^{\text{эфф}} \bar{E}_j. \quad (8)$$

Тензор $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ в случае мелкомасштабных неоднородностей ($k_0 l, k_1 l, k_2 l \ll 1, k_{1,2} = (\omega/c) n_{1,2}(0)$) в системе координат, в которой ось z направлена вдоль магнитного поля, имеет вид [8]**

$$\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}} = \begin{vmatrix} \varepsilon^{\text{эфф}} & -ig^{\text{эфф}} & 0 \\ ig^{\text{эфф}} & \eta^{\text{эфф}} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{\text{эфф}} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{эфф}} &\simeq \varepsilon + A_1 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 + i(C_1 + C'_1)(k_0 l)^3 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2; \\ \eta^{\text{эфф}} &\simeq \eta + A_2 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 + i(C_2 + C'_2)(k_0 l)^3 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2; \\ g^{\text{эфф}} &\simeq g + A_3 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 + i(C_3 + C'_3)(k_0 l)^3 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где ε, η, g — компоненты невозмущенного тензора диэлектрической проницаемости плазмы [7], а величины A_i и C_i равны

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2} [(\varepsilon - 1)^2 + g^2] \left[\frac{\eta}{\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon}{\eta - \varepsilon} \right)^{3/2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{\eta - \varepsilon} \right)^{-1/2} - \frac{1}{\eta - \varepsilon} \right]; \\ A_2 &= -(\eta - 1)^2 \left[\frac{1}{\eta - \varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{\eta - \varepsilon} \right)^{3/2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{\eta - \varepsilon} \right)^{-1/2} \right]; \\ A_3 &= -g(\varepsilon - 1) \left[\frac{\eta}{\varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon}{\eta - \varepsilon} \right)^{3/2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{\eta - \varepsilon} \right)^{-1/2} - \frac{1}{\eta - \varepsilon} \right]; \end{aligned} \quad (11)$$

* В общем случае, если не предполагать выполненным условие $R \gg l$, тензор $\varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ является некоторым интегральным оператором, и для пространственных фурье-компонент соотношение (8) запишется следующим образом: $\bar{D}_i(k, \omega) = \varepsilon_{ij}^{\text{эфф}}(k, \omega) \times \bar{E}_j(k, \omega)$. Следовательно, рассеяние на неоднородностях приводит к наличию пространственной дисперсии. Можно показать, однако, что для наших целей учет пространственной дисперсии несущественен.

** Это справедливо только для однородного и изотропного поля случайных величин $\Delta N(r)$.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta) [n_1^2(\theta) - n_2^2(\theta)]} \{ [(\varepsilon - 1)^2 + g^2] n_1^5(\theta) \sin^2 \theta - \\
 &- [2\varepsilon(\varepsilon - 1)^2 \sin^2 \theta + \eta(\varepsilon - 1)^2 (1 + \cos^2 \theta) - 4g^2(\varepsilon - 1) \sin^2 \theta + 2\varepsilon g^2 \sin^2 \theta - \\
 &- \eta g^2(1 + \cos^2 \theta)] n_1^3(\theta) + [2\varepsilon\eta(\varepsilon - 1)^2 - 4\eta g^2(\varepsilon - 1) + 2\varepsilon\eta g^2] n_1(\theta)\}; \\
 C_2 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta) [n_1^2(\theta) - n_2^2(\theta)]} [n_1^5(\theta) \cos^2 \theta - \varepsilon n_1^3(\theta) (1 + \cos^2 \theta) + \\
 &+ (\varepsilon^2 - g^2) n_1(\theta)] (\eta - 1)^2; \\
 C_3 &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} g \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta) [n_1^2(\theta) - n_2^2(\theta)]} \{(\varepsilon - 1) n_1^5(\theta) \sin^2 \theta - \\
 &- [(\varepsilon^2 - g^2 - 1) \sin^2 \theta + (\varepsilon - 1) \eta(1 + \cos^2 \theta)] n_1^3(\theta) + \eta(\varepsilon^2 - g^2 - 1) n_1(\theta)\}; \\
 N(\theta) &= \varepsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Коэффициенты C'_i получаются из C_i путем взаимной замены $n_1(\theta) \leftrightarrow n_2(\theta)$. Заметим, что коэффициенты C_i отвечают затуханию (ослаблению) среднего поля из-за рассеяния в необыкновенную волну, в то время как коэффициенты C'_i связаны с рассеянием в обычную волну.

Как показано в [8], выражения (11) и (12) содержат неинтегрируемые особенности на частотах, отвечающих плазменному резонансу $N(\theta, \omega) = 0$. Следовательно, в случае слабого магнитного поля ($\omega_H < \omega_0$) они несправедливы на частотах

$$\omega < \omega_H, \quad \omega_0 < \omega < \omega_p, \tag{13}$$

а в случае сильного магнитного поля ($\omega_0 < \omega_H$) — на частотах

$$\omega < \omega_0, \quad \omega_H < \omega < \omega_p. \tag{14}$$

2. ИНТЕНСИВНОСТЬ ФЛУКТУАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НЕОБЫКНОВЕННЫХ И ОБЫКНОВЕННЫХ ВОЛН

Потери энергии заряда на единице длины пути определяются по формуле [9]

$$F = -(q/v) \operatorname{Re}(VE)_{r=vt}. \tag{15}$$

Следовательно, выражение для потерь энергии при статистическом усреднении имеет вид

$$\bar{F} = -(q/v) \operatorname{Re}(V\bar{E})_{r=vt}. \tag{15a}$$

Таким образом, знание тензора эффективной диэлектрической проницаемости неоднородной магнитоактивной плазмы сводит задачу о вычислении потерь энергии на излучение необыкновенных и обычных волн к более простой задаче о вычислении потерь энергии заряда, движущегося в однородной поглощающей магнитоактивной плазме.

Общее выражение (15a) является довольно сложным; поэтому ниже для простоты ограничимся рассмотрением задачи о движении заряда вдоль внешнего магнитного поля. В этом случае (15a) принимает вид [10]

$$\bar{F} = \frac{q^2 v}{\pi c^3} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^n \int_0^\pi \frac{n^4 \cos^2 \theta - n^2 \epsilon_{\text{эфф}} (1 + \cos^2 \theta) - g_{\text{эфф}}^2}{(\epsilon_{\text{эфф}} \sin^2 \theta + \gamma_{\text{эфф}} \cos^2 \theta) [n^2 - n_1^2(\theta)] [n^2 - n_2^2(\theta)]} \times \\ \times \delta(n \beta \cos \theta - 1) \sin \theta d\theta \omega n^2 dnd\omega, \quad (16)$$

где $n_m = k_m c / \omega$, k_m определяется пределами применимости макроскопической электродинамики:

$$n_{1,2}^2(\theta) = \{(\epsilon_{\text{эфф}}^2 - g_{\text{эфф}}^2 - \epsilon_{\text{эфф}} \gamma_{\text{эфф}}) \sin^2 \theta + 2\epsilon_{\text{эфф}} \gamma_{\text{эфф}} \pm [(\epsilon_{\text{эфф}}^2 - g_{\text{эфф}}^2 - \epsilon_{\text{эфф}} \gamma_{\text{эфф}})^2 \sin^4 \theta + 4\gamma_{\text{эфф}}^2 g_{\text{эфф}}^2 \cos^2 \theta]^{1/2}\} / [2(\epsilon_{\text{эфф}} \sin^2 \theta + \gamma_{\text{эфф}} \cos^2 \theta)]^{-1}. \quad (16a)$$

В (16) интегрирование по θ выполняется за счет δ -функции, при этом интегрирование по n нужно ограничить в $1/\beta$ до n_m [10]. В результате для спектральной плотности излучения электромагнитных волн получим следующее выражение:

$$\bar{F}_\omega = -\frac{q^2 \omega}{\pi c^2} \operatorname{Im} \left[\frac{(1 - \epsilon_{\text{эфф}} \beta^2) (\tilde{n}_1^2 - \epsilon_{\text{эфф}}) - g_{\text{эфф}}^2 \beta^2}{\epsilon_{\text{эфф}} \beta^2 (\tilde{n}_1^2 - \tilde{n}_2^2)} \ln \left(\frac{n_m^2 \beta^2}{1 - \tilde{n}_1^2 \beta^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \epsilon_{\text{эфф}} \beta^2) (\tilde{n}_2^2 - \epsilon_{\text{эфф}}) - g_{\text{эфф}}^2 \beta^2}{\epsilon_{\text{эфф}} \beta^2 (\tilde{n}_2^2 - \tilde{n}_1^2)} \ln \left(\frac{n_m^2 \beta^2}{1 - \tilde{n}_2^2 \beta^2} \right) \right]. \quad (17)$$

Здесь \tilde{n}_1 и \tilde{n}_2 — значения показателей преломления для необыкновенной и обыкновенной волны, определяемые соотношением

$$\cos^2 \theta_{1,2} = 1 / \tilde{n}_{1,2}^2 \beta^2 \quad (18)$$

и имеющие вид

$$\tilde{n}_{1,2}^2 = \{(\epsilon_{\text{эфф}}^2 - g_{\text{эфф}}^2 + \epsilon_{\text{эфф}} \gamma_{\text{эфф}}) \beta^2 - (\gamma_{\text{эфф}} - \epsilon_{\text{эфф}}) \pm [(\epsilon_{\text{эфф}}^2 - g_{\text{эфф}}^2 - \epsilon_{\text{эфф}} \gamma_{\text{эфф}})^2 \beta^4 - 2\epsilon_{\text{эфф}} (\epsilon_{\text{эфф}}^2 - g_{\text{эфф}}^2) \beta^2 + 2\gamma_{\text{эфф}} (2\epsilon_{\text{эфф}}^2 + g_{\text{эфф}}^2 - \epsilon_{\text{эфф}} \gamma_{\text{эфф}}) \beta^2 + (\gamma_{\text{эфф}} - \epsilon_{\text{эфф}})^2]^{1/2}\} / 2\epsilon_{\text{эфф}} \beta^2. \quad (19)$$

Заметим, что в отсутствие неоднородностей ($\Delta \bar{N}^2 / N^2 \rightarrow 0$) выражения для $\epsilon_{\text{эфф}}$, $\gamma_{\text{эфф}}$, $g_{\text{эфф}}$, $\tilde{n}_{1,2}$ становятся чисто действительными. При этом, как легко видеть из (17), потери энергии F_ω отличны от нуля лишь при выполнении хотя бы одного из условий: $n_1^2 \beta^2 > 1$, $n_2^2 \beta^2 > 1$, т. е. при сверхсветовом движении заряда в среде.

Для дальнейшего удобно записать

$$\tilde{n}_{1,2}^2 \simeq n_{1,2}^2 + \mu_{1,2}^2 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 + i(k_0 l)^3 (\gamma_{1,2}^2 + \tilde{\gamma}_{1,2}^2) \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2, \quad (20)$$

причем подобное представление справедливо для частот, достаточно далеко отстоящих от частот плазменного резонанса. Здесь $n_{1,2}$ — показатели преломления в однородной среде, определяемые соотношением (19), а величины $\mu_{1,2}^2$, $\tilde{\gamma}_{1,2}^2$ равны

$$\mu_{1,2}^2 = A_1 P_{1,2}(\omega, \beta) + A_2 Q_{1,2}(\omega, \beta) + A_3 R_{1,2}(\omega, \beta); \quad (21)$$

$$\gamma_{1,2}^2 = C_1 P_{1,2}(\omega, \beta) + C_2 Q_{1,2}(\omega, \beta) + C_3 R_{1,2}(\omega, \beta); \quad (22)$$

$$P_{1,2}(\omega, \beta) = [(1 + \eta\beta^2 - \beta^2 n_{1,2}^2) (2\epsilon n_{1,2}^2 - 3\epsilon^2 + g^2) - \eta(n_{1,2}^2 - 2\epsilon)] \times \\ \times \{ \epsilon [2\epsilon\beta^2 n_{1,2}^2 + \eta - \epsilon - (\epsilon^2 - g^2 + \epsilon\eta)\beta^2] \}^{-1};$$

$$Q_{1,2}(\omega, \beta) = -[(1 - \epsilon\beta^2)(n_{1,2}^2 - \epsilon) - g^2\beta^2] [2\epsilon\beta^2 n_{1,2}^2 + \\ + \eta - \epsilon - (\epsilon^2 - g^2 + \epsilon\eta)\beta^2]^{-1};$$

$$R_{1,2}(\omega, \beta) = 2g(1 + \eta\beta^2 - n_{1,2}^2\beta^2) [2\epsilon\beta^2 n_{1,2}^2 + \eta - \epsilon - (\epsilon^2 - g^2 + \epsilon\eta)\beta^2]^{-1}.$$

Коэффициент $\tilde{\gamma}_{1,2}^2$, отвечающий ослаблению поля из-за рассеяния в обычновенную волну, получается из $\gamma_{1,2}^2$ путем замены $C_l \rightarrow C'_l$. Тогда легко получить общее выражение для интенсивности флукуационного излучения электромагнитных волн. Оно имеет довольно громоздкий вид, поэтому ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев.

1) В случае выполнения неравенства

$$|1 - n_{1,2}^2\beta^2| \gg \mu_{1,2}^2\beta^2 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2, \quad (24)$$

т. е. вдали от черенковского порога излучения выражение для энергии необыкновенных волн принимает вид*

$$\bar{F}_\omega = \frac{q^2 \omega^4 l^3}{\pi \epsilon v^2 c^3} \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \left\{ \left[\frac{C_1(n_1^2 - \epsilon\beta^2 - g^2\beta^2) + C_3 2\epsilon g\beta^2}{\epsilon(n_1^2 - n_2^2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_1^2((1 - \epsilon\beta^2)(n_2^2 - \epsilon) - g^2\beta^2) - \gamma_2^2((1 - \epsilon\beta^2)(n_1^2 - \epsilon) - g^2\beta^2)}{(n_1^2 - n_2^2)^2} \right] \times \right. \\ \left. \times \ln \left(\frac{n_m^2\beta^2}{1 - n_1^2\beta^2} \right) + \frac{\gamma_1^2\beta^2[(1 - \epsilon\beta^2)(n_1^2 - \epsilon) - g^2\beta^2]}{(1 - n_1^2\beta^2)(n_1^2 - n_2^2)} \right\} + I,$$

где I получается из выражения в фигурных скобках путем взаимной замены $n_1^2 \leftrightarrow n_2^2$, $\gamma_1^2 \leftrightarrow \gamma_2^2$.

Интенсивность флукуационного излучения обычновенных волн \bar{F}_ω^{06} получается из (30) путем замены $C_l \rightarrow C'_l$, $\gamma_{1,2}^2 \rightarrow \tilde{\gamma}_{1,2}^2$.

Как видно из выражения (25), излучение заряда, движущегося в неоднородной магнитоактивной плазме, может иметь гораздо более широкий спектр частот по сравнению с черенковским излучением. В частности, флукуационное излучение отлично от нуля на частотах $\omega > \omega_p$, где черенковское излучение невозможно, хотя на очень высоких частотах оно становится несправедливым, поскольку нарушается условие мелкомасштабности флукуаций ($k_0 l \ll 1$).

2) Выражение для \bar{F}_ω имеет особенно простой вид в случае нерелятивистского движения заряда, когда выполняются следующие неравенства: $\epsilon\beta^2, \eta\beta^2, g\beta^2, n_1^2\beta^2, n_2^2\beta^2 \ll 1$. При этом интенсивность излучения необыкновенных волн определяется следующим выражением:

* Из выражения (17) легко получить выражение для интенсивности переходного излучения заряда, движущегося в случайно неоднородной изотропной среде, если перейти к пределу $H \rightarrow 0$. При этом получается известная формула [3].

$$\bar{F}_\omega^H \simeq \frac{q^2 \omega^4 l^3}{\pi \epsilon^2 c^5} \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 C_1 \ln(n_m^2 \beta^2). \quad (26)$$

Выражение для энергии излучаемых обыкновенных волн получается из (26) путем замены $C_1 \rightarrow C_1'$.

3) Рассмотрим другой предельный случай:

$$\left| 1 - n_{1,2}^2 \beta^2 - \mu_{1,2}^2 \beta^2 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \right| \ll (k_0 l)^3 \gamma_{1,2}^2 \beta^2 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2. \quad (27)$$

Это неравенство может выполняться лишь в области частот, где либо n_1^2 , либо n_2^2 больше единицы: $n_{1,2}^2 > 1$. В то же время пределы применимости (17) определяются пределами применимости выражений для компонент тензора $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}$. Поэтому в (17) можно полагать $n_1^2 > 1$ в области частот $\omega_0 < \omega < \omega_H$, где отсутствует плазменный резонанс. В то же время $n_2^2 > 1$ лишь в области частот, соответствующих плазменному резонансу, где наше рассмотрение неприменимо.

Полагая $n_1^2 \beta^2 \simeq 1$ и сохраняя в (17) основной логарифмический член, найдем выражение для интенсивности флуктуационного излучения обыкновенных и необыкновенных волн на пороге черенковского возбуждения последних:

$$\begin{aligned} \bar{F}_\omega^H \simeq & \frac{q^2 \omega^4 l^3}{\pi \epsilon c^5} \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \frac{(1 - \epsilon \beta^2)(2C_1 - \gamma_1^2) + 2gC_3 \beta^2}{1 - n_2^2 \beta^2} \times \\ & \times \ln \left[\frac{n_m^2}{(k_0 l)^3 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 (\gamma_1^2 + \tilde{\gamma}_1^2)} \right]; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_\omega^{06} \simeq & \frac{q^2 \omega^4 l^3}{\pi \epsilon c^5} \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \frac{(1 - \epsilon \beta^2)(2C_1' - \tilde{\gamma}_1^2) + 2gC_3' \beta^2}{1 - n_2^2 \beta^2} \times \\ & \times \ln \left[\frac{n_m^2}{(k_0 l)^3 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 (\gamma_1^2 + \tilde{\gamma}_1^2)} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, при подходе к черенковскому порогу излучения необыкновенных волн на данной частоте ω должен наблюдаться логарифмический рост интенсивности переходного излучения заряда, движущегося в случайно неоднородной магнитоактивной плазме. При этом возрастание происходит лишь до определенной величины, определяемой, например, коэффициентом поглощения электромагнитных волн из-за соударений. Однако, как видно из выражений (28) и (29), для получения конечной величины интенсивности переходного излучения электромагнитных волн нет необходимости учитывать соударения в плазме, поскольку наличие флуктуаций $\Delta N(\mathbf{r})$ приводит к конечным значениям \bar{F}_ω на пороге черенковского возбуждения необыкновенных волн (ср. [3]). Очевидно, что соударениями в плазме можно пренебречь при выполнении неравенства

$$(k_0 l)^3 \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 (\gamma_{1,2}^2 + \tilde{\gamma}_{1,2}^2) \gg 2n_{1,2} \gamma_{1,2}, \quad (30)$$

где $\chi_{1,2}$ — коэффициенты поглощения необыкновенной и обычной волн при наличии соударений в плазме.

В заключение заметим следующее. Представляет интерес рассмотрение переходного излучения заряда вблизи ленгмюровской и плазменной частоты, вблизи гирорезонанса, а также в общем случае на частотах, удовлетворяющих плазменному резонансу. В последнем случае продольные (поляризационные) колебания, возбуждаемые движущимся в плазме зарядом, будут рассеиваться на неоднородностях концентрации, что может приводить к значительно большей интенсивности переходного излучения по сравнению с вычисленной в настоящей работе.

Автор выражает глубокую благодарность В. Л. Гинзбургу и Н. Г. Денисову за ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Коломенский, ДАН СССР, **106**, 982 (1956).
2. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 192 (1960).
3. С. П. Капица, ЖЭТФ, **39**, 1367 (1960).
4. М. Л Тер-Микелян, Изв. АН Арм. ССР, **14**, 103 (1961).
5. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 257 (1963).
6. Н. П. Калашников, М. И. Рязанов, ЖЭТФ, **45**, 325 (1963).
7. В. Л Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
8. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **7**, 605 (1964).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1958.
10. А. Г. Ситенко, А. А. Коломенский, ЖЭТФ, **30**, 511 (1956).
11. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Уч. зап. ХГУ, труды физмат. ф-та, **2**, 41 (1950).
12. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 827 (1959).
13. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 1015 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 апреля 1964 г.

ENERGY LOSSES OF CHARGE MOVING IN NONHOMOGENEOUS MAGNETOACTIVE PLASMA

V. V. Tamoykin

The energy losses of the electromagnetic waves radiation are calculated when the charge is moving in magnetoactive plasma with random nonhomogeneities of the electron density. The charge is assumed to move along the magnetic field. It is shown that the radiation of both the types of normal waves occurs in a nonhomogeneous magnetoactive plasma, in particular, at frequency range $\omega > \omega_p$, where Cerenkov excitation of electromagnetic waves is impossible. Besides, the effect is noted of logarithmic growth of fluctuation radiation intensity when approximating to Cerenkov radiation threshold of non-ordinary waves.

УДК 533.951 7

К ТЕОРИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ С ПУЧКОМ

С. Е. Росинский, А. А. Рухадзе, В. Г. Рухлин

Исследуется устойчивость анизотропной плазмы с пучком по отношению к низкочастотным колебаниям в отсутствие столкновений между частицами. Показано, что пространственно неограниченная анизотропная плазма с пучком в отсутствие внешнего магнитного поля неустойчива при сколь угодно малых направленных скоростях пучка. Оцениваются значения критических скоростей пучков, при которых возникает низкочастотная неустойчивость в ограниченной плазме. Показано, что сильное магнитное поле стабилизирует такую неустойчивость анизотропной плазмы.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вопрос об определении минимальной скорости пучка, при которой возникает неустойчивость в плазме, неоднократно обсуждался в литературе. В работах [1] высказывалась мысль о том, что эффект Вавилова—Черенкова и аномальный эффект Допплера не охватывают всех возможных механизмов возбуждения электромагнитных волн пучком заряженных частиц в плазме. На примере возбуждения волн поперек пучка заряженных частиц в [1] было показано, что пучковая неустойчивость может развиваться и в тех случаях, когда условие Вавилова—Черенкова не выполнено, т. е. когда проекция скорости пучка на направление распространения волны меньше фазовой скорости волны. Такая неустойчивость аналогична неустойчивости плазмы с анизотропной температурой ($T_{\perp} \neq T_{\parallel}$) [2] и в пространственно неограниченной плазме должна проявляться при любой малой степени анизотропии, т. е. при сколь угодно малой направленной скорости пучка. В работах [1], однако, этого не было показано, так как в них исследовались лишь гидродинамические колебания системы плазма—пучок в условиях, когда антиэрмитовской частью тензора диэлектрической проницаемости можно пренебречь.

В настоящей статье проводится анализ низкочастотных колебаний анизотропной плазмы с пучком при учете антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости. Показано, что такая плазма в отсутствие внешнего магнитного поля неустойчива фактически при сколь угодно малых направленных скоростях пучка. Внешнее магнитное поле оказывает стабилизирующее влияние на рассматриваемую низкочастотную неустойчивость анизотропной плазмы, сдвигая область неустойчивости в сторону больших направленных скоростей пучка.

Для исследования спектра низкочастотных колебаний плазмы удобно исходить из приближенного дисперсионного уравнения, разложенного по степеням частоты ω :

$$D(0, \mathbf{k}, u) + \omega \frac{\partial D(\omega, \mathbf{k}, u)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} = 0. \quad (1.1)$$

Первое слагаемое в левой части этого уравнения характеризует статическое поле в системе. В случае изотропной плазмы, т. е. в отсутствие пучка

$$D(0, \mathbf{k}, 0) = k^2 \left(k^2 + \frac{1}{r_D^2} \right), \quad (1.2)$$

где r_D — дебаевский радиус плазмы. Из этого выражения следует, что в неограниченной изотропной плазме возможны, с одной стороны, неоднородное, экранированное на дебаевском радиусе, статическое поле (потенциальное электростатическое поле), а с другой стороны — однородное постоянное магнитное поле. С учетом второго слагаемого уравнение (1.1) характеризует спектр низкочастотных колебаний плазмы.

В случае изотропной плазмы величина $\frac{\partial D(\omega, \mathbf{k}, 0)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}$ является чисто мнимой (при действительном \mathbf{k}), причем $i \frac{\partial D(\omega, \mathbf{k}, 0)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} < 0$. Поэтому низкочастотные колебания в изотропной плазме всегда затухают, т. е. $\text{Im}(\omega) < 0^*$.

Иначе обстоит дело в случае анизотропной плазмы, т. е. при наличии пучка заряженных частиц. В этом случае функция $D(0, \mathbf{k}, \mathbf{u})$ уже не является положительной во всей области изменения действительной переменной \mathbf{k} и может иметь нули $\mathbf{k}_0(\mathbf{u})$. Это означает, что статическое поле в анизотропной плазме может существовать в виде стоячей волны с волновым вектором $\mathbf{k}_0(\mathbf{u})$. Функция $\frac{\partial D(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u})}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}$ в анизотропной плазме является, вообще говоря, комплексной. Дисперсионное уравнение (1.1) с учетом второго слагаемого при этом имеет решения, соответствующие неустойчивым колебаниям плазмы в области $\mathbf{k} \sim \mathbf{k}_0(\mathbf{u})$, т. е. $\text{Im} \omega > 0$. Таким образом, условие возникновения неустойчивости определяется существованием нулей у функции $D(0, \mathbf{k}, \mathbf{u})$ в области действительных \mathbf{k} . Отсюда и находится минимальная скорость пучка, при которой возможна неустойчивость плазмы по отношению к низкочастотным колебаниям. Физическая природа такой неустойчивости состоит в резонансной раскачке стоячей волны в анизотропной плазме.

Изложенный подход используется ниже для анализа спектра низкочастотных колебаний анизотропной плазмы с пучком как в отсутствие внешнего магнитного поля, так и при его наличии. Показано, что в отсутствие магнитного поля в пространственно неограниченной плазме низкочастотные колебания возбуждаются при сколь угодно малых направленных скоростях пучка. Внешнее магнитное поле стабилизирует эту неустойчивость плазмы.

2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ С ПУЧКОМ В ОТСУТСТВИЕ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В этом разделе мы рассмотрим низкочастотные колебания анизотропной плазмы с пучком в отсутствие внешнего магнитного поля. Распределения частиц по скоростям как в покоящейся плазме, так и в пучке будем считать максвелловскими. Для потенциальных (продольных) колебаний плазмы при этом справедливо следующее дисперсионное уравнение [3]:

$$1 + \sum_1 \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega - \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}}{k v_T} \right) \right] + \sum_2 \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k v_T} \right) \right] = 0. \quad (2.1)$$

* В отсутствие внешнего магнитного поля это затухание соответствует аномальному скин-эффекту в изотропной плазме [3].

Это уравнение записано в системе координат, связанный с частицами сорта «2»; частицы же сорта «1» в этой системе движутся со скоростью u (ω_L — ленгмюровская частота, а v_T — тепловая скорость частиц).

Уравнение (2.1) неоднократно исследовалось в области высоких частот колебаний, когда фазовая скорость больше тепловых скоростей частиц пучка или покоящейся плазмы (см. [3, 4] и цитированную там литературу). Здесь мы рассмотрим область низких частот $\omega \ll u k, k v_{T_1}$. Решение уравнения (2.1), которое в этом случае записывается в виде (1.1), дается выражением

$$\omega = \left\langle \sum_1 \frac{\omega_L^2 u k}{k^3 v_T^3} e^{-\frac{(u k)^2}{2k^2 v_T^2}} + i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 1 + \frac{1}{k^2 r_{D_1}^2} + \sum_1 \frac{\omega_L^2}{k^3 v_T^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[1 - \operatorname{Re} J_+ \left(\frac{u k}{k v_T} \right) \right] \right\} \right\rangle \left\langle \sum_2 \frac{\omega_L^2}{k^3 v_T^3} \right\rangle^{-1}. \quad (2.2)$$

Учитывая неравенство* $\operatorname{Re} J_+(x) \leq 1,28$, замечаем, что низкочастотные потенциальные колебания в анизотропной плазме с пучком возможны лишь при условии $u k \gg k v_{T_1}, N_1 T_2 \gg N_2 T_1$. При этом неустойчивыми могут быть колебания с длиной волны $\lambda > r_{D_1} (0,28 - r_{D_1}/r_{D_2})^{-1/2}$, отсюда кстати следует, что $r_{D_1}/r_{D_2} < 0,28$. Приравнивая к нулю минимальную часть выражения (2.2), находим критическую скорость пучка, при которой возникает низкочастотная неустойчивость в плазме:

$$u_{kp} = \sqrt{\frac{N_1 T_{i2}}{N_2 T_{e1}}} \frac{v_{Te1}}{\sqrt{1 + T_{i2}/T_{e2} + k^2 r_{D_2}^2}}. \quad (2.3)$$

Следует отметить, что рассматриваемая неустойчивость возможна в узком интервале длин волн, определяющемся неравенством

$$\left| k^2 r_{D_2}^2 + 1 + \frac{T_{i2}}{T_{e2}} - \frac{N_1 T_{i2}}{N_2 T_{e1}} \frac{k^2 v_{Te1}^2}{(u k)^2} \right| \ll 1, \quad (2.4)$$

причем максимальный инкремент нарастания колебаний может достигнуть значения $\gamma_{max} \lesssim k v_{T_{i2}}$. Отметим также, что определенная по формуле (2.3) критическая скорость должна удовлетворять условию

$$u_{kp} \gg v_{Te1} \sqrt{\ln \left[\frac{N_1}{N_2} \left(\frac{m T_{i2}^3}{M T_{e1}^3} \right)^{1/2} \right]}.$$

Выше мы предполагали, что как покоящаяся плазма, так и пучок заряженных частиц являются нейтральными, т. е. $N_{ie} = N_{ii} = N_1$, $N_{e2} = N_{i2} = N_2$. Однако полученные результаты легко обобщить на случай анизотропной плазмы с током, когда все электроны движутся относительно ионов. Уравнение для потенциальных колебаний такой плазмы в системе координат покоящихся электронов получается из уравнения (2.1) путем замены $N_{ie}, N_{i2} \rightarrow 0$, $N_{e2}, N_{ii} \rightarrow N$. Эта же замена в формуле (2.2) дает решение дисперсионного уравнения в области частот $\omega \ll u k, k v_{Te}$. Из этой формулы получаем выражение для скорости электронов, при которой происходит раскачка колебаний с волновым вектором $k \parallel u$:

* Напомним, что $\operatorname{Re} J_+(x) = 1$ при $x \approx 1,32$, а при $x > 2$ можно пользоваться асимптотикой $\operatorname{Re} J_+(x) \approx 1 + \frac{1}{x^2} + \dots$ О свойствах функции $J_+(x)$ см. [3].

$$u = \frac{v_s}{\sqrt{1 + k^2 r_{D_e}^2}} < v_s, \quad (2.5)$$

где $v_s = \sqrt{\frac{T_e}{M}}$ — скорость ионного звука. При этом раскачиваться могут колебания с длиной волны $\lambda \geq r_{D_i} (0,28 - T_i/T_e)^{-1/2}$.

Из условий $\omega \ll u k$, $k v_{T_e}$ следует, что низкочастотные потенциальные колебания могут существовать лишь в неизотермической плазме, в которой

$$T_e \gg T_i, \quad u > v_{T_i} \sqrt{\ln \sqrt{\frac{M}{m} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^3}}.$$

Указанная же раскачка колебаний при заданной скорости u возможна в узком интервале длин волн, определяемом неравенством

$$\left| k^2 r_{D_e}^2 + 1 - \frac{v_s^2}{u^2} \right| \ll 1, \quad (2.6)$$

причем максимальный инкремент нарастания может достигнуть значения $\gamma_{\max} \leq k v_{T_e}$.

Следует отметить, что уравнение (2.1) не учитывает собственного магнитного поля тока H_ϕ и поэтому пригодно для описания колебаний лишь вблизи оси тока (плазменный цилиндр): $r_0/r_{D_e} < (c^2/v_{T_e}^2) k r_{D_e}$, где $u k \gg (e H_\phi / m c) r_0 u$.

Рассмотрим теперь низкочастотные непотенциальные колебания анизотропной плазмы с пучком. Ограничимся исследованием волн, распространяющихся поперек пучка заряженных частиц ($u k = 0$). Дисперсионное уравнение колебаний [3] в области частот $\omega \ll k v_{T_a}$ можно записать в виде (1.1). Тогда

$$D(0, k, u) = 1 + \frac{1}{k^2 r_{D_n}^2} - \frac{u^2}{c^2} \frac{1}{k^4 r_{D_1}^2 r_{D_2}^2}; \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(\omega, k, u)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0} &= i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{1,2} \frac{\omega_L^2}{k^3 v_T^3} - \left(1 + \frac{1}{k^2 r_{D_n}^2} \right) \sum_2 \frac{\omega_L^2}{k^3 c^2 v_T} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{u^2}{c^2} \left[\frac{1}{k^2 r_{D_1}^2} \sum_2 \frac{\omega_L^2}{k^3 v_T^3} + \frac{1}{k^2 r_{D_2}^2} \sum_1 \frac{\omega_L^2}{k^3 v_T^3} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где r_{D_n} — дебаевский радиус всей системы в целом.

Решение дисперсионного уравнения (1.1) в области, где оно справедливо, при этом запишется в виде

$$\begin{aligned} \gamma &= - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{k^2 r_{D_n}^2} - \frac{u^2}{c^2} \frac{1}{k^4 r_{D_1}^2 r_{D_2}^2} \right) \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{1,2} \frac{1}{k v_T} \left[\frac{\omega_L^2}{k^2 c^2} \left(1 + \frac{1}{k^2 r_D^2} \right) + \frac{T}{T_i} \left(1 + \frac{1}{k^2 r_{D_1}^2} \right) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь индекс i принимает значения 1 и 2, $T_i = \sum_i T$, $\gamma = -i\omega$ — инкремент нарастания колебаний. Из (2.8) видно, что в пространственно неограниченной анизотропной плазме с пучком раскачка колебаний происходит при сколь угодно малых направленных скоростях пучка. Действительно, при $k \rightarrow 0$ из выражения (2.8) получаем

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u^2}{(r_{D_1}^2 + r_{D_2}^2) \sum_{1,2} (\omega_L^2/k v_T)} > 0. \quad (2.9)$$

В случае же ограниченной плазмы из выражения (2.8) находим по порядку величины критическую скорость пучка, при которой происходит возбуждение низкочастотных непотенциальных колебаний в анизотропной плазме:

$$u_{kp} \sim \frac{c}{L} \sqrt{r_{D_1}^2 + r_{D_2}^2}. \quad (2.10)$$

Из условия применимости формулы (2.8) $k v_{T_\alpha} \gg \gamma \gg k u$ следует, что рассмотренная неустойчивость возможна в очень узком интервале углов распространения волн. Так, в пределе длинных волн ($k \rightarrow 0$) имеем $\cos \theta \ll u/(r_{D_1}^2 + r_{D_2}^2) \sum_{1,2} (\omega_L^2/v_T) \ll 1$. Область же длин волн, в которой имеет место неустойчивость, как легко видеть из выражения (2.8), является довольно широкой: $(c/u) \sqrt{r_{D_1}^2 + r_{D_2}^2} < \lambda < \infty$. Максимальный инкремент нарастания колебаний при $T_1 \sim T_2$

$$\gamma_{max} \sim \frac{u^2}{v_{T_e} v_{T_i}} \frac{(N_1/N_2) k v_{T_i}}{(1 + N_1/N_2)} \lesssim k v_{T_i}.$$

В заключение отметим, что обобщение полученных формул для возбуждения непотенциальных колебаний на случай анизотропной плазмы с током не имеет смысла, так как раскачка колебаний при малых скоростях электронов происходит вне области применимости таких формул, не учитывающих собственного магнитного поля.

3. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЫ С ПУЧКОМ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Пусть теперь анизотропная плазма с пучком помещена в сильное магнитное поле B_0 , которое мы направим по оси z , параллельной скорости пучка. Сильное поле здесь понимается в том смысле, что исследуемая ниже область частот удовлетворяет условиям

$$(\omega - u k, \omega) \ll \Omega_i, \quad k_z v_T \ll \Omega,$$

где $\Omega = eB_0/mc$ — ларморовская частота. Дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний системы при этом записывается в виде

$$1 + \sum_1 \frac{1}{k^2 r_D^2} \left[1 - A_0 \left(\frac{k_\perp^2 v_T^2}{\Omega^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega - u k}{|k_z| v_T} \right) \right] + \\ + \sum_2 \frac{1}{k^2 r_D^2} \left[1 - A_0 \left(\frac{k_\perp^2 v_T^2}{\Omega^2} \right) J_+ \left(\frac{\omega}{|k_z| v_T} \right) \right] = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $A_0(x) = e^{-x} I_0(x)$. Так же, как и в предыдущем разделе, это уравнение записано в системе покоя частиц сорта «2».

Прежде всего отметим, что, согласно (3.1), поперечная длина волны непотенциальных колебаний должна быть существенно больше лармировского радиуса электронов пучка ($k_{\perp} v_{T_{e2}} \ll \Omega_e$). Для простоты мы будем считать, что длина волны больше также и лармировского радиуса ионов пучка, т. е. $k_{\perp} v_{T_1} \ll \Omega$. Более того, анализ уравнения показывает, что низкочастотные колебания ($\omega \ll k_z v_{T_2}$, и k) возможны лишь при условии $A_0(k_{\perp}^2 v_T^2 / \Omega^2) > 0,8$. Поэтому мы будем считать также, что $k_{\perp} v_{T_2} \ll \Omega$.

В этих условиях решение дисперсионного уравнения (3.1) записывается в виде

$$\omega = \left\{ \dot{u} k \sum_1 \frac{\omega_L^2}{k^2 |k_z| v_T^3} e^{-\frac{u k}{2k_z^2 v_T^2}} + i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \frac{\omega_{L_{e1}}^2}{(u k)^2} + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \frac{c^2}{v_{A_1}^2} + \frac{1}{k^2 r_{D_2}^2} \right] \right\} \times \left\{ \sum_2 \frac{\omega_L^2}{k^2 |k_z| v_T^3} \right\}^{-1}. \quad (3.2)$$

Это выражение аналогично выражению (2.2) и так же, как и последнее, справедливо в области $u k \gg k_z v_{T_1}$, $N_1 T_2 > N_2 T_1$.

Согласно (3.2), критическая скорость, при которой возникает неустойчивость, определяется формулой

$$u_{kp} = \sqrt{\frac{N_1}{N_2}} \frac{v_{T_{e2}}}{\sqrt{1 + k^2 r_{D_2}^2 + k_{\perp}^2 v_{T_{e2}}^2 N_1 / \Omega_i^2 N_2}}. \quad (3.3)$$

Наконец, область длин волн, в которой возможны рассмотренные низкочастотные потенциальные колебания, определяется неравенством:

$$\left| 1 + k^2 r_{D_2}^2 - \frac{N_1}{N_2} \frac{T_2}{T_1} \frac{v_{T_{e1}}^2}{u^2} + \frac{N_1}{N_2} \frac{k_{\perp}^2 v_{T_{i2}}^2}{\Omega_i^2} \right| \ll 1. \quad (3.4)$$

Максимальный инкремент нарастания колебаний $\gamma_{max} \ll k_z v_{T_{i2}}$.

Полученные выражения непосредственно обобщаются на случай анизотропной плазмы с током, когда все электроны движутся относительно ионов. Приводить здесь такие формулы нет необходимости, так как для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, они совпадают с написанными в предыдущем разделе. Неизменна также и область применимости таких формул.

В заключение отметим, что внешнее сильное магнитное поле существенным образом влияет на низкочастотные непотенциальные колебания анизотропной плазмы с пучком. Именно, при наличии магнитного поля такие колебания становятся невозможными. В этом и состоит стабилизирующее действие внешнего магнитного поля на неустойчивость анизотропной плазмы с пучком по отношению к возбуждению низкочастотных потенциальных колебаний при малых скоростях пучка.

Авторы выражают признательность В. П. Силину за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Рухадзе, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 401 (1963); В. Г. Маханьков, А. А. Рухадзе, Ядерный синтез, 2, 177 (1962).
2. А. Е. Стефанович, ЖТФ, 32, 638 (1962); Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, изд. АН СССР, 3, 269 (1958); А. А. Веденов, Р. З. Сагдеев, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, изд. АН СССР, 3, 278 (1958).

-
- 3 В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
 - 4. Я. Б. Файнберг, Атомная энергия, 11, 313 (1960).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
21 ноября 1963 г.

TO THE THEORY OF THE INSTABILITY OF ANISOTROPIC PLASMA WITH
A BEAM

Rosinskii S. E., Rukhadze A. A., Rukhin V. G.

The instability of anisotropic plasma with a beam is investigated with respect to the low-frequency oscillations, the collisions between particles being neglected. Infinite anisotropic plasma with the beam is shown to be unstable without external magnetic field, the directional velocities of the beam being arbitrary small. The values of critical beam velocities are estimated at which the low-frequency instability appeared in the space bounded plasma. Strong magnetic field is shown to stabilize such an instability of the anisotropic plasma.

УДК 621.371.163.3

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Л. П. Пресняков, И. И. Собельман

Приближенный метод интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, развитый для задач о возбуждении атомов тяжелыми частицами, применяется к задаче вычисления коэффициента отражения от слоя с произвольным вещественным показателем преломления

В работе [1], посвященной вычислению эффективных сечений возбуждения атомов тяжелыми частицами, был развит новый приближенный метод интегрирования системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. В обоих предельных случаях малых и больших значений характерного параметра задачи полученное приближенное решение практически совпадает с точным. Рассмотрение большого числа примеров показывает, что метод дает весьма хорошие результаты и в промежуточной области. С небольшими видоизменениями этот метод может быть применен к задаче распространения электромагнитных волн в среде с переменным вещественным показателем преломления n и, в частности, к задаче вычисления коэффициента отражения от слоя с произвольным вещественным n . Этот вопрос и рассматривается в настоящей работе.

Рассмотрим среду, для которой диэлектрическая проницаемость ϵ вещественна, положительна и зависит только от координаты x : $\epsilon = \epsilon(\omega, x)$. Распространение электромагнитных волн вдоль оси x в такой плоскостной среде описывается уравнением

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\lambda^2} n^2(x) \right] E = 0, \quad (1)$$

где $\lambda = c/\omega$, $n = \sqrt{\epsilon}$; под E можно понимать любую из компонент E_y , E_z .

Можно показать, что точное решение (1) имеет вид

$$E = \frac{a(x)}{\sqrt{n}} e^{-\frac{i}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau} + \frac{b(x)}{\sqrt{n}} e^{\frac{i}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau}, \quad (2)$$

где функции $a(x)$, $b(x)$ удовлетворяют системе уравнений [2,3]:

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} e^{i \frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau} b(x); \quad (3)$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} e^{-\frac{i}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau} a(x). \quad (4)$$

Пусть при $x < x_1$ и $x > x_2$ $n(x) = \text{const}$, а на отрезке $x_1 \leq x \leq x_2$ $n(x)$ — произвольная вещественная функция и пусть на рассматриваемый слой падает волна со стороны положительных x . Тогда в общем случае в среде будут распространяться падающая, проходящая и отраженная волны, как это показано на рис. 1. В этом случае на функцию (2) нужно наложить граничные условия $a(x_2) = \text{const}$, $b(x_1) = 0$. Для дальнейшего, од-

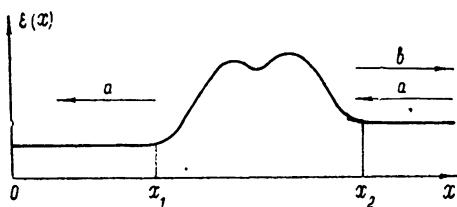


Рис. 1

нако, удобно записать граничные условия в несколько ином виде: $a(x_1) = \text{const}$ и $b(x_1) = 0$, что также обеспечивает при $x < x_1$ наличие только проходящей волны. При этом нормировка проводится не по падающей, а по проходящей волне. Очевидно, что решения, соответствующие граничным условиям первого и второго типа, отличаются лишь постоянным множителем, а величина коэффициента отражения в обоих случаях одинакова. Без ограничения общности можно также положить $|a(x_1)| = 1$.

Запишем комплексные функции a , b в виде

$$a = \mu_1 e^{i\varphi_1}, \quad b = \mu_2 e^{i\varphi_2}, \quad (5)$$

где μ_1 , μ_2 , φ_1 и φ_2 — вещественные функции. В соответствии со сказанным надо потребовать, чтобы эти функции удовлетворяли граничным условиям

$$\mu_1(x_1) = 1, \quad \varphi_1(x_1) = \varphi, \quad \mu_2(x_1) = 0. \quad (6)$$

Эти условия задают модуль и фазу проходящей волны в точке x_1 и обеспечивают равенство нулю отраженной волны при $x \leq x_1$.

Введем новую неизвестную функцию

$$r(x) = \frac{b(x)}{a(x)} \equiv \rho(x) e^{i\alpha(x)}, \quad (7)$$

где $\rho(x)$ и $\alpha(x)$ вещественны. Легко показать, что поскольку коэффициенты системы (3), (4) комплексно сопряжены, функции a и b при условии (6) удовлетворяют соотношению

$$|a(x)|^2 - |b(x)|^2 = 1. \quad (8)$$

Из (7), (8) следует:

$$|\alpha(x)|^2 = \frac{1}{1 - \rho^2(x)}, \quad |b(x)|^2 = \frac{\rho^2(x)}{1 - \rho^2(x)}. \quad (9)$$

Функция r удовлетворяет уравнению Риккати:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} \left\{ e^{-i\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau} - e^{i\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau} r^2(x) \right\}, \quad (10)$$

а вещественные функции ρ и α — системе уравнений

$$\frac{d\rho}{dx} = (1 - \rho^2(x)) \left\{ \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} \cos \left[\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau + \alpha(x) \right] \right\}; \quad (11)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = - \left(\rho(x) + \frac{1}{\rho(x)} \right) \left\{ \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} \sin \left[\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau + \alpha(x) \right] \right\}. \quad (12)$$

Из (6) следует: $\rho(x_1) = 0$. Уравнение (11) интегрируется точно, что позволяет выразить все искомые функции через фазу $\alpha(x)$:

$$r(x) = \operatorname{th} \left\{ \int_{x_1}^x \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx'} \cos \left[\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^{x'} n(\tau) d\tau + \alpha(x') \right] dx' \right\} e^{i\alpha(x)}; \quad (13)$$

$$\alpha(x) = \operatorname{ch} \left\{ \int_{x_1}^x \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx'} \cos \left[\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^{x'} n(\tau) d\tau + \alpha(x') \right] dx' \right\} e^{i\varphi_1(x)}; \quad (14)$$

$$b(x) = \operatorname{sh} \left\{ \int_{x_1}^x \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx'} \cos \left[\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^{x'} n(\tau) d\tau + \alpha(x') \right] dx' \right\} e^{i\varphi_2(x)}. \quad (15)$$

Выразим далее коэффициент отражения R через $r(x_2)$:

$$R = \frac{b(x_2) \exp \left[\frac{i}{\lambda} \int_{x_0}^{x_2} n(\tau) d\tau \right]}{a(x_2) \exp \left[- \frac{i}{\lambda} \int_{x_0}^{x_2} n(\tau) d\tau \right]} = r(x_2) e^{i\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^{x_2} n(\tau) d\tau}. \quad (16)$$

Точное выражение для функции $\alpha(x)$ в общем случае найти нельзя; поэтому выясним, какой вид принимает эта функция в предельном случае малых длин волн λ .

При $\lambda \rightarrow 0$, точнее, при известных условиях перехода к приближению геометрической оптики [4], выражение для R можно получить, интегрируя систему (3) — (4) методом последовательных приближений (см. [2,3]). При этом для $|R|$ получается следующее выражение

$$|R| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} e^{i\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau} dx \right|, \quad |R| \ll 1. \quad (17)$$

Поскольку формула (13) с правильным, но пока неизвестным выражением для функции $\alpha(x)$ является точной, она должна в пределе давать (17). Таким образом, при предельном переходе к геометрической оптике

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} \cos \left[\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau + \alpha(x) \right] dx \rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} e^{i \frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau} dx \right|.$$

Следовательно, функция $\alpha(x)$ в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ должна обеспечивать выполнение этого условия. Отсюда, в частности, следует, что она должна таким образом зависеть от x_0 , чтобы выбор x_0 не влиял на величину интеграла в левой части. Поскольку определение $\alpha(x)$ из уравнения (12) вряд ли возможно, рассмотрим, что может дать формула (13), если в нее подставить функцию $\alpha(x)$ в приближении геометрической оптики. Эта последняя неявным образом определяется из соотношения

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} \cos \left[\frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau + \alpha(x) \right] dx = \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} e^{i \frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau} dx \right|. \quad (18)$$

Если ограничиться вычислением модуля коэффициента отражения $|R|$, то нет необходимости определять явный вид $\alpha(x)$ так как из (13), (16) и (18) следует:

$$|R| = \operatorname{th} \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2n} \frac{dn}{dx} e^{i \frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^x n(\tau) d\tau} dx \right|. \quad (19)$$

Легко видеть, что в этом выражении выбор x_0 совершенно произволен, так как он не влияет на результаты.

В соответствии с (18) при предельном переходе к геометрической оптике формула (19) дает правильный результат. Нетрудно убедиться, что в обратном предельном случае больших λ (19) совпадает со значением $|R|$, получаемым из исходного уравнения (1) разложением по малому параметру $\frac{1}{\lambda}$ (борновское приближение). Больше того, как будет показано ниже, в случае резкого скачка коэффициента преломления (т. е. в условиях, противоположных условиям применимости геометрической оптики) выражение (19) дает френелевское отражение.

Поскольку формула (19) переходит в точное выражение для модуля $|R|$ в перечисленных предельных случаях, распространим ее в качестве интерполяционной формулы и на промежуточную область. Можно надеяться, что она даст хорошие результаты. Проверим это на ряде примеров.

1) Резкий скачок показателя преломления.

Пусть при $x < x_1$ $n(x) = n_1$ при $x > x_2$ $n(x) = n_2$, а на интервале x_1, x_2 , $n(x)$ — произвольная ограниченная функция. Пусть далее $n_{\max} |x_2 - x_1| \ll \lambda$. Заменив экспоненту в (19) на единицу, получим

$$|R| = \operatorname{th} \left\{ \left| \ln \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \right| \right\} = \left| \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right|. \quad (20)$$

Таким образом, из (19) следует известная формула Френеля.

2) Задача просветления оптики.

Пусть $n(x)$ есть ступенчатая функция: при $x < x_1$ $n = n_1$; при $x_1 < x < x_2$ $n = n_2$; при $x > x_2$ $n = n_3$, причем $x_2 - x_1 = e$. В этом случае

$$|R| = \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{n_2}{n_1} \right) + \cos \left(\frac{2}{\lambda} n_2 l \right) \ln \left(\frac{n_3}{n_2} \right) + i \sin \left(\frac{2}{\lambda} n_2 l \right) \ln \left(\frac{n_3}{n_2} \right) \right| \right]. \quad (21)$$

При выполнении условий

$$\frac{2\pi\lambda}{4n_2} = l, \quad n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$$

коэффициент отражения обращается в нуль. Таким образом, формула (21) дает точные условия просветления при помощи однослоиного покрытия.

3) Пусть при $x > x_2$ $n(x) = n_0$, а при $x < x_1$ $n = \delta \ll 1$. В этом случае, оценивая аргумент гиперболического тангенса J в (19) методом фазовых интегралов, получим:

$$J \sim e^{-\frac{2}{\lambda}\zeta} \ln \sqrt{\frac{n_0}{\delta}},$$

где ζ — константа, зависящая от вида функции $n(x)$ на интервале x_1, x_2 . При $\delta \rightarrow 0$ (подразумевается, что все остальные параметры фиксированы) должно иметь место полное внутреннее отражение. Действительно, в этом случае (19) дает

$$|R| = \operatorname{th} J \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 1.$$

4) Плавный «переходный слой»

$$n^2 = 1 - P \frac{e^{-\gamma x}}{1 + e^{-\gamma x}}, \quad (22)$$

где P и γ — постоянные. В этом случае аргумент гиперболического тангенса в (19) можно оценить методом, аналогичным используемому в [1] (см. Приложение в [1]). Приведем окончательный результат:

$$|R| \simeq \operatorname{th} \left\{ e^{-S\pi\sqrt{1-P}} \ln \left[\frac{1}{\sqrt[4]{1-P}} \right] \right\}; \quad S = \frac{2}{\lambda\gamma}. \quad (23)$$

При $S\sqrt{1-P} \gg 1$:

$$|R| \simeq e^{-S\pi\sqrt{1-P}}; \quad (24)$$

при $S \rightarrow 0$

$$|R| \rightarrow \frac{1 - \sqrt{1-P}}{1 + \sqrt{1-P}}. \quad (24a)$$

В случае (22) исходное уравнение (1) интегрируется точно (см., например, [4]), причем

Таблица 1

| P | S=0 | | | S=0,5 | | | S=1 | | | S=1,5 | | | S=2 | | | S=3 | | |
|------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|
| | Ф-ла (25) | Ф-ла (19) | Ф-ла (25) | Ф-ла (19) | Ф-ла (25) | Ф-ла (19) | Ф-ла (25) | Ф-ла (19) | Ф-ла (25) | Ф-ла (19) | Ф-ла (25) | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0,05 | $1,27 \cdot 10^{-2}$ | $1,28 \cdot 10^{-2}$ | $7,75 \cdot 10^{-3}$ | $7,87 \cdot 10^{-3}$ | $3,56 \cdot 10^{-3}$ | $3,68 \cdot 10^{-3}$ | $1,13 \cdot 10^{-3}$ | $1,17 \cdot 10^{-3}$ | $3,18 \cdot 10^{-4}$ | $3,5 \cdot 10^{-4}$ | $2,16 \cdot 10^{-5}$ | $2,45 \cdot 10^{-5}$ | | | | | | |
| 0,10 | $2,56 \cdot 10^{-2}$ | $2,57 \cdot 10^{-2}$ | $1,79 \cdot 10^{-2}$ | $1,85 \cdot 10^{-2}$ | $7,8 \cdot 10^{-3}$ | $8 \cdot 10^{-3}$ | $2,39 \cdot 10^{-3}$ | $2,56 \cdot 10^{-3}$ | $6,96 \cdot 10^{-4}$ | $8,38 \cdot 10^{-4}$ | $4,9 \cdot 10^{-5}$ | $6,95 \cdot 10^{-5}$ | | | | | | |
| 0,25 | $7,18 \cdot 10^{-2}$ | $7,18 \cdot 10^{-2}$ | $5,35 \cdot 10^{-2}$ | $5,53 \cdot 10^{-2}$ | $2,38 \cdot 10^{-2}$ | $2,6 \cdot 10^{-2}$ | $8,3 \cdot 10^{-3}$ | $9,4 \cdot 10^{-3}$ | $2,58 \cdot 10^{-3}$ | $3,71 \cdot 10^{-3}$ | $2,16 \cdot 10^{-4}$ | $4,15 \cdot 10^{-4}$ | | | | | | |
| 0,40 | $1,27 \cdot 10^{-1}$ | $1,27 \cdot 10^{-1}$ | $9,45 \cdot 10^{-2}$ | $9,94 \cdot 10^{-2}$ | $4,45 \cdot 10^{-2}$ | $5,51 \cdot 10^{-2}$ | $1,71 \cdot 10^{-2}$ | $2,4 \cdot 10^{-2}$ | $0,582 \cdot 10^{-2}$ | $1,13 \cdot 10^{-2}$ | $5,95 \cdot 10^{-3}$ | $1,94 \cdot 10^{-3}$ | | | | | | |
| 0,55 | $1,98 \cdot 10^{-1}$ | $1,53 \cdot 10^{-1}$ | $1,61 \cdot 10^{-1}$ | $7,9 \cdot 10^{-2}$ | $10,3 \cdot 10^{-2}$ | $3,39 \cdot 10^{-2}$ | $5,14 \cdot 10^{-2}$ | $1,26 \cdot 10^{-2}$ | $3,11 \cdot 10^{-2}$ | $1,75 \cdot 10^{-3}$ | $8,24 \cdot 10^{-3}$ | | | | | | | |
| 0,70 | $2,90 \cdot 10^{-1}$ | $2,35 \cdot 10^{-1}$ | $2,52 \cdot 10^{-1}$ | $1,36 \cdot 10^{-1}$ | $1,83 \cdot 10^{-1}$ | $6,57 \cdot 10^{-2}$ | $12,8 \cdot 10^{-2}$ | $3,02 \cdot 10^{-2}$ | $8,25 \cdot 10^{-2}$ | $5,6 \cdot 10^{-3}$ | $3,41 \cdot 10^{-2}$ | | | | | | | |
| 0,85 | $4,41 \cdot 10^{-1}$ | $4,09 \cdot 10^{-1}$ | $4,19 \cdot 10^{-1}$ | $2,62 \cdot 10^{-1}$ | $3,28 \cdot 10^{-1}$ | $1,52 \cdot 10^{-1}$ | $2,70 \cdot 10^{-1}$ | $0,8 \cdot 10^{-1}$ | $2,20 \cdot 10^{-1}$ | $2,57 \cdot 10^{-2}$ | $1,40 \cdot 10^{-1}$ | | | | | | | |
| 0,95 | $6,33 \cdot 10^{-1}$ | $5,85 \cdot 10^{-1}$ | $5,92 \cdot 10^{-1}$ | $4,61 \cdot 10^{-1}$ | $5,39 \cdot 10^{-1}$ | $3,42 \cdot 10^{-1}$ | $4,91 \cdot 10^{-1}$ | $2,45 \cdot 10^{-1}$ | $4,82 \cdot 10^{-1}$ | $1,23 \cdot 10^{-1}$ | $3,73 \cdot 10^{-1}$ | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |

$$|R| = \frac{\operatorname{sh}[(\pi/2) S(1 - \sqrt{1-P})]}{\operatorname{sh}[(\pi/2) S(1 + \sqrt{1-P})]} . \quad (25)$$

Эта формула дает те же значения $|R|$, что и (23), в обоих предельных случаях, указанных в (24).

В промежуточной области формула (19) также дает хорошие результаты. Это видно из таблицы 1, содержащей результаты численных расчетов по формуле (19) для ряда значений S и P , и из рис. 2. При $S = 0,5$ формула (19) практически совпадает с точной для всех значений P . При $S = 1, 3$ заметное расхождение имеет место лишь в области

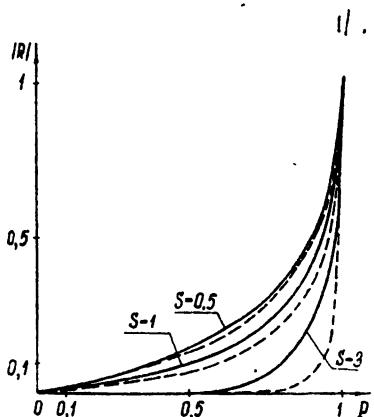


Рис. 2. Результаты расчета коэффициента отражения для переходного слоя по формуле (19) (сплошные кривые) и по формуле (25) (пунктир)

$P > 0,75$. Отметим, что при $S \gg 1$ функция $|R|$, согласно (25), чрезвычайно мала всюду, кроме очень малой окрестности точки $P = 1$, а в этой окрестности быстро достигает значения $|R| = 1$. Формула (19) дает несколько более плавный переход в области $P \sim 1$ от значений $|R| \sim 0$ к значению $|R| = 1$.

5) Задача надбарьерного отражения [5]. Эта задача приводит к уравнению точно того же вида, что и (1). Если $n(x)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая условиям, рассматриваемым в [5], то, полагая в (19) $x_1 \rightarrow -\infty$, $x_2 \rightarrow +\infty$, можно дать следующую оценку $|R|$ при малых λ (это соответствует надбарьерному отражению квазиклассической частицы при адиабатических условиях):

$$|R| \sim \left| e^{-\frac{2}{\lambda} f(z_0)} \operatorname{res} \left(\frac{1}{2n} \frac{dn}{dz} \right)_{z=z_0} \right| , \quad (26)$$

где z_0 — простой нуль функции $n(z)$ в верхней полуплоскости комплексного переменного z , дающий максимальный вклад в интеграл, а

$f(z_0) = -i \int^{z_0} n(z) dz \dots$ вещественная часть величины $f(z_0)$, очевидно, положительна. Формула (26) содержит тот же экспоненциальный множитель, что и формула (31) работы [5]. В обратном предельном случае больших λ формула (19), как это уже отмечалось выше, переходит в известную формулу первого приближения теории возмущений.

Отметим, что хотя выше рассматривался случай нормального падения, все сказанное можно обобщить и на случай наклонного падения. Это видно из того, что в последнем случае задача сводится к системе двух уравнений типа (3), (4) (см., например, [2, 3]). Аналогичный ме-

тод может быть использован и при решении ряда других задач, например, в задаче распространения электромагнитных волн в волноводе.

В заключение выражаем благодарность В. Л. Гинзбургу, обратившему наше внимание на возможность применения метода работы [1] к задаче о распространении электромагнитных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Вайнштейн, Л. Пресняков, И. Собельман, ЖЭТФ, 43, 518 (1962).
2. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
3. Н. Времег, Physica, 15, 593 (1949).
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
5. В. Л. Покровский, И. М. Халатников, ЖЭТФ, 40, 1713 (1961).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
27 января 1964 г.

ON THE PROPAGATION OF ELECTRO-MAGNETIC WAVES IN A MEDIUM WITH NONHOMOGENEOUS REFRACTION INDEX

L. P. Presnyakov, I. I. Sobelman

The approximate method of integration of the linear differential equation system with variable coefficients developed in the problems of atom excitation by the heavy particles is applied to the computation of the reflection coefficient of the layer with an arbitrary real refraction index.

О РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

Г. В. Городинский

Проведен расчет реакции излучения в среде с отрицательным поглощением при наличии пространственной дисперсии. Показано, что в такой среде имеет место раскачка колебаний осциллятора, причем в $(C/V_T)^3$ раз более интенсивная, чем в среде без пространственной дисперсии.

При наличии среды обычно удобнее находить излучаемую некоторым элементарным излучателем энергию через реакцию излучения, а не путем расчета потока энергии (см., например, [1]). Иллюстрацией сказанного является и работа [2], где проделан расчет реакции излучения в среде с отрицательным поглощением без учета пространственной дисперсии. Поскольку в этом случае имеются нарастающие волны, то ясно, что результат должен существенно зависеть от начальных условий; в подробно рассмотренном случае нулевых начальных условий раскачка колебаний осциллятора происходит при условии $\mu T \geq 1$, где μ — коэффициент нарастания, T — время.

Как известно [3,4], интенсивность излучения продольных волн в плазме в $(C/V_T)^3$ раз больше, чем интенсивность излучения поперечных волн (C — скорость света, V_T — тепловая скорость электронов в плазме). В этой связи представляет интерес обобщение результатов [2] на случай пространственной дисперсии, что и сделано в настоящей работе.

Рассмотрим изотропную плазму; поскольку нас интересуют лишь продольные волны, воспользуемся кулоновской калибровкой потенциалов электромагнитного поля и будем описывать среду комплексным оператором продольной диэлектрической проницаемости:

$$\hat{\varepsilon}_l'(\omega, \mathbf{k}) = \hat{\varepsilon}_l(\omega, \mathbf{k}) + i \frac{4\pi}{\omega} \hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k}). \quad (1)$$

Этот оператор имеет определенное числовое значение для процессов, зависящих от координат и времени по закону $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} \mp i\omega t)$, где \mathbf{k} — волновой вектор, \mathbf{r} — радиус-вектор. В поглощающей среде собственное значение оператора $\hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k})$ положительно или равно нулю во всем диапазоне частот и волновых чисел. В рассматриваемом случае мы будем считать, что в некоторой области частот и волновых чисел

$$\hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) \leq 0. \quad (2)$$

В такой среде знаки показателя преломления и поглощения для данных ω и \mathbf{k} оказываются различными, причем знак показателя поглощения для волны типа $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ отвечает не поглощению, а нарастанию.

Для удобства введем следующее обозначение:

$$-2\pi\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \alpha(\omega, \mathbf{k}). \quad (3)$$

Тогда в рассматриваемом случае $\alpha(\omega, \mathbf{k}) \geq 0$, а в поглощающей среде $\alpha(\omega, \mathbf{k}) < 0$.

В качестве примера рассмотрим частицу с зарядом e , движущуюся со скоростью

$$\mathbf{v} = v_0 \cos(\Omega t) \hat{\mathbf{z}}, \quad (4)$$

и рассмотрим работу над этой частицей со стороны создаваемого ею поля. За время T эта работа определяется выражением

$$A = \operatorname{Re} \int_0^T e V E dt. \quad (5)$$

Величина A , вообще говоря, может быть как положительной, так и отрицательной; $A < 0$ отвечает трению, $A > 0$ — раскачке колебаний частицы.

Уравнение для продольных волн в нашем случае имеет вид

$$\overset{\wedge}{\epsilon}_l(\omega, \mathbf{k}) \Delta \varphi = -4\pi\rho. \quad (6)$$

В декартовой системе координат с осью z вдоль направления скорости частицы

$$\rho = e \delta(x) \delta(y) \delta \left[z - \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \right]. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и переходя к пространственно-временным фурье-компонентам от обеих частей уравнения (6), получим

$$\overset{\wedge}{\epsilon}_l(n\Omega, \mathbf{k}) k^2 \varphi_{n\Omega, k} = \frac{e}{2\pi^2} J_n \left(k \frac{v_0}{\Omega} \cos \theta \right), \quad (8)$$

где J_n — функция Бесселя целого порядка, θ — угол между осью z и направлением волнового вектора. Свертывая это выражение по частоте, найдем

$$\varphi_k = \frac{l}{2\pi^2 k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n \left(k \frac{v_0}{\Omega} \cos \theta \right)}{\overset{\wedge}{\epsilon}_l(n\Omega, \mathbf{k})} e^{-in\omega t}. \quad (9)$$

Здесь учтено, что на бесконечности должны быть лишь уходящие волны, вследствие чего суммирование должно вестись лишь по положительным n . Выражение (9) представляет собой пространственную компоненту Фурье от вынужденного решения уравнения (6) с правой частью; для получения общего решения уравнения (6) к выражению (9) надо добавить решение этого уравнения без правой части, а именно, выражение

$$\sum_{j=1}^m \varphi_{k,j} e^{-i\omega_j t}, \quad (10)$$

где ω_j — корни дисперсионного уравнения

$$\overset{\wedge}{\epsilon}_l(\omega, \mathbf{k}) = 0 \quad (11)$$

(m — число корней этого уравнения, $\varphi_{k,j}$ — не зависящие от времени коэффициенты).

Для определения коэффициентов $\varphi_{k,j}$ в начальный момент необходимо задать либо потенциал поля и его производные по времени до ($m-1$)-го порядка включительно во всем пространстве, либо все пространственные фурье-компоненты этих величин. Мы используем второй способ задания начальных условий и примем, что в момент $t = 0$ все

пространственные фурье-компоненты потенциала и его производных по времени до $(m-1)$ -го порядка включительно равны нулю. При этом из (9) и (10) получим систему m — уравнений для определения коэффициентов $\varphi_{k,j}$, откуда найдем, что

$$\varphi_{k,j} = - \frac{e}{2\pi^2 k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n \left(k \frac{v_0}{\Omega} \cos \theta \right)}{\epsilon_l(n\Omega, k)} \frac{\Delta_j}{\Delta}. \quad (12)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \omega_1 & \dots & \dots & \omega_m \\ \vdots & & & \vdots \\ \omega_1^{m-1} & \dots & \dots & \omega_m^{m-1} \end{vmatrix}; \quad (13)$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_{j-1} & n\Omega & \omega_{j+1} & \dots & \omega_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{m-1}(\omega_{j-1})^{m-1}(n\Omega)^{m-1}(\omega_{j+1})^{m-1} \dots \omega_m^{m-1} \end{vmatrix}. \quad (14)$$

В сферической системе координат в пространстве волновых чисел k, θ, ψ

$$\varphi = \int \varphi_k e^{ikr} k^2 dk \sin \theta d\psi d\theta. \quad (15)$$

Поскольку скорость частицы направлена по оси z , то для вычисления работы нам нужна лишь z -компонент поля

$$E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \int \varphi_k e^{ikr} k^2 dk \sin \theta d\psi d\theta. \quad (16)$$

Дифференцируя под знаком интеграла и полагая затем

$$r = r \left\{ 0, 0, \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t) \right\} \quad (17)$$

(нас интересует лишь поле в точке, где находится частица), получим

$$E_z = - i \int \varphi_k e^{ik \frac{v_0}{\Omega} \cos \theta \sin(\Omega t)} k^3 dk \cos \theta \sin \theta d\psi d\theta. \quad (18)$$

Подставляя (4) и (18) в (5) и полагая $\epsilon'_l(\omega, k)$, а следовательно, и φ_k не зависящими от азимута ψ , будем иметь

$$A = \operatorname{Re} \left\{ -2\pi e v_0 i \int_0^T \cos(\Omega t) \int \varphi_k e^{ik \frac{v_0}{\Omega} \cos \theta \sin(\Omega t)} k^2 dk \cos \theta \sin \theta d\theta dt \right\}. \quad (19)$$

Без ограничения общности можно положить

$$\Omega T = 2\pi v, \quad (20)$$

где v — целое число. Используя представление

$$\cos \psi e^{is \sin \psi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s}{\beta} J_s(\beta) e^{is\psi}, \quad (21)$$

получающееся посредством дифференцирования из

$$e^{i\beta \sin \phi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\beta) e^{is\phi} \quad (22)$$

(см. [5]), изменим в (19) порядок интегрирования и вычислим интегралы по t :

$$\int_0^T \cos \Omega t e^{i\beta \sin(\Omega t) - i\omega_j t} dt = \frac{T}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s}{\beta} J_s(\beta) \int_0^{2\pi} e^{is\psi - i\eta\psi} d\psi = \frac{nT}{\beta} J_n(\beta); \quad (23)$$

$$\int_0^T \cos \Omega t e^{i\beta \sin(\Omega t) - i\omega_j t} dt = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s}{\beta} J_s(\beta) \frac{e^{-i\omega_j T} - 1}{i(s\Omega - \omega_j)}; \quad (24)$$

$$\beta = k \frac{v_0}{\Omega} \cos \theta. \quad (25)$$

При этом

$$A = \operatorname{Re}(A_1 + A_2) \left\{ -\frac{e^2 \Omega T i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} n \int \frac{[J_n(\beta)]^2}{\epsilon'_l(n\Omega, \mathbf{k})} dk \sin \theta d\theta + \right. \\ \left. + \frac{e^2 \Omega}{\pi} \sum_{j=1}^m \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} s \int \frac{J_n(\beta) J_s(\beta)}{\epsilon'_l(n\Omega, \mathbf{k})} \frac{\Delta_j}{\Delta} \frac{e^{-i\omega_j T} - 1}{s\Omega - \omega_j} dk \sin \theta d\theta \right\}. \quad (26)$$

Легко убедиться, что знак первого выражения в (26), которое мы обозначили через $\operatorname{Re}A_1$, зависит от знака проводимости: $\operatorname{Re}A_1 > 0$ при $\alpha > 0$ и $\operatorname{Re}A_1 < 0$ при $\alpha < 0$. Это видно сразу же, если домножить числитель и знаменатель под интегралом в A_1 на выражение, комплексно-сопряженное знаменателю. $\operatorname{Re}A_1$ — это вклад в реакцию излучения, обусловленный вынужденным решением уравнения (6) с правой частью. В нашем случае, т. е. при $\alpha(n\Omega, \mathbf{k}) > 0$, $\operatorname{Re}A_1$ определяет приращение энергии частицы, т. е. раскачку колебаний. В случае же малого положительного поглощения или в прозрачной среде $\operatorname{Re}A_1$ с противоположным знаком есть энергия, излучаемая частицей, в то время как $\operatorname{Im}A_1$ определяет рефрактанс излучателя. Как видно из (26), $\operatorname{Re}A_1$ линейно растет с ростом T .

Второе слагаемое в (26) есть реакция излучения, обусловленная свободным полем, т. е. решением уравнения (6) без правой части. Из (26) следует, что при достаточно больших T , таких, что $|\operatorname{Im}\omega_j T| \gg 1$ (когда в сумме по j надо учитывать лишь члены с $\operatorname{Im}\omega_j > 0$) $\operatorname{Re}A_2$ осциллирует во времени, экспоненциально возрастаая по абсолютной величине (знак $\operatorname{Re}A_2$ может при этом быть и постоянным, если для указанных номеров j $\operatorname{Re}\omega_j \approx 0$). При достаточно малых T , когда выполнено обратное неравенство $|\operatorname{Im}\omega_j T| \ll 1$ в сумме по j необходим учет всех членов; при этом $\operatorname{Re}A_2$ осциллирует или остается знакопостоянным; во втором случае необходимо наличие корней характеристического уравнения (11) с $\operatorname{Im}\omega_j < 0$. Если $\operatorname{Re}\omega_j T \neq 2\pi v$ и $\operatorname{Re}\omega_j \neq 0$, то возможно, но не обязательно, что $\operatorname{sgn} \operatorname{Re}A_2 = \text{const}$. В этом случае на частотах $s\Omega = \operatorname{Re}\omega_j$ знак полной реакции излучения будет определяться знаком $\operatorname{Re}A_2$; следовательно, A может быть отрицательным, хотя поглощение и отрицательно, аналогично тому, что получено в [2].

Отметим, что суммирование по n в (26) необходимо вести не с $n=0$, а с $n=1$.

В случае малой пространственной дисперсии продольная диэлектрическая проницаемость плазмы может быть представлена в виде

$$\epsilon'_l = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{3V_T^2}{\omega^2} k^2 - i2 \frac{\alpha}{\omega}. \quad (27)$$

Здесь ω_0 — плазменная частота электронов, V_T — их тепловая скорость. Для простоты будем считать $\alpha = \text{const}$. Как нам указал А. А. Рухадзе, даже в изотропной плазме при наличии соударений может иметь место неустойчивость, т. е. реализуется случай отрицательного поглощения. Если эффективное число соударений $\nu(V) = \alpha V^n$, а равновесная функция распределения имеет вид $f_0 \sim V^q e^{-\beta V^2}$, $q \neq 0$, то для $|n| > 3$ имеет место неустойчивость.

Используя представление дельта-функции в форме (8) в [2], найдем

$$\operatorname{Re} A_1 = \frac{e^2 V_0^2 \Omega^2 T \sqrt{\epsilon_0}}{36 \sqrt{3} V_T^3}; \quad \sqrt{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}. \quad (28)$$

Этот результат получен в дипольном приближении, хотя соответствующий интеграл легко вычисляется и в общем виде; в результате получается сумма квадратов бесселевых функций. Правда, для достаточно высоких номеров n результат будет не совсем строгим, ибо стоящая в числителе функция Бесселя не будет медленно меняющейся (см. [2]). Как и следовало ожидать [3, 4], выражение (28) превышает соответствующее выражение в [2] по порядку величины в $(C/V_T)^3$ раз (C — скорость света).

В дипольном приближении $n = 1$, $s = \pm 1$ второе выражение в (26) имеет вид

$$\operatorname{Re} A_2 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^2 \Omega}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int \frac{3^2 \Delta_j 2 \omega_j (e^{-i \omega_j T} - 1)}{4 \epsilon'_l(\Omega, k) \Delta(\Omega^2 - \omega_j^2)} dk \sin \theta d\theta \right\}. \quad (29)$$

Для ϵ'_l вида (27)

$$\omega_{1,2} = i\alpha \pm \sqrt{-\alpha^2 + \omega_0^2 + 3V_T^2 k^2}; \quad (30)$$

$$\Delta = -2\sqrt{-\alpha^2 + \omega_0^2 + 3V_T^2 k^2}; \quad \Delta_1 = i\alpha - \Omega - \sqrt{-\alpha^2 + \omega_0^2 + 3V_T^2 k^2}; \\ \Delta_2 = \Omega - i\alpha - \sqrt{-\alpha^2 + \omega_0^2 + 3V_T^2 k^2}. \quad (31)$$

Поскольку $\operatorname{Im} \omega_{1,2} > 0$, то из сказанного ранее ясно, что $\operatorname{Re} A_2$ будет осциллировать, возрастаая по абсолютной величине при любых $T > 1/\alpha$.

При $\alpha T \gg 1$ в подынтегральном выражении можно пренебречь единицей по сравнению с экспонентой и интеграл может быть вычислен по методу стационарной фазы; однако получающееся выражение довольно громоздко и поэтому мы его не приводим. При малых T , когда $\alpha T \ll 1$, интеграл может быть вычислен аналогично тому, как было получено выражение (28). Действительно, в этом случае в интервале $|k - k_0| \sim \sim \sigma / V \sqrt{3} V_T \sqrt{\epsilon_0}$, где $k_0 = \sqrt{\epsilon_0} \Omega / \sqrt{3} V_T$, $\sqrt{\epsilon_0} = \sqrt{1 - \omega_0^2 / \Omega^2}$, экспонента меняется лишь в αT раз и (29) может быть представлено в виде интеграла от произведения медленно меняющейся функции на дельта-функцию. В итоге, пренебрегая малыми членами, получим

$$\operatorname{Re} A_2 = - \frac{e^2 V_0^2 \Omega^2 \sqrt{\epsilon_0}}{36 \sqrt{3} V_T^3 \alpha} (e^{i\alpha T} - 1). \quad (32)$$

Отсюда видно, что $| \operatorname{Re} A_2 | > \operatorname{Re} A_1$. Следовательно, в случае, когда $T < 1/\alpha$, знак реакции излучения отвечает трению даже в среде с отрицательным поглощением, аналогично тому, как это было получено в [2].

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность В. Л. Гинзбургу, а также А. А. Рухадзе

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 36, 1823 (1959).
- 2 В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 43, 1865 (1962).
- 3 В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 41, 1971 (1961).
- 4 А. А. Андронов, Г. В. Городинский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 234 (1962).
- 5 Д. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 февраля 1964 г.

ON RADIATION (FRICTION) FOR THE LONGITUDINAL WAVE

Gorodinskii G. B.

The calculation has been carried out of radiation (friction) in the medium with negative absorption in the presence of spatial dispersion. In such medium the increasing of oscillator oscillations is shown to take place, being $(C/V_T)^3$ more intensive in a certain range of variation of V_T than that in the medium without spatial dispersion.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОМОДУЛЯЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРА НА ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

В. И. Беспалов, А. В. Гапонов

Рассмотрено влияние спонтанного излучения на поведение системы двухуровневых объектов с различными временами продольной (T_1) и поперечной (T_2) релаксации, находящихся в одномодовом резонаторе ($T_2 \ll T_1$). Показано, что спонтанное излучение приводит в среднем к более быстрому затуханию модуляции излучения во время переходного режима. Найдена максимальная мощность в «пичках» излучения лазера на твердом теле, величина которой логарифмически связана с интенсивностью спонтанного излучения.

Уже в первых экспериментальных работах, посвященных исследованию оптических квантовых генераторов на твердом теле, было обнаружено [1], что в большинстве случаев генерируемые ими колебания модулированы по амплитуде, причем эта модуляция заведомо не связана с изменением интенсивности излучения, используемого для «подсветки» рабочего вещества. Наличие автомодуляции особенно характерно для рубинового лазера, излучение которого представляет собой, как правило, последовательность вспышек («пичков»), разделенных относительно длительными интервалами, в течение которых излучение практически отсутствует. Последовательность пичков при низких температурах близка к периодической, а поле между пичками остается не малым; однако с повышением температуры ($T \geq 150^{\circ}\text{K}$) периодичность нарушается, так что амплитуды пичков и интервалы между ними становятся в известной степени случайными.

К сожалению, удовлетворительного объяснения незатухающей автомодуляции излучения рубинового лазера до настоящего времени не дано*. Однако это не исключает возможности обсуждения некоторых механизмов, нарушающих периодический характер автомодуляции и приводящих к случайному разбросу в последовательности пичков. В одномодовой модели лазера основной причиной хаотической автомодуляции излучения лазера является, по-видимому, случайное электромагнитное поле в резонаторе, за возникновение которого ответственно спонтанное излучение. В настоящей работе влияние спонтанного излучения рассмотрено на примере системы двухуровневых объектов, находящихся в «одномодовом» резонаторе и обладающих различными временами продольной (T_1) и поперечной (T_2) релаксации; T_1 здесь характеризует

* Махов [2] ввел в обычные уравнения баланса (уравнения (1) настоящей работы) нелинейный член которой может быть обусловлен электронно-ядерным взаимодействием, и получил незатухающую автомодуляцию. Конкретный вид добавочного слагаемого ($n^{1+\epsilon}$, $\epsilon \ll 1$) в [2] по существу не обоснован. Следует также отметить возможность незатухающей модуляции излучения в модели, описываемой более точными уравнениями (9), учитывающими недиагональные члены матрицы плотности при $T_2 > T_p$ (см. работы [3, 4]). Однако допущение $T_2 > T_p$ для лазера на рубине при комнатной температуре не может быть оправдано даже с учетом неоднородного уширения линии спонтанного излучения. Более сложная модель релаксационных процессов, учитывающая адиабатическое взаимодействие активных частиц с фононами решетки, также не приводит в «одномодовом» приближении к незатухающей автомодуляции [5].

время жизни на верхнем уровне, а T_2 — время релаксации дипольного момента.

1. ПРОЦЕСС УСТАНОВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ЛАЗЕРЕ БЕЗ УЧЕТА ФЛУКТУАЦИЙ

Простейшая модель оптического квантового генератора (рабочее вещество с $T_2 \ll T_1$ находится в однородном высокочастотном поле «одномодового» резонатора, время затухания которого достаточно велико: $T_p \gg T_2$) без учета флуктуаций может быть описана уравнениями, представляющими собой соотношение баланса между энергией поля (числом фотонов) в резонаторе $E/2$ и разностью населенностей рабочих уровней N [6]:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= BNE - E/T_p; \\ \frac{dN}{dt} &= -BNE + N_0 \left(P_{13} - \frac{1}{T_1} \right) - \frac{N}{T_{\text{эфф}}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где BE — вероятность индуцированного перехода, N_0 — полное число активных молекул, а эффективное время релаксации $T_{\text{эфф}} = T_1(T_1 P_{13} + 1)^{-1}$ зависит от вероятности перехода на «уровень подсветки» P_{13} , пропорциональной интенсивности источника возбуждения*. Общее исследование уравнений (1) проводилось в ряде работ (см., например, [7,8]) как численными методами, так и методами качественной теории. Поэтому мы рассмотрим здесь лишь частный случай (соответствующий определенной области параметров), когда приближенное решение (1) может быть записано в аналитической форме и интересующие нас особенности этого решения достаточно очевидны.

В безразмерных переменных $m_0 = BT_{\text{эфф}}E$, $n_0 = BT_pN$ уравнения (1) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{m}_0 &= G(n - 1) m_0; \\ \dot{n}_0 &= \alpha - (m_0 + 1) n, \end{aligned} \quad (2)$$

где $G = T_{\text{эфф}}/T_p$, $\alpha = N_0 BT_p T_{\text{эфф}} (P_{13} - T_1^{-1})$ — параметр, характеризующий интенсивность механизма возбуждения («подсветки»), а точка означает дифференцирование по безразмерному времени $\tau = t/T_{\text{эфф}}$.

Система (2) имеет два положения равновесия: (I) $n_0 = \alpha$, $m_0 = 0$ и (II) $n_0 = 1$, $m_0 = m_{\text{ст}} = \alpha - 1$ (рис. 1). При $\alpha < 1$ устойчиво первое** из них, соответствующее отсутствию когерентного излучения (устойчивый узел); при $\alpha > 1$ точка I неустойчива (седло), а II — устойчива (узел при $G < \alpha^2/4 (\alpha^2 - 1)$ и фокус при $G > \alpha^2/4 (\alpha^2 - 1)$). Таким образом, в выбранных переменных условие самовозбуждения имеет вид $\alpha > 1$; в дальнейшем только этот случай и будет рассматриваться.

В реальных условиях (в частности, для рубинового лазера) $\alpha \sim 1 \div 10^2$, $G \sim 10^4 \div 10^5$. При таких значениях параметров скручивание фазовых траекторий к положению равновесия на плоскости проходит медленно: в линейном приближении

* Предполагается, что время жизни на этом уровне $T_3 \ll T_1$. Для розового рубина, как известно, $T_3 \approx 5 \cdot 10^{-8}$ сек, $T_1 \approx 5 \cdot 10^{-3}$ сек.

** В области $m_0 > 0$, которая только и имеет физический смысл, в случае $\alpha < 1$ второго состояния равновесия ($n_0 = 1$, $m_0 = \alpha - 1$) нет.

$$m_0 - m_{\text{ст}} \simeq \frac{G(\alpha - 1)}{i\Omega'} (n_0 - 1) \sim e^{-\gamma'\tau + i\Omega'\tau},$$

где при $G \gg \alpha^2/4(\alpha^2 - 1)$ $\gamma' \simeq \alpha/2$, $\Omega \simeq \sqrt{G(\alpha - 1)}$. Отметим также, что наклон фазовых траекторий

$$\frac{dm_0}{dn_0} = G \frac{(n_0 - 1) m_0}{\alpha - (m_0 + 1) n_0} \sim G \gg 1$$

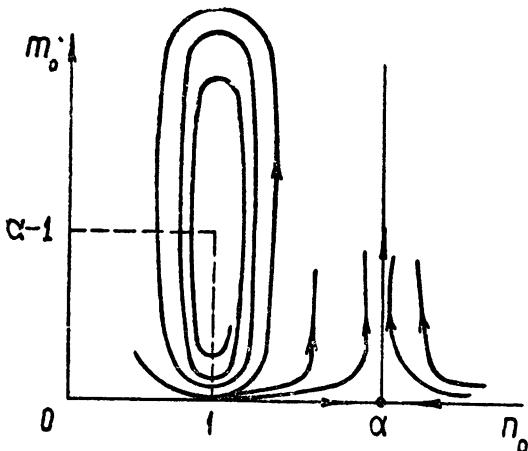


Рис. 1.

велик всюду, за исключением окрестностей прямых $m_0 = 0$ и $n_0 = 1$ (рис. 1). Отсюда следует, что везде, кроме малой области вблизи положения равновесия, движение может быть представлено как последовательность чередующихся этапов «подсветки» (движение вдоль оси $m_0 = 0$ от $n_0 < 1$ до $n_0 > 1$) и «излучения» (когда m_0 быстро нарастает до $m_0 \gg m_{\text{ст}}$ и затем быстро убывает, а n_0 изменяется от $n_0 > 1$ до $n_0 < 1$). Это обстоятельство существенно упрощает количественное исследование движения.

Более того, если ограничиться областью $(n_0 - 1) \ll 1$, где затухание мало даже в нелинейном режиме, то основные характеристики движения (форма пичков, период и т. д.) могут быть найдены в консервативном приближении, а затухание учтено с помощью метода возмущений.

Полагая $n_0 - 1 = \eta_0$, $\eta_0 \ll 1$ и пренебрегая η_0 во втором из уравнений (2), получим

$$\dot{m}_0 = G\eta_0 m_0, \quad \dot{\eta}_0 = \alpha - (m_0 + 1), \quad (3)$$

откуда для траектории, выходящей из точки $m_0 = m_{\text{нач}}$, $\eta_0 = \eta_{\text{нач}}$, имеем

$$G(\eta_0^2 - \eta_{\text{нач}}^2) = 2 \left[m_{\text{ст}} \ln \frac{m_0}{m_{\text{нач}}} - (m_0 - m_{\text{нач}}) \right];$$

$$\tau - \tau_{\text{нач}} = \int_{\eta_{\text{нач}}}^{\eta_0} [m_{\text{ст}} - m_0(\eta_0)]^{-1} d\eta_0. \quad (4)$$

Из (4a) нетрудно найти высоту пичков

$$m_{0 \max} = \frac{1}{2} G \eta_{0 \max}^2 \quad (5)$$

(здесь $\eta_{0 \max}$ — максимальное значение η_0) и связь наибольшего значения m_0 с наименьшим:

$$m_{0 \min} = m_{0 \max} e^{-m_{0 \max}/m_{\text{ст}}},$$

$$m_{0 \max} \simeq m_{\text{ст}} \left\{ \ln \frac{m_{\text{ст}}}{m_{0 \min}} + \frac{\ln \ln (m_{\text{ст}}/m_{0 \min})}{1 - [\ln(m_{\text{ст}}/m_{0 \min})]^{-1}} \right\}. \quad (6)$$

Формула (4б) позволяет оценить длительность интервалов подсветки T_c и длительность пичков $T_{изл}$ в существенно нелинейном режиме, когда $T_{изл} \ll T_c$:

$$T_c \approx T_{\text{эфф}} \frac{2\eta_{0 \max}}{\alpha - 1}, \quad T_{изл} \approx \frac{2T_{\text{эфф}}}{G\eta_{0 \max}} \ln \frac{2G\eta_{0 \max}}{m_{ct}}. \quad (7)$$

Полный период колебаний T при этом приближенно равен T_c . В неконсервативном приближении основные характеристики движения, как уже было отмечено, сохраняются; для изменения высоты пичков во времени при $T \approx T_c$ нетрудно получить

$$m_0 \max \approx m_{\text{нач max}} e^{-\frac{2}{3} \alpha \tau}, \quad (8)$$

т. е. в рассматриваемой области параметров затухание нелинейных колебаний не зависит от их амплитуды и того же порядка, что и в линейном приближении.

Характерной особенностью процесса установления колебаний, описываемого уравнениями (2) или (3), является наличие глубоких провалов интенсивности когерентного излучения в интервалах между пичками. Например, при $\alpha \sim 10$, $\eta_{0 \max} \sim 0,1$, $G \sim 10^5$ получим $m_0 \max \sim 5 \cdot 10^2 \gg m_{ct} \approx 10$, а минимальное значение $m_{0 \min} \sim 10^{-19}$. Напряженность поля в моменты, соответствующие минимуму излучения, может, таким образом, оказаться существенно ниже уровня флюктуационного поля в резонаторе (спонтанное некогерентное излучение m_Φ в полосе резонатора в использованных безразмерных единицах порядка 10^{-8}). Отсюда следует, что флюктуации в лазере определяют не только самое начало процесса установления колебаний, но оказывают существенное влияние на всю последовательность пичков: от уровня флюктуаций зависит как момент появления и величина первого пика излучения (рис. 2), так и интервалы до следующих пичков, а следовательно, и их величины. Случайный разброс последовательности пичков сохраняется, очевидно, до тех пор, пока благодаря затуханию не окажется $m_{0 \min} \gg m_\Phi$.

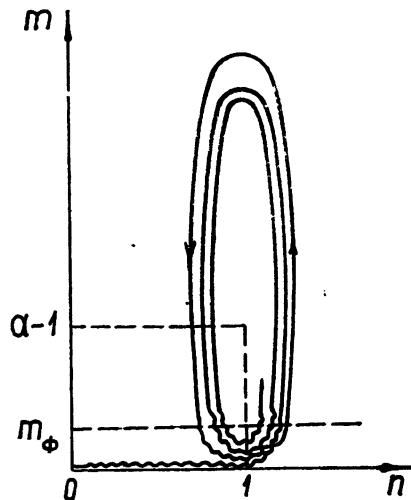


Рис. 2.

2. УСТАНОВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В ЛАЗЕРЕ ПРИ НАЛИЧИИ СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Моменты второго порядка величин, характеризующих поведение двухуровневой системы с учетом флюктуационных процессов, описываются уравнениями (7.13)–(7.16), приведенными в работе [9]. Из них следует, что по сравнению со спонтанным излучением влиянием всех других флюктуационных процессов в интересующем нас случае можно пренебречь. Для рассматриваемой системы с $T_2 \ll T_p$, T_1 эти уравнения можно переписать в виде

$$\dot{\bar{m}} = G[(\bar{n} - 1)\bar{m} + \varepsilon]; \quad (9a)$$

$$\bar{n} = \alpha - (\bar{m} + 1) \bar{n}, \quad (96)$$

где \bar{m} и \bar{n} — усредненные (по ансамблю) значения величин m и n , найденных с учетом флуктуаций.

Нетрудно убедиться в том, что уравнения (8) не имеют положения равновесия при $\bar{n} > \bar{m} \geq 0$ (аналогичного состоянию равновесия системы (2) $n_0 = \alpha$, $m_0 = 0$) и фазовая траектория, выходящая из точки $m_0 = 0$, $n = 0$, не заходит в область больших n . Из приближенного решения системы (9) следует, что для этой траектории

$$(n - 1)_{\max}^2 \simeq \frac{2\bar{m}_{\max}}{G} \simeq \frac{2(\alpha - 1)}{G} \ln \frac{\alpha - 1}{M},$$

где $M = \varepsilon \sqrt{\pi G / 2(\alpha - 1)} = \bar{m}_{\min}(n = 1)$ — энергия поля в резонаторе в момент точной компенсации потерь индуцированным испусканием (при $m_{\text{нач}} = 0$ и $n_{\text{нач}} = 0$). Полагая, например, $N_0 = 10^{19}$, $BT_p \simeq 10^{-17}$, $T_{\text{эфф}} \simeq 10^{-3}$, $G \simeq 10^6$, $\alpha \simeq 10$, $\omega = 2.5 \cdot 10^{15}$, получим $M = 10^{-8}$, $(n - 1)_{\max} \simeq 6 \cdot 10^{-2}$, $\bar{m}_{\max} \simeq 200$. Таким образом, большие превышения разности населенностей над единицей практически недостижимы, а максимальная мощность излучения в первых пичках логарифмически зависит от величины M , пропорциональной интенсивности спонтанного излучения. Для рассматриваемого случая мощность излучения в первых пичках порядка нескольких киловатт:

$$\bar{P}_{\max} \simeq \frac{\bar{m}_{\max} \hbar \omega}{BT_p T_{\text{эфф}}} \simeq 5 \cdot 10^{10} \text{ эрг} \cdot \text{сек}^{-1} = 5 \text{ квт}.$$

Для более детального исследования статистических характеристик излучения воспользуемся тем обстоятельством, что, как показывает предыдущее рассмотрение, движение рассматриваемой системы в режиме с пичками может быть представлено в виде последовательности чередующихся этапов подсветки (движения вблизи $m = 0$, описываемого линейными уравнениями) и «излучения» (движения в области $m \gg m_{\Phi}$, описываемого уравнениями (2)). Сшивание соответствующих решений должно производиться в области $m_{\Phi} \ll m \ll 1$ (рис. 2). Поскольку флуктуации существенны только на этапах подсветки, описываемых линейными уравнениями, задача в такой постановке существенно упрощается.

1. На этапах «подсветки» приближенные уравнения движения системы можно записать в виде

$$\dot{a} = \frac{1}{2} G \{(n - 1) a + f(\tau)\}; \quad (10a)$$

$$\dot{n} = \alpha - 1, \quad (10b)$$

где a — комплексная амплитуда поля в резонаторе, причем $aa^* = m$, $\langle aa^* \rangle = \bar{m}$, $\langle a \rangle \langle a^* \rangle = m_0$, $f(\tau) = f_1(\tau) + if_2(\tau)$ — случайная функция, пропорциональная величине флуктуационной части поляризации (намагниченности) активного вещества. Уравнение (10a) можно получить, используя результаты работы [10]. Ввиду его очевидности (ср. с (9))^{*} соответствующие вычисления здесь опущены.

Так как уравнение для $\langle a \rangle$ совпадает с (10a) при $f(\tau) \equiv 0$ [9], то, следовательно, $\langle f(\tau) \rangle = 0$. Приближенные выражения для функций

* Ниже (см. (13)) показано, что из (10a) следует формула (9a).

корреляции $B_{1k}(\xi) = \langle f_1(\tau) f_k(\tau + \xi) \rangle$ случайной силы $f(\tau) = f_1(\tau) + i f_2(\tau)$ можно найти, следуя [10]:

$$B_{11} = B_{22} = \frac{b_0^2}{2} \exp\left(-\frac{T_{\text{эфф}}}{T_2} |\xi|\right), \quad B_{12} = B_{21} = 0. \quad (11)$$

Для определения величины b_0^2 найдем предварительно решение системы (10), которое представляется в виде

$$n - 1 = \eta = (\alpha - 1) \tau;$$

$$a = \int_{-\tau_0}^{\tau} f(\xi) \exp\left[\frac{G(\alpha-1)}{4} (\tau^2 - \xi^2)\right] d\xi + a_{\text{нач}} \exp\left[\frac{G(\alpha-1)}{4} (\tau^2 - \tau_0^2)\right], \quad (12)$$

где $a_{\text{нач}} = a(\tau = -\tau_0)$ — амплитуда поля в начале этапа подсветки. Умножая (10а) на a^* , складывая с комплексно сопряженным выражением и затем усредняя с учетом (11) и (12), найдем*

$$\dot{\bar{m}} = G [(\bar{n} - 1) \bar{m} + 2b_0^2 T_2 / T_{\text{эфф}}]. \quad (13)$$

Сравнивая (13) и (8а), получим

$$b_0^2 = \epsilon T_{\text{эфф}} / 2T_2. \quad (14)$$

Перейдем к исследованию статистических свойств решения. Так как область интегрирования в (12) значительно больше области корреляции величин f_1 и f_2 ($T_2 \ll T_p$), то в силу центральной предельной теоремы мнимая и действительные части величины a при $\tau \geq 0$ распределены по нормальному закону. Введя полярные координаты $a = \rho e^{i\varphi}$ ($\rho^2 = m$) и обозначая $\langle a \rangle = \rho e^{i\bar{\varphi}}$ ($\rho^2 = m_0$), $\bar{\varphi} = \varphi - \bar{\varphi}$, запишем совместную плотность вероятности величин ρ и ψ в виде

$$W(\rho, \psi, \tau, \rho_{\text{нач}}, \tau_0) = \frac{\rho}{\pi D^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2 - 2\rho\bar{\rho}\cos\psi + \bar{\rho}^2}{D^2}\right\}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} D^2 &= \langle aa^* \rangle - \langle a \rangle \langle a^* \rangle = \bar{m} - m_0 = \\ &= M \{ \Phi [\sqrt{G(\alpha-1)} \tau] + \Phi [\sqrt{G(\alpha-1)} \tau_0] \} \exp\left\{\frac{G(\alpha-1)}{2} \tau^2\right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\bar{\rho} = \rho_{\text{нач}} \exp\left\{\frac{G(\alpha-1)}{4} (\tau^2 - \tau_0^2)\right\}, \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

Интегрируя (15) по ψ , найдем плотность вероятности модуля амплитуды поля в резонаторе в момент τ :

$$W(\rho, \tau; \rho_{\text{нач}}, \tau_0) = \frac{2\rho}{D^2} I_0\left(\frac{2\rho\bar{\rho}}{D^2}\right) \exp\left\{-\frac{\rho^2 + \bar{\rho}^2}{D^2}\right\}, \quad (17)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Изменение определяемой (17) плотности вероятности с ростом τ связано как с влиянием спонтанного излучения, так и динамическим

* Величиной $(\bar{n} - n) m$ в уравнении (13) можно пренебречь ввиду малости m на этапах подсветки.

движением системы. Для того, чтобы исключить последнее, перейдем в (17) к переменным

$$\rho_+ = \rho \exp \left\{ - \frac{G(\alpha - 1)}{4} \tau^2 \right\}, \quad \rho_- = \bar{\rho} \exp \left\{ - \frac{G(\alpha - 1)}{4} \tau^2 \right\}, \quad (18)$$

что эквивалентно возвращению на прямую $n = 1$ по динамической (без учета флюктуаций) фазовой траектории. Учитывая, что $W(x) = W(y(x))dy/dx$, из (17) найдем

$$W(\rho_+, \tau; \rho_-, \tau_0) = \frac{2\rho_+}{MZ} I_0 \left(\frac{2\rho_+ \rho_-}{MZ} \right) \exp \left\{ - \frac{\rho_+^2 + \rho_-^2}{MZ} \right\}, \quad (19)$$

где

$$Z = \Phi [\sqrt{i(\alpha - 1)\tau}] + \Phi [\sqrt{G(\alpha - 1)\tau_0}].$$

Из (19) следует, что W зависит от τ, τ_0 только через функцию Z , которая, начиная с $\tau, \tau_0 > [G(\alpha - 1)]^{1/2}$, мало отличается от 2. Следовательно, при больших значениях τ и τ_0 спонтанное излучение оказывает малое влияние на характеристики системы. Так как по предположению сшивание решений должно пресходить в той области, где флюктуации можно не учитывать, то, следовательно, при сшивании траекторий необходимо в (19) положить $Z(\tau, \tau_0) = 2$. В этом случае

$$W(\rho_+, \rho_-) = \frac{\rho_+}{M} I_0 \left(\frac{\rho_+ + \rho_-}{M} \right) \exp \left\{ - \frac{\rho_+^2 + \rho_-^2}{2M} \right\}. \quad (20)$$

Таким образом, влияние спонтанного излучения в конечном итоге эквивалентно тому, что при $n = 1$ происходит перескок с одной динамической фазовой траектории ($\rho = \rho_-, n = 1$) на другую ($\rho = \rho_+, n = 1$), причем плотность вероятности значений ρ_- при заданном ρ_+ определяется соотношением (20). Переходя к интенсивности поля в резонаторе $m_- = \rho_-^2$ и $m_+ = \rho_+^2$, получим

$$W(m_+, m_-) = \frac{1}{2M} I_0 \left(\frac{\sqrt{m_- m_+}}{M} \right) \exp \left(- \frac{m_+ + m_-}{2M} \right). \quad (21)$$

2. На этапах «излучения» движение системы описывается уравнениями (2), решение которых найдено и исследовано в разделе 1. Полученные там формулы позволяют по известным начальным значениям $m_{\text{нач}}$ и $n_{\text{нач}}$ найти все характеристики пичков. В рассматриваемом случае удобно оперировать с $m_{\text{нач}} = m_+$ при $n = 1$, так как именно эта величина входит в соотношение (21).

Интенсивность излучения в максимуме пичков, длительность пичков и интервалы между ними могут быть выражены через $m_{\text{нач}} = m_+$ с помощью формул (6), (7). Для того, чтобы в дальнейшем иметь возможность изучать характеристики после-

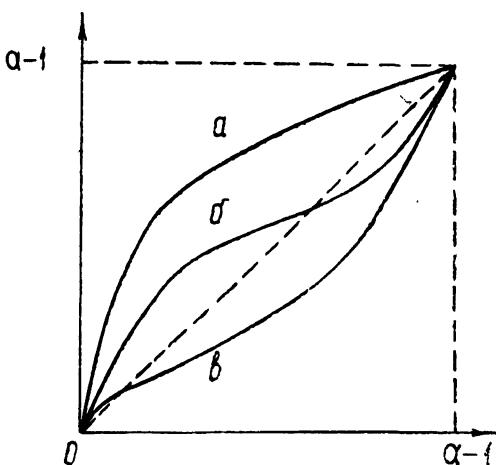


Рис. 3.

довательности пичков, необходимо предварительно найти последовательности значений m_+ . Преобразование предыдущего значения m_+ в последующее происходит, как легко видеть из сказанного, в два этапа: (1) динамическое преобразование $m_+ \rightarrow m_-$, (2) статистическое преобразование $m_- \rightarrow m_+$. Закон статистического преобразования определяется формулой (21). Динамическую связь $m_- = \psi(m_+)$ можно найти, используя результаты раздела 1. Это соотношение может быть представлено в виде кривой, изображенной на рис. 3 (кривая а). Если имеет место периодическая автомодуляция*, то связь $(m_- = \psi(m_+))$ можно качественно изобразить в виде кривой б на рис. 3. Ниже будут рассмотрены оба случая.

3. ИНТЕНСИВНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ В МАКСИМУМЕ ПЕРВОГО ПИЧКА

В начале раздела 2 было найдено среднее значение интенсивности излучения в максимуме первого пичка. Здесь мы остановимся на отыскании ее функции распределения. Полагая в (21) $m_- = 0$, получим плотность вероятности начальных значений m_{1+} :

$$W(m_{1+}) = \frac{1}{2M} \exp\left(-\frac{m_{1+}}{2M}\right). \quad (22)$$

Интегрируя (22) в пределах $0 \leq m_{1+} \leq m_{1+}^0$, найдем функцию распределения начальных значений:

$$P(m_{1+} < m_{1+}^0) = 1 - \exp\left(-\frac{m_{1+}^0}{2M}\right). \quad (23)$$

Учитя связь (6) между m_{\min} и m_{\max} , из (23) получим функцию распределения интенсивности в максимуме первых пичков:

$$P(m_{1\max} < m_{1\max}^0) = \exp\left[-\frac{m_{1\max}^0}{2M} \exp\left(-\frac{m_{1\max}^0}{m_{ct}}\right)\right]. \quad (24)$$

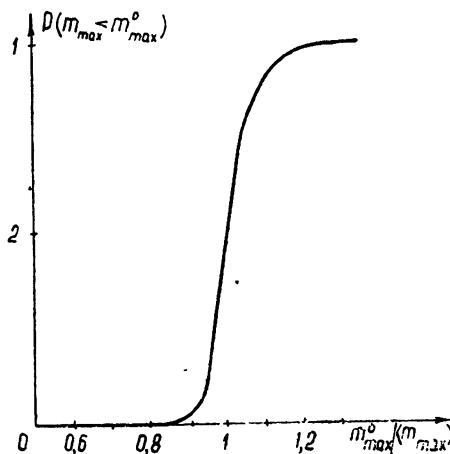


Рис. 4.

* Оставляя в стороне вопрос о существовании и причинах периодической автомодуляции в одномодовой модели лазера, отметим, что такая автомодуляция довольно может наблюдаться в лазере с положительной обратной связью на элемент, меняющий добротность резонатора.

Функция (24) для значений $m_{\text{ср}}/2M \sim 10^7 \div 10^9$ приведена на рис. 4. Из кривой следует, что для приведенных выше параметров системы (α , G и т. д.) интенсивность в максимуме первого пика с вероятностью $\sim 0,9$ отличается от среднего значения ($P_1 \sim 5 \text{ квт}$) не более чем на 10%, т. е. дисперсия максимальной интенсивности первых пиков не велика.

4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПИЧКОВ

О влиянии спонтанного излучения на характеристики последовательности пиков можно судить по преобразованию m_- в m_+ . Найдя вероятность того, что m_+ меньше (или больше) m_- , можно сказать о том, приводят ли флуктуационные эффекты к затуханию или возрастанию амплитуды пиков. Функция $P(m_+ < m_-)$ дается интегралом

$$P(m_+ < m_-) = \frac{1}{2M} \int_0^{m_-} I_0 \left(\frac{\sqrt{m_+ m_-}}{M} \right) \exp \left(-\frac{m_+ + m_-}{2M} \right) dm_+. \quad (25)$$

Результаты численного интегрирования приведены на рис. 5. Полученная кривая показывает, что всюду $P(m_+ < m_-) < 0,5$, т. е. более вероятно, что последующий пик излучения будет меньше пика, получившегося бы при отсутствии спонтанного излучения. Следовательно, спонтанное излучение приводит к появлению дополнительного «статистического» затухания, ускоряющего скручивание фазовых траекторий к положению равновесия.

Более полно о статистических характеристиках последовательности пиков можно сказать по результатам совместного рассмотрения динамического и статистического движения системы. Однако такое рассмотрение

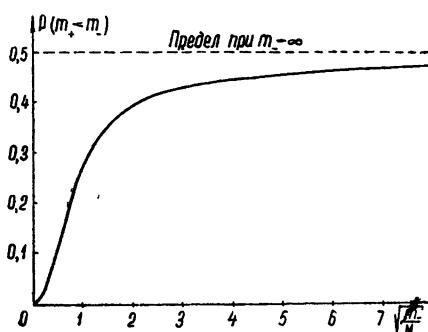


Рис. 5.

рение для функций $m_- = \psi(m_+)$, изображенных на рис. 3, провести не удается. Учитывая, что флуктуации существенны лишь при $m_- \leq M$, можно в этой области кривую α на рис. 3 аппроксимировать прямой

$$m_- = \gamma m_+, \quad (26)$$

причем для затухающей последовательности пиков $\gamma > 1$. В этом приближении легко получить плотность вероятности для любого члена последовательности m_{n+} , а с учетом соотношения (6) — и для последовательности $m_{n \text{ max}}$. Плотность вероятности m_{1+} дается формулой (22). Учитывая (26), найдем

$$W(m_{2-}) = \frac{1}{2M\gamma} \exp \left(-\frac{m_{2-}}{2M\gamma} \right). \quad (27)$$

Плотность вероятности m_{2+} определяется соотношением

$$W(m_{2+}) = \frac{1}{4M^2\gamma} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{m_{2-}}{2M\gamma} \right) I_0 \left(\frac{\sqrt{m_{2-} m_{2+}}}{M} \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{m_{2+} + m_{2-}}{2M} \right) dm_{2-} = \frac{1}{2M(1+\gamma)} \exp \left(-\frac{m_{2+}}{2M(1+\gamma)} \right). \quad (28)$$

По индукции легко получить

$$W(m_{n+}) = \frac{1}{2M \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k} \exp\left(-\frac{m_{n+}}{2M \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k}\right). \quad (29)$$

Из (29) следует, что вид функции плотности вероятности в результате преобразований не меняется, а меняется только константа $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k$, характеризующая $W(m_+)$. Функцию распределения максимальной интенсивности в n -ых пичках можно получить из (24), заменив в последнем величину $2M$ на $2M \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k$. Из (29) следует, что с ростом n разброс в минимальной (а следовательно, и максимальной) интенсивности излучения в пичках растет. Затухание при учете спонтанного излучения можно характеризовать параметром

$$\gamma_n = \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{1 + \gamma + \dots + \gamma^n}{1 + \gamma + \dots + \gamma^{n-1}} > \gamma > 1, \quad (30)$$

который при $n \rightarrow \infty$ стремится к γ . Последнее становится очевидным, если учесть, что при больших n наиболее вероятны большие значения m_+ и, следовательно, влияние флуктуаций пренебрежимо мало. При малых n отличие γ_n от γ может быть значительным.

Остановимся коротко и на том случае, когда в динамическом приближении есть периодическая автомодуляция (рис. 5). Если периодической автомодуляции (циклу на фазовой плоскости) соответствует значение $m_{\min} = \tilde{m} \ll M$ (кривая в на рис. 3), то по-прежнему можно приближенно считать $m_- = \gamma m_+$; здесь, однако, $\gamma < 1$. Предыдущие вычисления остаются в силе, но результаты отличаются существенно. При $\gamma < 1$ есть предельная (стационарная) функция плотности вероятности

$$W(m_{+ \text{ ст}}) = \frac{(1 - \gamma)}{2M} \exp\left[-\frac{(1 - \gamma) m_{+ \text{ ст}}}{2M}\right]. \quad (31)$$

Из (31) следует, что $\langle m_{+ \text{ ст}} \rangle = 2M(1 - \gamma)^{-1} \gg \tilde{m}$, т. е. наличие спонтанного излучения в этом случае ($\tilde{m} < M$) существенно изменяет амплитуду стационарной (квазипериодической) автомодуляции. Это движение условно можно назвать статистическим циклом системы, так как интервалы между пичками и их величина мало отличаются от соответствующих средних значений. Например, при $1 - \gamma \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$ и приведенных выше значениях других параметров системы с вероятностью $\sim 0,85$ интенсивности пичков в максимуме отличаются от их среднего значения не более, чем на 10%.

Если $\tilde{m} \gg M$, то связь m_- и m_+ вблизи \tilde{m} можно представить в виде $(m_- - \tilde{m}) = \gamma (m_+ - \tilde{m})$, $\gamma < 1$. Полагая $m_{\pm} = \tilde{m}(1 + \mu_{\pm})^2$, $|\mu_{\pm}| \ll 1$, для стационарной плотности вероятности величины $\mu_{+ \text{ ст}}$ получим интегральное уравнение

$$W(\mu_{+ \text{ ст}}) = \gamma \sqrt{\frac{m_0}{2\pi M}} \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi) \exp\left[-\frac{\tilde{m}}{2M} \left(\gamma\xi - \mu_{+ \text{ ст}} + \frac{M}{2\tilde{m}}\right)^2\right] d\xi, \quad (32)$$

решение которого, как нетрудно убедиться, записывается в виде

$$W(\mu_{+ct}) = \sqrt{\frac{(1-\gamma^2)\tilde{m}}{2\pi M}} \exp\left[-\frac{(1-\gamma^2)\tilde{m}}{2M} \times \right. \\ \left. \times \left(\mu_{+ct} - \frac{M}{2\tilde{m}(1-\gamma)}\right)^2\right]. \quad (33)$$

Из (33) видно, что $\langle \mu_{+ct} \rangle = \frac{M}{2\tilde{m}(1-\gamma)}$ и, следовательно, $\langle m_{+ct} \rangle = -$

$= \tilde{m} + M(1-\gamma)^{-1}$. Если \tilde{m} достаточно велико, то флуктуации мало сказываются на характеристиках периодической автомодуляции. Например, при $\tilde{m} \approx 1$, $M = 10^{-8}$, $1-\gamma = 10^{-2}$ получим $[\langle m_{+ct} \rangle - \tilde{m}] \tilde{m}^{-1} \sim 10^{-6}$ а амплитуды «пиков» с вероятностью 0,997 отличаются от среднего значения не более, чем на 0,1%.

Далее, из формулы (5) и выражения (7) для периода автомодуляции следует, что $\Delta m_{max}/m_{max} \simeq 2\Delta T/T$. Таким образом, все вышеизложенное относительно статистических характеристик максимальной мощности в пике можно перенести на характеристики интервалов между пиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. J. Collins, D. F. Nelson, A. L. Schwallow, W. Bond, C. G. B. Garrett, W. Kaiser, Phys. Rev. Letters, **5**, 303 (1960).
2. C. Makarov, J. Appl. Phys., **33**, 202 (1962).
3. А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, **4**, 718 (1959).
4. В. В. Коробкин, А. В. Успенский, ЖЭТФ, **45**, 1003 (1963).
5. H. Statz, C. de Mars, Quantum Electronics, New York, 1960.
6. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
7. D. M. Sinner, J. Appl. Phys., **33**, 1578 (1962).
8. R. Dunsmuir, J. Electr. and Control, **10**, 453 (1961).
9. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 207 (1963).
10. В. М. Файн, ЖЭТФ, **44**, 1915 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 мая 1964 г.

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF THE AUTOMODULATION OF THE SOLID LASER RADIATION

Bespalov V. I., Gaponov A. V.

The influence of spontaneous radiation has been considered on the behaviour of the two-level system with different times of longitudinal (T_1) and transverse (T_2) relaxation ($T_2 \ll T_1$), being in one-mode resonator. Spontaneous radiation is shown to lead to the more rapid average attenuation of modulation in transient regime. The maximum power has been found in „peaks“ solid laser radiation the magnitude of which is dependent logarithmically on the intensity of the spontaneous radiation.

СОБСТВЕННЫЕ ТИПЫ КОЛЕБАНИЙ КВАНТОВЫХ ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ, ЗАПОЛНЕННЫХ ВЕЩЕСТВОМ

A. N. Ораевский, B. A. Щеглов

Исследуются типы собственных колебаний плоского и цилиндрического диэлектрических резонаторов в оптическом диапазоне. Вычислены по-перечные волновые числа и собственные частоты. Найдены добротности типов колебаний. Определено число собственных колебаний в заданном спектральном интервале $\Delta\omega$.

При исследовании динамики квантового оптического генератора (лазера) необходимо знать характеристики возбуждаемых собственных типов колебаний резонатора (собственную частоту, структуру поля, добротность, количество собственных колебаний в интервале частот). Обычно на практике квантовый генератор на твердом теле реализуется в виде стержня из рабочего вещества, помещенного в открытый резонатор типа интерферометра Фабри—Перо. Открытым резонаторам посвящены теоретические исследования в ряде работ [1—4]. Авторов этих исследований интересовали электродинамические свойства резонаторов, не заполненных веществом или погруженных в однородную бесконечную среду с ϵ и μ , отличными от единицы.

В работе [1] показано, что потери мощности на дифракцию определяются соотношением

$$\delta_d = 0,207 (l/\lambda)^{1.4},$$

где λ — длина волны в свободном пространстве, l — расстояние между зеркалами, a — радиус зеркал ($1/\lambda \ll l^3/a^4$). Отсюда следует, что с увеличением количества зон Френеля ($N \sim a^2/l\lambda$), видимых в одном зеркале из центра другого, мощность потерь на дифракцию убывает. В частности, для собственных частот в оптическом диапазоне ($kl \gg 1$, $ka \gg 1$) дифракционные потери пренебрежимо малы: $\delta_d \ll 1$.

Автором работы [3] выведена формула для собственных частот, из которой следует, что при выполнении условия $ka^2/l \gg 1$ частоты мало отличаются от частот закрытого резонатора.

Результаты [1—4] можно использовать, исследуя динамику газового лазера, поскольку оптическая плотность активной среды в этом случае мало отличается от плотности окружающей среды. В случае лазера на твердом теле (например, рубинового лазера) необходимо учитывать перепад оптической плотности на границе с окружающей средой ($n_{\text{руб}} > n_{\text{вн сред}}$). Это обстоятельство, обусловливая эффект полного внутреннего отражения, приводит к тому, что на больших частотах энергия локализуется в образце, слабо просачиваясь в окружающую периферийную среду. Настоящая работа и посвящается рассмотрению электродинамических свойств открытых резонаторов, заполненных веществом.

1. ПЛОСКИЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР

Рассмотрим плоский диэлектрический слой толщиной $2a$, расположенный между бесконечными идеально ровными абсолютно проводящими

ми плоскостями (рис. 1а). Обозначим через ϵ_2, μ_2 соответственно диэлектрическую и магнитную проницаемости слоя, а через ϵ_1, μ_1 — проницаемости окружающей среды ($\epsilon_2 \mu_2 > \epsilon_1 \mu_1$). По оси y слой предполагается бесконечным. Расстояние между зеркалами равно l .

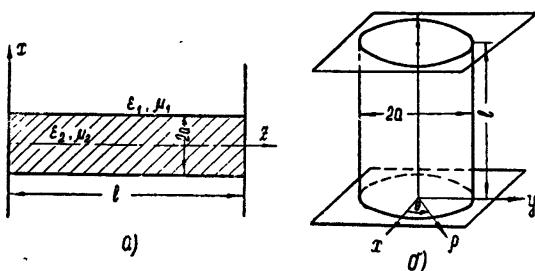


Рис. 1. а) Плоский открытый резонатор.
б) Круглый диэлектрический резонатор.

Общий метод нахождения поля известен и изложен, например, в [5]. Нас интересуют поверхностные стоячие волны. В данной системе реализуются электрические (TE) и магнитные (TM) типы колебаний. Единственная отличная от нуля z -составляющая вектора Герца в слое имеет вид $\Pi_z = C\pi(x) \cos(hz)$ для TE-колебаний и $\Pi'_z = C' \Pi(x) \sin(hz)$ для TM-колебаний (продольное волновое число $h = \pi s/l$; $s = 1, 2, 3, \dots$). Электрические и магнитные типы колебаний, в свою очередь, подразделяются на четные ($\Pi(x) = \sin(gx)$) и нечетные ($\Pi(x) = \cos(gx)$). Здесь g — поперечное волновое число. Поле вне диэлектрического слоя спадает как $\exp(-q|x|)$ ($q > 0$).

Соответствующие характеристические уравнения для четных и нечетных TE-колебаний, определяемые из граничных условий, имеют вид

$$\frac{1}{\epsilon} ga \left(\begin{array}{c} +\operatorname{tg}(ga) \\ -\operatorname{ctg}(ga) \end{array} \right) = qa_0. \quad (1.1)$$

Здесь поперечные и волновые числа связаны соотношениями

$$\begin{aligned} g^2 &= \epsilon_2 \mu_2 k^2 - h^2; \\ q^2 &= h^2 - \epsilon_1 \mu_1 k^2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

так что

$$(qa)^2 = B_s^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon \mu} \right) - \frac{1}{\epsilon \mu} (ga)^2, \quad (1.3)$$

где $B_s = ha = \pi sa/l$, $\epsilon = \epsilon_2/\epsilon_1$, $\mu = \mu_2/\mu_1$. В случае TM-колебаний в (1.1) следует заменить ϵ на μ . При фиксированном продольном волновом числе h решениям уравнений (1.1) соответствуют в первом квадранте плоскости (ga, qa) точки пересечения ветвей функций, стоящих слева, с эллипсом (1.3). Число этих точек конечно и определяется граничным значением $(ga)_{rp} = B_s \sqrt{\epsilon \mu - 1}$. Число типов колебаний с заданным h определяется выражением

$$n_{\max} = E \left(\frac{B_s}{\pi} \sqrt{\epsilon \mu - 1} \right), \quad (1.4)$$

где E — целочисленная функция (при частотах $\omega \sim 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, $a \sim 1 \text{ см}$ и $\sqrt{\epsilon \mu - 1}/\pi \sim 1$ величина $n_{\max} \geq 10^4$).

В дальнейшем нас будет интересовать случай высоких частот, когда выполняются неравенства

$$kl \gg 1, \quad ka \gg 1, \quad ka\sqrt{\varepsilon\mu - 1} / \varepsilon\mu \gg 1 \quad (1.5)$$

и, следовательно,

$$hl \gg 1, \quad B_s = ha \gg 1, \quad B_s\sqrt{\varepsilon\mu - 1} / \varepsilon\mu \gg 1. \quad (1.6)$$

Этот случай представляется наиболее интересным, поскольку лазер на твердом теле работает в оптическом диапазоне.

При выполнении (1.5), (1.6) для всех типов колебаний, кроме, быть может, типа, которому соответствует последняя ветвь ($n = n_{\max}$) имеет место неравенство

$$qa \gg 1. \quad (1.7)$$

В этом случае уравнения (1.1) допускают приближенные аналитические решения. В последующем изложении тип колебаний с $n = n_{\max}$ будет исключаться из рассмотрения, если для него не выполняется (1.7).

Корни характеристического уравнения можно записать в виде

$$x_{sn} = g_{sn}a = x_n - \delta_{sn}^{E(H)}, \quad (1.8)$$

где

$$x_n = \begin{cases} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) & \text{для четных ТЕ-колебаний} \\ \pi(n+1) & \text{для нечетных ТЕ-колебаний} \end{cases};$$

$$0 < \delta_{sn}^{E(H)} \ll x_n.$$

Из характеристических уравнений с помощью (1.3), (1.7) и (1.8) получим

$$\delta_{sn}^{E(H)} = \operatorname{arctg} \left[\left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^{1/2} \frac{(g/h)}{\sqrt{\varepsilon\mu - 1 - (g/h)^2}} \right]. \quad (1.9)$$

Здесь, как и в (1.10) — (1.12), верхний знак соответствует ТЕ-колебаниям, нижний — ТН-колебаниям.

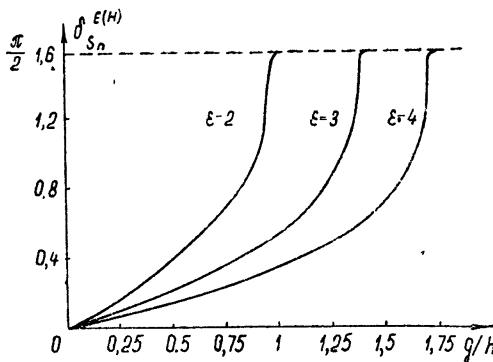


Рис. 2.

На рис. 2 представлена зависимость (1.9) для ТЕ-колебаний при различных ε и $\mu = 1$. Из рисунка видно, что с ростом индекса n сдвиг корня относительно x_n растет, а большему значению ε соответствует

большая скорость нарастания функции δ_{sn} . Имея в виду, что при фиксированном h для типов колебаний, которым соответствуют ветви, определенные в «левой» части интервала $(0 < ga < B_s \sqrt{\varepsilon\mu - 1})$, выполнено неравенство $\delta_{sn} \ll 1$, с помощью (1.9) получим следующее выражение для сдвига:

$$\delta_{sn}^{E(H)} = \frac{x_n (\varepsilon/\mu)^{1/2}}{\sqrt{B_s^2(\varepsilon\mu - 1) - x_n^2}}. \quad (1.10)$$

Если считать $\delta_n < A^{-1}$ ($A > 1$), то количество «левых» типов колебаний, для которых справедлива формула (1.10), определится из соотношения

$$n_A / n_{\max} = [A^2(\varepsilon/\mu)^{1/2} + 1]^{-1/2}. \quad (1.11)$$

При $A = 3$ и $\varepsilon/\mu = 3$ получаем $n_A = 0,5 n_{\max}$ для ТЕ-колебаний и $n_A = 0,2 n_{\max}$ для ТН-колебаний, причем ошибка вычислений — не более 4%. С помощью (1.3), (1.8), (1.10) получаем выражение для поперечных волновых чисел «левых» типов колебаний (ТЕ или ТН):

$$g_{sn}a = x_n \left(1 - \frac{(\varepsilon/\mu)^{1/2}}{\sqrt{B_s^2(\varepsilon\mu - 1) - x_n^2}} \right);$$

$$q_{sn}a = (\varepsilon\mu)^{-1/2} \left[B_s^2(\varepsilon\mu - 1) - x_n^2 + 2 \frac{x_n^2 (\varepsilon/\mu)^{1/2}}{\sqrt{B_s^2(\varepsilon\mu - 1) - x_n^2}} \right]^{1/2}. \quad (1.12)$$

По найденным поперечным волновым числам g первая формула в (1.2) определяет собственные частоты:

$$\omega_{sn} = \frac{c}{a \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} [(x_n - \delta_{sn}^{E(H)})^2 + B_s^2]^{1/2}. \quad (1.13)$$

Учитывая, что $\delta_{sn}^{E(H)} \ll x_n$, с большой степенью точности имеем

$$\omega_{sn} = \frac{c}{a \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} [x_n^2 + B_s^2], \quad (1.14)$$

откуда

$$\frac{\Delta \omega_{sn}}{\Delta n} = \frac{\pi c}{a \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + B_s^2}} \quad (1.15)$$

(B_s — фиксировано; см. рис. 3).

Расстояние по частоте между нулевым ($n = 0$) и первым ($n = 1$) типами колебаний в интервале $(0 < ga < B_s \sqrt{\varepsilon\mu - 1})$ определяет минимальное расстояние между ближайшими ТЕ(ТН)-колебаниями (h — фиксировано):

$$\Delta \omega_{\min} = (\Delta \omega)_{01} = \frac{(\Delta \omega / \Delta n)_0 + (\Delta \omega / \Delta n)_1}{2} =$$

$$= \begin{cases} c\pi^2/B_s a \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} & \text{для четных ТЕ(ТН)} \\ (3/2)c\pi^2/B_s a \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} & \text{для нечетных ТЕ(ТН)} \end{cases}. \quad (1.16)$$

Максимальное расстояние между ближайшими ТЕ (или ТН)-колебаниями определяется из (1.15) при $x \rightarrow B_s \sqrt{\varepsilon\mu - 1}$:

$$\Delta\omega_{\max} = \frac{\pi c}{a \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon \mu}}. \quad (1.17)$$

Соответствующие ТЕ- и ТН-типы колебаний смещены по частоте на величину

$$\begin{aligned} \omega_{sn}^E - \omega_{sn}^H &= \frac{c}{a \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \times \\ &\times \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + B_s^2}} (\delta_{sn}^H - \delta_{sn}^E). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Это следует из (1.13) с учетом неравенства $x_n \delta_{sn}^{E(H)} \ll x_n^2 + B_s^2$.

С помощью (1.10) выражение (1.18) для «левых» типов колебаний принимает вид

$$\begin{aligned} (\omega_{sn}^E - \omega_{sn}^H)_L &= \frac{c}{a \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \times \\ &\times \frac{x_n (\sqrt{\epsilon/\mu} - \sqrt{\mu/\epsilon})}{(x_n^2 + B_s^2)^{1/2} [B_s^2(\epsilon\mu - 1) - x_n^2]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В частности, если $x_n \ll B_s$ и $x_n \ll B_s \sqrt{\epsilon\mu - 1}$, то

$$(\omega_{sn}^E - \omega_{sn}^H)_L = \frac{c}{a \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \left(\frac{x_n}{B_s} \right)^2 (\epsilon\mu - 1)^{-1/2} (\sqrt{\epsilon/\mu} - \sqrt{\mu/\epsilon}). \quad (1.20)$$

При $a \sim 1 \text{ см}$, $\epsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sqrt{\epsilon_2} = 1,76$ (рубин), $B_s \sim 10^5$ ($\omega \sim 10^{15}$, $\epsilon_2 k^2 < h^2 < \epsilon_2 k^2$) получаем для четных ТЕ (или ТН)-колебаний: $(\Delta\nu)_{\min} \sim \sim 270 \text{ кгц}$ (соответственно для нечетных колебаний $(\Delta\nu)_{\min} \sim 400 \text{ кгц}$). Далее, $(\Delta\nu)_{\max} = 7000 \text{ мгц}$; для ветви с $n = 0$ имеем $(\omega_{s0}^E - \omega_{s0}^H) \sim 0,5 \text{ гц}$ для четных и порядка 2 гц для нечетных типов колебаний.

При фиксированном номере ветви характеристического уравнения с помощью (1.14) получим

$$\frac{\Delta\omega_{sn}}{\Delta s} = \frac{c \pi}{l \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \frac{B_s}{\sqrt{x_n^2 + B_s^2}} \quad (x_n \text{ фиксировано}). \quad (1.21)$$

Если $\Delta s = 1$, $l \sim 10 \text{ см}$, $\sqrt{\epsilon_2 \mu_2} = 1,76$ и $x_n^2 \ll B_s^2$, то $\Delta\omega_{sn} \sim 10^9 \text{ гц}$.

Для того, чтобы вычислить количество собственных колебаний (осцилляторов) в заданном интервале $\Delta\omega$, удобно обратиться к рассмотрению геометрической диаграммы. На плоскости (x_n, B_s) каждому типу колебаний соответствует взаимно однозначно точка в первом квадранте; функция (1.14) определяет круг с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом $R = \omega_{sn} a \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} / c$. Поскольку нас интересуют типы колебаний, частоты которых расположены в интервале $\omega_1 < \omega < \omega_2$, то соответствующие им точки первого квадранта будут лежать между окружностями с радиусами $R_1 = \omega_1 a \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} / c$ и $R_2 = \omega_2 a \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} / c$ (см. рис. 4). При фиксированном B_s существует ограниченное количество значений x_n , определяемое из соотношения $x_n = B_s \sqrt{\epsilon\mu - 1}$. Прямая

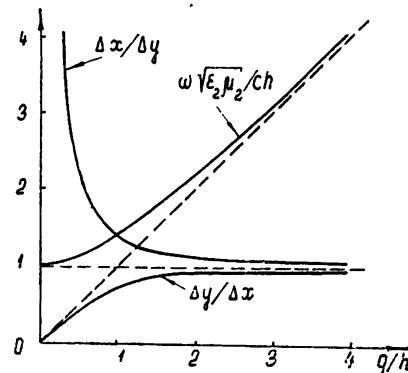


Рис. 3. Графическая зависимость частоты от поперечного волнового числа.

$x_n = B_s \sqrt{\varepsilon\mu - 1}$ и прямая $x_n = 0$, пересекая кольцо, выделяют фигуру Ω . Площадь Ω прямо пропорциональна искомому числу типов колебаний ΔN . Так как $dn = dx_n / \pi$, $ds = (l/a) dB_s / \pi$, то для ΔN имеем *

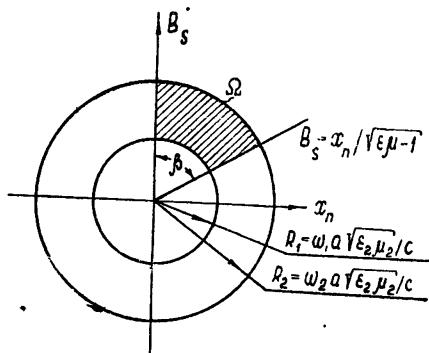


Рис. 4. Диаграмма для определения числа собственных типов колебаний в интервале $\Delta\omega$ ($\tan \beta = \sqrt{\varepsilon\mu - 1}$).

$$\Delta N = \frac{8}{\pi^2} \frac{l}{a} \int \int_{\Omega} dx_n dB_s . \quad (1.22)$$

Переходя к полярным координатам и имея в виду, что $\beta = \arctg \sqrt{\varepsilon\mu - 1}$, получим

$$\Delta N = \frac{8}{\pi^2} \frac{l}{a} \int_0^\beta \int_{R_1}^{R_2} R dR d\varphi = \frac{4}{\pi^2} \frac{l}{a} (R_2^2 - R_1^2) \arctg \sqrt{\varepsilon\mu - 1} . \quad (1.23)$$

Считая в (1.23) $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 = \omega$, приведем выражение для ΔN к виду

$$\Delta N = \frac{8l}{a\pi^2} \left(\frac{a \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{c} \right)^2 \omega \Delta\omega \arctg \sqrt{\varepsilon\mu - 1} . \quad (1.24)$$

Из (1.24) следует, что чем меньше относительная оптическая плотность центрального слоя, тем меньше количество собственных осцилляторов в данном интервале частот при данных геометрических параметрах системы. В частности, если в (1.24) положить $l = 10 \text{ см}$, $a = 0,5 \text{ см}$, $\sqrt{\varepsilon_2} = 1,76$, $\varepsilon_1 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, $\omega = 2,7 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, $\Delta\omega = 2,1 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$, что соответствует линии R_1 в рубине ${}^2E \rightarrow {}^4A_2$ при комнатной температуре (длина волны $\lambda_p = 6947 \text{ \AA}$ и ширина люминесценции 11 см^{-11} [6,7]), то получим $\Delta N \sim 5 \cdot 10^8$.

2. КРУГЛЫЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР

Рассмотрение круглого диэлектрического резонатора вполне аналогично плоскому случаю. В данном случае между плоскими металлическими зеркалами расположен образец цилиндрической формы (см. рис. 1в, где a — радиус сечения, ε_2 , μ_2 — проницаемости образца, ε_1 , μ_1 — проницаемости окружающей среды, l — расстояние между отражателями). Характеристическое уравнение, с помощью которого определяются частоты, имеет вид [5,8]

* Множитель 8 появился из-за наличия четных и нечетных ТЕ- и ТН-типов и учета типов колебаний с обратной поляризацией.

$$(\varepsilon f_n - \varphi_n)(\mu f_n - \varphi_n) = n^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \left(\frac{\varepsilon \mu}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right). \quad (2.1)$$

Здесь $x = ga$, $y = qa$, $n = 0, 1, 2, \dots$ и по-прежнему

$$\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1, \quad \mu = \mu_2/\mu_1 \quad (\varepsilon \mu > 1), \quad f_n = J'_n(x)/x J_n(x),$$

$$\varphi_n = -K'_n(y)/y K_n(y).$$

(J_n — функция Бесселя, K_n — функция Макдональда n -порядка). Связь между x, y, k и $h = \pi s/l$ ($s = 1, 2, 3, \dots$) определяется по формулам (1.2), (1.3). Как и в случае плоского резонатора, считаем выполнеными неравенства (1.5) — (1.7).

Случаю $n = 0$ соответствуют симметричные типы колебаний ТЕ и ТН, во многом аналогичные типам колебаний в плоском резонаторе. В случае $n \geq 1$ реализуются несимметричные гибридные дважды поляризационно вырожденные типы колебаний ($\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$) определяют азимутальную зависимость составляющих поля.

Характеристическое уравнение можно записать в виде

$$f_n(x) = f_n^\pm = \frac{\varepsilon + \mu}{2\varepsilon\mu} \varphi_n \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon - \mu}{2\varepsilon\mu}\right)^2 \varphi_n^2 + \frac{n^2}{\varepsilon\mu} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \left(\frac{\varepsilon\mu}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)} \quad (2.2)$$

(верхний знак соответствует ТНЕ-типам колебаний, нижний — ТЕН). Подставляя (1.3) в (2.2), получим справа функции только от $x = ga$. При стремлении $x \rightarrow B_s \sqrt{\varepsilon\mu - 1}$ обе функции f_n^\pm асимптотически стремятся к $+\infty$, при $x \rightarrow +0$ функции $f_n^\pm \rightarrow \pm\infty$. Функция $f_n^+ > 0$ и имеет минимум в интервале $0 < x < B_s \sqrt{\varepsilon\mu - 1}$, f_n^- пересекает ось x и имеет точку перегиба, x_0 — точка пересечения с осью x — определяется из уравнения

$$\varphi_n^2 = n^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \left(\frac{\varepsilon\mu}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right). \quad (2.3)$$

При $\mu = 1$, воспользовавшись асимптотическим разложением

$$\varphi_n \cong 1/y \quad (y \gg 1, \quad y^2 \gg n^2 \geq 1) \quad (2.4)$$

для n , удовлетворяющего неравенству $\sqrt{n} \ll B_s \sqrt{\varepsilon}$, получим

$$x_0 = n^{1/2} (\varepsilon - 1)^{1/4}.$$

Как и в плоском случае, фиксированному значению продольного волнового числа h_s отвечает ограниченное множество значений поперечного волнового числа g_{nms} .

Функции f_n^\pm ($n = 0, 1, 2, \dots$) пересекают ветви $f_n(x)$ в точках $x_{nms} = g_{nms} a > 0$, определяемых из соотношения

$$x_{nms} = g_{nms} a = \xi_{nm} - \delta_{nms}, \quad (2.5)$$

где ξ_{nm} — m -ый положительный корень уравнения $J'_n(\xi_{nm}) = 0$, δ_{nms} — сдвиг относительно корня, причем $\tilde{\xi}_{nm} < x_{nms} < \xi_{nm}$ ($\tilde{\xi}_{nm}$ — m -ый неотрицательный корень уравнения $J_n(\tilde{\xi}_{nm}) = 0$). Собственные типы колебаний с индексом $m = 1$ будут существовать в случае ТНЕ лишь при $n = 1$, так как при этом происходит пересечение с первой ветвью, определен-

ной в интервале $\tilde{\xi}_{10} < \xi_{11} < \xi_{11}$. В случае ТЕН первая ветвь всегда пересекается функцией f_n^- .

С помощью (2.9) собственные частоты определяются формулой

$$\omega_{nms} = \frac{c}{a \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} [(\xi_{nm} - \delta_{nms})^2 + B_s^2]^{1/2}. \quad (2.6)$$

3. ПОТЕРИ В РЕЗОНАТОРАХ

Одной из причин, ограничивающих выходную мощность лазера, являются потери в резонаторе, в частности, потери в веществе (проводимость кристалла, рассеивание на неоднородностях), джоулевы потери в стенках резонатора, дифракционные потери. Заметим, что вследствие эффекта полного внутреннего отражения подавляющее большинство типов колебаний имеет малые радиационные потери по сравнению с джоулевыми и другими. Эта ситуация вполне аналогична случаю резонатора со сферическими зеркалами, помещенными в однородный диэлектрик, где образуется внешняя каустическая поверхность, за которой поле экспоненциально убывает [4]. Для оценки дифракционных потерь, заведомо превышающих реальные дифракционные потери, как и в [4], можно воспользоваться методом, основанным на теории возбуждения волноводов (см., например, [9]). Рассматривая резонатор как отрезок передающей линии, замкнутой на концах зеркалами, и представляя поле в нем в виде суммы двух волн, бегущих в противоположных направлениях, оценим добротность, соответствующую дифракционным потерям, пользуясь формулой $Q_d = \omega W_{\text{зап}} / P_d$ ($W_{\text{зап}}$ — энергия, запасенная в резонаторе, P_d — мощность дифракционных потерь). В соответствии с апертурным методом получим

$$P_d = (P_1 + P_2) \left[2 \frac{P_1}{P_1 + P_2} - \left(\frac{P_1}{P_1 + P_2} \right)^2 \right], \quad (3.1)$$

где P_1 — мощность потока, бегущего в одном из направлений через периферийное сечение, P_2 — мощность потока, бегущего через центральное сечение. В случае круглого диэлектрического резонатора ($n = 0$) с помощью (1.1), (1.6), (1.7) нетрудно получить нижнюю оценку для добротности:

$$\bar{Q}_d = \begin{cases} (l/16\varepsilon) (g^2 + h^2)(g^2 + \varepsilon^2 q^2) qa/g^2 h & \text{для ТЕ-колебаний} \\ (l/16\mu) (g^2 + h^2) (g^2 + \mu^2 q^2) qa/g^2 h & \text{для ТН-колебаний} \end{cases} \quad (3.2)$$

Для всех типов колебаний, кроме типа, которому соответствует последняя ветвь, при $\mu = 1$ справедлива оценка:

$$\bar{Q}_d > \tilde{Q}_d = \begin{cases} (l/16a) B_s \sqrt{\pi B_s} (\varepsilon - 1)^{1/4} / \varepsilon^{1/2} & \text{для ТЕ-колебаний} \\ (l/16a) B_s \sqrt{\pi B_s} (\varepsilon - 1)^{1/4} \varepsilon^{1/2} & \text{для ТН-колебаний} \end{cases} \quad (3.3)$$

При $\varepsilon_1 = 1$, $\sqrt{\varepsilon_2} = 1,76$, $l = 10 \text{ см}$, $a = 0,5 \text{ см}$, $B_s \sim 10^5$ величина $\tilde{Q}_d^E \sim 10^8$. Для «левых» типов колебаний справедливо неравенство $\bar{Q}_d \gg \tilde{Q}_d$. В случае плоского резонатора эти оценки следует умножить на 2.

1. *Потери в образце.* Мощность потерь в веществе может быть вычислена по формуле

$$P_{\text{обр}} = 2\gamma P_z I, \quad (3.4)$$

где γ — затухание на единицу длины резонатора, двойка учитывает потери в двух волнах. Тогда для плоского резонатора (на единицу длины по оси y) найдем

$$Q_{\text{обр}} = \frac{1}{8\gamma} (h^2 + g^2)/h. \quad (3.5)$$

Эта формула справедлива и для симметричных типов колебания в круглом резонаторе; она имеет одинаковый вид для ТЕ- и для ТН-типов колебаний.

2. *Джоулевы потери в стенках резонатора.* Тепловые потери в стенах резонатора

$$Q_{\text{ст}} = W_{\text{зап}}/W_{\text{ст}} \quad (3.6)$$

($W_{\text{ст}}$ — энергия поля, локализованного в стенах). Чтобы вычислить $W_{\text{ст}}$, необходимо знать толщину скин-слоя δ . В оптической части спектра (длинноволновый край видимого диапазона, где, в сущности, и работает рубиновый лазер) путь v/ω (v — фермиевская скорость), проходимый электроном за один период колебания поля, значительно меньше $\delta = c/\omega k$ (k — главный показатель поглощения), даже если $v\tau \gg \delta$ (τ — время релаксации электрона). Поэтому можно воспользоваться формулой [10]

$$\delta = c / \sqrt{4 \frac{\pi^2 e^2 N}{m}}, \quad (3.7)$$

где e , m — заряд и масса электрона, N — плотность свободных электронов в металле (формула (3.7) следует из теории нормального скин-эффекта). Для средней энергии, заключенной в стенах резонатора, имеем

$$W_{\text{ст}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_{\text{ст}}}{16\pi} \delta \int_S |H_{tg,s}|^2 ds, \quad (3.8)$$

где интегрирование производится по одной из стенок ($z = 0$, $z = l$).

Проводя вычисления, получим формулу, справедливую и для плоского и для круглого резонатора ($n = 0$):

$$Q_{\text{ст}} = \begin{cases} \frac{\mu_{\text{ст}} l}{2\mu_2 \delta} & \text{для ТЕ-колебаний} \\ \frac{\mu_{\text{ст}} l}{2\mu_2 \delta} (1 + g^2/h^2) & \text{для ТН-колебаний} \end{cases} \quad (3.9)$$

Величина $[1 + g^2/h^2]$ изменяется в пределах от 0 до $\varepsilon\mu$. Из (3.9) следует, что с ростом длины кристалла добротность $Q_{\text{ст}}$ растет. Для отражателей из серебра $\delta \sim 10^{-6}$ см, так что $Q_{\text{ст}} \sim 10^7$.

Авторы благодарны Н. Г. Басову за постоянное внимание к работе и Л. А. Вайнштейну за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. G. Fox, T. Li, Bell System Techn. J., **40**, 453 (1961).
2. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell System Techn. J., **40**, 489 (1961).

3. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 44, 105 (1963).
4. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 45, 684 (1963).
5. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
6. K. S. Gibson, Phys. Rev., 8, 38 (1961).
7. A. L. Shawlow, Advances in Quantum Electronics, Columbia Univ. Press, 1961, p. 50.
8. E. Snitzer, J. Opt. Soc. Amer., 51, 491 (1961).
9. В. Ф. Взятышев, Уч. зап. Харьк. ун-та, 82, 152 (1962).
10. А. В. Соколов, Оптические свойства металлов, Физматгиз, М., 1961.

Физический институт им П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
2 марта 1964 г.

MODES OF QUANTUM OPTICAL RESONATORS WITH DIELECTRIC FILLING

Oraevsky A. N., Shcheglov V. A.

Modes are investigated of plane and cylindrical dielectric resonators in the optical band. Transverse wave numbers and resonance frequencies have been calculated. The quality factors of modes has been found. The density of spectral lines is determined in a given spectral interval $\Delta\omega$.

УДК 621.378.325

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ЛАЗЕРА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПОТЕРЯМИ

Л. А. Островский, Е. И. Якубович

Рассматриваются электромагнитные колебания в плоском активном слое. Учитывается, что потери энергии в такой системе могут быть обусловлены не только излучением через границы слоя, но и потерями в самой среде, содержащей активные молекулы. Найден частотный спектр установившихся нелинейных колебаний и соответствующие распределения амплитуды и фазы поля в пространстве. Показано, в частности, что наличие объемных потерь в достаточно толстых слоях приводит к неоднозначной пространственной зависимости поля на данной частоте.

1. В работе [1] были исследованы возможные установившиеся (монохроматические) процессы в квантовом оптическом генераторе (лазере), рассматриваемом как существенно распределенная электродинамическая система. Одним из принятых там обычных ограничений является предположение о том, что генерируемая энергия расходуется только на излучение через границы активного вещества; потери энергии в самой среде, содержащей активные молекулы, не учитывались.

В действительности потери, обусловленные, например, проводимостью среды или рассеянием света на случайных неоднородностях, ввиду больших размеров системы по сравнению с длиной световой волны могут оказаться существенными и даже преобладающими по сравнению с потерями на излучение. Учет такой «объемной» диссипации приводит, как показано ниже, к появлению качественно новых типов решений:

2. Рассмотрим, как и в [1], одномерную задачу о колебаниях в плоско-параллельном слое, содержащем двухуровневые активные молекулы (ось x перпендикулярна границам слоя). Пользуясь уравнениями Максвелла и уравнениями для матрицы плотности активного вещества, можно получить для напряженности магнитного поля при монохроматических колебаниях следующее нелинейное уравнение [1]:

$$\frac{d^2H}{dx^2} + k^2 H = - ik^2 \alpha \frac{H}{1 + \beta^2 HH^*} + ik^2 g H. \quad (1)$$

Здесь, как и в [1], H — комплексная амплитуда напряженности магнитного поля:

$$H = H_y = He^{i\omega t} + H^* e^{-i\omega t},$$

$$k^2 = \frac{\epsilon\omega^2}{c^2}, \quad \alpha = \frac{4\pi T_2 n_0 |\mu|^2 (1 - iT_2 \Delta\omega)}{\hbar [1 + T_2^2 (\Delta\omega)^2]},$$

$$\beta^2 = \frac{4T_1 T_2 |\mu|^2}{\hbar^2 [1 + T_2^2 (\Delta\omega)^2]},$$

$\mu = \mu_{1,2}$ — диагональный элемент матрицы дипольного момента молекулы ($\mu = \mu_y$), n_0 — параметр, зависящий от мощности «подсветки», T_1, T_2 — продольные и поперечные времена релаксации, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ (ω_0 — частота перехода между уровнями). Распределенные потери, не рассматривавшиеся в работе [1], учитываются последним членом в уравнении (1), где g — малый коэффициент затухания, который может зависеть от ω .

Решение уравнения (1) проводится ниже тем же способом, что и в [1]. Представим H в виде двух взаимодействующих волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$H = C_1(x) \exp(-ikx) + C_2 \exp(ikx). \quad (2)$$

При этом вследствие малости постоянных α и g комплексные коэффициенты C_1 и C_2 медленно изменяются в пространстве.

Подставляя (2) в (1) и пользуясь методом усреднения, получим

$$\pm \frac{dC_{1,2}}{dx} = \frac{\alpha k}{4} C_{1,2} \frac{\sqrt{1+2(|C_1|^2 + |C_2|^2) + (|C_1|^2 - |C_2|^2)^2} \pm |C_2|^2 \pm |C_1|^2 - 1}{|C_{1,2}|^2 \sqrt{1 + 2(|C_1|^2 + |C_2|^2) + (|C_1|^2 - |C_2|^2)^2}} - \frac{gk}{2} C_{1,2}. \quad (3)$$

Представим $C_{1,2}$ в виде $|C'_{1,2}| \exp(i\varphi_{1,2})$; тогда уравнения для квадратов модулей полей бегущих волн ($m_{1,2} = |C_{1,2}|^2$) примут вид

$$\pm \frac{dm_{1,2}}{dx} = \frac{k \operatorname{Re} \alpha}{2} \frac{\sqrt{1 + 2(m_1 + m_2) + (m_1 - m_2)^2} \mp m_2 \pm m_1 - 1}{\sqrt{1 + 2(m_1 + m_2) + (m_1 - m_2)^2}} - gkm_{1,2}. \quad (4)$$

Чтобы проинтегрировать систему нелинейных уравнений (4), сделаем замену

$$u = m_1 + m_2 + \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g}, \quad v = \sqrt{1 + 2(m_1 + m_2) + (m_1 - m_2)^2} - \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g}. \quad (5)$$

С помощью (5) находим первый интеграл (4) в виде

$$v^2 - u^2 = 4 \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} A \quad (6)$$

или в прежних обозначениях

$$(m_1 - A)(m_2 - A) = A + \frac{g}{\operatorname{Re} \alpha} m_1 m_2 \left(1 + m_1 + m_2 - 2A - \frac{g}{\operatorname{Re} \alpha} m_1 m_2 \right), \quad (7)$$

где A — произвольная константа. Нетрудно получить и второй интеграл (4):

$$x - x_0 = -g \int \left(v + \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} \right) dv \left[\sqrt{v^2 - 4 \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} A} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\left(v + \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} \right)^2 - 2 \sqrt{v^2 - 4 \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} A} - 2 \frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} + 1} \right]^{-1}, \quad (8)$$

где x_0 и A — постоянные.

Определение зависимости $m_{1,2}$ от x по формуле (8) может быть сведено к вычислению эллиптических интегралов.

3. Не выписывая сравнительно громоздких выражений, проведем качественное исследование решения на фазовой плоскости, т. е. на плоскости переменных m_1, m_2 .

Прежде всего, приравнивая нулю правые части (4), найдем положения равновесия (особые точки). Если $\operatorname{Re} \alpha/g < 1$, то такая точка — единственная ($m_1 = 0, m_2 = 0$), типа седла. Решение в этом случае качественно аналогично решению при $\alpha = 0$, т. е. затухающим волнам в линейной среде. Легко видеть, что генерация при этом невозможна.

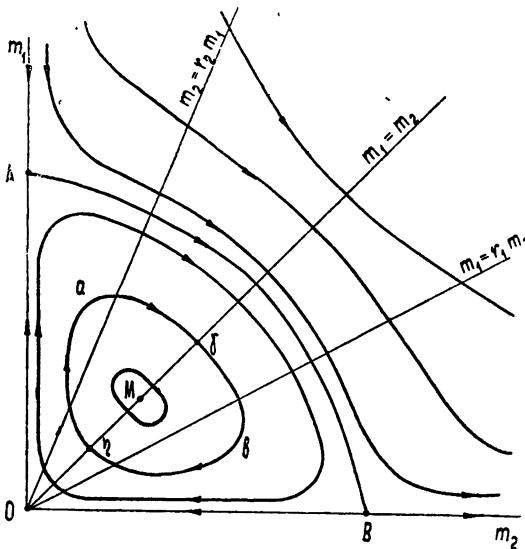


Рис. 1.

Наиболее интересен случай $\operatorname{Re} \alpha/g > 1$. Структура траекторий на фазовой плоскости, соответствующая (7), приведена для этого случая на рис. 1. Стрелками показаны направления возрастания координаты x . Система (7) имеет четыре особые точки: $O(m_1 = 0, m_2 = 0$; седло); $A(m_1 = \operatorname{Re} \alpha/g - 1, m_2 = 0$; седло); $B(m_1 = 0, m_2 = \operatorname{Re} \alpha/g - 1$; седло); $M(m_1 = m_2 = M = (1/2)[\operatorname{Re} \alpha/g - 1/4 - \sqrt{\operatorname{Re} \alpha/2g + 1/16}]$; центр). Особые точки соответствуют решениям с постоянной в пространстве амплитудой; точки A и B — бегущим волнам, точка M — стоячей волне. Заметим, что при $g = 0$ конечных на всем интервале решений для неограниченной среды не существует.

Возможные в безграничном слое волны конечной амплитуды описываются, кроме особых точек, еще сепаратрисами OA , OB и AB , соединяющими эти точки (рис. 1). Первые две из них соответствуют бегущим волнам с зависящей от x амплитудой. Эта зависимость для кривой OA показана на рис. 2; такие волны осуществляются при падении волны на границу полубесконечного активного слоя. Кривая AB (соответствующая взаимодействию двух сходящихся из бесконечности волн) разбивает фазовую плоскость на две области с качественно различными типами решений. Область вне OAB соответствует большим полям, для которых в результате высвечивания нелинейные эффекты малы и поведение решения определяется в основном влиянием диссипации. Качественно ре-

шения здесь аналогичны тем, которые имеются на всей плоскости при $\operatorname{Re} \alpha < g$; генерация в конечном слое при этом невозможна.

Обратимся теперь к рассмотрению траекторий, лежащих внутри области OAB . Основная особенность, которую вносит учет объемных потерь, состоит в появлении периодических в пространстве решений;

периодически изменяются как амплитуды бегущих волн m_1 и m_2 , так и средняя плотность энергии поля W , пропорциональная $m_1 + m_2^*$; средний поток энергии периодически меняет направление в зависимости от того, какая из величин $m_{1,2}$ преобладает.

Для определения пространственного периода процесса нужно, вообще говоря, вычислить интеграл (8). Ограничимся здесь нахождением

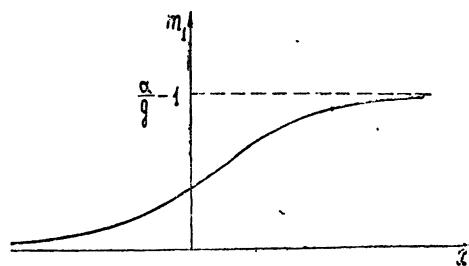


Рис. 2

наименьшего периода, соответствующего малым отклонениям амплитуд от «равновесного» значения M . Линеаризуя уравнения (4) около значения $m_1 = m_2 = M$ и отыскивая решение в виде $m_{1,2} = M + m_{1,2} e^{i \times kx}$, найдем

$$\kappa^2 = g^2 \left(1 - \frac{2M}{\sqrt{1+4M}-1} \right) \left[\frac{2M}{(1+4M)(\sqrt{1+4M}-1)} - 1 \right]. \quad (9)$$

Найденное значение κ является наибольшим: по мере увеличения отклонений амплитуд от постоянного значения периода процесса Λ возрастает (для траекторий, близких к границам области AOB , $\Lambda \rightarrow \infty$).

Отметим, что при $g \rightarrow \alpha$ все особые точки приближаются к началу координат; в частности, $M \simeq (1/3)(\operatorname{Re} \alpha/g - 1)$, а $\kappa \simeq (\operatorname{Re} \alpha - g)/\sqrt{3}$. Если же $g \rightarrow 0$, то особые точки A, B, M уходят в бесконечность. При $g \ll \operatorname{Re} \alpha$

$$M \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{Re} \alpha}{g} - \sqrt{\frac{\operatorname{Re} \alpha}{2g}} \right), \quad \kappa \simeq g M^{1/4} \simeq 2^{-1/4} g^{3/4} \alpha^{1/4}.$$

Следовательно, как при $g \rightarrow \operatorname{Re} \alpha$, так и при $g \rightarrow 0$ периодичность процесса исчезает; на интервале $0 < g < \operatorname{Re} \alpha$ функция $\kappa(g)$ имеет максимум.

Из (7) следует, что при $g = 0$ фазовые траектории представляют собой семейство гипербол:

$$(m_1 - A)(m_2 - A) = A. \quad (10)$$

Этот случай рассмотрен в работе [1].

4. Применим полученные результаты к изучению генерации активного слоя конечной толщины, ограниченного плоскостями $x = L_1$ и $x = L_2$. Если вне слоя имеются только расходящиеся от него волны, то граничные условия для модулей амплитуд имеют вид

$$m_1/m_2 = |r_1| \quad \text{при } x = L_1, \\ m_2/m_1 = |r_2| \quad \text{при } x = L_2,$$

где $r_{1,2}$ — коэффициенты отражения по мощности от границ слоя.

* Характер изменения W легко выяснить из рис. 1, если учесть, что эта величина постоянна на прямых $m_1 + m_2 = \text{const}$.

Проведем на фазовой плоскости (рис. 1) «границные» прямые $m_1 = |r_1|m_2$ и $m_2 = |r_2|m_1$. Фазовые траектории, соответствующие данному слою, должны начинаться на первой из этих прямых и кончаться на второй. Тем самым исключаются все траектории, расположенные вне области OAB , которую можно назвать областью генерации. Если наряду с r_1 и r_2 задана толщина слоя $L = L_2 - L_1$, то решение определяется теми кривыми, для которых интервал изменения x между границами прямыми равен L (аналитически выбор этих траекторий сводится к нахождению постоянных x_0 и A в решении (8) по заданным $|r_1|$, $|r_2|$ и L).

В случае $g = 0$ для данного слоя существует единственное возможное решение [1]. Особенности, обусловленные наличием объемных потерь, выясним сначала на примере слоя с непрозрачными стенками, положив $|r_1| = |r_2| = 1$ (учет потерь на излучение здесь не принципиален). При этом возможные траектории начинаются и кончаются на одной и той же прямой — биссектрисе, проходящей через особую точку M . Очевидно, что сама эта точка всегда является решением. Если, однако, толщина слоя L превосходит значение $\tau/2$, где $\tau = 2\pi/\alpha$ (х определяется формулой (9)), то появляются еще два возможных несимметричных решения (например, $\gamma a \gamma$ и $\gamma b \gamma$ на рис. 1). Если $L > \tau$, то к ним добавляются два новых решения, соответствующие полным оборотам по траектории ($\gamma a \gamma b \gamma$ и $\gamma b \gamma a \gamma$). При дальнейшем увеличении L появляется еще большее число решений, например, соответствующие полутора оборотам по рассматриваемой траектории и половине оборота по одной из траекторий большего радиуса и т. д. На рис. 3 показано несколько возможных распределений $W = m_1 + m_2$ в пространстве.

Таким образом, для слоя с $L > \tau/2$ имеется конечное число возможных различных стационарных нелинейных колебаний, происходящих с одной и той же частотой, причем с ростом толщины слоя L это число растет.

Все сказанное относится и к слою с излучением на границах. Однако в этом случае стационарные колебания возможны лишь при достаточно большой толщине слоя, именно, когда

$$L > L_{kp} = \frac{\ln(r_1 r_2)^{-1/2}}{k(\operatorname{Re}\alpha - g)}. \quad (11)$$

При $L \rightarrow L_{kp}$ величина $m_{1,2} \rightarrow 0$; поэтому формула (11) может быть получена из линейной теории. При достаточно большой толщине слоя решение также неоднозначно.

Существенный интерес представляет вопрос о выходной мощности лазера. Будем для простоты считать одну из границ слоя непрозрачной ($r_1 = 1$); тогда выходная мощность пропорциональна величине $E = m_1(L_2) - m_2(L_2) = (1 - r)m_1(L_2)$. В случае $g = 0$ максимум достигается при $r = 1$ (благодаря неограниченному росту поля внутри слоя) и равен $E_{max} = kL\operatorname{Re}\alpha$ [1]. Если $g \neq 0$, то поле в слое всегда конечно и $E = 0$ как при $r = r_{kp}$, так и при $r = 1$. При некотором $r = r_{opt}$ выходная мощность имеет максимальное значение.

Определить аналитически зависимость между E и r , как это было сделано в [1], здесь не удается. Однако качественный ход этой зависимости можно проследить на фазовой плоскости (рис. 1). Величина E чис-

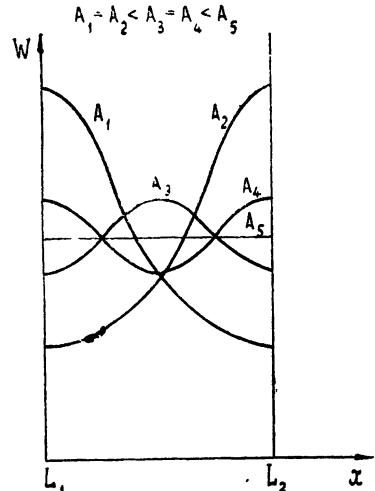


Рис. 3.

ленно равна расстоянию по вертикали точки на рис. 1, соответствующей правой границе слоя, от биссектрисы. При наличии нескольких возможных решений каждому из них отвечает свое значение выходной мощности. Можно показать, что значение E для всех типов решений всегда меньше, чем величина E_{\max} , имеющая место при $g = 0, r = 1$.

5. Определим теперь частотный спектр колебаний слоя. Возвращаясь к уравнениям (3) и (4), получим (аналогично [1]), что изменение фаз волн $\varphi_{1,2}$ и их амплитуд $m_{1,2}$ связаны между собой уравнениями

$$\frac{d\varphi_{1,2}}{dx} = -\frac{T_2 \Delta \omega}{2} \left(\frac{d}{dx} \ln m_{1,2} \pm gk \right), \quad (12)$$

откуда

$$\varphi_{1,2} = -\frac{T_2 \Delta \omega}{2} (\ln m_{1,2} \pm gkx) + D_{1,2} \quad (13)$$

($D_{1,2}$ — произвольная постоянная). На границах слоя фазы волн удовлетворяют условиям

$$(\varphi_2 - \varphi_1 + 2kx)_{x=L_1, L_2} = \pi p_{1,2}, \quad (14)$$

где $p_{1,2}$ — постоянные, задаваемые на каждой границе фазами коэффициентов отражения. Если, в частности, $r_{1,2}$ действительны (непосредственно на границах слоя находятся бесконечно тонкие зеркала), то $p_{1,2}$ — целые числа, четные или нечетные в зависимости от соотношения оптических плотностей вещества слоя и окружающей среды.

Подставляя (13) в (14), легко определить спектр возможных частот монохроматических колебаний $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$:

$$\omega_p = \omega_0 \frac{\pi p + \omega_0 T_2 [\ln(r_1 r_2)^{-1/2} + g k_0 L]}{2 k_0 L + \omega_0 T_2 [\ln(r_1 r_2)^{-1/2} + g k_0 L]}, \quad p = p_2 - p_1. \quad (15)$$

Свойства частот (15) при постоянном g аналогичны рассмотренным в [1] для случая $g = 0$. В частности, имеется конечное число частот, для которых выполнено условие (11). Значения частот не зависят от параметра подсветки n_0 . Если g зависит от ω , то (15) следует рассматривать как уравнение, определяющее ω_p . В этом последнем случае спектр частот лазера не эквидистантен.

Как уже отмечалось в [1], частоты (15) не совпадают с частотами самовозбуждения лазера, которые легко найти из линейной теории*.

Обозначив через Δ_0 разность соседних резонансных частот слоя, лишенного активных молекул, а через $(\Delta\omega)_{ct}$ — интервал между частотами (15), имеем

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{2 k_0 L}, \quad (\Delta\omega)_{ct} = \frac{\Delta_0}{1 + (\omega_0 T_2 / 2 k_0 L) [\ln(r_1 r_2)^{-1/2} + g k_0 L]}. \quad (16)$$

При выполнении условия генерации (11) всегда выполняется соотношение $\Delta_0 > (\Delta\omega)_{ct}$. Последнее представляется естественным в связи с тем, что наличие активных молекул увеличивает действительную часть диэлектрической проницаемости вещества.

* В отличие от (15) эти частоты зависят от характера подсветки и не эквидистантны. Совпадение между частотами стационарной генерации и частотами самовозбуждения будет лишь при $L = L_{kp}$.

Из сказанного ясно, что влияние объемных потерь на спектр колебаний лазера в качественном отношении такое же, как и влияние потерь на излучение.

Если коэффициенты отражения $r_{1,2}$ от границы слоя комплексны (например, если покрытие слоя имеет конечную толщину или на некоторых расстояниях от границ слоя имеются плоские зеркала), то спектр колебаний изменяется, т. е. величины p в (15) не целые. Распределение же амплитуды поля и мощность, излучаемая лазером, зависят только от модулей $|r_{1,2}|$.

6. Таким образом, для данного слоя имеется конечное число частот возможных стационарных колебаний. Если толщина слоя достаточно велика, то при $g \neq 0$ каждой частоте соответствует также конечное число колебаний (мод) с различными распределениями поля в пространстве и различными значениями выходной мощности.

Вопрос о том, какое именно из колебаний осуществляется в действительности (суперпозиция их, конечно, не является решением), может быть решен только после рассмотрения нестационарных процессов. Результат зависит, по-видимому, от формы начального возмущения при самовозбуждении лазера. Не останавливаясь здесь на этом вопросе, отметим только, что периодические в пространстве колебания могут оказаться более устойчивыми по отношению к колебаниям других частот, чем стоячая волна постоянной амплитуды (точка M), поскольку в них $m_1 \neq m_2$ (практически нет узлов поля), и высвечивание вещества происходит более равномерно (ср. [2]).

Авторы признательны А. В. Гапонову за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ, 46, 962 (1964).
2. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутян, ФТТ, 5, 2105 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 марта 1964 г.

ON STEADY-STATE LASER OSCILLATIONS WITH DISTRIBUTED LOSSES

L. A. Ostrovskii, E. I. Yakubovich

The electromagnetic oscillations have been considered in a plane active layer. It is taken into consideration that the energy losses in such a system may be stimulated not only by the radiation through the layer boundaries but also by the losses in the medium itself containing active molecules. The frequency spectrum of steady-state nonlinear oscillations and the corresponding space distributions of amplitude and phase have been found. It is shown, in particular, that the presence of volume losses in the layers thick enough leads to the ambiguous space distribution of field of the given frequency.

УДК 621.371.166

О НЕРЕЗОНАНСНОМ ПОГЛОЩЕНИИ РАДИОВОЛН В МОЛЕКУЛЯРНОМ КИСЛОРОДЕ

К. С. Станкевич

В работе подвергнута критике теория поглощения радиоволн в молекулярном кислороде, данная Ван-Флеком, в части, касающейся нерезонансного поглощения. Предложен механизм, позволяющий объяснить нерезонансное поглощение. Методом теории возмущений рассмотрена задача о поглощении радиоволн двухуровневыми парамагнитными молекулами газа при соударениях с учетом спин-спинового взаимодействия. Получено выражение для коэффициента поглощения.

В сантиметровом и дециметровом диапазонах ослабление радиоволн в атмосфере происходит за счет поглощения в молекулярном кислороде. Теория этого явления была дана Ван-Флеком [1]. Рассмотрение проведено на основе общего квантово-механического выражения для коэффициента поглощения, которое имеет вид

$$\Gamma = 10^5 (\log_{10} e) \left(\frac{8\pi^3 v N}{3hc} \right) \frac{\sum_{ij} \{ |\mu_{ij}|^2 f(v_{ij}) \} e^{-E_j/kT}}{\sum_j e^{-E_j/kT}} \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}, \quad (1)$$

где v_{ij} — частота перехода между стационарными уровнями E_i и E_j , μ_{ij} — матричный элемент магнито-дипольного момента и

$$f(v_{ij}, v) = \frac{v}{\pi v_{ij}} \left[\frac{\Delta v}{(v_{ij} - v)^2 + \Delta v^2} + \frac{\Delta v}{(v_{ij} + v)^2 + \Delta v^2} \right]$$

(Δv — полуширина линии поглощения). Согласно (1), коэффициент поглощения в молекулярном кислороде при нормальных атмосферных условиях запишется так [1]:

$$\begin{aligned} \Gamma = 0,34 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) & \left[\frac{\Delta v/c}{[2 - (v/c)]^2 + (\Delta v/c)^2} + \frac{\Delta v/c}{[2 + (v/c)]^2 + (\Delta v/c)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta v/c}{(v/c)^2 + (\Delta v/c)^2} \right] \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Последний член играет основную роль на волнах $\lambda > 1,5 \text{ см}$ и, таким образом, описывает поглощение в интересующем нас участке спектра:

$$\Gamma = 0,34 \frac{v^2}{c^2} \frac{\Delta v/c}{(v/c)^2 + (\Delta v/c)^2}. \quad (3)$$

Выражение (3) получено из (1) при рассмотрении диагональных членов, для которых частота перехода $v_{ii} = 0$ и матричный элемент магнито-дипольного момента $\mu_{ii} \neq 0$; оно имеет вид, аналогичный известному коэффициенту дебаевского поглощения дипольных молекул. Однако из-за столь формального введения нерезонансного поглощения (3) возникает вопрос о справедливости подобной операции. Действи-

тельно, для того, чтобы дебаевское поглощение имело место, необходимо, чтобы дипольная система обладала непрерывным энергетическим спектром, в котором были бы разрешены любые переходы. Молекула кислорода не имеет такой энергетической структуры, поскольку вращательные переходы запрещены правилами отбора, а на данном вращательном уровне спектр ограничен тремя уровнями тонкой структуры. Поэтому, если даже существовало бы дополнительное нерезонансное поглощение, отличное от поглощения на крыльях резонансной кривой, оно не должно совпадать с (3).

Кроме того, точное квантово-механическое решение задачи о поглощении в системе с дискретными постоянными уровнями [2] не содержит нерезонансного члена типа (3), и когда $\omega_l = 0$, коэффициент поглощения также равен нулю. Это показывает, что формальное введение Ван-Флеком нерезонансного члена вида (3) не оправдано. С другой стороны, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в дециметровом диапазоне поглощение превышает на несколько порядков величину, получающуюся за счет поглощения на крыльях линии резонансной кривой [3].

Ниже будет рассмотрен возможный механизм нерезонансного поглощения в молекулярном кислороде. Молекула кислорода имеет электронный спин $s = 1$ и, следовательно, обладает постоянным магнитным моментом, равным \hbar . Энергетическая структура молекулы хорошо известна. Она представляет собой $^3\Sigma_g^-$ состояние, при этом на каждом вращательном уровне $k = 1, 3, 5, \dots$ вырождение снято благодаря $j = k + s$ взаимодействию. Таким образом, каждому значению k соответствует три уровня с $j = k$ и $j = k \pm 1$. Для основного вращательного уровня $k = 1$ переходу $j = 1 \rightarrow j = 2$ соответствует длина волны $\lambda = 0,53 \text{ см}$ и переходу $j = 1 \rightarrow j = 0 \lambda = 0,25 \text{ см}$. В дальнейшем будем рассматривать только одну пару уровней.

Рассмотрим систему сталкивающихся молекул, имеющих постоянный дипольный момент μ , во внешнем поле $F(+)=F \sin(\omega t)$. Энергия взаимодействия между дипольными молекулами:

$$V_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{r_{ij}^3} - 3(\mu_i r_{ij})(\mu_j r_{ij})/r_{ij}^5; \quad (4)$$

ее удобно записать в виде [4]

$$V_{ij} = \frac{\gamma^2 \hbar^2}{r_{ij}^3} (A + B + C + D + E + F). \quad (5)$$

Из теории ядерного магнетизма [4] известно, что первые два члена в выражении (5) ответственны за явление спин-спиновой релаксации, которая приводит к уширению резонансных линий:

$$A = I_z I'_z (1 - 3 \cos^2 \vartheta); \quad (6)$$

$$B = -\frac{1}{4} [(I_{xj} + iI_{yj})(I_{xi} - iI_{yi}) + (I_{xi} + iI_{yi}) \times \\ \times (I_{xj} - iI_{yj})] (1 - 3 \cos^2 \vartheta). \quad (7)$$

Оператор A характеризует изменение энергии магнитного момента μ_i из-за локального магнитного поля, созданного μ_j в месте нахождения μ_i , оператор B описывает обменные процессы в спин-спиновой системе. Остальные члены в выражении (5) приводят к различного вида эффектам кросс-релаксации в системе, которую мы не будем рассматривать.

Выделим одну молекулу и будем рассматривать взаимодействие ее со всеми остальными. Пусть соударение с нею произошло в момент t_0 , и расстояние между столкнувшимися молекулами в момент t есть

$$r = d \left(1 + \frac{\bar{v}(t - t_0)}{d} \right) = d \left(1 + \frac{t - t_0}{a} \right),$$

где d — диаметр газокинетического сечения ($\sim 2 \cdot 10^{-8}$ см). Из (5) видно, что при тепловых скоростях молекул уже через 10^{-11} сек после момента соударения взаимодействием V_{ij} можно пренебречь. Поскольку следующее соударение при атмосферном давлении должно произойти в среднем через 10^{-10} сек, можно рассмотреть в V_{ij} только парные взаимодействия. Последнее несправедливо при высоких давлениях, когда значительна вероятность тройных соударений.

Выберем направление момента μ_i за ось z ; для двухчастичного взаимодействия будем иметь

$$V_A = \frac{(\gamma\hbar)^2 I_1 I_2}{d_0^3} (1 - 3 \cos^2 \vartheta) \left(1 + \frac{t - t_0}{a} \right)^{-3} = \hbar \omega^A; \quad (6)$$

$$V_B = \frac{(\gamma\hbar)^2}{d_0^3} B \left(1 + \frac{t - t_0}{a} \right)^{-3} = \hbar \omega^B. \quad (7)$$

Полный гамильтониан такой системы запишется в виде

$$H(t) = H_0^{(1)} + H_0^{(2)} + V^{(1)} \sin \omega t + V^{(2)} \sin \omega t + V^A + V^B,$$

где $H_0^{(i)}$ — собственный гамильтониан молекулы, $V^{(i)} = -(\mu^{(i)} F)$ — энергия взаимодействия диполя с внешним полем.

Будем описывать эту систему двухчастичной матрицей плотности с начальными условиями, определенными в момент соударения t_0 через матрицу плотности системы, находящейся в термодинамическом равновесии:

$$\rho(t_0) = ce^{-H(t_0)/kT}, \quad c = \text{Sp } e^{-H(t_0)/kT}. \quad (8)$$

После соударения изменение матрицы плотности во времени описывается уравнением движения в матричной форме:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\rho}_{mnm'n'} &= \sum_{kl} [H_{0mnkl}^{12} \rho_{klm'n'} - \rho_{mnkl} H_{0klm'n'}^{12}] + \\ &+ \sin \omega t \sum_{kl} [V_{mnkl}^{12} \rho_{klm'n'} - \rho_{mnkl} V_{klm'n'}^{12}] + \\ &+ \sum_{kl} [V_{mnkl}^{AB} \rho_{klm'n'} - \rho_{mnkl} V_{klm'n'}^{AB}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Матрица $V^{AB} = V^A + V^B$, на основании (6) и (7) имеет вид

$$V^{AB} = \begin{vmatrix} V_{1111}^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{2121}^A & V_{2112}^B & 0 \\ 0 & V_{1221}^B & V_{1212}^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{2222}^B \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Конечной целью наших вычислений должно явиться нахождение среднего дипольного момента одной из молекул, например, первой.

По определению [6].

$$\langle \mu^{(1)}(t) \rangle = \sum_{nm} \mu_{mm}^{(1)} \sum_{nn'} \rho_{m'n'mn} \delta_{nn'} = S \hat{\mu}^{(1)} \hat{\rho}^{(1)}, \quad (11)$$

где

$$\rho_{mm'}^{(1)} = \sum_n \rho_{mn'm'n}.$$

Таким образом, из всей совокупности $\rho_{mn'm'n'}$, даваемой уравнением (6), нам нужно найти только ρ_{1222} и ρ_{1121} .

Решение уравнения (6) проведем в предположении малости возмущающих членов ω^A и $\omega^B < \omega_{12}$. Тогда в представлении, в котором $H_0^{(1)}$ диагонален, система (9) запишется в виде

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\rho}_{1121} &= \hbar(\omega_{12} + 2\omega^A)\rho_{1121} - \hbar\omega^B\rho_{1112} + \sin(\omega t)(\rho_{2121} - \rho_{1111})F\mu_{12}^{(1)}; \\ i\hbar\dot{\rho}_{1112} &= \hbar(\omega_{12} + 2\omega^A)\rho_{1112} - \hbar\omega^B\rho_{1121} + \sin(\omega t)(\rho_{1212} - \rho_{1111})F\mu_{12}^{(2)}; \\ i\hbar\dot{\rho}_{1222} &= \hbar(\omega_{12} - 2\omega^A)\rho_{1222} + \hbar\omega^B\rho_{2122} + \sin(\omega t)(\rho_{2222} - \rho_{1212})F\mu_{12}^{(1)}; \\ i\hbar\dot{\rho}_{2122} &= \hbar(\omega_{12} - 2\omega^A)\rho_{2122} + \hbar\omega^B\rho_{1222} + \sin(\omega t)(\rho_{2222} - \rho_{2121})F\mu_{12}^{(2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Система (9) при $\omega^A(t) = \omega^B(t) = 0$ имеет строгое решение [5], которое для диагональных членов матрицы плотности ρ при малых амплитудах внешнего поля F (когда эффектами насыщения можно пренебречь) переходит в значение матрицы плотности в состоянии термодинамического равновесия.

Поэтому при решении (12) примем за нулевое приближение равновесное значение матрицы плотности для диагональных членов. Тогда искомые $\rho_{mn'm'n'}$ равны:

$$\begin{aligned} \rho_{1121} &= \frac{1}{2} e^{-i \int_{t_0}^t (\omega_{12} - 2\omega^A - \omega^B) dt} (\rho_{1121}^0 + \rho_{1112}^0) + \frac{1}{2} e^{-i \int_{t_0}^t (\omega_{12} + 2\omega^A + \omega^B) dt} (\rho_{1121}^0 - \rho_{1112}^0) - \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{F}{\hbar} [\mu_{12}^{(1)}(\rho_{2121}^0 - \rho_{1111}^0) + \mu_{12}^{(2)}(\rho_{1212}^0 - \rho_{1111}^0)] e^{-i \int_{t_0}^t (\omega_{12} + 2\omega^A - \omega^B) dt} \times \\ &\quad \times \int_{t_0}^t \sin(\omega t) e^{i \int_{t_0}^t (\omega_{12} + 2\omega^A - \omega^B) dt} dt - \frac{i}{2} \frac{F}{\hbar} [\mu_{12}^{(1)}(\rho_{2121}^0 - \rho_{1111}^0) - \mu_{12}^{(2)}(\rho_{1212}^0 - \rho_{1111}^0)] \times \\ &\quad \times e^{-i \int_{t_0}^t (\omega_{12} + 2\omega^A + \omega^B) dt} \int_{t_0}^t \sin(\omega t) e^{i \int_{t_0}^t (\omega_{12} + 2\omega^A + \omega^B) dt} dt; \\ \rho_{1222} &= \frac{1}{2} e^{i \int_{t_0}^t (\omega_{12} - 2\omega^A + \omega^B) dt} (\rho_{1222}^0 + \rho_{2122}^0) + \frac{1}{2} e^{-i \int_{t_0}^t (\omega_{12} - 2\omega^A - \omega^B) dt} (\rho_{1222}^0 - \rho_{2122}^0); \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{F}{\hbar} [\mu_{12}^{(1)}(\rho_{2222}^0 - \rho_{1212}^0) + \mu_{12}^{(2)}(\rho_{2222}^0 - \rho_{2121}^0)] e^{-i \int_{t_0}^t (\omega_{12} - 2\omega^A + \omega^B) dt} \times \\ &\quad \times \int_{t_0}^t \sin(\omega t) e^{i \int_{t_0}^t (\omega_{12} - 2\omega^A + \omega^B) dt} dt; \end{aligned} \quad (13)$$

$$-\frac{i}{2} \frac{F}{\hbar} [\mu_{12}^{(1)}(\rho_{2222}^0 - \rho_{1212}^0) - \mu_{12}^{(2)}(\rho_{2222}^0 - \rho_{2121}^0)] e^{-i \int_{t_0}^t (\omega_{12} - 2\omega^A - \omega^B) dt} \times \\ \times \int_{t_0}^t \sin(\omega t) e^{i \int_{t_0}^t (\omega_{12} - 2\omega^A - \omega^B) dt} dt.$$

С помощью выражений (13) можно найти молекулярную магнитную проницаемость, которая определяет коэффициент поглощения. В дальнейшем нас будет интересовать только дополнительное поглощение в системе за счет спин-спинового взаимодействия при соударениях.

Если в (13) положить $\omega^A = \omega^B = 0$, то $\rho_{mmt'n'} \equiv \rho_{mmt'n'}^{\text{невз}}$ будут описывать поведение невзаимодействующих молекул. Тогда можно показать, что производимое системой поглощение будет определяться выражением, полученным в [2]; это поглощение в соответствии с установленной терминологией будем называть резонансным:

$$\Gamma = \frac{1}{6} \frac{\omega^2}{c} \frac{N}{kT} \mu_{12}^2 \left[\frac{1/\tau}{(\omega - \omega_{12})^2 + 1/\tau^2} + \frac{1/\tau}{(\omega + \omega_{12})^2 + 1/\tau^2} \right] \times \\ \times \frac{1 - e^{-\hbar\omega_{12}/kT}}{\hbar\omega_{12}/kT} \rho_2^0. \quad (14)$$

Вычитая из (13) $\rho_{mmt'n'}^{\text{невз}}$, будем иметь матрицу плотности $\Delta\rho_{mmt'n'}$, которая характеризует спин-спиновое взаимодействие, приводящее к дополнительному поглощению. Поскольку это дополнительное поглощение на несколько порядков превышает поглощение, описываемое выражением (14) на частотах, далеких от резонанса, будем его называть нерезонансным.

С помощью (13) найдем выражение для $\Delta\rho_{mmt'n'}$:

$$\Delta(\rho_{1121} + \rho_{1222}) = \mu_{12}^{(12)} \frac{F}{\hbar} \frac{a}{\omega_{12}} \left(\omega_0^A + \frac{\omega_0^B}{2} \right) (\rho_{22}^{0(2)} - \rho_{11}^{0(2)}) (\rho_{22}^{0(1)} - \rho_{11}^{0(1)}) \times \\ \times e^{-i\omega_{12}(t-t_0)} \left\{ i \left(1 - \left(1 - \frac{t-t_0}{2} \right)^{-2} \right) \sin(\omega t_0) + \int_{t_0}^t \left(1 - \frac{t-t_0}{a} \right)^{-2} \times \right. \\ \left. \times \omega_{12} \sin(\omega t) e^{i\omega_{12}(t-t_0)} dt - \omega_{12} \left(1 - \frac{t-t_0}{a} \right)^{-2} \int_{t_0}^t \sin(\omega t) e^{i\omega_{12}(t-t_0)} dt \right\}. \quad (15)$$

Согласно общему определению, коэффициент поглощения

$$\Gamma = 4\pi \frac{\omega}{c} NJm\chi v_{\text{эфф}}, \quad (16)$$

где N — плотность молекул, χ — молекулярная магнитная проницаемость, которая определяется через дипольный момент системы:

$$\langle \mu(t) \rangle = \text{Re} (\chi F e^{-i\omega t}). \quad (17)$$

Комбинируя (11) и (17), можно определить χ .

В силу того, что соударения носят хаотический характер, момент последнего соударения t_0 может быть произвольным. Предполагая, что

вероятность соударения в интервале $t - \vartheta, t - \vartheta - d\vartheta$ есть $e^{-\delta/\tau} \tau^{-1} d\vartheta$, найдем средний магнитный дипольный момент одной молекулы и соответствующий коэффициент поглощения.

Выраженное в децибелах на километр нерезонансное поглощение двухуровневой системой

$$\Gamma = 10^6 (\lg e) \frac{1}{12} \frac{N^2}{c} \frac{\hbar \omega_{12}}{kT} \frac{\mu_0^2 + 2^{-1}(\mu_{12}^{(2)})^2}{\hbar kT} (\mu_{12}^{(1)})^2 \left(\frac{e^{-E_0/kT}}{\sum e^{-E_i/kT}} \right)^2 \times \\ \times \frac{\omega \tau^{-1} [\alpha \tau^{-1} \omega_{12} + |\omega_{12} - \omega|]}{(\omega_{12} - \omega) + \tau^{-2}}. \quad (18)$$

Выражение (18) получено методом теории возмущений и поэтому справедливо при малом сдвиге уровней. Этот случай реализуется при поглощении радиоволн молекулами кислорода на частотах, соответствующих линиям поглощения и на их крыльях вблизи резонанса. Форма линии поглощения на других частотах также будет определяться спин-спиновым взаимодействием, которое нужно вводить в рассмотрение с помощью методов, пригодных для сильных взаимодействий.

Как видно из (13), нерезонансное поглощение имеет небольшой максимум при $\omega = \omega_{12}$, который всего в несколько раз превышает значения Γ на частотах, существенно отличающихся от ω_{12} , и более плавно уменьшается в сторону $\omega > \omega_{12}$. Проведенные оценки показывают, что величина Γ , вычисленная с помощью (18), находится в хорошем согласии с экспериментальными данными.

На частотах порядка 10^{12} Гц проведенное рассмотрение будет несправедливым, поскольку период внешнего поля станет сравним с длительностью процесса соударения.

Определим зависимость коэффициента нерезонансного поглощения (18) от высоты над уровнем моря. Поскольку Γ является функцией давления и температуры вида $p^3 T^{-9/2}$, то, принимая для p и T зависимость от высоты, характерную для стандартной атмосферы, будем иметь эффективную высоту для коэффициента поглощения $H_{\text{эфф}} \approx 4 \text{ км}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., **71**, 413 (1947).
2. R. Karpplus, J. Schwinger, Phys. Rev., **73**, 1020 (1948).
3. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **6**, 1098 (1963).
4. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
5. H. S. Snyder, P. I. Richards, Phys. Rev., **73**, 1178 (1948).
6. D. ter Haar, Rep. Progress Phys., **24**, 304 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 февраля 1964 г.

ON NONRESONANCE RADIOWAVES ABSORPTION IN MOLECULAR OXYGEN

K. S. Stankovich

In the work a part (concerning the nonresonance absorption) of the theory of radiowaves absorption in molecular oxygen given by Van-Vleck is criticized. The mechanism has been proposed permitting to explain the nonresonance absorption. By the perturbation method the problem of radiowaves absorption has been considered by two-levels paramagnetic molecular of a gas when spin-spin interaction being taken into account in collisions. The expression has been obtained for the absorption coefficient.

УДК 538.56 519 25

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ НАД СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

И. М. Фукс

Методом возмущений вычислены интенсивность и корреляционные функции флуктуаций скалярного волнового поля над статистически неровной поверхностью (абсолютно мягкой и абсолютно жесткой) в предельных случаях крутого и скользящего распространения. В большинстве рассмотренных случаев удается решить обратную задачу—восстановить корреляционную функцию высот точек поверхности $W(\rho)$ по известным корреляционным функциям флуктуаций поля. Получена связь между радиусами корреляции флуктуаций поля в пространстве и корреляционными радиусами поверхности вне зависимости от конкретного вида $W(\rho)$. Некоторые из полученных результатов переносятся на флуктуации электромагнитного поля точечного вертикального диполя, расположенного на идеально проводящей неровной поверхности.

Для решения задачи о рассеянии волн на статистически неровных поверхностях используется ряд приближенных методов. Весьма универсальным является метод возмущений для поверхностей с пологими неровностями [1], с помощью которого удалось рассчитать среднее поле источника электромагнитных волн над такой поверхностью. В работе [2] были получены некоторые результаты и для флуктуационной составляющей поля плоской электромагнитной волны, отраженной от статистически неровной площадки конечных размеров.

В настоящем сообщении методом возмущений [1] рассмотрен вопрос об интенсивности и корреляционных функциях флуктуаций скалярного волнового поля точечного источника над бесконечной статистически неровной поверхностью — абсолютно мягкой и абсолютно жесткой. Исследована возможность решения обратной задачи—восстановления по этим характеристикам корреляционной функции возвышений подстилающей поверхности $W(\rho) = \overline{\zeta(r+\rho)\zeta(r)}$ (чертка означает усреднение по ансамблю реализаций стационарной случайной функции $z = \zeta(r)$). В отличие от работ [4, 5], где найдены корреляционные функции поля над абсолютно мягкой поверхностью с одномерными квазигармоническими неровностями, мы по возможности не конкретизируем вида корреляционной функции поверхности*. Это, естественно, приводит к некоторому сужению круга рассмотренных предельных случаев по сравнению с [4, 5], но зато позволяет исследовать вопрос о возможности решения обратной задачи и об устойчивости полученных результатов относительно различных модельных предположений.

1. ФЛУКТУАЦИИ ПОЛЯ

Поле $\Psi(R) e^{-i\omega t}$ точечного монохроматического источника, находящегося над статистически неровной поверхностью $z = \zeta(r)$ (r — радиус-

* Будем, однако, считать известными хотя бы по порядку величины характеристические расстояния l_x , l_y , на которых $W(\rho)$ существенно убывает,—так называемые радиусы корреляции.

вектор в плоскости xy), представим в виде суммы среднего поля $\bar{\Psi}$ и флюктуирующей составляющей ψ [3,6]. Для флюктуаций поля над мягкой поверхностью в первом приближении теории возмущений имеет место формула [6]

$$\psi(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{z'=0} V(\mathbf{R}-\rho) \zeta(\rho) \frac{\partial \bar{\Psi}(\rho)}{\partial z'} d\rho; \quad V(\mathbf{R}) = \frac{e^{ikR}}{R} \quad (1)$$

(множитель $e^{-i\omega t}$, как обычно, опускаем).

В случае жесткой поверхности, когда выполняется граничное условие

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{z=\zeta(r)} = 0, \quad (2)$$

методом, указанным в [3], легко получить аналогичное выражение

$$\psi(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi} \int_{z'=0} V(\mathbf{R}-\rho) \left\{ \zeta(\rho) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(\rho)}{\partial z'^2} - \gamma(\rho) \nabla \bar{\Psi}(\rho) \right\} d\rho. \quad (3)$$

Здесь $\gamma(\rho) = \nabla \zeta(\rho)$, а ∇ — двухмерный плоский вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ соответственно. Среднее поле над мягкой поверхностью было найдено Бассом в работе [6]; для жесткой поверхности соответствующие формулы приведены в Приложении*.

Из формул работы [6] видно, что эффективный коэффициент отражения f_μ (см. Приложение) от статистически неровной мягкой поверхности при всех допустимых значениях параметров близок к -1 . Поэтому для поднятого источника ($kz_0 \gg \eta_\mu$, η_μ — эффективный импеданс поверхности) в волновой зоне $\bar{\Psi}$ в (1) можно заменить на $\bar{\Psi}_0$ — поле точечного источника над абсолютно мягкой плоскостью (поле нулевого приближения). В случае крутого падения волн (или высоко поднятых корреспондирующих точек), когда

$$k \cos \theta \frac{zz_0(z+z_0)}{z_0^2 + z^2} \gg 1, \quad (4)$$

показатели экспонент в (1) можно разложить в ряд вблизи точки стационарной фазы $r_0 = z_0(z_0+z)^{-1} r$ и ограничиться квадратичными членами. Считая, что в безграничной среде $\bar{\Psi}(\mathbf{R}) = e^{ikR}/R$, и вынося медленно меняющиеся множители за знак интеграла, получим

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{R}) &= \frac{k^2 \cos^2 \theta}{\pi R_{10} R_{20}} e^{ik(R_{10}+R_{20})} \times \\ &\times \int \exp \left[i \frac{kp_1^2}{R_0} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi_1) \right] \zeta(r_0 + \rho_1) d\rho_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены обозначения (см. рис. 1)

$$R_{10}^2 = z_0^2 + r_0^2; \quad R_{20}^2 = z^2 + (r - r_0)^2; \quad \sin \theta = \frac{r_0}{R_{10}} = \frac{r - r_0}{R_{20}};$$

* На необходимость решения задачи о среднем поле над жесткой поверхностью указал Л. М. Бревоховских.

$R_0 = 2R_{10}R_{20}(R_{10} + R_{20})^{-1}$ — приведенное расстояние, φ_1 — угол между векторами r_1 и r_0 .

При $kz \ll \cos \theta$ (опущенный приемник) из граничного условия $\Psi(z=\zeta(r))=0$ непосредственно следует

$$\psi(r) = -\zeta(r) \frac{\partial \bar{\Psi}(r)}{\partial z} \quad \text{при } z=0. \quad (6)$$

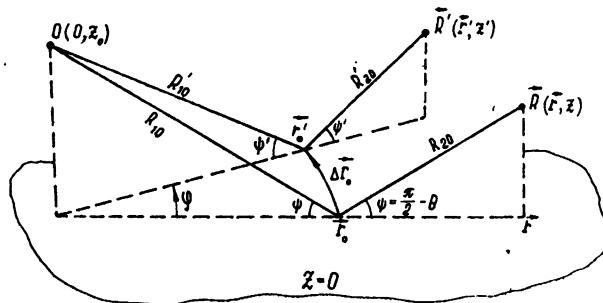


Рис. 1.

В том случае, когда источник и точка наблюдения опущены на поверхность ($z, z_0 \rightarrow 0$), в (6) следует учитывать отличие $\bar{\Psi}$ от Ψ_0 . Записывая $\bar{\Psi}$ при $z = 0$ в виде суммы первичного поля источника и суперпозиции плоских волн, отраженных от плоскости $z = 0$ с коэффициентами отражения $f_\mu(\theta)$, получим в волновой зоне [7]

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} = \frac{e^{ikR_{10}}}{R_{10}^2} \left\{ [f_\mu(\theta) - 1] ikz_0 + \sin^2(\theta) \frac{\partial f_\mu(\theta)}{\partial \cos \theta} \right\}. \quad (7)$$

Переходя в (7) к пределу $z_0 \rightarrow 0$ (точнее, $kz_0 \ll \eta_\mu$ при $\theta = \pi/2$) и подставляя в (6), получим для флюктуаций поля при $z = 0$ выражение

$$\psi(r) = -\zeta(r) \eta_\mu \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) \frac{e^{ikr}}{r^2}. \quad (8)$$

Таким образом, флюктуации поля при $z, z_0 \rightarrow 0$, во-первых, быстро убывают с расстоянием (по интенсивности как r^{-4}) и, во-вторых, оказываются величинами третьего порядка малости. Среднее поле при этом точно обращается в нуль. Так как производные $\partial^n \bar{\Psi} / \partial z^n$ вплоть до $n = 3$ равны нулю, то легко убедиться, что полученное выражение (8) является единственным членом третьего порядка, отличным от нуля.

Коэффициент отражения f_g от жесткой поверхности имеет полюс при малых углах скольжения $\cos \theta = -\eta_g$ (см. Приложение). Однако, если выполнено неравенство (4) (т. е. $kz_{\min} \cos \theta \gg 1$) и распространение — не скользящее ($\cos \theta \gg \eta_g$), то в (3) можно сделать те же приближения, что и при переходе от (1) к (5). Таким образом, для флюктуаций $\psi_g(R)$ над жесткой поверхностью получаем

$$\begin{aligned} \psi_g(R) &= -\frac{e^{ik(R_{10}+R_{20})}}{\pi R_{10}R_{20}} \int \exp \left[ik \frac{\rho_1^2}{R_0} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi_1) \right] \times \\ &\times \left[k^2 \cos^2 \theta \zeta(r_0 + \rho_1) + ik \frac{\gamma(r_0 + \rho_1)r_0}{R_{10}} \right] d\rho_1 = \\ &= - \left[1 + \frac{i \sin \theta}{k \cos^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r_0} \right)_{\theta, R_0} \right] \psi_\mu(R), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\psi_\mu(\mathbf{R})$ — флуктуации (5) над мягкой поверхностью с теми же статистическими свойствами и дифференцирование по dr_0 происходит при постоянных R_0 и θ . Там, где это не вызывает недоразумений, мы, как и раньше, будем опускать индексы g и μ .

При скользящем распространении $(z, z_0 \rightarrow 0)$ $\bar{\Psi}$ описывается, как известно, нормальной функцией ослабления; поэтому заменить $\bar{\Psi}$ на Ψ_0 в (3) можно только при

$$|s| = \sqrt{\frac{kr}{2}} \eta_g \ll 1 \quad (10)$$

(s — так называемое численное расстояние). Ввиду малости импеданса η_g ,^{*} расстояния r при этом могут быть значительными. Относительно формулы (3) следует сделать еще одно существенное замечание. Заменив $\bar{\Psi}$ на Ψ_0 и выполнив дифференцирование, можно убедиться, что интеграл в правой части (3) логарифмически расходится при малых $k\rho$. Это связано с тем, что ряд теории возмущений расходится в непосредственной близости от источника $k\rho \leq 1$, так как при каждом дифференциировании появляется множитель $(k\rho)^{-1}$. Поэтому допустим, что вблизи источника отсутствуют неровности или поверхность при малых $k\rho$ вообще не освещается. При этом интеграл (9) очень слабо (логарифмически) зависит от размеров исключаемой из рассмотрения области. Ограничиваясь поэтому в подынтегральном выражении членами с $k\rho \gg 1$ и распространяя интегрирование по-прежнему на всю плоскость $z' = 0^{**}$, получаем для флуктуаций поля над жесткой поверхностью (при $z, z_0 \rightarrow 0$)

$$\psi(r) = -\frac{ik}{\pi} \int_{z'=0}^r \frac{e^{ik|r-\rho|+\rho}}{|r-\rho|^2} \rho \gamma(\rho) d\rho. \quad (11)$$

2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛЯ НАД МЯГКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Исследуем корреляционную функцию $K(\mathbf{R}; \mathbf{R}') \equiv \overline{\psi(\mathbf{R}) \psi^*(\mathbf{R}')}}$ флуктуаций поля в точках \mathbf{R} и \mathbf{R}' над мягкой поверхностью при скользящем распространении, когда выполняется неравенство (4).

1. Рассмотрение начнем со случая азимутального разнесения точек \mathbf{R} и \mathbf{R}' , когда $\theta = \theta'$, $R_0 = R'_0$, $\varphi \neq 0$ (см. рис. 1). Из (5) получаем

$$K(\mathbf{R}; \mathbf{R}')_{\theta=R_0} = \frac{|A|^2 \pi R_0}{k \sin^2 \theta \sin \varphi} \int d\rho W(\Delta r_0 + \rho) \times \\ \times \exp \left[-\frac{ik \operatorname{ctg}^2 \theta}{R_0} (\xi^2 - \eta^2 + 2\xi \eta \operatorname{ctg} \varphi) \right]. \quad (12)$$

Здесь ξ и η — параллельная и перпендикулярная к r'_0 составляющие вектора ρ ,

$$A = \frac{k^2 \cos^2 \theta}{\pi R_{10} R_{20}} e^{ik(R_{10} + R_{20})}; \quad \Delta r_0 = r'_0 - r_0.$$

* Условие малости η_g совпадает с условиями применимости метода возмущений [1]: $\gamma \ll 1$, $\sigma \sqrt{\xi^2} \ll \sqrt{\lambda} l$; $\bar{\lambda} \equiv k^{-1}$ ($\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$).

** Так как $kr \gg 1$, то добавление уже сходящегося интеграла по неволновой зоне не влияет на окончательный результат.

При произвольной функции W интеграл (12) можно вычислить в общем виде только в следующих предельных случаях.

а) Для малых азимутальных углов φ :

$$\left(\frac{b \operatorname{tg} \theta}{l}\right)^{2;4} \sin^2 \varphi \ll 1; \quad \left(\frac{l}{\Delta r_0}\right)^2, \quad (13)$$

где $b = \sqrt{\lambda R_0}$ — поперечный размер первой зоны Френеля, а l при оценках считается одного порядка во всех направлениях. Тогда определяющую роль в (12) играет быстро осциллирующий экспоненциальный множитель, и W можно вынести за знак интеграла в точке стационарной фазы $\rho=0$:

$$K(R; R')_{\theta, R_0} = \frac{4k^2 \cos^2 \theta}{(R_{10} + R_{20})^2} W(\Delta r_0). \quad (14)$$

б) Для больших азимутальных углов разнесения:

$$\left(\frac{b \operatorname{tg} \theta}{l}\right)^{2;4} \sin^2 \varphi \gg 1, \quad \left(\frac{b \operatorname{tg} \theta}{l}\right)^4 \sin^2 \varphi \gg \left(\frac{\Delta r_0}{l}\right)^2. \quad (15)$$

Тогда роль быстро меняющейся функции под интегралом играет W , и (12) принимает вид

$$K(R; R')_{\theta, R_0} = \frac{4k^2 \cos^2 \theta}{\pi (R_{10} + R_{20})^2 (b \operatorname{tg} \theta \sin \varphi)^2} e^{i(\Delta r_0/b \operatorname{tg} \theta)^2} \int W(\rho) d\rho. \quad (16)$$

Отметим, что в силу неравенств (15) корреляция в этом случае значительно меньше, чем при небольших разнесениях (14).

Формулы (13) — (16) позволяют оценить величину того расстояния $\Delta y)_{\theta, R_0}$, при разнесении на которое корреляция флуктуаций существенно убывает (поперечный радиус корреляции). Из (14) следует, что

$$(\Delta y)_{\theta, R_0} \leq \frac{r}{r_0} l. \quad (17)$$

В тех случаях, когда формула (14) неприменима, функция корреляции, как было отмечено, существенно убывает. Поэтому неравенства (13) и (15) также ограничивают сверху поперечный радиус корреляции

$$(\Delta y)_{\theta, R_0} \leq r \left(\frac{l \operatorname{ctg} \theta}{b}\right)^{1:2}. \quad (18)$$

Объединяя две последние формулы, получаем

$$(\Delta y)_{\theta, R_0} \sim \min \left\{ \frac{r}{r_0} l, r \left(\frac{k l^2}{R_0 \operatorname{tg}^2 \theta}\right)^{1/2:1} \right\}. \quad (19)$$

Решение обратной задачи в рассматриваемом случае поперечных разнесений очевидно, если область применимости формулы (14) достаточно велика ($\Delta r_0 \sim l$), т. е. когда ограничение (18) несущественно. Это имеет место при

$$k l \operatorname{ctg} \theta \cos \theta \frac{(z_0 + z)^2}{z z_0} \gg 1. \quad (20)$$

2. Перейдем к исследованию корреляционной функции для точек наблюдения, лежащих в одной азимутальной плоскости ($\varphi=0$; $R_0 \neq R'_0$; $\theta \neq \theta'$). Из (5) получаем

$$K(\mathbf{R}; \mathbf{R}')_{\varphi=0} = \frac{i\pi AA'^* aa'bb'}{\sqrt{\Delta a^2 \Delta b^2}} \int d\rho W(\Delta r_0 + \rho) e^{-i(\xi^2/\Delta a^2 + \eta^2/\Delta b^2)}. \quad (21)$$

Здесь все величины со штрихом относятся к точке \mathbf{R}' ; $a = \frac{\sqrt{\lambda R_0}}{\cos \theta}$ —

продольный (вдоль r_0) размер первой зоны Френеля, $\Delta a^2 = a'^2 - a^2$, $\Delta b^2 = b'^2 - b^2$.

Как и ранее, рассмотрим два предельных случая.

а) Если точки наблюдения \mathbf{R} и \mathbf{R}' разнесены так, что приращения квадратов линейных размеров зоны Френеля удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\Delta a^2}{4W(\Delta r_0)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} W(\rho) \Big|_{\rho=\Delta r_0} \ll 1, \quad \frac{\Delta b^2}{4W(0)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} W(\rho) \Big|_{\rho=0} \ll 1, \quad (22)$$

то, вынося W из-под интеграла в точке стационарной фазы $\rho = 0$, получаем

$$K(\mathbf{R}; \mathbf{R}')_{\varphi=0} = \frac{4k^2 \cos \theta \cos \theta'}{(R_{10} + R_{20})(R'_{10} + R'_{20})} e^{-ik(\Delta R_{10} + \Delta R_{20})} W(\Delta r_0); \quad (23)$$

$$\Delta R_{i0} = R'_{i0} - R_{i0} \quad (i=1,2).$$

б) В другом предельном случае, когда W — быстро меняющаяся функция по сравнению с экспонентой, т. е.

$$\begin{aligned} \Delta a^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{W(\rho)} \frac{\partial}{\partial \xi} W(\rho) \right]_{\rho=\Delta r_0} &\gg 1, \quad \frac{(\Delta r_0)^2}{\Delta a^2}, \\ \Delta b^2 \left[\frac{1}{W(\rho)} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} W(\rho) \right]_{\rho=0} &\gg 1, \end{aligned} \quad (24)$$

формула (21) принимает вид

$$\begin{aligned} K(\mathbf{R}; \mathbf{R}')_{\varphi=0} &= \frac{4ik^2 \cos \theta \cos \theta'}{\pi(R_{10} + R_{20})(R'_{10} + R'_{20}) \sqrt{\Delta a^2 \Delta b^2}} \times \\ &\times e^{-i[k(\Delta R_{10} + \Delta R_{20}) + (\Delta r_0)^2/\Delta a^2]} \int W(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (25)$$

Как и в случае азимутальных разнесений, можно оценить те расстояния, на которых флуктуации поля перестают коррелировать. Рассматривая смещения при постоянных z или θ и пользуясь неравенствами (22) — (24), получаем характерные размеры области корреляции:

$$(\Delta\theta)_z \sim \min \left\{ \frac{l}{z_0} \cos^2 \theta, \frac{kl^2(z_0+z)}{z_0 z} \operatorname{ctg} \theta \cos^3 \theta \right\}; \quad (26a)$$

$$(\Delta z)_\theta \sim \frac{kl^2(z_0+z)^2}{z_0^2} \cos^3 \theta. \quad (26b)$$

Если рассматривать смещения при постоянных θ или $\rho_0 \equiv R_{10} + R_{20}$ (расстояние от мнимого источника), то соответствующие корреляционные радиусы определяются из условия

$$(\Delta\theta)_{\rho_0} \sim \min \left\{ \frac{l \cos^2 \theta}{z_0}; \quad \frac{kl^2 \rho_0 \cos^5 \theta}{z_0 \sin \theta (3z_0 - 2\rho_0 \cos \theta)} \right\}; \quad (27a)$$

$$(\Delta \rho_0)_\theta \sim \frac{k l^2 \rho_0^2 \cos^4 \theta}{z_0^2}. \quad (276)$$

Заметим, что если бы формула (23) была справедлива при любой величине разнесения, то во всех точках, лежащих на одной прямой, проведенной через мнимый источник ($\theta = \text{const}$, изменяется ρ_0), поля были бы полностью коррелированы, так как $\Delta r_0 = 0$. Неравенство (276) ограничивает размер области корреляции и в этом направлении. Совокупность формул (19), (26) и (27) определяет, таким образом, некий «корреляционный объем», позволяя оценить радиусы корреляции при произвольном направлении разнесения точек наблюдения. Приведенные оценки радиусов корреляции (26), (27) качественно совпадают с вычисленными в [5] для одномерных неровностей с квазигармонической функцией корреляции.

Корреляционная функция $W(\rho)$ может быть восстановлена по $K(R, R')$ из формулы (23) при условии, что неравенства (22) не нарушаются вплоть до $\Delta r_0 \sim l$. При этом должно выполняться неравенство

$$kl \operatorname{ctg} \theta \cos \theta \frac{z_0 + z}{z} \gg 1. \quad (28)$$

Из (20) и (28) видно, что решение обратной задачи тем точнее, чем больше параметр kl и характерные углы скольжения. При этом, как следует из (266) и (276), корреляционный радиус в направлениях, перпендикулярных к плоскости xy или вдоль отраженного луча, при $\theta \sim 1$ оказывается в kl раз большим (отвлекаясь для простоты от множителей, зависящих от θ и z), чем в направлениях, параллельных плоскости, где он порядка l . Эти результаты качественно совпадают с результатами, полученными в [8], где был рассмотрен вопрос о корреляциях поля, создаваемого случайными источниками, статистически однородно расположенным в плоскости $z = 0$. Здесь в такой роли выступают виртуальные источники, наведенные первичным полем и имеющие случайную амплитуду за счет неровностей поверхности (см. формулы (1) и (3)).

При произвольных kl поле коррелировано так же, как и точки поверхности (в смысле формул (14), (23)) только на малых расстояниях z от поверхности, таких, что выполняются (20), (28). Для $z \rightarrow 0$ это непосредственно следует из формулы (6).

При скользящем распространении ($z_0, z \rightarrow 0$) флюктуации поля связаны с возвышениями поверхности формулой (8). Легко видеть, что в этом случае, как и при $z = 0$ ($z_0 \neq 0$), $K(r, r') \sim W(r - r')$.

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛЯ НАД ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассмотрим теперь вопрос о корреляционных функциях флюктуаций поля над жесткой поверхностью.

При скользящем распространении (в смысле (4)) из формулы (9) следует, что

$$K_g(R; R') = \left(1 + \frac{i \sin \theta}{k \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial r_0} \right) \left(1 - \frac{i \sin \theta'}{k \cos^2 \theta'} \frac{\partial}{\partial r'_0} \right) K_\mu(R; R'). \quad (29)$$

Согласно (29), при $kl \operatorname{ctg} \theta \cos \theta \gg 1$ корреляционные функции поля над жесткой и над мягкой поверхностью совпадают.

В тех случаях, когда для $K_\mu(R; R')$ можно пользоваться формулами (14) или (23), решение обратной задачи — выражение $W(\Delta r_0)$ через $K_g(R; R')$ — сводится к решению линейного дифференциального

уравнения второго порядка. В частности, если точки \mathbf{R} и \mathbf{R}' разнесены так, что $\varphi = 0$ и $R_{10} + R_{20} = R'_{10} + R'_{20} = \rho_0$, т. е. лежат в плоскости xz на одной окружности с центром в мнимом источнике и поверхность статистически изотропна, то

$$W(\rho) = - \left(\frac{R_{10} + R_{20}}{2 \operatorname{tg} \theta} \right)^2 \int_0^\rho K_g(\mathbf{R}; \mathbf{R}')_{\rho_0, \varphi=0} \exp [ik(\Delta r_0 - \rho) \operatorname{ctg} \theta \cos \theta] \times \\ \times (\rho - \Delta r_0) d(\Delta r_0) + \sigma^2 \exp [-ik\rho \operatorname{ctg} \theta \cos \theta] (ik\rho \operatorname{ctg} \theta \cos \theta + 1). \quad (30)$$

Здесь $K_g(\mathbf{R}; \mathbf{R}')$ нужно рассматривать как функцию Δr_0 при постоянном в данном случае параметре ρ_0 . Если же поверхность анизотропна, то $W(\rho)$ в (30) есть корреляционная функция высот точек кривой, получающейся в сечении поверхности $z = \zeta(r)$ нормальной к xy плоскостью, проходящей через \mathbf{R} и \mathbf{R}' . Очевидно, что для получения полной корреляционной функции $W(\rho, \varphi)$ азимут этой плоскости нужно менять.

При скользящем распространении ($z, z_0 \rightarrow 0$) рассмотрим отдельно корреляционные функции для случаев продольного ($\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2$) и азимутального ($\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \perp \mathbf{r}_1$) разнесения точек наблюдения.

1. Пусть $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2$. Исходя из (11), путем несложных, но довольно громоздких вычислений получаем (здесь и в дальнейшем $\mathbf{x} \parallel \mathbf{r}_1$):

$$K(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) = K(\Delta, r) = -4V\bar{i} \left(\frac{k}{\pi} \right)^{3/2} e^{-2ik\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} dy \times \\ \times \left[\int_{\Delta}^r dx \int_{-r+x-\Delta}^{r-x-\Delta} d\xi + \int_0^{\Delta} dx \int_{-r-x+\Delta}^{r-x-\Delta} d\xi \right] \exp \left[\frac{ik(\Delta^2 - r^2)y^2}{\Delta(\xi^2 + r^2 + x^2 - \Delta^2) + 2r\xi} \right] \times \\ \times \left[\frac{d^2 W(x + \Delta, y)}{dx^2} + \frac{d^2 W(x - \Delta, y)}{dx^2} \right]; \quad (31)$$

$$2\Delta = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1; \quad 2r = \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1.$$

При выводе этой формулы были сделаны несущественные предположения о том, что $r \gg \Delta, l_x; V\bar{k}r \gg l_x/l_y$.

Рассмотрим два предельных случая, когда интегрирование по dy и $d\xi$ может быть выполнено в общем виде.

а) $kl_y^2 \gg l_x; \Delta$. В этом случае зависимость от поперечной координаты y несущественна и определяющую роль в интеграле по dy играет быстро осциллирующая экспонента. Выполняя в (31) интегрирование по $d\xi$, получим

$$K(\Delta, r) = e^{-2ik\Delta} \left[\frac{1}{2} J(r) - \frac{2k}{\pi r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(x, y=0)}{dx} \frac{dx}{x - 2\Delta} \right]. \quad (32)$$

Здесь $J(r)$ есть интенсивность флюктуаций:

$$J(r) \equiv K(\Delta=0, r) = - \frac{8k}{\pi r^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \frac{dW(x, y=0)}{dx} dx. \quad (33)$$

Из последней формулы видно, что интенсивность флуктуаций поля имеет порядок $k\sigma^2 l_x^{-1}$ и убывает с расстоянием как r^{-2} , т. е. амплитуда относительных флуктуаций в этом случае не зависит от расстояния. Корреляционная функция, как следует из (32), убывает в два раза уже при небольших разнесениях $2\Delta \sim l_x$; при этом она существенно зависит от функционального вида $W(x, y=0)$.

Формула (32) позволяет в данном случае решить и обратную задачу. Действительно, пользуясь известным свойством преобразования Гильберта (см., например, [9]), получаем

$$\frac{dW}{dx}(x, y=0) = -\frac{r^2}{2k\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Delta}{x-2\Delta} \tilde{K}(\Delta, r); \quad (34)$$

$$\tilde{K}(\Delta, r) \equiv 2K(\Delta, r) e^{2ik\Delta} - J(r).$$

б) $kl_y^2 \ll \max(l_x, \Delta)$. При этом изменения экспоненты в существенной для интегрирования по dy области в (31) можно пренебречь и после несложных, но громоздких вычислений, получим

$$K(\Delta, r) = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{k}{\pi} \right)^{3/2} e^{-2ik\Delta} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{1+i}{\sqrt{\xi}} + \frac{1-i}{\sqrt{\xi+2\Delta}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{2\Delta}^{\infty} \left(\frac{1+i}{\sqrt{\xi-2\Delta}} + \frac{1-i}{\sqrt{\xi}} \right) \right] \frac{d^2 \tilde{W}}{d\xi^2} d\xi + \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_{-2\Delta}^{\infty} \frac{1+i}{\sqrt{2\Delta+\xi}} + \frac{1}{2} \int_{2\Delta}^{\infty} \frac{1-i}{\sqrt{\xi-2\Delta}} \right] \ln \frac{16r^2}{|\xi(2\Delta-\xi)|} \frac{d^2 \tilde{W}}{d\xi^2} d\xi \right\}; \\ \tilde{W}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) dy.$$

При $\Delta=0$ получаем для интенсивности флуктуаций простую формулу:

$$J(r) = -\frac{4}{r^2} \left(\frac{k}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{\pi}{2} + \ln \frac{4r}{x} \right) \frac{d^2 \tilde{W}(x)}{dx^2} dx. \quad (36)$$

Из (36) видно, что относительная интенсивность флуктуаций поля имеет порядок $(l_y/l_x) \left(1 + \ln \frac{4r}{l_x} \right) (k\sigma)^2 (kl_x)^{-1/2}$ и при $\ln(r/l_x) \gg 1$ логарифмически растет с увеличением расстояния r . Как и в предыдущем пункте а), корреляционная функция (35) убывает в два раза на расстояниях $\Delta \sim l_x$ и поведение ее существенно зависит от вида $\tilde{W}(x)$; однако ввиду сложности выражения (35) решить обратную задачу в этом случае не удается. При больших разнесениях, когда $\Delta \gg l_x$ (и по-прежнему $r \gg \Delta \gg kl_y^2$), из (35) получаем асимптотическую формулу

$$K(\Delta, r) \simeq e^{-2ik\Delta} \left[\frac{1}{2} J(r) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{k}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{1}{V\xi} \ln \frac{\xi}{2\Delta} \frac{d^2 \tilde{W}(\xi)}{d\xi^2} d\xi \right] \\ \left(\ln \frac{r}{l_x} \gg 1 \right). \quad (37)$$

Таким образом, корреляция флюктуаций от значения $\frac{1}{2}J(r)$ при $\Delta \sim l_x$ начинает логарифмически убывать с ростом Δ .

2. Для корреляции флюктуаций при азимутальном разнесении точек наблюдения на угол $\varphi = \frac{\Delta}{r}$ с помощью аналогичных вычислений получаем

$$K(\varphi, r) = -\frac{2k^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi i}{kr}} \int_{-\infty}^\infty dy \int_0^r \frac{d^2 W(x, y)}{dx^2} \frac{dx}{Vx} \int_0^{r-x} \frac{d\xi}{r^2 - \xi^2} \times \\ \times [F(\xi, x) - iF(\xi, -x)]; \quad (38)$$

$$F(\xi, x) = \frac{1}{V\xi} \left\{ e^{\frac{-ikr}{8\xi x} (2y - \varphi(r - \xi + x))^2} + e^{\frac{-ikr}{8\xi x} (2y - \varphi(r + \xi - x))^2} \right\}.$$

При этом были сделаны несущественные допущения:

$$\sqrt{kr} \gg 1, \frac{\Delta}{l_x}, \frac{l_x}{l_y}; \quad \varphi = \frac{\Delta}{r} \ll 1, \frac{l_y}{l_x}. \quad (39)$$

В предельном случае

$$\frac{l_x}{kW} \left. \frac{d^2 W}{dy^2} \right|_{y=\Delta} \ll 1, \text{ т. е. } kl_y \frac{l_y}{l_x} \gg 1, \left(\frac{\Delta}{l_y} \right)^2, \quad (40)$$

формула (21) упрощается и принимает вид

$$K(\varphi, r) = \frac{1}{2} J(r) [1 + W(x=0, y=\Delta)], \quad (41)$$

где $J(r)$ определяется по формуле (33). Как и в предыдущих случаях, корреляция флюктуаций уменьшается в два раза на расстояниях порядка радиуса корреляции неровностей. Дальнейшая декорреляция происходит по мере нарушения неравенства (40), т. е. при $\Delta \geq l_y^2 (\bar{l}_x)^{-1/2}$.

Формула (41) одновременно дает и решение обратной задачи.

3. В заключение покажем, в каком смысле полученные выше результаты применимы к электромагнитному полю E , создаваемому вертикальным диполем p на идеально проводящей статистически неровной поверхности. Исходя из формул, выведенных в [2] (§ 49) для флюктуаций $E' = E - \bar{E}$ при $z, z_0 \rightarrow 0$ можно получить

$$E'_z(r) = -\frac{ik^3 p}{\pi} \int \frac{e^{ik(p+r-p)}}{p^2 |r-p|} p \gamma(p) dp; \quad (42a)$$

$$E'_{x,y}(r) = -2k^2 p \gamma_{x,y}(r) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (42b)$$

Заметим, что (42а) с точностью до множителя $k^2 p$ совпадает с формулой (11) для флюктуаций скалярного поля над абсолютно жесткой поверхностью. Поэтому для корреляционных функций и интенсивности флюктуации вертикальной составляющей поля справедливы полученные выше формулы с заменой ψ на E_z' . Формула (42б) не имеет аналога в теории рассеяния скалярных волн и описывает деполяризацию первичного поля вертикального диполя при рассеянии на неровной поверхности. Корреляция флюктуаций горизонтальных компонент поля при этом пропорциональна корреляции углов наклона поверхности.

Автор благодарит Ф. Г. Басса за руководство работой, а также М. А. Исаковича, Ю. П. Лысанова и Э. П. Гулина — за обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Разлагая граничное условие (2) в ряд по степеням $\zeta(r)$ вблизи $z = 0$, усредняя и вычитая результат из неусредненного, получаем в первом приближении систему связанных граничных условий для ψ и $\bar{\Psi}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \gamma \nabla \bar{\Psi} - \zeta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial z^2}; \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} = \gamma \nabla \psi - \zeta \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{A.2})$$

Из (A.1) следует формула (3), которая в сочетании с (A.2) приводит к нелокальному граничному условию для среднего поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Psi}(r, z=0)}{\partial z} = & -\frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{z'=0} \left\{ \frac{\partial^2 V(\rho)}{\partial z^2} \left[\frac{\partial^2 \bar{\Psi}(r+\rho)}{\partial z'^2} W(\rho) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \bar{\Psi}(r+\rho)}{\partial \rho_i} \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_i} \right] - \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_i} \frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho_i} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}(r+\rho)}{\partial z'^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho_i} \frac{\partial \bar{\Psi}(r+\rho)}{\partial \rho_k} \frac{\partial^2}{\partial \rho_i \partial \rho_k} W(\rho) \right\} d\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

По дважды повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 2. Предполагая для простоты поверхность изотропной (т. е. $W(\rho) = W(\rho)$), получаем коэффициент отражения f_g плоской волны в виде

$$f_g = (\cos \theta - \eta_g) (\cos \theta + \eta_g)^{-1};$$

$$\begin{aligned} \eta_g = k_z^2 \sigma^2 - \frac{i}{k} \int_0^\infty V(\rho) \left\{ \left[(ik^3 \rho - \omega^2) J_0(x\rho) + \frac{\omega}{\rho} (1 - ik\rho - k^2 \rho^2) J_1(x\rho) \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{dW(\rho)}{d\rho} - \omega k_z^2 J_1(x\rho) W(\rho) \right\} d\rho; \quad \sigma^2 = \bar{\zeta}^2; \quad k^2 = \omega^2 + k_z^2; \quad k_z = k \cos \theta; \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

θ — угол падения. Легко проверить, что для плоских волн выполняется равенство $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial z} = -ik\eta_g \bar{\Psi}$ при $z = 0$, т. е. η_g — эффективный импеданс поверхности.

При отражении от мягкой поверхности имеют место формулы [6]

$$\eta_{\mu} = -1 + \eta_{\mu} \cos \theta, \quad \eta_{\mu} = 2k \sigma^2 \left\{ k - i \int_0^{\infty} V(\rho) \frac{d}{d\rho} [W(\rho) J_0(k\rho)] d\rho \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Формулы (A.4), (A.5) упрощаются в предельных случаях:

a) $kl \ll 1$:

$$\eta_{\mu} = \frac{2k \sigma^2}{il} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} dx, \quad \eta_g = \frac{ik \sigma^2 \sin^2 \theta}{2l} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} dx; \quad (\text{A.6})$$

б) $kl \gg 1$, скользящее распространение ($\pi/2 - \theta \gg \sqrt{2/kl}$):

$$\eta_{\mu} = 2k^2 \sigma^2 \cos \theta, \quad \eta_g = k^2 \sigma^2 \cos^3 \theta; \quad (\text{A.7})$$

в) $kl \gg 1$, скользящее распространение ($\pi/2 - \theta \ll \sqrt{2/kl}$):

$$\eta_{\mu} = \frac{4k^2 \sigma^2 e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{V2\pi kl} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dw}{dx} dx, \quad \eta_g = \frac{\sigma^2 e^{\frac{3\pi i}{4}}}{2l^2} \sqrt{\frac{kl}{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \frac{dw}{dx} dx. \quad (\text{A.8})$$

Здесь введена безразмерная функция $w(x) = \sigma^{-2} W(\rho = lx)$ безразмерной переменной x , убывающая на расстояниях порядка единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
2. Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, Радиотехника и электроника, 3, 180 (1958).
3. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 72 (1960).
4. Э. П. Гулин. Акуст. ж., 8, 426 ((1961)).
5. Э. П. Гулин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1144 ((1963)).
6. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 476 (1961).
7. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
8. Б. Ф. Курьянов, Акуст. ж., 9, 441 (1963).
9. В. А. Диткин и А. П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, М., 1961.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
4 мая 1964 г.

CORRELATION FUNCTIONS OF WAVE FIELD ABOVE ROUGH SURFACE

I. M. Fux

By the perturbation method the intensity and correlation function of scalar wave field fluctuations above random corrugated surface (absolutely soft and absolutely stiff) have been calculated in the limiting cases of quasinormal and grazing propagation. In the most cases considered it is possible to solve the inverse problem, i. e. to restore the correlation functions of the surface corrugation $W(\rho)$ from the known correlation functions of field fluctuations. The connection has been obtained between the correlation radii of field fluctuations for arbitrary function $W(\rho)$. Some of the results obtained are applied to the fluctuations of the electromagnetic field of elementary vertical dipole situated on the perfect conducting rough surface.

УДК 530.145 : 621.391.13

КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ, ПЕРЕДАВАЕМОЕ КВАНТОВЫМ КАНАЛОМ СВЯЗИ. I

P. Л. Стратонович

В статье дается определение квантовой информации, обобщающее классическое определение Шеннона. В качестве примера вычисляется квантовая информация связи двух коррелированных осцилляторов, а также информация связи двух коррелированных волновых процессов (стационарных случайных функций). Полученные формулы в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ переходят в хорошо известные формулы теории информации

Канал связи всегда реализуется той или иной физической системой: длинной линией, волноводом, эфиром и т. п. Ввиду того, что каждая физическая система управляет законами квантовой теории, в игру вступают квантовые эффекты, которые в той или иной степени неизбежно должны модифицировать основные соотношения классической теории информации. На частотах, для которых тепловая энергия kT сравнима с энергией кванта $\hbar\omega$, совершенно меняется природа теплового шума и характер его разрушающего воздействия на сигнал. Дело не сводится к простой замене спектральной интенсивности шума (формулы Найквиства) на ее квантовое значение $4\hbar\omega R_0 / (e^{\hbar\omega/kT} - 1)$. Поскольку вступают в действие свойства некоммутативности, соотношения неопределенности, специфические процессы при квантовом измерении (редукции), требуется пересмотр основных понятий теории информации. Теряют свое значение известные формулы для информации связи двух гауссовых величин и для скорости передачи информации

$$J = -\frac{1}{2} \ln(1 - R^2), \quad (1)$$

$$J = \ln \left(1 + \frac{S}{N} \right) \Delta f, \quad (2)$$

справедливые в случае аддитивного гауссова шума (R — коэффициент корреляции, S, N — спектральные интенсивности сигнала и шума, постоянные в полосе частот Δf).

Вследствие развития квантовой радиоэлектроники и перехода к инфракрасному и оптическому диапазону проблема разработки соответствующих квантовых обобщений становится актуальной и начинает привлекать внимание [2, 3]. В отличие от этих работ, мы возьмем за исходное определение (7) квантовой информации, являющееся прямым обобщением классической формулы Шеннона [1].

Пользуясь этим определением, вычислим информацию связи двух коррелированных осцилляторов и двух коррелированных волновых процессов. Последние соответствуют двум стационарным и стационарно связанным гауссовым случайным функциям, которые описываются своими спектральными плотностями.

1. КВАНТОВАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Как известно [4-6], сложная квантовая система описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$. Пусть в представлении x, y она имеет вид $\hat{\rho} = \|\rho_{xy}, x'y'\|$. Энтропия (негинформация) такой системы определяется (например, [5,6]) формулой*

$$S = -\text{Sp} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \quad (3)$$

(будем обозначать ее также S_{xy}). Из условия нормировки матрицы плотности вытекает неотрицательность энтропии.

Пусть индексы x, x' матрицы плотности $\rho_{xy}, x'y'$ соответствуют входным переменным (например, напряжению и току или координате и импульсу на входе), а y, y' — выходным переменным (соответственно, скажем, напряжению и току на выходе). Тогда энтропию (3) можно трактовать как совместную энтропию входа и выхода канала связи. Поскольку мы взяли $\hat{\rho}$ в представлении x, y , неявно предположено, что каждая входная переменная коммутирует с каждой выходной переменной.

Распределение только входных переменных описывается матрицей плотности

$$\hat{\rho}_x = \text{Sp}_{y'} \hat{\rho}, \quad \text{т. е. } \rho_{xx'} = \sum_y \rho_{xy}, x'y' \quad (4)$$

($\text{Sp}_{y'}$ относится к выходным переменным). По аналогии с (3) энтропию только входных переменных естественно определить формулой

$$S_x = -\text{Sp}_{x'} \hat{\rho}_x \ln \hat{\rho}_x. \quad (5)$$

Точно так же можно определить энтропию выходных переменных

$$S_y = -\text{Sp}_{y'} \hat{\rho}_y \ln \hat{\rho}_y, \quad (6)$$

где $\hat{\rho}_y = \text{Sp}_{x'} \hat{\rho}$.

Если входные и выходные переменные независимы:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_x \times \hat{\rho}_y,$$

то, как легко видеть из приведенных определений,

$$S_{xy} = S_x + S_y.$$

Следуя идее Шеннона [1], как и в классическом случае, определим информацию связи входных и выходных переменных формулой

$$J_{xy} = S_x + S_y - S_{xy} \quad (7)$$

(очевидно $J_{xy} = J_{yx}$). В приложении доказывается, что определенная таким образом квантовая информация неотрицательна в полной аналогии с классическим случаем.

Если разности $S_{xy} - S_y = S_{x/y}$, $S_{xy} - S_x = S_{y/x}$ интерпретировать как условные энтропии, то, подобно классическому случаю, в соответствии с (7) будут справедливы формулы

$$J_{xy} = S_x - S_{x/y} = S_y - S_{y/x}.$$

В случае независимых переменных информация, очевидно, равна нулю.

* Постоянную Больцмана полагаем равной единице.

2. КВАНТОВАЯ ЭНТРОПИЯ ГАУССОВЫХ КАНОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть q и p — канонически сопряженные операторы ($qp - pq = i\hbar$). Если они распределены по закону Гаусса, независимы (т. е. $\langle qp + pq \rangle = 2 \langle q \rangle \langle p \rangle$) и имеют нулевые средние значения $\langle q \rangle = \langle p \rangle = 0$, то их характеристическая функция, как и в неквантовом случае, имеет вид

$$\langle e^{iuq+ivp} \rangle = e^{-\frac{1}{2}(\sigma_q^2 u^2 + \sigma_p^2 v^2)}. \quad (8)$$

Здесь, как легко проверить дифференцированием,

$$\sigma_q^2 = \langle q^2 \rangle, \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle.$$

Рассмотрим матрицу плотности, соответствующую функции (8), при чем выберем то представление, в котором она диагональна. Для этого удобно пользоваться аналогией с гармоническим осциллятором, находящимся в состоянии термодинамического равновесия. Поскольку в таком состоянии средняя кинетическая энергия $\langle T \rangle$ равна потенциальной $\langle U \rangle$, возьмем гамильтониан осциллятора в виде

$$H = T + U = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{\sigma_p^2} + \frac{q^2}{\sigma_q^2} \right) \quad (9)$$

(тогда $2 \langle T \rangle = 2 \langle U \rangle = \langle H \rangle = 1$). Матрица плотности состояния определяется формулой Гиббса

$$\rho = e^{-\beta H} / \text{Sp} e^{-\beta H}, \quad (10)$$

где β — параметр, определяемый из условия $\langle H \rangle = 1$. Данная матрица плотности диагональна в энергетическом представлении. Как обычно [7], можно ввести операторы порождения и уничтожения квантов:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(q \sqrt{\frac{\sigma_p}{\sigma_q}} + ip \sqrt{\frac{\sigma_q}{\sigma_p}} \right); \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(q \sqrt{\frac{\sigma_p}{\sigma_q}} - ip \sqrt{\frac{\sigma_q}{\sigma_p}} \right) \\ (aa^+ - a^+a = 1)$$

и оператор числа квантов $n = aa^+$. Тогда (9) запишется в виде $H = (\hbar/\sigma_q \sigma_p) \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Матрица плотности (10) в n -представлении будет иметь диагональный вид:

$$\rho_{nn'} = \frac{e^{-\beta' n}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta' m}} \delta_{nn'} = 2 \operatorname{sh} \frac{\beta'}{2} e^{-\beta' \left(n + \frac{1}{2} \right)} \delta_{nn'}, \quad (11)$$

где параметр $\beta' = \hbar\beta/\sigma_q \sigma_p$ определяется из условия $\left\langle n + \frac{1}{2} \right\rangle \equiv \bar{n} + \frac{1}{2} = \sigma_q \sigma_p / \hbar$. Усреднение при помощи (11) дает $\bar{n} = (e^{\beta'} - 1)^{-1}$. Используя далее (11) для вычисления энтропии $S = - \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn} \ln \rho_{nn}$, получаем известную формулу

$$S = (\bar{n} + 1) \ln(\bar{n} + 1) - \bar{n} \ln \bar{n}. \quad (12)$$

Удобно ввести обозначение функции

$$\begin{aligned} \eta(z) &= \left(z + \frac{1}{2} \right) \ln \left(z + \frac{1}{2} \right) - \left(z - \frac{1}{2} \right) \ln \left(z - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) + z \ln \frac{2z + 1}{2z - 1} \quad \left(|z| > \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда (12) запишется в форме

$$S = \eta \left(\bar{n} + \frac{1}{2} \right) = \eta \left(\frac{\sigma_q \sigma_p}{\hbar} \right). \quad (14)$$

Многомерное обобщение этой формулы на случай многих координат и импульсов имеет вид

$$S = \text{Sp} \eta(\hbar^{-1} \sqrt{r_q r_p}). \quad (15)$$

Здесь r_q , r_p — корреляционные матрицы координат и импульсов

$$r_q = \| \langle q_j q_k \rangle \|; \quad r_p = \| \langle p_j p_k \rangle \|$$

(предполагается, что $\langle q_j p_k + p_k q_j \rangle = 0$).

Принимая во внимание четность функции (13), можно доказать инвариантность выражения (15) относительно канонических преобразований

$$q' = Cq; \quad p' = \tilde{C}^{-1}p; \quad r'_q = Cr_q \tilde{C}; \quad r'_p = \tilde{C}^{-1}r_p C^{-1}$$

(знак \sim сверху означает транспонирование). В самом деле, очевидно, что

$$\text{Sp}(\hbar^{-1} \sqrt{r_q r_p})^{2m} = \hbar^{-2m} \text{Sp} r_q r_p \dots r_q r_p = \hbar^{-2m} \text{Sp} r'_q r'_p \dots r'_q r'_p.$$

Выбирая преобразование C так, чтобы после преобразования корреляционные матрицы были диагональными, получаем формулу (15) как следствие (14) и принципа сложения энтропий независимых переменных.

3. ИНФОРМАЦИЯ СВЯЗИ ДВУХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим два гармонических осциллятора (колебательных контура), которые, скажем, в прошлом взаимодействовали между собой, так что между их состояниями установились определенные корреляции. Возьмем их гамильтонианы в виде

$$H_x \equiv H_{11} = \frac{1}{2} (p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2); \quad H_y \equiv H_{22} = \frac{1}{2} (p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2) \quad (16)$$

$$(q_1 = x; \quad q_2 = y).$$

Пусть их состояние в настоящий момент определяется фиксацией средних энергий:

$$\langle H_{11} \rangle = F_{11} \equiv F_x; \quad \langle H_{22} \rangle = F_{22} \equiv F_y, \quad (17)$$

а также средней энергии связи:

$$\langle H_{12} \rangle = F_{12} \equiv F_{xy}. \quad (18)$$

Энергию связи здесь берем в виде

$$H_{12} = \frac{1}{2} (p_1 p_2 + \omega_1 \omega_2 q_1 q_2),$$

так что справедлива формула

$$H_{jk} = \frac{1}{2} (p_j p_k + \omega_j \omega_k q_j q_k).$$

Матрицу плотности, соответствующую условиям (17), (18), находим, применяя принцип максимальной негинформации [5]. Именно, искомая матрица плотности имеет максимальную энтропию по сравнению с другими матрицами, для которых выполняются эти условия. Применение вариационных методов приводит к следующему результату:

$$\rho = ce^{-\sum_{jk} c_{jk} H_{jk}} \equiv ce^{-L}, \quad (19)$$

где $c, c_{11}, c_{12}, c_{22}$ — постоянные, определяемые из условия нормировки $\text{Sp } \rho = 1$ и условий (17), (18). Если перейти к операторам рождения и уничтожения квантов:

$$a_j^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_j}} (\omega_j q_j - ip_j); \quad a_j = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_j}} (\omega_j q_j + ip_j) \\ (a_j a_k^+ - a_k^+ a_j = \delta_{jk}), \quad (20)$$

то будем иметь

$$H_{jk} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\omega_j \omega_k} (a_j a_k^+ + a_k^+ a_j); \\ \frac{1}{2} \langle a_j a_k^+ + a_k^+ a_j \rangle = \frac{F_{jk}}{\hbar \sqrt{\omega_j \omega_k}}. \quad (21)$$

Оператор в экспоненте (19) примет вид

$$L = \frac{\hbar}{2} \sum_{jk} c_{jk} \sqrt{\omega_j \omega_k} (a_j a_k^+ + a_k^+ a_j).$$

Если взять ортогональное преобразование $u_{lj} \left(\sum_l u_{lj} u_{lk} = \delta_{jk} \right)$, приводящее матрицу $c_{jk} \sqrt{\omega_j \omega_k}$ к диагональному виду:

$$\sum_{jk} u_{lj} u_{lk} c_{jk} \sqrt{\omega_j \omega_k} = \lambda_l \delta_{ll},$$

то

$$L = \frac{\hbar}{2} \sum_l \lambda_l (b_l b_l^+ + b_l^+ b_l) = \hbar \left[\lambda_1 \left(b_1^+ b_1 + \frac{1}{2} \right) + \lambda_2 \left(b_2^+ b_2 + \frac{1}{2} \right) \right],$$

где

$$b_l = \sum_i u_{lj} a_j, \quad b_l^+ = \sum_i u_{lj} a_i^+ \quad (b_{l'} b_l^+ - b_l^+ b_{l'} = \delta_{ll'}). \quad (22)$$

Поскольку L распался на сумму двух членов, соответствующих несвязанным осцилляторам, то матрица плотности (19) распадается на произведение двух множителей:

$$\rho = \rho_1 \rho_2; \quad \rho_l = e^{-\hbar \lambda_l b_l^+ b_l} / \text{Sp } e^{-\hbar \lambda_l b_l^+ b_l} \quad (l = 1, 2). \quad (23)$$

Отсюда

$$\langle b_1^+ b_2 \rangle = \langle b_1^+ \rangle \langle b_2 \rangle = 0; \quad \langle b_1 b_2^+ \rangle = 0. \quad (24)$$

Каждая матрица ρ_1 и ρ_2 может быть записана в виде (11). Учитывая аддитивность энтропий независимых переменных и применения для каждой матрицы ρ_l формулу (14), получаем

$$S = \eta \left(\frac{1}{2} \langle b_1 b_1^+ + b_1^+ b_1 \rangle \right) + \eta \left(\frac{1}{2} \langle b_2 b_2^+ + b_2^+ b_2 \rangle \right). \quad (25)$$

С учетом (22) имеем

$$\frac{1}{2} \langle b_l b_{l'}^+ + b_l^+ b_{l'} \rangle = \sum_{jk} u_{lj} u_{l'k} \frac{1}{2} \langle a_j a_k^+ + a_k^+ a_j \rangle.$$

Принимая во внимание (24), убеждаемся, что u_{lj} есть ортогональное преобразование, приводящее матрицу $\frac{1}{2} \langle a_j a_k^+ + a_k^+ a_j \rangle = F_{jk} / \hbar \sqrt{\omega_j \omega_k}$ к диагональному виду, а аргументы в (25) суть ее собственные значения. Следовательно, формулу (25) можно записать так:

$$S = \text{Sp} \eta \left(\left\| \frac{F_{jk}}{\hbar \sqrt{\omega_j \omega_k}} \right\| \right). \quad (26)$$

Разрешая равенства (20) и (22), нетрудно выразить q_j и p_j через b_1, b_1^+, b_2, b_2^+ . Возводя эти выражения в квадрат и усредняя (с учетом (24)), можно доказать, что

$$\omega_j^2 \langle q_j^2 \rangle = \langle p_j^2 \rangle, \quad \langle q_j \rho_j + p_j q_j \rangle = 0 \quad (j = 1, 2).$$

Однако из равенства $\omega_j^2 \langle q_j^2 \rangle = \langle p_j^2 \rangle$ и условия (17) вытекает, что

$$\omega_j^2 \langle q_j^2 \rangle = \langle p_j^2 \rangle = F_{jj}.$$

Теперь мы можем применить формулу (14) к матрицам

$$\rho_x = \text{Sp}_y \rho; \quad \rho_y = \text{Sp}_x \rho$$

и получить

$$S_x = \eta \left(\hbar^{-1} \sqrt{\langle q_1^2 \rangle \langle p_1^2 \rangle} \right) = \eta \left(\frac{F_{11}}{\hbar \omega_1} \right); \quad S_y = \eta \left(\frac{F_{22}}{\hbar \omega_2} \right). \quad (27)$$

Комбинируя (26) и (27), согласно (7) находим информацию

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \eta \left(\frac{F_x}{\hbar \omega_1} \right) + \eta \left(\frac{F_y}{\hbar \omega_2} \right) - \eta \left(\frac{F_x}{2\hbar \omega_1} + \frac{F_y}{2\hbar \omega_2} + \right. \\ &+ \sqrt{\left(\frac{F_x}{2\hbar \omega_1} - \frac{F_y}{2\hbar \omega_2} \right)^2 + \frac{F_{xy}^2}{\hbar^2 \omega_1 \omega_2}} \Big) - \eta \left(\frac{F_x}{2\hbar \omega_1} + \frac{F_y}{2\hbar \omega_2} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{F_x}{2\hbar \omega_1} - \frac{F_y}{2\hbar \omega_2} \right)^2 + \frac{F_{xy}^2}{\hbar^2 \omega_1 \omega_2}} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Как видно из этой формулы, квантовая информация зависит не только от коэффициента корреляции

$$R = \frac{F_{xy}}{\sqrt{F_x F_y}},$$

но и от абсолютного среднего значения энергии. Однако, если удержать лишь два первых члена разложения

$$\eta(z) = \ln z + 1 - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2z)^{-2r}}{2r(2r+1)}, \quad (29)$$

то получим

$$S = -\ln(1-R^2) + O(\hbar^2)$$

в полном соответствии с классической формулой (1) (отсутствие коэффициента $1/2$ объясняется тем, что имеются две переменных — координата и импульс).

С помощью формулы (28) можно рассмотреть различные частные случаи; некоторые из них будут приведены ниже.

4. ИНФОРМАЦИЯ СВЯЗИ ДВУХ БЕГУЩИХ ВОЛН

Пусть имеются две волновые системы (линии) с энергиями

$$H_j = \frac{R_j}{2v_j} \int \left[\dot{q}_j^2 + v_j^2 \left(\frac{\partial q_j}{\partial z_j} \right)^2 \right] dz_j \quad (j = 1, 2). \quad (30)$$

Здесь v_j — скорость j -ой волны, R_j — волновое сопротивление. Для бегущей волны $\dot{q}_j = \pm v_j \partial q_j / \partial z_j$; поэтому напряжение $V_j = R_j v_{jj} \frac{\partial q_j}{\partial z_j}$ связано с \dot{q}_j соотношением $\dot{q}_j = \pm V_j / R_j$. В случае электрической системы (длинной линии) V имеет смысл разности потенциалов, $q = J$ — ток, $R/v = L_0$, $1/Rv = C_0$ — индуктивность и емкость единицы длины линии.

Предполагается, что между волнами существуют корреляции, подобные тем, которые были рассмотрены в предыдущем параграфе.

Переходя к нормальным волнам, представим $q_j(z)$ в виде разложения

$$q_j(z_j) = \sum_m \sqrt{\frac{\hbar v_j}{2R_j l_j \omega_{jm}}} (a_{jm} e^{-i\omega_{jm} t + ik_{jm} z_j} + a_{jm}^+ e^{i\omega_{jm} t - ik_{jm} z_j}), \quad (31)$$

где $\omega_{jm} = k_{jm} v_j$ — собственные частоты, $k_{jm} = (2\pi/l_j)m$ — волновые числа, l_j — длина j -ой линии (m целое). Тогда канонические перестановочные соотношения

$$q_j(z) \pi_j(z') - \pi_j(z') q_j(z) = i\hbar \delta(z - z')$$

$\left(\pi_j = \frac{R_j}{v_j} \dot{q}_j \text{ — импульсы} \right)$ будут эквивалентны обычным соотношениям $a_{jm} a_{jm'}^+ - a_{jm'}^+ a_{jm} = \delta_{mm'}$.

Подставляя (31) в (30), получаем

$$H_{jj} = \sum_m \frac{1}{2} \hbar \omega_{jm} (a_{jm}^+ a_{jm} + a_{jm} a_{jm}^+) . \quad (32)$$

Сравнивая это выражение с (21), обозначим:

$$F_{jj}(\omega_{jm}) = \frac{1}{2} \hbar \omega_{jm} \langle a_{jm}^+ a_{jm} + a_{jm} a_{jm}^+ \rangle . \quad (33)$$

Учитывая, что собственные частоты лежат на расстоянии $\Delta\omega = 2\pi v_j/l_j$, (предполагается, что $v_1/l_1 = v_2/l_2$), запишем результат усреднения энергии (32) в форме интеграла:

$$\langle H_{jj} \rangle = \frac{l_j}{2\pi v_j} \int_0^\infty F_{jj}(\omega) d\omega . \quad (34)$$

При помощи соотношения $q_j = \pm v_j \partial q_j / \partial z_j$ легко убедиться в равенстве кинетической и потенциальной энергии и получить из (34), что

$$R_j \langle q_j^2 \rangle = R_j^{-1} \langle V_j^2 \rangle = \frac{v_j}{l_j} \langle H_{jj} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F_{jj}(\omega) d\omega . \quad (35)$$

Эти равенства показывают физический смысл энергетического спектра F_{jj} , как спектральной плотности энергии, проносимой волной через сечение линии.

Будем считать, что корреляции между двумя волнами определены заданием смешанного энергетического спектра

$$F_{xy}(\omega_m) = F_{12}(\omega_m) = \frac{1}{2} \hbar \omega_m \langle a_{1m}^+ a_{2m} + a_{1m} a_{2m}^+ \rangle , \quad (36)$$

физический смысл которого по аналогии с (35) виден из формулы

$$V R_1 R_2 \langle q_1 q_2 \rangle = \frac{1}{V R_1 R_2} \langle V_1 V_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F_{12}(\omega) d\omega .$$

Колебания несовпадающих частот $\omega_m \neq \omega_{m'}$ предполагаются независимыми. Информация связи волн представляется поэтому в виде суммы информаций связи различных собственных колебаний. Для каждой собственной частоты, однако, информацию связи можно определить по формулам предыдущего параграфа. Суммируя выражения типа (28), находим

$$J_{xy} = \sum_m \left\{ \eta \left(\frac{F_x(\omega_m)}{\hbar \omega_m} \right) + \eta \left(\frac{F_y(\omega_m)}{\hbar \omega_m} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{\pm} \eta \left(\frac{1}{2\hbar \omega_m} [F_x(\omega_m) + F_y \pm \sqrt{(F_x - F_y)^2 + 4F_{xy}^2}] \right) \right\} .$$

Переходя в этом выражении к интегралу ($\Delta\omega \rightarrow 0$, $l_j \rightarrow \infty$), вычислим информацию, приходящуюся на единицу времени:

$$\begin{aligned}
 J_{xy} = \lim_{l_j \rightarrow \infty} \left(\frac{v_j}{l_j} J_{xy} \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \eta \left(\frac{F_x}{\hbar\omega} \right) + \eta \left(\frac{F_y}{\hbar\omega} \right) - \right. \\
 &- \eta \left(\frac{1}{2\hbar\omega} [F_x + F_y + \sqrt{(F_x - F_y)^2 + 4F_{xy}^2}] \right) - \eta \left(\frac{1}{2\hbar\omega} \times \right. \\
 &\left. \left. \times [(F_x + F_y)^2 - \sqrt{(F_x - F_y)^2 + 4F_{xy}^2}] \right) \right\} d\omega. \quad (37)
 \end{aligned}$$

В классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) это выражение переходит в известную формулу

$$J_{xy} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \ln \left(1 - \frac{F_{xy}^2}{F_x F_y} \right) d\omega.$$

Проиллюстрируем применение формулы (37) на одном примере. Пусть имеется соединение двух длинных линий с волновыми сопротивлениями R_1 и R_2 . Пусть в первой линии к соединению движется волна $V_1^+ \equiv V_0$, имеющая энергетический спектр $F(\omega)$, а во второй линии к соединению движется волна V_2^- со спектром $F'(\omega)$. Эти волны предполагаем независимыми. Вследствие неравенства волновых сопротивлений в точке соединения линий волны смешиваются. В первой линии от соединения идет волна

$$V_1^- = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} V_1^+ + \frac{2R_1}{R_1 + R_2} V_2^-,$$

а во второй от соединения идет волна

$$V_2^+ = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} V_1^+ + \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} V_2^-.$$

Найдем информацию связи между этими расходящимися волнами. Очевидно, в этом случае

$$\begin{aligned}
 F_{11} = \frac{1}{R_1} \langle V_1^{-2} \rangle &= \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \frac{1}{R_1} \langle V_1^{+2} \rangle + \frac{4R_1^2}{(R_1 + R_2)^2} \langle V_2^{-2} \rangle = \\
 &= F \cos^2 \alpha + F' \sin^2 \alpha;
 \end{aligned}$$

$$F_{22} = \frac{1}{R_2} \langle V_2^{+2} \rangle = F \sin^2 \alpha + F' \cos^2 \alpha;$$

$$F_{12} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}} \langle V_1^- V_2^+ \rangle = (F - F') \sin \alpha \cos \alpha \quad \left(\sin \alpha = \frac{2 \sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} \right).$$

Матрица $\| F_{jk} \|$ имеет собственные значения F, F' ; согласно формуле (37) энтропия связи волн V_2^+ и V_1^- оказывается равной интегралу

$$\begin{aligned}
 J_{xy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\eta \left(\frac{F \cos^2 \alpha + F' \sin^2 \alpha}{\hbar\omega} \right) + \eta \left(\frac{F \sin^2 \alpha + F' \cos^2 \alpha}{\hbar\omega} \right) - \right. \\
 \left. - \eta \left(\frac{F}{\hbar\omega} \right) - \eta \left(\frac{F'}{\hbar\omega} \right) \right] d\omega. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Из этой точной формулы можно получить ряд приближенных результатов. Предположим, что $F \gg F' \gg 1$; $F \sin^2 \alpha \sim F'$ (т. е. $\sin^2 \alpha \ll 1$). Будем интерпретировать $F(\omega) \sin^2 \alpha \equiv F_s(\omega)$ как спектр сигнала, а $F'(\omega) \cos^2 \alpha \equiv F_n(\omega)$ — как спектр шума. Поскольку в силу малости $\sin^2 \alpha$

$$\eta\left(\frac{F \cos^2 \alpha + F' \sin^2 \alpha}{\hbar \omega}\right) = \eta\left(\frac{F}{\hbar \omega}\right) - \frac{F - F'}{F} \sin^2 \alpha + \dots,$$

$$\eta\left(\frac{F'}{\hbar \omega}\right) = \eta\left(\frac{F_n}{\hbar \omega}\right) + \eta'\left(\frac{F_n}{\hbar \omega}\right) \frac{F'}{\hbar \omega} \sin^2 \alpha + \dots,$$

то из (38) следует

$$J_{xy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\eta\left(\frac{F_s + F_n}{\hbar \omega}\right) - \eta\left(\frac{F_n}{\hbar \omega}\right) \right] d\omega + O(\alpha^2).$$

На этой приближенной формуле основываются результаты работ [2,3]. В классическом пределе из нее получается обычное соотношение (2).

Приложение

Доказательство положительности квантовой информации (7)

Будем использовать то представление, в котором матрица $\hat{\rho}_x$ и матрица $\hat{\rho}_y$ диагональны: $\hat{\rho}_x = \| \rho_x^0 \delta_{xx'} \|$; $\hat{\rho}_y = \| p_y \delta_{yy'} \|$. Пусть совместная матрица плотности имеет в этом представлении вид

$$\hat{\rho} = \| r_{xy, x'y'} \| \equiv \| \hat{r}_{yy'} \|; \quad (\text{П.1})$$

$$\text{Sp}_x \hat{r}_{yy'} = p_y \delta_{yy'}; \quad \sum_y \hat{r}_{yy} = \| \rho_x^0 \delta_{xx'} \|.$$
(П.2)

Символ \wedge и $\text{Sp} \equiv \text{Sp}_x$ будем относить только к входным переменным x, x' (т. е. $\hat{a} = \| a_{xx'} \|$, $\text{Sp} \hat{a} = \sum_x a_{xx}$). Кроме исходной матрицы плотности (П.1) рассмотрим также редуцированную матрицу $\hat{\rho}' = \| \hat{r}_{yy} \delta_{yy'} \|$, полученную из $\hat{\rho}$ «измерением» состояния $\langle y \rangle$ (редукцией). Легко видеть, что матрице $\hat{\rho}'$ соответствуют те же частные матрицы $\hat{\rho}_x = \sum_y \hat{r}_{yy}$; $\hat{\rho}_y = \| p_y \delta_{yy'} \|$, что и матрице $\hat{\rho}$. Поэтому она имеет те же самые энтропии S_x, S_y , в то время как полная энтропия

$$S'_{xy} = - \sum_y \text{Sp} \hat{r}_{yy} \ln \hat{r}_{yy}$$

отлична от S_{xy} .

a) Докажем сначала, что

$$S_x + S_y \geq S'_{xy}. \quad (\text{П.3})$$

Введем условную матрицу плотности

$$\hat{\rho}_{x/y} \equiv \hat{\rho}(y) = \hat{r}_{yy}/p_y.$$

Согласно (П. 2), она при любом y удовлетворяет условию нормировки $\text{Sp} \hat{\rho}(y) = 1$. Как легко видеть, выражение

$$\begin{aligned} \sum_y p_y S_x(y) &= -\sum_y p_y \text{Sp} \hat{\rho}(y) \ln \hat{\rho}(y) = \\ &= -\sum_y \text{Sp} \hat{r}_{yy} [\ln \hat{r}_{yy} - \ln p_y] = S'_{xy} - S_y \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

совпадает с условной энтропией $S'_{x/y} = S'_{xy} - S_y$ матрицы ρ' . Сравним (П. 4) с S_x . Вводя обозначение $f(z) = -z \ln z$, имеем

$$S_x = \text{Sp} f\left(\sum_y \hat{r}_{yy}\right) = \text{Sp} f\left(\sum_y p_y \hat{\rho}(y)\right), \quad (\text{П.5})$$

в то время как, согласно (П. 4),

$$S'_{x/y} = \sum_y p_y \text{Sp} f(\hat{\rho}(y)). \quad (\text{П.6})$$

Пусть \hat{v}_y — унитарные преобразования, приводящие соответственно матрицы $\hat{\rho}(y)$ к диагональному виду:

$$\hat{v}_y^\dagger \hat{\rho}(y) \hat{v}_y = \| \rho_{x_1}^0(y) \delta_{x_1 x_1} \| ; \quad \hat{\rho}(y) = \left\| \sum_{x_1} v_{yx_1} v_{yx_1}^\dagger \rho_{x_1}^0(y) \right\|. \quad (\text{П.7})$$

Тогда (П. 6) примет вид.

$$S'_{x/y} = \sum_{yx_1} p_y |v_{yx_1}|^2 f(\rho_{x_1}^0(y)).$$

Используя то обстоятельство, что матрица $\hat{\rho}_x$ в выбранном представлении диагональна, (П. 5) можно записать так:

$$S_x = \sum_x f\left(\sum_y p_y \rho_{x_1}^0(y)\right) = \sum_x f\left(\sum_{yx_1} p_y |v_{yx_1}|^2 \rho_{x_1}^0(y)\right)$$

(при переходе к последнему равенству принято во внимание соотношение (П. 7)). При фиксированном x величины $p_{yx_1}^{(x)} = p_y |v_{yx_1}|^2$ можно трактовать как распределения вероятностей по y и x_1 . В самом деле, они удовлетворяют равенству

$$\sum_{yx_1} p_{yx_1}^{(x)} = \sum_y p_y \sum_{x_1} |v_{yx_1}|^2 = 1,$$

вытекающему из условия нормировки $\sum_y p_y = 1$ и условия унитарности $\sum_{x_1} |v_{yx_1}|^2 = 1$.

Из выпуклости функции $f(z)$ в области $z \geq 0$ следует неравенство

$$\sum_{yx_1} p_{yx_1} f(\rho_{x_1}^0(y)) \leq f\left(\sum_{yx_1} p_{yx_1} \rho_{x_1}^0(y)\right) \quad (\text{П.8})$$

при любых неотрицательных $\rho_{x_1}^0(y)$ и любых распределениях вероятности $p_{yx_1} = p_{yx_1}^{(x)}$. Поскольку неравенство сохраняется и после суммирования по x ,

$$\sum_{xyx_1} p_{yx_1}^{(x)} f(p_{x_1}^0(y)) \leq \sum_x f\left(\sum_{yx_1} p_{yx_1} p_{x_1}^0(y)\right),$$

т. е. $S'_{x/y} \leq S_x$, что эквивалентно (П. 3).

б) Докажем теперь, что $S_{xy} \leq S'_{xy}$; тогда (с учетом (П. 3)) будет доказано неравенство $S_x + S_y \geq S_{xy}$.

Пусть унитарное преобразование $\hat{u}_{yy'}^\dagger$ соответствует переходу к диагональной матрице плотности и обратно:

$$\hat{r}_{yy'} = \hat{u}_{y_1}^\dagger \hat{\Lambda}_l \hat{u}_{ly'},$$

где $\hat{\Lambda}_l = \|\Lambda_{lm}\delta_{mm'}\|$ — диагональные матрицы. Очевидно,

$$S_{xy} = \sum_{lm} f(\Lambda_{lm});$$

(П.9)

$$S'_{xy} = \sum_y \text{Sp} f\left(\sum_l \hat{u}_{yl}^\dagger \hat{\Lambda}_l \hat{u}_{ly}\right).$$

Рассмотренные выше унитарные преобразования \hat{v}_y^\dagger приводят к диагональному виду не только $\rho(y)$ (П. 7), но и матрицы $\hat{r}_{yy} = \sum_l \hat{u}_{yl}^\dagger \hat{\Lambda}_l \hat{u}_{ly}$:

$$\hat{v}_y^\dagger \hat{r}_{yy'} \hat{v}_y = \left\| \sum_{lm} \Lambda_{lm} |(u_{ly} v_y)_{mx_1}|^2 \delta_{x_1 x'_1} \right\|.$$

Поэтому

$$S'_{xy} = \sum_{yx_1} f\left(\sum_{lm} |w_{lyx_1m}|^2 \Lambda_{lm}\right). \quad (\text{П.10})$$

Входящие сюда преобразования $\hat{w}_{ly} = \hat{u}_{ly} \hat{v}_y$, подобно \hat{u}_{ly} и \hat{v}_y , являются унитарными, т. е. удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{yx_1} |w_{lyx_1m}|^2 = 1; \quad \sum_{lm} |w_{lyx_1m}|^2 = 1. \quad (\text{П.11})$$

Поэтому первому выражению (П. 9) можно придать вид

$$S_{xy} = \sum_{yx_1, lm} |w_{lyx_1m}|^2 f(\Lambda_{lm}).$$

Величины $p_{lm}^{(x,y)} = |w_{lyx_1m}|^2$, согласно (П. 11), можно интерпретировать как распределение вероятностей по l и m . Применяя формулу типа (П. 8), для этого распределения получаем

$$\sum_l p_{lm}^{(x,y)} f(\Lambda_{lm}) \leq f\left(\sum_l p_{lm}^{(x,y)} \Lambda_{lm}\right)$$

при $\Lambda_{lm} \geq 0$ и любых x_1, y вследствие выпуклости функции f . Согласно (П. 9), (П.10), это дает: $S_{xy} \leq S'_{xy}$.

Данное неравенство является обобщением известной леммы Клейна [6]. Оно свидетельствует об увеличении энтропии (разрушении информации) в процессе квантового измерения (редукции), являющегося

в данном случае неполным. В приведенном доказательстве основных неравенств были использованы лишь такие общие свойства матриц плотности, как нормировка и положительная определенность.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Шеннон, Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, М., 1953.
2. J. P. Gordon, Proc. IRE, 50, 1898 (1962).
3. Д. С. Лебедев, Л. Б. Левитин. ДАН СССР, 149, 1299 (1963).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ч. I, ГИТТЛ, М., 1948.
5. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 28, 547 (1955).
6. В. М. Файн, УФН, 79, 641 (1963).
7. Э. Хенли, В. Тирринг, Элементарная квантовая теория поля, ИЛ, М., 1963.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
22 апреля 1964 г.

QUANTITY OF INFORMATION TRANSMITTED BY QUANTUM COMMUNICATION CHANNEL. I

R. L. Stratovich

The concept of quantum information generalizing the classical Shannon concept is given. As an example the quantum information of coupling of two correlated oscillators is calculated as well as that of two correlated wave process (stationary random functions). The formulae obtained transform into the well-known formulae of information theory in classical limit $\hbar \rightarrow 0$.

УДК 530.145 621.391.13

КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ, ПЕРЕДАВАЕМОЕ КВАНТОВЫМ КАНАЛОМ СВЯЗИ. II

P. L. Стратонович

Найдены энтропия и информация для квантового канала связи, в котором выходные переменные не коммутируют с входными. Особо рассмотрен практически важный случай аддитивной помехи. В предположении, что коэффициент передачи канала является малым параметром, рассчитана пропускная способность волноводной системы с тепловым шумом.

В настоящей статье мы продолжим начатое в [1] систематическое рассмотрение вопросов квантовой теории информации. Имея в виду приложения к задачам радиосвязи, обратим внимание главным образом на гауссовые квантовые случайные величины и процессы. В предыдущей статье за основу было принято предположение, что операторы (сигналы) на входе и выходе канала связи коммутируют между собой. Основной задачей настоящей статьи является обобщение результатов на случай, когда выходные переменные не коммутируют с входными. Именно этот случай осуществляется на практике в реальном канале связи, когда связь производится при помощи электромагнитной волны, волновода, длинной линии и т. п. Полученные общие формулы конкретизируются для практически важного частного случая, когда имеется малый параметр (коэффициент передачи). При использовании этого параметра получены приближенные формулы для количества информации. В асимптотическом случае, соответствующем самому грубому приближению по степеням малого параметра, получены формулы, лежащие в основе работ [2,3]. В этом приближении найдена пропускная способность идеального квантового волновода.

Все полученные формулы в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ переходят в известные результаты обычной теории информации.

1. КВАНТОВАЯ ЭНТРОПИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГАУССОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В [1] была получена формула для энтропии канонически сопряженных гауссовых переменных:

$$S = \text{Sp} \eta \left(\hbar^{-1} \sqrt{\hat{r}_q \hat{r}_p} \right) \quad (1)$$

(\hat{r}_q, \hat{r}_p) — корреляционные матрицы координат и импульсов). Отсылая читателя к указанной работе, отметим, что здесь и в дальнейшем

$$\eta(z) = \left| \left(\frac{1}{2} \ln \left| z^2 - \frac{1}{4} \right| + z \ln \left| \frac{2z+1}{2z-1} \right| \right) \right| \quad (2)$$

— четная функция своего аргумента.

Обобщим эту формулу на случай произвольных (т. е. не обязательно канонически сопряженных) эрмитовых операторов A_1, A_2, \dots . Потребуем, чтобы все их коммутаторы $[A_\alpha, A_\beta]_-$ были неслучайными

ϵ -числами и чтобы они были распределены по закону Гаусса. При нулевых средних значениях такие переменные полностью описываются двумя матрицами: $\langle [A_\alpha, A_\beta]_+ \rangle$ и $\langle [A_\alpha, A_\beta]_- \rangle$. Энтропия должна быть функцией этих матриц. Выведем исковую зависимость в два этапа.

1) Обозначим $(B_1, B_2, \dots) = (q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots)$. Тогда, очевидно,

$$\frac{1}{2} \| \langle [B_\alpha, B_\beta]_+ \rangle \| = \begin{vmatrix} \hat{r}_q & 0 \\ 0 & \hat{r}_p \end{vmatrix}; \quad (3)$$

$$[B_\alpha, B_\beta]_- = \begin{vmatrix} 0 & i\hbar \hat{I} \\ -i\hbar \hat{I} & 0 \end{vmatrix} \quad (\hat{I} = \|\delta_{jk}\|).$$

Докажем, что формулу (1) можно записать в виде

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \eta \left([B_\alpha, B_\gamma]_-^{-1} \left\langle \frac{1}{2} [B_\alpha, B_\beta]_+ \right\rangle \right). \quad (4)$$

В самом деле, согласно (3), имеем

$$[B_\alpha, B_\gamma]_-^{-1} = \frac{1}{\hbar} \begin{vmatrix} 0 & i\hat{I} \\ -i\hat{I} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\hbar [B_\alpha, B_\gamma]_-^{-1} \left\langle \frac{1}{2} [B_\alpha, B_\beta]_+ \right\rangle = \begin{vmatrix} 0 & i\hat{r}_p \\ -i\hat{r}_q & 0 \end{vmatrix}.$$

Собственные значения последней матрицы находятся из уравнения

$$\operatorname{Det} \begin{vmatrix} -\lambda \hat{I} & i\hat{r}_p \\ -i\hat{r}_q & -\lambda \hat{I} \end{vmatrix} = 0,$$

которое преобразуется к виду $\operatorname{Det} \|\lambda^2 \hat{I} - \hat{r}_q \hat{r}_p\| = 0$. Отсюда видно, что значения λ_α выражаются через собственные значения μ_j матрицы $\hat{r}_q \hat{r}_p$:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = (\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, \dots, -\sqrt{\mu_1}, -\sqrt{\mu_2}, \dots).$$

Вследствие четности функции (2)

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{2} \eta(\hbar^{-1} \lambda_{\alpha}) = \sum_j \eta(\hbar^{-1} \sqrt{\mu_j}),$$

что доказывает совпадение (4) с (1).

2) Подвернем (B_1, B_2, \dots) произвольному невырожденному линейному преобразованию: $A_\alpha = g_{\alpha\beta} B_\beta$. Тогда

$$\langle [B_\alpha, B_\beta]_+ \rangle = g_{\alpha\beta}^{-1} \langle [A_\alpha, A_\beta]_+ \rangle g_{\beta\beta}^{-1};$$

$$[B_\alpha, B_\beta]_-^{-1} = \tilde{g}_{\beta\beta} [A_\alpha, A_\beta]_-^{-1} g_{\alpha\alpha}$$

(знак \sim означает транспонирование матрицы). Подстановка этих выражений в (4) доказывает справедливость формулы

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \eta \left([A_\alpha, A_\beta]_-^{-1} \left\langle \frac{1}{2} [A_\alpha, A_\pi]_+ \right\rangle \right), \quad (5)$$

которая, следовательно, остается инвариантной при произвольных невырожденных линейных преобразованиях переменных. Ее можно обобщить даже на случай комплексных преобразований и неэрмитовых переменных A_α . При этом

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \eta \left([A_\alpha, A_\beta]_-^{-1} \left\langle \frac{1}{2} [A_\alpha, A_\beta]_+ \right\rangle \right). \quad (6)$$

Предполагается, что все собственные значения матрицы, стоящей в аргументе, по модулю не меньше $1/2$.

Пусть, например,

$$(A_1, A_2, \dots) = (c_1 a_1, c_2 a_2, \dots, c_1 a_1^*, c_2 a_2^*, \dots),$$

где a_j^* , a_j — обычные операторы рождения и уничтожения ($[a_j, a_k^*]_- = \delta_{jk}$), c_j — произвольные числа. Тогда

$$\left\langle [A_\alpha, A_\beta]_+ \right\rangle = \begin{vmatrix} \hat{C} \langle [a_j, a_k^*]_+ \rangle \hat{C} & \hat{C} \langle [a_j, a_k]_+ \rangle \hat{C} \\ \hat{C} \langle [a_j^*, a_k^*]_+ \rangle \hat{C} & \hat{C} \langle [a_j, a_k]_+ \rangle \hat{C} \end{vmatrix}, \quad \hat{C} = \| c_j \delta_{jk} \|$$

и формула (6) дает

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \eta \left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \langle [a_j, a_k^*]_+ \rangle & \langle [a_j, a_k]_+ \rangle \\ \langle [a_j^*, a_k^*]_+ \rangle & \langle [a_j, a_k]_+ \rangle \end{vmatrix} \right).$$

Если $\langle [a_j, a_k]_+ \rangle = 0$, то

$$S = \operatorname{Sp} \eta \left(\left\langle \frac{1}{2} [a_j^*, a_k]_+ \right\rangle \right) = \operatorname{Sp} \eta \left(\| \langle a_j^* a_k \rangle \| + \frac{1}{2} \hat{I} \right),$$

что можно получить и из более элементарных соображений.

2. ИНФОРМАЦИЯ СВЯЗИ ДВУХ ГРУПП ГАУССОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть рассматриваемые гауссовые переменные распадаются на две группы: входные переменные X_μ ($\mu = 1, 2, \dots$) и выходные переменные Y_ρ ($\rho = 1, 2, \dots$), так что

$$(A_1, A_2, \dots) = (X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots).$$

Если X_μ коммутируют с Y_ρ , то информация их связи, согласно [3], определяется формулой

$$J_{xy} = S_x + S_y - S_{xy}, \quad (7)$$

где S_{xy} — энтропия переменных $X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots$, S_x — энтропия переменных X_1, X_2, \dots , а S_y — переменных Y_1, Y_2, \dots

Сумма $S_x + S_y$ есть полная энтропия в случае, когда входные и выходные переменные «не зависят» друг от друга. Если входные переменные не коммутируют с выходными, то они никогда не могут быть вполне «независимы» от выходных переменных. Полная энтропия никогда не может принять значения $S_x + S_y$. Поэтому естественным обобщением формулы (7) на случай некоммутирующих операторов является формула

$$J_{xy} = \max \tilde{S}_{xy} - S_{xy}. \quad (8)$$

Здесь максимум ищется при фиксированной коммутационной матрице $[A_\alpha, A_\beta]_-$, при фиксированном распределении переменных X_μ и при фиксированном распределении переменных Y_ρ . Ввиду того, что распределение определяется (для гауссовых переменных) корреляционной матрицей, предполагаются фиксированными матрицы $\langle [X_\mu, X_\nu]^* \rangle$ и $\langle [Y_\rho, Y_\sigma]^* \rangle$. Сравнению подлежат различные взаимные корреляционные матрицы $\left\langle \frac{1}{2} [X_\mu, Y_\rho]^* \right\rangle$. Матрица $\left\langle \frac{1}{2} [A_\alpha, A_\beta]^* \right\rangle$, при которой достигается экстремум, соответствует максимальной достижимой степени «независимости» выходных переменных от входных. Учитывая (6), запишем (8) в форме

$$\begin{aligned} J_{xy} = \max_{\langle [X_\mu, Y_\rho]^* \rangle} & \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left([A_\alpha, A_\beta]^* \left\langle \frac{1}{2} [A_\alpha, A_\beta]^* \right\rangle \right) - \\ & - \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left([A_\alpha, A_\beta]^* \left\langle \frac{1}{2} [A_\alpha, A_\beta]^* \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В последнем члене в качестве $\langle [X_\mu, Y_\rho]^* \rangle$ берется фактически имеющаяся матрица.

Легко понять, что в том частном случае, когда $[X_\mu, Y_\rho]^* = 0$, максимум в (9) достигается при отсутствии корреляций: $\langle [X_\mu, Y_\rho] \rangle = 0$; первый член обращается в $S_x + S_y$ и формула (9) переходит в (7).

Проиллюстрируем сначала применение формулы (9) на одном специальном примере. Рассмотрим координату и импульс системы с одной степенью свободы:

$$A_1 = q, \quad A_2 = p; \quad \| [A_\alpha, A_\beta]_- \| = \begin{vmatrix} 0 & i\hbar \\ -i\hbar & 0 \end{vmatrix}.$$

Пусть корреляционная матрица имеет вид $\langle q^2 \rangle = \sigma_q^2$; $\langle p^2 \rangle = \sigma_p^2$; $\frac{1}{2} \langle [q, p] \rangle = \sigma_q \sigma_p R$ (R — коэффициент корреляции). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2} [A_\alpha, A_\beta]_-^{-1} \langle [A_\alpha, A_\beta] \rangle &= \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_q^2 & \sigma_q \sigma_p R \\ \sigma_q \sigma_p R & \sigma_p^2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} i\sigma_q \sigma_p R & i\sigma_p^2 \\ -i\sigma_q^2 & -i\sigma_q \sigma_p R \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Эта матрица имеет собственные значения $\pm \sqrt{\sigma_q \sigma_p} \sqrt{1 - R^2}$, следовательно

$$S_{qp} = \eta (\hbar^{-1} \sigma_q \sigma_p \sqrt{1 - R^2}).$$

По формуле (9) имеем

$$\begin{aligned} J_{qp} &= \max_R \eta (\hbar^{-1} \sigma_q \sigma_p \sqrt{1 - R^2}) - \eta (\hbar^{-1} \sigma_q \sigma_p \sqrt{1 - R^2}) = \\ &= \eta (\hbar^{-1} \sigma_q \sigma_p) - \eta (\hbar^{-1} \sigma_q \sigma_p \sqrt{1 - R^2}). \end{aligned} \quad (10)$$

В пределе $\hbar \rightarrow 0$ отсюда получаем классическую формулу $J_{qp} = -\frac{1}{2} \ln(1-R^2)$. В квантовом случае, как легко доказать, информация (10) превосходит свое классическое значение $-\frac{1}{2} \ln(1-R^2)$. Это можно объяснить тем, что неперестановочность операторов эквивалентна наличию некоторой дополнительной специфически квантовой корреляции.

В заключение этого параграфа отметим, что идея, лежащая в основе формулы (8), применима не только к гауссовым операторам. Пусть, скажем, $X = \sigma_x$, $Y = \sigma_y$ есть проекции спина на оси OX и OY . Допустим также, что их совместное распределение описывается матрицей плотности

$$\hat{\rho} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} + \beta_z & \beta_x - i\beta_y \\ \beta_x + i\beta_y & \frac{1}{2} - \beta_z \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{2} \hat{I} + \beta_x \hat{\sigma}_x + \beta_y \hat{\sigma}_y + \beta_z \hat{\sigma}_z, \quad \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \leq \frac{1}{4},$$

причем однократное распределение величины σ_x есть $\left(\frac{1}{2} + \beta_x, \frac{1}{2} - \beta_x\right)$, а величины σ_y есть $\left(\frac{1}{2} + \beta_y, \frac{1}{2} - \beta_y\right)$. Применение обычной формулы $S = -\text{Sp} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}$ для энтропии дает

$$S = -\left(\frac{1}{2} + \beta\right) \ln \left(\frac{1}{2} + \beta\right) - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ln \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \equiv \eta(\beta),$$

$$\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}.$$

Отыскивая максимум энтропии при фиксированных распределениях $\left(\frac{1}{2} + \beta_x, \frac{1}{2} - \beta_x\right)$, $\left(\frac{1}{2} + \beta_y, \frac{1}{2} - \beta_y\right)$, в соответствии с (8) получаем информацию

$$J = \eta\left(\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2}\right) - \eta\left(\sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2}\right).$$

Неотрицательность информации, определенной в этом параграфе, является прямым следствием ее определения.

3. ИНФОРМАЦИЯ, ПЕРЕДАВАЕМАЯ ОДНОЧНЫМ КОЛЕБАНИЕМ ПРИ АДДИТИВНОЙ ПОМЕХЕ

Для задач радиосвязи существенное значение имеет вычисление количества информации в другом примере, который рассматривается ниже. Входной сигнал в реальном канале связи обычно подвергается демпфированию и сложению с шумом. Как показано в [1] на примере соединения двух линий с различными волновыми сопротивлениями, средняя энергия выходного сигнала равна

$$F_2 = \text{th}^2 \epsilon \quad F + \text{ch}^{-2} \epsilon \quad F' \equiv F_s + F_n, \quad (12)$$

где F — средняя энергия входного сигнала, F' — энергия шума, $\operatorname{th} \varepsilon = \sin \alpha = \frac{2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 + R_2} \ll 1$ — коэффициент передачи (демпфирования).

В то же время энергия корреляции

$$F_{02} = \operatorname{th} \varepsilon F. \quad (13)$$

Если ввести операторы порождения и уничтожения квантов для входного сигнала a_0^*, a_0 , шума b^*, b и выходного сигнала a_2^*, a_2 , то указанные средние энергии можно записать так:

$$\begin{aligned} F &= \hbar \omega \left\langle \frac{1}{2} [a_0, a_0^*]_+ \right\rangle; \quad F' = \hbar \omega \left\langle \frac{1}{2} [b, b^*]_+ \right\rangle; \\ F_2 &= \hbar \omega \left\langle \frac{1}{2} [a_2, a_2^*]_+ \right\rangle; \quad F_{02} = \hbar \omega \left\langle \frac{1}{2} [a_0, a_2^*]_+ \right\rangle. \end{aligned}$$

Равенства (12), (13) эквивалентны следующим формулам преобразования операторов:

$$a_2 = a_0 \operatorname{th} \varepsilon + b \operatorname{ch}^{-1} \varepsilon; \quad a_2^* = a_0^* \operatorname{th} \varepsilon + b^* \operatorname{ch}^{-1} \varepsilon. \quad (14)$$

Входной сигнал и шум естественно предполагать независимыми (поскольку они порождаются в различных физических системах и лишь затем смешиваются), так что

$$[a_0, b^*]_- = 0; \quad \langle [a_0, b^*]_+ \rangle = 0.$$

Входные и выходные переменные при этом будут описываться следующими коммутационной и корреляционной матрицами:

$$\begin{aligned} \| [a_j, a_k^*]_- \| &= \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{th} \varepsilon \\ \operatorname{th} \varepsilon & 1 \end{vmatrix}; \\ \left\| \left\langle \frac{1}{2} [a_j, a_k^*]_+ \right\rangle \right\| &= \begin{vmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_0^2 \operatorname{th} \varepsilon \\ \sigma_0^2 \operatorname{th} \varepsilon & \sigma_2^2 \end{vmatrix}; \\ \sigma_2^2 &= \sigma_0^2 \operatorname{th}^2 \varepsilon + \sigma^2 \operatorname{ch}^{-2} \varepsilon \quad (\sigma_0^2 = F/\hbar \omega, \quad \sigma^2 = F'/\hbar \omega). \end{aligned} \quad (15)$$

Пользуясь формулой (9), для данного случая находим информацию

$$J_1 = \max_R [\eta(\lambda_1) + \eta(\lambda_2)] - \eta(\sigma_0^2) - \eta(\sigma^2), \quad (16)$$

где λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{th} \varepsilon \\ \operatorname{th} \varepsilon & 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_0 \sigma_2 R \\ \sigma_0 \sigma_2 R & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \operatorname{ch}^2 \varepsilon \begin{vmatrix} \sigma_0^2 - \sigma_0 \sigma_2 R \operatorname{th} \varepsilon & \sigma_0 \sigma_2 R - \sigma_2^2 \operatorname{th} \varepsilon \\ -\sigma_0^2 \operatorname{th} \varepsilon + \sigma_0 \sigma_2 R & \sigma_2^2 - \sigma_0 \sigma_2 R \operatorname{th} \varepsilon \end{vmatrix}.$$

Здесь R — коэффициент корреляции, по которому производится варьирование. Для λ_1, λ_2 имеем уравнение

$$\lambda^2 - (\sigma_0^2 - 2\sigma_0 \sigma_2 R \operatorname{th} \varepsilon + \sigma_2^2) \operatorname{ch}^2 \varepsilon + \lambda + \sigma_0^2 \sigma_2^2 (1 - R^2) \operatorname{ch}^2 \varepsilon = 0.$$

Вводя обозначения

$$2\beta = \sigma_0^2 + \sigma_2^2; \quad 2\gamma = \sigma_0^2 - \sigma_2^2;$$

$$\gamma \operatorname{sh} \vartheta = \sigma_0 \sigma_2 R \operatorname{ch} \varepsilon - \beta \operatorname{sh} \varepsilon,$$

приводим его к виду

$$\lambda^2 - 2\lambda(\beta - \gamma \operatorname{sh} \varepsilon \operatorname{sh} \vartheta) + \beta^2 - 2\beta\gamma \operatorname{sh} \varepsilon \operatorname{sh} \vartheta - \gamma^2 \operatorname{ch}^2 \varepsilon - \gamma^2 \operatorname{sh}^2 \vartheta = 0$$

и находим корни

$$\lambda_{1,2} = \beta - \gamma \operatorname{sh} \varepsilon \operatorname{sh} \vartheta \pm \sqrt{\gamma^2 \operatorname{ch}^2 \varepsilon - \beta^2 + \gamma^2 \operatorname{sh}^2 \vartheta} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma^2 \operatorname{ch}^2 \varepsilon - \gamma^2 \operatorname{sh}^2 \vartheta}.$$

Минимизация по R эквивалентна минимизации по ϑ . Поэтому выражение (16) можно записать в следующей форме:

$$J_1 = \max_{\vartheta} [\eta(\beta + \gamma \operatorname{ch}(\vartheta - \varepsilon)) + \eta(\beta - \gamma \operatorname{ch}(\vartheta + \varepsilon))] - \eta(\beta + \gamma) - \eta(\beta - \gamma \operatorname{sh}^2 \varepsilon - \gamma \operatorname{ch}^2 \varepsilon). \quad (17)$$

Условие экстремума, очевидно, имеет вид

$$\eta'(\beta + \gamma \operatorname{ch}(\vartheta_0 - \varepsilon)) \operatorname{sh}(\vartheta_0 - \varepsilon) = \eta'(\beta - \gamma \operatorname{ch}(\vartheta_0 + \varepsilon)) \operatorname{sh}(\vartheta_0 + \varepsilon). \quad (18)$$

Введем обозначения $\sigma_s^2 = \sigma_0^2 \operatorname{th}^2 \varepsilon$ (полезная часть выходного сигнала) и $\sigma_n^2 = \sigma^2 \operatorname{ch}^{-2} \varepsilon = \sigma_2^2 - \sigma_s^2$ (шумовая часть выходного сигнала). Тогда формула (17) примет вид

$$J_1(\sigma_s^2, \sigma_n^2, \varepsilon) = \eta \left(\frac{1 + \operatorname{ch}(\vartheta_0 - \varepsilon)}{2 \operatorname{th}^2 \varepsilon} \sigma_s^2 + \frac{1 - \operatorname{ch}(\vartheta_0 - \varepsilon)}{2} (\sigma_s^2 + \sigma_n^2) \right) - \eta \left(\frac{\sigma_s^2}{\operatorname{th}^2 \varepsilon} \right) + \eta \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\vartheta_0 + \varepsilon)}{2 \operatorname{th}^2 \varepsilon} \sigma_s^2 + \frac{1 + \operatorname{ch}(\vartheta_0 + \varepsilon)}{2} (\sigma_s^2 + \sigma_n^2) \right) - \eta(\sigma_n^2 \operatorname{ch}^2 \varepsilon). \quad (19)$$

Здесь ϑ_0 — функция от $\sigma_s^2, \sigma_n^2, \varepsilon$, которую вследствие трудности точного решения уравнения (18) можно находить последовательными приближениями по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\vartheta_0^{(n+1)} + \varepsilon) &= \operatorname{sh}(\vartheta_0^{(n)} - \varepsilon) \eta' \left(\frac{1 + \operatorname{ch}(\vartheta_0^{(n)} - \varepsilon)}{2 \operatorname{th}^2 \varepsilon} \sigma_s^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \operatorname{ch}(\vartheta_0^{(n)} - \varepsilon)}{2} \sigma_n^2 \right) / \eta' \left(\frac{1 - \operatorname{ch}(\vartheta_0^{(n)} + \varepsilon)}{2 \operatorname{th}^2 \varepsilon} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sigma_s^2 + \frac{1 + \operatorname{ch}(\vartheta_0^{(n)} + \varepsilon)}{2} \sigma_n^2 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Не рассматривая общего случая, предположим, что $\sigma_s^2 \sim \sigma_n^2 \sim 1$ и $\operatorname{th} \varepsilon \ll 1$. Будем считать ε малым параметром, а σ_s^2, σ_n^2 не зависящими от него величинами. Тогда аргумент функции в числителе (20) станет многое больше единицы ($\sim \varepsilon^{-2}$). Пользуясь асимптотической формулой $\eta'(z) \approx 1/z$, из (20) при $\vartheta_0^{(0)} = c\varepsilon$ (c любое) можно будет получить $\vartheta_0^{(1)} = -\varepsilon + O(\varepsilon)$. Это значение возьмем в качестве первого приближения: $\vartheta_0^{(1)} = -\varepsilon$. Вычисляя по формуле (20) второе приближение, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(\vartheta_0^{(2)} + \varepsilon) &= (-2\varepsilon + \varepsilon^2 \dots) \left\{ \eta' \left(\frac{1 + \operatorname{ch}2\varepsilon + \varepsilon^4 \dots}{2 \operatorname{th}^2 \varepsilon} \sigma_s^2 + \varepsilon^2 \dots \right) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \eta' \left(\frac{\sigma_s^2}{\operatorname{th}^2 \varepsilon} \varepsilon^6 \dots + (1 + \varepsilon^6 \dots) \sigma_n^2 \right) \right\}^{-1} = -\frac{2\varepsilon^3}{\sigma_s^2 \eta'(\sigma_n^2)} + \varepsilon^5 \dots, \end{aligned}$$

т. е.

$$\vartheta_0^{(2)} = -\varepsilon - \frac{2\varepsilon^3}{\sigma_s^2 \gamma'_1(\sigma_n^2)} + \varepsilon^5 \dots$$

Приближению $\vartheta_0^{(1)} = -\varepsilon$ по формуле (19) соответствует приближенное выражение

$$\begin{aligned} J_1(\sigma_s^2, \sigma_n^2, \varepsilon) &= \gamma_l(\sigma_s^2(\text{ch}^2 \varepsilon + \varepsilon^4 \dots) \text{th}^{-2} \varepsilon + \varepsilon^2 \dots) - \gamma_l(\sigma_s^2 \text{th}^{-2} \varepsilon) + \\ &\quad + \gamma(\sigma_n^2 + \varepsilon^4 \dots) - \gamma(\sigma_n^2 \text{ch}^2 \varepsilon) = \\ &= \ln(\text{ch}^2 \varepsilon) + \gamma_l(\sigma_s^2 + \sigma_n^2) - \gamma_l(\sigma_n^2 \text{ch}^2 \varepsilon) + \varepsilon^4 \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь мы объединили два члена и учли, что $\gamma_l(z) = \ln z + 1 + O(z^{-2})$. Сравним найденное количество информации с выражением

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1(\sigma_s^2, \sigma_n^2, \varepsilon) &= \gamma_l(\sigma_s^2 \text{sh}^{-2} \varepsilon + \sigma_n^2 \text{sh}^2 \varepsilon) - \gamma_l(\sigma_s^2 \text{th}^{-2} \varepsilon) + \\ &\quad + \gamma(\sigma_s^2 + \sigma_n^2) - \gamma(\sigma_n^2 \text{ch}^2 \varepsilon), \end{aligned}$$

полученным в [1] для случая коммутирующих переменных. В том же приближении, что и (21), из последней формулы имеем

$$\tilde{J}_1(\sigma_s^2, \sigma_n^2, \varepsilon) = -\ln(\text{ch}^2 \varepsilon) + \gamma_l(\sigma_s^2 + \sigma_n^2) - \gamma_l(\sigma_n^2 \text{ch}^2 \varepsilon) + \varepsilon^4 \dots \quad (22)$$

Количество информации (21) больше, чем (22), на величину

$$\Delta J = 2 \ln(\text{ch}^2 \varepsilon) + \varepsilon^4 \dots = 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4 \dots$$

Эту разницу можно интерпретировать как информацию, обусловленную дополнительной связью за счет квантовой некоммутативности операторов. Если пренебречь членами порядка ε^2 , то оба выражения будут давать один и тот же результат:

$$J_1(\sigma_s^2, \sigma_n^2, \varepsilon) = \gamma_l(\sigma_s^2 + \sigma_n^2) - \gamma_l(\sigma_n^2) + \varepsilon^2 \dots \quad (23)$$

4. КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ, ПЕРЕНОСИМОЕ ВОЛНОЙ ПРИ АДДИТИВНОЙ ПОМЕХЕ

Полученные выше формулы позволяют найти количество информации, переносимое бегущей волной. Для этого нужно просуммировать информацию различных колебаний волны в полной аналогии с предыдущей статьей [1]. В формулах предыдущего раздела (12)–(14) и др. все величины и, в частности, $\sigma_0^2 = F(\omega_m)/\hbar\omega_m$, $\sigma^2 = F'(\omega_m)/\hbar\omega_m$, $\sigma_s^2 = F_s(\omega_m)/\hbar\omega_m$, $\sigma_n^2 = F_n(\omega_m)/\hbar\omega_m$ теперь будут зависеть от частоты $\omega_m = 2\pi m v_1/l_1 = 2\pi m v_2/l_2$.

Для каждого колебания применим результаты третьего раздела. Вследствие независимости колебаний, информация связи волн V_1^+ и V_2^+ получается суммированием информаций, приходящихся на каждое колебание:

$$J = \sum_m J_1\left(\frac{F_s(\omega_m)}{\hbar\omega_m}, \frac{F_n(\omega_m)}{\hbar\omega_m}, \varepsilon\right), \quad (24)$$

где функция J_1 определена посредством (19). В пределе $l_1, l_2 \rightarrow \infty$ отсюда находим следующую формулу для скорости передачи информации:

$$j = \lim_{l_j \rightarrow \infty} \frac{v_j}{l_j} J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_1 \left(\frac{F_s(\omega)}{\hbar\omega}, \frac{F_n(\omega)}{\hbar\omega}, \varepsilon \right) d\omega. \quad (25)$$

При малых ε здесь можно воспользоваться приближенным выражением (21) или (23) для функции $J_1(F_s/\hbar\omega, F_n/\hbar\omega, \varepsilon)$.

5. ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ КВАНТОВОЙ ВОЛНОВОДНОЙ СИСТЕМЫ

В этом разделе рассмотрение соответствует приближению (23), причем $F_n(\omega)$ будет отождествляться с $F'(\omega)$. Данное приближение соответствует тому подходу к проблеме, которое принято в работах [2,3], так что при определении пропускной способности (27) мы будем следовать этим работам.

Предположим, что помеха представляет собой тепловой шум температуры T :

$$F_{nqr}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1},$$

где индексы q, r указывают тип волны волновода.

Выходной сигнал есть сумма $s + n$ полезного сигнала и шума, причем полную мощность сигнала s считаем ограниченной сверху:

$$\sum_{qr} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F_{sqr}(\omega) d\omega \equiv G \leq G_0.$$

Сумма здесь соответствует различным допустимым типам волн в системе. Предполагая, что какие-либо другие ограничения отсутствуют, определим пропускную способность волноводной системы:

$$C = \max_{G \leq G_0} j. \quad (26)$$

Учитывая (23), (25), (26), представим j в виде разности двух членов:

$$C = \max_{G \leq G_0} \dot{S}_{s+n} - \dot{S}_n, \quad (27)$$

где

$$\dot{S}_n = \sum_{qr} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \eta \left(\frac{F_{nqr}}{\hbar\omega} \right) d\omega \equiv \dot{S}_T,$$

$$\dot{S}_{s+n} = \sum_{qr} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \eta \left(\frac{F_{sqr} + F_{nqr}}{\hbar\omega} \right) d\omega.$$

При фиксированной средней мощности сигнала s , а значит, и сигнала $s + n$ максимальная энтропия, как известно, достигается при термодинамически равновесном распределении энергии по степеням свободы:

$$\max_{G \leq G_0} \dot{S}_{s+n} - \dot{S}_T = \dot{S}_{T_{ek}} - \dot{S}_T. \quad (28)$$

Эквивалентная температура T_{ek} здесь определяется из условия постоянства средней мощности:

$$U_{T_{\text{ек}}} = U_T + G_0, \quad (29)$$

где U_T — мощность при равновесном распределении с температурой T . Фиксируя конечную длину линии l , переходя к собственным колебаниям и учитывая, что на каждое колебание приходится энергия $\hbar\omega/(e^{\hbar\omega/T} - 1)$, находим указанную мощность:

$$U_T = \sum_{qrm} \frac{v_{qrm}^{\text{rp}}}{l} \frac{\hbar\omega_{qrm}}{e^{\hbar\omega_{qrm}/T} - 1}. \quad (30)$$

Здесь v_{qrm}^{rp} — скорость движения энергии (групповая скорость) колебания q, r, m ; ω_{qrm} — его частота.

Возьмем для примера волновод прямоугольного сечения $c \times d$ с идеально проводящими стенками. В нем могут распространяться TE_{qr} - и TM_{qr} -волны, имеющие фазовую и групповую скорости

$$\begin{aligned} v_{qr}^{\Phi} &= \frac{v_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{qr}}{\omega}\right)^2}}; \quad v_{qr}^{\text{rp}} = v_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{qr}}{\omega}\right)^2}; \\ \omega_{qr}^2 &= \left[\left(\frac{\pi q}{c}\right)^2 + \left(\frac{\pi r}{d}\right)^2 \right] v_1^2, \quad v_1^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}. \end{aligned}$$

При фиксированной длине волновода l бегущие собственные колебания имеют волновые числа $k_m = 2\pi m/l$ и частоты

$$\omega = \omega_{qrm} = \sqrt{k_m^2 v_1^2 + \omega_{qr}^2} = v_1 \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{c}\right)^2 + \left(\frac{\pi r}{d}\right)^2}.$$

Используя (30) и переходя к пределу $l \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} U_T &= \sum_{qr} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_m \frac{v_1^2 k_m}{l \omega_{qrm}} \frac{\hbar\omega_{qrm}}{e^{\hbar\omega_{qrm}/T} - 1} = \\ &= \sum_{qr} \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_{qr}}^{\infty} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1} d\omega. \end{aligned} \quad (31)$$

Суммирование по различным типам волн приводит к различным результатам в зависимости от соотношения между характерной длиной волны $\lambda = hv_1/T$ ($\hbar\omega \sim T$) и размерами сечения c, d . Если $c \ll \lambda, d \ll \lambda$ (или если рассматривается поперечная электромагнитная волна в волноводе другого вида), можно рассматривать лишь один тип волн и не проводить суммирования по q, r в (31). Этот случай будем называть одномерным. Если $c \ll \lambda, d \gg \lambda$, то сумма по r обратится в интеграл (двухмерный случай). Наконец, если $c \gg \lambda, d \gg \lambda$, то имеет место трехмерный случай.

Остановимся на нем подробнее. В области типичных частот имеем

$$\omega_{q+1,r}^2 - \omega_{qr}^2 = \left(\frac{\pi v_1}{c}\right)^2 \ll \omega^2; \quad \omega_{q,r+1}^2 - \omega_{qr}^2 = \left(\frac{\pi v_1}{d}\right)^2 \ll \omega^2;$$

$$(\omega_{q+1,r} - \omega_{qr})(\omega_{q,r+1} - \omega_{qr}) = \frac{\pi^2 v_1^2}{cd} \ll \omega^2.$$

Будем откладывать по одной оси $\pi v_1 q/c$, по другой $\pi v_1 r/d$. Тогда четверти кольца $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega} + \Delta\tilde{\omega}$ ($\tilde{\omega}^2 = (\pi v_1 q/c)^2 + (\pi v_1 r/d)^2$) соответствует площадь $(\pi/2) \tilde{\omega} \Delta\tilde{\omega}$ и $(\pi/2) \tilde{\omega} \Delta\tilde{\omega}/(\omega_{q+1,r} - \omega_{qr})$ ($\omega_{q,r+1} - \omega_{qr}$) собственных значений ω_{qr} . Следовательно, сумма обращается в интеграл

$$\sum_{qr} \dots = \int \dots \frac{\tilde{\omega} d\tilde{\omega}}{2(\omega_{q+1,r} - \omega_{qr})(\omega_{q,r+1} - \omega_{qr})} = \frac{cd}{2\pi v_1^2} \int_0^\infty \dots \tilde{\omega} d\tilde{\omega}.$$

Переходя к интегралу в правой части (31) и интегрируя по частям, находим.

$$U_T = \frac{2A}{8\pi^2 v_1^2} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{e^{\hbar\omega/T} - 1} d\omega = A\sigma T^4, \quad (32)$$

где $A = cd$ — площадь волновода, $\sigma = \frac{\pi^4}{15} / 4\pi^2 v_1^2 \hbar^3$ — постоянная Стефана—Больцмана (удвоение проведено, чтобы учесть как поперечные электрические, так и магнитные волны). Пользуясь термодинамическим соотношением $dS = dU_T/T$, отсюда находим.

$$\dot{S}_T = \frac{4}{3} A\sigma T^3;$$

следовательно, условие (29) принимает вид

$$T_{\text{эк}}^4 = T^4 + \frac{G_0}{A\sigma}.$$

Используя (27), (28), находим пропускную способность волновода:

$$C = \frac{4}{3} A\sigma \left[\left(T^4 + \frac{G_0}{A\sigma} \right)^{3/4} - T^3 \right] = \frac{4}{3} \frac{U_T}{T} \left[\left(1 + \frac{G_0}{U_T} \right)^{3/4} - 1 \right].$$

Аналогичный подсчет можно провести и в том случае, когда размерность p волновода не обязательно равна трем. Соответствующая более общая формула имеет вид

$$C = \frac{p+1}{p} \frac{U_T}{T} \left[\left(1 + \frac{G_0}{U_T} \right)^{p/(p+1)} - 1 \right]. \quad (33)$$

Подобно тому, как это отмечалось в рассмотренных ранее [3] частных случаях, имеем

$$C > G_0/T$$

при любом p . Количество информации, приходящееся в среднем на один квант поля, оказывается зависящим только от размерности p . Число квантов для равновесного излучения

$$N = \sum_{qr} \frac{v_{qr}^p}{l} \frac{1}{e^{\hbar\omega_{qr}/T} - 1}$$

(ср. с (30)). Оно оказывается пропорциональным энтропии, причем отношение энтропии к N равно

$$i_0 = \frac{\dot{S}}{N} = \frac{C}{N_{s+n} - N_n} = \frac{p+1}{p} \int_0^\infty \frac{\xi^p d\xi}{e^\xi - 1} \left| \int_0^\infty \frac{\xi^{p-1} d\xi}{e^\xi - 1} \right| = \\ = (p+1) \frac{\zeta(p+1)}{\zeta(p)}. \quad (34)$$

Для $p = 1, 2, 3$ это соответственно дает $i_0 = 0, i_0 = 2,19, i_0 = 3,60$.

В заключение отметим, что проведенное в статье изложение теории применительно к гауссовым переменным (полям Бозе—Эйнштейна) обобщается на случай переменных Ферми—Дирака. Такая теория дает возможность рассчитывать количество информации, переносимое, скажем, электронными пучками (электронный микроскоп и пр.). Не проводя детального рассмотрения, укажем на глубокую аналогию этих двух случаев. Основные формулы теории подвергаются лишь чисто внешнему изменению. Так, в формуле (6) коммутаторы и антисимметрические продукты меняются местами и она принимает вид

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \eta \left(\frac{1}{2} [A_\alpha, A_\beta]_+^{-1} \left\langle [A_\alpha, A_\beta]_- \right\rangle \right)$$

(при нулевых средних значениях). Собственные значения стоящей в аргументе матрицы теперь уже по модулю не превосходят $\frac{1}{2}$.

Расчет энтропии равновесного излучения приводит к значениям

$$U_T = \frac{1}{2} \sigma_1 T^2; \quad U_T = \frac{3}{4} d\sigma_2 T^2; \quad U_T = \frac{7}{8} A\sigma T^4$$

для случаев $p = 1, 2, 3$, где

$$\sigma_1 = \frac{k^2}{2\pi\hbar} \frac{\pi^2}{6}; \quad \sigma_2 = \frac{k^3}{2\pi^2 v_1 \hbar^2} \zeta(3); \quad \sigma = \frac{k^4}{4\pi^2 v_1^2 \hbar^3} \frac{\pi^4}{15} \quad (35)$$

в отличие от соответствующих формул для случая Бозе—Эйнштейна:

$$U_T = \sigma_1 T^2; \quad U_T = d\sigma_2 T^3; \quad U_T = A\sigma T^4$$

(d — линейный размер волновода). В (35) принята обычная система единиц, в которой постоянная Больцмана не равна единице. Формула (33) вообще не подвергнется изменению. Найденное в [3] количество энергии, приходящееся на единицу пропускной способности,

$$\frac{G_0}{C} = kT + \frac{k^2 C}{4\sigma_1} = kT + \frac{3\hbar}{\pi} C$$

(для одномерного канала) заменяется на величину

$$\frac{G_0}{C} = kT + \frac{6\hbar}{\pi} C \quad (p = 1).$$

Информация (34), переносимая в среднем одной частицей, несколько изменится и станет равной

$$i_0 = \frac{p+1}{p} \int_0^{\infty} \frac{\xi^p d\xi}{e^{\xi} + 1} \Big| \int_0^{\infty} \frac{\xi^{p-1} d\xi}{e^{\xi} + 1} = \frac{2^p - 1}{2^p - 2} (p+1) \frac{\zeta(p+1)}{\zeta(p)},$$

что для $p = 1, 2, 3$ дает значения $\pi^2/6 \ln 2 = 2,37\dots; 3,29; 4,2\dots$ соответственно.

Конечно, в реальных условиях приведенные теоретические величины трудно достижимы. Они являются лишь далекими теоретическими пределами, показывающими степень несовершенства действительных каналов связи. В случае каналов с ограниченной полосой частот формулы для пропускной способности подвергаются существенному изменению. Некоторые относящиеся сюда результаты содержатся в [2, 3].

Автор благодарен Л. Б. Левитину и Д. С. Лебедеву, познакомившим его с рядом своих работ до их опубликования,

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Стратонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 116 (1965).
2. G. R. Gordon, Proc. IRE, 50, 1898 (1962).
3. Д. С. Лебедев, Л. Б. Левитин, ДАН СССР, 149, 1299 (1963); Проблемы передачи информации, (в печати).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
22 апреля 1964 г.

QUANTITY OF INFORMATION TRANSMITTED BY QUANTUM COMMUNICATION CHANNEL. II

R. L. Stratonovich

The entropy and information have been found for quantum communication channel in which the output and input variables are not commutative. The practically important case of additive interference is specially considered. The transmission capacity has been calculated of a waveguide system with thermal noise under the assumption that the coefficient of the cannal communication is a small parameter.

УДК 621.396 67 095

ИЗЛУЧЕНИЕ ВЫТЯНУТОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ИМПЕДАНСНОЙ АНТЕННЫ

Г. Т. Марков, Д. А. Дупленков, Н. Ф. Осипович

Решена задача о возбуждении вытянутого импедансного сфероида кольцевой щелью с равномерным распределением поля в щели. Приведены рассчитанные диаграммы направленности для двух размеров сфероидов при различных положениях щели вдоль оси сфероида и различных поверхностных импедансах

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возбуждение тел различной формы проволочными и щелевыми антennами имеет определенный теоретический и практический интерес. Во многих случаях поверхность этих тел можно считать идеально проводящей; однако иногда ее необходимо считать импедансной. Конечно, во всех случаях форму возбуждаемого тела приходится идеализировать, полагая ее сферической, цилиндрической, сфероидальной и т. д.

В настоящей работе рассматривается вытянутый сфероид с импедансной поверхностью, возбуждаемый кольцевой щелью (бесконечно узкой рамкой поверхностной плотности магнитного тока, опущенной на поверхность сфероида). Поверхностный импеданс и поле в щели не зависят от азимутальной координаты. Решение ищется в виде разложения искомого электромагнитного поля по системе сфероидальных функций. В общем случае задания поверхностного импеданса граничные условия на поверхности сфероида удовлетворяются только для полного поля. Однако в одном частном случае зависимости поверхностного импеданса от продольной координаты граничным условиям удовлетворяет каждая пространственная гармоника, и решение получается в сравнительно простом виде.

Подбирая величину поверхности импеданса и оставляя неизменным закон его изменения, можно «подчеркивать» ту или иную пространственную гармонику и тем самым существенно изменять характеристику направленности антенны. Исследованию влияния этого поверхностного резонанса на характеристики антенны и посвящена данная работа.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Задача решается методом собственных функций в координатах вытянутого сфероида ξ, η, φ . Связь сфероидальных координат с декартовыми устанавливается известными соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi; \\ y &= \frac{d}{2} \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi; \\ z &= \frac{d}{2} \xi \eta, \end{aligned} \quad (1)$$

где d — межфокусное расстояние. Коэффициенты Лямэ с учетом (1) записываются в обычной форме:

$$h_1 = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_3 = \frac{d}{2} \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2}. \quad (2)$$

Решение задачи представляется в виде суперпозиции первичного поля, т. е. поля магнитной рамки (кольца поверхности плотности магнитного тока I_φ^M сфероидальной формы) и вторичного поля, т. е. поля, отраженного от сферида. Поскольку ток рамки от координаты φ не зависит, векторный потенциал первичного поля имеет только одну азимутальную составляющую A_φ^M [1], выражаемую формулой

$$A_\varphi^M \text{ перв } (\xi, \eta) = -ik \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{N_{1l}} S_{1l}(h, \eta) a_l(\xi_p) \times \\ \times \begin{cases} j e_{1l}(h, \xi) h e_{1l}^{(2)}(h, \xi_p) & \text{при } \xi < \xi_p \\ h e_{1l}^{(2)}(h, \xi) j e_{1l}(h, \xi_p) & \text{при } \xi > \xi_p \end{cases}, \quad (3)$$

где $S_{1l}(h, \eta)$ — угловые сфероидальные функции, $j e_{1l}(h, \xi)$ — радиальные сфероидальные функции первого рода, $h e_{1l}^{(2)}(h, \xi)$ — радиальные сфероидальные функции четвертого рода, соответствующие временной зависимости, задаваемой в форме $e^{i\omega t}$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $h = kd/2$,

$$a_l = \int_{\eta'=\eta_1}^{\eta_2} I_\varphi^M S_{1l}(h, \eta') h_2'^p h_3'^p d\eta'; \\ h_2'^p = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\xi_p^2 - (\eta')^2}{1 - (\eta')^2}}, \quad h_3'^p = \frac{d}{2} \sqrt{\xi_p^2 - 1} \sqrt{1 - (\eta')^2}; \\ N_{1l} = \int_{-1}^{+1} [S_{1l}(h, \eta)]^2 d\eta = 2 \sum_{n=0,1}^{\infty} \frac{[d_n(h/1l)]^2 (n+2)!}{n! (2n+3)}$$

— нормирующий множитель, ξ_p — радиальная координата рамки, η' — угловая координата точки на поверхности рамки $d_n(h/1l)$ — коэффициенты разложения угловых сфероидальных функций в ряд по присоединенным полиномам Лежандра, табулированные в [4].

Предполагаем, что импедансный сфериод расположен соосно с возбуждающей магнитной рамкой, причем радиальная координата поверхности сферида $\xi_0 < \xi_p$.

Поле рамки, отраженное от сферида, представим в виде разложения, аналогичного (3), с неизвестными коэффициентами

$$A_\varphi^M \text{ втор } (\xi, \eta) = -ik \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{N_{1l}} S_{1l}(h, \eta) h e_{1l}^{(2)}(h, \xi) A_l. \quad (4)$$

Таким образом, компонента суммарного векторного потенциала записывается в виде

$$A_\varphi^M = -ik \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{N_{1l}} S_{1l}(h, \eta) \times \\ \times \begin{cases} j e_{1l}(h, \xi) h e_{1l}^{(2)}(h, \xi_p) a_l(\xi_p) + A_l h e_{1l}^{(2)}(h, \xi) & \text{при } \xi < \xi_p \\ h e_{1l}^{(2)}(h, \xi) j e_{1l}(h, \xi_p) a_l(\xi_p) + A_l h e_{1l}^{(2)}(h, \xi) & \text{при } \xi > \xi_p \end{cases} . \quad (5)$$

Коэффициенты A_l определим из граничных условий для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на поверхности сфероида $\xi = \xi_0$. В рассматриваемой задаче электрическое поле имеет две составляющие E_ξ и E_η , а магнитное поле — одну составляющую H_φ , которые определяются выражениями

$$\begin{aligned} E_\xi &= -\frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial (h_3 A_\varphi^M)}{\partial \eta}; \\ E_\eta &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial (h_3 A_\varphi^M)}{\partial \xi}; \\ H_\varphi &= -i\omega \varepsilon A_\varphi^M. \end{aligned} \quad (6)$$

Зададим поверхностный «импеданс» Z на сфероиде в следующем виде:

$$Z = Z_{\text{пов}} h_1, \quad Z_{\text{пов}} = -\frac{E_\eta}{H_\varphi} \text{ при } \xi = \xi_0 \quad (7)$$

и потребуем, чтобы «импеданс» Z не зависел от угловой координаты η . При этих условиях поверхностный импеданс $Z_{\text{пов}}$, наоборот, оказывается функцией угловой координаты.

Очевидно, что желаемый закон распределения поверхностного импеданса $Z_{\text{пов}}$ может быть с той или иной степенью точности осуществлен практически на сфероидальной поверхности.

Подставим (5) при $\xi < \xi_p$ в (6), а затем в (7). Далее умножим левую и правую части полученного равенства на $S_{1l}(h, \eta)$ и проинтегрируем по η в пределах $\eta = -1 \div +1$. Условие ортогональности угловых сфероидальных функций и независимость «импеданса» Z от угловой координаты η позволяют получить выражение для искомых коэффициентов A_l в виде

$$A_l = a_l(\xi_p) h e_{1l}^{(2)}(h, \xi_p) \frac{i\omega \varepsilon Z \sqrt{\xi_0^2 - 1} j e_{1l}(h, \xi_0) - \frac{\partial}{\partial \xi} [V \sqrt{\xi^2 - 1} j e_{1l}(h, \xi)]|_{\xi=\xi_0}}{\frac{\partial}{\partial \xi} [V \sqrt{\xi^2 - 1} h e_{1l}^{(2)}(h, \xi)]|_{\xi=\xi_0} - i\omega \varepsilon Z \sqrt{\xi_0^2 - 1} h e_{1l}^{(2)}(h, \xi_0)}. \quad (8)$$

Как видно из выражения (8), величина Z позволяет изменять величину коэффициентов A_l и, тем самым, влиять на распределение поля на сфероиде и форму диаграммы направленности антенны.

Располагая возбуждающую магнитную рамку на поверхности сфероида, т. е. полагая в выражениях (5) и (8) $\xi_p = \xi_0$, мы тем самым образуем кольцевую возбуждающую щель на сфероиде. Удалив точку наблюдения от сфероидальной антенны, можно воспользоваться асимптотическими выражениями для радиальных сфероидальных функций [2,3]. В итоге, подставляя (8) в (5), получим выражение для компоненты векторного потенциала A_φ^M вытянутой сфероидальной импедансной антенны в дальней зоне:

$$A_\varphi^M = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{N_{1l}} S_{1l}(h, \eta) a_l(\xi_0) \frac{2e^{-i[h\xi - \pi(l+1)/2]}}{h \xi d (\xi_0^2 - 1) \alpha_l}, \quad (9)$$

где

$$\alpha_l = \frac{\partial}{\partial \xi} [h e_{1l}^{(2)}(h, \xi)]|_{\xi=\xi_0} + h e_{1l}^{(2)}(h, \xi_0) \left[\frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} - i\omega \varepsilon Z \right]. \quad (10)$$

При произвольном выборе величины Z все парциальные гармоники малых номеров l будут вносить более или менее равный вклад в суммарное поле. Однако можно так подобрать величину Z , что будет подчеркнута одна определенная гармоника, которая и определит в основном поле антенны.

Для того, чтобы выделить некоторую фиксированную гармонику (осуществить пространственный резонанс), надо, очевидно, обратить в нуль знаменатель выражения (8), что, в свою очередь, позволяет получить условие для вычисления оптимального «импеданса»:

$$Z_{\text{опт}} = \frac{\partial}{\partial \xi} [V \sqrt{\xi^2 - 1} \ he_{ll}^{(2)}(h, \xi)] \Big|_{\xi=\xi_0} / i \omega \varepsilon \sqrt{\xi_0^2 - 1} \ he_{ll}^{(2)}(h, \xi_0) = \\ = \frac{1}{\omega \varepsilon} (r + ix), \quad (11)$$

где

$$r = - \frac{1}{|he_{ll}^{(2)}(h, \xi_0)|^2 h(\xi_0^2 - 1)}, \quad (12)$$

$$x = - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} |he_{ll}^{(2)}(h, \xi_0)|_{\xi=\xi_0} |he_{ll}^{(2)}(h, \xi_0)|^{-1} + \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \right]. \quad (13)$$

Таким образом, оптимальный «импеданс» содержит отрицательное активное «сопротивление». Физически это означает, что к каждой точке поверхности сфера должна подводиться некоторая активная энергия изнутри. Только в этом случае амплитуда резонирующей пространственной гармоники может становиться бесконечно большой.

Этот случай практически нереален, и поэтому мы им интересоваться не будем. Ограничимся рассмотрением чисто реактивных поверхностных сопротивлений. При этом, очевидно, нельзя выделить только одну гармонику; однако, выбирая величину импеданса, можно добиться преобладания некоторой парциальной гармоники по отношению к остальным. Этот результат будет получаться при достижении множителем α_l минимума в зависимости от величины поверхностного реактивного «сопротивления» X_l (для каждого конкретного значения номера l). Анализ показывает, что условию минимума α_l соответствует реактивное «сопротивление»:

$$X_l \text{ опт} = - \frac{1}{\omega \varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} |he_{ll}^{(2)}(h, \xi)|_{\xi=\xi_0} |he_{ll}^{(2)}(h, \xi_0)|^{-1} + \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} \right]. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (10), получаем для оптимальной гармоники

$$\alpha_{l \text{ опт}} = -i \frac{1}{h(\xi_0^2 - 1) he_{ll}^{(1)}(h, \xi_0)}. \quad (15)$$

Выражения (6), (9), (10), (15) позволяют без труда получить окончательное выражение компоненты поля E_η в дальней зоне (для бесконечно узкой щели), понимая в дальнейшем под γ' угловую координату центра щели:

$$E_\eta = M \frac{e^{-ih\xi}}{\xi} \left[W_{l \text{ опт}} S_{1l \text{ опт}}(h, \eta) + \sum_{l=1}^{\infty} W_l S_{1l}(h, \eta) \right], \quad (16)$$

где

$$W_{l \text{ опт}} = - \frac{1}{N_{1l \text{ опт}}} S_{1l \text{ опт}}(h, \eta') h(\xi_0^2 - 1) he_{ll}^{(1)}(h, \xi_0) e^{i\pi(l_{\text{опт}}+1)/2}, \quad (17)$$

$$W_l = i \frac{1}{N_{ll}} S_{ll}(h, \eta') \frac{1}{\alpha_l} e^{i\pi(l+1)/2}, \quad (18)$$

M — постоянный множитель. Составляющая поля E_ξ не рассматривается, так как она убывает пропорционально квадрату радиальной координаты ξ .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчет диаграмм направленности производился по формуле (16) для двух сфериоидов. Оба имели радиальную координату $\xi_0 = 1,077$; для первого параметр $h = 1$, а для второго $h = 4$. Сфериодальные функции вычислялись на основе работы [4]. Для каждого сфериоида рассчитывалось восемь различных случаев, соответствующих восьми различным импедансам на поверхности, причем для каждого импеданса исследовалось изменение диаграммы направленности при смещении возбуждающей щели вдоль большой оси. Значения «импедансов», подчеркивающие различные парциальные гармоники, были рассчитаны по формуле (14) и сведены в таблицу 1.

Таблица 1

| $x = \omega \epsilon X_{l \text{ опт}}$ | | |
|---|---------|---------|
| $l_{\text{опт}}$ | $h=1$ | $h=4$ |
| 1 | 0,9066 | -1,9540 |
| 2 | 3,6395 | -0,9342 |
| 3 | 6,1174 | 1,1055 |
| 4 | 8,5767 | 4,3841 |
| 5 | 10,9930 | 7,9595 |
| 6 | 13,5051 | 11,1408 |
| 7 | 14,6504 | 14,0033 |
| 8 | 18,3096 | 17,2647 |

Диаграммы направленности для сфериоида с параметром $h = 1$ для первых трех значений импедансов (для первых трех подчеркнутых гармоник) в зависимости от сферической координаты Θ , связанной с угловой сфероидальной координатой η соотношением $\eta = \cos \Theta$, приведены на рис. 1. Различные кривые на этих рисунках соответствуют различным координатам положения возбуждающих щелей η' . Как видим, сме-

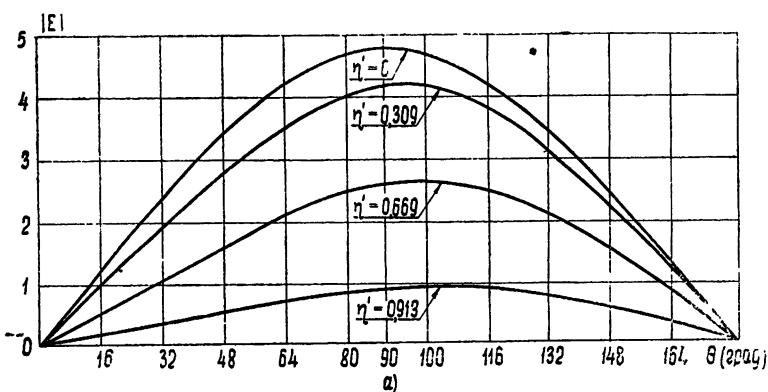


Рис. 1. Диаграммы направленности антенн с параметрами $h=1$, $\xi_0=1,077$ для различных положений щели η' :

a) $l_{\text{опт}} = 1$, $x = 0,9066$.

щение щели приводит к незначительным смещениям максимумов и минимумов диаграмм направленности (исключая, конечно, минимумы при $\Theta = 0^\circ$ и $\Theta = 180^\circ$). Амплитуда поля при этом изменяется существенно. Последнее обстоятельство объясняется различным положением возбуждающей щели относительно узлов и пучностей электрического тока, текущего по поверхности сфероида.

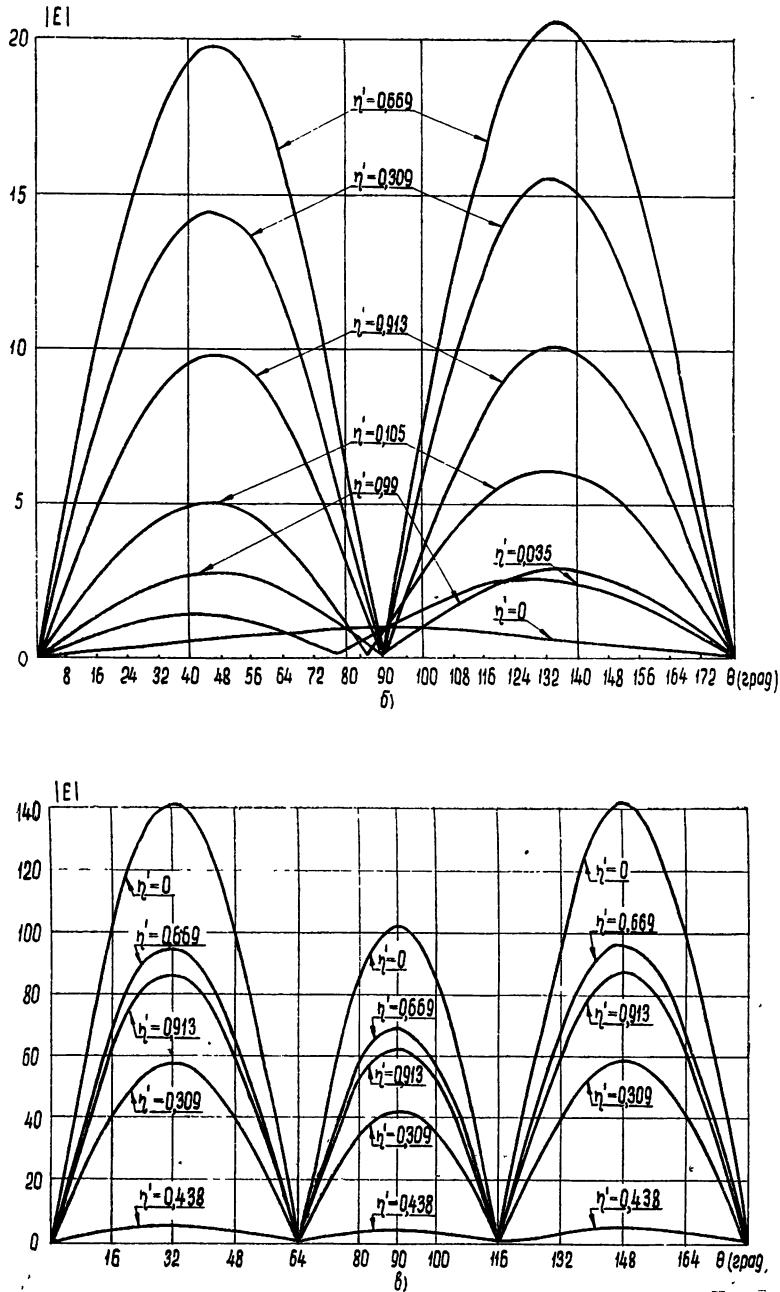


Рис. 1. Диаграммы направленности антены с параметрами $h=1$, $\epsilon_0=1,077$ для различных положений щели η' :
а) $l_{\text{опт}}=2$, $x=3,6095$, в) $l_{\text{опт}}=3$, $x=6,1174$.

На диаграммах рис. 1 и на всех последующих диаграммах направленности величина напряженности поля оценивается в одних и тех же относительных единицах при условии, что к щелям во всех случаях прикладывается одинаковое напряжение. Диаграммы направленности для парциальных гармоник с номерами выше трех не приводятся, поскольку они с достаточной точностью описываются только оптимальными гармониками и, следовательно, только соответствующими угловыми сфероидальными функциями. Расчет множителя $W_{l \text{ опт}}$, характеризующего амплитуду поля в зависимости от точки включения щели, несложно произвести с помощью формулы (18).

На рис. 2 приведены серии диаграмм направленности вытянутой сфероидальной антенны с параметрами $h = 4$, $\xi_0 = 1,077$ при различных импедансах на границе раздела и для различных положений возбуждающей кольцевой щели.

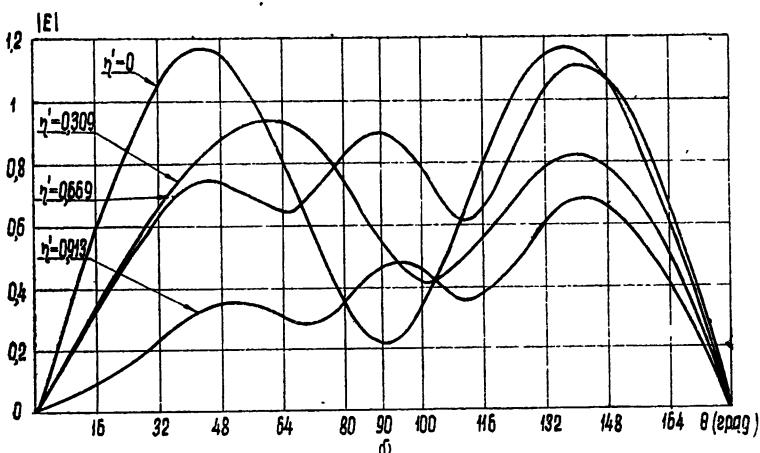
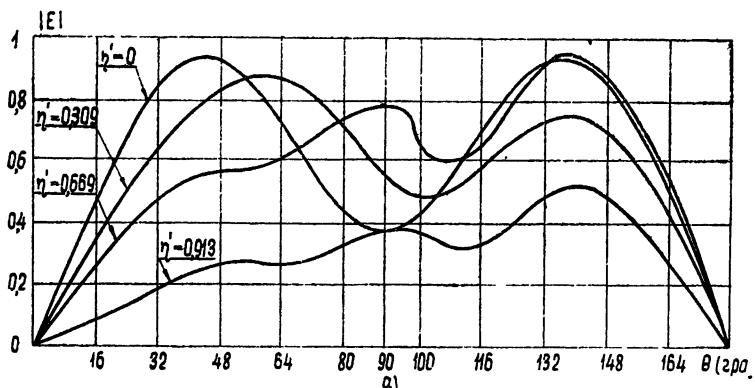


Рис. 2. Диаграммы направленности антенны с параметрами $h=4$, $\xi_0=1,077$ для различных положений щели η' :
а) $l_{\text{опт}}=1$, $x=-1,954$; б) $l_{\text{опт}}=2$, $x=-0,9342$.

Диаграммы рис. 2а, б характерны тем, что импеданс имеет, в отличие от всех рассматриваемых здесь случаев, емкостный характер; это исключает возможность создания бегущих волн вдоль поверхности. Следовательно, в излучении участвуют преимущественно лишь области, прилегающие к щели. Несимметрия диаграмм при смещении щели

сбъясняется как несимметрией положения щели, так и несимметрией импеданса относительно нее. В силу близости величин импедансов характер диаграмм направленности остается неизменным.

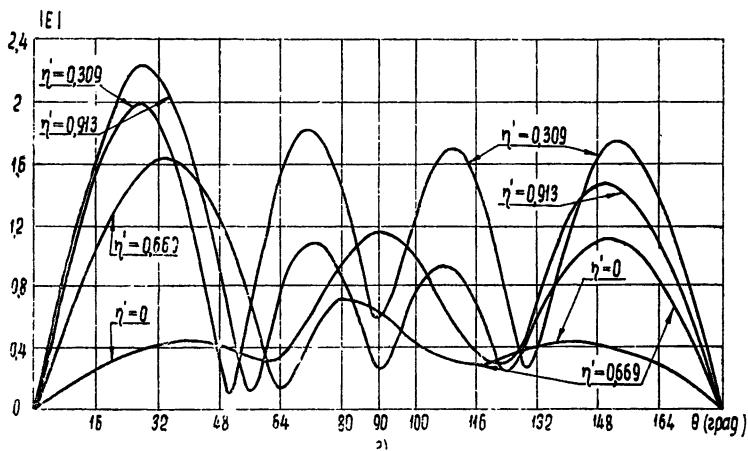
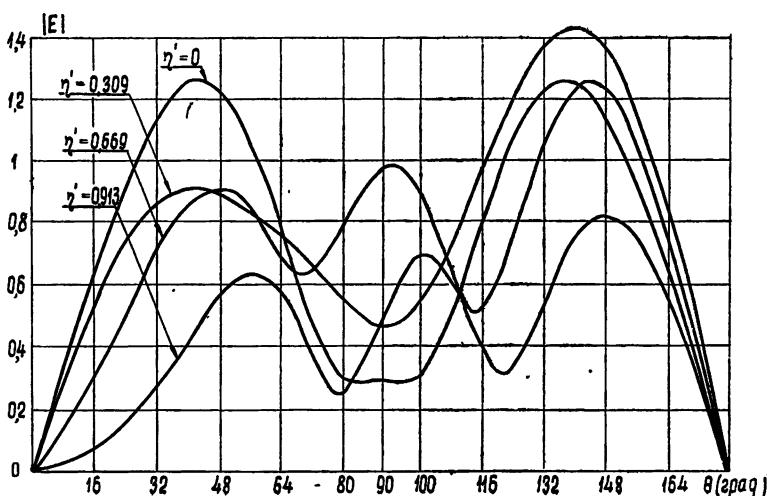


Рис. 2. Диаграммы направленности антенны с параметрами $h=4$, $\xi_0=1,077$ для различных положений щели η' :
в) $l_{\text{опт}}=3$, $x=1,1055$; г) $l_{\text{опт}}=4$, $x=4,3841$.

Характеристики направленности для $l_{\text{опт}}=3$ (рис. 2в) в сущности мало отличаются от только что рассмотренных. По-видимому, это можно объяснить малой величиной импеданса (слабым замедлением поверхностной волны), т. е. близостью этого случая к случаю идеально проводящего сфероида. Увеличение номеров l (рис. 2г—к) приводит к увеличению поверхностного индуктивного импеданса, что, в свою очередь, вызывает все большее подчеркивание одной пространственной гармоники.

Из приведенных диаграмм направленности следует, что амплитуда поля и форма диаграмм направленности существенно зависят от точки расположения щели. Если щель расположена близ нуля тока опти-

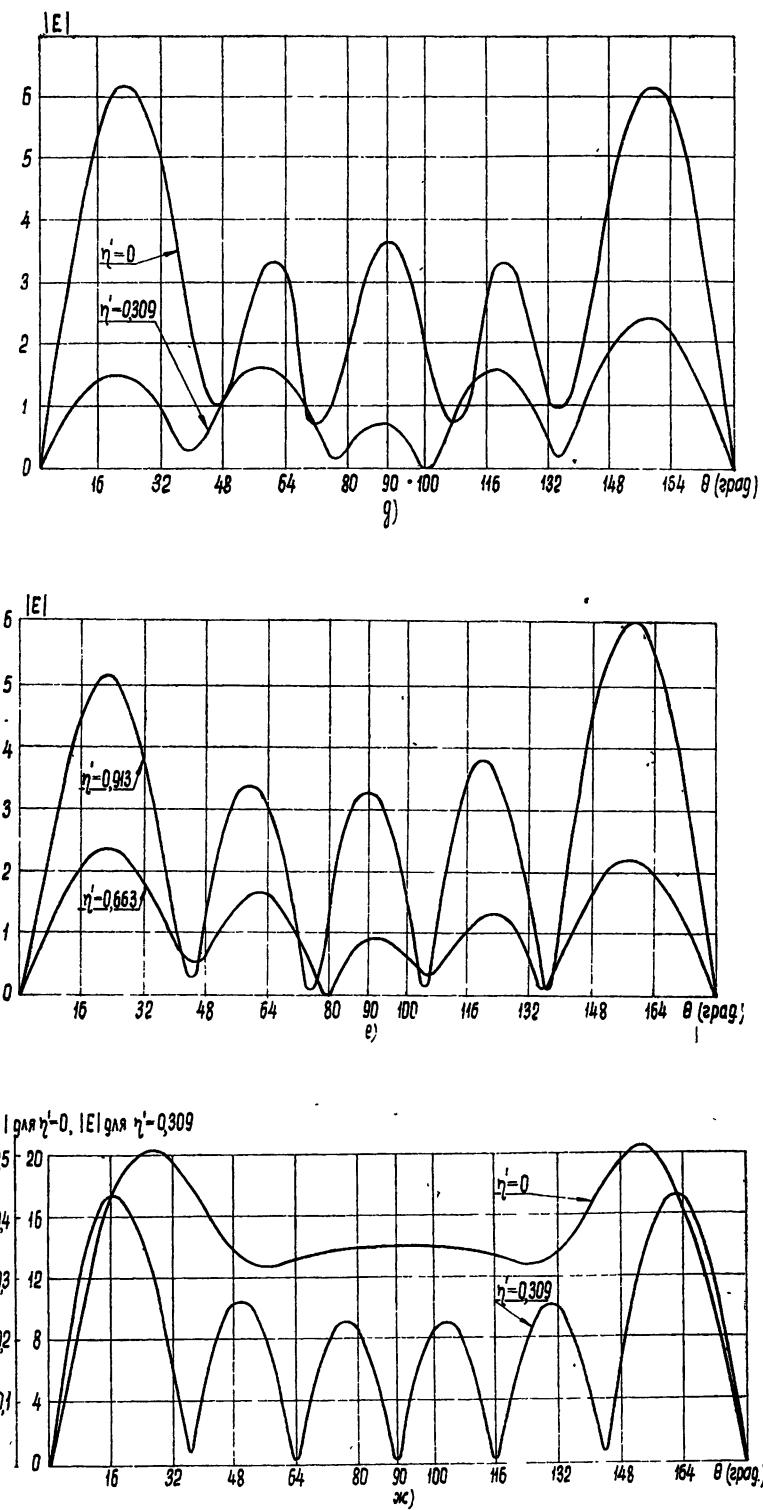


Рис. 2. Диаграммы направленности антенны с параметрами $h=4$, $\epsilon_0=1.077$ для различных положений щели η' :
 д) $l_{\text{опт}}=5$, $x=7.9595$, е) $l_{\text{опт}}=5$, $x=7.9595$; ж) $l_{\text{опт}}=6$, $x=11.141$.

мальной гармоники, то диаграмма направленности определяется преимущественно неоптимальными гармониками и поэтому резко искажается.

В заключение следует заметить, что аналогичным путем может быть решена задача об излучении вытянутой сфероидальной антенны с любой величиной и с любым законом изменения импеданса вдоль тела, однако в таком более общем случае определение необходимых коэффициентов A_l будет связано с большими математическими трудностями.

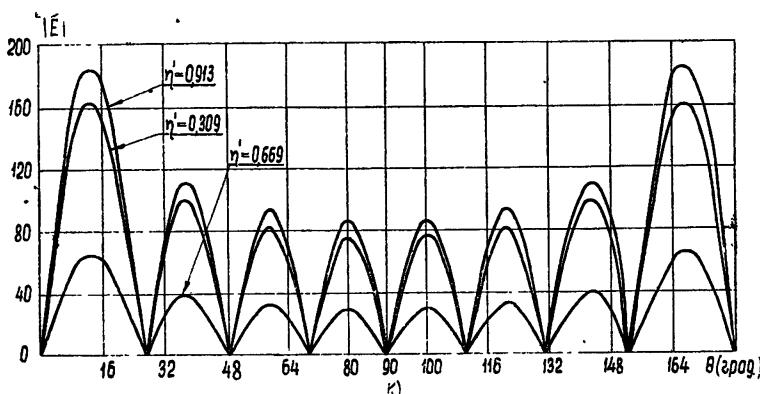
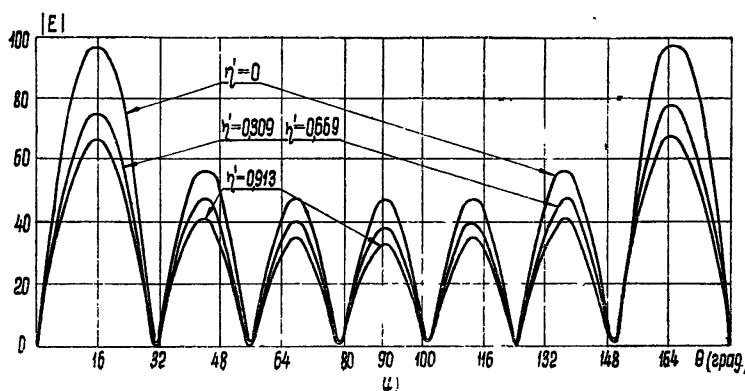
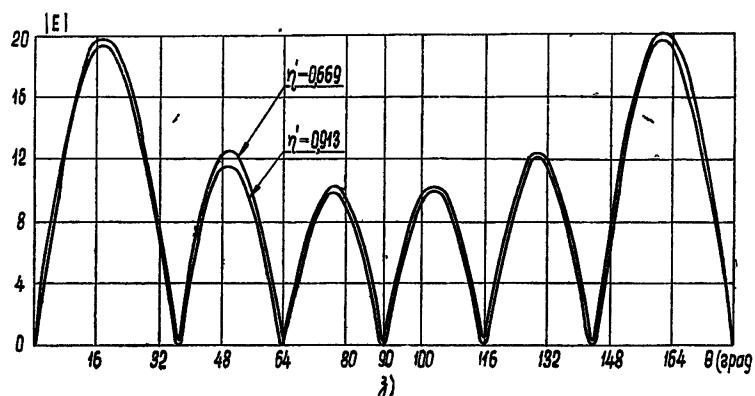


Рис. 2. Диаграммы направленности антенны с параметрами $h=4$,
 $\xi_0=1,077$ для различных положений щели η' :
 а) $l_{\text{опт}}=6$, $x=11,141$; б) $l_{\text{опт}}=7$, $x=14,003$; в) $l_{\text{опт}}=8$, $x=17,265$,

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Т. М а р к о в, А н т е н н ы, Госэнергоиздат, М, 1960.
2. Ф. М. М о р с, Г. Ф е ш б а х, М етоды теоретической физики, 2, ИЛ, М, 1960
3. К. Ф л а м м е р, Таблицы волновых сфероидальных функций, ВЦ АН СССР, М, 1962.
4. J. A. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu, J. D. C. Little, F. J. Corbató, Spheroidal wave functions, New York, 1956.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
4 марта 1964 г.

RADIATION OF PROLONGED SPHEROIDAL IMPEDANCE ANTENNA

G. T. Markov, D. A. Duplenkov, N. F. Osipovich

The problem has been solved of the excitation of a prolonged impedance spheroid by a ring slot with uniform field distribution. The calculated radiation patterns have been given for two parameters of spheroids when positions of a slot along the spheroid axis and the surface impedances are different.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ С ПОПЕРЕЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ФОКУСИРОВКОЙ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА

В. И. Юрьев

Показана принципиальная возможность создания параметрического усилителя с поперечным взаимодействием и электростатической фокусировкой электронного потока. В качестве элементов связи сигнала с потоком используются системы, предложенные в работе [10]. Приводятся характеристики усилителя в зависимости от ряда параметров.

Известно, что существует два типа параметрических усилителей на электронных потоках — с продольным взаимодействием [1–3] и с поперечным взаимодействием ([4, 5] и т. д.). В устройствах первого типа усиливаемый сигнал возбуждает быструю волну пространственного заряда [6] в потоке, а в устройствах второго типа — быструю циклотронную волну [9]. Фазовые скорости этих волн определяются соответственно выражениями

$$v_{1,2} = \frac{v_{ez}}{1 \mp \omega_q/\omega}, \quad (1)$$

$$v_{1,2} = \frac{v_{ez}}{1 \mp \omega_H/\omega}, \quad (2)$$

где $v_{1,2}$ — фазовая скорость быстрой волны (знак минус) и медленной волны (знак плюс), v_{ez} — постоянная составляющая скорости электронного потока вдоль оси, ω_q — эффективная частота плазмы, ω — частота составляющей шумового сигнала, ω_H — гирочастота.

Целесообразность работы на быстрых волнах состоит в том, что быструю шумовую волну пространственного заряда в потоке или быструю шумовую циклотронную волну можно вывести из потока и поглотить в согласованной нагрузке [7]. Определяется это входными элементами связи, которые возбуждают быстрые волны в потоке на частоте усиливаемого сигнала и одновременно отбирают шумовой сигнал.

Недостатком систем с продольным взаимодействием является то, что фазовые скорости быстрой и медленной шумовых волн пространственного заряда отличаются незначительно одна от другой; шумы в этих усилителях — такого же порядка, как и в непараметрических [8], поскольку главная составляющая шума в электронном потоке обусловлена продольными возмущениями [7].

Особенностью систем с поперечными возмущениями является то, что ω_H можно сделать равной или близкой к значениям частоты сигнала ω . В этом случае скорость быстрой волны v_1 стремится к бесконечности, а медленной — к $v_{ez}/2$. Следовательно, медленная волна в таких системах не может взаимодействовать с сигналом, а быстрая поперечная шумовая волна отбирается в элемент связи [4, 5] и поглощается на нагрузкой.

Продольные шумовые волны пространственного заряда в принципе не взаимодействуют в таких системах с поперечными полями и остаются неизменными [7]. Именно, на лампах с поперечным взаимодействием Адлер [4, 5] достиг снижения коэффициента шума до $\sim 1 \text{ дБ}$ в полосе 10% ($f = 420 \text{ МГц}$) при усилении $20 \div 30 \text{ дБ}$.

Недостатком систем с магнитным полем является наличие громоздких магнитов и сложность высокочастотных систем. С этой точки зрения целесообразно реализовать системы с электростатической фокусировкой потока [12]. Элементы связи, предложенные в работе [10], и предлагаемая ниже система в целом представляется более простой, чем система Мацуо [11].

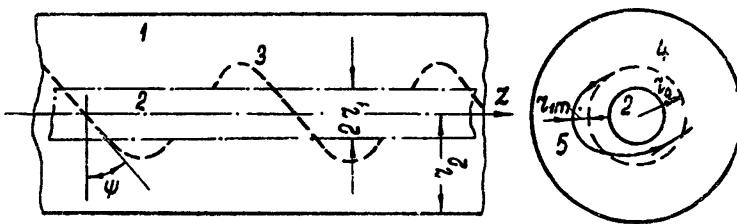


Рис. 1. Система связи электронного потока с высокочастотным сигналом ω для возбуждения поперечных возмущений на быстрой волне (фокусировка электронного потока—электростатическая) [10, 12]:
1,2—электроды коаксиальной линии; 3—траектория электрона; 4—стационарная траектория электрона; 5—возмущенная траектория электрона.

Поперечные возмущения могут возбуждаться в электронном потоке, который движется по спирали в статическом поле цилиндрического конденсатора (рис. 1). Анализ уравнений движения в указанной системе в статическом режиме [10]

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r \dot{\phi}^2 &= -\eta(V_1 - V_2)/r, \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

при условии малости возмущенных параметров \tilde{r}_1 и $\tilde{\phi}_1$ ($r = r_0 + \tilde{r}_1$, $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 + \tilde{\phi}_1$, $\tilde{r}_1 \ll r_0$, $\tilde{\phi}_1 \ll \dot{\phi}_0$) показывает, что возможны поперечные возмущения электронов, распространяющиеся вдоль оси z :

$$r_1 = \left\{ r_{1m} \exp \left[-j \left(\frac{\omega}{v_{ez}} + \frac{\sqrt{2}\dot{\phi}_0}{v_{ez}} \right) z \right] + r_{1m} \exp \left[-j \left(\frac{\omega}{v_{ez}} - \frac{\sqrt{2}\dot{\phi}_0}{v_{ez}} \right) z \right] \right\} e^{j\omega t} \quad (4)$$

(r_{1m} — амплитуда возмущения радиуса). Фазовые скорости этих волн определяются выражением

$$v_{1,2} = \frac{v_{ez}}{1 \mp (\sqrt{2}\dot{\phi}_0/\omega)}, \quad (5)$$

где $\dot{\phi}_0$ — постоянная составляющая угловой скорости потока, v_{ez} — постоянная составляющая скорости потока вдоль оси z . Частота этих возмущений равна $\sqrt{2}\dot{\phi}_0$.

Физически указанные колебания обусловлены следующими причинами. При заданных параметрах пучка в системе существует равновесная траектория r_0 , где центробежная сила электрона уравновеши-

вается силой внешнего радиального электрического поля. Если электрон вводится не строго на равновесную траекторию, что может быть обусловлено поперечными шумовыми возмущениями электронов, покидающих катод, и конечностью поперечных размеров электронного потока, то возникнут радиальные силы, которые заставят электрон осциллировать вокруг равновесной траектории [12]. Это следует из условия постоянства углового момента $r_0^2 \dot{\varphi}_0 = \text{const}$.

При наличии в системе высокочастотного поля в виде бегущей ТЕМ-волны в уравнение движения вводится член $\eta \tilde{E}_r$, в котором \tilde{E}_r получено на основе самосогласованного решения электродинамической задачи взаимодействия электрона с полем [15]. Совместное решение этих уравнений показывает, что когда параметр рассинхронизации электрона с волной b и параметр потерь d , аналогичные введенным Пирсом, равны нулю, в элементе связи возникает сигнал на частоте ω [10]:

$$E_r = e^{-j\beta z} \left[E_r(0) \cos(\beta_e c z) + \frac{2\omega^2 c}{\eta} r_1(0) \sin(\beta_e c z) \right], \quad (6)$$

а в пучке возмущения

$$r_1 = e^{-j\beta z} \left[-\frac{\eta}{2\omega^2 c} E_r(0) \sin(\beta_e c z) + r_1(0) \cos(\beta_e c z) \right], \quad (7)$$

где β — фазовая постоянная волны в линии без пучка. Здесь $r_1(0)$ — возмущение радиуса пучка на входе в систему, т. е. начальные шумовые возмущения электронов, $E_r(0)$ — поле на входе в элементе связи, $c = [(\eta I_0/8)(E_r^2/P\omega^2)]^{1/2} \ll 1$ — параметр усиления, аналогичный параметру Пирса, $\beta_e = \omega/v_{cz}$, I_0 — ток пучка, P — поток мощности ТЕМ-волн в линии, E_r — поле в элементе связи без пучка.

Из (6) и (7) следует, что при условии

$$\beta_e c z = (2n + 1)\pi/2$$

в линии возникает сигнал, обусловленный начальными возмущениями в пучке $r_1(0)$, а в электронном потоке — сигнал, обусловленный приложенным полем $E_r(0)$. Следовательно, шум из пучка перекачивается в линию. Если в аналогичный элемент связи, где нет высокочастотного сигнала, ввести возбужденный сигналом поток, то при условии

$$\beta_e c z = (2n + 1)\pi/2$$

в элементе возникает сигнал

$$E_{r_2} = -\frac{2\omega^2 c}{\eta} r_1(z). \quad (8)$$

Здесь

$$r_1(z_1) = -\frac{\eta}{2\omega^2 c} E_r(0) \quad (9)$$

— начальное возмущение на входе выходного элемента связи, обусловленное взаимодействием потока с полем в первом элементе. Коэффициент передачи системы, как следует из (8) и (9), равен

$$E_{r_2}/E_r(0) = 1.$$

Таким образом, результаты исследования системы без учета сил пространственного заряда указывают на возможность полной передачи

входного сигнала в выходной элемент и удаление «поперечного шума» на быстрой волне.

Для усиления сигнала необходимо ввести между входным и выходным элементами связи секцию, в которую подается сигнал накачки ω_n и осуществляется параметрическое усиление сигнала. Усиление ($E_{r_2}/E_r(0) > 1$) будет в том случае, если $r_1(z_1) > r_1$, т. е. при увеличении возмущения $r_1(z_1)$.

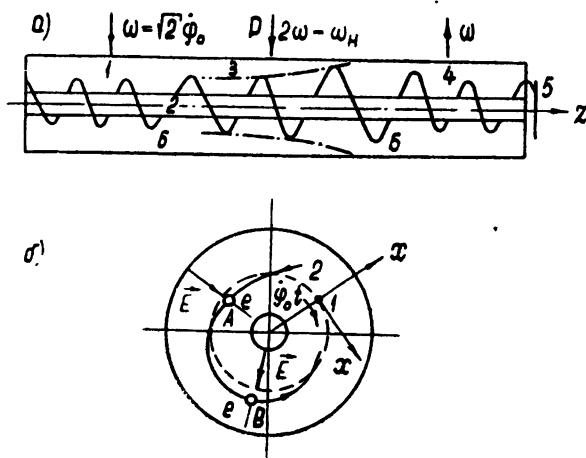


Рис. 2. Параметрический усилитель с поперечным взаимодействием на быстрой волне (фокусировка потока — электростатическая). а) Схематический вид усилителя: 1—входной элемент связи сигнала с пучком; 2—центральный электрод коаксиальной линии; 3—усилительная секция, в которую вводится мощность P сигнала накачки ω_n ; 4—выходной элемент связи для вывода усиленного сигнала; 5—коллектор; 6—локальные поглотители в коаксиале для развязки сигналов ω и ω_H .

б) Иллюстрация работы усилительной секции: 1—возмущенная траектория электрона (A, B —точки максимального воздействия поля сигнала накачки ω_n на возмущенный электрон, выходящий из входного элемента связи 1); 2—вращающаяся система координат x, y .

Осуществить «раскачку» параметра r_1 можно, по-видимому, различными способами. Исследуем один из них. Если в системе на рис. 2а приложено поперечное электрическое высокочастотное поле в виде ТЕМ-волны с частотой $\omega_n = 2(\sqrt{2}\phi_0)$ и электрон входит в усилительную секцию 3 в оптимальной фазе по отношению к полю, то на него в точках A, B (рис. 2б) будет действовать сила, увеличивающая амплитуду возмущения.

Для исследования характера усиления в указанной системе введем вращающуюся с постоянной угловой скоростью ϕ_0 систему координат x, y (рис. 2б). В ней движение электрона в системе с электростатической фокусировкой потока может быть записано в виде следующих уравнений [13, 14]:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2\dot{\phi}_0^2 y_1 &= 0, \\ \ddot{x}_1 + 2\dot{\phi}_0^2 x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Если по оси y в усилительной секции приложен сигнал накачки E_n на частоте ω_n , то (10) примет вид

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + 2\dot{\varphi}_0^2 y_1 &= -\eta E_{\text{н}}, \\ x_1 + 2\dot{\varphi}_0^2 x_1 &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Поскольку y совпадает с координатой r в неподвижной системе координат, то уравнение движения по y запишется в виде

$$\ddot{r}_1 + (\sqrt{2}\dot{\varphi}_0)^2 r_1 = -\eta E_{\text{н}r}. \quad (12)$$

При небольших амплитудах отклонения траекторий электрона r_{1m} от равновесной зависимости амплитуды высокочастотного электрического поля E_m от радиуса может быть аппроксимирована линейной функцией

$$E_m(r) \simeq E_m(r_0) + \left[\frac{\partial}{\partial r} E_m(r) \right]_{r=r_0} r_1. \quad (13)$$

Для ТЕМ-волны зависимость электрического поля по радиусу выражается формулой

$$E_r = A/r,$$

откуда

$$\left[\frac{\partial E_m(r)}{\partial r} \right]_{r=r_0} = -\frac{E_m(r_0)}{r_0}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и учитывая, что частота сигнала накачки $\omega_{\text{н}} = 2\sqrt{2}\dot{\varphi}_0$, получим

$$E_{\text{н}r} \simeq \left[E_m(r_0) - \frac{E_m(r_0)}{r_0} \right] \sin [2(\sqrt{2}\dot{\varphi}_0)t]. \quad (15)$$

Подставляя $E_{\text{н}r}$ в уравнение (12), получим уравнение движения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\ddot{r}_1 + \left\{ (\sqrt{2}\dot{\varphi}_0)^2 - 2 \left[\eta \frac{E_m(r_0)}{2r_0} \right] \sin [2(\sqrt{2}\dot{\varphi}_0)t] \right\} r_1 &= \\ &= -\eta E_m(r_0) \sin [2(\sqrt{2}\dot{\varphi}_0)t].\end{aligned}\quad (16)$$

Уравнение (16) есть неоднородное уравнение Матье. Его решение имеет вид [16]

$$r_1 = c_1 r_1(\xi) + c_2 r_2(\xi) - \frac{1}{c^2} \left[r_1(\xi) \int_{-\xi}^{\xi} r_2(\xi') f(\xi') d\xi' - r_2(\xi) \int_{-\xi}^{\xi} r_1(\xi') f(\xi') d\xi' \right], \quad (17)$$

где $\xi = (\sqrt{2}\dot{\varphi}_0)t$, а $f(\xi)$ — правая часть неоднородного уравнения Матье (вынуждающая сила), c_1 , c_2 — постоянные коэффициенты частных решений $r_1(\xi)$ и $r_2(\xi)$ однородного уравнения Матье, для которого общее решение может быть представлено в виде [17]

$$c_1 r_1(\xi) + c_2 r_2(\xi) \simeq c_1 e^{a\xi} \sin(n\xi - \sigma) + c_2 e^{-a\xi} \sin(-n\xi + \sigma). \quad (18)$$

Можно показать, что вынужденное решение неоднородного уравнения Матье для исследуемой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \left[r_1(\xi) \int_{-\xi}^{\xi} r_2(\xi') f(\xi') d\xi' - r_2(\xi) \int_{-\xi}^{\xi} r_1(\xi') f(\xi') d\xi' \right] &= \\ = \frac{1}{4} \frac{c_1 c_2}{c^2} E_m(r_0) \left\{ \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (n+2)^2} \sin [2(n+2)\xi - 2\sigma] + \right. &\quad (19) \\ \left. + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (n-2)^2} \sin [2(n-2)\xi - 2\sigma] - \left[\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (n+2)^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (n-2)^2} \right] \sin(2\xi) \right\}.\end{aligned}$$

Как видно, вынужденное решение представляет собой ограниченную периодическую функцию времени. Входящий в уравнение коэффициент c^2 определяется начальным условием задачи, а именно,

$$c^2 = r_1(z_0) \dot{r}_2(z_0) - r_2(z_0) \dot{r}_1(z_0), \quad (20)$$

где z_0 — координата входной плоскости усилительной секции (см. рис. 2).

Для достаточно больших значений ξ вынужденное колебание в общем решении можно не учитывать, поскольку оно ограничено, в то время как собственные решения задачи нарастают. Таким образом, исследуемое уравнение (16) имеет в первом приближении следующее решение:

$$r_1 \approx c_1 e^{\alpha \xi} \sin(\xi - \sigma) + c_2 e^{-\alpha \xi} \sin(-\xi + \sigma), \quad (21)$$

поскольку нас интересует процесс на частоте $\sqrt{2}\dot{\varphi}_0$, т. е. при $n = 1$; σ представляет собой начальную фазу колебаний электрона на входе в усилительную секцию, а c_1 и c_2 — начальные амплитуды возмущения, определяемые из выражения (4) для быстрой волны.

Обозначая координату входной плоскости усилительной секции через z_0 и выражая время на входе в виде $t_1 = z_0/v_{ez}$, имеем

$$\sigma = -\omega t_1 + (\sqrt{2}\dot{\varphi}_0) t_1. \quad (22)$$

Подставляя значение фазы в уравнение (21), получим

$$r_1 = r_{1m} e^{\alpha \tau} \sin(\sqrt{2}\dot{\varphi}_0 \tau + \omega t_1) + r_{1m} e^{-\alpha \tau} \sin(-\sqrt{2}\dot{\varphi}_0 \tau - \omega t_1), \quad (23)$$

где $\tau = t - t_1$ — время нахождения электрона в усилительной секции, $r_{1m} = c_1 = c_2$ — амплитуда колебаний электрона на входе $z = z_0$ (см. уравнение (4)) и α — искомая постоянная нарастания сигнала.

Подставляя одно из решений (23) в (16) и пренебрегая членами с $\cos(3p)$ (поскольку нас интересует процесс на частоте $\omega = \sqrt{2}\dot{\varphi}_0$), а также вынуждающей силой (в силу сказанного выше о вынужденном решении), получим следующее уравнение для определения α :

$$\begin{aligned} e^{\alpha \tau} \sin p [r_{1m} \alpha^2 - r_{1m} (\sqrt{2}\dot{\varphi}_0)^2] + e^{\alpha \tau} \cos p - 2(\sqrt{2}\dot{\varphi}_0) r_{1m} \alpha = \\ = \frac{1}{2} \eta \frac{E_m(r_0)}{r_0} r_{1m} e^{\alpha \tau} \cos p - (\sqrt{2}\dot{\varphi}_0)^2 r_{1m} e^{\alpha \tau} \sin p, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$p = \sqrt{2}\dot{\varphi}_0 \tau + \omega t_1. \quad (25)$$

Уравнение (24) удовлетворяется в том случае, если равны коэффициенты при $\sin p$ и $\cos p$. Это возможно при условии, что $\alpha \ll (\sqrt{2}\dot{\varphi}_0)$. Тогда получим выражение для α в виде

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{e}{m} \frac{E_m(r_0)}{\sqrt{2}\dot{\varphi}_0 r_0}. \quad (26)$$

Общим решением уравнения (17) будет функция

$$r_1 = r_{1m} e^{\alpha \tau} \sin p - r_{1m} e^{-\alpha \tau} \sin p. \quad (27)$$

Используя соотношение

$$\begin{aligned} \sin p = \sin(\sqrt{2}\dot{\varphi}_0 \tau + \omega t_1) = \sin(\sqrt{2}\dot{\varphi}_0 \tau + \sqrt{2}\dot{\varphi}_0 t_1) \cos(\omega t_1 - \sqrt{2}\dot{\varphi}_0 t_1) + \\ + \cos(\sqrt{2}\dot{\varphi}_0 \tau + \sqrt{2}\dot{\varphi}_0 t_1) \sin(\omega t_1 - \sqrt{2}\dot{\varphi}_0 t_1) \end{aligned}$$

и вводя

$$\tau = l_y/v_{ez},$$

где l_y — длина усилительной секции, получим, обозначив $\sqrt{2}\dot{\phi}_0/v_{ez}$ через β , выражение для поперечного возмущения радиуса:

$$r_1 = r_{1m} \operatorname{ch}(\alpha\tau) \sin(\omega t_1 + \beta l_y) + r_{1m} \operatorname{sh}(\alpha\tau) \sin(\omega_x t_1 + \beta l_y). \quad (28)$$

Из (28) следует, что в общем случае на выходе усилителя содержится сигнал на частоте ω и «холостой» сигнал на частоте $\omega_x = [2(\sqrt{2}\dot{\phi}_0) - \omega]$.

Поскольку поле, наведенное в выходном элементе связи, определяется выражением (8) и

$$\begin{aligned} r_1(z_1) &= r_{1m} \operatorname{ch}(\alpha\tau), \\ r_{1m} &= (\eta/2\omega^2 c) E_r(0), \end{aligned} \quad (29)$$

где z_1 — положение входной плоскости выходного элемента, то для коэффициента усиления основного сигнала будет справедливо выражение

$$E_{r_2}/E_r(0) = \operatorname{ch}(\alpha\tau), \quad (30)$$

а для «холостого» сигнала

$$E_{r_2}/E_r(0) = \operatorname{sh}(\alpha\tau). \quad (30a)$$

Выразим в коэффициенте α поле $E_r(r_0)$ через поток мощности ТЕМ-волны в коаксиальной линии [10]:

$$E_r^2(r_0) = \frac{120 P}{r_0^2 \ln(r_2/r_1)}. \quad (31)$$

Здесь r_1 — радиус внутреннего проводника коаксиальной линии, r_2 — радиус внешнего проводника коаксиальной линии. Подставляя (31) в (30), окончательно получим

$$\frac{E_{r_2}}{E_r(0)} = \operatorname{ch} \left[\frac{1}{4} \frac{l}{m} \sqrt{\frac{60 P}{\ln(r_2/r_1)}} - \frac{1}{\dot{\phi}_0 r_0^2} \right]. \quad (32)$$

Рис. 3 иллюстрирует основные характеристики параметрического усилителя. На рис. 3а даны зависимости от $\lg V_1$ коэффициента усиления G при $z=z_{\min}$ (G практически не зависит от $\psi = 5^\circ \div 20^\circ$), минимальной длины элементов связи z_{\min} , определяемой из выражения

$$\beta_e c z = (2n + 1)\pi/2,$$

которое при $n = 0$ переходит в

$$\beta_e c = \frac{1}{v_{ez}} \left[\frac{\eta I_0}{8} \frac{120}{r_0^2 \ln(r_2/r_1)} \right], \quad (33)$$

частоты $\omega \approx \sqrt{2}\dot{\phi}_0$, где

$$\dot{\phi}_0 = \frac{1}{r_2} (\eta V_0)^{1/2} \exp \left(-\frac{V_2}{V_0} + \sec^2 \frac{\psi}{2} \right), \quad (34)$$

$$V_0 = (V_1 - V_2) \ln(r_2/r_1),$$

и скорости электронов вдоль оси

$$v_{ez} = (\eta V_0)^{1/2} \operatorname{tg} \psi. \quad (35)$$

Видно, что с ростом V_1 ($V_2 = 0$) резко увеличивается длина элементов связи z , падает G и растут ω и v_{ez} . Выгодно работать при малых ψ и V_1 , так как сильно сокращается полная длина усилителя и увеличивается G , но рабочая частота снижается. Увеличение z_{min} с ростом ψ и v_{ez} объясняется тем, что сокращается время взаимодействия электрона с сигналом, поэтому необходимо увеличить длину области взаимодействия. При фиксированном ψ увеличивается с уменьшением r_2 .

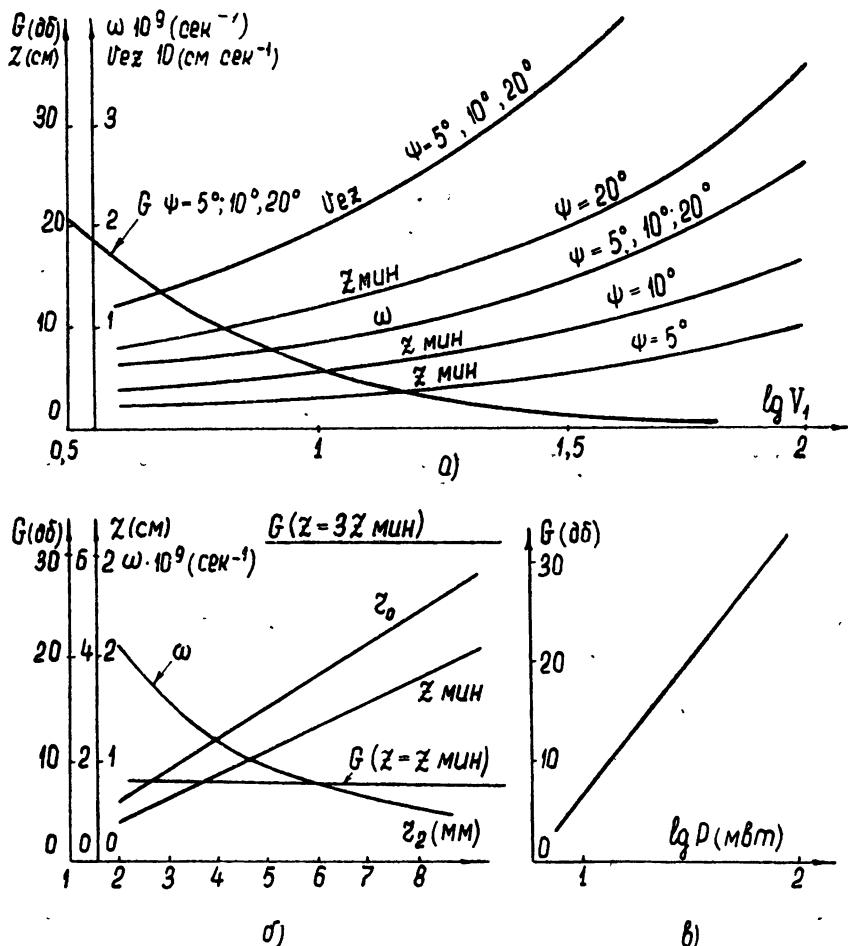


Рис. 3. Основные характеристики параметрического усилителя с поперечным взаимодействием и электростатической фокусировкой электронного потока ($b = 0$, $d = 0$):

а) зависимости усиления, минимальной длины элементов связи z_{min} , частоты ω и скорости электронов v_{ez} от разности потенциалов между электродами коаксиальной линии V_1 ($V_2=0$) при трех значениях угла ψ ($r_2=6 \text{ м.м.}$; $r_2/r_1=3$); б) зависимости усиления G (1—при $z=z_{min}$, 2—при $z=3z_{min}$), минимальной длины элементов связи z_{min} , частоты ω и невозмущенного радиуса траекторий электрона r_0 от радиуса внешнего электрода r_2 при $r_2/r_1=3$; $\psi=5^\circ$; $P=100 \text{ мвт}$; в) зависимость усиления G от мощности P сигнала накачки ω_n при длине усилительной секции $z=3z_{min}$.

Зависимости усиления G (при $z = z_{min}$ и $z = 3z_{min}$), ω , z_{min} и невозмущенного радиуса траектории электрона

$$r_0 = r_2 \exp [V_2/V_0 - \sec^2(\psi/2)] \quad (36)$$

от r_2 представлены на рис. 3б.

Из рисунка видно, что увеличить частоту выше $2 \cdot 10^9$ гц практически трудно, так как падает r_2 . При относительно большой длине усилителя и малом r_2 сильно усложняется трансляция пучка через систему.

При $r_2 = 2$ мм $\omega = 2,2 \cdot 10^9$ гц ($\lambda = 13,6$ см), а полная длина усилителя 4,5 см (длина усилительной секции $z = 3z_{\min}$). При этом теоретическое усиление при $P = 100$ мвт будет порядка 30 дб. При $G = 20$ дб возможно снижение мощности сигнала накачки P до $40 \div 30$ мвт (рис. 3в). Полоса усилителя составляет величину в несколько процентов [10].

Отклонение ω от значения $\omega \approx \sqrt{2} \varphi_0$ приводит к резкому снижению эффективности взаимодействия сигнала с потоком. Усиление в широкой полосе возможно при синхронном изменении ω и V_1 в соответствии с зависимостью

$$\omega = V \sqrt{\frac{e^{1/2}}{r_2}} \left[\frac{\eta V_1}{\ln(r_2/r_1)} \right]^{1/2} \quad (37)$$

(при малых ψ).

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Louisell, C. F. Quate, Proc. IRE, **46**, 707 (1958).
2. А. Ашкян, Радиотехника и электроника за рубежом, **4**, 88 (1958).
3. T. Bridges, Proc. IRE, **46**, 494 (1958).
4. R. Adler, G. Hrbek, G. Wade, Proc. IRE, **47**, 1713 (1959).
5. Р. Адлер, Радиотехника и электроника за рубежом, **49**, 88 (1959).
6. В. Н. Шевчик, Г. И. Шведов, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, **2**, 511 (1959).
7. В. М. Лопухин, Радиотехника и электроника, **6**, 683 (1961).
8. C. R. Russel, Mikrowellenröhren Vorträge der Internationalen Tagung, Mikrowellenröhren, Friedr. Viewegsohn Braunschweig, München, 7—11. Juni, 1960.
9. Г. П. Петин, Радиотехника и электроника, **7**, 468 (1962).
10. R. H. Pantell, Mikrowellenröhren Vorträge der Internationalen Tagung, Mikrowellenröhren, Friedr. Viewegsohn Braunschweig, München, 7—11. Juni, 1960.
11. И. Мацую, Зарубежная радиоэлектроника, **5**, 73 (1961).
12. З. С. Чернов, Радиотехника и электроника, **3**, 1227 (1958).
13. J. R. Pierce, IRE Trans., VED-3, 183 (1956).
14. R. L. Kyhl, H. F. Webster, IRE Trans., VED-3, 172 (1956).
15. G. Wada, R. H. Pantell, IRE Wesc., Convention Rec., **3**, 97 (1956).
16. Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матея, ИЛ, М., 1953, стр. 161.
17. Тихиро Хаяси, Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИЛ, М., 1957, стр. 15.

Поступила в редакцию
30 марта 1964 г.

PARAMETRIC AMPLIFIER WITH TRANSVERSE INTERACTION AND ELECTROSTATIC ELECTRON BEAM FOCUSING

Yuriev V. I.

General possibility is pointed out of the construction of a parametric amplifier with transverse interaction and electrostatic of electron beam. The systems suggested in the paper [10] are used as the element of signal-beam coupling. The amplifier characteristics for some parameters of the system are presented.

УДК 537.525

ВЛИЯНИЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ НА ВРЕМЯ ФОРМИРОВАНИЯ СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИМПУЛЬСНОГО РАЗРЯДА В ГАЗЕ

С. М. Левитский, А. Я. Явлинский, И. В. Широков

Исследуется влияние постоянного электрического и магнитного полей на время формирования сверхвысокочастотного импульсного разряда в воздухе при давлениях 10^{-3} — 10^{-1} мм рт. ст Показано, что постоянное электрическое поле затягивает, а постоянное магнитное поле (вблизи циклотронного резонанса) сокращает время формирования разряда. При совместном действии электрическое поле компенсирует влияние постоянного магнитного поля на время формирования разряда

Действие постоянного электрического поля на потенциал зажигания высокочастотного и сверхвысокочастотного разряда было исследовано в работах [1-4]. Достаточно хорошо изучено также влияние постоянного магнитного поля [5, 6]. Эти исследования дают основание полагать, что по мере понижения давления газа эффективность управляющего действия постоянного электрического и магнитного полей на потенциал зажигания ВЧ и СВЧ разряда должна возрастать.

Однако большинство этих исследований было проведено в непрерывном режиме СВЧ колебаний, а то небольшое количество работ, в которых исследования велись в импульсном режиме, относятся к области сравнительно высоких давлений, где время формирования разряда составляет всего лишь $10^{-9} - 10^{-8}$ сек. Вместе с тем известно, что по мере понижения давления газа время формирования при прочих равных условиях должно возрастать. При работе с СВЧ импульсами микросекундной длительности время формирования разряда низкого давления может оказаться соизмеримым с длительностью самого импульса, что затруднит использование подобных управляемых разрядов низкого давления для создания регулируемых коммутаторов СВЧ трактов.

В связи с этим представляет интерес исследовать влияние постоянного электрического и магнитного полей на время формирования сверхвысокочастотного импульсного разряда при сравнительно низких давлениях газа.

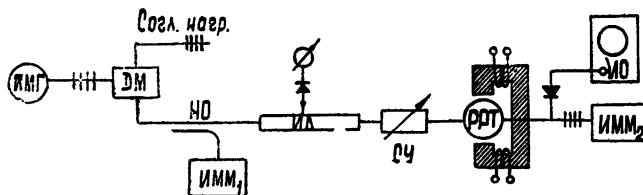


Рис. 1. Блок-схема сверхвысокочастотного тракта экспериментальной установки.

Для проведения экспериментов была собрана установка, схематически изображенная на рис. 1. Источником СВЧ колебаний служил

импульсный магнетронный генератор ИМГ, создающий импульсы длительностью около 1 мксек с частотой следования 350 гц. Рабочая частота генератора $f = 2832$ Гц. Через развязывающий фиксированный аттенюатор сигнал подавался на регулируемый делитель мощности ДМ, откуда он поступал далее в основной тракт установки. Величина падающей мощности измерялась термисторным мостом ИММ₁, присоединенным к тракту через направленный ответвитель НО. Согласование

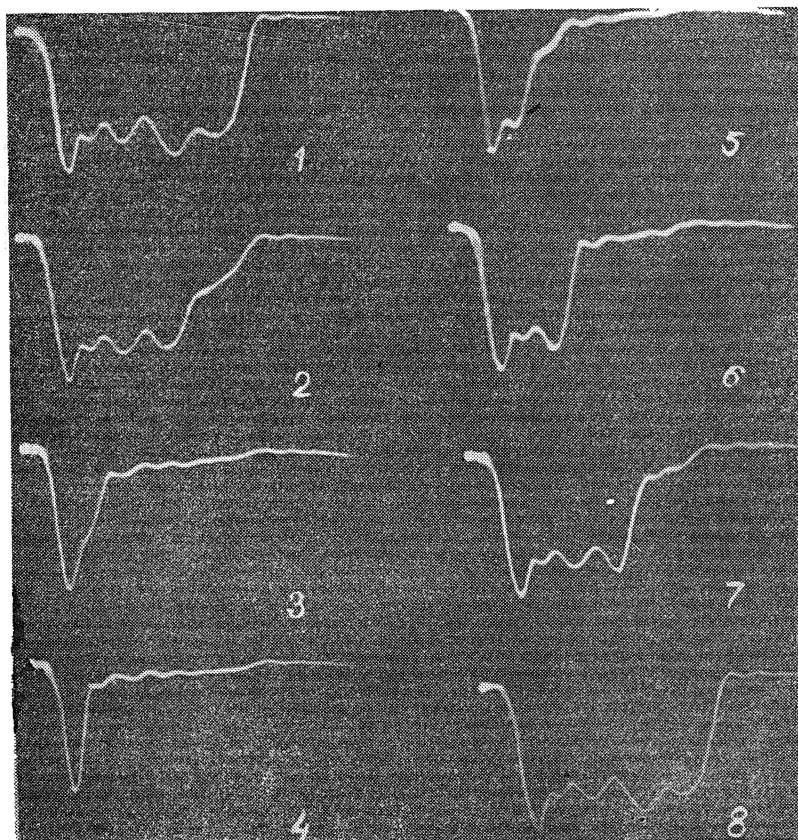


Рис. 2. Осциллограммы импульса, проходящего через резонатор, для различных значений постоянного магнитного поля (давление 5 мк рт. ст.; $P_{\text{пад}} = 9$ квт в импульсе):

- 1) $B_0=0$; 2) $B_0=600$ гс; 3) $B_0=800$ гс; 4) $B_0=1000$ гс; 5) $B_0=1200$ гс; 6) $B_0=1400$ гс;
- 7) $B_0=1600$ гс; 8) $B_0=1800$ гс.

нагрузки с трактом осуществлялось с помощью согласующего устройства СУ и контролировалось измерительной линией ИЛ. Нагрузкой тракта служил резонатор разрядной трубы РРТ, настраиваемый в резонанс на частоту генератора. Величина мощности, проходящей через РРТ, измерялась прибором ИММ₂. Детектор и импульсный осциллограф ИО позволяли наблюдать форму импульса, прошедшего через резонатор.

Исследуемый сверхвысокочастотный разряд возбуждался в разрядной трубке, вставленной в резонатор РРТ. Сама разрядная трубка представляла собой обычный резонансный разрядник, у которого был изъят электрод вспомогательного поджига и вместо него приварен стеклянный штенгель. Через этот штенгель разрядная трубка присоединялась к вакуумной установке, позволявшей понижать давление в трубке до

нескольких микрон ртутного столба. Рабочим газом, в котором возбуждался исследуемый разряд, был воздух. Электроды разрядной трубы представляли собой усеченные конусы с диаметром меньшего основания $D = 3,5 \text{ мм}$. Межэлектродное расстояние между ними d устанавливалось равным $d = 4 \pm 5 \text{ мм}$. Между кольцевым выводом нижнего электрода и корпусом резонатора прокладывалось слюдяное кольцо, благодаря чему на нижний электрод можно было подавать по отношению к верхнему постоянное напряжение U_0 до 2000 в. Перпендикулярно оси разрядника могло прикладываться постоянное магнитное поле B_0 , создаваемое специальным электромагнитом.

Для исследования воздействия какого-либо фактора (давления, постоянного электрического или магнитного поля) на зажигание и формирование разряда мы устанавливали с помощью делителя мощности ДМ некоторое определенное значение падающей мощности $P_{\text{пад}}$ и наблюдали форму и мощность СВЧ импульса, прошедшего через резонатор, в зависимости от величины воздействующего фактора. В отсутствие разряда через резонатор проходил весь импульс целиком и прибор ИММ₂ регистрировал наибольшую мощность. Если же на протяжении импульса в какой-либо момент времени возникал разряд, то резонатор тотчас расстраивался и не пропускал оставшейся части импульса. Это можно было наблюдать как по уменьшению длительности импульса, зарегистрированного осциллографом ИО, так и по уменьшению мощности, измеряемой прибором ИММ₂.

Действие постоянного магнитного поля показано на осциллограммах рис. 2. Режим был подобран так, чтобы в отсутствие магнитного поля разряд за время импульса не успевал сформироваться. Тогда на осциллографе был виден весь импульс целиком (1). При подаче $B_0 = 600 \text{ гс}$ (2) задний фронт импульса, прошедшего через резонатор, «сминается» за счет появления разряда. При дальнейшем росте магнитного поля этот момент наступает раньше, и импульс, проходящий через резонатор, становится короче. При напряженности магнитного поля в 1000 гс , соответствующей циклотронному резонансу ($f = eB_0/2\pi m$), длительность импульса получалась самой короткой (около 0,1 мксек). Дальнейшее существенное сокращение времени формирования разряда маловероятно, так как средняя частота ионизации для воздуха $\gamma_i = v_i p w_i$ при указанном давлении оказывается не выше 10^7 сек^{-1} (v_i — частота соударений при давлении газа 1 мм рт. ст., для воздуха она равна $3,6 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$; w_i — вероятность ионизации, для воздуха она не может превышать 0,5). Время же формирования разряда вряд ли может быть существенно меньше v_i^{-1} . При дальнейшем увеличении B_0 время, протекающее от начала импульса до момента возникновения разряда, вновь возрастало; при $B_0 > 1600 \text{ гс}$ разряд не возникал совсем.

Измерение времени формирования разряда было удобнее производить не на осциллограмме, а путем измерения мощности $P_{\text{пр}}$, проходящей через резонатор. Если отождествить время формирования τ_ϕ с длительностью импульса, прошедшего через резонатор, и считать, что этот импульс приближается по своей форме к прямоугольному, то можно записать:

$$s = P_{\text{пр}}/P_{\text{пад}} = \tau_\phi/\tau_1,$$

где индекс «1» относится к случаю отсутствия разряда в течение импульса. При этом мы пренебрегаем мощностью, просачивающейся через резонатор, когда в нем уже имеется разряд. Зависимость $s = f(B_0)$ для нескольких давлений газа представлена на рис. 3. Как видно, наименьшее значение s получается в случае циклотронного резонанса, причем синтакса минимума возрастает по мере понижения давления.

На рис. 4 и 5 представлены аналогичные осциллограммы и кривые, изображающие форму и мощность импульса, прошедшего через резонатор, если на разрядный промежуток накладывается постоянное электрическое поле E_0 различной величины. Режим разряда подобран так, чтобы в отсутствие поля E_0 разряд формировался за время порядка 0,1 мксек. При наложении постоянного напряжения порядка нескольких сотен вольт время формирования увеличивается вплоть до полного прекращения разряда. При высоких давлениях для заметного воздействия на время формирования требуется большее постоянное напряжение; эффект получается при этом более резко выраженным.

Свое действие постоянное электрическое поле оказывает на начальной стадии формирования разряда, когда концентрация электронов столь мала, что указанное поле свободно проникает во весь объем межэлектродного промежутка. Именно на этом этапе увод электронов постоянным электрическим полем предопределяет вопрос о том, будет или не будет нарастать концентрация электронов в межэлектродном промежутке, возникнет или не возникнет разряд.

Особый интерес представляло исследование комбинированного действия постоянного электрического и магнитного полей. Результаты подобных измерений представлены на рис. 6. Режим подбирался так, чтобы в отсутствие магнитного поля разряд не зажигался. При $U_0 = 0$ в соответствии с приведенными результатами $s = s_0$ получается тем меньше, чем ближе величина магнитного поля к резонансному значению. При подаче постоянного напряжения s начинает возрастать, указывая тем самым на увеличение времени формирования разряда. При некотором постоянном напряжении величина s достигает единицы, что означает полное отсутствие разряда.

Таким образом, и в данном случае постоянное электрическое поле затягивает время формирования и затрудняет зажигание СВЧ разряда. Однако в присутствии магнитного поля механизм будет несколько иным, нежели в ранее рассмотренном случае, когда действовало одно лишь электрическое поле. В скрещенных E_0 и B_0 полях электроны приобретают дрейфовую скорость $v = E_0/B_0$, направленную перпендикулярно E_0 и B_0 . При этом электроны будут устремляться из разрядного промежутка, но не на электроды, а на стенку трубки. Среднее время пребывания электрона в межэлектродном промежутке

$$\tau \approx \frac{D}{2v} = \frac{DB_0d}{2U_0} .$$

Если $\tau \gg \tau_{\phi_0}$ (τ_{ϕ_0} — время формирования разряда в отсутствие постоянного электрического поля), то разряд успеет сформироваться

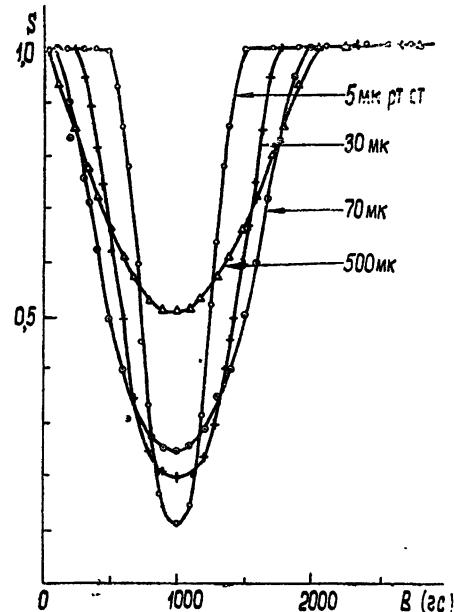


Рис. 3. Зависимость мощности, проходящей через резонатор, в зависимости от величины постоянного магнитного поля ($P_{\text{пад}} = 9 \text{ квт}$ в импульсе).

раньше, нежели электроны будут «выброшены» из межэлектродного промежутка. Если же $\tau < \tau_{\phi_0}$, накопление электронов в межэлектродном промежутке будет затруднено, и общее время формирования разряда должно увеличиться. При $\tau \ll \tau_{\phi_0}$ зажигание разряда вообще не должно иметь места.

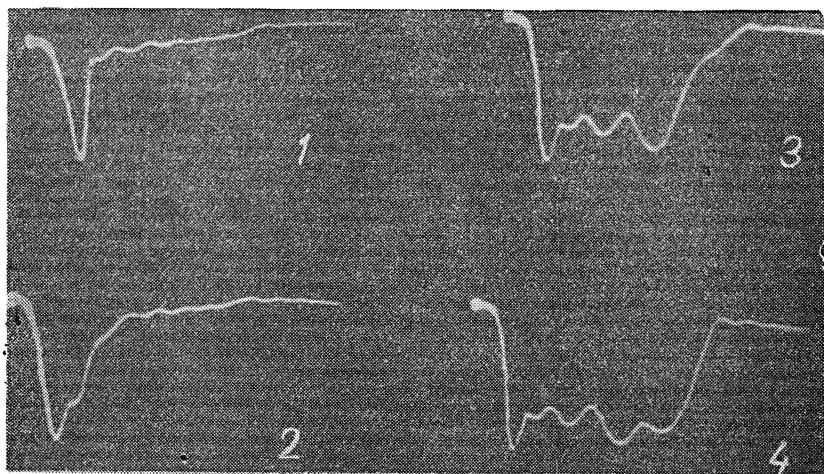


Рис. 4. Осциллографмы импульса, проходящего через резонатор, для различных значений наложенного постоянного напряжения (давление 30 мк рт. ст., $P_{\text{пад}} = 9 \text{ квт}$ в импульсе):

1) $U_0=0$; 2) $U_0=120 \text{ в}$; 3) $U_0=240 \text{ в}$, 4) $U_0=340 \text{ в}$.

Таким образом, условие равенства τ и τ_{ϕ_0} следует считать критерием действия постоянного напряжения на время формирования разряда. Чем короче τ_{ϕ_0} (и следовательно, чем меньше s_0), тем большее должно быть постоянное напряжение U_0 , необходимое для воздействия

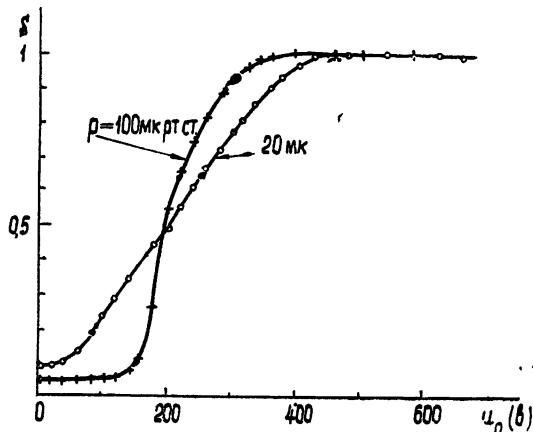


Рис. 5 Зависимость мощности, проходящей через резонатор, от величины постоянного напряжения ($P_{\text{пад}} = 9 \text{ квт}$ в импульсе)

на время формирования разряда. Результаты эксперимента в общих чертах подтверждают это заключение.

Однако при количественном подсчете получаются большие расхождения. Если считать, что $\tau_{\phi_0} = \tau_1 s_0$, то в нашем случае условие $\tau = \tau_{\phi_0}$

должно выполняться при постоянных напряжениях порядка всего нескольких вольт, тогда как в действительности для заметного воздействия на время формирования разряда требуются напряжения порядка сотен вольт.

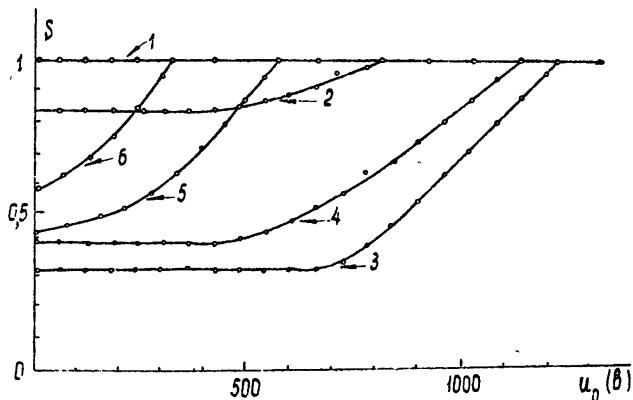


Рис. 6. Зависимость проходящей мощности от постоянного напряжения ($P_{\text{пал}} = 9 \text{ квт}$, $p = 9 \text{ мк рт. ст.}$):
 1) $B_0 = 0 - 640 \text{ гс}$; 2) $B_0 = 740 \text{ гс}$; 3) $B_0 = 1000 \text{ гс}$; 4) $B_0 = 1100 \text{ гс}$;
 5) $B_0 = 1200 \text{ гс}$; 6) $B_0 = 1300 \text{ гс}$.

Подобное расхождение можно объяснить действием положительного пространственного заряда, образующегося в межэлектродном промежутке. Этот пространственный заряд скапливается в результате того, что скорость ухода электронов и ионов из межэлектродного промежутка неодинакова. Действительно, электроны, как указывалось выше, движутся в скрещенных полях E_0 и B_0 по циклоиде, параметр которой $r = mE_0/eB_0^2 \ll d$ (с дрейфовой скоростью v , направленной перпендикулярно E_0 и B_0). Ионы также должны двигаться по циклоиде; однако в условиях наших экспериментов параметр этой циклоиды много больше d , и ионы фактически движутся в направлении поля E_0 так, как если бы $B_0 = 0$. Средняя скорость ионов при этом много меньше дрейфовой скорости электронов, и среднее время пребывания ионов в межэлектродном промежутке $\tau_i \approx d/\sqrt{2(e/m)}U_0$. Так, например, для $U_0 = 700 \text{ в}$ и ионов N_2^+ время $\tau_i \approx 10^{-7} \text{ сек}$.

Задерживающиеся в межэлектродном промежутке ионы препятствуют (полем своего пространственного заряда) уходу электронов. Постоянное электрическое поле сможет воздействовать на зажигание разряда лишь при условии, если оно успевает увести из межэлектродного промежутка как электроны, так и ионы за время, меньшее времени формирования разряда.

Авторы выражают благодарность З. А. Пляцок за помощь в проведении и обработке измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Varela, Phys. Rev., **71**, 124 (1947); С. М. Левитский, ЖТФ, **27**, 970 (1957); Г. М. Патеюк, ЖЭТФ, **30**, 12 (1956).
2. L. F. Vargnerin, S. C. Brown, Phys. Rev., **79**, 946 (1950).
3. С. М. Левитский, В. С. Гвоздецкий, Радиотехника и электроника, **7**, 133 (1962).
4. W. A. Prowse, L. E. Lane, Proc. Phys. Soc., **69 B**, 33 (1956).
5. B. Lax, W. P. Allis, S. C. Brown, J. Appl. Phys., **21**, 1297 (1950).
6. S. F. Tetenbaum, R. W. Hill, Trans, IRE, MTT-7, 73 (1959).

THE INFLUENCE OF CONSTANT ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS UPON
THE FORMATION TIME OF ULTRA HIGH-FREQUENCY PULSE DISCHARGE
IN GAS

S. M. Levitskii, A. Ya. Javlinskii, I. V. Shirokov

The influence is investigated of the constant electric and magnetic fields upon the time of formation of ultra high-frequency impulse discharge in the air when the pressure is $10^{-3} - 10^{-1}$ mm Hg. It is shown that a constant electric field increases but a constant magnetic field decreases the time of charge formation (in a vicinity of cyclotron resonance). In the presence of both fields the electric field compensates the influence of a constant magnetic field upon the time of discharge formation.

УДК 621.371.122

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ОДНОМЕРНЫХ СТРУКТУРАХ

B. P. Телеснин

Проводится аналитическое исследование распространения возбуждения в одномерных структурах типа линии и кольца из однородной возбудимой ткани с немонотонной зависимостью скорости распространения возбуждения от фаз точек среды.

Распространение возбуждения в тканях в течение последних лет привлекает внимание как радиофизиков, так и физиологов. В [1] рассмотрена дискретная модель линии и кольца из среды, способной проводить возбуждение, и предложен графический метод определения стационарных режимов. В работе [2] описаны так называемые континуальные модели управляющих систем и указаны такие важные свойства возбудимых тканей, как автосинхронизация, память и надежность. В [3] подробно рассмотрены процессы в кольце из однородной возбудимой ткани с монотонной зависимостью скорости распространения возбуждения от фазы. Случай немонотонной зависимости скорости распространения возбуждения от фазы рассмотрен в [4] применительно к кольцу из однородной возбудимой ткани. В исследованиях [5, 6] прохождения импульсов возбуждения по нервным стволам было установлено, что модели возбудимых тканей удовлетворительно описывают результаты физиологических экспериментов и позволяют предсказать некоторые новые явления (периодика Венкебаха—Самойлова в нервных стволах и т. п.). Отметим, что в последнее время сообщается об успешных попытках использования свойств возбудимых тканей для моделирования двумерных систем, например, сердца [7].

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию одномерных структур из однородной возбудимой ткани: изучается распространение возбуждения по отрезку линии при периодическом возбуждении его края; проводится исследование устойчивости различных расстановок импульсов возбуждения в кольце из однородной ткани. Исследования проводились как аналитически, так и путем моделирования на цифровой вычислительной машине. В статье также рассматривается влияние начальных условий на режим распространения возбуждения в «сетчатых» структурах из однородной ткани.

Следуя принятой терминологии, будем называть однородной возбудимой тканью среду, обладающую следующими свойствами.

1) Каждая точка среды способна к мгновенному возбуждению, которое распространяется от точки к точке.

2) Время $\tau(x, t)$, прошедшее с момента последнего возбуждения точки x к моменту t , называется фазой точки x в момент t .

3) Если $\tau(x, t) < R$, то точка x вообще не может быть возбуждена. При этом говорят, что точка x находится в фазе рефрактерности.

4) Скорость распространения возбуждения в данной точке x среды в данный момент t определяется фазой этой точки:

$$c = c[\tau(x, t)].$$

В дальнейшем мы будем пользоваться величиной, обратной скорости:

$$c^{-1}(x, t) = \varphi[\tau(x, t)],$$

где $\varphi(\tau)$ может быть любой положительной функцией, определенной для $\tau \geq R$; наибольший интерес представляют следующие два случая:

- 1) $\varphi(\tau)$ является непрерывной, монотонно убывающей функцией, асимптотически стремящейся к $\varphi_0 \neq 0$ при $\tau \rightarrow \infty$;
- 2) $\varphi(\tau)$ имеет один минимум и асимптотически стремится к φ_0 при $\tau \rightarrow \infty$ (рис. 1).

Примером среди с немонотонной $\varphi(\tau)$ является нервное волокно.

Другим интересным приложением является движение общественно-го транспорта, средняя скорость которого (с учетом задержки на остановках) зависит от временных интервалов между транспортными единицами; таким образом, последние ведут себя аналогично импульсам возбуждения в одномерной ткани.

Итак, рассмотрим луч $0 \leq x < \infty$ из однородной возбуждимой ткани, возбуждаемый в точке $x = 0$ с периодом T . Начальное распределение фаз

$\tau(x, 0)$ задано функцией $\tau_0(x)$. Обозначим через $t_k(x)$ момент возбуждения точки x k -м импульсом. Тогда распространение возбуждения в линии может быть описано последовательностью дифференциальных уравнений

$$\frac{dt_1}{dx} = \varphi[t_1(x) - \tau_0(x)], \quad (1)$$

$$\frac{dt_k}{dx} = \varphi[t_k(x) - t_{k-1}(x)] \quad (k \geq 2)$$

с краевыми условиями $t_k(0) = kT$ или (после замены переменных $u_k(x) = t_k(x) - t_{k-1}(x)$) последовательностью

$$\frac{du_1}{dx} = \varphi(u_1) - \frac{d\tau_0}{dx}, \quad \frac{du_k}{dx} = \varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1}) \quad (k \geq 2) \quad (2)$$

с краевыми условиями $u_k(0) = T$. Дифференцируя (2) $k-1$ раз по x и подставляя краевые условия, получим $\frac{d^i u_k}{dx^i}(0) = 0$ ($1 \leq i \leq k-1$).

Если все производные функции $\varphi(\tau)$, начиная с некоторого порядка m , обращаются в нуль для $\tau > R$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = u_k(0) = T$. Иными слова-

ми, на отрезке любой конечной длины устанавливается периодический режим с периодом T независимо от начальных условий. Отметим, что обращение в нуль старших производных функции $\varphi(\tau)$ не является обязательным условием для периодичности режима; достаточно, чтобы

$$\left| \frac{d^n \varphi(\tau)}{d\tau^n} \right| < M \varepsilon^n, \quad \text{где } M > 0, 0 < \varepsilon < 1. \quad (3)$$

Распространение возбуждения по отрезку линии исследовалось экспериментально. На цифровой вычислительной машине была построе-

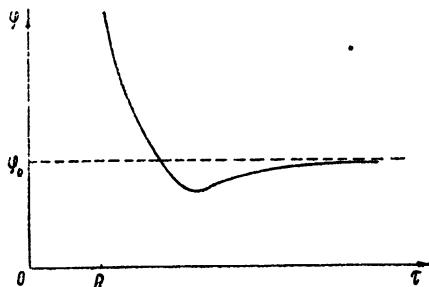


Рис. 1.

на дискретная модель отрезка из 128 элементов. Каждый элемент отрезка (рис. 2) состоит из двух ячеек (S_k и R_k). Ячейка S_k находится в состоянии 0, если элемент с номером k не возбужден, и в состоянии 1, если соответствующий элемент возбужден. Ячейка R_k представляет собой счетчик, включаемый в момент записи единицы в ячейку S_k , со-

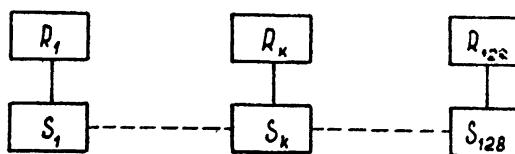


Рис. 2.

держимое которого с каждым тактом машины увеличивается на единицу. С приходом на k -й элемент следующего импульса возбуждения счетчик R_k сбрасывается на нуль и включается снова. Таким образом, в ячейке R_k всегда записана фаза k -го элемента. Передача возбуждения к следующему, $k+1$ -му элементу происходит с задержкой Δt , зависящей от фазы k -го элемента к моменту последнего возбуждения. Рис. 3 представляет зависимость задержки Δt от фазы.

Первый элемент отрезка возбуждается от источника с периодом T . Период возбуждения в описываемом эксперименте выбирался от 14 до 56 тактов.

Эксперименты на модели показали, что в любой точке отрезка устанавливается периодический режим с периодом T . Время установления стационарного режима, естественно, зависит от длины отрезка. В таблице 1 приводится зависимость количества «неправильных» интервалов от длины отрезка и периода возбуждения.

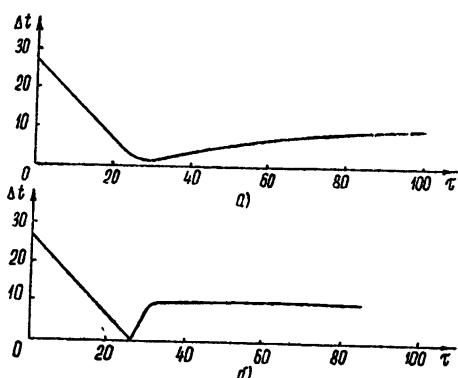


Рис. 3.

Таблица 1

| T | 14 | 21 | 28 | 31 | 52 | |
|----------------|-----|-----|-----|----|----|----|
| Номер элемента | 5 | 6 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| | 40 | 41 | 41 | 30 | 24 | 17 |
| | 128 | 129 | 129 | 94 | 74 | 53 |

Рассмотрим теперь случай циркуляции импульсов возбуждения в кольце длины l из однородной возбудимой ткани. Основные свойства такой циркуляции для случая немонотонной зависимости $\varphi(\tau)$ были изучены в [4]. Здесь мы кратко напомним их и проведем исследование устойчивости стационарных режимов.

Процессы в кольце длиной l при циркуляции по нему одного импульса можно описать последовательностью дифференциальных уравнений первого порядка;

$$\frac{dt_k}{dx} = \varphi [t_k(x) - t_{k-1}(x)], \quad (4)$$

причем $t_k(0) = t_{k-1}(l)$. Стационарный режим $t(x) = t(0) + x\varphi(T)$ определяется пересечением прямой τ/l с $\varphi(\cdot)$ (см. [4]). Если $\varphi'(T) - 1/l < 0$, стационарный режим устойчив. Доказательство устойчивости для случая $0 \leq \varphi'(T) < 1/l$ связано с громоздким геометрическим по-

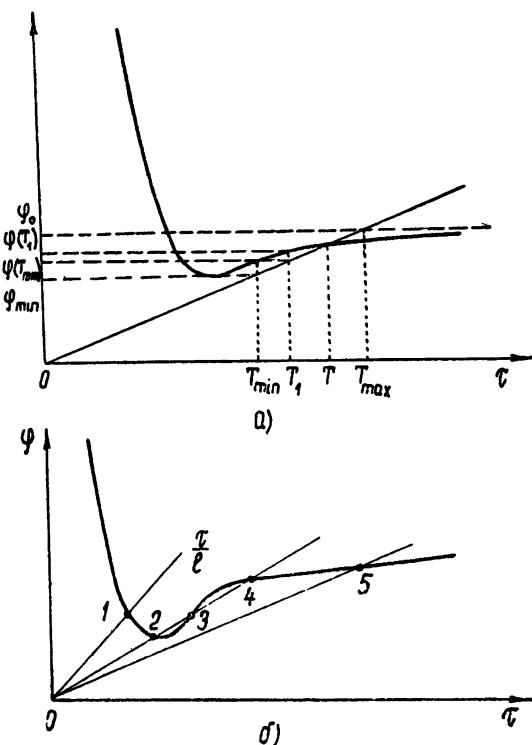


Рис. 4.

строением; поэтому здесь мы ограничимся более простым построением (рис. 4а), которое, однако, нельзя считать строгим доказательством.

Пусть первый оборот по кольцу импульс проходит с максимальной скоростью $c_{\max} = 1/\varphi_{\min}$. Следующий оборот импульс начнет со скоростью $c_1 = 1/\varphi(T_{\min}) < c_{\max}$, т. е. время второго оборота импульса по кольцу не меньше, чем T_1 (рис. 4а). В начале следующего оборота скорость распространения импульса не более $[\varphi(T_1)]^{-1}$ и т. д. Таким образом, если время первого оборота меньше T , то в дальнейшем период увеличивается. Выбрав время первого оборота большим T , убедимся, что период будет уменьшаться. Из этих элементарных рассуждений еще не следует, что в кольце устанавливается стационарный режим, но заметна тенденция уменьшения отклонения от стационарного режима.

В зависимости от длины кольца в нем может существовать либо один устойчивый стационарный режим, либо два (рис. 4б). Точки 1, 2, 4, 5 соответствуют устойчивым стационарным режимам; режим, определяемый точкой 3, неустойчив.

Рассмотрим теперь циркуляцию по кольцу длиной l n импульсов всзбуждения. Процессы в кольце описываются системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dt_1}{dx} = \varphi [t_1(x) - t_n(x-l)], \quad \frac{dt_k}{dx} = \varphi [t_k(x) - t_{k-1}(x)] \quad (2 \leq k \leq n) \quad (5)$$

или, после введения переменных $u_k(x) = t_k(x) - t_{k-1}(x)$; $u_1(x) = t_1(x) - t_n(x-l)$, системой

$$\frac{du_1}{dx} = \varphi [u_1(x)] - \varphi [u_n(x-l)]; \quad \frac{du_k}{dx} = \varphi [u_k(x)] - \varphi [u_{k-1}(x)] \quad (2 \leq k \leq n). \quad (6)$$

Графический способ определения стационарных режимов был рассмотрен в [4]. Как и в [4], расстановку импульсов, в которой k временных интервалов соответствуют левой ветви $\varphi(\tau)$, а $n-k$ — правой ветви, будем обозначать $(k, n-k)$. В настоящей работе мы исследуем устойчивость расстановок вида $(k, n-k)$.

Пусть в кольце длиной l существует стационарный режим для n импульсов возбуждения:

$$u_j(x) = u_j = t_j(0) - t_{j-1}(0).$$

Зыведем систему из стационарного режима. Подставляя в (6) $u_j(x) = u_j + \varepsilon_j(x)$, в первом приближении получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dx} &= \varepsilon_1 \varphi'(u_1) - \varepsilon_n \varphi'(u_n) + l \varphi'(u_n) \frac{d\varepsilon_n}{dx}; \\ \frac{d\varepsilon_2}{dx} &= \varepsilon_2 \varphi'(u_2) - \varepsilon_1 \varphi'(u_1); \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots; \\ \frac{d\varepsilon_n}{dx} &= \varepsilon_n \varphi'(u_n) - \varepsilon_{n-1} \varphi'(u_{n-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя $\varepsilon_j(x) = \xi_j e^{\lambda x}$ в (7), получаем характеристическое уравнение для λ :

$$\left| \begin{array}{cccccc} \lambda - \varphi'(u_1) & 0 & 0 & \dots & \varphi'(u_n) (1 - l\lambda) \\ \varphi'(u_1) & \lambda - \varphi'(u_2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi'(u_2) & \lambda - \varphi'(u_3) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \varphi'(u_{n-1}) & \lambda - \varphi'(u_n) \end{array} \right| = 0.$$

Вычисляя определитель, найдем

$$\prod_{j=1}^n [\lambda - \varphi'(u_j)] - (1 - l\lambda) \prod_{j=1}^n [-\varphi'(u_j)] = 0. \quad (8)$$

При данной расстановке импульсов временные интервалы u_j между ними могут принимать либо значение U_1 , соответствующее левой ветви $\varphi(\tau)$, либо значение U_2 , соответствующее правой ветви. Введем обозначения

$$-\varphi'(U_1) = a, \quad -\varphi'(U_2) = b,$$

где $a > 0$, $b < 0$. Тогда характеристическое уравнение (8) преобразуется к виду

$$(\lambda + a)^k (\lambda + b)^{n-k} - (1 - l\lambda) a^k b^{n-k} = 0. \quad (9)$$

Корень $\lambda = 0$ порождает тривиальное решение $\varepsilon_j(x) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

При исследовании устойчивости расстановок для $2 < n - k$ будем считать, что $|b| \ll a$. Очевидно, что если расстановка неустойчива при таком допущении, то при больших значениях $|b|$ она тем более неустойчива. Рассматривая коэффициенты при λ^2 и λ в уравнении (9), убеждаемся, что при $|b| \ll a$ они имеют разные знаки. Таким образом, при $n - k \geq 2$ расстановка $(k, n - k)$ неустойчива. Для случая $n - k = 1$ условие $1 + bl + b/a > 0$ является достаточным для устойчивости расстановки $(n - 1, 1)$.

Экспериментальное исследование устойчивости различных расстановок импульсов в кольце проводилось также на модели, аналогичной описанной выше модели линии. Длина кольца менялась от 3 до 32 элементов, количество импульсов возбуждения, циркулирующих в кольце, — от 1 до 8. Исследования проводились для немонотонной зависимости $\varphi(\tau)$ (рис. 3). Расстановка $(n - 1, 1)$ для данной $\varphi(\tau)$ оказалась устойчивой; расстановки $(k, n - k)$ при $n - k \geq 2$ неустойчивы.

Мы до сих пор изучали распространение возбуждения по простейшим структурам типа линии и кольца. Перейдем теперь к исследованию функционирования более сложных одномерных возбудимых тканей. Мы рассмотрим распространение импульсов возбуждения по графикам, состоящим из отрезков однородной возбудимой ткани.

При изучении распространения импульсов возбуждения в кольце из однородной возбудимой ткани мы не рассматривали вопрос о том, как осуществляется циркуляция в среде, не обладающей анизотропией, т. е. способностью проводить возбуждение только в одном направлении. В этом случае надо предусмотреть возможность пребывания точек среды в фазе рефрактерности без предшествующего возбуждения. Тогда циркуляция в кольце может быть обеспечена соответствующим образом заданными начальными условиями. При изучении распространения возбуждения по графикам мы будем говорить о существовании анизотропных отрезков, не указывая в каждом конкретном случае, является ли анизотропия природным свойством данной среды или вызвана начальными условиями.

Для простоты будем полагать, что зависимость скорости распространения возбуждения от фазы выражается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}(\tau) = v_0 = \text{const} \quad \text{при } \tau(x, t) \geq R$$

и распространение возбуждения невозможно при $\tau(x, t) < R$. Отрезок, целиком находящийся в фазе рефрактерности, будем называть зоной рефрактерности. Таким образом, если начальными условиями не предусмотрено наличие зоны рефрактерности без предварительного возбуждения, то максимальная длина зоны рефрактерности составляет $v_0 R$.

Если точка x_0 кольца длиной l из однородной возбудимой ткани однократно возбуждается в момент $t_0 = 0$ от внешнего источника, то от этой точки в обе стороны распространяются два импульса возбуждения, которые, встречаясь в момент $t_1 = l/2v_0$, гасят друг друга. Так как гашение возбуждения в замкнутых структурах происходит только при встрече пары импульсов, то в кольце сохраняется четность числа импульсов возбуждения (исключая, конечно, моменты, когда некоторые точки кольца возбуждаются от внешних источников).

Если кольцо возбуждается серией из n импульсов в моменты t_1, t_2, \dots, t_n , то в момент $t_n < t \leq t_n + l/2v_0$ все кольцо будет находиться в невозбужденном состоянии, независимо от того, какие точки кольца возбуждались в моменты t_1, t_2, \dots, t_n .

Пусть точки A и B (рис. 5) связаны между собой несколькими отрезками из однородной изотропной возбудимой ткани, так что импульс возбуждения, возникший в A , может достичь точки B различными путями. Очевидно, что импульс возбуждения достигает точки B кратчайшим

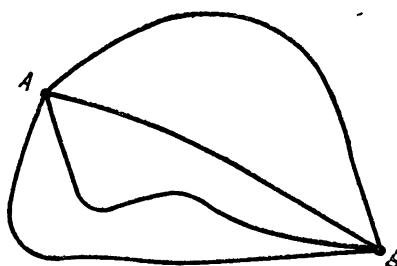


Рис. 5.

путем и, распространяясь далее, блокирует остальные пути. Поэтому при однократном возбуждении A точка B также возбуждается однократно. Импульс возбуждения не может вернуться в исходную точку; режим «генерации», таким образом, невозможен. В качестве примера рассмотрим граф с ребрами одинаковой длины $l = v_0$ (рис. 6а). Точка O возбуждается в момент $t_0 = 0$. Импульс возбуждения распространяется из точки O , как показано стрелками, достигая в момент $t_1 = 1$ соседних вершин графа. В момент $t_2 = 2$ импульс возбуждения достигает вершин, помеченных цифровой 2 и т. д. В точках, обведенных кружком, происходит «каннигилияция» импульсов возбуждения. Как видно из рис. 6а, с момента $t = 5$ все точки графа находятся в невозбужденном состоянии.

Иная картина наблюдается, если граф содержит отрезки, проводящие только в одном направлении (рис. 6б). Пусть ребро AB проводит возбуждение только в направлении от A к B . В момент $t_0 = 0$ возбуждается точка ребра AB , отстоящая от A на расстояние $\varepsilon \ll l$. Рассматривая, как и в предыдущем примере, состояния графа в последовательные моменты времени, обнаруживаем, что в момент $t = 6$ импульс возбуждения достигает исходной точки. Таким образом, в этом случае существует устойчивый периодический режим. Наличие анизотропного отрезка не является достаточным условием для образования цикла. В самом деле, если в момент $t_0 = 0$ возбуждается точка C , то цикл не образуется, так как наличие анизотропного отрезка AB при таких начальных условиях никак не влияет на характер распространения возбуждения.

Пусть AB — отрезок анизотропной ткани, проводящий возбуждение только в направлении от A к B . В момент $t_0 = 0$ возбуждается точка O ,

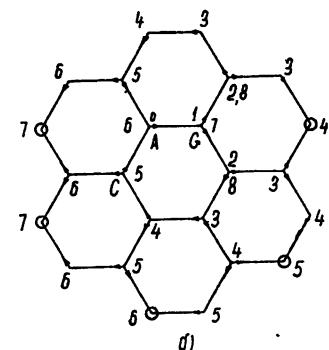
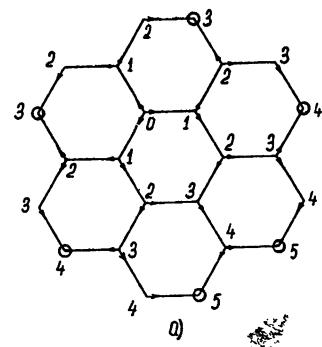


Рис. 6.

не принадлежащая отрезку AB . Обозначим через l_1 длину кратчайшего пути из точки O в точку B , включающего отрезок AB , через l_2 — длину кратчайшего пути от O к B , не включающего отрезок AB . Условие $l_1 - l_2 > v_0 R$ является достаточным для образования цикла.

Все сказанное выше справедливо и для любого количества аизотропных отрезков. При этом, естественно, предполагается, что конфигурация графа допускает построение цикла, включающего в себя аизотропный отрезок.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность М. Л. Цетлину за ряд ценных замечаний при обсуждении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Иванов, В. Р. Телеснин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 125 (1959).
2. И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин, ДАН СССР, **131**, 1249 (1960).
3. С. И. Гельфанд, Д. А. Каждан, ДАН СССР, **141**, 527 (1961).
4. В. Р. Телеснин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 624 (1963).
5. Ю. И. Аршавский, М. В. Беркинблит, С. А. Ковалев, Биофизика, **7**, 449 (1962).
6. Ю. И. Аршавский, М. В. Беркинблит, С. А. Ковалев, Биофизика, **7**, 619 (1962).
7. И. П. Лукашевич, Биофизика, **8**, 715 (1963).

Математический институт им. В. А. Стеклова
АН СССР

Поступила в редакцию
3 февраля 1964 г.

TO THE PROPAGATION OF EXCITATION IN ONE-DIMENSIONAL STRUCTURES

Telesnin V. R.

The analytical investigation is carried out of propagation of excitation in one-dimensional structure of line and ring type of homogeneous excited tissue with non-monotonic dependence of propagation velocity of excitation upon the phases of medium points.

УДК 621.374.335 621.372.45

ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ НА ТРОИЧНЫХ ПАРАМЕТРОНАХ

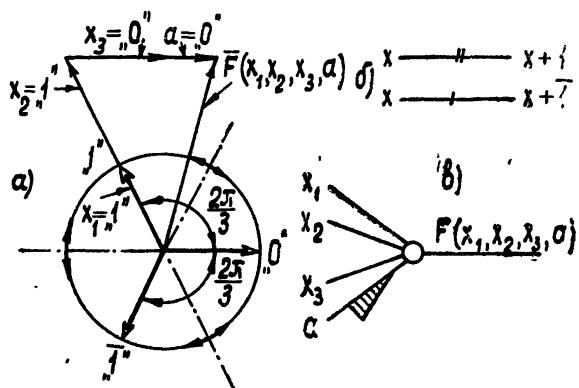
В. П. Комолов, А. С. Рошаль

Предлагаются схемы на параметронах, выполняющие троичные логические функции для цифровых устройств с фазовой записью информации. В основу этих схем, образующих полную систему троичных логических функций, положена видоизмененная мажоритарная схема. Приведены результаты экспериментального исследования таких схем.

В настоящее время помимо двоичной и десятичной систем счисления в вычислительных машинах продолжает привлекать внимание троичная система [1, 2, 3]. Преимущества троичной системы счисления (особенно симметричной с цифрами 1, 0, 1) с точки зрения экономии оборудования и удобства выполнения операций неоднократно обсуждались в литературе (см., например, [1, 2]).

В настоящей работе предлагаются логические схемы на троичных параметронах. Троичный параметрон осуществляется на основе двухконтурного параметрического генератора, работающего в режиме взаимной синхронизации; соответствующие теоретические и экспериментальные результаты подробно изложены в [1]. Цифры троичной системы 1, 0, 1 при этом изображаются тремя дискретными фазами несущей частоты, которые отсчитываются от фазы опорного генератора (например, так, как на векторной диаграмме рис. 1а) и распространяются в общей

Рис. 1. Устойчивые состояния троичного параметрического триггера и схемы логических функций. Пунктиром показаны сепаратрисы, разделяющие области притяжения устойчивых фаз.



линии связи. Преимуществами представления информации с помощью фазы несущей являются наличие общей линии связи и возможности повышения быстродействия путем увеличения частоты несущей.

1. ТРОИЧНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

В математической логике доказывается [4], что в любой r -значной логике со значениями истинности $k, k+1, \dots, k+r-1$ (k — младшая цифра) будет полной система функций, состоящая из констант k ,

$k+1, \dots, k+r-1$, функций одной переменной $J_i(x)$ ($i = k, \dots, k+r-1$), определяемых равенствами

$$J_i(x) = \begin{cases} k+r-1 & (x = i) \\ k & (x \neq i), \end{cases} \quad (1)$$

и функций дизъюнкции $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$ и конъюнкции $x_1 \& x_2 = \min(x_1, x_2)$. При этом любая функция может быть представлена в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} J_{\sigma_1}(x_1) \& J_{\sigma_2}(x_2) \& \dots \& J_{\sigma_n}(x_n) \& f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad (2)$$

где дизъюнкция берется по всем возможным наборам значений аргументов $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Полной является также система из двух функций: сложения с 1 по модулю r (или циклического отрицания), где

$$x + 1 \pmod{r} = \begin{cases} x + 1 & (x \neq k+r-1) \\ k & (x = k+r-1), \end{cases} \quad (3)$$

и дизъюнкция $x_1 \vee x_2$, или система из одной функции Вебба

$$W(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) + 1 \pmod{r}.$$

В применении к логике $\bar{1}, 0, 1$ это означает, что полной является любая из систем:

- 1) все константы $\bar{1}, 0, 1$; функции $J_{\bar{1}}(x), J_0(x), J_1(x)$ и $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2), x_1 \& x_2 = \min(x_1, x_2)$;
- 2) две функции: $x + 1 \pmod{3}, x_1 \vee x_2$;
- 3) функция Вебба $W(x_1, x_2) \equiv (x_1 \vee x_2) + 1 \pmod{3}$.

Поскольку в настоящей работе все сложения выполняются по модулю 3, в дальнейшем указания на это опускаются. Система (1) тогда запишется в виде

$$J_{\bar{1}}(x) = W(x, x + 1) = 1 + \max(x, x + 1),$$

$$J_0(x) = W(x, x + 1) = 1 + \max(x, x + \bar{1}), \quad (4)$$

$$J_1(x) = W(x + 1, x + \bar{1}) = 1 + \max(x + 1, x + \bar{1});$$

$$\bar{x} = W(J_1(x), J_0(x) + 1), \quad (5)$$

$$x_1 \& x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}.$$

С точки зрения наименьшего количества элементов целесообразно использовать функции различных систем, а также некоторые другие.

Функция $x + 1$ получается задержкой сигнала в линии связи на $2/3$ периода колебаний; действительно, при этом 1 переходит в 0, 0 в $\bar{1}$ и т. д. Задержка сигнала на $1/3$ периода равносильна его сложению с $\bar{1}$ по модулю 3, т. е. $x + \bar{1}$. Функции изображены на рис. 1б; наклонная черточка на линии связи означает задержку на $1/3$ периода параметрических колебаний, две черточки — задержку на $2/3$ периода.

В качестве основной схемы логической функции на троичных параметронах примем схему рис. 1в, которая осуществляет функцию $F(x_1, x_2, x_3, a)$. Фаза колебаний параметрона (обозначен кружком) определяется фазой колебаний, имеющейся на большинстве входов x_1, x_2, x_3 . В том случае, когда все три фазы x_1, x_2, x_3 различны, при сложении получается векторный треугольник. Для ликвидации неопределен-

ности, возникающей в этом случае, в схему введен четвертый вход: слабая константа «а» с амплитудой, в 3-4 раза меньшей, чем амплитуды остальных сигналов (заштрихованный треугольник на линии связи означает затухание), от которой запускается параметрон при $x_1 = x_2 = x_3$. Таким образом, работа схемы описывается следующим образом:

$$F(x_1, x_2, x_3, a) = \begin{cases} a, & \text{если } x_1 \neq x_2 \neq x_3, \\ Maj(x_1, x_2, x_3) & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (6)$$

что легко устанавливается векторным сложением четырех входных сигналов для всевозможных комбинаций x_1, x_2, x_3 . Это происходит благодаря тому, что стационарная фаза колебаний в параметрическом генераторе будет ближайшей к фазе запускающего сигнала. На рис. 1а показан пример сложения входных сигналов для случая $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0, a = 0$.

Пользуясь формулами (6), (4), легко установить справедливость следующих соотношений, каждому из которых соответствует схема, содержащая один параметрон:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= F(x, x + 1, 1, 0) + 1, \\ J_0(x) &= F(x, x + \bar{1}, 1, 0) + 1, \\ J_1(x) &= F(x + 1, x + \bar{1}, 1, 0) + 1, \\ x_1 \vee x_2 &= F(x_1, x_2, 1, 0), \\ x_1 \& x_2 &= F(x_1, x_2, \bar{1}, 0), \\ \Pi(x_1, x_2) &= F(x_1, x_2, 0, 0), \\ W(x_1, x_2) &= F(x_1, x_2, 1, 0) + 1. \end{aligned} \quad (7)$$

(Здесь $\Pi(x_1, x_2)$ — схема, называемая «перенос».) Диметральное отрицание \bar{x} осуществляется схемой, содержащей 3 параметрона, и описывается формулой

$$\bar{x} = F(J_0(x), J_{\bar{1}}(x) + 1, 1, 0) + \bar{1}, \quad (8)$$

тождественной (5).

С помощью функций $R_{\bar{1}}(x_1, x_2), R_0(x_1, x_2), R_1(x_1, x_2)$, где

$$\begin{aligned} R_{\bar{1}}(x_1, x_2) &= F(x_1 + \bar{1}, x_2 + \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}), \\ R_0(x_1, x_2) &= F(x_1 + 1, x_2 + 1, \bar{1}, \bar{1}), \\ R_1(x_1, x_2) &= F(x_1, x_2, \bar{1}, \bar{1}), \end{aligned} \quad (9)$$

можно получить альтернативную эквивалентность $R(x_1, x_2)$:

$$R(x_1, x_2) = F[R_{\bar{1}}(x_1, x_2), R_0(x_1, x_2), R_1(x_1, x_2), 1] = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 = x_2, \\ \bar{1}, & \text{если } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

Схема содержит 4 параметрона. Схема импликации $C(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2$ содержит 6 параметронтов.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Для проверки работы двухконтурного параметрического генератора как основного элемента троичной логики был проведен ряд эксперимен-

тов. Исследовалось несколько схем параметрических генераторов с контурами, настроенными на 1 и 2 Мгц (частота накачки 3 Мгц). В качестве нелинейной реактивности во всех схемах использовалась емкость $p - n$ перехода полупроводниковых диодов D-205.

Возбуждение параметрических колебаний наступало при эффективных напряжениях накачки $V_n = 0,2$ в с внешним смещением и $V_n = 0,3$ в с автоматическим смещением. При этом напряжения параметрических колебаний составляли 0,6 V_n . При $V_n \sim 5$ в и внешнем смещении $E_{cm} = -2$ в полоса взаимной синхронизации комбинационных частот имела величину $140 \div 160$ кгц, а время установления амплитуды и фазы параметрических колебаний $\sim 10 \div 12$ мксек для автономного генератора и $6 \div 8$ мксек при запуске с внешним синхронным сигналом оптимальной фазы с напряжением 10^{-3} в. Предельная частота запусков параметрона в последнем случае составляла $36 \div 20$ кгц.

Фон накачки (отношение напряжения накачки на выходе параметрона к напряжению параметрических колебаний) в небалансной схеме имел величину — 14 дБ. Фон накачки в балансной схеме с одним диодом был порядка — 18 дБ, а в схеме с двумя диодами — 20 дБ. Полоса синхронизации балансного параметрона с двумя диодами составляла $30 \div 50$ кгц.

Экспериментальная проверка работы параметронов в логической схеме «или» (рис. 2) подтвердила правильность вышеизложенных прин-

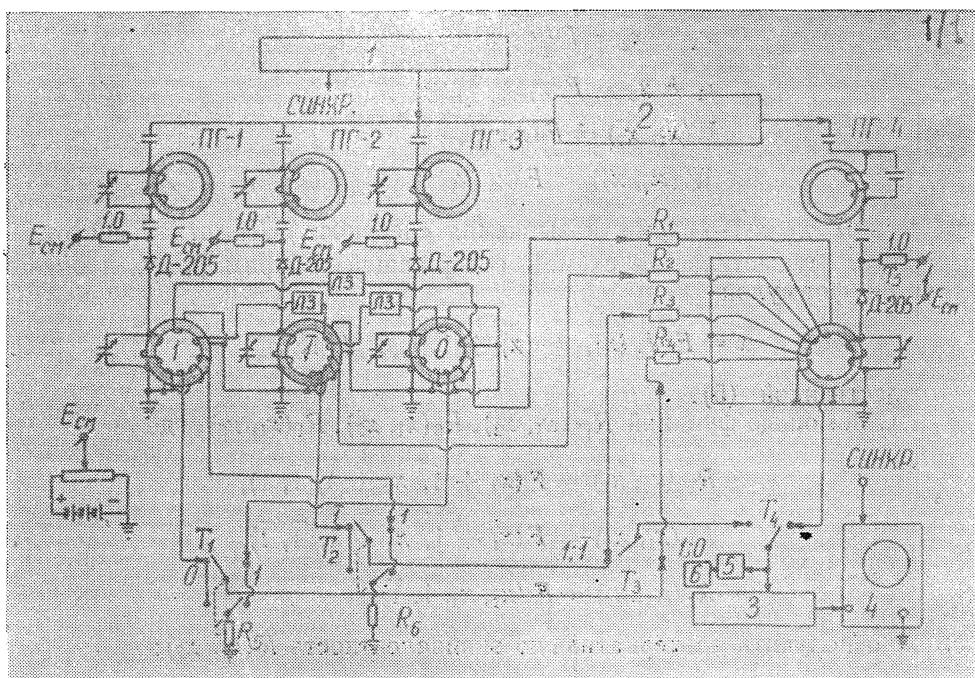


Рис. 2. Экспериментальная установка для проверки логической схемы „или“:
1—генератор накачки, 2—усилитель накачки, 3—катодный повторитель, 4—осциллограф; 5—аттенюатор;
6—резонансный микровольтметр; T_1, T_2 —сдвоенные переключатели; ЛЗ—линия задержки; $K_1 = 680$ ом,

$$R_{2, 3, 4} = 330 \text{ ом} \text{—сопротивления развязки}, R_{5, 6} = 330 \text{ ом} \text{—сопротивления нагрузки генераторов ПГ-1, 2, 3}.$$

ципов построения троичных мажоритарных схем. В экспериментальной установке рис. 2 три параметрических генератора ПГ-1, ПГ-2, ПГ-3, связанные в кольцо, работали в непрерывном режиме с фазами колебаний

1, 1, 0 соответственно. Взаимная синхронизация параметронов ПГ-1, 2, 3 осуществлялась со сдвигом фаз на 120° . Вырабатываемые ими сигналы через тумблеры T_1 , T_2 , T_3 в различных комбинациях подавались на параметрон ПГ-4, который реализовал функцию «или». Запуск генератора ПГ-4 осуществлялся включением смещения (тумблер T_5). Соотношение витков связи ПГ-4 и ПГ-1, 2, 3 составляло 1 : 2. Резонансный усилитель накачки 2 служил для развязки ПГ-4 по накачке и отдельной регулировки напряжения накачки. Для индикации и контроля фаз на входах и выходе генератора ПГ-4 использовался осциллограф.

В схеме использовались небалансные параметроны с указанными выше характеристиками. При $V_h = 5$ в напряжение параметрических кслебаний составляло 0,1 в на каждом единичном витке связи; витки связи помещались на общем ферритовом сердечнике контура с рабочей частотой 1 Мгц; его обмотка содержала 32 витка. Катушки контуров генераторов имели кольцевые ферритовые сердечники с внешним диаметром 8 мм, внутренним 4 мм и толщиной 2 мм (из оксифера М-600 для контура 2 Мгц и оксифера М-1000 для контура 1 Мгц). Сопротивления 330 ом или 680 ом создавали в цепях связей затухание 20 или 25 дБ соответственно. При идентичных по характеристикам параметронах и равноценных связях (1 виток) развязка 330 ом (20 дБ) обеспечивала эффективное напряжение управляющего сигнала в контуре последующего параметрона 10^{-2} в при напряжении сигнала на выходе предыдущего параметрона 0,1 в. Для осуществления в схеме «или» передачи слабого нуля применялась развязка 680 ом, обеспечившая затухание порядка 25 дБ; при этом напряжение управляющего сигнала в контуре последующего параметрона было $5 \cdot 10^{-3}$ в. Фазовые сдвиги входного сигнала были незначительны (не более $2 \div 3^\circ$)*.

Эксперименты показали, что при связях с затуханием $20 \div 30$ дБ ($330 \div 1100$ ом) уверенная работа параметрона сохраняется, если общее число единичных витков связей не превосходит $2/3$ числа витков обмотки контура рабочей частоты (1 Мгц). Это означает, что с помощью одного параметрона рассмотренной конструкции можно передавать сигналы одновременно в 20 логических схем. Поскольку в проводимых экспериментах генераторы сигналов ПГ-1, 2, 3 работали в непрерывном режиме (модулировался только генератор ПГ-4), влияние связей обратного перехода не исследовалось (имеются в виду ошибки ПГ-1, 2, 3 за счет влияния сигнала ПГ-4). Полученные результаты позволяют сделать вывод, что использование в логических схемах управляющих сигналов с напряжением $\sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ в практически возможно. При настройке схемы напряжения сигналов каждого параметрического генератора (при выключенных остальных параметронах) измерялись с помощью резонансного микровольтметра.

В последующих экспериментах изучалось влияние факторов, определяющих фазу установившихся колебаний 3-ей субгармоники накачки в рассмотренном выше двухконтурном параметрическом генераторе (исследовалась небалансная схема). Эксперименты проводились с экранированным параметроном**, работающим в режиме модуляции по накачке при частоте запусков 3 кгц. Измерения производились циклами. Количество запусков параметрона в каждом цикле измерений $M = 30000$. С помощью счетчиков определялось количество запусков N_{im} ($i = 0, 1, \bar{1}$)

* Следует обратить внимание на возможные значительные сдвиги, равнозначных стационарных фаз слабо связанных параметрических генераторов, однако последние могут быть устранены подстройкой контуров параметронов.

** Как показали измерения, взаимные наводки несвязанных и неэкранированных параметрических генераторов, помещенных в непосредственной близости, не превышали 10^{-4} в даже для больших напряжений накачки ~ 20 в.

параметрона за m -ый цикл измерений с условной фазой 0,1 или $\bar{1}$ соответственно.

Обработка измерений позволила установить вероятность возбуждения генератора с той или другой фазой при различных режимах его работы и различных значениях амплитуды и фазы входного сигнала. Вероятность P_i вычислялась по формуле

$$P_i = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \frac{N_{im}}{M}, \quad (10)$$

где k — количество циклов измерений; для каждой экспериментальной точки $k = 10$. Значение $P_i = 1$ соответствует нулевой вероятности пропуска сигнала i , а значение $P_i = 1/3$ — возбуждению стационарных фаз в автономном генераторе. Это обстоятельство может быть использовано для точной настройки параметронов в логических схемах.

На графике рис. 3 приводится экспериментальная зависимость величины P_1

от эффективной амплитуды сигнала для параметрона, работающего в режиме собственных тепловых шумов* (отношение

сигнал/шум $S/N > 1$); здесь P_1 определено с вероятностью 0,99. Исследование влияния флуктуаций на вероятность пропуска сигнала проводилось при различных значениях отношения сигнал/шум; при этом использовался генератор нормального шума. Экспериментально установлено, что значение $P_1 = 1$ с вероятностью 0,997 наступает при отношении $S/N = 2$, если фаза оптимальная. Измерения величины P для различных значений фазы синхронного сигнала φ_c показали, что при изменении $\cos \varphi_c$ на 30% это отношение увеличивается вдвое.

Следует отметить, что параметроны потребляют очень небольшую мощность, поскольку они работают в режиме обратного смещения диода и обладают очень большим внутренним сопротивлением.

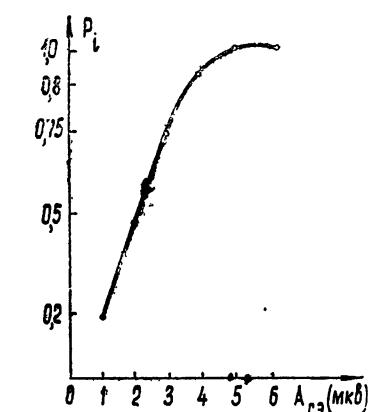


Рис. 3. Экспериментальная зависимость P_1 от эффективной амплитуды сигнала A_{c3} для $S/N > 1$ при оптимальной фазе сигнала φ_c , равной одной из возможных стационарных фаз установившихся колебаний параметрического генератора.

В заключение авторы выражают благодарность С. А. Ахманову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, А. С. Рошаль, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 1017 (1962).
2. R. P. Hallworth, F. G. Heath, Proc. IEE, 108B, 1 (1961).
3. Д. А. Поступов, В. Н. Фальк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 791 (1962).
4. С. В. Яблонский, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 51, 5 (1958).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
27 марта 1964 г.

LOGICAL CIRCUITS WITH TERNARY PARAMETRONS

V. P. Komolov, A. S. Roshal'

The circuits are suggested with parametrons fulfilling ternary logical functions for digital devices with a phase representation of information. A modified majority circuit has been proposed as a basis of these systems. The results of experimental study of such a systems are given.

* Здесь $\tilde{P}_1 = P_1 - \bar{P}_{0,\bar{1}}$, где $\bar{P}_{0,\bar{1}} = 1/2 (P_0 + P_{\bar{1}})$.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.164.42 : 522

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКЛОНЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ВНЕГАЛАКТИЧЕСКИХ
РАДИОИСТОЧНИКОВ С ПОМОЩЬЮ БОЛЬШОГО ПУЛКОВСКОГО
РАДИОТЕЛЕСКОПА**

В. Я. Гольнев, Г. Г. Новожилова, Ю. Н. Парийский

Большой пулковский радиотелескоп (БПР) имеет диаграмму направленности, близкую к ножевой, причем больший размер ее всегда лежит в вертикальной плоскости. Поэтому меридианные наблюдения дают весьма низкую точность по склонению. Для более точного определения склонений можно воспользоваться наблюдениями вне меридiana, подобно тому, как это делал Смит при интерферометрических измерениях [1]. Тогда разность моментов прохождения источников через диаграмму в двух фиксированных азимутальных направлениях будет зависеть от склонения источников. Такой метод был применен недавно Ихсановой [2] для определения положений локальных источников на диске Солнца с помощью БПР. В настоящей заметке приводятся результаты определения склонений ряда дискретных источников радиоизлучения метагалактического происхождения на волне 6,4 см.

Наблюдения проводились в восточном азимуте ($A = +14^{\circ}24'$), в меридиане ($A = 0$), и в западном азимуте ($A = -14^{\circ}24'$). Было получено по крайней мере 4 кратных прохождения для уверенного определения момента прохождения источника через диаграмму антенны. Все моменты прохождения были исправлены с учетом изменений прямого восхождения и склонения источников в течение наблюдений.

Нетрудно видеть, что при таких наблюдениях соблюдаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\alpha &= S_{\text{вост}} + t(\delta), \\ \alpha &= S_{\text{зап}} - t(\delta).\end{aligned}\quad (1)$$

Поэтому

$$\frac{S_{\text{вост}} + S_{\text{зап}}}{2} = \alpha, \quad (2)$$

$$S_{\text{зап}} - S_{\text{вост}} = 2t(\delta). \quad (3)$$

В этих выражениях $S_{\text{вост}}$, α , $S_{\text{зап}}$ — моменты прохождения источников через восточный азимут, меридиан и западный азимут соответственно, $t(\delta)$ — часовой угол источника со склонением δ при пересечении им азимута наблюдений. Часовой угол рассчитывается по формуле

$$\sin t = \frac{\sin A (-\sin \delta \cos \varphi \cos A \pm \sin \varphi \sqrt{\cos^2 \varphi \cos^2 A + \sin^2 \varphi - \sin^2 \delta})}{\cos \delta (\cos^2 \varphi \cos^2 A + \sin^2 \varphi)}. \quad (4)$$

Теперь пусть δ_0 — приближенное склонение источника, которое мы хотим уточнить. Тогда, сравнивая $2t(\delta_0)$, рассчитанное по формуле (4) (куда предварительно подставлены широта места наблюдения φ и азимут A), с $2t(\delta) = S_{\text{зап}} - S_{\text{вост}}$, найдем разности $2t(\delta_0) - 2t(\delta) = 2\Delta t$. Из паралактического треугольника легко получить необходимую поправку $\Delta \delta$ к склонению δ_0 :

$$\Delta \delta = \delta - \delta_0 = \Delta t \operatorname{ctg} q \cos \delta_0 = \Delta t f(\delta_0). \quad (5)$$

Здесь q — паралактический угол, определяемый из выражения

$$\sin q = \sin A \frac{\cos \varphi}{\cos \delta_0}.$$

Функция $f(\delta_0)$ для наших A и φ приведена на рис. 1. Теперь, зная Δt , находим $\Delta\delta$ и $\hat{\delta} = \delta_0 + \Delta\delta$.

Приведенные рассуждения справедливы в отсутствие систематических ошибок наблюдений. Систематические ошибки, общие для всех азимутов, однако, выпадают (например, ошибки учета постоянной времени выходной цепи радиометра и т. п.). Ин-

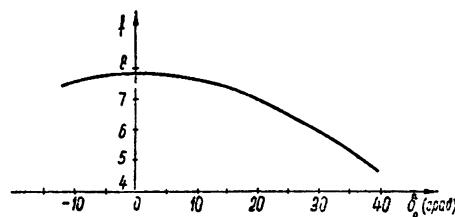


Рис. 1.

дивидуальные ошибки азимутальных наблюдений оценивались, во-первых, по формуле (2), во-вторых, по опорным объектам (Гидра А, ЗС273, Лебедь-А). Для всех трех радионисточников принимались координаты оптических объектов. Кривая поправок

$$\Delta t_0(\delta_0) = \frac{1}{2} [S_{\text{зап}} - S_{\text{вост}} - 2f(\delta_0)]$$

для опорных объектов приведена на рис. 2. С помощью рис. 2 можно найти истинное значение $\Delta t_{\text{ист}} = \Delta t - \Delta t_0$, а затем и $\Delta\delta$, исправленное за систематические ошибки радиотелескопа.

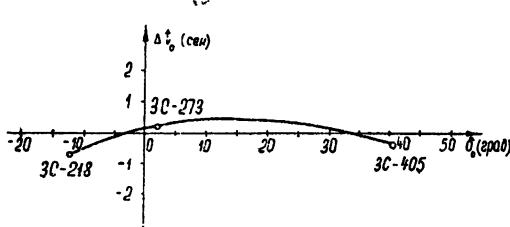


Рис. 2.

Результаты измерений склонений 9 источников приведены в таблице 1 вместе со склонениями этих источников по данным [3-6]. Для опорных объектов приняты скло-

Таблица 1

| | Пулково | ЗС [°] | ЗС (Беннет) [°] | Нансэ [°] | Рид [°] |
|--------|------------------------------|-------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| 3C—48 | $32^{\circ}51'28'' \pm 40''$ | $32^{\circ}55' \pm 4'$ | $32^{\circ}52'48'' \pm 0'.75$ | $32^{\circ}54' \pm 0'.5$ | $32^{\circ}54'18'' \pm 2''.7$ |
| 3C—123 | $29^{\circ}34'24'' \pm 40''$ | $29^{\circ}35' \pm 2'$ | $29^{\circ}34'18'' \pm 1'.0$ | $29^{\circ}35'18'' \pm 0'.5$ | $29^{\circ}34'06'' \pm 3''.4$ |
| 3C—145 | $-5^{\circ}25'14'' \pm 20''$ | $-5^{\circ}18' \pm 4'$ | — | — | $-5^{\circ}25'14'' \pm 10''.2$ |
| 3C—161 | $-5^{\circ}51'17'' \pm 20''$ | $-5^{\circ}56' \pm 10'$ | — | $-5^{\circ}51'54'' \pm 0'.5$ | $-5^{\circ}51'26'' \pm 4''.9$ |
| 3C—218 | $-11^{\circ}53'06''$ | $-11^{\circ}53' \pm 5'$ | — | $-11^{\circ}53'06'' \pm 0'.5$ | $-11^{\circ}52'54'' \pm 3''.9$ |
| 3C—273 | $2^{\circ}19'42''$ | $2^{\circ}22' \pm 5'$ | $2^{\circ}20'36'' \pm 5'.0$ | $2^{\circ}19'42'' \pm 0'.5$ | $2^{\circ}19'48'' \pm 6''.6$ |
| 3C—286 | $30^{\circ}45'55'' \pm 20''$ | $30^{\circ}40' \pm 6'$ | — | $30^{\circ}45'12'' \pm 0'.5$ | $30^{\circ}45'55'' \pm 4''.2$ |
| 3C—345 | $39^{\circ}52'38'' \pm 20''$ | $40^{\circ}11' \pm 5'$ | $39^{\circ}51'0'' \pm 3'.0$ | — | — |
| 3C—348 | $5^{\circ}06'18'' \pm 20''$ | $5^{\circ}10' \pm 10'$ | $05^{\circ}03'48'' \pm 1'.0$ | $5^{\circ}04'54'' \pm 0'.5$ | — |
| 3C—405 | $40^{\circ}35'48''$ | $40^{\circ}35'$ | $40^{\circ}36'0'' \pm 1'.0$ | $40^{\circ}35'42'' \pm 0'.5$ | — |

нения оптических объектов. Для источников ЗС48 и ЗС123 склонения определялись из сопоставления моментов прохождения в восточном азимуте и в меридиане; поэтому точность этих измерений много ниже. Теоретическая погрешность по склонению ϵ_d связана с погрешностью определения горизонтальных координат $\epsilon_A \approx \epsilon_\alpha$ выражением типа (5). Подставляя численные значения A и φ , имеем

$$\epsilon''_0 = 7,7 \epsilon''_\alpha \cos^2 \delta_0 \quad (A = 0,14^\circ 24'), \quad (7a)$$

$$\epsilon'_\delta = 3,8 \epsilon''_\alpha \cos^2 \delta_0 \quad (A = -14^\circ 24', +14^\circ 24'). \quad (7b)$$

Положив $\epsilon_\alpha = 5''$, получим погрешности в $40''$ и $20''$ для случаев (7а) и (7б) соответственно. Точность настоящих измерений иллюстрирует рис. 2, из которого следует, что погрешность ϵ_x не превосходит $10''$. Однако число опорных объектов

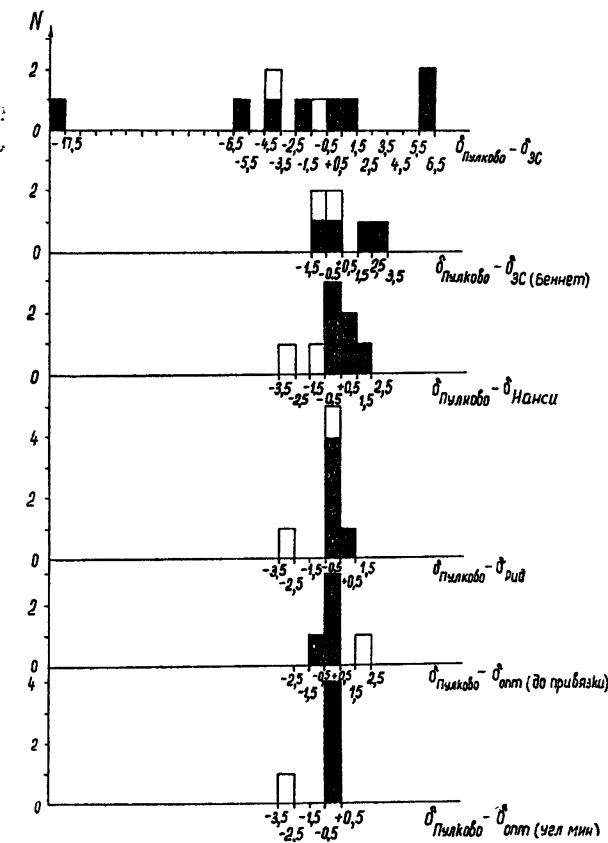


Рис. 3.

недостаточно для оценки реальной точности измерений. Сопоставление настоящих измерений с лучшими опубликованными данными проведено на рис. 3; наилучшее согласие наблюдается с данными Рида [6] и с оптическими данными для отождествленных источников (черные квадраты).

Как видно из рис. 3, наблюдения склонений на Большом пулковском радиотелескопе могут дать точность, близкую к лучшим существующим измерениям даже при небольших отклонениях азимута наблюдения от меридиана. Это объясняется высокой точностью измерения горизонтальных координат. В настоящее время, однако, массовое определение склонений радиоисточников невозможно из-за недостаточной чувствительности приемной аппаратуры и малого числа опорных объектов.

Авторы благодарят Н. С. Соболеву, Н. Е. Гольневу, Н. Ф. Корнееву и В. А. Ступина за помощь в наблюдениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. G. Smith, Nature, **168**, 555 (1951).
2. B. Н. Ихсанова, Изв. ГАО, **23**, 172 (1963).
3. D. O. Edge, J. R. Shakeshaft, W. B. McAdam, J. E. Baldwin, S. Arevich, Mem. RAS, **68**, 37 (1959).
4. A. S. Bennett, Mem. RAS, **68**, 163 (1962).
5. M. Joshi, Ann. Astroph., **25**, 5 (1962).
6. R. B. Read, Astrophys. J., **138**, 1 (1963).

УДК 621.371.3

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ОСЛАБЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ

Ю. С. Коробков

В данной работе приводятся предварительные результаты исследований прохождения космического радиоизлучения на частотах 5,7—6,3 МГц через ионосферу, выполненных в Горьком (Зименки) в 1961—64 гг. Прием космического радиоизлучения на частотах 5,7—6,3 МГц производился на горизонтальную синфазную антенну, главный лепесток диаграммы направленности которой был обращен в зенит и имел размеры $25^\circ \times 35^\circ$ по точкам половинной мощности. Сигнал с антенны посредством четырехпроводного фидера подавался на вход приемника, имевшего полосу 1 кГц и специальное устройство для ограничения помех.

Для всех суточных записей уровня космического радиоизлучения, полученных на частотах 5,7—6,3 МГц, характерным является период с $17^h - 21^h LT$, в который весь рабочий диапазон частот настолько насыщен помехами самого различного происхождения, что применяемый в приемнике ограничитель практически оказывался бесполезным. Сделать какие-либо заключения об уровне космического радиоизлучения в этот период невозможно. Поэтому записи в течение указанного периода в большинстве случаев обработка не подвергались. В дневное время в ряде записей также наблюдалось значительное количество помех преимущественно атмосферного происхождения; однако благодаря действию ограничителя помех на записях можно было достаточно четко выделить минимум, обусловленный космическим радиоизлучением. В дневное время на записях заметно проявлялось поглощающее и экранирующее действие ионосферы. Большинство ночных записей свободно от помех и экранировки.

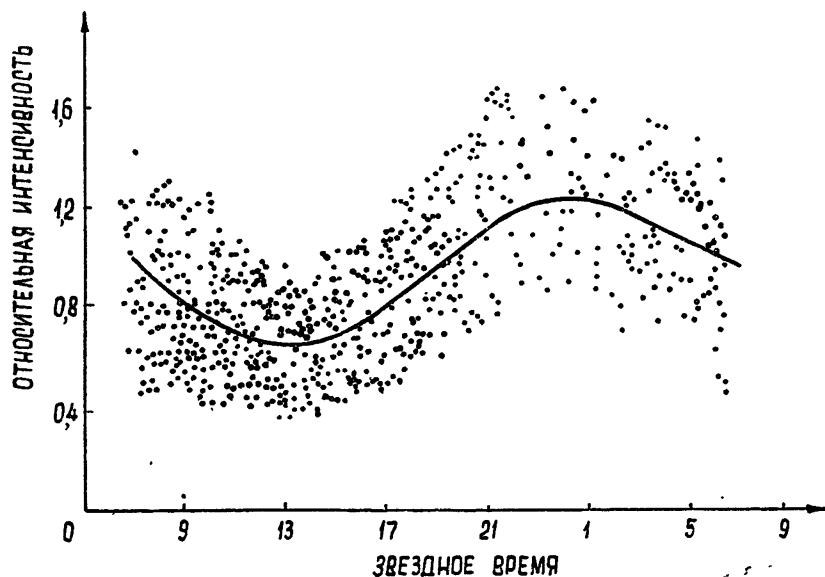


Рис. 1. Зависимость относительной интенсивности космического радиоизлучения на частоте 5,8 МГц от времени суток.

Серия ночных записей, полученная в течение года, была использована для построения усредненной зависимости относительной интенсивности космического радиоизлучения от времени суток (рис. 1). Эта зависимость имеет максимум, обусловленный прохождением плоскости Галактики через диаграмму направленности антенны. Разброс экспериментальных точек относительно среднего суточного хода, обусловленный в основном дисперсией ночных значений ионосферного поглощения, равен примерно $\pm 35\%$. Указанный разброс может быть объяснен, если предположить, что максимальное значение поглощения космического радиоизлучения в ионосфере в ночное время достигает 3 дБ.

Построенная таким образом средняя кривая суточного хода была использована для измерения поглощения космического радиоизлучения в дни, когда критическая частота F_2 -слоя ионосферы была ниже рабочей частоты. Поглощение определялось по формуле

$$\Gamma(t)_{\text{дБ}} = 10 \lg I_y(t)/I(t),$$

где $I_y(t)$ — значение относительной интенсивности космического радиоизлучения в момент времени t , взятое из усредненной кривой, $I(t)$ — значение относительной интенсивности космического радиоизлучения в момент времени t , взятое из суточной кривой за данный день. Определяя таким образом поглощение, мы подразумеваем под $\Gamma(t)$ превышение дневного поглощения относительно среднего уровня ночных поглощений, который, согласно рис. 1, составляет около 1,5 об.

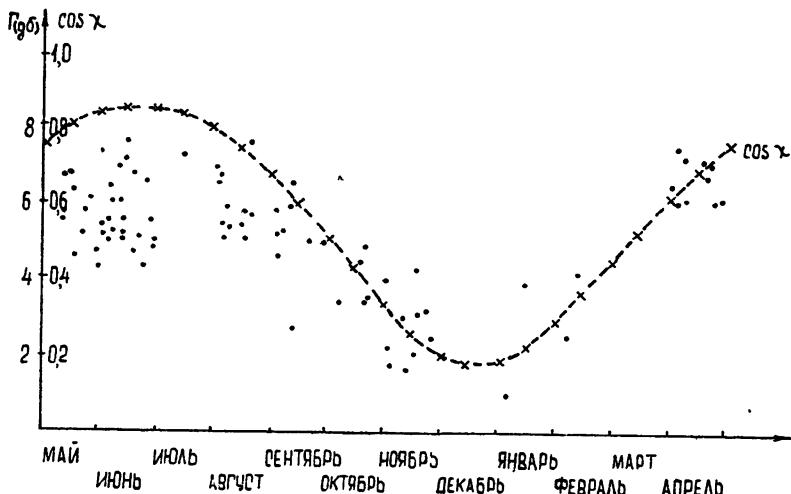


Рис. 2. Сезонная зависимость поглощения космического радиоизлучения на частоте 5,8 МГц. Пунктиром отмечен сезонный ход коэффициента зенитного угла Солнца.

На рис. 2 приведена сезонная зависимость полуденных значений Γ , измеренных на частоте 5,8 МГц. Анализ этой зависимости показывает на существенную связь дневного поглощения с косинусом зенитного угла Солнца. Подобная зависимость характерна в основном для нижней ионосферы.

Поскольку поглощение измерялось в дни, когда излучение не экранировалось ионосферой (т. е. $f_0 F_2 < 5$ МГц), можно считать, что поглощение в слое F_2 в дневное время примерно соответствует максимальному значению ночных поглощений. Учитывая сказанное, можно определить величину поглощения в D -области ионосферы в различные месяцы.

В работе [1] приведены результаты измерений поглощения радиоволн в нижней ионосфере, выполненных методом вертикального зондирования*. Если воспользоваться этими данными и пересчитать их для широты Горького, то грубо можно оценить вклад отклоняющего поглощения при импульсных измерениях. Отклоняющее поглощение при импульсном зондировании

$$\Gamma_{\text{откл}} = (1 - \gamma) \Gamma.$$

Согласно [3]

$$\gamma = \frac{2\Gamma_1 f_1^2}{(f^2 + f_L^2) \Gamma},$$

где Γ_1 — измеренное радиоастрономическим методом поглощение в нижней ионосфере на частоте f_1 , Γ — поглощение, измеренное методом зондирования на частоте f , f_L — продольная составляющая гиромагнитной частоты. Определяя Γ_1 из графика на рис. 2 и используя значения Γ , приведенные в [1], находим, что в июне $\gamma = 0,65$, в августе $\gamma = 0,65$, и в октябре $\gamma = 0,49$. Таким образом, в период июнь—октябрь, когда отсутствует какая-либо аномалия, отклоняющее поглощение составляет 35—50% от

* Результаты настоящей работы и статьи [1] относятся к различным периодам цикла солнечной активности. Однако для грубых оценок можно воспользоваться данными [1], если учесть, что поглощение, измеренное методом вертикального зондирования при постоянном зенитном угле Солнца, очень мало меняется в течение цикла солнечной активности [2].

общего поглощения. Эти значения соответствуют значениям отклоняющего поглощения, принятым в работе [3].

Из анализа сезонной зависимости поглощения следует, что при прохождении космического радиоизлучения на частоте 5,8 Мгц существенный вклад в поглощение вносит D-область ионосферы. Этот вклад оказывается порядка или больше вклада F-области в общее поглощение. Этот результат, казалось бы, противоречий выводам, сделанным в работе [3], справедлив только для периода времени, близкого к минимуму солнечной активности, когда существенно понижаются критические частоты f_0F_3 и соответственно уменьшается вклад F-области ионосферы в общее поглощение. Результаты, полученные в работе [3], относятся к годам, близким к максимуму солнечной активности, когда F-область ионосферы сильно развита (полученные значения $f_0F_2 > 7\text{Mg}\mu$) и поэтому не противоречат результатам настоящей работы.

Автор благодарен Е. А. Бенедикову за постоянное внимание к работе и полезные замечания

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Свечников, Ю. К. Часовитин, Н. А. Коченова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 375 (1960).
2. E. Appleton, W. R. Piggott, J. Atm. Terr. Phys. 5, 141 (1954)
3. Е. А. Бенедиков, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Л. Н. Ходалева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 957 (1960)

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 августа 1964 г.

УДК 621.371.22

ИЗЛУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ЗАРЯДОМ, ПРОХОДЯЩИМ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Б. Я. Эйдман

Излучение электромагнитных волн зарядом, проходящим границу раздела двух сред, впервые рассмотренное Гинзбургом и Франком [1], дискутировалось затем в ряде работ. Однако в этих работах учитывалось лишь излучение объемных волн. Между тем хорошо известно, что на границе некоторых сред может существовать и поверхносстная волна*. В настоящей заметке рассматривается излучение поверхностной волны зарядом, проходящим границу раздела между вакуумом и средой с вещественной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega)$. Для того, чтобы поверхностная волна существовала, необходимо считать, что в некотором диапазоне частот $\epsilon(\omega) < -1$.

Поступая обычным образом (см., например, [3, 4]), для компоненты электрического поля E_z , параллельной траектории частицы в среде, будем иметь выражение**.

$$E_{2z}(\rho, z) = \frac{ei}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(x\rho)}{\lambda_2 - \epsilon_1} e^{i[\lambda_2 z - \omega t]} \eta_2 \times d \times d \omega, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt{\omega^2/c^2 - x^2}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\omega^2\epsilon/c^2 - x^2}, \quad \eta_2 = (x^2/k^2) \left\{ \frac{\epsilon - 1}{v \epsilon} + \frac{\omega}{c^2} \left[\frac{-\lambda_1 + \omega/v}{k^2 - \omega^2/c^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\epsilon\lambda_1 - \omega/v) / \left(k^2 - \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

J_0 — функция Бесселя, v — скорость заряда, $k^2 = x^2 + \omega^2/c^2$, координаты точки наблюдения в плоскости yz есть ρ, z (ось Oz направлена перпендикулярно границе).

* Чerenkovskoe излучение поверхности волны заряженной нитью, движущейся вдоль границы раздела двух сред, исследовалось в [2].

** Ниже обсуждаются лишь поля, существование которых обязано наличию границы.

Интегрирование в (1) по переменной χ при $\rho \rightarrow \infty$ можно выполнить, используя метод перевала. При этом, однако, надо учесть полюс подынтегрального выражения при

$$\xi = \lambda_2 - \epsilon \lambda_1 = 0, \quad (2)$$

а также точку ветвления $\chi = \omega/c$. Остальные особые точки подынтегрального выражения в (1) отвечают лишь экспоненциально малым членам при $\rho \rightarrow \infty$. Обычно предполагается, что $\epsilon > 0$ и поэтому особенность при $\xi = 0$ не реализуется для действительных значений χ . Между тем очевидно, что соотношение (2) отвечает излучению поверхностной волны, т. е. волны, поле в которой экспоненциально убывает по обе стороны от границы $z = 0$. Уравнение (2) для действительных χ имеет решение лишь при соблюдении

указанного выше условия $\epsilon(\omega) < -1$. Тогда из (2) имеем $\chi = z_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 - 1}}$, где $\epsilon_1 = |\epsilon|$. Используя полюс подынтегрального выражения, определяемый (2), получаем из (1) для поля в поверхностной волне следующее выражение:

$$E_{22\text{пов}} (\rho \rightarrow \infty) = -\frac{e i}{2c} \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} e^{-i \pi/4} \int_{\epsilon(\omega) < -1}^{\infty} \frac{\eta_2(z_0) \omega \epsilon_1 \exp\{-\lambda_{20}z + [z_0 \omega - \omega t] i\}}{\sqrt{z_0} \sqrt{\epsilon_1 - 1} (\epsilon^2 - 1)} d\omega, \quad (3)$$

где $\lambda_{20} = (\epsilon_1 \omega/c)/\sqrt{\epsilon_1 - 1}$, $z > 0$.

Действуя аналогично [5], легко вычислить вклад в выражения для поля, отвечающей точке ветвления $\chi = \omega/c$ ($\omega > 0$). Эта часть поля связана с квазистационарным полем заряда, расположенного над плоскостью раздела двух сред; ниже эта часть учитываться не будет. В принципе это поле можно получить с помощью обычных формул электростатики.

Для того, чтобы найти потери энергии зарядом на излучение поверхностной волны, необходимо определить поток энергии, переносимый поверхностной волной через боковую поверхность кругового цилиндра с осью, направленной по траектории частицы. При помощи (3) и соответствующего выражения для магнитного поля указанной выше поток энергии легко вычислить. В результате для величины энергии излученной поверхностной волны в среде Σ_2 за все время пролета заряда получаем соотношение ($\omega > 0$):

$$\Sigma_2 = -\frac{e^2}{c} \beta^2 \int_{\epsilon(\omega) < -1}^{\infty} \frac{\epsilon_1}{(\epsilon - 1)^{3/2}} \left[\left(1 + \frac{\beta^4 \epsilon_1}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^2 + \frac{\epsilon^2 \beta^6}{\gamma \alpha_1^2 \alpha_2^2} \left(1 + \frac{\beta^2 \epsilon_1}{\gamma} \right)^2 \right] \frac{d\omega}{(\beta^2 \epsilon_1 + \gamma)^2}. \quad (4)$$

Здесь $\gamma = \epsilon_1 - 1$; $\alpha_1 = 1 + \beta^2/\gamma$; $\alpha_2 = 1 + \beta^2 \epsilon^2/\gamma$; $\beta = v/c$. Аналогично вычисляется поток энергии Σ_1 поверхностной волны в вакууме, т. е. при $z < 0$. Таким образом, для полных потерь энергии зарядом на излучение поверхностной волны будем иметь

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 = \frac{e^2 \beta^2}{c} \int_{\epsilon(\omega) < -1}^{\infty} \frac{(1 + \epsilon_1)}{(\epsilon_1 - 1)^{1/2}} \left[\left(1 + \frac{\beta^4 \epsilon_1}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^2 + \frac{\epsilon^2 \beta^6}{\gamma \alpha_1^2 \alpha_2^2} \left(1 + \frac{\beta^2 \epsilon_1}{\gamma} \right)^2 \right] \frac{\epsilon_1 d\omega}{(\beta^2 \epsilon_1 + \gamma)^2}. \quad (5)$$

Потоки энергии в обеих средах направлены в разные стороны: $\Sigma_1 > 0$, $\Sigma_2 < 0$, а результирующий поток энергии всегда направлен от траектории частицы ($\Sigma > 0$). Следует отметить, что величина излучаемой энергии не зависит от направления движения электрона (см. (5)).

Разумеется, формула (5), полученная без учета затухания волны, справедлива на пороге эффекта при $\omega \rightarrow \omega_0/\sqrt{2}$ лишь для частот, удовлетворяющих соотношению $\omega/\sqrt{2} - \omega \gg v$, где v — эффективное число соударений для электронов плазмы. Если же формально не учитывать этого обстоятельства, то из (5) вытекает, что хотя спектральная плотность излучения имеет особенность при $\gamma \rightarrow 0$ ($\Sigma_\omega \propto \gamma^{-1/2}$), полная излученная энергия Σ не имеет никакой особенности. Величина излучаемой энергии в любом конечном или сколь угодно малом интервале частот при $\omega \rightarrow \omega_0/\sqrt{2}$ равна нулю.

В нерелятивистском случае формула (5) упрощается:

$$\Sigma (\beta^2 \ll 1) = \frac{e^2 \beta^2}{c} \int_{\epsilon(\omega) < -1}^{\infty} \frac{\epsilon_1 (1 + \epsilon_1) d\omega}{\gamma^{1/2} (\beta^2 \epsilon_1 + \gamma)^2} = \frac{e^2 \omega_0}{4 |v|} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right). \quad (6)$$

Из (6) следует, что при малых скоростях движения заряда излучаемая энергия $\propto |v|^{-1}$, и, в частности, $\Sigma \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow 0$. Как уже отмечалось, это обстоятельство также связано с тем, что в рассматриваемой идеализации не учитывается затухание

волны. Поэтому при $v \rightarrow 0$ время взаимодействия заряда с пространственно неоднородным полем поверхностной волны возрастает до бесконечности, и в волну может быть передана бесконечная энергия. На самом деле даже без учета соударений формулы (5), (6) справедливы благодаря пространственной дисперсии лишь в случае, когда $v \gg v_T$, где v_T — средняя тепловая скорость электронов плазмы.

При релятивистской скорости заряда величина излучаемой энергии стремится к конечному пределу при $\beta^2 \rightarrow 1$:

$$\Sigma (\beta^2 \rightarrow 1) \rightarrow \frac{e^2}{c} \int_{\epsilon(\omega) < -1} \frac{\epsilon_1 (1 + \epsilon_1) d\omega}{\gamma^{1/2} (\epsilon^2 + \epsilon_1 - 1)} = A \frac{e^2 \omega_0}{c}, \quad (7)$$

где

$$A = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right) \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} + \left(\frac{1}{\zeta_1} - \zeta_1 \right) \operatorname{arctg} \frac{1}{\zeta_1} \right] \approx 0.7;$$

$$\zeta = \sqrt{2 + \sqrt{5}}; \quad \zeta_1 = \sqrt{\sqrt{5} - 2}.$$

Здесь обратим внимание на следующее. Выше отмечалось, что хотя излучаемая энергия волны при $\omega \rightarrow \omega_0 / \sqrt{2}$ в некотором интервале частот стремится к нулю, спектральная плотность энергии $\Sigma_\omega \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \omega_0 / \sqrt{2}$. Между тем при мгновенном пролете границы работы поля над зарядом должна быть равна нулю, так как поля по обе стороны границы при этом равны по величине и противоположны по направлению ($\epsilon \rightarrow -1$). На самом деле время пролета всегда конечно ($v < c$); формально же из (5) при $v \rightarrow \infty$ действительно следует, что $\Sigma_\omega = 0$.

Из (7), в частности, следует, что в случае релятивистской скорости частицы энергия излучения поверхностной волны составляет лишь малую добавку к энергии излучения, испускаемого вперед [6]. С другой стороны, для частот с $\epsilon(\omega) < -1$ излучение поверхностной волны является определяющим в потерях энергии движущимся зарядом.

Формула (5), разумеется, следует также из выражения для работы поля E_z над зарядом:

$$A = A_1 + A_2 = ev \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^0 E_{0z1 \text{ пов}} dt + \int_0^\infty E_{0z2 \text{ пов}} dt \right\} = -\Sigma,$$

где $E_{0zi \text{ пов}} = E_{zi \text{ пов}}$ ($\rho = 0$, $z = vt$), $i = 1, 2$. Тогда, например, для работы поля в среде справедливо соотношение

$$A_2 = -\frac{e^2 \beta^2}{c} \int_{\epsilon(\omega) < -1} \frac{\epsilon_1}{\gamma^{1/2} (\gamma + \beta^2 \epsilon_1) (\gamma + \beta^2 \epsilon^2)} \left\{ 1 + \frac{\beta^4 \epsilon_1}{\alpha_1 \alpha_2} - \frac{\beta^4 \epsilon^2}{\gamma^2 \alpha_1 \alpha_2} (\gamma + \beta^2 \epsilon_1) \right\} d\omega.$$

Заметим, что, в то время как $A = -\Sigma$, $A_i \neq -\Sigma_i$. В релятивистском случае, когда $\beta \rightarrow 1$, величина $A_2 \rightarrow 0$, а $-A_1$ стремится к выражению, совпадающему с (7), т. е. работа, грубо говоря, совершается только при движении заряда в вакууме.

В заключение укажем, что приведенные выше формулы для потерь энергии движущимся зарядом можно также получить, используя разложение по нормальным поверхностным волнам (см. [7]).

Автор признателен В. Л. Гинзбургу за предложение темы, а также Н. Г. Денисову и М. А. Миллеру, сделавшим ряд замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, 16, 15 (1946).
2. Л. С. Долин, Дипломная работа, Горьк. ун-т, 1959.
3. Г. М. Гарифян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).
4. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 478 (1962).
5. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954, стр. 342.
6. Г. М. Гарифян, ЖЭТФ, 37, 526 (1959).
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 декабря 1963 г.,
после исправления
12 сентября 1964 г.

УДК 534.222.13 · 551.463

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ПОЛЯ НАД МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

И. М. Фукс

При распространении радиоволн вдоль статистически неровной изменяющейся во времени поверхности возникают временные и пространственные флуктуации напряженности поля. В этой заметке мы найдем связь между пространственными и временными корреляционными функциями флуктуаций вертикальной компоненты поля, создаваемого вертикальным диполем вблизи взволнованной морской поверхности $z = \zeta(r, t)$ (которую будем считать идеально проводящей)

Представляя волнение в виде суперпозиций бегущих волн с различными волновыми числами q и ограничиваясь для простоты случаем одномерных волн, получим для пространственно-временной корреляционной функции ординат поверхности формулу* [2]

$$W(\xi, \tau) \equiv \overline{\zeta(x, t) \zeta(x + \xi, t + \tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} S(q) \exp \{i[q\xi - \omega(q)\tau]\} dq. \quad (1)$$

Здесь $S(q)$ — так называемый энергетический спектр волнения, $\omega = \omega(q)$ — закон дисперсии, имеющий для гравитационных волн малой амплитуды на свободной поверхности жидкости вид [3]

$$\omega^2 = qg \operatorname{th}(qh), \quad (2)$$

g — ускорение силы тяжести, h — глубина моря.

Для дальнейшего удобно пространственно временнную корреляцию флуктуаций $\xi_z(r, t)$ характеризовать величиной

$$K(x, \tau) = \frac{\overline{\xi'_z \left(r - \frac{x}{2}, t \right) \xi'^*_z \left(r + \frac{x}{2}, t + \tau \right)}}{\overline{\xi'_z(r, t) \xi'^*_z(r, t + \tau)}} e^{i(kx - v\tau)} - \quad (3)$$

Флуктуации напряженности ξ'_z описываются формулой (42а) в [1]; из нее получаем для $K(x, \tau)$ выражение, аналогичное формуле (32) [1] для скалярного случая:

$$K(x, \tau) = - \frac{4k^5 p^2}{\pi r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(\xi, \tau)}{d\xi} \frac{d\xi}{\xi - x}. \quad (4)$$

Подставляя (1) в (4), выразим корреляционную функцию через спектр морского волнения.

$$K(x, \tau) = \frac{4k}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} S(q) \exp \{i[qx - \omega(q)\tau]\} |q| dq. \quad (5)$$

Таким образом, пространственная и временная корреляционные функции флуктуаций выражаются одна через другую с помощью соотношений

$$K(0, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, 0) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-i[qx + \omega(q)\tau]\} dq; \quad (6a)$$

$$K(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(0, \tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{i[q(\omega)x + \omega\tau]\} d\omega. \quad (6b)$$

Ядра этих интегральных преобразований выражаются через элементарные функции в предельных случаях мелкого ($qh \ll 1$) и глубокого ($qh \gg 1$) моря.

* Мы будем придерживаться обозначений работы [1].

$$G_1(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \exp \{-i[qx + \omega(q)\tau]\} dq = \\ = \begin{cases} \delta(x + V\sqrt{gh}\tau) & \text{при } qh \ll 1 \\ -\frac{1}{4x} \sqrt{\frac{g}{\pi x}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{g\tau^2}{4x}\right) & \text{при } qh \gg 1 \end{cases}; \quad (7a)$$

$$G_2(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int \exp \{i[q(\omega)x + \omega\tau]\} d\omega = \\ = \begin{cases} \delta\left(\frac{x}{V\sqrt{gh}} + \tau\right) & \text{при } qh \ll 1 \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{\pi x}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{g\tau^2}{4x}\right) & \text{при } qh \gg 1 \end{cases}. \quad (7b)$$

Отметим, что корреляционные функции поля $K(0, \tau)$ и $K(x, 0)$ над мелким водоемом получаются, в силу (7a) и (7b), одна из другой путем изменения масштаба аргумента

$$K(0, \tau) = K(x = -\tau V\sqrt{gh}, 0); \quad K(x, 0) = K\left(0, \tau = -\frac{x}{V\sqrt{gh}}\right).$$

Формулы (1) и (5) позволяют восстановить пространственно-временную корреляционную функцию поверхности только по временной автокорреляционной функции флюктуаций поля путем преобразования:

$$W(x, \tau) = \frac{r^2}{8\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{i[q(\omega)x - \omega\tau]\} |q(\omega)|^{-1} dq \int_{-\infty}^{\infty} K(0, \tau') e^{i\omega\tau'} d\tau'. \quad (8)$$

В случае двухмерного волнения и малых kl , когда (ср. (36) [1])

$$K(0, \tau) \approx \frac{4}{r^2} \left(\frac{k}{\pi}\right)^{3/2} \left[\ln \frac{l_x}{4r} - \frac{\pi}{2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{dx}{Vx} \frac{d^2 W(x, y; \tau)}{dx^2}, \quad (9)$$

по автокорреляционной функции флюктуаций можно восстановить интеграл от W по поперечной к трассе координате.

$$\tilde{W}(x, \tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y; \tau) dy \sim \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{i[q(\omega)x - \omega\tau]\} |q(\omega)|^{-3/2} d\omega \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} K(0, \tau') e^{i\omega\tau'} d\tau'. \quad (10)$$

Автор благодарен Ф. Г. Бассу за интерес к работе, а также И. Е. Островскому и С. Я. Брауде за обсуждение результатов

ЛИТЕРАТУРА

- И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, 104 (1965)
- А. А. Свешников, Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 3, 32 (1959).
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.

УДК 537.533.7 · 621 371 167

ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЧКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ НАД ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ЭКРАНИРОВАННОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Э. И. Черняков

В настоящей заметке дается решение задачи об излучении электромагнитных колебаний монохроматическим пучком при движении его над дифракционной решеткой, расположенной на диэлектрике с экраном. Задача решается аналогично [1].

Пусть электронный пучок с переменной составляющей комплексной амплитуды $\rho = \rho_0 \delta(z) \exp[i(ky - \omega t)]$ движется со скоростью $v = f/c$ вдоль оси Oy на расстоянии a от дифракционной решетки, помещенной на диэлектрик конечной толщины h и с произвольным значением диэлектрической проницаемости ϵ . Решетка состоит из металлических полос ширины d с расстоянием между ними $l - d$; образующие полосы параллельны оси Ox . Металлический экран находится на нижней границе диэлектрика в плоскости $z = -(a + h)$.

Для удобства рассмотрения будем записывать с индексом 1 величины, относящиеся к области над решеткой, с индексом 2 величины, относящиеся к области, заполненной диэлектриком. Электромагнитное поле определяется через векторный и скалярный потенциалы, которые находятся из уравнения Даламбера для каждой области

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(-i\theta j + \frac{d|z|}{dz} k \right) F e^{-q|z|} e^{iky} + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\Theta_{1n}}{1+n\beta/\nu} j + k \right) A_n e^{iq_{1n}(z+a)} e^{i(k+2\pi n/l)y}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$H_1 = i \left\{ \beta F \frac{d|z|}{dz} e^{-q|z|} e^{iky} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{\beta}{1+n\beta/\nu} e^{iq_{1n}(z+a)} e^{i(k+2\pi n/l)y} \right\};$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\Theta_{2n}}{1+n\beta/\nu} j + k \right) B_n e^{-iq_{2n}(z+a)} + \right. \\ &\left. + \left(-\frac{\Theta_{2n}}{1+n\beta/\nu} j + k \right) C_n e^{iq_{2n}(z+a+h)} \right\} e^{i(k+2\pi n/l)y}; \end{aligned}$$

$$H_2 = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n e^{-iq_{2n}(z+a)} + C_n e^{iq_{2n}(z+a+h)} \right\} \frac{\epsilon \beta}{1+n\beta/\nu} e^{i(k+2\pi n/l)y}.$$

Здесь введены следующие обозначения: $F = 2\pi\rho_0$, $k = \omega/v$, $\nu = 1/\lambda$, где λ — длина волн модуляции, $q = k\theta = k\sqrt{1-\beta^2}$, $q_{1n} = k\Theta_{1n} = k\sqrt{\beta^2 - (1+n\beta/\nu)^2}$, $q_{2n} = k\Theta_{2n} = k\sqrt{\epsilon\beta^2 - (1+n\beta/\nu)^2}$. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен

Связь между неизвестными фурье-коэффициентами поля определяется из граничных условий на щелях решетки ($E_{1t} = E_{2t}$) и металлическом экране ($E_{2z} = 0$):

$$\begin{aligned} A_0 + F e^{-qa} &= -B_0 \frac{\Theta_{20}}{\Theta_{10}} (1 - e^{2iq_{20}h}); \\ A_n &= -B_n \frac{\Theta_{2n}}{\Theta_{1n}} (1 - e^{2iq_{2n}h}); \quad C_n = B_n e^{iq_{2n}h}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из условия равенства нулю тангенциальной составляющей электрического поля на металлических полосах и непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля на щели получим систему уравнений относительно B_n . После несложных преобразований имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n e^{in\phi} = 0 \quad (\delta < |\psi| < \pi); \quad (3)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n \frac{|n|}{n} (1-\chi_n) e^{in\psi} = -\varepsilon \quad (|\psi| < \delta); \quad (4)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n \frac{(-1)^n}{1+n\beta/\kappa} = 0; \quad (5)$$

где

$$2W_0 = -2Fe^{-qa} - B_0 \left[(1-e^{2iq_{2n}h}) \frac{\Theta_{20}}{\Theta_{10}} + (1+e^{2iq_{2n}h}) \varepsilon \right];$$

$$2W_n = -B_n \left[(1-e^{2iq_{2n}h}) \frac{\Theta_{2n}}{\Theta_{1n}} + (1+e^{2iq_{2n}h}) \varepsilon \right];$$

$$\psi = 2\pi \frac{y}{l}; \quad \delta = \pi \frac{d}{l}; \quad \chi_n = 1+i \frac{|n|}{n} g_n; \quad (6)$$

$$g_n = \frac{|1+n\beta/\kappa|}{1+n\beta/\kappa} (1+\varepsilon) \left[1 + \varepsilon \frac{1+e^{2iq_{2n}h}}{1-e^{2iq_{2n}h}} \frac{\Theta_{1n}}{\Theta_{2n}} \right]^{-1} \sqrt{\frac{\beta^2}{(1+n\beta/\kappa)^2} - 1};$$

$$\varepsilon = \Theta Fe^{-qa} (1+\varepsilon) \left[1 + \varepsilon \frac{1+e^{2iq_{2n}h}}{1-e^{2iq_{2n}h}} \frac{\Theta_{10}}{\Theta_{20}} \right]^{-1}.$$

Уравнения (3), (4) представляют известную задачу Римана—Гильберта, за подробностями решения которой мы отсылаем к работе [2]. Окончательное решение уравнений (3), (4) совместно с (5) записывается в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов W_n и неизвестной промежуточной константы C

$$2CR_\delta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n \frac{|n|}{n} \chi_n V_\delta^n = \varepsilon V_\delta^0; \quad (7)$$

$$2CR_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n \left(\frac{|n|}{n} \chi_n V_m^n - \delta_{mn} \right) = \varepsilon V_m^0$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Выражения для R_m , V_m^n , R_δ и V_δ^n найдены в работах [2,3].

Ввиду того, что $\chi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, бесконечную систему (7) можно заменить конечной. Отыскание численных значений величины W_n , определяющей амплитуды излучения, возможно с помощью электронной вычислительной машины.

Излучаемая мощность в области I определяется вектором Умова—Пойнтинга через единичную площадку произвольного сечения $z = z_0$:

$$S_1 = \sum_n \left(J \frac{1}{\eta+n} + k \frac{\sqrt{\kappa^2 - (\eta+n)^2}}{(\eta+n)^2} \right) \frac{\varepsilon \kappa^2 - (\eta+n)^2}{\kappa^2 - (\eta+n)^2} \times$$

$$\times (1-e^{2iq_{2n}h})^2 \frac{\kappa c}{8\pi} |B_n|^2; \quad (8)$$

для области II

$$S_2 = j \sum_n \frac{1}{\eta+n} \{1 + \cos[2q_{2n}(z+a+h)]\} \frac{\varepsilon \kappa c}{4\pi} |B_n|^2. \quad (9)$$

Усреднив по сечению $y = \text{const}$, получим

$$\bar{S}_2 = \sum_n \frac{1}{\eta+n} \left[1 + \frac{\sin(2q_{2n}h)}{2q_{2n}h} \right] \frac{\varepsilon \kappa c}{4\pi} |B_n|^2 \quad (10)$$

(связь B_n и W_n определяется (6)). Здесь $\eta = \kappa/\beta$ и суммирование проводится по тем n , для которых выполняется условие излучения. Этим условием служит вещественность q_{1n} и q_{2n} , что имеет место при

$$\beta^2 > \left(1+n \frac{\beta}{\chi}\right)^2, \quad \epsilon \beta^2 > \left(1+n \frac{\beta}{\chi}\right)^2. \quad (11)$$

В области I излучение представляет суперпозицию плоских волн, уходящих от решетки, а в области II оно аналогично системе волн, распространяющихся между двумя параллельными плоскостями с диэлектрическим заполнением. Излучение существует в обеих областях, если выполняются оба условия (II). Выбором ϵ , β и χ можно добиться существования излучения только в области II. Следует добавить, что в отличие от случая решетки в свободном пространстве [1], в рассматриваемом случае возможно излучение на положительных пространственных гармониках.

В заключение выражаю признательность Третьякову Д. А. за предложенную тему

ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Третьяков, С. С. Третьякова, В. П. Шестопалов, Радиотехника и электроника (в печати).
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, 381 (1962).
3. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 33, 641 (1963).

Харьковский институт горного машиностроения, автоматики и вычислительной техники

Поступила в редакцию
29 июня 1964 г.

УДК 535.1

О СВЯЗИ ЛУЧЕВОГО И ВОЛНОВОГО ОПИСАНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПУЧКОВ В КВАЗИОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

С. Н. Власов, В. И. Таланов

При рассмотрении пучковых волноводов приходится иметь дело с отысканием решений последовательности уравнений

$$\hat{\psi}_{n+1} = \hat{K} \hat{\psi}_n \quad (1)$$

для лучевой амплитуды пучка ψ_n в сечениях, удаленных друг от друга на один период системы. В случае произвольного аксиально симметричного волновода, образованного периодически расположенными группами недиафрагмированных квадратичных фазовых преобразователей (линз), помещенных в среду с волновым числом $k = 2\pi/\lambda$, оператор \hat{K} в (1) может быть представлен в виде [1]

$$\hat{K} = T_{gk/L}^{-1} \hat{\Phi}_{L/k} T_{gk/L}^{-1}, \quad (2)$$

где $T_a = \exp(iar_\perp^2/2)$, r_\perp — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оптической оси системы, с началом на этой оси, $\hat{\Phi}_b$ — оператор преобразования

$$\hat{\Phi}_b \psi = \frac{i}{2\pi b} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \cdot \frac{(xx' + yy')}{b} \right] \psi(x', y') dx' dy',$$

параметры L и g определяются фокусными расстояниями отдельных преобразователей и их взаимным расположением в пределах периода системы. В простейшем случае периодической последовательности тонких линз с фокусным расстоянием F $g = 1 - L/2F$, а параметр L равен расстоянию между линзами.

Обычно, полагая $\psi_n = p^n \psi$, находят, что стационарными решениями ψ последовательности (1) являются собственные функции φ_l оператора \hat{K} при соответствующих собственных значениях p_l :

$$\hat{K} \varphi_l = p_l \varphi_l. \quad (3)$$

Функции φ_l описывают локализованные поля (имеющие каустические поверхности [2]) при условии, что [3]

$$|g| < 1. \quad (4)$$

Наряду с таким волновым подходом известен и другой, чисто геометрический, подход, заключающийся в определении траектории луча при произвольных начальных условиях. Этот подход приводит к тому же условию (4), если ограничиться рассмотрением только финитных траекторий [3,4].

Ниже будет показано, что оба подхода могут быть объединены, если решения последовательности уравнения (1) искать в более общем виде.

$$\psi_n = T_{\beta_n} \hat{\Pi}_{\rho_n} \psi_n^0, \quad (5)$$

где $T_{\beta_n} = \exp(-i\beta_n r_\perp)$, β_n — постоянный вектор, $\hat{\Pi}_{\rho_n}$ — оператор смещения пучка ψ_n^0 на вектор ρ_n в плоскости, перпендикулярной оптической оси системы.

Подстановка выражения (5) в (1) после ряда преобразований приводит к уравнениям

$$T_{\beta_{n+1}} \hat{\Pi}_{\rho_{n+1}} \psi_{n+1}^0 = e^{is_n} T_g \beta_n + \frac{k}{L} (g^2 - 1) \rho_n \hat{\Pi}_L \frac{1}{k} \beta_n + g \rho_n \hat{K} \psi_n^0, \quad (6)$$

где

$$s_n = \frac{kg}{2L} \left[\beta_n^2 + \left(\beta_n \frac{L}{k} + g \rho_n \right)^2 \right] - \frac{k}{L} \rho_n \left(\beta_n \frac{L}{k} + g \rho_n \right). \quad (7)$$

Потребуем, чтобы функции ψ_n^0 , как и в случае $\beta_n = \rho_n = 0$, были с точностью до постоянного множителя собственными функциями оператора \hat{K} .

$$\psi_n^0 = A_n^l \varphi_l. \quad (8)$$

При этом система (6) будет иметь нетривиальные решения для последовательности коэффициентов A_n^l в том и только в том случае, если выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= g \beta_n + \frac{k}{L} (g^2 - 1) \rho_n, \\ \rho_{n+1} &= \frac{L}{k} \beta_n + g \rho_n. \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что это — уравнения траекторий луча в пучковом волноводе, получаемые обычно из чисто геометрических соображений [1], причем вектор ρ_n определяет положение луча, а β_n — направление его распространения.

Решение системы разностных уравнений (9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho_n &= \rho_{01} e^{in\theta} + \rho_{02} e^{-in\theta}, \\ \beta_n &= \beta_{01} e^{in\theta} + \beta_{02} e^{-in\theta}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\theta = \arccos g, \quad (11)$$

а ρ_{01} , ρ_{02} , β_{01} , β_{02} — произвольные постоянные векторы, определяемые значениями величин ρ_n и β_n при $n = 0$. Из (11) вытекает, что решение (10) описывает финитное движение пучка как целого при том же условии (4), при котором его внутренняя структура, описываемая собственными функциями оператора \hat{K} , представляет собой поле, локализованное около оси пучка.

Можно проследить и дальнейшую связь между решениями уравнения (3) и системы разностных уравнений (9). Для типов волн, описываемых в декартовых координатах индексами m и n , собственные значения p_{mn} уравнения (3) равны [3]

$$p_{mn} = e^{i\theta(m+n+1)}.$$

Таким образом, величина θ в решении разностных уравнений (10) равна фазовому сдвигу лучевой амплитуды волны нулевого типа ($m = n = 0$) при прохождении ею одного периода системы.

При $\theta = 2\pi s/r$ (где $s/r \ll 1/2$ — простая дробь), когда существует всего лишь r различных собственных значений p_{mn} уравнения (3) (случай вырождения), решение системы (9) разностных уравнений периодично с периодом r . Нетрудно проверить, что при этом значении θ

$$\sum_{k=0}^{r-1} s_{n+k} = 0$$

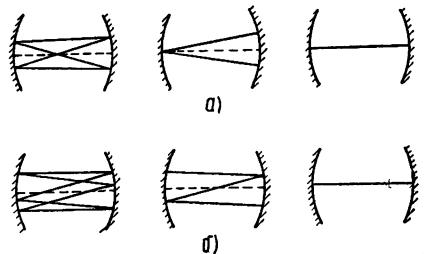
при любом начальном положении пучка, так что коэффициенты A_n образуют периодическую последовательность с тем же периодом r . Это значит, что и общее решение вида (5) является в этом случае периодическим с периодом в r ячеек.

Указанные периодические решения, имеющие место при дискретных значениях параметра $g = \cos(2\pi s/r)$, могут быть привлечены для объяснения особенностей описанных в работе [5] многопучковых типов колебаний в открытых резонаторах*. Примеры таких колебаний показаны на рис. 1. Каждому замкнутому лучу в резонаторе соответствует распределение поля, являющееся на зеркалах любой собственной функцией

оператора \hat{K} или их суперпозицией. При этом в двухзеркальных системах поле на одном зеркале будет описываться, очевидно, суммой распределений, получающихся

Рис. 1. Многопучковые типы колебаний в квазиоптических резонаторах (сплошными прямыми указаны оси отдельных пучков):

а) $s=1, r=4, L=2F$ (конфокальный резонатор);
б) $s=1, r=6, L=F$.



в соответствующем волноводе на четных преобразователях, и на другом — на нечетных. Установление того или иного типа колебаний (или сразу нескольких) определяется условиями возбуждения и характером диафрагмирования пучка.

Представляется интересным обобщение развитого здесь метода, объединяющего лучевой и волновой подходы, на электромагнитные пучки в неоднородных средах, когда размеры неоднородностей диэлектрика d настолько превышают длину волны в нем λ , что может быть указан размер пучка a , удовлетворяющий условию $d \gg a \gg \lambda$.

Авторы благодарны А. В. Гапонову и М. А. Миллеру за обсуждение результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
2. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 45, 684 (1963).
3. G. D. Boyd, H. Cogelin, Bell System Tech. J., 41, 1347 (1962).
4. Дж. Р. Пирс, Теория и расчет электронных пучков, изд. Сов. радио, М., 1956.
5. Tadashi Mogokuma, J. Res. NBS, Eng. and Instr., 68C, 25 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 июля 1964 г.

* Экспериментально многопучковые колебания в открытых резонаторах наблюдались также сотрудниками НИРФИ Ю. И. Зайцевым и Д. П. Степановым. Авторы признательны им за сообщение о предварительных результатах этих экспериментов.

УДК 621.378.33

НАБЛЮДЕНИЕ МНОГОПУЧКОВОГО РЕЖИМА ГЕНЕРАЦИИ ГЕЛИЙ-НЕОНОВОГО ЛАЗЕРА

Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов

В недавно опубликованных работах [1, 2] сообщается о режимах генерации газового гелий-неонового лазера с невоспроизводимыми по апертурам зеркалам резона тора распределениями полей. Последнее характеризуется наличием многопучкового излучения с тем или иным поперечным распределением поля в отдельном пучке. В работе [1] лазер работал на длине волны $1,15 \mu\text{m}$; применяя вблизи от одного из зеркал конфокального резонатора диафрагму с пятью соответствующим образом расположены

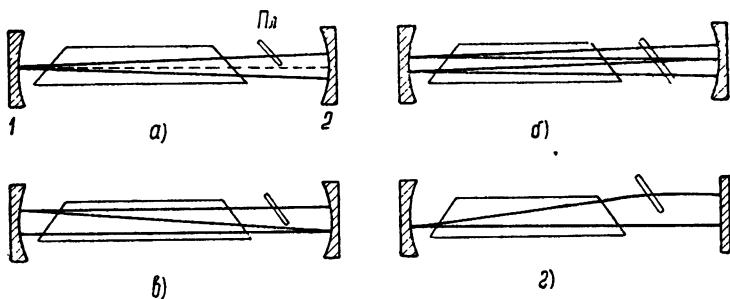


Рис. 1.

ными вырезами, автор мог получать до пяти пучков. В работе [2] сообщается, что с лазером на длину волны $0,6328 \mu\text{m}$ юстировкой зеркал при их строго конфокальном расположении авторам удавалось получить излучение в виде двух пучков, расходящихся под углом $15'$.

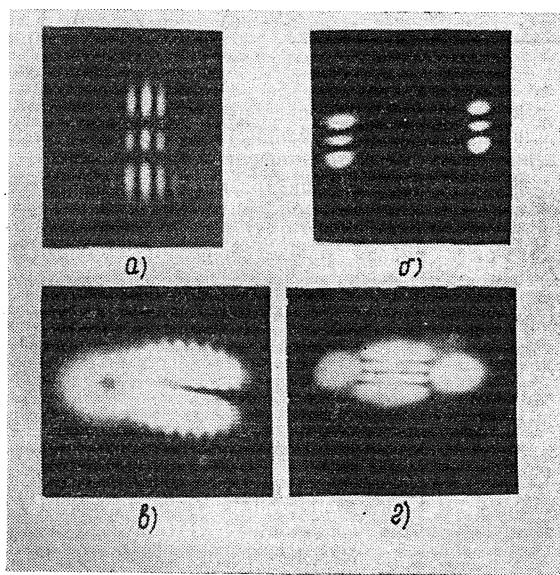


Рис. 2.

При проведении ряда экспериментов с гелий-неоновым лазером нами наблюдалось многопучковое излучение с длиной волны $0,6328 \mu\text{m}$, причем это достигалось методами, отличными от примененных в указанных работах. Эксперименты проводились с лазером, имеющим газоразрядную трубку (внутренний диаметр 6 мм , длина разряда 1 м , возбуждение постоянным током) с плоскопараллельными пластинами (клин $< 1'$) под углом Брюстера к ее оси; расстояние между зеркалами могло изменяться до трех длин используемой трубки.

Возбуждение многопучковой генерации достигалось путем внесения в резонатор генерирующего лазера неоднородностей либо в виде плоской пластинки с клином (из оптического или кварцевого стекла) приблизительно под углом Брюстера к пучку излучения, либо непрозрачных предметов (отрезка провода и т. п. с поперечным размером до 1 м.м.) перпендикулярно оси пучка. Пластинки имели толщину от 0,5 до 5 м.м. и клин до нескольких десятков угловых минут. При последующей незначительной юстировке зеркал (как правило одного) и пластиинки (либо отрезка провода) в резонаторе возбуждалась система пучков, проходящих полностью через газоразрядную трубку и целиком или частично через указанную пластинку.

При использовании сферических зеркал и пластиинки с клином легко было получить структуру излучения из двух пучков, сходившихся на одном зеркале под углом до 20°. Поперечное распределение интенсивности в каждом пучке было одно и то же и соответствовало простейшим типам мод. На рис. 1а сплошными линиями показан ход пучков в лазере в этом случае. Структура поля на зеркалах (мода TEM_{q02}) видна

на рис. 2 а и 2б. На зеркале 1, где пучки сходятся, видна интерференционная картина в виде широких вертикальных полос, а на зеркале 2—«следы» двух отдельных пучков. Внесение потерь в один из пучков внутри резонатора срывало генерацию; это указывает на то, что имеет место единый колебательный процесс, образующий «угловую» структуру излучения.

При замене одного из сферических зеркал плоским удается возбудить двухпучковый тип колебаний—«угол», причем вершина угла находится на сферическом зеркале (см. рис. 1г). В этом случае со стороны плоского зеркала выходили два пучка (той или иной структуры), оси которых были строго параллельны и отстояли друг от друга до 10 м.м. В нескольких метрах от зеркала пучки давали соответствующую четкую интерференционную картину.

В наших экспериментах возбуждалась единая структура излучения до восьми пучков с помощью пластиинки и до четырех пучков с помощью отрезка провода. Наряду с этим наблюдалась генерация независимых «парциальных» систем пучков, подобных описанным в [1]: прямой пучок и «угол» (см. рис. 1а, где пунктиром обозначен прямой пучок), два «угла», лежащих в разных плоскостях, и т. д. Все пучки каждого «парциального» типа колебаний лежали в одной плоскости. При возбуждении лишь одной системы пучков плоскость, в которой они лежали, в большинстве случаев перпендикулярна ребру клина.

На рис. 1б и 1в изображен ход пучков в лазере для четырех- и трехпучкового типов колебаний соответственно. На рис. 2в представлено распределение интенсивности в случае одновременной генерации «угловой» структуры (моды TEM_{q01}) и прямого пучка (моды TEM_{q01} с вырождением—«баранка») по поверхности зеркала 1 (см. рис. 1а), на рис. 2г—распределение интенсивности по зеркалу 2 в случае одновременной генерации «угловой» структуры (моды TEM_{q00}) и прямого пучка (моды TEM_{q23}).

Режимы многопучковой генерации в наших опытах были устойчивыми по отношению к изменению размеров резонатора. Так, его длину d (и отношение d/r , где r —радиус кривизны зеркал) можно было варьировать в широких пределах при возмущении поля пластиинкой с клином. Многопучковый режим наблюдался при $0,3 \leq d/r \leq 2$; при этом положение возмущающей пластиинки влияло лишь на угол между пучками.

При возбуждении единого n -пучкового распределения поля в резонаторе частоты ближайших продольных мод должны отличаться на величину $\Delta\nu = c/2nd$. Это утверждение было проверено нами путем наблюдения с выхода фотодиода колебаний разностной частоты—результата биений продольных мод лазерного излучения.

Было проведено также одновременное наблюдение весьма близких по частоте биений смежных мод в прямом пучке и биений соответствующих мод в излучении «угловой» типа колебаний; оказалось, что флюктуации частоты и амплитуды этих биений не коррелированы. Более того, в пределах точности наших измерений перекрытие одного из пучков (внутри резонатора) не оказывало влияния на частоту сигнала биений. Поперечное распределение интенсивности и выходную мощность другого типа колебаний. Отметим, что в [1] в случае конфокального резонатора наблюдалось взаимодействие разных систем пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Могикита, J. NBS-C, Eng. and Inst., 68C, 25 (1964).
2. В. И. Махорин, Е. Д. Проценко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1200 (1964).

УДК 621.378.33

О ПАРАМЕТРЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПУЧКОВОГО МАЗЕРА

А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов

При создании молекулярного генератора на каком-либо квантовом переходе важно оценить предварительно величину максимально достижимого параметра возбуждения η_{\max}^* . Входящие в выражение для η характеристики резонатора и рабочих уровней молекулы обычно известны с хорошей точностью, и задача о нахождении η_{\max} в значительной мере сводится к нахождению максимального числа активных молекул. В работе [1] отмечено, что максимальная плотность пучка ограничивается соударениями и что микроволновый диаметр соударений больше газокинетического. В работах [2, 3] на аммиачном генераторе экспериментально получены зависимости амплитуды генерации от давления в источнике пучка, иллюстрирующие разрушение пучка из-за соударений. Однако эти работы не содержат количественного учета соударений. В настоящей заметке делается попытка количественной оценки влияния соударений в пучке; полученные результаты сравниваются с данными эксперимента на формальдегидном молекулярном генераторе. Найден также вид зависимости η от величины потока молекул и длины сортирующей системы при учете соударений.

Рассмотрим падающий на сортирующую систему длины L и радиуса R параллельный поток молекул $N_0(\text{сек}^{-1})$, в котором половина молекул находится на верхних уровнях и половина — на нижних. Сортировка параллельного пучка происходит следующим образом: активные молекулы, попавшие в сортирующую систему, летят внутри системы, а пассивные отклоняются полем и рассеиваются наружу. Нас интересует разность потоков активных и пассивных молекул на рабочих уровнях N_a^* на расстоянии l от сортирующей системы (т. е. в резонаторе) в функции потока молекул на входе системы и ее длины

Уменьшение потока как активных, так и пассивных молекул, находящихся на одном из рабочих уровней, при прохождении слоя dz будет равно $dN = -Nd\nu$, где $d\nu$ — число соударений, которое испытывает одна молекула при пролете слоя dz .

Число соударений молекулы в единицу времени $\nu = \left(\frac{\sqrt{2}}{b} \right) \bar{v} \sigma n(z)$, где \bar{v} — средняя скорость в газе, σ — сечение соударения, $n(z)$ — плотность молекул, $b = 1$ для газа и $b = 3$ для одностороннего пучка [4]. Мы возьмем $b = 2$. Следовательно, число соударений за время пролета слоя $dt = dz/v$, $d\nu = \nu dt = \frac{\sigma n(z)}{\sqrt{2}} dz$. В свою очередь,

$n(z) = N_0(z)/Sv$, где $N_0(z)$ — общий поток молекул в рассматриваемом сечении сортирующей системы, S — площадь сечения системы. Окончательно

$$dN = -N \frac{\sigma N_0(z)}{\sqrt{2} S v} dz.$$

Интегрируя по z в пределах от 0 до $L + l$, получим на выходе

$$N = N(0) \exp \left[- \frac{\sigma}{\sqrt{2} S v} \int_0^{L+l} N_0(z) dz \right]. \quad (1)$$

Следует отметить, что в радиоспектроскопии, где энергия кванта $\hbar\omega \ll kT$, сечение соударений, при которых меняется квантовое состояние молекулы, но не меняется траектория ее движения, примерно на порядок больше газокинетического [5]. Поэтому при оценках следует брать σ из радиоспектроскопических данных, а газокинетическими

столкновениями в пучке можно пренебречь. Величина $\int_0^{L+l} N_0(z) dz$ определяется выбо-

ром механизма рассеяния пассивных молекул. При мгновенном рассеянии интеграл принимает значение $(1/2)N_0(L + l)$, а в отсутствие рассеяния $N_0(L + l)$. Для оценок можно принять значение интеграла равным $(3/4)N_0(L + l)$

Число активных молекул интересующего нас рабочего уровня на входе равно $N_a(0) = \delta N_0$, где δ — населенность уровня. Будем рассматривать случай, когда на пас-

* Условие $\eta \gg 1$ определяет режим самовозбуждения.

сивные молекулы рабочего уровня действует отклоняющая сила, пропорциональная расстоянию молекул от оси сортирующей системы $F = \kappa r$. Этим законом хорошо аппроксимируется ряд реальных случаев. Под действием линейной силы пассивная молекула, пролетая через сортирующую систему, движется по закону $r = r_0 \operatorname{ch} \Omega z$, где $\Omega = (1/v) \sqrt{\kappa/m}$, v и m — скорость и масса молекулы. На выход сортирующей системы могут попасть только те пассивные молекулы, траектории которых лежат внутри некоторой граничной траектории, определенной из условия $r_0 \operatorname{ch} (\Omega L) = R$. Поток их на входе $N_a(0) = \delta N_0 / \operatorname{ch}^2(\Omega L)$. Для разности потоков активных и пассивных молекул, учитывая (1), получим

$$N_a^* = \delta N_0 t h^2 \Omega L \exp \left[-\frac{3 \pi N_0 (L + l)}{4 \sqrt{2} S v} \right].$$

Оптимальные значения L и N_0 (при которых N_a^* максимально), находятся из уравнений $\partial N_a^*/\partial N_0 = 0$ и $\partial N_a^*/\partial L = 0$ или

$$N_0 = \frac{1}{A(L + l)}; \\ 4\Omega = AN_0 \operatorname{sh}(2\Omega L),$$

где

$$A = 3\pi/4 \sqrt{2} S v.$$

Основные характеристики исследованных нами переходов формальдегида приведены в [6, 7]. Для перехода $1_{01} - 0_{00}$ при напряжении на квадрупольной сортирующей системе ~ 8 кВ (отклоняющая сила при этом почти линейна) и $T = 300^\circ\text{K}$ величина Ω равна $0,4 \text{ см}^{-1}$. Следует отметить, что при увеличении напряжения на сортирующей системе выше 8 кВ параметр возбуждения, как это видно из экспериментального графика рис. 1, не меняется ввиду особенности штарк-эффекта данного перехода [6]. Для перехода $5_{14} - 5_{15}$ линейный характер силы сохраняется вплоть до пробивного напряжения (~ 18 кВ). При этом $\Omega = 0,19 \text{ см}^{-1}$.

Эксперименты проводились на пучковом мазере на переходах $1_{01} - 0_{00}$ и $5_{14} - 5_{15}$ формальдегида ($\lambda = 4 \text{ м.м.}$). Резонаторы (тип колебания E_{010}) имели длину $l = 3 \text{ см}$ и добротности 3500 и 2500 соответственно. Внутренний радиус квадрупольной сортирующей системы составлял $0,1 \text{ см}$. Источник диаметром $0,6 \text{ мм}$ располагался достаточно далеко от сортирующей системы ($\sim 1,7 \text{ см}$). Для увеличения параметра возбуждения применялось охлаждение источника пучка примерно до 216°K .

Населенность δ пропорциональна $T^{-3/2}$, $\tau^2 \propto T^{-1}$, и в целом $\eta \propto T^{-5/2}$. Для измерения η использовалась методика, описанная ранее в [9]. На рис. 2 приведена расчетная зависимость $\eta(T)$ и экспериментальные точки.

Снятие зависимостей $\eta(L)$ и $\eta(N_0)$ производилось на генераторе без диафрагм, на переходе $1_{01} - 0_{00}$. Имелся набор квадрупольных сортирующих систем одинаковой конструкции, но различной длины L . Напряжение на сортирующих системах поддерживалось на уровне ~ 13 кВ. В каждом случае подбирался оптимальный пучок. При измерении значений параметра возбуждения, больших единицы, источник нагревался до срыва генерации, и значение η при 216°K находилось по графику $\eta(T)$. На рис. 3 построена расчетная кривая и нанесены экспериментальные точки для значений параметра возбуждения в зависимости от длины L .

Следует заметить, что измерение величины N_0 весьма затруднительно, так как в сортирующую систему попадает лишь часть общего потока молекул из источника пучка. При выбранном нами типе источника — одно отверстие — в рабочем диапазоне

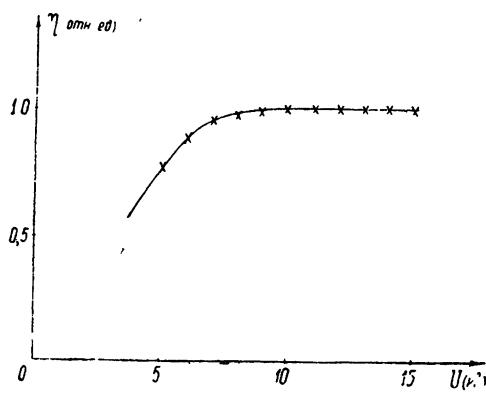


Рис. 1. Зависимость параметра возбуждения η от сортирующего напряжения.

расходов диаграмма направленности остается постоянной [8]. Ввиду отсутствия соответствующего расходомера экспериментально снималась зависимость не $\eta(N_0)$, а $\eta(\Delta P)$ — от приращения давления в объеме ΔP . Ранее при работе с аммиаком было установлено, что приращение давления в объеме линейно зависит от величины потока молекул.

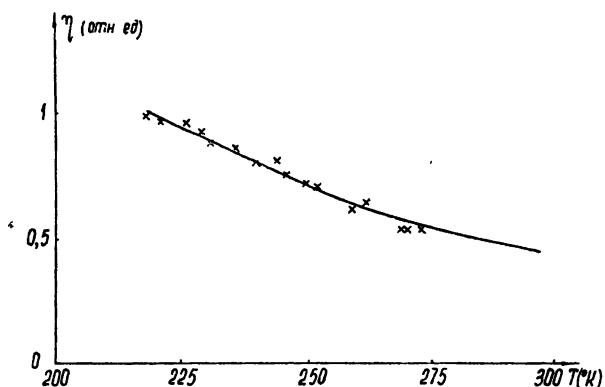


Рис. 2. Зависимость параметра возбуждения от температуры источника.

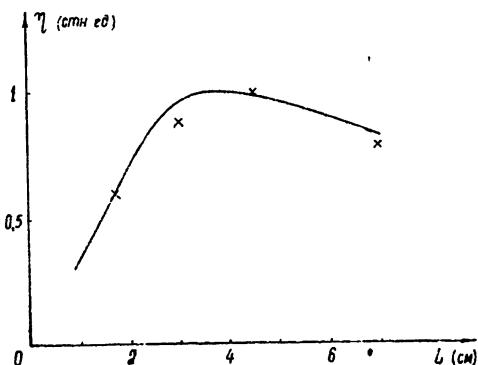


Рис. 3. Зависимость параметра возбуждения от длины сортирующей системы.

Сортирующая система была оптимальной длины. Максимумы расчетной и экспериментальной кривых совмещались, и сравнивался характер зависимости $\eta(N_0)$. Соответствующая расчетная кривая и экспериментальные точки приведены на рис. 4.

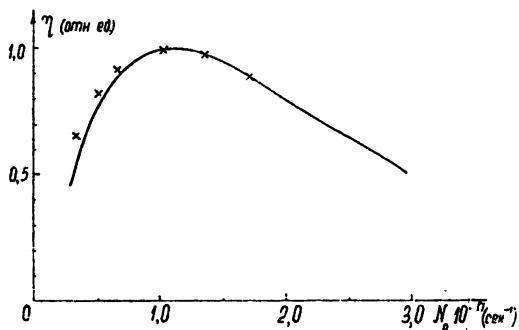


Рис. 4. Зависимость параметра возбуждения от интенсивности пучка.

Из рассмотрения рис. 3 и 4 видно, что приведенная методика удовлетворительно описывает характер зависимости $\eta(L)$ и $\eta(N_0)$. Естественно ожидать, однако, что оцененная таким образом абсолютная величина η_{\max} будет завышена, так как при оценке не учитывались технические и конструктивные причины, ограничивающие параметр возбуждения. Действительно, оценка η_{\max}^* при длине сортирующей системы 4,5 см дает для перехода $1_{01} - 0_{00}$ $\eta_{\max} = 3,5$, а для перехода $5_{14} - 5_{15}$ $\eta_{\max} = 1,1$. Достигнутые же в опыте с холодными диафрагмами величины максимального параметра возбуждения примерно вдвое меньше, а именно $\eta_{\max} = 2$ для $1_{01} - 0_{00}$ и $\eta_{\max} = 0,5$ для $5_{14} - 5_{15}$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 27, 431 (1954).
- 2 Н. Г. Басов, Докторская диссертация, ФИАН, 1956.
- 3 Г. М. Страховский, И. В. Черемискин, Труды ФИАН, Молекулярные генераторы, 21, 68 (1963).
- 4 В. С. Троицкий, ЖЭТФ, 41, 389 (1961).
- 5 Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
- 6 А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. выш. уч. зав. — Радиофизика, 6, 513 (1963).
- 7 А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, ЖЭТФ, 45, 101 (1963).
- 8 А. И. Наумов, ЖГФ, 33, 127 (1963).
- 9 А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, ЖЭТФ, 47, 1605 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 февраля 1964 г.

УДК 62.501

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ КРИТЕРИЕВ НЕОБХОДИМОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО МОДУЛЮ И ФАЗЕ

A. С. Клюев

Для систем автоматического регулирования (САР) известен ряд критериев устойчивости [1]. Наиболее универсальным из них является обобщенный критерий устойчивости (Д-разбиение), предложенный Ю. И. Неймарком. С помощью кривых Д-разбиения

$$1 + W(j\omega) = 0 \quad (1)$$

определяют границы устойчивости САР в функции исследуемых параметров.

Однако при синтезе и анализе САР в большинстве случаев задача ставится значительно шире. Необходимо определить не только значение параметров, обеспечивающих устойчивость системы, но требуется также, чтобы САР имела необходимый запас устойчивости. Запас устойчивости системы на плоскости комплексного переменного определяется положением амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой САР относительно двух точек. Точка $D_1(c=1,0)$ определяет запас устойчивости по модулю c , а точка $D_2(-\cos\gamma, -j\sin\gamma)$ определяет запас устойчивости по фазе γ (рис. 1).

С учетом сказанного, выражения

$$1 - c + W(j\omega) = 0; \quad (2)$$

$$e^{j\gamma} + W(j\omega) = 0 \quad (3)$$

являются амплитудно-фазовыми критериями границы необходимой устойчивости соответственно по модулю и фазе. Они являются более общими, нежели критерии в методе Д-разбиения, так как позволяют определить семейство кривых с различными запасами устойчивости и совокупность параметров, обеспечивающих заданную устойчивость САР. В частности, при c и γ , равных нулю, получаем выражение (1) для кривых Д-разбиения, определяющих границы устойчивости в функции исследуемых параметров.

* Для подсчета использовалось выражение $\eta = 4\pi Q N_a^* \mu^2 \tau^2 / \hbar V$ с учетом коэффициента заполнения резонатора.

Построив по (2) и (3) кривые в плоскости исследуемых параметров САР, в общем случае получаем области недостаточной устойчивости по модулю и фазе, области недостаточной устойчивости по модулю, области недостаточной устойчивости по фазе и области достаточной устойчивости по модулю и фазе.

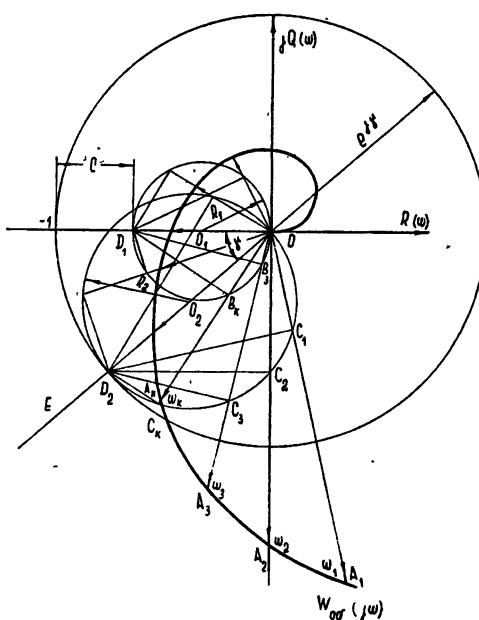


Рис. 1.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ НЕОБХОДИМОЙ УСТОЙЧИВОСТИ САР В ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ НАСТРОЙКИ ПИ-РЕГУЛЯТОРА

Пусть передаточная функция объекта

$$W_{ob}(j\omega) = R(\omega) + jQ(\omega), \quad (4)$$

передаточная функция пропорционально-интегрального регулятора (ПИ-регулятора)

$$W_p(j\omega) = k_p \left(1 + \frac{1}{j\omega T_n} \right); \quad (5)$$

передаточная функция разомкнутой САР

$$W(j\omega) = k_p \left(1 + \frac{1}{j\omega T_n} \right) W_{ob}(j\omega). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (2) и обозначив коэффициент передачи регулятора и время изодрома, обеспечивающие требуемую устойчивость c по модулю (рис. 1), соответственно через k_{pc} и T_{nc} , с учетом (4) и (5) получаем условие необходимой устойчивости САР по модулю

$$k_{pc} \geq \frac{(c-1) R(\omega)}{R^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad (7)$$

$$T_{nc} \geq \frac{R(\omega)}{\omega Q(\omega)}. \quad (8)$$

Подставляя (6) в (3) и обозначив коэффициент передачи регулятора и время изодрома, обеспечивающие требуемую устойчивость γ по фазе (рис. 1), соответственно через $k_{p\gamma}$ и $T_{n\gamma}$, получим условие необходимой устойчивости САР по фазе

$$k_p \tau \geq - \frac{R(\omega) \cos \gamma + Q(\omega) \sin \gamma}{R^2(\omega) + Q^2(\omega)} ; \quad (9)$$

$$T_n \tau \geq \frac{R(\omega) \cos \gamma + Q(\omega) \sin \gamma}{\omega [Q(\omega) \cos \gamma - R(\omega) \sin \gamma]} . \quad (10)$$

Границы областей необходимой устойчивости в плоскости параметров настройки регулятора определяются из условия равенства в (7)–(10).

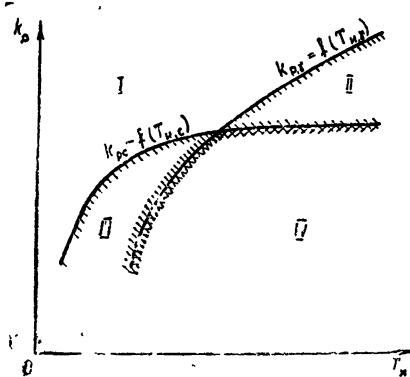


Рис. 2.

Предлагаемый метод штриховки кривых ясен из рис. 2, где I—область недостаточной устойчивости, II—область достаточной устойчивости по фазе, III—область достаточной устойчивости по модулю, IV—область достаточной устойчивости по модулю и фазе.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ НЕОБХОДИМОЙ УСТОЙЧИВОСТИ САР В ПЛОСКОСТИ ПАРАМЕТРОВ НАСТРОЙКИ ПИД-РЕГУЛЯТОРА

Пусть передаточная функция пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора (ПИД-регулятора)

$$W_p(j\omega) = k_p \left(1 + j\omega T_{np} + \frac{1}{j\omega T_n} \right); \quad (11)$$

передаточная функция разомкнутой САР

$$W(j\omega) = k_p \left(1 + j\omega T_{np} + \frac{1}{j\omega T_n} \right) W_{ob}(j\omega). \quad (12)$$

Как для САР с ПИ-регулятором, получаем условие необходимой устойчивости c по модулю при постоянном отношении времени предварения ко времени изодрома $T_{np}/T_n = k_{np}$:

$$T_n c > - \frac{Q(\omega)}{2k_{np} c \omega R(\omega)} \pm \sqrt{\left(\frac{Q(\omega)}{2k_{np} c \omega R(\omega)} \right)^2 + \frac{1}{k_{np} c \omega^2}} . \quad (13)$$

Значения $k_p c$ при этом так же, как и для САР с ПИ-регулятором, определяются выражением (7).

Условие необходимой устойчивости γ по фазе:

$$\begin{aligned} T_n \tau &\geq \frac{R(\omega) \sin \gamma - Q(\omega) \cos \gamma}{2k_{np} \gamma \omega [R(\omega) \cos \gamma + Q(\omega) \sin \gamma]} \pm \\ &\pm \sqrt{\left\{ \frac{Q(\omega) \cos \gamma - R(\omega) \sin \gamma}{2k_{np} \gamma \omega [R(\omega) \cos \gamma + Q(\omega) \sin \gamma]} \right\}^2 + \frac{1}{k_{np} \gamma \omega^2}} . \end{aligned} \quad (14)$$

Значения $k_p \tau$ в этом случае так же, как и для САР с ПИ-регулятором, определяются выражением (9).

Построив область необходимой устойчивости по фазе и модулю, можно определить оптимальные параметры настройки регулятора [2].

Предложенные амплитудно-фазовые критерии необходимой устойчивости позволяют существенно упростить расчеты при исследовании систем автоматического регулирования. Кроме исследования САР на устойчивость, по ним можно быстро определить области требуемой устойчивости и ее параметры, обеспечивающие эту устойчивость при оптимальных режимах автоматического регулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Красовский, Г. С. Поспелов, Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, М., 1962.
2. В. Я. Ротач, Расчет настройки промышленных систем регулирования, Госэнергоиздат, М., 1961.

Трест «Ювмонтажавтоматика»

Поступила в редакцию
29 декабря 1963 г.

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

В. А. Брусин

Рассмотрим две совокупности управляемых систем, обладающих свойствами $\alpha_0 - \gamma_0$ и $\alpha^0 - \gamma^0$, которые являются обобщением свойств $A - C$ в [1].
 α^0, α_0). Структурная модель системы содержит линейное звено с коэффициентом передачи

$$K(p) = \frac{1 + \tau_1 p + \dots + \tau_m p^m}{T_1 p + \dots + T_n p^n}, \quad m < n, \quad n > 1, \quad (1a)$$

причем $T_n p^{n-1} + \dots + T_1$ — гурвицев полином.

Обозначим входную переменную звена (1) через $r(t)$, а выходную — через $x(t)$, так что

$$r(t) = u(t) - y(t). \quad (1b)$$

Функции $x(t), y(t)$ — непрерывные, имеющие почти всюду производную, удовлетворяющую соотношению

$$(y'(t) - k(t) \dot{x}(t)) \dot{y}(t) = 0. \quad (2)$$

Здесь $k(t)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$0 < \underline{k} \leq k(t) \leq \bar{k}, \quad (3)$$

если $\dot{y}(t = 0) \neq 0$, то $y(t + 0) = y(t - 0)$.

Функции $x(t), y(t)$ — непрерывные, имеющие почти всюду производную, удовлетворяющую соотношению

$$(y(t) - k_0(t) \dot{x}(t)) (y(t) - k_1(t) \dot{x}(t)) = 0. \quad (4a)$$

Здесь $k_i(t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\underline{k}_i \leq k_i(t) \leq \bar{k}_i \quad (i = 0, 1), \quad (4b)$$

$$\operatorname{sgn} \underline{k}_0 = \operatorname{sgn} \bar{k}_0 = \operatorname{sgn} \underline{k}_1 = \operatorname{sgn} \bar{k}_2. \quad (4c)$$

γ_0, γ^0). Существуют такие числа $0 < l, M < \infty$, что

$$|y - lx| < M, \quad (5)$$

причем $T_1 p + \dots + T_n p^n + l(1 + \tau_1 p + \dots + \tau_m p^m)$ — гурвицев полином.

Классом $\alpha_0 - \gamma_0$ (или $\alpha^0 - \gamma^0$) систем управления будем называть совокупность систем, удовлетворяющих свойствам $\alpha_0 - \gamma_0$ (или $\alpha^0 - \gamma^0$) при фиксированных величинах $T_s, \tau_j, \underline{k}, \bar{k}$ (или $T_s, \tau_j, \underline{k}_0, \bar{k}_0, \underline{k}_1, \bar{k}_1$) ($s=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$), играющих роль параметров класса. Функцию $y(t)$, удовлетворяющую условиям (1)–(3), (5) [или (1), (4)–(5)], назовем выходом класса $\alpha_0 - \gamma_0$ (или $\alpha^0 - \gamma^0$), соответствующим входу $u(t)$.

Класс $\alpha_0 - \gamma_0$ (или $\alpha^0 - \gamma^0$) назовем абсолютно устойчивым, если для любого выхода $y(t)$ этого класса, соответствующего входу $u(t)$, такому, что $|u| < \infty, |u'| < \infty, \int_0^\infty |u(s)| ds < \infty$, справедливо условие $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Класс $\alpha_0 - \gamma_0$ абсолютно устойчив, если

$$\bar{k} \operatorname{Re} K(j\omega) + 1 > 0; \quad 0 < \omega < \infty.$$

Теорема 2. Класс $\alpha^0 - \gamma^0$ абсолютно устойчив, если

$$a |K(j\omega)|^2 + b \operatorname{Re} K(j\omega) + c > 0, \quad 0 < \omega < \infty,$$

$$d \in [\underline{\Gamma}, \bar{\Gamma}].$$

Здесь

$$\underline{\Gamma} = \underline{k}_0/\underline{k}_1, \quad \bar{\Gamma} = \bar{k}_0/\bar{k}_1; \quad a = \{\underline{k}_l > 0, \bar{\Gamma} \geq \underline{\Gamma};$$

$$dk_l, \text{ если } \underline{k}_l > 0, \bar{\Gamma} < \underline{\Gamma}; |\bar{k}_0|, \text{ если } \underline{k}_l < 0, \bar{\Gamma} < \underline{\Gamma}; d|\bar{k}_1|, \text{ если } \underline{k}_l < 0, \bar{\Gamma} > \underline{\Gamma}\};$$

$$b = (1+d) \operatorname{sgn} \underline{k}_l; \quad c = \{d/\bar{k}_0, \text{ если } \underline{k}_l > 0, \bar{\Gamma} \geq \underline{\Gamma};$$

$$\bar{k}_1^{-1}, \text{ если } \underline{k}_l > 0, \bar{\Gamma} < \underline{\Gamma}; \quad d/|\underline{k}_0|, \text{ если } \underline{k}_l < 0, \bar{\Gamma} \leq \underline{\Gamma};$$

$$|\underline{k}_1|^{-1}, \text{ если } \underline{k}_l < 0, \bar{\Gamma} > \underline{\Gamma}\}.$$

Пример. $n=3, \tau_1=\tau>0, \tau_2=0, k_l>0$. Условия теоремы 2 принимают следующий вид:

$$1) \bar{\Gamma} \geq \underline{\Gamma}; \quad T_2^2 > T_3\tau(\bar{k}_0 + \bar{k}_1) + 2T_1T_3,$$

$$\begin{cases} \underline{k}_0 \bar{k}_1 \tau^2 + (T_1\tau - T_2)(\bar{k}_1 + \bar{k}_0) + T_1^2 > 0, \text{ если } T_1\tau + T_1^2/k_0 \geq T_2 \\ \underline{k}_0 \underline{k}_1 \tau^2 + (T_1\tau - T_2)(\underline{k}_1 + \underline{k}_0) + T_1^2 \underline{k}_0/\bar{k}_0 > 0, \text{ если } T_1\tau + T_1^2/\bar{k}_0 \leq T_2 \end{cases}$$

$$2) \bar{\Gamma} < \underline{\Gamma}; \quad T_2^2 > T_3\tau(\bar{k}_0 + \bar{k}_1) + 2T_1T_3,$$

$$\begin{cases} \underline{k}_0 \underline{k}_1 \tau^2 + (T_1\tau - T_2)(\underline{k}_1 + \underline{k}_0) + \underline{k}_1/\bar{k}_1 T_1^2 > 0, \text{ если } T_1\tau + \underline{k}_1\tau^2 \geq T_2 \\ \bar{k}_0 \underline{k}_1 \tau^2 + (T_1\tau - T_2)(\bar{k}_0 + \bar{k}_1) + T_1^2 > 0, \text{ если } T_1\tau + \underline{k}_1\tau^2 \leq T_2. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

4. В. А. Брусин, ДАН СССР, 157, 2, 1964

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 октября 1964 г.