

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строчки	Напечатано	Должно быть
1021	6 сверху	$z \cdot cm^{-12}$	$z \cdot cm^{-2}$
1120	таблица 4	$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \dots$	$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
1140	2 снизу	$\dots \frac{mR_{0m}^{(1)'}}{nR_{0m}^{(3)'}} \dots$	$\dots \frac{mR_{0m}^{(1)'}}{nR_{0n}^{(3)'}} \dots$
1143	7 сверху	$0_{+1} \approx 0_{+1} \approx 0,$	$0_{-1} \approx 0_{+1} \approx 0,$
1160	19 сверху	$\beta_1^2 = \beta^2$	$\beta_1^2 = \beta_{-1}^2$
1171	14 сверху	$\dots \frac{\dot{x}_1 \omega_1}{1 + \mu\alpha}, \dots$	$\dots \frac{\dot{x}_2 \omega_1}{1 + \mu\alpha}, \dots$
	15 сверху	$\dots x_1 (2\mu\alpha + \mu^2 \alpha^2) \dots$	$\dots x_1 (2\mu\alpha + \mu^2 \alpha^2) \dots$
1172	9 сверху	$\dots \omega_1 \tau \alpha \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i (t_1 - \tau \omega_1)} \right)_0 \dots$	$\dots \omega_1 \tau \alpha \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i (t_1 - \tau \omega_1)} \right)_0 \dots$
1179	15 сверху	$\dots \frac{\alpha_2 \alpha_4 M_0^4}{64} - \frac{\alpha_2 \alpha_5 M_0^6}{128} \dots$	$\dots \frac{\alpha_2 \alpha_3 M_0^4}{64} - \frac{\alpha_2 \alpha_4 M_0^6}{128} \dots$
1211	17 снизу	$0 > z > a \dots$	$0 > z > -a$
1215	7 снизу	$\dots q \neq 0,$	$\dots g_1 \neq 0,$
	13 снизу	$\dots k = \omega \sqrt{\epsilon/c}; \dots$	$\dots k_1 = \omega \sqrt{\epsilon/c}; \dots$
1227	2 снизу	R^2	R_2^*

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
454	7 снизу	$\beta_{0\sigma} = \dots \frac{\dots [1-R(\varphi, \psi) \dots d\varphi d\psi]}{\dots}$	$\beta_{0\sigma} = \dots \frac{\dots [1-R(\varphi, \psi)] \dots d\varphi d\psi}{\dots}$
469	1 снизу	$\text{rot } H^{(n)} = \dots \sum_q \dots$	$\text{rot } H^{(n)} = \dots \sum_q e_q \dots$
474	2 сверху	$\dots + \dots + m_l u^2 / m_e v_{Te}^2 \}^{-2} \dots$	$\dots + \dots + m_l u^2 / m_e v_{Te}^2 \}^{2} \}^{-1} \dots$
475	11 сверху	$\dots + \frac{k'_e v_j}{\omega_{k'} - k\bar{v}} \dots + \frac{k''_e v_\beta}{\omega_{k''} - k\bar{v}} \frac{\partial f_q}{\partial v_e} \}$	$\dots + \frac{k'_l v_j}{\omega_{k'} - k\bar{v}} \dots + \frac{k''_l v_\beta}{\omega_{k''} - k\bar{v}} \frac{\partial f_q}{\partial v_e} \}$
523	16 сверху	$\psi_k^-(r) \simeq \dots \frac{e^{ikr}}{r}$	$\psi_k^-(r) \simeq \dots \frac{e^{-ikr}}{r}$
526	6 снизу	$\dots \psi_d \simeq \zeta(n') \exp(ik_d r/r) \dots$	$\dots \psi_d \simeq \zeta(n') \exp(ik_d r)/r \dots$
542	3 сверху	$\text{где } H_n^{(2)'}(ka) \text{ и } H_n^{(2)}(ka) \dots$	$\text{где } H_n^{(2)}(ka) \text{ и } H_n^{(2)'}(ka)$
562	6 сверху	$\frac{d}{dt} [mr] = \dots$	$\frac{d}{dt} [mr] = \dots$
571	12 снизу	$\dots w_1(\varphi'_N); \dots$	$\dots w_1(\varphi'_{1N}); \dots$
597	2 снизу	$\dots \alpha/\delta < \dots (1+qe^{-\alpha/\delta \ln p}) \dots$	$\dots \alpha/\delta < \dots (1+qe^{-(\alpha/\delta) \ln p}) \dots$
618	6 снизу	$\dots x_{2s_2} = \dots$	$\dots x_{2s_2}(s_1) = \dots$
620	20 сверху	$a_{ij}^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$	$a_{ij}^{(k)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1k} a_{1j} \\ \dots \dots \dots \end{vmatrix}$
		Замеченные опечатки в журнале № 6 за 1964 г.	
	14 снизу	$n_p^r = \dots$	$n_p^2 = \dots$
1197	4 снизу	$n^2 = \frac{16 \pi^2}{\cos^2 \alpha} \frac{e^2 N^2 c^2}{\omega^2 H^2}$	$n^2 = \frac{4\pi e N c}{\omega H \cos \alpha}$
	3 снизу	$\Theta = \Theta_0 [\dots]^{1/(r+l)}$	$\Theta = \Theta_0 [\dots]^{1/l}$

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Кузьмин А. Д. О модели Венеры с «холодной» поглощающей атмосферой	1021
Брауде С. Я., Вайсберг В. В. О низкочастотном спектре космического радиоизлучения	1032
Гинзбург Э. И. К вопросу о распространении сильных радиоволн в ионосфере	1041
Кравцов Ю. А. Асимптотическое решение уравнений Максвелла вблизи каустики	1049
Тамойкин В. В. Об излучении заряда, движущегося в среде с флюктуирующими параметрами	1057
Алексеев Г. А., Блиох П. В. Когерентное тормозное излучение протяженных электронных густотков	1064
Цареградский В. Б. К теории флюктуаций молекулярного генератора	1075
Яшков В. Я. Применение методов статистической радиофизики к исследованию движения полюсов Земли	1090
Миловский Н. Д. О стационарном режиме квантового оптического усилителя бегущей волны с обратной связью	1095
Скроцкий Г. В., Показаньев В. Г. Энергетический спектр 2^3S_1 состояния He^3 в произвольном магнитном поле	1106
Скроцкий Г. В., Показаньев В. Г. К теории оптической ориентации в He^3	1111
Жидко Ю. М. Метод последовательных приближений для построения оптимальных антенных решеток	1122
Иванов Е. А. Поле магнитного диполя, расположенного соосно двум дискам	1133
Эткин В. С. К теории модулируемых цепей	1150
Карманова Е. С., Эткин В. С. К теории усилителя типа «модулятор—демодулятор»	1156
Вашковский А. В. Нелинейные явления в магнитостатическом усилителе и генераторе	1162
Цой К. М. Периодические колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием	1170
Попов В. А. Бездиодная ферритовая ячейка с мостовой связью	1180

Краткие сообщения и письма в редакцию

Каменская С. А., Станкевич К. С. Измерение поглощения радиоволн в атмосфере на высоте 3200 м над уровнем моря на длине волн 1,6 см	1186
Барсуков К. А. и Гинзбург В. Л. О направлении луча и групповой скорости в поглощающей анизотропной среде	1187
Гайлitis А. и Цытович В. Н. К теории нелинейного взаимодействия поперечных и продольных плазменных волн	1190
Красовицкий В. Б., Курилко В. И. О влиянии излучения на резонансное ускорение частицы в поле плоской волны	1193
Басс Ф. Г., Ханкина С. И. К нелинейной теории электромагнитных волн в полупроводниках и плазме	1195
Андреев Г. А. О влиянии флюктуаций скорости переноса неоднородностей на статистические характеристики волны, распространяющейся в турбулентной среде	1198
Махорин В. И., Проценко Е. Д. Расходимость излучения в гелий-неоновом лазере	1200
Копвиллем У. Х. и Нагибиров В. Р. Резонансное уширение и перенос энергии в оптически возбужденных системах с дискретным спектром	1204
Грязнов Ю. М., Частов А. А. Вид последовательности спиновых эхо при использовании импульсов, не удовлетворяющих условию поворота на 180°	1205
Умарходжаев Р. М. К теории спиновых генераторов	1207
Литвиненко Л. Н. Дифракция электромагнитной волны на плоской металлической решетке специальной формы с диэлектриком и экраном (случай нормального падения)	1211

Эйдман В. Я. О нормальных волнах в круглом волноводе, заполненном плазмой, при учете пространственной дисперсии	1214
Грошков Л. М. Экспериментальное исследование пространственного заряда в цилиндрическом магнетроне в статическом режиме	1217
Альтшулер Ю. Г., Анисимов Е. В., Ревзин Р. М. Экспериментальное исследование строфотрона с бегущей волной	1223
Клинов В. В. Ячейки на туннельных диодах для запоминающих устройств со считыванием без разрушения информации	1226

Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. IV, № 4, 1964	1230
От Межведомственного геофизического комитета при Президиуме АН СССР Содержание т. VII журнала «Известия высших учебных заведений» МВ и ССО СССР по разделу «Радиофизика» за 1964 г	1231
Именной указатель т. VII журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1964 г	1232
	1238

УДК 523.164.4 : 521.52

О МОДЕЛИ ВЕНЕРЫ С «ХОЛОДНОЙ» ПОГЛОЩАЮЩЕЙ АТМОСФЕРОЙ

А. Д. Кузьмин

Рассмотрена возможность интерпретации наблюдаемого спектра радиоизлучения Венеры в сантиметровом и миллиметровом диапазонах волн поглощением в атмосферном аэрозоле планеты. Показано, что «зaval» в миллиметровой части спектра можно объяснить поглощением в капельно-жидком аэрозоле, находящемся при температуре $\sim 300^{\circ}\text{K}$ и содержащем $0.2 - 0.3 \text{ г} \cdot \text{см}^{-12}$ полярной жидкости с временем релаксации $\sim 3.5 \cdot 10^{-12} \text{ сек}$. Такими жидкостями могут быть некоторые функциональные производные метана, этана и бензола, например, CH_3OH , $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$ и др. Пылевой аэрозоль, состоящий из горных и вулканических пород, не удовлетворяет экспериментальным данным.

Показано, что атмосфера, удовлетворяющая радиоспектру, должна быть совершенно непрозрачной в инфракрасном и оптическом диапазонах. Поэтому прямая солнечная радиация не может быть источником нагрева поверхности планеты.

Рассмотрен нагрев поверхности внутренним теплом планеты и оценен необходимый поток тепла.

Указана возможность объяснения измеренного уменьшения яркостной температуры Венеры в дециметровом диапазоне волн поглощением в относительно холодной ($\sim 300^{\circ}\text{K}$) ионосфере Венеры. Оценены требуемая электронная концентрация дырчатой ионосферы и частота соударений полупрозрачной ионосферы.

1. Как известно, одной из возможных причин более низкой яркостной температуры радиоизлучения Венеры в миллиметровом диапазоне волн по сравнению с более длинными волнами может быть сильное поглощение в относительно холодной атмосфере планеты коротких волн [1]. Однако вопрос о природе поглощающего агента до сих пор остается неясным.

Нефелометрические [2] и поляризационные [3] измерения Венеры в оптическом диапазоне указывают на большое содержание аэрозоля в ее атмосфере. Возможно, что облачный слой Венеры также является аэрозольным. В земных условиях атмосферный аэрозоль (облака, туман) является поглощающим для радиоизлучения в коротковолновой части сантиметрового и миллиметровом диапазонах волн (см., например, [4]). В связи с этим представляет интерес рассмотреть вопрос о возможности объяснения наблюдаемого спектра радиоизлучения Венеры избирательным поглощением частицами аэрозоля.

2. Решим в общем виде задачу об отыскании электрических свойств поглощающего слоя по известному из экспериментальных данных спектру радиоизлучения Венеры.

Яркостная температура планеты, окруженной поглощающим слоем, определяется решением уравнения переноса. Принимая в первом приближении слой плоским, получим

$$T_a(\lambda) = T_n(1-R) e^{-\int_{h_1}^{h_2} \gamma(\lambda, s) ds} + \int_{h_1}^{h_2} T_c(s) \gamma(\lambda, s) e^{-\int_s^{h_2} \gamma(\lambda, s) ds} ds. \quad (1)$$

Здесь T_n и R — температура и коэффициент отражения поверхности, s — текущая координата, h_1 и h_2 — высоты нижней и верхней границ слоя, $T_c(s)$ и $\gamma(\lambda, s)$ — распределение температуры и поглощения в слое по высоте.

Пусть в слое имеет место экспоненциальное уменьшение поглощения с высотой:

$$\gamma(\lambda, s) = \gamma_0(\lambda) e^{-(s-h_1)/H}, \quad (2)$$

где $\gamma_0(\lambda)$ — поглощение у нижней границы слоя, H — высота однородного слоя. Распределение температуры в слое примем линейным:

$$T_c(s) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{s - h_1}{h_2 - h_1}, \quad (3)$$

где T_1 и T_2 — температуры у нижней и верхней границ слоя. Обозначив $\gamma_0(\lambda) H = B(\lambda)$ и $e^{-(h_2 - h_1)/H} = A$ и проводя ряд преобразований, получим

$$T_a(\lambda) = T_2 + [T_n(1-R) - T_1] e^{-B(1-A)} + \frac{T_2 - T_1}{\ln A} [E_i(-B) - E_i(-AB)]. \quad (4)$$

Здесь Ei — интегральная показательная функция.

Принимая $T_n(1-R) = 580^{\circ}\text{K}$ и $T_2 = 250^{\circ}\text{K}$, найдем зависимость $T_a[B(\lambda)]$ при различных величинах T_1 , $(h_2 - h_1)/H$ и H , задаваемых в качестве параметра. Результаты расчета представлены в виде графиков на рис. 1.

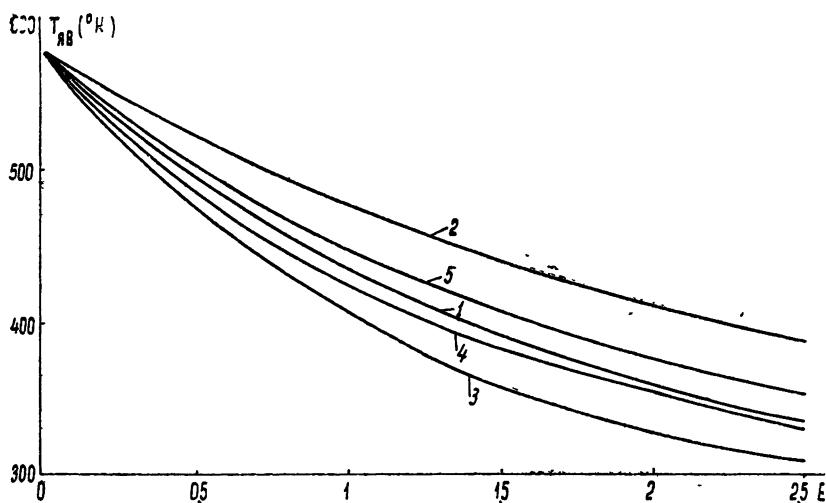


Рис. 1. Зависимость яркостной температуры Венеры T_{ab} от оптической толщины атмосферы $B = \gamma_0 H$:

- | | |
|--|--|
| 1) $T_1 = 300^{\circ}\text{K}$, $H = 8 \text{ км}$, $(h_2 - h_1)/H = 1$; | 4) $T_1 = 350^{\circ}\text{K}$, $H = 8 \text{ км}$, $(h_2 - h_1)/H = 2$; |
| 2) $T_1 = 300^{\circ}\text{K}$, $H = 16 \text{ км}$, $(h_2 - h_1)/H = 0.5$; | 5) $T_1 = 350^{\circ}\text{K}$, $H = 16 \text{ км}$, $(h_2 - h_1)/H = 1$, |
| 3) $T_1 = 300^{\circ}\text{K}$, $H = 4 \text{ км}$, $(h_2 - h_1)/H = 2$; | |

На рис. 2 приведены известные в настоящее время [5-10] данные спектральных измерений яркостной температуры Венеры (неосвещенной

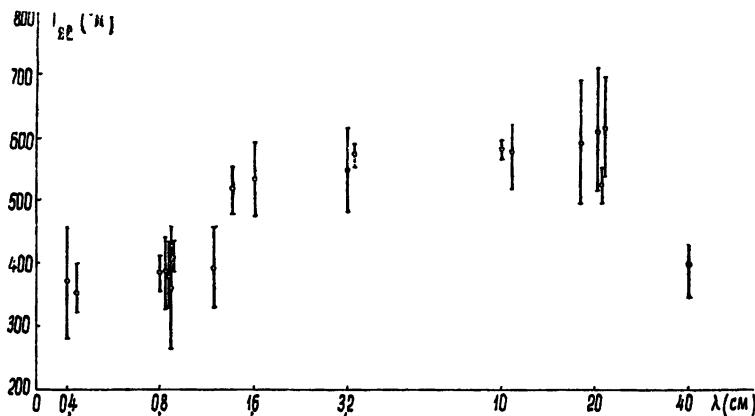


Рис. 2 Спектр радиоизлучения неосвещенной стороны Венеры.

стороны). С помощью графика рис. 1 можно для каждой точки рис. 2 определить поглощение $B(\lambda)$, при котором расчетная температура об-

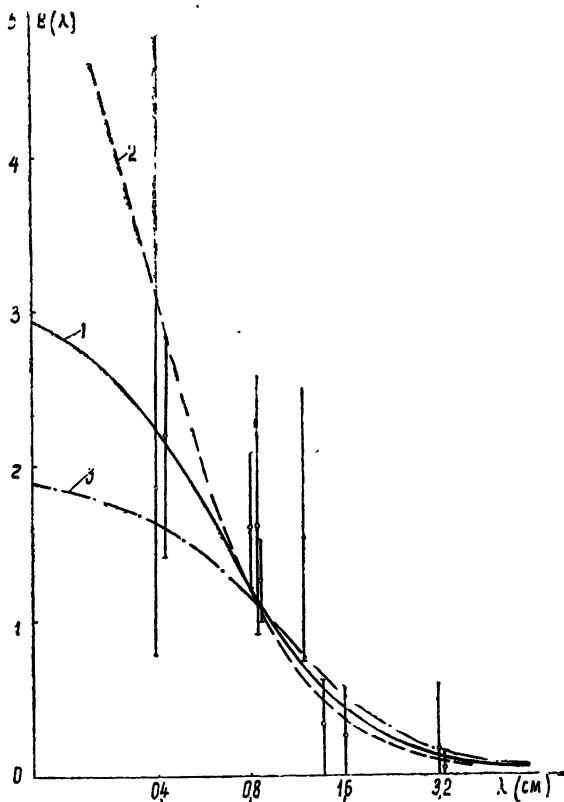


Рис. 3. Зависимость оптической толщины атмосферы B от длины волны λ :

вертикальные отрезки—значения $B(\lambda)$, необходимые для получения $T_{\text{яВ}}$, указанных на рис. 2, сплошная кривая—расчетная для $B(0)=3$,

$\tau_p=3.5 \cdot 10^{-12}$ сек, пунктир—для $B(0)=6.5$, $\tau_p=2 \cdot 10^{-12}$ сек; штрих-

пунктир—для $B(0)=2$, $\tau_p=5 \cdot 10^{-12}$ сек.

суждаемой модели соответствует измеренному значению. Результаты такого расчета для $T_1 = 300^\circ\text{K}$, $H = 8 \text{ км}$ и $(h_2 - h_1)/H = 1$ приведены на рис. 3. Величины ошибок на этом рисунке соответствуют ошибкам измерения $T_{\text{яв}}$, приведенным на рис. 2. Из рис. 3 ясно, что удовлетворить наблюдаемому спектру радиоизлучения Венеры можно при условии, если поглощение в атмосфере мало на волнах длиннее 3 см и резко увеличивается в диапазоне от 1,5 до 1 см.

Ослабление электромагнитного излучения частицами аэрозоля, малыми по сравнению с длиной волны, определяется соотношением [4]

$$\gamma(\lambda) = 56,5 \frac{C_1(\lambda) M}{\lambda} \text{ см}^{-1}, \quad (5)$$

$$C_1(\lambda) = \frac{\epsilon''(\lambda)}{[\epsilon'(\lambda) + 2]^2 + \epsilon''(\lambda)^2},$$

где M — масса поглощающих частиц, ϵ' и ϵ'' — действительная и мнимая части комплексной диэлектрической постоянной материала частиц.

Нетрудно показать, что для получения спектральной зависимости поглощения, изображенной на рис. 3, значения ϵ' и ϵ'' материала аэрозоля должны резко изменяться в коротковолновой части сантиметрового диапазона волн.

Согласно [1], ϵ' и ϵ'' горных и вулканических пород и вулканического пепла в интересующем нас диапазоне не зависят от длины волны. Поэтому объяснить наблюдаемый спектр радиоизлучения Венеры селективным поглощением в пылевом аэрозоле, состоящем из вышеуказанных пород, не представляется возможным.

С другой стороны, требуемыми свойствами обладают маловязкие полярные жидкости, частотные зависимости $\epsilon'(\lambda)$ и $\epsilon''(\lambda)$ для которых описываются соотношениями [12]

$$\begin{aligned} \epsilon'(\lambda) &= \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + y^2}, \\ \epsilon''(\lambda) &= \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty) y}{1 + y^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$y = \omega \tau_p \frac{\epsilon_0 + 2}{\epsilon_\infty + 2}, \quad (7)$$

τ_p — время релаксации полярных молекул, ϵ_0 и ϵ_∞ — диэлектрическая проницаемость вещества на частотах $\omega_0 \ll 1/\tau_p$ и $\omega_\infty \gg 1/\tau_p$.

Подставляя (6) в (5), получим расчетную зависимость $\gamma(\omega \tau_p)$ и, следовательно, $B(\omega \tau_p)$. Результаты расчета приведены на графиках рис. 4; они свидетельствуют о некритичности формы кривой $\gamma(\omega \tau_p)$ к параметрам ϵ_0 и ϵ_∞ . Положение «среза» соответствует частотам $\omega \approx 1/\tau_p$. По оси ординат отложена величина $B(\omega \tau_p)$ ($\tau_p 10^{12}/M_0 H$).

На рис. 3 проведено сопоставление экспериментальных данных с расчетными для различных параметров τ_p и $B(0) = B_{\lambda \rightarrow 0}(\omega \tau_p)$. Хорошее соответствие расчета эксперименту имеет место при $\tau_p = 3,5 \cdot 10^{-12}$ сек и $B(0) = 3$. Параметр $B(0)$ сильно влияет на величину яркостной температуры в диапазоне длин волн $\lambda < 4 \text{ мм}$ и может быть уточнен после проведения соответствующих измерений.

Произведем оценку необходимого количества поглощающего вещества. Переходя в (5) к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$B(0) = \gamma_0(0)H = \frac{3 \cdot 10^{-10} M_0 H}{\tau_p} \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{(\epsilon_0 + 2)(\epsilon_\infty + 2)},$$

откуда

$$M_0 H = \frac{B(0)\tau_p}{3 \cdot 10^{-10}} \frac{(\epsilon_0 + 2)(\epsilon_\infty + 2)}{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}. \quad (8)$$

Здесь M_0 — количество поглощающего вещества в 1 см³ атмосферы Венеры на уровне h_1 . Принимая, в соответствии с вышеизложенным,

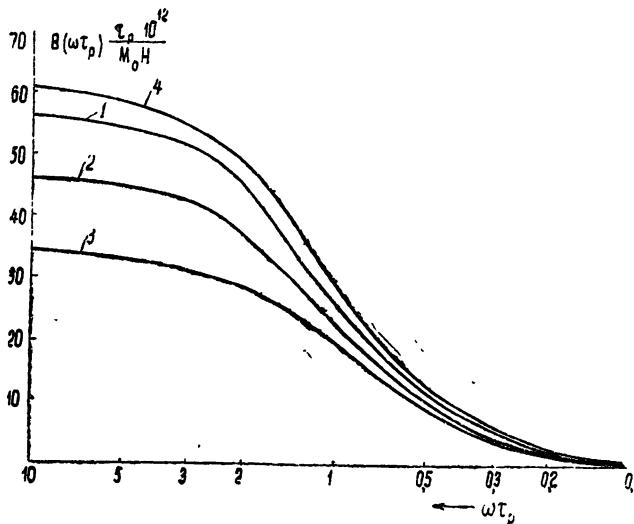


Рис. 4. Расчетная зависимость оптической толщины B полярного аэрозоля от частоты ω и времени релаксации τ_p :

- 1) $\epsilon_0=81, \epsilon_\infty=3$; 2) $\epsilon_0=20, \epsilon_\infty=3$; 3) $\epsilon_0=10, \epsilon_\infty=3$; 4) $\epsilon_0=20, \epsilon_\infty=2$.

$B(0) = 3$ и $\tau_p = 3,5 \cdot 10^{-12}$ сек и задаваясь различными значениями ϵ_0 от 81 до 10 и $\epsilon_\infty = 3 \div 2$, получим $M_0 H = 0,2 \div 0,3$ г поглощающего

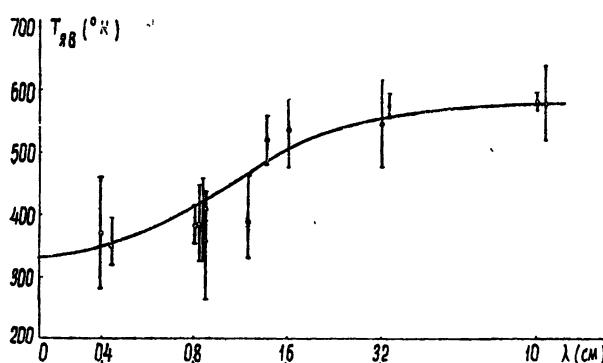


Рис. 5. Расчетный спектр Венеры, окруженной „холодным“ аэрозолем, содержащим $0,2 \div 0,3$ г · см⁻² полярной жидкости с временем релаксации $\sim 3,5 \cdot 10^{-12}$ сек...

вещества в столбе слоя сечением 1 см². Полагая высоту однородного слоя равной высоте однородной атмосферы на Земле $H \approx 8$ км, оценим концентрацию поглощающего вещества в 1 см³ атмосферы Венеры: $M_0 = 0,25 \div 0,38$ г·м⁻³.

Расчетный спектр радиоизлучения Венеры, атмосфера которой содержит указанное количество капельно-жидкого аэрозоля, приведен на рис. 5 и с точностью до ошибок измерения согласуется с результатами измерений. Таким образом, завал в миллиметровой части спектра радиоизлучения Венеры можно объяснить поглощением в капельно-жидким атмосферном аэрозоле планеты, находящемся при температуре $\sim 300^\circ\text{K}$ и содержащем $0,2 \div 0,3$ г·м⁻² полярной жидкости с временем релаксации $\tau_p = 3,5 \cdot 10^{-12}$ сек.

Вода, хотя и является полярной жидкостью, по-видимому, не объясняет наблюдаемого спектра, так как ее время релаксации $\tau_p = (0,5 \times 10^{-12}$ сек при $t = 15^\circ\text{C}$) почти на порядок меньше требуемого. Близкое к требуемому время релаксации имеют некоторые функциональные производные метана, этана и бензола, например, CH₃OH, (C₂H₅)₂O, C₆H₅Cl, C₆H₅Br и др.

Рис. 3 показывает, что на волнах 8 мм и 1,18 см требуемое поглощение превышает расчетное, удовлетворяющее остальным экспериментальным точкам. Это дает основание полагать, что согласие расчетного спектра с экспериментальными данными на рис. 3 может быть улучшено при наличии дополнительного поглощения на указанных волнах. Однако спектр дополнительного поглощения не должен иметь заметных составляющих на волнах 1,35; 1,6 и 3 см, где дополнительное поглощение скорее ухудшит согласие расчета и эксперимента. Такую относительную узкополосность может обеспечить поглощение в газах, имеющих сильные линии в диапазоне волн между 4 мм и 1,35 см (CH₃OH, CH₃CN, C₂H₄O, ClCN, BH₃CO, FCl, HCF₃ [21]). Особый интерес представляет CH₃OH, так как жидккая фаза этого вещества удовлетворяет требуемому составу аэрозоля планеты.

3. Оценим прозрачность слоя в инфракрасном диапазоне. Согласно поляриметрическим измерениям Лио [3], диаметр аэрозольных частиц $d \approx 2,5 \mu$, т. е. соизмерим с длиной волны инфракрасного излучения. В этом случае эффективное сечение ослабления излучения [13]

$$\sigma \approx \pi r^2, \quad (9)$$

где r — радиус частиц. Оптическая толщина слоя

$$\tau = \sigma N, \quad (10)$$

где число капель в столбе сечением 1 см²

$$N = 3M_0H/4\rho\pi r^3. \quad (11)$$

Подставляя (9) и (11) в (10) и полагая плотность поглощающего вещества $\rho \approx 1$, получим

$$\tau = 3M_0H/4\rho r = 1200 \div 1800,$$

т. е. этот аэрозоль должен быть совершенно непрозрачен для инфракрасного излучения*. Это соответствует экспериментальным данным [14], указывающим на то, что атмосфера Венеры, наблюдавшаяся извне, становится оптически толстой уже на уровне вершины облачного слоя. В этом случае солнечное излучение должно полностью задерживаться

* Такая атмосфера будет заведомо непрозрачна и в видимом свете.

верхней частью облачного слоя, температура которой будет определяться условиями лучистого равновесия. Полученная из радиометрических наблюдений температура верхней части облачного слоя $\sim 240^{\circ}\text{K}$ [15] действительно близка к равновесной радиационной температуре.

Из непрозрачности атмосферы следует также, что прямая солнечная радиация не может быть источником нагрева поверхности Венеры. В этом случае температуры поверхности на освещенной и неосвещенной Солнцем сторонах должны быть одинаковыми. Имеющийся же фазовый ход яркостной температуры радиоизлучения Венеры может быть объяснен влиянием солнечной радиации на оптическую толщину $B = \gamma_0 H$ «холодной» поглощающей атмосферы. Ожидаемое в этом случае уменьшение амплитуды фазового хода с увеличением длины волны, по-видимому, соответствует экспериментальным данным [1, 6, 22, 17].

Заметим кстати, что если фазовый ход обусловлен изменением температуры поверхности, то следует ожидать увеличения амплитуды фазового хода с увеличением длины волны; это, по-видимому, не подтверждается экспериментальными данными. Таким образом, характер зависимости фазового хода от длины волны может помочь решить вопрос о том, обусловлен ли фазовый ход изменением температуры поверхности или причиной его является изменение поглощения в «холодной» атмосфере планеты.

Если источником нагрева поверхности Венеры является Солнце, необходим некоторый механизм передачи энергии от верхней части облачного слоя к поверхности планеты. Один из таких механизмов (нагрев трением ветра) рассмотрен Эпиком в эолосферной модели [18].

4. Другим возможным источником нагрева может быть внутреннее тепло планеты. Рассмотрим такую возможность и оценим величину необходимого для этого потока внутреннего тепла.

Как известно, температурный режим планеты определяется условием баланса источников и потерь тепла. Потери тепла с поверхности планеты в космическое пространство складываются в общем случае из потерь на излучение, потерь на теплопроводность атмосферы и потерь на турбулентный перенос тепла. Оценим эти потери.

В связи с непрозрачностью атмосферы в инфракрасном диапазоне потери на излучение будут отсутствовать.

Потери на теплопроводность в газе определяются соотношением

$$q_{\text{тепл}} = \lambda \Delta T, \quad (12)$$

где λ — коэффициент теплопроводности, ΔT — градиент температуры в направлении теплообмена. Принимая коэффициент теплопроводности атмосферы равным коэффициенту теплопроводности земной атмосферы

$$\lambda \simeq 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-1},$$

а вертикальный градиент температуры равным адиабатическому для сухого воздуха

$$\Delta T = \gamma_a \simeq 10^{-4} \text{ град} \cdot \text{см}^{-1},$$

получим

$$q_{\text{тепл}} \simeq 10^{-8} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Как видим, потери на теплопроводность на 2,5 порядка меньше внутреннего потока тепла, имеющего у Земли и, следовательно, при таком же внутреннем потоке тепла у Венеры практически не должны влиять на тепловой режим планеты.

Значительно большими могут быть турбулентные потери тепла. Согласно [19], турбулентный поток тепла $q_{\text{турб}}$ пропорционален разности действительного ΔT и равновесного β градиентов температуры:

$$q_{\text{турб}} = \lambda^* (\Delta T - \beta). \quad (13)$$

Принимая для оценки коэффициент турбулентной теплопроводности равным соответствующему параметру для земной атмосферы [19], т. е. $\lambda^* \approx 10^3 \text{ кал} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$ и $\Delta T - \beta \approx 10^{-5} \text{ град} \cdot \text{см}^{-1}$, получим

$$q_{\text{турб}} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Таким образом, в принятой модели потери тепла поверхностью

$$q_{\Sigma} = q_{\text{изл}} + q_{\text{тепл}} + q_{\text{турб}} \quad (14)$$

определяются, главным образом, турбулентными потерями. Для теплового баланса необходим, следовательно, внутренний источник тепла, обеспечивающий поступление

$$q = q_{\Sigma} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1},$$

т. е. на 2 порядка больше внутреннего потока тепла, имеющегося на Земле. Если источником внутреннего тепла является радиоактивность планеты, то содержание радиоактивных веществ на Венере также должно быть на 2 порядка больше, чем на Земле.

Вследствие грубой оценки турбулентного теплопереноса приведенные данные являются предварительными и нуждаются в дополнительном уточнении.

5. Последние измерения Дрейка [6], проведенные на волнах 21 и 40 см (рис. 2), указывают на уменьшение яркостной температуры Венеры в дециметровом диапазоне волн. Попытаемся интерпретировать указанное уменьшение поглощением в дырчатой или полупрозрачной ионосфере Венеры. Как показано в [20], яркостная температура радиоизлучения планеты, окруженной такой ионосферой, равна

$$T_{\text{я}}(\lambda) = T_{\text{n}}(1-R) + b [T_e - T_{\text{n}}(1-R)] (1 - e^{-\tau(\lambda)}), \quad (15)$$

где T_e — кинетическая температура электронов в ионосфере, τ — оптическая толщина ионосферы, b — отношение площади диска планеты, покрытого ионосферой, к полной площади диска планеты.

Положим, что ионосфера Венеры является прозрачной в сантиметровом диапазоне волн и поглощающей на более длинных волнах. В этом случае для уменьшения яркостной температуры в дециметровом диапазоне волн необходимо, чтобы кинетическая температура электронов в ионосфере T_e была ниже яркостной температуры поверхности $T_{\text{n}}(1-R)$. На рис. 6 приведены расчетные спектры радиоизлучения Венеры с дырчатой ионосферой, построенные для $T_{\text{n}}(1-R) = 580^\circ\text{K}$ и $b[T_e - T_{\text{n}}(1-R)]$ и zNv , равных -200°K , $6 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ и -300°K , $2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ соответственно. Сравнение с экспериментальными точками, нанесенными на этот же рисунок, свидетельствует об их согласии.

Если поглощающий слой находится в верхней атмосфере планеты, частота соударений определяется соударениями с ионами:

$$v_{ei} = 6,1 \cdot 10^{-3} \sqrt{(300/T_e)^3} N_i.$$

Полагая $T_e \approx 300^\circ\text{K}$ и принимая толщину слоя $z = 50 \text{ км}$, оценим требуемую электронную концентрацию в слое:

$$N = (1 \div 2) \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}.$$

В нижних слоях атмосферы частота соударений определяется соударениями с нейтральными частицами:

$$\nu_{en} = 3,6 \cdot 10^{-10} n \sqrt{T_e}.$$

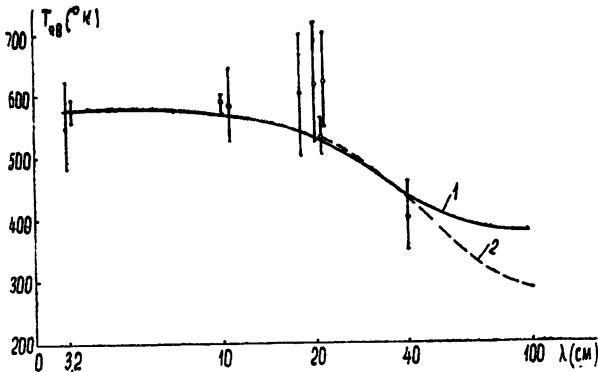


Рис. 6. Расчетный спектр дециметрового радиоизлучения Венеры, окруженной „холодной“ дырчатой ионосферой:

кривая 1—для $b[T_e - T_{\text{п}}(1-R)] = -200^{\circ}\text{К}, zN\nu = 6 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$,
кривая 2—для $b[T_e - T_{\text{п}}(1-R)] = -300^{\circ}\text{К}, zN\nu = 2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$.

Полагая $T_e \approx 300^{\circ}\text{К}$ и $n \approx 3 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, получим $\nu_{en} = 2 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$. При толщине слоя $z = 10 \text{ км}$ это соответствует электронной концентрации в слое

$$N = (1 \div 3) \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}.$$

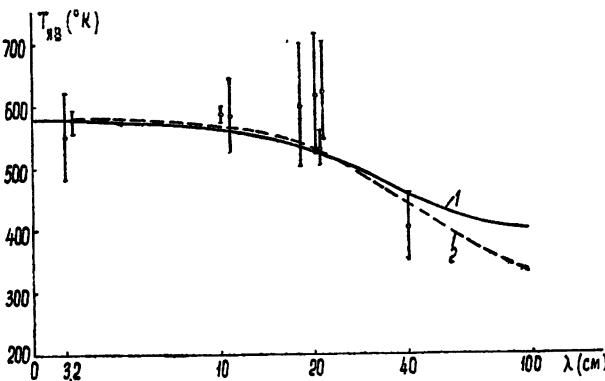


Рис. 7. Расчетный спектр дециметрового радиоизлучения Венеры, окруженной „холодной“ полупрозрачной ионосферой:

кривая 1—для $[T_e - T_{\text{п}}(1-R)] [1 - e^{-\tau_{\omega=0}}] = -20^{\circ}\text{К}, \nu = 5 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$; кривая 2—для $[T_e - T_{\text{п}}(1-R)] [1 - e^{-\tau_{\omega=0}}] = -30^{\circ}\text{К}, \nu = 3 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$.

В случае полупрозрачной ионосферы для согласования с экспериментальными данными необходимая частота соударений

$$\nu = (3 \div 5) \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$$

может быть достигнута лишь в нижних плотных слоях атмосферы планеты. Расчетный спектр радиоизлучения Венеры с полупрозрачной ионосферой, приведен на рис. 7; он также находится в хорошем соответствии с экспериментом.

Для дальнейшего уточнения параметров ионосферы необходимы измерения яркостной температуры Венеры на волнах длиннее 40 см.

1) Измеренное уменьшение яркостной температуры Венеры в миллиметровой части спектра радиоизлучения планеты можно объяснить поглощением в капельно-жидком атмосферном аэрозоле Венеры, находящемся при температуре $\sim 300^{\circ}\text{K}$ и содержащем $0.2 \pm 0.3 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ полярной жидкости с временем релаксации $\sim 3.5 \cdot 10^{-12}$ сек.

2) Такими жидкостями могут быть некоторые функциональные производные метана, этана и бензола, например, CH_3OH , $(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{O}$, $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$.

3) Пылевой аэрозоль, состоящий из горных и вулканических пород, не удовлетворяет наблюдаемому спектру.

4) Атмосфера с капельно-жидким аэрозолем, удовлетворяющим наблюдаемому радиоспектру, является совершенно непрозрачной для инфракрасного и видимого излучений. Поэтому прямая солнечная радиация не может быть источником нагрева поверхности планеты.

5) Измеренное Дрейком уменьшение яркостной температуры Венеры в дециметровом диапазоне волн можно объяснить поглощением в дырчатой или полупрозрачной ионосфере Венеры, имеющей электронную температуру $\sim 300 \pm 400^{\circ}\text{K}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 37, 297 (1960).
2. В. В. Шаронов, Природа планет, Физматгиз, М., 1958.
3. В. Лют, Ann. Obs. Paris, Meudon, 8, 70 (1929).
4. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
5. Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, Б. Г. Кутузов, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1054 (1963).
6. F. D. Drake, Astron. J. 69, 62 (1964).
7. D. D. Thornton, W. J. Welch, Univ. of Calif. Techn. Report, April 16, 1963.
8. V. L. Lyppn, M. L. Meeks, M. D. Sohingian, Astron. J., 68, 284 (1963).
9. D. H. Staelin, A. H. Barreffe, B. R. Kusse, Astron. J., 68, 294 (1963).
10. B. G. Clark, C. L. Spencer, Astron. J., 69, 59 (1964).
11. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1057 (1962).
12. Г. И. Сканави, Физика диэлектриков (область слабых полей), ГИТЛ, М., 1949.
13. К. С. Шифрин, Рассеяние света в мутной среде, ГИТЛ, М., 1951.
14. B. C. Murray, R. L. Wildey, J. A. Westphal, J. Geoph. Res., 68, 4813 (1963).
15. E. Pettit, S. Nicholson, Publ. Astron. Soc. Pacif., 67, 293 (1955).
16. F. D. Drake, Nature, 195, 893 (1962).
17. F. Haddock, J. Dichel, Report to the XIV Gen. Assembly URSI, Tokyo, 1963.
18. E. J. Opik, J. Geophys. Res., 66, 2807 (1961).
19. Р. Л. Ракипова, Тепловой режим атмосферы, Гидрометеоиздат, М., 1957.
20. А. Д. Кузьмин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1090 (1963).

21. P. Kisliuk, C. H. Townes, Molecular Microwave Spectra Tables, Washington, 1952.
 22. C. H. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, La Physique des planètes, XI Colloque Intern. d'astrophys., Univ Liege, 357, 1962.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
3 января 1964 г.

ON VENUS MODEL WITH „COLD“ ABSORBING ATMOSPHERE

A. D. Kusmin

The possibility has been considered of interpretation of the observed spectrum of Venus radio emission in centimetre and millimetre wave bands by the absorption in atmosphere aerosol of the planet. It is shown that the steep slope of millimetre band of the spectrum may be explained by the absorption in trickle-liquid aerosol at temperature $\sim 300^{\circ}$ K and containing $0,2-0,3 \text{ gr. cm}^{-2}$ polar liquid with relaxation time $3,5 \cdot 10^{-12} \text{ sec}$. Such liquids may be functional some derivatives, for example, methane CH_4 , ethane C_2H_6 , benzol C_6H_6 and others. Dust aerosol consisting of rocks and volcanic rocks nature does not satisfy the data experimental

The model of atmosphere yielding radio spectrum observed is shown to be absolutely nontransparent in the infrared and optical region. Therefore a direct solar radiation cannot be the source of surface heating of the planet.

The surface heating by the inner heat of the planet has been considered and the necessary heat flow has been estimated.

The explanation possibility has been given of the measured decrease of the brightness temperature of Venus by the absorption in a relative cold ($\sim 300^{\circ}$) ionosphere of Venus. Both the necessary electron concentration of the hole ionosphere and the collision frequency of semitransparent ionosphere have been estimated.

УДК 523.164.4

О НИЗКОЧАСТОТНОМ СПЕКТРЕ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

С. Я. Брауде, В. В. Вайсберг

Низкочастотный ($\nu < 10 \text{ M} \mu$) спектр космического радиоизлучения рассматривается как результат поглощения синхротронного излучения гало в ионизованном водороде галактического диска. Вследствие неравномерности распределения HII в диске можно ожидать, что отклонение меры эмиссии (характеризующей степень поглощения) в данном направлении от меры эмиссии в других направлениях подчиняется (в пределах диаграммы направленности радиотелескопа) случайному закону. Судя по параметрам распределения меры эмиссии, вычисленных на основе результатов наблюдений [¹⁻⁴], интенсивности космического излучения на частотах $\nu < 10 \text{ M} \mu$, измеренные с помощью антенн различной направленности, могут сильно отличаться одна от другой. Связанные с этим флюктуации должны зависеть от частоты и достигать 37% от интенсивности радиоизлучения гало.

В последние годы появились работы [¹⁻⁴], в которых изучался низкочастотный спектр галактического радиоизлучения вплоть до частот $0.9 \pm 1.5 \text{ M} \mu$. В этих исследованиях было показано, что здесь имеет место излом спектра радиоизлучения, причем в направлении на галактический полюс максимум плотности потока наблюдается на частоте $5 \text{ M} \mu$, а в направлении, близком к диску ($b^{\text{II}} = 20^\circ$, b^{II} — галактическая широта), на частоте $7 \text{ M} \mu$.

Для объяснения излома спектра в [⁵], кроме общепринятого механизма, связанного с поглощением радиоизлучения в слое ионизованного водорода HII [^{6, 7}], была использована гипотеза о необходимости модификации спектра синхротронного излучения на частотах ниже $10 \text{ M} \mu$. Как было показано в [⁸], несколько видоизмененная модель распределения тепловой и нетепловой компонент излучения в Галактическом диске, принятая в работах [^{6, 7}], может быть использована и на частотах ниже $10 \text{ M} \mu$. При этом для объяснения результатов измерений [¹⁻³] нет необходимости привлекать гипотезу о модификации синхротронного спектра.

Однако в работе [⁸], где рассматривалась многослойная модель диска, состоящая из чередующихся слоев синхротронного излучения и поглощения в HII, вычисления были проведены без учета радиоизлучения гало. Хотя относительный вклад в излучение гало и диска твердо не установлен [^{9, 10}], тем не менее существует ряд фактов, на основании которых принято считать, что из гало исходит до 80—90% всего космического радиоизлучения [^{11, 12}]. В связи с этим следует выяснить, в какой мере пригодна многослойная модель [⁸], если учитывать также и излучение гало.

При расчетах введем параметр $\rho = J_{\text{o}r}/J_{\text{o}d}$, где $J_{\text{o}r}$ и $J_{\text{o}d}$ — соответствующие интенсивности для гало и диска в направлении, в котором регистрируется радиоизлучение.

Проведем вычисления для частного вида многослойной модели, полагая, что в диске имеет место полное перемешивание тепловой и не-

тепловой компонент [8]. Обозначая через α спектральный индекс, через I_m плотность потока в максимуме, отвечающем частоте ν_0 , получим [8]

$$\lg \frac{I}{I_m} = (\alpha - 2) \lg \frac{\nu_0}{\nu} + \lg \frac{1 - e^{-\tau} + \rho \tau e^{-\tau}}{1 - e^{-\tau_0} + \rho \tau_0 e^{-\tau_0}}, \quad (1)$$

где τ и τ_0 — оптические толщины для частот ν и ν_0 . При этом τ_0 определяется из уравнения.

$$\frac{1 - e^{-\tau_0} - \tau_0 e^{-\tau_0}(1 - \rho \tau_0)}{1 - e^{-\tau_0} + \rho e^{-\tau_0}} = \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Пользуясь (2), можно по заданному α определить τ_0 для различных ρ и вычислить зависимость $I/I_m = f(\nu_0/\nu)$, которую следует сопоставить с экспериментом [2,3].

Такая зависимость для различных ρ при $\alpha = 0,6$ дана на рис. 1; экспериментальные значения [2] для полюса ($b^H = 90^\circ$) и вблизи диска отмечены соответственно точками и кружками. Как видно из рисунка,

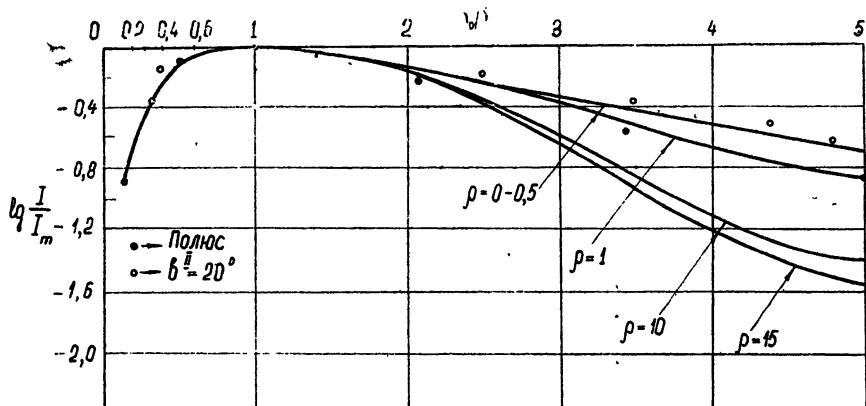


Рис. 1.

многослойная модель не противоречит опытным данным при $\rho \ll 1$ и резко расходится с экспериментом при $\rho \gg 1$ *.

Таким образом, когда нетепловое излучение гало во много раз больше, чем у диска ($\rho \gg 1$), для объяснения результатов работ [1—4] необходимо, если не прибегать к модификации синхронного спектра [5], рассмотреть другую модель. Представляется, что для построения такой модели следует использовать тот факт, что в диске меры эмиссии ME по различным лучам зрения оказывается неодинаковой [13]. Такая модель и будет рассмотрена ниже.

При $\rho \gg 1$ можно, пренебрегая нетепловым излучением диска, рассматривать спектры радиоизлучения, которые приведены в работах [1—3], как результат поглощения синхротронного излучения гало в облаках ионизованного водорода — HII , находящихся в галактическом диске.

О распределении HII в диске известно очень мало. Согласно астрофизическим данным, надежно установленным фактом можно считать лишь наличие областей HII вокруг звезд типа О—В (зоны Стремгрена).

* Этот вывод справедлив не только для рассмотренного частного случая, но и для самого общего случая многослойной модели [6].

Однако в галактическом диске, по-видимому, существуют облака HII , вблизи которых нет горячих звезд типа О—В и где мера эмиссии $ME \ll 300 \div 400$ [14]. Учитывая наличие таких облаков с очень малой ME , которая, однако, вполне достаточна для модификации спектра дискретных источников [13], можно попытаться объяснить низкочастотный спектр галактического радиоизлучения [1-3] неравномерным распределением облаков HII .

К решению этой задачи подойдем, исходя из следующей модели. Будем считать, что хотя HII , заполняя галактический диск, образует один слой, однако мера эмиссии и, следовательно, величина поглощения радиоизлучения в разных направлениях неодинакова.

Пусть доля телесного угла диаграммы направленности радиотелескопа, внутри которого мера эмиссии по лучу зрения заключена в пределах от ME до $ME + d(ME)$, будет определяться по вероятностному закону следующего вида:

$$p(ME) = A(ME)^m e^{-kME}. \quad (3)$$

Здесь m и k — постоянные, которые в дальнейшем будут определены из эксперимента. Как видно из (3), при $ME \rightarrow 0$ и $ME \rightarrow \infty p(ME) \rightarrow 0$; кроме того, $p(ME)$ имеет максимум

$$p(ME)_0 = A \left(\frac{m}{k} \right)^m e^{-m}; \quad (ME)_0 = \frac{m}{k}. \quad (4)$$

Для определения постоянной A воспользуемся условием нормировки:

$$\int_0^{\infty} p(ME) d(ME) = A \int_0^{\infty} x^m e^{-kx} dx = 1.$$

Интеграл, стоящий справа, — табличный [15]

$$\int_0^{\infty} x^{v-1} e^{-\mu x} dx = \frac{\Gamma(v)}{\mu^v};$$

$\Gamma(v)$ — гамма-функция. Таким образом, для A получаем:

$$A = \frac{k^{m+1}}{\Gamma(m+1)}. \quad (5)$$

Плотность потока излучения I_v в направлении, в котором поглощение космического радиоизлучения определяется мерой эмиссии ME :

$$I_v = B v^{-\alpha} e^{-\gamma ME/v^2}, \quad (6)$$

где в соответствии с [16]

$$\gamma \approx \frac{3 \cdot 10^{16}}{T_e^{3/2}} \left[17,7 + \ln \frac{T_e^{3/2}}{v} \right], \quad ME = \int_0^l n_e^2 dl. \quad (7)$$

Здесь T_e — электронная температура, n_e — плотность электронов в cm^{-3} , а l — характерный размер поглощающего слоя в парсеках. Учтем то, что ME различна по разным направлениям, и определим среднюю плотность потока — \bar{I}_v . Для этого усредним I_v по диаграмме направленно-

стей антенны, причем ввиду схематичности расчета формулу диаграммы учитывать не будем. Тогда

$$\bar{I}_v = \int_0^{\infty} I_v p(ME) d(ME).$$

Подставляя $p(ME)$ из (3), A из (5) и I_v из (6), после интегрирования получаем

$$\bar{I}_v = \frac{B v^{-\alpha}}{(1 + \gamma/k v^2)^{m+1}}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что при частоте $v = v_0$ $\bar{I}_v = \bar{I}_m$. Выполняя элементарные вычисления, из (8) находим

$$k = \left[\frac{2(m+1)}{\alpha} - 1 \right] \frac{\gamma}{v_0^2}; \quad (9)$$

$$\bar{I}_m = \frac{B v_0^{-\alpha}}{(1 + \gamma/k v_0^2)^{m+1}}. \quad (9a)$$

Так как из опыта известны величины α (в настоящей работе всюду $\alpha = 0,6$) и v_0 , то из формул (8), (9) и (9a) можно вычислить величину \bar{I}_v / \bar{I}_m для различных значений параметра m :

$$\begin{aligned} \lg \frac{\bar{I}_v}{\bar{I}_m} &= \alpha \lg \frac{v_0}{v} + (m+1) \left\{ \lg \frac{2(m+1)}{\alpha} - \right. \\ &\quad \left. - \lg \left[\frac{2(m+1)}{\alpha} - \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Это позволяет сравнить полученную формулу (10) с данными работ [2-3].

Результаты сравнения приведены на рис. 2, где дана зависимость $\bar{I}_v / \bar{I}_m = f(v_0/v)$, вычисленная из (10), для двух значений параметра $m = 0,34$ и $1,00$. Экспериментальные величины показаны кружками для $b^{II} = 20^\circ$ и точками для $b^{II} = 90^\circ$. Подставляя полученные значения m

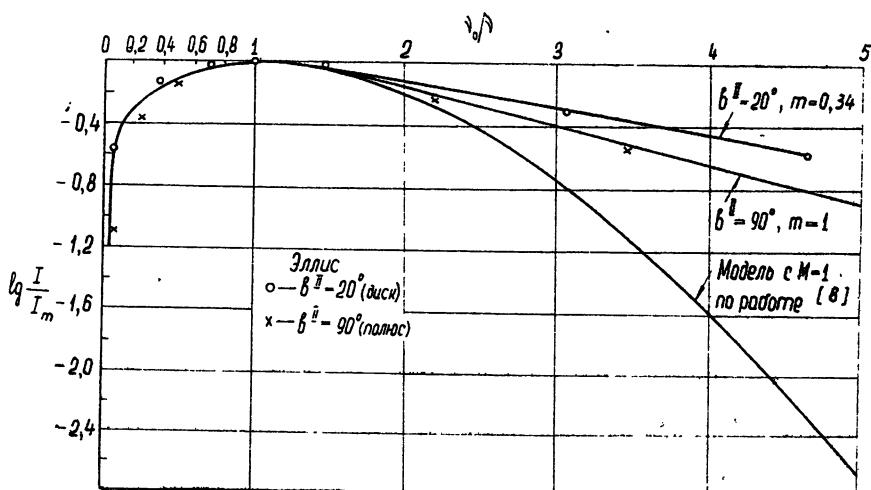


Рис. 2.

в формулу (9), находим соответствующие величины k ; тем самым выбранный закон распределения (3) определен полностью.

Вид этого распределения для двух направлений $b^H = 90^\circ$ и $b^H = 20^\circ$ (в плоскости, проходящей через центр Галактики) показан на рис. 3.

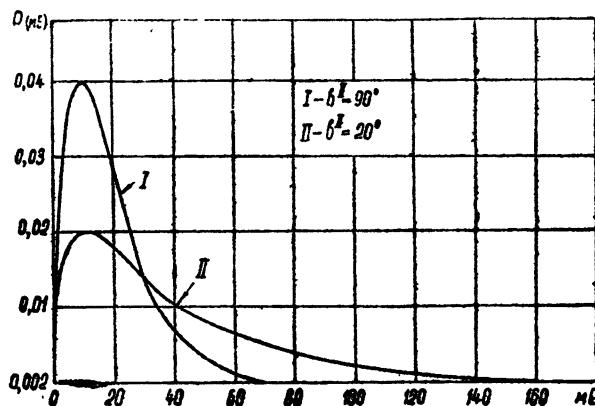


Рис. 3.

Отчетливо видно, что для направления $b^H = 20^\circ$ возрастает вероятность наличия поглощения, связанного с большими значениями меры эмиссии ($ME \geq 30$). Данные таблицы 1* показывают, что в основном увеличение

Таблица 1

b^H	α	$T_e(^{\circ}\text{К})$	m	$(\frac{v_0}{M^2 \text{с}})$	γ	l	k	ME	σ_{ME}	$(\frac{v_0}{v})_m$	$(\frac{\sigma}{\sigma_0})_m$	$\frac{\sigma_0}{I_0}$	$\frac{\sigma_{\max}}{I_0}$	l (парsec)	\bar{n}_e (эл. см^{-3})
20	0,6	10^4	0,34	7	$4,7 \cdot 10^{11}$	0,035	34	0,86	—	—	—	0,1	—	900	0,19
90	0,6	10^4	1	5	$4,8 \cdot 10^{11}$	0,11	18	0,71	2,5	2,35	0,16	0,37	300	0,25	

меры эмиссии связано только с большей протяженностью диска в этом направлении, но не ростом средней концентрации электронов \bar{n}_e к центру Галактики, обнаруженной в [17].

Это, очевидно, обусловлено тем, что широта $b^H = 20^\circ$ еще велика для обнаружения указанного эффекта.

Как видно из рисунка, совпадение расчета с экспериментом вполне удовлетворительное. Следует отметить, что для двух экспериментальных кривых численно выполняется соотношение

$$m = l_0/l,$$
 (11)

где l_0 и l — длины, характерные для поглощающего слоя (см. рис. 4).

* Значения \bar{n}_e получены в предположении однородной модели распределения НII, которая, вообще говоря, не однозначно следует из данных [1—4]. Альтернативой является «клочковатое» распределение ионизованного водорода с единственным требованием экранизации диаграммы направленности в любом направлении. Ясно, что значения массы ионизированного водорода по лучу зрения в той и другой модели могут существенно различаться.

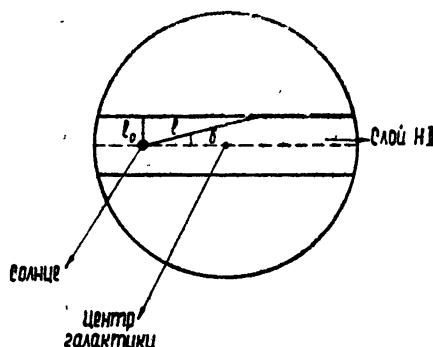


Рис. 4.

Интересно выяснить, сохраняется ли зависимость (11) и для других галактических широт. Это можно будет определить, проведя соответствующие эксперименты.

Вычислим теперь флюктуации плотности среднего потока. Для этого найдем \bar{I}_v^2 и $\sigma_1 = \sqrt{\bar{I}_v^2 - (\bar{I}_v)^2}$. По определению,

$$\bar{I}_v^2 = \int_0^\infty I_v^2 p(ME) d(ME).$$

Подставляя ME из (3), A из (5) и I_v из (6), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{I}_v^2 &= B v^{-2\alpha} / \left(1 + \frac{2\gamma}{kv^2} \right)^{m+1}; \\ \sigma_1 &= B v^{-\alpha} \sqrt{\frac{1}{(1 + 2av_0^2/v^2)^{m+1}} - \frac{1}{(1 + av_0^2/v^2)^{2(m+1)}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$a = \frac{\gamma}{kv_0^2} = \frac{1}{2(m+1)/\alpha - 1}. \quad (13)$$

Удобно определить относительную величину дисперсии σ_1/σ_0 , где σ_0 — дисперсия на частоте $v = v_0$:

$$\sigma_0 = B v_0^{-\alpha} \sqrt{\frac{1}{(1 + 2a)^{m+1}} - \frac{1}{(1 + a)^{2(m+1)}}}. \quad (12a)$$

Разделив (12) на (12a), получаем:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^\alpha \sqrt{\frac{\frac{1}{(1 + 2av_0^2/v^2)^{m+1}} - \frac{1}{(1 + av_0^2/v^2)^{2(m+1)}}}{\frac{1}{(1 + 2a)^{m+1}} - \frac{1}{(1 + a)^{2(m+1)}}}}. \quad (14)$$

Формулы (12) и (14) дают зависимость дисперсии от частоты. На рис. 5 приведена зависимость $\sigma_1/\sigma_0 = f(v_0/v)$ при $m = 1$. Как видно из рисунка, величина $(\sigma_1/\sigma_0)_{\max} = 2,35$ имеет место при $(v_0/v)_{\max} \approx 2,5$. При $v_0/v \ll 2,5$ и при $v_0/v \gg 2,5$ отношение σ_1/σ_0 заметно уменьшается. Величина σ_0 зависит от B (формула (12a)), которую определить весьма трудно, в связи с чем желательно исключить ее из вычислений. Для этого определим σ_0 в долях потока излучения, который падает из гало на диск: $I_0 = B v_0^{-\alpha}$. Обозначая через δ отношение σ_0/I_0 , получаем из (12a):

$$\frac{\sigma_0}{I_0} = \sqrt{\frac{1}{(1 + 2a)^{m+1}} - \frac{1}{(1 + a)^{2(m+1)}}}. \quad (15)$$

Определяя из (15) δ , а из (14) $\sigma_1/\sigma_0 = f(v_0/v)$, можно найти величину $(\sigma_1/I_0)_{\max}$. Как будет показано ниже, эта величина может оказаться весьма значительной (см. таблицу 1).

Таким образом, для принятой модели могут иметь место большие флюктуации плотности потока излучения. Этот вывод может быть проверен экспериментально. При постановке опытов по наблюдению флюктуаций интенсивности космического фона необходимо устраниć флюктуации ионосферного происхождения. Поэтому указанные эксперименты следует проводить в условиях, когда прием космического фона осуществляется за пределами ионосферы. Возможность таких измерений на

низких радиочастотах является в настоящее время вполне реальной. Некоторые вопросы, связанные с такими экспериментами, рассмотрены в работе [18].

Перейдем теперь к вычислению среднего значения и относительной дисперсии меры эмиссии. По определению,

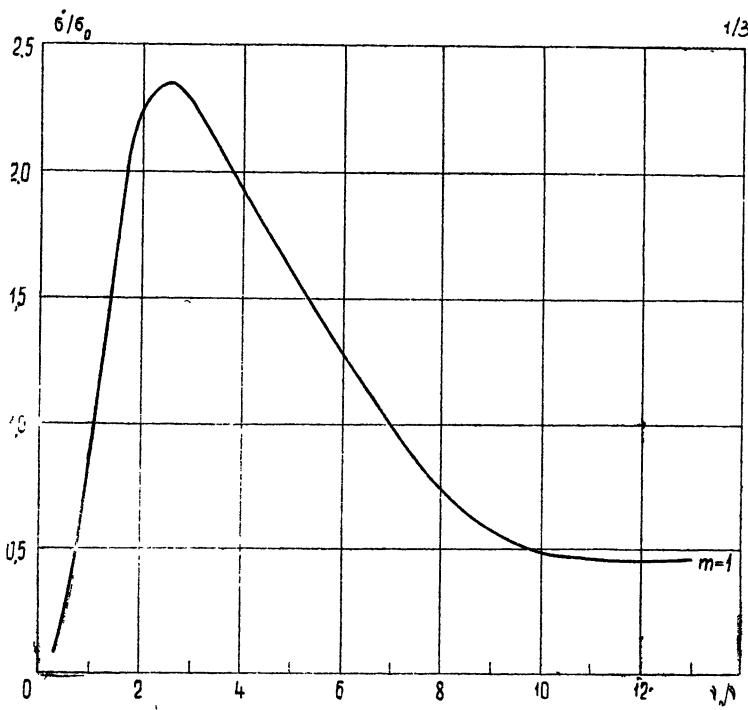


Рис. 5.

$$\overline{ME} = \int_0^{\infty} ME p(ME) d(ME); \quad \overline{ME^2} = \int_0^{\infty} (ME)^2 p(ME) d(ME);$$

$$\sigma_{ME} = \sqrt{\frac{\overline{ME^2} - (\overline{ME})^2}{\overline{ME}}}.$$

Подставляя в эти выражения $p(ME)$ из (3) и воспользовавшись рекуррентной формулой для гамма-функции: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, получаем:

$$\overline{ME} = \frac{m+1}{k}; \quad \overline{ME^2} = \frac{(m+1)(m+2)}{k^2}; \quad \sigma_{ME} = \frac{1}{\sqrt{m+1}}. \quad (16)$$

Пользуясь этими формулами, можно рассчитать ряд величин, некоторые из которых приведены в таблице 1. Как следует из таблицы, средняя мера эмиссии для полюса ($b'' = 90^\circ$) равна 18, а для $b'' = 20^\circ$ составляет 34. Интересно сравнить \overline{ME} с тем значением меры эмиссии $(ME)_{\text{oo}}$, которое получилось бы для однослойной модели с постоянной плотностью электронов n_e . Для такого случая кривая частотного хода приведена на рис. 2. Как видно из рисунка, при $n_e = \text{const}$ расчетные и экспериментальные кривые частотного хода для I_s/I_n сильно расходятся.

Для вычисления $(ME)_{00}$ воспользуемся формулой работы [19]:

$$(ME)_{00} = 1,15 \alpha v_0^2. \quad (17)$$

Здесь v_0 — частота максимума плотности потока в мегагерцах. При $\alpha = 0,6$ для $v_0 = 7 \text{ МГц}$ $(ME)_{00} = 34$, а для $v_0 = 5 \text{ МГц}$ $(ME)_{00} = 17$. Эти числа совпадают с соответствующими \bar{ME} (см. таблицу 1).

Таким образом, несмотря на различие моделей, меры эмиссии, характеризующие интегральное поглощение в ионизованном водороде, оказываются одинаковыми, в то время как частотный ход интенсивности радиоизлучения обеих моделей сильно отличается друг от друга. Вместе с тем оказывается, что относительная дисперсия меры эмиссии велика; так, для $b^H = 20^\circ$ $\sigma_{ME} = 0,86$. Как уже отмечалось выше, весьма значительными оказываются и флюктуации интенсивности радиоизлучения, которые для $b^H = 90^\circ$ могут достигать 37% потока, приходящего из гало.

Определим теперь по \bar{ME} среднюю плотность электронов в диске. Полагая, что полуширина галактического диска $l_0 = 300 \text{ парсек}$, получаем для $b^H = 90^\circ$ $n_e \approx 0,25 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$, а при $b^H = 20^\circ$ и $l \approx 900 \text{ парсек}$, $n_e \approx 0,19 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$. Хотя полученные плотности электронов в диске довольно большие, они мало отличаются от тех, которые получены в работах [5, 8].

Как следует из вышеизложенного, рассмотренная модель (синхротронное излучение гало и поглощение в облаках HII, находящихся в диске Галактики) позволяет объяснить результаты работ [1–3] и для случая $\rho \gg 1$, не прибегая к гипотезе об изломе спектра синхротронной компоненты радиоизлучения [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. G. R. A. Ellis, J. Geophys. Res., **62**, 229 (1957).
2. G. R. A. Ellis, M. D. Waterworth, M. Bessel, Nature, **196**, 1079 (1962).
3. G. R. A. Ellis, R. J. Green, Austral. J. Phys., Preprint University of Tasmania.
4. G. R. A. Ellis, Austral. J. Phys., Preprint University of Tasmania.
5. F. Hoyle, G. R. A. Ellis, Austr. J. Phys., **16**, 1 (1963).
6. C. Westerhout, Bull. Astr. Inst. Nether., **14**, 215 (1958).
7. M. M. Komesaroff, Austral. J. Phys., **14**, 515 (1961).
8. С. Я. Брауде, В. В. Вайсберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, 193 (1964).
9. И. С. Шкловский, Космическое радиоизлучение, ГИТЛ, М., 1956.
10. Herstmonceaux Conference, The Observatory, **83**, № 935, 150 (1963).
11. B. Y. Mills, Paris Symp. on Rad. Astron. Stanford University Press, 1959, p. 442.
12. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, Происхождение космических лучей, изд. АН СССР, М., 1963.
13. Л. Л. Базелян, С. Я. Брауде, Ю. М. Брук, И. Н. Жук, А. В. Мень, Б. П. Рябов, Л. Г. Содин, Н. К. Шарыкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 897 (1963).
14. Г. ван де Хюлст, Космическая газодинамика, ИЛ, М., стр. 326, 1960.
15. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М., 1960.
16. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
17. G. Westerhout, BAN, **14**, 488, 215 (1958).
18. Е. А. Бенедиктов, Г. Г. Гетманцев, В. Л. Гинзбург, Искусствен. спутник Земли, № 7, 3 (1961).
19. С. Я. Брауде, ДАН УССР, № 2, 193 (1963).

ON LOW-FREQUENCY SPECTRUM OF COSMIC RADIO EMISSION

S Ya Braude, V. V. Vaysberg

Low-frequency spectrum ($\nu < 10$ Mc/s) of cosmic radio emission is considered as a result of absorption of the synchrotron halo radiation in the ionized hydrogen of a galactic disk. Due to the irregular distribution of HII in the disk one may expect the deviation of the emission index (characterizing the absorption level) in the given direction from the emission index in the other ones varies according to random law (within the radiation pattern of radio telescope). Parameters of the emission index distribution computed on the basis of the observation results (1-4) testify that the intensities of cosmic radiation at the frequencies $\nu < 10$ mc/s measured by the antennae of different directivity may greatly differ from each other. Therefore the fluctuations have to depend upon the frequency and to reach 37% of the intensity of halo radio emission,

УДК 621.371.3

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИЛЬНЫХ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

Э. И. Гинзбург

Рассмотрено распространение очень сильных радиоволн в нижней ионосфере. Получены формулы для изменения амплитуды напряженности поля волны по мере ее проникновения в слабо ионизированную плазму.

Вопрос о «самовоздействии» сильных радиоволн в ионосфере подробно рассмотрен в работах Гуревича [1, 2] на основе совместного рассмотрения решения нелинейного волнового уравнения в приближении геометрической оптики и выражений «элементарной теории» для диэлектрической проницаемости ϵ и проводимости σ плазмы. При этом расчет коэффициента самовоздействия приводит, как правило, к необходимости численного интегрирования. Ниже мы остановимся подробнее на распространении в нижней ионосфере таких радиоволн, напряженность поля которых значительно превышает некоторое характерное плазменное поле E_p (см. [3]).

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Обычным путем из системы уравнений Максвелла получаем уравнение для электрического поля волны:

$$\nabla^2 E - \text{grad div } E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_t}{\partial t}. \quad (1)$$

В уравнении (1) вектор полного тока

$$j_t = e \int v f(t, r, v) dv, \quad (2)$$

где e — заряд электрона, $f(t, r, v)$ — функция распределения электронов, удовлетворяющая уравнению Больцмана.

В ионосфере для радиодиапазона время $\tau_E \sim 1/\omega$, в течение которого существенно изменяется поле волны, как правило, много меньше характерного временного параметра плазмы — времени релаксации энергии электрона $\tau_p \sim 1/\delta\nu$ (здесь ν — частота соударений электрона с тяжелыми частицами плазмы, δ — доля энергии электрона, теряемая им при одном столкновении). Это означает, что параметры среды не успевают изменяться столь же быстро, как и поле волны. Функция распределения устанавливается на некотором среднем, не зависящем от времени значении f_0 , амплитуды отклонений от которого малы (порядка δ и $\delta\nu/\omega$).

Для слабо ионизированной однородной плазмы, т. е. для такой плазмы, где частота соударений электрона в основном определяется столкновениями с молекулами, для функции распределения f_0 при наличии высокочастотного поля $E = E_0 e^{i\omega t}$ можно записать (см. [4]):

$$f_0 = C \exp \left\{ - \int_v^v \frac{mv dv}{kT + (e/3v\delta) \operatorname{Re}(E^* u)} \right\}. \quad (3)$$

Здесь C — постоянная нормировки, k — постоянная Больцмана, T — температура тяжелых частиц плазмы, m — масса электрона, v — скорость направленного движения электронов, определенная уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v(v)v = \frac{eE}{m} + \frac{e}{mc} [vH^0], \quad (4)$$

где H^0 — постоянное магнитное поле Земли.

При произвольной поляризации поля E , разлагая его по трем основным направлениям поляризации, имеем:

$$\text{Re}(E^*v) = \frac{e v}{m} \left[\frac{E_{||}^2}{\omega^2 + v^2} + \frac{2(E_{\perp}^+)^2}{(\omega + \omega_H)^2 + v^2} + \frac{2(E_{\perp}^-)^2}{(\omega - \omega_H)^2 + v^2} \right], \quad (5)$$

где $E_{||}$ — плоско поляризованное поле с $E_{||} \parallel H^0$, E_{\perp}^+ , E_{\perp}^- — поля, поляризованные по кругу в плоскости, перпендикулярной H^0 , и врачающиеся в направлении, совпадающем (—) и противоположном (+) направлению вращения электрона в магнитном поле, $\omega_H = |e|H^0/mc$ — гирочастота. При заданной поляризации поля для f_0 справедливо выражение

$$f_0 = C \exp \left\{ - \int_0^x \frac{x dx}{1 + \gamma^2(\varphi^2 + \alpha^2 x^2)^{-1}} \right\}, \quad (6)$$

в котором $x = v/\beta$, $\beta^2 = kT/m$. Для случая поляризации в плоскости, перпендикулярной H^0 ,

$$\gamma^2 = \frac{2e^2 E_0^2}{3m \delta \omega^2 \beta^2} = \frac{2e^2 E_0^2}{3m \delta \omega^2 kT}, \quad \alpha^2 = \frac{(\pi \alpha^2 N_m)^2 \beta^2}{\omega^2}, \quad \varphi^2 = \frac{(\omega \pm \omega_H)^2}{\omega^2}, \quad (7)$$

для случая плоскополяризованного поля γ^2 уменьшится в два раза и φ^2 станет равным единице.

При записи соотношения (6) учтено, что в нижней ионосфере

$$v(v) = \pi \alpha^2 N_m v, \quad \pi \alpha^2 = 4,4 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$$

(здесь N_m — концентрация молекул). Функцию потерь $\delta(v)$ для нижней ионосферы можно считать приблизительно постоянной и равной $1,6 \cdot 10^{-3}$ (см. [5]).

Выполнив интегрирование в (6), получим

$$f_0 = C \exp \left\{ - \frac{x^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2 \alpha^2} \ln \left(1 + \frac{\alpha^2 x^2}{\varphi^2 + \gamma^2} \right) \right\} = C \left(1 + \frac{\alpha^2 x^2}{\varphi^2 + \gamma^2} \right)^{\gamma^2/2\alpha^2} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{x^2}{2} \right\}. \quad (8)$$

Из этого выражения следует, что вплоть до скоростей $v \leq \beta \gamma / \alpha$ при условии

$$\gamma^2 \gg \varphi^2 \quad (9)$$

(что эквивалентно условию $E \gg E_p$) допустимо представление функции распределения в виде

$$f_0 = C \exp \left\{ - \frac{\varphi^2}{2 \gamma^2} x^2 - \frac{\alpha^2}{4 \gamma^2} x^4 \right\}. \quad (10)$$

Приведенное значение f_0 может с достаточной точностью применяться для тех задач, где рассматриваются величины, усредненные по всему диапазону скоростей. Действительно, рассматривая функцию распределения (10), замечаем, что она существенно отлична от нуля в области скоростей от нуля до $v_c = x_c \beta$, где

$$x_c^2 = \frac{-\varphi^2 + \sqrt{\varphi^4 + 4\gamma^2\alpha^2}}{\alpha^2}; \quad (11)$$

для скоростей $v > v_c$ функция распределения резко (экспоненциально) падает. Но при условии (9) предельная скорость $v \sim \gamma\beta/\alpha$, до которой еще справедливо представление f_0 в виде (10), значительно больше v_c .

Поскольку μ и f_0 в (1) зависят от E , то уравнение (1) является нелинейным интегро-дифференциальным уравнением относительно напряженности электрического поля волны. В общем случае параметры среды зависят от времени, в силу чего при распространении волны частоты ω будут возникать обертоны. Однако в первом приближении относительно δ и $\delta\omega/\omega$ можно выделить основную гармонику электрического поля E , удовлетворяющую уравнению (1), но с тем существенным отличием, что f_0 в выражении для j_t зависит лишь от амплитуды E (см. [2]). Обертоны поля E имеют амплитуду порядка $\frac{\delta\omega}{\omega}$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением частных случаев поляризации волны:

а) волна плоско поляризованная, с вектором E , совпадающим по направлению с постоянным магнитным полем H^0 (поперечное распространение, ось $z \perp H^0$);

б) волна, поляризованная по кругу в плоскости, перпендикулярной H^0 (продольное распространение, ось $z \parallel H^0$). В последнем случае распространение обычновенной и необыкновенной волн будет рассматриваться нами раздельно.

В этих случаях система (1) сводится к одному уравнению

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon'(|E|, z) E = 0 \quad (12)$$

с граничным условием $E(z=0) = E_0$ ($z=0$ — граница плазмы). Здесь $\epsilon'(|E|, z) = \epsilon - i4\pi\sigma/\omega = (n - ix)^2$ — комплексная диэлектрическая проницаемость, n — показатель преломления, x — показатель поглощения.

Воспользовавшись соотношением (см. [3])

$$j_t = \sigma E + i\omega \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E = -\frac{4\pi e}{3} \int_0^\infty uv^3 \frac{\partial f_0}{\partial v} dv, \quad (13)$$

для ϵ' получаем

$$\epsilon'(|E|, z) = 1 + \frac{4\pi\beta^3}{3N} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{\varphi + i\alpha x}{\varphi^2 + \alpha^2 x^2} x^3 \frac{\partial f_0}{\partial x} dx, \quad (14)$$

где N — концентрация электронов, $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N / m$ — плазменная частота. Используя функцию распределения (10), выражение (14) можно несколько упростить:

$$\epsilon'(|E|, z) = 1 - \frac{4\pi\beta^3}{3N\gamma^2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int_0^\infty (\varphi + i\alpha x) x^4 f_0 dx. \quad (15)$$

Если свойства среды меняются достаточно медленно, решение уравнения (12) в приближении геометрической оптики можно записать так:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{\epsilon'(|E|, z)}} \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} \int_0^z V \epsilon'(|E|, z) dz \right\}. \quad (16)$$

Здесь мы ограничились волной, распространяющейся по оси z . Помимо обычного условия приближения геометрической оптики (см. [6]) $\frac{\lambda}{4\pi(\epsilon')^{3/2}} \frac{d\epsilon'}{dz} \ll 1$ в случае распространения сильной волны необходимо выполнение условия $x/n \ll 1$, т. е. необходимо, чтобы амплитуда поля E мало изменялась на длине волны.

Следует также отметить, что для расчета $\epsilon'(|E|, z)$ была использована функция распределения f_0 , являющаяся решением кинетического уравнения для однородной плазмы. При рассмотрении неоднородной среды предполагается, что свойства среды локальны, т. е. что плотность тока j_t в данной точке определяется полем в той же точке. Для случая сильных полей это справедливо, если амплитуда поля слабо меняется на длине релаксации для энергии $l/V\delta$ (l — длина свободного пробега электрона в плазме).

2. ЭФФЕКТ «САМОВОЗДЕЙСТВИЯ» СИЛЬНОЙ ВОЛНЫ

Используя то обстоятельство, что $\epsilon'(|E|, z)$ зависит только от $|E|$, из уравнения (16) для амплитуды поля имеем

$$|E| = E_0 \exp \left\{ -\frac{\omega}{c} \int_0^z x(|E|, z) dz \right\}. \quad (17)$$

Здесь пренебрежено влиянием на поглощение множителя $(\epsilon')^{-1/4}$. Методы численного интегрирования уравнения (17) развиты в работе [1]. Однако можно выделить два предельных случая, при которых это уравнение имеет решение в явном виде.

$$1) \quad \varphi^4 \ll 4\gamma^2\alpha^2. \quad (18)$$

Этот случай сравнительно легко реализуется для необыкновенной волны на частотах ω , близких к ω_H , причем условие (18) является в этом случае фактически условием гирорезонанса. Для обыкновенной волны и в случае поперечного распространения соблюдение условия (18) требует очень больших напряженностей поля, тем больших, чем выше частота волны. При этом следует иметь в виду, что в том случае, когда основную роль играют соударения с молекулами, необходимо соблюдение условия [4]

$$\delta(\gamma\alpha)^{1/2} \ll 1. \quad (19)$$

Для функции распределения можно записать

$$f_0 = \frac{N \beta^{-3}}{\pi \Gamma(3/4)} \left(\frac{\alpha}{2\gamma} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 x^4}{4\gamma^2} \right\}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в выражение для комплексной диэлектрической проницаемости (15), получаем

$$\epsilon'(|E|, z) = 1 - 0,49 \frac{\varphi}{\gamma\alpha} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - i 0,68 \frac{1}{(\gamma\alpha)^{1/2}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (21)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае условие геометрического приближения нарушается в области, где мнимая часть выражения (21) порядка единицы (при этом нарушаются условие применимости приближения геометрической оптики для сильной волны). Ниже области отражения, т. е. при $0,68 (\gamma\alpha)^{-1/2} \omega_0^2 \omega^{-2} \ll 1$, показатель поглощения и показатель преломления имеют вид:

$$n = 1 + 0,1 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{\gamma\alpha} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 4,25 \varphi \right), \quad \kappa = 0,34 \frac{1}{(\gamma\alpha)^{1/2}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (22)$$

$$2) \quad \varphi^4 \gg 4 \gamma^2 \alpha^2. \quad (23)$$

Этот случай легко реализуется для частот $\omega \gg \omega_H$. При $\omega \approx \omega_H$ для обыкновенной волны условие (23) плохо соблюдается в нижней части ионосферы. Ясно, что для необыкновенной волны при $\omega \approx \omega_H$ условие (23) не выполняется. В рассматриваемом случае

$$f_0 = N \beta^{-3} \left(\frac{\varphi^2}{2 \pi \gamma^2} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{\varphi^2}{2 \gamma^2} x^2 \right\}; \quad (24)$$

$$\varepsilon'(|E|, z) = 1 - \frac{1}{\varphi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - i \frac{2,14}{\varphi^3} \gamma\alpha \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (25)$$

Область отражения определяется условием $\omega_0^2 / \varphi \omega^2 \sim 1$. Ниже области отражения, т. е. при $\omega_0^2 / \varphi \omega^2 \ll 1$, показатель преломления и показатель поглощения

$$n \approx 1 - \frac{1}{\varphi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \kappa \approx \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\gamma\alpha}{\beta^3}. \quad (26)$$

Как уже отмечалось выше, в рассмотренных двух предельных случаях можно записать решение уравнения (17) в явном виде. Для этого используем то обстоятельство, что зависимость κ от γ имеет вид

$$\kappa = \varphi(z) \gamma^y, \quad (27)$$

где $\varphi(z) = 0,34 \omega_0^2 \omega^{-2} \alpha^{-1/2}$, $y = -1/2$ для первого случая (18) и $\varphi(z) = \omega_0^2 \alpha / \omega^2 \varphi^3$, $y = 1$ для второго случая (23).

Для зависимости κ от γ вида (27) решение уравнения (17)

$$\gamma(z) = \gamma_0 \left[1 + y \gamma_0^y \frac{\omega}{c} \int_0^z \varphi(z) dz \right]^{-1/y}. \quad (28)$$

В первом предельном случае

$$\gamma(z) = \gamma_0 \left(1 - \frac{0,17}{\omega c} \gamma_0^{-1/2} \int_0^z \omega_0^2 \alpha^{-1/2} dz \right)^2; \quad (29)$$

во втором предельном случае

$$\gamma(z) = \gamma_0 \left(1 + \frac{\gamma_0}{\omega c \varphi^3} \int_0^z \omega_0^2 \alpha dz \right)^{-1}. \quad (30)$$

Отметим, что представление решения уравнения (17) в виде (29), (30), т. е. через безразмерный параметр γ , возможно лишь при постоянном значении β вдоль пути распространения волны. В противном случае

необходимо переписать соотношение (28) непосредственно для амплитуды волны:

$$E(z) = E_0 \left[1 + y \gamma_0^y \frac{\omega}{c} \int_0^z \varphi(z) dz \right]^{-1/y}. \quad (31)$$

Для радиоволн достаточно низких частот (при соблюдении условия $\delta\gamma/\omega \ll 1$) применение полученных соотношений для расчета затухания волны связано с необходимостью «сшивания» их в некоторой переходной области. Для малых высот ионосферы выполнение предельного условия (18) возможно не только для необыкновенной волны с частотой, близкой к гирочастоте, но и для обыкновенной волны, а также в случае поперечного распространения волны. По мере проникновения в ионосферу γ падает и с некоторых высот становится выполнимым второе предельное условие (23).

Оценки, использующие непосредственно функцию распределения (10), показывают, что наименьшую погрешность «сшивание» вносит в области, где $\gamma \approx \varphi^2$, когда использование соотношений (29) — (30) дает неточность порядка 25 — 30 %. Если переходная область достаточно велика, то из-за накопления ошибки расхождение может быть большим. Однако можно показать, используя выражение (11), что переход-

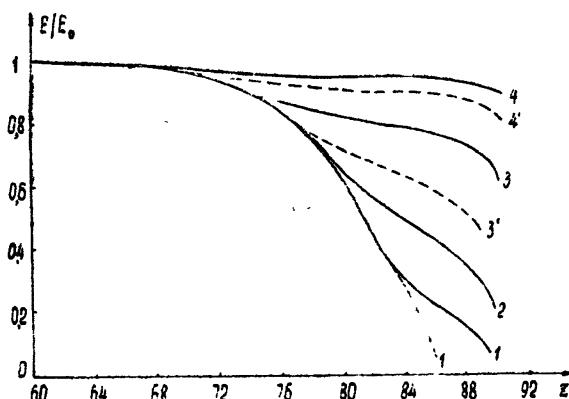


Рис. 1. Зависимость амплитуды поля волны $E(z)$. Сплошные кривые 1, 2, 3, 4 — частоты ω_H , $2\omega_H$, $5\omega_H$, $10\omega_H$, соответственно (обыкновенная волна), пунктирные кривые 1', 3', 4' — частоты ω_H , $5\omega_H$, $10\omega_H$ (необыкновенная волна).

ная область — порядка нескольких длин волн (во всяком случае для значений γ и φ на рис. 1). Относительная погрешность $\gamma(z)$ при использовании (30) (за счет ошибки в определении γ_0 в переходной области) остается приблизительно постоянной по мере проникновения волны в плазму:

$$\frac{\Delta\gamma(z)}{\gamma(z)} \approx \frac{\Delta\gamma_0}{\gamma_0}.$$

Для определенной модели ионосферы, представленной в таблице 1 (данные взяты из [7]) была рассчитана зависимость $E(z)$ для разных частот.

Таблица 1

z (км)	60	64	68	72	76	80	84	88	92
$N_m \cdot 10^{-14}$	65	44	30	14	7	3,5	2,5	1,8	1,2
$N \cdot 10^{-2}$	0,05	0,26	0,87	1,7	2,83	4,5	8,05	34,7	250

Результаты расчета представлены на рис. 1. Сплошные кривые относятся к обыкновенной волне (кривым 1, 2, 3, 4 соответствуют частоты ω_H , $2\omega_H$, $5\omega_H$, $10\omega_H$), пунктируемые кривые относятся к необыкновенной волне (кривым 1', 3', 4' отвечают частоты ω_H , $5\omega_H$, $10\omega_H$). Для волны любой частоты напряженность поля E_0 на границе плазмы выбрана одна и та же.

Анализируя соотношения (29)–(30) и кривые рис. 1, можно сделать следующие выводы.

1) При условии $\varphi^2 < \gamma\alpha$ частотная зависимость поглощения выражена очень слабо; для обыкновенной и необыкновенной волн имеет место своеобразное вырождение — они отличаются только поляризацией (противоположным вращением вектора поля).

2) При этом же условии $\varphi^2 < \gamma\alpha$ проникающая способность волны (отношение E/E_0) с увеличением E_0 возрастает (см. рис. 2).

3) При условии $\varphi^2 > \gamma\alpha$ с увеличением E_0 проникающая способность волны падает, а с увеличением частоты возрастает (см. рис. 2).

4) При этом же условии $\varphi^2 > \gamma\alpha$, т. е. когда частотная зависимость поглощения волны выражена достаточно ярко, кривые рис. 1 подтверждают и такие обычные следствия распространения радиоволн, как более резкий характер поглощения необыкновенной волны по сравнению с обыкновенной, уменьшение поглощения волны и уменьшение различия в распространении обыкновенной и необыкновенной волн с увеличением частоты.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. М. Виленскому за обсуждение настоящей работы, ценные советы и замечания, а также О. М. Грехову за проведение расчетов и построение графиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гуревич, Радиотехника и электроника, 1, 704 (1956)
2. А. В. Гуревич, Диссертация, ФИАН, М., 1957.
3. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, 201, 395 (1960)
4. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 30, 1112 (1956).
5. А. В. Гуревич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 355 (1959).

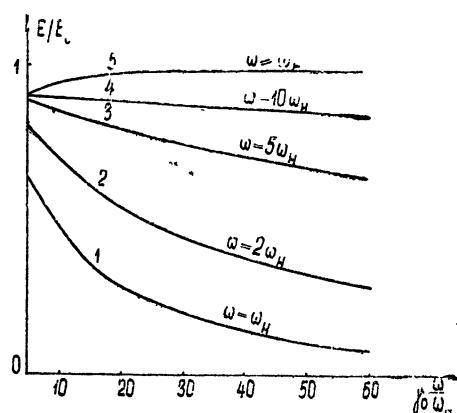


Рис. 2. Схематические кривые зависимости E/E_0 от E_0 для двух случаев: 1) $\varphi^2 > \gamma\alpha$ (кривые 1, 2, 3, 4, частоты указаны на кривых), 2) $\varphi^2 < \gamma\alpha$ (кривая 5).

6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз,
М., 1960.
7 Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн в ионосфере, изд. АН СССР, М.,
1960.

Поступила в редакцию
15 января 1964 г.

TO THE HIGH POWER RADIOWAVES PROPAGATION IN IONOSPHERE

E. I. Ginzburg

The propagation has been considered of high power radiowaves in the lower ionosphere. The formulae have been obtained for the amplitude of the wave field intensity as it penetrates into weakly ionized plasma.

УДК 538.566

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ВБЛИЗИ КАУСТИКИ

Ю. А. Кравцов

При помощи одной из модификаций метода геометрической оптики найдено асимптотическое решение уравнений Максвелла вблизи каустики, образующейся при распространении волны в неоднородной среде. Модификация метода состоит в том, что решение представляется в виде комбинации экспоненциальной функции и функции Эйри (а также ее производной). Получены уравнения для амплитуды электрического и магнитного поля и для угла поворота плоскости поляризации. Указана связь этих уравнений с обычными уравнениями метода геометрической оптики.

Как известно, решение скалярного волнового уравнения по методу геометрической оптики теряет силу вблизи каустики, на которой амплитуда нулевого приближения A_0 обращается в бесконечность. Той же особенностью обладает и полученное в приближении геометрической оптики решение уравнений Максвелла [1]. В работе [2] для скалярного волнового уравнения было показано, как следует видоизменить обычный метод геометрической оптики для того, чтобы устранить расходимость амплитуды нулевого приближения на каустике, сохранив в то же время луневые представления. В данной работе аналогичное видоизменение проводится для получения асимптотического решения уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E - ikH &= 0, \\ \operatorname{rot} H + ik\varepsilon E &= 0 \quad k = \frac{\omega}{c}. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагая гармоническую зависимость электрического и магнитного полей от времени, будем искать решение уравнений (1) в виде

$$\begin{aligned} E &= \left[Aw(k^{2/3}\psi_1) - \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} Cw'(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_2}; \\ H &= \left[Bw(k^{2/3}\psi_1) - \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} Dw'(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $t = k^{2/3}\psi_1$, $w(t)$ — функция Эйри, удовлетворяющая уравнению

$$w''(t) - tw(t) = 0, \quad (3)$$

$w'(t)$ — ее производная, а A, B, C, D, ψ_1 и ψ_2 — искомые величины. Подставив (2) в уравнение (1), получим два векторных уравнения, содержащих функции $w(t)$ и $w'(t)$ (вторая производная функции Эйри $w''(t)$ выражается, согласно (3), через $w(t)$). В силу линейной независимости функций $w(t)$ и $w'(t)$ коэффициенты при них должны тождественно обращаться в нуль, что дает:

$$ik \{ [\nabla\psi_2, A] + \sqrt{-\psi_1} [\nabla\psi_1, C] - B \} + \operatorname{rot} A = 0; \quad (4a)$$

$$ik \{ V - \psi_1 [\nabla \psi_1, A] + (\nabla \psi_2, C) - D \} + V - \psi_1 \operatorname{rot} \frac{C}{V - \psi_1} = 0; \quad (4б)$$

$$ik \{ [\nabla \psi_2, B] + V - \psi_1 [\nabla \psi_1, D] + \varepsilon A \} + \operatorname{rot} B = 0; \quad (4в)$$

$$ik \{ V - \psi_1 [\nabla \psi_1, B] + [\nabla \psi_2, D] + \varepsilon C \} + V - \psi_1 \operatorname{rot} \frac{D}{V - \psi_1} = 0. \quad (4г)$$

Складывая и вычитая сначала уравнения (4а) и (4б), а затем уравнения (4в) и (4г), и вводя обозначения

$$\begin{aligned} \alpha &= \nabla \psi_2, \quad \beta = V - \psi_1 \nabla \psi_1, \\ \gamma &= \alpha + \beta, \quad \delta = \alpha - \beta, \\ M &= A + C, \quad \sqrt{\varepsilon} P = B + D, \\ N &= A - C, \quad \sqrt{\varepsilon} Q = B - D, \end{aligned} \quad (5)$$

приводим уравнения (4) к виду

$$\begin{aligned} [\gamma, M] - V - \varepsilon P &= -\frac{1}{2ik} \left\{ \operatorname{rot}(M + N) + V - \psi_1 \operatorname{rot} \left(\frac{M - N}{V - \psi_1} \right) \right\} = X; \\ [\gamma, P] + V - \varepsilon M &= -\frac{1}{2ik} \left\{ \operatorname{rot} V - \varepsilon (P + Q) + V - \psi_1 \operatorname{rot} \left(V - \varepsilon \frac{P - Q}{V - \psi_1} \right) \right\} = Y; \\ [\delta, N] - V - \varepsilon Q &= -\frac{1}{2ik} \left\{ \operatorname{rot}(M + N) - V - \psi_1 \operatorname{rot} \left(\frac{M - N}{V - \psi_1} \right) \right\} = Z; \\ [\delta, Q] + V - \varepsilon N &= -\frac{1}{2ik} \left\{ \operatorname{rot} V - \varepsilon (P + Q) - V - \psi_1 \operatorname{rot} \left(V - \varepsilon \frac{P - Q}{V - \psi_1} \right) \right\} = U. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем, как обычно, искать векторы M , N , P и Q в виде рядов по обратным степеням волнового числа: $M = M_0 + k^{-1}M_1 + \dots$, $N = N_0 + k^{-1}N_1 + \dots$ и т. д. В нулевом приближении имеем

$$\begin{aligned} [\gamma, M_0] - V - \varepsilon P_0 &= 0, \quad [\delta, N_0] - V - \varepsilon Q_0 = 0; \\ [\gamma, P_0] + V - \varepsilon M_0 &= 0, \quad [\delta, Q_0] + V - \varepsilon N_0 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Определитель этой системы уравнений равен

$$\Delta = \varepsilon^2(\varepsilon - \gamma^2)^2(\varepsilon - \delta^2)^2. \quad (8)$$

Если отвлечься от двухкратного корня $\varepsilon^2 = 0$, который соответствует продольным электромагнитным волнам, то детерминант обращается в нуль при $\gamma^2 = \varepsilon$ и при $\delta^2 = \varepsilon$. Покажем, что оба условия $\gamma^2 = \varepsilon$ и $\delta^2 = \varepsilon$ должны выполняться одновременно. Предположим, что $\gamma^2 = \varepsilon$ и $\gamma \neq \delta$. Пусть $t_1 = \gamma / \sqrt{\varepsilon}$ — единичный вектор, параллельный вектору γ , а n_1 и b_1 — единичные векторы, образующие с t_1 правовинтовую ортогональную связку. Тогда уравнения (7) имеют два нетривиальных решения (поскольку корень $\gamma^2 = \varepsilon$ — двухкратный):

$$\begin{cases} M_0 = n_1, \quad N_0 = 0, \\ P_0 = b_1, \quad Q_0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} M_0 = b_1, \quad N_0 = 0, \\ P_0 = -n_1, \quad Q_0 = 0, \end{cases}$$

а общее решение уравнений (7) запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \Phi_1 \mathbf{n}_1 + \Phi_2 \mathbf{b}_1, & N_0 &= 0, \\ \mathbf{P}_0 &= \Phi_1 \mathbf{b}_1 - \Phi_2 \mathbf{n}_1, & Q_0 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Вблизи каустики, однако, амплитуды \mathbf{C}_0 и \mathbf{D}_0 не равны нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= \frac{1}{2} (\mathbf{M}_0 - N_0) = \frac{1}{2} \mathbf{M}_0 = \frac{1}{2} (\Phi_1 \mathbf{n}_1 + \Phi_2 \mathbf{b}_1), \\ \mathbf{D}_0 &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} (\mathbf{P}_0 - Q_0) = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \mathbf{P}_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} (\Phi_1 \mathbf{b}_1 - \Phi_2 \mathbf{n}_1), \end{aligned}$$

вследствие чего решение (2) обращается на каустике в бесконечность. По той же причине нас не может удовлетворить и решение, соответствующее $\delta^2 = \varepsilon$, $\delta \neq \gamma$; поэтому мы должны требовать одновременного выполнения условий

$$\begin{aligned} \gamma^2 &\equiv (\alpha + \beta)^2 = \varepsilon, \\ \delta^2 &\equiv (\alpha - \beta)^2 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) следует, что

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varepsilon, \quad (\alpha, \beta) = 0$$

или, что то же самое,

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \psi_2)^2 - \psi_1 (\nabla \psi_1)^2 &= \varepsilon, \\ \sqrt{-\psi_1} (\nabla \psi_1, \nabla \psi_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Таким образом, функции ψ_1 и ψ_2 в решении (2) удовлетворяют точно таким же уравнениям, что и в скалярной задаче [2]. Функции же

$$\Psi_I = \psi_2 - \frac{2}{3} (-\psi_1)^{3/2}, \quad \Psi_{II} = \psi_2 + \frac{2}{3} (-\psi_1)^{3/2}, \quad (12)$$

для которых $\nabla \Psi_I = \gamma$, $\nabla \Psi_{II} = \delta$, удовлетворяют, согласно (10), уравнению эйконала

$$(\nabla \Psi_I)^2 = \varepsilon, \quad (\nabla \Psi_{II})^2 = \varepsilon \quad (13)$$

и представляют собой эйконалы падающей и отраженной волн [2]. Их можно определить, интегрируя показатель преломления $\sqrt{\varepsilon}$ вдоль траектории падающего и отраженного лучей:

$$\Psi_I = \Psi_{I0} + \int_0^{\sigma_1} \sqrt{\varepsilon} d\sigma_1, \quad \Psi_{II} = \Psi_{II0} + \int_0^{\sigma_2} \sqrt{\varepsilon} d\sigma_2,$$

где $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ — элементы длины падающего и отраженного лучей. Для того, чтобы значения эйконала Ψ_I на падающем луче непрерывно переходили в значения эйконала Ψ_{II} на отраженном луче, в качестве начального значения Ψ_{II0} функции Ψ_{II} следует взять значение эйконала Ψ_I на каустике:

$$\Psi_{II0} = \Psi_{I\text{кауст}}$$

Если решения Ψ_I и Ψ_{II} уравнений (13) известны, то функции ϕ и ψ_2 при $\psi_1 < 0$ (область света) определяются, согласно (12), следующим образом [2]:

$$\psi_2 = \frac{1}{2} (\Psi_I + \Psi_{II}), \quad \frac{2}{3} (-\psi_1)^{3/2} = \frac{1}{2} (\Psi_{II} - \Psi_I). \quad (14a)$$

В области тени ($\psi_1 > 0$) уравнение эйконала $(\nabla \Psi)^2 = \varepsilon$ имеет, как и в области света ($\psi_1 < 0$), два решения Ψ_I и Ψ_{II} , комплексно сопряженных друг другу: $\Psi_{II} = \Psi_I^*$. Поэтому для ψ_1 и ψ_2 в области тени ($\psi_1 > 0$) получаются соотношения

$$\psi_2 = \frac{1}{2} (\Psi_I + \Psi_{II}) = \operatorname{Re} \Psi_I, \quad i \frac{2}{3} (\psi_1)^{3/2} = \frac{1}{2} (\Psi_{II} - \Psi_I) = -i \operatorname{Im} \Psi_I. \quad (14b)$$

Поверхностям $\Psi_I = \text{const}$ и $\Psi_{II} = \text{const}$ можно сопоставить семейства ортогональных к ним лучей, которые, в силу (12), будут удовлетворять законам геометрической оптики, в частности, принципу Ферма. Введем единичные касательные векторы к этим лучам t_1 и t_2 :

$$t_1 = \gamma / \sqrt{\varepsilon}, \quad t_2 = \delta / \sqrt{\varepsilon}.$$

Если n_1 , b_1 и n_2 , b_2 представляют собой соответственно нормали и бинормали к этим лучам, то общее решение уравнений (7) запишется в виде

$$\begin{aligned} M_0 &= \Phi_1 n_1 + \Phi_2 b_1, & N_0 &= F_1 n_2 + F_2 b_2, \\ P_0 &= \Phi_1 b_1 - \Phi_2 n_1, & Q_0 &= F_1 b_2 - F_2 n_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Условия разрешимости уравнений первого приближения будут таковы:

$$\begin{aligned} (X_0, n_1) + (Y_0, b_1) &= 0, \\ (X_0, b_1) - (Y_0, n_1) &= 0, \\ (Z_0, n_2) + (U_0, b_2) &= 0, \\ (Z_0, b_2) - (U_0, n_2) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где X_0 , Y_0 , Z_0 , U_0 — правые части уравнений (6) при $M = M_0$, $N = N_0$, $P = P_0$, $Q = Q_0$:

$$\begin{aligned} X_0 &= -\frac{1}{2ik} \left\{ 2 \operatorname{rot} M_0 + [\beta_1, M_0 - N_0] \right\}, \\ Y_0 &= -\frac{1}{2ik} \left\{ 2 \operatorname{rot} P_0 + [\kappa + \beta_1, P_0 - Q_0] \right\}, \\ Z_0 &= -\frac{1}{2ik} \left\{ 2 \operatorname{rot} N_0 + [\beta_1, N_0 - M_0] \right\}, \\ U_0 &= -\frac{1}{2ik} \left\{ 2 \operatorname{rot} Q_0 + [\kappa + \beta_1, Q_0 - P_0] \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

и где

$$\kappa = 2 \frac{\nabla \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} = \nabla \ln \varepsilon, \quad \beta_1 = \sqrt{-\psi_1} \nabla \frac{1}{\sqrt{-\psi_1}} = \frac{\beta}{2(-\psi_1)^{3/2}},$$

Благодаря тому, что X_0 , Y_0 , Z_0 , U_0 содержат разности вида β_1 , $M_0 - N_0$, можно удовлетворить условию их обращения в нуль на каустике. Для этого достаточно потребовать, чтобы на каустике ($\psi_1 = 0$) было

$$M_0 = N_0, \quad P_0 = Q_0. \quad (18a)$$

Если учесть, что на каустике $\beta = 0$, $\gamma = \delta$, $t_1 = t_2$, $n_1 = n_2$, $b_1 = b_2$, и принять во внимание (15), то нетрудно видеть, что (18а) будет эквивалентно условиям

$$\Phi_1 = F_1, \quad \Phi_2 = F_2 \quad (186)$$

при $\psi_1 = 0$.

Подставив (15) и (17) в (16), получаем

$$\begin{aligned} \frac{4}{T_1} \Phi_1 - 2\Phi_2 \operatorname{div} t_1 - 4(\nabla \Phi_2, t_1) - \Phi_2(x + 2\beta_1, t_1) &= 0, \\ \frac{4}{T_1} \Phi_2 + 2\Phi_1 \operatorname{div} t_1 + 4(\nabla \Phi_1, t_1) + \Phi_1(x + 2\beta_1, t_1) &= 0, \\ \frac{4}{T_2} F_1 - 2F_2 \operatorname{div} t_2 - 4(\nabla F_2, t_2) - F_2(x + 2\beta_1, t_2) &= 0, \\ \frac{4}{T_2} F_2 + 2F_1 \operatorname{div} t_2 + 4(\nabla F_1, t_2) + F_1(x + 2\beta_1, t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При выводе (19) использованы формулы

$$n_1 \operatorname{rot} n_1 + b_1 \operatorname{rot} b_1 = 2/T_1,$$

$$n_2 \operatorname{rot} n_2 + b_2 \operatorname{rot} b_2 = 2/T_2,$$

$$b_1 \operatorname{rot} n_1 - n_1 \operatorname{rot} b_1 = \operatorname{div} t_1,$$

$$b_2 \operatorname{rot} n_2 - n_2 \operatorname{rot} b_2 = \operatorname{div} t_2$$

(T_1 и T_2 — радиусы кручения падающего и отраженного лучей) и соотношения

$$\beta_1([b_1, b_2] + [n_1, n_2]) = 0,$$

$$\beta_1([b_1, n_2] + [n_1, b_2]) = 0,$$

легко доказываемые, если учесть, что $\beta = (1/2)(\gamma - \delta) = (\sqrt{\epsilon}/2)(t_1 - t_2)$.

Уравнения (19) можно записать и в следующей эквивалентной форме:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\Phi_1^2 + \Phi_2^2}{\sqrt{-\psi_1}} \sqrt{\epsilon} t_1 \right) = 0, \quad (20a)$$

$$\frac{d\chi_1}{d\sigma_1} = \frac{1}{T_1}, \quad (20b)$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{F_1^2 + F_2^2}{\sqrt{-\psi_1}} \sqrt{\epsilon} t_2 \right) = 0, \quad (21a)$$

$$\frac{d\chi_2}{d\sigma_2} = \frac{1}{T_2}, \quad (21b)$$

где $\chi_1 = \operatorname{arctg}(\Phi_1/\Phi_2)$, $\chi_2 = \operatorname{arctg}(F_1/F_2)$. Уравнения (20а) и (21а) дают закон изменения вдоль лучей величин $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ и $F_1^2 + F_2^2$, а уравнения (20б) и (21б) — закон вращения плоскости поляризации пар векторов (M_0, P_0) и (N_0, Q_0) относительно ортогональных связок векторов (t_1, n_1, b_1) и (t_2, n_2, b_2) . Как и в скалярной задаче [2], амplitуды Φ_1 , Φ_2 , F_1 и F_2 вблизи каустики конечны, поскольку уменьшение сечения лучевой трубки по мере приближения к каустике, происходящее

пропорционально $\sqrt{-\psi_1}$, компенсируется множителем $1/\sqrt{-\psi_1}$ в (20а) и (21а).

Таким образом, в нулевом приближении решение уравнений Максвелла (1) записывается в виде

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left[(M_0 + N_0)w(k^{2/3}\psi_1) - \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} (M_0 - N_0)w'(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_2}, \\ H &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left[(P_0 + Q_0)w(k^{2/3}\psi_1) - \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} (P_0 - Q_0)w'(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где векторы M_0, P_0, N_0, Q_0 определяются формулами (15), функции Φ_1, Φ_2, F_1 и F_2 находятся из уравнений (20) и (21) при дополнительном условии (186), а функции ψ_1 и ψ_2 определяются из уравнений (11) (или, что то же самое, находятся по формулам (14), где Ψ_I и Ψ_{II} удовлетворяют уравнениям эйконала (13)).

Для того, чтобы поле затухало в области тени $\psi_1 > 0$, представим полное решение уравнений Максвелла в виде суперпозиции «падающей» (E_1, H_1) и «отраженной» (E_2, H_2) волн:

$$E = E_1 - E_2, \quad H = H_1 - H_2, \quad (23)$$

где (E_1, H_1) и (E_2, H_2) получаются из (22), если положить там соответственно*

$$w(t) = w_1(t) \equiv u(t) - iv(t); \quad w(t) = w_2(t) \equiv u(t) + iv(t).$$

При таком выборе функций $w_1(t)$ и $w_2(t)$ полное поле

$$\begin{aligned} E = E_1 - E_2 &= -i \left[(M_0 + N_0)v(k^{2/3}\psi_1) - \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} (M_0 - N_0)v'(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_2}; \\ H = H_1 - H_2 &= -i \sqrt{\varepsilon} \left[(P_0 + Q_0)v(k^{2/3}\psi_1) - \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} (P_0 - Q_0)v'(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_2} \end{aligned} \quad (24)$$

экспоненциально стремится к нулю при $\psi_1 \rightarrow +\infty$ в соответствии с асимптотическим поведением функций $v(t)$ и $v'(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ [3].

Установим теперь связь решений (24) с полем вдали от каустики. Воспользовавшись асимптотическими выражениями для функций $w_1(t)$ и $w_2(t)$ при $t \rightarrow -\infty$ [3], получаем

$$\begin{aligned} E_1 &= M_0 k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4} \exp \left\{ ik \Psi_I - i \frac{\pi}{4} \right\}, \\ H_1 &= \sqrt{\varepsilon} P_0 k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4} \exp \left\{ ik \Psi_I - i \frac{\pi}{4} \right\}, \\ E_2 &= N_0 k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4} \exp \left\{ ik \Psi_{II} + i \frac{\pi}{4} \right\}, \\ H_2 &= \sqrt{\varepsilon} Q_0 k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4} \exp \left\{ ik \Psi_{II} + i \frac{\pi}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

* Функции $u(t)$ и $v(t)$ представляют собой два линейно независимых решения уравнения Эйри $w''(t) - tw(t) = 0$; их свойства были исследованы Фоком [3] (см. также [2]).

Как видно из (25), вдали от каустики решения (E_1, H_1) и (E_2, H_2) представляют собой падающую и отраженную волны. Амплитуды напряженностей в падающей волне равны $M_0 k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4}$ и $\sqrt{\epsilon} P_0 k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4}$, а в отраженной волне $N_0 k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4}$ и $\sqrt{\epsilon} Q_0 k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4}$. Поэтому уравнения (20а) и (21а) вдали от каустики представляют собой обычные законы изменения интенсивности (интенсивность изменяется обратно пропорционально сечению лучевой трубки), а уравнения (20б) и (21б)—законы вращения плоскости поляризации в приближении геометрической оптики [1]. Вблизи же каустики и в области тени ($\psi_1 > 0$) такая интерпретация уравнений (20) и (21) невозможна, так как экспоненциально нарастающие решения (E_1, H_1) и (E_2, H_2) надо рассматривать в этой области совместно.

Укажем связь между поляризациями падающей и отраженной волн. Пусть падающая волна E_1, H_1 вдали от каустики поляризована под углом γ_0 по отношению к естественному трехграннику t_1, n_1, b_1 . В соответствии с (20б), на каустике будем иметь

$$\chi_{1 \text{ кауст}} = \chi_0 + \int_0^{\sigma_1 \text{ кауст}} \frac{1}{T_1} d\sigma_1. \quad (26)$$

Так как на каустике падающий луч непрерывно переходит в отраженный, т. е. $t_1 = t_2, n_1 = n_2, b_1 = b_2, T_1 = T_2$, и в то же время $M_0 = N_0, P_0 = Q_0$, то

$$\chi_{2 \text{ кауст}} = \chi_{1 \text{ кауст}}$$

и

$$\chi_2 = \chi_{2 \text{ кауст}} + \int_{\sigma_2 \text{ кауст}}^{\sigma_2} \frac{1}{T_2} d\sigma_2 = \chi_0 + \int_0^{\sigma_1 \text{ кауст}} \frac{1}{T_1} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2 \text{ кауст}}^{\sigma_2} \frac{1}{T_2} d\sigma_2. \quad (27)$$

Введем элемент длины луча $d\sigma$ и радиус кручения T , такие, что на падающем участке луча $d\sigma = d\sigma_1, T = T_1$, а на отраженном участке $d\sigma = d\sigma_2, T = T_2$, и положим $\sigma_2 \text{ кауст} = \sigma_1 \text{ кауст}$. Тогда выражение (27) принимает вид

$$\chi = \chi_0 + \int_0^\sigma \frac{1}{T} d\sigma, \quad (28)$$

т. е. совпадает с выражением для χ в случае, когда каустика отсутствует [1]. Таким образом, прохождение волны вблизи каустики не приводит к дополнительному вращению плоскости поляризации.

Заметим в заключение следующее. Можно показать, что в случае падения плоской волны на плоско-слоистую среду с $\epsilon = \epsilon(z)$ равенства $F_1 = \Phi_1, F_2 = \Phi_2$ выполняются во всем пространстве, а не только на каустике. Поэтому члены, содержащие производную w' в решении (22), в данном случае отсутствуют.

Далее, проведенное рассмотрение справедливо, если диэлектрическая проницаемость среды ϵ отлична от нуля. Однако имеются основания полагать, что при соответствующем выборе эталонной функции (например, при использовании функций Уиттекера [4]) удастся получить геометрико-оптическое решение и в том случае, когда ϵ обращается на некоторой поверхности в нуль.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. М. Рытову за помощь и постоянное внимание к работе, а также В. П. Яковлеву и Л. Л. Горышнику за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Модулированные колебания и волны, Труды ФИАН, 1938.
2. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 664 (1964).
3. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1946.
4. Э. М. Гюнинен, Г. И. Макаров, Сб. Проблемы дифракции и распространения волн, вып. 1, 1962, стр. 24.

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
2 марта 1964 г.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF MAXWELL EQUATIONS NEAR CAUSTIC

Yu. A. Kravtsov

By means of some modification of geometric optics method an asymptotic solution of Maxwell equations has been found near caustic in a nonhomogeneous medium. The method modification is that the solution has a form of combination of an exponential function and Airy functions (as well as its derivative). Equations have been obtained both for the amplitudes of the electric and magnetic field and for the angle of rotation of polarization plane. The connection has been given of these equations with the ordinary equation of the geometric optics method.

УДК 538.56 : 519.25

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СРЕДЕ С ФЛЮКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

B. B. Тамойкин

Рассмотрено излучение заряда, движущегося в газе с термодинамическими флюктуациями давления и энтропии, а также в плазме с тепловыми флюктуациями электронной плотности. Показано, что в некоторых случаях спектральная плотность излучения электромагнитных волн может оказаться меньше энергии излучения при движении заряда в хаотически неоднородной среде, параметры которой не зависят от времени.

Излучение заряда, возникающее при движении заряда в случайно неоднородной среде, рассматривалось рядом авторов [1-3]. В работах [1,2] получены формулы для спектральной плотности излучения электромагнитных волн при движении заряда в неоднородной изотропной диспергирующей среде. В [3] дано обобщение работ [1,2] на случай среды с пространственной дисперсией, что приводит к новым интересным явлениям. В [4] получены формулы для ионизационных потерь заряда, движущегося в среде со случайными флюктуациями диэлектрической проницаемости.

Выражения, приведенные в [1-4], относятся к случаю, когда неоднородности диэлектрической проницаемости неизменны во времени. В реальных условиях, однако, параметры среды изменяются и во времени. В настоящей статье рассматривается излучение движущегося заряда в таких средах. В качестве конкретного примера рассмотрено излучение заряженной частицы, движущейся в газе с термодинамическими флюктуациями давления и энтропии, а также в плазме с тепловыми флюктуациями электронной плотности.

1. ПОЛЕ РАССЕЯНИЯ

Уравнения поля в нестационарной неоднородной среде имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \hat{\epsilon}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt})$, $\mathbf{j} = ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt})$ — плотности заряда и тока для движущейся заряженной частицы. Считая отклонения оператора диэлектрической проницаемости среды от среднего значения малыми, можно записать

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) &= \hat{\varepsilon}_0 + \hat{\Delta\varepsilon}(\mathbf{r}, t), \\ E &= E_0 + E', \quad D = D_0 + D',\end{aligned}\tag{2}$$

где E_0 и D_0 — электрическое поле и индукция, создаваемые зарядом, движущимся в однородной среде, а E' и D' — их флюктуационные отклонения, средние значения которых равны нулю.

В рамках метода возмущений имеем

$$D' \simeq \hat{\varepsilon}_0 E' + \hat{\Delta\varepsilon}(\mathbf{r}, t) E_0.\tag{3}$$

Из уравнений Максвелла можно получить следующее уравнение для фурье-компоненты $D'(\omega)$:

$$\Delta D'_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0(\omega) D'_\omega = - \frac{\text{rot rot}}{4\pi} \int \Delta\varepsilon(\mathbf{r}, t) E_0(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt.\tag{4}$$

Решение уравнения (4) известно [5]. Используя это решение и считая, что точка наблюдения расположена далеко от объема, занятого неоднородностями, для поля рассеяния E'_ω легко получить следующее выражение:

$$\begin{aligned}E'_\omega(\mathbf{r}) &= \frac{1}{8\pi^2 \varepsilon_0(\omega)} \frac{\exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{r})}{r} \int \Delta\varepsilon_{\omega_1}(\mathbf{r}_1, t) [\mathbf{k}'[\mathbf{k}' E_0(\mathbf{q}, \omega_1)]] \times \\ &\times \exp \left[i(\omega - \omega_1) t + i \left(\frac{\omega_1}{v} - \mathbf{k}'_z \right) z_1 + i(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{p}'_1 \right] d\mathbf{r}_1 dt d\mathbf{q} d\omega_1,\end{aligned}\tag{5}$$

где $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_0 \mathbf{n}$, $\mathbf{k}_0 = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}$, \mathbf{n} — единичный вектор в направлении на точку наблюдения.

В формулу (5) входит невозмущенное поле движущегося заряда $E_0(\mathbf{r}, t)$ [5]:

$$\begin{aligned}E_0(\mathbf{r}, t) &= \int E_0(\mathbf{q}, \omega_1) \exp \left(i \frac{\omega_1}{v} z + i \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - i \omega_1 t \right) d\mathbf{q} d\omega_1, \\ \mathbf{k} &= \{\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega/v\}, \quad \mathbf{q} = \{\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, 0\}, \\ \mathbf{p} &= \{x, y, 0\}.\end{aligned}\tag{6}$$

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ГАЗЕ

В случае газа флюктуации диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon_\omega(\mathbf{r}, t)$ определяются флюктуациями давления и энтропии [5]:

$$\Delta\varepsilon_\omega(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p} \right)_s \Delta p_\omega(\mathbf{r}, t) + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s} \right)_p \Delta s_\omega(\mathbf{r}, t),\tag{7}$$

причем флюктуации Δp и Δs независимы: $\overline{\Delta p \Delta s} = 0$.

Как известно, флюктуации энтропии медленно изменяются во времени и дают несмешенную линию при рассеянии плоской монохроматической волны. В то же время флюктуации давления зависят от времени по закону бегущих звуковых волн, распространяющихся в двух противоположных направлениях; поэтому при рассеянии монохроматической волны они дают так называемый дублет Мандельштама-Брэйльюэна [5]. В связи с этим ниже будет рассмотрено излучение заряда, связанное с флюктуациями давления. Выражение для спектральной плотности излучения заряда, обусловленного флюктуациями энтропии, можно получить из [1, 2], если в соответствующих формулах положить

$$\overline{\Delta \varepsilon^2} = \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} \right)_p \right]^2 \overline{\Delta s^2}.$$

Флюктуационное отклонение давления можно представить в виде

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) = \Delta p(\mathbf{r}) \cos(\Omega t - Kr), \quad (8)$$

где $\Omega = |K| u$, $K = \sqrt{(\omega_1/v - k'_z)^2 + (q - q')^2}$, u — скорость звука.

Учитывая сказанное, из (5) найдем поле рассеяния, обусловленное флюктуациями давления:

$$\begin{aligned} E'_\omega(\mathbf{r}) = & \frac{(\partial \varepsilon / \partial p)_s}{8\pi\varepsilon_0(\omega)} \frac{\exp(i k_0 r)}{r} \left\{ \int \Delta p(\mathbf{r}_1) \delta(\omega - \omega_1 + \Omega) \times \right. \\ & \times [\mathbf{k}'[\mathbf{k}' E_0(q, \omega_1)]] \exp \left[i \left(\frac{\omega_1}{v} - k'_z \right) z_1 + i(q - q') \rho_1 \right] d\mathbf{r}_1 dq d\omega_1 + \\ & + \int \Delta p(\mathbf{r}_1) \delta(\omega - \omega_1 - \Omega) [\mathbf{k}'[\mathbf{k}' E_0(q, \omega_1)]] \times \\ & \left. \times \exp \left[i \left(\frac{\omega_1}{v} - k'_z \right) z + i(q - q') \rho_1 \right] dr_1 dq d\omega_1 \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее, учитывая соотношение

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_s \frac{\delta(x - x_s)}{\varphi'(x_s)}, \quad (10)$$

где x_s — корни уравнения $\varphi(x) = 0$, получим

$$\begin{aligned} E'_\omega(\mathbf{r}) = & - \frac{(\partial \varepsilon / \partial p)_s}{8\pi\varepsilon_0} \frac{\exp(i k_0 r)}{r} \left\{ \sum_{s=1,2} \int \Delta p(\mathbf{r}_1) [\mathbf{k}'[\mathbf{k}' E_0(q, \omega_s)]] \times \right. \\ & \times \exp \left[i \left(\frac{\omega_s}{v} - k'_z \right) z_1 + i(q - q') \rho_1 \right] \times \\ & \times \left[1 - \frac{u^2}{v^2} \frac{(\omega_s/v - k'_z)^2}{(\omega_s/v - k'_z)^2 + (q - q')^2} \right]^{-1} dr_1 dq \left. \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь с точностью до членов порядка $u^2/v^2 \ll 1$

$$\omega_s \approx \omega \pm u \sqrt{\left(\frac{\omega}{v} - k'_z \right)^2 + (q - q')^2} + \frac{u^2}{v} \left(\frac{\omega}{v} - k'_z \right). \quad (12)$$

Для вычисления энергии излучения заряда необходимо знать средний квадрат рассеянного поля. Тогда поток энергии в телесном углу $d\Omega$ вычисляется по формуле

$$\Pi_\omega = \frac{c \sqrt{\varepsilon_0(\omega)}}{2} |E'_\omega|^2 r^2 d\Omega, \quad (13)$$

а излучаемая энергия на частоте ω равна

$$W_\omega = \int \Pi_\omega d\Omega = \int \Pi_\omega \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (14)$$

Предполагая выполненные неравенства*

$$\frac{\omega}{v} \left[1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \theta \pm \frac{u}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \theta \right) + (q - q')^2} + \right. \\ \left. + \frac{u^2}{v^2} \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \theta \right) \right] l \ll 1, \quad (15)$$

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \sin \theta l \ll 1$$

(l — радиус корреляции флюктуаций диэлектрической проницаемости), считая диэлектрическую проницаемость газа ϵ_0 не зависящей от частоты и вводя новые переменные

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}, \quad \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} = \mathbf{R},$$

получим следующее выражение для $|\mathbf{E}'_\omega|^2$:

$$|\mathbf{E}'_\omega|^2 = \frac{[(\partial \epsilon / \partial p)_s]^2 \Delta p^2 L}{32 \pi^2 \epsilon_0^2} \frac{1}{r^2} \left\{ \sum_{s=1,2} \int |[\mathbf{k}' [\mathbf{k}' E_0(\mathbf{q}, \omega_s)]]|^2 \times \right. \\ \times \left[1 + 2 \frac{u^2}{v^2} \frac{(\omega/v - k'_z)^2}{(\omega/v - k'_z)^2 + (q - q')^2} \dots \right] d\mathbf{q} \int \Gamma_p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \\ + 2 \int [\mathbf{k}' [\mathbf{k}' E_0(\mathbf{q}, \omega_{s=1})]] [\mathbf{k}' [\mathbf{k}' E_0^*(\mathbf{q}, \omega_{s=2})]] \frac{\sin [\Phi(\mathbf{q}) L]}{\Phi(\mathbf{q}) L} \times \quad (16)$$

$$\times \frac{1}{\left[1 - \frac{u^2}{v^2} \frac{(\omega_{s=1}/v - k'_z)^2}{(\omega_{s=1}/v - k'_z)^2 + (q - q')^2} \right]} \frac{1}{\left[1 - \frac{u^2}{v^2} \frac{(\omega_{s=2}/v - k'_z)^2}{(\omega_{s=2}/v - k'_z)^2 + (q - q')^2} \right]} \times \\ \times d\mathbf{q} \int \Gamma_p(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \Big\}.$$

Здесь L — путь, проходимый частицей в неоднородной среде, $\Gamma_p(\mathbf{r})$ — коэффициент корреляции флюктуаций давления,

$$\Phi(\mathbf{q}) = \frac{u}{v} \sqrt{\left(\frac{\omega}{v} - k'_z \right)^2 + (q - q')^2}. \quad (17)$$

Выражение (16) существенно упрощается в двух предельных случаях:

$$\frac{1}{\Phi(\mathbf{q})} \gg L \gg \lambda, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\Phi(\mathbf{q})} \ll L. \quad (19)$$

* При досветовых скоростях движущегося заряда неравенства (15) заведомо выполняются при условии $(\omega/v) l \ll 1$. Это условие означает, что на длине пути, проходимого зарядом за период колебаний электромагнитного поля, укладывается много неоднородностей.

Величина $1/\Phi(q)$ по порядку величины равна расстоянию, проходимому движущимся со скоростью v зарядом за характерный период изменения неоднородностей $\Delta p(r, t)$.

В случае (18) спектральная плотность излучения заряда с учетом флюктуаций энтропии запишется следующим образом:

$$W_{\omega} \simeq W_{\omega}^0 - \frac{\omega^4 e^2 (\partial \varepsilon / \partial p)_s \Delta p^2}{72 \pi^2 c^3 v_0^2 \varepsilon_0^{3/2}} \frac{u^2}{v^2} L^3 \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_0 \beta^2) \times \right. \\ \left. \times \ln \left[\frac{q_m^2}{\omega^2 v^{-2} (1 - \varepsilon_0 \beta^2)} \right] - 2 \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \beta^2 + q_m^2 \right\} \int \Gamma_p(r) dr, \quad (20)$$

где W_{ω}^0 — плотность энергии излучения заряда, движущегося в газе с неизменными во времени неоднородностями $\Delta \varepsilon$ [1–3], а величина $q_m \simeq 2\pi/\rho_{\min}$ определяется условиями применимости макроскопической электродинамики.

Из (20) видно, что потери энергии заряда на начальном участке пути мало отличаются от соответствующих потерь при движении заряда в среде с постоянными во времени параметрами, поскольку добавочный член в (20) мал по сравнению с W_{ω}^0 . Однако этот член пропорционален кубу пути, проходимого частицей. Сказанное означает, что излучаемая частицей в единицу времени энергия не постоянна.

Другой предельный случай (19) приводит к следующему результату (с точностью до членов порядка u^2/v^2):

$$W_{\omega} \simeq W_{\omega}^0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{(\Delta p)^2}{(\Delta \varepsilon)^2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_s^2 \right\}. \quad (21)$$

Из (21) видим, что интенсивность излучения заряда в газе, параметры которого меняются во времени, может существенно уменьшаться по сравнению с соответствующей энергией излучения для газа, параметры которого неизменны [1–3]. Очевидно, это связано с тем, что при условии (19), согласно которому заряд проходит расстояние L , значительно большее, чем длина пути L_0 , для заряда в течение характерного периода изменения неоднородностей, имеет место усреднение энергии излучения по времени; последнее и приводит к уменьшению излучаемой энергии. Для идеального газа выражение (21) записывается в виде

$$W_{\omega} \simeq W_{\omega}^0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c_v}{c_p} \right). \quad (22)$$

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА В ПЛАЗМЕ С ТЕПЛОВЫМИ ФЛЮКТУАЦИЯМИ

В случае холодной изотропной плазмы флюктуации ε определяются флюктуациями электронной плотности N . Поскольку в плазме есть колебания электронной плотности с ленгмюровской частотой $\Omega = \sqrt{4\pi e^2 N_0/m}$ (тепловые флюктуации), это приводит к периодическому изменению ε во времени и как следствие — к комбинационному рассеянию электромагнитных волн в плазме [6]. Задавая электронную плотность в виде

$$N = N_0 + \Delta N(r) \cos(\Omega t), \quad |\Delta N| \ll N_0, \quad (23)$$

для флюктуации $\Delta \varepsilon_{\omega}(r, t)$ получим [6]

$$\Delta \varepsilon_{\omega}(r, t) \simeq - \frac{2\pi e^2 \Delta N(r)}{m\omega} \left(\frac{e^{i\Omega t}}{\omega - \Omega} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\omega + \Omega} \right). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (5), найдем

$$\begin{aligned}
 E'_\omega(\mathbf{r}) = & -\frac{\omega\Omega^2}{8\pi\varepsilon_0(\omega)} \frac{\exp(ik_0 r)}{r} \left\{ \int \frac{\Delta N(\mathbf{r}_1)}{N_0} \frac{1}{\omega - \Omega} [\mathbf{k}'[\mathbf{k}'E_0(\mathbf{q}, \omega + \Omega)] \times \right. \\
 & \times \exp \left[i \left(\frac{\omega + \Omega}{v} - k_z' \right) z_1 + i(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{p}_1 \right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{q} + \\
 & + \int \frac{\Delta N(\mathbf{r}_1)}{N_0} \frac{1}{\omega + \Omega} [\mathbf{k}'[\mathbf{k}'E_0(\mathbf{q}, \omega - \Omega)] \times \\
 & \times \exp \left[i \left(\frac{\omega - \Omega}{v} - k_z' \right) z_1 + i(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{p}_1 \right] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{q} \left. \right\}. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Дальнейший расчет полностью аналогичен предыдущему. Предполагая, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega}{v} \left[1 \pm \frac{\Omega}{\omega} - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_0(\omega)} \cos \theta \right] l \ll 1, \\
 \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0(\omega)} \sin \theta l \ll 1, \tag{26}
 \end{aligned}$$

для энергии электромагнитных волн, излучаемых зарядом, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 W_\omega = & \frac{\Omega^4 (\Delta N)^2 \sqrt{\varepsilon_0(\omega)} L}{24 \pi^2 c^3 v_0^2 N_0^2} \left\{ \frac{1}{(1 - \Omega/\omega)^2 \varepsilon_0^2(\omega + \Omega)} \times \right. \\
 & \times \left[\ln \left(\frac{q_m^2}{\omega^2 v^{-2} (1 + \Omega/\omega)^2 (1 - \varepsilon_0(\omega + \Omega) \beta^2)} \right) - \varepsilon_0(\omega + \Omega) \beta^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{(1 + \Omega/\omega)^2 \varepsilon_0^2(\omega - \Omega)} \left[\ln \left(\frac{q_m^2}{\omega^2 v^{-2} (1 - \Omega/\omega)^2 (1 - \varepsilon_0(\omega - \Omega) \beta^2)} \right) - \varepsilon_0(\omega - \Omega) \beta^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{(1 - \Omega^2/\omega^2) \varepsilon_0(\omega + \Omega) \varepsilon_0(\omega - \Omega)} \frac{2 \sin(\Omega L/v)}{\Omega L/v} \left[\frac{\gamma - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \times \right. \\
 & \times \ln \left(\frac{q_m^2}{\omega^2 v^{-2} (1 - \Omega/\omega)^2 (1 - \varepsilon_0(\omega - \Omega) \beta^2)} \right) - \frac{\gamma - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \times \\
 & \times \left. \ln \left(\frac{q_m^2}{\omega^2 v^{-2} (1 + \Omega/\omega)^2 (1 - \varepsilon_0(\omega + \Omega) \beta^2)} \right) \right] \left. \right\} \int \Gamma_N(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 [1 - \varepsilon_0(\omega + \Omega) \beta^2], \\
 \alpha_2 &= \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 [1 - \varepsilon_0(\omega - \Omega) \beta^2], \\
 \gamma &= \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) [1 - \varepsilon_0(\omega + \Omega) \beta^2] [1 - \varepsilon_0(\omega - \Omega) \beta^2]. \tag{28}
 \end{aligned}$$

Выражение (27) упрощается в двух предельных случаях:

$$1) \frac{\Omega}{v} L \ll 1, \quad \Omega \ll \omega; \quad (29)$$

$$2) \frac{\Omega}{v} L \gg 1, \quad \Omega \ll \omega. \quad (30)$$

В первом случае (27) принимает вид

$$W_\omega \simeq W_\omega^0 + f_1(\omega, \beta, \epsilon_0, \dots) \frac{\Omega^2}{\omega^2} L + f_2(\omega, \beta, \epsilon_0, \Omega, \dots) L^3, \quad (31)$$

где f_1 и f_2 — некоторые функции, выражения для которых легко получить, если в (27) ограничиться лишь членами порядка Ω^2/ω^2 . В другом предельном случае имеем

$$W_\omega \simeq \frac{1}{2} W_\omega^0 = \frac{\omega^2 e^2 \Delta \epsilon_\omega^2 L}{12\pi^2 c^3 v_0^2 \epsilon_0^{3/2}(\omega)} \left\{ \ln \left[\frac{q_m^2}{\omega^2 v^{-2} (1 - \epsilon_0(\omega) \beta^2)} \right] - \epsilon_0(\omega) \beta^2 \right\}. \quad (32)$$

Мы видим, что спектральная плотность энергии при выполнении условия (30) уменьшается вдвое по сравнению с соответствующим выражением, полученным для плазмы с постоянными во времени параметрами; однако спектральный вид для обоих случаев одинаков [1-3].

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу, предоставившему тему настоящей работы, а также Н. Г. Денисову за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. П. Капица, ЖЭТФ, 39, 1367 (1960).
- 2 М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН Арм. ССР, 14, 103 (1961).
- 3 В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 257 (1963).
- 4 Н. П. Калашников, М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 45, 325 (1963).
- 5 Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1958.
- 6 А. И. Ахиезер, И. Г. Прохода, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 33, 750 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 ноября 1963 г.

ON RADIATION OF CHARGE MOVING IN MEDIUM WITH FLUCTUATING PARAMETERS

V. V. Tamoykin

The radiation has been considered of a charge moving in gas with thermal fluctuations of pressure and entropy as well as in plasma with those of electron density. It is shown that the spectral density of the electromagnetic waves radiation may be less than the radiation energy when a charge is moving in irregular medium the parameters of which are independent of time.

Примечание при корректуре. Как известно, в реальной равновесной плазме тепловые флюктуации электронной плотности представляют собой сумму двух слагаемых ΔN_1 и ΔN_2 , причем, флюктуации ΔN_1 изменяются во времени с ленгмюровской частотой, а ΔN_2 практически стационарны. Как показывает расчет, флюктуации вносят основной вклад в излучаемую зарядом энергию электромагнитных волн. Однако полученные в статье результаты могут представлять интерес в применении к неравновесной плазме (система: плазма—пучок). В такой системе, как показано в ряде работ, возникают так называемые «критические» флюктуации, которые могут быть аномально велики, если плазма находится в состоянии, близком к неустойчивому. В частности, наличие горячего пучка в плазме всегда приводит к нарастанию достаточно коротковолновых ленгмюровских колебаний, вследствие чего ΔN_1 может стать порядка или больше ΔN_2 .

Выражаю благодарность А. А. Андронову, обратившему внимание автора на это обстоятельство.

УДК 538.3

КОГЕРЕНТНОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОТЯЖЕННЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ

Г. А. Алексеев, П. В. Блиох

Рассматривается тормозное излучение электронных сгустков произвольных размеров и формы. Показано, что для каждой точки наблюдения существует такая поверхность, заряды на которой излучают когерентно в точку наблюдения. Рассчитано распределение по направлениям мощности излучения последовательности электронных сгустков, имеющих форму параллелепипеда.

При ускоренном движении электрических зарядов излучается широкий спектр электромагнитных волн. Неоднократно указывалось (см., например, [1]) на возможность использования тормозного излучения для возбуждения электромагнитных волн. Экспериментальному изучению этого вопроса посвящены работы [2-4].

Как известно, получение достаточной мощности излучения невозможно без предварительного группирования электронного потока. Создание источника, излучающего когерентно во всех направлениях, требует применения сгустков, размеры которых значительно меньше длины волн. Ограничения на размеры сгустков становятся менее жесткими, если потребовать, чтобы система зарядов излучала когерентно не во все стороны, а только в одном определенном направлении. Ниже будет показано, что это условие можно выполнить, используя сгустки, имеющие сколь угодно большую протяженность по двум направлениям. Лишь один из размеров сгустка, его «толщина», по-прежнему ограничивается длиной волны. Форма электронного сгустка должна специально подбираться для данного направления излучения (в общем случае — для данной точки наблюдения). Излучения всех электронов такого сгустка оказываются синфазными в заданной точке наблюдения.

В настоящей работе определяется оптимальная форма электронного сгустка и рассматривается тормозное излучение сгустков, имеющих простую геометрическую форму (отрезок прямой, параллелепипед).

1. ИЗЛУЧЕНИЕ СГУСТКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ. ПОВЕРХНОСТИ КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим систему точечных зарядов, влетающих со скоростью v_0 в бесконечный слой, ограниченный двумя плоскостями $x = 0$ и $x = d$ (рис. 1). Ось y системы координат xyz выберем так, чтобы вектор v_0 лежал в плоскости $z = \text{const}$. Находясь вне слоя, заряды движутся равномерно, а пролетая сквозь слой, испытывают ускорение, при котором возникает тормозное излучение.

Будем считать, что напряженность поля излучения каждого точечного заряда в точке наблюдения $N(X, Y, Z)$ определяется некоторой функцией $g(t - t')$, где $t' = \tau + r/c$, t — текущее время, τ — момент влета заряда в слой торможения, r — расстояние от точки влета до точки

наблюдения, c — скорость света. Вид функции $g(t - t')$ зависит от характера процессов, вызывающих излучение. Мы будем рассматривать такие случаи, когда функция $g(t - t')$, определенная в точке наблюдения,

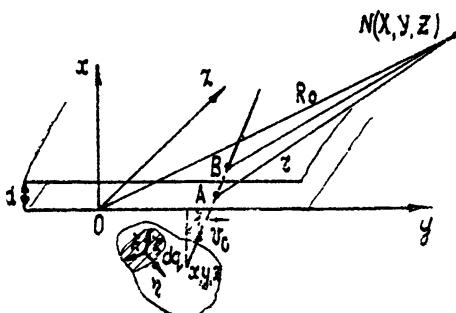


Рис. 1. Положение системы точечных зарядов в начальный момент времени $t = 0$ (A — точка влета и B — точка вылета заряда из области торможения; сечение системы зарядов плоскостью когерентного излучения заштриховано).

небольшая для всех излучающих частиц. Заряд, расположенный в момент времени $t = 0$ в точке x, y, z вызовет импульс излучения, начало которого для наблюдателя в точке N определяется соотношением

$$t' = \tau + \frac{r}{c} = \frac{|x|}{v_0 \cos \beta} + \frac{1}{c} \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}. \quad (1)$$

Здесь x', y', z' — координаты точки влета в слой торможения:

$$x' = 0, \quad y' = y + \tan \beta |x|, \quad z' = z, \quad (2)$$

β — угол между v_0 и осью x . Можно считать, что длительность импульса излучения в точке наблюдения одинакова для всех частиц и равна τ_0 — времени движения зарядов в слое.

Формулу (1) с учетом (2) можно рассматривать как уравнение некоторой поверхности $F(x, y, z) = t'$. Излучение всех зарядов, расположенных на этой поверхности, будет начинаться в точке наблюдения в один и тот же момент времени t' и прекращаться одновременно в момент времени $t' + \tau_0$. Это означает, что заряды излучают в точку N когерентно (поля синфазны) и, следовательно, поверхность

$$t' = \frac{|x|}{v_0 \cos \beta} + \frac{1}{c} \sqrt{X^2 + (Y-y-\tan \beta |x|)^2 + (Z-z)^2} \quad (3)$$

можно назвать поверхностью когерентного излучения для данной точки наблюдения.

Уравнение (3) описывает параметрическое по t' семейство поверхностей когерентного излучения. При изменении t' поверхность (3) перемещается в пространстве x, y, z со скоростью v_0 в направлении, противоположном вектору скорости. Нетрудно показать, что (3) в общем случае является уравнением одной из полостей двухполостного гиперболоида, который в случае $\beta = 0$ является поверхностью вращения (рис. 2а) и в случае $\beta = 0, X = 0$ вырождается в круговой конус.

Естественно, что если заданная совокупность зарядов полностью укладывается на поверхности когерентного излучения, то все заряды

сгустка будут излучать когерентно. Это позволяет получить в данной точке когерентное излучение от сгустков больших размеров. Только один размер, а именно, толщина сгустка в направлении движения ограничивается, как обычно, длиной волны.

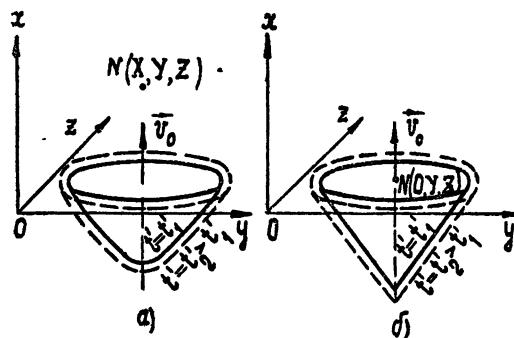


Рис. 2. Поверхность когерентного излучения
для случая $\beta=0$:

- точка наблюдения расположена над плоскостью $x=0$,
- точка наблюдения лежит в плоскости $z=0$.

Если точка наблюдения находится достаточно далеко от места влета зарядов в слой торможения, можно упростить уравнение (3). Вычисляя корень с точностью до членов, линейных относительно x, y, z , получаем

$$t' \approx \frac{|x|}{v_0 \cos \beta} + \frac{R_0}{c} - \frac{\cos \Theta_2}{c} (y + \tan \beta |x|) - \frac{\cos \Theta_3}{c} z, \quad (4)$$

где R_0 — расстояние от начала координат до точки наблюдения, $\cos \Theta_2$, $\cos \Theta_3$ — направляющие косинусы вектора r из точки излучения в точку наблюдения.

Полученное уравнение

$$(c - v_0 \sin \beta \cos \Theta_2) |x| - v_0 \cos \beta \cos \Theta_2 y - v_0 \cos \beta \cos \Theta_3 z + v_0 \cos \beta (R_0 - ct') = 0 \quad (5)$$

является уравнением плоскости, в которую вырождается при достаточном удалении точки наблюдения поверхность когерентного излучения. Плоскость когерентного излучения определяет направление когерентного излучения, а не отдельную точку. В дальнейшем для простоты будем рассматривать именно этот случай.

В каждый текущий момент времени t в точке наблюдения будет существовать не только излучение зарядов, находящихся на поверхности $F(x, y, z) = t' = t$, но и излучение зарядов, лежащих на всех поверхностях с параметром t' , удовлетворяющим неравенству $t - \tau_0 \leq t' \leq t$.

Излучение, вызванное зарядами на этих плоскостях, не успевает прекратиться к моменту $t' = t$. Полное излучение, наблюдаемое в точке N в момент t определяется тем объемом, который вырезают две поверхности когерентного излучения с параметрами t и $t - \tau_0$ из электронного сгустка, зафиксированного в момент $t = 0$.

Так как $\mathbf{g}(t - t')$ описывает излучение в точке N от точечного заряда, то напряженность поля излучения $\mathbf{G}(t)$ всего сгустка выражается следующей формулой:

$$G(t) = \iiint_{V(t)} g[t-t'(x, y, z)] \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

где $\rho(x, y, z)$ — объемная плотность зарядов сгустка, а $V(t)$ — часть объема электронного сгустка, которая пересекается поверхностью когерентности при ее движении за время t_0 . Удобно ввести систему координат ξ, η, ζ , связанную с плоскостью когерентного излучения (5) таким образом, чтобы оси ξ и ζ лежали в этой плоскости, а ось η была направлена по нормали к ней в ту сторону, в которую перемещается плоскость (см. рис. 1). В новой системе координат можно записать

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-t') \frac{d\eta(t')}{dt'} dt' \iint_{S(t')} \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\zeta.$$

Здесь $S(t')$ — площадь сечения сгустка плоскостью когерентности в момент времени t' , если сгусток зафиксирован в положении, соответствующем $t = 0$, а плоскость перемещается. Обозначим $\frac{d\eta}{dt'} \iint_{S(t')} \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\zeta$

через $f(t)$; тогда

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') g(t-t') dt'. \quad (6)$$

На основании (6) спектральная плотность излучения G_ω равна произведению спектров f_ω и g_ω :

$$G_\omega = f_\omega g_\omega. \quad (7)$$

С помощью формул (6), (7) рассмотрим в качестве примеров тормозное излучение линейных сгустков.

a) Излучение линейного однородного сгустка. Пусть сгусток представляет собой отрезок прямой линии длиной L , расположенный в плоскости $z = 0$ под углом α к оси y . При $t = 0$ один из концов сгустка совпадает с началом координат. Будем считать, что интенсивность излучения в точке наблюдения при движении электрона в пространстве торможения не меняется. Тогда функция $g(t-t')$ равна постоянной величине g_0 при $0 < t-t' < t_0$ и равна нулю вне этого интервала значений аргумента. В момент времени t' плоскость излучения пересекает сгусток на расстоянии l от начала координат.

Подставив в (5) $x = -l \sin \alpha$ и $y = l \cos \alpha$, найдем связь между l и t' :

$$l = \frac{v_0 \cos \beta (R_0 - ct')}{v_0 \cos(\alpha - \beta) \cos \theta_2 - c \sin \alpha}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d\eta}{dt'} = \cos(\epsilon - \alpha) \frac{dl}{dt'},$$

$$\iint_{S(t')} \rho(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\zeta = \frac{\rho(l)}{\cos(\epsilon - \alpha)},$$

где ϵ — угол между осью η и осью y , а $\rho(l)$ — линейная плотность заряда.

Рассмотрим сначала сгусток с постоянной линейной плотностью, т. е. будем считать $\rho(l) = \rho_0$ при $0 \leq l \leq L$ и $\rho(l) = 0$ при $l < 0, l > L$. Тогда функция $f(t')$ имеет вид

$$f(t') = \begin{cases} \rho_0 \frac{cv_0 \cos \beta}{c \sin \alpha - v_0 \cos(\alpha - \beta) \cos \Theta_2} & \text{при } t_1 \leq t' \leq t_2 \\ 0 & \text{при } t' < t_1, t' > t_2 \end{cases}$$

Здесь

$$t_1 = \frac{R_0}{c}, \quad t_2 = \frac{R_0}{c} + \frac{c \sin \alpha - v_0 \cos(\alpha - \beta) \cos \Theta_2}{c v_0 \cos \beta} L$$

— моменты пересечения плоскостью излучения крайних точек сгустка.

Подставляя $f(t')$ и $\mathbf{g}(t-t')$ в (7), получаем следующее выражение для спектральной плотности функции $G(t)$:

$$\begin{aligned} G_\omega = & \frac{4}{\omega^2} \rho_0 g_0 \frac{cv_0 \cos \beta}{c \sin \alpha - v_0 \cos(\alpha - \beta) \cos \Theta_2} \sin \frac{\omega \tau_0}{2} \times \\ & \times \sin \left\{ \frac{\omega L}{2cv_0 \cos \beta} [c \sin \alpha - v_0 \cos(\alpha - \beta) \cos \Theta_2] \right\} \exp \left\{ -i\omega \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{R_0}{c} + \frac{\tau_0}{2} + \frac{L}{2cv_0 \cos \beta} (c \sin \alpha - v_0 \cos(\alpha - \beta) \cos \Theta_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из этого выражения видно, что существуют направления, в которых напряженность поля излучения $G(t)$ максимальна и прямо пропорциональна длине сгустка L . Направления когерентного излучения определяются из условия

$$c \sin \alpha - v_0 \cos(\alpha - \beta) \cos \Theta_{2\text{кор}} = 0 \quad (9)$$

и образуют коническую поверхность с углом $\Theta_{2\text{кор}}$ между образующей и осью конуса.

Условие (9) имеет простой физический смысл, который будет понятен, если (9) переписать в виде

$$v^* \cos \Theta_{2\text{кор}} = c,$$

где $v^* = v_0 \cos(\alpha - \beta) / \sin \alpha$ — скорость перемещения вдоль оси y точки пересечения сгустка с границей области торможения. Таким образом, проекция v^* на направление $\Theta_{2\text{кор}}$ должна быть равна скорости распространения волны. Форма импульса излучения определяется с помощью (6).

Изменение амплитуды и длительности импульса $G(t)$ в зависимости от величины параметра $\vartheta = cv_0 \cos \beta / \sin \alpha (c - v^* \cos \Theta_2)$ показано на рис. 3. При возрастании ϑ от 0 до L/τ_0 длительность импульса сокращается, а амплитуда растет. С дальнейшим ростом ϑ амплитуда импульса остается постоянной, а длительность продолжает уменьшаться, достигая минимального значения τ_0 при $\vartheta = 0$, т. е. при $v^* \cos \Theta_2 = c$. Импульс излучения от всего сгустка длиной L в направлении когерентного излучения воспринимается наблюдателем, как импульс точечного излучателя, но с амплитудой, соответствующей полному заряду пучка.

Зависимость длительности импульса по нулевому уровню $\Delta\tau$ от угла Θ_2 выражается формулой

$$\Delta\tau = \frac{L \sin \alpha}{v_0 \cos \beta} \left(1 - v^* \frac{\cos \Theta_2}{c} \right) + \tau_0.$$

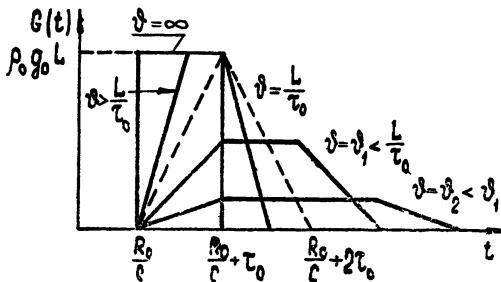


Рис. 3. Изменение формы импульса излучения в зависимости от параметра $\vartheta = cv_0 \cos \beta / \sin \alpha (c - v^* \cos \Theta_2)$.

б) Излучение линейного сгустка, модулированного по плотности. Пусть плотность заряда меняется вдоль длины сгустка по гармоническому закону $\rho(l) = \rho_0 [1 + m \cos(kl)]$ (m — глубина модуляции, k — волновое число). Тогда

$$f(t') = \vartheta \rho(t') = \vartheta \rho_0 [1 + m \cos \gamma (t' - R_0/c)]$$

при $t_1 \ll t' \ll t_2$ и равна нулю вне этого интервала времени. Здесь

$$\gamma = k\vartheta = \frac{k v_0 \cos \beta / \sin \alpha}{1 - (v^*/c) \cos \Theta_2}. \quad (10)$$

Формула (10) показывает, что при излучении модулированного сгустка имеет место своеобразный эффект Допплера. Так как скорость v^* не имеет физических ограничений, частота γ может оказываться сколь угодно высокой. Спектральная плотность излучения модулированного сгустка, рассчитанная по (7), имеет вид

$$G_\omega = \frac{2}{k\omega} \rho_0 g_0 \sin \frac{\omega\tau_0}{2} \exp \left[-i\omega \left(\frac{R_0}{c} + \frac{\tau_0}{2} + \frac{kL}{2\gamma} \right) \right] \left\{ \frac{2\gamma}{\omega} \sin \frac{\omega kL}{2\gamma} + \right. \\ \left. + m \left[e^{ikL/2} \left(\frac{\omega}{\gamma} - 1 \right)^{-1} \sin \left[\frac{kL}{2} \left(\frac{\omega}{\gamma} - 1 \right) \right] + e^{-ikL/2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{\omega}{\gamma} + 1 \right)^{-1} \sin \left[\frac{kL}{2} \left(\frac{\omega}{\gamma} + 1 \right) \right] \right] \right\}. \quad (11)$$

Отсюда видно, что G_ω действительно имеет максимумы при $\omega = \pm \gamma$, связанные с модуляцией пучка. Однако интенсивность излучения в этих максимумах стремится к нулю с ростом ω за счет множителя $\omega^{-1} \sin(\omega\tau_0/2)$. Таким образом, воспользоваться эффектом Допплера для повышения частоты можно лишь при условии $\gamma\tau_0 \ll 1$, т. е. при достаточно малой толщине слоя торможения. Множитель $\omega^{-1} \sin(\omega\tau_0/2)$ характеризует спектральную плотность функции $g(t-t')$. Если выбрать $g(t-t')$ таким образом, чтобы ее спектральная плотность g_ω принимала максимальное значение на частоте γ , а не на частоте

те $\omega=0$, то тогда в соответствии с формулой (7) интенсивность излучения будет на этой частоте наибольшей.

2. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЭЛЕКТРОННЫХ СГУСТКОВ

Рассмотрим периодическую последовательность электронных сгустков, имеющих форму параллелепипеда и влетающих с частотой следования Ω в пространство торможения. На рис. 4 показано положение одного из электронных сгустков в момент времени $t=0$. На этом же

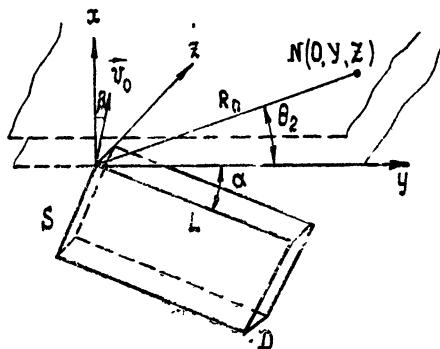


Рис. 4. Положение электронного сгустка в начальный момент времени $t=0$.

чертеже указаны все обозначения. Будем считать, что в слое торможения $0 \leq x \leq d$ сосредоточено либо тормозящее электрическое поле $E_x = E_0$, $E_y = E_z = 0$, либо магнитное поле $H_y = H_0$, $H_x = H_z = 0$. Ускорение электрона соответственно равно $W_{xE} = eE_0/m$; $W_{yE} = W_{zE} = 0$ для электрического поля и $W_{xH} = \omega_0 v_0 \cos \beta \sin(\omega_0 t)$, $W_{yH} = 0$, $W_{zH} = \omega_0 v_0 \cos \beta \cos(\omega_0 t)$ для магнитного поля ($\omega_0 = eH_0/mc$). В последнем случае будем считать, что электрон отражается от магнитного зеркала, т. е. $\omega_0 \tau_0 = \pi$.

Излучение бесконечно малого заряда dq в нерелятивистском приближении определяется следующими формулами [5]:

$$dE = \frac{1}{c^2 r} [(Wn)n] dq, \quad dH = [n \; dE], \quad (12)$$

где n — единичный вектор в направлении от точки излучения до точки наблюдения. Рассмотрим диаграмму направленности излучения в плоскости $y0z$, считая $\theta_1 = \pi/2$; $\theta_3 = \pi/2 - \theta_2$. Полагая $dE = dE_\perp + dE_\parallel$ (dE_\perp — нормальная, dE_\parallel — касательная к плоскости $y0z$ компоненты напряженности), получим из (12), что при торможении электрическим полем

$$\left. \begin{aligned} dE_\perp^e &= \frac{e}{mc^2 r} E_0 dq \\ dE_\parallel^e &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } t' + sT_0 < t < t' + sT_0 + \tau_0; \\ \left. \begin{aligned} dE_\perp^e &= 0 \\ dE_\parallel^e &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } t' + sT_0 + \tau_0 < t < t' + (s+1)T_0; \quad (13)$$

при торможении магнитным полем

$$\left. \begin{aligned} dE_{\perp}^m &= \frac{\omega_0 v_0 \cos \beta}{c^2 r} \sin \omega_0(t-t') dq \\ dE_{\parallel}^m &= \frac{\omega_0 v_0 \cos \beta}{c^2 r} \cos \Theta_2 \cos \omega_0(t-t') dq \end{aligned} \right\} \text{при } t'+sT_0 < t < t'+sT_0+\tau_0; \\ dE_{\perp}^m = 0 \\ dE_{\parallel}^m = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \text{при } t'+sT_0+\tau_0 < t < t'+(s+1)T_0. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Здесь T_0 — период последовательности электронных сгустков, s — номер сгустка. Каждую из составляющих dE можно рассматривать как функцию $\mathbf{g}(t-t')$ бесконечно малого заряда dq . В случае торможения магнитным полем \mathbf{g}_{ω} имеет максимальное значение на частоте ω_0 , соответствующее наибольшей интенсивности излучения. Для вычисления спектральной плотности излучения последовательности сгустков можно было бы воспользоваться формулами предыдущего раздела. Однако благодаря простой геометрической форме сгустков удобнее сразу разложить выражения (13), (14) в ряд Фурье $dE(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} dE_n e^{in\Omega t}$, а затем проинтегрировать по полному заряду сгустка. Составляющие комплексной амплитуды n -ой гармоники после их вычисления имеют вид

$$\begin{aligned} dE_{n\perp}^e &= \frac{eE_0}{\pi n m c^2 r} \sin \frac{n\Omega\tau_0}{2} e^{-in\Omega(\tau_0/2+t')} dq, \\ dE_{n\parallel}^e &= 0; \end{aligned} \quad , \quad (15)$$

$$\begin{aligned} dE_{n\perp}^m &= \frac{\Omega\omega_0^2 v_0 \cos \beta}{\pi c^2 r (n^2 \Omega^2 - \omega_0^2)} \cos \frac{n\Omega\tau_0}{2} e^{-in\Omega(\tau_0/2+t')} dq, \\ dE_{n\parallel}^m &= \frac{n\Omega^2 \omega_0 v_0 \cos \beta}{\pi c^2 r (n^2 \Omega^2 - \omega_0^2)} \cos \frac{n\Omega\tau_0}{2} \cos \Theta_2 e^{-in\Omega(\tau_0/2+t')} dq. \end{aligned} \quad (16)$$

При интегрировании по объему сгустка множитель $1/r$ полагается равным $1/R_0$, а в показателях экспоненты t' заменяем с помощью формулы (4). Результат интегрирования таков:

$$\begin{aligned} E_{n\perp}^e &= \frac{eE_0}{n\Omega m} \sin \frac{n\Omega\tau_0}{2} A_n e^{-iq_n}, \\ E_{n\parallel}^e &= 0; \end{aligned} \quad , \quad (17)$$

$$\begin{aligned} E_{n\perp}^m &= \frac{\omega_0^2 v_0 \cos \beta}{n^2 \Omega^2 - \omega_0^2} \cos \frac{n\Omega\tau_0}{2} A_n e^{-iq_n}, \\ E_{n\parallel}^m &= \frac{n\Omega\omega_0 v_0 \cos \beta}{n^2 \Omega^2 - \omega_0^2} \cos \frac{n\Omega\tau_0}{2} \cos \Theta_2 A_n e^{-i(\varphi_n - \pi/2)}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$A_n = \frac{8\vartheta_0\vartheta_L \vartheta_s\vartheta_D}{\pi n^3 \Omega^2 c^2 R_0} \sin \frac{n\Omega L}{2\vartheta_L} \sin \frac{n\Omega S}{2\vartheta_S} \sin \frac{n\Omega D}{2\vartheta_D}, \quad (19)$$

$$\varphi_n = n \Omega \left(\frac{\tau_0}{2} + \frac{R_0}{c} + \frac{L}{2\theta_L} + \frac{S}{2\theta_S} + \frac{D}{2\theta_D} \right),$$

$$\theta_L = \frac{v_0 \cos \beta / \sin \alpha}{1 - v_0 \cos(\alpha - \beta) \cos \Theta_2 / c \sin \alpha}, \quad \theta_S = \frac{v_0 \cos \beta / \cos \alpha}{1 + v_0 \sin(\alpha - \beta) \cos \Theta_2 / c \cos \alpha},$$

$$\theta_D = \frac{c}{\sin \Theta_2}.$$

Поток мощности на частоте $n\Omega$ соответственно равен

$$P_n^e = \frac{ce^2 E_0^2}{4\pi n^2 \Omega^2 m^2} \sin^2 \left(\frac{n \Omega \tau_0}{2} \right) A_n^2; \quad (20)$$

$$P_n^m = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\omega_0 v_0 \cos \beta}{n^2 \Omega^2 - \omega_0^2} \right)^2 \cos^2 \frac{n \Omega \tau_0}{2} (n^2 \Omega^2 \cos^2 \Theta_2 + \omega_0^2) A_n^2. \quad (21)$$

Проанализируем зависимость мощности излучения от направления в точку наблюдения, т. е. диаграмму направленности в плоскости yOz . Из формулы (19) видно, что существуют направления, для которых мощность излучения прямо пропорциональна квадрату размеров сгустка L , S или D . Направления когерентного излучения определяются из условий

$$1 - \frac{v_0 \cos(\alpha - \beta)}{c \sin \alpha} \cos \Theta_{2L} = 0 \quad (\theta_L = \infty); \quad (22)$$

$$1 + \frac{v_0 \sin(\alpha - \beta)}{c \cos \alpha} \cos \Theta_{2S} = 0 \quad (\theta_S = \infty); \quad (23)$$

$$\sin \Theta_{2D} = 0 \quad (\theta_D = \infty). \quad (24)$$

Одновременное выполнение условий (22) и (23) для какого-либо направления Θ_2 невозможно вследствие их несовместности. Если условие (22) выполняется при $\Theta_{2L} = 0$ или условие (23) выполняется при $\Theta_{2S} = \pi$, то при этом выполняется (24), т. е. обеспечивается когерентность излучения и по размеру D . Таким образом, два размера сгустка (L и D или S и D) могут быть выбраны сколь угодно большими без нарушения когерентности. Если одновременно третий размер сгустка достаточно мал (например, $S \ll 2v_0 \cos \beta / n \Omega \cos \alpha$ или $L \ll 2v_0 \cos \beta / n \Omega \sin \alpha$), то весь объем сгустка будет излучать когерентно.

На рис. 5 приведены диаграммы направленности излучения в электрическом поле, рассчитанные по (20), при $\alpha = \beta$ для случая $\sin \alpha = v_0 / c$; $\Theta_{2L} = 0$ и для случая $\sin \alpha = \sqrt{3} v_0 / 2c$; $\Theta_{2L} = \pm 30^\circ$ (пунктирная кривая). Диаграммы направленности излучения в магнитном поле значительно отличаются от приведенных за счет дополнительного множителя в (21), зависящего от $\cos \Theta_2$. Количество боковых лепестков на диаграммах определяется соотношением между размерами сгустка L , D и длиной волны.

При торможении в магнитном поле максимум энергии излучения приходится на гармонику с $n = \omega_0 / \Omega$, соответствующую частоте возбуждения ω_0 :

$$P_{\omega_0}^m = \frac{\pi c}{64} v_0^2 \cos^2 \beta (\cos^2 \Theta_2 + 1) A_{\omega_0}^2.$$

Приведем в заключение формулы для максимальной мощности излучения на частоте $n\Omega$ при $\Theta_{2L}=0$ и $S \ll 2v_0 \cos \beta / n \Omega \cos \alpha$:

$$P_n^e = \frac{e^2 \rho_0^2 E_0^2}{4\pi^3 m^2 c^3 n^2 R_0^2} L^2 S^2 D^2; \quad (25)$$

$$P_n^m = \frac{\rho_0^2 v_0^2 \cos^2 \beta \Omega^2 \omega_0^2 (n^2 \Omega^2 + \omega_0^2)}{4\pi^3 c^3 R_0^2 (n^2 \Omega^2 - \omega_0^2)^2} L^2 S^2 D^2; \quad (26)$$

τ_0 выбирается таким образом, чтобы при торможении в электрическом поле $\sin(n\Omega\tau_0/2)=1$, а в магнитном поле $\cos(n\Omega\tau_0/2)=1$.

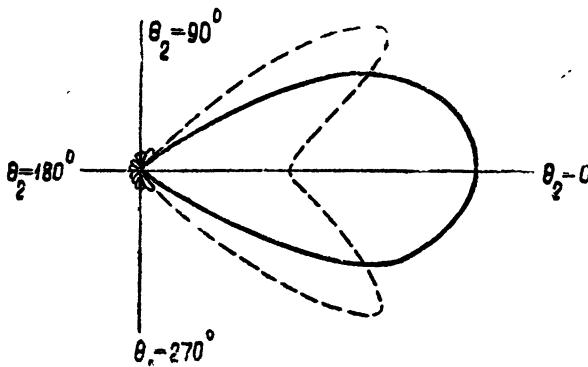


Рис. 5. Диаграммы направленности в плоскости $x=0$ при $\Theta_{2L}=0$ (сплошная кривая) и $\Theta_{2L}=\pm 30^\circ$ (пунктир).

Расчет по (25) показывает, что при тормозящем напряжении $u_0 = 20$ кв, расстоянии между пластинами тормозящего конденсатора $d = 0,1$ см для электронных сгустков с $L = 10$ см, $D = 1$ см, $S = 0,1$ см при частоте следования $f = 10^{10}$ гц, поток мощности десятой гармоники (что соответствует длине волны 3 мм) равен 14 мвт·см⁻² на расстоянии $R_0 = 15$ см. Плотность тока при этом предполагалась равной 20 а·см⁻² при начальной скорости $v_0 = 1 \cdot 10^{10}$ см·сек⁻¹. ($u_{\text{ускор}} = 30$ кв). При торможении в магнитном поле $H_0 \sim 16$ кэ ($\omega_0 = 6 \cdot 10^{10}$ рад·сек⁻¹) поток мощности в направлении когерентного излучения, рассчитанный по формуле (26), равен 30 мвт·см⁻². Угол наклона сгустков при $\beta=0$ равен 18°. Поток мощности излучения таких сгустков на четыре порядка превышает поток мощности излучения сгустков, влетающих в пространство торможения строго вертикально.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 27, 761 (1954).
2. К. И. Крылов, Изв. ЛЭТИ, № 34, 188 (1958).
3. К. И. Крылов, Изв. ЛЭТИ, № 36, 3 (1958).
4. В. W. Hakkil, IRE Trans., ED—9, 439 (1962).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960.

COHERENT BREMSSTRAHLUNG OF EXTENDED ELECTRON CLUSTERS

G. A. Alekseev. P. V. Bliokh

Bremsstrahlung is considered of electron clusters of arbitrary dimensions and form. It is shown that for each fixed point there exists a surface with coherent radiated charge distribution. The distribution has been calculated of directions of radiation power of electron clusters succession having the form of parallelepiped.

УДК 621.378

К ТЕОРИИ ФЛЮКТУАЦИЙ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА*В. Б. Цареградский*

На основе уравнений для усредненного вектора поляризации рассмотрено влияние тепловых и дробовых флюктуаций на колебания молекулярного генератора. Найдены спектральные плотности флюктуаций амплитуды и частоты. Показано, что высокая стабильность и монохроматичность колебаний молекулярного генератора могут быть объяснены авторегулирующим действием разности фаз поля и поляризации.

Задача о поведении молекулярного генератора при наличии случайных воздействий рассматривалась в ряде работ (см., например, [1–5]). Наиболее полное исследование влияния шумов теплового излучения и дробового эффекта потока молекул на колебания молекулярного генератора выполнено в [1–3]. Однако выбранное в [1–3] модельное представление молекулярного пучка в виде диэлектрика с проницаемостью ϵ адекватно описывает только гармонические процессы. Поэтому в рамках этой модели можно судить лишь о медленных флюктуациях молекулярного генератора (точнее, характерный временной масштаб этих флюктуаций должен быть много больше времени пролета молекул через резонатор). В настоящей статье исследование флюктуаций проводится на основе уравнений для усредненного вектора поляризации, аналогичных выведенным в [6–8]. Это позволяет рассмотреть задачу без ограничений на скорость флюктуаций.

1. УРАВНЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ

Колебания молекулярного генератора можно описать следующей системой уравнений [6–8] (см. также Приложение А):

$$\ddot{P} + \frac{2}{\tau_0} \dot{P} + \left(\omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau_0^2} \right) P = - \frac{2\omega_{21}}{\hbar} |d_{21}|^2 A_s N; \quad (1a)$$

$$\dot{N} + \frac{1}{\tau_0} (N - N_0) = \frac{2}{\hbar \omega_{21}} A_s \left(\dot{P} + \frac{1}{\tau_0} P \right); \quad (1b)$$

$$\ddot{A}_s + \frac{\omega_s}{Q_s} \dot{A}_s + \omega_s^2 A_s = - 4\pi\chi \ddot{P}; \quad (1c)$$

$$\chi = V_n / \int E_s^2 dV, \quad (1d)$$

где P — поляризация пучка, N — плотность активных молекул, N_0 — плотность активных молекул в отсутствие поля (или плотность на входе резонатора), τ_0 — среднее время пролета молекул через резонатор, ω_{21} — частота перехода между рабочими уровнями молекулы E_2 и E_1 , d_{21} — матричный элемент дипольного момента, $E_s(r, t) = A_s(t) E_s(r)$ — электрическое поле s -моды, ω_s и Q_s — частота и добротность s -моды,

χ — фактор заполнения резонатора пучком, равный отношению объема пучка V_p к нормировке s -моды.

При выводе (1) предполагалось, что в области пучка поле $E_s(r)$ однородно и равно по величине единице*.

Система (1) записана без учета флюктуаций. Причиной флюктуаций амплитуды и частоты в молекулярном генераторе является «сторонняя сила» тепловых флюктуаций поля излучения в резонаторе (обозначим ее через $f_1(t)$; см. Приложение Б) и дробовой эффект потока молекул**. Влияние последнего на колебания учитывается посредством эквивалентной сторонней силы дробовых флюктуаций в (16) (см. Приложение А), равной $m(t)/\tau_0$, где $m(t)$ — случайные изменения плотности числа частиц вблизи среднего значения \bar{N}_0 .

Введем следующие обозначения:

$$\eta = \frac{4\pi Q_s \bar{N}_0 |d_{21}|^2 \tau_0}{\hbar}; v = \frac{(\omega_{21} - \omega_s) \tau_0}{K}; K = \frac{Q_s}{Q_s} \simeq 10^3 \div 10^4;$$

$$Q_s = \frac{\omega_{21} \tau_0}{2}; \beta = \frac{|d_{21}|^2}{\hbar^2}; \mu_1 = \frac{1}{Q_s} \simeq 2 \cdot 10^{-4}; \mu_2 = \frac{1}{Q_s} \simeq 10^{-7} \quad (2)$$

и новые переменные

$$t_1 = \omega_{21} t; A_s = \sqrt{\frac{\eta - 1}{\beta \tau_0^2}} e; P = \frac{1}{4\pi Q_s} \sqrt{\frac{\eta - 1}{\beta \tau_0^2}} p; N = \bar{N}_0 (1 + n). \quad (3)$$

Используя (2), (3), приведем уравнения молекулярного генератора с учетом флюктуаций к виду

$$\ddot{p} + p = -\mu_2 [\dot{p} + \eta (1 + n) e];$$

$$\dot{n} = \mu_2 \left[\frac{\eta - 1}{\eta} e \dot{p} - \frac{n}{2} \right] + \frac{\mu_2}{2} \frac{m(t_1)}{\bar{N}_0}; \quad (4)$$

$$\ddot{e} + e = \mu_1 \left[\chi p - \frac{\omega_s}{\omega_{21}} \dot{e} + ve \right] + \xi(t_1),$$

где

$$\xi(t_1) = \frac{1}{\omega_{21}^2} \sqrt{\frac{\beta \tau_0^2}{\eta - 1}} f_1(t_1),$$

а точка сверху означает дифференцирование по безразмерному времени t_1 . В системе (4) оставлены только члены первого порядка малости по параметрам μ_1 и μ_2 .

Решение (4) будем искать методом Ван-дер-Поля. Для этого представим напряженность электрического поля $e(t_1)$ и поляризацию $p(t_1)$ в виде синусоидальных колебаний с медленно меняющимися амплитудами $e_0(t_1)$ и $p_0(t_1)$ и фазами $\vartheta(t_1)$ и $\varphi(t_1)$:

$$e(t_1) = e_0(t_1) \cos [t_1 + \vartheta(t_1)]; \dot{e}(t_1) = -e_0(t_1) \sin [t_1 + \vartheta(t_1)]; \quad (5)$$

$$p(t_1) = p_0(t_1) \cos [t_1 + \varphi(t_1)]; \dot{p}(t_1) = -p_0(t_1) \sin [t_1 + \varphi(t_1)].$$

* Это справедливо для тонких пучков

** В данной статье мы не рассматриваем шумовое излучение, источником которого является сам пучок [16, 17]

Обычные преобразования [9, 10] приводят к следующим укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{e}_0 &= -\frac{1}{2} \mu_1 \left[\frac{\omega_s}{\omega_{21}} e_0 + \chi p_0 \sin \Phi \right] - \xi_{\perp}; \\ \dot{\vartheta} &= -\frac{1}{2} \mu_1 \left[\chi \frac{p_0}{e_0} \cos \Phi + v \right] - \xi_{\parallel}; \\ \dot{p}_0 &= -\frac{1}{2} \mu_2 [p_0 + \eta(1+n)e_0 \sin \Phi]; \\ \dot{n} &= \frac{1}{2} \mu_2 \left[\frac{\eta-1}{\eta} e_0 p_0 \sin \Phi - n \right] + \frac{\mu_2}{2} \frac{m(t_1)}{N_0}; \\ \dot{\Phi} &= -\frac{\mu_1}{2} \left[\chi \frac{p_0}{e_0} \cos \Phi + v \right] - \frac{\mu_2}{2} \eta(1+n) \frac{e_0}{p_0} \cos \Phi - \xi_{\perp}.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $\Phi = \vartheta - \varphi$ — разность фаз колебаний, а ξ_{\perp} и ξ_{\parallel} , согласно [11], равны*

$$\xi_{\perp} = \xi(t_1) \sin(t_1 + \vartheta); \quad \xi_{\parallel} = \frac{1}{e_0(t_1)} \xi(t_1) \cos(t_1 + \vartheta). \quad (7)$$

Стационарные значения динамических переменных молекулярного генератора определяются из уравнений

$$\begin{aligned}v + \chi \frac{p_0}{e_0} \cos \Phi + \frac{1}{K} \eta(1+n) \frac{e_0}{p_0} \cos \Phi &= 0; \\ \chi p_0 \sin \Phi + \frac{\omega_s}{\omega_{21}} e_0 &= 0; \quad n = \frac{\eta-1}{\eta} e_0 p_0 \sin \Phi; \\ p_0 + \eta(1+n) e_0 \sin \Phi &= 0,\end{aligned}\quad (8)$$

решением которых с точностью до членов порядка $1/K$ служат**

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} \Phi^c &= v; \quad \sin \Phi^c = -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}; \quad e_0^c = \sqrt{\frac{\chi \eta - 1 - v^2}{\eta - 1}}; \\ p_0^c &= \frac{\sqrt{1+v^2}}{\chi} \sqrt{\frac{\chi \eta - 1 - v^2}{\eta - 1}}; \quad n^c = -\frac{\chi \eta - 1 - v^2}{\chi \eta}.\end{aligned}\quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что стационарные значения (9) совпадают с аналогичными величинами, найденными в работах [10, 12].

Частоту колебаний ω_r определим из следующих соображений. В установившемся режиме

$$\dot{\vartheta}^c = \dot{\varphi}^c;$$

поэтому

$$\omega_r = \omega_{21} (1 + \dot{\vartheta}^c) = \omega_{21} (1 + \dot{\varphi}^c) = \omega_{21} \left[1 + \frac{\mu_2}{2} \eta(1+n^c) \frac{e_0^c}{p_0^c} \cos \Phi^c \right]. \quad (10)$$

* Как показал Малахов [20], метод, развитый в [11], справедлив лишь для случая, когда $\xi(t)$ имеет широкий спектр.

** Индекс «с» сверху указывает на стационарный режим.

Согласно (9),

$$\omega_r - \omega_{21} = -\omega_{21} \frac{\mu_2}{2} v. \quad (11)$$

Используя (2), приходим к известному выражению [12]

$$\omega_r - \omega_{21} = \frac{Q_s}{Q_a} (\omega_s - \omega_{21}).$$

В дальнейшем нам потребуется также выражение для мощности P_r , отдаваемой генератором в нагрузку. С этой целью введем внешнюю добротность Q_2 , обусловленную нагрузкой. Простые рассуждения приводят к следующей формуле:

$$P_r = \frac{Q_s}{Q_2} \frac{\bar{N} \hbar \omega_{21}}{2 \zeta \gamma_i} (\chi \gamma_i - 1 - v^2), \quad (12)$$

где $\bar{N} = \bar{N}_0 V_n / \tau_0$ — среднее число молекул, поступающих в резонатор в единицу времени.

При больших значениях параметра возбуждения $\chi \gamma_i$ максимальная мощность в нагрузке

$$P_r = \frac{Q_s}{Q_2} \frac{\bar{N} \hbar \omega_{21}}{2}. \quad (13)$$

Выражение (13) имеет простой физический смысл: интенсивный пучок отдает резонатору половину запасенной в нем энергии.

2. ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА

В стационарном режиме колебаний динамические переменные молекулярного генератора испытывают флюктуации. Вследствие малости последних система (6) может быть линеаризована. Для этого положим

$$\begin{aligned} e_0(t_1) &= e_0^c [1 + \alpha(t_1)]; p_0(t_1) = p_0^c [1 + \beta(t_1)]; \\ 1 + \dot{\vartheta} &= \frac{\omega_r}{\omega_{21}} + \dot{\psi}(t_1) = \frac{\omega_r}{\omega_{21}} + \nu(t_1); n = n^c + n_\Phi; \\ 1 + \dot{\varphi} &= \frac{\omega_r}{\omega_{21}} + \dot{\chi}(t_1); \Phi = \Phi^c + \Phi_\Phi(t_1); \\ \dot{\Phi}_\Phi(t_1) &= \dot{\psi}(t_1) - \dot{\chi}(t_1). \end{aligned} \quad (14)$$

Величины α , β , ψ , χ представляют собой соответственно амплитудные и фазовые флюктуации поля и поляризации, n_Φ — динамические флюктуации плотности активных молекул, Φ_Φ — флюктуации разности фаз поля и поляризации (порядок малости Φ_Φ оценивается ниже).

Подставим (14) в (6). Учитывая (8) и опуская промежуточные выкладки, получим в первом приближении

$$\dot{\alpha} = -\frac{\mu'_1}{2} \sigma + \frac{\mu'_1}{2} \beta + \frac{\mu'_1}{2} v_1 \Phi_\Phi - \frac{1}{e_0^c} \xi_\perp; \quad (15a)$$

$$\dot{\beta} = \frac{\mu_2}{2} \alpha - \frac{\mu_2}{2} \beta + \frac{\mu_2}{2} \frac{\gamma_i \chi}{(1 + v_1^2)} n_\Phi + \frac{\mu_2}{2} v_1 \Phi_\Phi; \quad (15b)$$

$$\dot{n}_\Phi = \frac{\mu_2}{2} n_i^c \alpha + \frac{\mu_2}{2} n_i^c \beta - \frac{\mu_2}{2} n_\Phi + \frac{\mu_2}{2} n_i^c v_1 \Phi_\Phi + \frac{\mu_2}{2} \frac{m(t_1)}{N_0}; \quad (15\text{в})$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_\Phi = & -\frac{1}{2} (\mu'_1 - \mu_2) v_1 \alpha + \frac{(\mu'_1 - \mu_2)}{2} v_1 \beta + \frac{\mu_2}{2} \frac{\chi \eta v_1}{(1 + v_1^2)} n_\Phi - \\ & - \frac{(\mu'_1 + \mu_2)}{2} \Phi_\Phi - \xi_{\parallel}; \end{aligned} \quad (15\text{г})$$

$$v(t_1) = -\frac{\mu'_1}{2} v_1 \alpha + \frac{\mu'_1}{2} v_1 \beta - \frac{\mu'_1}{2} \Phi_\Phi - \xi_{\parallel}, \quad (15\text{д})$$

где

$$\mu'_1 = \frac{\omega_s}{\omega_{21}} \mu_1; \quad v_1 = \frac{Kv}{K(\omega_s/\omega_{21}) + 1}; \quad n_i^c = -\frac{\omega_s}{\omega_{21}} \frac{(\omega_{21}/\omega_s) \chi \eta - 1 - v^2}{\chi \eta}.$$

Однородная часть (15) является известной системой в вариациях для исследования устойчивости стационарного решения. Как показывает детальное рассмотрение корней характеристического уравнения, стационарный режим молекулярного генератора всегда устойчив, если выполнено условие самовозбуждения

$$\chi \eta - 1 - v^2 > 0. \quad (16)$$

По поводу последнего заметим следующее. При выводе (4), (6), (15) мы считали, что η не слишком велико* и опустили члены порядка $\mu_1 \mu_2 \eta$ и $\mu_2^2 \eta$. Если считать, что η может достигать значений порядка $1/\mu_1$ или $1/\mu_2$, то подобная процедура незаконна. Строгое исследование [13] показывает, что в этой области имеется верхняя граница неустойчивости стационарного решения. Однако на практике такие значения параметра η недостижимы и поэтому при выполнении (16) колебания молекулярного генератора всегда устойчивы (см. также [10]).

Выделение в явном виде двух малых параметров позволяет, не решая задачи, разделить динамические переменные молекулярного генератора на «быстрые» и «медленные». Это утверждение следует сразу, если обратить внимание на порядок правых частей (15). При нарушении стационарного режима вначале устанавливаются «быстрые» величины α , Φ_Φ , ψ , v , а затем уже происходит медленное установление переменных β и n_Φ , за которыми квазистатически следят «быстрые» α , Φ_Φ , ψ , v [10]. Заметим, что именно это обстоятельство ограничивает применение одностепенной модели для исследования флюктуаций молекулярного генератора.

Решение (15) будем искать методом Фурье. Для этого положим

$$\begin{aligned} \xi(t_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\Omega) e^{i\Omega t_1} d\Omega; \quad \xi(\Omega) = \int_0^T \xi(t_1) e^{-i\Omega t_1} dt_1; \\ m(t_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(\Omega) e^{i\Omega t_1} d\Omega; \quad m(\Omega) = \int_0^T m(t_1) e^{-i\Omega t_1} dt_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично вводятся фурье-сопряженные $\alpha(\Omega)$, $\beta(\Omega)$, $n_\Phi(\Omega)$, $\Phi_\Phi(\Omega)$ и $v(\Omega)$. Нетрудно видеть, что фурье-спектры $\frac{1}{e_0^c} \xi_{\perp}$ и ξ_{\parallel} [11] имеют вид

* На практике $\chi \eta$ — порядка нескольких единиц.

$$\frac{1}{e_0^c} \xi_{\perp}(\Omega) = \frac{i}{2e_0^c} [\xi(\Omega + \omega_r^*) - \xi(\Omega - \omega_r^*)]; \\ \xi_{\parallel}(\Omega) = \frac{1}{2e_0^c} [\xi(\Omega + \omega_r^*) + \xi(\Omega - \omega_r^*)], \quad (18)$$

иде

$$\omega_r^* = \omega_r/\omega_{21}.$$

Подставляя (17), (18) в (15) и производя ряд преобразований, получим систему

$$\begin{aligned} & - \left[i\Omega + \frac{\mu_1'}{2}(iv_1 + 1) - \frac{i\mu_2}{2}v_1 \right] \alpha(\Omega) + \left[\frac{\mu_1'}{2}(1 + iv_1) - \frac{\mu_2}{2}iv_1 \right] \beta(\Omega) + \\ & + \frac{\mu_2}{2} \frac{\chi\eta iv_1}{1+v_1^2} n_{\Phi}(\Omega) + \left[\frac{\mu_1'}{2}(v_1 - i) - \frac{\mu_2}{2}i + \Omega \right] \Phi_{\Phi}(\Omega) = \frac{i}{e_0} \xi(\Omega + \omega_r^*); \\ & \frac{\mu_2}{2} \alpha(\Omega) - \left(i\Omega + \frac{\mu_2}{2} \right) \beta(\Omega) + \frac{\mu_2}{2} \frac{\gamma\chi}{1+v_1^2} n_{\Phi}(\Omega) + \frac{\mu_2}{2} v_1 \Phi_{\Phi}(\Omega) = 0; \\ & \frac{\mu_2}{2} n_1^c \alpha(\Omega) + \frac{\mu_2}{2} n_1^c \beta(\Omega) - \left(\frac{\mu_2}{2} + i\Omega \right) n_{\Phi}(\Omega) + \frac{\mu_2}{2} n_1^c v_1 \Phi_{\Phi}(\Omega) = - \frac{\mu_2}{2} \frac{m(\Omega)}{N_0}; \\ & \left[\frac{\Omega}{2} - \frac{\mu_1'}{4}(v_1 + i) + \frac{\mu_2}{4}v_1 \right] \alpha(\Omega) + \left[\frac{\mu_1'}{4}(i + v_1) - \frac{\mu_2}{4}v_1 \right] \beta(\Omega) + \\ & + \frac{\mu_2}{4} \frac{\chi\eta v_1}{1+v_1^2} n_{\Phi}(\Omega) + \left[\frac{\mu_1'}{4}(iv_1 - 1) - \frac{\mu_2}{4} - i\frac{\Omega}{2} \right] \Phi_{\Phi}(\Omega) = \frac{1}{2e_0^c} \xi(\Omega - \omega_r^*), \end{aligned} \quad (19)$$

решение которой позволяет судить о флюктуациях всех динамических величин молекулярного генератора. Предметом дальнейших исследований являются амплитудные и частотные флюктуации поля в резонаторе. Опустив промежуточные выкладки, для $\alpha(\Omega)$ и $\nu(\Omega)$ приведем окончательный результат:

$$\alpha(\Omega) = \Delta_1/\Delta;$$

$$\Delta = \frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{8} (\chi\eta - 1 - v^2) + \frac{\mu_1^2 \mu_2}{8} (1 + v^2) i\Omega - \frac{\mu_1^2}{4} (1 + v^2) \Omega^2;$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \frac{1}{e_0^c} \left\{ \left[\frac{\mu_1(v+i)}{4} \Omega^2 - \frac{\mu_1 \mu_2}{8} (v^2 + 3iv - 2) \Omega + \frac{\mu_1 \mu_2^2}{16} i(2iv - 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + v^2 + \eta\chi n^c) \right] \xi(\Omega + \omega_r^*) + \left[\frac{\mu_1(v-i)}{4} \Omega^2 - \frac{\mu_1 \mu_2}{8} (2 + 3iv - v^2) \Omega - \right. \right. \\ \left. \left. - v^2 + \eta\chi n^c) \right] \xi(\Omega - \omega_r^*) + \frac{\mu_1 \mu_2^2}{16} i \eta\chi (\mu_1 + 2i\Omega) \frac{m(\Omega)}{N_0} \right\}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\nu(\Omega) = \nu_T^+(\Omega) + \nu_T^-(\Omega) + \nu_{\Delta}(\Omega);$$

$$\nu_T^+ = \frac{1}{e_0^c \Lambda} \left\{ \frac{\mu_1(v+i)}{4} \Omega^3 + \frac{\mu_1 \mu_2}{8} (2 - v^2 - 3iv) \Omega^2 + \frac{\mu_1 \mu_2^2}{16} i(2\chi\eta n^c - \right. \right. \\ \left. \left. - v^2 + \eta\chi n^c) \right\};$$

$$\begin{aligned}
 & - 1 + v^2 + 2iv - i\chi\eta n^c v) \Omega - \frac{\mu_1 \mu_2^3}{16} \eta\chi n^c (iv - 1) \Big\} \xi (\Omega + \omega_r^*) ; \\
 & \nu_T = \frac{1}{e_0^c \Delta} \left\{ \frac{\mu_1 (i - v)}{4} \Omega^3 + \frac{\mu_1 \mu_2}{8} (2 - v^2 + 3iv) \Omega^2 + \right. \\
 & + \frac{\mu_1 \mu_2^2}{16} (2i\eta\chi n^c - \eta\chi n^c v + 2v + iv^2 - i) \Omega + \frac{\mu_1 \mu_2^3}{16} \eta\chi n^c (1 + \\
 & \left. + iv) \right\} \xi (\Omega - \omega_r^*) ; \\
 & \nu_d(\Omega) = - \frac{\mu_1^2 \mu_2^2}{16\Delta} \chi\eta iv \Omega \frac{m(\Omega)}{N_0} .
 \end{aligned} \quad (21)$$

Умножим (20) и (21) на сопряженные величины. Усредняя и полагая, как обычно [11],

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \overline{\xi(\Omega) \xi^*(\Omega)} = W_\xi(\Omega); \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \overline{m(\Omega) m^*(\Omega)} = W_m(\Omega);$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \overline{\alpha(\Omega) \alpha^*(\Omega)} = W_\alpha(\Omega); \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \overline{\nu(\Omega) \nu^*(\Omega)} = W_\nu(\Omega),$$

будем иметь для спектра мощности флюктуаций* амплитуды $W_\alpha(\Omega)$ и частоты $W_\nu(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
 & W_\alpha(\Omega) = \left\langle \chi^2 \eta^2 \frac{W_m(\Omega)}{N_0^2} + \frac{2}{(e_0^c)^2 \mu_1^2} \left\{ (1 + v^2) \left(\frac{2\Omega}{\mu_2} \right)^4 + \right. \right. \\
 & + [(2 + v^2)^2 + v^2 - 2\chi\eta] \left(\frac{2\Omega}{\mu_2} \right)^2 + [(\chi\eta - 2v^2)^2 + 4v^2] \left. \right\} W_\xi(\omega_r^*) \times \\
 & \times \left\{ \left[2(\chi\eta - 1 - v^2) - (1 + v^2) \left(\frac{2\Omega}{\mu_2} \right)^2 \right]^2 + (1 + v^2)^2 \left(\frac{2\Omega}{\mu_2} \right)^2 \right\}^{-1}; \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & W_\nu(\Omega) = \left\langle \chi^2 \eta^2 v^2 \Omega^2 \frac{W_m(\Omega)}{N_0^2} + \frac{1}{2K^2 (e_0^c)^2} \left\{ (1 + v^2) \left(\frac{2\Omega}{\mu_2} \right)^6 + \right. \right. \\
 & + (2 + v^2) (2\eta\chi n^c + 1 + v^2) \left(\frac{2\Omega}{\mu_2} \right)^4 + [\chi^2 \eta^2 (n^c)^2 (4 + v^2) + \quad (23) \\
 & + 4\chi\eta n^c (1 + 2v^2) + (1 + v^2)^2] \left(\frac{2\Omega}{\mu_2} \right)^2 + 4\chi^2 \eta^2 (n^c)^2 (1 + v^2) \left. \right\} W_\xi(\omega_r^*) \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left\{ [2(\chi\eta - 1 - v^2) - (1 + v^2) \left(\frac{2\Omega}{\mu_2} \right)^2]^2 + (1 + v^2)^2 \left(\frac{2\Omega}{\mu_2} \right)^2 \right\}^{-1}.$$

При выводе (22) и (23) предполагалось, что

$$W_\xi(\omega_r^* + \Omega) \approx W_\xi(\omega_r^* - \Omega) \approx W_\xi(\omega_r^*); (\Omega/\mu_1) \ll 1.$$

В выражениях (22), (23) Ω и ν — безразмерные частоты. Переход к размерной текущей частоте ω и спектру мощности флюктуаций частоты колебаний ω_r сводится к замене:

* Спектральные плотности мы относим к частоте f . Однако, для сокращения записи они пишутся с аргументом $\Omega = 2\pi f$.

$$\omega = \omega_{21} \Omega; W_{\omega_r}(\Omega) = \omega_{21}^2 W_v(\Omega).$$

Учитывая это, а также (12), и раскрывая значения спектральных плотностей $W_\xi(\omega_r)$ (Приложение Б) и $W_m(\omega)$ (Приложение В) по формулам

$$W_\xi(\omega_r) = \frac{4 \chi \eta \mu_1^2}{(\gamma_1 - 1) \bar{N}} \frac{\Theta(\omega_r, T)}{\hbar \omega_s}; \quad \Theta(\omega_r, T) = \left(\frac{\hbar \omega_r}{2} + \frac{\hbar \omega_r}{e^{\hbar \omega_r / kT} - 1} \right);$$

$$\frac{W_m(\omega)}{\bar{N}_0^2} = \frac{4}{\bar{N}} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_0^2},$$

окончательно получим

$$W_\alpha(\omega) = \left\langle 4 \chi^2 \eta^2 \frac{1}{\bar{N}(1 + \omega^2 \tau_0^2)} + \frac{4}{Q_2 P_r} \Theta(\omega_r, T) Q_s \left\{ (1 + v^2) \times \right. \right. \\ \times (\omega \tau_0)^4 + [(2 + v^2)^2 + v^2 - 2\chi \eta] (\omega \tau_0)^2 + [(\chi \gamma_1 - 2v^2)^2 + 4v^2] \left. \right\rangle \times \\ \times \{ [2(\chi \gamma_1 - 1 - v^2) - (1 + v^2)(\omega \tau_0)^2]^2 + (1 + v^2)^2 (\omega \tau_0)^2 \}^{-1}; \quad (24)$$

$$W_{\omega_r}(\omega) = \left\langle 4 \gamma_1^2 \chi^2 v^2 \omega^2 \frac{1}{\bar{N}(1 + \omega^2 \tau_0^2)} + \frac{\mu_2^2 \omega_{21}^2 Q_s \Theta(\omega_r, T)}{P_r Q_2} \times \right. \\ \times \{ (1 + v^2)(\omega \tau_0)^6 + (2 + v^2)(2\chi \gamma_1 n^c + 1 + v^2)(\omega \tau_0)^4 + [\chi^2 \gamma_1^2 (n^c)^2 \times \\ \times (4 + v^2) + 4\chi \gamma_1 n^c (1 + 2v^2) + (1 + v^2)^3] (\omega \tau_0)^2 + 4\chi^2 \gamma_1^2 (n^c)^2 \times \\ \times (1 + v^2) \} \left. \right\rangle \{ [2(\chi \gamma_1 - 1 - v^2) - (1 + v^2)(\omega \tau_0)^2]^2 + (1 + v^2)^2 (\omega \tau_0)^2 \}^{-1}. \quad (25)$$

Найденные соотношения справедливы почти во всей области генерации, за исключением границы колебаний

$$\chi \gamma_1 - 1 - v^2 = 0, \quad (26)$$

где они теряют смысл из-за невыполнения требования малости возмущений, положенного в основу анализа*.

3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ. СПЕКТРАЛЬНАЯ ШИРИНА ЛИНИИ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА

Рассмотрим медленные флюктуации $\omega \ll 1/\tau_0$. Соответствующие им спектральные плотности имеют вид

$$W_\alpha(\omega) = \frac{1}{(\chi \gamma_1 - 1 - v^2)^2} \left\{ \frac{\chi^2 \gamma_1^2}{\bar{N}} + \frac{Q_s \Theta(\omega_r, T)}{Q_2 P_r} [(\chi \gamma_1 - 2v^2)^2 + 4v^2] \right\}; \quad (27)$$

$$W_{\omega_r}(\omega) = \frac{\chi^2 \gamma_1^2 v^2 \omega^2}{\bar{N} (\chi \gamma_1 - 1 - v^2)^2} + \frac{\mu_2^2 \omega_{21}^2 Q_s}{Q_2 P_r} \Theta(\omega_r, T) (1 + v^2) \quad (28)$$

и практически совпадают с аналогичными им выражениями, получен-

* Особо следует оговорить малость величины Φ_F . Оценки, сделанные в частном случае $v = 0$, показывают, что средний квадрат флюктуаций Φ_F равен $\Phi_F^2 = \chi \eta \mu_1 \Theta(\omega_s, T) \omega_{21} / (\chi \gamma_1 - 1 - v^2) \bar{N} \hbar \omega_s$ и для обычных на практике значений входящих сюда величин много меньше единицы

ными в [1, 2]. Имеющееся несущественное отличие (см. формулы (40)–(43) [2]) объясняется тем, что в [2] полагалось $\bar{N} \approx P_r/\hbar\omega_{21}$, $\chi = 1$; и было выбрано иное распределение по временам пролета.

Выясним происхождение отдельных членов в (27), (28). С этой целью обратимся к (15) и рассмотрим вначале дробовые флюктуации. Наличие в правой части (15в) «дробовой ЭДС» приводит к флюктуациям плотности активных молекул n_Φ , которые, в свою очередь, вызывают амплитудные флюктуации поляризации β (см. (15б)). Вследствие связи между α и β (см. (15а)) это, в конечном счете, ведет к появлению флюктуаций амплитуды поля α .

Заметим, что дробовой член в (27) не зависит от v , а следовательно, корреляция α с Φ_Φ не дает вклада в дробовые флюктуации σ . Действительно, если бы такой вклад существовал, то, как нетрудно видеть из (15), он должен зависеть от расстройки v и, в частности, стремиться к нулю при $v = 0$.

Дробовые флюктуации частоты генерации определяются скоростью флюктуаций числа частиц на входе резонатора и возникают из-за корреляции v с флюктуациями σ , β , Φ_Φ . Непосредственного действия на частоту колебания «дробовые силы» не оказывают.

Перейдем к тепловым флюктуациям. Спектральная плотность тепловых флюктуаций амплитуды поля состоит из двух членов:

$$W_a^T(\omega) = \frac{Q_s \Theta(\omega_r, T)}{Q_2 P_r (\chi\eta - 1 - v^2)^2} [\chi^2 \eta^2 - 4v^2 (\chi\eta - 1 - v^2)]. \quad (29)$$

Первый член обусловлен прямым воздействием теплового шума на амплитуду и корреляцией амплитудных флюктуаций поля и поляризации; второй — влиянием фазовых флюктуаций на флюктуации α , β , n_Φ . Из выражения (29) видно, что корреляция фазовых флюктуаций с флюктуациями σ , β , n_Φ приводит к уменьшению глубины флюктуаций амплитуды поля. При $v = \sqrt{(\chi\eta - 1)/2}$ относительное влияние фазовых флюктуаций на амплитудные максимально.

Рассмотрим спектральную плотность флюктуаций частоты

$$W_{\omega_r}^T(\omega) = \frac{\mu_1^2 \omega_{21}^2 Q_s}{Q_2 P_r} \Theta(\omega_r, T) + \frac{\mu_2^2 \omega_{21}^2 Q_s}{Q_2 P_r} \Theta(\omega_r, T) v^2. \quad (30)$$

Нетрудно убедиться, что первый член (30) обусловлен непосредственным влиянием тепловых флюктуаций на частоту колебаний ω_r . С этой целью положим в (15) $v = 0$ (что равносильно в данном случае пренебрежению флюктуациями α , β , n_Φ) и рассмотрим случай квазистатики $\Phi_\Phi = 0$. Уравнения (15г), (15д) тогда примут вид

$$\dot{\Phi}_\Phi = -\frac{1}{2} (\mu_1 + \mu_2) \Phi_\Phi - \xi_{\parallel}; \quad (31)$$

$$v = -\frac{1}{2} \mu_1 \Phi_\Phi - \xi_{\parallel}; \quad (32)$$

$$\dot{\Phi}_\Phi = 0,$$

откуда $v(t_1) = -(\mu_2/\mu_1) \xi_{\parallel}$. Разлагая полученный результат в ряд Фурье (17), умножая на сопряженные величины и усредняя, получим первый член (30). Влияние амплитудных флюктуаций поля и поляризации на частоту колебаний в квазистатическом случае учитывается вторым членом (30).

Высокая стабильность и монохроматичность колебаний молекулярного генератора* могут быть объяснены процессом авторегулирующего действия фазы поляризации на частоту поля. Действительно, если на установившуюся систему начинают действовать флюктуации ξ_{\parallel} , то при $v = 0$ это приводит, согласно (31), (32), к изменению частоты поля на величину

$$\nu_0 = -\xi_{\parallel}$$

и скорости изменения разности фаз

$$\dot{\Phi}_{\Phi} = \nu_0 = -\xi_{\parallel}.$$

Последнее вызывает появление разности фаз, равное в квазистатическом случае (см. (31))

$$\Phi_{\Phi} = -\frac{2\xi_{\parallel}}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{2\nu_0}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Согласно (32), возникшая разность фаз приводит к уменьшению частоты колебаний на

$$\nu_1 = -\frac{\mu_1}{2} \Phi_{\Phi} = -\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \nu_0,$$

компенсируя действие возмущения ν_0 . Результирующий уход частоты

$$\nu = \nu_0 + \nu_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \nu_0 \simeq \frac{\nu_0}{K}$$

будет в $K = Q_a/Q_s \simeq 10^3 \div 10^4$ раз меньше первоначальных толчков частоты ν_0 .

Заметим, что при $v = 0$ в соответствии с (9) имеем

$$\sin \Phi^c = -1, \quad \Phi^c = -\pi/2.$$

Другими словами, стационарные колебания поля и поляризации при $v = 0$ находятся в квадратуре. Если ввести комплексную диэлектрическую проницаемость $\epsilon = \epsilon_1 - i\epsilon_2$, то последнее равносильно равенству $\epsilon_1 = 0$. Толчки ν_0 приводят к флюктуациям разности фаз Φ_{Φ} около значения $\Phi^c = -\pi/2$, а следовательно, и к флюктуациям $\Delta\epsilon_1$ около нулевого значения.

Это обстоятельство позволяет в ряде случаев заменить Φ_{Φ} на $\Delta\epsilon_1$. Например, в работе [2] авторегулирующее действие объяснялось зависимостью частоты от уходов $\Delta\epsilon_1$. Необходимо, однако, иметь в виду, что введение ϵ и $\Delta\epsilon_1$ корректно только для квазистатических процессов, в то время как уравнения (31) и (32) описывают процесс без ограничений на скорость. В частности, уравнения (31), (32) позволяют рассмотреть влияние скорости толчков частоты колебаний на авторегулирующее действие в молекулярном генераторе. Действительно, спектральная плотность мощности флюктуаций размерной частоты, согласно (31), (32), равна

$$W_{\omega_r}(\omega) = \omega_2^2 \frac{1 + \omega^2 \tau_0^2}{K^2 + \omega^2 \tau_0^2} W_{\nu_0}(\omega), \quad (33)$$

где $W_{\nu_0}(\omega)$ — спектральная плотность первоначальных толчков частоты:

* Имеются в виду тепловые флюктуации

$$W_{\omega_0}(\omega) = W_{\xi_1}(\omega) = \frac{\mu_1^2 Q_s}{Q_2 P_r} \Theta(\omega_r, T).$$

Как видно из (33), авторегулирующее действие уменьшается с ростом ω (быстрые толчки) и пропадает* при $\omega \gg K/\tau_0 = \omega_s/2Q_s$. При $\omega_s/Q_s \gg \omega \gg 1/\tau_0$ авторегулирующее действие не равно нулю и его эффективность, согласно (33), можно оценить отношением

$$\frac{K^2}{\omega^2 \tau_0^2} = \frac{\omega_{21}^2}{4Q_s^2} \frac{1}{\omega^2} \gg 1.$$

Существенный интерес в задаче о флюктуациях молекулярного генератора представляет ширина спектральной линии колебания. В общем случае ширина спектральной линии определяется видом $W_{\omega_r}(\omega)$, ее поведением и значением вблизи $\omega = 0$. Так как для молекулярного генератора

$$W_{\omega_r}(0) \ll \frac{8}{\pi} \int_0^\infty W_{\omega_r}(\omega) d\omega,$$

то на основании [14, 15] для энергетической ширины спектральной линии ΔF имеем

$$\Delta F = \frac{1}{8} W_{\omega_r}(0).$$

Используя (28), получим**

$$\Delta F = \frac{\mu_2^2 \omega_{21}^2 Q_s}{8 Q_2 P_r} \Theta(\omega_r, T) (1 + v^2). \quad (34)$$

Как видно из (34), спектральная ширина линии молекулярного генератора целиком определяется спектром теплового шума. Флюктуации числа частиц (дробовой эффект) не приводят к размытию спектральной линии колебания [1, 2].

Приведем оценки. Для молекулярного генератора на аммиаке $\omega_{21} \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$; $\tau_0 \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ сек}$; $T = 300^\circ\text{K}$; $P_r = 10^{-10} \text{ см}$; $Q_s/Q_2 \approx 1/2$ при $v = 0$; $\Delta F \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ герц}$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность В. С. Троицкому, В. М. Файну, Я. И. Ханину и Э. Г. Ящину за обсуждение полученных результатов, а также А. Н. Малахову за чтение статьи в рукописи и ряд ценных замечаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнение молекулярного генератора при произвольных условиях на входе резонатора. Дробовые флюктуации

Уравнения молекулярного генератора, найденные в [7, 8], имеют вид

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] p = - \frac{2 \omega_{21}}{\hbar} d_{21} (E d_{21}) n;$$

* При $\omega \gg K/\tau_0$ выражение (33) совпадает с выражением для спектра флюктуаций частоты в ламповом генераторе.

** Используемое в статье выражение для ΔF не совпадает с приведенным в [1-3].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) n = \frac{2}{\hbar \omega_{21}} E \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \right) p; \\ E = A_s(t) E_s(r);$$
(A. 1)

$$\frac{d^2}{dt^2} A_s + \frac{\omega_s}{Q_s} \frac{d}{dt} A_s + \omega_s^2 A_s = - \frac{1}{N_s} \int_V \frac{\partial^2}{\partial t^2} \overline{\overline{P(t, z/v)}}^v E_s(r) dv;$$

$$N_s = \int_V E_s^2 dv / 4\pi,$$

где p — поляризация молекулы в пучке, $\hbar \omega_{21} n$ — величина внутренней энергии, запасенной в молекуле, v и z — скорость и координата молекулы в резонаторе, $\overline{\overline{P(t, z/v)}}$ — средняя по скоростям поляризации пучка, $E_s(r)$ — распределение поля в резонаторе, которое в дальнейшем предполагается не зависящим в области пучка от координаты и равным единичному вектору e_s^0 .

Предположим, что число активных молекул, поступающих в резонатор, меняется во времени. Если $N^0(t)$ — плотность молекул на входе резонатора, то для поляризации и плотности активных молекул в монокинетическом пучке имеем очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} P(t, z/v) &= N^0 \left(t - \frac{z}{v} \right) p; \\ N \left(t, \frac{z}{v} \right) &= N^0 \left(t - \frac{z}{v} \right) n. \end{aligned}$$
(A. 2)

Подставим (A.2) в (A.1); опустив промежуточные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 + \omega_{21}^2 \right] P(t, \tau) &= - \frac{2 \omega_{21}}{\hbar} d_{21}(e_s^0 d_{21}) A_s N(t, \tau); \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) N(t, \tau) &= \frac{2}{\hbar \omega_{21}} A_s e_s^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) P(t, \tau); \\ \frac{d^2}{dt^2} A_s + \frac{\omega_s}{Q_s} \frac{d}{dt} A_s + \omega_s^2 A_s &= - \frac{1}{N_s} \int_V \frac{\partial^2}{\partial t^2} \overline{\overline{P(t, \tau)}}^v e_s^0 dv, \end{aligned}$$
(A. 3)

где $\tau = z/v$.

Введем усредненные по времени пролета поляризацию и плотность активных молекул:

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^t P(t, \tau) f(\tau) d\tau; \\ N(t) &= \int_0^t N(t, \tau) f(\tau) d\tau; \\ f(\tau) &= \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0}. \end{aligned}$$
(A. 4)

Уравнения (A.3) умножим слева на функцию распределения $f(\tau)$ и проинтегрируем по τ . Используя (A.4) и вводя обозначения

$$N(t, 0) = N_0(t), \quad P(t, 0) = P_0(t), \quad (\text{A. 5})$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}(t) + \frac{2}{\tau_0} \dot{\mathbf{P}}(t) + \left(\omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau_0^2} \right) \mathbf{P}(t) &= -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} \mathbf{d}_{21} A_s (\mathbf{e}_s^0 \mathbf{d}_{21}) N(t) + \\ &+ \frac{1}{\tau_0^2} \mathbf{P}_0(t) + \frac{2}{\tau_0} \dot{\mathbf{P}}_0(t) + \frac{1}{\tau_0} \left[\frac{\partial \mathbf{P}(t, \tau)}{\partial \tau} \right]_{\tau=0}; \quad (\text{A. 6}) \\ \dot{N}(t) + \frac{1}{\tau_0} [N(t) - N_0(t)] &= \frac{2}{\hbar \omega_{21}} A_s \left[\dot{\mathbf{P}}(t) + \frac{1}{\tau_0} \mathbf{P}(t) - \frac{1}{\tau_0} \mathbf{P}_0(t) \right] \mathbf{e}_s^0; \\ \ddot{A}_s + \frac{\omega_s}{Q_s} \dot{A}_s + \omega_s^2 A_s &= -4\pi\chi \mathbf{e}_s^0 \ddot{\mathbf{P}}(t); \quad \chi = V_n / \int E_s^2(\mathbf{r}) dv. \end{aligned}$$

Величины $\mathbf{P}_0(t)$, $\dot{\mathbf{P}}_0(t)$, $[(\partial/\partial \tau) \mathbf{P}(t, \tau)]_{\tau=0}$ определяются граничными условиями на входе резонатора и обычно (если специально не оговорено противное) равны нулю*.

Предположим, что изменения плотности активных молекул на входе $N_0(t)$ обусловлены флюктуациями числа частиц в пучке около некоторого среднего значения \bar{N}_0 :

$$N_0(t) = \bar{N}_0 + m(t). \quad (\text{A. 7})$$

Подставляя (A.7) в (A.6) и пользуясь обозначением

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{e}_s^\gamma,$$

перепишем уравнения (A.6) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{P}}(t) + \frac{2}{\tau_0} \dot{\mathbf{P}}(t) + \left(\omega_{21}^2 + \frac{1}{\tau_0^2} \right) \mathbf{P}(t) &= -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} (\mathbf{d}_{21} \mathbf{e}_s^0)^2 N(t); \\ \dot{N}(t) + \frac{1}{\tau_0} [N(t) - \bar{N}_0] &= \frac{2}{\hbar \omega_{21}} A_s \left[\dot{\mathbf{P}}(t) + \frac{1}{\tau_0} \mathbf{P}(t) \right] + \frac{m(t)}{\tau_0}; \quad (\text{A. 8}) \\ \ddot{A}_s + \frac{\omega_s}{Q_s} \dot{A}_s + \omega_s^2 A_s &= -4\pi\chi \dot{\mathbf{P}}(t). \end{aligned}$$

В системе (A.8) $m(t)/\tau_0$ — эквивалентная сторонняя сила дробовых флюктуаций.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Спектральная плотность «сторонней силы» тепловых флюктуаций поля в резонаторе

Рассмотрим резонатор, заполненный равновесным излучением от стенок при температуре T . Предполагается, что другие источники излучения отсутствуют.

Уравнение для амплитуды A_s электрического поля

$$E_s(\mathbf{r}, t) = A_s(t) E_s(\mathbf{r})$$

колебания s -типа запишем в виде

$$\ddot{A}_s + \frac{\omega_s}{Q_s} \dot{A}_s + \omega_s^2 A_s = f_1(t),$$

* В молекулярном генераторе на аммиаке величины $\mathbf{P}_0(t)$, $\dot{\mathbf{P}}_0(t)$ и $[(\partial/\partial \tau) \mathbf{P}(t, \tau)]_{\tau=0}$ равны нулю. Это следует из диагональности матрицы плотности для входящего пучка

где $f_1(t)$ — «сторонняя сила», вызывающая появление теплового поля в резонаторе. Применительно к тексту статьи удобно выбрать нормировку поля $E_s(r)$ в виде (1г).

Используя результаты работы [18], найдем функцию корреляции величины $f_1(t)$:

$$R(\tau) = \frac{8\pi\omega_s^3\chi}{Q_s V_n} \Theta(\omega_s, T) \delta(\tau), \quad (\text{Б. 1})$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция, $\Theta(\omega, T) = \hbar\omega/2 + \hbar\omega(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1}$ энергетическая температура. Определим спектральную плотность величины $\xi(t)$, связанной с $f_1(t)$ соотношением

$$\xi(t) = \frac{1}{\omega_{21}^2} \sqrt{\frac{\beta\tau_0^2}{\eta-1}} f_1(t). \quad (\text{Б. 2})$$

Используя (2), (Б.1) и (Б.2), найдем функцию корреляции $\xi(t)$:

$$R_\xi(\tau) = \frac{4\chi\eta\mu_1^2}{N(\eta-1)} \frac{\Theta(\omega_s, T)}{\hbar\omega_s} \frac{\delta(\tau)}{2}. \quad (\text{Б. 3})$$

Как известно [19], спектральная плотность мощности определяется через функцию корреляции преобразованием Фурье:

$$W_\xi(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (\text{Б. 4})$$

Подставляя (Б.3) в (Б.4), получим спектральную плотность ξ

$$W_\xi(\omega) = \frac{4\chi\eta\mu_1^2}{(\eta-1)N} \frac{\Theta(\omega_s, T)}{\hbar\omega_s}. \quad (\text{Б. 5})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Спектральная плотность флюктуаций числа молекул

Спектр флюктуаций плотности активных молекул в монокинетическом пучке, согласно [2], равен

$$W_m(f, \tau) = \frac{8\bar{N}}{V_n^2} \frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{\omega^2}, \quad (\text{Б. 1})$$

где $\omega=2\pi f$, τ — время пролета. Для немонокинетического пучка спектр флюктуаций состоит из суммы спектров (Б.1) с весовыми функциями

$$P(\tau) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0}.$$

Усредняя (Б.1), получим

$$W_m(\omega) = \int_0^\infty W_m(f, \tau) e^{-\tau/\tau_0} \frac{d\tau}{\tau_0} = \frac{4\bar{N}\tau_0^2}{V_n^2(1+\omega^2\tau_0^2)}. \quad (\text{Б. 2})$$

С помощью (Б.2) найдем

$$\frac{W_m(\omega)}{N_0^2} = \frac{4}{\bar{N}} \frac{1}{1+\omega^2\tau_0^2}. \quad (\text{Б. 3})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, ЖЭТФ, 34, 390 (1958).
2. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 3, 1298 (1958).
3. В. С. Троицкий, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 377 (1959).
4. H. Shimoda, T. C. Wang, C. H. Townes, Phys. Rev., 102, 1308 (1956).
5. J. P. Gordon, H. Z. Zeiger, C. H. Townes, Phys. Rev., 99, 1264 (1955).
6. В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 945 (1957).
7. А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 4, 718 (1959).
8. А. Н. Ораевский, Труды ФИАН, 21, 3 (1963).
9. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГИФМЛ, М., 1959.
10. Х. Ю. Халдре и Р. В. Хохлов, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 60 (1958).
11. В. С. Троицкий, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 8, 20 (1958).
12. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, УФН, 57, 485 (1955).
13. А. С. Гуртовник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 83 (1958).
14. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 1295 (1957).
15. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 241 (1960).
16. В. С. Троицкий, В. Б. Цареградский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 508 (1961).
17. Ф. В. Бункин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 493 (1961).
18. I. R. Senitzky, Phys. Rev., 119, 670 (1960).
19. В. И. Буникович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
20. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
16 января 1964 г.

TO THE THEORY OF MOLECULAR GENERATOR FLUCTUATIONS

V. B. Tsaregradskii

On the basis of equations for the averaged polarization vector the influence has been considered of the thermal and Schroft fluctuations upon the molecular generator oscillations. The spectral densities of the amplitude and frequency fluctuations have been found. It is shown that a high stability and monochromativity can be explained by the self-controlling action of difference of the field phases and polarization.

УДК 550.384 · 53 519.25

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОФИЗИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСОВ ЗЕМЛИ

В. Я. Яшков

Проведен спектральный анализ координат полюса Земли, вычисленных по методу А. Я. Орлова за 70,5 лет. Показано, что свободная нутация полюса включает в себя два движения с периодами в 1,17 и 1,20 года; оба движения происходят по эллипсам

В отличие от имеющихся работ по спектральному анализу движения полюса Земли (см., например, [1]) в настоящей статье использованы координаты полюса за весь известный интервал, причем анализ проведен с максимальной разрешающей способностью. В результате были обнаружены неизвестные ранее особенности спектра.

Числовые значения координат полюса за период с 1891.V по 1951.XII взяты из работы А. Я. Орлова [2], а за период с 1952.I по 1957.IV — из [3], где они были получены по методу А. Я. Орлова; координаты за период с 1957.IV по 1961.XII взяты из работы [4]. Вычисление координат полюса по методу А. Я. Орлова исключает из процесса все периоды более 1,5 лет; поэтому в данной работе исследование спектра проведено для периодов от 0,4 до 1,4 года.

Амплитуды спектральных составляющих процесса были вычислены на электронной вычислительной машине по следующим формулам:

$$S(T) = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (1)$$

где фурье-компоненты

$$a(T) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \cos \frac{2\pi 0,1 k}{T}; \quad (2)$$

$$b(T) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \sin \frac{2\pi 0,1 k}{T}, \quad (3)$$

n — число координат, X_k — числовое значение координаты с порядковым номером k , T — период. Период изменялся с интервалом $\Delta T = 0,002$ года. Фаза колебания определялась с помощью следующей формулы:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b(T)}{a(T)}. \quad (4)$$

Начало отсчета времени $t_0 = 1891.V$ г.

1. СПЕКТР КООРДИНАТ ПОЛЮСА В ИНТЕРВАЛЕ ПЕРИОДОВ ОТ 0,4 ДО 0,8 ГОДА

По данным работ [3] и [5], сезонные перемещения воздушных масс, образование и таяние снежного покрова вызывают изменения направления главных осей эллипсоида инерции Земли, вследствие чего ось Земли совершает колебания с годовым периодом. Отмечается также, что

вследствие неравномерного хода этих процессов почти во всех наблюдениях выявляется мало заметный полугодовой период.

Чтобы обнаружить полугодовой период, а возможно, и другие спектральные составляющие процесса, снят спектр координат X и Y в интервале периодов от 0,4 до 0,8 года. Начало координат координатной системы XOY находится в точке среднего полюса; ось X направлена по гринвичскому меридиану, а ось Y — к западу относительно X .

На рис. 1 приводятся графики амплитуд спектральных составляющих движения полюса (a — для координаты X , b — для координаты Y). По вертикальным осям отложены амплитуды спектральных составляющих в единицах $0,01''$, по горизонтальным осям — период в годах. На графиках приводится спектр только для периодов от 0,4 до 0,6 года; в интервале периодов от 0,6 до 0,8 года спектры носят такой же характер. На основании рис. 1 можно сказать, что движение полюса с полугодовым периодом отсутствует, поскольку приведенные графики имеют характер спектров случайных процессов.

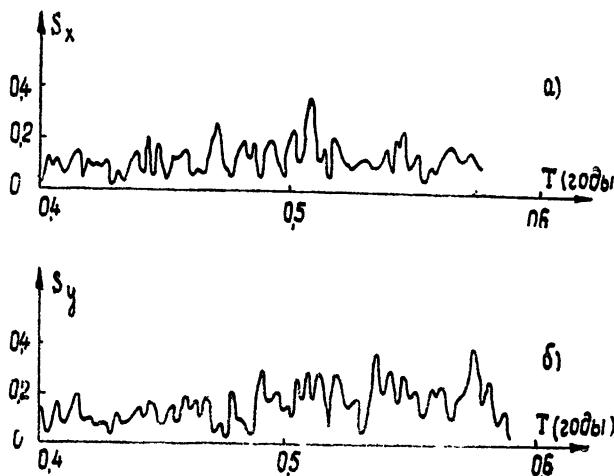


Рис. 1

2. СПЕКТР КООРДИНАТ ПОЛЮСА В ИНТЕРВАЛЕ ПЕРИОДОВ ОТ 0,8 ДО 1,4 ГОДА

На рис. 2 показан спектр координаты X полюса Земли. По осям отложены такие же величины, что и на рис. 1. На рис. 2 хорошо заметны три максимума при $T_0 = 1,00$, $T_k = 1,17$ и $T_c = 1,20$ года. Фазы этих движений соответственно равны $\varphi_0 = 110^\circ$, $\varphi_k = 33^\circ$, $\varphi_c = 154^\circ$.

Все обнаруженные выше спектральные максимумы можно заменить приближенно синусоидальными колебаниями. В самом деле, напишем выражение из трех синусоид, для амплитуд, периодов и фаз которых возьмем те значения, которые получены в результате спектральных измерений:

$$X' = 8,2 \sin\left(\frac{2\pi}{1,00} t + 1,92\right) + 11,2 \sin\left(\frac{2\pi}{1,17} t + 0,58\right) + \\ + 12,0 \sin\left(\frac{2\pi}{1,20} t + 2,70\right) \quad (5)$$

(t — время в годах). Спектр выражения (5) за интервал 70,5 лет показан на рис. 3. Сравнивая спектры рис. 3 и рис. 2, можно сказать, что они

достаточно близки друг к другу, хотя имеется и ряд отличий. В спектре реального процесса имеются несколько небольших максимумов, хаотически расположенных по оси периодов (самым большим из них является максимум при $T = 1,235$ года).

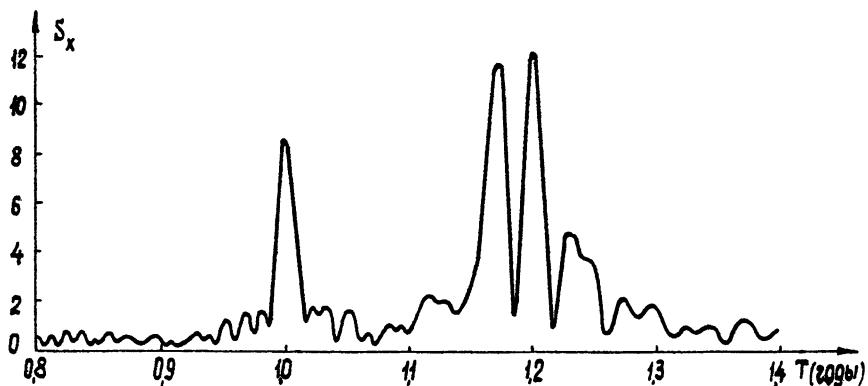


Рис. 2.

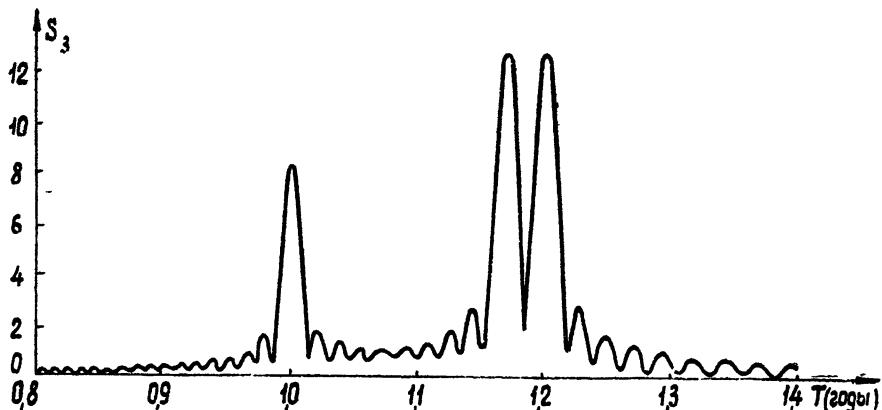


Рис. 3.

Близость спектров координаты X и функции (5) свидетельствует о том, что реальный процесс может быть приближенно экстраполирован функцией вида (5).

Аналогичным образом ведет себя спектр координаты Y . На примере последней рассмотрим поведение текущего спектра координат полюса Земли. (Под текущим спектром здесь понимается совокупность спектров процесса, отражающая изменение спектра с ростом интервала интегрирования.)

На рис. 4 показан текущий спектр координаты Y полюса Земли. Спектр 1 рис. 4 имеет интервал интегрирования, равный 40 годам (с 1891.V по 1931.V). Интервал интегрирования каждого следующего спектра увеличивается на два года по сравнению с предыдущим. Интервал интегрирования спектра 15 составляет 68 лет. По текущему спектру хорошо заметно, как формируются отдельные спектральные линии.

Известно, что при непрерывном увеличении длины отрезка синусоиды происходит увеличение амплитуды спектра этого отрезка на основной частоте синусоиды. При большой длительности отрезка сину-

соиды это увеличение амплитуды может с достаточной степенью точности считаться линейно зависящим от длины отрезка. Если некоторый процесс представляет собой сумму синусоид, то в текущем спектре этого процесса будут наблюдаться несколько возрастающих максимумов, соответствующих частотам синусоид, составляющих данный процесс. Текущий спектр координаты полюса ведет себя подобно процессу, состоящему из трех синусоид. Таким образом, данные текущего спектра также подтверждают наше предположение о том, что все обнаруженные спектральные максимумы отражают периодические движения и могут быть заменены на исследуемом интервале отрезками синусоид.

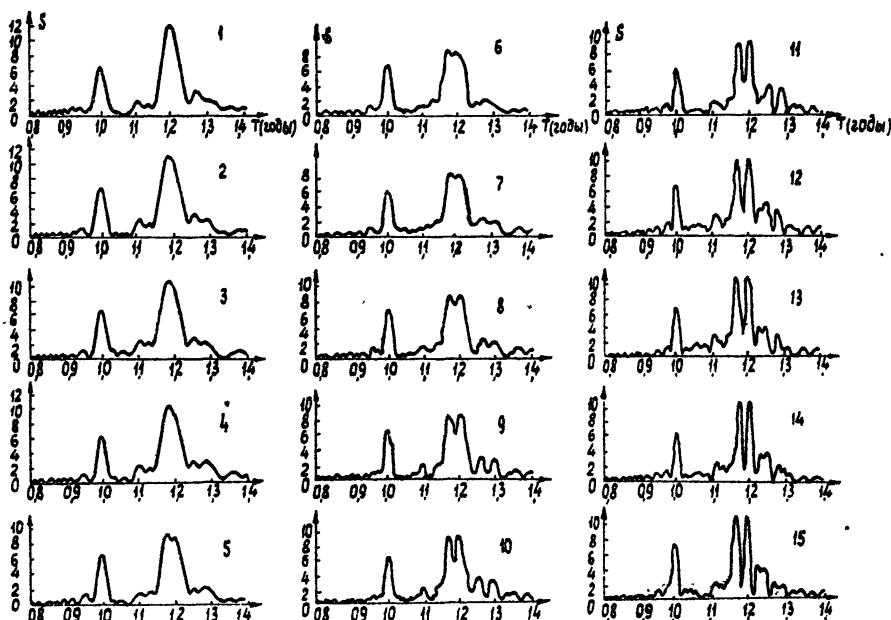


Рис. 4.

3. К ВОПРОСУ ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА

Пользуясь данными спектрального анализа, напишем приближенные формулы для обеих координат полюса Земли, учитывая три основных спектральных максимума:

$$X = 8,2 \sin(2\pi t + 1,92) + 11,2 \sin\left(\frac{2\pi}{1,17}t + 0,58\right) + \quad (6)$$

$$+ 12,0 \sin\left(\frac{2\pi}{1,20}t + 2,70\right);$$

$$Y = 6,6 \sin(2\pi t + 2,77) + 9,8 \sin\left(\frac{2\pi}{1,17}t + 2,06\right) + \quad (7)$$

$$+ 9,8 \sin\left(\frac{2\pi}{1,20}t + 4,35\right),$$

где t — текущая координата времени в годах (начало отсчета времени ведется с 1891.V года).

Так как координаты X и Y являются проекциями, описывающими

реальное движение на плоскости, то все члены выражений (6) и (7) характеризуют эллиптическое движение. Нетрудно определить параметры этих эллипсов, а именно, их полуоси (a — большая и b — малая), α — угол между большой полуосью и направлением оси X . Вычисленные параметры эллипсов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Период в годах	Спектральная амплитуда (сд. 0,01")		Фаза (град)		Параметры эллипса		
	s_x	s_y	φ_x	φ_y	a в ед. 0,01"	b в ед. 0,01"	α (град)
1,00	8,2	6,6	110°	159°	9,3	5,6	29°
1,17	11,2	9,8	33°	118°	12,6	8,6	31°
1,20	12,0	9,8	154°	249°	13,0	8,4	30°

Движение с периодом $T_0 = 1,00$ соответствует движению полюса вследствие вынужденной нутации. Движения с периодами $T_k = 1,17$ и $T_c = 1,20$ нужно отнести к свободной нутации. Нужно отметить, что в спектре координат полюса имеется максимум при $T = 1,235$ года с амплитудой 0,035". Если учесть этот максимум, то в свободной нутации будут присутствовать три периодических составляющих; с точностью 0,005 года их периоды отличаются друг от друга на величину 0,03 года. Можно предположить, что средний период в 1,20 года является периодом основного движения (период несущей частоты), а периоды в 1,17 и 1,23 присутствуют из-за того, что движение свободной нутации модулировано (периоды боковых). При этом в движении свободной нутации имеется как амплитудная, так и фазовая модуляция; период этой модуляции равен примерно 30 годам.

В заключение нужно сказать, что знание собственных частот земного шара может быть полезным для тех, кто занимается изучением внутреннего строения Земли. Кроме того, если предположить, что движение полюса стационарно, то проведенный в этой работе анализ позволяет предсказывать будущие координаты полюса.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Munk, G. J. F. Macdonald, *The rotation of the Earth*, Cambridge, 1930
2. А. Я. Орлов, *Избранные труды*, 1, изд. АН УССР, Киев, 1961, стр. 270.
3. К. А. Куликов, *Изменяемость широт и долгот*, Физматгиз, 1962
4. Е. В. Лаврентьева, Р. И. Попова, Труды расширенного пленума комиссии по вращению Земли, Киев, 1962.
5. Н. Л. Бызова, ДАН СССР, 58, 393 (1947).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 июля 1963 г.

APPLICATION OF THE STATISTICAL METHODS IN THE INVESTIGATION
OF THE POLES MOTION OF THE EARTH

V. Ya. Yashkov

The spectral analysis has been carried out of the Earth pole coordinates calculated according to A. Ya. Orlov's method through the interval of 70.5 years. A free nutation of a pole is shown to include both the motions with periods of 1.17 and 1.20 years. Both the motions are elliptical.

УДК 621.378.525

О СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ КВАНТОВОГО ОПТИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Н. Д. Миловский

Рассматривается задача о прохождении плоской электромагнитной волны сквозь слой нелинейного активного вещества. Предположение об отсутствии отражения на границах активного слоя позволяет искать решение в виде бегущей волны с медленно меняющимися амплитудой и фазой. Полученные результаты используются для нахождения коэффициента усиления квантового усилителя бегущей волны, а также величины излучаемой мощности оптического квантового генератора бегущей волны.

В последнее время в ряде работ [1-4] по исследованию стационарного режима квантового усилителя оптического диапазона рассматривалась задача о прохождении плоской электромагнитной волны через плоскопараллельный слой активного вещества*. При этом предполагалось, что среда линейна и, следовательно, мнимая часть комплексной постоянной распространения $k = (\omega/c)\sqrt{\epsilon\mu}$, ответственная за эффект усиления (так называемое отрицательное поглощение), не зависит от величины электромагнитного поля в среде. Выражения для коэффициента прохождения и коэффициента отражения плоской волны от активного слоя, полученные методом многократных отражений, естественно, совпадали с соответствующими формулами для плоскопараллельного резонатора Фабри—Перо [5, 6]. Однако в реальных активных средах отрицательное поглощение убывает с ростом амплитуды приложенного поля** (эффект насыщения). В настоящей работе рассматривается стационарный режим квантового оптического усилителя бегущей волны с учетом указанной нелинейности.

1. КВАНТОВЫЙ ОПТИЧЕСКИЙ УСИЛИТЕЛЬ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Предположим, что на слой активного вещества I толщины L (рис. 1) падает нормально к его границе плоская электромагнитная волна

$$H_2(t, z) = h_0 e^{i(\omega t - k_2 z)} + h_0^* e^{-i(\omega t - k_2 z)}, \quad (1)$$

где h_0 — амплитуда напряженности магнитного поля***, $k_2 = (\omega/c)\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$ — волновое число среды II, ϵ_2 , μ_2 — диэлектрическая и магнитная проницаемости, c — скорость света в вакууме, ω — циклическая частота. Известно [7], что процессы, происходящие внутри такого слоя, могут быть корректно описаны при помощи совместного решения уравнений

* Для оптических частот поперечные размеры слоя велики по сравнению с длиной волны, что позволяет ограничиться изучением одномерной модели.

** В зависимости от типа взаимодействия можно рассматривать электрическое или магнитное поле

*** Для определенности считаем взаимодействие магнитодипольным, хотя это и несущественно

Максвелла и уравнений для матрицы плотности активных молекул. Для $e^{i\omega t}$ -процессов при вполне разумных предположениях о малости некоторых нелинейных и релаксационных членов полная система уравнений

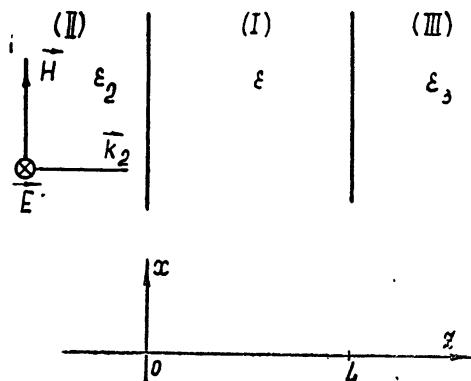


Рис. 1.

ний может быть сведена к дифференциальному уравнению второго порядка [8]:

$$\frac{d^2H(z)}{dz^2} + k^2H(z) = - \frac{i\alpha k^2H(z)}{1 + \gamma^2|H(z)|^2}. \quad (2)$$

Постоянные величины

$$\sigma = \frac{4\pi T_2 n^0 |\mu|^2 (1 - iT_2 \Delta \omega)}{\hbar [1 + (T_2 \Delta \omega)^2]}, \quad (3)$$

$$\gamma^2 = \frac{4T_1 T_2 |\mu|^2}{\hbar^2 [1 + (T_2 \Delta \omega)^2]} \quad (4)$$

определяются параметрами активной среды: T_1, T_2 — продольное и поперечное времена релаксации соответственно, n^0 — равновесная (в отсутствие поля сигнала) разность населенностей, зависящая от мощности подсветки и температуры кристалла, $\Delta \omega = |\omega - \omega_0|$ — расстройка частоты, $\hbar \omega_0$ — разность энергий верхнего и нижнего состояний квантовой системы*, \hbar — постоянная Планка, μ — матричный элемент магнитодипольного момента молекулы**. Член $\gamma^2 |H(z)|^2$ в знаменателе правой части нелинейного дифференциального уравнения (2) отвечает за эффект насыщения. В отсутствие этого члена уравнение (2) описывает процессы в линейных системах с отрицательным поглощением. Постоянный коэффициент α для твердого тела мал [8] ($|\alpha| \ll 10^{-4}$); поэтому дифференциальное уравнение (2) допускает решение в виде бегущей в Z -направлении волны

$$\gamma H(z) = \gamma \overline{m(z)} e^{i\varphi(z)} e^{-ikz} \quad (5)$$

с медленно меняющимися по сравнению с e^{-ikz} амплитудой $\sqrt{\overline{m(z)}}$ и фазой $\varphi(z)$ [9]. Если существует отражение на границе со средой III,

* О возможности двухуровневой идеализации см. [7]

** Предполагается, что поляризация μ и поляризация падающего поля $H_0(t, z)$ одинаковы.

то, вообще говоря, существует еще волна, бегущая в $-Z$ -направлении [8]. Однако отражение на границе двух сред может быть всегда исключено при помощи особых антирефлекторных диэлектрических покрытий [10].

Подставляя решение (5) в дифференциальное уравнение (2) и оставляя члены только первого порядка малости

$$\frac{d \sqrt{m(z)}}{dz} \sim \frac{d \varphi(z)}{dz} \sim |\alpha| k, \quad (6)$$

получим систему из двух уравнений первого порядка для квадрата амплитуды m и фазы φ магнитного поля:

$$\frac{dm}{dz} = (\operatorname{Re} \alpha) k \frac{m}{1+m}; \quad (7)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = (\operatorname{Im} \alpha) \frac{k}{2} \frac{1}{1+m}. \quad (7a)$$

Решение системы (7):

$$m(z) e^{m(z)} = C_1 e^{(\operatorname{Re} \alpha) kz}; \quad (8)$$

$$\varphi(z) = -x \ln m(z) + C_2, \quad (8a)$$

где

$$x = -\frac{\operatorname{Im} \alpha}{2(\operatorname{Re} \alpha)} = \frac{1}{2} T_2 \Delta_{(0)}, \quad (9)$$

содержит две произвольные постоянные, которые определяются из условий на границе со средой II (рис. 1). Если $\operatorname{Re} \alpha$ положительна (это соответствует инверсной разности населенностей n^0), то слой активного вещества усиливает проходящую волну и его можно использовать как усилитель.

В качестве примера усилителя бегущей волны с обратной связью может служить схема, указанная на рис. 2а. Обратная связь осуществляется

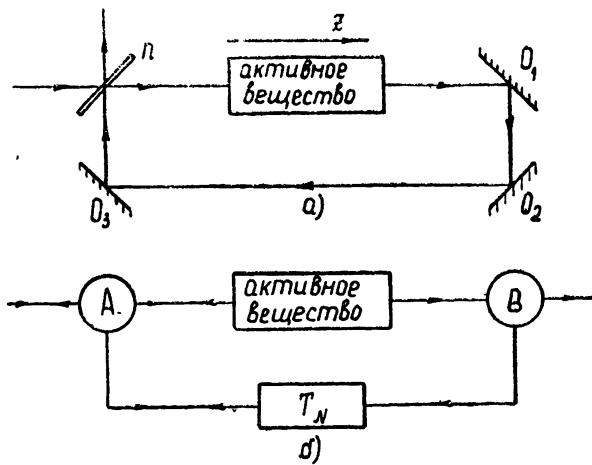


Рис. 2.

ся при помощи зеркальных отражателей O и плоскопараллельной диэлектрической пластиинки Π , находящейся под углом 45° к направлению распространения луча. Введем для плоскопараллельной пластиинки

комплексные коэффициенты отражения $re^{i\varphi_r}$ и прохождения $te^{i\varphi_t}$, удовлетворяющие следующему соотношению:

$$h = hre^{i\varphi_r} + hte^{i\varphi_t}, \quad (10)$$

где h — амплитуда падающего на пластинку электромагнитного поля. Если диссипация внутри пластиинки отсутствует, то

$$r^2 + t^2 = 1 \quad (11)$$

и между фазами коэффициентов отражения и прохождения существует определенная связь [15]:

$$\varphi_r = \varphi_t + \pi/2. \quad (12)$$

Пользуясь блок-схемой рис. 2а, можно выразить амплитуду поля на входе усиливающего слоя через параметры установки и величину внешнего падающего поля $\gamma h_0 = he^{i\varphi_h}$:

$$\sqrt{m(0)} e^{i\varphi(0)} = [he^{i\varphi_h} te^{i\varphi_t} + \sqrt{m(L)} e^{i[\varphi(L) - kL]} Te^{i\varphi_T} re^{i\varphi_r}] e^{i\psi_0}, \quad (13)$$

где $Te^{i\varphi_T}$ — коэффициент передачи тракта обратной связи, ψ_0 — набег фазы на пути от плоскопараллельной пластиинки до активного слоя. Будем считать для простоты $T = 1$ (отсутствие потерь в цепи обратной связи). Выражение (13) можно преобразовать к более удобному для исследования виду:

$$m(0) = \frac{h^2(1-r^2)}{1+r^2G-2r\sqrt{G} \cos \varphi}, \quad (14)$$

где

$$\varphi = \varphi(L) - kL + \varphi_\beta - \varphi(0). \quad (15)$$

Здесь $\varphi(L)$ и $\varphi(0)$ удовлетворяют соотношению (8а), $\varphi_\beta = \varphi_T + \varphi_r + \varphi^0$ — полная фаза обратной связи, $G = m(L)/m(0)$ — коэффициент усиления слоя по мощности.

Коэффициент G , однако, не является постоянным параметром установки, как это было бы в отсутствие эффекта насыщения: он зависит от величины входного сигнала $m(0)$. Поэтому необходимо еще одно независимое уравнение, связывающее $m(0)$, G и параметры усилителя. Его удается получить из выражения (8), подставляя туда условие на границах активного слоя:

$$m(L) e^{m(L)} = m(0) e^{m(0)} e^{(\text{Re}\alpha)kL}. \quad (16)$$

Параметр $G_0 = e^{(\text{Re}\alpha)kL}$ назовем коэффициентом усиления по мощности линейного слоя. Именно таким был бы коэффициент усиления активного слоя в отсутствие эффекта насыщения.

Из выражений (16) и (14) легко получить трансцендентное уравнение относительно величины G как функции внешнего падающего поля $|ht|$ и параметров установки r , G_0 и φ^* :

$$\frac{m(0)}{|ht|^2} = -\frac{\ln G_0 - \ln G}{|ht|^2(G-1)} = \frac{1}{1+r^2G-2r\sqrt{G} \cos \varphi}. \quad (17)$$

* Величина φ содержит фазу обратной связи φ_β и поэтому может также рассматриваться как независимый параметр.

На рис. 3 представлено графическое решение уравнения (17) при $r = 0,25$ и $\sqrt{G_0} = 3,5$. Точки пересечения кривых одного семейства с кривыми другого семейства дают истинные значения величин G и $m(0)/|ht|^2$. Параметрами кривых являются величина внешнего падающего поля $|ht|^2$ и фаза φ .

Как и следовало ожидать, коэффициент усиления слоя G меняется в пределах $(1, G_0)$. При слабых входных сигналах ($|ht| \rightarrow 0$) он близок

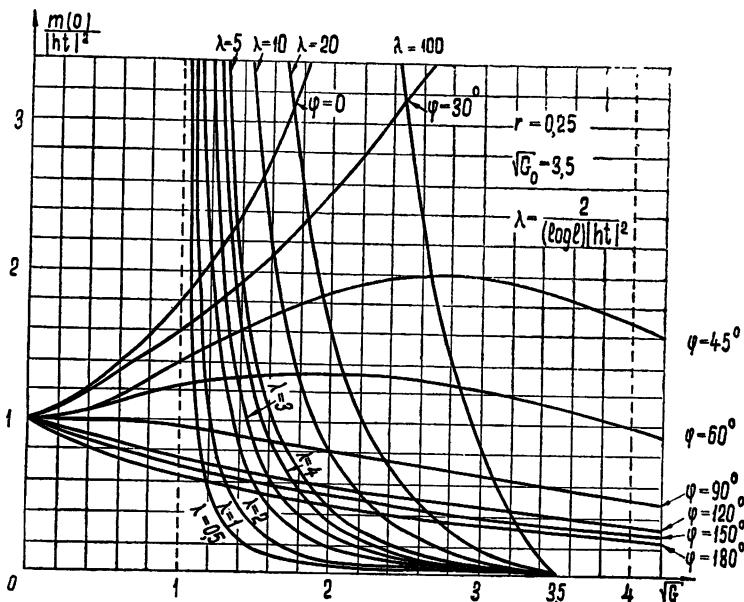


Рис. 3.

к величине G_0 . Физически это соответствует отсутствию эффекта насыщения. Именно в этом приближении справедливы результаты работ [1—4]. С ростом величины входного сигнала h коэффициент усиления G из-за эффекта насыщения уменьшается и в пределе при очень больших значениях входного сигнала ($|ht| \rightarrow \infty$), стремится к единице. Нужно заметить, что при очень сильных полях проведенное рассмотрение некорректно, так как не выполняется одно из условий малости нелинейных членов в исходной системе уравнений. Однако для твердого тела напряженность электромагнитного поля на оптических частотах может быть довольно значительной:

$$h \ll \sqrt{T_1 T_2}, \omega_0 \simeq 10^{10}. \quad (18)$$

О коэффициенте усиления установки в целом можно судить по величине выходного потока энергии

$$S = h^2 \left[1 + \frac{(1-r^2)(G-1)}{1+r^2G-2r\sqrt{G}\cos\varphi} \right]. \quad (19)$$

На рис. 4 построено параметрическое семейство кривых коэффициента усиления установки $K_y = \sqrt{S/h^2}$ от h (сплошные кривые) при $r = 0,25$; $\sqrt{G_0} = 3,5$ (параметром является φ). С ростом h (при любом φ) K_y монотонно падает и в пределе при $h \rightarrow \infty$ стремится к единице. При

постоянном h усиление тем больше, чем меньше фаза φ отличается от нуля. Своего максимального значения (при данных параметрах G_0 и r) K_y достигает при бесконечно малом входном сигнале ($h \rightarrow 0$) и пульсовой фазе φ :

$$K_{y \text{ макс}}^2 = 1 + \frac{(1-r^2)(G_0-1)}{(1-r\sqrt{G_0})^2}. \quad (20)$$

Выражение (19), а также рис. 4 позволяют оценить ширину полосы пропускания усилителя (по φ) на уровне 0,5 по мощности. С ростом h

полоса сильно расширяется и уже при $h \approx 0,55$ достигает 2π . Это значит, что для $h \geq 1$ полоса усилителя (по частоте) практически определяется только шириной линии активного вещества

$$\Pi \simeq \Delta\omega \simeq 1/T_2. \quad (21)$$

Из (20) можно видеть, что

$$r\sqrt{G_0} = 1 \quad (22)$$

есть условие самовозбуждения схемы. Но если φ или h не равны нулю, то K_y является конечной величиной, и, казалось бы, усилитель в режиме самовозбуждения не имеет никаких особенностей по сравнению с усилителем в недовозбужденном режиме. Но это не так.

С ростом G_0 за пределы порога самовозбуждения ($r\sqrt{G_0} > 1$) при малых входных сигналах h и фазах, близких к нулю, могут существовать три точки пересечения кривых (17) (см. рис. 3). Более наглядно это можно представить, если величину $\eta = \sqrt{m(L)/m(0)}$ взять в качестве

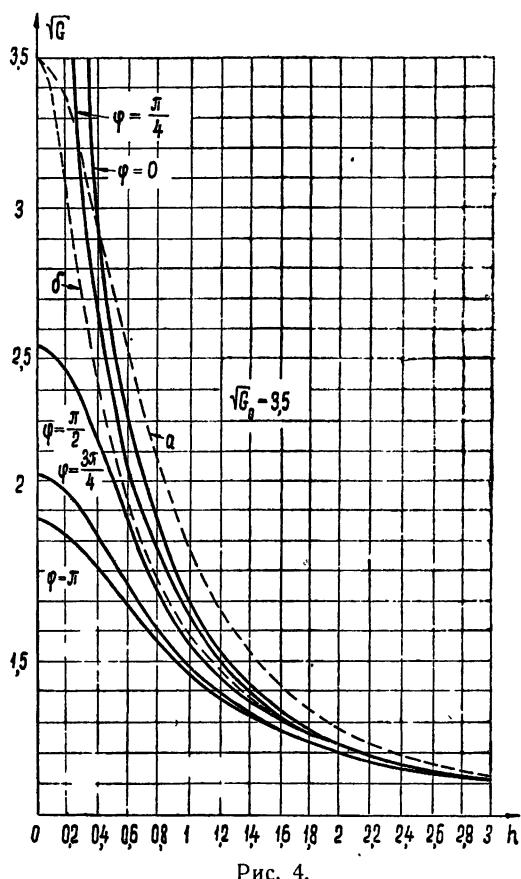


Рис. 4.

стве переменной при графическом решении уравнения (16):

$$\ln G = \ln \frac{\eta^2}{1 + r^2 \eta^2 + 2r \eta \cos \psi} = \ln G_0 + |ht|^2 [1 + 2r\eta \cos \psi + (r^2 - 1)\eta^2], \quad (23)$$

где

$$\psi = \varphi(L) - kL + \varphi_r + \varphi_t - \varphi_h. \quad (24)$$

На рис. 5 представлено графическое решение уравнения (23) при

$$r=0,25; \quad \sqrt{G_0} = 3,5; \quad \psi = 3\pi/4; \quad |ht| = \begin{cases} 1 & (\text{a}) \\ \sqrt{2} & (\text{б}) \end{cases}$$

а также параметрическое семейство кривых левой части уравнения (23) ($\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi/2$, $\psi_3 = \pi$). С уменьшением h коэффициент усиления слоя G увеличивается до G_0 , и, как видно из рис. 5, для $\Psi > \pi/2$ и $G_0 r^2 > 1$ могут существовать три точки пересечения. Чтобы корректно

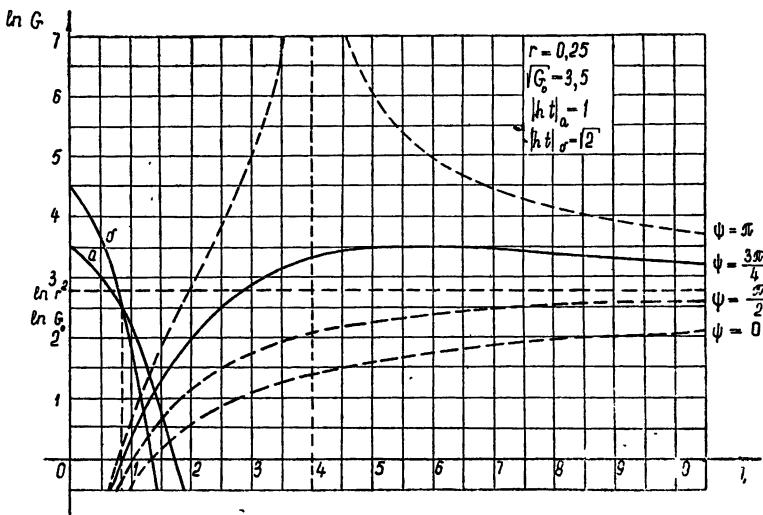


Рис. 5.

судить о возможных режимах усилителя при выполнении условия самовозбуждения, необходимо решить особую задачу о синхронизации квантового генератора внешней силой, подобно тому, как это делается в радиотехнике [11, 12]. Мы же ограничимся рассмотрением стационарного режима оптического квантового генератора (ОКГ) бегущей волны с обратной связью.

2. ОКГ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ С ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Схема на рис. 2а в отсутствие внешнего входного сигнала совершенно симметрична по отношению к $-Z$ - и $+Z$ -направлениям. Поэтому при выполнении условия самовозбуждения в ней возникнут две волны, бегущие навстречу друг другу*. Чтобы этого не случилось, в цепь обратной связи необходимо ввести невзаимный элемент (например, ячейка Фарадея с двумя диэлектрическими поляроидами на концах). Для простоты будем считать, что модуль коэффициента передачи невзаимного элемента в прямом направлении равен единице, а в обратном — нулю.

Принимая во внимание, что фаза колебания, поступающего на вход генератора с его выхода через обратную связь, должна совпадать с точностью до $2\pi p$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) с фазой колебания на входе

$$\varphi(L) - kL + \varphi_\beta = 2\pi p + \varphi(0), \quad (25)$$

найдем возможные частоты генерации. Фазу обратной связи $\varphi_\beta(\omega_p)$ можно представить в виде.

$$\varphi_\beta(\omega_p) = \Theta_0 + \omega_p \tau_0, \quad (26)$$

где Θ_0 — постоянная фаза (например, при отражениях), τ_0 — некоторое

* Подобная задача уже рассматривалась в работе Островского и Якубовича [8].

эффективное время запаздывания. Тогда воспользовавшись формулами (8а) и (9) с учетом равенства

$$m(0) = r^2 m(L), \quad (27)$$

можно найти выражение для спектра возможных частот генерации:

$$\omega_p = \omega_0 \frac{2\pi p + \Theta_0 - \omega_0 T_2 \ln r}{\omega_0 (L/c) \sqrt{\epsilon \mu} - \omega_0 T_2 \ln r - \omega_0 \tau_0}. \quad (28)$$

Как видно из (28), в общем случае в этом спектре может и не быть частоты, совпадающей с собственной частотой активного вещества ω_0 .

Подставляя в (16) соотношение (27), находим основное уравнение, связывающее величину излучаемой энергии с параметрами установки:

$$(1-r^2) m(L) = \ln r^2 G_0. \quad (29)$$

Заметим, что правая часть (29) больше или равна нулю, так как условие самовозбуждения предполагается выполненным.

На рис. 6 представлена сравнительная характеристика мощности непрерывного излучения ОКГ бегущей волны с внешней обратной связью (пунктирные линии) и ОКГ, у которого обратная связь осуществляется при помощи внутреннего отражения [8]. Коэффициенты отражения по мощности на гранях этого ОКГ равны $r_1^2 = 1$, $r_2^2 = r^2$. Кривые построены при трех значениях параметра $(Re\alpha) kL$: а) 1,55; б) 1; в) 0,5. Сравнительная характеристика показывает, что для ОКГ на внутреннем отражении легче выполняется условие самовозбуждения, и он более эффективен при малых коэффициентах отражения. Однако преимущество переходит к ОКГ бегущей волны, если требуется мощное излучение (при данном параметре G_0) и, следовательно, сильная обратная связь. Максимальные значения обоих ОКГ одинаковы и достигаются при коэффициенте отражения r , равном единице. Физически это соот-

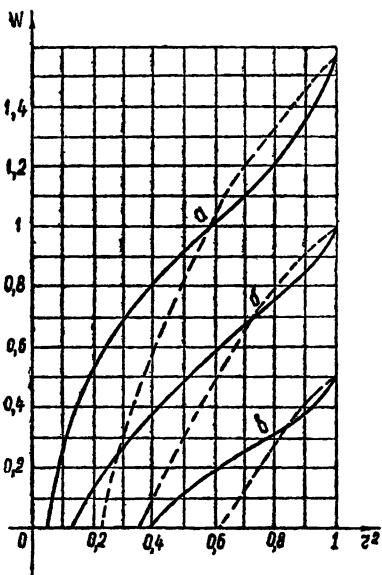


Рис. 6.

вествует, очевидно, очень большому значению поля внутри слоя ($m(L)$ сильно растет); поэтому необходимо учесть малые линейные потери внутри активного вещества.

Полагая постоянную распространения k в уравнении (2) комплексной:

$$k = k_0 - i\gamma \quad (\gamma \ll k_0), \quad (30)$$

вместо системы (7) получим

$$\frac{dm}{dz} = 2\gamma \frac{m}{m+1} (R-1-m); \quad (31)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{1+m} \frac{\operatorname{Im} [(k_0 - i\gamma)\alpha]}{2}, \quad (31a)$$

где

$$R = \frac{\operatorname{Re}[(k_0 - i\gamma)\alpha]}{2\gamma}. \quad (32)$$

Исследуя выражение (31) на фазовой плоскости m , dm/dz , можно видеть, что нарастающее в $+Z$ -направлении (и, следовательно, интересующие нас решения с $dm/dz > 0$) имеют место только в том случае, если квадрат амплитуды поля $m(z)$ в каждой точке z активной среды меньше $R - 1$. Таким образом, максимально возможная амплитуда выходного сигнала $\sqrt{m(L)} = \sqrt{R-1}$ и не растет с ростом r до бесконечности, как это было в отсутствие линейного поглощения.

Интегрируя выражение (31) и подставляя граничные условия, получим уравнение, связывающее квадрат амплитуды выходного сигнала $m(L)$ с параметрами установки:

$$\frac{R - 1 - r^2 m(L)}{R - 1 - m(L)} = \exp \left[\frac{2\gamma(R-1)}{R} L + \frac{1}{R} \ln r^2 \right]. \quad (33)$$

Из выражения (33) может быть получено условие самовозбуждения схемы:

$$2\gamma(R-1)L + \ln r^2 \geq 0, \quad (34)$$

если учесть, что левая часть (33) всегда больше единицы при $r < 1$. В предельном случае (при $\gamma \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, $2\gamma R \rightarrow (\operatorname{Re} \alpha)k$) выражение (34) совпадает с (22). Выходная мощность

$$w = (1-r^2)(R-1) \left\{ 1 - \exp \left[- \left(2\gamma \frac{R-1}{R} L + \frac{1}{R} \ln r^2 \right) \right] \right\} \times \\ \times \left\{ 1 - r^2 \exp \left[- \left(2\gamma \frac{R-1}{R} L + \frac{1}{R} \ln r^2 \right) \right] \right\}^{-1} \quad (35)$$

при очень сильной обратной связи ($r \rightarrow 1$) обращается в нуль.

Для случая малых линейных потерь ($\gamma L \ll 1$, $R \gg 1$) выражение (35) может быть упрощено:

$$w \simeq \frac{(1-r^2)(R-1)[2\gamma L + (1/R)\ln r^2]}{(1-r^2) + r^2[2\gamma L + (1/R)\ln r^2]}. \quad (36)$$

Максимум выражения (36) достигается при $r = r_0$, которое удовлетворяет следующему уравнению:

$$2\gamma L R + \ln r_0^2 = \frac{1-r_0^2}{r_0} \sqrt{R}. \quad (37)$$

Исследуя (37), находим, что r_0 тем больше отличается от единицы, чем меньше R (больше линейные потери) и чем больше параметр G_0 , поскольку можно считать

$$2\gamma RL = \operatorname{Re}[(k_0 - i\gamma)\alpha] L \simeq \ln G_0. \quad (38)$$

Максимум излучаемой мощности

$$w_{\max} = \left(\frac{R-1}{R} \frac{1}{1+r/\sqrt{R}} \right) \frac{1-r_0^2}{r_0} \sqrt{R} \quad (39)$$

растет с увеличением параметра G_0 и уменьшением потерь (ростом R).

Итак, в первой части работы рассчитан коэффициент усиления для одного частного вида схемы оптического квантового усилителя бегущей волны. Подобным же образом можно найти K_y и для схемы более общего типа, показанной на рис. 2б, учитывающей, в частности, отражение от передней грани активного вещества. Однонаправленная обратная связь в схеме рис. 2б осуществляется при помощи невзаимного элемента. Можно показать, что при некотором соотношении между параметрами матриц рассеяния A , B и величиной параметра G_0 схема рис. 2б более выгодна в режиме отражательного усилителя, чем проходного.

Отметим основные особенности нелинейного (с учетом эффекта насыщения) усилителя бегущей волны по сравнению с линейным [1-4]:

1) уменьшение коэффициента усиления с ростом величины входного сигнала;

2) наличие зависимости фазы выходного сигнала от квадрата амплитуды этого сигнала, и, следовательно, принципиальная возможность преобразования амплитудной модуляции в фазовую.

Существует ряд работ [13, 14], в которых рассматривались квантовые усилители бегущей волны с сосредоточенными параметрами* при учете эффекта насыщения. Используя результаты работы [13], легко получить зависимость коэффициента усиления для проходного усилителя бегущей волны без обратной связи (для простоты) от величины входного сигнала h^{**} :

$$K_y = \sqrt{G} = (\sqrt{G_0})^{1/(1+h^2)} \quad (40)$$

и сравнить ее с соответствующими результатами для усилителя с распределенными параметрами:

$$\frac{\ln G_0 - \ln G}{G-1} = h^2. \quad (41)$$

Сравнение кривых (40) и (41), представленных на рис. 4 для $\sqrt{G_0} = 3,5$ (пунктирные линии а и б соответственно), показывает, что усилитель с сосредоточенными параметрами более эффективен.

Автор признателен В. И. Таланову за ценные советы при обсуждении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Каган, В. И. Перель, М. П. Чайка, Оптика и спектроскопия, 12, 427 (1962).
2. Б. И. Степанов, А. П. Хапалюк, Оптика и спектроскопия, 13, 714 (1962).
3. Смили, ТИИЭР, 51, 158 (1963).
4. И. В. Лебедев, В. В. Лебедева, Оптика и спектроскопия, 15, 413 (1963).
5. М. Вогл, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, London, (1959).
6. Ф. А. Королев, Спектроскопия высокой разрешающей силы, ГИТПЛ, М., 1959.
7. В. Н. Генкин, Я. И. Ханин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 423 (1962).
8. Л. А. Островский, Е. И. Якубович, ЖЭТФ (в печати).
9. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
10. J. E. Geusic, E. D. Scovil, BSTJ, 41, 1371 (1962); сб. „Лазеры“, ИЛ, М., 1963, стр. 135.
11. А. А. Харкевич, Основы радиотехники, Связьиздат, М., 1962.
12. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы. Гостехиздат, М., 1948.

* Когда размеры активного слоя (усилителя) малы по сравнению с длиной волны

** Для усилителя без обратной связи K_y совпадает с коэффициентом усиления активного слоя \sqrt{G} .

13. R. W. De - Grasse, E. O. Schulz - Du - Bois, H. E. D. Scovil, BSTJ, 38, 305 (1959).
14. Г Троуп, Квантовые усилители и генераторы, ИЛ, М, 1961.
15. Теория линий передачи сверхвысоких частот, 2, изд. Сов. радио, М., 1951.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 марта 1964 г.

ON STATIONARY REGIME OF QUANTUM OPTICAL TRAVELING WAVE AMPLIFIER WITH FEEDBACK

N. D. Milovskii

The problem is considered of the plane electromagnetic wave transmission through the layer of the nonlinear active medium. The assumption of the absence of the reflection on the boundaries of an active layer permits to look for the solution in the form of the traveling wave with slowly varying amplitude and phase. The results obtained are used to find both the amplification factor of a quantum amplifier of the traveling wave and the quantity of the radiated power of an optical quantum traveling wave generator.

УДК 536.483

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР 2^3S_1 СОСТОЯНИЯ He^3 В ПРОИЗВОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. В. Скроцкий, В. Г. Показаньев

Исследован энергетический спектр основного метастабильного состояния He^3 . Вычислены частоты переходов между подуровнями основного состояния в присутствии внешнего магнитного поля, особое внимание обращается на случай слабого поля.

1. Энергетический спектр гелия состоит из двух систем уровней, соответствующих пара- и ортосостояниям. Переход из основного состояния на ближайший возбужденный уровень парагелия соответствует поглощению ультрафиолетового кванта (171130 см^{-1}). Для оптической накачки обычно используются переходы между метастабильным 2^3S_1 и 2^3P подуровнями ортогелия ($\sim 9233 \text{ см}^{-1}$). Пара- и ортогелий оптически не комбинируют между собой и возвращение атомов из дважды возбужденного 2^3S_1 состояния в основное возможно только в результате нерадиационного перехода, которому соответствует для разреженных газов время жизни порядка 10^{-4} сек.

В отличие от ядер He , ядра атомов He обладают магнитным моментом и характеризуются отрицательным гиромагнитным отношением $\gamma_I / 2\pi \sim 3243 \text{ гц/э}$. Поэтому энергетический спектр He^3 обладает сверхтонкой структурой. Различие в массах ядер He и He^3 приводит к тому, что их энергетические спектры несколько сдвинуты один по отношению к другому. Последнее обстоятельство представляет большой интерес для изучения атомной структуры и спектра атомов He и He^3 методами оптической ориентации. Наибольший интерес для этих целей представляет энергетический спектр атомов He^3 в 2^3S_1 метастабильном состоянии. Ниже приводится расчет этого спектра.

2. Гамильтониан магнитного взаимодействия ядра He^3 с электронами и их взаимодействия с внешним полем \mathbf{H}_0 для 2^3S_1 состояния имеет вид

$$\hat{H} = -\lambda (\mathbf{I}\mathbf{J}) + \gamma_J \hbar \mathbf{J}\mathbf{H}_0 + \gamma_I \hbar \mathbf{I}\mathbf{H}_0, \quad (1)$$

где γ_J и γ_I — абсолютные значения магнитомеханического отношения для электронов и ядра:

$$\gamma_J = \frac{|\mu_J|}{J\hbar}, \quad \gamma_I = \frac{|\mu_I|}{I\hbar}, \quad (2)$$

а $\lambda > 0$ — константа сверхтонкого расщепления.

В случае произвольного магнитного поля квантовым числом атома является магнитное квантовое число $m_F = m_J + m_I$, где

$$F = J + I. \quad (3)$$

В случае слабых магнитных полей, когда связь между моментами J и I не разорвана, хорошим квантовым числом является F и матрица энергии диагональна в представлении, в котором диагональна z -компоненты момента F (в m_F -представлении). В сильных полях моменты J и I независимо прецессируют вокруг внешнего магнитного поля и хорошими квантовыми числами являются m_J и m_I . Матрица энергии диагональна в m_J , m_I -представлении. В случае же произвольных полей нельзя выбрать представление, в котором матрица энергии была бы диагональна.

Если ось z выбрать в направлении внешнего магнитного поля H_0 , то гамильтониан (1) можно записать в виде

$$\hat{H} = - \left\{ \lambda I_z J_z + \frac{1}{2} \lambda I_- J_+ + \frac{1}{2} \lambda I_+ J_- \right\} + \hbar \omega_J J_z + \hbar \omega_I I_z, \quad (4)$$

где

$$J_{\pm} = J_x \pm i J_y, \quad I_{\pm} = I_x \pm i I_y, \quad \omega_J = \gamma_J H_0, \quad \omega_I = \gamma_I H_0. \quad (5)$$

Воспользовавшись правилами перестановок для момента количества движения, можно убедиться, что оператор $F_z = J_z + I_z$ коммутирует с гамильтонианом (4). Поэтому при вычислении матричных элементов $(m_J m_I | \hat{H} | m'_J m'_I)$ оператора \hat{H} отличными от нуля окажутся только те из них, которые будут диагональны по магнитному квантовому числу m_F . Для метастабильного 2^3S_1 состояния $J = 1$ и, согласно (3), квантовое число F может принимать два значения:

$$F = 3/2, \quad m_F \equiv (3/2, 1/2, -1/2, -3/2); \quad F = 1/2, \quad m_F \equiv (1/2, -1/2).$$

Чтобы найти собственные значения оператора энергии, соответствующие состояниям (F, m_F) , необходимо найти корни векового уравнения, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} \hat{H}_{11} - E & \hat{H}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} - E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H}_{33} - E & \hat{H}_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H}_{43} & \hat{H}_{44} - E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{H}_{55} - E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{H}_{66} - E \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{H}_{11} &= \lambda/2 + \hbar \gamma_J H_0 - \hbar \gamma_I H_0; & \hat{H}_{12} &= \hat{H}_{21} = -(1/\sqrt{2}) \lambda; \\ \hat{H}_{22} &= (\hbar \gamma_I/2) H_0; & \hat{H}_{34} &= \hat{H}_{43} = -(1/\sqrt{2}) \lambda; \\ \hat{H}_{33} &= -(\hbar \gamma_I/2) H_0; & \hat{H}_{55} &= -\lambda/2 + \hbar \gamma_J H_0 + (\hbar \gamma_I/2) H_0; \\ \hat{H}_{44} &= \lambda/2 - \gamma_J \hbar H_0 + (\hbar \gamma_I/2) H_0; & \hat{H}_{66} &= -\lambda/2 - \hbar \gamma_J H_0 - (\hbar \gamma_I/2) H_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Корни этого уравнения определяются выражением

$$E\left(1 \pm \frac{1}{2}, m_F\right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{2} + 2\hbar \gamma_J H_0 m_F \mp \frac{3}{2} \lambda \left[1 + \frac{8}{9} m_F \xi + \frac{4}{9} \xi^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (8)$$

где

$$\xi = \frac{\hbar}{\lambda} (|\gamma_J| - |\gamma_I|) H_0 \quad (9)$$

— безразмерный параметр*.

Формула (8) определяет энергию магнитных подуровней 2^3S_1 со-

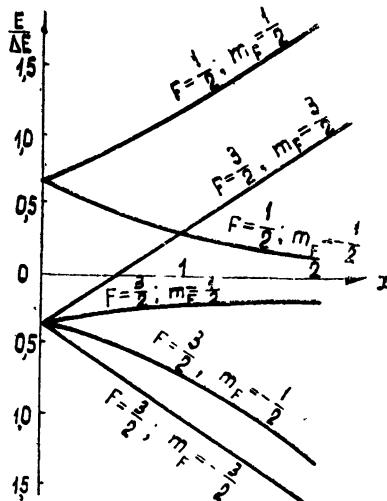


Рис. 1. Зависимость энергии от магнитного поля при $J = 1$.

стояния атома Не в произвольном магнитном поле (рис. 1). В случае очень слабых полей ($\xi \ll 1$) уравнение (8) совпадает с хорошо знакомой формулой [1]. Например, для $F = 1/2$ получаем

$$E\left(\frac{1}{2}, m_F\right) = \lambda + \frac{4}{3} \hbar \gamma_J H_0 m_F - \frac{1}{3} \hbar \gamma_I H_0 m_F. \quad (10)$$

В случае сильных полей ($\xi \gg 1$) из уравнения (8), разлагая выражение в квадратных скобках в ряд по $1/\xi$, для возможных значений m_J и m_I получаем известные выражения [1].

Зная величину сверхтонкого расщепления в отсутствие поля

$$\Delta E = \hbar \Delta v = \lambda (I + 1), \quad (11)$$

легко оценить величину поля H_0^* , при котором $\xi = 1$. Принимая для Не [3] $\Delta v = 6739701300$ гц, $\gamma_J/2\pi = 3243$ гц/э, $\gamma_I/2\pi = 2802479$ гц/э, из (9) находим, что $H_0^* \sim 1600$ э. Для полей, сравнимых с H_0^* , необходимо пользоваться точной формулой (8).

Для более слабых полей, разлагая подкоренное выражение в (8) в ряд по ξ и ограничиваясь вторыми степенями ξ , для $F = 1/2$ и $F = 3/2$ получим приближенные выражения

$$\frac{1}{\hbar} E\left(\frac{1}{2}, m_F\right) = \frac{2}{3} \Delta v + \Gamma^- m_F H_0 + \frac{9}{4} \left(1 - \frac{4}{9} m_F^2\right) G H_0^2; \quad (12)$$

$$\frac{1}{\hbar} E\left(\frac{3}{2}, m_F\right) = -\frac{1}{3} \Delta v + \Gamma^+ m_F H_0 - \frac{9}{4} \left(1 - \frac{4}{9} m_F^2\right) G H_0^2, \quad (13)$$

где введены обозначения

$$\Gamma^- = \frac{1}{3} \left(4 \frac{\gamma_J}{2\pi} - \frac{\gamma_I}{2\pi}\right), \quad \Gamma^+ = \frac{1}{3} \left(2 \frac{\gamma_J}{2\pi} - \frac{\gamma_I}{2\pi}\right), \quad G = \frac{1}{9\Delta v} \left(\frac{\gamma_J}{2\pi} - \frac{\gamma_I}{2\pi}\right)^2. \quad (14)$$

* Формальным образом выражение (8) можно получить из хорошо известной формулы Брейта—Раби [2] при замене $I \leftrightarrow J$ и соответствующей перенормировке параметра ξ .

Последние формулы хорошо описывают энергетический спектр He^3 в магнитном поле, значительно меньшем H_0^* . Ими необходимо пользоваться и в случае очень слабых полей (например, земного магнитного поля) при радиооптических измерениях. Имея в виду последние, вычислим частоты разрешенных переходов между подуровнями 2^3S_1 состояния He^3 .

3. Частоты разрешенных переходов между соседними зеемановскими подуровнями ($\Delta m_F = \pm 1$) для определенного значения F находятся из (12) и (13):

$$\nu\left(\frac{3}{2}, m_F; \frac{3}{2}, m_F - 1\right) = \nu\left(\frac{3}{2}, m_F\right) - \nu\left(\frac{3}{2}, m_F - 1\right) = \\ = \Gamma^+ H_0 - (1 - 2m_F) GH_0^2; \quad (15)$$

$$\nu\left(\frac{1}{2}, m_F; \frac{1}{2}, m_F - 1\right) = \nu\left(\frac{1}{2}, m_F\right) - \nu\left(\frac{1}{2}, m_F - 1\right) = \\ = \Gamma^- H_0 + (1 - 2m_F) GH_0^2. \quad (16)$$

Зная магнитомеханические отношения γ_J и γ_I , нетрудно оценить входящие в (15) и (16) коэффициенты Γ^\pm и G ; $\Gamma^+ = 1869373 \text{ гц/э}$, $\Gamma^- = 3735504 \text{ гц/э}$, $G = 129 \text{ гц/э}^2$.

Таким образом, частоты переходов между подуровнями основного состояния 2^3S_1 с $F = 3/2$ и $F = 1/2$ в магнитном поле порядка 1 э лежат приблизительно в области 1,9 мгц и 3,8 мгц соответственно.

Уравнения (15) и (16) могут служить для нахождения напряженности слабого магнитного поля по измеряемой частоте перехода. Разрешая, например, (16) относительно H_0 и полагая в первом приближении $\nu = \Gamma^- H_0$, получим

$$H_0 = \frac{\nu}{\Gamma^-} - (1 - 2m_F) \frac{G}{\Gamma^-} \nu^2. \quad (17)$$

Частоты разрешенных переходов между подуровнями, принадлежащими различным значениям квантового числа F , также находятся из уравнений (12) и (13):

$$\nu\left(\frac{1}{2}, m_F; \frac{3}{2}, m'_F\right) = \Delta\nu_+ (\Gamma_{m_F}^- - \Gamma_{m'_F}^+) H_0 + \frac{2}{9} \left[1 - \frac{2}{9} (m_F^2 + m_F'^2) \right] GH_0^2. \quad (18)$$

4. В слабом постоянном магнитном поле, как следует из (15) и (16), должны наблюдаться четыре резонансных линии, частоты которых определяются выражениями

$$\begin{aligned} \nu\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}\right) &= \Gamma^+ H_0 + 2GH_0^2; \\ \nu\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{1}{2}\right) &= \Gamma^+ H_0; \\ \nu\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{3}{2}\right) &= \Gamma^+ H_0 - 2GH_0^2; \\ \nu\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \leftrightarrow -\frac{1}{2}\right) &= \Gamma^- H_0. \end{aligned} \quad (19)$$

В этом случае сумма трех частот, соответствующих переходам $\frac{3}{2}, m_F \rightleftharpoons \frac{3}{2}, m'_F$, равна

$$\Sigma\nu = 3\Gamma^+ H_0 = \frac{1}{2\pi} (2\gamma_J + \gamma_I) H_0. \quad (20)$$

Если частоту резонансного перехода для свободных электронов обозначить через $\nu_s = |\gamma_s| (2\pi)^{-1} H_0$, то величина $(\nu_s - \Sigma\nu)/\nu_s$ не зависит от поля. С учетом (20) легко получить, что

$$\gamma_J = \frac{|\gamma_s|}{2} \left(1 - \frac{\gamma_I}{|\gamma_s|} - \frac{\nu_s - \Sigma\nu}{\nu_s} \right). \quad (21)$$

Последнее выражение удобно для экспериментального определения магнитомеханического отношения для ортогелия в 2^3S_1 состоянии по результатам измерения $\Sigma\nu$.

Из уравнения (8) можно найти простое выражение, удобное для экспериментального определения константы сверхтонкого расщепления. Подбирая такие значения внешнего поля H'_0 и H''_0 , чтобы частоты двух переходов с $F = 3/2$ были одинаковыми, находим, например, для переходов $3/2, 3/2 \rightleftharpoons 3/2, 1/2$ и $3/2, -1/2 \rightleftharpoons 3/2, -3/2$:

$$\frac{H'_0 \gamma_J}{2\pi} = \frac{\nu [(3/2)\lambda' - \nu]}{\lambda' - \nu} \quad (22)$$

для первого перехода и

$$\frac{H''_0 \gamma_J}{2\pi} = \frac{\nu [(3/2)\lambda' + \nu]}{\lambda' - \nu} \quad (23)$$

для второго ($\lambda' = \lambda/h$). Из этих двух уравнений найдем искомое выражение для λ' :

$$\lambda' = \frac{\nu}{6} \left[\frac{a+1}{a-1} + \sqrt{\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2} + 24} \right], \quad (24)$$

где $a = H'_0/H''_0$ равно отношению сил токов в обмотке создающего поле электромагнита. Таким образом, для экспериментального определения λ необходимо подобрать такие значения токов в электромагните, чтобы частоты обоих переходов были одинаковыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
2. Г. В. Скроцкий, Т. Г. Изюмова, УФН, 73, 423 (1961).
3. J. A. White, L. Y. Chow, C. Drake, V. W. Hughes, Phys. Rev. Lett., 3, 428 (1959).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
3 февраля 1964 г.

ENERGY SPECTRUM 2^3S_1 OF THE He^3 STATE IN AN ARBITRARY MAGNETIC FIELD

G. V. Skrozyk, V. G. Pokazan'ev

The energy spectrum has been investigated of the ground metastable state of He^3 . The transition frequencies have been calculated between the sublevels of the ground state in the presence of the external magnetic field; the case of the weak field is paid special attention to.

УДК 621.378.001

К ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОЙ ОРИЕНТАЦИИ В Не³

Г. В. Скроцкий, В. Г. Показаньев

Рассматривается возможность оптической ориентации в Не. Вычислены относительные вероятности переходов между уровнями 2^3S_1 и $2^3P_{0,1,2}$ ортогелия, индуцируемые светом резонансной частоты. Вычислена сила и намагниченность оптически ориентированных атомов гелия как для случая неполяризованного, так и поляризованного света, распространяющегося вдоль направления подмагничивающего поля.

Изучение явления оптической ориентации в Не представляет большой интерес, так как оно открывает новые возможности детального исследования энергетического спектра гелия и точного измерения его атомных постоянных, а также сулит ряд возможных практических применений этого эффекта. Возможность такой ориентации следует из недавно опубликованных сообщений [1, 2]. В работе [1] изучалась поляризация ядер Не в основном состоянии при столкновениях с оптически ориентированными атомами метастабильного гелия в 2^3S_1 -состоянии. Степень полученной ориентации ядер была невелика (3,5%). Во второй статье [2] сообщалось о более высокой степени ориентации ядер парагелия (~ 40%). Однако оптическая ориентация гелия в метастабильном состоянии в этих работах не изучалась.

Настоящая статья посвящена обсуждению некоторых особенностей оптической ориентации метастабильных атомов Не в 2^3S_1 -состоянии.

1. ОПТИЧЕСКАЯ ОРИЕНТАЦИЯ АТОМОВ Не В МЕТАСТАБИЛЬНОМ 2^3S_1 -СОСТОЯНИИ³

Будем рассматривать систему газообразных атомов Не в 2^3S_1 -состоянии, находящуюся в произвольном магнитном поле H_0 , направленном вдоль оси z . В состоянии динамического равновесия населенности N_i^0 шести магнитных подуровней 2^3S_1 -состояния определяются множителями Больцмана:

$$N_i^0 / N_k^0 = \exp \{ (E_k - E_i) / kT \}, \quad (1)$$

где E_k и E_i — соответственно энергии k -го и i -го подуровней, определяемые выражением [3]

$$E \left(1 \pm \frac{1}{2}, m_F \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{2} + 2\hbar \gamma_J H_0 m_F \mp \frac{3}{2} \lambda \left[1 + \frac{8}{9} m_F \xi + \frac{4}{9} \xi^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (2)$$

$$\xi = \frac{\hbar (|\gamma_J| - |\gamma_I|)}{\lambda} H_0. \quad (3)$$

Так как переходы между этими подуровнями лежат в области радиочастот, то за исключением случая чрезвычайно низких температур соотношение (1) очень мало отличается от единицы. Пренебрегая статической намагниченностью, обусловленной этим различием, мы принимаем с большой точностью, что населенности всех магнитных подуровней одинаковы.

При облучении системы атомов светом резонансной частоты, соответствующей переходам $2^3S_1 - 2^3P_{0,1,2}$, атомы будут переходить из основного триплетного состояния в возбужденное с вероятностями, которые, вообще говоря, не одинаковы для различных подуровней 2^3S_1 -состояния (см. ниже таблицы 1—4). Так как время между столкновениями двух атомов в возбужденном состоянии для разреженных газов значительно меньше времени жизни этого состояния, то вероятность перехода атома из возбужденного состояния на любой подуровень 2^3S_1 -состояния будет одинаковой. Отсюда следует, что вероятности переходов между двумя любыми подуровнями основного триплетного состояния, проходящих под действием света накачки через возбужденные состояния, определяются только вероятностями переходов из основного состояния в возбужденное и пропорциональны им. Так как вероятности переходов между любой парой подуровней 2^3S_1 -состояния в общем различны, происходит перераспределение населеностей подуровней, приводящее к изменению проекции момента количества движения системы атомов на направление магнитного поля, т. е. происходит оптическая ориентация атомов.

В процессе ориентации сильнее убывает населенность того уровня, вероятность перехода из которого на другие подуровни наибольшая. Поскольку поглощение света чувствительно к изменению населенностей N_i отдельных подуровней основного состояния, то с увеличением степени ориентации атомов интенсивность проходящего света увеличивается. Система становится более прозрачной для резонансного излучения. При полной ориентации атомов свет проходил бы через систему без поглощения. Нетрудно видеть, что интенсивность проходящего света будет меняться при индуцировании переходов между подуровнями радиочастотным полем. Таким образом, наблюдая за изменением интенсивности проходящего через систему света, можно судить о степени ориентации атомов.

Степень ориентации атомов зависит от многих факторов (например, от интенсивности, спектрального состава и поляризации света накачки, структуры атомных уровней, вероятностей переходов, температуры и механизма столкновений). Изучение степени поляризации системы должно, естественно, раскрыть роль и значение упомянутых факторов в процессе ориентации.

В качестве источника света накачки, возбуждающего переходы $2^3S_1 - 2^3P_{0,1,2}$, обычно используется газоразрядная лампа, наполненная либо Не, либо He^4 . С помощью светофильтра обрезаются все линии, за исключением необходимых; их мы обозначим через $D_0(2^3S_1 - 2^3P_0)$, $D_1(2^3S_1 - 2^3P_1)$, $D_2(2^3S_1 - 2^3P_2)$.

Линии спектра Не, соответствующие рассматриваемым переходам, сдвинуты в сторону высоких частот по отношению к соответствующим линиям Не $[4]$ примерно на 1\AA вследствие различия масс ядер. Линии D_1 и D_2 гелия раздвинуты на расстояние меньше их ширины и не разрешаются. Линия D_0 отстоит от центра неразрешенной линии $D_{1,2}$ тоже на расстояние около 1\AA . Отсюда следует, что действие на атомы Не

света лампы с Не и с Не неодинаково: при освещении атомов Не светом лампы, заполненной Не, оптическое перекачивание осуществляют все три компоненты, в то время как свет Не возбуждает в Не только $2^3S_1 - 2^3P_0$ -переходы.

Получение высокой степени поляризации атомов в 2^3S_1 -состоянии весьма затруднительно. В Не, в отличие от Не, к тепловой релаксации, определяемой временем релаксации $\tau_p \sim 10^{-4}$ сек [1], добавляется еще один механизм релаксации $\tau_e \sim 10^{-7}$ сек [1], определяемый обменом моментов количества движения при столкновениях атомов парагелия в основном состоянии с атомами в триплетном состоянии.

2. НАМАГНИЧЕННОСТЬ И ВЕЛИЧИНА СИГНАЛА ПРИ ОБЛУЧЕНИИ Не ³ НЕПОЛЯРИЗОВАННЫМ СВЕТОМ ЛИНИЙ D_0 , D_1 , D_2

Пусть число метастабильных атомов Не в 2^3S_1 -состоянии равно N и пусть N_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) — числа атомов на подуровнях

$$(F, m_F) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

соответственно. Вероятность вынужденных переходов с этих подуровней в возбужденное состояние можно записать в виде

$$P_i = \beta (I_0 A_i^{(0)} + I_1 A_i^{(1)} + I_2 A_i^{(2)}), \quad (4)$$

где I_0, I_1, I_2 — интенсивности линий D_0, D_1 и D_2 , $A_i^{(0)}, A_i^{(1)}, A_i^{(2)}$ — относительные вероятности переходов с i -го подуровня, индуцируемые светом линий D_0, D_1, D_2 соответственно, β — константа. Как будет видно из последующего, для вычисления степени ориентации достаточно знания только относительных вероятностей переходов A_i .

Предположим, что система атомов облучается светом резонансной частоты, направление распространения которого совпадает с направлением магнитного поля. Рассмотрим сначала случай, когда свет накачки неполяризован и может вызывать в облучаемой системе переходы $2^3S_1 - 2^3P_{0,1,2}$. Это соответствует облучению атомов Не светом лампы, заполненной также Не. С учетом релаксационных процессов уравнения, спределяющие изменение населенностей отдельных подуровней, имеют вид [5]

$$-\dot{N}_i = P_i N_i - \frac{1}{6} \sum_{n=1}^6 P_n N_n - \left(\frac{N}{6} - N_i \right) \frac{1}{\tau}, \quad (5)$$

где

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_e}. \quad (6)$$

Вероятности переходов P_i определяются по формуле (4). Входящие в это выражение относительные вероятности переходов вычисляются по хорошо известным формулам [6] и приводятся в таблицах 1 и 2.

В таблице 1 приведены значения относительных вероятностей переходов под действием неполяризованного света D_0, D_1, D_2 линий, распространяющегося вдоль направления магнитного поля (z -луч), а в таблице 2 — относительные вероятности переходов для света того же со-

Таблица 1

		D_3						D_1						D_0													
		F, m_F			$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$			$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$			$\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$			F, m_F			$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$			$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$				
		F, m_F			$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$			$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$			$\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$			F, m_F			$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$			$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$				
		F, m_F			$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$			$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$			$\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$			F, m_F			$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$			$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$				
$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	18	0	$\frac{9}{5}$	0	0	0	$\frac{6}{5}$	0	0	0	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	0	6	0	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	0	6	0	0	0		
$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	$\frac{54}{5}$	0	$\frac{27}{5}$	0	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	0	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	6	0	8	0	0	1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	0	2	0	2	0	
$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{27}{5}$	0	$\frac{54}{5}$	0	0	$\frac{8}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{0}{5}$	$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	0	8	0	6	1	0	$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	2	0	0	2	0	
$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{9}{5}$	0	18	0	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{0}{5}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0	0	6	0	0	0	3	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0	0	6	0	6	
$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	15	0	5	0	0	0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	3	0	1	0	0	0	8	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	4	0	4	0
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	5	0	15	0	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	1	0	3	8	0	3	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	4	0	0	4	0

Таблица 2

D_s										D_1										D_0									
F, m_F					$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$					$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$					$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$					$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$									
F, m_F		$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$			$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$			$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$												
$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{9}{10}$	0	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	9	3	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	3	0							
$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	0	$\frac{27}{5}$	$\frac{54}{5}$	$\frac{27}{10}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	3	1	4	0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	4	1							
$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{27}{10}$	$\frac{54}{5}$	$\frac{27}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	0	4	1	3	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	1	4							
$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{9}{10}$	$\frac{36}{5}$	9	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	0	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0	0	3	9	0	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0	3						
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{15}{2}$	10	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	3	2	$\frac{1}{2}$	0	4	4	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	2	2							
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	4	4	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	2							

става, но распространяющегося в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля (ρ -луч).

Воспользовавшись значениями A_i из таблицы 1, находим

$$P_1 : P_2 : P_3 : P_4 : P_5 : P_6 = (30R+6) : (34R+2) : (34R+2) : (30R+6) : (30R+4) : (32R+4), \quad (7)$$

где принято, что $I_2 = I_1 = I$ и $R = I/I_0$.

В состоянии динамического равновесия ($N_i = 0$) из (5) получаем

$$\begin{aligned} N_1 : N_2 : N_3 : N_4 : N_5 : N_6 &= \left(P_1 + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} : \left(P_2 + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} : \left(P_3 + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} : \\ &\quad : \left(P_4 + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} : \left(P_5 + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} : \left(P_6 + \frac{1}{\tau} \right)^{-1} = P_1^{*-1} : P_2^{*-1} : P_3^{*-1} : \\ &\quad : P_4^{*-1} : P_5^{*-1} : P_6^{*-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$P_i^* = \left(P_i + \frac{1}{\tau} \right). \quad (9)$$

Выражение (8) можно переписать в более удобном виде:

$$N_1 : N_2 : N_3 : N_4 : N_5 : N_6 = (1 + 4e) : 1 : 1 : (1 + 4e) : (1 + 2e) : (1 + 2e), \quad (10)$$

где

$$e = \frac{\beta I_0 (R - 1)}{\beta I_0 (34R+2) + 1/\tau} \ll 1. \quad (11)$$

Намагниченность системы, создаваемая светом накачки в направлении магнитного поля, определяется выражением

$$M = \sum_{i=1}^6 \mu_{\text{эфф}}^i N_i, \quad (12)$$

где $\mu_{\text{эфф}}^i = -\partial E_i / \partial H_0$ — эффективный магнитный момент i -го подуровня, E_i — энергия этого подуровня, определяемая уравнением (2). Опуская несложные вычисления, получаем

$$M = -\frac{N\hbar\gamma_J}{9(1+2e)} e \left[\frac{\xi - 1/2}{(1 - 4\xi/9 + 4\xi^2/9)^{1/2}} + \frac{\xi + 1/2}{(1 + 4\xi/9 + 4\xi^2/9)^{1/2}} \right], \quad (13)$$

которое для слабых полей переходит в

$$M = -\frac{16}{81} \frac{N\hbar\gamma_J}{(1+2e)} e \xi. \quad (14)$$

Определим сигнал оптической ориентации как

$$S = \overline{\Delta I} - \Delta I, \quad (15)$$

где $\overline{\Delta I}$ — интенсивность света, поглощаемая атомами, находящимися в сильном перемешивающем радиочастотном поле, ΔI — интенсивность света, поглощаемая атомами в отсутствие радиочастотного поля. Легко найти, что для рассматриваемого случая

$$S = \frac{2}{3} \frac{Ne}{(1+2e)} (P_2 - P_1) - \frac{8}{3} \beta N I_0 \frac{e}{(1+2e)} (R - 1). \quad (16)$$

Очевидно, для неполяризованного света сигнал ориентации отсутствует, если интенсивность линии $D_{1,2}$ равна интенсивности линии D_0 .

3. НАМАГНИЧЕННОСТЬ И ВЕЛИЧИНА СИГНАЛА ПРИ ОБЛУЧЕНИИ Не³ ПОЛЯРИЗОВАННЫМ СВЕТОМ ЛИНИЙ D_0 , D_1 И D_2

Используя относительные вероятности переходов под действием поляризованного по правому кругу света линий D_0 , D_1 , D_2 , которые приведены в таблице 3, находим для намагниченности системы вдоль магнитного поля под действием света накачки:

$$M = \frac{N\hbar\gamma_J}{(1-2e)} e \left[1 - \frac{1}{9} \frac{\xi - 1/2}{(1 - 4\xi/9 + 4\xi^2/9)^{1/2}} \right], \quad (17)$$

где

$$e = \frac{\beta I_0 (R - 1)}{\beta I_0 (14R + 4) + 1/\tau} \ll 1. \quad (18)$$

При $\xi \ll 1$ выражение (17) переходит в

$$M = \frac{N\hbar\gamma_J}{(1-2e)} e \left[\frac{3}{2} - \frac{8}{9} \xi - \frac{8}{27} \xi^2 \right]. \quad (19)$$

Сигнал оптической ориентации

$$S = \frac{8}{3} N \beta \frac{e}{(1-2e)} (R-2). \quad (20)$$

Из сравнения (14) и (19) видно, что намагниченность в последнем случае значительно больше. То же самое можно сказать и о сигнале.

4. НАМАГНИЧЕННОСТЬ И ВЕЛИЧИНА СИГНАЛА ПРИ ПЕРЕХОДАХ $2^3 S_1 - 2^3 P_0$

Этому случаю соответствует облучение атомов Не³ светом Не³: интенсивные компоненты будут производить ориентацию атомов с помощью переходов на два магнитных подуровня 2^3P_0 -состояния. В динамическом равновесии населенности относятся как

$$N_1 : N_2 : N_3 : N_4 : N_5 : N_6 = (1+2e) : (1+2e) : 1 : (1-4e) : (1+2e) : (1-2e), \quad (21)$$

где

$$e = \frac{\beta I_0}{2\beta I_0 + 1/\tau} \ll 1. \quad (22)$$

Намагниченность и сигнал определяются выражениями

$$M = -\frac{N\hbar\gamma_J}{2} e \left[1 - \frac{1}{9} \frac{\xi - 1/2}{(1 - 4\xi/9 + 4\xi^2/9)^{1/2}} \right], \quad (23)$$

которые при $\xi \ll 1$ переходят в

$$M = -\frac{N\hbar\gamma_J}{2} e \left[\frac{3}{2} - \frac{8}{9} \xi - \frac{8}{27} \xi^2 \right], \quad (24)$$

$$S = \frac{16}{3} N \beta I_0 e. \quad (25)$$

Таблица 3

		D_3						D_1						D_0													
		F, m_F			$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$			$\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$			$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$			$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$			$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$			$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$				
		F, m_F	$\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	$0, \frac{1}{2}$	0	$\frac{54}{5}$	0	0	0	$\frac{6}{5}$	0	0	0	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	6	0	0	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	$0, -\frac{1}{2}$	0	$\frac{27}{5}$	0	0	0	$\frac{8}{5}$	0	0	0	0	0	$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	0	8	0	0	1	0	$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	2	0	0	0	0	0	0
$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	$0, 0$	0	$\frac{9}{5}$	0	0	0	$\frac{6}{5}$	0	0	0	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0	0	6	0	0	0	3	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0	6	0	0	0	0	0	
$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$0, 0$	0	0	0	0	0	15	0	0	0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	3	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$0, 0$	0	0	0	0	0	5	0	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	1	0	0	8	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	4	0	

Нетрудно видеть, что намагниченность и сигнал, определяемые выражениями (23) и (25), по величине больше соответствующих значений, полученных в двух предыдущих разделах. И это вполне понятно, поскольку циркулярно поляризованный свет σ^{\mp} , вызывающий $2^3S_1 - 2^3P_0$ -переходы, обедняет только три подуровня метастабильного состояния

$$\left(\frac{1}{2}; \pm \frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{2}; \pm \frac{1}{2} \right), \left(\frac{3}{2}; \pm \frac{3}{2} \right),$$

приводя к большему значению степени ориентации, а следовательно, и сигнала.

Определение сигнала оптической ориентации для многоуровневой системы по формуле (15) является обобщением определения сигнала для системы [5], характеризуемой двумя уровнями с населенностями N_1 и N_2 :

$$S = \alpha \frac{N}{2} IVV^p, \quad (26)$$

где

$$V = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}, \quad V^p = \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1},$$

P_1 и P_2 — вероятности переходов, индуцируемых светом накачки определенной интенсивности I . Интенсивность света связана с вероятностями переходов простым соотношением: $\alpha I = P_1 + P_2$, где α — константа.

Для пояснения этого положения обратимся, например, к выражению (20), представляющему сигнал оптической ориентации при облучении Не³ поляризованным светом трех линий:

$$S = \frac{2}{6} \frac{Ne}{(1-2e)} (3P_1 - P_6 - 2P_4). \quad (20a)$$

Вводя обобщенные параметры

$$V = \frac{2}{6} \frac{e}{(1-2e)}, \quad V^p = \frac{3P_1 - P_6 - 2P_4}{\sum_{i=1}^6 P_i},$$

приведем (20a) к виду

$$S = cI_{\text{эфф}} NVV^p, \quad (27)$$

где $cI_{\text{эфф}} = \sum_{i=1}^6 P_i$, c — константа. Очевидно, что из выражения (27)

как частный случай получается (26).

Сигнал оптической ориентации можно записать через намагниченность. Используя (19), легко прийти к выражению

$$S = cI_{\text{эфф}} \frac{MM^p}{M_{\text{эфф}}^2}, \quad (28)$$

где

$$M = \frac{e}{(1-2e)} N \hbar \gamma_J \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{9} \xi - \frac{8}{27} \xi^2 \right) = NV_{\text{эфф}} = M_{\text{эфф}} V.$$

Аналогичное выражение получаем для M^p . Из выражений (26) и (27)

Таблица 4

		D_1						D_0					
		F, m_F			m_F			F, m_F			F, m_F		
		F, m_F			m_F			F, m_F			m_F		
		F, m_F	m_F	F, m_F	m_F	F, m_F	m_F	F, m_F	m_F	F, m_F	m_F	F, m_F	m_F
$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	0	$\frac{27}{5}$	0	0	0	$\frac{3}{5}$	0	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	0
$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{27}{10}$	0	0	0	$\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	0
$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0	0	0	$\frac{9}{10}$	0	0	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$	0
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{15}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	0

следует, что формально шестиуровневую систему можно рассматривать как двухуровневую с эффективными интенсивностью и параметрами ориентации.

Итак, мы рассмотрели возможность оптической ориентации атомов

³ Не в метастабильном состоянии, когда направление распространения света совпадает с направлением поля. Аналогичным образом можно рассмотреть воздействие на систему света, распространяющегося в направлении, поперечном полю (ρ -луч). При некоторых условиях для ρ -луча может иметь место более эффективная ориентация атомов, чем для z -луча. Например, в отсутствие релаксации, как видно из таблицы 4, все атомы можно перевести на один подуровень $F = 3/2$, $m_F = -3/2$, если падающий на систему свет, вызывающий переходы $2^3S_1 - 2^3P_0$, содержит только σ^- и π -компоненты.

Наличие в ячейке атомов парагелия учтено путем введения в уравнения, описывающие изменение населенности, членов, учитывающих релаксацию, вызываемую в ортогелии при взаимодействии последнего с атомами парагелия. Следует заметить, что связь 1^1S_0 -состояния парагелия и 2^3S_1 -состояния ортогелия настолько эффективна, что малейшие изменения в системе парагелия вызывают соответствующие изменения в системе ортогелия. Благодаря этому возникает возможность создания чувствительного магнетометра, использующего оптическую накачку в ортогелии, не только для создания поляризации ядер парагелия, но и для детектирования резонанса на ядерных магнитных подуровнях. Поскольку измерение магнитного поля осуществляется при детектировании резонанса на ядерной системе, такой гелиевый магнетометр лишен такого существенного недостатка, как смещение магнитных подуровней под действием света накачки [7]*.

Другим перспективным направлением в области использования оптической ориентации в He^3 для практических и научных целей, очевидно, может явиться изучение ядерной индукции поляризованных ядер парагелия, необходимая концентрация которых может быть достигнута путем сжатия поляризованного газа He , что практически можно осуществить благодаря большому времени ядерной релаксации [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Walters, F. Colegrove, L. Scheaer, Phys. Rev. Letters, **8**, 439 (1962).
2. L. Scheaer, F. Colegrove, G. Walters, Phys. Rev. Letters, **10**, 108 (1963).
3. Г. В. Скроцкий, В. Г. Показаньев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, 1106 (1964).
4. M. Fred, F. S. Tomkins, J. K. Brody, M. Hamermesh, Phys. Rev., **82** 406 (1951).
5. Г. В. Скроцкий, Т. Г. Изюмова, УФН, **73**, 423 (1961).
6. Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, М., 1949.
7. L. Scheaer, F. Colegrove, G. Walters, Phys. Rev., **127**, 512 (1962).

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
3 февраля 1964 г.

TO THE THEORY OF OPTICAL ORIENTATION IN He^3

G. V. Skrozy, V. G. Pokazan'ev

The possibility of the optical orientation in He^3 is considered. The related probabilities of transitions between the levels 2^3S_1 and $2^3P_{0,1,2}$ of orthoheium induced by the light of the resonance frequency have been calculated. The signal and intensity of magnetization of the oriented helium atoms have been calculated both for the case of a nonpolarized and for a polarised light propagating along the magnetic field.

* Такой магнетометр осуществлен в работе L. Schearer, R. Colegrove, G. Walters, Rev. Sci. Instr., **34**, 60 (1963).

УДК 621.396.671

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

Ю. М. Жидко

Сформулирован критерий оптимальности антенных систем, являющийся обобщением критерия Дольфа на случай, когда требования к уровню бокового излучения в различных угловых секторах различны. Описан простой метод последовательных приближений для построения оптимальных антенных решеток (решеток, диаграммы которых удовлетворяют обобщенному критерию Дольфа). Этот метод можно также использовать при построении оптимальных направленных ответвителей, щелевых мостов и других волноводно-фильтрных устройств. Приведены результаты численных расчетов оптимальных диаграмм.

1. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДИАГРАММ

Возможны различные критерии оптимальности диаграммы в зависимости от того, по каким параметрам диаграммы осуществляется оптимизация (что в свою очередь определяется назначением антенны и способом обработки данных). Наиболее распространенным является критерий Дольфа, учитывающий лишь два параметра диаграммы: полуширину основного лепестка $\Delta\Theta$ и максимальный уровень бокового излучения R . Он заключается в том, чтобы при заданном значении одного из параметров ($\Delta\Theta$ или R) величина другого (R или $\Delta\Theta$) была минимальной. В основу этого критерия положено предположение, что требования к уровню бокового излучения во всем секторе телесных углов $0 \div 4\pi$ одинаково. На практике же часто требования к уровню бокового излучения в различных угловых секторах различны. Представляет интерес, например, следующая задача: найти диаграмму (в классе реализуемых) с минимальной шириной основного лепестка при условии, что в секторе углов A_1 уровень боковых лепестков не превышает R_1 , а в остальном секторе не превышает R . Количество секторов может быть любым. В общем эту задачу можно сформулировать так: найти диаграмму $F(\Theta)$, имеющую минимальную ширину основного лепестка в классе реализуемых диаграмм, удовлетворяющих в области углов, где расположены боковые лепестки, неравенству

$$\left| \frac{F(\Theta)}{F(\Theta_0)} \right| < Rf(\Theta). \quad (1)$$

Здесь Θ — угловая координата, Θ_0 — направление основного лепестка диаграммы, $f(\Theta) > 0$ — заданная функция от Θ . Значение $Rf(\Theta)$ определяет допустимый уровень бокового излучения в направлении Θ . Для удобства будем предполагать, что $f(\Theta)$ нормирована на максимальное значение, т. е. $\max f(\Theta) = 1$; тогда константа R определяет наибольший допустимый уровень бокового излучения.

Представляется также интересным отыскание диаграммы, удовлетворяющей условию (1) и имеющей при заданной полуширине основного лепестка $\Delta\Theta$ минимальное значение R . Будем называть эти диаграммы

ситимальными. Введенный критерий естественно называть обобщенным критерием Дольфа, поскольку при $f(\Theta) \equiv 1$ он совпадает с последним.

В настоящей работе предлагается способ численного отыскания оптимальных диаграмм для произвольных функций $f(\Theta)$. Конкретный вид $f(\Theta)$ зависит от назначения антенны и способа обработки данных. Определение функции $f(\Theta)$ для конкретных случаев представляет самостоятельную задачу и будет рассмотрено в другой работе.

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ. СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ДИАГРАММ

Будем рассматривать линейную antennную решетку, состоящую из M идентичных синфазных, эквидистантно расположенных излучателей. Все реализуемые диаграммы такой антенны при симметричном возбуждении излучателей описываются, как известно, выражением [1]

$$\begin{aligned} F(\Theta) &= \varphi_0(\Theta) \varphi(\Theta), \\ \varphi(\Theta) &= x^\alpha P_N(x^2), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha = 2N_1 + 1 - M$, N_1 —целая часть от $M/2$, $N = N_1 + \alpha$, $x = \cos\left(\frac{kd}{2}\sin\Theta\right)$, k —волновое число, d —расстояние между соседними излучателями, Θ —угол, отсчитываемый от направления, перпендикулярного оси антенны, $P_N(x^2)$ —произвольный полином N -ой степени от x^2 с действительными коэффициентами, $\varphi_0(\Theta)$ —диаграмма направленности единичного излучателя. Безде в дальнейшем предполагается, что диаграмма $\varphi_0(\Theta)$ нормирована ($\varphi_0(1) = 1$) и не имеет нулей в области действительных углов.

Области действительных углов $-\pi \leq \Theta \leq +\pi$ соответствует следующий интервал по x :

$$\begin{aligned} \bar{x} &\leq x \leq 1, \\ \bar{x} &= \begin{cases} \cos(kd/2) & \text{при } d \leq \lambda \\ -1 & \text{при } d \geq \lambda \end{cases}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\left| \frac{\gamma(x)}{\gamma(1)} \right| \leq R \Psi(x), \quad \bar{x} \leq x \leq x_1, \quad (4)$$

где введены обозначения

$$x^\alpha P_N(x^2) = \gamma(x), \quad \left| \frac{f(\Theta)}{\varphi_0(\Theta)} \right| = \Psi(x), \quad (5)$$

x_1 —первый (отсчитываемый от основного лепестка) нуль диаграммы.

Поскольку $|\gamma(x)|$ является четной функцией от x , неравенство (4) при $d > \lambda/2$ можно записать в таком виде:

$$\left| \frac{\gamma(x)}{\gamma(1)} \right| \leq R \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (6)$$

$$\left| \frac{\gamma(x)}{\gamma(1)} \right| \leq R \Psi(-x), \quad 0 \leq x \leq |\bar{x}|.$$

Систему неравенств (6) можно свести к одному неравенству

$$\left| \frac{\gamma(x)}{\gamma(1)} \right| \leq R \bar{\Psi}(x), \quad \bar{x} \leq x \leq x_1, \quad (7)$$

где

$$\bar{x} = \begin{cases} \cos(kd/2) & \text{при } d \leq \lambda/2 \\ 0 & \text{при } d \geq \lambda/2 \end{cases}; \quad (8)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \begin{cases} \Psi(x) & \text{при } d > \lambda/2, 0 \leq x \leq |\bar{x}| \\ \Psi(-x) & \text{при } d < \lambda/2, 0 \leq x \leq |\bar{x}| \end{cases}. \quad (9)$$

Функция $\bar{\Psi}(x)$ в общем случае неоднозначна. При $d \leq \lambda/2$ $\bar{\Psi}(x) \equiv \Psi(x)$, однако это не исключает неоднозначности, ибо $\Psi(x)$ также неоднозначна (каждому значению x соответствует несколько значений Θ). Она имеет по крайней мере две ветви, соответствующие положительным и отрицательным Θ^* . Условие (7) должно выполняться при всех значениях $\bar{\Psi}(x)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$|\xi(x)| \leq R, \quad x \leq x \leq x_1, \quad (10)$$

где

$$\xi(x) = \frac{1}{\bar{\Psi}(x)} \frac{\gamma(x)}{\gamma(1)}, \quad (11)$$

$$\bar{\Psi}(x) = \min_i \bar{\Psi}_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

$\bar{\Psi}_i(x)$ — i -ая ветвь функции $\bar{\Psi}(x)$, n — число ветвей. Запись исходного неравенства (4) в виде (10) более удобна, так как она позволяет ограничиться рассмотрением лишь положительных значений x .

Обозначим через $G(x)$ диаграмму направленности антенной решетки (нормированную на максимальное значение), выраженную в масштабе x , т. е.

$$G(x) = \gamma_0(x) \bar{\Psi}(x) \xi(x), \quad (13)$$

где $\gamma_0(x) = \varphi_0[\Theta(x)]$. Поскольку функции $\gamma_0(x)$ и $\bar{\Psi}(x)$ заданы, то диаграмма $G(x)$ полностью определяется функцией $\xi(x)$, которую также будем называть диаграммой. Все реализуемые диаграммы $\xi(x)$ имеют, как следует из (5) и (11), следующий вид:

$$\xi(x) = \frac{1}{\bar{\Psi}(x)} x^\alpha \frac{P_N(x^2)}{P_N(1)}. \quad (14)$$

Так как $\bar{\Psi}(x)$ не имеет нулей в интервале $x_1 < x \leq 1$, то по ширине основного лепестка на нулевом уровне диаграммы $\xi(x)$ и $G(x)$ совпадают. (Полуширина основного лепестка $\Delta x = 1 - x_1$.)

Таким образом, отыскание оптимальной диаграммы $\tilde{G}(x)$ сводится к отысканию диаграммы $\tilde{\xi}(x)$ (которую также будем называть оптимальной), удовлетворяющей условиям (10), (14) и имеющей при фиксированном R (либо Δx) минимальное Δx (либо R).

Пусть полином $\tilde{P}_N(x^2)$ соответствует оптимальной диаграмме $\tilde{\xi}(x)$, т. е.

$$\tilde{\xi}(x) = \frac{x^\alpha}{\bar{\Psi}(x)} \frac{\tilde{P}_N(x^2)}{\tilde{P}_N(1)}. \quad (15)$$

* Ветви, соответствующие положительным и отрицательным Θ , совпадают, если $|f(\Theta)/\varphi_0(\Theta)|$ — четная функция от Θ .

Положительные корни полинома $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_L$, лежащие в интервале $\tilde{x} \leq x < 1$, разбивают его на $L + 1$ последовательно расположенных подинтервалов l_1, l_2, l_{L+1} . В первом подинтервале l_1 расположен основной лепесток диаграммы $\tilde{\xi}(x)$ (а следовательно, и $\tilde{G}(x)$), в остальных— боковые лепестки.

Оптимальная диаграмма $\tilde{\xi}(x)$ обладает следующими свойствами, которые положены в основу описанного ниже метода численного расчета: а) все N корней полинома $\tilde{P}_N(x^2)$ лежат в интервале $\tilde{x} \leq x < 1$; б) все N боковых лепестков диаграммы $\tilde{\xi}(x)$ одинаковы по величине и равны R , т. е.

$$\tilde{y}_i = \max_{x \in l_i} |\tilde{\xi}(x)| = R |\tilde{\xi}(1)| \quad (i = 2, 3, \dots, N+1); \quad (16)$$

в) диаграмма $\tilde{\xi}(x)$, обладающая свойствами а, б и имеющая заданное значение ширины основного лепестка (фиксировано x_1) либо уровня боковых лепестков (фиксировано R), единственна. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих свойств, которое базируется на теоремах Чебышева о полиномах наилучшего равномерного приближения [2]. Заметим лишь, что при доказательстве свойства в используется предположение о том, что весовая функция $f(\Theta)$ не имеет нулей в области действительных углов.

Таким образом, задача об отыскании оптимальных диаграмм сводится к отысканию диаграммы $\tilde{\xi}(x)$, имеющей N боковых лепестков, которые удовлетворяют условию

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = \dots = \tilde{y}_{N+1}, \quad \tilde{x}_1 = a \quad (17)$$

при заданной ширине основного лепестка ($a = \cos[(\pi/2)\sin(\Delta\Theta)]$; $2\Delta\Theta$ — ширина основного лепестка по нулевому уровню), и условию

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_3 = \dots = \tilde{y}_{N+1} = R |\tilde{\xi}(1)| \quad (18)$$

при заданном уровне боковых лепестков R .

3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В работе [3] описано два метода построения многочленов P_N , соответствующих оптимальной диаграмме (многочлен наилучшего равномерного приближения). Оба они — метод узлов и метод последовательных чебышевских интерполяций сравнительно громоздки. Применение их при расчетах на вычислительных машинах требует довольно сложных программ. В связи с этим нами была рассмотрена возможность расчетов по весьма простому методу, описанному в этом разделе. Фактически это метод узлов, но со значительно упрощенной процедурой выбора коэффициентов корректирующего многочлена. Указанное упрощение существенно облегчает программирование, но, по-видимому, ухудшает в некоторой степени сходимость последовательных приближений к искомому решению. Однако, как показывают численные расчеты на БЭСМ-2, сходимость остается вполне удовлетворительной даже при сравнительно большом (~ 40) количестве излучателей в решетке.

Метод численного расчета оптимальных диаграмм основан на двух вспомогательных леммах*.

Лемма 1. Если полиномы $P_N(x^2)$ и $\bar{P}_N(x^2)$ таковы, что все корни у них одинаковы, за исключением n -го, т. е.

$$\bar{x}_i^2 = \begin{cases} x_i^2 & \text{при } i \neq n, \\ x_n^2 + \Delta & \text{при } i = n \end{cases}, \quad (19)$$

то диаграммы $\xi(v) = \frac{x^\alpha}{\bar{\Psi}(x)} \frac{P_N(x^2)}{P_N(1)}$ и $\bar{\xi}(x) = \frac{x^\alpha}{\bar{\Psi}(x)} \frac{\bar{P}_N(x^2)}{\bar{P}_N(1)}$ внутри интервала $\bar{x} \leq x \leq 1$ удовлетворяют неравенствам

$$|\bar{\xi}(x)| > |\xi(x)| \text{ при } x < x_n, \quad |\bar{\xi}(x)| < |\xi(x)| \text{ при } x > \bar{x}_n \quad (20)$$

для $\Delta > 0$, а для $\Delta < 0$ — неравенствам

$$|\bar{\xi}(x)| < |\xi(x)| \text{ при } x < \bar{x}_n, \quad |\bar{\xi}(x)| > |\xi(x)| \text{ при } x > x_n. \quad (21)$$

Лемма 2. Если полиномы $P_N(x^2)$ и $\bar{P}_N(x^2)$ таковы, что все корни у них одинаковы, за исключением n -го и $(n-1)$ -го:

$$\bar{x}_i^2 = \begin{cases} x_i^2 & \text{при } i \neq n, n-1 \\ x_{n-1} + \Delta & \text{при } i = n-1 \\ x_n^2 - \Delta & \text{при } i = n \end{cases} \quad (22)$$

($\Delta > 0$), то диаграммы $\xi(x)$ и $\bar{\xi}(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\bar{\xi}(x)| < |\xi(x)| \text{ при } x \in \sigma_1, \quad |\bar{\xi}(x)| > |\xi(x)| \text{ при } x \in \sigma_2. \quad (23)$$

Здесь $x \in \sigma_1$, если $\bar{x}_{n-1} < x < 1$ или $\bar{x} < x < \bar{x}_n$, и $x \in \sigma_2$, если $x_n < x < x_{n-1}$.

На основании этих лемм нетрудно сформулировать алгоритм численного расчета корней полинома $\bar{P}_N(x^2)$, соответствующего оптимальной диаграмме $\bar{\xi}(x)$. Это метод последовательных приближений. Рассмотрим сначала случай, когда задан уровень боковых лепестков. В качестве нулевого приближения можно взять какие-либо N корней $x_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), расположенные в интервале $\bar{x} \leq x \leq 1$. Можно, в частности, использовать корни полинома Чебышева N -ой степени или расположить корни эквидистантно в этом интервале.

Точки $x_i^{(0)}$ разбивают интервал $\bar{x} \leq x \leq 1$ на $N+1$ подинтервалов; обозначим их через $\ell_i^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, N+1$). Введем также следующие обозначения:

$$\xi^{(0)}(x) = \frac{x^\alpha}{\bar{\Psi}(x)} \frac{P_N^{(0)}(\bar{x}^2)}{P_N^{(0)}(1)}; \quad \max_{x \in \ell_i^{(0)}} |\xi^{(0)}(x)| = y_i^{(0)} \quad (i = 2, 3, \dots, N+1); \quad (24)$$

$$y_1^{(0)} = R \xi^{(0)}(1); \quad \max_i y_i^{(0)} = \zeta^{(0)}; \quad \min_i y_i^{(0)} = \eta^{(0)}.$$

Если подинтервал $\ell_n^{(0)}$, для которого $y_n^{(0)} = \eta^{(0)}$, не лежит на краю ин-

* Доказательство этих лемм несложное и поэтому опускается.

тервала $\bar{x} \leq x \leq 1$, т. е. $n \neq 1, N + 1$, то в качестве следующего (первого) приближения возьмем

$$(x_i^{(1)})^2 = \begin{cases} (x_i^{(0)})^2 & \text{при } i \neq n - 1, n \\ (x_{n-1}^{(0)})^2 + \Delta & \text{при } i = n - 1 \\ (x_n^{(0)})^2 - \Delta & \text{при } i = n \end{cases}, \quad (25)$$

где Δ — положительная величина. При $\Delta = 0$ $\zeta^{(1)} = \zeta^{(0)}$. С ростом $\Delta |\xi^{(1)}(x)|$ увеличивается внутри интервала $x_n^{(1)} \leq x \leq x_{n-1}^{(1)}$, как следует из леммы 2, и уменьшается вне его. Значит, с ростом Δ $\zeta^{(1)}$ уменьшается до тех пор, пока не выполнится равенство

$$\max_{x_n^{(1)} \leq x \leq x_{n-1}^{(1)}} |\xi^{(1)}(x)| = \max_{\bar{x} \leq x \leq x_n^{(1)}, x_{n-1}^{(1)} \leq x \leq 1} |\xi^{(1)}(x)|. \quad (26)$$

Это условие и определяет выбор Δ .

Если l_n лежит на краю интервала $\bar{x} \leq x \leq 1$ т. е. $n = 1$ либо $N + 1$, то процедура отыскания первого приближения аналогична, с той разницей, что в этом случае варьируется положение лишь одного корня: для $n = 1$

$$(x_i^{(1)})^2 = \begin{cases} (x_i^{(0)})^2 & \text{при } i \neq 1 \\ (x_1^{(0)})^2 - \Delta & \text{при } i = 1 \end{cases}, \quad (27)$$

для $n = N + 1$

$$(x_i^{(1)})^2 = \begin{cases} (x_i^{(0)})^2 & \text{при } i \neq N \\ (x_N^{(0)})^2 + \Delta & \text{при } i = N \end{cases}. \quad (28)$$

Аналогично получается второе, третье и т. д. приближения:

$$\zeta^{(1)} > \zeta^{(2)} > \zeta^{(3)} > \dots \quad (29)$$

В конечном итоге всегда можно найти значения корней, при которых все $y_i^{(q)}$ совпадают с любой наперед заданной точностью, т. е. выполняется условие (18). Следовательно, с этой же точностью функция $\xi^{(q)}(x) = \frac{x^2}{\bar{\Psi}(x)} \frac{P_N^{(q)}(x^2)}{P_N^{(q)}(1)}$ описывает оптимальную диаграмму.

Процедура отыскания оптимальной диаграммы в случае, когда задана ширина основного лепестка, аналогична, с той лишь разницей, что первый корень фиксирован (он определяет ширину лепестка).

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

При $\varphi_0(\Theta) = \text{const}$ и $f(\Theta) = \text{const}$ оптимальная диаграмма, как известно, описывается полиномом Чебышева. Если же $\varphi_0(\Theta)$ и $f(\Theta)$ (либо одна из них) не являются константами, то диаграмма, описываемая полиномом Чебышева, не является оптимальной, т. е. при заданной ширине основного лепестка она имеет более высокий уровень боковых лепестков, и наоборот: при заданном уровне боковых лепестков у нее более широкий основной лепесток, чем у оптимальной диаграммы. Представляется интересным определить, насколько улучшаются характеристики антенны при использовании оптимальных диаграмм. С этой

целью, а также для проверки сходимости метода последовательных приближений, развитого в работе, были проведены численные расчеты на БЭСМ-2 ряда оптимальных диаграмм, имеющих заданный уровень боковых лепестков. Предполагалось, что антенная решетка состоит из синфазных изотропных излучателей, расположенных на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга; весовая функция бралась в виде

$$f(\Theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \Theta > \Theta_2 \text{ и } \Theta < \Theta_1 \\ 1/A & \text{при } \Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_2 \end{cases}, \quad (30)$$

где $A \geq 1$.

В соответствии с (1) и (30) ширина основного лепестка оптимальной диаграммы должна быть минимальна в классе реализуемых диаграмм, у которых боковые лепестки в интервале углов $\Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_2$, не превышают R/A , а в остальном интервале не больше R .

Расчеты производились для $M = 13$ при различных значениях R , A , Θ_1 и Θ_2 . В качестве нулевого приближения использовалась диаграмма с эквидистантно расположенными (в масштабе x^2) нулями:

$$(x_i^{(0)})^2 = 1 - \frac{i}{N+1} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (31)$$

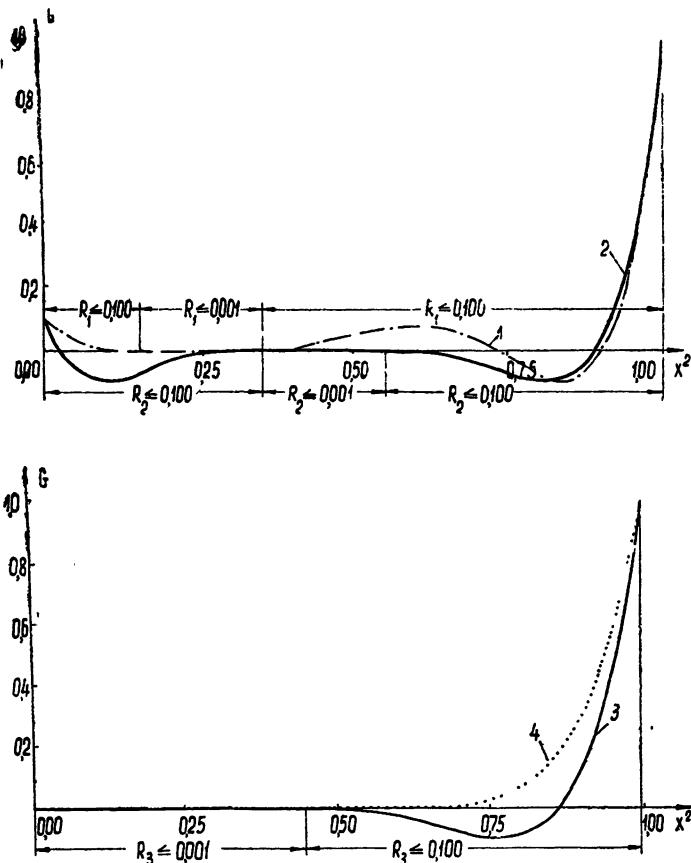


Рис. 1а и 16.

Вид нескольких оптимальных диаграмм G приведен на рис. 1, 2 (кривые 1—3, 5, 6, 9). Значения параметров, соответствующих каждой из этих кривых, приведены в таблице 1. Вертикальными линиями на рис. 1,

2 отмечены границы областей $\Theta < \Theta_1$, $\Theta > \Theta_2$ и $\Theta_1 \leq \Theta \leq \Theta_2$; для каждой из этих областей указан допустимый уровень боковых лепестков R_i (i — номер кривой). Для сравнения на этих же рисунках приведены диаграммы, описываемые полиномом Чебышева с уровнями боковых лепестков 0,1 (кривая 8), 0,01 (кривая 7) и 0,001 (кривая 4). Естественно сравнить оптимальную диаграмму, соответствующую заданным R и

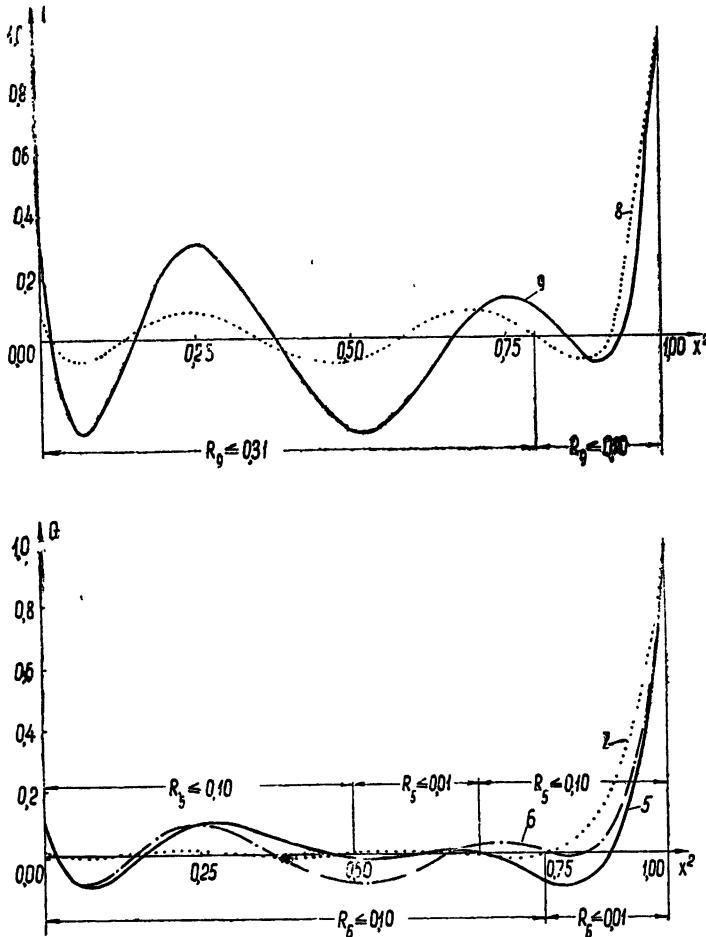


Рис. 2а и 26.

A , с той чебышевской диаграммой, у которой уровень боковых лепестков равен R/A , ибо именно она обладает наиболее узким основным лепестком в классе чебышевских диаграмм, удовлетворяющих условию (1) (при более высоком уровне боковых лепестков не удовлетворяется условие (1), а диаграммы с меньшим уровнем боковых лепестков имеют более широкие основные лепестки).

Введем следующее обозначение:

$$\beta = \Delta\Theta_4/\Delta\Theta, \quad (32)$$

где $2\Delta\Theta$ — ширина оптимальной диаграммы, $2\Delta\Theta_4$ — ширина чебышевской диаграммы, соответствующей (в указанном выше смысле) тем же значениям параметров A и R . Величина β всегда больше или равна единице и определяет выигрыш, получаемый от применения оптимальной

диаграммы. Как следует из рис. 1—2 и таблицы 1, где приведены значения β и $\Delta\Theta$ для рассчитанных оптимальных диаграмм, оптимизация приводит в ряде случаев к существенному сужению основного лепестка. Так, например, при $A = 10$, $R = 0,1$, $\Theta_1 = 21,1^\circ$ и $\Theta_2 = 30^\circ$ (кривая 5) величина $\beta = 1,48$, т. е. происходит сужение основного лепестка почти на 50%, а при $A = 100$, $R = 0,1$, $\Theta_1 = 36,6^\circ$ и $\Theta_2 = 48,2^\circ$ (кривая 1) основной лепесток сужается почти вдвое ($\beta = 1,94$).

Сужение основного лепестка оптимальной диаграммы (по сравнению с соответствующей чебышевской) происходит за счет увеличения боковых лепестков в A раз в секторах $\Theta < \Theta_1$ и $\Theta > \Theta_2$. Сужение основного лепестка приводит к увеличению направленности D (в направлении основного лепестка), а увеличение уровня боковых лепестков уменьшает D . При различных значениях A , R , Θ_1 и Θ_2 влияние этих двух факторов различно. В результате некоторые оптимальные диаграммы из приведенных на рис. 1, 2 имеют большую направленность, а некоторые — меньшую, чем у соответствующих чебышевских. Так, например, при $A = 100$, $R = 0,1$, $\Theta_1 = 36,6^\circ$, $\Theta_2 = 48,2^\circ$ (кривая 1) сужение основного лепестка вдвое сопровождается увеличением направленности на 29%, тогда как при $A = 3,16$, $R = 0,3165$, $\Theta_1 = 17,1^\circ$, $\Theta_2 = 90^\circ$ (кривая 9) сужение основного лепестка на 11% сопровождается уменьшением направленности на 25%. Величина направленности D для каждой из диаграмм рис. 1, 2 приведена в таблице 1.

Таблица 1

Но- мер кри- вой	Θ_2 (град)	Θ_1 (град)	A	R	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	D	$\Delta\Theta$ (град)	$\beta = \frac{\Delta\Theta_1}{\Delta\Theta_2}$
1	48,2	36,6	100	0,1000	0,7384	0,7689	0,6071	0,6719	0,3894	0,1940	11,3	11,7	1,94		
2	36,6	28,3	100	0,1000	1,1675	1,1280	0,8653	0,9254	0,3010	0,2990	10,9	12,3	1,84		
3	90,0	32,1	100	0,1000	1,0146	0,9950	0,8389	0,5502	0,2526	0,0651	9,9	13,8	1,64		
4	—	—	1,00	0,0010	0,9269	0,7347	0,4905	0,2670	0,1107	0,0294	8,4	22,7	1,00		
5	30,0	21,1	10,0	0,1000	0,9189	0,8468	0,8997	0,7709	0,2942	0,4647	11,7	11,3	1,48		
6	90,0	17,1	10,0	0,1000	0,9919	0,9349	0,7726	0,5138	0,2631	0,5300	11,4	13,3	1,25		
7	—	—	1,00	0,0100	0,9503	0,8134	0,6213	0,4154	0,2341	0,1133	9,9	16,7	1,00		
8	—	—	1,00	0,1000	0,9770	0,9106	0,8076	0,6781	0,5346	0,7459	12,5	10,3	1,00		
9	90,0	17,1	3,36	0,3165	1,1110	1,2320	1,0794	0,6375	0,0468	1,8929	19,0	9,3	1,11		

В таблице 1 приведены также распределения токов по излучателям решетки, соответствующие оптимальным и чебышевским диаграммам 1—9. Токи I_0, I_1, \dots, I_6 нормированы так, что $I_0 = 1$. Нетрудно видеть, что, как правило, для реализации оптимальной диаграммы требуется существенно иное распределение амплитуд токов в излучателях, чем для реализации соответствующей чебышевской диаграммы.

На рис. 3 приведена оптимальная диаграмма (сплошная линия), рассчитанная для $f(\Theta) = 1$, $R = 0,1$, в предположении, что решетка состоит из элементарных диполей, т. е.

$$f_0(\Theta) = \cos \Theta. \quad (33)$$

Для сравнения на этом же рисунке пунктиром изображена диаграмма

$$G(x) = \gamma_0(x) G_4(x), \quad (34)$$

где $G_4(x)$ — чебышевская диаграмма с уровнем боковых лепестков $R = 0,1$, а также диаграмма направленности единичного излучателя

$\gamma_0(x)$ (штрих-пунктир). Как видно из этого рисунка, $\Delta\Theta = 9,7^\circ$, $\Delta\Theta_4 = 10,3^\circ$, т. е. сужение основного лепестка происходит всего лишь на 6%. Оптимальной диаграммой рис. 3 соответствует следующее распределение токов в излучателях: $I_0 = 1,000$; $I_1 = 0,000$; $I_2 = 0,961$; $I_3 = -0,074$; $I_4 = 0,855$; $I_5 = -0,200$; $I_6 = 0,743$.

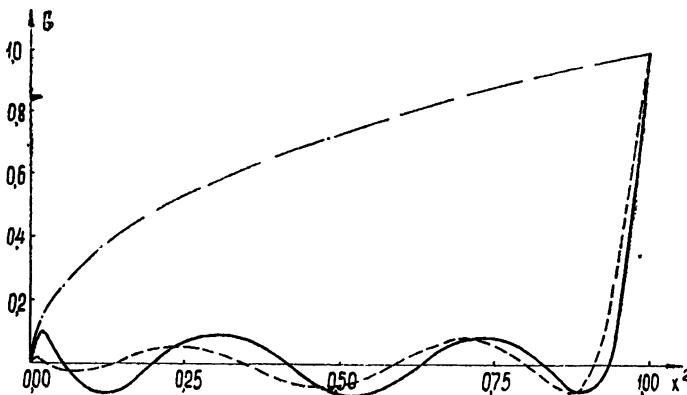


Рис. 3.

В целом численные расчеты показывают, что использование оптимальных диаграмм (обобщенный критерий Дольфа) позволяет в ряде случаев существенно улучшить характеристики антенны.

В работе рассматривался случай синфазных излучателей. Однако предложенный метод расчета оптимальных антенных систем применим и в более общем случае, когда между излучателями имеется прогрессивный сдвиг фаз $\alpha_0(\Theta_0 = \arcsin(\alpha_0/kd))$. Наличие прогрессивного сдвига фаз между излучателями приводит лишь к изменению интервала по x , соответствующего области действительных углов $-\pi \leq \Theta \leq \pi$, поскольку в общем случае связь между x и Θ имеет вид

$$x = \cos \frac{kd \sin \Theta - \alpha_0}{2}. \quad (35)$$

Отметим также, что рассматриваемый в работе критерий оптимальности антенн может быть использован как критерий оптимальности некоторых волноводно-фидерных устройств, поскольку их частотные характеристики являются аналогом диаграммы. Вид весовой функции (аналогичной $f(\Theta)$) в этом случае определяется требованием к частотным характеристикам. Развитый в работе метод построения оптимальных диаграмм может быть использован для отыскания оптимальных частотных характеристик, направленных ответвителей и волноводных мостов, у которых связь между отдельными каналами осуществляется системой эквидистантно расположенных щелей, поскольку их частотные характеристики при условии малой связи через каждую из щелей имеют вид, аналогичный диаграмме направленности антенной решетки (2) (разница лишь в том, что f является функцией частоты, а не угла). Следовательно, оптимальные диаграммы рис. 1—3 являются также оптимальными частотными характеристиками направленных ответвителей и волноводно-щелевых мостов (для тех же весовых функций f),

а амплитуда I_i определяет величину связи через i -ю щель. Следует заметить, что описанный метод построения оптимальных диаграмм можно использовать и в случае, если диаграмма направленности единичного излучателя имеет нули внутри интервала $\bar{x} \leq x < 1$. Полученная при этом диаграмма также будет удовлетворять условиям а, б. Однако вопрос о том, является ли она оптимальной, остается открытым.

Автор признателен М. А. Миллеру за обсуждение результатов и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. З. Айзенберг, Антенны ультракоротких волн, Связьиздат, М., 1957.
- 2 Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, М., 1947.
- 3 Е. Я. Ремез, Общие вычислительные методы чебышевского приближения, АН УССР, Киев, 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 декабря 1963 г.

THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS FOR DESIGNING OPTIMUM ANTENNA ARRAYS

Yu M. Zhidko

The criterion has been formulated of the optimum antenna systems being the generalization of Dolf's criterion in the case when the requirements to the side radiation level in different angular sectors are different. A simple method has been described of successive approximations for designing optimum antenna arrays (arrays the patterns of which satisfy generalized Dolf's criterion). This method may be used also when designing optimum directional couplers, slot bridges and other waveguide devices. The calculation results of optimum patterns are given.

УДК 621.371.167 : 538 112

ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО СООСНО ДВУМ ДИСКАМ

E. A. Иванов

Дается строгое решение задачи о дифракции поля элементарного магнитного диполя на двух дисках различных радиусов. Произвольно ориентированный диполь расположен в любой точке общей для дисков оси вращения (в том числе и в центре одного из дисков). Решение находится как сумма решений двух частных задач: а) задачи о дифракции поля вертикального магнитного диполя на двух дисках и б) задачи о дифракции поля горизонтального магнитного диполя.

ВВЕДЕНИЕ

Решается задача о дифракции электромагнитных волн на двух параллельных идеально проводящих и бесконечно тонких дисках с общей осью вращения, расположенных в пустоте ($\epsilon = 1$, $\mu = 1$) на расстоянии l друг от друга. В качестве источника первичного поля взят элементарный магнитный колебательный диполь с магнитным моментом \mathbf{m} , расположенный в произвольной точке P на оси вращения дисков так, что его момент \mathbf{m} образует произвольный угол α с осью вращения дисков (рис. 1). Считается также, что в общем случае радиусы дисков a_{+1} и a_{-1} различны.

Введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси вращения дисков и чтобы вектор \mathbf{m} оказался лежащим в плоскости xOz . Одновременно с этим введем местные системы координат $O_{-1}x_{-1}y_{-1}z_{-1}$ и $O_{+1}x_{+1}y_{+1}z_{+1}$, приписанные каждому из дисков, с осями, параллельными и одинаково направленными по отношению к соответствующим осям системы $Oxyz$. В дальнейшем считаем, что начало системы $Oxyz$ совпадает с началом системы $O_s x_s y_s z_s$, если диполь расположен на поверхности s -го диска ($s = \pm 1$; этот случай отвечает задаче о дифракции поля излучения диска с односторонней элементарной щелью на другом диске, играющим роль пассивного отражателя). Аналогичное предположение относительно начала системы $Oxyz$ сохраняется и для случая, когда диполь находится вне зазора между дисками. Если же диполь расположен между дисками, то считается, что начало системы $Oxyz$ совпадает с точкой P . В местных декартовых координатах поверхности дисков определяются уравнениями

$$x_s^2 + y_s^2 \leq a_s^2, \quad z_s = 0 \quad (s = \pm 1), \quad (1)$$

а положение диполя — координатами $x_s = y_s = 0$, $z_s = z_{s0}$, где $|z_{s0}| = l_{s0}$, $s = \pm 1$.

Поле диполя в свободном пространстве определяется через магнит-

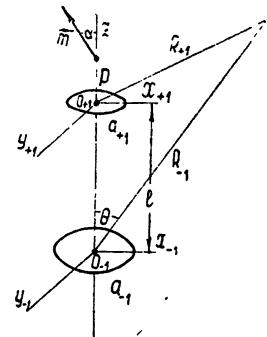


Рис. 1.

ный вектор Герца $\Pi^{(1)} = \mathbf{m} e^{ikR - i\omega t} / R$ (в дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опускается) соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} &= ik \operatorname{rot} \Pi^{(1)}, \\ \mathbf{H}^{(1)} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi^{(1)} + k^2 \Pi^{(1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Благодаря возбуждению дисков полем (2), в пространстве, содержащем диски, возникает вторичное электромагнитное поле $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$, в результате чего полное поле \mathbf{E}, \mathbf{H} представляет собой суперпозицию полей $\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}.$$

Если Π — вектор Герца результирующего поля \mathbf{E}, \mathbf{H} , то \mathbf{E}, \mathbf{H} определяются через Π из тех же соотношений (2), записанных теперь для \mathbf{E}, \mathbf{H} и Π . Очевидно, что вектор $\Pi^{(1)}$ может быть представлен в виде суммы двух векторов: $\Pi_{\text{в}}^{(1)}$ и $\Pi_{\text{г}}^{(1)}$, где $\Pi_{\text{в}}^{(1)} \parallel Oz$, $\Pi_{\text{г}}^{(1)} \perp Oz$ и

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{в}}^{(1)} &= \left\{ 0, 0, |m| \cos \alpha \frac{e^{ikR}}{R} \right\}, \\ \Pi_{\text{г}}^{(1)} &= \left\{ |m| \sin \alpha \frac{e^{ikR}}{R}, 0, 0 \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда, в силу линейности соотношений (2) относительно Π и \mathbf{E} , первичное поле $\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$ может рассматриваться как результат наложения двух полей: поля $\mathbf{E}_{\text{в}}^{(1)}, \mathbf{H}_{\text{в}}^{(1)}$, обусловленного только вертикальным вектором Герца $\Pi_{\text{в}}^{(1)}$, и поля $\mathbf{E}_{\text{г}}^{(1)}, \mathbf{H}_{\text{г}}^{(1)}$ обусловленного только горизонтальным вектором $\Pi_{\text{г}}^{(1)}$. По той же причине мы и вторичное поле $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{H}^{(2)}$ можем рассматривать как результат наложения двух полей, одно из которых ($\mathbf{E}_{\text{в}}^{(2)}, \mathbf{H}_{\text{в}}^{(2)}$) отвечает случаю возбуждения дисков только вертикальным магнитным диполем (для него $\Pi_{\text{в}}^{(1)} = m \cos \alpha e^{ikR}/R$), а второе ($\mathbf{E}_{\text{г}}^{(2)}, \mathbf{H}_{\text{г}}^{(2)}$) — случаю возбуждения дисков только горизонтальным магнитным диполем (для него $\Pi_{\text{г}}^{(1)} = m \sin \alpha e^{ikR}/R$). При этом $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}_{\text{в}}^{(2)} + \mathbf{E}_{\text{г}}^{(2)}$, а $\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}_{\text{в}}^{(2)} + \mathbf{H}_{\text{г}}^{(2)}$. Из только что приведенных сопрежений следует, что решение рассматриваемой задачи по отысканию полного поля \mathbf{E}, \mathbf{H} может быть найдено путем решения двух вспомогательных задач:

а) задачи о дифракции поля вертикального магнитного диполя на двух дисках и

б) задачи о дифракции поля горизонтального магнитного диполя на двух дисках, когда первичные поля задаются векторами $\Pi_{\text{в}}^{(1)}$ или $\Pi_{\text{г}}^{(1)}$ из (3) соответственно.

Задача, аналогичная первой, но отнесенная к случаю вертикального электрического диполя, частично рассматривалась в [1]. В [2, 3] дано решение второй задачи, полученное для случая дисков равного радиуса. В данной работе приводится строгое решение обеих задач а, б, полученное для дисков различных радиусов, рассматриваются некоторые частные случаи, вытекающие из этих решений, и приводятся результаты численного решения задачи для нескольких значений параметров, определяющих поле в волновой зоне.

1. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ

Пусть первичное поле задается вектором Герца $\Pi_{\text{в}}^{(1)}$ из (3). Если ввести в рассмотрение сферические координаты R, θ, φ с началом в точке P , то в этих координатах

$$\Pi_{\text{в}}^{(1)} = \left\{ |\mathbf{m}| \cos \alpha \cos \theta \frac{e^{ikR}}{R}, -|\mathbf{m}| \cos \alpha \sin \theta \frac{e^{ikR}}{R}, 0 \right\}.$$

Здесь обе отличные от нуля компоненты вектора $\Pi_{\text{в}}^{(1)}$ не зависят от азимутального угла φ . Поэтому из первого равенства в (2), записанного в сферических координатах, следует [4], что $E_{\text{в},R}^{(1)} = E_{\text{в},\theta}^{(1)} = 0$ и

$$E_{\text{в},\varphi}^{(1)} = k^2 |\mathbf{m}| \cos \alpha \sin \theta \left(1 - \frac{1}{ikR} \right) \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (4)$$

Из второго уравнения системы Максвелла $\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{в}}^{(1)} = ik \mathbf{H}_{\text{в}}^{(1)}$, записанного также в сферических координатах, найдем, что $H_{\text{в},\varphi}^{(1)} = 0$ и

$$\begin{aligned} H_{\text{в},R}^{(1)} &= \frac{-i}{kR \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_{\text{в},\varphi}^{(1)}), \\ H_{\text{в},\theta}^{(1)} &= \frac{i}{kR} \frac{\partial}{\partial R} (RE_{\text{в},\varphi}^{(1)}). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) — (5) вытекает, что в сферических координатах первичное поле вертикального магнитного диполя полностью определяется через единственную отличную от нуля компоненту $E_{\text{в},\varphi}^{(1)}$ вектора $\mathbf{E}_{\text{в}}^{(1)}$. Если перейти от декартовых координат к координатам сплюснутого сфероида ξ, η, φ , связанных с первыми формулами

$$\begin{aligned} x_s &= a_s [(1 + \xi_s^2)(1 - \eta_s^2)]^{1/2} \cos \varphi, \\ y_s &= a_s [(1 + \xi_s^2)(1 - \eta_s^2)]^{1/2} \sin \varphi, \\ z_s &= a_s \xi_s \eta_s, \quad \psi_{+1} = \varphi_1 = \varphi \quad (s = \pm 1), \end{aligned} \quad (6)$$

где $0 \leq \xi_s < \infty$, $-1 \leq \eta_s \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, и рассмотреть первичное поле вертикального диполя также в координатах сплюснутого сфероида, то окажется, что и в этих координатах, в силу симметрии их относительно полярной оси, первичное поле вертикального диполя будет определяться векторами $\mathbf{E}_{\text{в}}^{(1)} = \{0, 0, E_{\text{в},\varphi}^{(1)}\}$, $\mathbf{H}_{\text{в}}^{(1)} = \{H_{\text{в},\xi}^{(1)}, H_{\text{в},\eta}^{(1)}, 0\}$. Однакотеперь под $E_{\text{в},\varphi}^{(1)}$ понимается азимутальная компонента вектора $\mathbf{E}_{\text{в}}^{(1)}$, записанная в координатах сплюснутого сфероида, причем все компоненты не зависят от угла φ . По той же причине и вторичное поле $\mathbf{E}_{\text{в}}^{(2)}$, $\mathbf{H}_{\text{в}}^{(2)}$ будет определяться в сфероидальных координатах (6) векторами $\mathbf{E}_{\text{в}}^{(2)} = \{0, 0, E_{\text{в},\varphi}^{(2)}\}$, $\mathbf{H}_{\text{в}}^{(2)} = \{H_{\text{в},\xi}^{(2)}, H_{\text{в},\eta}^{(2)}, 0\}$ (при $\xi_s = 0, s = \pm 1$ координатные сфероиды вырождаются в диски радиуса a_{+1} и a_{-1} , ось вращения которых совпадает с полярной осью). Для полного поля мы получим, что $\mathbf{E}_{\text{в}} = \{0, 0, E_{\text{в},\varphi}^{(1)} + E_{\text{в},\varphi}^{(2)}\}$, $\mathbf{H}_{\text{в}} = \{H_{\text{в},\xi}^{(1)} + H_{\text{в},\xi}^{(2)}, H_{\text{в},\eta}^{(1)} + H_{\text{в},\eta}^{(2)}, 0\}$, где компоненты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} H_{\text{в},\xi} &= \frac{-i}{ak \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} (\sqrt{1 - \eta^2} E_{\text{в},\varphi}), \\ H_{\text{в},\eta} &= \frac{i}{ak \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{1 + \xi^2} E_{\text{в},\varphi}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$E_{\text{в},\varphi} = E_{\text{в},\varphi}^{(1)} + E_{\text{в},\varphi}^{(2)}, \quad H_{\text{в},\xi} = H_{\text{в},\xi}^{(1)} + H_{\text{в},\xi}^{(2)}, \quad H_{\text{в},\eta} = H_{\text{в},\eta}^{(1)} + H_{\text{в},\eta}^{(2)}.$$

Эти соотношения получаются из уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{в}} = ik \mathbf{H}_{\text{в}}$, записанного в сфероидальных координатах.

Таким образом, решая задачу в координатах сплюснутого сфероида, мы видим, что она будет полностью решена, если будет найдена

компонента $E_{\text{в},\varphi}^{(2)}$ вектора $E_{\text{в}}^{(2)}$. Так как $E_x^{(2)} = -E_{\text{в},\varphi}^{(2)} \sin \varphi$ и $\Delta E_x + k^2 E_x = 0$, то в сфероидальных координатах

$$\Delta(E_{\text{в},\varphi}^{(2)} \sin \varphi) + k^2(E_{\text{в},\varphi}^{(2)} \sin \varphi) = 0. \quad (8)$$

На поверхности каждого диска, которые теперь вместо (1) задаются условиями $\xi_s = 0$, $s = \pm 1$, должно выполняться равенство

$$E_{\text{в},\varphi} \Big|_{\xi_s=0} = 0, \quad E_{\text{в},\varphi}^{(1)} \Big|_{\xi_s=0} = -E_{\text{в},\varphi}^{(2)} \Big|_{\xi_s=0} \quad (s = \pm 1). \quad (9)$$

Кроме того, потребуем от $E_{\text{в},\varphi}^{(2)}$, чтобы она удовлетворяла условиям излучения на бесконечности.

Будем искать $E_{\text{в},\varphi}^{(2)}$, в виде ряда по волновым функциям сплюснутого сферида, полагая

$$E_{\text{в},\varphi}^{(2)} = \sum_{s=\pm 1} E_s, \quad E_s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(s)} R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_s) S_{1n}(-ic_s, \eta_s). \quad (10)$$

Здесь $c_s = 2\pi a_s/\lambda = ka_s$, а $R_{mn}^{(3)}(-ic, i\xi)$ и $S_{mn}(-ic, \eta)$ — соответственно радиальные сфероидальные функции, удовлетворяющие условию излучения на бесконечности, и угловые сфероидальные функции, образующие полную ортогональную систему функций на $[-1, +1]$. Обозначения и определения этих функций см. в [5]. Волновые функции в (10) берутся с азимутальным числом $m = 1$, так как зависимость функции $E_{\text{в},\varphi}^{(2)} \sin \varphi$ от угла φ определяется только множителем $\sin \varphi$. Коэффициенты $x_n^{(s)}$ из (10) должны быть найдены из условий (9).

Для удовлетворения этим условиям функцию $E_{\text{в},\varphi}^{(1)}$, имеющую в сферических координатах вид (4), следует предварительно записать в координатах (6):

$$E_{\text{в},\varphi}^{(1)} = -\frac{4k^2 |\mathbf{m}| \cos \alpha}{a_s (\xi_s^2 + 1)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{ns} \frac{\sigma_{1n}(-ic_s)}{N_{1n}(-ic_s)} S_{1n}(-ic_s, \eta_s) \times \\ \times \begin{cases} R_{1n}^{(1)}(-ic_s, i\xi_{s0}) R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_s), & \xi_s > \xi_{s0} \\ R_{1n}^{(1)}(-ic_s, i\xi_s) R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_{s0}), & \xi_s < \xi_{s0} \end{cases} \quad (11)$$

Формула (11) получается из соответствующей формулы в [1, 6, 7], записанной в координатах вытянутого сферида для азимутальной компоненты вектора \mathbf{H} поля вертикального электрического диполя, путем замены там ξ на $i\xi$, s на $-ic$. Здесь

$$\sigma_{1n}(-ic_s) = \frac{1}{2} \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(r+2)!}{r!} d_r^{1n}(-ic_s),$$

где $d_r^{1n}(-ic)$ — коэффициенты разложения $S_{1n}(-ic, \eta)$ по присоединенным функциям Лежандра:

$$S_{1n}(-ic, \eta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{1n}(-ic) P_{r+1}^1(\eta),$$

$N_{1n}(-ic)$ определяет норму угловых функций $S_{1n}(-ic, \eta)$, причем

$$N_{1n}(-ic) = 2 \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(r+2)! [d_r^{1n}(-ic)]^2}{r! (2r+3)}$$

(штрих у знака суммы означает, что суммировать следует по четным r , если $n - 1$ четное, и по нечетным r , если $n - 1$ — нечетное [5]). Через ξ_{s0} обозначена радиальная координата диполя в координатах s -го диска ($z_{s0} = a_s \xi_{s0}$); $\varepsilon_{ns} = (-s)^{n+1}$, если диполь находится в зазоре между дисками, $\varepsilon_{ns} = 1$, если диполь расположен вне зазора «над» дисками и $\varepsilon_{ns} = (-1)^{n+1}$, если диполь расположен вне зазора «под» дисками, $s = \pm 1$.

Кроме того, для удовлетворения условиям (9) волновые функции $R_{1n}(-ic_s, i\xi_s)$, $S_{1n}(-ic_s, \eta_s)$, записанные в координатах s -го диска, нужно выразить через волновые функции $R_{1n}(-ic_{-s}, i\xi_{-s})$, $S_{1n}(-ic_{-s}, \eta_{-s})$, записанные в координатах $-s$ -го диска. Это достигается при помощи теоремы сложения:

$$R_{mn}^{(3)}(-ic_{-s}, i\xi_{-s}) S_{mn}(-ic_{-s}, \eta_{-s}) = \sum_{q=m}^{\infty} Q_{mqmn}(c_s, c_{-s}; l; \eta_{-s,s}) \times \\ \times R_{mq}^{(1)}(-ic_s, i\xi_s) S_{mq}(-ic_s, \eta_s) \quad (\xi_s < \xi_{-s,s}), \quad (12)$$

где

$$Q_{mqmn} = \frac{2i^{l-m}}{N_{mq}(-ic_s)} \sum_{r=0,1}^{\infty} \sum_{t=0,1}^{\infty} d_r^{mq}(-ic_s) d_t^{mn}(-ic_{-s}) \times \\ \times \sum_{\sigma=|r-t|}^{r+t+2m} i^{\sigma} b_{\sigma}^{(r+m, m, t+m, m)} h_{\sigma}^{(1)}(kl) P_{\sigma}(\eta_{-s,s}) \quad (13)$$

$$(l = a_s \xi_{-s,s}).$$

Как уже отмечалось в [1], формула (12) может быть получена таким же путем, как в [8] или в [6]. Здесь $h_{\sigma}^{(1)}(x)$ — сферическая бесселева функция $h_{\sigma}^{(1)}(x) = \sqrt{\pi/2x} H_{\sigma+1/2}^{(1)}(x)$, $P_{\sigma}(x)$ — полином Лежандра, $\eta_{-1,+1} = 1$, $\eta_{+1,-1} = -1$; через b_{σ} обозначены коэффициенты разложения [9]*

$$P_{n_1}^{m_1}(\eta) P_{n_2}^{m_2}(\eta) = \sum_{\sigma=|n_1-n_2|}^{n_1+n_2} b_{\sigma}^{(n_1, m_1, n_2, m_2)} P_{\sigma}^{m_1-m_2}(\eta).$$

На основании (10), (11) и (12) из (9) получаем бесконечную систему линейных уравнений для $x_n^{(s)}$:

$$x_n^{(s)} + \sum_{m=1}^{\infty} Q_{1n1m} R_{1n}^{(1)}(-ic_s, i0) x_m^{(-s)} = \\ = \frac{4k^2 |m| \varepsilon_{ns} \cos \alpha \sigma_{1n}(-ic_s)}{a_s (\xi_{s0}^2 + 1)^{1/2} N_{1n}(-ic_s)} R_{1n}^{(1)}(-ic_s, i0) R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_{s0}) \quad (14)$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots; s = \pm 1).$$

Так как функция $R_{1n}^{(1)}(-ic, i0)$ отлична от нуля лишь для четных значений $n - 1$ и равна нулю при нечетных $n - 1$ [6], то из (14) сразу нахо-

* В [8] в формуле (14) следует вместо $A_{\sigma}^{(pprq)}$ брать $B_{\sigma}^{(pprq)}$, а в формуле (7) для b_i вместо $i^{(-m_2)}$ следует брать $(-1)^{m_2}$.

дим, что все $x_{2,4,\dots}^{(s)} = 0$. Следовательно, в (10) суммирование фактически должно производиться лишь по нечетным номерам n .

Система (14) после замены неизвестных по формуле

$$x_n^{(s)} = \alpha_n R_{1n}^{(1)}(-ic_s, i0) X_n^{(s)} \quad (n=1,3,\dots; s=\pm 1) \quad (15)$$

приводится к виду

$$X_n^{(s)} + \sum_{m=1,3,\dots} \alpha_{nm}^{(-s,s)} X_m^{(-s)} = f_n^{(s)} \quad (n=1,3,\dots; s=\pm 1), \quad (16)$$

где

$$\alpha_{nm}^{(-s,s)} = -\frac{\alpha_m R_{1m}^{(1)}(-ic_{-s}, i0)}{\alpha_n R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i0)} Q_{1n 1m}(c_s, c_{-s}; l, \eta_{-s,s}); \quad (17)$$

$$f_n^{(s)} = \frac{4k^2 |m|}{\alpha_s (\xi_{s0}^2 + 1)^{1/2}} \cos \alpha \frac{\sigma_{1n}(-ic_s) R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_{s0})}{\alpha_n N_{1n}(-ic_s) R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i0)}. \quad (18)$$

В результате замены (15) система (16) для новых неизвестных $X_n^{(s)}$ оказывается в общем случае квазирегулярной [9] и разрешимой при условии, что $2l > a_{+1} + a_{-1}$, методом усечения. Здесь $\sigma_n = 1$ для всех n , если диполь не находится на поверхности одного из дисков и $\alpha_n = n^2$, если он расположен на поверхности одного из них. Решения системы

(16) будут удовлетворять условию $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n^{(s)}|^2 < \infty$ ($s = \pm 1$). Мы не

останавливаемся здесь на доказательстве сделанных утверждений, так как справедливость их устанавливается точно так же, как в [3] для аналогичных систем. Некоторые замечания, относящиеся к (17) и связанные с использованием (17) для численного счета, будут сделаны в разделе 4.

Определением $X_n^{(s)}$ полностью решается задача по отысканию функции $E_{B,\varphi}^{(2)}$ и, следовательно, полного поля E_B , H_B .

2. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ

Для случая горизонтального магнитного диполя, когда поле диполя задается вектором Герца $\Pi_r^{(1)} = \{|m| \sin \alpha e^{ikR}/R, 0, 0\}$, решение задачи б находит по той же схеме, что и в [2]*, с той лишь разницей, что теперь рассматриваются диски различных радиусов (параметр c зависит от s). Пусть $\Pi_r^{(2)}$ — вектор Герца вторичного поля. Тогда для полного поля

$$\begin{aligned} \Pi_r &= \Pi_r^{(1)} + \Pi_r^{(2)}, \\ E_r &= ik \operatorname{rot} \Pi_r, \\ H_r &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi_r + k^2 \Pi_r. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом, также как и в [2], считается, что $\Pi_{r,x} = \Pi_{r,x}^{(1)} + \Pi_{r,x}^{(2)}$, $\Pi_{r,y} = 0$, $\Pi_{r,z} = \Pi_{r,z}^{(2)}$, где в свою очередь $\Pi_{r,x}^{(2)} = \Pi_{r,x}^{(+1)} + \Pi_{r,x}^{(-1)}$, $\Pi_{r,z}^{(2)} = \Pi_{r,z}^{(+1)} + \Pi_{r,z}^{(-1)}$. Переходя от декартовых координат к цилиндрическим координатам

* В [2] имеется ряд неточностей, исправленных в [3].

ρ , φ , z и вводя те же обозначения для потенциальных функций Герца, что и в [2], получим

$$\begin{aligned} \Pi_{r,x}^{(2)} &= \Phi_2(\rho, z) = \Phi_{-1}(\rho_{-1}, z_{-1}) + \Phi_{+1}(\rho_{+1}, z_{+1}); \\ \Pi_{r,z}^{(2)} &= \Psi_{-1}(\rho_{-1}, z_{-1}) \cos \varphi + \Psi_{+1}(\rho_{+1}, z_{+1}) \cos \varphi = \Psi(\rho, z) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Представляя (19) в цилиндрических координатах и учитывая, что составляющие $\Pi_{r,\rho}$, $\Pi_{r,\varphi}$, $\Pi_{r,z}$ вектора Π_r в цилиндрических координатах связаны с декартовыми составляющими вектора Π_r , соотношениями $\Pi_{r,\rho} = \Phi \cos \varphi$, $\Pi_{r,\varphi} = -\Phi \sin \varphi$, $\Pi_{r,z} = \Psi \cos \varphi$ (здесь, как и в [2], $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где $\Phi_1 = \Pi_{r,x}^{(1)}$), мы найдем, в частности, что

$$\begin{aligned} E_\rho &= ik \sin \varphi \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \Psi \right]; \\ E_\varphi &= ik \cos \varphi \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Приравнивая (20) нулю на поверхности каждого из дисков (при $\rho_s < a_s$, $z_s = 0$, $s = \pm 1$), получим для потенциальных функций Φ и Ψ граничные условия [7, 10]:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial z_s} = \frac{1}{\rho_s} \Psi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z_s} = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_s} \end{array} \right\} \rho_s < a_s, \quad z_s = 0, \quad s = \pm 1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z_s} &= C_s \\ \Psi &= C_s \rho_s \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_s < a_s, \quad z_s = 0, \quad s = \pm 1, \\ \Psi = C_s \rho_s \end{array} \right. \quad (21)$$

где C_s — постоянные интегрирования.

Как и в [2], для отыскания потенциальных функций Φ_2 и Ψ , которые определяют полное поле E_r , H_r по формулам (19), необходимо решить уравнения Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_2 + k^2 \Phi_2 &= 0, \\ \Delta \Psi + k^2 \Psi &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

которым удовлетворяют функции Φ_2 и Ψ при условиях (21) на поверхности дисков. От Φ_2 и Ψ требуется также, чтобы они на бесконечности удовлетворяли условиям излучения. Постоянные C_s ($s = \pm 1$) находятся из условия Майкснера [11], которое сводится к требованию обращения в нуль радиальной составляющей плотности полного тока, наведенного на ребрах дисков:

$$j_{\rho_s} = 0, \quad \rho_s = a_s, \quad z_s = 0, \quad s = \pm 1. \quad (23)$$

Как отмечено в [3, 7] условий (23) недостаточно для определения C_s в случае, когда диполь расположен на поверхности одного из дисков. Тогда из (23) можно получить лишь одно уравнение для C_{+1} и C_{-1} . Для получения второго уравнения, связывающего C_{+1} и C_{-1} .

здесь можно воспользоваться принципом взаимности для магнитных диполей, который записывается в виде

$$\mathbf{m}_1 \mathbf{H}_2(O_1) = \mathbf{m}_2 \mathbf{H}_1(O_2), \quad (24)$$

где \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 — моменты диполей в точках O_1 и O_2 , а \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 — поля, возбужденные \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 в этих точках.

Как и в [2], поставленные задачи для Φ_2 и Ψ решаются в тех же координатах (6), что и задача о вертикальном магнитном диполе. В этих координатах граничные условия (21) принимают вид

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_s} = C_s a_s \eta_s \\ \Psi = C_s a_s \sqrt{1 - \eta_s^2} \end{array} \right\} \xi_s = 0, \quad s = \pm 1, \quad (25)$$

а положение диполя на оси вращения Oz будет определяться координатами $\xi_s = \xi_{s0}$, $\eta_s = \eta_{s0}$, $s = \pm 1$.

Функции Φ_2 , Ψ пишем в виде рядов:

$$\Phi_2 = \sum_{s=\pm 1} \Phi_s, \quad \Phi_s = \sum_{n=0}^{\infty} y_n^{(s)} R_{0n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_s) S_{0n}(-ic_s, \eta_s); \quad (26)$$

$$\Psi = \sum_{s=\pm 1} \Psi_s, \quad \Psi_s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(s)} R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_s) S_{1n}(-ic_s, \eta_s). \quad (27)$$

В координатах s -го диска [5]

$$\Phi_1 = |\mathbf{m}| \sin \alpha \frac{e^{ikR}}{R} = 2ik |\mathbf{m}| \sin \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_{0n}(-ic_s, \eta_{s0}) S_{0n}(-ic_s, \eta_s)}{N_{0n}(-ic_s)} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} R_{0n}^{(1)}(-ic_s, i\xi_s) R_{0n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_{s0}), \quad \xi_{s0} > \xi_s \\ R_{0n}^{(1)}(-ic_s, i\xi_{s0}) R_{0n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_s), \quad \xi_{s0} < \xi_s \end{array} \right. . \quad (28)$$

На основании (12), (26)–(28) из (25) после предварительной замены неизвестных $y_n^{(s)}$, $z_n^{(s)}$ новыми неизвестными $Y_n^{(s)}$ и $Z_n^{(s)}$ по формулам

$$y_n^{(s)} = n R_{0n}^{(1)\prime}(-ic_s, i0) Y_n^{(s)} \quad (n=1, 3, \dots; s=\pm 1), \quad (29)$$

$$z_n^{(s)} = R_{1n}^{(1)}(-ic_s, i0) Z_n^{(s)} \quad (n=1, 3, \dots; s=\pm 1) \quad (30)$$

получим, аналогично [2], что

$$Y_n^{(s)} + \sum_{m=1,3,\dots} \sigma_{nm}^{(-s,s)} Y_m^{(-s)} = E_n^{(s)}, \quad (31)$$

$$Z_n^{(s)} + \sum_{m=1,3,\dots} \tau_{nm}^{(-s,s)} Z_m^{(-s)} = F_n^{(s)} \quad (n=1, 3, \dots; s=\pm 1). \quad (32)$$

Здесь

$$\sigma_{nm}^{(-s,s)} = \frac{m R_{0m}^{(1)\prime}(-ic_{-s}, i0)}{n R_{0m}^{(3)\prime}(-ic_s, i0)} Q_{0n0m}(c_s, c_{-s}; l, \eta_{-s,s}); \quad (33)$$

$$\tau_{nm}^{(-s,s)} = \frac{R_{1m}^{(1)}(-ic_{-s}, i0)}{R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i0)} Q_{1n1m}(c_s, c_{-s}; l, \eta_{-s,s}); \quad (34)$$

$$E_{ns} = -2ik|\mathbf{m}| \sin \alpha \frac{S_{0n}(-ic_s, \eta_{s0}) R_{0n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_{s0})}{n N_{0n}(-ic_s) R_{0n}^{(3)\prime}(-ic_s, i0)} + \\ + \frac{2a_s d_1^{0n}(-ic_s) C_s}{3n N_{0n}(-ic_s) R_{0n}^{(1)\prime}(-ic_s, i0) R_{0n}^{(3)\prime}(-ic_s, i0)}; \quad (35)$$

$$F_{ns} = \frac{4a_s d_0^{1n}(-ic_s) C_s}{3N_{1n}(-ic_s) R_{1n}^{(1)}(-ic_s, i0) R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i0)}. \quad (36)$$

Здесь $R'_{0n}(-ic, i0) = \frac{d}{d\xi} R_{0n}(-ic, i\xi)|_{\xi=0}$. В дальнейшем такой же смысл приписывается и выражению $S'_{mn}(-ic, 0)$.

Бесконечные системы линейных уравнений (31), (32) так же, как и система (16), в общем случае разрешимы методом усечения, при условии, что $2l > a_{+1} + a_{-1}$ [3]. Их решения удовлетворяют неравенствам $\sum_{n=1,3,\dots} |Y_n^{(s)}|^2 < \infty$, $\sum_{n=1,3,\dots} |Z_n^{(s)}|^2 < \infty$. Некоторые замечания, относящиеся

к использованию (33), (34) для численного счета, будут сделаны в разделе 4.

В координатах (6) условие (23) равносильно условию

$$\left(H_{\varphi_s} \right)_{\xi_s=0} - \left(H_{\varphi_s} \right)_{\xi_s=-0} = 0 \quad (s=\pm 1), \quad (37)$$

также

$$H_{\varphi_s} = -\sin \varphi \left\{ \frac{1}{a_s^2(\xi_s^2 + \eta_s^2)} \left[\xi_s \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_s} - \eta_s \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_s} \right] + \right. \\ + \frac{1}{a_s^2(\xi_s^2 + \eta_s^2) \sqrt{(1+\xi_s^2)(1-\eta_s^2)}} \left[\eta_s(1+\xi_s^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_s} + \right. \\ \left. \left. + \xi_s(1-\eta_s^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \eta_s} \right] + k^2 \Phi \right\} \quad (s=\pm 1). \quad (38)$$

На основании (12), (26), (27), (37), (38) находим

$$\sum_{n=1,3,\dots} n R_{0n}^{(1)\prime}(-ic_s, i0) R_{0n}^{(3)}(-ic_s, i0) S'_{0n}(-ic_s, 0) Y_n^{(s)} = \\ = \sum_{n=1,3,\dots} R_{1n}^{(1)}(-ic_s, i0) R_{1n}^{(3)\prime}(-ic_s, i0) S_{1n}(-ic_s, i0) Z_n^{(s)} \\ (s=\pm 1).$$

Учитывая, что определитель Вронского для радиальных сфероидальных волновых функций $R_{mn}^{(1)}(-ic, i\xi)$ и $R_{mn}^{(3)}(-ic, i\xi)$ равен [5]

$$R_{mn}^{(1)}(-ic, i\xi) R_{mn}^{(3)\prime}(-ic, i\xi) - R_{mn}^{(3)}(ic, i\xi) R_{mn}^{(1)\prime}(-ic, i\xi) = \frac{i}{c(\xi^2 + 1)},$$

а $R_{0,n=0,2,4\dots}^{(1)\prime}(-ic, i0) = R_{1,n=0,2,\dots}^{(1)}(-ic, i0) = 0$, имеем

$$-\sum_{n=1,3,\dots} n S'_{0n}(-ic_s, 0) Y_n^{(s)} = \sum_{n=1,3,\dots} S_{1n}(-ic_s, 0) Z_n^{(s)} \quad (s=\pm 1). \quad (39)$$

В общем случае равенство (39) дает два уравнения для C_{+1} , C_{-1} (после подстановки сюда значений $Y_n^{(s)}$ и $Z_n^{(s)}$ найденных из (31), (32) и выраженных через C_{+1} , C_{-1}). Если же диполь расположен на поверхности s -го диска ($s = +1$, либо $s = -1$), то (39) пригодно лишь для составления одного уравнения для C_{+1} , C_{-1} ; последнее получается для индекса $-s$ ($s = +1$ либо $s = -1$), отвечающего диску без диполя. В этом случае второе уравнение для C_{+1} , C_{-1} составляется по схеме, указанной в [3]; ее реализация приводит к задаче о дифракции плоской волны

$$E_y = H_x = A_s e^{-ikz_s}, \quad E_z = E_z = H_y = H_z = 0 \quad (s = \pm 1) \quad (40)$$

на двух дисках. Здесь $A_s = k^2 |\mathbf{m}| \sin \alpha e^{ikz_{s0}} / z_{s0}$, $z_{-1,0} - z_{+1,0} = l$. Повторением рассуждений, аналогичных приведенным в [3], мы на основании (24) получим равенство

$$\Phi_2 \left| \begin{array}{c} \xi_s = \infty \\ \eta_s = 1 \quad (s = \pm 1) \end{array} \right. = \Phi_2^{(пл)} \left| \begin{array}{c} \xi_s = 0 \\ \eta_s = 1 \end{array} \right. \quad (s = +1 \text{ или } s = -1), \quad (41)$$

представляющее собой второе уравнение для C_{+1} , C_{-1} . Здесь

$$\begin{aligned} e^{-ikz_s} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{N_{0n}(-ic_s)} S_{0n}(-ic_s, 1) R_{0n}^{(1)}(-ic_s, i\xi_s) S_{0n}(-ic_s, \eta_s); \\ \Phi_2^{(пл)} &= \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=1,3,\dots} n R_{0n}^{(1)\prime}(-ic_s, i0) U_n^{(s)} R_{0n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_s) S_{0n}(-ic_s, \eta_s); \\ \Psi^{(пл)} &= \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=1,3,\dots} R_{1n}^{(1)}(-ic_s, i0) P_n^{(s)} R_{1n}^{(3)}(-ic_s, i\xi_s) S_{1n}(-ic_s, \eta_s). \end{aligned}$$

Функции $\Phi_2^{(пл)}$, $\Psi^{(пл)}$ соответствуют функциям Φ_2 , Ψ и удовлетворяют на поверхности дисков тем же условиям (21), (23), что и Φ_2 , Ψ . Через эти функции определяется вторичное поле плоской волны (40), дифрагирующей на дисках. Коэффициенты $U_n^{(s)}$, $P_n^{(s)}$ рядов находятся из бесконечных систем линейных уравнений, аналогичных системам (31), (32), при помощи выражения (39), записанного для $U_n^{(s)}$ и $P_n^{(s)}$. Система для $P_n^{(s)}$ полностью совпадает с (32), (34), (36), в то время как система для $U_n^{(s)}$ отличается от (31) свободными членами, которые для случая плоской волны (40) записываются в виде

$$\begin{aligned} E_{ns}^{(пл)} &= -\frac{2(-i)^n A_s S_{0n}(-ic_s, 1)}{k^2 n N_{0n}(-ic_s) R_{0n}^{(3)\prime}(-ic_s, i0)} + \\ &+ \frac{2a_s d_1^{0n}(-ic_s) C_s}{3n N_{0n}(-ic_s) R_{0n}^{(1)\prime}(-ic_s, i0) R_{0n}^{(3)\prime}(-ic_s, i0)}, \quad A_s = A_{-s} e^{-iskl}. \end{aligned} \quad (42)$$

Определением $Y_n^{(s)}$ и $Z_n^{(s)}$ полностью решается задача по отысканию функций Φ_2 , Ψ и, следовательно, векторов E_r , H_r .

3. ВОЛНОВАЯ ЗОНА

Если расстояние l между дисками много меньше расстояний $R_s (s = \pm 1)$ от дисков до точки наблюдения в волновой зоне, то

$$R_{mn}^{(3)} (-ic_s, i\xi_s) \simeq (-i)^{n+1} \frac{e^{ikR_s}}{kR_s},$$

где $R_s = a_s \sqrt{1 + \xi_s^2 - \eta_s^2} \simeq a_s \xi_s$, $R_{-s} = R_s - sl \cos \theta_s$ ($s = \pm 1$) [5].

Кроме того, тогда $\eta_s = \cos \theta_s$, $\theta_{+1} \simeq \theta_{+1} \simeq 0$, $R_{-1} \simeq R_{+1} \simeq R$; поэтому в координатах s -го диска формула (10) сводится к виду ($s = +1$ либо $s = -1$):

$$\begin{aligned} E_{B,\varphi}^{(2)} = & \frac{e^{ikR}}{ikR} \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n \alpha_n [R_{1n}^{(1)} (-ic_s, i0) S_{1n} (-ic_s, \cos \theta) X_n^{(s)} + \\ & + e^{-iskl \cos \theta} R_{1n}^{(1)} (-ic_{-s}, i0) S_{1n} (-ic_{-s}, \cos \theta) X_n^{(-s)}]. \end{aligned} \quad (43)$$

Отсюда при условии $c_{-1} = c_{+1} = c$

$$\begin{aligned} E_{B,\varphi}^{(2)} = & \frac{e^{ikR}}{ikR} \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n \alpha_n [X_n^{(s)} + e^{-iskl \cos \theta} X_n^{(-s)}] \times \\ & \times R_{1n}^{(1)} (-ic, i0) S_{1n} (-ic, \cos \theta). \end{aligned} \quad (44)$$

Для диполя, расположенного посередине в зазоре между дисками (начало координатной системы $Oxyz$ совпадает с точкой P , в которой находится диполь), $R_s = R - sl_0 \cos \theta$, где $l_0 = l/2$, $s = \pm 1$. Тогда

$$\begin{aligned} E_{B,\varphi}^{(2)} = & \frac{e^{ikR}}{ikR} \sum_{s=\pm 1} e^{-iskl_0 \cos \theta} \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n \alpha_n R_{1n}^{(1)} (-ic_s, i0) X_n^{(s)} \times \\ & \times S_{1n} (-ic_s, \cos \theta), \end{aligned} \quad (45)$$

откуда при $c_{-1} = c_{+1} = c$

$$\begin{aligned} E_{B,\varphi}^{(2)} = & 2 \frac{e^{ikR}}{ikR} \cos (kl_0 \cos \theta) \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n \alpha_n X_n \times \\ & \times R_{1n}^{(1)} (-ic, i0) S_{1n} (-ic, \cos \theta) \end{aligned} \quad (46)$$

(так как в этом случае $f_n^{(-1)} = f_n^{(+1)}$, в силу чего и $X_n^{(-1)} = X_n^{(+1)} = X_n$). Из (46) видно, что при $kl_0 \cos \theta = \pi(2m+1)/2$ (m — целое) $E_{B,\varphi}^{(2)} = 0$, а при $kl_0 \cos \theta = \pi m$ (m — целое) функция $E_{B,\varphi}^{(2)}$ будет иметь относительные максимумы, которыми значения функции $E_{B,\varphi}^{(1)}$ будут наибольшим образом усиливаться или ослабляться (в соответствующих направлениях) в зависимости от фазы $E_{B,\varphi}^{(2)}$.

В случае вертикального магнитного диполя в волновой зоне $H_{B,\varphi} = 0$, а $H_{B,\eta} = -E_{B,\varphi}$. В случае же горизонтального магнитного диполя $H_{r,\varphi} = E_{r,\eta}$, $H_{r,\eta} = -E_{r,\varphi}$, где в волновой зоне

$$E_{r,\varphi} = ik \cos \varphi \left[\frac{\eta_s}{a_s} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_s} - \frac{\sqrt{1 - \eta_s^2}}{a_s} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_s} \right],$$

$$H_{r,\varphi} = -k^2 \sin \varphi \Phi,$$

или, учитывая, что тогда $\frac{\partial}{\partial \xi_s} = a_s \frac{\partial}{\partial R_s}$, $\eta_s = \cos \theta_s$, $\theta_s \approx \theta$, $R_s \approx R$,
 $s = \pm i$,

$$E_{r,\varphi} = ik \cos \varphi \left[\cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right], \\ H_{r,\varphi} = -k^2 \sin \varphi \Phi. \quad (47)$$

Здесь в общем случае в координатах s -го диска ($s = +1$ либо $s = -1$)

$$\Phi_2 = \frac{e^{ikR}}{ikR} \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n n \left[Y_n^{(s)} R_{0n}^{(1)'}(-ic_s, i0) S_{0n}(-ic_s, \cos \theta) + \right. \\ \left. + e^{-iskl \cos \theta} Y_n^{(-s)} R_{0n}^{(1)'}(-ic_{-s}, i0) S_{0n}(-ic_{-s}, \cos \theta) \right]; \\ \Psi = \frac{e^{ikR}}{ikR} \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n [Z_n^{(s)} R_{1n}^{(1)'}(-ic_s, i0) S_{1n}(-ic_s, \cos \theta) + \\ + e^{-iskl \cos \theta} Z_n^{(-s)} R_{1n}^{(1)'}(-ic_{-s}, i0) S_{1n}(-ic_{-s}, \cos \theta)].$$

При $c_{-1} = c_{+1} = c$ отсюда следует

$$\Phi_2 = \frac{e^{ikR}}{ikR} \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n n [Y_n^{(s)} + e^{-iskl \cos \theta} Y_n^{(-s)}] \times \\ \times R_{0n}^{(1)'}(-ic, i0) S_{0n}(-ic, \cos \theta); \\ \Psi = \frac{e^{ikR}}{ikR} \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n [Z_n^{(s)} + e^{-iskl \cos \theta} Z_n^{(-s)}] \times \\ \times R_{1n}^{(1)'}(-ic, i0) S_{1n}(-ic, \cos \theta).$$

Если к тому же диполь находится посередине между дисками, то (в координатах с началом в точке, где расположен диполь)

$$\Phi_2 = 2 \frac{e^{ikR}}{ikR} \sin(kl_0 \cos \theta) \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n n Y_n \times \\ \times R_{0n}^{(1)'}(-ic, i0) S_{0n}(-ic, \cos \theta); \quad (48)$$

$$\Psi = 2 \frac{e^{ikR}}{ikR} \sin(kl_0 \cos \theta) \sum_{n=1,3,\dots} (-i)^n Z_n \times \\ \times R_{1n}^{(1)'}(-ic, i0) S_{1n}(-ic, \cos \theta), \quad (49)$$

поскольку теперь $X_n^{(-1)} = X_n^{(+1)} = X_n$ и $Y_n^{(-1)} = Y_n^{(+1)} = Y_n$, $l_0 = l/2$. Здесь нули функций Φ_2 , Ψ находятся из условия: $kl_0 \cos \theta = \pi m$, m — целое, а относительные максимумы из условия, что $kl_0 \cos \theta = (2m + 1)\pi/2$, m — целое.

Из решений задач а, б решение общей задачи для наклонного диполя находится по схеме, указанной во введении.

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Из выражений для $f_n^{(s)}$, $E_n^{(s)}$, $F_n^{(s)}$ определяемых формулами (18), (35) и (36), видно, что соответствующий расчет их может быть произведен без особых затруднений при наличии таблиц сфероидальных волновых

функций. Вычисление же матричных элементов систем (16), (31), (32) является весьма затруднительным. Это прежде всего связано с вычислением $Q_{pn pm}$, входящего в (17), (33), (34) и определяемого формулой (13), где

$$b_{\sigma}^{(r+p, p, t+p, p)} = (-1)^p \left[\frac{(r+2p)! (t+2p)!}{r! t!} \right]^{1/2} \times \\ \times (r+p, t+p, 00 | \sigma)(r+p, t+p, p, -p | \sigma). \quad (50)$$

Здесь $p = 0$, либо $p = 1$, а символом $(j_1 j_2 m_1 m_2 | j m)$, $m = m_1 + m_2$ обозначены коэффициенты Клебша—Гордана, часто встречающиеся в задачах квантовой механики (см. [12–15] и др.). Для коэффициентов Клебша—Гордана известны различные виды их явного выражения (см., например, [15]), при помощи которых они вычисляются. Однако таблицы численных значений этих коэффициентов для диапазона изменений j_1, j_2, j , достаточного для нашей задачи, по-видимому, еще нет. Значительные трудности могут возникнуть и при вычислении двойного ряда (13), быстрота сходимости которого зависит от выбора значений параметров c_{+1}, c_{-1}, kl . Можно показать, в частности, что двойной ряд (13) является абсолютно сходящимся, если $kl > c_{+1} + c_{-1}$ или, что то же самое,

$$l > a_{+1} + a_{-1}. \quad (51)$$

Из рассуждений, аналогичных приведенным в [1], следует, что

$$\left| \sum_{\sigma=|r-t|}^{r+t+2p} i^{\sigma} b_{\sigma}^{(r+p, p, t+p, p)} h_{\sigma}^{(1)}(kl) P_{\sigma}(\cos \theta_{-s, s}) \right| < \quad (52) \\ < \text{const } \sqrt{t(r+p)(r+t+2p)} |h_{r+t+2p}^{(1)}(kl)|,$$

кроме того, для всех n и $r \geq n$

$$|d_r^{pn}(-ic)| < \text{const}_1 \frac{(r-1)! (2n-1)!! (2n+1)!! c^{r-n+p}}{(n-p)! (2r+2p-1)!! (r-n+p)!! (r+n+p+1)!!} \quad (53)$$

(это вытекает, например, из формул (7), (8) в [3]). При этом на основании асимптотической относительно r формулы Стирлинга $r! \sim \sqrt{2\pi r} r^r e^{-r}$ и того обстоятельства, что для всех r ($x \geq 0$)

$$|h_r^{(1)}(x)| < \text{const}_2 \frac{(2r)! x^{-r-1}}{2^r r!},$$

получаем

$$|Q_{pn pm}| < \text{const}_3 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(r+t)!}{r! t!} \left(\frac{a_{+1}}{l} \right)^r \left(\frac{a_{-1}}{l} \right)^t \quad (54)$$

(здесь n и m считаются конечными). Здесь двойной ряд справа, как известно, всегда сходится (он суммируется в замкнутом виде) для всех a_{+1}, a_{-1} и l , удовлетворяющих условию (51). Таким образом, (51) можно рассматривать здесь как своего рода критерий, определяющий те значения параметров c_{+1}, c_{-1}, l , которыми всегда будет обеспечиваться сходимость ряда (13).

Если повторить всю ту схему рассуждений, которая была применена в [3] при исследовании на разрешимость встречающихся там бесконечных систем уравнений, применительно к системам (16), (31), (32), то окажется, что эти системы разрешимы при условии $2l > a_{+1} + a_{-1}$. По-

следнее отличается от (51). Из характера поведения сферических бесселевых функций $h_{\nu}^{(1)}(kl)$ следует, что для заданных c_{+1} , c_{-1} и $kl > c_{+1} + c_{-1}$ сходимость ряда (13) будет улучшаться с возрастанием kl и, наоборот, ухудшаться с уменьшением kl .

Для значений l из промежутка $(a_{+1} + a_{-1})/2, (a_{+1} + a_{-1})$ вопрос о сходимости (13) требует дополнительных исследований. Расчеты показали, что, например, при $c_{+1}=1$, $c_{-2}=2$ и $kl=c_{+1}+c_{-1}=3$ сходимость ряда (13) остается удовлетворительной. Однако при $c_{+1}=c_{-1}=2$ и $kl=3$ мы не можем сказать что-либо определенное о сходимости ряда (13).

При вычислении (13) суммирование по r и t целесообразно начи-

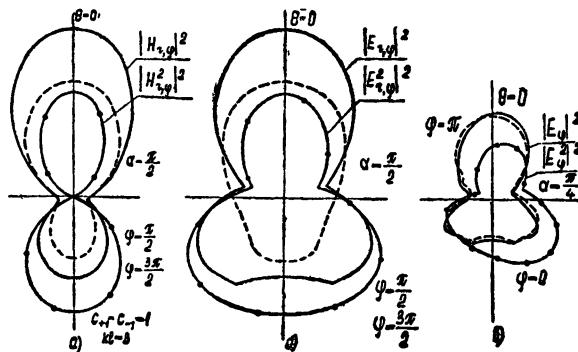


Рис. 2.

нать с $r = q - m$ и $t = n - m$, так как этими значениями r , t определяются доминирующие значения самих коэффициентов $d_r^{mn}(-ic)$, $d_t^{mn}(-ic)$ [5]. Для значений c , не превосходящих несколько единиц, $d_r^{mn}(-ic)$ сравнительно быстро убывают по модулю для возрастающих

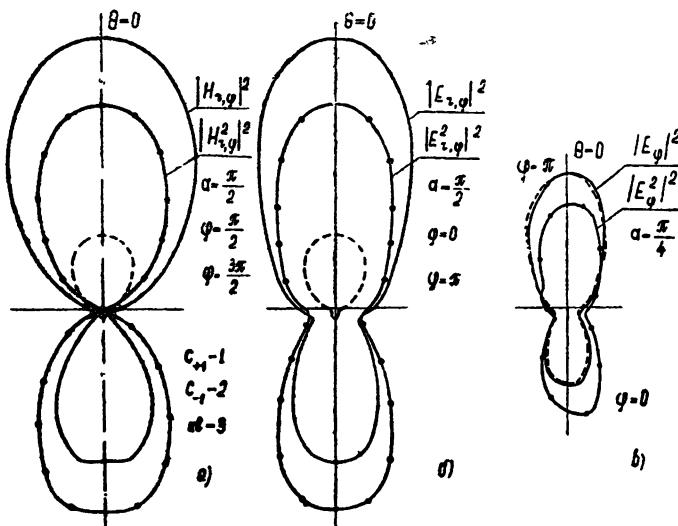


Рис. 3.

значений $r > n - m$ и для убывающих r из интервала $0 \leq r < n - m$. Если $c_s \ll 5$, то практически для всех $kl > c_{+1} + c_{-1}$ численные резуль-

таты всегда можно получить при помощи таблиц [5, 16–17] и простейших счетных инструментов.

В качестве примеров, иллюстрирующих метод решения задачи, на рис. 2–4 приводятся диаграммы направленности, построенные для составляющих E_θ, H_ϕ векторов E, H в волновой зоне ($\alpha=0, \pi/4, \pi/2$, когда $c_{+1}=c_{-1}=1, kl = 3,5\pi; 5\pi; 50\pi$, $c_{+1}=1, c_{-1}=2, kl = 3$, когда диполь расположен на поверхности — 1-го диска)*. Пунктирной

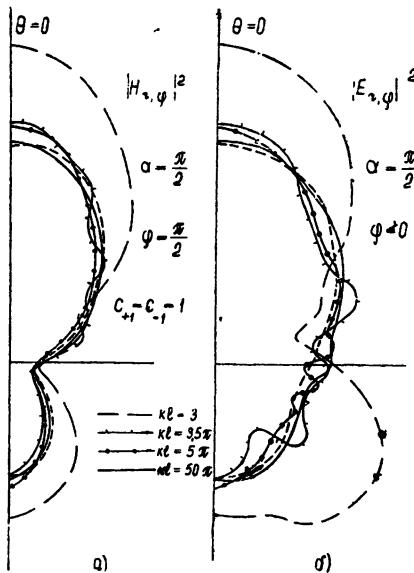


Рис. 4.

линией изображены диаграммы направленности для поля излучающей односторонней щели (—1-ый диск с диполем на нем) в свободном пространстве, приведенные здесь для сравнения.

Если расстояние между дисками l намного больше длины волны λ ($kl \gg 1$), то расчет может быть проведен по более простым формулам, не связанным с коэффициентами Клебша—Гордана. Так, в частности, если $kl \gg 1$ и $h_\sigma^{(1)}(kl) = (-i)^{\sigma+1} e^{ikl}/kl$, то на основании отмеченных выше равенств

$$\sum_{\sigma=|r-t|}^{r+t+2} b_{\sigma}^{(r+1,l,t+1,l)} P_{\sigma}(\eta_{-s,s}) = P_{r+1}^1(\eta_{-s,s}) P_{t+1}^1(\eta_{-s,s});$$

$$S_{1n}(-ic_s, \eta_{-s,s}) = \sum_{t=0,1}^{\infty} d_t^{1n}(-ic_s) P_{t+1}^1(\eta_{-s,s}),$$

в которых $S_{mn}(-ic, \pm 1) = 0$ при $m \neq 0$, мы найдем, что приближенно $a_{nm}^{(-s,s)} = 0$ и $\tau_{nm}^{(-s,s)} = 0$. Тогда

$$X_n^{(s)} = f_n^{(s)}, \quad Z_n^{(s)} = F_n^{(s)} \quad (n=1,3,\dots; s=\pm 1). \quad (55)$$

Матричные элементы системы (31) будут определяться приближенной формулой

$$\sigma_{nm}^{(-s,s)} = La_{ns} b_{m,-s} \quad (s=\pm 1), \quad (56)$$

* В координатах этого диска проведен расчет по строгим формулам.

где

$$L = 2(-i) e^{ikl} / kl, \quad a_{ns} = \frac{i^n S_{0n}(-ic_s, 1)}{n R_{0n}^{(3)'}} \frac{(-ic_s, i0)}{N_{1n}(-ic)}, \\ b_{ns} = (-i)^n n R_{0n}^{(1)'(-ic_s, i0)} S_{0n}(-ic_s, 1). \quad (57)$$

Применяя теперь к системе (31) метод последовательных приближений по схеме, указанной в [3], получим

$$Y_n^{(s)} = A_{ns} - \frac{p^{(-s)} - LQ(-s)p^{(s)}}{1 - [L^2 Q(-s)Q(s)]} La_{ns} - \frac{q^{(-s)} a_{ns} Lc_{-s}}{1 - [L^2 Q(-s)Q(s)]} + \\ + \left[B_{ns} + \frac{q^{(s)} a_{ns} L^2 Q(-s)}{1 - [L^2 Q(-s)Q(s)]} \right] C_s, \quad (58)$$

где

$$Q(s) = \sum_n a_{ns} b_{ns}, \quad p^{(s)} = \sum_n A_{ns} b_{ns}, \quad q^{(s)} = \sum_n B_{ns} b_{ns}, \\ A_{ns} = -2ik|m| \sin \alpha \frac{S_{0n}(-ic_s, i0) R_{0n}^{(3)'(-ic_s, i0)}}{n N_{0n}(-ic_s) R_{0n}^{(3)'(-ic_s, i0)}}, \\ B_{ns} = \frac{2a_s d_1^{0n}(-ic_s)}{3n N_{0n}(-ic_s) R_{0n}^{(1)'(-ic_s, i0)} R_{0n}^{(3)'(-ic_s, i0)}},$$

и $|L^2 Q(-s)Q(s)| < 1$ (это условие всегда может быть выполнено за счет соответствующего выбора значений параметра kl). Постоянные C_s , $s = \pm 1$ находятся по схеме [3]. В соответствующей задаче о дифракции плоской волны (40) на двух дисках различных радиусов мы подобным же образом находим ($kl \gg 1$)

$$U_n^{(s)} = A_{ns}^{pl} - \frac{p_{pl}^{(-s)} - LQ(-s)p_{pl}^{(s)}}{1 - [L^2 Q(-s)Q(s)]} La_{ns} - \frac{q^{(-s)} a_{ns} L\bar{C}_{-s}}{1 - [L^2 Q(-s)Q(s)]} + \\ + B_{ns} + \left[\frac{q^{(s)} a_{ns} L^2 Q(-s)}{1 - [L^2 Q(-s)Q(s)]} \right] \bar{C}_s; \quad (59)$$

$$P_n^{(s)} = D_{ns} \bar{C}_s; \quad D_{ns} = \frac{4a_s d_0^{1n}(-ic_s)}{3N_{1n}(-ic_s) R_{1n}^{(1)'(-ic_s, i0)} R_{1n}^{(3)'(-ic_s, i0)}},$$

где

$$A_{ns}^{pl} = -A_s \frac{2(-i)^n S_{0n}(-ic_s, 1)}{k^2 n N_{0n}(-ic_s) R_{0n}^{(3)'(-ic_s, i0)}}, \quad A_s = A_{-s} e^{-iskl} \quad (s = \pm 1),$$

$$p_{pl}^{(s)} = \sum_n A_{ns}^{pl} b_{ns},$$

\bar{C}_s — постоянные интегрирования, входящие в (21) для $\Phi^{(pl)}$ и $\Psi^{(pl)}$, а L , $Q(s)$, B_{ns} , a_{ns} , b_{ns} , $q^{(s)}$ определяются как и раньше. Здесь \bar{C}_s ,

$s = \pm 1$ находятся при помощи (39), записанного для $U_n^{(s)}$ и $P_n^{(s)}$ вместо $Y_n^{(s)}$ и $Z_n^{(s)}$.

Формулы (55), (58)–(60) удобны для численного счета и анализа поля при $kl \gg 1$, так как пользование ими не требует предварительного расчета матричных элементов систем (16), (31), (32).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Иванов, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1155 (1963).
2. Е. А. Иванов, Журнал выч. мат. и мат. физики, 3, 388 (1963).
3. Е. А. Иванов, Сб «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, и квадратурные формулы», изд «Наука», М., 1964, стр. 257, 267.
4. Д. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948.
5. К. Фламмер, Таблицы волновых сфероидальных функций, ВЦ АН СССР, М., 1962.
6. J. Meixner, F. Schäfke, Mattheusche Funktionen und Sphäroidfunktionen Springer—Verlag, Berlin, 1954.
7. М. Г. Белкина, Сб. «Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения», изд. Сов. радио, М., 1957, стр. 148.
8. Е. А. Иванов, ДАН БССР, 4, 3 (1960).
9. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, М—Л., 1952.
10. Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, ЖТФ, 29, 700 (1959).
11. J. Meixner, W. Andrijewski, Ann Phys., 6, 157 (1950).
12. Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применение в физике, Физматгиз, М., 1958.
13. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращения, группы Лоренца и их применение, Физматгиз, М., 1958.
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
15. А. П. Юцис, И. Б. Левинсон, В. В. Ванагас, Математический аппарат теории количества движения, Вильнюс, 1960.
16. Таблицы сферических бесселевых функций, 1—2, ВЦ АН СССР, М., 1963.
17. Я. Н. Шпильрейн, Таблицы специальных функций, ч. 1—2, Гостехиздат, М.—Л., 1933.

Институт механики и вычислительной техники
АН БССР

Поступила в редакцию
29 февраля 1964 г.

THE FIELD OF A MAGNETIC DIPOLE BEING CO-AXIAL WITH TWO DISKS

E. A. Ivanov

The strict solution of a problem is given pertaining to the field diffraction of an elementary magnetic dipole on two disks of different radii. An arbitrary oriented dipole is in any point of the rotation axis being common for both disks (including the dipole in the centre of one of the disks). The solution is found as the sum of solutions of two particular problems: a) the diffraction of field of the vertical magnetic dipole by two disks and b) the diffraction of field of the horizontal magnetic dipole.

УДК 621.375 931

К ТЕОРИИ МОДУЛИРУЕМЫХ ЦЕПЕЙ

B. C. Эткин

Системы с модулируемыми параметрами исследуются путем решения интегральных уравнений вынужденных колебаний. В качестве примера рассмотрены гармонические модулятор и демодулятор.

Интерес к анализу цепей с переменными параметрами связан с развитием техники параметрических систем. В большинстве случаев исследования выполнялись методами классической теории цепей (методом комплексных амплитуд, матричными методами) и значительно реже путем решения соответствующих дифференциальных уравнений (методами теории колебаний) [1–11, 30]. Следует отметить, что еще в 1921 г. Карсон [12] рассматривал задачи о цепях с периодически модулируемыми параметрами с помощью интегральных преобразований, которые в последнее время широко применяются в теории колебаний [24, 25]. Исследования Карсона были вызваны появлением модуляционного усилителя Александерсена [13].

В настоящее время все больше приходится иметь дело с параметрическими усилителями, число рабочих частот которых превышает 2 [14–17] (т. е. не с одной, а с большим числом холостых частот, чем это имело место ранее [1–8]). Возникает необходимость в общем подходе к таким системам как модуляторы, преобразователи частоты, многочастотные параметрические усилители, сверхрегенеративные усилители, усилители с несколькими генераторами накачки. Проявляется интерес к системам, где используются многие из этих элементов одновременно [18, 19].

В опубликованных в последнее время работах общего характера по теории цепей с переменными параметрами использована в основном матричная теория цепей [20–22].

В настоящей статье на основе работ Карсона [12, 23] развивается аппарат, позволяющий с единых позиций рассматривать любые системы с периодически модулируемыми параметрами путем решения интегральных уравнений вынужденных колебаний и представления результатов в частотной форме, удобной при анализе СВЧ-устройств.

1. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Следуя принципам теории возмущений, часто можно разделить исследуемую систему на две: систему с постоянными параметрами и систему с чисто периодическими параметрами. Будем рассматривать последнюю как цепь своеобразной обратной связи, охватывающей систему с постоянными параметрами. Этот прием широко используется в ряде последних работ по теории нелинейных колебаний [24, 25].

На рис. 1 представлено графически используемое разбиение. Обозначим отклик системы A_0 через u . Тогда уравнение Кирхгофа для цепи на рис. 1 можно записать так:

$$Lu + L_1(t)u = e; \quad (1)$$

L , L_1 — операторы цепей с постоянными (A_0) и периодическими (A_1) параметрами. Представим уравнение (1) в виде

$$Lu = e + e_0,$$

где ЭДС обратной связи $e_0 = -L_1 u$. Пусть оператору L соответствует переходная функция (функция Грина системы с постоянными параметрами) $g(t - \tau)$. Тогда отклик системы

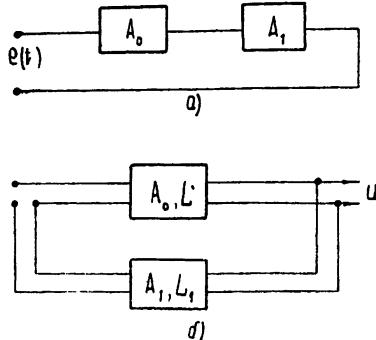


Рис. 1. Разбиение системы на две—одну с постоянными и другую—с чисто периодическими параметрами (A_0 —линейный двухполюсник или „четырехполюсник“ с постоянными параметрами; A_1 —линейный двухполюсник или „четырехполюсник“ с периодически меняющимися параметрами).

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) L_1(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Преобразовав (2) по Фурье [27], после несложных выкладок получим следующее уравнение, связывающее спектры функций:

$$\begin{aligned} u(t), g(t), e(t), e_0(t) &\rightarrow U(\omega), g(\omega), e(\omega), e_0(\omega); \\ U(\omega) - g(\omega) e_0(\omega) &= g(\omega) e(\omega). \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда линейный интегро-дифференциальный оператор с периодическими коэффициентами L_1 можно представить в следующем виде:

$$L_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) \frac{d^n}{dt^n}, \quad (4)$$

где члены с $n < 0$ в разложении (4) представляют собой интегралы

$$\frac{d^{-k}}{dt^{-k}} = \left(\int_{-\infty}^t dt' \right)^k. \quad (5)$$

Здесь $|n| = k$, т. е. k — кратные интегралы с переменным верхним пределом. Используя (5), найдем в соответствии с правилами преобразования Фурье [27]

$$-e_0(\omega) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\omega - \omega') (j\omega')^n U(\omega') d\omega'. \quad (6)$$

Подставим (6) в (3):

$$U(\omega) + g(\omega) \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\omega - \omega') (j\omega')^n U(\omega') d\omega' = g(\omega) e(\omega). \quad (7)$$

Полученное интегральное уравнение позволяет рассмотреть многие задачи теории модулируемых цепей. Решения этого уравнения дают спектр отклика в системе с модулируемыми параметрами.

2. МОДУЛЯЦИЯ ЦЕПЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ТОНАМИ

Интегральное уравнение (7) может быть сведено к алгебраическому, если модуляция оператора обратной связи производится периодически или квазипериодически, т. е. может быть представлена совокупностью гармонических тонов. В этом случае можно записать

$$\varphi_n = m_n \cos(p_n t + \psi_n), \quad (8)$$

где m_n , p_n , ψ_n — амплитуда, частота и фаза модулирующего тона. Спектр φ_n в этом случае:

$$\varphi_n(\omega) = (m_n/2) [e^{j\psi_n} \delta(\omega - p_n) + e^{-j\psi_n} \delta(\omega + p_n)]. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим*

$$\begin{aligned} U(\omega) + [g(\omega)/2] \sum m_n e^{j\psi_n} [j(\omega - p_n)]^n U(\omega - p_n) + \\ + [g(\omega)/2] \sum m_n e^{-j\psi_n} [j(\omega + p_n)]^n U(\omega + p_n) = g(\omega) e(\omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Если спектр сигнала $e(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$, то, очевидно, $u(t)$ состоит из колебаний комбинационных частот:

$$\omega_k = \omega_0 + \sum_{k_n} \sum_n k_n p_n \quad (k_n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots; n = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Тогда спектр отклика можно записать в виде

$$U(\omega) = \sum_n \sum_{k_n} a_{nk_n} \delta \left(\omega - \sum k_n p_n - \omega_0 \right). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и собирая коэффициенты при δ -функциях с одинаковыми аргументами, можно получить систему алгебраических уравнений для амплитуд откликов a_{nk_n} . При малом числе уравнений эта система может быть решена обычными методами, при большом — с помощью вычислительных машин методом подбора по стандартной программе [29].

Отклик системы можно, таким образом, представить в виде

$$u(t) = e^{j\omega_0 t} \sum_n a_{nk_n} e^{j \sum k_n p_n t} = e^{j\omega_0 t} K(\omega_0, t). \quad (13)$$

Величину $K(\omega_0, t)$ можно назвать обобщенным коэффициентом передачи системы. В случае несоизмеримости частот p_n он будет квазипериодическим, в отличие от периодического коэффициента передачи, введенного Заде [28].

* Если коэффициент при i -ой производной оператора L_1 модулирован несколькими частотами, то индексы частот и номера производных, т. е. показатели степени в (10), будут различными.

3. ГАРМОНИЧЕСКИЕ МОДУЛЯТОР И ДЕМОДУЛЯТОР

Применим развитый аппарат к простейшим гармоническим модулятору и демодулятору. В этом случае оператор обратной связи есть просто оператор умножения на гармоническую функцию; поэтому в уравнениях (10) и в разложении (12) надо положить $n = 0$. Тогда легко получить следующую систему уравнений:

$$a_k + \frac{m}{2} g(\omega_0 + kp) (e^{j\psi} a_{k-1} + e^{-j\psi} a_{k+1}) = \begin{cases} g(\omega_0) & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}. \quad (14)$$

В (14) для простоты опущен индекс «нуль» при p , ψ , k . Эта система решается путем последовательных подстановок [23, 26, 29]. Решение имеет вид

$$a_k = \frac{(-m/2)^k g(\omega_0) \hat{g}(\omega_0 + p) \dots \hat{g}(\omega_0 + kp) e^{jk\psi}}{1 - (m/2)^2 g(\omega_0) [\hat{g}(\omega_0 - p) + \hat{g}(\omega_0 + p)]}, \quad (15)$$

где

$$\hat{g}(\omega_0 + kp) = \frac{g(\omega_0 + kp)}{1 - (m/2)^2 g(\omega_0 + kp) \hat{g}[\omega_0 + (k+1)p]}. \quad (16)$$

В этих формулах для $n < 0$ нужно брать при вычислении соответствующих \hat{g} величины n по модулю. Например, для $|n| = k$ и $n < 0$

$$\hat{g}(\omega_0 - kp) = \frac{g(\omega_0 - kp)}{1 - (m/2)^2 g(\omega_0 - kp) \hat{g}[\omega_0 - (k+1)p]}. \quad (17)$$

В качестве примера рассмотрим случай простейших модулятора и демодулятора, когда $g(\omega_0 + kp) = 0$ для всех k , кроме $k = 0, \pm 1$. Физически это означает, что существуют полосы пропускания системы вблизи частот ω_0 , $p \pm \omega_0$, т. е. вблизи частоты сигнала и боковых полос.

В связи с тем, что в дальнейшем мы будем рассматривать ω_0 как характерную частоту системы, а не только как частоту входного сигнала, снабдим коэффициенты a двойными индексами a_{ik} , что означает коэффициент передачи с i -ой частоты на k -ю частоту. Таким образом, в случае, когда частота сигнала $\omega_c = \omega_0$, мы будем искать a_{0k} ; если частота сигнала $\omega_c = \omega_0 + ip$, то станем искать a_{ik} . Для нахождения a_{ik} в последних случаях можно использовать (15) и (16), заменяя ω_0 на ω'_0 , где

$$\omega'_0 = \omega_0 + ip.$$

Для рассматриваемой трехполосной системы можно получить выражения для коэффициентов a_{ik} . В качестве примера ниже приведены несколько значений a_{ik} :

$$a_{00} = \frac{g(\omega_0)}{1 - (m/2)^2 g(\omega_0) [g(\omega_0 - p) + g(\omega_0 + p)]}; \quad (18)$$

$$a_{0, -1} = \frac{-(m/2) g(\omega_0) g(\omega_0 - p) e^{-j\psi}}{1 - (m/2)^2 g(\omega_0) [g(\omega_0 - p) + g(\omega_0 + p)]}; \quad (19)$$

$$a_{-1, -1} = \frac{g(\omega_0 - p) [1 - (m/2)^2 g(\omega_0) g(\omega_0 + p)]}{1 - (m/2)^2 g(\omega_0) [g(\omega_0 - p) + g(\omega_0 + p)]}. \quad (20)$$

Подобные соотношения легко использовать, в частности, при рассмотрении широко применяемых реактивных параметрических преобразователей на боковые частоты, регенеративных усилителей, активных преобразователей с нижней или верхней боковой на частоту ω_0 , а также к задачам о прохождении сигнала через системы модулятор—демодулятор, модулятор—модулятор и т. п.

4. ЗАМЕЧАНИЯ О СИСТЕМАХ МОДУЛИРУЕМЫХ ЦЕПЕЙ

В случае сложных модулируемых цепей, состоящих из связанных простых цепей, коэффициенты передачи сложной системы находятся перемножением и суммированием коэффициентов передачи при распространении сигнала по всем возможным путям. Например, если система A состоит из двух подсистем, то

$$A_{ij} = \sum_k a_{ik} d_k a'_{kj}, \quad (21)$$

где d_k — коэффициент трансформации при переходе от первой системы ко второй на k -й частоте. Этот результат можно представить в матричной форме:

$$[A] = [a] [d] [a'], \quad (22)$$

где A — матрица элементов A_{ij} , $[a]$ — квадратная матрица передачи первой подсистемы, $[d]$ — диагональная матрица трансформации, $[a']$ — квадратная матрица передачи второй подсистемы.

Следует отметить весьма любопытное обстоятельство. При рассмотрении систем многополюсников с постоянными параметрами матрица передачи системы описывала интерференцию колебаний на выходе системы, проходящих через различные каналы системы на одной частоте. Здесь каналы системы могли быть выделены «геометрически» как различные цепи. В случае модулируемых систем такие каналы образуются при прохождении сигнала в одной системе на различных частотах. Последнее по аналогии с «пространственной» интерференцией можно назвать «частотной» или «временной» интерференцией.

Так же, как при «пространственной» интерференции случайных сигналов, в случае «частотной» интерференции возможна декорреляция сигнала, если времена пробега по каналам различаются на промежуток времени порядка времени корреляции сигнала.

В заключение следует отметить, что в случае модуляции параметров системы не по чисто периодическому или квазипериодическому закону решение уравнения (7) не может быть сведено к решению системы алгебраических уравнений; тогда необходимо использовать другие методы. Однако этот случай в практике встречается значительно реже, чем периодическая или квазипериодическая модуляция параметров.

Автор выражает признательность А. П. Лавуту за помощь и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Heffner, G. Wade, J. Appl. Phys., **29**, 1321 (1958).
2. R. Aitchison, Proc. Austral IRE, **21**, 479 (1960).
3. S. Deutsch, Proc. IRE, **48**, 1595 (1960).
4. S. Kim, IRE, Wescon Conv. Record, **2**, 91 (1959).
5. G. Неггап, Proc. IRE, **48**, 2021 (1960).
6. Е. М. Гершензон, Н. Г. Птицына, Г. И. Рожкова, В. С. Эткин, Радиоэлектронная промышленность, **17**, 3 (1959).
7. М. К. Белкин, Радиотехника, **16**, 33 (1961).
8. M. Boga, Trans. IRE, CT-7, 200 (1960).
9. С. Г. Сегаль, Электросвязь, **7**, 51 (1961).

- 10 П. В. Войшвилло, Радиотехника, 18, 135 (1963).
- 11 И М Айнбinder, Радиотехника, 18, 55 (1963).
- 12 J. Carson, Phys. Rev., 27, 2 (1921).
- 13 E. F. Alexandersen, Proc. IRE, 4, 4101 (1916).
- 14 W. Eckardt, E. Sterzger, ТИРИ, 50, 2148 (1962).
- 15 R. L. Mayer, Trans IRE, MTT-11, 92 (1963).
- 16 D. K. Adams, Proc. NEC, 18, 399 (1962).
- 17 Гао Баосинь, И. В. Иванов, М. Д. Каравес, Радиотехника и электроника, 7, 1152 (1962).
- 18 R. Maier, K. Locherger, Archiv El. Übertrag, 15, 71 (1961).
- 19 R. Maier, Archiv El. Übertrag, 17, 129 (1963).
- 20 J. Lenkomski, Trans. IRE, CT-9, 113 (1962).
- 21 О Г. Смолянов, А. П. Бекасов, Радиотехника и электроника, 8, 1407 (1963).
- 22 В. И. Трифонов, Радиотехника и электроника, 8, 1418 (1963).
- 23 Д. Р. Карсон, Электрические нестационарные явления и операционные исчисления, Киев—Харьков, 1934.
- 24 Н. В. Smets, Trans. IRE, CT-7, 459 (1960).
- 25 J. H. Ku, Trans. IRE, CT-7, 479 (1960).
- 26 Ю. А. Кравцов, Радиотехника и электроника, 6, 843 (1961).
- 27 Г. И. Атабеков, Теория цепей, изд. Сов. радио, М., 1960.
- 28 Л. Заде, Труды ИРИ, 49, 1731 (1961).
- 29 Я. С. Дымарский и др., Справочник программиста, 1, Судпромгиз, 1963.
- 30 Ю. Е. Дьяков, Радиотехника и электроника, 5, 1189 (1960).

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
26 сентября 1963 г.

TO THE THEORY OF MODULATED CIRCUITS

V. S. Etkin

The systems with modulated parameters are investigated by the solution of the integral equations of forced oscillations. As an example a harmonic modulator and demodulator are considered.

УДК 621.375.001.24

К ТЕОРИИ УСИЛИТЕЛЯ ТИПА «МОДУЛЯТОР—ДЕМОДУЛЯТОР»

Е. С. Карманова, В. С. Эткин

Рассчитаны коэффициенты передачи и коэффициент шума усилителя типа «модулятор—демодулятор».

В работах [1, 2, 6] изучалась возможность усиления в схемах, состоящих из модулятора на нелинейной емкости и демодулятора на нелинейном сопротивлении, которые сокращенно принято называть усилителями типа «модулятор—демодулятор» (УМД). В настоящей работе на основе результатов, полученных в [3], вычислены коэффициенты передачи и коэффициенты шума такого усилителя.

1. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ УМД

Будем считать, что амплитуда напряжения гетеродина на модуляторе и демодуляторе значительно больше напряжения сигнала, так что модулятор и демодулятор можно рассматривать как устройства с периодически меняющейся емкостью и сопротивлением. Эквивалентная схема УМД приведена на рис. 1.

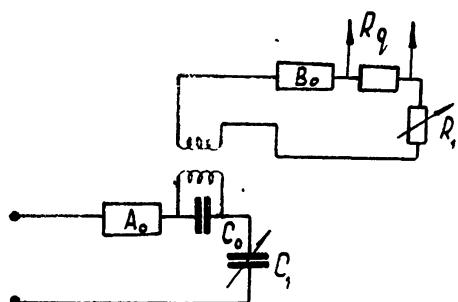


Рис. 1. Эквивалентная схема усилителя (A_0 и B_0 —линейные двухполюсники; $C_1 = C_0 [m \cos (pt + \varphi)]^{-1}$ — периодическая емкость; $R_1 = R_d m_1 \cos (pt + \psi)$ — периодическое сопротивление; $C_0 = \text{const}$; $R_d = \text{const}$).

Пусть напряжение на демодуляторе (D) поступает через трансформатор. За отклик модулятора (M) примем напряжение на конденсаторе C_0 , за отклик демодулятора — напряжение на сопротивлении R_d . В случае резонансной настройки на частоту сигнала ω_0 и частоты p — $\omega_0 = \omega_{-1}$, $p + \omega_0 = \omega_1$ коэффициенты передачи цепей A_0 и B_0 можно записать в следующем виде: цепь A_0 —

$$g_m(\omega_i) = -jQ_i \text{ для } \omega_i > 0,$$

$$g_m(\omega_i) = +jQ_i \text{ для } \omega_i < 0,$$

где Q_i — добротности соответствующих резонирующих контуров на частотах ω_i ;

цепь B_0 —

$$g_x(\omega_i) = \gamma_i = R_x/R_i,$$

где $R_i = R_x + R_{h_i}$, а R_{h_i} — активное сопротивление цепи B_0 на частоте ω_i .

В соответствии с [3] будем искать коэффициенты передачи a_{ik} для модулятора и b_{ik} для демодулятора, связывающие отклик соответствующей системы на частоте ω_k с входным напряжением на частоте ω_i . Введем обозначения

$$\beta_1^2 = (m^2/4) Q_0 Q_1, \quad \beta_{-1}^2 = Q_0 Q_{-1} (m^2/4); \quad (1)$$

$$\beta'_1^2 = \gamma_0 \gamma_1 (m_1^2/4), \quad \beta'_{-1}^2 = \gamma_0 \gamma_{-1} (m_1^2/4). \quad (2)$$

Тогда, используя соотношения (18) — (26) работы [3], получим выражения для коэффициентов передачи конкретных типов модулятора и демодулятора:

$$a_{00} = \frac{Q_0 e^{-j\pi/2}}{1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2}, \quad (3)$$

$$a_{0,-1} = \frac{-(m/2) Q_0 Q_{-1} e^{-j\varphi}}{1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2}, \quad (4)$$

$$a_{01} = \frac{(m/2) Q_0 Q_1 e^{j\varphi}}{1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2}, \quad (5)$$

$$a_{-10} = \frac{-(m/2) Q_0 Q_{-1} e^{j\varphi}}{1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2}, \quad (6)$$

$$a_{-11} = \frac{\beta_1^2 Q_{-1} e^{j(2\varphi-\pi/2)}}{1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2}, \quad (7)$$

$$a_{-1,-1} = \frac{Q_{-1}(1 + \beta_1^2) e^{j\pi/2}}{1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2}, \quad (8)$$

$$a_{10} = \frac{(m/2) Q_0 Q_1 e^{-j\varphi}}{1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2}, \quad (9)$$

$$a_{11} = \frac{Q_1(1 - \beta_{-1}^2) e^{-j\pi/2}}{1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2}, \quad (10)$$

$$a_{1,-1} = \frac{\beta_{-1}^2 Q_1 e^{-j(2\varphi+\pi/2)}}{1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2}, \quad (11)$$

$$b_{00} = \frac{\gamma_0}{1 - \beta'_{-1}^2 - \beta'_1^2}, \quad (12)$$

$$b_{10} = \frac{-(m_1/2) \gamma_0 \gamma_1 e^{-j\psi}}{1 - \beta'_{-1}^2 - \beta'_1^2}, \quad (13)$$

$$b_{-10} = \frac{-(m_1/2) \gamma_0 \gamma_{-1} e^{j\psi}}{1 - \beta'_{-1}^2 - \beta'_1^2}. \quad (14)$$

Будем считать, что на демодулятор поступают колебания на частотах $\omega_1 = \omega_0 + p$ и $\omega_{-1} = p - \omega_0$. Введем коэффициенты трансформации напряжения U_c на выходе модулятора в напряжение на входе демодулятора U_d :

$$\begin{aligned} U_d(\omega_1) &= k_1 U_c(\omega_1); \\ U_d(\omega_{-1}) &= k_{-1} U_c(\omega_{-1}). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя (3)—(15), найдем выражения для коэффициентов передачи УМД с частотами ω_0 , ω_1 и ω_{-1} на частоту ω_0 по разным путям преобразования частоты, воспользовавшись для этого общим соотношением работы [3]:

$$A_{ik} = \sum_j a_{ij} k_j b_{jk}. \quad (16)$$

Эти выражения имеют вид

$$A_{10} = \frac{(m_1/2) \gamma_0 Q_1 e^{-j(\psi-\pi/2)} [k_1 (1 - \beta_{-1}^2) \gamma_1 + k_{-1} \beta_{-1}^2 \gamma_{-1} e^{-j2(\varphi-\psi)}]}{(1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2) (1 - \beta_1'^2 - \beta_{-1}'^2)}; \quad (17)$$

$$A_{-10} = \frac{(m_1/2) \gamma_0 Q_{-1} e^{j(\psi-\pi/2)} [k_{-1} \gamma_{-1} (1 + \beta_1^2) - k_1 \gamma_1 \beta_1^2 e^{2j(\varphi-\psi)}]}{(1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2) (1 - \beta_1'^2 - \beta_{-1}'^2)}; \quad (18)$$

$$A_{00} = \frac{(mm_1/4) Q_0 \gamma_0 e^{j(\varphi-\psi)} [k_{-1} Q_{-1} \gamma_{-1} e^{-j2(\varphi-\psi)} - k_1 Q_1 \gamma_1]}{(1 + \beta_1^2 - \beta_{-1}^2) (1 - \beta_1'^2 - \beta_{-1}'^2)}. \quad (19)$$

Из (17)—(19) видно, что передача сигналов УМД зависит от разности фаз между напряжениями гетеродина в модуляторе и демодуляторе.

2. КОЭФФИЦИЕНТ ШУМА УМД

Найдем коэффициент шума УМД как отношение

$$F = P_{\text{ш вых}} / P_{\text{г ш вых}}, \quad (20)$$

где $P_{\text{ш вых}}$ — полная мощность шума на выходе УМД, $P_{\text{г ш вых}}$ — мощность шума на выходе, вызванная шумами генератора сигнала на входе УМД.

Будем рассматривать преобразование шумов так же, как преобразование сигналов. Пренебрежем корреляцией в спектре собственных шумов демодулятора, которая может иметь место (например, на туннельном диоде [4]), если наряду с модуляцией сопротивления демодуляторного диода учитывается модуляция тока, а следовательно, и дробовых шумов, протекающих через диод. Это означает, что наличие дробовых шумов можно рассматривать только как увеличение эффективной температуры шума демодулятора на соответствующих частотах.

Таким образом, будем учитывать следующие ЭДС шума: ЭДС шума генератора сигналов

$$\overline{E_c^2}(\omega_0) = 4kT_0 R_r \Delta f; \quad (21)$$

ЭДС шума сопротивлений потерь в модуляторе R_{M_1} и диоде R_s на частотах ω_0 , ω_1 , ω_{-1}

$$\overline{E_m^2}(\omega_i) = 4k (R_{M_i} T_{M_i} + R_s T_s) \Delta f; \quad (22)$$

ЭДС шума сопротивлений потерь нагрузки R_{h_1} и диода R_d в демодуляторе

$$\overline{E_d^2}(\omega_i) = 4k(R_{h_1}T_{h_1} + R_dT_d)\Delta f. \quad (23)$$

Выражение для мощности на выходе демодулятора запишем в виде

$$P_{\text{ш вых}} = J^2(\omega_0)R_{h_0} = R_{h_0}U_d^2(\omega_0)/R_d^2 \sim U_d^2(\omega_0),$$

где U_d — напряжение на сопротивлении R_d на частоте ω_0 . Таким образом, коэффициент шума есть отношение квадратов соответствующих напряжений на сопротивлении R_d , которые связаны с величинами ЭДС коэффициентами передачи.

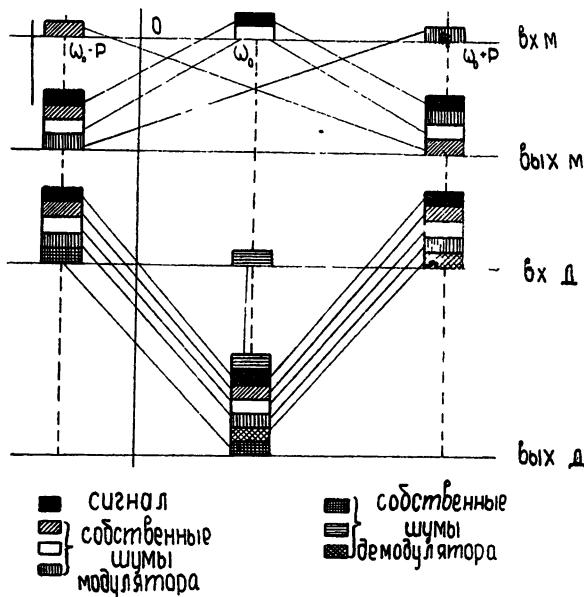


Рис. 2. Схема преобразования шумов в УМД.

На рис. 2 приведена схема преобразования шумов в УМД. Используя эту схему и соотношения (3) — (15) и (20) — (23), найдем

$$F = 1 + \frac{R_{m_0}T_{m_0} + R_sT_s}{R_rT_0} + \frac{R_{m_1}T_{m_1} + R_sT_s}{R_rT_0} \frac{Q_1^2}{(m/2)^2 Q_0^2} \frac{\Phi_1}{\Phi_0} + \\ + \frac{(R_{m_{-1}}T_{m_{-1}} + R_sT_s)Q_1^2\Phi_{-1}}{R_rT_0Q_0^2(m/2)^2\Phi_0} + \frac{(R_{h_0}T_{h_0} + R_dT_d)D^2}{R_rT_0Q_0^2\Phi_0(m/2)^2(m_1/2)^2} + \\ + \frac{(R_{h_1}T_{h_1} + R_dT_d)\gamma_1^2 D^2}{R_rT_0(m/2)^2Q_0^2\Phi_0} + \frac{(R_{h_{-1}}T_{h_{-1}} + R_dT_d)\gamma_{-1}^2 D^2}{(m/2)^2Q_0^2\Phi_0R_rT_0}, \quad (24)$$

где

$$D^2 = (1 - \beta_{-1}^2 + \beta_1^2)^2,$$

$$\Phi_0 = k_{-1}^2 Q_{-1}^2 \gamma_{-1}^2 + k_1^2 Q_1^2 \gamma_1^2 - 2k_1 k_{-1} Q_1 Q_{-1} \gamma_1 \gamma_{-1} \cos[2(\varphi - \psi)], \quad (25)$$

$$\Phi_1 = k_1^2 (1 - \beta_{-1}^2)^2 \gamma_1^2 + k_{-1}^2 \beta_{-1}^4 \gamma_{-1}^2 + 2k_1 k_{-1} (1 - \beta_{-1}^2) \gamma_1 \gamma_{-1} \beta_{-1}^2 \cos[2(\varphi - \psi)],$$

$$\Phi_{-1} = k_{-1}^2 (1 + \beta_1^2)^2 \gamma_{-1}^2 + k_1^2 \beta_1^4 \gamma_1^2 - 2k_1 k_{-1} (1 + \beta_1^2) \gamma_1 \gamma_{-1} \beta_1^2 \cos[2(\varphi - \psi)].$$

Очевидно, что максимум коэффициента передачи A_{00} имеет место при

$$\varphi - \psi = \pi/2. \quad (26)$$

При условии (26) будет минимальным вклад шумов демодулятора (см. (24)). С другой стороны, этот вклад будет исчезать при $D \approx 0$, когда

$$\beta_{-1}^2 = 1 + \beta_1^2, \quad (27)$$

т. е. при сильной регенерации в модуляторе. Нужно обратить внимание на то, что по мере приближения к нулю m и m_1 (одного из них или обоих вместе) коэффициент шума УМД $F \rightarrow \infty$. Это вполне понятно, так как при этом условии прекращается прохождение сигнала через систему.

Практический интерес представляет случай, когда $\omega_0 \ll p$ и

$$Q_{-1} \approx Q_1; R_{m_1} \approx R_{m_{-1}}; \gamma_1 = \gamma_{-1}; R_{m_0} = 0; R_{n_1} = R_{m_1}. \quad (28)$$

Если напряжение на нагрузке модулятора является одновременно входным напряжением демодулятора, то

$$k_1 = k_{-1} \approx \omega_1 C_0 R_{m_1} = 1/Q_{n_1}. \quad (29)$$

Если вместе с тем $R_s \ll R_{m_1}$, то

$$Q_1 \approx Q_{n_1}. \quad (30)$$

Поскольку при выполнении равенств (28) $\beta_1^2 = \beta_{-1}^2$, будем считать, что при полной модуляции емкости

$$\beta_1^2 = \beta_{-1}^2 \approx 1.$$

Тогда, используя (26), (28) — (30), найдем

$$\Phi_0 = 4\gamma_1^2, \Phi_1 = 9\gamma_1^2/Q_1^2, \Phi_{-1} = \gamma_1^2/Q_1^2. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (24) и учитывая, что $Q_i = 1/\omega_i C_0 R_i$, получим

$$F = 1 + R_s T_s / R_r T_0 + \frac{5\omega_0 (R_{m_1} T_{m_1} + R_s T_s) (R_r + R_s)}{2\omega_1 R_r T_0 (R_{m_1} + R_s)} + \\ + \frac{\omega_0 (R_{n_0} T_{n_0} + R_d T_d) (R_r + R_s)}{\omega_1 R_r T_0 (R_s + R_{m_1})} + \frac{\omega_0 (R_{n_1} T_{n_1} + R_d T_d) (R_r + R_s)}{2\omega_1 R_r T_0 (R_{m_1} + R_s)}. \quad (32)$$

Обычно шумы $p-n$ -перехода в демодуляторе играют основную роль (дробовой шум), т. е.

$$R_d T_d \gg R_{n_1} T_{n_1}.$$

Если УМД работает при комнатной температуре: $T_s = T_{m_1} = T_0$, выражение (32) упрощается:

$$F = 1 + \frac{R_s}{R_r} \left[1 + \frac{5}{2} \frac{\omega_0 (R_r + R_s)}{\omega_1 R_s} \right] + \frac{3}{2} \frac{\omega_0 (R_r + R_s) R_d T_d}{\omega_1 (R_s + R_{m_1}) R_r T_0}. \quad (33)$$

В случае $R_s \ll R_r$, $R_s \ll R_{m_1}$ оно переходит в

$$F = 1 + \frac{5}{2} \frac{\omega_0}{\omega_1} + \frac{3}{2} \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{R_r}{R_{m_1}} \frac{R_d T_d}{R_r T_0}. \quad (34)$$

Как видно из (32) — (34), УМД обладает достаточно малым коэф-

фициентом шума при $\omega_0 \ll \omega_1$, хотя и большим по величине, чем усилитель-преобразователь на верхнюю боковую частоту [5]:

$$F = 1 + \omega_0/\omega_1.$$

Основными преимуществами УМД можно считать практическое отсутствие регенерации, выход на частоте сигнала, простоту устройства.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Eckhardt, E. Sterzer, ТИРИ, 50, 180 (1962).
2. D. K. Adams, Proc. NEC, 18, 399 (1962).
3. В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 1150 (1964).
4. Н. Е. Селиваненко, Л. Н. Никулина, В. С. Эткин, Электросвязь, (в печати).
5. B. Robinson, J. Jager, Proc. IEE, 13109, 267 (1962).
6. В. И. Трифонов, РТЭ, 8, 1418 (1963).

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
26 сентября 1963 г.

TO THE THEORY OF THE „MODULATOR—DEMODULATOR“ AMPLIFIER

E. S. Karmanova, V. S. Etkin

The transmission factors and the noise factor have been calculated of the „modulator—demodulator“ amplifier.

УДК 621.373 01 + 621.375.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В МАГНИТОСТАТИЧЕСКОМ УСИЛИТЕЛЕ И ГЕНЕРАТОРЕ

A. B. Вашковский

Методом, развитым в работе [3], определена (при учете нелинейной связи магнитной индукции с полем) установившаяся амплитуда в магнитостатическом генераторе и верхняя граница динамического диапазона в магнитостатическом усилителе. Результаты расчета согласуются с данными эксперимента [5].

Теории магнитостатического усилителя посвящено много работ. Все эти исследования проведены в линейном приближении, т. е. в предположении, что характеристики усилителя не зависят от амплитуды входного сигнала. Одной из важных характеристик любого усилителя является динамический диапазон, нижняя граница которого определяется уровнем собственных шумов усилителя, а верхняя — нелинейностью усилителя. Уровень собственных шумов был определен в работе [1]. Целью настоящей работы является определение верхней границы динамического диапазона магнитостатического усилителя и исследование некоторых свойств магнитостатического генератора. Предварительный расчет магнитостатического генератора значительно облегчает задачу нахождения верхней границы динамического диапазона и помогает понять нелинейные процессы, которые в генераторе определяют установившуюся амплитуду, а в усилителе приводят к уменьшению коэффициента усиления при увеличении амплитуды входного сигнала.

Исследованию параметрического ферритового генератора посвящена работа [2]. В ней развита нелинейная теория ферритового генератора электромагнитного типа, в котором феррит, как известно, выступает в роли нелинейного элемента связи. В магнитостатическом усилителе феррит играет роль резонансного контура, и свойства усилителя существенно определяются параметрами собственных колебаний ферритового образца. Нелинейные характеристики ферритового образца в безграничной среде при параметрической регенерации получены в работе [3]. Используя эти результаты, можно найти характеристики магнитостатического параметрического генератора.

Поскольку практический интерес представляет исследование магнитостатического усилителя и генератора в вырожденном режиме с низшим типом магнитостатических колебаний 2, 0, 1, то мы и ограничимся рассмотрением нелинейных свойств усилителя и генератора с одним колебанием указанного типа.

В настоящей работе будет рассматриваться только механизм ограничения амплитуды генерации из-за нелинейности на частоте генерации. Влияние нелинейного роста потерь на частоте накачки может быть учтено независимо.

1. МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР

Рассмотрим резонатор, в который помещен ферритовый шар. Феррит намагнчен до насыщения постоянным полем H_0 , кроме того, на

феррит действует поле накачки h_0 , частота которого ω_0 , а направление совпадает с H_0 .

Резонатор настроен на частоту колебаний $\omega = \omega_0/2$. Феррит размещен в резонаторе таким образом, что поле резонатора связано с магнитостатическим колебанием типа 2, 0, 1. Это может быть осуществлено тремя способами: а) феррит в центре сферического резонатора типа $H_{2,0,1}$; б) феррит в центре сферического резонатора $E_{1,0,1}$; в) феррит в центре прямоугольного резонатора $H_{1,1,0}$. В случае а осуществляется прямая связь колебаний резонатора и феррита; в случаях б и в — косвенная связь*. В дальнейшем обозначения различных физических величин, относящихся к этим случаям, будем снабжать индексами « H », « E » и « \square ». Электромагнитные поля в указанных резонаторах описываются следующим образом: в случае а — потенциалом Дебая [6] вида

$$v = \left[\beta_H j_2 \left(\frac{\omega r}{c} \right) + \gamma_H n_2 \left(\frac{\omega r}{c} \right) \right] P_2 (\cos \theta);$$

в случае б — потенциалом Дебая вида

$$u = \left[\beta_E j_1 \left(\frac{\omega r}{c} \right) + \gamma_E n_1 \left(\frac{\omega r}{c} \right) \right] P_1 (\cos \theta);$$

в случае в — непосредственно

$$\varepsilon_z = \beta_\square \cos(k_x x) \cos(k_y y).$$

Здесь $j_n(\omega r/c)$ и $n_n(\omega r/c)$ — сферические функции Бесселя и Неймана порядка n , r , θ , φ — сферические координаты, $P_n(\cos \theta)$ — полином Лежандра степени n , k_x , k_y — проекции волнового вектора по осям x и y ($k_x^2 + k_y^2 = \omega^2/c^2$), β , γ — амплитуды поля в резонаторе.

Установившуюся амплитуду генерации найдем из граничных условий для резонатора с ферритом при использовании нелинейной связи между магнитным полем и индукцией в феррите, которая получена в работе [3]. Для сферического резонатора записываются граничные условия на поверхностях феррита и резонатора, а для прямоугольного резонатора — граничные условия на поверхности феррита и формула возмущения вместо граничного условия на поверхности резонатора. Отсюда находим амплитуду поля в резонаторе:

$$|\beta|^2 = R \frac{a^3}{\lambda} (4\pi M_0)^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^5 |N|^{-2} \left\{ \Theta' \pm \Theta'' \sqrt{\left(\frac{h_0}{h_{0\text{кр}}} \right)^2 - 1} \right\}. \quad (1)$$

Здесь

$$N_H = \frac{j_2(\omega b/c)}{n_2(\omega b/c)}, \quad N_\square = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2}, \quad N_E = \frac{j_1(\omega b/c) + (\omega b/c) j'_1(\omega b/c)}{n_1(\omega b/c) + (\omega b/c) n'_1(\omega b/c)},$$

$$F = 4\mu + 1, \quad \Theta = F + x/N,$$

x — коэффициент связи,

$$x_H = \frac{1}{36} \left(\frac{\omega a}{c} \right)^5, \quad x_E = \frac{7}{4} \left(\frac{\omega a}{c} \right)^5, \quad x_\square = 3 \left(\frac{\omega a}{c} \right)^5,$$

* Под прямой связью колебаний резонатора и феррита понимается случай возбуждения магнитостатических колебаний феррита магнитным полем резонатора, близким по структуре к магнитостатическим колебаниям; при косвенной связи магнитостатические колебания возбуждаются электрическим полем с отличием от магнитостатических колебаний структурой [8].

a — радиус ферритового шара, b — радиус сферического резонатора, $h_{0 \text{ кр}}$ — критическое значение поля накачки, $R_H = 1,94$, $R_E = 157$; $R_\square = 12000 \lambda^{-2}$. Потери в феррите учитываются методом комплексного поля [7], т. е. заменой H на $H + i\Delta H$ (или F на $F + i\frac{\partial F}{\partial H}\Delta H$); потери в резонаторе — методом комплексной частоты: ω — заменяется на $\omega + i\Delta\omega$ (или N на $N + i\frac{\partial N}{\partial \omega}\Delta\omega$).

Из равенства нулю функций N , F , Θ определяются условия настройки в резонанс резонатора, феррита и феррита с резонатором соответственно. Известно [4], что в резонаторе с ферритом возможны два режима генерации (А и Б). Режим генерации зависит от величины связи между ферритовым шаром и резонатором. При связи, меньшей критической, возможен режим А (генерация на частоте $\omega_0/2$); при связи, большей критической, режим Б (генерация на трех частотах $\omega_0/2$, $\omega_0/2 \pm \Omega_B$). Однако критическое поле накачки для частоты $\omega_0/2$ в режиме Б превосходит критическое поле накачки для частот $\omega_0/2 \pm \Omega_B$ [4]; поэтому практический интерес в режиме Б представляют только частоты $\omega_0/2 \pm \Omega_B$.

Мощность, отдаваемую генератором, P определим из соотношения:

$$P = \omega W / Q_{\text{св}},$$

где W — энергия резонатора с ферритом, $Q_{\text{св}}$ — добротность связи.

Величина W определяется интегрированием выражений для электромагнитного поля по объему резонатора. С учетом выражения (1) для двух режимов генерации получим.

$$P^A = A \frac{fa^3 (4\pi M_0)^2 Q^2}{Q_{\text{св}}} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^5 \left\{ \left| \frac{\partial F}{\partial H} \right| \Delta H + \frac{x}{|\partial F/\partial f| |\Delta f|} \right\} \times \\ \times \sqrt{\left(\frac{h_0}{h_{0 \text{ кр}}^A} \right)^2 - 1}; \quad (2)$$

$$P^B = A \frac{fa^3 (4\pi M_0)^2 Q^2}{Q_{\text{св}}} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^5 \frac{|\partial F/\partial H| \Delta H + |\partial F/\partial f| \Delta f}{1 + x / |\partial F/\partial f| |\partial N/\partial f| (\Delta f)^2} \sqrt{\left(\frac{h_0}{h_{0 \text{ кр}}^B} \right)^2 - 1}. \quad (3)$$

При расщеплении $\Omega_B \gg \Delta\omega$ ($\Delta\omega$, Δf — полоса пропускания резонатора), что имеет место, когда $x \gg |\partial F/\partial f| |\partial N/\partial f| (\Delta f)^2$ [4], выражение для P^B упрощается:

$$P^B \approx B \frac{f^2 a^3 4\pi M_0}{\gamma Q_{\text{св}}} \left(\left| \frac{\partial F}{\partial H} \right| \Delta H + \left| \frac{\partial F}{\partial f} \right| \Delta f \right) \sqrt{\left(\frac{h_0}{h_{0 \text{ кр}}^B} \right)^2 - 1}. \quad (4)$$

Для рассматриваемых резонаторов $H_{2,0,1}$, $E_{1,0,1}$ (сферических) и $H_{1,1,0}$ (прямоугольного) получаются следующие значения коэффициентов А и Б:

$$\begin{aligned} A_H &= 0,66; & A_E &= 684; & A_\square &= 3140; \\ B_H &= 0,25; & B_E &= 1,85; & B_\square &= 3,95. \end{aligned}$$

Выражения (2)–(4) приведены для частот $\omega_0/2$ и $\omega_0/2 \pm \Omega_B$. На самом деле генерация происходит в конечных полосах частот. Исследование полосы частот и возможности перестройки частот магнитостатического параметрического генератора не дает ничего нового по сравнению с работами [2, 3].

Очевидные зависимости мощности генерации получились от объема образца a^3 , намагниченности насыщения $4\pi M_0$, ширины линии ферромагнитного резонанса ΔH и добротности связи Q_{cb} . Наличие множителя $(a/\lambda)^5$ в режиме А и отсутствие его при большом расщеплении частоты в режиме Б является характерным различием этих режимов.

Сравнение магнитостатических генераторов с различными резонансными системами показывает, что большую мощность отдает тот генератор, у которого большая связь ферритового образца с резонатором χ (при той же степени регенерации). В рассмотренных случаях это — система с прямоугольным резонатором.

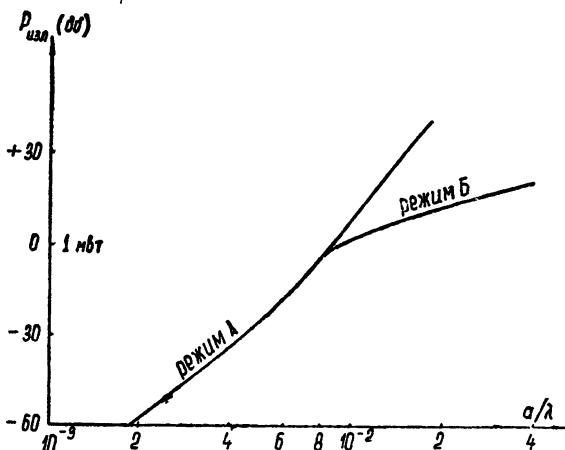


Рис. 1. Зависимость мощности генерации от относительного размера ферритового образца.

На рис. 1 приведена зависимость генерируемой мощности от размера образца феррита. Кривая построена для сферического резонатора $E_{1,0,1}$ по формулам (2), (4), в центре которого расположен ферритовый шар с параметрами: $4\pi M_0 = 1725 \text{ Гс}$, $\Delta H = 0,25 \text{ э}$. Частота генерации $4,5 \text{ Гц}$, добротности $Q = 3500$ и $Q_{cb} = 4Q$, степень регенерации $\sqrt{(h_0/h_{0kp})^2 - 1} = 1$. Для прямоугольного резонатора получаются такие же кривые, лежащие выше и левее (при той же добротности и степени регенерации); для сферического резонатора $H_{2,0,1}$ — ниже и правее. Две ветви кривой, получающиеся при превышении a/λ некоторо-

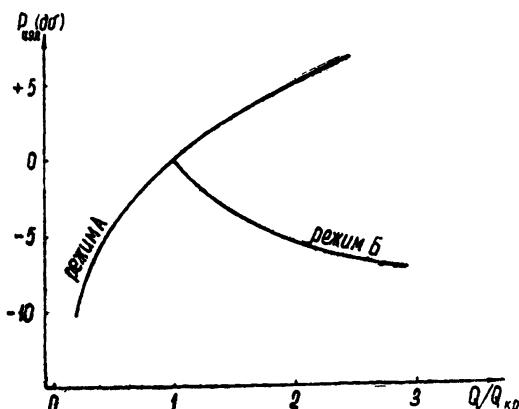


Рис. 2. Зависимость мощности генерации от добротности резонатора.

го критического значения, соответствуют амплитудам генерации на трех частотах; одна для $\omega_0/2$ и вторая, идущая ниже, для $\omega_0/2 \pm \Omega_B$.

На рис. 2 приведена зависимость генерируемой мощности от добротности резонатора (для сферического резонатора типа $E_{1,0,1}$ с параметрами, указанными выше; величина (a/λ) взята равной $8 \cdot 10^{-3}$). За начало отсчета принята мощность излучения в критическом режиме. Изменения мощности генерации при изменении добротности резонатора более плавные, чем при изменении a/λ , а характер изменения близок к характеру изменения $h_{0\text{ кр}}$ от Q [4].

Интересно отметить, что величина мощности излучения из резонатора с ферритом на несколько порядков больше мощности излучения феррита в бесграничную среду [3], так как резонатор осуществляет согласование феррита со средой. (Это, конечно, предполагает соответствующее увеличение пороговой мощности накачки.)

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ

Коэффициент усиления магнитостатического параметрического ферритового усилителя любой конструкции может быть задан соотношением [4]

$$K_y^{1/2} = C / (h_{0\text{ кр}}^2 - h_0^2), \quad (5)$$

где C — коэффициент, зависящий от режима работы усилителя. Для режима А этот коэффициент равен

$$C_A = \frac{4}{9} (4\pi M_0)^2 \times Q \left(\left| \frac{\partial F}{\partial H} \right| \Delta H + \times Q \right),$$

а для режима Б —

$$C_B = \frac{4}{9} (4\pi M_0)^2 \left| \frac{\partial F}{\partial f} \right|^2 (\Delta f)^2 \left(1 + \frac{\gamma \Delta H}{\Delta f} \right).$$

Можно показать [3], что нелинейность феррита по сигналу приводит к некоторому эффективному увеличению порогового уровня $h_{0\text{ кр}}$. Это увеличение прямо пропорционально квадрату амплитуды для сигнала h_c^2 .

Представим приращение $h_{0\text{ кр}}$ в виде qP_c ($P_c \equiv h_c^2$, а величина q определяется для данного резонатора и феррита). Тогда для коэффициента усиления с учетом приращения $h_{0\text{ кр}}$ получим

$$K_y^{1/2} = C / (h_{0\text{ кр}}^2 - h_0^2 + q^2 P_c^2). \quad (6)$$

Величина q мала и при малых мощностях сигнала P_c выражение (6) переходит в (5). Из выражений (5) и (6) легко определить значение входной мощности сигнала $P_{c,d}$, при которой коэффициент усиления уменьшится на 3 дБ по сравнению с коэффициентом усиления при значительно меньших мощностях входного сигнала ($K_{y,0}$):

$$P_{c,d}^2 = \frac{(V\sqrt{2}-1)C}{q^2 K_{y,0}^{1/2}}.$$

Подставляя в эту формулу значения C и q (последняя вычисляется для конкретного вида резонатора с ферритом), получим верхнюю границу динамического диапазона $P_{c,d}$, выраженную следующим образом через параметры феррита и резонатора:

$$P_{c,d}^A = D \frac{f Q a^3 (4\pi M_0)^2}{K_{y,0}^{5/4}} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^5 \sqrt{x Q \left(\frac{25}{2} \frac{\Delta H}{4\pi M_0} + x Q \right)}; \quad (7)$$

$$P_{c,d}^B = \frac{25}{4} D \frac{f^2 a^3 4\pi M_0}{K_{y,0}^{5/4}} \frac{(a/\lambda)^5}{1 + \epsilon |\partial F / \partial f| |\partial N / \partial f| (\Delta f)^2} \sqrt{1 + \frac{\gamma \Delta H}{\Delta f}}, \quad (8)$$

где $D_H = 75$, $D_E = 4,8 \cdot 10^6$, $D_\square = 8 \cdot 10^5$.

При большем расщеплении частоты

$$P_{c,d}^B = B \frac{f^3 a^3}{\gamma^2 Q^2 K_{y,0}^{5/4}} \sqrt{1 + \frac{\gamma \Delta H}{\Delta f}}, \quad (9)$$

где $B_H = 28$, $B_E = 12,8 \cdot 10^3$, $B_\square = 2 \cdot 10^3$.

Верхняя граница динамического диапазона оказывается прямо пропорциональной критическому значению мощности накачки в степени 1/4 (под квадратным корнем в правой части выражений (7)–(9) стоит $h_0 \text{ кр} \propto \sqrt{P_0 \text{ кр}}$), но зато обратно пропорциональна коэффициенту усиления в степени 5/4. Обратная зависимость от коэффициента усиления понятна: чем больше K_y , тем больше действующее внутри феррита поле сигнала и тем больше должна оказаться нелинейность феррита.

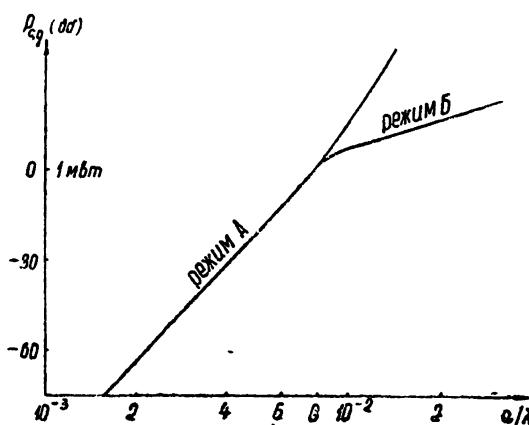


Рис. 3. Зависимость верхней границы динамического диапазона от относительного размера образца.

На рис. 3 приведена зависимость $P_{c,d}$ от относительного размера образца при $K_{y,0} = 20 \text{ дБ}$ (параметры феррита и резонатора взяты теми же, что на рис. 1, 2). Полученная кривая похожа на зависимость мощности излучения от размера образца. Аналогичные зависимости $P_{изл}$ и $P_{c,d}$ получаются и при изменении добротности резонатора (рис. 4).

Как видим, наибольшее значение верхней границы динамического диапазона получается в критическом режиме. Анализ «линейных» характеристик параметрического ферритового усилителя, проведенный Монсовым [4], показал, что область критической связи обеспечивает оптимальные характеристики усилителя по полосе пропускания и шумам. Для получения наибольшего динамического диапазона ферритового усилителя следует обеспечить критическую связь ферритового образца с резонатором.

Из полученных результатов ясно, что динамический диапазон магнитостатического усилителя с петлевой связью [5] должен быть малым из-за малой связи образца с нагрузкой ($Q/Q_{kp} \rightarrow 0$ на рис. 4). Это подтверждается экспериментами Дэнтона [5]. Им же была отмечена зависимость верхней границы динамического диапазона от температуры, не получившая объяснения в работе [5]. Из выражения (7) можно видеть, что верхняя граница динамического диапазона прямо пропорциональна M_0^2 . Для иттриевого феррита намагниченность насыщения заметно растет с уменьшением температуры, что должно приводить к увеличению $P_{c,d}$, как это и наблюдалось в экспериментах Дэнтона.

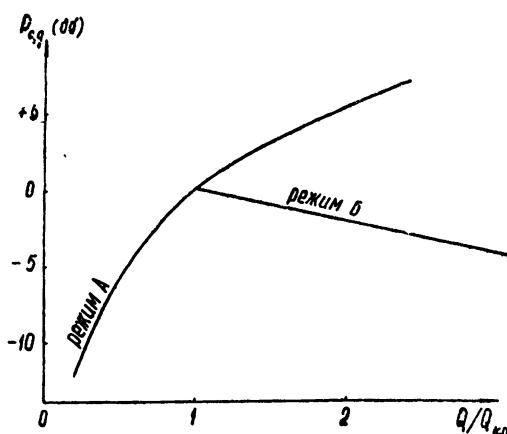


Рис. 4. Зависимость верхней границы динамического диапазона от добротности резонатора.

Учет нелинейного соотношения индукции и магнитного поля в феррите при действии поля накачки позволил определить установившуюся амплитуду колебаний в магнитостатическом генераторе и верхнюю границу динамического диапазона магнитостатического усилителя.

Мощность генерации и мощность сигнала, соответствующая верхней границе динамического диапазона, имеют примерно одинаковые зависимости от параметров феррита и резонатора, а именно, мощность генерации и верхняя граница динамического диапазона в режиме А прямо пропорциональны объему образца феррита, пятой степени отношения радиуса феррита a к длине волны λ , квадрату намагниченности феррита; в режиме Б отсутствует зависимость от $(a/\lambda)^5$ и становится иной зависимость от намагниченности насыщения. Верхняя граница динамического диапазона снижается с ростом коэффициента усиления (пропорционально $K_{y,0}^{5/4}$).

Имеющиеся в литературе экспериментальные данные [5] по динамической характеристике магнитостатического усилителя объясняются выведенными соотношениями.

Анализ теоретических зависимостей позволяет определить соотношение между параметрами феррита и резонатора, позволяющее достичь максимальной величины динамического диапазона ферритового усилителя.

Автор выражает благодарность В. В. Мигулину и Я. А. Моносову за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Моносов, РТЭ, 7, 1738 (1962).
2. А. Л. Микаэлян, РТЭ, 5, 46 (1960).
3. А. В. Вацковский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, 722 (1964).
4. Я. А. Моносов, РТЭ, 7, 1130 (1962).
5. R. T. Denton, J. Appl. Phys. Suppl., 30, 300S (1961).
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1958.

7. Г. Сул, Л. Уокер, Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах, ИЛ, М., 1955.
8. А. В. Ващковский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 85 (1963).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
2 марта 1964 г.

NONLINEAR PHENOMENA IN MAGNETOSTATIC AMPLIFIER AND GENERATOR

A. V. Vashkovsky

A steady-state amplitude in a magnetostatic generator and the upper limit of the dynamic range in a magnetostatic amplifier have been determined by the method developed in [3] (the magnetic induction being the nonlinear function of a field). The calculation results agree with the experimental data [5].

УДК 531.391.3

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

К. М. Цой

Устанавливаются условия существования периодических решений квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы и с постоянным запаздыванием по времени для одного частного класса автономных систем в случае кратных корней разрешающего уравнения. Для получения этих условий наряду с исходной системой рассматривается вспомогательная система, для которой всегда существует периодическое решение, аналитическое относительно μ . Указан практический прием вычислений периодических решений в случае кратных корней

В настоящей статье отыскиваются условия существования периодических решений квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы и постоянным запаздыванием по времени для одного частного класса автономных систем в случае кратных корней разрешающего уравнения. Для получения этих условий использован метод вспомогательных систем [3, 4], заключающийся в том, что наряду с исходной системой рассматривается вспомогательная система, для которой всегда существует периодическое решение, аналитическое относительно μ .

1. Рассмотрим квазилинейную автономную систему, движение которой описывается дифференциальными уравнениями с постоянным запаздыванием по времени вида

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \omega_i^2 x_i = \mu F_i[x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, y_1, y_2, \mu], \\ y_1 = x_1(t - \tau), \quad y_2 = x_2(t - \tau) \quad (i = 1, 2), \quad (1.1)$$

где F_i — аналитические функции относительно переменных x_i, \dot{x}_i, y_i и μ в области G и при $|\mu| < \mu^*$, $\mu^* > 0$ (μ — малый параметр). Ищем периодическое решение системы (1.1) периода T , которое при $\mu = 0$ обращается в порождающее решение

$$x_1^0 = M_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\omega_1} t\right), \quad x_2^0 = 0 \quad (1.2)$$

(M_0 — произвольная постоянная.) Сделаем замену переменной $t = (t_1/\omega_1)(1 + \mu\alpha)$, где $\alpha = \alpha(\mu)$ — неизвестная функция μ , обращающаяся в нуль при $\mu = 0$ и подлежащая дальнейшему определению. Тогда система (1.1) принимает вид

$$\frac{d^2x_1}{dt_1^2} + x_1 = \frac{\mu}{\omega_1^2} F_1 \left[x_1, x_2, \frac{\dot{x}_1 \omega_1}{1 + \mu\alpha}, \frac{\dot{x}_2 \omega_1}{1 + \mu\alpha}, x_1(t_1 - \tau'), x_2(t_1 - \tau'), \mu \right] \times \\ \times (1 + \mu\alpha)^2 - x_1(2\mu\alpha + \mu^2\alpha^2); \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt_1^2} + x_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = \frac{\mu}{\omega_1^2} F_2 \left[x_1, x_2, \frac{\dot{x}_1 \omega_1}{1 + \mu \alpha}, \frac{\dot{x}_2 \omega_1}{1 + \mu \alpha}, x_1(t_1 - \tau'), x_2(t_1 - \tau'), \mu \right] (1 + \mu \alpha)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 (2\mu\alpha + \mu^2\alpha^2) x_2;$$

$$\tau' = \tau\omega_1/(1 + \mu\alpha).$$

Если система (1.1) имеет периодическое решение периода $T = (2\pi/\omega_1) \times (1 + \mu\alpha)$, то система (1.3) имеет периодическое решение периода 2π , и наоборот. Если система (1.3) допускает периодическое решение периода 2π при некотором значении параметра α , то система (1.1) имеет периодическое решение периода $T = (2\pi/\omega_1) (1 + \mu\alpha)$.

Для построения периодических решений периода 2π системы (1.3), а также для получения необходимого и достаточного условий существования периодических решений воспользуемся методом вспомогательных систем [3, 4]. Строим вспомогательную систему, полагая, что частоты ω_1 и ω_2 несоизмеримы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt_1^2} + x_1 &= \frac{\mu}{\omega_1^2} F_1 \left[x_1, x_2, \frac{\dot{x}_1 \omega_1}{1 + \mu \alpha}, \frac{\dot{x}_2 \omega_1}{1 + \mu \alpha}, x_1(t_1 - \tau'), x_2(t_1 - \tau'), \mu \right] (1 + \mu \alpha)^2 - x_1 (2\mu\alpha + \mu^2\alpha^2) + W_1 \cos t_1 + W_2 \sin t_1; \\ \frac{d^2x_2}{dt_1^2} + x_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 &= \frac{\mu}{\omega_1^2} F_2 \left[x_1, x_2, \frac{\dot{x}_1 \omega_1}{1 + \mu \alpha}, \frac{\dot{x}_2 \omega_1}{1 + \mu \alpha}, x_1(t_1 - \tau'), x_2(t_1 - \tau'), \mu \right] (1 + \mu \alpha)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 x_2 (2\mu\alpha + \mu^2\alpha^2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

В силу автономности системы (1.1) начальные условия для периодического решения системы (1.1) периода T можно задать в виде

$$x_1(0) = M_0 + \beta, \quad \dot{x}_1(0) = 0,$$

где $\beta = \beta(\mu)$ обращается в нуль при $\mu = 0$. Значения $x_2(0)$ и $\dot{x}_2(0)$ найдутся из условия существования периодического решения системы. Вспомогательная система (1.4) всегда имеет периодическое решение, аналитическое относительно μ во всей области $|\mu| \ll \mu^*$ с наперед заданными начальными значениями $x_1(0) = M_0 + \beta$, $\dot{x}_1(0) = 0$ при соответствующем подборе не зависящих от времени W_1 и W_2 [3]. Величины W_1 и W_2 однозначно находятся из условий существования периодического решения и оказываются аналитическими относительно параметров μ , $M_0 + \beta$, α .

Ищем периодическое решение периода 2π системы (1.4) и постоянные W_1 и W_2 в виде

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i^{(1)} + \mu^2 x_i^{(2)} + \dots; \\ W_i &= W_i^{(0)} + \mu W_i^{(1)} + \mu^2 W_i^{(2)} + \dots \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $x_i^{(j)}$ — неизвестные периодические функции периода 2π , а W_1 и W_2 — неизвестные функции параметров β и α . Подставляя (1.5) в (1.4), получим

$$\frac{d^2x_1^0}{dt_1^2} + x_1^0 = W_1^{(0)} \cos t_1 + W_2^{(0)} \sin t_1; \quad (1.6)$$

$$\frac{d^2x_2^0}{dt_1^2} + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 x_2^0 = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1^{(1)}}{dt_1^2} + x_1^{(1)} = & \frac{1}{\omega_1^2} F_1 [x_1^0, x_2^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dot{x}_2^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau \omega_1), x_2^0(t_1 - \tau \omega_1), 0] - \\ & - 2x_1^0 \alpha + W_1^{(1)} \cos t_1 + W_2^{(1)} \sin t_1; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2^{(1)}}{dt_1^2} + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 x_2^{(1)} = & \frac{1}{\omega_1^2} F_2 [x_1^0, x_2^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dot{x}_2^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau \omega_1), \\ & x_2^0(t_1 - \tau \omega_1), 0] - 2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 x_2^0 \alpha; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1^{(2)}}{dt_1^2} + x_1^{(2)} = & \frac{1}{\omega_1^2} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right)_0 x_i^{(1)} + \omega_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_i}\right)_0 \dot{x}_i^{(1)} + \right. \right. \\ & + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i(t_1 - \tau \omega_1)} \right)_0 x_i^{(1)}(t_1 - \tau \omega_1) + \omega_1 \tau \alpha \frac{\partial F_1}{\partial x_i(t_1 - \tau \omega_1)} \left. \right)_0 \frac{\partial x_i^{(0)}(t_1 - \tau \omega_1)}{dt_1} \Big] + \\ & + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \mu} \right)_0 \Big\} + \frac{2 \alpha}{\omega_1^2} F_1 [x_1^0, x_2^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dot{x}_2^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau \omega_1), x_2^0(t_1 - \tau \omega_1), 0] - \\ & - \alpha^2 x_1^0 - 2 \alpha x_1^{(1)} + W_1^{(2)} \cos t_1 + W_2^{(2)} \sin t_1; \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2^{(2)}}{dt_1^2} + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 x_2^{(2)} = & \frac{1}{\omega_1^2} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\right)_0 x_i^{(1)} + \omega_1 \left(\frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}_i}\right)_0 \dot{x}_i^{(1)} + \right. \right. \\ & + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_i(t_1 - \tau \omega_1)} \right)_0 x_i^{(1)}(t_1 - \tau \omega_1) + \omega_1 \tau \alpha \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_i(t_1 - \tau \omega_1)} \right) \times \\ & \times \frac{dx_i^{(0)}(t_1 - \tau \omega_1)}{dt_1} \Big] + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \mu} \right)_0 \Big\} + \\ & + \frac{2 \alpha}{\omega_1^2} F_2 [x_1^0, x_2^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dot{x}_2^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau \omega_1), x_2^0(t_1 - \tau \omega_1), 0] - \\ & - \alpha^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 x_2^0 - 2 \alpha \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 x_2^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь круглые скобки с индексом нуль обозначают, что производные вычисляются для порождающего решения, т. е. что после дифференцирования необходимо в производных функций F_i положить $x_1^0 = M_0 \cos t_1$,

$$x_2^0 = 0, \mu = 0, \dot{x}_1^0 = 0, \dot{x}_2^0 = 0.$$

Для того, чтобы уравнение (1.6) допускало периодическое решение, должны быть выполнены равенства $W_1^{(0)} = 0$, $W_2^{(0)} = 0$. Тогда, принимая во внимание начальные условия, получаем

$$x_1^0 = (M_0 + \beta) \cos t_1, \quad x_2^0 = 0.$$

Уравнение (1.7) имеет периодическое решение, если выполнены условия

$$W_1^{(1)} = -\frac{1}{\pi \omega_1^2} \int_0^{2\pi} F_1 [x_1^0, x_2^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dot{x}_2^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau \omega_1), x_2^0(t_1 - \tau \omega_1)],$$

$$x_2^0(t_1 - \tau \omega_1), 0] \cos t_1 dt_1 + 2(M_0 + \beta)\alpha = -Q(M_0 + \beta) + 2(M_0 + \beta)\alpha;$$

$$W_1^{(2)} = -\frac{1}{\pi \omega_1^2} \int_0^{2\pi} F_1 [x_1^0, x_2^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dot{x}_2^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau \omega_1), x_2^0(t_1 - \tau \omega_1), 0] \times$$

$$\times \sin t_1 dt_1 = -\frac{1}{\pi \omega_1^2} P(M_0 + \beta),$$

Уравнение (1.8) имеет периодическое решение, если выполнены условия

$$W_1^{(2)} = -\frac{1}{\pi \omega_1^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i} \right)_0 x_i^{(1)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i(t_1 - \tau \omega_1)} \right)_0 x_i^{(1)}(t_1 - \tau \omega_1) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \omega_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_i} \right)_0 \dot{x}_i^{(1)} + \omega_1 \tau \alpha \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i(t_1 - \tau \omega_1)} \right)_0 \frac{dx_i^0(t_1 - \tau \omega_1)}{dt_1} \right] + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \mu} \right)_0 \right\} \times$$

$$\times \cos t_1 dt_1 - \frac{2\alpha}{\pi \omega_1^2} \int_0^{2\pi} F_1 [x_1^0, x_2^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dot{x}_2^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau \omega_1),$$

$$x_2^0(t_1 - \tau \omega_1), 0] \cos t_1 dt_1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} x_1^{(1)} \cos t_1 dt_1 + \alpha^2(M_0 + \beta);$$

$$W_2^{(2)} = -\frac{1}{\pi \omega_1^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i} \right)_0 x_i^{(1)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i(t_1 - \tau \omega_1)} \right)_0 x_i^{(1)}(t_1 - \tau \omega_1) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \omega_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_i} \right)_0 \dot{x}_i^{(1)} + \omega_1 \tau \alpha \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i(t_1 - \tau \omega_1)} \right)_0 \frac{dx_i^0(t_1 - \tau \omega_1)}{dt_1} \right] + \right. \cdot$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \mu} \right)_0 \right\} \sin t_1 dt_1 - \frac{2\alpha}{\pi \omega_1^2} \int_0^{2\pi} F_1 [x_1^0, x_2^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dot{x}_2^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau \omega_1),$$

$$x_2^0(t_1 - \tau \omega_1), 0] \sin t_1 dt_1 + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} x_1^{(1)} \sin t_1 dt_1$$

и т. д. Аналогичным образом можно вычислить и дальнейшие приближения. Мы получаем семейство периодических решений вспомогательной системы и соответствующие функции W_1 и W_2 , зависящие от μ , β и α . Для того, чтобы система (1.1) допускала периодическое решение периода $T = (2\pi/\omega_1)[1 + \mu\alpha(\mu)]$, обращающееся в порождающее (1.2) при $\mu=0$, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$W_1(\alpha, M_0 + \beta, \mu) = 0, \quad W_2(\alpha, M_0 + \beta, \mu) = 0 \quad (1.9)$$

допускала решение $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, где $\alpha(0) = \alpha_0$ и $\beta(0) = 0$, α_0 — некоторая фиксированная постоянная.

Рассмотрим подробнее уравнения (1.9). Заменим α на γ по формуле $\alpha = \alpha_0 + \gamma$, где α_0 — некоторая фиксированная постоянная, подлежащая определению. Для того, чтобы система уравнений (1.9) допускала решение $\gamma(\mu)$, $\beta(\mu)$, удовлетворяющее свойству $\gamma(0) = \beta(0) = 0$, а си-

стема (1.1) допускала периодическое решение, обращающееся в порождающее при $\mu = 0$, необходимо, чтобы были выполнены условия

$$Q(M_0) - 2M_0\alpha_0 = 0, \quad P(M_0) = 0. \quad (1.10)$$

Второе условие позволяет определять амплитуды M_0 колебаний, первое условие определяет первую поправку к периоду.

Допустим, что мы нашли решение этих уравнений M_0^* и α_0^* . Тогда можно записать якобиан для системы (1.9) в точке $M_0 = M_0^*$, $\alpha_0 = \alpha_0^*$, $\mu = \beta = \gamma = 0$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial W_1}{\partial \beta} \right)_0 & \left(\frac{\partial W_1}{\partial \gamma} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial W_2}{\partial \beta} \right)_0 & \left(\frac{\partial W_2}{\partial \gamma} \right)_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta} \right)_0 & -2M_0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial \beta} \right)_0 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial M} \right)_{M_0} 2M_0.$$

На основании теоремы о существовании неявных функций системы уравнений (1.9) при выполнении условий (1.10) и при отличном от нуля произведении $(\partial P / \partial M)_{M_0} M_0 \neq 0$ допускает единственное аналитическое относительно μ решение $\beta(\mu)$ и $\gamma(\mu)$, для которого $\beta(0) = 0$, $\gamma(0) = 0$. Подставив найденные M_0 , α_0 и $\beta(\mu)$, $\gamma(\mu)$ в периодическое решение вспомогательной системы (1.4), получим периодическое решение системы (1.3). Заменив время t_1 на t по формуле

$$t_1 = \frac{t \omega_1}{1 + \mu [\alpha_0 + \gamma(\mu)]},$$

получим периодическое решение исходной системы с периодом $T = (2\pi/\omega_1) \{1 + \mu [\alpha_0 + \gamma(\mu)]\}$. Это периодическое решение при $\mu = 0$ обращается в порождающее (1.2).

Поскольку $M_0 \neq 0$, таким образом доказана следующая теорема.

Для того, чтобы система (1.1), где ω_1/ω_2 — иррациональное число, при достаточно малом μ допускала периодическое решение периода $T = (2\pi/\omega_1)(1 + \mu\alpha)$, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее (1.2), необходимо, чтобы параметры M_0 и α_0 удовлетворяли уравнениям (1.10). Если при этом выполняется условие

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial M} \right)_{M_0} &= \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right)_0 \cos t_1 - \omega_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 \sin t_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1(t_1 - \tau\omega_1)} \right]_0 \cos(t_1 - \tau\omega_1) \right\} \sin t_1 dt_1 \neq 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

то указанное периодическое решение действительно существует, и оно единственno. Это решение является аналитическим относительно μ .

Эта теорема является непосредственным обобщением результатов А. А. Андронова и А. А. Витта о существовании периодических решений автономных систем без запаздывания в случае аналитических правых частей уравнений [1].

2. Рассмотрим случай, когда условие (1.11) не выполнено. Для этого обратимся к уравнению (1.9), предполагая выполненными условия (1.10):

$$Q(M_0 + \beta) - Q(M_0) - 2M_0\gamma + \mu\Phi_1(\beta, \gamma, \mu) = 0;$$

$$\frac{1}{\pi \omega_1^2} P(M_0 + \beta) + \mu \Phi_2(\beta, \gamma, \mu) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь Φ_1, Φ_2 — функции параметров β, γ, μ .

Так как $M_0 \neq 0$, то из первого уравнения (2.1) можно найти γ как аналитическую функцию параметров μ, β , обращающуюся в нуль при $\mu = \beta = 0$. Подставив найденное $\gamma(\mu)$ во второе уравнение (2.1), получим уравнение, определяющее β :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi \omega_1^2} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial M} \right)_{M_0} \beta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial M^2} \right)_{M_0} \beta^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 P}{\partial M^3} \right)_{M_0} \beta^3 + \dots \right] + \\ & + \mu R + \mu^2 (\dots) + \beta \gamma \mu (\dots) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Допустим, что коэффициент при μ в первой степени R отличен от нуля. Тогда на основании правила многоугольника Ньютона [6] мы можем сделать следующее заключение: если $(\partial^{k-1} P / \partial M^{k-1})_{M_0} = 0$, $(\partial^k P / \partial M^k)_{M_0} \neq 0$, то (2.2) допускает k аналитических решений относительно дробных степеней параметра $\mu^{1/k}$. При k — нечетном все k решений будут действительными, а при k — четном действительные решения возможны лишь тогда, когда выполнено условие $(\partial^k P / \partial M^k)_{M_0} R < 0$.

Тогда можно сформулировать следующую теорему.

Для того, чтобы система (1.1), где ω_1/ω_2 — иррациональное число, при достаточно малом μ допускала периодическое решение периода $T = (2\pi/\omega_1)(1 + \mu\alpha)$ обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее (1.2), необходимо, чтобы параметры M_0 и α_0 удовлетворяли уравнениям (1.9). Если при этом выполняются условия

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^{k-1} P}{\partial M^{k-1}} \right)_{M_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^k P}{\partial M^k} \right) \neq 0, \\ & \left(\frac{\partial^k P}{\partial M^k} \right)_{M_0} R < 0, \quad k = 2n, \end{aligned}$$

то периодическое решение действительно существует и оно разлагается в ряд по степеням $\mu^{1/k}$.

В случае нечетного k теорема может быть сформулирована таким образом.

Для того, чтобы система (1.1), где ω_1/ω_2 — иррациональное число, при достаточно малом μ допускала периодическое решение периода T , обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее, необходимо, чтобы параметры M_0 и α_0 удовлетворяли уравнениям (1.9). Если при этом выполняются условия

$$\left(\frac{\partial^{k-1} P}{\partial M^{k-1}} \right)_{M_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^k P}{\partial M^k} \right) \neq 0,$$

то периодическое решение действительно существует и оно разлагается в ряд по степеням $\mu^{1/k}$.

3. Полученный результат легко обобщается на случай системы с n степенями свободы.

Рассмотрим квазилинейную автономную систему с n степенями свободы и с постоянным запаздыванием по времени:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \omega_i^2 x_i = \mu F_i[x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, y_1, \dots, y_n, \mu], \\ & y_s = x_s(t - \tau) \quad (i. s = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где F_i — аналитические функции относительно переменных x_i, \dot{x}_i, y_i и μ в области G и при $|\mu| \ll \mu^*$, где $\mu^* > 0$ (μ — малый параметр).

Ищем периодическое решение системы (3.1) периода $T = 2\pi/\omega_1 \times \times (1 + \mu\alpha)$, которое при $\mu = 0$ обращается в порождающее:

$$x_i^0 = M_0 \cos \frac{2\pi}{\omega_1} t, \quad \dot{x}_i^0 = 0 \quad (i = 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

при условии, что все ω_i несоизмеримы и разрешающее уравнение имеет корень кратности k . Тогда, повторяя выше приведенные рассуждения, можно сформулировать такую теорему: для того, чтобы система (3.1), где все ω_i несоизмеримы, при достаточно малом μ допускала периодическое решение периода T , обращающееся в порождающее (3.2), необходимо, чтобы параметры M_0 и α_0 удовлетворяли уравнениям (1.9). Если при этом выполняются условия

$$\left(\frac{\partial^{k-1} P^*}{\partial M^{k-1}} \right)_{M_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^k P^*}{\partial M^k} \right)_{M_0} \neq 0, \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{\partial^k P^*}{\partial M^k} \right)_{M_0} R^* < 0, \quad k = 2n, \quad (3.4)$$

где

$$P^* = \int_0^{2\pi} F_1[x_1^0, \dots, x_n^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dots, \dot{x}_n^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau\omega_1), \dots, \dots, x_n^0(t_1 - \tau\omega_1), 0] \sin t_1 dt_1,$$

$$R^* = \frac{1}{\pi\omega_1^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i} \right)_0 x_i^{(1)} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i(t_1 - \tau\omega_1)} \right)_0 x_i^{(1)}(t_1 - \tau\omega_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_1 \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}_i} \right)_0 \dot{x}_i^{(1)} + \omega_1 \tau \alpha_0 \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i(t_1 - \tau\omega_1)} \right)_0 \frac{dx_i^0(t_1 - \tau\omega_1)}{dt_1} \right] + \left(\frac{dF_1}{d\mu} \right)_0 \right\} \sin t_1 dt_1 - \\ - \frac{2\alpha_0}{\pi} \int_0^{2\pi} x_1^{(1)} \sin t_1 dt_1 + \frac{2\alpha_0}{\pi} \int_0^{2\pi} F_1[x_1^0, \dots, x_n^0, \dot{x}_1^0 \omega_1, \dots, \dot{x}_n^0 \omega_1, x_1^0(t_1 - \tau\omega_1), \dots, \dots, x_n^0(t_1 - \tau\omega_1), 0] \sin t_1 dt_1,$$

то периодическое решение действительно существует и оно разлагается в ряд по степеням $\mu^{1/k}$.

В случае нечетного k теорему можно сформулировать следующим образом: для того, чтобы система (3.1), где все ω_i несоизмеримы, при достаточно малом μ допускала периодическое решение периода T , обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее (3.2), необходимо, чтобы параметры M_0 и α_0 удовлетворяли уравнениям (1.9). Если при этом выполняются условия (3.3), то периодическое решение действительно существует и оно разлагается в ряд по степеням $\mu^{1/k}$.

Заметим, что расчет периодического решения системы и поправки к периоду в случае кратного корня разрешающего уравнения можно осуществить либо непосредственным разложением в ряд по дробным степеням $\mu^{1/k}$ (согласно теореме), либо разложением по целым степеням μ , пользуясь методом вспомогательных систем, с подстановкой β и γ , определенных из уравнения (2.1).

Пример. Вычислим периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu(\alpha_1 + \alpha_2 x \dot{x} + \alpha_3 x^4 + \alpha_4 x^6) \frac{dx}{dt} + \mu x^3(t - \tau) \quad (4.1)$$

в особом случае, когда M_0 является двухкратным корнем уравнения $P(M_0) = 0$. Сделаем замену переменной $t = t_1(1 + \mu h)$; тогда уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt_1^2} + x &= \mu(\alpha_1 + \alpha_2 x \dot{x} + \alpha_3 x^4 + \alpha_4 x^6) \frac{dx}{dt_1} (1 + \mu h) + \\ &+ \mu x^3(t_1 - \tau)(1 + \mu h)^2 - x(2\mu h + \mu^2 h^2); \\ \tau &= \tau'(1 + \mu h). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Найдем прежде всего периодическое решение вспомогательного уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt_1^2} + x &= \mu(\alpha_1 + \alpha_2 x \dot{x} + \alpha_3 x^4 + \alpha_4 x^6) \frac{dx}{dt_1} (1 + \mu h) + \\ &+ \mu x^3(t_1 - \tau)(1 + \mu h)^2 - x(2\mu h + \mu^2 h^2) + W_1 \cos t_1 + W_2 \sin t_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

и постоянные W_1 и W_2 в виде

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots, \\ W_i &= W_i^{(0)} + \mu W_i^{(1)} + \mu^2 W_i^{(2)} + \dots \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Начальные условия для искомых периодических функций зададим так:

$$\begin{aligned} x_0 &= M_0 + \beta, \quad x_i(0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \\ \dot{x}_i(0) &= 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Подставим (4.4) в уравнение (4.3):

$$\frac{d^2x_0}{dt_1^2} + x_0 = W_1^{(0)} \cos t_1 + W_2^{(0)} \sin t_1; \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt_1^2} + x_1 &= (\alpha_1 + \alpha_2 x_0 \dot{x}_0 + \alpha_3 x_0^4 + \alpha_4 x_0^6) \dot{x}_0 - 2hx_0 + \\ &+ x_0^3(t_1 - \tau) + W_1^{(1)} \cos t_1 + W_2^{(1)} \sin t_1; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_2}{dt_1^2} + x_2 &= (\alpha_1 + \alpha_2 x_0 \dot{x}_0 + \alpha_3 x_0^4 + \alpha_4 x_0^6) h \dot{x}_0 + \\ &+ (\alpha_1 + \alpha_2 x_0 \dot{x}_0 + \alpha_4 x_0^6 + \alpha_3 x_0^4) \dot{x}_1 + (\alpha_2 x_0 \dot{x}_1 + \alpha_2 \dot{x}_0 x_1 + \\ &+ 4\alpha_3 x_0^3 x_1 + 6\alpha_4 x_0^5 x_1) \dot{x}_0 - 2hx_1 - h^2 x_0 + \\ &+ 3x_0^2(t_1 - \tau) x_1(t_1 - \tau) + 2hx_0^3(t_1 - \tau) + \\ &+ 3x_0^2(t_1 - \tau) \frac{dx_0(t_1 - \tau)}{dt_1} \tau h + W_1^{(2)} \cos t_1 + W_2^{(2)} \sin t_1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из условий существования периодического решения (4.7) получаем

$$\begin{aligned}
 W_1 = & -\frac{1}{4} \alpha_2 M_0^3 + 2h_0 M_0 - \frac{3}{4} M_0^3 \cos \tau + \beta \left[2h_0 - \frac{3}{4} M_0^2 (\alpha_2 + 3 \cos \tau) \right] + \\
 & + \beta^2 \left[-\frac{3}{2} M_0 (\alpha_2 + 3 \cos \tau) \right] + \beta^3 \left[-\frac{3}{2} (\alpha_2 + 3 \cos \tau) \right] + \\
 & + \mu \left[-\frac{5}{128} \alpha_2^2 M_0^5 + \frac{3}{512} \alpha_3^2 M_0^9 + \frac{93}{32768} \alpha_4^2 M_0^{13} + \frac{69}{8192} \alpha_3 \alpha_4 M_0^{11} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{12} \alpha_1 \alpha_3 M_0^5 + \frac{73}{1024} \alpha_1 \alpha_4 M_0^7 + \frac{3}{64} \alpha_2 M_0^5 \cos \tau + \frac{3}{128} M_0^5 \sin 4\tau - \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{23}{512} \alpha_3 M_0^7 + \frac{165}{4096} \alpha_4 M_0^9 \right) \sin \tau - \frac{3}{2} h_0 M_0^3 \cos \tau - \frac{3}{4} M_0^3 \tau h_0 \sin \tau \right] + \\
 & \quad + \mu \beta (\dots) + \dots ; \\
 W_2 = & \frac{5}{64} \alpha_4 M_0^6 + \frac{1}{8} \alpha_3 M_0^4 + \alpha_1 - \frac{3}{4} M_0^2 \sin \tau + \beta \left[\frac{15}{32} \alpha_4 M_0^5 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \alpha_3 M_0^3 - \frac{3}{2} M_0 \sin \tau \right] + \beta^2 \left[\frac{75}{32} \alpha_4 M_0^4 + \frac{3}{2} \alpha_3 M_0^2 - \frac{3}{2} \sin \tau \right] + \\
 & \quad + \beta^3 \left[\frac{75}{8} \alpha_4 M_0^3 + 3 \alpha_3 M_0 \right] + \dots + \mu \left[\frac{3}{32} \alpha_1 \alpha_2 M_0^3 - \frac{41}{256} \alpha_2 \alpha_3 M_0^7 - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{69}{512} \alpha_2 \alpha_4 M_0^9 + \frac{3}{64} \alpha_2 M_0^5 \sin \tau + \frac{3}{128} M_0^5 \sin 4\tau + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{23}{512} \alpha_3 M_0^7 + \frac{165}{4096} \alpha_4 M_0^9 \right) \cos \tau + \frac{3}{4} M_0^3 \tau h_0 \cos \tau - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{3}{2} h_0 M_0^3 \sin \tau \right] + \mu \beta (\dots) + \dots + \mu \gamma (\dots) + \dots ;
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$h = h_0 + \gamma.$$

Чтобы уравнение (4.1) имело периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, допускала решение $h(\mu)$, $\beta(\mu)$. Полагая в (4.8) $\beta = \gamma = \mu = 0$ получим систему уравнений для определения M_0 и h_0 :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \alpha_2 M_0^3 - \frac{3}{4} M_0^3 \cos \tau + 2h_0 M_0 = 0; \\
 P(M_0) = & \frac{5}{64} \alpha_4 M_0^6 + \frac{1}{8} \alpha_3 M_0^4 - \frac{3}{4} M_0^2 \sin \tau + \alpha_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Из первого уравнения (4.9) находим

$$h_0 = \frac{1}{8} M_0^2 (\alpha_2 + 3 \cos \tau).$$

Если корень M_0 уравнения $P(M_0) = 0$ имеет вторую кратность, то

$$\left(\frac{\partial P}{\partial M} \right)_{M_0} = \frac{15}{32} \alpha_4 M_0^5 + \frac{1}{2} \alpha_3 M_0^3 - \frac{3}{2} M_0 \sin \tau = 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial M^2} \right)_{M_0} = \frac{75}{32} \alpha_4 M_0^4 + \frac{3}{2} \alpha_3 M_0^2 - \frac{3}{2} \sin \tau \neq 0.$$

Если $M_0 \neq 0$, то

$$M_0^2 = \frac{-8 \alpha_3 + \sqrt{64 \alpha_3^2 + 720 \alpha_4 \sin \tau}}{15}.$$

Следовательно, чтобы это решение было действительным, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$4 \alpha_3^2 + 45 \alpha_4 \sin \tau > 0.$$

В силу приведенной выше теоремы ищем периодическое решение и поправку к периоду в виде

$$x = x_0 + \mu^{1/2} x_1 + \mu x_2 + \dots;$$

$$h = h_0 + \mu^{1/2} h_1 + \mu h_2 + \dots.$$

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, получаем

$$x = M_0 \cos t_1 + \mu^{1/2} M_1 \cos t_1 + \dots;$$

$$\cdot h = \frac{1}{8} M_0^2 (\alpha_2 + 3 \cos \tau) + \frac{1}{4} \mu^{1/2} M_0 M_1 (\alpha_2 - 9 \cos \tau) + \dots,$$

где

$$M_1 = M_0 \left[\frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} - \frac{\alpha_2 \alpha_4 M_0^4}{64} - \frac{\alpha_2 \alpha_5 M_0^6}{128} + \frac{3 M_0^2}{16} \left(\alpha_2 \sin \tau + \frac{1}{2} \sin 4 \tau \right) + \left(\frac{23}{128} \alpha_3 M_0^4 + \frac{165}{1024} \alpha_4 M_0^6 \right) \cos \tau \right]^{1/2} \left(\frac{75}{16} \alpha_4 M_0^4 + 3 \alpha_3 M_0^2 - 3 \sin \tau \right)^{-1/2}.$$

Продолжая расчет таким образом, можно определить периодическое решение уравнения и поправку к периоду с любой степенью точности.

Автор признателен С. Н. Шиманову за ценные советы при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андronov и А. А. Витт, ЖТФ, 4, 122 (1934).
2. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
3. С. Н. Шиманов, ПММ, 23, 836 (1959).
4. С. Н. Шиманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 456 (1960).
5. Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, Гостехиздат, М., 1955.
6. В. Д. Мак-Миллан, Динамика твердого тела, ИЛ, М., 1951.

Уральский государственный университет

Поступила в редакцию
9 июля 1963 г.,
после переработки
6 апреля 1964 г.

PERIODICAL OSCILLATIONS OF QUASI-LINEAR AUTONOMIC DELAY SYSTEMS

K. M. Tsoj

The conditions are determined of the periodical solutions existence of the quasi-linear autonomic systems with two degrees of freedom and with a constant delay in time for one particular class of the autonomic systems in the case of multiple roots of the characteristic equations. For obtaining these conditions together with the initial system an additional one is considered for which there exists a periodical solution being analytic function of μ . A practical method is given of calculation of periodical solutions in the case of multiple roots.

УДК 621.142.65

БЕЗДИОДНАЯ ФЕРРИТОВАЯ ЯЧЕЙКА С МОСТОВОЙ СВЯЗЬЮ

B. A. Попов

Приведены результаты исследования двухтактной бездиодной ферритовой ячейки с мостовой связью. Работа схемы рассмотрена на примере сдвигающего регистра.

1. Идея создания переключающих схем на ферритах с прямоугольной петлей гистерезиса (ППГ) без полупроводников в контурах связи не является новой (см. [1–3]). Отсутствие полупроводников значительно повышает надежность устройств дискретного действия, реализованных на ферритах с ППГ.

Полупроводники в контурах связи переключающих схем на ферритах с ППГ выполняют функции ключей, обеспечивая направленное продвижение информации. Аналогичные свойства обнаруживает и магнитный сердечник с прямоугольной петлей гистерезиса. Полное сопротивление обмотки сердечника, находящегося в одном из устойчивых состояний, имеет существенно различные значения в зависимости от величины и направления тока, протекающего по обмотке. Если протекающий по обмотке ток создает поле, переключающее сердечник в другое устойчивое состояние, сопротивление обмотки этому току сравнительно велико — ключ разомкнут. Если же происходит намагничивание сердечника по пологому участку петли гистерезиса, сопротивление обмотки значительно меньше — ключ замкнут. Нелинейность зависимости полного сопротивления обмотки магнитного сердечника с ППГ от направления протекающего по этой обмотке тока дает возможность (при соответствующем выборе типов сердечников и витковых данных обмоток) заменить полупроводниковые вентили в контурах связи магнитными сердечниками.

2. Принципиальная схема двух разрядов регистра сдвига на основе мостовой бездиодной ячейки приведена на рис. 1. Схема построена по аналогии с феррит-диодной мостовой ячейкой. Назовем сердечники, посредством которых осуществляется хранение и передача информации,

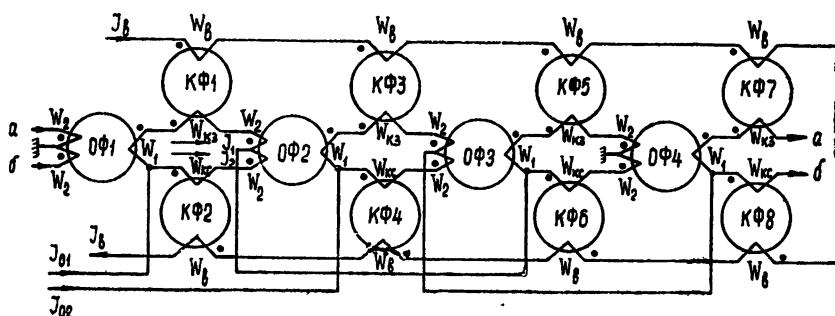


Рис. 1. Двухразрядный сдвигающий регистр на основе мостовой бездиодной ячейки.

основными (ОФ), а сердечники, служащие для ослабления ложных потоков информации, ключевыми (КФ). Рассмотрим процесс передачи состояния «1» с сердечника ОФ1 на сердечник ОФ3 — сдвиг на один разряд. Исходное состояние элементов схемы соответствует моменту t_1 таблицы 1 и диаграммы импульсного питания ячейки рис. 2.

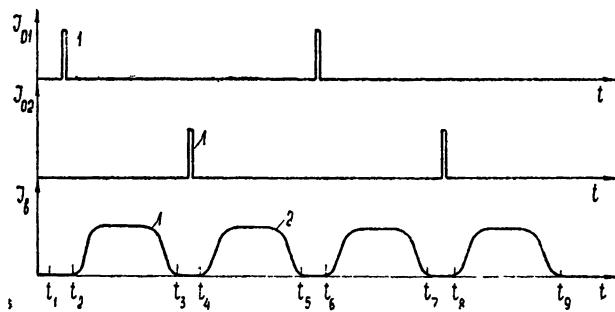


Рис. 2. Временная диаграмма импульсного питания мостовой бездиодной ячейки.

При действии тактового импульса 1 последовательности I_{01} в плечах контура связи ОФ1—ОФ2 протекают составляющие тактового тока I_1 и I_2 . Сердечник ОФ1 переводится в состояние «0» полем тока I_1 . Состояния сердечников КФ1 и КФ2 не изменяются. Наличие в верхнем плече контура связи ОФ1—ОФ2 противоэдс, возникающей при переключении сердечника ОФ1, обусловливает неравенство составляющих тактового тока, причем $I_2 > I_1$. В сердечнике ОФ2 возникает поле разностного тока, стремящееся перевести этот сердечник в состояние «1». При правильном соотношении чисел витков обмоток w_1 и w_2 сердечник ОФ2 переводится в состояние «1». При этом на его выходной обмотке w_1 наводится импульс эдс. В контуре связи ОФ2—ОФ3 протекает размагничивающий ток — ток ложного считывания $I_{л.c}$, препятствующий переключению сердечника ОФ2. За счет переключения полем размагничивающего тока ключевого сердечника КФ4 обеспечивается достаточно высокое входное сопротивление контура связи ОФ2—ОФ3 по отношению к обмотке w_1 сердечника ОФ2, и размагничивающий ток не превышает заданной величины. Состояния сердечников схемы после действия импульса 1 последовательности I_{01} соответствуют строке t_2 таблицы 1.

Таблица 1

Для восстановления работоспособности сердечника КФ4 следует возвратить его в исходное состояние «1» без влияния на состояния других сердечников. Это может быть сделано, если сердечник КФ4 будет переключаться достаточно медленно полем импульса тока с пологим передним фронтом (импульс 1 последовательности I_1 на диаграмме рис. 2). Передача состояния «1» с сердечника ОФ2 на сердечник ОФ3 происходит при действии на схему импульса 1 последовательности I_{02} аналогично передаче ОФ1—ОФ2. Однако при переключении сердечника ОФ2 на его входной обмотке $2w_2$ наводится импульсная эдс, вызывающая протекание тока в контуре связи ОФ2—ОФ1. Направление этого тока таково, что возникает опасность ложного переключения сердечника ОФ1; это означало бы появление обратного потока информации. Ограничение величины тока ложной записи осуществляется за счет переключения полем этого тока ключевого сердечника КФ1. Затем сердечник КФ1 вместе с сердечником КФ6, предотвращавшим размагничивание сердечника ОФ3, возвращается в исходное состояние импульсом 2 последовательности I_1 .

Возможен также случай, когда запись на сердечник ОФ2 и считывание с сердечника ОФ3 происходит одновременно. В этом случае в контуре связи ОФ2—ОФ3 будут действовать две эдс с разными знаками. Расчет мостовой ячейки показывает, что $w_1 > 2w_2$. Следовательно, амплитуда эдс на обмотке w_1 сердечника ОФ2 будет больше амплитуды эдс на обмотке $2w_2$ сердечника ОФ3. В контуре связи появится ток ложного считывания, подавление которого произойдет за счет переключения сердечника КФ4.

Возможен, наконец, такой случай, когда в момент прихода тактового импульса все основные сердечники находятся в состоянии «0». В этом случае действие тактового импульса не приведет к изменению состояний как основных, так и ключевых сердечников, так как составляющие тактового тока в плечах мостовой схемы будут равны по величине. При рассмотрении работы сдвигающего регистра рис. 1 следует иметь в виду, что моменты времени t_i , таблицы 1 и диаграммы рис. 2 находятся в однозначном соответствии.

Таким образом, при правильном выборе элементов схемы и их обмоточных данных мостовая близиодная ячейка осуществляет направленную передачу информации. Для работы ячейки необходимо двухтактное импульсное питание, а также импульсы тока, возвращающие ключевые сердечники в исходное состояние. Импульсы возврата могут быть заменены постоянным подмагничиванием, что следует учитывать при расчете ячейки.

Нормальная работа схемы возможна лишь при правильном выборе типов основных и ключевых сердечников. Рассмотрим соображения, диктующие такой выбор.

1) Выбор типа ключевых сердечников. Ключевые сердечники выбираются по следующим параметрам: а) величине поля старта, б) величине остаточного магнитного потока, в) величине импульсного коэффициента прямоугольности.

Простые рассуждения показывают, что величина поля старта ключевых сердечников должна быть возможно меньше. Чем меньше поле старта, тем меньше, при прочих равных условиях, величина ложного тока, при котором произойдет срабатывание ключевого сердечника. Целесообразно поэтому применять в качестве ключевых низкокоэрцитивные ферриты. Целесообразно также применять сердечники с большим значением остаточного магнитного потока и с петлей гистерезиса, близкой к прямоугольной. Это дает возможность подавить ложные потоки информации при малых перепадах ложных токов. Чем больше

величина импульсного коэффициента прямоугольности, тем ближе характеристика сердечника к характеристике идеального вентиля.

2) Выбор типа основных сердечников. Величина поля старта основных сердечников определяется противоречивыми соображениями устойчивости и экономичности. Для получения достаточной устойчивости поле старта основных сердечников должно в 3–5 раз превышать поле старта ключевых сердечников. Чем меньше величина остаточного магнитного потока основных ферритов, тем большее быстродействие может быть получено. Величина импульсного коэффициента прямоугольности не имеет существенного значения при выборе типа основных сердечников.

С учетом высказанных соображений можно рекомендовать в качестве основных сердечники типов ВТ-1, ВТ-2, К-28, а в качестве ключевых — К-272, ВТ-5, К-132, ПП-24.

3. Нелинейность цепей, содержащих ферриты с ППГ, делает точный расчет громоздким и непригодным в инженерной практике. Как показывает экспериментальная проверка, возможно создание упрощенных расчетных схем, позволяющих достаточно точно рассчитывать все параметры ячейки. Основным допущением, принимаемым при расчете мостовой бездиодной схемы, является замена обмотки сердечника активным сопротивлением. Такое допущение не является слишком грубым, так как основная доля энергии при переключении феррита с ППГ рассеивается в виде тепла. С учетом указанного допущения составлены расчетные схемы рис. 3. Условимся все рассуждения проводить для контура связи ОФ2—ОФ3. Расчетная схема рис. 3а отражает процесс передачи состояния «1» с сердечника ОФ2 на сердечник ОФ3. В этой схеме e_1 — противоэдс на обмотке w_1 сердечника ОФ2 при переключении его полем тока I_1 в состояние «0», e_2 — падение напряжения на активном сопротивлении обмотки w_{k3} сердечника КФ3, e_3 — противоэдс на обмотке w_2 сердечника ОФ3 при переключении его полем разностного тока в состояние «1», e_4 — падение напряжения на активном сопротивлении обмотки w_{k4} сердечника КФ4.

Расчетная схема рис. 3б отражает процесс подавления тока ложного считывания в контуре связи ОФ2—ОФ3 при передаче состояния «1» с сердечника ОФ1 на сердечник ОФ2. Здесь e_1 — эдс на обмотке w_1 сердечника ОФ2 при переключении его полем разностного тока в состояние «1», e_2 — падение напряжения на активном сопротивлении обмотки w_{k3} сердечника КФ3, e_3 — падение напряжения на активном сопротивлении обмотки $2w_2$ сердечника ОФ3, e_4 — противоэдс на обмотке w_{k4} сердечника КФ4 при переключении его полем тока ложного считывания.

Расчетная схема рис. 3в отражает процесс подавления тока ложной записи при передаче состояния «1» с сердечника ОФ3 на сердечник ОФ4. В схеме рис. 3в e_1 — эдс на обмотке $2w_2$ сердечника ОФ3 при переключении его полем тока I_1 в состояние «0», e_2 — падение напряжения на активном сопротивлении обмотки w_{k4} сердечника КФ4, e_3 — падение напряжения на активном сопротивлении обмотки w_1 сердечника ОФ2,

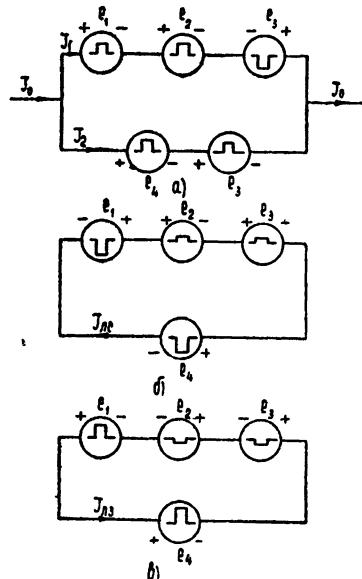


Рис. 3. Расчетные схемы мостовой бездиодной ячейки.

e_4 — противоэдс на обмотке $w_{\text{кз}}$ сердечника КФЗ при переключении его полем тока ложной записи.

Для схем рис. 3б, в справедливы соотношения

$$e_4 \gg e_2 + e_3, \quad (1)$$

$$e_1 = e_4. \quad (2)$$

На основе принятых расчетных схем с учетом 1, 2 получим следующие уравнения:

$$\alpha_{\text{п}} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{K_3 K_{\text{н}} (K_{\text{р}} \varepsilon + 2) - 2}{K_{\text{н}} - 1}; \quad (3)$$

$$\alpha_{\text{кз}} = \frac{w_{\text{кз}}}{w_1} = A + \sqrt{A^2 + B}, \quad (4)$$

где

$$A = \frac{F'_0}{K_3 K_{\text{н}} (K_{\text{р}} - 1) F_0};$$

$$B = \frac{\rho (K_3 K_{\text{н}} - 1)}{\rho' (K_{\text{р}} - 1) K_3 K_{\text{н}}};$$

$$\alpha_{\text{кз}} = \frac{w_{\text{кз}}}{w_1} = C + \sqrt{C^2 + D}; \quad (5)$$

$$C = F'_0 / F_1;$$

$$D = \frac{\rho F_0 (K_{\text{н}} - 1)}{\rho' F_1};$$

$$I_0 = \frac{K_{\text{н}} F_0}{w_2} \left[\frac{2}{\alpha_{\text{п}}} + K_3 K_{\text{р}} \right]. \quad (6)$$

В соотношениях (3) — (6) F_0 — поле старта, F_1 — поле, соответствующее нижнему колену петли гистерезиса, F_3 — амплитуда поля записи, $F_{\text{сч}}$ — амплитуда поля считывания, $K_{\text{н}} = F_{\text{сч}}/F_0$ — коэффициент поля; $K_3 = F_3/F_{\text{сч}}$ — коэффициент запаса, $K_{\text{р}}$ — коэффициент размагничивания током ложного считывания, ε — параметр бездиодной схемы

$\varepsilon = \frac{R_{\text{c}}}{\rho w_2^2}$, R_{c} — активное сопротивление плеча мостовой схемы, ρ — при-

веденное сопротивление обмотки сердечника при переключении, I_0 — амплитуда тактового тока. Параметры, отмеченные штрихом, относятся к ключевым сердечникам.

Таблица 2

Обозначение сердечника	Число витков					Примечания
	w_1	w_2	$w_{\text{кз}}$	$w_{\text{кз}}$	$w_{\text{в}}$	
ОФ	11	3	—	—	—	Основные ферриты BT-203×Ø2,2×1
КФ2 n—1	—	—	—	16	1	Ключевые ферриты К-27203×Ø2×1,4
КФ2 n	—	—	21	—	1	

Экспериментальная проверка нескольких возможных вариантов ячейки показала достаточную точность использованного метода расчета. Для ячейки с данными по таблице 2 максимальная частота следования тактовых импульсов составляет 5000 гц, минимальная амплитуда тактового тока — 0,5 а. При амплитуде тактового тока 1 а допустимые колебания амплитуды тока возврата составляют $(0,8 \pm 1,4)$ а. Проверка двадцатиразрядного сдвигающего регистра показала, что переходные характеристики ячеек практически идентичны, и зона устойчивости устройства не зависит от количества последовательно соединенных ячеек.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Russell, IRE Conv. Rec., 5, 106 (1957).
2. S. B. Jochelson, IRE Wescon Conv. Rec., 4, 82 (1960).
3. Э. А. Демин, Л. А. Чиненков, Регистры сдвига на ферритовых сердечниках в радиотехнике, Госэнергоиздат, М., 1960.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступила в редакцию
24 мая 1963 г.

FERRITE CELL WITH BRIDGE COUPLING WITHOUT DIOD

V. A. Popov

Investigation results have been given of push-pull diodless ferrite cell with bridge coupling. The circuit operation has been considered by an example of a shifting register.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.371.166 . 551.510

**ИЗМЕРЕНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРЕ НА ВЫСОТЕ
3200 м НАД УРОВНЕМ МОРЯ НА ДЛИНЕ ВОЛНЫ 1,6 см**

С. А. Каменская, К. С. Станкевич

Измерение поглощения на длине волн 1,6 см проводилось по собственному тепловому радиоизлучению атмосферы на высоте 3200 м над уровнем моря с целью получения высотных характеристик поглощения. Для этого в интервале высот от 30° до 5° снималось вертикальное распределение температуры радиоизлучения атмосферы. Радиотелескоп имел диаграмму направленности шириной 36' по уровню половинной мощности и чувствительность порядка нескольких градусов при постоянной времени 1 сек.

Яркостная температура радиоизлучения атмосферы определялась путем сравнения антенных температур при приеме атмосферы и радиоизлучения абсолютно черной горы, находившейся во фраунгоферовой зоне антенны и закрывавшей весь главный лепесток диаграммы Чернота радиоизлучения горы проверялась по радиоизлучению диска из поглащающего материала с угловыми размерами 35', также находившимся во фраунгоферовой зоне.

На волне $\lambda = 1,6 \text{ см}$ поглощение происходит в кислороде и водяном паре; для высот $\varphi > 7^\circ$ над горизонтом параметр Γ'

$$\Gamma' \equiv \chi_{01} H_1 + 1,04 \chi_{02} H_2 = \frac{1,1 n_a(\varphi)/n_r}{\operatorname{cosec} \varphi - \operatorname{cosec} \varphi_0},$$

где $\chi_{01} H_1$ и $\chi_{02} H_2$ — поглощение в кислороде и водяном паре в зените, $n_a(\varphi)$ и n_r — температуры антенны от радиоизлучения атмосферы на высоте φ и горы, φ_0 — высота, на которой фиксируется нулевой отсчет при приеме радиоизлучения горы, $H_1 = 5 \text{ км}$ и $H_2 = 1,8 \text{ км}$ — эффективные высоты в кислороде и водяном паре. Поскольку поглощение в водяном паре пропорционально абсолютной влажности $\rho (\chi_{02} = a\rho)$, то, экстраполируя экспериментальные значения Γ' к значениям $\rho = 0$, можно получить поглощение в кислороде $\chi_{01} H_1$.

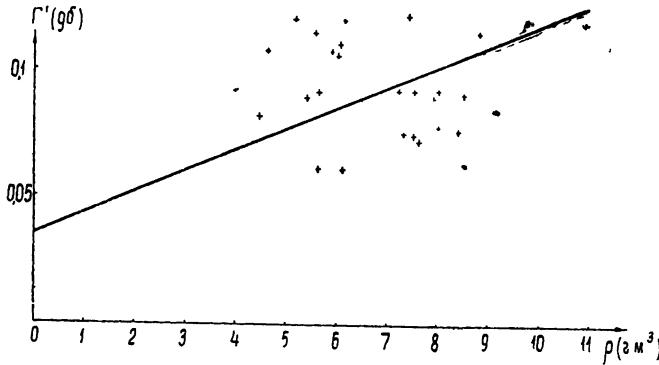


Рис. 1.

На графике рис. 1 отложена зависимость Γ' от абсолютной влажности. Измерения влажности производились в приземном слое во время снятия вертикального распределения температуры радиоизлучения атмосферы. В весенне время в горной местности распределение влажности, в особенности в приземном слое, весьма нестационар-

но и может существенно отличаться от экспоненциального. Это явилось основной причиной большого разброса точек на графике при данном значении влажности.

В результате проведенных исследований получена величина полного поглощения в кислороде и водяном паре для условий стандартной атмосферы ($\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$) в зените, равная $\Gamma = (0,09 \pm 0,02) \text{ дБ}$.

Полученная на графике рис. 1 при экстраполяции к $\rho = 0$ величина вертикального поглощения в кислороде $\omega_0 H_1 = 0,035 \pm 0,015 \text{ дБ}$; для поглощения в водяном паре коэффициент $a = (2,5 \div 8) \cdot 10^{-3} \text{ дБ} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{км}^{-1} \cdot \text{г}^{-1}$ (наиболее вероятное значение $3,7 \cdot 10^{-3} \text{ дБ} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{км}^{-1} \text{ г}^{-1}$).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, 984 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 апреля 1964 г.

УДК 621.371.123

О НАПРАВЛЕНИИ ЛУЧА И ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

К. А. Барсуков и В. Л. Гинзбург

Рассмотрим пакет волн (импульс), распространяющийся в произвольной линейной среде без внешних источников поля. Тогда поле импульса можно представить в виде разложения в интеграл Фурье по «нормальным волнам», распространяющимся в данной среде, т. е. волнам типа $E_i = E_{0i} \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_i(\mathbf{k})t]$. Здесь индекс i характеризует тип нормальной волны (обыкновенная волна, необыкновенная волна и т. п.), а зависимость $\omega_i(\mathbf{k})$ определяется дисперсионным соотношением (см., например, [7]). Итак, после импульса

$$E(\mathbf{r}, t) = \int g(\mathbf{k}) \exp\{i[\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t]\} d\mathbf{k}, \quad (1)$$

где для простоты индекс i считается фиксированным и поэтому опущен.

Будем теперь считать импульс квазимохроматическим, т. е. предполагать, что функция $g(\mathbf{k})$ имеет острый максимум при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. Тогда, полагая $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}$ и $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + (d\omega/d\mathbf{k})\mathbf{q}$ и тем самым ограничиваясь членами первого порядка по \mathbf{q} , получаем

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= \exp[i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)] \int g(\mathbf{q}) \exp\left[i\left(\mathbf{r} - \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} t\right)\mathbf{q}\right] d\mathbf{q} = \\ &= \exp[i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)] A\left(\mathbf{r} - \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} t\right), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_0 = \omega(\mathbf{k}_0)$ и $d\omega/d\mathbf{k} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega$ берется при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$.

Для прозрачной среды вектор \mathbf{k} и частоту ω можно одновременно считать вещественными величинами. В этом случае из (2) ясно, что в рассматриваемом приближении импульс перемещается как целое (т. е. без искажений) с групповой скоростью

$$v_{gr} = d\omega/d\mathbf{k}. \quad (3)$$

В том же приближении, как можно показать [2–4], $W v_{gr} = S$, где W и S — средние по высокой частоте плотность энергии и поток энергии (при отсутствии пространственной дисперсии $S = S_0$ есть среднее значение вектора Пойнтинга).

Все сказанное, конечно, известно и было повторено для того, чтобы ясно сформировать интересующий нас вопрос. Именно, как движется импульс в непрозрачной, например, поглощающей среде? Если среда изотропна, то уже из соображений симметрии ясно, что распространяющийся в ней симметричный импульс будет двигаться в направлении \mathbf{k}_0 . В этом случае, таким образом, речь идет лишь о нахождении скорости перемещения импульса. В таком постановке вопрос уже неоднократно обсуждался (см., например, [1, 5–7]). Общий вывод при этом состоит в том, что в непрозрачной среде импульс искажается и тем самым понятие о скорости импульса как целого, вооб-

ше говоря, введено быть не может. Но как обстоит дело в анизотропной среде, где при отсутствии поглощения направление \mathbf{v}_{rp} есть направление луча? Насколько нам удалось выяснить, этот вопрос для непрозрачной среды в литературе не рассмотрен, хотя и представляется достаточно важным.

Поток энергии S может быть вычислен и в поглощающей среде: поэтому можно было предполагать, что направление луча в этом случае есть направление S . Кроме того, существуют другие векторы (например, $\text{Re}(\mathbf{d}\omega/d\mathbf{k})$), с которыми можно было бы надеяться связать направление луча. Можно, однако, убедиться в том, что никакого «универсального» направления луча в поглощающей среде вообще не существует.

В соответствии с постановкой задачи, встречающейся в оптике и в теории распространения радиоволн, будем считать частоту ω всегда вещественной. Тогда в непрозрачной среде вектор \mathbf{k} , а вообще говоря, и вектор $d\omega/d\mathbf{k}$ оказываются комплексными. Это обстоятельство, однако, не препятствует использованию выражений (1) и (2), если только уточнить область интегрирования и считать, что функция A существует и при рассматриваемых комплексных значениях $d\omega/d\mathbf{k}$. При корректной в физическом отношении постановке задачи в соблюдении соответствующих математических требований [8] сомневаться не приходится (см. также ниже); таким образом, результат (2) относится и к непрозрачной среде. Однако и в этом случае величины r и t , очевидно, остаются вещественными, а значит, при комплексном $d\omega/d\mathbf{k}$ импульс не будет перемещаться как целое.

В самом деле, перемещение импульса как целого означает, что в некоторой точке r и в любой другой точке $r' = r + (d\omega/d\mathbf{k})T$ функция A совершенно одинаковым образом изменяется во времени, если только сдвинуть начало отсчета времени на интервал T . При комплексном $d\omega/d\mathbf{k}$, очевидно, точки r' также комплексны, т. е. при перемещении в обычном пространстве функция A изменяется вместе с тем, в рассматриваемом приближении* формула (2) дает полный ответ на вопрос о распространении импульса. Для иллюстрации этого утверждения обратимся к двум более конкретным задачам.

Рассмотрим распространение одномерного квазимохроматического импульса (см. [1, 5])

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] \int g(\Omega) \exp\left[i\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right)\Omega\right] d\Omega = \\ &= \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)] A\left(t - \frac{dk}{d\omega} z\right) \end{aligned} \quad (4)$$

в случае, когда

$$A(\xi) = A_0 e^{-\alpha \xi^2} \quad (\alpha > 0), \quad g(\Omega) = \frac{A_0}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\Omega^2/4\alpha},$$

$$k = (\omega/c) \tilde{n}(\omega), \quad \tilde{n} = n + ix.$$

Формула (4) сразу же дает следующее выражение для $E(z, t)$:

$$E(z, t) = A_0 \exp\left[-\alpha\left(\frac{dk}{d\omega} z - t\right)^2 + i(k_0 z - \omega_0 t)\right]. \quad (5)$$

При наличии поглощения форма импульса с расстоянием искажается и говорить о скорости импульса как целого нельзя. Можно, однако, найти некоторую эффективную групповую скорость, с которой распространяется точка максимума функции $|E(z, t)|$. Для этой цели фиксируем z и находим время t_m , отвечающее условию $\partial|E|/\partial t = 0$. Легко видеть, что в случае (5) максимум амплитуды $|E|$ перемещается со скоростью $z/t_m = c/[d(\omega n)/d\omega]$. При несколько иной постановке вопроса, фиксируя t и находит положение максимума импульса z_m , видим, что в случае (5) этот максимум перемещается со скоростью

$$\frac{dz_m}{dt} = c \left\{ \frac{d(\omega n)}{d\omega} - \left[\frac{d(\omega n)}{d\omega} \right]^2 \left[\frac{d(\omega n)}{d\omega} \right]^{-2} \right\}^{-1}. \quad (6)$$

Из (5) ясна вместе с тем неприменимость полученных выражений для z/t_m и dz_m/dt при достаточно больших $[d(\omega n)/d\omega] z$, что связано с непригодностью в таких условиях исходного приближения (2).

* Речь идет об ограничении при переходе от (1) к (2) членами порядка q . При учете членов порядка q^2 импульс расплывается уже в прозрачной среде (см., например, [1], § 21). Такое расплывание, однако, определяется другими параметрами, чем в случае влияния поглощения.

В качестве второй задачи рассмотрим падение на анизотропную поглощающую пластинку, занимающую область $0 < z < l$, монохроматического импульса (пучка) света [9]. Падение считаем нормальным, т. е. полагаем «несущий» волновой вектор $\mathbf{k}_0 = (\omega/c) \tilde{n}(\omega, 0) s_0$, $s_0 = \{0, 0, 1\}$ в то время, как $\mathbf{k} = (\omega/c) \tilde{n}(\omega, s)$, $s = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Считая импульс большим по сравнению с длиной волны, имеем

$$\begin{aligned} E_l(r, t) = \exp[i(k_0 z - \omega t)] \int g_l(\alpha, \beta) \exp\left\{i \frac{\omega}{c} \left[\left(\tilde{n}x + \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \alpha} z \right)_{\alpha=0} + \right.\right. \\ \left. \left. + \left(\tilde{ny} + \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \beta} z \right)_{\beta=0} \right] \right\} d\alpha d\beta = \exp[i(k_0 z - \omega t)] \times \\ \times A_l \left[x + \left(\frac{1}{n} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} z, \quad y + \left(\frac{1}{n} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \beta} \right)_{\beta=0} z \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Если функция $g(\alpha, \beta)$ известна и удовлетворяет в физическом отношении вполне естественным математическим условиям [8], то выражение (7) в пределах применимости приближения типа (2) можно использовать для получения ответа на любой вопрос, возникающий в эксперименте. Например, если в качестве $A_l(\xi, \eta)$ выбрать функцию

$$A_l(\xi, \eta) = A_{0l} e^{-a(\xi^2 + \eta^2)} \quad (a > 0), \quad (8)$$

то, согласно (7), сразу же находим $E_l(r, t)$ при $z = l$, а максимум интенсивности определим из условий

$$\frac{\partial |A_l|}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial |A_l|}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Направлением луча при этом естественно назвать прямую, соединяющую точку $x = y = z = 0$ и точку $x = x_m$, $y = y_m$, $z = l$, отвечающую максимуму A_l . Значение x_m и y_m нетрудно найти из формул (7) — (9):

$$\begin{aligned} x_m = - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} l = - \left(\frac{1}{n} \frac{\partial |\tilde{n}|}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} l; \\ y_m = - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{n} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \beta} \right)_{\beta=0} l = - \left(\frac{1}{n} \frac{\partial |\tilde{n}|}{\partial \beta} \right)_{\beta=0} l; \\ \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} / l, \end{aligned} \quad (10)$$

где φ — угол между «лучом» и вектором \mathbf{k}_0 . При вещественном n формулы (10) переходят в известные для прозрачной среды выражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 17, 930 (1947).
3. М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 26, 680 (1955).
4. Б. Н. Гершман и В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 31 (1962).
5. L. Brillouin, Wave propagation and group velocity, Academic Press, 1960.
6. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 27, 2506 (1957).
7. В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 74 (1961).
8. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М., 1948.
9. В. М. Агранович и В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, изд. Наука; М., 1965.

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

A. Гайлитис и B. N. Цытович

Впервые вопрос в трансформации продольных волн в поперечные рассматривался в [1] (см также [2, 3]). Эффекты нелинейного взаимодействия продольных волн с продольными рассматривались в ряде работ [4–8], [12], при этом, однако, не анализировались нелинейные эффекты взаимодействия продольных волн с поперечными. Цель настоящей работы показать, что нелинейное взаимодействие продольных волн с поперечными может быть значительным и в ряде случаев более существенно, нежели взаимодействия продольных волн между собой.

Ниже рассматривается нелинейное взаимодействие плазменных волн как поперечных, так и продольных с частотами, близкими к плазменной частоте лэнгмюровских колебаний в случае изотропной плазмы*. Интерес к этому вопросу обусловлен тем, что для этих частот нелинейные эффекты перекачки по спектру и трансформации продольных волн в поперечные и наоборот происходят в основном на тепловых частотах плазмы. Процессом, обуславливающим нелинейные эффекты, является индуцированное рассеяние. Заметим, что при расчете сечения рассеяния необходимо учитывать компенсационные эффекты, возникающие из-за поляризационного экранирования поля рассеивающегося заряда. Физическая причина такой компенсации была выявлена в работе авторов [10]**, она состоит в том, что наряду с рассеянием возможен эффект переходного излучения на неоднородностях, создаваемых плазменными волнами, причем существенна интерференция обоих излучений.

С учетом интерференционных эффектов вероятность рассеяния продольной волны ($\omega_1(x_1, x_2)$, x_1) на частице с импульсом p ($v = p/\epsilon$; $\epsilon = \sqrt{p^2 + m^2}$; $\hbar = c = 1$) с превращением в поперечную ($\omega_2(x_2)$, x_2) имеет вид [1]

$$w_p^{lt}(x_1, x_2) = \frac{32\pi^3 e^4}{m_e^2} \frac{|[x_2 \beta^t]|^2}{x_1^2 x_2^2} \frac{\delta(\omega_1 - \omega_2 - x_1 v + x_2 v)}{(\partial/\partial \omega_2) [\omega_2^2 \varepsilon^t(\omega_2, x_2)] (\partial/\partial \omega_1) \varepsilon^l(\omega_1, x_1)}, \quad (1)$$

где

$$\beta^t = \frac{\sqrt{1 - \sigma^2}}{(\omega_2 - x_2 v)^2} \left\{ v [(\omega_1 x_2) - \omega_2 (x_1 v)] + x_1 (\omega_2 - x_2 v) \right\} + \quad (2)$$

$$+ \omega_0^2 \int \frac{u dp}{x_2 u - \omega_2} \left[\left(x_1 \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{1}{[(\omega_2 - x_1 u) - \omega_2 + \omega_1]} \left(\alpha' \frac{\partial}{\partial u} \right) + \left(\alpha' \frac{\partial}{\partial u} \right) \frac{1}{x_1 u - \omega_1} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial u} \right) \right] f;$$

$$\alpha' = \left(1 - \frac{x_2 v - x_1 v}{\omega_2 - \omega_1} \right) \alpha - \frac{x_2 - x_1}{\omega_2 - \omega_1} (\alpha v);$$

$$\alpha = \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2 \varepsilon^l(\omega_2 - \omega_1, x_2 - x_1)} - \frac{(\omega_2 - \omega_1) [v - (\omega_2 - \omega_1)(x_2 - x_1)/(x_2 - x_1)^2]}{(x_2 - x_1)^2 - (\omega_2 - \omega_1)^2 \varepsilon^t(\omega_2 - \omega_1, x_2 - x_1)}, \quad (3)$$

причем f — функция распределения частиц плазмы, нормированная на единицу: $\int f d\mathbf{p} = 1$, ε^l и ε^t — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости. Вероятность излучения двух квантов (продольного и поперечного) получится из (1) — (3) заменой $\omega_1 \rightarrow -\omega_1$, $x_1 \rightarrow -x_1$. В частном случае надтепловых частиц и нерелятивистских фазовых скоростей волн из (1), (2) следует результат [10]. В интересующем нас здесь случае тепловых частиц ($V_{T_e} \ll 1$), частот ω_2 , близких к ω_0 , и нерелятивистских плазменных волн $|x_1| \gg \omega_0$ получим

$$\alpha' \approx (x_2 - x_1) \frac{V_{T_e}^2}{\omega_0^2}, \quad V_{T_e} = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}, \quad \beta^t \approx \frac{1}{\omega_0^2} \{ x_1 (x_2 v) + v (x_1 x_2) \}; \quad (4)$$

$$w_p^{lt} \approx \frac{8\pi^3 e^4}{m_e^2 \omega_0^4} \frac{\{ [x_2 x_1] (x_2 v) + [x_2 v] (x_2 x_1) \}^2}{x_1^2 x_2^2} \delta(x_2 v - x_1 v + \omega_1 - \omega_2).$$

Общее выражение для вероятности рассеяния продольной волны с превращением

* Нелинейное взаимодействие продольных волн с поперечными волнами частоты $\omega \gg \omega_0$ рассматривалось в [9].

** Для взаимодействия продольных волн с продольными эффект компенсации указан в [12].

в продольную с учетом эффектов типа переходного излучения продольных волн на неоднородностях, создаваемых продольными волнами, имеет вид [1]

$$w_p^{ll}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1) = \frac{32\pi^3 e^4}{m^2} \frac{(\beta^l)^2}{[\partial \epsilon^l(\omega_1, \mathbf{x}_1)/\partial \omega_1] [\partial \epsilon^l(\omega'_1, \mathbf{x}'_1)/\partial \omega'_1]} \times \\ \times \frac{1}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}'_1^2} \delta(\omega_1 - \omega'_1 - \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{v}); \quad (5)$$

$$\beta^l = \frac{[\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}'_1 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{v})] \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}{(\omega_1 - \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{v})^2} + \omega_0^2 \times \\ \times \int \frac{dp}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u} - \omega_1} \left\{ \left(\mathbf{x}'_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \frac{\alpha'}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \mathbf{u} - \omega_1 + \omega'_1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} + \left[\alpha' \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right] \frac{\mathbf{x}'_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{u} - \omega'_1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right\}. \quad (6)$$

Вероятность излучения двух плазменных волн найдется заменой $\omega_1 \rightarrow -\omega_1$, $\mathbf{x}_1 \rightarrow -\mathbf{x}_1$. Для тепловых частиц плазмы возможно лишь рассеяние и

$$\beta^l \approx 2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}'_1) (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{\omega_0^2};$$

$$w_p^{ll}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1) \approx \frac{32\pi^3 e^4}{m_e^2 \omega_0^4} \frac{(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}'_1)^2 (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}'_1^2} \delta(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{v} - \mathbf{x}'_1 \cdot \mathbf{v} + \omega'_1 - \omega_1). \quad (7)$$

Эффекты индуцированного рассеяния продольных волн $N_{\mathbf{x}_1}^l$ на продольных $N_{\mathbf{x}_1}^t$ и поперечных $N_{\mathbf{x}_2}^t$ описываются в данном случае уравнениями*

$$\frac{\partial N_{\mathbf{x}_1}^l}{\partial t} = N_{\mathbf{x}_1}^l \int N_{\mathbf{x}'_1}^t \frac{d\mathbf{x}'_1}{(2\pi)^3} d\mathbf{v} \frac{m_e \omega_0^2}{4\pi e^2} w_p^{ll}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1) \left[(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right] + \\ + N_{\mathbf{x}_1}^l \int N_{\mathbf{x}_2}^t \frac{d\mathbf{x}_2}{(2\pi)^3} d\mathbf{v} \frac{m_e \omega_0^2}{4\pi e^2} w_p^{lt}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \left[(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right]; \quad (8)$$

$$\frac{\partial N_{\mathbf{x}_2}^t}{\partial t} = N_{\mathbf{x}_2}^t \int N_{\mathbf{x}_1}^l \frac{d\mathbf{x}_1}{(2\pi)^3} d\mathbf{v} w_p^{lt}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{\omega_0^2 m_e}{4\pi e^2} \left[(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right]. \quad (9)$$

Отсюда, используя (4), (7), получим искомые уравнения, описывающие нелинейные эффекты:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{x}_1}^l}{\partial t} = \frac{3V_{T_e}}{2m_e n \omega_0} N_{\mathbf{x}_1}^l \int \frac{N_{\mathbf{x}'_1}^t}{(2\pi)^{5/2}} \frac{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1)^2 |\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}'_1|^2}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}'_1^2 |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1|^3} (\mathbf{x}'_1^2 - \mathbf{x}_1^2) d\mathbf{x}'_1 + \\ + \frac{1}{4m_e n V_{T_e}} N_{\mathbf{x}_1}^l \int \frac{N_{\mathbf{x}_2}^t}{(2\pi)^{5/2}} \frac{(\omega_2 - \omega_1) d\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1|^5 \mathbf{x}_2^2} \left\{ [\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2]^2 [\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - 4(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2] + 2\mathbf{x}_1^2 (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2 \right\}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial N_{\mathbf{x}_2}^t}{\partial t} = \frac{N_{\mathbf{x}_2}^t}{4m_e n V_{T_e}} \int \frac{N_{\mathbf{x}_1}^l}{(2\pi)^{5/2}} \frac{(\omega_1 - \omega_2) d\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|^5 \mathbf{x}_2^2} \left\{ [\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2]^2 [\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - 4(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2] + 2\mathbf{x}_1^2 (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2 \right\}. \quad (11)$$

Здесь учитывается, что $|\mathbf{x}_2| \ll |\mathbf{x}_1|$.

При $N^t = 0$ уравнение (10) совпадает с уравнением (2.3) работы [8], полученным путем использования теории возмущений в цепочке коррелятивных функций [12].

* Индуцированное рассеяние поперечных волн на поперечных мы не учитываем, считая $N^t \ll N^l$. Затуханием Ландау и соударениями пренебрегаем.

В этом пределе энергия продольных волн сохраняется и для неодномерного спектра происходит лишь перекачка по спектру к меньшим ω_1 с характерным временем [8]

$$\tau^{ll} \simeq \frac{1}{\omega_0} \frac{mnV_{Te}^2}{W^l} (2\pi)^{5/2} \left(\frac{V_\Phi^l}{V_{Te}} \right)^3; V_\Phi^l = \frac{\omega_0}{\omega_1}, \quad (12)$$

где W^l — энергия продольных волн, W^t — поперечных. Взаимодействие с поперечными волнами приводит к несохранению как W^l , так и W^t и их суммы, что обусловлено тем, что энергию забирают частицы плазмы.

Заметим, что плазменные волны с частотами ω_1 , большими ω_2 , раскачивают поперечные волны, тогда как при $\omega_1 < \omega_2$, наоборот, поперечными волнами раскачиваются продольные. Порядок характерного времени раскачки поперечных волн найдем, положив $N_{\omega_1}^l = N_{\omega_1}^{l(0)} \delta(\omega_1 - \omega_1(0))$:

$$\tau^{ll} \simeq \frac{2m_e n V_{Te}^2}{W^l} \frac{(2\pi)^{5/2}}{\omega_2 - \omega_1} \left(\frac{V_\Phi^l}{V_{Te}} \right) \frac{\omega_{10}^2}{\omega_2^2}, \quad V_\Phi^l = \frac{\omega_0}{\omega_{10}}, \quad (13)$$

Если $\omega_2 - \omega_1 \sim \omega_0 (V_{Te}/V_\Phi)^2$, то τ^{ll} в $\omega_1^2/\omega_2^2 \sim 1/V_{Te}^2$ раз больше τ^{ll} . На границе применимости (13) при $\omega_2 - \omega_1 \sim \omega_1 V_{Te}$ $\tau^{ll}/\tau^{ll} \sim (V_\Phi^l)^{-2}$. Заметим, что перекачка по спектру продольных волн увеличивает их фазовые скорости и уменьшает τ^{ll}/τ^{ll} .

При пучковых неустойчивостях, по-видимому, часто должны возникать одномерные спектры продольных волн, когда первый член (10) обращается в нуль и τ^{ll} будет в $(V_\Phi/V_{Te})^2$ раз больше, чем (12) [5]. В этом случае τ^{ll} будет меньше τ^{ll} для $V_\Phi^l > \sqrt{V_{Te}}$; основным нелинейным эффектом для таких V_Φ^l становится трансформация продольных волн в поперечные.

Заметим, что в трехмерном случае, который в основном представляет интерес, например, для астрофизических приложений время перекачки продольных волн в V_Φ^2/V_{Te}^2 раз больше, чем τ^{ll} в одномерном случае Поэтому для волн с $V_\Phi > \sqrt{V_{Te}}$ нелинейное затухание продольных волн соответствует превращению в поперечные волны, тогда как для $V_\Phi^l < \sqrt{V_{Te}}$ процессы перекачки (12) доминируют над нелинейным затуханием продольных волн. Это приводит к тому, что, не успев затухнуть, продольные волны приобретают фазовую скорость $V_\Phi^l > \sqrt{V_{Te}}$ и затухают из-за превращения в поперечные*.

При изотропном распределении плазменных волн уравнение (11) приобретает вид

$$\frac{\partial N_{\omega_2}^l}{\partial t} = \frac{2N_{\omega_2}^l}{5(2\pi)^{3/2}} \frac{\omega_2^2}{m_e n V_{Te}} \int_0^\infty N_{\omega_1}^l (\omega_1 - \omega_2) \omega_1 d\omega_1. \quad (14)$$

Рассеяние на ионах несущественно, если $T_i \ll T_e (m_i/m_e) (V_{Te}/V_\Phi)^2$, что при $V_\Phi \sim \sqrt{V_{Te}}$ и $T_i \sim T_e$ обычно выполнено. При нарушении указанного неравенства существенный вклад вносят ионы. Это связано с тем, что рассеяние, связанное с колебаниями ионов, не может компенсировать рассеяние на экранирующем заряде. Роль ионов в нелинейных эффектах была выявлена в работе [10]. Наконец, в обратном максвелловском операторе (3), учитывающем рассеяние через виртуальную продольную и поперечную волну (см [10]), следует также учитывать ионы

Авторы признательны В. П. Силину и Л. М. Коврижных за полезные замечания.

* Условие $\tau^{ll} \ll \tau_{ct}$, где τ_{ct} — время кулоновских соударений, выполняется, если плотность плазмы меньше

$$n_{kp} \simeq \frac{2 \cdot 10^{34}}{L^2} \frac{V_{Te}^{16}}{V_\Phi^6} \left(\frac{W^l}{W_{max}^l} \right)^2$$

(L — кулоновский логарифм). При $L \sim 25$, $V_\Phi \sim \sqrt{V_{Te}}$, $V_{Te} \sim 10^{-2}$ ($T_e \sim 10^6$ °К) получим: $n \ll 2 \cdot 10^5$ см⁻³; при $V_{Te} = 3 \cdot 10^{-2}$ $n \ll 10^{11}$ см⁻³ и $W \sim W_{max}^l = nmV_{Te}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, Астрон. ж., 36, 233 (1959); В. В. Железняков, УФН, 64, 113 (1958).
2. И. А. Ахнезер, И. А. Данелия, Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ, 46, 300 (1964).
3. А. И. Ахнезер, И. А. Ахнезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 41, 644 (1961).
4. W. E. Dunn, D. Pines, Nuclear Fusion Suppl., 3, 1049 (1962).
5. В. Д. Шапиро, ЖЭТФ, 44, 613 (1963), Диссертация, ОИЯИ, 1963.
6. В. И. Карпман, ДАН СССР, 152, 587 (1963).
7. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ, 43, 2234 (1962).
8. Л. М. Горбунов и В. П. Силин, Нелинейное взаимодействие плазменных волн, Препринт, ФИАН, 1964.
9. Л. М. Коврижных и В. Н. Цытович, Препринт, ФИАН, 1964; ЖЭТФ, 47, 1455 (1964).
10. А. Гайлитис и В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 46, 1726 (1964).
11. А. Гайлитис и В. Н. Цытович, Препринт, ФИАН, 1964; ЖЭТФ, 47, 1469 (1964).
12. В. П. Силин, ПМТФ, 1, 31 (1964).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
17 апреля 1964 г

УДК 538.3

О ВЛИЯНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА РЕЗОНАНСНОЕ УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

B. B. Красовицкий, V. I. Курилко

Как известно, сечение взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным полем возрастает в $(\bar{\lambda}_0/r_0)^2$ раз ($\bar{\lambda}_0$ — собственная длина волны ($\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$), $r_0 = e^2/mc$ — классический радиус электрона) при наличии резонанса. Именно это обстоятельство было использовано Лебедевым [1] для обнаружения давления света на газы.

Векслер [2] предложил использовать осцилляторные свойства плазменных сгустков для ускорения их давлением излучения. В работе Оллендорфа [3] осцилляцию электрона предлагается обеспечить при помощи постоянного магнитного поля. Однако результаты, полученные в этой работе, справедливы лишь при слабых электрических полях $(E_0(1 - \beta_{||}) \ll \frac{r_0}{\bar{\lambda}_0} H_0)$. Нелинейные уравнения движения частицы в резонансных условиях были исследованы в работе [4], где было показано, что в данном случае возможно ускорение частицы под действием силы $f_{H_0} \sim \left([vH_0], \frac{H_0}{H_0} \right)$, хотя составляющая поля в этом направлении равна нулю. Такое ускорение является дальнейшим развитием метода ускорения с помощью сил квадратичных по полю, предложенного в [2]*.

Однако в работах [3, 4] осталось незамеченным важное обстоятельство**, а именно, наличие авторезонанса в рассматриваемом случае. Явление авторезонанса установлено и изучено в работах Коломенского, Лебедева [5] и Давыдовского [6]. Как показано в [5], наличие авторезонанса делает указанный метод ускорения релятивистических частиц особенно эффективным.

В данной работе рассматривается влияние излучения на ускорение частицы в авторезонансном режиме. При этом удобно воспользоваться уравнениями движения в виде

$$\frac{da}{ds} = \frac{\epsilon}{2\Omega} \cos \vartheta - \gamma a \left(1 + \frac{1}{2} a^2 \right); \quad (1)$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = 1 - b - \frac{\epsilon}{2\Omega} \sin \vartheta; \quad (2)$$

$$\frac{db}{ds} = -\gamma a^2. \quad (3)$$

* В данном случае сила f_{H_0} квадратична по фазе поля, а по амплитуде поля она может меняться по длине ускорителя от линейной до квадратичной.

** Следующее из уравнений (5) работы [4].

(Обозначения те же, что и в работе [4]*.) Полагая $\gamma = 0$ в (1)–(3), получим

$$a(s) = \left[\left(\frac{\epsilon s}{2\Omega} \right)^2 + 2a_0 \frac{\epsilon s}{2\Omega} \cos \vartheta_0 + a_0^2 \right]^{1/2}; \sin \vartheta = \frac{a_0 \sin \vartheta_0}{a(s)}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что при $\epsilon s/2\Omega \gg a_0$ решение слабо зависит от начальных условий и имеет вид $a = \epsilon s/2\Omega$; $\vartheta = 0$.

Исследуем вопрос о влиянии излучения на движение частицы ($\gamma \neq 0$). Интегрируя (3) при $b_0 = 1$, получим

$$b = -\gamma \int a^2 ds. \quad (5)$$

При условии $a^3 \ll \epsilon/2\Omega\gamma$ из (1) и (2), используя (3), можно получить уравнение для a

$$a''' + (a'')^2 a' \left[\frac{\epsilon^2}{4\Omega^2} - (a')^2 \right]^{-3/2} - \frac{a'}{a^2} \left[\frac{\epsilon^2}{4\Omega^2} - (a')^2 \right]^{1/2} - \frac{a' a''}{a} \left[\frac{\epsilon^2}{4\Omega^2} - (a')^2 \right]^{-1/2} = \gamma a^2, \quad (6)$$

где штрих обозначает производную по s .

Будем искать решение (6) в виде $a = \epsilon s/2\Omega - \sigma(s)$, $\epsilon s/2\Omega \gg \sigma(s)$. Тогда для $\sigma'(s)$ получим

$$\sigma'(s) = \frac{\gamma^2 \epsilon^5}{120^2 \Omega^5} s^8. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (2), находим для фазы скорости частиц относительно поля волны Ψ следующее выражение:

$$\vartheta = \arccos \left(1 - \frac{\gamma^2 \epsilon^4 s^8}{2 \cdot 60^2 \Omega^4} \right). \quad (8)$$

Как видно из (8), с ростом s ϑ возрастает, в результате чего частица может выйти из резонанса с полем. Условием сохранения резонанса является требование $\vartheta \ll 1$, т. е. $s \ll (60/\gamma\epsilon^2)^{1/4}$, при этом условие $a^3 \ll \epsilon/2\Omega\gamma$ удовлетворяется автоматически.

Таким образом, действие излучения сводится, в основном, к смешению фазы скорости частицы по отношению к полю и нарушению синхронизма. Это накладывает ограничение на максимально достижимую энергию. Определяя s_{\max} из условия $\vartheta = 1$ и пользуясь выражением для энергии, полученным в [5], найдем

$$W_{\max}^l \approx \frac{\epsilon^2}{8\Omega} s_{\max}^2 \approx \frac{\epsilon}{\sqrt{\gamma}} m_0 c^2. \quad (9)$$

Интересно отметить, что W_{\max} не зависит от Ω , т. е. от энергии, с которой начинается ускорение.

Для $\epsilon = \frac{E}{H} \approx 10^{-2}$ и $H \approx 2,5 \cdot 10^7 \frac{a}{M}$ получаем $\gamma \approx 2,5 \cdot 10^{-11}$. Следовательно, в этом случае $W_{\max} \approx 2 \cdot 10^3 m_0 c^2$.

Выше было рассмотрено движение одной частицы. При движении сгустков заряженных частиц в результате когерентного излучения силы торможения излучением могут изменяться. Для сгустка из N когерентных частиц $W_{\max}^N = W^l \sqrt{N}$. В самом деле, такой сгусток можно считать частицей с зарядом $Z = Ne$ и массой $M = Nm$. В этом случае в уравнениях движения (1)–(3) параметр γ заменится на $\Gamma = N\gamma$. Следовательно, максимальная энергия, которую получит каждая частица в таком сгустке, согласно (9), уменьшится в \sqrt{N} раз.

Практически ускоряется не один сгусток, а последовательность сгустков. Если расстояния между сгустками равны длине волны ускоряющего поля или кратны ей, то возникает необходимость учета когерентного взаимодействия между сгустками. оказывается, однако, что такое взаимодействие может повлиять только на численный коэффициент в выражении для силы торможения излучением.

В качестве примера рассмотрим бесконечное число нерелятивистских частиц, расположенных периодически на расстояниях, равном длине волны, и врашающихся в фазе. Можно показать, что сила излучения, действующая в этом случае на каждую частицу, равна $f_\infty = e^2 v^3 / c^3 R^2$, в то время как на изолированную частицу действует сила $f_1 = \frac{2}{3} f_\infty$. Такое незначительное (по сравнению с когерентным взаимодействием

* Авторы пользуются случаем выразить благодарность В. Б. Гильденбургу, обратившему внимание на ошибку в уравнении для a в работе [4].

между сгустками в эффекте Черенкова) изменение силы торможения объясняется тем, что в данном случае конус излучения каждого сгустка слабо захватывает соседние, в то время как в эффекте Черенкова каждый сгусток находится в конусе излучения всех предшествующих. В нашем случае частицы оказываются релятивистскими в системе отсчета, где они не движутся вдоль поля H_0 . При этом взаимное влияние их друг на друга меньше, чем в нерелятивистском случае, так как с ростом энергии конус излучения, как известно, сужается.

Авторы благодарны Я. Б. Файнбергу за предложенную тему и полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Н. Лебедев, Избранные произведения, Гостехиздат, М.—Л., 1949, стр. 195.
2. В. И. Векслер, Атомная энергия, 2, 427 (1957).
3. I. Ollendorff, Bull. Res. Council, Israel, 3, 348 (1954).
4. Я. Б. Файнберг, В. И. Курялко, ЖТФ, 29, 939 (1959).
5. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, ДАН СССР, 145, 1259 (1962); ЖЭТФ, 44, 261 (1963).
6. В. Я. Давыдовский, ЖЭТФ, 43, 886 (1962).

Поступила в редакцию
21 декабря 1963 г.

УДК 533.951

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ПЛАЗМЕ

Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина

В работе [1] исследовалось распространение и поглощение сильных электромагнитных волн в полупроводниках и плазме, причем предполагалось, что между частотой распространяющегося поля ω , ларморовской частотой $\omega_H = |e|H/mc$ и частотой соударений ν существуют следующие соотношения: $|\omega - \omega_H| \gg \nu$; $\omega, \omega_H \gg \nu$. Допускалось также, что проводимость образца осуществляется одним видом носителей. Из рассмотрения исключались спиральные волны в случае одного типа носителей, альфновские волны и гибридный резонанс при наличии электронов и дырок с равными концентрациями.

Настоящая работа посвящена этим вопросам. Как и в [1], предполагается, что времена релаксации по энергиям τ_ε и частота падающего поля связаны соотношением $\omega\tau_\varepsilon \gg 1$. Это приводит к тому, что симметричная часть функции распределения не зависит от времени [2, 3]. Функцию распределения носителей тока f_s будем считать максвелловской:

$$f_s(\varepsilon_s) = \frac{N_s}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}\Theta_s^{3/2}m_s^{3/2}} e^{-\varepsilon_s/\Theta_s} \quad (s = n, p), \quad (1)$$

где ε_s , N_s , m_s , Θ_s — энергия, концентрация, эффективная масса и температура носителей тока. Индексы n и s относятся к электронам и дыркам соответственно. Допущение о максвелловской функции распределения выполняется, если существенно кулоновское взаимодействие. Однако и в случае, если это взаимодействие не играет роли, формула (1) все равно является хорошим приближением для вычисления проводимости [2, 3].

Полная система уравнений для случая монохроматической волны с частотой ω состоит из уравнений Максвелла для магнитоактивной плазмы в их обычной форме (см. [2]) и уравнения для температуры, которое можно записать так:

$$[\sigma_{ik}^s(\omega) + \sigma_{ki}^s(-\omega)] E_i E_k^* = \frac{\Theta_s - T}{\Theta_s T} \bar{A}(\Theta_s), \quad (2)$$

где $\sigma_{ik}^s(\omega)$ — компоненты тензора проводимости в магнитоактивной плазме,

$$\bar{A}(\Theta_s) = \frac{2N}{\pi^{1/2} \Theta_s^{3/2}} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/\Theta_s} A(\varepsilon), \quad A(\varepsilon) \text{ — коэффициент диффузии в энергети-}$$

ческом пространстве Явный вид σ_{ik} , а также вывод уравнений (2) дан в [2, 3].

Для дальнейшего необходим явный вид зависимости $A_s(\varepsilon)$ и $\chi_s(\varepsilon)$ от энергии. Эта зависимость определяется характером рассеяния носителей тока. В [1] указывалось, что при всех типах рассеяния искомая зависимость имеет вид

$$\chi_s = \chi_{0s}(T) \left(\frac{T}{\varepsilon_s} \right)^l, \quad A_s(\varepsilon) = A_{0s} \left(\frac{\varepsilon_s}{T} \right)^r, \quad (3)$$

где T — температура решетки. Для простоты считаем, что $r_n = r_p = r$, $l_n = l_p = l$ т. е. механизм рассеяния для электронов и дырок одинаков, температура носителей тока много больше температуры решетки $\Theta_s \gg T$.

Перейдем к исследованию конкретных случаев.

В дальнейшем будет решаться задача о нормальном падении волны из вакуума на полупространство, заполненное полупроводником. Пусть электромагнитная волна распространяется вдоль оси Oz .

Рассмотрим альфвеновские волны, ограничившись распространением волн вдоль магнитного поля Альфвеновская волна распространяется при выполнении следующих условий:

$$\nu_s \ll \omega \ll \omega_{Hs} \ll \omega_{0s}, \quad \omega_{0s}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_s}, \quad N_p = N_s = N.$$

Допустим, что $\nu_p \sim \nu_n$, $m_p \sim m_n$. В сделанных предположениях диссипативная часть тензора диэлектрической проницаемости мала. Методы решения уравнений Максвелла для этого случая были рассмотрены в [1, 2, 3]. Поэтому приведем сразу результат:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{2}{n} \tilde{E}_{0x} e^{-l \frac{\omega}{c} nz} \left[1 - \frac{2l}{r+l} \chi_{0s} \left(\frac{T}{\Theta_{0s}} \right)^l \frac{\omega}{c} z \right]^{(l+r)/2l}; \\ E_x &= iE_y; \quad E_z = 0; \\ \Theta_s &= \Theta_{0s} \left[1 - \frac{2l}{r+l} \chi_{0s} \left(\frac{T}{\Theta_{0s}} \right)^l \frac{\omega}{c} z \right]^{1/l}; \\ \frac{\Theta_{0s}}{T} &= \left[\frac{8}{3\pi} \frac{\nu_{0s} m_s}{A_{0s} N(m_n + m_p)} \frac{\Gamma(5/2 - l)}{\Gamma(3/2 + r)} |\tilde{E}_{x0}|^2 \right]^{1/(r+l)}; \\ \chi_{0s} &= \frac{8\pi^{1/2} N c^2}{3 n \omega H^2} \left(\frac{\nu_{0s} m_s}{A_{0s}} \right)^{l/(r+l)} \Gamma(5/2 - l) \times \\ &\times \left[(\nu_{0n}^r m_n^r A_{0n}^l)^{1/(r+l)} + (\nu_{0p}^r m_p^r A_{0p}^l)^{1/(r+l)} \right]; \\ n^2 &= \frac{4\pi N c^2}{H^2} (m_n + m_p). \end{aligned} \quad (5)$$

При этом $\frac{\chi_{0n}}{\Theta_{0n}^l} = \frac{\chi_{0p}}{\Theta_{0p}^l}$, \tilde{E}_{x0} — амплитуда волны в вакууме, $P = 2/n$ — коэффициент пре-

ломления, n — показатель преломления в вакууме, H_{0n} , χ_{0p} — коэффициенты затухания электромагнитных волн в слабом поле, Θ_{0s} — значение Θ_s при $z = 0$. Заметим, что во всех рассматриваемых случаях $n \gg 1$.

Изменение коэффициентов отражения δR и преломления δP за счет нелинейных эффектов описывается формулой

$$\delta R = \delta P = \frac{2i}{n^2} \chi_{0p} \left(\frac{T}{\Theta_{0p}} \right)^l. \quad (6)$$

Глубина проникновения электромагнитного поля в полупроводник $\delta \sim \delta_0 \left(\frac{\Theta_0}{T} \right)^l$.

$\delta_0 \sim \frac{c}{\omega \chi_{0s}}$; при $l < 0$, $\delta \ll \delta_0$, а при $l > 0$ $\delta \gg \delta_0$. Более подробно аналогичный вопрос обсужден в [1].

Из физического смысла задачи следует, что температура должна возрастать с ростом электрического поля. Чтобы это выполнялось, должно иметь место неравенство

$$r + l > 0.$$

В случае нарушения неравенства состояние полупроводника будет неустойчиво, так как появится неоднозначность электронной температуры [1].

Перейдем к рассмотрению гибридного резонанса, который возникает при наличии двух типов носителей тока на частоте $\omega^2 = e^2 H^2 / m_n m_p c^2$ при $\omega, |\omega_H - \omega| \gg v$, $\omega_{0s}^2 \gg |\omega_H^2 - \omega^2|$ при распространении волны перпендикулярно магнитному полю. В этом случае, решая систему уравнений методом, изложенным в работе [1], получим

$$E_x = 2\zeta \tilde{E}_{x0} \left[1 + \frac{l}{V(r-l)(2r-l)} |\zeta|^{-1} \frac{\omega}{c} z \right]^{-(r-l)/l - (l/l) \sqrt{r(r-l)}}, \quad (7)$$

$$\zeta = 2^{-l/r} \left(\frac{r}{r-l} \right)^{(r-l)/4r} n_p^{-(r-l)/r} \left(\frac{\tilde{\Theta}_{0s}}{T} \right)^{-(r-l)/2r} e^{i \arctg \sqrt{(r-l)/l}}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Theta}_{0s}}{T} = & \left(\frac{\nu_{0s}}{A_{0s}} \right)^{1/(r+l)} \left\{ \frac{3\pi e^2 (m_n + m_p) T |\tilde{E}_{x0}|^2}{4m_n m_p \Gamma(5/2-l) \Gamma(3/2+r)} \times \right. \\ & \left. \times \left[(\nu_{0p}^r A_{0p}^l)^{1/(r+l)} + (\nu_{0n}^r A_{0n}^l)^{1/(r+l)} \right]^{-2} \right\}^{1/(r-l)}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Theta_s = \Theta_{0s} \left[1 + \frac{l}{V(r-l)(2r-l)} |\zeta|^{-1} \frac{\omega}{c} z \right]^{-2/l};$$

$$\Theta_{0s} = 2^{2/(r-l)} |\zeta|^{2/(r-l)} \tilde{\Theta}_{0s};$$

$$\begin{aligned} n_p^r = & \frac{3\pi^{3/2} e N c (m_n + m_p)}{4H V m_n m_p \Gamma(5/2-l)} \left(\frac{A_{0p}}{\nu_{0p}} \right)^{l/(r+l)} \left[(\nu_{0n}^r A_{0n}^l)^{1/(r+l)} + \right. \\ & \left. + (\nu_{0p}^r A_{0p}^l)^{1/(r+l)} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

ζ — импеданс. Для случая гибридного резонанса $E_y = 0$, а E_z можно легко определить из уравнений Максвелла.

В полупроводниках с одним типом носителей распространяются низкочастотные спиральные волны, для которых выполнены такие неравенства $\omega \ll v \ll \omega_H$. В предположении, что $\omega_0^2/\omega v \gg 1$, $\omega_0^2/\omega_H^2 \gg 1$, $\alpha \neq \pi/2$, $0 \ll \operatorname{tg}^2 \alpha \ll \omega_H^2/v^2$, найдем выражения для электромагнитного поля и температуры:

$$E_x = \frac{2}{n} \tilde{E}_{x0} e^{-l \frac{\omega}{c} nz} \left[1 - \frac{2l}{r+l} x_0 \left(\frac{T}{\Theta_0} \right)^l \frac{\omega}{c} z \right]^{(r+l)/2l};$$

$$x_0 = \frac{\Gamma(5/2-l)}{3\pi^{1/2}} \frac{\nu_0}{\omega_H} \cos \alpha \left[2 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{9\pi}{16\Gamma(5/2-l)\Gamma(5/2+l)} \operatorname{tg}^2 \alpha \right]; \quad (10)$$

$$n^2 = \frac{16\pi^2}{\cos^2 \alpha} \frac{e^2 N^2 c^2}{\omega^2 H^2};$$

$$\Theta = \Theta_0 \left[1 - \frac{2l}{r+l} \frac{\omega}{c} x_0 \left(\frac{T}{\Theta_0} \right)^l z \right]^{1/(r+l)}; \quad (11)$$

$$\frac{\Theta_0}{T} = \left[\frac{\nu_0 T}{3\pi^2 A_0} \frac{m\omega^2}{e^2 N^2} |\tilde{E}_{x0}|^2 \left(1 + \cos^2 \alpha + \frac{9\pi \sin^2 \alpha}{16\Gamma(5/2+l)\Gamma(5/2-l)} \right) \right]^{1/(r+l)}; \quad (12)$$

$$\delta P_x = \delta R_x = \frac{2i}{n^2} x_0 \left(\frac{T}{\Theta_0} \right)^l,$$

α — угол между магнитным полем и направлением распространения волны. Вопрос о глубине проникновения поля в этом случае мы не будем обсуждать, так как ситуация здесь совершенно аналогична той, которая рассматривалась в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ, 47, 1322 (1964).
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
3. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, 201 (1960).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
6 апреля 1964 г.

УДК 538.56 : 519.25

О ВЛИЯНИИ ФЛЮКТУАЦИЙ СКОРОСТИ ПЕРЕНОСА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Г. А. Андреев

При вычислении временных статистических характеристик флюктуаций параметров волны, распространяющейся в турбулентной среде, обычно пользуются идеализацией, при которой случайные неоднородности среды считаются неизменными во времени (гипотеза замороженной турбулентности). Однако при расчетах, основанных на гипотезе замороженной турбулентности, вводят еще одну идеализацию — скорость переноса считают величиной строго постоянной во времени [1, 2]. Если допустимость первой идеализации можно проверить, вычисляя по известным формулам [2] время жизни неоднородностей и сопоставляя его со временем переноса, то оценок справедливости второй идеализации (постоянства скорости переноса) в литературе мы не встречали.

В этой заметке рассматривается влияние флюктуаций скорости переноса неоднородностей на примере вычисления коэффициента пространственно-временной поперечной корреляции флюктуаций логарифма амплитуды плоской монохроматической волны, распространяющейся в турбулентной среде. Как показано ниже, отказ от постоянства скорости переноса наряду с полным сохранением неизменности неоднородностей во времени (замороженная турбулентность) приводит к значительному изменению формы вычисляемого пространственно-временного коэффициента корреляции R_χ .

По определению, величина R_χ представляет нормированный корреляционный момент вида

$$R_\chi = \frac{\bar{\gamma}(L, t)\chi(L + \rho, t + \tau)}{\chi^2(L, t)},$$

где $\chi(L, t) = \ln [A(L, t)/A_0]$. Величины $A(L, t)$ и $A(L + \rho, t + \tau)$ обозначают мгновенные значения амплитуды волны в моменты времени t и $t + \tau$ в точках пространства, удаленных от источника излучения на расстояния L и $L + \rho$. Расстояние между точками наблюдения в плоскости перпендикулярно направлению распространения обозначено ρ , амплитуда невозвущенной волны — через A_0 . Предположим, что флюктуации χ представляют стационарный во времени и однородный в пространстве случайный процесс. Коэффициент R_χ в этом случае является функцией τ и ρ .

Идеализация замороженной турбулентности допустима при условии $V\sqrt{L} \ll L_0$ [2], где λ — длина волны излучения, L_0 — внешний масштаб турбулентности. Это означает, что значение χ в точке $L + \rho$ в момент времени $t + \tau$ будет таким же, как в точке $L + \rho - v_\perp \tau$ в момент t . Здесь v_\perp — поперечная составляющая скорости переноса.

С целью проверки влияния флюктуаций скорости переноса при вычислении функции $R_\chi(\tau, \rho)$ предположим, что v_\perp является стационарным во времени и однородным в пространстве случайным процессом, интервал корреляции флюктуаций которого меньше интервала корреляции флюктуаций сигнала с математическим ожиданием $M\{v_\perp\} = \bar{v}_\perp$. Для решения этой задачи мы используем выражение коэффициента пространственной поперечной корреляции $R_\chi(\rho)$, полученное в работе [2], заменим величину ρ на $\rho - v_\perp \tau$ и выполним статистическое усреднение по v_\perp . С этой целью мы используем гауссовское распределение вероятностей значений v_\perp с дисперсией σ_\perp^2 .

Такое распределение вероятностей скоростей переноса, например, имеет место в приземном слое турбулентной атмосферы [3,4]. Таким образом, для функции $R_\chi(\tau, \rho)$ получается выражение

$$R_\chi(\tau, \rho) = \frac{\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ J_0 [\chi(\rho - v_\perp)] e^{-(v_\perp - \bar{v}_\perp)^2/2\sigma_\perp^2} dv_\perp \right\} [1 - (k/\chi^2 L) \sin(\chi^2 L/k)] \Phi_n(\chi) \chi d\chi}{\sqrt{2\pi} \int_0^{\infty} [1 - (k/\chi^2 L) \sin(\chi^2 L/k)] \Phi_n(\chi) \chi d\chi} \quad (1)$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $\chi = 2\pi/l$ — пространственная частота, соответствующая пространственному размеру неоднородностей l , $\Phi_n(\chi) = C\chi^{-11/3}$ — трехмерный пространственный спектр флюктуаций показателя преломления, соответствующий структурной функции двух третей.

Соотношение (1) проинтегрировать по v_\perp и χ затруднительно. Использование выражения (1) в таком виде для численного интегрирования требует много вариаций значений τ и ρ , что создает значительные вычислительные трудности, и результаты вычислений не будут иметь достаточно общего вида. С этой точки зрения необходимо в соотношении (1) сделать замену переменных τ , ρ , v , χ и получить выражение для коэффициента пространственно-временной корреляции в безразмерных переменных.

Для этого введем следующие обозначения: $\tau_0 = V\lambda L/v_\perp$ — время переноса неоднородностей среды со средней скоростью v_\perp на расстояние, равное пространственному интервалу корреляции флюктуаций логарифма амплитуды $V\lambda L$ (при $l_0 < V\lambda L < L_0$), $0 = \sqrt{L/k} \chi$ — безразмерная пространственная частота, $m_v = \sigma_\perp/v_\perp$ — коэффициент вариации скорости переноса неоднородностей (иногда эту величину называют уровнем турбулентности [4]), $Z = (v_\perp - \bar{v}_\perp) \sigma_\perp^{-1}$ — нормированная переменная интегрирования. Используя введенные обозначения, представим соотношение (1) в виде

$$R_\gamma \left(\frac{\tau}{\tau_0}, \frac{\rho}{V\lambda L} \right) = \frac{\int_0^{\theta_0} \int_{-\infty}^{+\infty} J_0 \left\{ \sqrt{2\pi} \left[\rho/V\lambda L - (1 - zm_v) \tau/\tau_0 \right] \right\} e^{-z^2/2} dz}{\sqrt{2\pi} \int_0^{\theta_0} [1 - \sin^2 \theta/0^2] \theta^{-8/3} d\theta} \quad (2)$$

Представляет интерес графическое представление функций $R_\chi(\tau/\tau_0, \rho/V\lambda L)$ при фиксированных отношениях $\rho/V\lambda L$. Для этого было выполнено численное интег-

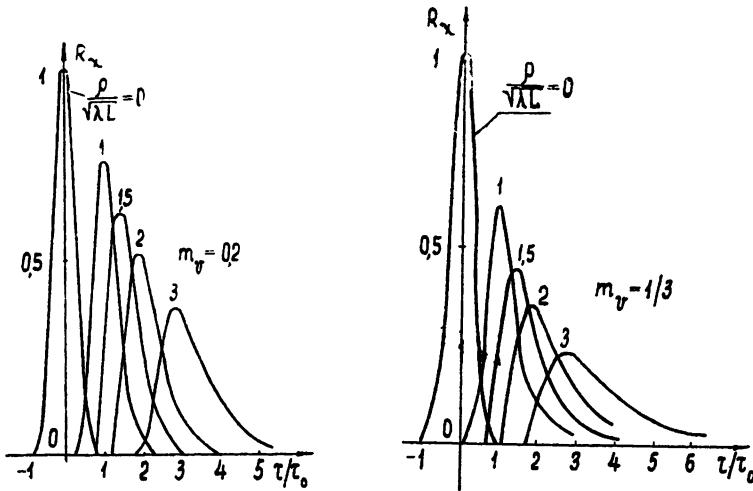


Рис. 1а, б. Коэффициенты пространственно-временной корреляции $R_\chi(\tau/\tau_0, \rho/V\lambda L)$ соответственно для $m_v = 0,2$; $0,33$ и $\rho/V\lambda L = 0; 1; 1,5; 2; 3$.

рирование соотношения (2) с помощью ЭВМ с точностью 1%. На рис. 1а, б представлены коэффициенты корреляции $R_\chi(\tau/\tau_0, \rho/V\lambda L)$ при значениях $m_v = 0,2; 0,33$ и $\rho/V\lambda L = 0, 1; 1,5; 2, 3$. Кривые приведены до пересечения с осью абсцисс. Предел интеграла по θ был взят равным 12,5. Специальными вычислениями было установлено, что вид кривых $R_\chi(\tau/\tau_0, \rho/V\lambda L)$ с увеличением $\theta_0 > 12,5$ меняется незначительно в пределах ошибок вычислений (1%). Пределы интегрирования по z были выбраны в интервале $[-3, 3]$, что обеспечивает использование значений вероятности флюктуаций скорости до 0,99.

Из экспериментальных измерений флюктуаций скорости ветра [3,4] следует, что в приземном слое атмосферы до высоты 17 м для средних скоростей ветра $v = 2 \div 6 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ величина m_v достигает значений, равных 0,1. Поперечная составляющая средней скорости переноса v_\perp и средняя скорость переноса v связаны соотношением $v_\perp = v \sin \alpha$, где α — угол между направлениями распространения волны и средней скоростью переноса. При наличии поперечного переноса $\alpha \neq 0$ и, следовательно, $v_\perp < v$. Это означает, что m_v может быть больше 0,1. На рис. 2 представлены зависимости величины относительного максимума функции $R_\chi(\tau, \rho)$ от величины уровня турбулентности m_v для различных отношений $\frac{\rho}{V\lambda L}$. Из приведенных результатов вид-

но, что флюктуации скорости переноса существенно уменьшают корреляцию флюктуаций сигналов, наблюдавшихся в двух точках пространства.

Автор благодарит В. А. Зверева за обсуждение полученных результатов, а также Э. Б. Сонину и Л. Ф. Ермолину за помощь в выполнении вычислительной работы.

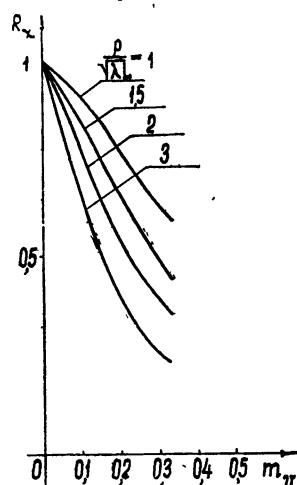


Рис. 2. Зависимость величины максимума коэффициента пространственно-временной корреляции от значений m_v при фиксированном отношении $\rho/V\lambda L$.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958
- В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
- А. С. Монин, Теория вероятностей и ее применение, 3, 285 (1958).
- А. В. Перепелкина, Изв АН СССР, сер. геофиз, 6, 765 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 апреля 1964 г

УДК 621.378.325

РАСХОДИМОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ В ГЕЛИЙ-НЕОННОВОМ ЛАЗЕРЕ

В. И. Махорин, Е. Д. Проценко

Использование в лазерах конфокальных резонаторов дает ряд преимуществ по сравнению с плоскопараллельными резонаторами: значительно уменьшаются дифракционные потери, обеспечивается более легкая возможность генерации на одном типе

колебаний, снижаются требования на юстировку зеркал и т. д. Вместе с этим расходимость выходного излучения в лазерах со сферическими отражателями значительно превышает расходимость в резонаторах с плоскопараллельными зеркалами.

Была измерена расходимость низших мод (00, 01) в гелий-неоновом лазере, работающем на переходе $3S_2 - 2P_4$ ($\lambda = 6328 \text{ \AA}$) при изменении расстояния d между зеркалами. Использовались интерференционные зеркала с радиусом кривизны $b = 2 \text{ м}$. Выходной пучок фотографировался на разном расстоянии от зеркала на черно-белую пленку. Распределение интенсивности излучения по пятну определялось с помощью сенситограммы этой пленки, снятой через фильтр на 6328 \AA с полосой 50 \AA . На рис. 1 приведено это распределение для мод 00 и 01. Здесь же для сравнения пунктиром изображены функции F_0 и F_1 , приближенно описывающие распределение поля для этих мод вблизи центра зеркала конфокального резонатора [1]:

$$F_0(c, \eta) = e^{-\frac{1}{2} c \eta^2}, \quad F_1(c, \eta) = \sqrt{\pi c} \eta e^{-\frac{1}{2} c \eta^2},$$

$$c = 2\pi \frac{a^2}{b\lambda}, \quad \eta = \frac{x}{a} \left(\text{или } \frac{y}{a} \right), \quad (1)$$

$2a$ — аппертура отражателя.

Расходимость Θ на уровне ослабления в e раз в зависимости от степени неконфо-

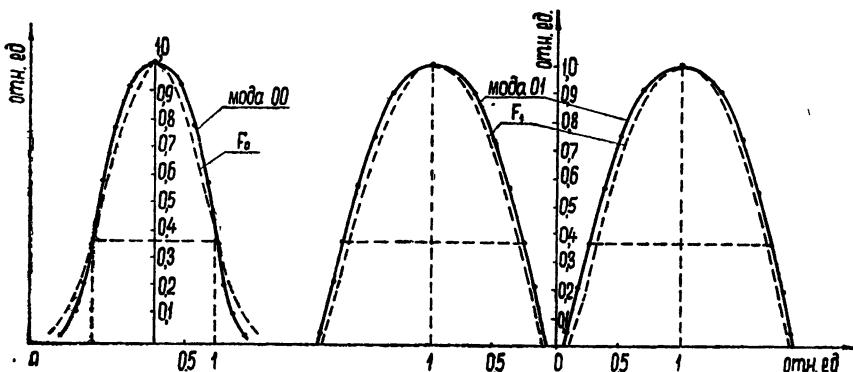


Рис. 1.

кальности d/b для моды 00 приведена на рис. 2. Из него следует, что для конфокального резонатора ($d/b = 1$) расходимость минимальна и составляет $\sim 4.2'$. Величина Θ очень мало зависит от степени неконфокальности до тех пор, пока $d/b < 2$. Когда расстояние между зеркалами приближается к удвоенному радиусу кривизны ($d/b = 2$);

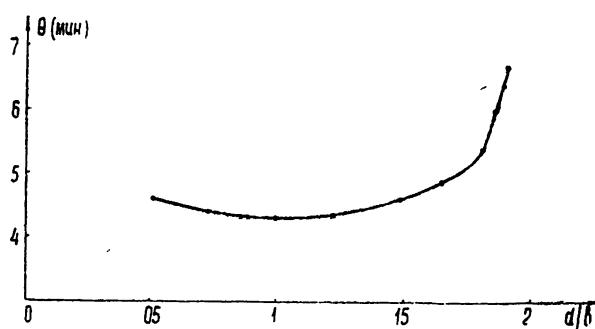


Рис. 2.

Θ резко возрастает. Расходимость для моды 01 в зависимости от степени неконфокальности приведена на рис. 3. Эта зависимость аналогична расходимости моды 00 с той лишь разницей, что минимальный угол, соответствующий конфокальному резонатору, на $60 + 70\%$ больше аналогичного угла для моды 00. Измерение расходи-

мости мод более высоких порядков показало, что во всех случаях минимальная расходимость также соответствует конфокальному резонатору и мало изменяется в области $d/b < 2$. Полученные результаты подтверждают тот факт, что в резонаторах со сферическими отражателями и малыми дифракционными потерями добротность может быть повышена за счет увеличения расстояния между зеркалами практически без изменения расходимости.

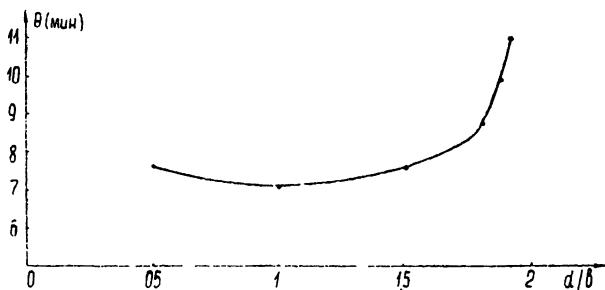


Рис. 3.

Теоретические оценки, которые можно получить из [1], дают следующую зависимость $\Theta = f(d/b)$ для моды 00:

$$\Theta = 4 \sqrt{\lambda/\pi b'}, \quad (2)$$

где

$$b' = \sqrt{2db - d^2}.$$

Эта зависимость хорошо согласуется с экспериментальными результатами до тех пор, пока диаметр пятна на зеркале значительно меньше аппертуры, что соответствует условию $d/b < 2$. При больших дифракционных потерях приближение, для которого получено (2), несправедливо и экспериментальные результаты отличаются от теоретических оценок.

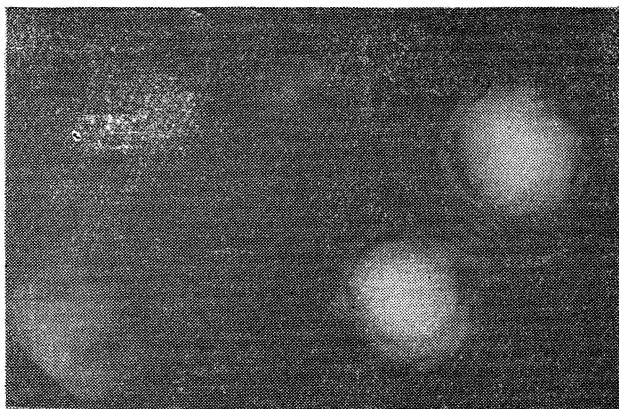


Рис. 4.

В лазере с конфокальным резонатором была получена генерация двух разделенных лучей*. Распределение поля в каждом из лучей одинаково и зависит, как и в обычном случае, от настройки зеркал. Расходимость лучей относительно друг друга также зависит от настройки зеркал. В частности, возможно получение почти параллельных лучей, которые расходятся под большим углом с одной стороны от лазера и под меньшим — с другой, и наоборот. Во всех случаях расходимость каждого из лучей (расходимость отдельной моды) не отличается от расходимости аналогичной моды при «однолучевом» режиме работы.

* Во время подготовки работы в печать появилось сообщение [2] о получении многолучевой генерации в газовом лазере с помощью диафрагмы с отверстиями, помещенной в резонатор.

На рис. 4—6 приведены некоторые фотографии структуры поля при работе лазера в «двулучевом» режиме. Рис. 4, 5 соответствуют случаю, когда в каждом из лучей генерируется мода 00. На рис. 4 приведена структура поля с одной стороны лазера, на рис. 5—с другой стороны на том же расстоянии. Расходимость лучей в первом случае составляет $15,2'$, расходимость моды в каждом из лучей составляет $4,8'$. На

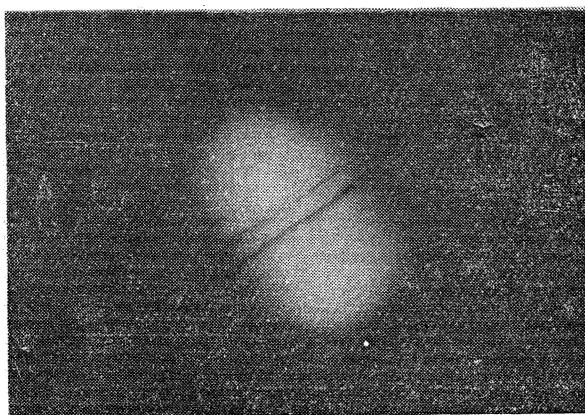


Рис. 5.

рис. 6 приведена структура поля для случая, когда в каждом из лучей генерируется мода 01. Расходимость лучей составляет $13,1'$, расходимость моды в каждом из лучей равна $7,5'$. Таким образом, расходимость каждой моды в двухлучевом режиме такая же, как расходимость аналогичной моды в режиме генерации одного луча.

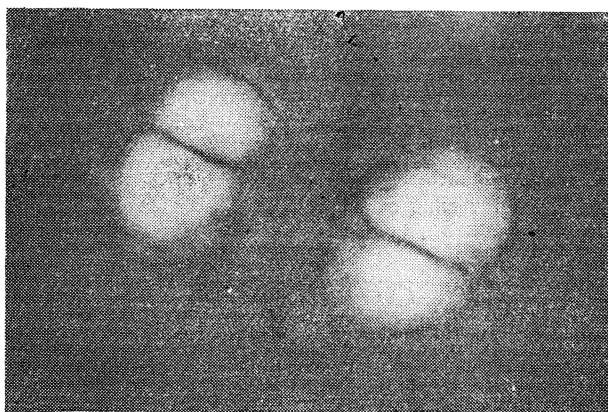


Рис. 6.

Для лучей, структура которых приведена на рис. 4 и 6, можно определить точку, где они «сходятся». Такой точкой является середина резонатора. В резонаторах с неконфокальным расположением зеркал генерации на двух лучах получить не удается. Кроме того, данный режим работы зависит также от сорта стекла, используемого в качестве окон на торцах трубы. Двулучевая генерация, по-видимому, связана с геометрией резонатора (в частности, с возможной несимметрией в расположении зеркал) и с неоднородностями в резонаторе.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. D. Boyd, J. P. Gordon, Bell System Tech. J., **40**, 489 (1961).
2. T. Morokuma, J. Res. NBSC. Eng. Instr., **68C**, 25 (1964).

РЕЗОНАНСНОЕ УШИРЕНИЕ И ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ В ОПТИЧЕСКИ ВОЗБУЖДЕННЫХ СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

У. Х. Копвиллем и В. Р. Нагибиров

Известно, какую большую роль играют магнитные диполь-дипольные взаимодействия в уширении линий и переносе энергии в спиновых системах [1]. Поскольку оператор электрического дипольного момента P является полярным вектором, то в отличие от магнитного момента у него нет диагональных матричных элементов и электрические диполь-дипольные взаимодействия между одиночными ионами не имеют классического аналога.

Однако в квантовой механике P описывается матрицей, содержащей \hat{H} недиагональные элементы. Поэтому электрические диполь-дипольные взаимодействия \hat{H} имеют место в отсутствие диагональных матричных элементов а) за счет матричных элементов между состояниями различной четности (прямые диполь-дипольные взаимодействия), б) за счет матричных элементов «запрещенных переходов» между состояниями с одинаковой четностью, возникающих при комбинированном действии спин-орбитальной связи и нечетной компоненты тригонального кристаллического поля (взаимодействие через поле квантов потенциальной энергии), в) за счет асимметрических искажений кристаллического поля, обусловленных колебаниями решетки (взаимодействие через поле фононов), г) за счет комбинированного действия фотонов и колебаний решетки (взаимодействие через фотон-фоновое поле). Такие же взаимодействия имеют место в оптическом диапазоне для магнитных диполь-дипольных взаимодействий, обвязанных орбитальному магнетизму. Но в этом случае и диагональные матричные элементы отличны от нуля. Очевидно, что взаимодействия в и г описывают также ангармонические взаимодействия фононов через поля электрических и магнитных диполей

Рассмотрим на примере ионов Cr^{3+} в Al_2O_3 влияние взаимодействий б) $\hat{H} = \sum_{j>k} \hat{H}^{jk}$ на сдвиг $\Delta\nu$ и ширину $\Delta\nu$ линии оптического резонанса между состояниями ${}^4A_2(1/2)$ и $\bar{E}(^2E)(-1/2)$ иона Cr^{3+} в сильном магнитном поле $H \parallel C_3$ [2]. Обозначим уровни энергии иона Cr^{3+} $E(-3/2)$, $E(-1/2)$, $E(1/2)$, $E(3/2)$ в основном терме 4A_2 и $E(-1/2)$, $E(1/2)$ в $\bar{E}(^2E)$ соответственно через $E_4 < E_3 < E_1 < E_6 < E_2 < E_5$. Вычислим первый $\langle \Delta\nu \rangle$ и второй $\langle \Delta\nu^2 \rangle$ моменты линии оптического резонанса $E_1 \leftrightarrow E_2$ относительно положения этой линии в отсутствие возмущения \hat{H} [3, 4].

Оператор \hat{H} можно записать в виде свертки двух тензорных операторов $T^{(r)}$ и $T^{(p)}$, зависящих соответственно от координат ионов в решетке r и переменных оператора электрического момента p :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \left[\frac{3\pi}{10} \right]^{1/2} \sum_{j>k} \sum_m (-1)^m T_{2(-m)}^{(r)} T_{2m}^{(p)}, \quad T_{20}^{(r)} = \left[\frac{5}{16\pi} \right]^{1/2} \frac{(3z^{jk} - r^{jk})}{r^{jk}}, \\ T_{20}^{(p)} &= -[8/3]^{1/2} [P_0^j P_0^k + 1/2 (P_1^j P_{-1}^k + P_{-1}^j P_1^k)], \quad P_0 = P_z, \\ P_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (P_x + iP_y), \quad P_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (P_x - iP_y), \end{aligned} \quad (1)$$

где (j, k) — индексы для узлов, которые могут быть заняты примесными частицами, r^{jk} — радиус-вектор, z^{jk} — его z -компоненты, \hat{P}^j — оператор электрического момента частицы j .

Результат вычислений имеет вид

$$\begin{aligned} \hbar \langle \Delta\nu \rangle &= \left(\frac{8}{3} \right)^{1/2} Z^{-1} (b^{a_2} - b^{a_1}) |\langle 2 | P_0 | 1 \rangle|^2 \sum_{j(\neq k)} T_{20}^{(r)}, \quad T_{20}^{(r)} = \left[\frac{3}{32} \right]^{1/2} C \times \\ &\times [(L_{z\beta})_z + N_z(j)], \quad Z = \sum_{n=1}^R b^{a_n}, \quad b^{a_n} = \exp [-E_n/kT]; \\ \hbar^2 \langle \Delta\nu^2 \rangle &= \frac{3\pi}{10} Z^{-1} \left\{ \frac{16}{3} (b^{a_1} + b^{a_2}) |\langle 2 | P_0 | 1 \rangle|^3 + \frac{8}{27} b^{a_3} \times \right. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\times \left\langle \left\langle 2 \left| \sqrt{\frac{3}{2}} P_- \left| 3 \right\rangle \right|^4 + \left(\frac{3}{2} b^{a_4} + \frac{8}{27} b^{a_5} \right) \left\langle \left\langle 5 \left| \sqrt{\frac{3}{2}} P_+ \left| 1 \right\rangle \right|^4 \right\rangle \right\rangle \times \\ \times C \sum_{j(\neq k)} T_{20}^{(r)2}, \quad (3)$$

где $R = 6$ — число состояний одной изолированной частицы, $\langle \alpha | \beta \rangle$ — матричный элемент, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, T — температура, C — концентрация частиц, $(L_{\alpha\beta})_z$ — компонента лоренцевского локального поля, $N_z(j)$ — макроскопическое деполяризационное поле, зависящее от формы образца (см. [5], стр. 351).

К (2) и (3) необходимо прибавить вклады, обусловленные спин-спиновыми взаимодействиями, которые вносят вклад в ширину и сдвиг линии парамагнитного резонанса на Cr^{3+} в Al_2O_3 . Эта добавка по величине сравнима с (2) и (3) и была вычислена в работе [6].

Используя значение $|\langle \alpha | P | \beta \rangle| \sim 10^{-20}$ электростатических единиц [2] и значение суммы $\sum_i T_{20}^{(r)2}$ для решетки корунда [6] при $T \rightarrow \infty$, получим $\Delta\nu \sim C \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$

$i(\neq k)$

Величина $\Delta\nu$ отлична от нуля только при температурах $T \leq \hbar/k$. Таким образом, однородная ширина линии $\Delta\nu$ может наблюдаться на эксперименте при $C \sim 1$ при $C \ll 1$ в кристаллах с малым количеством дефектов решетки.

Основной интерес представляет процесс резонансной передачи энергии на оптических частотах за счет взаимодействия а — г. Этим, по-видимому, объясняется укорочение времени оптической продольной релаксации иона Tb^{3+} в $\text{Na}_{0.5}\text{Tb}_{0.5}\text{WO}_4$ при внедрении в кристалл одновременно ионов Eu^{2+} . В нашем случае этот процесс характеризуется временем $\tau \sim (C \cdot 10^{10})^{-1}$. При $C = 10^{-4}$ $\tau \ll \tau_0 \sim 10^{-3}$ сек (время жизни состояний E). Поэтому, как и в магнитном случае [8], возможно управление временем жизни возбужденных уровней путем введения других примесей с подходящим спектром и коротким временем продольной релаксации.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963
- 2 F. Varsanyi, D. L. Wood, A. L. Schawlow, Phys. Rev. Letters, 3, 544 (1959).
- 3 M. McMillan, W. Orecchowski, Canad. J. Phys., 38, 1168 (1960).
- 4 У Х Копвиллем, В Р Нагибarov, ФТТ, 5, 2940 (1963).
- 5 М Н Соен, F. Reif, Solid State Physics, 5, New York, 1957.
- 6 У Х Копвиллем, Р М Минеева, И. Д. Морозова, Парамагнитный резонанс, изд. Казанского университета, 1960, стр. 92
- 7 G. E. Peterson, R M. Bridenbaugh, J. Opt. Soc. Am., 53, 1129 (1963).
- 8 У Х Копвиллем, ФТТ, 3, 1190 (1961)

Казанский физико-технический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
10 марта 1964 г.

УДК 539.284

ВИД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СПИНОВЫХ ЭХО ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИМПУЛЬСОВ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ПОВОРОТА НА 180°

Ю. М. Грязнов, А. А. Частов

Для наблюдения спиновых эхо по методу Карра и Перселла [1] используется последовательность импульсов, состоящая из одного 90° -го импульса и серии 180° -ых. Несоблюдение условия

$$\gamma H_1 \Delta t = \pi, \quad (1)$$

где H_1 — напряженность высокочастотного поля, γ — гиромагнитное отношение, Δt — длительность импульса, приводит к искажению огибающей эхо [2]. Ниже рассматри-

вается вид последовательности спиновых эхо, полученный при использовании импульсов, не удовлетворяющих условию (1). Предполагается, что влиянием релаксационных процессов во время прохождения последовательности импульсов можно пренебречь.

Пусть элементарный объем образца находится в поле $H = H_0 + h$, где H_0 — постоянное магнитное поле, h — неоднородность поля. Через промежутки времени 2τ образец подвергается действию коротких и мощных импульсов с заполнением частотой $\omega_0 = \gamma H_0$. В системе координат v , u , z , вращающейся с угловой скоростью ω_0 , поведение магнитного момента элементарного объема будет следующим. Во время импульса момент повернется вокруг оси v , совпадающей по направлению с напряженностью поля H_1 резонансной поляризации, на угол θ . Поле H_1 и длительность импульса выби-раем такими, что

$$\theta = \gamma H_1 \Delta t = \pi + \varepsilon \quad (2)$$

Заметим, что, строго говоря, ось поворота не совпадает с осью v для отдельных частей образца. Однако, так можно считать, если $H_1 \gg h$. Во время следующего за импульсом промежутка 2τ момент повернется вокруг оси z на угол $2\alpha = \gamma h 2\tau$. В целом благодаря действию импульса и последующего движения в поле H в течение времени 2τ момент повернется вокруг некоторой оси k с направляющими косинусами k_v , k_u , k_z на угол φ . Расчеты дают, что

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 1 - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ k_v &= -A \sin \alpha \sin \frac{\theta}{2}, \\ k_u &= A \cos \alpha \sin \frac{\theta}{2}, \\ k_z &= A \sin \alpha \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$A = \left(1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1/2},$$

или для малых ε

$$\varphi = \varepsilon \cos \alpha, \quad k_v = -\sin \alpha, \quad k_u = \cos \alpha, \quad k_z = \frac{1}{2} \varepsilon \sin \alpha. \quad (4)$$

В новой прямоугольной системе координат ξ , η , ζ , ось ζ которой совпадает с осью поворота k , движение момента под действием последовательности из n импульсов и за время n промежутков длительностью 2τ представляет собой вращение на угол $n\varphi$ вокруг оси ζ .

Таким образом, ход решения оказывается следующим. Начальные составляющие момента v_0 , u_0 , z_0 пересчитываются в начальные составляющие ξ_0 , η_0 , ζ_0 . После поворота на угол $n\varphi$ находятся значения ξ_n , η_n , ζ_n , по которым определяются v_n , u_n , z_n . Затем, повернув момент на угол $\psi = (\alpha/\tau)(2\tau - t)$ вокруг оси z против направления вращения системы координат, найдем проекцию $v(t)$, определяющую величину сигнала спинового эхо после n -го импульса

Для малых ε получаем

$$\begin{aligned} v(t) &= \left[\left(\frac{1}{2} \varepsilon u_0 \sin \alpha - z_0 \cos \alpha \right) \cos \psi - \left(\frac{1}{2} \varepsilon v_0 \sin \alpha + z_0 \sin \alpha \right) \sin \psi \right] \times \\ &\times \sin(n\varepsilon \cos \alpha) + \left[\left(v_0 \cos^2 \alpha + u_0 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \varepsilon z_0 \sin^2 \alpha \right) \cos \psi + \right. \\ &+ \left. \left(v_0 \cos \alpha + u_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} \varepsilon z_0 \cos \alpha \right) \sin \alpha \sin \psi \right] \cos(n\varepsilon \cos \alpha) + \\ &+ \left(-v_0 \sin \alpha + u_0 \cos \alpha + \frac{1}{2} \varepsilon z_0 \sin \alpha \right) \sin(\psi - \alpha). \end{aligned} \quad (5)$$

В эксперименте серии примерно 180°-ых импульсов предшествует импульс, который может быть и не 90°-ым, и промежуток времени τ . Перед этим импульсом элементарный объем вещества имеет момент m_0 , направленный по оси z . Если первый импульс поворачивает момент на угол $\beta \neq 90^\circ$, то начальным состоянием для серии будет

$$v_0 = m_0 \cos \alpha \sin \beta, \quad u_0 = -m_0 \sin \alpha \sin \beta, \quad z_0 = m_0 \cos \beta. \quad (6)$$

Подставляя выражения (6) в (5), найдем для момента времени $t=\tau$:

$$v_\tau = m_0 \sin [\beta - (n\varepsilon \cos \alpha)]. \quad (7)$$

Амплитуда спинового эхо пропорциональна величине

$$V_\tau = \int_0^{+\infty} \int_Q \rho(h) v_\tau dh dq, \quad (8)$$

где $\rho(h)$ — распределение вещества по полю h , dq — элемент объема образца, Q — полный объем образца. Предполагая $\rho(h) = \text{const}$, из (7) и (8) получаем

$$V_\tau = \frac{\pi}{2} \rho M_0 K \sin \beta J_0(n\varepsilon) + \delta M_0, \quad (9)$$

где $J_0(n\varepsilon)$ — функция Бесселя, M_0 — равновесная намагниченность образца, K — цепная часть от $2\Delta\varepsilon/\pi$, $\Delta\varepsilon$ — полный диапазон расстроек, соответствующий пределам неоднородности поля. В условиях опыта K обычно очень велико. Величина δ определяется значением разности $(2\Delta\varepsilon/\pi) - K$ и, следовательно, мала по сравнению с первым членом в (9). Однако для тех эхо, у которых $J_0(n\varepsilon)$ близко к нулю, второй член может значительно изменить величину сигнала.

Экспериментальные данные, приведенные в работе [2], согласуются с полученным результатом (9). Выражение (5) может быть использовано для более подробного исследования формы спиновых эхо.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Y. Carr, F. M. Purcell, Phys. Rev., 94, 630 (1954).
2. S. Meiboom, D. Gill, Rev. Sci. Instr., 29, 688 (1958).

Поступила в редакцию
4 мая 1964 г.

УДК 539.284

К ТЕОРИИ СПИНОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

P. M. Умарходжасаев

В настоящем сообщении рассматриваются некоторые вопросы теории спиновых генераторов: механизм ограничения амплитуды, влияние параметров радиосхемы на частоту и амплитуду, метод съема информации; произведен расчет стационарной частоты генератора.

1. Инерционная нелинейность. Спиновый генератор с линейным усилителем в цепи обратной связи можно рассматривать как генератор с инерционной нелинейностью. Рассмотрим такое устройство на примере генератора Шмельцера [1]. При условии, что в цепи обратной связи находится идеальный усилитель, автоколебательная система описывается системой уравнений

$$\dot{M}_y + \dot{M}_y (2\delta_2 - k\gamma M_z) + M_y \{ \omega_0^2 + \delta_2^2 - \gamma k [\dot{M}_z + \delta_2 M_z] \} = 0; \quad (1)$$

$$\dot{M}_z = -\gamma k M_y^2 + \delta_1 (M_0 - M_z); \quad \delta_i = \frac{1}{T_i} \quad (i=1,2); \quad (2)$$

k — коэффициент, пропорциональный коэффициенту усиления усилителя. Уравнение (1) получено из первых двух уравнений Блоха [2—4]. Уравнение (2) (третье уравнение Блоха) описывает поведение z -компоненты вектора намагничения M . В стационарном режиме

$$M_y = M_{\perp} \cos(\omega t); \quad M_z = M_0 - \gamma k \frac{M_{\perp}^2}{2\delta_1} \gamma k \frac{M_{\perp}^2}{2} \frac{\delta_1 \cos(2\omega t) + 2\omega \sin(2\omega t)}{\delta_1^2 + 4\omega^2}. \quad (3)$$

При больших ω и $\omega \gg \delta$ (что всегда справедливо) M_z определяется только амплитудой, а не мгновенным значением величины M_y ; при стационарном режиме M_z — константа, т. е. z -компоненты вектора M является инерционным элементом.

Решая систему (1), (2), получим стационарную частоту

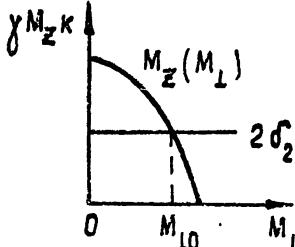


Рис. 1

$$\omega_{ct}^2 = \omega_0^2 + \delta_2^2 - \gamma \delta_2 M_z k \quad (4)$$

и стационарную амплитуду

$$\begin{cases} 2\delta_2 - \gamma M_z k = 0 \\ -\frac{1}{2}k_1 M_{\perp}^2 + \delta_1(M_0 - M_z) = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Систему (5) удобно решать графически (рис. 1; $M_{\perp 0}$ — амплитуда генерации).

2. Влияние параметров радиосхемы на частоту и амплитуду спинового генератора с инерционной нелинейностью. Спиновый генератор с настроенным контуром на входе усилителя описывается системой уравнений

$$\dot{M}_y + 2\delta \dot{M}_y + M_y(\omega_0^2 + \delta^2 + \gamma^2 H_x^2) = \gamma M_z H_x, \quad (6)$$

$$\dot{M}_z = -\gamma H_x M_y + \delta(M_0 - M_z), \quad (7)$$

$$H_x + \dot{H}_x 2\delta_k + \omega_k^2 H_x = -B \omega_k^2 \dot{M}_y. \quad (8)$$

Уравнения (6), (7) получены из обобщенных уравнений Блоха [5]. Уравнение (8) описывает избирательный элемент в цепи обратной связи [10] ($\delta = 1/T$, $T_1 = I_2 = T$, δ_k , ω_k , B — параметры колебательного контура). Стационарное решение ищется в виде

$$H_x = H_1 \cos(\omega t), \quad M_y = u \sin(\omega t) - v \cos(\omega t)$$

Решение дает стационарную частоту

$$\omega_{ct}^2 = \frac{\omega_0^2 + \delta^2 + \frac{\gamma^2 H_1^2}{2} + \frac{\delta}{\delta_k} \omega_k^2}{1 + \frac{\delta}{\delta_k}}$$

и стационарную амплитуду

$$\frac{\delta}{\delta_k} \frac{(\Omega^2 - \omega_k^2)^2}{\omega_k^2} + \frac{\delta_k}{\delta} \gamma^2 H_1^2 = -B \omega_k^2 \gamma M_0 - 4\delta_k \delta,$$

где $\Omega^2 = \omega_0^2 + \delta^2 + \gamma^2 H_1^2 / 2$, $\delta/\delta_k = Q_{\text{радио}} / Q_{\text{ядер}} — отношение добродостей радиосхемы и ядерной линии. При $\gamma^2 H_1^2 / 2 \ll \delta^2 \ll \omega_0^2$ уравнение для стационарной амплитуды является уравнением эллипса.$

3. Стационарная частота спинового генератора [6] (рис. 2). На ядра наложены два переменных магнитных поля: первенцикулярное к H_0 поле высокой частоты $H_1 \cos(\omega t)$ от независимого генератора, параллельное H_0 поле низкой частоты $H_m \sin(pt)$ через цепь обратной связи. На контуре из-за нелинейных свойств ядерной системы появляется напряжение ЯМР сигнала на частоте $\omega + p$ [7]. После смесителя выделяется напряжение ЯМР сигнала на частоте p , усиливается и подается обратно на ядра. Напряжение на входе смесителя

$$e_{\text{я}} = B \dot{M}_x, \quad e_{\text{опорн}} = E_1 \cos(\omega t),$$

$$M_x = u(t) \cos(\omega t) - v(t) \sin(\omega t)$$

(u, v — функции p). Напряжение на выходе смесителя $e_{\text{вход}} = \beta e_{\text{опорн}} e_x$. Напряжение на контуре I e .

Уравнения, описывающие эту схему при наличии ограничителя, имеют вид

$$\ddot{e} + 2\delta_k \dot{e} + p_k^2 e = -(\beta e_{\text{опорн}} e_x)' \quad (9)$$

$$\dot{p} + p[\delta_2 + j\Delta\omega(t)] = -\gamma H_1 M_z, \quad (10)$$

где $p = v + ju$,

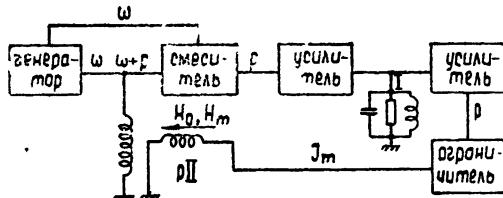


Рис. 2.

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega + \gamma H_m, \quad H_m = \alpha J_m - \alpha S e; \quad (11)$$

(10) — уравнение Блоха во «вращающейся» системе координат [11]. Решение дает стационарную частоту

$$p = \frac{\pm (\omega_0 - \omega) + (\delta_2/\delta_k) p_k}{1 + \delta_2/\delta_k}.$$

Знак \pm выбирается способом включения катушки II

4. Стационарная частота спинового генератора, генерирующего колебания с частотой ларморовской прецессии [8] (рис. 3). На систему ядерных спинов действуют два переменных поля: поле высокой частоты ω , перпендикулярное H_0 , и поле низкой

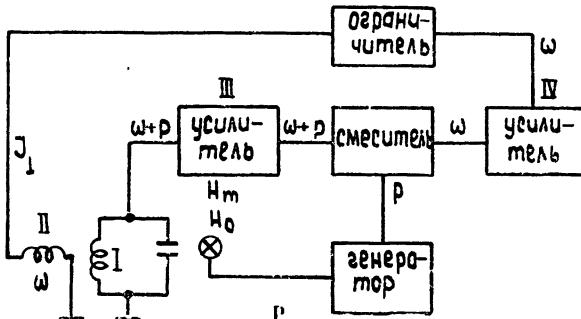


Рис. 3.

частоты p от независимого генератора, параллельное H_0 . На контуре I из-за нелинейных свойств системы ядерных спинов появляется напряжение сигнала ЯМР на частоте $\omega + p$ [7]; после гетеродинирования усиленный сигнал на частоте ω подается на ядра. Напряжение на контуре I есть e ,

$$J_{\perp} = \beta S e K e_{\text{опорн}}, \quad e_{\text{опорн}} = A \sin(pt),$$

β — коэффициент нелинейного преобразования смесителя, K — коэффициент усиления усилителя III, S — крутизна лампы усилителя IV. При наличии в цепи обратной связи ограничителя уравнения, описывающие этот генератор, имеют вид

$$\ddot{e} + 2\delta_k \dot{e} + p_k^2 e = -B \omega_k^2 \dot{M}_y;$$

$$\dot{M}_x = \omega_0(t) M_y - \delta_2 M_x;$$

$$\dot{M}_y = \gamma H_x M_z - \omega_0(t) M_x - \delta_2 M_y;$$

$$\dot{M}_z = 0, \quad \omega_0(t) = \omega_0 + \gamma H_m \sin(pt);$$

$$H_x = \alpha J_1 = \beta S e \alpha K e_{\text{опорн}}.$$

Решение дает стационарную частоту

$$\omega = \frac{\omega_0 + \omega_k \delta_2 / \delta_k + p \delta_2 / \delta_k}{1 + \delta_2 / \delta_k}, \quad \omega_k + p \approx \omega_0$$

5. Использование «затягивания» частоты спинового генератора для слежения за величиной магнитного поля $H_0 = \omega_0 / \gamma$. Во все приведенные формулы для стационарной частоты спинового генератора входит член $\sim (\delta_2 / \delta_k) \omega_k$, т. е. при $\omega_k \neq \omega_0$ частота спинового генератора отлична от частоты ларморовской прецессии («затягивание»). Это позволяет, вводя дополнительную модуляцию магнитного поля (как в стабилизаторе Паккарда [9]), получить сигнал ошибки, пропорциональный отклонению ω_0 от ω_k .

Рассмотрим систему ядер, находящуюся под действием полей $H_1 \cos(\omega t)$ и $H_m \sin(pt)$ (ω — частота спинового генератора). Уравнения Блоха в полярной системе координат имеют вид

$$\dot{p}_0 + \delta_2 p_0 = \gamma M_z H_1 \cos \varphi;$$

$$\dot{p}_0 (\Delta \omega + \dot{\varphi}) = -\gamma M_z H_1 \sin \varphi;$$

$$\dot{M}_z + \delta_1 M_z + \gamma p_0 H_1 \cos \varphi = \delta_1 M_0,$$

где

$$p_0 = -\sqrt{v^2 + u^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{v}, \quad \delta_i = \frac{1}{T_i} \quad (i=1,2).$$

При малом H_1

$$M'_z = \text{const}, \quad -\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta \omega + 2\dot{\varphi}}{\delta_2 - (\Delta \omega + \dot{\varphi})(\Delta \omega + \varphi)^{-1}},$$

$$\Delta \omega = \Delta \omega_0 + \gamma H_m \sin(pt), \quad \Delta \omega_0 = (\delta_2 / \delta_k)(\omega_0 - \omega_k).$$

При малом γH_m и $\delta_2 \gg p$ имеем

$$v = \frac{\gamma^2 H_1 H_m M_z}{\delta_2^2} \sin(pt) \frac{-\Delta \omega_0 / \delta_2}{[1 + (\Delta \omega_0 / \delta_2)^2]^2}.$$

Из выражения для v видно, что $v = 0$ при $\Delta \omega_0 = 0$. При уходе частоты ω_0 от ω_k появляется сигнал ошибки, знак которого зависит от направления сдвига.

ЛИТЕРАТУРА

- Ch. Schmelzér, Lectures on theory and design of an alternating-gradient proton synchrotron, Geneva, 1953.
- F. Bloch, Phys. Rev., **70**, 460 (1946).
- С. С. Курочкин, Радиотехника и электроника, № 2, 198 (1958).
- Б. Ф. Амирханов, Труды Уральского политехнического института, 1961.
- А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
- К. В. Владимирский, Б. А. Лабзов, ПТЭ, № 4, 59 (1961).
- W. Anderson, NMR and EPR spectroscopy, Oxford, 1960
- Р. М. Умарходжаев, Авт. свид. № 826987/26-25.
- M. E. Packard, Rev. Sci. Instr., **19**, 435 (1948).
- К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, ГИТГЛ, М., 1952.
- B. A. Jacobsohn, R. K. Wangsness, Phys. Rev., **73**, 942 (1948).

УДК 621.371 167

**ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ С ДИЭЛЕКТРИКОМ И ЭКРАНОМ
(СЛУЧАЙ НОРМАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ)**

Л. Н. Литвиненко

В настоящее время появились работы, посвященные теории дифракции электромагнитных волн на плоских металлических периодических решетках специальной формы [1, 2], на каждом периоде которых расположены две идеально проводящие и бесконечно тонкие ленты различной ширины. Здесь мы рассмотрим дифракцию нормально падающей электромагнитной волны на решетке специальной формы с прилегающим диэлектрическим слоем и на экранированной решетке с диэлектрическим заполнением пространства между решеткой и экраном (вектор E параллелен лентам решетки). В нашем случае решетка составлена из лент чередующейся ширины (на периоде решетки две ленты), расположенных так, что щели между лентами одинаковы; однородный изотропный диэлектрик характеризуется комплексной диэлектрической постоянной $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$. Подобные структуры могут найти ряд важных применений.

1. Решетка специальной формы с периодом l расположена в плоскости xOy , ленты решетки параллельны оси Ox , под решеткой ($z < 0$) на расстоянии a может находить-

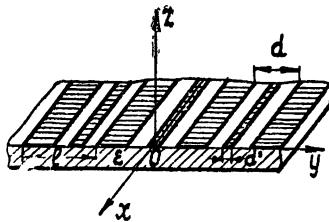


Рис. 1.

ся металлический экран (с идеальной проводимостью), пространство $0 > z > -a$ заполнено диэлектриком (рис. 1). Сверху нормально к решетке падает плоская электромагнитная волна, составляющие которой

$$E_x^{(\text{пад})} = e^{-ikz}; \quad E_y^{(\text{пад})} = E_z^{(\text{пад})} = 0 \quad (1)$$

(временной множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем). Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке.

В силу симметрии системы искомое электрическое поле имеет такую же поляризацию, т. е. отлична от нуля только E_x -составляющая электрического поля, причем эта составляющая постоянна в направлении Ox и периодична (с периодом l) в направлении Oy . Поэтому ее целесообразно искать в виде ряда Фурье:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(z) e^{(2\pi in/l)y},$$

записывая поле в виде

$$E_x = e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\gamma_n z} e^{(i2\pi n/l)y} \quad (z > 0),$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(B_n e^{-i\gamma_n^{(1)} z} + C_n e^{i\gamma_n^{(1)} z} \right) e^{(i2\pi n/l)y} \quad (0 > z > -a), \quad (2)$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-i\gamma_n z} e^{(i2\pi n/l)y} \quad (z < -a),$$

где γ_n и $\gamma_n^{(1)}$ находятся из волнового уравнения:

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - (2\pi n/l)^2}; \quad \gamma_n^{(1)} = \sqrt{k^2 \epsilon - (2\pi n/l)^2}.$$

Под γ_n мы будем понимать то значение корня, при котором мнимая часть γ_n положительна; если $\operatorname{Im} \gamma_n = 0$, то $\operatorname{Re} \gamma_n > 0$.

2. В случае экранированной решетки $D_n \equiv 0$. Задача состоит в отыскании коэффициентов A_n , B_n , C_n и D_n . Используя обычный метод «сшивания» касательных составляющих полей E и H , легко получить соотношения, связывающие коэффициенты A_n , B_n и C_n :

$$B_n \alpha_n + C_n \beta_n = 0, \quad B_0 \left(1 - \frac{\alpha_0}{\beta_0}\right) = 1 + A_0, \quad A_n = B_n \left(1 - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right) \quad (3)$$

$$(\alpha_n = e^{i \gamma_n^{(1)} a}; \quad \beta_n = e^{-i \gamma_n^{(1)} a}),$$

и функциональные соотношения для определения коэффициентов:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in2\pi y/l} = 0 \quad (\text{на металле}),$$

$$\sum_{n \neq 0} F_n |n| e^{in2\pi y/l} = -i \chi + i \chi F_0 T_0 + \sum_{n \neq 0} F_n |n| \rho_n e^{in2\pi y/l} \quad (\text{на щелях}). \quad (4)$$

Здесь использованы следующие обозначения.

$$F_n = B_n \left(1 - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\right), \quad T_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma_n^{(1)}}{\gamma_n} \frac{\beta_n + \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n}\right),$$

$$\rho_n = 1 + i \sqrt{\left(\frac{\chi}{n}\right)^2 - 1} T_n$$

($\chi = l/\lambda$, λ — длина падающей электромагнитной волны). При этом $\gamma_n T_n = i(1 - \rho_n) \times 2\pi |n| l^{-1}$; $T_n = T_{-n}$. Ометим, что $\rho_n \rightarrow 0$ как $1/n^2$ при $|n| \rightarrow \infty$.

3. Для решетки с диэлектрическим слоем без экрана соотношения между коэффициентами имеют вид

$$1 + A_0 = B_0 + C_0, \quad A_n = B_n + C_n \quad (n \neq 0),$$

$$B_n = \frac{1}{2} D_n \frac{\eta_n}{\alpha_n} \left(1 + \frac{\gamma_n}{\gamma_n^{(1)}}\right), \quad C_n = \frac{1}{2} D_n \frac{\eta_n}{\beta_n} \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_n^{(1)}}\right),$$

$$\alpha_n = e^{i \gamma_n^{(1)} a}, \quad \beta_n = e^{-i \gamma_n^{(1)} a}, \quad \eta_n = e^{i \gamma_n a},$$

а функциональные соотношения таковы:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n S_n e^{in2\pi y/l} = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (5)$$

$$\sum_{n \neq 0} D_n |n| S_n e^{in2\pi y/l} = -i \chi + i \chi D_0 \Gamma_0 + \sum_{n \neq 0} D_n |n| S_n \Gamma_n e^{in2\pi y/l} \quad (\text{на щелях}).$$

Здесь использованы следующие обозначения.

$$S_n = \eta_n \left(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2} + \frac{\gamma_n}{\gamma_n^{(1)}} \frac{\beta_n - \alpha_n}{2}\right), \quad \Gamma_0 = S_0 - \frac{\eta_0 (\beta_0 - \alpha_0)}{2} \left(\frac{1 - \varepsilon}{2V\varepsilon}\right),$$

$$\rho_n = 1 + i \sqrt{\left(\frac{\chi}{n}\right)^2 - 1} \quad (n \neq 0), \quad \Gamma_n = \rho_n + (1 - \rho_n) \frac{\gamma_n}{\gamma_n^{(1)}} \frac{\eta_n (\beta_n - \alpha_n)}{2S_n} \left[\frac{1 - (\gamma_n^{(1)}/\gamma_n)^2}{2}\right].$$

$$\varepsilon = l/\lambda$$

(при этом $\gamma_n = i(1 - \rho_n) 2\pi |n| l^{-1}$). Так как в этом случае $\Gamma_n \rightarrow 0$ как $1/n^2$ при $|n| \rightarrow \infty$, то системы (4) и (5) оказываются аналогичными.

4. В работе [3] предложен метод, основанный на решении задачи сопряжения [4] (или, как ее иногда называют, задачи Римана—Гильберта), с помощью которого системы, подобные (4), (5), заменяются бесконечными системами алгебраических уравнений

с быстро убывающими коэффициентами. В нашем случае для определения амплитуд волн дифракционного спектра с применением этого метода можно получить системы для экранированной решетки:

$$X_m = i \times T_0 F_0 V_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n p_n [V_m^n + V_m^{-n}] + 2(C_2 R_m + C_1 R_{m-1}) - i \times V_m^0 \quad (m=1, 2, \dots),$$

$$O = i \times T_0 F_0 V_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n p_n [V_0^n + V_0^{-n}] + 2(C_2 R_0 + C_1 R_{-1}) - i \times V_0^0, \quad (6)$$

$$-F_0 = i \times T_0 F_0 V_{[s]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n p_n [V_{[s]}^n + V_{[s]}^{-n}] + 2(C_2 R_{[s]} + C_1 R_{[s]}^{(1)}) - i \times V_{[s]}^0,$$

$$-F_0 = i \times T_0 F_0 W_{[s]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n p_n [W_{[s]}^n + W_{[s]}^{-n}] + 2(C_2 \tilde{R}_{[s]} + C_1 \tilde{R}_{[s]}^{(1)}) - i \times W_{[s]}^0$$

(здесь $X_n = F_n n$) и для решетки с диэлектриком:

$$X_m = i \times \Gamma_0 D_0 V_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \Gamma_n [V_m^n + V_m^{-n}] + 2(C_2 R_m + C_1 R_{m-1}) - i \times V_m^0 \quad (m=1, 2, \dots),$$

$$O = i \times \Gamma_0 D_0 V_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \Gamma_n [V_0^n + V_0^{-n}] + 2(C_2 R_0 + C_1 R_{-1}) - i \times V_0^0,$$

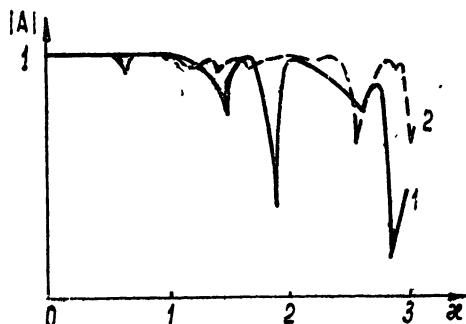
$$-S_0 D_0 = i \times \Gamma_0 D_0 V_{[s]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \Gamma_n [V_{[s]}^n + V_{[s]}^{-n}] + 2(C_2 R_{[s]} + C_1 R_{[s]}^{(1)}) - i \times V_{[s]}^0,$$

$$-S_0 D_0 = i \times \Gamma_0 W_{[s]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \Gamma_n [W_{[s]}^n + W_{[s]}^{-n}] + 2(C_2 \tilde{R}_{[s]} + C_1 \tilde{R}_{[s]}^{(1)}) - i \times W_{[s]}^0$$

(здесь $X_n = D_n S_n n$). В бесконечных системах (6) и (7) величины C_1 и C_2 суть неизвестные промежуточные константы, а коэффициенты $V_m^n, R_m, V_{[s]}^n, R_{[s]}, \tilde{R}_{[s]}, R_{[s]}^{(1)}, \tilde{R}_{[s]}^{(1)}$ совпадают с коэффициентами системы для задачи дифракции на аналогичной решетке, помещенной в свободном пространстве (см [?]).

Так как величины p_n и Γ_n стремятся к нулю при $|n| \rightarrow \infty$, то можно положить $p_n = 0$ и $\Gamma_n = 0$ при $|n| > M$ и решать получающуюся таким образом конечную систему уравнений (метод редукции). Численное решение таких систем было проведено

Рис. 2 Зависимость коэффициента отражения $|A_0|$ от частоты $\varepsilon'' = 0,001$, $1 - \varepsilon' = 1$; $2 - \varepsilon' = 10$.



при $M = 9$. Результаты расчетов представлены на рис. 2, 3. Для экранированной решетки (рис. 2) приведены зависимости коэффициента отражения $|A_0|$ от частоты ε'' при различных значениях параметров диэлектрического слоя ε' и ε'' (параметры решетки: $\cos(\pi d/l) = 0,01$, $\cos(\pi d'/l) = 0,95$; $a/l = 0,3$; см. рис 1). Для решетки с диэлектриком (рис. 3) приведена зависимость коэффициента прохождения $|D_0|$ от ε'' для различных значений a/l — относительной толщины диэлектрика; при этом $\cos(\pi d/l) = -0,707$, $\cos(\pi d'/l) = 0,707$, $\varepsilon' = 2$, $\varepsilon'' = 3 \cdot 10^{-3}$.

Как видно из рисунков, эти зависимости в случае присутствия диэлектрического слоя с потерями носят явно выраженный резонансный характер; при значениях a ,

близких к длине волны, эта зависимость сильнее. Так как длина волны в диэлектрике уменьшается с ростом ϵ' , экстремумы зависимостей коэффициентов отражения (прохождения) смещаются в сторону меньших ω (более длинных волн) с увеличением ϵ' . При этом ширина полосы поглощения увеличивается при больших ϵ'' .

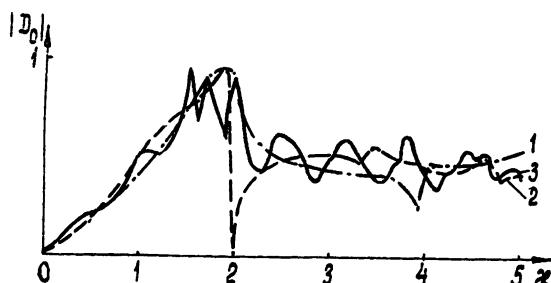


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения $|D_0|$ от частоты ($1-a/l=1/16$; $2-a/l=1/8$; $3-a/l=1/2$).

Заметим, что при рассмотрении дифракции на системах с диэлектриком мы не накладывали ограничений на характер комплексной диэлектрической постоянной диэлектрика; поэтому приведенные выше системы (6) и (7) пригодны и для так называемых «оптически активных» сред, т. с. сред с отрицательными значениями ϵ'' .

В заключение автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность В. П. Шестопалову за ценные указания, которыми он воспользовался при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Г. Н. Гестрин, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов, Уч. зап., ХГУ, сер. матем., 32, 121 (1963).
- 2 Л. Н. Литвиненко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, (в печати).
- 3 З. С. Аграпонович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, 381 (1962).
- 4 Н. И. Мусхелишивили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962, стр. 310.

Харьковский институт горного машиностроения,
автоматики и вычислительной техники

Поступила в редакцию
9 апреля 1964 г

УДК 621.372.853.32 09

О НОРМАЛЬНЫХ ВОЛНАХ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ПЛАЗМОЙ, ПРИ УЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

В. Я. Эйдман

Как известно, при учете пространственной дисперсии в среде появляется возможность излучения новых типов нормальных волн (например, продольной волны в изотропной плазме). Однако до сих пор в основном рассматривался учет пространственной дисперсии для безграничной или полубесконечной плазмы. Между тем в лабораторных условиях, как правило, имеют дело с плазмой, находящейся в закрытых системах, например, в волноводах. Чтобы выяснить имеющие здесь место особенности, в настоящей статье рассматривается задача о нормальных волнах в круглом волноводе, заполненном изотропной плазмой при учете слабой пространственной дисперсии. В статье рассматривается также вопрос об излучении этих волн простейшими излучателями: осциллятором, ориентированным параллельно оси волновода, и зарядом, движущимся с постоянной скоростью вдоль оси волновода.

Напряженность электрического поля при учете слабой пространственной дисперсии удовлетворяет уравнениям [1]

$$\Delta E_1 + k_1^2 E_1 = 0; \quad \Delta E_2 + k_2^2 E_2 = 0, \quad (1)$$

где

$$E = E_1 + E_2; \quad \operatorname{div} E_1 = 0, \quad \operatorname{rot} E_2 = 0; \quad k_1^2 = (\omega^2/c^2) \epsilon;$$

$$k_2^2 = \epsilon/\beta; \quad \epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2; \quad \beta = 3v_T^2/\omega^2; \quad v_T^2/c^2 \ll 1;$$

$$|\omega - \omega_0| \ll \omega_0,$$

ω_0 — лэнгмюровская частота, а v_T — средняя тепловая скорость электронов плазмы

Уравнения (1) необходимо дополнить граничными условиями при $\rho = a$: $E_z = E_\varphi = 0$ (стенки волновода предполагаются идеально проводящими, a — радиус волновода). В качестве третьего граничного условия положим $j_\rho (\rho = a) = 0$ (j — плотность тока в плазме, наведенная электрическим полем волны*) [2, 3]. В рассматриваемом случае слабой пространственной дисперсии это означает, что $E_\rho (\rho = a) = 0$.

Действительно, в случае плоской границы при слабой пространственной дисперсии проводимости для поперечных и продольных плоских волн $\sigma_\perp \approx \sigma_{||} \approx \omega i/4\pi$ с точностью до членов порядка ϵ по сравнению с единицей, так как диэлектрические проницаемости

$$\epsilon = 1 + 4\pi i \sigma_\perp / \omega \ll 1; \quad \epsilon_{||} = 1 + 4\pi i \sigma_{||} / \omega = \epsilon - \beta^2 k^2 = 0.$$

Аналогичный результат получается, разумеется, и для случая произвольной границы, так как в интегралах по $d\mathbf{k}$ для токов $J_{n||}$ и $J_{n\perp}$ на границе σ_\perp и $\sigma_{||}$, равны $\omega i/4\pi$, могут быть вынесены за знаки интегралов.

Если записать решение уравнений (1) в виде

$$E_{zm} = e^{-i(\varphi m - k_z z)} \{ -J_m(g_1 \rho) g_1 A_{1m} + J_m(g_2 \rho) k_z A_{3m} \}; \\ E_{\rho m} = e^{-i(\varphi m - k_z z)} \left\{ i J'_m(g_1 \rho) k_z A_{1m} + \frac{mk_1}{\rho g_1} J_m(g_1 \rho) A_{2m} + i J'_m(g_2 \rho) g_2 A_{3m} \right\}; \quad (2)$$

$$E_{\varphi m} = e^{-i(\varphi m - k_z z)} \left\{ \frac{m}{\rho g_1} J_m(g_1 \rho) k_z A_{1m} - ik_1 J'_m(\rho g_1) A_{2m} + \frac{m}{\rho} J_m(g_2 \rho) A_{3m} \right\}$$

($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $g_1 = \sqrt{k_1^2 - k_z^2}$, $g_2 = \sqrt{k_2^2 - k_z^2}$, J_m — функция Бесселя, $J'_m(x) = dJ_m/dx$), то произвольные постоянные A_{im} ($i = 1, 2, 3$) можно определить из указанных выше краевых условий. В результате для величин A_{im} будет иметь три однородных уравнения. Равенство нулю детерминанта этой системы уравнений дает дисперсионное соотношение для волн, распространяющихся в волноводе:

$$\Delta(\omega, k_z) = \frac{k_z}{\sqrt{k_1^2 - k_z^2}} \left[I_{m1}^2 - \frac{m^2}{a^2 g_1^2} \right] + \frac{\sqrt{k_2^2 - k_z^2}}{k_z} \left[I_{m1} I_{m2} - \frac{m^2}{a^2 g_2 g_1} \right] = 0. \quad (3)$$

Здесь $I_{m1} = J'_m(ag_1)/J_m(ag_1)$; $I_{m2} = J'_m(ag_2)/J_m(ag_2)$. Используя асимптотические представления для функций Бесселя, легко показать, что для холодной плазмы ($\beta = 0$, $k = \omega \sqrt{\epsilon}/c$; $k_z \rightarrow \infty$) полученное дисперсионное уравнение (3) переходит в обычное соотношение для круглого волновода, заполненного диэлектриком:

$$J_m \left(a \sqrt{k_1^2 - k_z^2} \right) J'_m \left(a \sqrt{k_1^2 - k_z^2} \right) = 0.$$

Действительный корень уравнения (3) $k_z = k_{z0}$ отвечает распространяющейся волне, а указанная выше система дает при $k_z = k_{z0}$ значения двух коэффициентов A_{ml} , выраженных через произвольный третий коэффициент. Например, если k_{z0} таково, что $J_m(ag_1) J'_m(ag_1) \neq 0$, то поле нормальной волны записывается следующим образом:

$$E_l = \{ E_\rho; E_\varphi; E_z \} = \left\{ -i J'_m(\rho g_1) k_z \lambda_1 - \frac{mk_1}{\rho g_1} J_m(\rho g_1) \lambda_2 - i J'_m(g_2 \rho) g_2; \right. \quad (4)$$

$$\left. \frac{m}{\rho g_1} J_m(g_1 \rho) k_z \lambda_1 - ik_1 J'_m(g_1 \rho) \lambda_2 + \frac{m}{\rho} J_m(g_2 \rho); \right.$$

$$\left. - J_m(g_1 \rho) g_1 \lambda_1 + J_m(g_2 \rho) k_z \right\};$$

* Отметим здесь, что результаты, полученные в [3], также справедливы лишь в случае слабой пространственной дисперсии.

где

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= J_m(g_2 a) k_z / J_m(g_1 a) g_1, \\ \lambda_2 &= m J_m(g_2 a) k_1 / i a J'_m(g_1 a) g_1^2\end{aligned}$$

(все величины берутся при значении $k_z = k_{z0}$).

Из дисперсионного соотношения (3) следует, что в рассматриваемом волноводе могут распространяться волны, которые без учета пространственной дисперсии не могли бы существовать. Так расчет для аксиально-симметричного случая ($m = 0$) показывает, что существуют корни уравнения (3), которые при значениях параметров $a = 1$, $k_1 = 1/a$, $k_2 = 10/a$ равны $k_z = 7,859$; $9,634$. Легко видеть, что если пренебречь пространственной дисперсией, то для указанного случая $a = k_1^{-1} = 1$, волна вообще не может существовать в волноводе. Для случая $a = 10$, $k_1 = 1/a$, $k_2 = 10/a$, $m = 0$ первые 6 корней уравнения (3) таковы 3,213, 4,042; 4,710, 5,262, 5,745, 6,173.

Далее, можно решить задачу о возбуждении нормальных волн в волноводе заданным током J_B . Так для величины энергии, излучаемой за период осциллятором, колеблющимся вдоль оси волновода $\left(j_{zs} = j_0 \frac{\delta(\rho)}{\rho} \delta(z) e^{-i\omega t}\right)$ будем иметь выражение

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{\pi j_0^2}{2} \sum_s \left| \operatorname{Re} \left\{ - \left[J'_{02} g_2 + \frac{J'_{01}}{g_1} k_z^2 \right] \left[g_1^2 H_{01}^{(1)} + k_z^2 H_{02}^{(1)} \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2k_z^2}{\pi i} (J_{02} - J_{01}) [\operatorname{sgn} p_1 \sqrt{p_1} K_{11} - \operatorname{sgn} p_2 \sqrt{p_2} K_{1,2}] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{1}{\omega \epsilon d \Delta / d k_z} \right|_{k_z = k_{zs}} \equiv \frac{\pi j_0^2}{2} \sum_s F(k_{zs}), \right.\end{aligned}\tag{5}$$

где k_{zs} — корень уравнения (3) при $m = 0$, т. е.

$$\Delta(\omega, k_z) = - [J_{01} J'_{02} g_2 + J_{02} J'_{01} k_z^2 / g_2] = 0;$$

$$J_{0i} \equiv J_0(a g_i); i = 1, 2; p_i = -g_i^2,$$

$H_{0i}^{(1)} = H_0^{(1)}(a g_i)$ — функция Ханкеля, $K_{1i} = K_1(\operatorname{sgn} p_i \sqrt{p_i} a)$ — функция Макдональда, $K_1(z) = -(\pi/2) H_1^{(1)}(iz)$.

Для холодной плазмы ($\beta = 0$, $k_{||} = \infty$) выражение (5) переходит в соответствующую формулу для круглого волновода, заполненного диэлектриком:

$$dW/dt = \left(\pi j_0^2 / \omega \epsilon a \right) \sum_s \left| \left(\frac{g^3}{k_z} \right) \left[N'_0(ag) / J_1(ag) \right] \right|_{k_z = k_{zs}},$$

где k_{zs} — корень уравнения

$$J_0 \left(a \sqrt{k^2 + k_z^2} \right) = 0, g = g_1; k = k_1.$$

Аналогичным образом легко получить и выражение, соответствующее (5), для случая движения электрона вдоль оси волновода, т. е. для черенковского излучения нормальных волн в волноводе. В результате для случая черенковского возбуждения волновода получается формула, аналогичная (5), но с заменой $\omega = k_z v$, $j_0 = ev$ (v — скорость электрона).

Автор признателен В. Л Гинзбургу за дискуссию, а также В. Б. Гильденбургу и И. Г. Кондратьеву, сделавшим ряд замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. Э. А. Канер, В. М. Яковенко, ЖЭТФ, 42, 471 (1962).
3. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, 478 (1962).

УДК 621.385.642

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ МАГНЕТРОНЕ В СТАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

Л. М. Грошков

В работе [1] методом зондирования магнетрона продольным электронным лучом, касающимся поверхности катода, было показано, что в нижней части электронного облака траектории электронов представляют собой петли, очень близкие к первым петлям траекторий, определяемых теорией бидромического состояния пространственного заряда. В настоящей работе предпринята попытка экспериментального исследования пространственного заряда в верхней части электронного облака магнетрона тем же методом электронно-оптического «просвечивания». Для этого в магнетрон на некотором расстоянии от катода вводится второй продольный зондирующий электронный луч. Отклонение этого луча в поле (в непосредственной близости от вершины первой петли и выше ее), наблюдаемое на флюресцирующем экране, позволяет судить о характеристиках этого поля, в частности, о распределении потенциала.

Эксперимент проведен при помощи специальной разборной лампы с двумя продольными зондирующими лучами. Ее конструкция совпадает в основном с конструкцией лампы, описанной в [1]. Кроме дополнительного устройства, необходимого для формирования второго зондирующего луча, лампа содержит две пары металлических колец, с помощью которых можно задавать потенциал на краях магнетрона. Это позволяет существенно снизить влияние краевых полей на отклонение зондирующего луча.

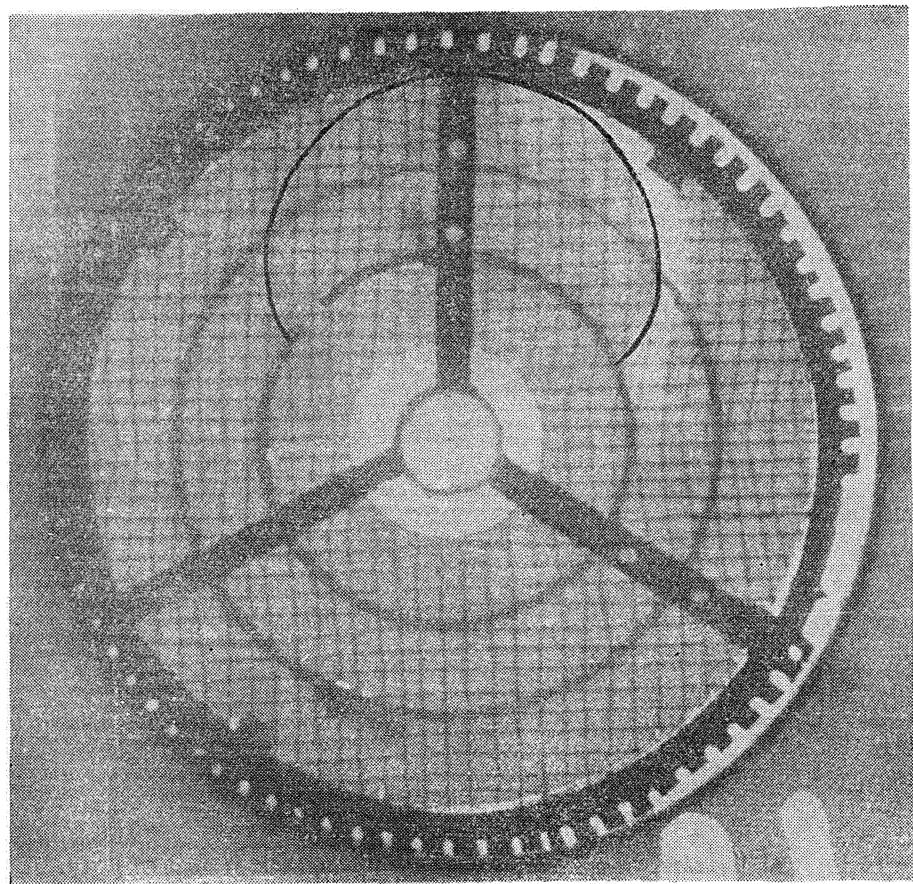


Рис. 1. Экспериментальные (белые) и теоретические (черные) траектории зондирующих лучей:

а) $H = 68,5$ эрстед, $V_a = 650$ в. Теоретическая кривая рассчитана в предположении однопоточного (брюллиденовского) состояния пространственного заряда.

Оценки, проведенные путем сравнения экспериментальных кривых, описываемых зондирующими лучами на экране, с их расчетными траекториями для случая, когда в магнетроне отсутствует пространственный заряд, показывают, что ошибка измерений не превышает пяти процентов.

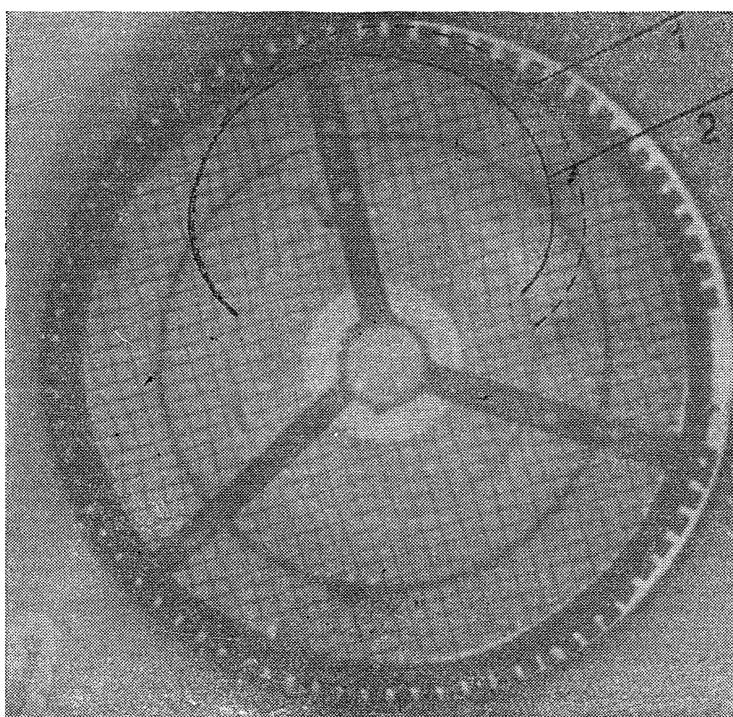


Рис. 1. Экспериментальные (белые) и теоретические (черные) траектории зондирующих лучей:

б) $H=68,5$ эрстед, $V_a=750$ в. Теоретическая кривая 1 рассчитана в предположении бидромического состояния пространственного заряда с двухпетлевыми траекториями электронов. Теоретическая кривая 2 рассчитана в предположении двухпоточного состояния.

На фотографиях рис. 1а, б, в представлены кривые, полученные на экране магнетрона в режиме полного пространственного заряда при нескольких значениях анодного напряжения и магнитного поля. На этих же фотографиях тушью нанесены теоретические кривые, рассчитанные в предположении об однопоточном состоянии пространственного заряда (рис. 1а), двухпоточном состоянии (рис. 1б, кривая 2) и бидромическом состоянии (рис. 1б, кривая 1 и рис. 1в, обе кривые). Как видно из рис. 1, распределение потенциала в верхней части электронного облака, так же как и в нижней его части, близко к распределению, описанному теорией бидромического состояния пространственного заряда с двухпетлевыми траекториями электронов.

Если в магнетроне действительно имеет место бидромическое состояние пространственного заряда, то в середине электронного облака должен существовать виртуальный катод — слой с повышенной плотностью пространственного заряда, образованный электронами, движущимися вблизи вершин нижних петель. Из уравнения Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

следует, что в том месте, где велика плотность пространственного заряда ρ , велик градиент напряженности электрического поля E . Это значит, что вблизи виртуального катода с высокой плотностью пространственного заряда электрическое поле резко меняется с изменением r . Следовательно, различные электроны зондирующего луча, имеющего конечную толщину (диаметр отверстия в коллиматорной трубке верхнего зондирующего луча равен 0,5 мм), входя в магнетрон на уровне виртуального катода,

будут попадать в точки с существенно различным полем. По этой причине зондирующий луч и его изображение на экране должны сильно размываться. Если же изменить электрический режим магнетрона так, что виртуальный катод окажется ниже или

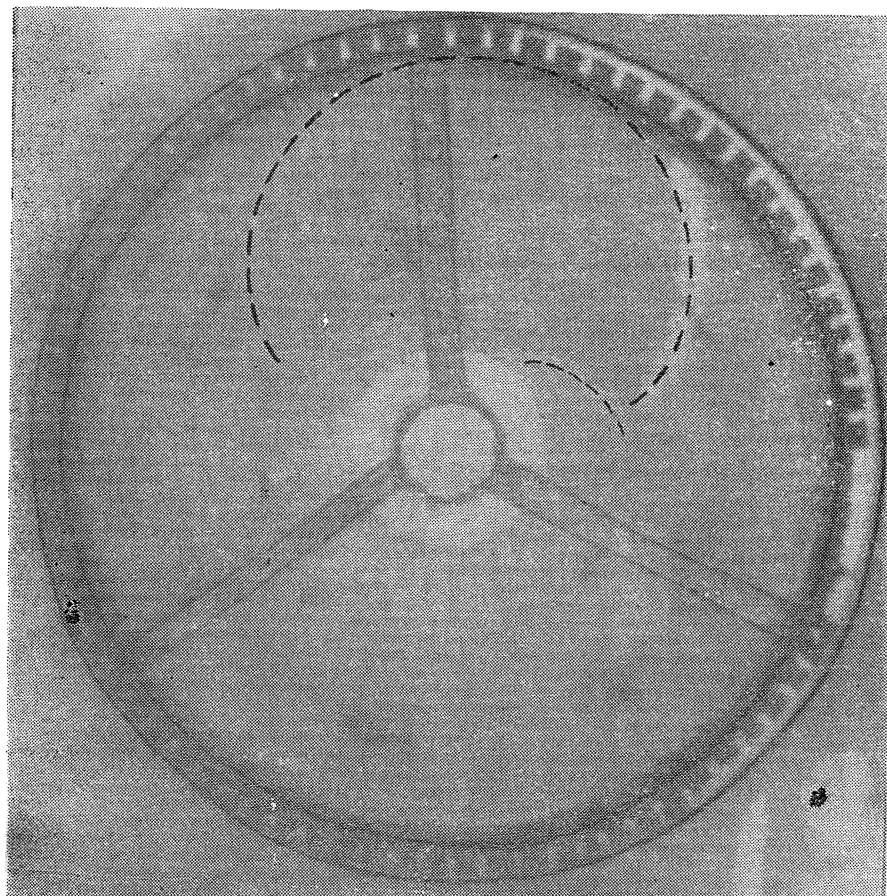


Рис. 1. Экспериментальные (белые) и теоретические (черные) траектории зондирующих лучей:

в) $H=68,5$ эрстед, $V_a=700$ в. Теоретические кривые (нижняя и верхняя) рассчитаны в предположении бидромического состояния с двухпетлевыми траекториями.

выше уровня коллиматорной трубки, то размытие пятна на экране должно уменьшиться. Это и было обнаружено при эксперименте.

Были сфотографированы пятна, даваемые на экране верхним зондирующим лучом при трех значениях магнитного поля H и различных анодных напряжениях V_a . Некоторые из этих фотографий приведены на рис. 2. Здесь следует отметить, что пятно на экране от прикатодного зондирующего луча при изменении режима по своим размерам заметно не меняется. Полученные фотографии позволяют определить режимы, при которых размытие пятен получается наиболее сильным. С другой стороны, на основании результатов работы [1], где было показано, что расстояние от катода до вершины первой петли траектории составляет половину толщины бриллюэновского облака, можно рассчитать для заданной величины магнитного поля те анодные напряжения, при которых виртуальный катод должен быть напротив коллиматорной трубы.

Этот расчет производится следующим образом. Если r_0 — расстояние коллиматорной трубы от оси магнетрона, а r_k — радиус катода, то радиус электронного облака r_1 , середина которого лежит против коллиматорной трубы, определится так:

$$r_1 = (r_0 - r_k)^2 + r_k^2 = 2r_0 - r_k.$$

Поскольку r_1 равно радиусу бриллюэновского облака, анодное напряжение будет найдено в результате «сшивания» двух решений для распределения потенциала — бриллюэновского $V(r) = (m/2e) \omega_H^2 r^2 (1 - r_k^2/r^2)^2$, внутри облака и логарифмического $V(r) = A \ln r + B$ на участке между границей облака и анодом. Константы A и B оп-

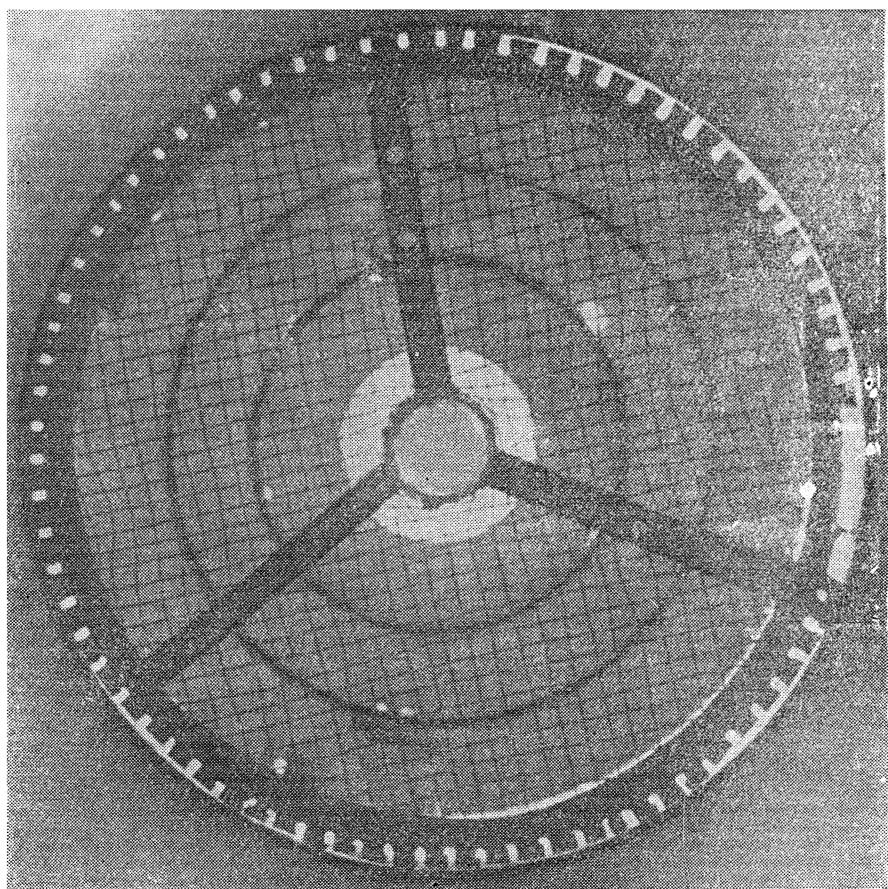


Рис. 2. Пятна на экране от верхнего зондирующего луча при $H=73$ эрстед^з
и различных V_a :
а) $V_a = 680$ в.

ределяются из условий непрерывности потенциала и электрического поля на границе облака.

Рассчитанные таким путем анодные напряжения для трех значений магнитного поля приведены в таблице 1. В этой же таблице указаны экспериментальные величины

Таблица 1

H (эрстед)	68,5	73	82
V_a (в) расчетные значения	635	720	912
V_a (в) экспериментальные значения	650	720	910—920

анодных напряжений, при которых размытие пятна на экране получается наиболее сильным. Эта таблица относится к лампе, с которой были проведены основные экспе-

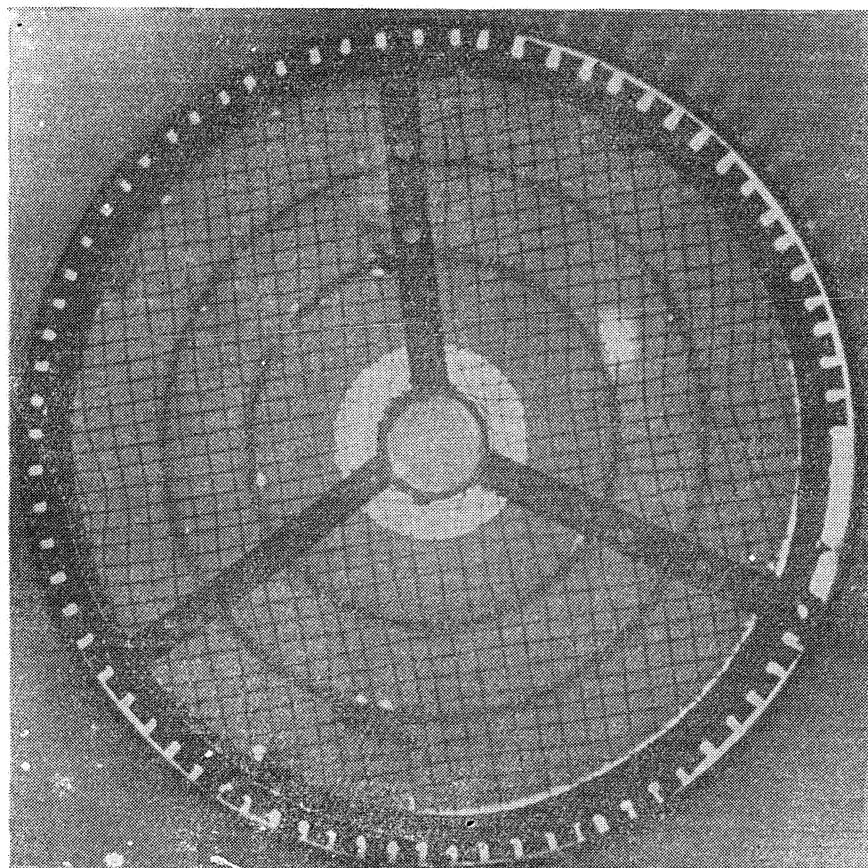


Рис. 2. Пятна на экране от верхнего зондирующего луча при $H=73$ эрстед и различных V_a :
б) $V_a = 770$ в.

рименты. Лампа имеет коллиматорную трубку с внутренним диаметром 0,5 м.м., и ее расстояние от катода равно 4,5 м.м.

Эксперимент был повторен с другой лампой, у которой коллиматорная трубка имеет вдвое больший внутренний диаметр и расположена на несколько большем расстоянии от катода (5,5 м.м.). Соответствующие расчетные и экспериментальные величины, относящиеся к этой лампе, приведены на таблице 2

Таблица 2

H (эрстед)	64	73
V_a (в) расчетные значения	616	804
V_a (в) экспериментальные значения	610	790

Как видно из таблиц 1 и 2, значения анодных напряжений, при которых пятна на экране наиболее сильно размыты, в случае обеих ламп с точностью до 2—3% совпадают с теми значениями, при которых, согласно расчету, виртуальный катод должен

находиться против коллиматорной трубы зондирующего луча. Этот факт, очевидно, подтверждает наличие виртуального катода в середине электронного облака магнетрона.

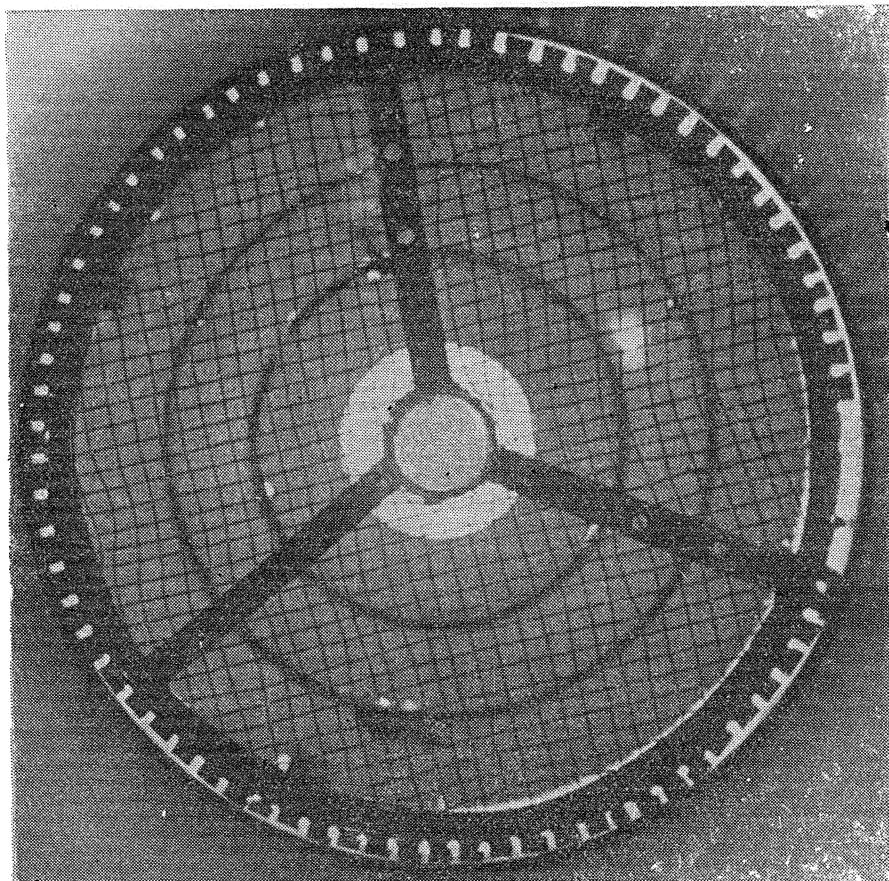


Рис. 2. Пятна на экране от верхнего зондирующего луча при $H=73$ эрстед и различных V_a :
в) $V_a = 740$ в.

В заключение автор выражает благодарность М. И. Кузнецову за постоянный интерес к работе и ценные советы

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кузнецов, Л. М. Грошков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1104 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 января 1964 г.

УДК 621.385.622

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРОФОТРОНА С БЕГУЩЕЙ ВОЛНОЙ

Ю. Г. Альтшулер, Е. В. Анисимов, Р. М. Ревзин

Во многих теоретических и экспериментальных исследованиях [1, 2], посвященных работе строфотрона как генератора с электрической перестройкой частоты, авторы исходили из предложения о том, что ширина полосы генерируемых частот определяется величиной нагруженной добротности Q резонатора, образованного высокочастотной системой строфотрона. В работе Бокова и Гапонова [3] было показано, что осуществление в строфотроне режима бегущей волны позволяет расширить полосу электронной настройки до величины, которая характерна для полосы электронной настройки обычных ЛОВ. В настоящей статье экспериментально исследованы основные характеристики строфотрона с бегущей волной.

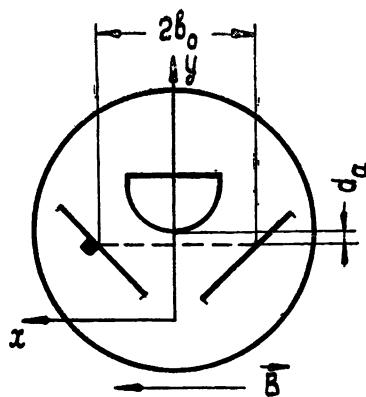


Рис. 1. Схематическое изображение строфотрона.

Схематически строфотрон изображен на рис. 1. В описываемой конструкции $b_0=0,6 \text{ см}$, $d_a = 0,1 \text{ см}$. Общий вид лабораторного макета строфотрона изображен на рис. 2, 3. Как видно из рисунка, в лампе реализован случай электростатической потенциальной ямы, близкой к параболической.

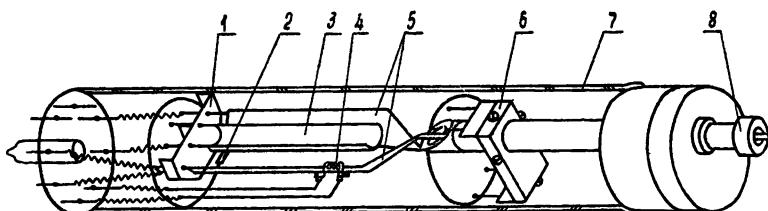


Рис. 2. Строботрон (общий вид):

1 — коллектор, 2 — сопротивление, 3 — ускоряющий электрод, 4 — катод, 5 — рефлекторы, 6 — держатель, 7 — колба, 8 — вывод энергии.

Электроды лампы изготовлены из листового tantalа толщиной 0,15 мм, а трансверсы — из пруткового молибдена диаметром 0,8 мм и 1,2 мм. В исследованной конструкции использован прямонакальный катод, изготовленный из торированной вольфрамовой проволоки диаметром 0,25 мм и намотанной на жерне диаметром 1 мм. Катод вынесен на расстояние 2 мм от отражателей внутрь пространства взаимодействия, что практически исключает попадание электронов на отражатели.

Выход энергии выполнялся в виде коаксиальной линии, соединенной с отражателями (рефлекторами) на катодном конце лампы. Основанием лампы служит медный радиатор, в который ввинчивается внешний проводник для вывода энергии. Центральный проводник вывода энергии имеет стеклянную бусу, которая впаяна в коваровую втулку радиатора, обеспечивая вакуумный переход от вывода энергии внутри лампы

к высокочастотному разъему вне ее. Выводы электродов и накала катода осуществляются через стеклянную плоскую ножку.

Режим бегущей волны осуществляется за счет согласования вывода энергии с внешней нагрузкой, в качестве которой служил измеритель мощности, а также поглощающей нагрузкой, выполненной на коллекторном конце лампы в виде сосредоточен-

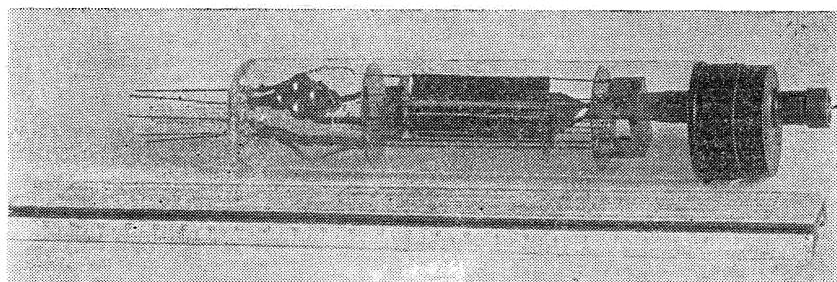


Рис. 3. Лабораторный макет строфотрона.

ного сопротивления, величина которого равна волновому сопротивлению высокочастотной системы. Величина сопротивления подбиралась экспериментально и оказалась равной 120 ом.

Экспериментально было установлено, что если величина внутреннего согласующего сопротивления значительно отличается от величины волнового сопротивления системы, полоса электронной настройки резко сужается, наблюдается «затягивание» частоты и появляются «паразитные» колебания.

Экспериментально полученные частотные характеристики исследуемого макета представлены на рис. 4. Там же пунктиром приведена частотная характеристика, рассчитанная теоретически из условия точного синхронизма.

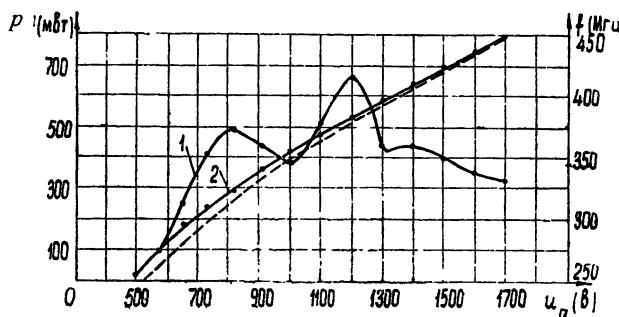


Рис. 4. Пунктирная кривая — теоретическая частотная характеристика, кривая 1 — $P=F(u_a)$, кривая 2 — $f=F(u_a)$ значения параметров:

$$L = 5 \text{ см}, B = 1000 \text{ Гс}, u_{\text{кол}} = 400 \text{ в}, u_{\text{реф}} = 0, R_H = 150 \text{ ом}.$$

В результате экспериментальных исследований было обнаружено, что величина магнитного поля, напряжение на коллекторе, ток накала и длина пространства взаимодействия оказывают небольшое влияние на ход частотной характеристики строфотрона, а зависимость $f=F(u_a)$ имеет характер, близкий к линейному закону.

Ход изменения мощности по диапазону электронной перестройки частоты изображен на рис. 4 и 5. На этих рисунках приведены основные характеристики двух макетов ламп, отличающихся длиной пространства взаимодействия. Длина пространства взаимодействия существенно влияет на уровень выходной мощности строфотрона. Так, при длине пространства взаимодействия $L = 5 \text{ см}$ лампа работала в полосе частот от 255 МГц до 450 МГц с максимальной мощностью в 670 мвт, а при длине $L = 8 \text{ см}$ и одинаковой величине магнитного поля диапазон электронной перестройки осуществлялся в пределах от 250 МГц до 510 МГц на уровне минимальной мощности 200 мвт. Максимальная мощность при этом была больше одного ватта; рабочий ток при этом изменялся в пределах от 15 мА до 45 мА, что соответствует верхней и нижней границам полосы электронной настройки.

На рис. 6 представлены графики зависимости хода мощности в зависимости от тока эмиссии и величины магнитного поля для лампы длиной 8 см.

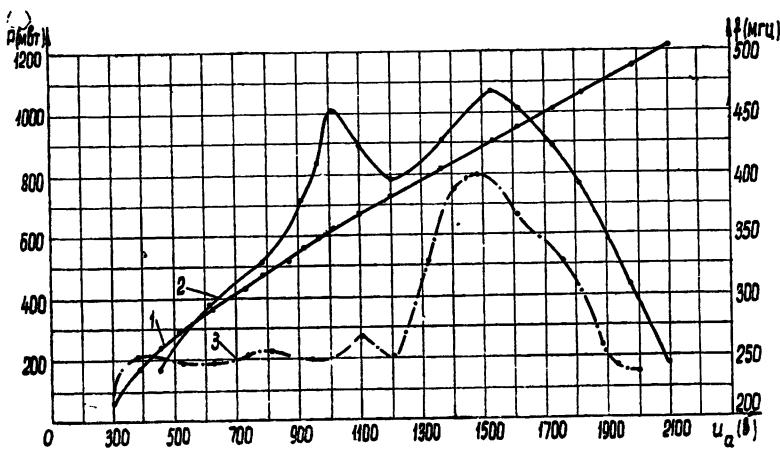


Рис. 5. Кривая 1—экспериментальная частотная характеристика $f=F(u_a)$ при $L=8$ см; кривая 2— $P=F(u_a)$ при $L=8$ см, $B=1000$ гс, $u_{\text{кол}}=450$ в, $u_{\text{реф}}=0$, $R_H=120$ ом, $I_{\text{нак}}=5,1$ а; кривая 3— $P=F(u_a)$ при $L=8$ см, $B=830$ гс, $u_{\text{кол}}=450$ в, $u_{\text{реф}}=0$, $R_H=120$ ом, $I_{\text{нак}}=4,75$ а.

Приведенные графики свидетельствуют о том, что существуют оптимальные значения тока эмиссии и величины магнитного поля, которым соответствует максимальная мощность генерируемых колебаний. Возможно, что подобная избирательность связана с отбором неправильнофазных электронов на ускоряющий электрод. При этом

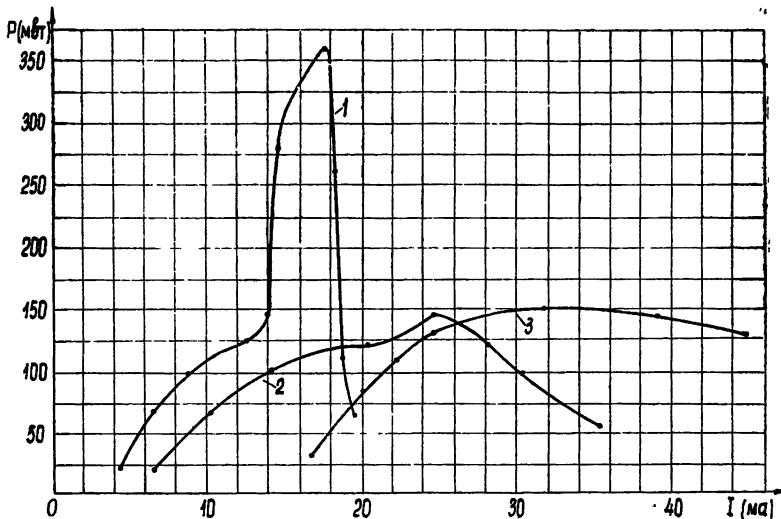


Рис. 6 Зависимость P от тока эмиссии I ($L=8$ см, $u_a=900$ в, $u_{\text{кол}}=450$ в, $u_{\text{реф}}=0$):
1— $B=1000$ гс; 2— $B=800$ гс; 3— $B=700$ гс.

оптимальному режиму работы лампы соответствует такое распределение тока эмиссии, при котором большая часть тока оседает на ускоряющем электроде и лишь незначительная часть достигает коллектора.

Изменение мощности по диапазону настройки частоты зависит также от величины напряжения на коллекторе, что, очевидно, связано с искажением электростатического поля в пространстве взаимодействия, вносимым коллектором Опти-

мальное значение величины мощности генерируемых колебаний при этом получалось при значениях напряжения на коллекторе, меньшем величины анодного напряжения, соответствующего длиноволновой границе диапазона электронной настройки частоты.

Ширина спектральной метки генерируемых колебаний не превышает ширины соответствующей метки кристаллического генератора.

Предварительные экспериментальные результаты, приведенные выше, свидетельствуют о том, что строфotron с бегущей волной по широкополосности и уровню генерируемой мощности вполне сравним с ЛОВ «О» типа, а конструктивно значительно проще ее. Габариты строфотрона меньше, нежели ЛОВ соответствующего диапазона.

К недостаткам прибора следует отнести необходимость сравнительно сильного магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Alfven, D. Rømer, Proc. IRE, 42, 1239 (1954).
2. Agdug, Ericsson Technics, 13, № 1 (1957).
3. В. М. Боков, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 826 (1960).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
5 июня 1964 г

УДК 621.142.65

ЯЧЕЙКИ НА ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДАХ ДЛЯ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВ СО СЧИТЫВАНИЕМ БЕЗ РАЗРУШЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

B. B. Климов

Применение туннельных диодов в оперативных запоминающих устройствах с разрушением информации при считывании позволило получить системы [1] со временем обращения 15 ± 20 нсек. Для дальнейшего уменьшения времени обращения необходимо создание запоминающих ячеек без разрушения информации при считывании

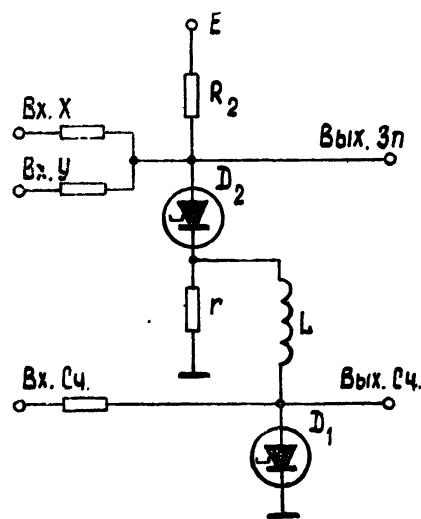


Рис. 1.

Известная схема запоминающей ячейки построена на двух туннельных диодах, один из которых служит для запоминания информации, второй — для индикации состояния схемы [2]. Второй диод генерирует высокочастотные колебания, когда запоминающий туннельный диод находится в состоянии высокого напряжения (точка В на рис. 2).

В запоминающей ячейке на рис. 1 высокочастотные колебания наблюдаются,

когда запоминающий диод находится в состоянии низкого напряжения (точка A на рис. 2). Здесь схема (R_2, D_2) — триггер, в цепь которого включены параллельно соединенные сопротивление r и автогенератор (L, D_1) [4]. Устройство работает на основе большого перепада тока при переключении туннельного диода D_2 , из одного состояния в другое; при этом точке A соответствует точка C_2 (рис. 2), а точке B — точка C_1 или C .

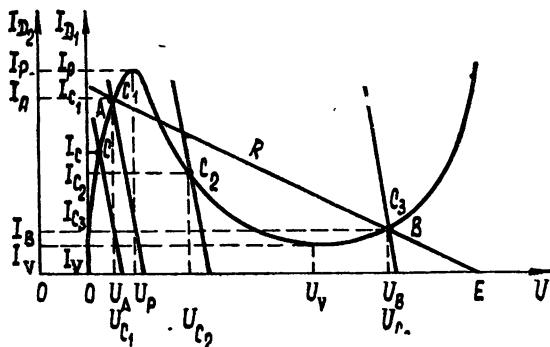


Рис. 2

При работе ячейки рис. 1 в другом режиме схема (L, D_1) является одновибратором с рабочей точкой C_1 . При переключении туннельного диода триггера в состояние высокого напряжения (точка B), режим диода D_1 смещается в точку C : чувствительность одновибратора по входу Bx . Сч. сильно уменьшается.

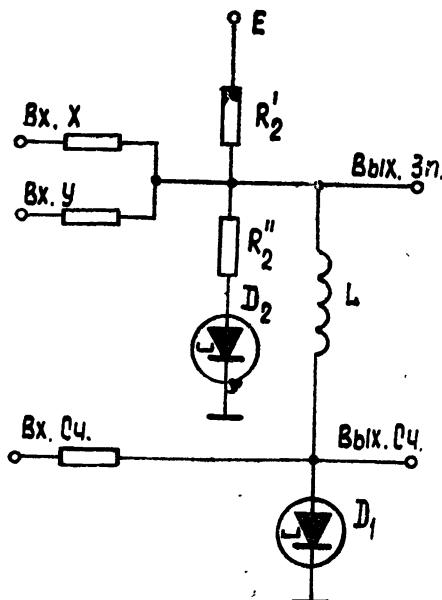


Рис. 3.

В схеме рис. 1 требуется большой перепад тока при переключении диода D_2 , что налагает жесткие допуски на параметры элементов [3]. Схема запоминающей ячейки (рис. 3) с низкими требованиями на допуски состоит из триггера (R'_2, R''_2, D_2) и одновибратора (L, D_1). Величина тока I_p диода D_2 значительно превышает соответствующий ток диода D_2 , благодаря чему состояние всей схемы определяется состоянием туннельного диода D_2 . В этой ячейке точке A туннельного диода D_2 соответствует точка C_1 , а точке B — точка C_3 ; таким образом, в зависимости от состояния триггера одновибратор переключается или положительными, или отрицательными импульсами по входу Bx . Сч. Сопротивление R^2 предназначено для более точной установки рабочих точек одновибратора.

Расчет схемы рис. 3 производится по формулам

$$r_c = \frac{RR_A}{R+R_A} \left[\frac{E}{\Delta I(R + R_A)} - 1 \right], \quad (1)$$

$$R'_2 = R \frac{r_c}{R_A + r_c}, \quad (2)$$

где $R_A = U_A / I_A$, $r_c = U_c / I_c$, а ΔI — допустимая величина тока между рабочей точкой и вершиной вольтамперной характеристики диода D_2 . Из формулы (1), зная величину U_p для данного типа диодов с учетом равенства $U_p = r_c I_p$ находим значение тока вершины диода D_1 . В рассчитанной для эксперимента схеме $I_p D_2 = 7,5 \text{ мА}$, $I_p D_1 = 1,5 \text{ мА}$, $R_1 = 7,5 \text{ ом}$, $R'_1 = 51 \text{ ом}$, $L = 10 \text{ мкГн}$, $E = 0,5 \text{ в}$. Даже при применении низкокачественных туннельных диодов типа Р2 фронты импульсов переключения не превышают $0,03 \text{ мк сек}$.

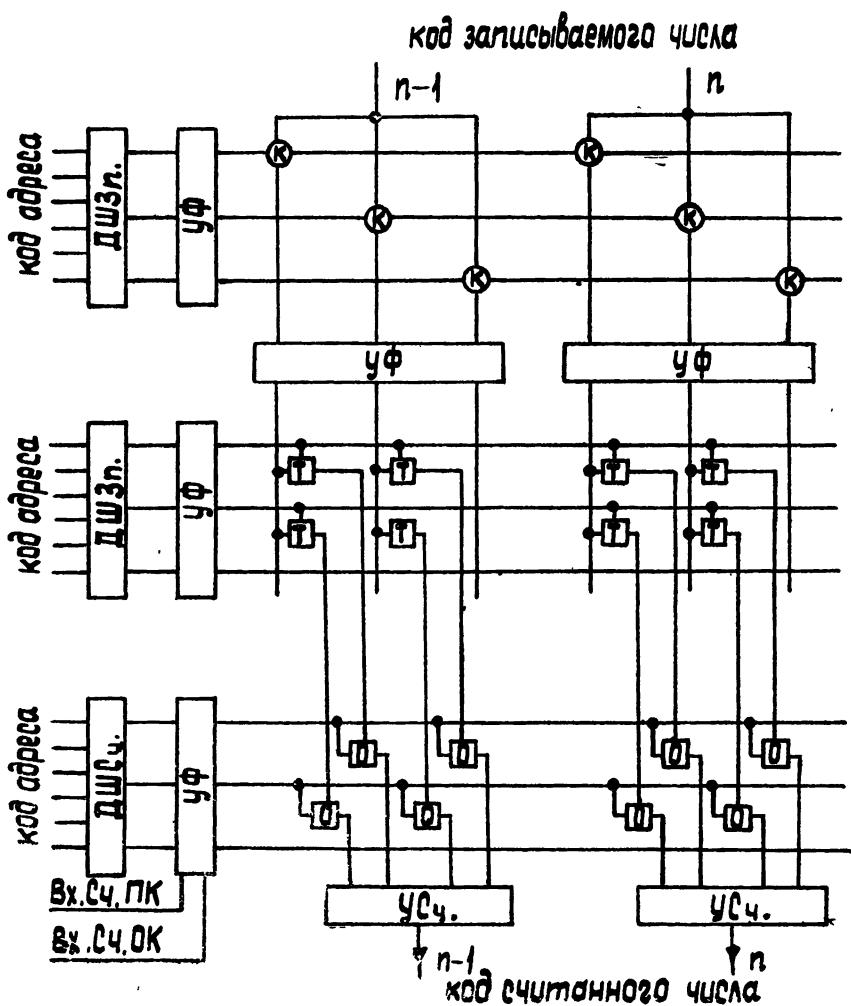


Рис. 4.

В запоминающих ячейках рис. 1 и рис. 3 информация записывается полутоками по входам Вх. Х и Вх. У. Информации «1» соответствует состояние низкого напряжения туннельного диода D_2 . Считывание производится по входу считывания Вх Сч. импульсом положительной полярности. Для схемы рис. 4 возможно считывание в обратном коде, для чего на вход Вх Сч. подается отрицательный импульс.

В матричном запоминающем устройстве (рис. 4) через Т обозначены триггеры, а через О — одновибраторы запоминающих ячеек. Адрес числа подается на дешифры записи Дш. Зп или считывания Дш. Сч., код числа подается через клапаны К, усилители и формирователи УФ. Выходы считывания ячеек одного разряда объединены одним усилителем считывания УСч. Для считывания информации в прямом или в обратном коде подается соответствующий управляющий импульс по входам Вх. Сч. ПК или Вх. Сч. ОК. Возможна также запись информации в одну ячейку и считывание информации из другой ячейки в одно и то же время.

Рассмотренные схемы запоминающих ячеек могут применяться также как управляемый генератор (рис. 1), как клапаны с формированием выходного импульса (рис. 1, 2) и как управляемый одновибратор (рис. 2). Возможно использование выхода Вых. Зп.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Kaufman, Solid State Design, 8, 23 (1962).
2. R. C. Sims, E. R. Beck, V. C. Kamp, Proc IRE, 49, 150 (1961).
3. H. K. Gummel, F. M. Smits, Bell System Techn. J., 40, 213 (1961).
4. В. В. Климов и Н. А. Нецовтайлов, Авт. свид № 154571.

Свердловское отделение Математического института
им В. А. Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию
9 апреля 1964 г.