

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Граница	Строка	Напечатано	Следует читать
868	8 сверху	$\approx 3,76 \sigma$	$\beta \approx 3,76 \sigma$
884	10 снизу	$\exp [ikR(1 - \sqrt{2})^{1/2}]$	$\exp [ikR(1 - \sqrt{2})^{1/2}]$
890	1 снизу	$Q = aA_0v_0^0 + ..$	$O = aA_0v_0^0 + ..$
894	13 сверху	1) $U = -0,1075 ...$	1) $U = -0,0175 ...$
909	20 сверху	$\bar{\omega} < 1$	$\bar{\omega} > 1$
951	7 и 8 сверху	$... + 4a^2q^2\bar{X}\bar{X} - ... + q^2\bar{X}^2\bar{X}\bar{X}$	$... + 4a^2q^2\bar{X}\bar{X}\bar{X} - ... + q^2\bar{X}^2\bar{X}\bar{X}^2$
954	9 снизу	$\sqrt{VV}_z(\tau) = Ae^{-\tau_0\sigma}$	$\sqrt{VV}_z(\tau) = Ae^{-\tau_0\sigma}$
1003	Рис. 2	$\Gamma_{e_0}a = 0,4; \Gamma_{e_0}a > 2$	$\Gamma_{e_0}a > 2; \Gamma_{e_0}a = 0,4$
1006	5 снизу	$-e_0(\omega) = \sum \frac{m_i}{2} ...$	$e_0(\omega) = - \sum \frac{m_i}{2} ...$

По просьбе автора ниже дается исправление типографских ошибок, допущенных в статье И. И. Белуги „Многопроводные линии, составленные из круглых проводников. Двухмернопериодические линии“, опубликованной в № 5 1961 г.,

946	1 сверху	$... - \frac{2}{2n + 1}$	$... - \frac{4}{2n + 1}$
950	13 сверху	$F_1$	$F$
950	13 снизу	$... s_{m+n} q, -$	$... s_{m+n} q_m, -$

и в статье И. И. Белуги „Двухмернопериодическая многопроводная линия, содержащая  $N$  круглых проводников в ячейке“, опубликованной в № 4 1963 г.,

741	4 сверху	$\left[ \frac{q_{k,-}^*(m)}{r_m^k} \right] e^{ikb}$	$\left[ \frac{q_{k,-}^*(m)}{r_m^k} e^{ikb} \right]$
745	20 сверху	$... R_S ...$	$... 0,5 R_S ...$
745	14 снизу	$\frac{R_S}{60 k_{\text{мин}}} ...$	$\frac{R_S}{120 k_{\text{мин}}} ...$
747	13 снизу	$u(z_n - z_m)$	$u_1(z_n - z_m)$

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Дмитренко Д. А., Кротиков В. Д., Троицкий В. С., Цейтлин Н. М. Поглощение радиоизлучения на волне 70,16 см в атмосфере . . . . .	817
Ловецкий Е. Е., Силин В. П. О колебаниях слабонеоднородной плазмы . . . . .	822
Романов Ю. А. Плазменные волны в пленках . . . . .	828
Гишинский И. А., Рязанцев К. А. К вопросу о поглощении (излучении) электромагнитных волн заряженной частицей, находящейся в постоянном магнитном поле . . . . .	838
Швилкин Б. Н., Васильева М. Я., Зайцев А. А. Шумы плазмы высокочастотного разряда в магнитном поле . . . . .	844
Митюгов В. В. Квантовое прогнозирование случайных электромагнитных процессов . . . . .	848
Боровицкий С. И., Митюгов В. В. О свойствах неравновесного излучения и термодинамически обратимых преобразователях . . . . .	854
Медведев Ю. А., Проценко К. Д., Степанов Б. М. Распределение вероятностей временного положения пороговой точки сигнала на выходе детектора в присутствии шума . . . . .	865
Мышкин В. Г. Дифракция нормально падающей поверхностной ТМ-волны на границе между изотропной и анизотропной импедансными полуплоскостями . . . . .	872
Мышкин В. Г. Трехмерные тензоры Грина для анизотропной импедансной плоскости и дифракция наклонно падающей поверхностной ТМ-волны на границе между изотропной и анизотропной полуплоскостями . . . . .	878
Литвиненко Л. Н. Дифракция плоской Н-поляризованной электромагнитной волны на решетке специальной геометрической формы . . . . .	887
Иванов И. Н., Котов В. И. Излучение кольца с током в волноводе . . . . .	898
Рошаль А. С., Попов В. С. Распределенное устройство связи с быстрой циклотронной волной . . . . .	903
Рубаник В. П., Ярема П. Ф. К вопросу о принудительной синхронизации автогенератора с запаздывающей обратной связью . . . . .	914
Горюнов В. И. К теории синхронизации осциллятора с подталкивающей силой . . . . .	926
Важенин И. Н. Нелинейный анализ почти гармонического автогенератора на полупроводниковом триоде в недонапряженном режиме . . . . .	937
Арефьев Б. А. Определение характеристик нелинейных объектов в процессе их нормальной эксплуатации . . . . .	949
Леонов Н. Н. Динамика простейшей системы экстремального регулирования шагового типа . . . . .	958
Эйнгорин М. Я. Теория рециркуляционных запоминающих устройств и генераторов . . . . .	970

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Коробков Ю. С. Спектр распределенного космического радиоизлучения в дециметровом диапазоне радиоволн . . . . .	982
Ласточкин В. П., Станкевич К. С., Стрежнева К. М. Измерение поглощения радиоволн в атмосфере на длине волны $\lambda = 3,2$ см . . . . .	984
Лоладзе Ц. Д. Преобразование волн на границе плазма—диэлектрик . . . . .	985
Кондратьев И. Г. Поверхностные волны в гиротропном плазменном слое . . . . .	987
Крупнов А. Ф., Скворцов В. А. О форме спектральной линии в пучке молекул . . . . .	991
Страховский Г. М., Татаренков В. М. Новый метод настройки частоты молекулярного генератора с помощью модуляции высокого вакуума в вакуумном корпусе генератора . . . . .	992

Страховский Г. М., Татаренков В. М. Новый способ получения пучка медленных молекул для молекулярного генератора . . . . .	994
Валитов Р. А., Царенко В. Т., Миленко Ю. Я. Экспериментальное исследование частотных характеристик газоразрядных детекторов СВЧ колебаний . . . . .	995
Госьков П. И. Экспериментальное исследование электродинамических характеристик штыревых систем . . . . .	998
Куликов М. Н., Стальмахов В. С. Расчет взаимодействия электронного потока с полем бегущей волны в скрещенных полях при конечных размерах пространства взаимодействия . . . . .	1002
Моченов С. Б. О слоистости разряда внутри полого катода . . . . .	1005
Эткин В. С. К анализу систем с модулируемыми параметрами и некоторых нелинейных систем с помощью ориентированных графов . . . . .	1006

#### Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэронавигация», т IV, № 3, 1964 . . . . .	1010
------------------------------------------------------------------------------------------------------	------



УДК 621.371.166 : 551.510

## ПОГЛОЩЕНИЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ НА ВОЛНЕ 70,16 см В АТМОСФЕРЕ

Д. А. Дмитренко, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин

Приведены результаты измерения поглощения в атмосфере по ее собственному радиоизлучению на волне 70,16 см. Оптическая толщина атмосферы (по вертикали) оказалась равной  $9,2 \cdot 10^{-3} \pm 15\%$ .

В связи с проведением прецизионных радиоастрономических измерений интенсивности радиоизлучения в дециметровом и метровом диапазонах волн возникает необходимость точного учета поглощения в атмосфере. До настоящего времени, однако, не имеется экспериментальных данных о величине коэффициента поглощения в атмосфере на волнах длиннее 60 см. Используемые обычно для оценки теоретические данные Ван Флека (см. ч. 1, гл. VII [1]) нуждаются в экспериментальной проверке и уточнении. В связи с этим в сентябре 1963 г. нами были приняты измерения поглощения в атмосфере на волне 70,16 см.

### 1. НЕОБХОДИМЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Измерения поглощения в атмосфере проводились путем приема ее собственного радиоизлучения при различных углах наклона антенны к горизонту. При этом, как известно, зависимость приращения температуры антенны  $\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0}$  от угла места  $\varepsilon$  при ее повороте от  $\varepsilon_0$  до  $\varepsilon$  выражается следующим соотношением:

$$\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0} = [T_{\text{ср атм}} \Gamma_{\text{атм}} (\text{csc } \varepsilon - \text{csc } \varepsilon_0) + T_{\text{ион зенит}} (\text{csc } \varepsilon - \text{csc } \varepsilon_0)] A. \quad (1)$$

Здесь  $A$  — коэффициент, характеризующий параметры антенной системы,  $T_{\text{ион зенит}}$  — температура радиоизлучения ионосферы в зените,  $\Gamma_{\text{атм}}$  — поглощение в атмосфере при распространении по вертикали,

$$T_{\text{ср атм}} = \frac{\int_0^{\infty} x T \exp\left(-\int_0^l x dl\right) dl}{\int_0^{\infty} x \exp\left(-\int_0^l x dl\right) dl} \approx T_0 - 6,5 H_1$$

— средняя температура атмосферы (равная температуре равномерно нагретой атмосферы, дающей то же самое радиоизлучение, что и атмосфера с действительным распределением температуры  $T$  по высоте; см. [2]),  $T_0$  — температура атмосферы на уровне моря,  $x$  — коэффициент поглощения на 1 км пути в атмосфере,  $H_1$  — характеристическая высота поглощения атмосферы (т. е.  $x = x_0 e^{-h/H_1}$ ;  $\Gamma_{\text{атм}} = \int_0^{\infty} x dh = x_0 H_1^*$ ).

\* Высота  $h$  отсчитывается от уровня моря.

Если предположить, что на  $\lambda = 70,16$  см поглощение определяется в основном кислородом (т. е. поглощением в водяном паре можно пренебречь), то  $H_1 = 5,3$  км [2,3].

Выражение (1) справедливо при выполнении двух условий: а) если наблюдения ведутся на углах к горизонту, больших  $5^\circ$ , когда справедлива идеализация плоской атмосферы и ионосферы; б) если при повороте антенны по углу места от  $\varepsilon_0$  до  $\varepsilon$  можно пренебречь изменением температуры антенны из-за фонового радиоизлучения, попадающего в боковые лепестки диаграммы. Последнее условие выполняется в том случае, если вне телесного угла диаграммы  $\Omega_0$ , который может считаться основным каналом приема радиоизлучения атмосферы, диаграмма является изотропной в пространстве. Очевидно,  $\Omega_0$  охватывает главный и ближайшие боковые лепестки диаграммы, составляющие ее неизотропную часть. В соответствии со сказанным в выражении (1)

$$A = (1 - \beta_{\Omega_0}) \eta, \quad (2)$$

где  $\eta$  — коэффициент полезного действия антенной системы,  $(1 - \beta_{\Omega_0})$  — доля мощности, излучаемая антенной в телесный угол  $\Omega_0$  ( $\beta_{\Omega_0}$  — коэффициент рассеяния относительно  $\Omega_0$ ).

Из (1) видно, что зависимость  $\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0}$  от  $\text{csc } \varepsilon$  является прямой линией (при  $\varepsilon > 5^\circ$ ); измерив эту зависимость, по наклону прямой можно определить  $\Gamma_{\text{атм}}$ :

$$\Gamma_{\text{атм}} = \frac{\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0}}{AT_{\text{ср атм}}(\text{csc } \varepsilon - \text{csc } \varepsilon_0)} - \frac{T_{\text{ион зенит}}}{T_{\text{ср атм}}}. \quad (2a)$$

Непосредственно измеряемой величиной является первый член в правой части выражения (2a), который имеет смысл приведенного к атмосфере суммарного поглощения в атмосфере и ионосфере. Обозначая этот член через  $\Gamma$ , получим

$$\frac{\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0}}{AT_{\text{ср атм}}(\text{csc } \varepsilon - \text{csc } \varepsilon_0)} = \Gamma = \left( \Gamma_{\text{атм}} + \frac{T_{\text{ион зенит}}}{T_{\text{ср атм}}} \right). \quad (3)$$

Далее известно, что

$$T_{\text{ион зенит}} = \int_0^{\infty} T(x) \mu(x) \exp\left(-\int_0^{\infty} \mu(x) dx\right) dx, \quad (4)$$

где  $T(x)$  — кинетическая температура ионосферы,  $\mu(x)$  — коэффициент поглощения в ионосфере (координата  $x$  отсчитывается по вертикали).

Если ввести среднюю кинетическую температуру ионосферы  $T_{\text{ср ион}}$  аналогично тому, как это делается для атмосферы, то, как видно из (4).

$$T_{\text{ион зенит}} = T_{\text{ср ион}} \int_0^{\infty} \mu(x) dx = T_{\text{ср ион}} \Gamma_{\text{ион}}. \quad (5)$$

Таким образом,

$$\Gamma = \left( \Gamma_{\text{атм}} + \Gamma_{\text{ион}} \frac{T_{\text{ср ион}}}{T_{\text{ср атм}}} \right) = \frac{\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0}}{AT_{\text{ср атм}}(\text{csc } \varepsilon - \text{csc } \varepsilon_0)}. \quad (6)$$

## 2. МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Величина  $\Gamma$  определялась по формуле (6) из измерения приращений антенной температуры при направлении антенны под различными углами к горизонту. «Разрезы» атмосферы проводились в направлении

на юг в часы, когда через главный лепесток диаграммы направленности антенны проходили высокие галактические широты ( $b > 30^\circ$ ). При этом можно было пренебречь изменением величины космического фона, падающего в главный лепесток антенны, при ее повороте.

На рис. 1, 2 представлены зависимости величины  $\Delta T_{a-\varepsilon}$  от  $\text{csc } \varepsilon$ , измеренные на волне 70,16 см с помощью антенны с шириной диаграммы направленности порядка  $2,5^\circ$ . Как видно из рис. 1, 2, совокупность экспериментальных точек достаточно хорошо аппроксимируется прямой линией (до  $\varepsilon > 5^\circ$ ), что также свидетельствует о возможности пренебрежения упомянутым выше изменением космического фона.

Для определения поглощения  $\Gamma$  из этих зависимостей необходимо знать параметры антенной системы, а именно, значение  $A = (1 - \beta_{\omega_0})\eta$ . Эту величину удобнее всего измерить, воспользовавшись эталонным радиоизлучением какого-либо распределенного источника, перекрывающего угол  $\Omega_0$  (например, горы, практически «черной» на вертикальной поляризации при углах наклона луча к ее поверхности  $\approx 20^\circ$ ). Однако по условиям измерений мы не могли реализовать этот метод определения  $(1 - \beta_{\omega_0})\eta$  и поэтому калибровка антенны производилась по радиоизлучению Луны (см. [4]) в процессе измерения радиоизлучения атмосферы.

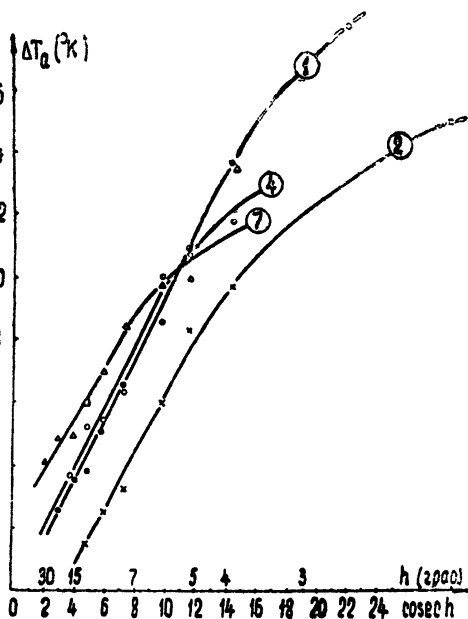


Рис. 1.

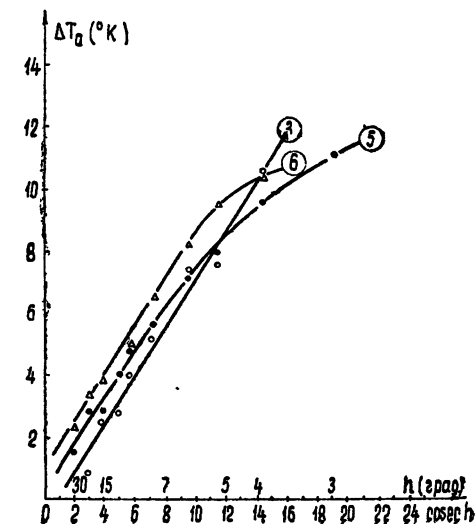


Рис. 2.

При приеме радиоизлучения Луны относительно опорной области вблизи нее, приращение температуры антенны  $\Delta T_{aL}$  выражается, как известно, следующим соотношением:

$$\Delta T_{aL} = T'_L (1 - \beta_L) \eta, \quad (7)$$

где  $T'_L$  — превышение усредненной по диску температуры радиоизлучения Луны над экранируемым ею космическим фоном,  $\beta_L$  — коэффициент рассеяния относительно телесного угла Луны  $\Omega_L$ .

Величина  $T'_L$  была измерена путем сравнения с радиоизлучением Кассиопеи-А (см. [5]):

$$T'_L = 195^\circ\text{K} \pm 10^\circ\text{K}.$$

Искомая величина  $(1 - \beta_{\Omega_0})\eta$ , как легко видеть, выражается через  $(1 - \beta_L)\eta$  следующим образом:

$$(1 - \beta_{\Omega_0})\eta = (1 - \beta_L)\eta \frac{\int_{\Omega_0} F d\Omega}{\int_{\Omega_L} F d\Omega}, \quad (8)$$

где  $F$  — диаграмма направленности антенны по мощности. Из (6) — (8) имеем

$$\Gamma = \frac{\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0}}{\Delta T_{aL}} \frac{T_L}{T_{\text{ср атм}}} \frac{\int_{\Omega_L} F d\Omega}{\int_{\Omega_0} F d\Omega} \frac{1}{(\csc \varepsilon - \csc \varepsilon_0)}. \quad (9)$$

Величина  $\int_{\Omega_L} F d\Omega / \int_{\Omega_0} F d\Omega$  определялась расчетным путем с помощью

диаграммы направленности, измеренной по радиоизлучению Солнца.

Из выражения (9) видно, что при использовании Луны для определения параметров антенны нет необходимости в температурной калибровке аппаратуры, поскольку в (9) входит отношение  $\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0} / \Delta T_{aL}$ ; оно равно, очевидно, отношению соответствующих отклонений выходного прибора в случае, если за время между измерениями  $\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0}$  и  $\Delta T_{aL}$  не произошло изменения усиления приемника. При наших измерениях интервал времени между калибровкой по Луне и измерениями радиоизлучения атмосферы составлял несколько часов; поэтому пришлось использовать температурную калибровку радиометра. Однако, поскольку определенная по температурной калибровке чувствительность радиометра оставалась неизменной при измерениях  $\Delta T_{a \varepsilon - \varepsilon_0}$  и  $\Delta T_{aL}$ , можно считать, что возможная систематическая ошибка в температурной калибровке не влияет на точность измерений величины  $\Gamma$ .

Найденная в соответствии с (9) из измерений величина  $\Gamma$  оказалась равной

$$\Gamma = 1,0 \cdot 10^{-2}. \quad (10)$$

Для определения искомой величины поглощения в атмосфере  $\Gamma_{\text{атм}}$  была проведена оценка поглощения в ионосфере. Оценка проводилась как расчетным путем, так и путем использования имеющихся экспериментальных данных на более низких частотах с последующим пересчетом ( $\Gamma_{\text{ион}} \sim \omega^{-2}$ ) на  $\lambda = 70,16$  см.

Оценка на основе расчетных формул, приведенных в [6], при концентрации электронов в максимуме  $F$  слоя  $N_0 \approx 10^5$  эл·см<sup>-3</sup> (наши измерения проводились в 3 ÷ 7 часов утра) приводит к значению

$$\Gamma_{\text{ион расч}} = 0,85 \cdot 10^{-4}. \quad (11)$$

Экспериментальные данные о поглощении в ионосфере на частоте 18,6 мГц в разное время года и суток приведены в [7]; отсюда следует, что в сентябре в утренние часы (3 ÷ 7 часов) величина поглощения\*

$$(\Gamma_{\text{ион эксп}})_{18,6 \text{ мГц}} = 0,058 \pm 0,058.$$

\* Погрешность принята равной  $\pm 0,058$ , поскольку измерения  $\Gamma_{\text{ион}}$  проводились в год максимума солнечной активности (1959 г.), в то время как наши измерения относятся к периоду минимальной активности Солнца.

Поэтому на частоте 427 мГц

$$(\Gamma_{\text{ион}})_{427 \text{ мГц}} = 1,1 \cdot 10^{-4}, \quad (12)$$

На основании (11) и (12) при оценке было принято, что

$$\Gamma_{\text{ион}} = 10^{-4} \pm 10^{-4}. \quad (13)$$

Считая среднюю кинетическую температуру ионосферы  $T_{\text{ср ион}} = 2000^\circ\text{K}$ , получаем, что

$$\Gamma_{\text{ион}} \frac{T_{\text{ср ион}}}{T_{\text{ср атм}}} \simeq 7,5 \cdot 10^{-4} \pm 7,5 \cdot 10^{-4}. \quad (14)$$

Из (10) и (14) следует, что поглощение в атмосфере

$$\Gamma_{\text{атм}} = \Gamma - \Gamma_{\text{ион}} \frac{T_{\text{ср ион}}}{T_{\text{ср атм}}} = 0,92 \cdot 10^{-2} \pm \pm 15\%. \quad (15)$$

Среднеквадратичная погрешность в значении  $\Gamma_{\text{атм}}$  составляет 15%. Эта погрешность складывается из дисперсии измерений (4%), возможной ошибки в определении величины  $(1 - \beta_{\text{эо}})\eta$  (10%) и ошибки из-за неточной оценки значения  $\Gamma_{\text{ион}} \frac{T_{\text{ср ион}}}{T_{\text{ср атм}}}$  (относительно  $\Gamma_{\text{атм}}$  эта ошибка не превышает 10%). Полученное значение  $\Gamma_{\text{атм}}$  согласуется с результатами измерений, проведенных в НИРФИ в диапазоне 30÷60 см [8,9]. Теоретическое значение поглощения в атмосфере на  $\lambda = 76,16$  см, следующее из теории Ван-Флека, равно 0,003 (если считать  $H_1 = 5,3$  км), что в 3 раза меньше измеренного.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИИТЛ, М., 1953.
2. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, И. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 19 (1958).
3. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).
4. В. С. Троицкий, И. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 393 (1961).
5. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, И. М. Цейтлин, Астрон. ж. (в печати).
6. А. Л. Воронин, Труды ВМОЛА, № 26 (1961).
7. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт, Л. Н. Ходалева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 333 (1960).
8. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1098 (1963).
9. Л. Н. Бондарь, В. Д. Кротиков, К. С. Станкевич, И. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
19 декабря 1963 г.

#### RADIO EMISSION ABSORPTION AT 70,16 cm. WAVELENGTH IN THE ATMOSPHERE

*D. A. Dmitrenko, V. D. Krotikov, V. S. Troitskii, N. M. Tseytlin*

The results are given of the absorption in the atmosphere derived from the measurements of its own radio emission at 70,16 cm wavelength. The optical thickness of the atmosphere (vertically) has turned out to be equal to  $9,2 - 10^{-3} \pm 15\%$



УДК 533.951

## О КОЛЕБАНИЯХ МНОГОМЕРНО СЛАБОНЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

*Е. Е. Ловецкий, В. П. Силин*

Колебания слабонеоднородной плазмы изучаются в приближении геометрической оптики. Получены формулы, определяющие спектры колебаний слабонеоднородной плазмы в случае многомерной неоднородности для уравнений поля произвольного порядка. С помощью этих формул рассмотрены высокочастотные колебания магнитоактивной разреженной плазмы, квазипродольные колебания магнитоактивной плазмы с учетом пространственной дисперсии и магнитогидродинамические волны.

1. В работе одного из авторов [1] были рассмотрены колебания слабонеоднородной (не плоскостной) плазмы в случае, когда в исследуемой задаче уравнения поля сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка. Однако, как уже указывалось в той же работе, в анизотропной плазме в ряде случаев уравнения поля могут иметь порядок выше второго. Так, например, при рассмотрении высокочастотных колебаний магнитоактивной разреженной плазмы, когда тензор диэлектрической проницаемости имеет вид [2,3]

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad \varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \quad g = - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \frac{\Omega_e}{\omega},$$

$\omega_{Le}$  и  $\Omega_e$  — ленгмюровская и ларморовская частоты электронов, уравнение эйконала можно записать в виде

$$\begin{aligned} & (k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) (\varepsilon_1 k_{\perp}^2 + \varepsilon_2 k_{\parallel}^2) - \frac{\omega^2}{c^2} [k_{\perp}^2 (\varepsilon_1 - g^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) + \\ & + 2k_{\parallel}^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2] + \frac{\omega^4}{c^4} \varepsilon_2 (\varepsilon_1^2 - g^2) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{[kB]^2}{B^2}, \quad k_{\parallel}^2 = \frac{(kB)^2}{B^2}.$$

Ясно, что такое уравнение эйконала соответствует дифференциальному уравнению поля четвертого порядка.

В настоящем сообщении мы рассмотрим спектры собственных колебаний многомерной слабонеоднородной плазмы для случаев, когда порядок уравнения поля выше второго. Для получения конкретных формул для спектров колебаний необходимо прежде всего записать общее со-

отношение, определяющее спектры уравнений высших порядков. Следует заметить, что приведенные ниже результаты не будут применяться к дифференциальным уравнениям гиперболического типа.

Будем нумеровать решения дифференциального уравнения поля числом узлов собственных функций. Примем, что в некоторой пространственной области уравнение типа (2) удовлетворяется одним действительным вектором  $\mathbf{k}$ . Уравнение эйконала, соответствующее дифференциальному уравнению порядка выше второго, может иметь, кроме того, и комплексные корни. Однако соответствующие им решения мы принимать в расчет не будем, учитывая, что хотя они и существенны для удовлетворения тех или иных граничных условий, но фактически отличны от нуля в областях, много меньших области, в которой могут распространяться лучи, соответствующие действительным  $\mathbf{k}$ . Тогда для числа узлов можно записать следующую асимптотическую формулу:

$$N(2\pi)^m = \int dx_1, \dots, dx_m \int dk_1, \dots, dk_m, \quad (3)$$

где  $N$  — целое число, значительно превышающее единицу,  $m$  — число измерений пространства, в котором рассматривается уравнение эйконала.

Формула (3), очевидно, описывает число состояний в фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  аналогично тому, как в квантовой механике определяется число квантовых состояний, отвечающих данному объему фазового пространства. В формуле (3) область интегрирования по  $\mathbf{k}$  ограничена поверхностью (2) (вообще поверхностью, определяемой уравнением эйконала).

Интегрирование в пространстве  $\mathbf{r}$  ведется вплоть до границ, на которых заданы те или иные граничные условия. При этом, конечно, внутри таких границ вектор  $\mathbf{k}$  всюду действителен. Более интересным и более сложным является случай запертых лучей, когда некоторая область пространства  $\mathbf{r}$ , внутри которой  $k^2 > 0$ , ограничена поверхностью  $k^2 = 0$ . В этом случае интегрирование в (3) ведется по области пространства, ограниченной такой поверхностью. Траектория луча лежит при этом внутри поверхности  $k^2 = 0$ .

Формула (3) дает уравнение для определения частот колебаний многомерно слабонеоднородной плазмы. В случае разделяющихся переменных использование (3) для получения спектра колебаний кажется сомнительным, так как при этом эта формула сводится к произведению нескольких сомножителей:

$$\prod_{i=1}^m 2\pi N_i = \prod_{i=1}^m \int dx_i \int dk_i = \prod_{i=1}^m \int dx_i k_i(x_i), \quad (4)$$

где интегрирование по  $x_i$  ведется между точками поворота  $k_i(x_i) = 0$ , лежащими, вообще говоря, внутри поверхности  $k^2 = 0$ . Это означает, что в случае разделяющихся переменных задача сводится или к одномерным правилам квантования, или к понижению порядка в уравнении типа (2). Если переменные не разделяются, то возникает принципиальное отличие многомерно неоднородного случая, заключающееся в том, что луч может почти плотно заполнить своей траекторией допустимый для его движения объем. Конечно, возможны траектории, отнюдь не соответствующие такому заполнению; однако в общем случае число таких траекторий пренебрежимо мало.

Если известно выражение для показателя преломления  $n(\theta, \varphi)$  в зависимости от углов, определяющих направление распространения волны в пространстве, то, например, в случае трехмерной слабой неоднородности

родности можно записать асимптотическую формулу для определения спектра колебаний плазмы в следующем виде:

$$N(2\pi)^3 = \frac{\omega^3}{c^3} \int dr \int n^2 dn \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5)$$

2. В качестве первого примера рассмотрим высокочастотные колебания магнитоактивной разреженной плазмы, обладающей многомерной слабой неоднородностью. Уравнение эйконала в этом случае имеет вид (2). Для определенности будем считать, что  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ ,  $\varepsilon_1 > g$ . Области интегрирования в формуле

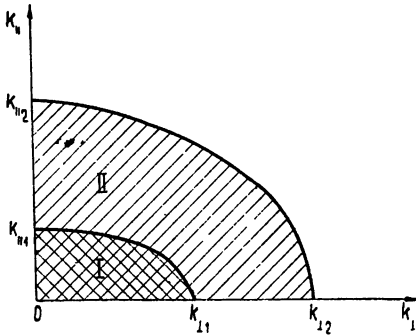


Рис. 1.

(3) по  $k$  определим из уравнения (2) в соответствии с условием  $k^2 > 0$ . Тогда получим две области интегрирования в соответствии с существованием обыкновенной и не-обыкновенной волн в плазме (см. рис. 1), т. е. получим два спектра колебаний многомерно слабонеоднородной плазмы. В случае трехмерной неоднородности будем иметь следующие уравнения для определения спектров колебаний слабонеоднородной плазмы:

$$N_1 = \frac{1}{4\pi^2} \int dr \int_0^{k_{\parallel 1}} k_{-}^2 dk_{\parallel}, \quad N_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int dr \int_0^{k_{\parallel 2}} k_{+}^2 dk_{\parallel}, \quad (6)$$

где  $k_{\pm}^2$  — два решения уравнения (2) относительно  $k_{\perp}^2$ ,

$$k_{\parallel 1,2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_1 \mp g), \quad k_{\perp 1}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2, \quad k_{\perp 2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_1^2 - g^2}{\varepsilon_1}.$$

Выпишем результат интегрирования в (6) по  $k_{\parallel}$  для первого уравнения в предположении  $a_1 \geq a_2 \geq u$ :

$$N_1 = \frac{\omega^3}{8\pi^2 c^3} \int \frac{dr}{\varepsilon_1} \left\{ u^{1/2} \left[ u(\varepsilon_1 + g) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{3} u(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \right] + \frac{2}{3} a_1^{1/2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left[ (a_1 - a_2) F \left( \arcsin \sqrt{\frac{u}{a_2}}, \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \right) - (a_1 + a_2) E \left( \arcsin \sqrt{\frac{u}{a_2}}, \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \right) - \sqrt{u(a_2 - u) \left( 1 - \frac{u}{a_1} \right)} \right] \right\}, \quad (7)$$

где

$$u \equiv \varepsilon_1 - g,$$

$$a_{1,2} \equiv \varepsilon_1 - g^2 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} \pm 2g \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \left[ \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} - 1 \right]},$$

$F(\varphi, \psi)$  и  $E(\varphi, \psi)$  — эллиптические интегралы первого и второго рода. Второе уравнение (6) после интегрирования по  $k_{\parallel}$  будет иметь вид, близкий к выражению (7). При  $\omega_{Le}^2 < \omega^2 \ll \Omega_e^2$  из (7) получим следующее уравнение для спектра поперечных колебаний слабонеоднородной плазмы:

$$N_1 = \frac{\omega^3}{6\pi^2 c^3} \int dr \left( 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right). \quad (8)$$

3. В случае электромагнитных колебаний электронной плазмы в магнитном поле (для квазипродольных волн с учетом пространственной дисперсии) показатель преломления имеет вид [2,3]

$$n^2 = \frac{\epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_2 \cos^2 \theta}{b_1 \sin^4 \theta + b_2 \cos^4 \theta + b_3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}, \quad (9)$$

где

$$b_1 = \frac{T_e}{mc^2} \frac{3\omega_{Le}^2 \omega^2}{(\omega^2 - \Omega_e^2)(\omega^2 - 4\Omega_e^2)}, \quad b_2 = \frac{3T_e}{mc^2} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2},$$

$$b_3 = \frac{T_e}{mc^2} \omega_{Le}^2 \frac{6\omega^4 - 3\omega^2 \Omega_e^2 + \Omega_e^4}{(\omega^2 - \Omega_e^2)^3},$$

$T_e$ ,  $m$  — температура и масса электронов,  $\theta$  — угол между направлением магнитного поля и вектора  $k$ . При  $\omega^2 < \Omega_e^2$  или  $\omega^2 > 4\Omega_e^2$  уравнение эйконала (9) соответствует дифференциальному уравнению эллиптического типа; поэтому определение спектра колебаний плазмы в этих случаях можно осуществить по вышеизложенному методу. В случае двухмерной неоднородности (вдоль магнитного поля и поперек) и при условиях  $b_1 \gg b_2$ ,  $2\sqrt{b_1 b_2} \gg b_3$  получим следующее уравнение для определения спектра колебаний слабонеоднородной плазмы:

$$N = \frac{\omega^2}{8\pi^2 c^2} \int \frac{ds}{\sqrt{b_1 b_2}} \left\{ \frac{1}{p_1} \left[ \epsilon_1 + \epsilon_2 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{p_1}{p_2} \right] \left( \frac{\pi}{2} + \arctg p_2 - \arctg \frac{1}{p_2} \right) - \frac{2}{p_4} \left[ \epsilon_1 + \epsilon_2 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{p_4}{p_3} \right] \arctg p_3 \right\}, \quad (10)$$

где

$$p_{1,2} \equiv \frac{\sqrt{2\sqrt{b_1 b_2} + b_3}}{\sqrt{b_1} \pm \sqrt{b_2}}, \quad p_{3,4} \equiv \frac{\sqrt{2\sqrt{b_1 b_2} - b_3}}{\sqrt{b_1} \pm \sqrt{b_2}}.$$

При  $\omega^2 \gg \Omega_e^2$  уравнение для определения спектра (10) будет иметь вид

$$N = \frac{\omega^2}{4\pi c^2} \int \frac{\epsilon_2}{b_2} ds. \quad (11)$$

4. Переходя к магнитогидродинамическим волнам, отметим, что для магнитозвуковых волн уравнение эйконала имеет вид [2,3]

$$(k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) k_{\parallel}^2 v_A^2 v_s^2 - (v_A^2 + v_s^2) \omega^2 (k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2) + \omega^4 = 0, \quad (12)$$

где  $v_A^2 = B^2/4\pi\rho$ ,  $B$  — магнитное поле,  $\rho$  — плотность плазмы,  $v_s^2 = |e_i/e| T_e/M$ ,  $e_i$  — заряд иона,  $M$  — масса иона,  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ . В соответствии с двумя спектрами магнитозвуковых волн получим две области интегрирования по  $k$  в формуле (3), которые указаны на рис. 2.

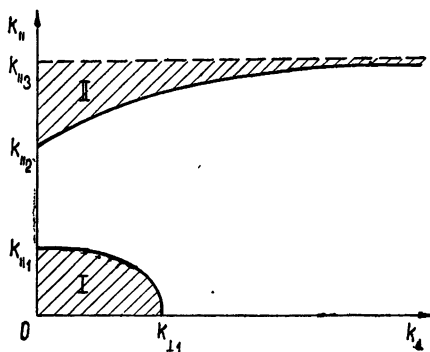


Рис. 2.

Область I соответствует ускоренной волне, область II — замедленной. Для определенности рассмотрим случай  $v_A > v_s$ . Тогда

$$k_{\perp 1}^2 = \frac{\omega^2}{v_A^2}, \quad k_{\perp 2}^2 = \frac{\omega^2}{v_s^2}, \quad k_{\perp 3}^2 = \frac{\omega^2}{v_s^2} \left( 1 + \frac{v_s^2}{v_A^2} \right), \quad k_{\perp 1}^2 = \frac{\omega^2}{v_A^2 + v_s^2}.$$

Уравнение для определения спектра ускоренных волн в слабонеоднородной плазме будет иметь вид

$$N_1 = \frac{\omega^3}{4\pi^2} \int \frac{dr}{v_A^3} \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{v_A/v_s}{2 \sqrt{1 + v_s^2/v_A^2}} \ln \frac{\sqrt{1 + v_A^2/v_s^2} + 1}{\sqrt{1 + v_A^2/v_s^2} - 1} \right\}. \quad (13)$$

При  $v_A \gg v_s$  уравнение (13) сильно упрощается:

$$\omega^3 = \frac{6\pi^2 N_1}{\int dr/v_A^3}. \quad (14)$$

В случае, когда  $v_s > v_A$  или же  $v_s \gg v_A$ , уравнения для спектра колебаний получаются заменой в (13) и (14)  $v_s$  на  $v_A$ ,  $v_A$  на  $v_s$ . Для получения спектра замедленных волн в слабонеоднородной плазме интегрирование по  $k$  в формуле (3) следует проводить по области II (рис. 2). При этом интегрирование по  $k$  дает расходящийся интеграл в связи с тем, что область интегрирования распространяется вплоть до  $k_{\perp} \rightarrow \infty$  при конечном  $k_{\parallel}$ . Это является отражением того факта, что дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению эйконала (12), оказывается уравнением параболического типа.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. П. Силин, Препринт, ФИАН, 1963.
- 2 В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмодобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
- 3 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.

## ON OSCILLATIONS OF WEAKLY NONHOMOGENEOUS PLASMA

*E. E. Lovetskii, V. P. Silin*

The oscillations of a weakly nonhomogeneous plasma are investigated in the geometrical optics approximation. Formulae have been obtained defining the oscillation spectra of the weakly nonhomogeneous plasma in case of multidimensional nonhomogeneity for the field equations of an arbitrary order. By means of these formulae there have been considered high-frequency oscillations of the magnetoactive rarefied plasma as well as quasi-longitudinal oscillations of the magnetoactive plasma taking into account the spacial dispersion and magnetohydrodynamic waves.

---

УДК 533.951.2

## ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЛНЫ В ПЛЕНКАХ

Ю. А. Романов

Методом кинетического уравнения исследован (с учетом запаздывания взаимодействия) плазменный энергетический спектр плазменной пластинки в предположении о зеркальном отражении электронов от границы плазмы. Приведенные дисперсионные соотношения для поверхностных плазмонов резко отличаются от аналогичных результатов Каназавы [9]. Указывается на причину этого расхождения. Показано, что в достаточно тонких пленках могут существовать «оптические» плазмоны, которые в силу специфического затухания дают основной вклад в переходное излучение.

Задача об энергетическом спектре полуограниченной плазмы и плазменной пластинки представляет интерес как в связи с изучением их волноводных свойств, с одной стороны, так и характеристических потерь, переходного излучения и т. п., с другой. В результате раздельного изучения этих двух вопросов в литературе появились две несвязанные группы работ. Первая группа фактически ведет свое существование с работы Ценнека (1907 г.), который показал, что вдоль проводящей поверхности может распространяться медленная поверхностная волна. В дальнейшем выяснилось, что аналогичные поверхностные волны существуют и вблизи диэлектрических слоев. Подобные системы в настоящее время получили название открытых волноводных систем; их теорию можно найти, например, в [1]. Особенно интересна среди этих систем плазма, поскольку ее диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(\omega)$  в некоторой области частот становится отрицательной. Последнее приводит, в частности, к существованию поверхностной  $E$ -волны даже в полуограниченной бесстолкновительной плазме.

Насколько нам известно, впервые волноводные свойства плазменной пластинки исследовались Шуманом [2]. Наиболее полно этот вопрос рассмотрен в недавней работе Тамира и Олинера [3] (там же имеются ссылки на более ранние работы). Авторы [3] подробно исследовали для частного случая диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(\omega) = 1 - \omega_0^2/\omega^2 \quad (1)$$

( $\omega_0$  — плазменная частота) дисперсионное уравнение плазменной пластинки, приведенное в общем случае, например, в [1]. К этой же группе можно отнести работы, оперирующие понятием поверхностного импеданса и использующие граничные условия Леонтовича. Во всех этих работах пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости не учитывается, хотя она и может оказаться существенной из-за экспоненциально быстрого убывания поля при удалении от границы плазмы.

Вторая группа, на которой мы остановимся несколько подробнее, начинается статьей Ритчи [4]. Изучая характеристические потери при прохождении быстрых электронов через металлическую пленку, он пришел к выводу, что в полусограниченной плазме, кроме объемных плазмо-

нов, существуют также поверхностные плазменные волны с частотой  $\omega_0/\sqrt{2}$ , представляющие собой распространяющиеся вдоль границы плазмы волны поверхностного заряда. Далее, Стерн и Феррел [5], используя макроскопическую теорию без учета пространственной дисперсии и запаздывания взаимодействия, решили аналогичную задачу для полуограниченной плазмы и плазменной пластинки, граничащей с диэлектрической средой (см. также [6]). Спектр плазменных волн, полученный в этой группе работ, совпадает с соответствующими результатами [3], если в последних устремить скорость света к бесконечности. (Следует отметить, что именно в этой группе работ, а не в [3], впервые были получены дисперсионные соотношения для так называемых обратных волн в пленках.) Наибольший интерес представляют вычисленные в этих работах вероятности возбуждения поверхностных плазмонов быстрыми электронами, которые довольно существенны особенно в тонких пленках.

Существенным недостатком второй группы работ является пренебрежение запаздыванием взаимодействия. Именно это пренебрежение привело к неправильному утверждению Феррела [6] относительно высвечивания поверхностного плазмона. Эта точка зрения продолжает поддерживаться и в других работах [7]. В действительности таким высвечиванием обладает так называемый нормальный оптический плазмон, представляющий собой вытекающую несектральную волну и существующий лишь в достаточно тонких пленках. Этот плазмон очень сильно возбуждается быстрыми электронами, и, как будет показано ниже, в случае достаточно тонких пленок дает основной вклад в переходное излучение. Пространственная дисперсия в этой группе работ также не учитывается.

В настоящей статье энергетический спектр плазменной пластинки рассматривается с учетом как пространственной дисперсии, так и запаздывания взаимодействия. (Аналогичное рассмотрение для полуограниченной плазмы проведено в [8].) Полученные результаты существенно отличаются от соответствующих результатов Каназава [9]. Показано, что в достаточно тонких пленках могут существовать два эффективных канала переходного излучения, обусловленных возбуждением и последующим высвечиванием нормального и тангенциального оптических плазмонов.

## 1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Рассмотрим плазменную пластинку толщины  $d$ , граничащую по обе стороны с непоглощающей диэлектрической средой  $\epsilon_0$ . Электромагнитные поля этой системы определяются уравнениями Максвелла совместно с кинетическим уравнением и соответствующими граничными условиями. В качестве последних предполагается зеркальное отражение электронов от поверхности плазмы и, как обычно, непрерывность тангенциальных составляющих полей  $E$  и  $H$ .

С точки зрения симметрии свободные поля рассматриваемой системы можно разделить на следующие два типа:

а) поля  $E_z(r, t)$ ,  $H_y(r, t)$ ,  $H_x(r, t)$  симметричны, а  $E_x(r, t)$ ,  $E_y(r, t)$ ,  $H_z(r, t)$  антисимметричны относительно  $z = d/2$ ;

б) поля  $E_z(r, t)$ ,  $H_y(r, t)$ ,  $H_x(r, t)$  антисимметричны, а  $E_x(r, t)$ ,  $E_y(r, t)$ ,  $H_z(r, t)$  симметричны относительно  $z = d/2$ .

Оба типа решений будем рассматривать единым образом. Кроме того, для простоты положим  $k_y = 0$  и рассмотрим случай  $H_x(0) = 0$ ,  $H_y(0) \neq 0$ . Вычисления, аналогичные выполненным при выводе (3) [8], для данного случая приводят к следующему дисперсионному соотношению:



$$\frac{2i}{d} \sum_{k_z} \frac{\varepsilon_{zz}(\mathbf{k}, \omega) - c^2 k_x^2 / \varepsilon_i \omega^2}{\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) [\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) - c^2 k^2 / \varepsilon_i \omega^2]} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} k_z^0. \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon_i$  — диэлектрическая проницаемость ионного остатка плазмы,

$$k_z^0 = -\sqrt{\varepsilon_0 \omega^2 / c^2 - k_x^2}, \quad (3)$$

$$k_z \equiv k_z^{(a)} = \frac{(2n_z + 1)\pi}{d}. \quad (4)$$

для первого типа волн,

$$k_z \equiv k_z^{(c)} = \frac{2n_z \pi}{d} \quad (4a)$$

для второго типа волн и

$$n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

Как и должно быть, при  $d \rightarrow \infty$  уравнение (2) переходит в (3) [8].

И рассмотрим случай

$$\varepsilon_i \omega^2 / c^2 \ll k_x^2 \ll \omega^2 / v_T^2. \quad (6)$$

Тогда вместо (2) будем иметь

$$\frac{2k_x}{d} \sum_{k_z} \frac{1}{k^2 \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)} = -\varepsilon_i / \varepsilon_0. \quad (7)$$

Это дисперсионное соотношение существенно отличается от соответствующего выражения в [9]. Расхождение обусловлено следующим. Квазичастица типа плазмона, образно выражаясь, состоит из совокупности пар электрон-дырка и фотонов, связанных в единое целое посредством взаимодействия между собой. Поведение этих составляющих, а следовательно, и свойства самой квазичастицы, зависят от конкретных граничных условий. В данном случае их два — граничные условия для электронов (зеркальное отражение) и граничные условия для электромагнитных полей. В работе [9] принимаются во внимание лишь граничные условия для электронов, на форму же электромагнитного поля квазичастицы не накладывается никаких ограничений. В результате дисперсионные соотношения в [9], выведенные для плоских волн, не имеют никакого отношения к реальной квазичастице, существующей в рассматриваемой системе.

Вернемся к уравнению (7). Решая его аналогично тому, как это делалось в [8], получим

$$\omega \simeq \omega_1 + \frac{\varepsilon_0 \omega_1^2}{\varepsilon_i \omega_0^2} a \left( \frac{\omega_1}{\omega_0}, d \right) k_x v_T - \frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{(\varepsilon_0 / \varepsilon_i) (\omega_0^2 / \omega_1^2 - 1)}{|\bar{\varepsilon}|^2} k_x v_T, \quad (8)$$

где

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{\parallel} \left( \mathbf{z}, \frac{\omega}{\omega_0} \right)_{z \sim 1}, \quad (9)$$

$$a \left( \frac{\omega_1}{\omega_0}, d \right) = \frac{v_T}{\omega_1 d} \sum_z \frac{(\omega_0^2 / \omega_1^2 - 1) \varepsilon'_{\parallel}(z) + |\varepsilon_{\parallel}(z)|^2}{z^2 |\varepsilon_{\perp}(z)|^2},$$

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + (\varepsilon_0/\varepsilon_i) [1 \mp \exp(-k_x d)] [1 \pm \exp(-k_x d)]^{-1}}, \quad (10)$$

$z = (v_T/\omega) k_z$ , с  $k_z$  из (4) или (4а); верхний знак относится к первому типу решений, нижний — ко второму.

При выводе (8) мы считали, что  $\omega d/v_T \gg 1$  и поэтому в слагаемом, ответственном за мнимую часть частоты, суммирование было заменено интегрированием. Кроме того, второе и третье слагаемое считалось малым по сравнению с первым.

Пусть  $k_x d \ll 1$ . (Обратный предельный случай не представляет интереса, так как он аналогичен рассмотренному в [8] случаю полуграниченной плазмы.) Тогда (8) дает

$$\omega \simeq \omega_0 \left( 1 - \frac{\varepsilon_0}{4\varepsilon_i} k_x d \right) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_i} a \left( \frac{\omega_1}{\omega_0}, d \right) k_x v_T - i \frac{(\varepsilon_0/\varepsilon_i)^2 (k_x d) (k_x v_T)}{2 \sqrt{\pi} |\bar{\varepsilon}|^2} \quad (11)$$

для первого типа волн (так называемые нормальные поверхностные волны) и

$$\omega \simeq \omega_0 \sqrt{\frac{k_x d}{2\varepsilon_0/\varepsilon_i}} + a \left( \frac{\omega_1}{\omega_0}, d \right) \frac{(k_x d) (k_x v_T)}{2} - i \frac{2(\varepsilon_0/\varepsilon_i)^2 v_T}{\sqrt{\pi} |\bar{\varepsilon}|^2 d} \quad (12)$$

для второго типа волн (так называемые тангенциальные волны).

Первые слагаемые в (11), (12) совпадают, по существу, с дисперсионными соотношениями, полученными в [4,6] без учета пространственной дисперсии. Последние слагаемые, целиком обусловленные пространственной дисперсией, интересны тем, что они указывают на существенную зависимость затухания данного типа плазменных волн от толщины плазменной пластинки; зависимость эта для рассматриваемых двух типов волн носит различный характер, что может быть интерпретировано следующим образом.

Затухание поверхностных плазмонов обусловлено в основном перемещением электронов вдоль  $z$ , поскольку именно в этом направлении их поля меняются наиболее быстро. Время, в течение которого волна совершает работу над отдельным электроном, есть  $t \sim d/v_T$  (при обратном движении электрона эта работа отрицательна), т. е. пропорционально  $d$ , что и приводит к указанной зависимости затухания от толщины для нормальных плазмонов. Для тангенциальных плазмонов положение несколько сложнее. Легко видеть, что их фазовая скорость для малых толщин меняется как  $\sqrt{d}$ . Это приводит к увеличению затухания с уменьшением  $d$ , компенсирующегося с указанным выше уменьшением. Однако наряду с этим доля энергии, связанная с компонентой поля  $E_z$  внутри пленки, пропорциональна  $(k_x d)$ , что в итоге так же, как и в случае нормальных плазмонов, приводит к линейной зависимости затухания тангенциальных плазмонов от толщины пленки. (Стоящая в знаменателе (12) величина  $|\bar{\varepsilon}|^2 \propto (k_x d)^{-2}$ .)

2. Рассмотрим теперь обратный предельный случай «малых»  $k_x$ . Конкретные условия выражения этого факта будут написаны ниже. Для простоты везде, кроме формулы (16), будем пренебрегать пространственной дисперсией. Тогда суммирование в (2) легко проводится и мы получаем

$$\frac{k_z}{\varepsilon(\omega)} \frac{1 \mp e^{ik_z d}}{1 \pm e^{ik_z d}} = \frac{k_z^0}{\varepsilon_0}; \quad (13)$$

$$k_z = \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega) \omega^2}{c^2} - k_x^2}; \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_i(1 - \omega_0^2/\omega^2).$$

3. Пусть

$$k_z d \ll 1. \quad (14)$$

В первом приближении по этому параметру малости для первого типа волн (верхний знак) из (13) следует

$$\omega^2 \simeq \omega_0^2 + \frac{c^2 k_x^2 / \varepsilon_i}{1 + i \sin(2\vartheta) / (k_x d)} \left[ 1 + \frac{2\varepsilon_0}{\sqrt{\pi \varepsilon_i}} \frac{k_x v_T}{\omega_0 |\bar{\varepsilon}|^2} \operatorname{tg} \vartheta \right]^{-1}; \quad (15)$$

$$k_z = (1 - i) \sqrt{\frac{\sin(2\vartheta)}{2k_x d [1 + i \sin(2\vartheta) / k_x d]}},$$

где

$$\sin \vartheta = ck_x / \sqrt{\varepsilon_0} \omega. \quad (16)$$

Величина (16) может быть, вообще говоря, больше единицы и комплексной. В случае  $\sin \vartheta < 1$  угол  $\vartheta$  характеризует направление распространения испущенного плазмонным фотоном, отсчитываемого от нормали к пленке. В этом легко убедиться, используя закон сохранения энергии и компоненты импульса  $k_x$ . Отличие квадратной скобки от единицы обусловлено пространственной дисперсией; для нерелятивистских температур и малых  $k_x$  оно не существенно. В дальнейшем этим множителем мы будем пренебрегать. Наконец, заметим, что для рассматриваемого типа волн поля внутри пленки, исключая малые  $k_x$  для поверхностных плазмонов (см. ниже) и большие — для оптических плазмонов, удовлетворяют соотношению  $E_z \gg E_x$ . Поэтому, как и в [6], назовем их нормальными плазмонами.

Формула (15), хотя и имеет внешне простой вид, трудно обозрима. Поэтому рассмотрим два частных случая, положив ради простоты  $\varepsilon_0 = \varepsilon_i = 1$ .

а) Тонкие пленки:

$$\omega_0 d / c \ll 1. \quad (17)$$

Уравнение (15) дает при этом две ветви. Первая ветвь (поверхностная волна):

$$\omega^2 \simeq \frac{c^2 k_x^2}{1 + (k_x d / 2)^2 (1 + c^2 k_x^2 / \omega_0^2)} \quad (18)$$

при

$$k_x d \ll 1, \quad ck_x \ll \omega_0. \quad (18a)$$

В области  $ck_x \gg \omega_0$  данная ветвь определяется дисперсионным соотношением (8). Плазмон, соответствующий этой ветви, назовем нормальным поверхностным плазмоном. Для этого плазмона всюду выполняется соотношение

$$v_\phi = \omega / k_x < c, \quad (19)$$

и, следовательно, он не может излучать фотоны, в противоположность утверждению [6].

Вторая ветвь — нормальный оптический плазмон:

$$\omega^2 \simeq \omega_0^2 - i \frac{\omega d c k_x^2}{2 \cos \vartheta} \quad (20)$$

при

$$k_x d \ll 1, \quad \frac{\omega_0 d}{c \cos \vartheta} \ll 1 \quad (20a)$$

и

$$\omega^2 \simeq \omega_0^2 + c^2 k_x^2 - i \frac{2\omega_0 c}{d} \quad (21)$$

при

$$k_x d \gg 1. \quad (21a)$$

Данная ветвь соответствует неспектральной вытекающей волне [3]: Соответствующие ей формально вычисленные электромагнитные поля экспоненциально возрастают при удалении от границы плазмы и, следовательно, не удовлетворяют условию излучения. Тем не менее данная волна и соответствующий ей плазмон является вполне реальной квазичастицей. Эта квазичастица во всех отношениях аналогична, например, протону в радиоактивном атоме. Как там существует конечная вероятность выйти протону из атома, так и здесь существует конечная вероятность выйти плазмону из пленки. Ясно, что вышедший из пленки плазмон представляет собой фотон (т. е. плазмон в вакууме, отличающийся от плазмона в пленке тем же, чем и протон в вакууме от протона в ядре). Возможность такого высвечивания плазмона, приводящая к конечности его времени жизни (мнимая часть в (20) и (21), обусловлена тем, что его фазовая скорость  $v_\phi = \omega/k_x > c$ .

Из общих соображений следует, что понятием квазичастицы имеет смысл пользоваться, если время  $\Delta t$ , в течение которого она участвует в процессе, много меньше ее времени жизни. В рассматриваемом ниже случае возбуждения плазмона быстрым электроном  $\Delta t \sim d/v$ , что приводит к следующим (кроме  $\omega t \gg 1$ ) дополнительным неравенствам:

$$\frac{c}{v} \frac{(k_x d)^2}{4 \cos \vartheta} \ll 1 \quad (22)$$

в случае (20) и

$$\frac{c}{v} \frac{\omega_0}{\omega} \ll 1 \quad (23)$$

в случае (21).

Обе рассмотренные дисперсионные кривые приведены на рис. 1.

б) «Толстые» пленки:

$$\omega_0 d/c \gg 1, \quad (24)$$

но

$$k_x d \ll 1. \quad (25)$$

Уравнение (15) снова дает две ветви. Первая ветвь — поверхностная волна, практически всюду совпадающая с соответствующей ветвью полограниченной плазмы [8].

Вторая ветвь — оптический плазмон:

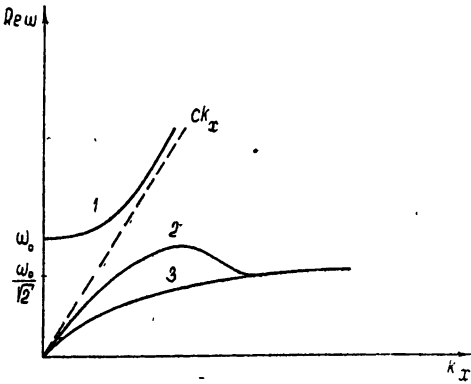


Рис. 1. Зависимость частоты  $\text{Re } \omega$  от волнового числа  $k_x$  („тонкие“ пленки): 1—нормальный оптический плазмон; 2—нормальный поверхностный плазмон; 3—тангенциальный поверхностный плазмон.

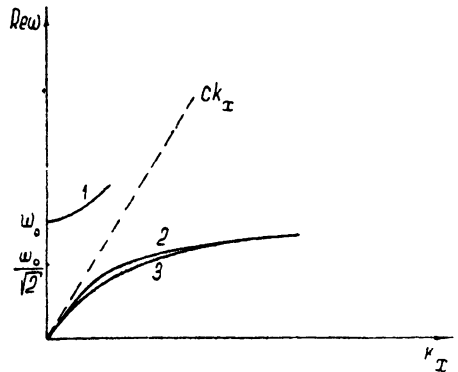
$$\omega^2 \simeq \omega_0^2 + c^2 k_x^2 (1 - i2c \cos \vartheta / \omega_0 d); \quad (26)$$

$$\sqrt{c/\omega_0 d} k_x d \ll 1; \quad ck_x \ll \omega_0. \quad (26a)$$

Обратный случай  $ck_x \gg \omega_0$  или  $\sqrt{c/\omega_0 d} k_x d \gg 1$  соответствует сильно затухающей волне и поэтому не существует. Относительно этого плазмона можно сказать то же, что и в случае тонких пленок.

Обе рассмотренные ветви изображены на рис. 2. Следует подчерк-

Рис. 2. Зависимость частоты  $\text{Re } \omega$  от волнового числа  $k_x$  („толстые“ пленки): 1—нормальный оптический плазмон; 2—нормальный поверхностный плазмон; 3—тангенциальный поверхностный плазмон.



нуть, что в отличие от поверхностных плазмонов, оптический плазмон существует лишь в достаточно тонких пленках (см. (26a)).

4. Перейдем ко второму типу волн (нижний знак в (13)). В том же приближении и в тех же обозначениях, что и раньше, получим.

$$\omega^2 \simeq \frac{\omega_0^2}{1 + 2i(\varepsilon_0/\varepsilon_i) \text{tg } \vartheta / k_x d}. \quad (27)$$

Электромагнитные поля внутри пленки, соответствующие данному типу волн, удовлетворяют соотношению  $E_x \gg E_z$ . Поэтому, как и в [6], назовем их тангенциальными плазмонами. Снова ограничимся двумя частными случаями.

а) Тонкие пленки ( $\sqrt{\varepsilon_i} \omega_0 d / c \ll 1$ ):

$$\omega^2 \simeq \frac{c^2 k_x^2}{\varepsilon_0} \left[ 1 - 4 \left( \frac{c^2 k_x^2}{\varepsilon_i \omega_0^2 k_x d} \right)^2 \right] \quad (28)$$

при

$$\frac{c^2 k_x^2}{\varepsilon \omega_0^2 k_x d} \ll 1, \quad c^2 k_x^2 / \varepsilon_0 \ll \omega_0^2. \quad (28a)$$

В области  $c^2 k_x^2 \gg \omega_0^2$  эта ветвь определяется дисперсионным соотношением (8). Соответствующая кривая изображена на рис. 1. Плазмон, отвечающий этой ветви, назовем тангенциальным поверхностным плазмоном.

В общем случае только этот тип тангенциальных плазмонов и существует. Но если выполняется неравенство

$$4\varepsilon_0/\varepsilon_i \ll 1, \quad (29)$$

то в тонкой пленке может существовать еще один тип тангенциальных плазмонов, который назовем оптическим тангенциальным плазмоном. Он определяется следующим дисперсионным соотношением:

$$\omega^2 \simeq \omega_0^2 \left( 1 - i \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\varepsilon_i} \frac{2c}{\omega_0 d} \right); \quad (30)$$

$$\frac{c^2 k_x^2}{\varepsilon_0} \ll \omega_0^2; \quad k_x d \ll 1; \quad \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\varepsilon_i} \frac{2c}{\omega_0 d} \ll 1; \quad \frac{2\sqrt{\varepsilon_0} \omega_0 d}{c} \ll 1; \quad (30a)$$

для него  $v_\phi > c$ . В отличие от нормального оптического плазмона затухание этого плазмона практически не зависит от  $k_x$ . В остальном относительно его можно сказать то же самое, что с нормальным плазмоне.

б) Толстые пленки ( $\sqrt{\varepsilon_i} \omega_0 d / c \gg 1$ ).

В данном случае существует лишь тангенциальный поверхностный плазмон, определяемый дисперсионными соотношениями (8) и (28). Соответствующая кривая изображена на рис. 2.

Мы рассмотрели четыре ветви дисперсионного уравнения (13), две из которых — неспектральные. В действительности, как показано в [3], даже в случае  $\varepsilon_i = \varepsilon_0 = 1$  уравнение (13) имеет бесконечное число ветвей, включающих в себя, кроме поверхностных, бесконечное число комплексных спектральных и бесконечное число неспектральных вытекающих волн. Комплексные волны не переносят активной энергии и поэтому мы их не рассматриваем. Что же касается не рассмотренных здесь неспектральных вытекающих волн, то они обладают сравнительно малым временем жизни, в результате чего, например, в переходном излучении создают почти непрерывный фон как в частотной, так и в угловой зависимости; поэтому указанные волны менее интересны, чем рассмотренная здесь ветвь.

Далее, в случае  $\varepsilon_i > \varepsilon_0$  существует бесконечный спектр медленных волн с  $\omega > \omega_0$ , аналогичных волнам в диэлектрической пластинке и рассмотренных, например, в [1].

Наконец, в двухкомпонентной плазме (например, электронно-дырочной в полупроводниках), кроме рассмотренных высокочастотных поверхностных плазменных волн, существуют низкочастотные поверхностные плазменные волны. Последние в случае

$$k_x^2 v_+^2 \ll \omega^2 \ll k_x^2 v_-^2, \quad k_x d \gg 1 \quad (31)$$

определяются дисперсионным соотношением

$$\omega^2 \simeq \frac{\omega_+^2}{1 + \omega^2 |k_x^2 v_-^2 + \sqrt{\omega_-^2 |k_x^2 v_-^4 + \epsilon_0^2 | \epsilon_i^2}|}, \quad (32)$$

где  $v_-(v_+)$  — тепловая скорость электронов (дырок),  $\omega_-(\omega_+)$  — плазменная частота электронов (дырок). Более подробное рассмотрение этих медленных волн будет проведено отдельно.

## 2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ПЛАЗМОНОВ

Возбуждение поверхностных плазмонов быстрым электроном в тонких пленках рассматривалось во многих работах (см., например, [4–6, 10]). Здесь мы ограничимся рассмотрением возбуждения оптического плазмона, высвечивание которого в случае тонких пленок дает основной вклад в переходное излучение. Прямое вычисление этой вероятности, однако, наталкивается на трудности, связанные с экспоненциальным возрастанием поля при удалении от границы пленки.

Эту трудность для нормальных плазмонов в случае (20) при выполнении условия (22) можно обойти следующим образом. За время взаимодействия электрона с плазмой из пленки просочится незначительная часть электромагнитной энергии, которой при вычислении вероятности возбуждения плазмона можно пренебречь. В этом приближении для дифференциальной вероятности имеем:

$$dW \simeq \frac{e^2 \epsilon_0}{2 \hbar c \epsilon_i} \frac{v}{c} \frac{\sin^2(\omega d/2v)}{\omega d/2v} |\sin 2\vartheta| d\vartheta. \quad (33)$$

Аналогичное рассмотрение для случая (21) не может быть проведено, поскольку в интересующей нас области  $\omega \sim \omega_0$  соотношение (23) не выполняется.

Для получения вероятности излучения под действием быстрого электрона нужно выражение (33) умножить на вероятность высвечивания оптического плазмона. В пренебрежении столкновениями внутри плазмы этот множитель равен единице, и, следовательно, интересующая нас вероятность излучения описывается формулой (33). При малых толщинах и небольших углах (33) практически совпадает с соответствующим выражением для полного переходного излучения [11]. Следовательно, мы можем сказать, что в этом случае переходное излучение практически целиком обусловлено возбуждением и последующим высвечиванием нормального оптического плазмона. При больших  $d$  и  $\vartheta$  (33) неприменимо в силу нарушения условия (22) и, естественно, сильно отличается от формул переходного излучения. Более того, при больших  $d$  оптический плазмон вообще не существует.

Из всего сказанного следует, что с увеличением толщины пленки интенсивность переходного излучения в области  $\omega \sim \omega_0$  резко падает. Данное утверждение подтверждается как теоретически, так и экспериментально [11]. Следует отметить, что (33) формально совпадает с соответствующим выражением [6]. Совпадение это случайное, поскольку (33) не имеет никакого отношения к поверхностному плазмону, рассматриваемому в [6], и применимо лишь в ограниченной области, указанной выше.

Переходя к излучению, обусловленному возбуждением и последующим высвечиванием тангенциального оптического плазмона, заметим, что применяемая выше процедура к нормальному оптическому плазмону не применима. Дело в том, что нормальная составляющая электрического поля (именно она является основной в процессе возбуждения плазмона нормально падающим быстрым электроном) внутри пленки для танген-

циальных плазмонов очень мала и возбуждение плазмона происходит электроном, находящимся в основном вне пленки. В результате пренебрежение полем вне пленки является недопустимым и необходимы более точные расчеты. Мы не будем их здесь приводить; укажем лишь, что излучение, связанное с высвечиванием тангенциального оптического плазмона, происходит в основном при  $\vartheta \sim \pi/2$  и имеет другую, чем для нормального плазмона, зависимость от толщины пленки. Экспериментов по изучению этого типа излучения в настоящее время нет. По-видимому, оно может быть обнаружено в полупроводниковых пленках с высокой диэлектрической проницаемостью.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
2. W. O. Schuman, S.-B. Akad. wiss., math., naturwiss., 225, 255 (1948).
3. T. Tamir, A. Oliner, Proc. IEE, 51, 347 (1963).
4. R. H. Ritchie, Phys. Rev., 105, 874 (1957).
5. E. A. Stern, R. A. Ferrell, Phys. Rev., 120, 130 (1960).
6. R. A. Ferrell, Phys. Rev., 111, 1214 (1958).
7. E. A. Stern, Phys. Rev. Letters, 8, 7 (1962); M. Hattori, K. Yamada, J. Phys. Soc. Japan, 18, 200 (1963).
8. Ю. А. Романов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 242 (1964).
9. Н. Каназава, Progr. Theor. Phys., 26, 851 (1961).
10. Ю. А. Романов, ЖЭТФ. (в печати).
11. V. P. Silin, E. P. Fetisov, Phys. Rev. Letters, 7, 374 (1961); R. H. Ritchie, H. B. Eldridge, Phys. Rev., 126, 1935 (1962); A. L. Frank, E. T. Arakawa, R. D. Birkhoff, Phys. Rev., 126, 1947 (1962).

Горьковский научно-исследовательский  
физико-технический институт

Поступила в редакцию  
5 сентября 1963 г

### PLASMA WAVES IN FILMS

*Yu. A. Romanov*

The power spectrum of a plasma slab has been investigated by the method of the kinetic equation assuming the mirror electron reflection by plasma boundary. The given dispersive relations for the surface plasmons greatly differ from the analogous results by Kanazava (9). The reason of this difference is pointed out. The optical plasmons which gives the main contribution to the transient radiation due to the specific damping are shown to exist in thin films.



УДК 538.3 : 530.145

## К ВОПРОСУ О ПОГЛОЩЕНИИ (ИЗЛУЧЕНИИ) ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*И. А. Гилинский, К. А. Рязанцев*

Проведено квантовое рассмотрение поглощения (излучения) электромагнитных волн заряженной частицей в магнитном поле. Показано, что в некоторых случаях спектр частот поглощения (излучения) оказывается эквидистантным; это обстоятельство используется для объяснения авторезонансного механизма ускорения. Дается квантовое и классическое рассмотрение резонанса на высших гармониках.

Поглощение (излучение) электромагнитных волн заряженными частицами рассматривалось неоднократно (см. [1, 2] и цитированную там литературу). Недавно в [3, 4] был предсказан новый эффект — резонансное ускорение частицы в вакууме при поглощении электромагнитных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля. Существенная особенность этого механизма ускорения, названного А. А. Коломенским и А. Н. Лебедевым авторезонансным, заключается в том, что резонанс сохраняется при возрастании энергии частицы.

Представляется целесообразным рассмотреть поглощение (излучение) электромагнитных волн зарядами при наличии постоянного магнитного поля с квантовой точки зрения\*. Даже для явлений, имеющих сугубо классическую природу (к их числу относится и авторезонансный механизм ускорения), квантовая интерпретация, как отмечали многие авторы; более проста и наглядна. Она позволяет указать на некоторые особенности, ускользающие от внимания при классическом рассмотрении. В частности, при квантовой трактовке легко обнаружить новые случаи авторезонансного ускорения.

### 1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТОТ ПОГЛОЩЕНИЯ (ИЗЛУЧЕНИЯ)

Допустим, что постоянное однородное магнитное поле  $H_0$  направлено вдоль оси  $z$ . Фотон, движущийся под углом  $\theta$  к оси  $z$  в изотропной немагнитной среде с показателем преломления  $n$ , поглощается частицей с зарядом  $e$  и массой  $m$ . При этом выполняется закон сохранения энергии и проекции импульса на направление магнитного поля. Энергия частицы, согласно [5], имеет вид

$$\mathcal{E}_l(p_z) = \{ m^2 c^4 + c^2 p_z^2 + e H_0 \hbar c (2l - \mu + 1) \}^{1/2}, \quad (1)$$

$l$  — номер уровня,  $\mu = \mp 1$  — спиновый индекс. Законы сохранения при поглощении кванта и переходе частицы без изменения спина на уровень с номером  $l + s$  имеют вид

$$\mathcal{E}_l(p_z^0) + \hbar \omega = \mathcal{E}_{l+s}(p_z); \quad (2)$$

$$p_z^0 + \frac{\hbar \omega n \cos \theta}{c} = p_z.$$

\* Некоторые аспекты этого вопроса рассмотрены Галоновым [2].

Из (2) следует, что сохраняется величина

$$\varepsilon_{l+s}(p_z) - \frac{cp_z}{n \cos \theta} = \varepsilon_l(p_z^0) - \frac{cp_z^0}{n \cos \theta}. \quad (3)$$

Физический смысл (3) различен при  $n \cos \theta > 1$  и  $n \cos \theta < 1$ . В первом случае (3) представляет собой закон сохранения энергии частицы в системе, движущейся со скоростью  $v = c/n \cos \theta$  (в этой системе частота фотона  $\omega' = 0$ ). При  $n \cos \theta < 1$  (3) имеет смысл закона сохранения продольного импульса частицы в системе отсчета, скорость которой  $v = cn \cos \theta$  (продольная компонента импульса фотона в этой системе отсутствует)\*.

Далее, из (1) и (2) легко получить уравнение для частоты поглощаемого ( $\omega > 0$ ) или излучаемого ( $\omega < 0$ ) фотона:

$$\hbar\omega^2(1 - n^2 \cos^2 \theta) + 2\omega \varepsilon_0(1 - \beta n \cos \theta) - 2ecsH_0 = 0; \quad (4)$$

$\beta = cp_z^0/\varepsilon_0$  — продольная компонента скорости частицы,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_l(p_z^0)$  — энергия частицы до соударения.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (4).

При  $s = 0$ , т. е. переходах без изменения поперечного квантового числа, (4) определяет чисто черенковское поглощение (излучение) заряда в магнитном поле. Отметим, что у частицы в магнитном поле нет определенного поперечного импульса; поэтому уравнение (4) вместо квадрата импульса фотона  $\hbar^2\omega^2 n^2/c^2$  содержит квадрат его продольной компоненты  $\hbar^2\omega^2 n^2 \cos^2 \theta/c^2$ .

Если  $s \neq 0$ ,  $H_0 \rightarrow 0$ , то (4) переходит в уравнение черенковского излучения, найденное Гинзбургом [6]. Действительно, рассмотрение вероятности переходов показывает, что при  $H_0 \rightarrow 0$  отлична от нуля только вероятность перехода с  $s \rightarrow \infty$ , причем так, что

$$ecsH_0 \rightarrow \frac{\hbar\omega^2 n^2 \sin^2 \theta}{2}.$$

В общем случае  $s \neq 0$  и  $H_0 \neq 0$  квантовой поправкой в (4) можно пренебречь (для оптических и более низких частот). Тогда мы приходим к хорошо известному условию излучения (поглощения) заряда в магнитном поле [1], получаемому обычно более сложным способом:

$$\omega = \frac{ecsH_0}{\varepsilon_0(1 - \beta n \cos \theta)}. \quad (5)$$

Любопытно проследить (пренебрегая дисперсией среды) переход от нормальных доплеровских частот к сверхсветовым при увеличении скорости частицы  $\beta$ . При  $n \cos \theta < 1$  излучаются и поглощаются только нормальные частоты. Если  $n \cos \theta > 1$  и

$$\varepsilon_0(1 - \beta n \cos \theta) \gg ec|s| \hbar H_0(n^2 \cos^2 \theta - 1)\varepsilon_0^{-1}(1 - \beta n \cos \theta)^{-1},$$

то ситуация не меняется. Однако, если

$$\varepsilon_0(1 - \beta n \cos \theta) \sim ec|s| \hbar H_0(n^2 \cos^2 \theta - 1)\varepsilon_0^{-1}(1 - \beta n \cos \theta)^{-1},$$

\* Утверждение о том, что частота фотона в некоторой системе отсчета равна нулю, не следует понимать буквально. Приписывая фотону импульс  $\hbar\omega n/c$ , имеют в виду, что это полный импульс, передаваемый частице при поглощении фотона как самим фотоном, так и средой. Условие  $\omega' = 0$  означает только, что в некоторой системе отсчета фотон полностью передает энергию среде.

т. е. частота черенковского кванта порядка доплеровской частоты, появляется новая (черенковская) ветвь излучения (поглощения). Пока

$$\varepsilon_0(1 - \beta n \cos \theta)^2 > 2ec\hbar H_0(n^2 \cos^2 \theta - 1) \varepsilon_0^{-1} |s|,$$

излучение происходит с переходом частицы «вниз» ( $s < 0$ ), а поглощение может происходить как при переходе «вверх» ( $s > 0$ ), так и «вниз» ( $s < 0$ ). При

$$\frac{1}{n \cos \theta} + \left\{ \frac{2ec\hbar |s| H_0}{\varepsilon_0^2} \left( 1 - \frac{1}{n^2 \cos^2 \theta} \right) \right\}^{1/2} > \beta > \frac{1}{n \cos \theta} - \left\{ \frac{2ec\hbar |s| H_0}{\varepsilon_0^2} \left( 1 - \frac{1}{n^2 \cos^2 \theta} \right) \right\}^{1/2}.$$

переходы с  $s > 0$  вообще запрещены (уравнение (4) имеет комплексные корни), излучение происходит «нормально», а поглощение — «аномально». При дальнейшем увеличении продольной скорости частицы излучение может происходить как на обычных, так и на сверхсветовых частотах, а поглощение — только на сверхсветовых ( $s < 0$ ), причем частота «досветовых» фотонов растет с ростом  $\beta$ . Наконец, если

$$\varepsilon_0(\beta n \cos \theta - 1) \gg e\hbar c s H_0(n^2 \cos^2 \theta - 1) \varepsilon_0^{-1}(1 - \beta n \cos \theta)^{-1},$$

то в оптическом и более длинноволновом диапазоне возможно излучение и поглощение только сверхсветовых доплеровских частот:

$$\omega = - \frac{ecs H_0}{\varepsilon_0(\beta n \cos \theta - 1)}. \quad (6)$$

## 2. АВТОРЕЗОНАНСНОЕ УСКОРЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ (КВАНТОВЫЕ УСЛОВИЯ)

Классическое выражение (5) для частоты поглощения (излучения) фотонов в магнитном поле справедливо с весьма большой точностью (в оптическом диапазоне частот отношение  $\hbar\omega/\varepsilon_0$  для электронов не превосходит  $10^{-5}$ ). Однако, как отметил Галонов [2], квантовая добавка к частоте приводит к тому, что частота перехода  $l \rightarrow l-1$  (излучение фотона) не равна частоте перехода  $l \rightarrow l+1$  (поглощение фотона). Иначе говоря, спектр поглощаемых и излучаемых частот, находимый из (4), оказывается, с учетом квантовой поправки, неэквидистантным\*. Неэквидистантность спектра приводит к тому, что система частиц, находящихся на одном из возбужденных уровней, оказывается неустойчивой по отношению к индуцированному электромагнитному излучению, причем неустойчивость сохраняется и в классической приближении [2].

Неэквидистантность частотного спектра приводит к другому важному следствию: оказывается невозможным резонансное ускорение частиц внешним электромагнитным полем. Поскольку частота, поглощаемая при переходе  $l \rightarrow l+1$ , несколько отличается от частоты перехода  $l+1 \rightarrow l+2$ , однажды установленный резонанс будет нарушаться с ростом энергии частицы. Исключения составляют те случаи, когда

\* Энергетический спектр заряда в магнитном поле непрерывно зависит от  $\beta$ . Однако при фиксированном начальном импульсе частицы и заданном направлении распространения фотонов можно говорить об эквидистантности или неэквидистантности спектра излучения (поглощения). В этом смысле указанные термины и будут далее использоваться.

спектр частот эквидистантен, т. е. квантовая поправка точно равна нулю. Как видно из (4), это имеет место при

$$n \cos \theta = 1. \quad (7)$$

Действительно, частица с импульсом  $p_z^0$  и энергией  $\mathcal{E}_l(p_z^0)$  может, согласно (4) и (7), поглотить фотон с частотой  $\omega_{l, l+s} = ecsH_0 / [\mathcal{E}_l(p_z^0) - c p_z^0]$  и перейти в состояние с импульсом  $p_z = p_z^0 + \hbar \omega_{l, l+s} / c$  и энергией  $\mathcal{E}_{l+s}(p_z)$ . При следующем переходе поглощается частота  $\omega_{l+s, l+2s} = ecsH_0 / [\mathcal{E}_{l+s}(p_z) - c p_z]$ , которая в силу закона сохранения (3) и условия (7) равна  $\omega_{l, l+s}$ .

Таким образом, часть электронов пучка будет резонансно поглощать фотоны и ускоряться. Резонансные частоты равны

$$\omega_s = \frac{ecsH_0}{\mathcal{E}_0(1 - \beta)}. \quad (8)$$

Частота основного резонанса ( $s = 1$ ) совпадает с найденной классическим методом [3].

Физический смысл условия (7) чрезвычайно прост. Квантовая поправка в (4) обусловлена разницей между квадратом энергии фотона  $\hbar^2 \omega^2$  и квадратом его продольной энергии  $\hbar^2 \omega^2 n^2 \cos^2 \theta$ .

При продольном движении фотона в вакууме ( $n = 1$ ,  $\theta = 0$ ), как отмечено еще в [2], квантовая поправка отсутствует. Условие  $n \cos \theta = 1$  при движении в среде означает, что продольная компонента импульса фотона в среде такая же, как в вакууме. Наличие у фотона поперечного импульса не проявляется, так как система в целом не обладает определенным поперечным импульсом.

Необходимо отметить, что высшие резонансы ( $s = 2, 3, \dots$ ) при продольном распространении отсутствуют из-за ортогональности волновых функций частицы в магнитном поле. Наличие высших резонансов при  $\theta \neq 0$  существенно, так как позволяет уменьшить напряженность постоянного магнитного поля при заданной частоте световой волны.

В следующем разделе мы в качестве примера проведем классическое рассмотрение резонанса на второй гармонике ( $s = 2$ ).

### 3. АВТОРЕЗОНАНСНОЕ УСКОРЕНИЕ (КЛАССИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА)

Пусть направление распространения волны лежит в плоскости  $XOZ$ , а электрическое поле направлено вдоль оси  $OY^*$ . Компоненты магнитного поля волны  $H_x = -En \cos \theta$ ,  $H_z = En \sin \theta$ ; фаза волны  $\psi = \psi_0 + \frac{\omega}{c}(xn \sin \theta + zn \cos \theta - ct)$ . Уравнения движения частицы имеют вид

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{H}]. \quad (9)$$

Из этих уравнений, учитывая поляризацию волны, нетрудно получить интеграл вида (3).

Введем безразмерные переменные  $\xi = (\omega/c)x$ ,  $\eta = (\omega/c)y$ ,  $\tau = (\omega/2c)(z - ct)$  и положим  $n \cos \theta = 1$ . Для поперечных координат находим уравнения

\* При другой поляризации волны рассмотрение усложняется тем, что в уравнениях движения поперечные координаты не удается отделить от продольных; однако качественная картина явления, по-видимому, не меняется.

$$\ddot{\xi} = -2 \frac{\Omega}{\omega} \dot{\eta} [1 + \varepsilon \sin \theta \cos(\xi \operatorname{tg} \theta + 2\tau + 2\tau_0)]; \quad (10)$$

$$\ddot{\eta} = 2 \frac{\Omega}{\omega} \left[ \dot{\xi} + \varepsilon \cos \theta \frac{d}{d\tau} \sin(\xi \operatorname{tg} \theta + 2\tau + 2\tau_0) \right],$$

причем  $\Omega$  — частота основного резонанса (8),  $\varepsilon = H/H_0$  — малый параметр задачи. Точки означают дифференцирование по  $\tau$ . Учитывая, что второе из уравнений (10) интегрируется, сведем систему к одному уравнению:

$$\dot{\xi} + \xi = -\varepsilon \cos \theta \sin(\xi \operatorname{tg} \theta + 2\tau) - \varepsilon \sin \theta \xi \cos(\xi \operatorname{tg} \theta + 2\tau). \quad (11)$$

В (11) принято  $\omega = 2\Omega$  и отброшены члены, пропорциональные  $\varepsilon^2$ . Переменные  $\xi$ ,  $\tau$  в (11) отличаются от соответствующих величин в (10) на постоянные слагаемые, определяемые начальными условиями.

Из уравнения (11) видно, что резонанс на второй гармонике существенно отличается от резонанса на основной гармонике при продольном распространении\*. Именно во втором случае, рассмотренном в [7], вынуждающая сила пропорциональна  $\sin \tau$ , поэтому и рост амплитуды ограничивается принципиально только излучением частицы. С другой стороны, в (11) возрастание амплитуды (и энергии частицы) обусловлено нелинейностью правой части, поэтому заведомо существует предельная амплитуда колебаний. Целесообразно отметить, что при  $\theta \neq 0$  уравнение, описывающее поперечные колебания частицы, оказывается нелинейным и в случае основного резонанса ( $\omega = \Omega$ ,  $n \cos \theta = 1$ ). Нелинейность ограничивает рост энергии частицы некоторым конечным пределом, возрастающим при  $\theta \rightarrow 0$ .

Уравнение (11) удобно анализировать методом усреднения [7]. Вводя медленно меняющиеся амплитуду и фазу колебания

$$\xi = a \cos(\tau + \alpha); \quad \dot{\xi} = -a \sin(\tau + \alpha), \quad (12)$$

найдем усредненные уравнения.

$$\dot{a} = 4\varepsilon \sin(2\alpha) \cos \theta J_2'(a \operatorname{tg} \theta); \quad (13)$$

$$\dot{\alpha} = -2\varepsilon \cos(2\alpha) \sin \theta \left( 1 - \frac{4 \operatorname{ctg}^2 \theta}{a^2} \right) J_2(a \operatorname{tg} \theta)$$

( $J$  — функция Бесселя; штрих означает дифференцирование по аргументу). Из (13) получаем интеграл движения

$$a \cos(2\alpha) J_2'(a \operatorname{tg} \theta) = \text{const}. \quad (14)$$

Если  $\dot{a}$  и  $\dot{\alpha}$  в начальный момент отрицательны ( $da/dt > 0$ ;  $d\alpha/dt > 0$ ), то движение происходит следующим образом.

Амплитуда и фаза возрастают до  $a \operatorname{tg} \theta = 0,61$  (первый корень уравнения  $J_2(a \operatorname{tg} \theta) = 0$ ). Затем  $\dot{\alpha}$  меняет знак и фаза начинает убывать при продолжающемся росте амплитуды. Предельная амплитуда  $a_{\text{макс}}$  определяется из условия  $\sin(2\alpha) = 0$  или

$$a_{\text{макс}} J_2'(a_{\text{макс}} \operatorname{tg} \theta) = a_0 \cos(2\alpha_0) J_2'(a_0 \operatorname{tg} \theta). \quad (15)$$

\* Случай, когда волна распространяется в анизотропной среде и лучевой вектор параллелен  $H_0$ , эквивалентен при определенных условиях распространению в вакууме [3].

Эффективное ускорение происходит при  $n - 1 \ll 1$ ,  $\theta \ll 1$  и  $\alpha_0$ , близком к  $-\pi/4$ . В этом случае  $a_{\text{макс}} \sim 3/\theta$ . Набег фазы за время ускорения

$$|\Delta\tau| \sim \frac{1}{\varepsilon\theta} \ln \frac{1}{\theta}. \quad (16)$$

Сравнивая этот результат с набегом фазы волны при возрастании амплитуды  $a$  до той же величины в случае основного резонанса, получим

$$\left| \frac{\Delta\tau}{\Delta\tau_{\text{осн}}} \right| \sim \ln \frac{a_{\text{макс}}}{a_0}.$$

При более высоких резонансах ( $s = 3, 4, \dots$ ) качественная картина явления сохраняется.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960, стр. 159.
2. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
3. А. А. Коломенский и А. Н. Лебедев, ДАН СССР, 145, 1259 (1962); ЖЭТФ, 44, 261 (1963).
4. В. Я. Давыдовский, ЖЭТФ, 43, 386 (1962).
5. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Физматгиз, М., 1959, стр. 105.
6. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 10, 589 (1940).
7. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

Новосибирский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию  
2 августа 1963 г.

#### TO THE ABSORPTION (RADIATION) OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY THE CHARGED PARTICLES IN THE PRESENCE OF A STATIC MAGNETIC FIELD

*I. A. Gilinskii, K. A. Rysantsev*

Quantum consideration has been carried out of the electromagnetic waves absorption (radiation) by the charged particle placed in a magnetic field. In some cases frequencies spectrum of absorption (radiation) is shown to be equidistant; this fact being used to explain the autoresonance mechanism of acceleration. The quantum and classical consideration of the resonance is given at high-harmonics.

УДК 533.95 : 538.12

## ШУМЫ ПЛАЗМЫ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РАЗРЯДА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Б. Н. Швилкин, М. Я. Васильева, А. А. Зайцев*

Приводятся данные об условиях возникновения шумов в плазме, находящейся в магнитном поле. Судя по характеру наблюдаемых шумов, для их объяснения может быть использована теория ионно-звуковой и диссипативной неустойчивости неоднородной магнитной плазмы.

В работе [1] сообщалось о возникновении шумов из-за неустойчивости в плазме высокочастотного разряда в однородном внешнем магнитном поле. Шумы возникали скачком при достижении некоторого критического значения магнитного поля. Поскольку в этом случае отсутствовал направленный ток, то механизм неустойчивости должен быть отличным от механизма винтовой неустойчивости, предложенного в работе [2].

В статьях [3,4] было обращено внимание на то, что в неоднородной плазме с магнитным полем неустойчивости могут развиваться даже в отсутствие направленного тока. В этом случае могут существовать два типа неустойчивостей: ионно-звуковая и дрейфовая. О дрейфовой неустойчивости несколько раньше сообщалось в работе [5] со ссылкой на [3,4].

Настоящая статья содержит данные о шумах высокочастотного разряда в магнитном поле; обсуждение результатов проводится на основе теории [3,4].

Высокочастотный разряд возбуждался в стеклянной цилиндрической трубке с внутренним диаметром 2,8 см и межэлектродным расстоянием 72 см. Трубка была снабжена плоским стеночным зондом, изготовленным из молибденовой жести толщиной 0,15 мм и диаметром 0,4 см, который располагался в средней части трубки. Переменное напряжение от генератора высокочастотных колебаний (9,4 МГц) подводилось к внешним электродам, выполненным в виде медных колец, охватывающих разрядную трубку снаружи. Преобразование несимметричного переменного напряжения в симметричное относительно земли осуществлялось с помощью трансформатора. Соленоид длиной 60 см позволял получать однородное магнитное поле величиной до 2,5 кГс. Высокочастотные электроды располагались вне соленоида на расстоянии 6 см от его концов. Амплитудное значение переменного напряжения менялось от 50 до 2000 в. Измерения проводились в трубках, соединенных с вакуумной системой; трубки наполнялись спектрально чистым гелием и аргоном при давлениях от 0,01 до 0,2 мм рт. ст. Предварительные наблюдения показали, что при длительном горении разряда происходит заметное уменьшение давления газа (жестчение трубки). Для поддержания постоянного давления в разрядной трубке использовался игольчатый натекатель, который располагался на пути от баллона с газом к экспериментальной трубке.

Шумы регистрировались с помощью высокочастотного селективного микровольтметра и панорамного анализатора спектра. Измеряемое на-

пряжение снималось с плоского зонда или медного кольца, охватывающего трубку.

Проведенные опыты показали, что при увеличении магнитного поля  $B$  до некоторого значения  $B_k$ , которое мы будем называть критическим полем, в разряде скачком возникают шумы. Спектр шума простирается от частот в несколько десятков  $кГц$  до нескольких  $МГц$ . Максимальная амплитуда шума приходится на область низких частот шириной в несколько десятых  $МГц$ ; значение максимальной амплитуды уменьшается с увеличением давления. При критическом магнитном поле амплитуда шума при давлении порядка  $10^{-2}$  мм рт. ст. в Не достигала нескольких сотых вольта.

В таблице 1 приведены данные измерений критического магнитного поля в зависимости от давления газа при постоянном значении напряжения горения. Из этих данных видно, что величина  $B_k$  возрастает с увеличением давления газа. При прочих равных условиях критическое магнитное поле в аргоне имеет большее значение, чем в случае гелия.

Таблица 1

Зависимость критического магнитного поля  $B_k$  от давления в гелии и аргоне (переменное напряжение 1200 в; радиус трубки 1,4 см)

$P_{He}$ (мм рт. ст.)	0,009	0,016	0,055	0,077	0,1	0,16	0,22
$B_k$ (гс)	90	110	200	260	300	370	450
$P_{Ar}$ (мм рт. ст.)	0,014	0,016	0,064	0,11	0,13	0,14	0,16
$B_k$ (гс)	150	160	360	580	610	660	720

Как отмечалось в литературе [6,7], существует две формы высокочастотного разряда (слабого и сильного тока). Согласно [7], одним из внешних признаков разряда сильного тока является контракция в области наружных электродов. Это явление в описываемых здесь экспериментах наблюдалось как в гелии, так и в аргоне. Оказалось, что контракция при данном давлении наступает при увеличении напряжения горения (разрядного тока) до определенной величины, причем напряжение, при котором возникает контракция, уменьшается по мере увеличения давления газа. Соответствующие измерения для разряда в гелии приведены в таблице 2, где  $U_{гор 1}$  — контракция возникает при увеличении напряжения;  $U_{гор 2}$  — контракция исчезает при уменьшении напряжения.

Таблица 2

Зависимость напряжения горения для наступления и исчезновения контракции в гелии (радиус трубки 1,4 см)

$P$ (мм рт. ст.)	0,055	0,066	0,08	0,09	0,1
$U_{гор 1}$ (в)	1700	1400	1100	850	420
$U_{гор 2}$ (в)				420	280

Как видно из таблицы, напряжение, при котором возникает контракция, уменьшается с увеличением давления. Этот результат находится в согласии с данными [7]. Кроме того, в опытах наблюдался гистерезис: при увеличении напряжения высокочастотного поля контракция наступает при больших напряжениях, чем она исчезает при уменьшении поля. Это явление позволило измерить и сопоставить между собой критические магнитные поля при одинаковых напряжениях горения и давлениях в разрядах сильного и слабого тока. Результаты показали, что величина критического магнитного поля от формы разряда не зависит.



Одновременно исследовалось влияние напряжения горения на величину  $B_k$ . Соответствующие результаты представлены в виде кривых на рис. 1, где верхняя кривая соответствует аргону, а нижняя — гелию. Из рисунка видно, что в гелии при уменьшении высокочастотного напряжения  $B_k$  остается практически постоянным до значений напряжения горения порядка 400 в, а в аргоне — до 300 в. При дальнейшем уменьшении напряжения происходит внезапное нарастание критического магнитного поля.

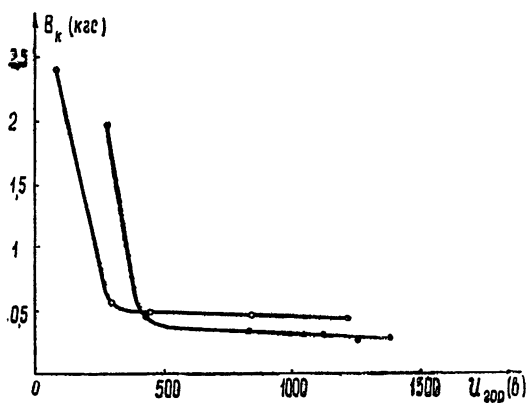


Рис. 1. Зависимость критического магнитного поля от напряжения горения:

● — гелий, давление  $P=0,1$  мм рт. ст.; ○ — аргон, давление  $P=0,1$  мм рт. ст.

ного поля. В результате средняя концентрация заряженных частиц внутри шнура должна увеличиваться.

В связи с этим можно предположить, что для возникновения шума требуется некоторая минимальная концентрация заряженных частиц. При уменьшении концентрации ниже этого значения шумы не возникают. Если это так, то рост критического магнитного поля можно объяснить тем, что в сильном магнитном поле необходимая концентрация достигается в результате контракции. То обстоятельство, что в аргоне скачок происходит при меньшем напряжении горения, может служить дополнительным косвенным подтверждением такого предположения. Действительно, в аргоне плотность заряженных частиц при том же напряжении горения и давлении должна быть несколько большей, чем в гелии и, таким образом, предельное значение концентрации должно наблюдаться при меньших напряжениях горения.

Как отмечалось выше, в бестоковой плазме возможны два типа неустойчивостей [3,4]. В одном из них нарастают ионно-звуковые волны с частотами в интервале от  $\omega_i$  до  $\sqrt{\omega_i \omega_e}$ , где  $\omega_i$  и  $\omega_e$  — соответственно циклотронные частоты электронов и ионов. Во втором типе возбуждаются дрейфовые колебания с частотами, меньшими  $\omega_i$ . Кроме того, имеется область совместного существования обоих типов неустойчивости.

Наблюдаемые на опыте шумы простирались от частот, меньших  $\omega_i$ , до более высоких частот (несколько  $M\omega_i$ ). Циклотронные частоты ионов, соответствующие критическим магнитным полям, в случае гелия лежали в пределах от 0,22 до 1,8  $M\omega_i$ , а в случае аргона — в области от 0,036 до 0,14  $M\omega_i$ . Таким образом, наблюдаемые шумы можно рассматривать как шумы в области совместного существования обоих типов неустойчивости.

Необходимо отметить, что с увеличением магнитного поля выше критического значения уровень шума на частотах выше  $\omega_i$  уменьшается, в то время как уровень шума в области низких частот практически остается неизменным. Поэтому можно предположить, что при таких

условиях происходит переход от смешанной области неустойчивости в область дрейфовых колебаний. Критическое магнитное поле, требуемое для возникновения шумов, изменяется в зависимости от давления и радиуса трубки в соответствии с законами подобия.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Geller, Phys. Rev. Letters, 9, 248 (1962).
2. В. В. Кадо́мтсев and А. В. Недоспасов, J. Nucl. Energy, PC-1, 230, (1960).
3. А. В. Тимофеев, ЖТФ, 33, 909 (1963).
4. А. В. Тимофеев, ДАН СССР, 152, 84 (1963).
5. В. В. Кадо́мтсев, J. Nucl. Energy, PC-5, 31 (1963).
6. С. М. Левитский, ЖТФ, 27, 970 (1957).
7. Е. И. Вавилин, С. Д. Вагнер и А. М. Друкман, ЖТФ, 29, 1263 (1959)
8. А. Д. Ахмедов и А. А. Зайцев, ВМУ, сер 3, № 1 (1964).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
27 января 1964 г

#### PLASMA NOISE OF HIGH-FREQUENCY DISCHARGE IN A MAGNETIC FIELD

*B. N. Shoilkin, M. Ya. Vasil'eva, A. A. Zaytsev*

Data are given of the condition of noise appearance in magneto-active plasma. According to the character of the noises observed the theory of the ionic-sound and dissipative instability of the nonhomogeneous magnetized plasma can be used for their explanation.

УДК 53 : 519.25 : 530.145

## КВАНТОВОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ

*В. В. Митюгов*

На основе принципа максимальной дезинформации, опирающегося на операторное определение энтропии, выведены формулы для экстраполяции напряженностей электромагнитного поля по средним значениям, полученным при их измерении в некоторой совокупности пространственно-временных точек. Найдены формулы для количества информации, связанного с таким измерением, а также с получением на временном отрезке конкретной реализации случайного процесса с заданной спектральной мощностью.

В работах [1, 2] рассматривался вопрос об операторе плотности  $\hat{\rho}$  квантовомеханического ансамбля, состояние которого задано средними значениями некоторых операторов  $\hat{A}^{(k)}$ , определяемыми выражениями

$$\langle \hat{A}^{(k)} \rangle = \text{Sp} \hat{\rho} \hat{A}^{(k)}. \quad (1)$$

При этом был использован принцип максимальной дезинформации, сводящийся к требованию, чтобы оператор плотности этого ансамбля давал при условиях (1) и нормировке

$$\text{Sp} \hat{\rho} = 1 \quad (2)$$

величине

$$S = -k \text{Sp} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \quad (3)$$

максимум, представляющий собой энтропию этого ансамбля. Уравнение для матрицы плотности, удовлетворяющей сделанным выше предположениям, имеет вид

$$(\ln \rho)_{ij} = - \sum_k \alpha_k A_{ij}^{(k)} - (1 + \eta) \delta_{ij}, \quad (4)$$

где  $\alpha_k$  и  $\eta$  — неопределенные множители Лагранжа, которые должны быть найдены из условий (1) и (2).

Предположим, что кроме  $\langle \hat{A}^{(k)} \rangle$  нам стали известны значения других параметров  $\langle \hat{B}^{(l)} \rangle$  системы. Эти дополнительные ограничения приведут к тому, что мы получим новый ансамбль с оператором плотности

$$\tilde{\rho} = \exp \left[ - \sum_k \alpha_k \hat{A}^{(k)} - \sum_l \beta_l \hat{B}^{(l)} - (1 + \eta) \hat{\delta} \right] \quad (5)$$

и энтропией

$$\tilde{S} = -k \text{Sp} \tilde{\rho} \ln \tilde{\rho}. \quad (5a)$$

Этот ансамбль по отношению к исходному будем называть подансамблем, а средние значения  $\langle \widehat{B}^{(l)} \rangle$  — реализацией значений параметров  $B^{(l)}$ . Уменьшение энтропии, которое при этом произойдет, можно называть информацией [3], связанной с получением сведений об этих параметрах

$$I = S - \widetilde{S} \geq 0. \quad (6)$$

### 1. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ И ЭНТРОПИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим электромагнитное излучение, заключенное в трехмерный ящик, имеющий по оси  $x$  размер  $L$ . При этом будем интересоваться лишь плоскополяризованным излучением, распространяющимся в направлении  $x$ , что эквивалентно рассмотрению излучения в отрезке двухпроводной линии. Начало отсчета координаты  $x$  выберем в середине этого отрезка. Следуя методу, изложенному в книге [4], представим излучение в виде совокупности осцилляторов поля с волновыми числами  $\chi_\lambda = 2\pi k_\lambda / L$ , где  $k_\lambda = \pm 1, \pm 2, \dots$ . В дальнейшем будем интересоваться лишь осцилляторами, имеющими  $\chi_\lambda > 0$ , что соответствует рассмотрению волн, бегущих в одном направлении. Если заданы средние значения энергии каждого из осцилляторов поля

$$\langle \widehat{H}^{(\lambda)} \rangle = \hbar \omega_\lambda \left( \overline{n}_\lambda + \frac{1}{2} \right) = \text{Sp } \widehat{\rho}^{(\lambda)} \widehat{H}^{(\lambda)}, \quad (7)$$

то для их матриц плотности уравнение (4) приводит к выражениям

$$\rho_{kj}^{(\lambda)} = (\overline{n}_\lambda + 1)^{-1} \left( \frac{\overline{n}_\lambda}{\overline{n}_\lambda + 1} \right)^k \delta_{kj}, \quad (8)$$

откуда следует хорошо известная формула для энтропии неравновесного по своему спектральному составу излучения

$$S = k \sum_\lambda (\overline{n}_\lambda + 1) \ln (\overline{n}_\lambda + 1) - \overline{n}_\lambda \ln \overline{n}_\lambda. \quad (9)$$

Теперь предположим, что кроме спектрального распределения  $\{\overline{n}_\lambda\}$  нам известны значения напряженностей электрического и магнитного полей  $\langle \widehat{E}(x_n, t_n) \rangle$  и  $\langle \widehat{H}(x_m, t_m) \rangle$  на некотором множестве точек  $\{(x_n, t_n); (x_m, t_m)\}$ , лежащих в области  $(-l \leq x \leq 0; -l/c \leq t \leq 0)$ , где  $l < L/2$ . Эта реализация связана с матрицами  $\widehat{\rho}_{ij}$  отдельных осцилляторов соответствующего подансамбля выражениями

$$\langle \widehat{E}(x_n, t_n) \rangle = \sum_\lambda \text{Sp } \widetilde{\rho}^{(\lambda)} \widehat{E}^{(\lambda)}(x_n, t_n); \quad (10)$$

$$\langle \widehat{H}(x_m, t_m) \rangle = \sum_\lambda \text{Sp } \widetilde{\rho}^{(\lambda)} \widehat{H}^{(\lambda)}(x_m, t_m), \quad (11)$$

причем отличные от нуля матричные элементы операторов  $\widehat{E}^{(\lambda)}(x, t)$  и  $\widehat{H}^{(\lambda)}(x, t)$  в  $\widehat{H}^{(\lambda)}$ -представлении имеют значения

$$(E^{(\lambda)}(x, t))_{n, n+1} = (E^{(\lambda)}(x, t))_{n+1, n}^* = \frac{i}{c} A_\lambda(x) \sqrt{\frac{\hbar \omega_\lambda (n+1)}{2L}} e^{i\omega_\lambda t}; \quad (12)$$

$$(H^{(\lambda)}(x, t))_{n, n+1} = (H^{(\lambda)}(x, t))_{n+1, n}^* = i[\chi_\lambda A_\lambda(x)] \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2\omega_\lambda L}} e^{i\omega_\lambda t}, \quad (13)$$

где  $A_\lambda(x) = e \sqrt{4\pi c^2} e^{i\chi_\lambda x}$ , а  $e$  — единичный вектор поляризации.

Нетрудно видеть, что если часть точек из множества  $\{(x_n, t_n); (x_m, t_m)\}$  лежит на световом конусе и средние значения напряженностей поля, заданные в этих точках, не равны между собой по модулю, то условия (10) и (11) оказываются несовместными, поскольку соответствующие векторные операторы в этом случае могут отличаться лишь направлением. Если же средние значения напряженностей в таких точках равны по модулю, то часть условий (10) и (11) оказывается лишней. Это относится и к тому случаю, когда в одной пространственно-временной точке заданы средние значения операторов  $\hat{E}(x, t)$  и  $\hat{H}(x, t)$ , удовлетворяющие условию  $|\langle \hat{E}(x, t) \rangle| = |\langle \hat{H}(x, t) \rangle|$ . Поэтому, не нарушая общности, в дальнейшем будем считать, что заданы лишь средние значения напряженности электрического поля  $\hat{E}(x, t)$  на множестве точек  $\{(x_n, t_n)\}$ , не лежащих на световом конусе.

Уравнение (4) для матриц  $\tilde{\rho}_{ij}^{(\lambda)}$ , дающих максимум энтропии при условиях (2), (7) и (10), принимает вид:

$$(\ln \tilde{\rho}_{ij}^{(\lambda)}) = -(1 + \eta) \delta_{ij} - \gamma_\lambda n_{ij} - \sum_n \alpha_n (e E^{(\lambda)}(x_n, t_n))_{ij}. \quad (14)$$

Обе части этого уравнения приводятся к диагональному виду с помощью унитарной матрицы (см. [5])

$$U_{st}^{(\lambda)} = e^{-z_\lambda z_\lambda^*/2} \frac{(-z_\lambda)^{t+s} \text{Inf}\{s, t\}}{\sqrt{s! t!}} \sum_{j=0}^{\text{Inf}\{s, t\}} \frac{s! t!}{(s-j)! j! (t-j)!} \left(-\frac{1}{z_\lambda z_\lambda^*}\right)^j, \quad (15)$$

где

$$z_\lambda = \frac{i}{c} \sqrt{\frac{\hbar \omega_\lambda}{2L}} \frac{\sum_n \alpha_n (e A_\lambda(x_n)) e^{i\omega_\lambda t}}{\gamma_\lambda}. \quad (16)$$

Собственные числа операторов  $\tilde{\rho}^{(\lambda)}$  имеют значения

$$\tilde{\rho}_k^{(\lambda)} = \exp[-(1 + \eta + \gamma_\lambda k) + \gamma_\lambda |z_\lambda|^2]. \quad (17)$$

С помощью тех же унитарных матриц  $U_{st}^{(\lambda)}$  (16) найдем диагональные

элементы операторов  $\hat{E}^{(\lambda)}(x, t)$ ,  $\hat{H}^{(\lambda)}(x, t)$  и  $\hat{n}_\lambda$  в  $\tilde{\rho}^{(\lambda)}$ -представлении. Подставляя полученные значения в (7), (10), (11), используя (2), (17) и проводя необходимые вычисления, получим.

$$\gamma_\lambda = \ln \frac{\overline{n_\lambda - z_\lambda z_\lambda^*} + 1}{\overline{n_\lambda - z_\lambda z_\lambda^*}}; \quad (18)$$

$$\langle \widehat{E}(x, t) \rangle = -\frac{4\pi}{L} \sum_{\lambda} \frac{\hbar\omega_{\lambda}}{\gamma_{\lambda}} e \left\{ \sum_n \alpha_n \cos [\chi_{\lambda} (x - x_n) + \omega_{\lambda} (t - t_n)] \right\}; \quad (19)$$

$$\langle \widehat{H}(x, t) \rangle = -\frac{|\chi \langle \widehat{E}(x, t) \rangle|}{|\chi|}. \quad (20)$$

Подставляя в (19) вместо  $x$  и  $t$  последовательно все значения  $(x_n, t_n)$ , можно получить систему уравнений для определения  $\alpha_n$  и  $\gamma_{\lambda}$ .

При этом найденные из (19) и (20) значения напряженностей  $\langle \widehat{E}(x, t) \rangle$  и  $\langle \widehat{H}(x, t) \rangle$  в точках  $(x, t) \in \{(x_n, t_n)\}$  дают наиболее вероятную

экстраполяцию по значениям  $\langle \widehat{E}(x_n, t_n) \rangle$ , поскольку оператор  $\widetilde{\rho}$ , максимизирующий энтропию, описывает наименее вероятный при заданных средних статистический коллектив. Подставляя (17) в (3а), используя (18) и суммируя по всем осцилляторам, будем иметь

$$\begin{aligned} \widetilde{S} = k \sum_{\lambda} (\bar{n}_{\lambda} - |z_{\lambda}|^2 + 1) \ln (\bar{n}_{\lambda} - |z_{\lambda}|^2 + 1) - \\ - (\bar{n}_{\lambda} - |z_{\lambda}|^2) \ln (\bar{n}_{\lambda} - |z_{\lambda}|^2). \end{aligned} \quad (21)$$

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В БЕСКОНЕЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Если, увеличивая безгранично длину отрезка, перейти к пределу при  $L \rightarrow \infty$  и ввести обычным способом спектральную мощность  $F(\omega) = \hbar\omega \bar{n}(\omega)$ , то можно перейти к описанию стационарного случайного процесса, являющегося квантовым аналогом классического гауссова процесса. Можно видеть, что если при таком переходе длина интервала  $(-l, 0)$ , определяющего пространственно-временную область, на которой заданы средние значения напряженности  $\widehat{E}(x, t)$ , остается конечной, то вместо (18) получим

$$\gamma(\omega) = \ln [1 + \hbar\omega/F(\omega)]. \quad (22)$$

Подставляя (16) в (21), используя (9) и заменяя обычным способом сумму по  $\lambda$  интегралом, будем иметь

$$I = \frac{\hbar\hbar}{c} \int \frac{\left| \sum_n \omega \alpha_n \exp [i(\omega t_n + \omega x_n/c)] \right|^2}{\omega \ln [1 + \hbar\omega/F(\omega)]} d\omega. \quad (23)$$

Не следует, однако, думать, что формула (23) представляет собой выражение для информации, полученной при измерении напряженности электрического поля с максимально допускаемой принципом неопределенности точностью. В последнем случае следовало бы говорить о «точной реализации» рассматриваемого случайного процесса. В нашей же задаче речь по сути дела о противоположном предельном случае, когда значения напряженности поля известны с неопределенностью, соответствующей максимальной энтропии при заданных средних.

Вместо формулы (19) получим выражение

$$\langle \widehat{E}(x, t) \rangle = -\frac{2}{c} e \sum_n G(x - x_n, t - t_n) \alpha_n, \quad (24)$$

где

$$G(x - x', t - t') = \int \frac{\hbar \omega \cos[\omega(x - x')/c + \omega(t - t')]}{\ln[1 + \hbar \omega / F(\omega)]} d\omega. \quad (25)$$

Как и прежде,  $\langle \hat{H}(x, t) \rangle$  определяется уравнением (20). Решение относительно  $\alpha_n$  и  $\gamma_n$  системы, получающейся из уравнения (24), в общем случае не представляется возможным. Однако в ряде частных примеров можно получить некоторые результаты.

### 3. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ПО ЗНАЧЕНИЮ $\langle \hat{E}(x, t) \rangle$ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

В случае, когда задана лишь напряженность  $\langle \hat{E}(0, t_0) \rangle$  в точке  $x = 0$  в момент времени  $t_0$ ,

$$\alpha = -c(e \langle \hat{E}(0, t_0) \rangle) / 2 \int \frac{\hbar \omega d\omega}{\ln[1 + \hbar \omega / F(\omega)]}, \quad (26)$$

откуда для значения  $\hat{E}(0, t)$  в любой момент времени

$$\langle \hat{E}(0, t) \rangle = \frac{G(0, t - t_0)}{G(0, 0)} \langle \hat{E}(0, t_0) \rangle. \quad (27)$$

Экстраполяционная функция  $G(x - x', t - t')$  по отношению к квантовому прогнозированию является аналогом классической функции корреляции. Если формально устремить  $\hbar \rightarrow 0$  и перейти к пределу, будем иметь (см., например, [6]):

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} G(x - x', t - t') = \int F(\omega) \cos \omega \left[ \frac{1}{c} (x - x') + t - t' \right] d\omega. \quad (28)$$

Подставляя (26) в (23), получим выражение для информации в виде

$$I = \frac{\hbar c}{4G(0, 0)} \langle \hat{E}(0, t_0) \rangle^2. \quad (29)$$

### 4. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ПО ЗНАЧЕНИЮ ФУНКЦИИ $\langle \hat{E}(x, t) \rangle$ НА ВРЕМЕННОМ ОТРЕЗКЕ

Рассмотрим случай, когда функция  $\langle \hat{E}(0, \cdot) \rangle$  задана на интервале  $(-l/c, 0)$ . Заменяя в формуле (24) суммирование по  $n$  интегрированием по  $t$ , получим:

$$\langle \hat{E}(0, \tilde{t}) \rangle = -e \frac{2}{c} \int_{-l/c}^0 \alpha(t) G(t - \tilde{t}) dt, \quad (30)$$

где  $\langle \hat{E}(0, \tilde{t}) \rangle$  — прогнозируемая функция, которая на интервале  $(-l/c, 0)$  должна совпадать с заданной реализацией  $\langle \hat{E}(0, t) \rangle$ . Соотношение (30) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно функции  $\alpha(t)$ , ядром которого служит  $G(0, t - \tilde{t})$ . В частном случае, когда излучение имеет равновесный спектр

$$F(\omega) = \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega / kT} - 1}, \quad (31)$$

имеем

$$G(0, \tau) = \pi kT \delta(\tau). \quad (32)$$

Возвращаясь к (27), видим, что по отношению к квантовому прогнозированию тепловой шум « $\delta$ -коррелирован», т. е. является «белым» шумом. Подставляя (32) в (30), получим

$$\alpha(t) = -\frac{c}{2\pi kT} (e \langle \hat{E}(0, t) \rangle), \quad (33)$$

что для информации приводит к выражению

$$I = \frac{c}{4\pi^2 T} \int_0^\infty \left| \int_{-1/c}^0 \langle \hat{E}(0, t) \rangle e^{i\omega t} dt \right|^2 d\omega. \quad (34)$$

Разумеется, подобные рассуждения можно провести не только для электромагнитного излучения, а для любых процессов, распространение которых описывается линейным волновым уравнением. Кроме того, представляет интерес решение аналогичной задачи для точной реализации случайного процесса, а также ее трехмерное обобщение, что, в частности, даст возможность последовательного применения теории информации к оптическим изображениям.

В заключение выражаю благодарность С. И. Боровицкому за полезные обсуждения и ряд ценных замечаний, а также А. М. Гершту за интерес к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. M. Elsasser, Phys. Rev., 52, 987 (1937).
2. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 28, 547 (1955).
3. Н. Винер, Кибернетика, изд. Сов. радио, М., 1958.
4. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.
5. С. И. Боровицкий, В. В. Митюгов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 854 (1964).
6. А. М. Яглом, УМН, 7, 3 (1952).

Поступила в редакцию  
10 июля 1963 г.

#### QUANTUM PREDICTION OF RANDOM ELECTROMAGNETIC PROCESSES

V. V. Mityugov

On the basis of the maximum disinformation principle based on the operator determination of the entropy the formulas are derived for the extrapolation of the electromagnetic field intensities according to the mean values obtained during their measurements in certain assemble of space-time points. The formulas have been found for the information quantity connected both with such measurement and with obtaining the concrete realization of a random process with the given spectral power during finite time interval.



УДК 536.75

## О СВОЙСТВАХ НЕРАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ ОБРАТИМЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ

*С. И. Боровицкий, В. В. Митюгов*

Приведены выражения для энтропии неравновесного электромагнитного излучения, полученные на основе операторного определения энтропии. Сформулированы общие свойства термодинамически обратимых преобразователей излучения, проиллюстрированные рядом примеров.

Как известно, все активные элементы радиосхем (генераторы, усилители, сместители, детекторы и т. д.) являются преобразователями. Любой преобразователь может быть представлен как многополюсник, с числом входов, которое зависит от принципа его действия и конструкции. Следует подчеркнуть, что кроме сигналов по всем входам циркулируют шумы.

Очень важной чертой преобразователей является то, что обмен энергией с внешней средой у них происходит не только путем поглощения и испускания электромагнитных волн через входы. Внешняя среда может непосредственно совершать работу над преобразователем и обмениваться с ним теплом. Так, механическая работа совершается над микрофонами, всевозможными датчиками смещения, натяжения и т. д. Если при составлении схемы преобразователя выделяется вход, который служит только для подачи постоянного тока, его, очевидно, можно из рассмотрения исключить, считая, что источник питания совершает работу над преобразователем.

Значение теплообмена для работы преобразователя установить труднее. Можно указать ряд преобразователей, для работы которых теплообмен необходим. Так обстоит дело, например, с термисторным измерителем мощности. Но уже в случае диодных детекторов ситуация не так ясна. В самом деле, вакуумный диод нуждается в охлаждении, связанном, в первую очередь, с наличием горячего катода. Использование полупроводниковых диодов значительно меняет обстоятельства; однако и здесь теплообмен для работы детектора, как будет видно из дальнейшего, оказывается необходимым.

Ограничимся рассмотрением случая, когда падающее и испускаемое излучения и режим работы преобразователя стационарны. По всем каналам такого преобразователя в единицу времени поступает средняя энергия  $u_1$ . По ним же излучается средняя мощность  $u_2$ . В единицу времени над преобразователем совершается работа  $w$  и он получает тепло  $q$ . Очевидно,  $u_1$ ,  $u_2$  всегда не отрицательны, а  $w$  и  $q$  могут быть любого знака. В соответствии с первым законом термодинамики

$$u_1 + w + q = u_2. \quad (1)$$

Падающее и уходящее излучения несут с собой, кроме того, в единицу времени энтропию  $s_1$  и  $s_2$  соответственно. От внешней среды преобразователь получает энтропию  $s_q$ . Очевидно  $s_1 + s_q \leq s_2$ . Мы будем зани-

маться лишь термодинамически обратимыми преобразователями, для которых

$$s_1 + s_q = s_2. \quad (2)$$

Они интересны по двум причинам. Во-первых, такие преобразователи образуют границу множества реальных устройств. Во-вторых, для многих, хотя и не для всех, преобразователей требование термодинамической обратимости совпадает с требованием наиболее эффективного их поведения.

### 1. ЭНТРОПИЯ НЕРАВНОВЕСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. ПОТОК ЭНТРОПИИ

Энтропия квантовомеханического ансамбля, состояние которого характеризуется его оператором плотности  $\hat{\rho}$ , дается выражением

$$S = -k \text{Sp} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}, \quad (3)$$

причем оператор  $\ln \hat{\rho}$  коммутирует с  $\hat{\rho}$  и имеет собственные значения  $(\ln \hat{\rho})_k = \ln \rho_k$ . В дальнейшем в качестве рассматриваемой системы будет фигурировать электромагнитное излучение, заключенное в кубический ящик или в отрезок двухпроводной линии, который мы будем называть «одномерным ящиком». Такое излучение, как известно [3], можно представить в виде набора осцилляторов поля, средние значения энергии которых

$$\langle \hat{H}^{(\lambda)} \rangle = \hbar \omega_\lambda \left( \bar{n}_\lambda + \frac{1}{2} \right) \quad (4)$$

определяют спектральный состав излучения.

Если теперь в качестве элементов матрицы  $\hat{\rho}$  в  $\hat{H}$ -представлении для отдельных осцилляторов выбрать значения

$$\rho_{00}^{(\lambda)} = 1 - \frac{\bar{n}_\lambda}{n}; \quad \rho_{ij}^{(\lambda)} = \frac{\bar{n}_\lambda}{n} \delta_{in} \delta_{ij}; \quad n > \text{Sup} \{ \bar{n}_\lambda \}, \quad (5)$$

то для энтропии всей системы получим.

$$S = -k \sum \left[ \left( 1 - \frac{\bar{n}_\lambda}{n} \right) \ln \left( 1 - \frac{\bar{n}_\lambda}{n} \right) + \frac{\bar{n}_\lambda}{n} \ln \frac{\bar{n}_\lambda}{n} \right]. \quad (6)$$

Когда состояние ансамбля задано не с помощью  $\hat{\rho}$ , а только средними значениями некоторых операторов, то оператор плотности можно найти, потребовав, чтобы он в этом состоянии обращал в максимум выражение (3). Этот максимум представляет собой энтропию ансамбля.

Будем искать оператор плотности и энтропию линейного осциллятора в случае, когда заданы средние значения его энергии  $\hat{H}$  и канонических переменных  $\hat{Q}$  и  $\hat{P}$ :

$$\text{Sp} \hat{\rho} \hat{H} = \hbar \omega \left( \bar{n} + \frac{1}{2} \right); \quad \text{Sp} \hat{\rho} \hat{Q} = \langle \hat{Q} \rangle; \quad \text{Sp} \hat{\rho} \hat{P} = \langle \hat{P} \rangle. \quad (7)$$

Для матрицы плотности  $\rho_{ij}$ , удовлетворяющей подобным требованиям, в работах [1, 2] получено уравнение, принимающее в нашем случае вид

$$(\ln \rho)_{ij} = -\alpha Q_{ij} - \beta P_{ij} - \gamma n_{ij} - (1 + \eta) \delta_{ij}, \quad (8)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\eta$  — неопределенные множители Лагранжа, которые должны быть найдены из условий (7) и нормировки. Отличные от нуля матричные элементы операторов  $\hat{Q}$  и  $\hat{P}$  в  $\hat{H}$ -представлении имеют значения

$$Q_{n, n+1} = Q_{n+1, n}^* = \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2\omega}}; \quad P_{n, n+1} = P_{n+1, n}^* = -i\omega \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2\omega}}. \quad (9)$$

Путем непосредственной проверки можно убедиться, что матрица (8) диагонализуется с помощью унитарной матрицы

$$U_{st} = e^{-\frac{xx^*}{2}} \frac{(-x)^{s+t}}{\sqrt{s!t!}} \sum_{j=0}^{\min\{s,t\}} \frac{s!t!}{(s-j)!j!(t-j)!} \left(-\frac{1}{xx^*}\right)^j, \quad (10)$$

где  $x = \sqrt{\hbar/2\omega}(\alpha - i\omega\beta)/\gamma$ . Собственные значения оператора  $\hat{\rho}$  оказываются равными

$$\rho_k = \exp \left[ - (1 + \eta + \gamma k) + \frac{\hbar}{2\omega} \frac{\alpha^2 + \omega^2\beta^2}{\gamma} \right]. \quad (11)$$

С помощью матрицы (10) находятся диагональные элементы операторов  $\hat{n}$ ,  $\hat{Q}$  и  $\hat{P}$  в  $\hat{\rho}$ -представлении:

$$n'_{kk} = k + \hbar(\alpha^2 + \omega^2\beta^2)/2\omega\gamma^2; \quad Q'_{kk} = -\alpha\hbar/\omega\gamma; \quad P'_{kk} = -\beta\hbar\omega/\gamma. \quad (12)$$

Используя (4), (8), (11), (12), получим окончательно

$$\rho_k = \left( \bar{n} - \frac{\langle \hat{P} \rangle^2 + \omega^2 \langle \hat{Q} \rangle^2}{2\hbar\omega} \right)^k \left( 1 + \bar{n} - \frac{\langle \hat{P} \rangle^2 + \omega^2 \langle \hat{Q} \rangle^2}{2\hbar\omega} \right)^{-(k+1)}. \quad (13)$$

Переходя к излучению в зеркальном ящике, зададим для каждого осциллятора поля  $\bar{n}_\lambda$ , а также  $\langle \hat{Q}^{(\lambda)} \rangle$  и  $\langle \hat{P}^{(\lambda)} \rangle$ , что эквивалентно заданию напряженностей  $\langle E \rangle_{(r,t)}$  и  $\langle H \rangle_{(r,t)}$ . Уравнение для оператора плотности полного поля распадается на совокупность уравнений (8) для каждого из осцилляторов. Подставляя (13) в (3) и суммируя по всем осцилляторам, получим энтропию неравновесного излучения в виде

$$S = -k \sum_{\lambda} \left[ \left( \bar{n}_\lambda - \frac{\langle \hat{P}^{(\lambda)} \rangle^2 + \omega^2 \langle \hat{Q}^{(\lambda)} \rangle^2}{2\hbar\omega_\lambda} \right) \ln \left( \bar{n}_\lambda - \frac{\langle \hat{P}^{(\lambda)} \rangle^2 + \omega^2 \langle \hat{Q}^{(\lambda)} \rangle^2}{2\hbar\omega_\lambda} \right) - \left( 1 + \bar{n}_\lambda - \frac{\langle \hat{P}^{(\lambda)} \rangle^2 + \omega^2 \langle \hat{Q}^{(\lambda)} \rangle^2}{2\hbar\omega_\lambda} \right) \ln \left( 1 + \bar{n}_\lambda - \frac{\langle \hat{P}^{(\lambda)} \rangle^2 + \omega^2 \langle \hat{Q}^{(\lambda)} \rangle^2}{2\hbar\omega_\lambda} \right) \right]. \quad (14)$$

Если  $\langle \hat{Q}^{(\lambda)} \rangle = \langle \hat{P}^{(\lambda)} \rangle = 0$  для всех  $\lambda$ , распределения (13) для всех осцилляторов обращаются в больцмановские, и для энтропии излучения, неравновесного по спектральному составу, получается выражение, приведенное в [4] и примененное в теории информации в [5]:

$$S = k \sum_{\lambda} \left[ (1 + \bar{n}_\lambda) \ln (1 + \bar{n}_\lambda) - \bar{n}_\lambda \ln \bar{n}_\lambda \right]. \quad (15)$$

Эта формула послужит основой последующего рассмотрения.

Увеличивая безгранично размеры зеркального ящика и вводя обычным способом величины плотности и потока энтропии, можно перейти к описанию стационарного излучения. В частности, формула (15) в пределе даст в одномерном случае выражение для потока энтропии процесса с заданной спектральной плотностью  $F(\omega)$ , являющегося квантовым аналогом классического гауссова процесса:

$$s = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 1 + \frac{F(\omega)}{\hbar\omega} \right] \ln \left[ 1 + \frac{F(\omega)}{\hbar\omega} \right] - \frac{F(\omega)}{\hbar\omega} \ln \frac{F(\omega)}{\hbar\omega} \right\} d\omega. \quad (16)$$

Для равновесного излучения

$$F(\omega) = \hbar\omega [\exp(\hbar\omega/kT) - 1]^{-1} \quad (17)$$

из (16) получим

$$s = \pi k^2 T / 6\hbar. \quad (18)$$

Формула (16), примененная к излучению мощности  $N$ , спектральная плотность которого  $F(\omega) = 2\pi N/\Delta$  равномерна в полосе  $\Delta$  и равна нулю вне ее, дает абсолютное значение энтропии такого излучения, в отличие от относительного значения  $s = \Delta (2\pi)^{-1} \ln(2\pi eN)$ , используемого теорией информации [6]. Отправляясь от (16), можно получить все результаты статьи [7] относительно пропускаемой способности канала с шумами. Более того, используя (16), можно доказать, что максимальная пропускная способность канала с произвольным спектром шумов и ограниченной мощностью сигнала достигается таким сигналом, спектр которого дополняет спектр шумов до равновесного спектра. Если же полная мощность сигнала для этого недостаточна, что может случиться, когда шумы имеют неравновесный спектр, то спектральный состав сигнала должен быть взят таким, чтобы спектральная температура суммарного излучения была ограничена снизу наибольшим из возможных при данной мощности сигнала значений.

В трехмерном случае плотность потока энтропии  $ds/dx$  через поверхность  $x$  в одном направлении в приближении геометрической оптики приобретает вид.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} = & \frac{k}{8\pi c^2} \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega \int_{\varphi < \pi/2} \cos \varphi d\Omega \sum_{i=1,2} \left\{ \left[ 1 + \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} F_i(\omega, \Omega) \right] \times \right. \\ & \left. \times \ln \left[ 1 + \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} F_i(\omega, \Omega) \right] - \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} F_i(\omega, \Omega) \ln \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} F_i(\omega, \Omega) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\varphi$  — угол между нормалью к поверхности  $x$  и направлением  $\Omega$ ,  $i$  — индекс поляризации. Для равновесного излучения с температурой  $T$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{4}{3} \sigma T^3, \quad (20)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана-Больцмана.

При переходе к бесконечным ящикам возможны и другие случаи. Будем, например, длину отрезка двухпроводной линии, в котором возбужден лишь один осциллятор, удваивать сколько угодно раз таким образом, чтобы плотность энергии оставалась постоянной. Для этого  $\bar{n}$  должно расти пропорционально длине отрезка. Поведение (15) при безграничном увеличении отрезка свидетельствует о том, что плотность и поток энтропии монохроматического излучения равны нулю. Отсюда

следует, что монохроматическое излучение может быть преобразовано от одной частоты к другой с сохранением интенсивности  $u_0$ , и работа  $\omega$ , совершенная над преобразователем, полностью эквивалентна испускаемую или поглощению преобразователем монохроматического излучения  $u_0$ .

Совокупность процессов с нулевым потоком энтропии не исчерпывается счетными комбинациями монохроматических излучений. Дополнительные условия, наложенные на характеристики излучения, при неизменном спектральном составе могут нарушить распределение Больцмана и уменьшить энтропию по сравнению с (15). Например, если в качестве  $\rho_k$  для отдельных осцилляторов вместо (13) взять (5), то при переходе к бесконечному ящику получим

$$s = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 1 - \frac{F(\omega)}{n\hbar\omega} \right] \ln \left[ 1 - \frac{F(\omega)}{n\hbar\omega} \right] + \frac{F(\omega)}{n\hbar\omega} \ln \frac{F(\omega)}{n\hbar\omega} \right\} d\omega. \quad (21)$$

Выражения (5) и (21) описывают процесс, который можно интерпретировать как последовательность хаотически следующих волновых пакетов или вспышек. Увеличивая беспредельно  $n$  с сохранением  $F(\omega)$ , что соответствует уменьшению частоты следования вспышек с одновременным увеличением их интенсивности, можно получить процесс со сколь угодно малым потоком энтропии.

Формулировка свойств обратимого преобразователя в общем случае не позволяет конкретизировать его поведение. Но когда в падающем на преобразователь или уходящем от него излучении имеется монохроматическая составляющая, иными словами, когда преобразователь работает как тепловая машина, можно поставить некоторые вопросы и получить определенные оценки, в частности, для максимально возможного коэффициента полезного действия такой машины.

## 2. ОДНОМЕРНЫЕ ГЕНЕРАТОР, ДЕТЕКТОР, ХОЛОДИЛЬНИК. МОДЕЛЬ ОДНОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Общая схема одномерного преобразователя изображена на рис. 1.

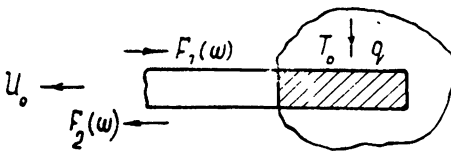


Рис. 1.

На вход преобразователя по двухпроводной линии падает излучение со спектральной плотностью  $F_1(\omega)$ . Преобразователь обменивается с внешней средой монохроматическим излучением (работой) мощностью  $u_0$  и теплом с

резервуаром, имеющим температуру  $T_0$ .

Рассмотрим сначала преобразователь без теплообмена, который назовем одномерным генератором. Полная мощность излучения, падающего на его вход, равна

$$u_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) d\omega, \quad (22)$$

а полный поток энтропии есть

$$s_1 = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ 1 + \frac{F_1(\omega)}{\hbar\omega} \right] \ln \left[ 1 + \frac{F_1(\omega)}{\hbar\omega} \right] - \frac{F_1(\omega)}{\hbar\omega} \ln \frac{F_1(\omega)}{\hbar\omega} \right\} d\omega. \quad (23)$$

Преобразователь излучает в линию монохроматическую волну мощностью  $u_0$  и сплошной спектр  $F_2(\omega)$ . Именно он должен унести всю энтропию падающего потока. Поскольку

$$u_0 + u_2 = u_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F_2(\omega) d\omega = u_1, \quad (24)$$

$u_0$  будет максимально, когда  $F_2(\omega)$  представляет собой равновесное излучение. Его температура  $T_2$  может быть найдена из условия  $s_1 = s_2$  и (18). При этом  $u_2$  и  $u_0$  полностью определяются через  $F_1(\omega)$ :

$$u_2 = \frac{\pi k^2}{12\hbar} T_2^2 = \frac{3\hbar}{\pi k^2} s_1^2; \quad u_0 = u_1 - \frac{3\hbar}{\pi k^2} s_1^2. \quad (25)$$

Естественно, что генерация монохроматического излучения возможна лишь тогда, когда  $F_1$  не представляет собой равновесный спектр какой-либо температуры.

Можно ввести коэффициент полезного действия  $\eta$  такого преобразователя, определив его выражением

$$\eta = \frac{u_0}{u_1} = 1 - \frac{3\hbar}{\pi k^2} \frac{s_1^2}{u_1}. \quad (26)$$

Для падающего излучения со спектром

$$F_1(\omega) = 2u_1 \left\{ \frac{\Delta}{(\omega - \omega_0)^2 + \Delta^2} + \frac{\Delta}{(\omega + \omega_0)^2 + \Delta^2} \right\} \quad (27)$$

на рис. 2 представлена зависимость  $\eta$  от относительной ширины спектра  $\delta = \Delta/\omega_0$  при фиксированных значениях параметра  $\varepsilon = 2u_1/\hbar\omega_0^2$ . Следует обратить внимание на то, что при  $\varepsilon \gg 1$  величина  $\eta \simeq 1$  и очень слабо зависит от  $\delta$ . Поскольку при заданной мощности этот случай соответствует малым  $\omega_0$ , полученный результат может служить некоторым оправданием интуитивной уверенности в том, что классический низкочастотный шум с любым спектральным распределением всегда можно полностью превратить в работу. Коэффициент  $\eta$  близок к единице и в противоположном предельном случае редких квантов  $\varepsilon \ll 1$ .

На первый взгляд, то же устройство может одновременно служить детектором излучения: оно может преобразовывать падающее излучение, скажем, в постоянный ток. Что это не так, убеждает пример падающего равновесного излучения. В этом случае постоянный ток, генерированный преобразователем, равен нулю независимо от изменения температуры  $T_1$  падающего излучения, в то время как детектор должен реагировать на изменение падающей мощности. И хотя, несомненно, при

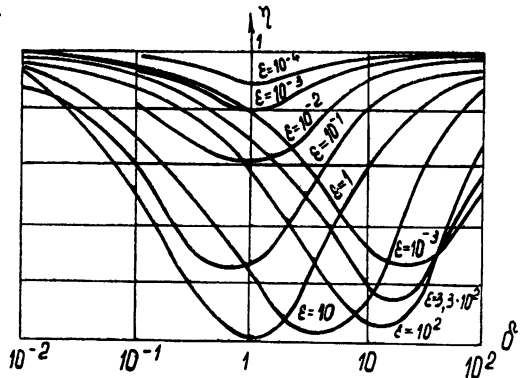


Рис. 2.

некоторой  $T_1$  его показания могут быть равны нулю, они должны меняться с  $T_1$ . Этим условиям удовлетворяет преобразователь с теплообменом.

Поскольку выход детектора (постоянный ток) должен быть максимальным, его обратное излучение будет равновесным с какой-то температурой  $T_2$ . Уравнения обратимого преобразователя (1), (2) вместе с (17), (18) и (22) дают

$$u_0 = -\frac{\pi k^2}{12\hbar} [(T_1 - T_2)^2 - (T_2 - T_0)^2]. \quad (28)$$

Имея в виду только пассивные детекторы, не нуждающиеся в каком-либо питании постоянным или переменным током, заметим, что  $u_0$  должно быть отрицательным и возможно большим по абсолютному значению. Для этого, как следует из (28),  $T_2$  должно быть равно  $T_0$  и

$$u_0 = -\frac{\pi k^2}{12\hbar} (T_1 - T_0)^2. \quad (29)$$

Выход детектора зависит от разности температур падающего излучения и резервуара; он равен нулю при  $T_1 = T_0$ .

Рассмотрим теперь случай, когда падающее излучение складывается из равновесного (с температурой  $T_1$ ) и монохроматического. Очевидно, что за каждым изменением  $\Delta u_1$  мощности монохроматического излучения будет следовать равное ему по абсолютному значению изменение  $\Delta u_0$  выходной мощности. Не так обстоит дело при изменении  $T_1$ , когда приращения входной и выходной мощности

$$\Delta u_1 = \frac{\pi k^2}{6\hbar} T_1 \Delta T_1; \quad \Delta u_0 = \frac{\pi k^2}{6\hbar} (T_1 - T_0) \Delta T_1. \quad (30)$$

Если оценивать эффективность детектирования отношением  $r = |\Delta u_0 / \Delta u_1|$ , то при измерении одной и той же мощности  $\Delta u_1$  отношение  $r$  падает с расширением полосы от единицы для монохроматического сигнала до  $|T_0 - T_1| / T_1$  для равновесного. При  $T_1 \gg T_0$   $r$  стремится к единице независимо от характера принимаемого спектра. Любопытно, наконец, что при  $T_1 \ll T_0$  эффективность становится значительно больше единицы: выход детектора в ответ на какое-то изменение равновесного спектра превышает отклик детектора на равное по мощности изменение монохроматической составляющей.

Случай  $T_0 < T_1$  представляет собой дополнительный интерес при  $u_0 > 0$ . Такой преобразователь отсасывает от теплового резервуара тепло  $q$ . Вся полученная энтропия уходит с равновесным излучением, имеющим температуру  $T_2 > T_1$ . Холодопроизводительность  $q$  преобразователя зависит от работы  $u_0$ , производственной над ним, температур  $T_0$  и  $T_1$ :

$$q = \left[ -\frac{T_1 - T_0}{T_0} + \sqrt{\left(\frac{T_1 - T_0}{T_0}\right)^2 + \frac{12\hbar u_0}{\pi k T_0^2}} \right] \frac{\pi k^2 T_0^2}{6\hbar}. \quad (31)$$

Перейдем к моделированию одномерного преобразователя. Для этого вернемся к преобразователю без теплообмена и рассмотрим случай, когда падающее излучение сосредоточено в двух узких полосах на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , шириной  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соответственно. Равномерные в каждой полосе спектральные плотности  $F(\omega_1) = F_1$ ,  $F(\omega_2) = F_2$  с помощью (17) могут быть выражены через локальные температуры  $T_i = T(\omega_i)$  ( $i = 1, 2$ ).

Построение преобразователя начнем, поместив в короткозамкнутую, скажем, справа двухпроводную линию два узкополосных однонаправленных вентиля, настроенных один на полосу  $\omega_1, \Delta_1$ , другой на  $\omega_2, \Delta_2$ . Если в своих полосах они полностью поглощают излучение, идущее слева, и полностью пропускают излучение, идущее справа, тогда они сами испускают шумы вправо, каждый в своей полосе и с интенсивностью, зависящей от своей температуры. Вне своих полос они прозрачны для излучения в обоих направлениях.

Первая полоса падающего излучения, идущего слева, поглощается одним из вентиля и нагревает его. Шумы, которые он испускает, после отражения от короткозамыкателя пройдут через оба вентиля и покинут преобразователь. По мере нагрева вентиля интенсивность переизлученных шумов будет расти. В стационарном режиме вентиль нагреется до температуры  $T_1$ , и интенсивности падающего и уходящего излучения в первой полосе сравняются. То же происходит и во второй полосе с тем различием, что установившаяся температура второго вентиля будет равна  $T_2$ .

Воспользуемся теперь вентилями как тепловыми резервуарами для машины, работающей по циклу Карно. Обозначим количество тепла, поступающее в единицу времени от первого и второго вентиля, через  $q_1$  и  $q_2$ . По мере роста  $q_1, q_2$  температуры вентиля будут сближаться и коэффициент полезного действия машины будет падать. Чтобы соблюсти обратимость и эффективность устройства, примем, что  $q_1, q_2$  и вместе с ними изменения температур вентиля  $dT_1, dT_2$  невелики. Известное свойство цикла Карно  $(q_1/T_1) + (q_2/T_2) = 0$  и следующая из (17) связь между  $q_i$  и  $dT_i$  позволяют утверждать, что

$$\sum_{i=1,2} \hbar^2 \omega_i^2 \exp(\hbar \omega_i / kT_i) \Delta_i dT_i / 2\pi kT_i^3 [\exp(\hbar \omega_i / kT_i) - 1]^2 = 0. \quad (32)$$

Поставим теперь за первой парой вентиля, связанных машиной, вторую такую пару, третью и т. д. Каждая из них будет работать при температурах, несколько отличных от тех, при которых работает предыдущая. Она будет посылать на следующую спектр, по интенсивности немного отличный от того, который она поглощает. Суммарное их действие сведется к тому, что последняя пара и испущенные преобразователем шумы будут иметь температуры  $T_{1k}, T_{2k}$ . Интегрируя (32) от  $T_i$  до  $T_{ik}$  ( $i=1, 2$ ) и возвращаясь с помощью (17) от  $T_i$  к  $F_i$ , увидим, что в процессе преобразования остается неизменной величина

$$\sum_{i=1,2} \left[ \left( 1 + \frac{F_i}{\hbar \omega_i} \right) \ln \left( 1 + \frac{F_i}{\hbar \omega_i} \right) - \frac{F_i}{\hbar \omega_i} \ln \frac{F_i}{\hbar \omega_i} \right] \Delta_i. \quad (33)$$

Теперь можно освободиться от ограничения, наложенного на вид падающего спектра. Произвольный спектр должен быть разбит на достаточно узкие полосы, внутри которых температуру излучения можно считать постоянной. На каждую такую полосу в преобразователе должны быть рассмотрены вентили. Обратимые машины, включенные различным образом между разными парами вентиля, позволяют обратимым образом деформировать спектр. При этом, как следует из (33), энтропия (16) оказывается инвариантом такого преобразователя.

В том случае, когда преобразователь обменивается теплом с окружающим пространством, все тепловые машины могут использовать его в качестве одного из резервуаров. Общая схема преобразователя изображена на рис. 3. Следует обратить внимание на то, что такой преобразователь обладает качеством, по-видимому, характерным для опознаю-



щих или обучающихся систем: в среде, с которой он взаимодействует, он ищет возможные отступления от равновесного состояния и отмечает их.

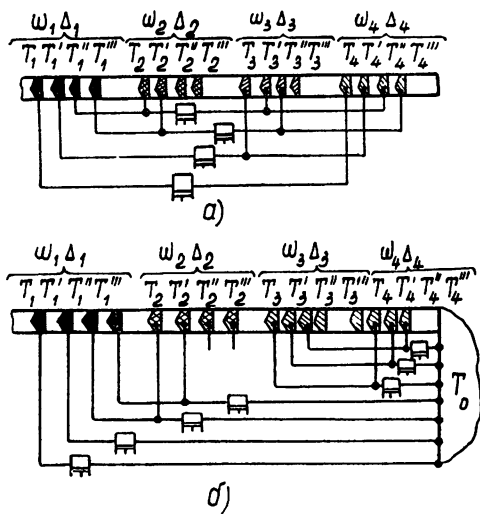


Рис. 3. а) Преобразователь без теплообмена. б) Преобразователь с теплообменом. Вентили, имеющие одинаковую температуру, например,  $T_3 = T_4$ ,  $T_3' = T_4'$ ,  $T_3'' = T_4''$ ,  $T_3''' = T_4'''$ , могут соединяться теплопроводом и рассматриваться как один резервуар.

### 3. СОЛНЕЧНАЯ БАТАРЕЯ, СФЕРА ДАЙСОНА, ЛАЗЕР

В трехмерном случае возможности генерации монохроматического излучения расширяются за счет того, что падающее излучение может отличаться от равновесного не только по спектральному составу, но и по угловому распределению.

Рассмотрим сферический преобразователь радиуса  $R$ , на который из телесного угла  $\Omega$  падает излучение с температурой  $T_1$ , а из остальной части пространства — с температурой  $T_3$ . Преобразователь получает мощность  $u_1$  и поток энтропии  $s_1$ :

$$u_1 = R^2 \left\{ \Omega_1 \sigma T_1^4 + (4\pi - \Omega_1) \sigma T_3^4 \right\}; \quad (34)$$

$$s_1 = R^2 \left\{ \Omega_1 \frac{4}{3} \sigma T_1^3 + (4\pi - \Omega_1) \frac{4}{3} \sigma T_3^3 \right\}.$$

Сплошной спектр, излучаемый преобразователем, должен быть равновесным, причем его температура  $T_2$  и полный поток энергии находятся из системы

$$s_2 = 4\pi R^2 \frac{4}{3} \sigma T_2^3 = s_1; \quad u_2 = 4\pi R^2 \sigma T_2^4. \quad (35)$$

На долю монохроматического излучения остается мощность  $u_0 = u_1 - u_2$ . Вводя переменные  $x = \Omega/4\pi$ ,  $t = T_3/T_1$ , найдем

$$\eta = \frac{u_1 - u_2}{u_1} = 1 - \frac{[x + (1-x)t^3]^{4/3}}{x + (1-x)t^4}. \quad (36)$$

Зависимость  $\eta$  от  $x$  при разных значениях  $t$  изображена на рис. 4. Описанный преобразователь может служить моделью солнечной батареи, работающей в космическом пространстве.

Перейдем ко второму примеру, условно названному сферой Дайсона. Внутри сферической оболочки радиуса  $R$  находится черное тело радиуса  $r$  с температурой  $T_1$ . На наружную поверхность оболочки падает излучение с температурой  $T_3$ . Рассмотрим работу единицы поверхности преобразователя. Она получает потоки энергии и энтропии от центрального тела, от окружающего пространства и от внутренней поверхности самой сферы. Очевидно, что последняя составляющая излучения при рассмотрении работы сферы в целом должна быть опущена. В связи с этим в уходящем от поверхности излучении нужно учитывать лишь часть, направляющуюся наружу, и часть, идущую на центральное тело. Обе эти части должны представлять собой равновесное излучение с одной температурой  $T_2$ .

Угол  $\Omega = 4\pi x$ , под которым видно центральное тело с поверхности, находится из уравнения  $(r/R)^2 = 4x(1-x)$ . Потоки через единичную площадку будут таковы:

$$u_1 = 4x(1-x)\sigma T_1^4 + \sigma T_3^4; \quad s_1 = 4x(1-x)(4/3)\sigma T_1^3 + (4/3)\sigma T_3^3; \quad (37)$$

$$u_2 = [1 + 4x(1-x)]\sigma T_2^4; \quad s_2 = [1 + 4x(1-x)](4/3)\sigma T_2^3.$$

Действуя прежним образом, найдем

$$\eta = 1 - \frac{[4x(1-x) + t^3]^{4/3}}{[4x(1-x) + 1]^{4/3} [4x(1-x) + t^4]}. \quad (38)$$

Графически эта зависимость изображена на рис. 5.

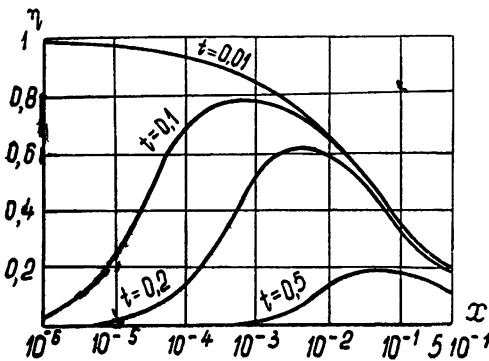


Рис. 5.

Прежде чем сравнивать (38) с коэффициентом полезного действия цикла Карно  $\eta_c$  при температурах  $T_1$  и  $T_3$ , обратим внимание на то, что определенная выше величина  $\eta$  отличается от обычно употребляемой (последнюю мы обозначим через  $\eta'$ ). В самом деле,  $\eta'$  определяется как отношение работы к энергии  $u'_1$ , получаемой от горячего резервуара. В нашем случае можно положить

$$u'_1 = 4x(1-x)\sigma(T_1^4 - T_2^4), \quad (39)$$

тогда

$$\eta' = \frac{u_1 - u_2}{u'_1} = 1 - \frac{1}{4x(1-x)} \frac{[4x(1-x) + t^3]^{4/3} - t^4 [4x(1-x) + 1]^{4/3}}{[4x(1-x) + 1]^{4/3} - [4x(1-x) + t^3]^{4/3}}. \quad (40)$$

От этого общепринятого определения мы отказались потому, что при рассмотрении преобразователя, работающего от неравновесного по спектру и по направлению излучения, выделить часть излучения, которое следовало бы приписать горячему резервуару, можно лишь в редких случаях, подобных рассматриваемым.

Пользуясь определением (40), замечаем, что  $\eta' < \eta_c$ . Объясняется это тем, что хотя преобразователь обратим, процессы обмена излучением между ним и центральным телом, ним и окружающим пространством происходят необратимым образом. Однако при соблюдении некоторых условий можно приблизиться к обратимости. Действительно, при  $x \ll 1$  и  $t \rightarrow 1$

$$\eta' \rightarrow 1 - t = \eta_c. \quad (41)$$

Ясно, что для получения эффективности, близкой к  $\eta_c$  для любых  $t$ , достаточно взять преобразователь, составленный из вложенных друг в друга сфер, каждая из которых служит центральным телом для следующей и определяет температуру внешнего излучения для ближайшей вложенной. Если число сфер взято достаточно большим, так что температуры соседних отличаются незначительно, все устройство в целом будет полностью обратимым.

Сравнение коэффициентов полезного действия солнечной батареи, сферы Дайсона, системы сфер свидетельствует о том, что при фиксированных свойствах внешнего излучения  $\eta$  преобразователя зависит от его геометрии.

Лазер с оптической подкачкой является представителем класса устройств, преобразующих одно излучение в другое. Из окружающего пространства на него падает излучение, неравновесное по спектральному составу и по направлению. Излучение, которое он генерирует, в хорошем приближении можно считать монохроматическим (в употребленном здесь смысле). Преобразователь греется и поэтому кроме когерентного он излучает тепловое излучение. Используя изложенный здесь метод, можно определить максимально возможную отдачу лазера, ее зависимость от способа подкачки, от формы кристалла и т. д. Сравнение реальной выходной мощности лазера с идеальной позволяет оценить его эффективность.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. M. Elsasser, Phys. Rev., 52, 987 (1937).
2. Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ, 28, 547 (1955).
3. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, ГИТТЛ, М., 1951.
5. J. P. Gordon, Proc. IRE, 50, 1898 (1962)
6. К. Шеннон, Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, ИЛ, М., 1953.
7. Д. С. Лебедев, Л. Б. Левитин, ДАН СССР, 149, 1299 (1963).

Поступила в редакцию  
10 июля 1963 г.

#### ON PROPERTIES OF NONEQUILIBRIUM RADIATION AND THERMODYNAMIC REVERSIBLE CONVERTERS

S. I. Borovitskii, V. V. Mityugov

Expressions are given for the entropy of the nonequilibrium electromagnetic radiation obtained on the basis of the operator determination of the entropy. General properties are formulated of thermodynamic reversible converters of radiation illustrated by some examples.

УДК 538.56 519.25

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВРЕМЕННОГО ПОЛОЖЕНИЯ ПОРОГОВОЙ ТОЧКИ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ ДЕТЕКТОРА В ПРИСУТСТВИИ ШУМА

Ю. А. Медведев, К. Д. Проценко, Б. М. Степанов

В предположении о малости флуктуаций исследуется функция распределения и оценивается средне-квадратичное отклонение временного положения пороговой точки на выходе детектора при наличии гауссовского шума на входе.

1. Существует класс радиотехнических устройств, качество работы которых определяется только временным положением  $t_0$  точек прохождения огибающей импульсного напряжения через фиксированный уровень  $a$  (пороговые точки). В работе [1] рассмотрено воздействие малых нормальных флуктуаций на одно из таких устройств — электронное реле и найдены характеристики «дрожания» точки  $t_0$ . Ниже рассматривается аналогичная задача в типовом радиотехническом устройстве с нелинейным элементом, после которого флуктуации перестают быть гауссовскими.

Пусть имеется система, состоящая из узкополосного фильтра с симметричной относительно  $\omega_0$  спектральной характеристикой  $F(\omega)$  и безынерционного детектора. На вход системы подается полезный сигнал вида  $U_c(t) = M(t) \cos(\omega_0 t)$ , причем огибающая  $M(t)$  — гладкая функция и меняется медленнее, чем  $\cos(\omega_0 t)$ . Если на вход системы кроме регулярного сигнала воздействует шум (последний предполагается гауссовским), то сигнал на выходе будет случайной функцией времени, а точка  $t_0$  станет флюктуировать около своего среднего значения. При дальнейшем рассмотрении предполагается, что можно не учитывать нестационарные процессы в самом детекторе.

2. Рассмотрим функцию распределения  $W(\tau)$  отклонения  $\tau$  точки  $t_0$  от среднего значения.

Как известно [2], случайная функция  $\xi(t)$  после прохождения через узкополосный фильтр имеет вид квазигармонических колебаний:

$$\xi(t) = A_1(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)],$$

причем функции  $A_1(t)$  и  $\varphi(t)$  меняются медленно в сравнении с  $\cos(\omega_0 t)$ . Регулярный сигнал и шум проходят независимо через линейный фильтр  $I$ , так что на детектор подается сигнал  $E_1(t)$  в виде

$$E_1(t) = U_c(t) + \xi(t) = [M(t) + A_1(t) \cos \varphi(t)] \cos(\omega_0 t) - A_1(t) \sin \varphi(t) \sin(\omega_0 t).$$

Ограничимся рассмотрением квадратичного детектора. Следуя работе [3], выделим низкочастотную составляющую  $E(t)$  сигнала на выходе

$$E(t) = (M + x_1)^2 + x_2^2,$$

где

$$x_1 \equiv A_1(t) \cos \varphi(t), \quad x_2 \equiv A_1(t) \sin \varphi(t), \quad M \equiv M(t).$$

Если шум отсутствует, то кривая  $E(t)$  пересечет уровень  $a$  в момент времени  $t_0$ , определяемый условием  $M^2(t_0) = a$ . Это же условие для какой-либо конкретной реализации при наличии шума имеет вид

$$E(t_0 + \tau) = a.$$

Предполагая, что можно ограничиться линейным по  $\tau$  членом разложения левой части этого равенства, получим соотношение

$$E(t_0) + \dot{E}(t_0) \tau = a, \quad (1)$$

где

$$\dot{E}(t_0) = 2[x_1(t_0)x_3(t_0) + x_2(t_0)x_4(t_0) + M(t_0)x_3(t_0) + \dot{M}(t_0)x_1(t_0) + M(t_0)\dot{M}(t_0)],$$

$$x_3(t_0) \equiv \left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad x_4(t_0) \equiv \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad \dot{M}(t_0) \equiv \left. \frac{dM}{dt} \right|_{t=t_0},$$

связывающее величины  $\tau$ ,  $E(t_0)$  и  $\dot{E}(t_0)$  в каждой возможной реализации рассматриваемого случайного процесса (см. [2]).

Представим функцию распределения  $W(E, \dot{E})$  величин  $E$  и  $\dot{E}$  в виде

$$W(E, \dot{E}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(k_1 E + k_2 \dot{E})] \Theta(k_1, k_2) dk_1 dk_2. \quad (2)$$

Здесь

$$\Theta(k_1, k_2) = \int_D \exp[i(Ak_1 + Bk_2)] W(x_1, x_2, x_3, x_4) d^4x$$

— характеристическая функция величин  $E, \dot{E}$ ,  $W(x_1, x_2, x_3, x_4)$  — функция распределения величин  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и

$$A \equiv x_1^2 + x_2^2 + 2Mx_1 + M^2,$$

$$B \equiv 2(x_1x_3 + x_2x_4 + Mx_3 + \dot{M}x_1 + M\dot{M}), \quad (3)$$

$$d^4x \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Для переднего фронта сигнала область интегрирования  $D$  определяется условием  $B \geq 0$  (пересечение уровня  $a$  с положительной производной). Величина  $A$  всегда положительна. Интегрируя в (2) по  $dk_1$  и  $dk_2$ , получаем

$$W(E, \dot{E}) = \int_{B \geq 0} W(x_1, x_2, x_3, x_4) \delta(A - E) \delta(B - \dot{E}) d^4x,$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Перейдем с помощью (1) от переменных  $E, \dot{E}$  к переменным  $\tau, \dot{E}$ . Якобиан преобразования равен

$$\left| \frac{\partial(E, \dot{E})}{\partial(\tau, \dot{E})} \right| = |\dot{E}|,$$

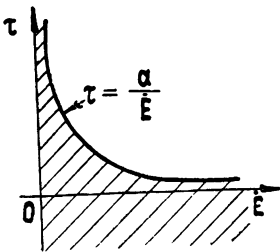


Рис. 1.

а область изменения переменных  $(\tau, \dot{E})$  показана на рис. 1. Интегрируя затем полученную функцию распределения величин  $\tau, \dot{E}$  по всем возможным значениям  $\dot{E}$ , получим искомую функцию

$$W(\tau) = \begin{cases} \int_0^{a|\tau} \dot{E} d\dot{E} \int_{B>0} d^4x W(x_1, x_2, x_3, x_4) \delta(A - a + \dot{E}\tau) \delta(B - \dot{E}) & (\text{при } \tau > 0), \\ \int_0^{\infty} \dot{E} d\dot{E} \int_{B>0} d^4x W(x_1, x_2, x_3, x_4) \delta(A - a + \dot{E}\tau) \delta(B - \dot{E}) & (\text{при } \tau < 0). \end{cases} \quad (4)$$

3. Оценим величину среднего квадрата смещения  $\Sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 W(\tau) d\tau$  пороговой точки. С учетом свойств дельта-функции получаем:

$$\Sigma^2 = \frac{1}{4} \int_{B>0} \frac{[x_1^2 + x_2^2 + 2Mx_1]^2}{[x_1x_3 + x_2x_4 + Mx_3 + \dot{M}x_1 + M\dot{M}]^2} W(x_1, x_2, x_3, x_4) d^4x. \quad (5)$$

Для дальнейших вычислений необходимо знать функцию распределения  $W(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Можно показать, что в случае гауссовских флуктуаций на входе детектора и при узкой и симметричной характеристике фильтра  $F(\omega)$  функция  $W(x_1, x_2, x_3, x_4)$  имеет вид.

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4\pi^2\sigma^4(\Delta\omega)^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{(\Delta\omega)^2} (x_3^2 + x_4^2) \right] \right\}, \quad (6)$$

где  $\sigma$  — средне-квадратичное значение шумов на входе детектора,

$(\Delta\omega)^2 = \left[ \int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 F(\omega) d\omega \right]^{1/2}$  — средне-квадратичная ширина спектра.

При малых  $\sigma$  функция  $W$  обладает резким максимумом и основной вклад в интеграл (5) дает область  $x_i \simeq 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )\*. Применение метода перевала при интегрировании в (5) по каждой из переменных дает с точностью до величин порядка  $(\sigma/M)^6$  средний квадрат смещения

$$\Sigma = \frac{\sigma}{\dot{M}} \sqrt{1 + 3 \frac{\sigma^2}{M^2} \left( 1 + \frac{M^2(\Delta\omega)^2}{\dot{M}^2} \right)}. \quad (7)$$

Формула (7) в равной мере применима к переднему и заднему фронту импульса.

В качестве примера применения (7) найдем величину  $\Sigma$  для двух сигналов  $M_1$  и  $M_2$  одинаковой амплитуды с огибающими типа

$$M_1(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}) \quad (8)$$

и

$$M_2(t) = U_0 e^{-\beta^2 t^2}. \quad (9)$$

\* Вообще говоря, множитель перед  $W$  в подынтегральном выражении (5) имеет полюс на границе интегрирования  $B = 0$ . Это следствие линейности приближения. В приложении показано, что при учете квадратичного члена в разложении (1) полюс пропадает; с другой стороны, при малых  $\sigma$  соотношению  $B = 0$  соответствуют большие  $x_i$  и из-за быстрого убывания  $W$  область вблизи  $B = 0$  дает малый вклад.

Уровень  $a$  зададим соотношением  $a = kU_0^2$  ( $0 < k < 1$ ). Тогда получаем

$$\Sigma_1 = \frac{\sigma}{U_0 \alpha (1 - \sqrt{k})} \sqrt{1 + 3 \frac{\sigma^2}{U_0^2 k} \left(1 + \frac{k(\Delta\omega)^2}{\alpha^2 (1 - \sqrt{k})^2}\right)} \quad (10)$$

— для (8) и

$$\Sigma_2 = \frac{\sigma}{U_0 \beta \sqrt{2k \ln(1/k)}} \sqrt{1 + 3 \frac{\sigma^2}{U_0^2 k} \left(1 + \frac{(\Delta\omega)^2}{2\beta^2 \ln(1/k)}\right)} \quad (11)$$

— для (9).

Если считать, что импульсы (8) и (9) имеют одинаковую ширину спектра, то с помощью данных [4] на стр. 77 можно получить, что  $\simeq 3,76 \alpha$ . При  $k = 0,6$ ,  $U_0/\sigma = 3$ ,  $\Delta\omega \simeq 2\beta$  формулы (10) и (11) дают

$$\Sigma_2/\Sigma_1 \simeq 0,019, \quad (12)$$

так что средне-квадратичное смещение момента срабатывания порогового устройства оказывается значительно меньше при колокольных огибающих типа (9), чем при огибающих (8).

Из (7), (10) и (11) видно, что  $\Sigma$  убывает с увеличением отношения сигнал-шум и с увеличением крутизны сигнала. Величина  $\Sigma$  увеличивается с увеличением ширины спектра  $\Delta\omega$  \*. Эти факты очевидны. Формулы (7), (10), (11) становятся неприменимыми при  $k \simeq 1$  (вершина сигнала). В этом случае кривая  $E(t)$  пересекает уровень  $a$  с малой производной и даже небольшие искажения импульса приводят к большим значениям  $\tau$ ; в результате все рассмотрение становится неприменимым.

4. Для упрощения дальнейших оценок функции  $W(\tau)$  (4) предположим, что выполнено соотношение  $\sigma\Delta\omega \ll M$ , так что в (3) можно пренебречь величинами  $x_3$  и  $x_4$ .

Из (4) видно, что  $W(\tau)$  задается разными функциями для  $\tau > 0$  и  $\tau < 0$ . При малых  $\tau$  верхний предел в интеграле по  $dE$  велик и можно считать, что  $W(\tau)$  задается для всех  $\tau$  единым выражением

$$W(\tau) = \int_0^\infty y dy \int_{B>0} d^2x W(x_1, x_2) \delta(A - a + y\tau) \delta(B - y).$$

После интегрирования по  $dy$  оно принимает вид

$$W(\tau) = \int_{B>0} d^2x W(x_1, x_2) B \delta(A - a + B\tau),$$

где

$$A \equiv (x_1 + M)^2 + x_2^2,$$

$$B \equiv 2M(x_1 + M),$$

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} [x_1^2 + x_2^2]\right\},$$

$$d^2x \equiv dx_1 dx_2.$$

\* При этом предполагается, что величина  $\Delta\omega$  остается больше ширины спектра функции  $M(t)$ , так что при изменении  $\Delta\omega$  огибающая сигнала не меняется существенно.

Теперь проинтегрируем это выражение по  $dx_2$ . Из всей области интегрирования  $(x_1, x_2)$ , определяемой неравенствами

$$-M \leq x_1 < \infty, \quad -\infty < x_2 < \infty,$$

дельта-функция выделяет часть окружности

$$(x_1 + M + \dot{M}\tau)^2 + x_2^2 = M^2 + (\dot{M}\tau)^2,$$

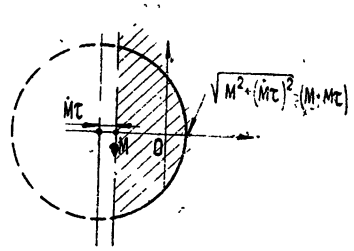


Рис. 2.

на которой обращается в нуль ее аргумент (см. рис. 2, жирная линия). Тогда получаем

$$W(\tau) = \frac{\dot{M}}{\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{M\dot{M}\tau}{\sigma^2}\right\} \int_{-M}^{\sqrt{M^2 + (\dot{M}\tau)^2} - (M + \dot{M}\tau)} \frac{M + x_1}{\sqrt{M^2 + (\dot{M}\tau)^2 - (x_1 + M + \dot{M}\tau)^2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{M + \dot{M}\tau}{\sigma^2} x_1\right\} dx_1.$$

После замены переменных

$$x + M + \dot{M}\tau = \sqrt{M^2 + (\dot{M}\tau)^2} \cos \varphi$$

при достаточно малых  $\tau$  приходим к выражению

$$W(\tau) = \frac{\dot{M}}{\pi\sigma} \exp\left\{-\frac{M\dot{M}\tau}{\sigma^2}\right\} \left[ I(\tau) + \frac{\partial I}{\partial \Omega} \right],$$

где

$$I(\tau) = \exp\{-\Omega(M + \dot{M}\tau)\} \int_0^{\pi/2} \exp\left\{\Omega \sqrt{M^2 + (\dot{M}\tau)^2} \cos \varphi\right\} d\varphi, \\ \Omega \equiv \frac{M + \dot{M}\tau}{\sigma^2}.$$

Последний интеграл выражается через табулированные функции. Окончательно получим, что

$$W(\tau) = \frac{\dot{M}}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{M\dot{M}\tau}{\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{M^2}{\sigma^2} \tau^2\right\} f(\tau), \quad (13)$$

где

$$f(\tau) = \exp\left\{-\frac{M\dot{M}\tau}{\sigma^2}\right\} \left\{ \sqrt{M^2 + (\dot{M}\tau)^2} \left[ \frac{\pi}{2} + I_1(\psi(\tau)) + L_1(\psi(\tau)) \right] - \right. \\ \left. - \dot{M}\tau [I_0(\psi(\tau)) + L_0(\psi(\tau))] \right\}, \\ \psi(\tau) \equiv \frac{M + \dot{M}\tau}{\sigma^2} \sqrt{M^2 + (\dot{M}\tau)^2},$$



$I_0, I_1, L_0, L_1$  — функции Бесселя и Струве от мнимого аргумента нулевого и первого порядка соответственно (см. [5]).

Из (13) видно, что вероятность данного значения  $\tau$  убывает с возрастанием отношения сигнал-шум  $M/\sigma$  по гауссовскому закону. Видно также, что  $W(\tau)$  определяется, в основном, гауссовским множителем  $\exp\{-\frac{1}{2}M^2\sigma^{-2}\tau^2\}$ . Отметим, что этому множителю соответствует первый член разложения величины  $\Sigma$  по параметру  $(\sigma/M)$  в (6).

Авторы благодарны Ю. С. Саясову за ряд полезных замечаний.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Формула (5) получена в линейном приближении. При этом в подынтегральном выражении (5) появляется полюс на границе области интегрирования  $B = 0$ . Покажем, что этого нет при учете квадратичного члена. В этом случае вместо (1) имеем.

$$E(t_0) + \dot{E}(t_0)\tau + \frac{1}{2}\ddot{E}(t_0)\tau^2 = a. \quad (\text{A.1})$$

Считая для простоты, что  $\dot{M} \gg \sigma\Delta\omega$ , получаем

$$\begin{aligned} E &= x_1^2 + x_2^2 + 2Mx_1 + M^2, \\ \dot{E} &= 2\dot{M}(x_1 + M), \\ \ddot{E} &= 2\ddot{M} + 2\dot{M}(x_1 + M). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Функция распределения величин  $E, \dot{E}, \ddot{E}$ , по определению, имеет вид

$$\begin{aligned} W(E, \dot{E}, \ddot{E}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_1 E + k_2 \dot{E} + k_3 \ddot{E})} \Theta(k_1, k_2, k_3) \times \\ &\times dk_1, dk_2, dk_3, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

где характеристическая функция величин  $E, \dot{E}, \ddot{E}$  есть

$$\Theta(k_1, k_2, k_3) = \iint_{B>0} e^{i(k_1 A + k_2 B + k_3 C)} W(x_1, x_2) dx_1, dx_2,$$

а через  $A, B, C$  обозначены правые части равенств (A. 2). Переходя от функции распределения (A. 3) величин  $E, \dot{E}, \ddot{E}$  к функции распределения величин  $\tau, \dot{E}, \ddot{E}$ , с учетом соотношения (A. 1) и интегрируя затем по всем возможным значениям  $\dot{E}, \ddot{E}$ , получим:

$$W(\tau) = \int \int_{B>0} dx_1 dx_2 W(x_1, x_2) (B + C\tau) \delta\left(A - a + B\tau + \frac{1}{2}C\tau^2\right); \quad (\text{A.4})$$

$$\Sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 d\tau \int dx_1 dx_2 W(x_1, x_2) (B + C\tau) \delta\left(A - a + B\tau + \frac{1}{2}C\tau^2\right). \quad (\text{A.5})$$

Выполняя интегрирование в (A. 5) по  $\tau$ , приходим к выражению

$$\Sigma^2 = \int \int_{B>0} dx_1 dx_2 W(x_1, x_2) \left[ -\frac{B}{C} + \sqrt{\left(\frac{B}{C}\right)^2 - 2\frac{A-a}{C}} \right]^2, \quad (\text{A.6})$$

из которого видно, что при  $B = 0$  подынтегральная функция полюса не имеет.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Тихонов, Вестник МГУ, 5, 31 (1956).
2. В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
3. М. А. Мейер, D. Middleton, J. Appl. Phys, 25, 8 (1954).
4. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, Физматгиз, М., 1962.
5. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. 1 и 2, ИЛ, М., 1949.

Поступила в редакцию  
21 октября 1963 г.

#### PROBABILITIES DISTRIBUTION OF TIME POSITION OF THRESHOLD POINT OF SIGNAL IN DETECTOR OUTPUT IN THE PRESENCE OF NOISE

*Yu. A. Medvedev, K. D. Protsenko, B. M. Stepanov*

Under the assumption of small fluctuations the distribution function is investigated and the mean square deviation is evaluated of time position of the threshold point in the detector output (input noise is gaussian).

---

УДК 621.371.167  
УДК 621.371.222.5

## ДИФРАКЦИЯ НОРМАЛЬНО ПАДАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ТМ-ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ ИЗОТРОПНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ ИМПЕДАНСНЫМИ ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ

В. Г. Мышкин

Двухмерные тензоры Грина для анизотропной импедансной плоскости с симметричным тензором поверхностного импеданса [1] используются для решения в приближении Кирхгофа задачи о дифракции поверхностной ТМ-волны на границе между изотропной и анизотропной импедансными полуплоскостями (при нормальном падении волны на границу раздела). Полученные общие формулы применяются для расчета дифракции в случае, когда в качестве анизотропной полуплоскости берется металлическая ребристая структура с ребрами, ориентированными под произвольным углом по отношению к границе раздела.

Найденные в [1] выражения для двухмерных тензоров Грина\*, определенных в полупространстве  $x_1 \geq 0$ , ограниченном однородной анизотропной импедансной плоскостью  $x_1 = 0$ , позволяют свести задачи о возбуждении электромагнитных полей над такими плоскостями произвольно распределенными сторонними электрическими и магнитными токами к квадратурам. Эти же формулы в сочетании с интегральными соотношениями, выведенными в [1] из леммы Лоренца, составляют основу для математической формулировки ряда проблем, связанных с неоднородными анизотропными импедансными плоскостями. Простейшей из них является задача о дифракции волн (в частности, поверхностных) на неоднородной импедансной плоскости, составленной из двух полуплоскостей с различными анизотропными поверхностными импедансами.

Ставя своей целью лишь выяснение характерных особенностей электродинамических свойств таких систем, мы еще более упростим задачу, предположив, что левая полуплоскость ( $x_1 = 0, x_3 < 0$ ) является изотропной с поверхностным импедансом  $\zeta$ , а импеданс правой полуплоскости ( $x_1 = 0, x_3 > 0$ ) характеризуется симметричным тензором  $z$  с компонентами  $p, q$  и  $r$  (см. [1]). Пусть на границу ( $x_1 = 0, x_3 = 0$ ) между полуплоскостями слева набегают поверхностная ТМ-волна ( $\zeta = -i\mu_0, \mu_0 > 0$ ) с магнитным вектором

$$H_0(x_1^0, x_3^0) = \hat{x}_2 e^{-k\mu_0 x_1^0 + ik\nu x_3^0}, \quad \nu_0 = (1 + \mu_0^2)^{1/2}$$

и фазовым фронтом, параллельным границе. Необходимо найти дифракционное поле в пространстве  $x_1 > 0$ .

\* Заметим, что граничное условие (1) в работе [1] выписано неточно. Его правильное выражение имеет вид

$$[\hat{x}_1 E] = z[\hat{x}_1 [\hat{x}_1 H]], \quad x_1 = 0.$$

Поэтому в соответствующих формулах статьи [1], в частности, в выражениях (29) для компонент  $H_{\mu\nu}^m$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ) магнитного  $h^m$ -тензора Грина, должна быть произведена замена  $p \rightarrow q, q \rightarrow p, r \rightarrow -r$ .

В строгой математической постановке эта задача приводит к системе интегральных уравнений типа Винера-Хопфа-Фока относительно компонент вектора  $\mathbf{H}(x_1, x_3)$ , которая, по-видимому, не может быть решена известными методами [2]. Поэтому мы хотим здесь прибегнуть к простому приближенному приему, основывающемуся на принципе Гюйгенса—Кирхгофа:

Расслагая выражениями для  $e^e$ - и  $h^m$ -тензоров Грина [1]\*, мы находим поле дифракции в виде суммы полей:

$$\begin{aligned} {}^e E(x_1, x_3) &= \frac{4\pi}{c} ik \int e^e(x_1^0, x_3^0; x_1, x_3) j^e(x_1^0, x_3^0) dx_1^0 dx_3^0; \\ {}^m H(x_1, x_3) &= \frac{4\pi}{c} ik \int h^m(x_1^0, x_3^0; x_1, x_3) j^m(x_1^0, x_3^0) dx_1^0 dx_3^0, \end{aligned} \quad (1)$$

генерируемых соответственно эквивалентными электрическими [ $j^e(x_1^0, x_3^0)$ ] и магнитными [ $j^m(x_1^0, x_3^0)$ ] токами. Простой подсчет по формулам (1) дает следующие выражения для компонент полей  ${}^e E$  и  ${}^m H$ :

$${}^e E_1 = -\frac{1}{2\pi k} \int \frac{1}{x} \left[ \frac{k(x + kp')}{D'} e^{ixx_1} - \frac{k\mu_0 e^{ixx_1} + ix e^{-k\mu_0 x_1}}{k\mu_0 + ix} \right] \frac{e^{i\gamma x_3}}{k\mu_0 - ix} \gamma^2 d\gamma;$$

$${}^e E_2 = -\frac{kr'}{2\pi} \int \frac{e^{ixx_1 + i\gamma x_3}}{(k\mu_0 - ix)D'} \gamma d\gamma; \quad (2)$$

$${}^e E_3 = \frac{1}{2\pi k} \int \left[ \frac{k(x + kp')}{D'} e^{ixx_1} - k\mu_0 \frac{e^{ixx_1} - e^{-k\mu_0 x_1}}{k\mu_0 + ix} \right] \frac{e^{i\gamma x_3}}{k\mu_0 - ix} \gamma d\gamma;$$

$${}^m H_1 = \frac{k\nu_0 r'}{2\pi} \int \frac{e^{ixx_1 + i\gamma x_3}}{(k\mu_0 - ix)D} \gamma d\gamma;$$

$${}^m H_2 = \frac{k\nu_0}{2\pi} \int \left[ \frac{k + xq}{D} e^{ixx_1} - i \frac{e^{i\gamma x_1} - e^{-k\mu_0 x_1}}{k\mu_0 + ix} \right] \frac{e^{i\gamma x_3}}{k\mu_0 - ix} d\gamma; \quad (3)$$

$${}^m H_3 = -\frac{k\nu_0 r'}{2\pi} \int x \frac{e^{ixx_1 + i\gamma x_3}}{(k\mu_0 - ix)D} d\gamma.$$

В этих формулах

$$D \doteq (x + kp)(k + xq) - kxr^2; \quad (4)$$

$$D' \doteq (x + kp')(k + xq') - kx'r'^2;$$

\* Приведенные в [1] формулы (29) для компонент магнитного  $h^m$ -тензора Грина относятся к области  $x_1 < x_1^0$ . Формулы для  $H_{11}^m, H_{12}^m, H_{21}^m, H_{22}^m, H_{23}^m, H_{32}^m, H_{33}^m$  при  $x_1 > x_1^0$  получаются из соответствующих выражений (29) путем перестановки переменных  $x_1$  и  $x_1^0$ ; компоненты  $H_{13}^m$  и  $H_{31}^m$  в области  $x_1 > x_1^0$  имеют следующий вид:

$$H_{13}^m = \frac{i}{2\pi k^2} \int \left[ \frac{k(x + kp)}{D} e^{ixx_1^0} - \cos \alpha x_1^0 \right] e^{ixx_1} e^{i\gamma(x_3 - x_3^0)} \gamma d\gamma;$$

$$H_{31}^m = -\frac{i}{2\pi k^2} \int \left[ \frac{k(x + kp)}{D} e^{ixx_1^0} - i \sin \alpha x_1^0 \right] e^{ixx_1} e^{i\gamma(x_3 - x_3^0)} \gamma d\gamma.$$

$$p' = p/\Delta, \quad q' = q/\Delta, \quad r' = r/\Delta, \quad \Delta = pq - r^2 \neq 0; \quad (5)$$

$$x = \sqrt{k^2 - \gamma^2}, \quad \text{Im } x \geq 0.$$

Дополнительные векторы  ${}^e\mathbf{H}$  и  ${}^m\mathbf{E}$  могут быть найдены с учетом (2) и (3) из уравнений Максвелла. Выражения (2)—(5) являются приближенным решением поставленной задачи, справедливым при некоторых ограничениях, налагаемых на ее параметры. Эти ограничения могут быть выражены в виде неравенств

$$|p - \zeta| \ll 1, \quad |q - \zeta| \ll 1, \quad |r| \ll 1. \quad (6)$$

Из (2) и (3) обычным образом могут быть выделены члены, соответствующие полям поверхностных волн в области  $x_3 > 0$ , а также произведена асимптотическая оценка поля пространственных волн на больших расстояниях  $R$  от оси  $x_2$  ( $kR \gg 1$ ).

Поверхностное поле имеет те же характерные свойства, что и поле свободных волн, рассматривавшихся в [1], т. е. оно представляет собой (при тех же условиях) две замедленные эллиптически поляризованные волны, распространяющиеся в направлении, нормальном к границе между полуплоскостями, с различными фазовыми скоростями. Векторы плотности потока энергии для этих волн составляют с волновой нормалью углы, различные по модулю и по знаку.

Как следует из (2)—(5), пространственное поле дифракции при  $kR \gg 1$  представляет собой поперечную цилиндрическую эллиптически поляризованную волну. Плоскость эллипса поляризации в каждой точке с радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  нормальна этому вектору, форма эллипса зависит от угла  $\varphi$  между вектором  $\mathbf{R}$  и осью  $x_3$ .

Необходимо заметить, что анизотропные плоскости с симметричным тензором поверхностного импеданса  $\mathbf{z}$ , элементы которого являются независимыми величинами, вообще говоря, имеют гипотетический характер. Тем не менее, обобщенный подход, реализующийся в работе [1] и в настоящей статье, не лишен принципиального и практического интереса, хотя бы потому, что мы легко можем получить из общих формул нашей теории, налагая определенные связи на компоненты тензора  $\mathbf{z}$ , результаты, относящиеся к реальным частным системам.

Следуя этому плану, используем решение (2)—(5) рассмотренной выше задачи для расчета дифракции в системе, схематически представленной на рис. 1. Здесь в качестве левой и правой полуплоскостей берутся соответственно тонкий лист диэлектрика на металлической подложке

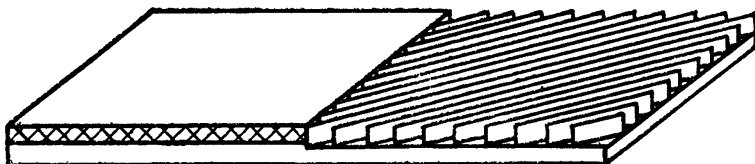


Рис. 1.

и металлическая ребристая структура с ребрами, ориентированными под произвольным углом к границе раздела, рассматриваемые в импедансном приближении. Очевидно, что полученные результаты в той же мере будут относиться и к системе, изображенной на рис. 2, в которой импедансную полуплоскость  $x_3 < 0$  представляет металлическая гребенка с ребрами, параллельными границе.

В рассматриваемом случае компоненты тензора  $z$ , согласно [1], имеют вид.

$$p = -iQ \cos^2 \vartheta, \quad q = -iQ \sin^2 \vartheta, \quad r = -iQ \sin \vartheta \cos \vartheta, \quad (7)$$

где  $Q$  — модуль собственного импеданса металлической гребенки,  $\vartheta$  — угол между линией раздела и линиями ребер. Величина  $\Delta$  в этом случае равна нулю, и непосредственная замена (5), с помощью которой полу-

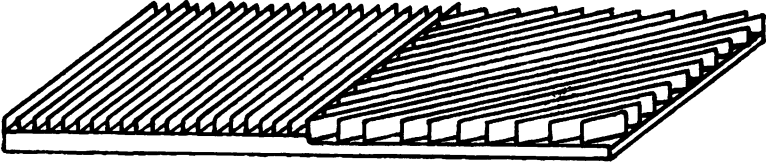


Рис. 2.

чаются формулы (2), невозможна. Однако функции  $D$  и  $D'$  (4) связаны соотношением  $D' = D/\Delta$ ; поэтому формулы (2) допускают предельный переход  $\Delta \rightarrow 0$ . Получающиеся в результате этого подынтегральные функции выражений (2) и (3) при условии (7) имеют один полюс, лежащий в верхней половине комплексной плоскости  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= ik\mu_1, \quad \gamma_1 = kv_1 = k \sqrt{1 + \mu_1^2}; \\ \mu_1 &= \frac{M - 1}{2Q \sin^2 \vartheta}, \quad M^2 = 1 + Q^2 \sin^2 2\vartheta. \end{aligned} \quad (8)$$

Следующие из (2) и (3) выражения для  $E$ -компонент поля поверхностной волны в области  $x_3 > 0$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= A(\mu_0, Q; \vartheta) \\ E_2 &= \frac{i}{\nu_1} B(\mu_0, Q; \vartheta) \\ E_3 &= -i \frac{\mu_1}{\nu_1} A(\mu_0, Q; \vartheta) \end{aligned} \right\} \times \frac{\exp(-k\mu_1 x_1 + ik\nu_1 x_3)}{M(\mu_0 + \mu_1)}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A(\mu_0, Q; \vartheta) &= Q\nu_1 \cos^2 \vartheta + \mu_1 \nu_0 (1 + Q\mu_1 \sin^2 \vartheta); \\ B(\mu_0, Q; \vartheta) &= Q\mu_1 (\nu_0 + \nu_1) \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициент трансформации энергии падающей волны в энергию поверхностной волны может быть найден из (8) и (9) и выражен формулой

$$T = \frac{\mu_0/\mu_1}{\nu_0 \nu_1 M^2 (\mu_0 + \mu_1)^2} \sqrt{4\mu_1^2 A^2 B^2 + (A^2 + B^2)^2}. \quad (11)$$

Вектор потока энергии в прошедшей поверхностной волне составляет с осью  $x_3$  угол

$$\psi = \arctg \frac{2\mu_1 AB}{A^2 + B^2}. \quad (12)$$

Плотность  $S(\varphi)$  потока энергии в пространственной волне выражается в виде

$$S(\varphi) = \frac{c\Phi(\varphi)}{16\pi^2 kR};$$

$$\Phi(\varphi) = \frac{(\nu_0 + \cos \varphi)^2 (m + n \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi}{(\mu_0^2 + \sin^2 \varphi)^2 [\sin^2 \varphi + Q^2(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi)^2]}; \quad (13)$$

$$m = (\mu_0 - Q \cos^2 \vartheta)^2 + Q^2 \mu_0^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta;$$

$$n = Q^2 \sin^2 \vartheta (\mu_0^2 \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta).$$

Полученные закономерности иллюстрируются рис. 3, 4 и 5, на которых приведены графики функций  $T(\vartheta)$ ,  $\psi(\vartheta)$  и  $\Phi(\varphi)$ , рассчитанные по соответствующим формулам (11), (12) и (13) для следующих трех пар значений параметров  $\mu_0$  и  $Q$ :

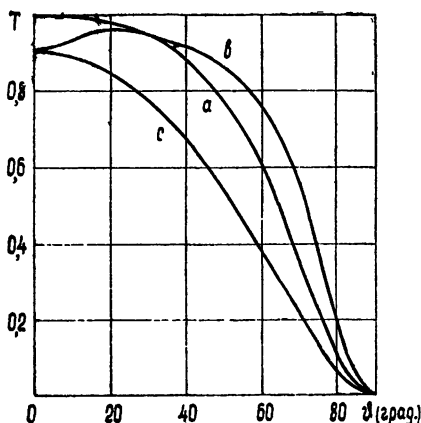


Рис. 3.

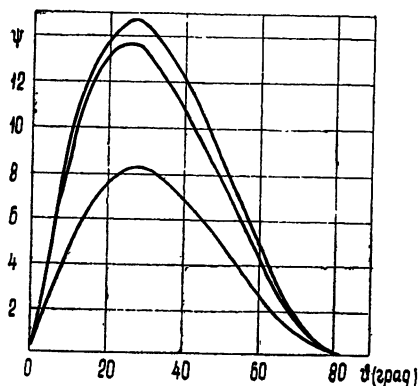


Рис. 4.

а)  $\mu_0 = Q = 0,5$ ; б)  $\mu_0 = 0,5$ ,  $Q = 1$ ; в)  $\mu_0 = 1$ ,  $Q = 0,5$ . (14)

Функции  $\Phi_0(\varphi)$ , характеризующие направленность пространственных волн (рис. 5), вычислены для нескольких значений угла  $\vartheta$  ( $\vartheta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ) между границей раздела и линиями ребер замедляющей структуры в области ( $x_1 = 0, x_3 > 0$ ) и нормированы таким образом, чтобы их максимальные значения были равны единице ( $\Phi_0 = \Phi/\Phi_{\max}$ ).

Как следует из рис. 3, для коэффициента прохождения  $T$  характерно то, что он монотонно убывает до нуля с ростом  $\vartheta$  при условии  $\mu_0 \geq Q$  и имеет максимум внутри интервала  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$  при  $\mu_0 < Q$ .

Существенной особенностью поведения угла  $\psi$  отклонения вектора потока энергии от вектора фазовой скорости в прошедшей поверхностной волне (см. формулу (12) и рис. 4) является его независимость от электрических свойств поверхности, лежащей слева от границы  $x_3 = 0$ .

Величины коэффициента  $T$  при  $\vartheta$ , а также функции  $\Phi(\varphi)$  при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi/2$  могут быть вычислены на основе строгой теории дифракции поверхностных волн на импедансной ступеньке, развитой в работе [3]. Это обстоятельство может быть использовано для оценки точности результатов, полученных здесь с помощью приближенного метода. Сопоставление упомянутых характеристик, найденных по формулам работы [3] и в приближении Кирхгофа, показывает, что для выбранных значений

параметров задачи (14) существует хорошее количественное согласие. Это означает, что сформулированные выше условия (6) применимости использованного выше метода на практике могут быть значительно ослаблены.

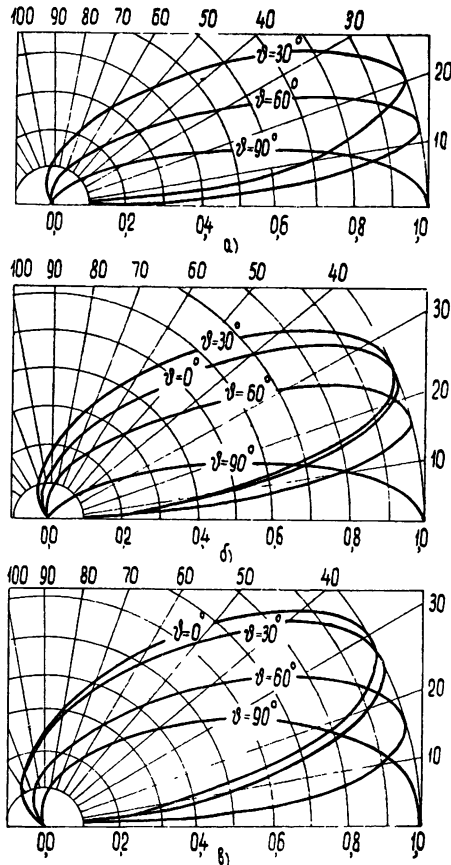


Рис. 5. а)  $\mu_0 = Q = 0,5$ ; б)  $\mu_0 = 0,5, Q = 1$ ;  
в)  $\mu_{0i} = 1, Q = 0,5$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Мышкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 74 (1963).
2. Б. Нобл, Метод Винера-Хопфа, ИЛ, М., 1962.
3. Н. Г. Тренев, Радиотехника и электроника, 3, 1 (1958).

Сибирский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
7 марта 1963 г

DIFFRACTION OF THE NORMALLY INCIDENT SURFACE TM-WAVE BY THE  
BOUNDARY BETWEEN ISOTROPIC AND ANISOTROPIC IMPEDANCE  
HALF-PLANES

V. G. Myshkin

Two-dimensional Green tensors for the anisotropic impedance plane with the symmetric tensor of the surface impedance is used for the solution of the problem of the surface TM-wave diffraction by the boundary between the isotropic and anisotropic impedance half-planes in Kirgoff's approximation. The general formulae obtained are used for the diffraction pattern calculation in the case when an anisotropic half-plane is represented by arbitrary orientated metall-plate structure.



УДК 621.371.167

## ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕНЗОРЫ ГРИНА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ИМПЕДАНСНОЙ ПЛОСКОСТИ И ДИФРАКЦИЯ НАКЛОННО ПАДАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ТМ-ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ ИЗОТРОПНОЙ И АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТЯМИ

*В. Г. Мышкин*

Вычислены трехмерные электрические и магнитные тензоры Грина для полупространства, ограниченного импедансной плоскостью с симметричным тензором поверхностного импеданса. В приближении Кирхгофа решена задача о дифракции поверхностной ТМ-волны на границе изотропной и анизотропной импедансных полуплоскостей при ее наклонном падении на эту границу; отмечен эффект двойного преломления поверхностных волн. Полученные общие выражения применяются для расчета частного случая, когда одной из полуплоскостей является металлическая ребристая замедляющая структура с ребрами, составляющими произвольный угол с границей раздела. Найдены законы преломления поверхностных волн и условия их полного отражения

В работах [1,2] были вычислены двухмерные тензоры Грина для полупространства, ограниченного анизотропной плоскостью с симметричным тензором поверхностного импеданса, а также в приближении Кирхгофа решена задача о дифракции поверхностной ТМ-волны на границе между изотропной и анизотропной полуплоскостями в случае ее нормального падения на эту границу.

Располагая найденными в первом разделе выражениями для трехмерных электрических и магнитных тензоров Грина, можно свести задачи о возбуждении электромагнитных полей над однородными анизотропными импедансными плоскостями произвольными сторонними электрическими и магнитными токами к простым квадратурам. С другой стороны, эти же выражения в совокупности с интегральными соотношениями, полученными из леммы Лоренца, могут служить основой для математической формулировки ряда задач, связанных с неоднородными анизотропными импедансными плоскостями. В частности, на основе результатов первого раздела может быть в наиболее общем виде получен эффект двойного преломления поверхностных волн на границе плоских анизотропных импедансных структур, отмеченный в [1,2]. Из этих соображений во втором разделе рассматривается задача о дифракции поверхностной ТМ-волны, набегающей вдоль изотропной импедансной полуплоскости на ее границу с анизотропной полуплоскостью под произвольным углом к этой границе. Полуплоскость, вдоль которой распространяется первичная волна, для простоты предполагается изотропной, что не меняет существа общих закономерностей рассматриваемых процессов.

В заключение, как и в [2], общие формулы применяются к случаю, когда анизотропная полуплоскость представляет собой металлическую ребристую поверхность, ребра которой составляют произвольный угол  $\vartheta$  ( $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$ ) с границей раздела.

## 1. ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕНЗОРЫ ГРИНА

Магнитные тензоры Грина в трехмерном случае могут быть найдены методом, аналогичным примененному в [1].

Интегральные соотношения, которые получаются из леммы Лоренца и связывают компоненты  $H_{\mu\nu}^m$  и  $H_{\mu\nu}^{m0}$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ;  $\mu'', \nu'' = 1, 2, 3$ ) двух тензоров Грина  $\mathbf{h}^m$  и  $\mathbf{h}^{m0}$ , соответствующих анизотропным плоскостям  $x_1 = 0$  с поверхностными импедансами

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}^0 = \begin{bmatrix} p^0 & r^0 \\ r^0 & q^0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^m(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0) = & H_{\mu\nu}^{m0}(\mathbf{r}^0, \mathbf{r}) + ik \int \{ H_{\nu 2}^{m0}(\rho', \mathbf{r}) [(p - p^0) \times \\ & \times H_{\mu 2}^m(\rho', \mathbf{r}^0) + (r - r^0) H_{\mu 3}^m(\rho', \mathbf{r}^0)] + H_{\nu 3}^{m0}(\rho', \mathbf{r}) [(r - r^0) \times \\ & \times H_{\mu 2}^m(\rho', \mathbf{r}^0) + (q - q^0) H_{\mu 3}^m(\rho', \mathbf{r}^0)] \} d\rho' \end{aligned} \quad (2)$$

( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ).

Здесь  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}^0$  — радиусы-векторы точек в пространстве над плоскостью\*,  $\rho$  и  $\rho'$  — радиусы-векторы точек на самой плоскости.

Если  $p^0 = q^0 = \zeta$  и  $r^0 = 0$ , компоненты  $H_{\mu\nu}^{m0}$  тензора  $\mathbf{h}^{m0}$  легко могут быть найдены непосредственно из уравнений Максвелла. Поскольку параметр  $\zeta$  является произвольным, мы можем положить его в (2) и в выражениях для  $H_{\mu\nu}^{m0}$  равным нулю. Полагая в (2) также  $x_1 = 0$ , мы приходим к системе интегральных уравнений для компонент  $H_{\mu\nu}^m$  тензора Грина для анизотропной импедансной плоскости с поверхностным импедансом  $\mathbf{z}$ :

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^m(\rho, \mathbf{r}^0) = & H_{\nu\mu}^{m0}(\mathbf{r}^0, \rho) + ik \int \{ [p H_{\nu 2}^{m0}(\rho', \rho) + \\ & + r H_{\nu 3}^{m0}(\rho', \rho)] H_{\mu 2}^m(\rho', \mathbf{r}^0) + [r H_{\nu 2}^{m0}(\rho', \rho) + \\ & + q H_{\nu 3}^{m0}(\rho', \rho)] H_{\mu 3}^m(\rho', \mathbf{r}^0) \} d\rho' \end{aligned} \quad (3)$$

( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ).

Областью интегрирования по  $\rho'$  в (3), так же, как и в (2), является вся плоскость  $x_1 = 0$ . Функции  $H_{\mu\nu}^{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}^0)$  выражаются в виде двойных интегралов Фурье.

Системы интегральных уравнений (3) решаются с помощью преобразования Фурье. Полученные решения могут быть представлены в форме

$$H_{\mu\nu}^m = H_{\mu\nu}^{m0} + \tilde{H}_{\mu\nu}^m, \quad (4)$$

причем выражения для  $\tilde{H}_{\mu\nu}^m$  имеют вид интегралов:

$$\tilde{H}_{\mu\nu}^m = \frac{i}{2\pi k^2} \int \frac{F_{\mu\nu}}{KD} e^{iK(x_1 + x_1^0)} e^{i\gamma(\rho - \rho^0)} d\gamma \quad (5)$$

( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ).

\* То обстоятельство, что компоненты  $r$  и  $r^0$  тензоров (1) обозначены теми же символами, что и модули векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}^0$ , по-видимому, не вызовет недоразумений.

Входящий сюда вектор  $\gamma$  имеет две компоненты ( $\gamma_2, \gamma_3$ ); величина  $D$  выражается в виде.

$$D = kK(1 + \Delta) + p(k^2 - \gamma_2^2) + q(k^2 - \gamma_3^2) - 2r\gamma_2\gamma_3, \quad (6)$$

$$K = \sqrt{k^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2}, \quad \Delta = pq - r^2.$$

Величины  $F_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ) также являются функциями переменной  $\gamma$  и компонент тензора  $\mathcal{z}$ .

Можно показать, что компоненты  $H_{\mu\nu}^m$  трехмерного  $h^m$ -тензора Грина при интегрировании по  $x_2^0$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$  сводятся к соответствующим компонентам тензора  $h^m$  для двухмерного случая<sup>[1,2]</sup>.

Выражения для электрических  $e^e$ - и  $h^e$ -тензоров Грина получаются из (4)–(6) путем замены:

$$E \rightarrow -H, \quad H \rightarrow E; \quad e^m \rightarrow -h^e, \quad h^m \rightarrow e^e; \quad (7)$$

$$p \rightarrow p' = p/\Delta; \quad q \rightarrow q' = q/\Delta; \quad r \rightarrow r' = r/\Delta; \quad \Delta \neq 0.$$

Тензор  $e^m$  находится с учетом (4)–(6) из уравнений поля. Если  $\Delta = 0$ , то переход (7) может быть совершен как предельный (при  $\Delta \rightarrow 0$ ), так как  $D' = D/\Delta$  ( $D'$  выражается формулой (6), в которой  $p, q$  и  $r$  заменены соответствующими символами со штрихами).

## 2. ДИФРАКЦИЯ НАКЛОННО ПАДАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ИМПЕДАНСНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Особый интерес представляет более общий случай, нежели рассмотренные в работе [2], когда поверхностная ТМ-волна, набегающая вдоль изотропной поверхности (полуплоскость  $x_1 = 0, x_3 < 0$ ), падает на ее границу (прямая  $x_1 = 0, x_3 = 0$ ) с анизотропной полуплоскостью ( $x_1 = 0, x_3 > 0$  (см. рис. 1)) под некоторым произвольным углом  $\alpha$  ( $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ ). Импеданс изотропной полуплоскости есть  $\zeta$ ; импеданс анизотропной полуплоскости описывается тензором  $\mathcal{z}$ . В силу тех же причин, что и в [2], здесь для нахождения дифракционного поля мы используем приближение Кирхгофа.

Зададим первичное поле в виде\*

$$H_0 = \hat{\tau} e^{-k\mu_0 x_1^0 + ik\nu_0 \rho^0}, \quad \mu_0 = i\zeta > 0, \quad \nu_0 = (1 + \mu_0^2)^{1/2}.$$

Поле дифракции представляется суммой двух полей, электрический и магнитный векторы которых вычисляются соответственно по формулам

$${}^e E(r) = \frac{4\pi}{c} ik \int e^e(r^0, r) j^e(r^0) dr^0; \quad (8)$$

$${}^m H(r) = \frac{4\pi}{c} ik \int h^m(r^0, r) j^m(r^0) dr^0,$$

\* Смысл векторов  $\tau$  и  $\nu_0$  ясен из рис. 1.

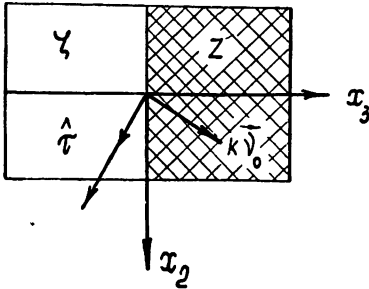


Рис. 1.

интегрирование в которых проводится по всему полупространству  $x_1 > 0$ . Через  $j^e(r^0)$  и  $j^m(r^0)$  обозначены соответственно плотности эквивалентных электрических и магнитных токов в плоскости  $x_3 = 0$ .

Согласно (4), тензоры  $e^e$  и  $h^m$  представляются в виде суммы двух тензоров, т. е.

$$e^e = e^{e0} + \tilde{e}^e, \quad h^m = h^{m0} + \tilde{h}^m. \quad (9)$$

В дальнейшем нас будет интересовать только поверхностная часть дифракционного поля; поэтому первые члены в правых частях равенств (9) могут быть опущены. Для расчета вектора  ${}^e\tilde{E}$  по первой формуле (8) нам понадобятся компоненты составляющего вектора  $\tilde{E}^e(\tilde{E}_{11}^e, \tilde{E}_{12}^e, \tilde{E}_{13}^e)$  тензора  $\tilde{e}^e$ , которые с учетом (5)–(7) имеют вид:

$$\tilde{E}_{1\nu}^e = \frac{i}{2\pi k^2} \int \frac{F'_{1\nu}}{KD'} e^{iK(x_1+x_1^0)} e^{i\gamma(p-p^0)} d\gamma \quad (10)$$

( $\nu = 1, 2, 3$ ).

Здесь штрихи у символов  $F'_{1\nu}$  и  $D'$  указывают на то, что в соответствующие функции вместо  $p$ ,  $q$  и  $r$  подставлены величины  $p'$ ,  $q'$  и  $r'$ .

В результате подстановки (10) в (8) и интегрирования будем иметь для части поля, возбуждаемой электрическим током  $j^e(r^0)$  и связанной с поверхностными волнами, выражение

$${}^e\tilde{E} = \frac{e^{i\bar{\gamma}_2 r_2}}{2\pi k} \sum_{\nu=1}^3 \hat{x}_\nu \int \frac{\bar{F}'_{1\nu} \cos \alpha}{\bar{K}\bar{D}(k\mu_0 - i\bar{K})} e^{i\bar{K}x_1 + i\bar{\gamma}_2 x_3} d\bar{\gamma}_3 \quad (11)$$

(черта над символами означает, что в соответствующие функции вместо  $\gamma_2$  подставлена величина  $\bar{\gamma}_2 = k\nu_0 \sin \sigma$ ). Соответствующий магнитный вектор  ${}^e\tilde{H}(r)$  находится из (11) с помощью уравнений Максвелла.

Аналогичным образом часть электромагнитного поля, возбуждаемая магнитным током  $j^m(r^0)$  и связанная с поверхностными волнами, записывается в виде (см. (5), (8))

$${}^m\tilde{H} = \frac{e^{i\bar{\gamma}_2 x_3}}{2\pi k} \sum_{\nu=1}^3 \hat{x}_\nu \int \frac{i\mu_0 \bar{F}'_{1\nu} \sin \alpha + \nu_0 \bar{F}'_{2\nu}}{\bar{K}\bar{D}(k\mu_0 - i\bar{K})} e^{i\bar{K}x_1 + i\bar{\gamma}_2 x_3} d\bar{\gamma}_3. \quad (12)$$

Электрический вектор  ${}^m\tilde{E}(r)$  находится с учетом (12) из уравнений поля.

Полное поле, дающее поверхностные волны, получается путем суммирования соответствующих компонент. Для вычисления полного поля дифракции, включающего и пространственные волны, как уже говорилось, необходимо учесть в правых частях равенств (9) также и первые члены.

Мы не будем останавливаться здесь на детальном анализе дифракционного поверхностного поля и ограничимся лишь констатацией его наиболее общих характерных особенностей.

Выражения для полей поверхностных волн в области  $x_3 > 0$  получаются из (11) и (12) обычным путем. Полюсы подынтегральных выражений являются корнями дисперсионного уравнения

$$\bar{D} = k\bar{K}(1 + \Delta) + p(k^2 - \bar{\gamma}_2^2) + q(k^2 - \bar{\gamma}_3^2) - 2r\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3 = 0,$$

рассматриваемого как уравнение относительно величины  $\gamma_3$ . Подставляя сюда выражения компонент поверхностного импеданса правой полуплоскости через компоненты  $p_0$  и  $q_0$  тензора импеданса  $\mathcal{Z}$ , приведенного к главным осям, а также угол  $\vartheta$  между главной осью  $\xi_3$  тензора  $\mathcal{Z}$  и осью  $x_3$  [1], получим

$$\begin{aligned} \bar{D} &= k\bar{K}(1 + \Delta) + k^2(p_0 + q_0) - \\ &- p_0(\bar{\gamma}_2 \cos \vartheta + \gamma_3 \sin \vartheta) - q_0(\bar{\gamma}_2 \sin \vartheta - \gamma_3 \cos \vartheta) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Ввиду того, что в уравнение (13) входит весьма большое число независимых величин ( $\bar{\gamma}_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $p_0$ ,  $q_0$  и  $\vartheta$ ), его исследование в общем случае представляется затруднительным. Как показывает предварительный анализ, существуют (как и в случае, рассмотренном в [1] и [2]) области определения параметров уравнения (13), в которых оно имеет два действительных, положительных корня  $\gamma_3^{(1)}$  и  $\gamma_3^{(2)}$ , удовлетворяющих условиям

$$k^2 - \bar{\gamma}_2^2 - \gamma_3^{(n)2} < 0 \quad (n = 1, 2).$$

Это означает, что при определенных условиях дифракционное поверхностное поле над обобщенной анизотропной полуплоскостью может представлять собой две поверхностные волны, распространяющиеся в различных направлениях, определяемых волновыми векторами  $k_1(\bar{\gamma}_2, \gamma_3^{(1)})$  и  $k_2(\bar{\gamma}_2, \gamma_3^{(2)})$ , с различными фазовыми скоростями.

Таким образом, для поведения поверхностных волн на границах плоских анизотропных импедансных систем характерно двойное преломление — аналог соответствующего эффекта в электродинамике анизотропных сред (см. [1,2]).

### 3. ДИФРАКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ГРЕБЕНЧАТОЙ СТРУКТУРЕ

Полученные выше результаты теории обобщенных анизотропных импедансных поверхностей могут быть непосредственно применены к расчету реальных замедляющих структур.

Подобно тому, как это было сделано в работе [2], мы хотим рассмотреть частный случай, когда в качестве левой и правой импедансных полуплоскостей берутся замедляющие системы соответственно в виде тонкого листа диэлектрика на металлической основе и металлической ребристой структуры с ребрами, расположенными под произвольным углом к границе раздела. При этом реактансы  $p_0$  и  $q_0$  правой полуплоскости имеют следующий вид (см. [1,2]):

$$p_0 = -iQ, \quad q_0 = 0, \quad Q > 0,$$

а дисперсионное уравнение (13) переписывается в форме

$$(\bar{v}_2^2 + v_3^2 - 1)^{1/2} = Q[1 - (\bar{v}_2 \cos \vartheta + v_3 \sin \vartheta)^2], \quad (14)$$

где

$$\bar{v}_2 = v_0 \sin \alpha, \quad v_3 = \gamma_3/k.$$

Вычисляя корни  $v_3^0$  уравнения (14), мы можем найти для различных значений параметров  $\mu_0$  (или  $v_0$ ),  $Q$  и  $\vartheta$  законы преломления поверхностных волн.

Как следует из (14), в частных случаях, когда  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi/2$ , входящие в выражение для углов преломления

$$\beta = \operatorname{arctg} \bar{v}_2 / v_3^0$$

корни  $v_3^0$  уравнения (14) выражаются следующим образом:

$$v_3^0 = \{(1 - \bar{v}_2^2) [1 + Q^2(1 - \bar{v}_2^2)^{1/2}]\}^{1/2}, \quad \vartheta = 0; \quad (15)$$

$$v_3^0 = \frac{1}{\sqrt{2} Q} [(1 + 2Q^2) - (1 - 4Q^2 \bar{v}_2^2)^{1/2}]^{1/2}, \quad \vartheta = \pi/2. \quad (16)$$

Это означает, что закон преломления поверхностных волн на границе рассматриваемой системы для  $\vartheta = 0; \pi/2$  (так же, как и для  $0 < \vartheta < \pi/2$ ) может быть представлен в виде

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{v_0}{v_1} = v_0 (\bar{v}_2^2 + v_3^{02})^{-1/2}, \quad (17)$$

где  $v_1$  — приведенная постоянная распространения поверхностной волны в области  $x_3 > 0$  (в направлении, составляющем с осью угол  $\beta$ ).

Рассчитанные по формулам (15)—(17) графики, иллюстрирующие связь между синусами углов падения и преломления для различных сочетаний значений параметров  $\mu_0$  и  $Q$  (1.  $\mu_0 = Q = 0,5$ ; 2.  $\mu_0 = 0,5$ ,  $Q = 1,0$ ; 3.  $\mu_0 = 0,5$ ,  $Q = 1,5$ ; 4.  $\mu_0 = 1,0$ ,  $Q = 0,5$ ; 5.  $\mu_0 = Q = 1,0$ ; 6.  $\mu_0 = 1,0$ ,  $Q = 1,5$ ; 7.  $\mu_0 = 1,5$ ,  $Q = 0,5$ ; 8.  $\mu_0 = 1,5$ ,  $Q = 1,0$ ; 9.  $\mu_0 = Q = 1,5$ ), характеризующих электрические свойства левой и правой

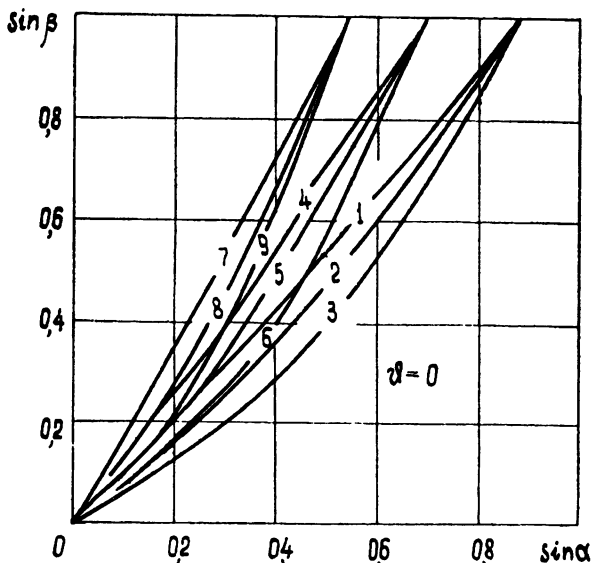


Рис. 2.

подсистем, даны на рис. 2 и 3. Как следует из (14)—(16), при  $\vartheta = 0; \pi/2$  функции  $\beta(\alpha)$  обладают тем свойством, что  $\beta(-\alpha) = -\beta(\alpha)$ ; поэтому на рис. 2 и 3 представлены только положительные ветви кривых. При  $0 < \vartheta < \pi/2$  кривые зависимости  $\sin \beta$  от  $\sin \alpha$  занимают промежуточные положения по отношению к кривым при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi/2$ . При этом  $\beta(-\alpha) \neq -\beta(\alpha)$ ; однако абсциссы их точек пересечения с прямыми  $\sin \beta = \pm 1$ , как это явствует из (14), симметричны относительно начала координат.

Из формул (15) и (17); а также из рис. 2 видно, что при  $\vartheta = 0$

(когда ребра металлической гребенки параллельны линии раздела) существуют такие области значений углов падения

$$|\alpha_0| < |\alpha| < \pi/2, \quad (18)$$

$$|\alpha_0| = \arcsin v_0^{-1}, \quad (19)$$

в которых корень  $v_3^0$  уравнения (14), а вместе с ним и постоянная пространства  $\gamma_3^0 = kv_3^0$  поверхностной волны в области  $x_3 > 0$  в на-

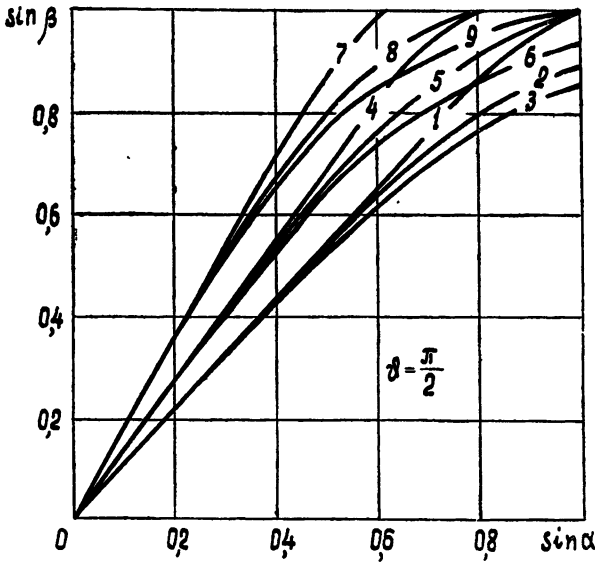


Рис 3

правлении  $x_3$  становятся мнимыми, а синус угла преломления ( $\sin \beta$ ) приобретает значения, большие 1. Это значит, что поверхностное поле в области  $x_3 > 0$ , как это следует из (11) и (12), экспоненциально затухает с расстоянием от границы, и преломленная волна в области  $x_3 > 0$  отсутствует. Как следует из (19), нижняя граница  $|\alpha_0|$  интервала (18) не зависит от электрических свойств правой импедансной полуплоскости.

Как легко показать, формулы, полученные в результате асимптотической оценки выражений для полного дифракционного поля (при  $kR \gg 1$ ,  $R^2 = x_1^2 + x_3^2$ ), которые получаются, в свою очередь, после подстановки в (8) полных тензоров Грина (9) с последующим интегрированием, содержат экспоненциальный множитель

$$\exp [ikR(1 - v_2^2)^{1/2}].$$

Это означает, что пространственное поле дифракции, представляющее собой при условии  $v_2^2 < 1$  уходящую от границы  $x_1 = 0$ ,  $x_3 = 0$  цилиндрическую волну, при  $v_2^2 > 1$  принимает реактивный характер и становится локализованным около оси  $x_2$ , убывая по экспоненте с расстоянием от этой оси.

Можно заметить, что для данного случая ( $\vartheta = 0$ ) является характерным то обстоятельство, что нижние и верхние границы интервалов исчезновения в дифракционном поле пространственных ( $|\alpha_0|$ ;  $\pi/2$ ) и поверхностных ( $|\alpha_0|$ ;  $\pi/2$ ) волн совпадают между собой ( $|\alpha_0| =$

$= |\alpha'_0| = \arcsin v_0^{-1}$ ) и не зависят от свойств гребенчатой структуры. Таким образом, в интервале углов падения  $|\alpha_0| = |\alpha'_0| < |\alpha| < \pi/2$  отражение поверхностной волны от границы раздела между рассматриваемыми импедансными системами является полным.

Выведенные в настоящей работе общие выражения позволяют обобщить эти закономерности на случай произвольной ориентации полубесконечных гребенчатых структур по отношению к их границе.

Прежде чем рассматривать общий случай, мы хотим детально обсудить другой частный вариант нашей задачи, в котором  $\vartheta = \pi/2$ . Из выражений (16) и (17), а также из рис. 3 следует, что в случае, когда ребра металлической гребенки перпендикулярны к границе раздела ( $\vartheta = \pi/2$ ), предельные углы находятся в виде

$$|\alpha_0| = \arcsin(1 + Q^2)^{1/2}/v_0. \quad (20)$$

Отсюда следует, что исчезновение в дифракционном поле поверхностных волн в этом случае может иметь место лишь при  $\mu_0 > Q$ .

Для  $\mu_0 > Q$  соотношение нижних границ интервалов ( $|\alpha_0|$ ;  $\pi/2$ ) и ( $|\alpha'_0|$ ;  $\pi/2$ ) всегда имеет следующий вид:

$$|\alpha'_0| < |\alpha_0| < \pi/2,$$

т. е. в интервале углов падения  $|\alpha'_0| < |\alpha| < |\alpha_0|$  будет происходить преломление поверхностной волны без потерь на излучение, в интервале  $|\alpha_0| < |\alpha| < \pi/2$  — полное запырание поверхностной волны.

При  $\mu_0 < Q$  преломление волн без излучения будет реализоваться во всем интервале ( $|\alpha'_0|$ ;  $\pi/2$ ) независимо от электрических свойств гребенки.

Полная информация о соотношении предельных точек угловых интервалов ( $|\alpha_0|$ ;  $\pi/2$ ) и ( $|\alpha'_0|$ ;  $\pi/2$ ), а также качественное представление о ходе кривых закона преломления в общем случае ( $0 < \vartheta < \pi/2$ ) могут быть получены из формулы

$$\sin |\alpha_0| = \frac{[(1 + 2Q^2 \cos^2 \vartheta) - (1 + Q^2 \sin^2 2\vartheta)^{1/2}]^{1/2}}{\sqrt{2} v_0 Q \cos^2 \vartheta} \quad (21)$$

и вычисленных из нее графиков, данных на рис. 4. На этом же рисунке прямыми (1—3), (4—6), (7—9), параллельными оси абсцисс, представлены функции

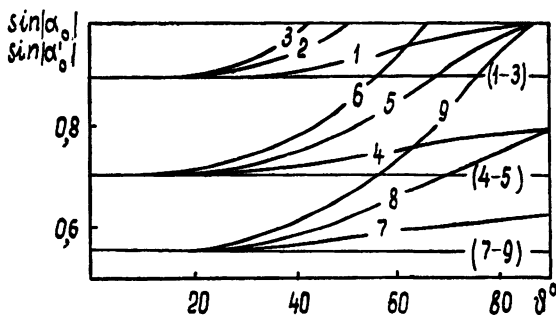


Рис. 4.

$$\sin |\alpha'_0| = v_0^{-1} = \text{const} \quad (22)$$

для тех же значений (1—9) параметров  $\mu_0$  и  $Q$ . Функции (21) и (22) являются четными в интервале  $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$ , т. е. предельные углы



не зависят от знака угла ориентации гребенчатой структуры. Поэтому на рис. 4 даны только положительные ветви кривых.

Таким образом, исследование дифракции поверхностных волн, набегающих наклонно на линейную границу между двумя плоскими импедансными структурами—изотропными и анизотропными, позволяет еще более углубить отмечавшуюся ранее ([1,2]) аналогию между поведением этих волн и поведением плоских волн на границе между изотропными и анизотропными диэлектрическими средами (двойное преломление, возможность полного отражения). В качестве отличительной особенности процесса дифракции поверхностных волн выступает то обстоятельство, что переход к полному отражению имеет двухстадийный характер: в общем случае сначала становится реактивным и локализованным около линии раздела поле пространственной волны, затем аналогичная метаморфоза происходит с прошедшей поверхностной волной.

Несмотря на то, что метод, используемый в настоящей работе, является приближенным, все выводы, относящиеся к геометрии процессов преломления поверхностных волн, носят строгий характер. Приближенными являются найденные в первом разделе выражения для полевых функций, которые в данной работе не исследуются.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Мышкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 74 (1963)
2. В. Г. Мышкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 872 (1964)

Сибирский физико-технический институт

Поступила в редакцию  
7 марта 1963 г.

### THREE-DIMENSIONAL GREEN'S TENSORS FOR ANISOTROPIC IMPEDANCE PLANE AND DIFFRACTION OF OBLIQUE INCIDENT SURFACE TM-WAVE BY THE BOUNDARY BETWEEN ISOTROPIC AND ANISOTROPIC HALF-PLANES

*V. G. Myshkin*

Three-dimensional electric and magnetic Green's tensors have been calculated for the half-space bounded by impedance plane with a symmetric tensor of the surface impedance. The problem has been solved of the surface TM-wave diffraction by the boundary between the isotropic and anisotropic impedance half-planes (the case of oblique incidence on the interface). The effect of double refraction of the surface waves has been noted. The general expressions obtained are used for the calculation of a particular case when one of half-planes is arbitrary oriented corrugated structure. The laws have been found of the surface wave reflection as well as the conditions of their total reflection.

УДК 621.371.167 : 621.371.13

## ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ $H$ -ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Л. Н. Литвиненко

Проведено решение задачи о дифракции плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волны, нормально падающей на идеальную ленточную металлическую решетку специальной формы. Даны результаты численных расчетов коэффициента отражения в зависимости от длины падающей волны при различных размерах элементов решетки.

Дифракция плоской  $E$ -поляризованной электромагнитной волны, нормально падающей на металлическую решетку специальной формы (рис. 1), рассмотрена в работе [1]. Авторы [1] для определения дифрагированного поля использовали метод, развитый Аграновичем, Марченко и Шестопаловым в [2]. В случае обычной решетки [2] задачу о дифракции  $H$ -поляризованной электромагнитной волны благодаря принципу двойственности можно свести к задаче о дифракции  $E$ -поляризованной электромагнитной волны, для чего достаточно поменять местами ленты и щели. Таким образом, дифракция на дополнительной решетке в случае [2] не требует специального рассмотрения.

Для решетки специальной формы дополнительной является разнощелевая решетка (см. ниже рис. 8), которую в общем случае нельзя свести вариацией параметров к первоначальной. Поэтому задача о дифракции на решетке (рис. 1)  $H$ -поляризованной электромагнитной волны представляет самостоятельный интерес. Отметим также, что раздельное решение задачи о дифракции  $E$ - и  $H$ -поляризованных волн на решетке, изображенной на рис. 1, вполне эквивалентно решению задачи  $H$ - и  $E$ -поляризованных волн на дополнительной решетке (рис. 8).

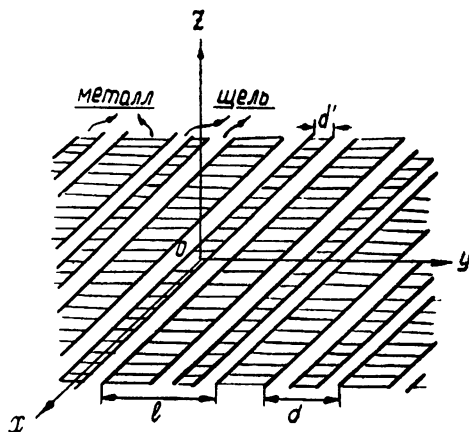


Рис. 1.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуемая периодическая решетка образована бесконечно тонкими идеально проводящими металлическими лентами, расположенными так, что между двумя широкими лентами точно посередине находится одна узкая. Расстояние между ближайшими широкими лентами  $d$ , ширина узкой полоски  $d'$ , период решетки  $l$ . Система координат выбра-

на так, как показано на рис. 1. Решетка считается бесконечной вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ .

Поля для случая  $H$ -поляризации запишутся в следующем виде:

$$H_x^1 = e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\gamma_n z} e^{\frac{2\pi in}{l} y} \quad (z > 0); \quad (1)$$

$$H_x^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-i\gamma_n z} e^{\frac{2\pi in}{l} y} \quad (z < 0), \quad (2)$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{K^2 - (2\pi n/l)^2}, \quad K = 2\pi/\lambda \quad (3)$$

( $\lambda$  — длина волны падающего поля). Отметим, что, судя по характеру искомых полей (1), (2), физический смысл имеет та ветвь корня (3), мнимая часть которой положительна, а при  $\text{Im } \gamma_n = 0$ ,  $\text{Re } \gamma_n > 0$ .

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ И АМПЛИТУД ДИФРАКЦИОННЫХ СПЕКТРОВ

Для нахождения  $A_n$  и  $B_n$  необходимо воспользоваться граничными условиями для полей на решетке ( $z = 0$ ). Тангенциальные составляющие электрического поля должны обращаться в нуль на металлических лентах, а на щелях все поле должно быть непрерывно. Это приводит к следующим соотношениям:

$$A_0 = 1 - B_0, \quad A_n = -B_n \quad (n \neq 0); \quad (4)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{2\pi in}{l} y} = 0 \quad (\text{на щелях}); \quad (5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \gamma_n e^{\frac{2\pi in}{l} y} = K \quad (\text{на металле}). \quad (5a)$$

Введем обозначения

$$\frac{2\pi y}{l} = \varphi, \quad z = \frac{Kl}{2\pi} = \frac{l}{\lambda}, \quad \chi_n = 1 + i \sqrt{\left(\frac{x}{n}\right)^2 - 1}, \quad (6)$$

$$\gamma_n = \sqrt{K^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} = \frac{2\pi |n|}{l} i(1 - \chi_n) \quad (n \neq 0).$$

Тогда уравнения (5) и (5a) примут вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\varphi} = 0 \quad \left(\frac{\pi d'}{l} < |\varphi| < \frac{\pi d}{l}\right), \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} A_n |n| (1 - \chi_n) e^{in\varphi} = ix(A_0 - 1) \quad (7a)$$

$$\left(|\varphi| < \frac{\pi d'}{l}, \quad \frac{\pi d}{l} < \varphi < 2\pi - \frac{\pi d'}{l}\right).$$

Прежде чем решать систему (7), (7а), отметим, что  $\chi_n \rightarrow 0$  при  $|n| \rightarrow \infty$ , и рассмотрим предварительно следующую более общую систему уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\varphi} = 0 \quad (\Theta' < |\varphi| < \Theta); \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} A_n |n| e^{in\varphi} = aA_0 + f(e^{i\varphi}) \quad (|\varphi| < \Theta', \Theta < \varphi < 2\pi - \Theta), \quad (8a)$$

где  $a = \text{const}$  и

$$f(e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi}. \quad (9)$$

Дифференцируя уравнение (8) и полагая  $A_n n = x_n$ , получим

$$\sum_{n \neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0 \quad (\Theta' < |\varphi| < \Theta); \quad (10)$$

$$\sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = aA_0 + f(e^{i\varphi}) \quad (|\varphi| < \Theta', \Theta < \varphi < 2\pi - \Theta). \quad (10a)$$

К системе (10), (10а) необходимо еще добавить равенства, получаемые из (8) при подстановке соответственно

$$\varphi = \delta = \frac{\Theta' + \Theta}{2}; \quad \varphi = -\delta, \quad (11)$$

т. е. равенства

$$A_0 = - \sum_{n \neq 0} \frac{x_n}{n} e^{in\delta}; \quad A_0 = - \sum_{n \neq 0} \frac{x_n}{n} e^{-in\delta}. \quad (12)$$

Эту пару уравнений мы перепишем в несколько ином виде:

$$A_0 = - \sum_{n \neq 0} \frac{x_n}{n} \cos(n\delta); \quad (13)$$

$$0 = - \sum_{n \neq 0} \frac{x_n}{n} \sin(n\delta). \quad (13a)$$

Решение системы уравнений (10), (10а) можно свести к задаче Римана — Гильберта [2, 3], в результате получим

$$\sum_{n \neq 0} x_n (\zeta_0)^n = \frac{R(\zeta_0)}{\pi i} \int_{L_1} \frac{aA_0 + f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} \sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \gamma)(\zeta - \beta)(\zeta - \bar{\beta})} d\zeta + \\ + 2c_1 R(\zeta_0) \zeta_0 + 2c_2 R(\zeta_0). \quad (14)$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  — константы, а

$$R(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \gamma)(\zeta - \beta)(\zeta - \bar{\beta})}} & \text{на дуге } L_1, \\ 0 & \text{на дуге } L_2 \end{cases}, \quad (15)$$

причем выбрана та ветвь радикала  $R(z)$ , для которой

$$R(0) = 1.$$

Интегрирование в формуле (14) ведется по внутренней стороне дуги  $L_1$  (рис. 2); интеграл понимается в смысле главного значения.

Теперь, чтобы найти коэффициенты  $x_n$ , достаточно перейти в (14) к коэффициентам Фурье. Введем предварительно следующие обозначения:

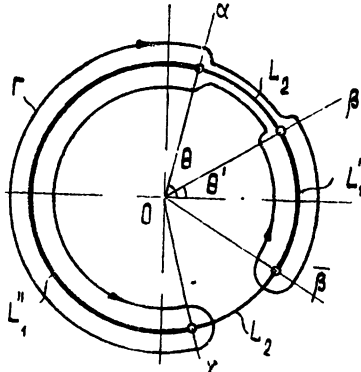


Рис. 2.

$$v_n(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\zeta_n}{\zeta - \zeta_0} \sqrt{(\zeta - \alpha)(\zeta - \gamma)(\zeta - \beta)(\zeta - \bar{\beta})} d\zeta \quad (\zeta_0 \in L_1);$$

$$v_m^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{2\pi - \delta} v_n(e^{i\varphi}) R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi;$$

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{2\pi - \delta} R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi; \quad (16)$$

$$R_{[\sigma]} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_m}{m} \cos(m\delta); \quad R_{[\sigma]}^{(-1)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-1}}{m} \cos(m\delta);$$

$$\tilde{R}_{[\sigma]} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_m}{m} \sin(m\delta); \quad \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-1}}{m} \sin(m\delta);$$

$$v_{[\sigma]}^n = \sum_{m \neq 0} \frac{v_m^n}{m} \cos(m\delta); \quad w_{[\sigma]}^n = \sum_{m \neq 0} \frac{v_m^n}{m} \sin(m\delta)$$

(вычисление этих величин приведено в последнем разделе). Переходя в (14) к коэффициентам Фурье и используя при этом введенные обозначения (16), получим, согласно (9)–(11а):

$$x_m = aA_0 v_m^0 + \sum_{-\infty}^{\infty} f_n v_m^n + 2(c_2 R_m + c_1 R_{m-1}) \quad (m \neq 0);$$

$$Q = aA_0 v_0^0 + \sum_{-\infty}^{\infty} f_n v_0^n + 2(c_2 R_0 + c_1 R_{-1});$$

$$-A_0 = aA_0v_{[\sigma]}^0 + \sum_{-\infty}^{\infty} f_n v_{[\sigma]}^n + 2(c_2 R_{[\sigma]} + c_1 R_{[\sigma]}^{(-1)}); \quad (17)$$

$$O_{\sigma} = aA_0\omega_{[\sigma]}^0 + \sum_{-\infty}^{\infty} f_n \omega_{[\sigma]}^n + 2(c_2 \tilde{R}_{[\sigma]} + c_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)}).$$

Вернемся теперь к исходной системе (7), (7а). Обозначив  $\pi d'/l = \Theta'$  и  $\pi d/l = \Theta$ , запишем систему уравнений (7), (7а) так:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\varphi} = 0 \quad (\Theta' < |\varphi| < \Theta); \quad (18)$$

$$\sum_{n \neq 0} A_n |n| e^{in\varphi} = ix A_0 + f(e^{i\varphi}) \quad (|\varphi| < \Theta'; \Theta < \varphi < 2\pi - \Theta); \quad (19)$$

$$f(e^{i\varphi}) = -ix + \sum_{n \neq 0} A_0 |n| \chi_n e^{in\varphi}.$$

Аналогично предыдущему, находим

$$-A_0 = ix A_0 v_{[\sigma]}^0 - ix v_{[\sigma]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n [v_{[\sigma]}^n + v_{[\sigma]}^{-n}] + 2(c_2 R_{[\sigma]} + c_1 R_{[\sigma]}^{(-1)});$$

$$O = ix A_0 \omega_{[\sigma]}^0 - ix \omega_{[\sigma]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n [\omega_{[\sigma]}^n + \omega_{[\sigma]}^{-n}] + 2(c_2 \tilde{R}_{[\sigma]} + c_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)}); \quad (20)$$

$$O_{\sigma} = ix A_0 v_0^0 - ix v_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n [v_0^n + v_0^{-n}] + 2(c_2 R_0 + c_1 R_{-1});$$

$$x_m = ix A_0 v_m^0 - ix v_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_n [v_m^n + v_m^{-n}] + 2(c_2 R_m + c_1 R_{m-1}).$$

Здесь  $x_n = A_n n$ , а  $c_2$  и  $c_1$  неизвестные промежуточные константы. Система (20) выписана с учетом того, что  $\chi_{-n} = \chi_n$ . Полученная система (20) является бесконечной системой линейных неоднородных алгебраических уравнений, из которой определяются коэффициенты  $A_0$  и  $A_n$ . Коэффициенты этой системы удовлетворяют условиям Коха и решение ее может быть найдено методом редукции. Так как  $\chi_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , для численного решения системы можно положить  $\chi_n = 0$  при всех  $n > N$  и решать систему из  $N$  уравнений.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Прежде всего нас будет интересовать случай, когда длина падающей волны по порядку величины равна или меньше периода системы; в первую очередь рассмотрим зависимость коэффициента отражения  $|A_0|$  от частоты ( $x$  изменяется в диапазоне от 0 до 5) и от ширины щелей.

На рис. 3 приведена зависимость коэффициента отражения от частоты для случая решеток с одинаковой широкой лентой (рис. 1) и разными по ширине узкими лентами. Дифракция  $H$ -поляризованной электромагнитной волны на такого типа решетках обладает следующей интересной особенностью. В отличие от случая  $E$ -поляризации наличие в зазоре между двумя широкими лентами узкой ленты существенно не сказывается на картине дифракционного поля в исследуемой полосе частот. Как видно из рис. 3, это утверждение справедливо для ленты

в зазоре шириной вплоть до  $0,05 \div 0,07$  периода системы (кривые 1, 2, 3 практически совпадают). В таблице 1 приведены значения модуля коэффициента отражения  $|A_0|$  при различных значениях параметра  $V = \cos \theta'$  ( $U = \cos \theta$  в данном случае положено равным нулю) и при  $\alpha = 1$ .

С физической точки зрения слабая зависимость коэффициента отраже-

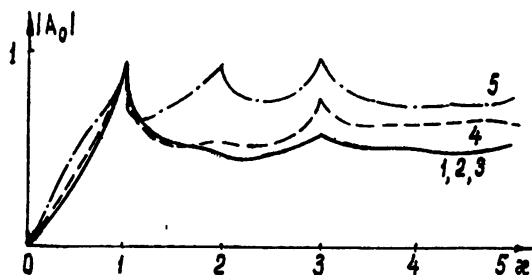


Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения  $|A_0|$  от частоты при различных значениях параметра  $V = \cos(\pi d'/l)$ :

- 1)  $U=0$ ;  $V=0,9998$ ; 2)  $U=0$ ,  $V=0,9962$ ; 3)  $U=0$ ;  $V=0,9848$ ;  
4)  $U=0$ ;  $V=0,9397$ , 5)  $U=0$ ;  $V=0,7071$ .

ния от параметра  $V$  объясняется тем, что в случае  $H$ -поляризации отсутствуют токи, протекающие в направлении, параллельном оси  $Ox$ , а узкая металлическая полоска мало изменяет проводимость решетки в направлении  $Oy$ ; очевидно, что токами на такой полоске в нашем случае можно пренебречь.

Таблица 1

$V$	0,9998	0,9962	0,9848	0,9397	0,7071
$ A_0 $	0,9474	0,9475	0,9478	0,9490	0,9562

При целочисленных значениях  $x$  зависимость коэффициента отражения  $|A_0|$  от частоты имеет особенности резонансного типа. Наличие особенностей объясняется тем, что в этих случаях начинают распространяться гармоники с соответствующим индексом (например, при  $x \geq 1$  — первая гармоника; это означает, что  $\text{Im } \gamma_n = 0$ ; см. формулу (3)). На рис. 4 приведена такая зависимость  $|A_0|$  в районе  $x = 1$  ( $x$  изменяется с весьма малым шагом). Как видно из рисунка, коэффициент отражения резко уменьшается одновременно с началом распространения первой гармоники.

В ряде случаев достаточно знать коэффициент отражения в интервале изменения  $x$  от 0 до  $\sim 0,4$  (длинноволновое приближение). Если положить все  $\chi_n = 0$ , то из формулы (20) легко найдем

$$A_0 = \frac{ix [v_{[\sigma]}^0 - 2v_0^0 R_{[\sigma]}]}{1 + ix [v_{[\sigma]}^0 - 2v_0^0 R_{[\sigma]}]} \quad (21)$$

Формула (21) аналогична формуле Ламба [4] в случае простой периодической решетки. На рис. 5 приведены результаты расчетов по формуле (21) (кривая 2) и результаты расчетов с учетом девяти пространственных гармоник. Как видно из рис. 5, формулой (21) можно пользоваться для расчетов коэффициента отражения для  $x \leq 0,35$ . При этом, как

ясно из таблицы 2\*, ошибка в определении  $|A_0|$  по формуле (21) весьма слабо зависит от ширины узкой полоски; однако с увеличением

Таблица 2

Абсолютная ошибка в определении $ A_0 $	0,0166	0,0164	0,0161	0,0149	0,0100
$\theta' = \frac{\pi d'}{l}$ (град.)	1	5	10	20	45

ширины заметна тенденция к уменьшению ошибки. Поэтому при весьма узких полосках в зазоре диапазон применимости формулы (21) сужается

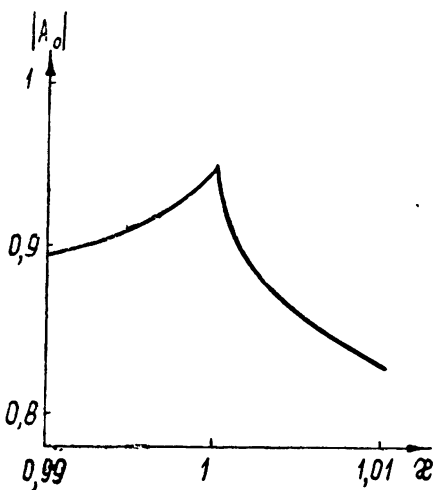


Рис. 4. Зависимость  $|A_0|$  от  $x$  при  $U=0$ ;  $V = 0,9998$ .

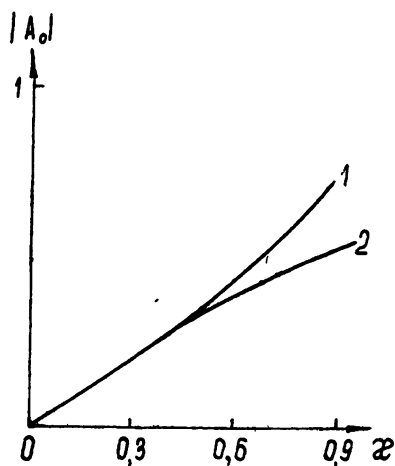
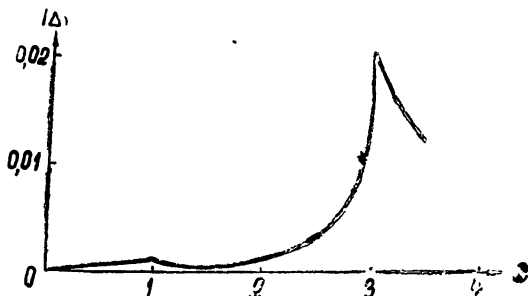


Рис. 5. Зависимость  $|A_0|$  от  $x$  при  $U = 0$ ;  $V = 0,9962$ .

Значительный интерес представляет правильный выбор (в зависимости от величины  $x$ ) числа гармоник, которые необходимо учитывать для получения необходимой точности расчетов. Как показано на рис. 6, погрешности при учете трех гармоник малы до значений  $x \sim 2$ . На всех

Рис. 6. Зависимость  $|\Delta|$  (модуля абсолютной ошибки) от частоты при вычислении коэффициента отражения  $|A_0|$  с учетом трех пространственных гармоник ( $U = -0,1908$ ;  $V = 0,9816$ ).



\* В этой таблице приведены значения абсолютной ошибки при определении  $|A_0|$  с помощью (21) по сравнению со значением  $|A_0|$ , вычисленным с учетом девяти пространственных гармоник при  $x = 0,4$  и  $U = 0$ .



остальных рисунках, за исключением особо оговоренных случаев, приведены результаты расчетов с учетом девяти пространственных гармоник.

Решетка рис. 1 в случае равенства ширины лент эквивалентна решетке, рассмотренной в работе [2]. Результаты расчетов в таком случае ( $U = -V$ ) приведены на рис. 7 (кривая 5). Значения коэффициента отражения совпадают с соответствующими значениями для простой решетки при вдвое меньших  $x$ . Естественно, что в этом случае равны

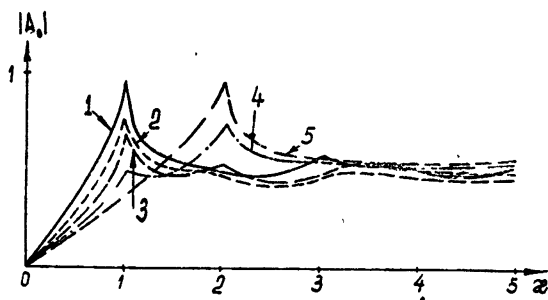


Рис. 7. Зависимость коэффициента отражения  $|A_0|$  от частоты при постоянной отражающей поверхности:

- 1)  $U = -0,1075$ ;  $V = 0,9993$ ; 2)  $U = -0,1908$ ;  $V = 0,9816$ ; 3)  $U = -0,3584$ ;  $V = 0,9336$ ; 4)  $U = -0,5150$ ;  $V = 0,8572$ ; 5)  $U = -0,7071$ ;  $V = 0,7071$ .

нулю все нечетные гармоники. Другой предельный переход к простой решетке (например,  $V = 1$ ) требует коррекции формул. Однако, так как наличие узкой металлической полоски в случае  $H$ -поляризации мало существенно, то при значениях  $V$ , весьма близких к единице, можно пользоваться результатами расчетов для решетки без узкой полоски.

Необходимо отметить следующее важное обстоятельство. В силу принципа двойственности система уравнений (20) описывает прошедшее поле (поле при  $z < 0$ ) для дополнительной решетки (рис. 8) в случае  $E$ -поляризации. Дополнительная решетка является разнощелевой и, очевидно, может быть легко выполнена так, чтобы ширина щелей изменялась. Как видно из рис. 7, такое изменение ширины щелей (при постоянной ширине лент) приводит к перемещению максимума коэффициента прохождения в район  $x = 2$  при увеличении ширины узкой щели. Это свойство решеток, очевидно, может быть использовано для создания поляризационных перестраиваемых фильтров (с постоянной отражающей поверхностью) и т. п.

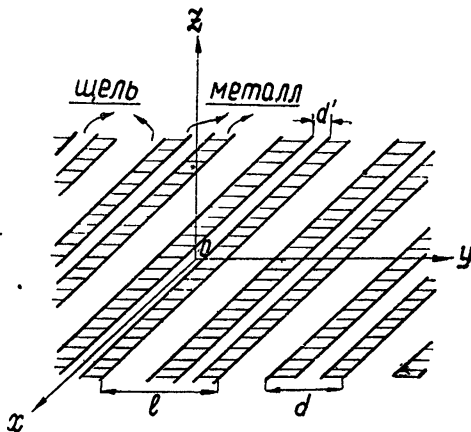


Рис. 8.

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В этом разделе мы вычислим коэффициенты, введенные ранее формулами (16).

1. *Полиномы*  $Q_n(U, V)$  и  $\mu_n(U, V)$ . Определим  $\psi(z)$  как ветвь  $\sqrt{(z - \alpha)(z - \gamma)(z - \beta)(z - \bar{\beta})}$ , голоморфную во всей плоскости с разрезами вдоль  $L'_1$  и  $L''_1$  (соединяющими точки  $\beta$  и  $\bar{\beta}$  и  $\alpha$  и  $\gamma$ ; рис. 2).

считая  $\psi(0) = 1$ . В этом случае можно ввести полиномы  $Q_n(U, V)$  и  $\mu_n(U, V)$ , являющиеся коэффициентами разложений:

$$\frac{1}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(U, V)z^n; \quad \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(U, V)z^n \quad \text{при } |z| < 1 \quad (22)$$

$$(U = \cos \theta, \quad V = \cos \theta').$$

Исследование свойств таких полиномов методами теории функций комплексного переменного приводит к следующим соотношениям:

$$Q_n(U, V) = \sum_{k=0}^n P_k(U)P_{n-k}(V) \quad (n \geq 0);$$

$$(n+1)Q_{n+1} - (2U+1)(U+V)Q_n + 2(1-2UV)Q_{n-1} - \\ - (2U-1)(U+V)Q_{n-2} + (n-1)Q_{n-3} = 0 \\ (n \geq 0);$$

$$\mu_n = Q_n - 2(U+V)Q_{n-1} + 2(UV+1)Q_{n-2} - 2(U+V)Q_{n-3} + Q_{n-4} \quad (23) \\ (n \geq 4);$$

$$\mu_0 = 1; \quad \mu_1 = -(U+V); \quad \mu_2 = -\frac{1}{2}(U^2+V^2) + UV + 1;$$

$$\mu_3 = -\frac{1}{2}(U^3+V^3) + \frac{1}{2}UV(U+V)$$

( $P_i$  — полиномы Лежандра). Интегральное представление полиномов  $Q_n$  (справедливое для любого, в том числе и не целого индекса) имеет вид

$$Q_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\theta'} \frac{\cos(n+1)\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-U}\sqrt{\cos\varphi-V}} d\varphi - \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)\varphi}{\sqrt{U-\cos\varphi}\sqrt{V-\cos\varphi}} d\varphi \right], \quad (24)$$

отсюда  $Q_{-n} = Q_{n-2}$ ;  $Q_{-1} = 0$ .

2. Вычисление  $R_m$ ,  $v_n$  и  $v_n^*$ . Сопоставляя интегральное выражение для коэффициента  $R_m$  (формулы (15) и (16)) с формулой (24), находим:

$$R_m = \frac{1}{2} Q_m(U, V). \quad (25)$$

Выражение для  $v_n(\zeta_0)$  можно переписать в форме

$$v_n(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{z-\zeta_0} \psi(z) dz$$

(контур  $\Gamma$  показан на рис. 2). Воспользовавшись теперь теорией вычетов, запишем:

$$v_n(\zeta_0) = \begin{cases} \sum_{p=0}^{n+2} \mu_{n-p+2}(U, V) \zeta_0^p & (n \geq 0), \\ -\zeta_0^{-1} + \mu_1(U, V) + \zeta_0 & (n = -1), \\ 1 - \zeta_0^{-2} - \mu_1 \zeta_0^{-1} & (n = -2), \\ -\sum_{p=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-p}(U, V) \zeta_0^{-p-1} & (n < -2). \end{cases} \quad (26)$$

Согласно (16) и (26), получаем

$$v_m^n = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+2} \mu_{n-p+2}(U, V) Q_{p-m-2}(U, V) & (n \geq 0), \\ \frac{1}{2} [Q_{m-1} + \mu_1 Q_m - Q_{m+1}] & (n = -1), \\ -\frac{1}{2} [-Q_m + \mu_1 Q_{m+1} + Q_{m+2}] & (n = -2), \\ -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{-n-1} \mu_{-n-1-p}(U, V) Q_{m+p+1}(U, V) & (n < -2). \end{cases} \quad (27)$$

3. Вычисление  $R_{[\sigma]}^{(k)}$ ,  $\tilde{R}_{[\sigma]}$ ,  $\tilde{R}_{[\sigma]}^{-1}$ ,  $v_{[\sigma]}^n$  и  $w_{[\sigma]}^n$ . Учитывая (25), (27) и пользуясь интегральным представлением (24), легко свести вычислительные суммы (16) к суммированию тригонометрических рядов:

$$R_{[\sigma]}^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\sigma'} \frac{\sin(k+1)\varphi \varphi d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - U} \sqrt{\cos\varphi - V}} + \int_{\sigma}^{\pi} \frac{\sin(k+1)\varphi(\pi - \varphi)}{\sqrt{U - \cos\varphi} \sqrt{V - \cos\varphi}} d\varphi \right];$$

$$\tilde{R}_{[\sigma]} = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma'} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - U} \sqrt{\cos\varphi - V}} d\varphi - \delta;$$

$$\tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)} = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - U} \sqrt{\cos\varphi - V}};$$

$$v_{[\sigma]}^n + v_{[\sigma]}^{-n} = \mu_{n+2} R_{[\sigma]} + \mu_{n+1} R_{[\sigma]}^{(-1)} - \mu_n R_{[\sigma]} - 2 \sum_{k=1}^n \mu_{n-k} R_{[\sigma]}^{(k)};$$

$$w_{[\sigma]}^n + w_{[\sigma]}^{-n} = (\mu_{n+2} + \mu_n) \tilde{R}_{[\sigma]} + \mu_{n+1} \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)};$$

$$v_{[\sigma]}^0 = (\mu_2 - \mu_0) R_{[\sigma]} + \mu_1 R_{[\sigma]}^{(-1)};$$

$$w_{[\sigma]}^0 = (\mu_2 - \mu_0) \tilde{R}_{[\sigma]} + \mu_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)};$$

$$v_{[\sigma]}^1 + v_{[\sigma]}^{-1} = (\mu_2 - 1) R_{[\sigma]}^{(-1)} + \mu_3 R_{[\sigma]} - 2 R_{[\sigma]}^{(1)};$$

$$\begin{aligned} \omega_{[\sigma]}^1 + \omega_{[\sigma]}^{-1} &= (\mu_3 + 2\mu_1)\tilde{R}_{[\sigma]} + (\mu_2 - 1)\tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)}; \\ \nu_{[\sigma]}^2 + \nu_{[\sigma]}^{-2} &= \mu_3 R_{[\sigma]}^{(-1)} + (\mu_4 - \mu_2 - 1)R_{[\sigma]} - 2\mu_1 R_{[\sigma]}^{(1)} + 2R_{[\sigma]}^{(2)}; \\ \omega_{[\sigma]}^2 + \omega_{[\sigma]}^{-2} &= (\mu_4 + \mu_2 - 1)\tilde{R}_{[\sigma]} + \mu_3\tilde{R}_{[\sigma]}^{(-1)}. \end{aligned}$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В. А. Марченко, В. П. Шестопалову и К. В. Маслову за внимание к настоящей работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Гестрин, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов, Уч. зап. ХГУ, сер. матем., **32**, 121 (1963).
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, **32**, 381 (1962).
3. Н. И. Мухелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962, стр. 310.
4. Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947, стр. 672.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
26 сентября 1963 г.

#### THE DIFFRACTION OF A PLANE H-POLARIZED ELECTROMAGNETIC WAVE ON THE ARRAY OF A SPECIAL CONFIGURATION

*L. N. Litvinenko*

The solution of a problem has been carried of the diffraction of a plane H-polarized electromagnetic wave falling normally on an perfect ribbon metallic array of a special form. The results are given of the numerical calculations of the reflections coefficient as a function of the length of an incident wave at different dimensions of array elements.

---

УДК 538.561 : 621.372.8

## ИЗЛУЧЕНИЕ КОЛЬЦА С ТОКОМ В ВОЛНОВОДЕ

И. Н. Иванов, В. И. Котов

Решается задача об излучении кольца с током, равномерно движущегося вдоль оси волновода, диэлектрические свойства которого меняются скачком при некотором значении радиуса  $a$ . Получены и проанализированы формулы для мощности излучения.

1. Рассмотрение задачи об излучении токов и зарядов в волноводах, заполненных диэлектриком, представляет интерес с точки зрения генерации микрорадиоволн. В данной работе рассматривается излучение Вавилова—Черенкова кольцевым током, летящим вдоль оси волновода,

диэлектрические свойства которого меняются скачком на некотором радиусе  $a$ . Геометрия задачи и обозначения приведены на рис. 1. Частным случаем такой системы является волновод, частично заполненный диэлектриком, для которого Абель [1] провел исследование излучения заряженного сгустка, летящего по оси волновода. В отличие от задачи Абеля, где заряд излучает  $E$ -волны, кольцо с током в аналогичной системе будет излучать  $H$ -волны.

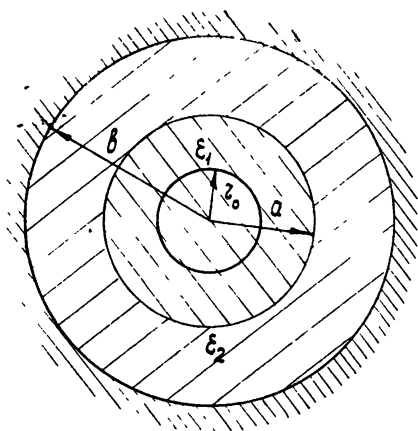


Рис. 1.

2. В силу симметрии задачи единственной отличной от нуля компонентой является азимутальная компонента векторного потенциала. Для ее определения имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \square_{\theta}^{(1)} A^{(1)} &= -\frac{4\pi}{c} \sigma \delta(r - r_0) \delta(z - vt); \\ \square_{\theta}^{(2)} A^{(2)} &= 0; \\ \square_{\theta}^{(k)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\epsilon_k}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$H_r^{(k)} = \frac{\partial A^{(k)}}{\partial z}; \quad H_z^{(k)} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A^{(k)}; \quad E_{\theta}^{(k)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial t}$$

( $k = 1, 2$ ).

Здесь  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  связаны граничными условиями:

$$H_z^{(1)} = H_z^{(2)}|_{r=a}; \quad E_{\theta}^{(1)} = E_{\theta}^{(2)}|_{r=a}; \quad E_{\theta}^{(2)} = 0|_{r=b};$$

$\sigma$  — полный ток,  $v$  —  $z$ -компонента скорости кольца,  $c$  — скорость света в вакууме.

Применяя при решении (1) обычный аппарат разложения в интеграл Фурье, получим.

$$A^{(k)} = \frac{2r_0\sigma}{c\nu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{\nu}(\nu t - z)} a^{(k)}(\omega, r) d\omega,$$

где

$$a^{(1)} = \begin{cases} K_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 r_0\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 r\right) + S I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 r\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 r_0\right) & (0 < r < r_0); \\ K_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 r\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 r_0\right) + S I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 r\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 r_0\right) & (r_0 < r < a); \end{cases} \quad (2a)$$

$$a^{(2)} = M I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 r\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 r_0\right) + L I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 r_0\right) K_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 r\right) \quad (a < r < b);$$

$$x_1^2 = 1 - \varepsilon_1 \beta^2; \quad x_2^2 = 1 - \varepsilon_2 \beta^2; \quad \beta = v/c,$$

$K_1$  и  $I_1$  — модифицированные функции Бесселя. Коэффициенты  $S$ ,  $L$ ,  $M$ , найденные из граничных условий, имеют вид

$$S = \left[ x_1 K_0\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 a\right) \varphi_1 + x_2 K_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 a\right) \varphi_2 \right] \left[ x_1 I_0\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 a\right) \varphi_1 - x_2 I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 a\right) \varphi_2 \right]^{-1};$$

$$L = - \left[ \nu I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 r_0\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 b\right) \right] \left\{ |\omega| a I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 r_0\right) \left[ x_1 I_0\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 a\right) \varphi_1 - x_2 I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_1 a\right) \varphi_2 \right] \right\}^{-1}; \quad (2b)$$

$$M = - K_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 b\right) I_1^{-1}\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 b\right) L;$$

$$\varphi_1 = K_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 b\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 a\right) - I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 b\right) K_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 a\right);$$

$$\varphi_2 = K_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 b\right) I_0\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 a\right) + K_0\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 a\right) I_1\left(\frac{|\omega|}{\nu} x_2 b\right).$$

3. Мощность потерь на излучение определим выражением

$$P = 2 \pi r_0^2 \varepsilon E_0 \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \nu t=z}} \quad (3)$$

или

$$P = \frac{8 \pi r_0^2 \sigma^2}{c^2 \nu} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} i \omega d\omega \left[ K_1\left(\frac{\omega}{\nu} x_1 r_0\right) + S I_1\left(\frac{\omega}{\nu} x_1 r_0\right) \right] I_1\left(\frac{\omega}{\nu} x_1 r_0\right). \quad (4)$$

Вообще говоря, возможны три случая:

а) условия излучения выполняются только в 1-ой среде:

$$x_1 = i s_1, \quad x_2^2 > 0;$$

б) условия излучения выполняются только во 2-ой среде:

$$\kappa_1^2 > 0, \quad \kappa_2 = i s_2;$$

в) условия излучения выполняются в двух средах одновременно:

$$\kappa_1 = i s_1, \quad \kappa_2 = i s_2.$$

Во всех этих случаях подынтегральное выражение в (4)—чисто мнимая величина и мы получаем отличную от нуля мощность излучения только на тех частотах, при которых знаменатель обращается в нуль. Это дает дискретный спектр излучения, когда

$$\kappa_1 I_0 \left( \frac{\omega}{v} \kappa_1 a \right) \varphi_1 - \kappa_2 I_1 \left( \frac{\omega}{v} \kappa_1 a \right) \varphi_2 = 0 \quad (5)$$

и выполнено одно из условий (4).

Прежде чем рассматривать каждый случай (4) в отдельности, проанализируем некоторые частные варианты.

а) Пусть  $\kappa_1 = \kappa_2 = i s$ , т. е. волновод однородно заполнен диэлектриком. Дисперсионное уравнение (5) в этом случае имеет решение.

$$\omega_\nu = v \lambda_\nu / s b \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

где  $\lambda_\nu$  удовлетворяет равенству  $J_1(\lambda_\nu) = 0$ . Интенсивность излучения в этом случае

$$P = - \frac{8 \pi^2 r_0^2 \sigma^2}{c^2 b} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \beta^2 - 1}} \frac{J_1^2(\lambda_\nu r_0 / b)}{J_2^2(\lambda_\nu)} \left[ \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\sqrt{\varepsilon \beta^2 - 1} \omega b}{v} \right) \right]^{-1}. \quad (7)$$

б) Рассмотрим начальную часть спектра.

$$\omega \ll v / \kappa_{(k)} a. \quad (8)$$

(Здесь и в дальнейшем мы будем проводить рассмотрение только для волноводов, у которых  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  — величины одного порядка.) Дисперсионное уравнение для этого случая имеет вид

$$I_1 \left( \frac{\omega}{v} \kappa_2 b \right) = 0. \quad (9)$$

Из (9) следует, что внутренний канал малого радиуса не влияет на излучение. Если во второй среде выполнено условие черенковского излучения, то последнее происходит на тех же частотах, как в однородно заполненном диэлектриком волноводе радиуса  $b$ . Если же  $\kappa_2^2 > 0$ , то излучение с частотами (8) будет отсутствовать.

В той части спектра, где выполнено неравенство

$$\omega \gg v / \kappa_{(k)} a, \quad (10)$$

можно воспользоваться асимптотикой функций Бесселя при больших аргументах. Для случая а имеем дисперсионное уравнение

$$\frac{s_1}{\kappa_2} \operatorname{th} \frac{\omega \kappa_2}{v} (b - a) = - \operatorname{tg} \left( \frac{s_1 \omega}{v} a - \frac{\pi}{4} \right); \quad (11a)$$

его решение при  $b \gg a$ :

$$\omega_\nu = \frac{v}{s_1 a} \left[ \left( \nu + \frac{1}{4} \right) \pi - \operatorname{arctg} \frac{s_1}{\kappa_2} \right] \quad (11b)$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

При этом интенсивность излучения

$$P = -\frac{8\pi^2 r_0 \sigma^2}{c^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} s_1^{-1} \sin^2 \left( \frac{s_1 \omega_\nu}{v} r_0 - \frac{\pi}{4} \right) \left[ 1 + \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{s_1 \omega_\nu}{v} a - \frac{\pi}{4} \right) \right] \times \\ \times \left\{ \operatorname{ctg} \left( \frac{s_1 \omega_\nu}{v} a - \frac{\pi}{4} \right) \frac{d}{d\omega} \ln \frac{x_2}{s_1} \Big|_{\omega=\omega_\nu} + \frac{s_1 a}{v} \left[ 1 - \frac{x_2^2}{s_1^2} \frac{b-a}{a} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b}{a} \operatorname{ctg}^2 \left( \frac{s_1 \omega_\nu}{v} a - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (12)$$

Если возможно излучение во второй среде, то дисперсионное уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{s_2 \omega_\nu}{v} (b-a) = -\frac{s_2}{x_1} \quad (13a)$$

имеет решение

$$\omega_\nu = \frac{v}{s_2(b-a)} \left[ \nu\pi - \operatorname{arctg} \frac{s_2}{x_1} \right] \quad (13b) \\ (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Соответствующая интенсивность излучения

$$P = -\frac{8\pi^2 r_0 \sigma^2}{c^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x_1} e^{-2x_1 \omega_\nu (a-r_0)/v} \left[ \frac{d}{d\omega} \ln \frac{s_2}{x_1} \Big|_{\omega=\omega_\nu} + \right. \\ \left. + \frac{s_2(b-a)}{v} \left( \frac{x_1}{s_2} + \frac{s_2}{x_1} \right) \right]^{-1}. \quad (14)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что мощность экспоненциально падает при увеличении  $(a-r_0)$ , т. е. излучение будет максимальным, когда  $a \sim r_0$ . Если среда 2 не обладает дисперсией, а среда 1 — вакуум, то ряд (14) легко суммируется и дает полную мощность излучения.

Если, наконец, возможно излучение в двух средах одновременно (случай в), то из дисперсионного уравнения

$$\frac{s_1}{s_2} \operatorname{tg} \frac{s_2 \omega_\nu}{v} (b-a) = -\operatorname{tg} \left( \frac{s_2 \omega_\nu}{v} a - \frac{\pi}{4} \right). \quad (15a)$$

получаем решение

$$\omega_\nu = \frac{v}{as_1 \alpha} \left\{ \left( \nu + \frac{1}{4} \right) \pi + \frac{a}{b} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \left[ 1 - \frac{s_1}{s_2} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ 1 + \frac{s_1}{s_2} \frac{a}{b} \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \left( 1 + \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{b-a}{a} \right) \right]^{-1} \right\} \\ (\nu = 1, 2, 3, \dots). \quad (15b)$$

Здесь

$$\alpha = 1 + \frac{s_2}{s_1} \frac{b-a}{a};$$



$$\begin{aligned}
 P = & -\frac{8\pi^2 r_0 \sigma^2}{c^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} s_1^{-1} \sin^2\left(\frac{s_1 \omega_\nu}{v} r_0 - \frac{\pi}{4}\right) \left\{ 1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{s_1 \omega_\nu a}{v} - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \times \\
 & \times \left\{ \operatorname{ctg}\left(\frac{\omega_\nu s_1 a}{v} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{d}{d\omega} \ln \frac{s_2}{s_1} \Big|_{\omega=\omega_\nu} + \frac{s_1 a}{v} \left[ 1 + \frac{s_2^2}{s_1^2} \frac{b-a}{a} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{b}{a} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{s_1 \omega_\nu a}{v} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\}^{-1}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Ограничение на порядок  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  в приведенных выше формулах не является принципиальным. Для  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  разных порядков анализ легко проводится подобным же методом.

4. В заключение можно заметить, что если кольцо с током имеет отличный от нуля заряд, то такая система будет излучать и  $E$ -волны. Спектр этих волн не отличается от спектра излучения заряда, летящего по оси волновода с диэлектриком (см., например, [2]). Интенсивность излучения, связанная с зарядом кольца, отличается от интенсивности одного заряда, летящего по оси волновода, на форм-фактор  $J_0^2\left(\frac{\omega}{v} s_1 r_0\right)$

или  $J_0^2\left(\frac{\omega}{v} \kappa_1 r_0\right)$  в числителе.

Авторы весьма признательны В. И. Векслеру за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M. Abele, Nuovo Cimento. Suppl., 9, 207 (1952) (перевод в сб. Миллиметровые и субмиллиметровые волны, ИЛ, М., 1959).
2. Б. М. Болотовский, УФН, 75, 295 (1961).

Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию  
16 ноября 1963 г.

#### THE RADIATION OF THE CURRENT RING IN A WAVEGUIDE

*I. N. Ivanov, V. I. Kotov*

The problem is solved of the radiation of the current ring, moving uniformly along the waveguide axis, the dielectric properties of which change sharply at some value of the radius  $A$ . Formulae for the radiating power have been obtained and analysed.

УДК 621.391.17 ; 621 375.93

## РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УСТРОЙСТВО СВЯЗИ С БЫСТРОЙ ЦИКЛОТРОННОЙ ВОЛНОЙ

*А. С. Рошаль, В. С. Попов*

Исследуются частотные характеристики и оценивается величина полосы согласования устройства связи с бегущей циклотронной волной для электроннолучевых параметрических усилителей. Показано, что устройство является широкополосным только в случае, если эквивалентная линия обладает соответствующей дисперсией. Наличие потерь в линии ухудшает отношение сигнал/шум на выходе из устройства связи.

Распределенные устройства связи с быстрой циклотронной волной электронного потока уже рассматривались в литературе [1-3]. Однако оценка полосы частот, в которой вводится сигнал и удаляются входные шумы потока, в работах [1-3] отсутствует, хотя авторы полагают, что подобные системы должны быть широкополосными. Это мнение отрицается в кратком сообщении [4], которое, однако, не содержит соответствующих расчетов.

В настоящей статье исследуются частотные характеристики и оценивается ширина полосы согласования (удаления шума) распределенного устройства связи с быстрой циклотронной волной. Под полосой согласования здесь понимается область частот, в которой не менее половины входной мощности сигнала переходит в электронный поток, под полосой удаления шума — область частот, в которой входные шумы потока ослабляются по заданному уровню, указанному в конкретных случаях. Устройство представляется в виде эквивалентной линии рис. 1, где

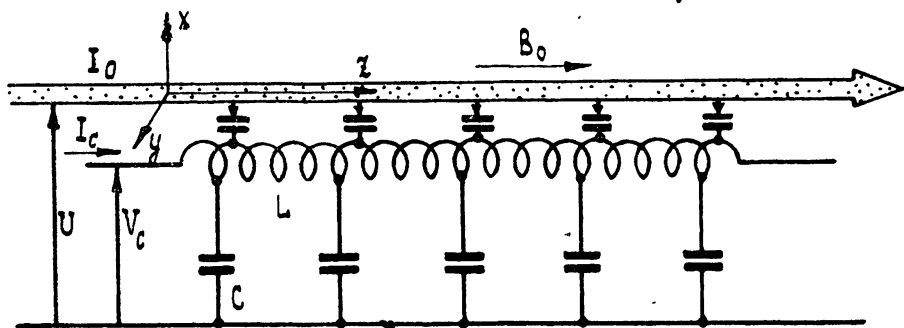


Рис. 1. Эквивалентная схема распределенного устройства связи ( $L, C$  — индуктивность и емкость единицы длины линии).

$L, C$  — индуктивность и емкость единицы длины линии,  $I_c, V_c$  — ток и напряжение линии. Предполагается, что поле, создаваемое линией, линейно поляризовано ( $E_y = 0, E_z = 0, E_x \neq 0$ ), пространственный заряд отсутствует, луч является бесконечно тонким.

### 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ПОТОКЕ И ЛИНИИ

В предположении, что все переменные величины изменяются пропорционально  $\exp(j\omega_s t)$ , где  $\omega_s$  — частота в спектре шума (сигнала),

можно записать уравнения для амплитуд переменных величин в потоке и в линии в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dz} &= -j\beta_e v_x - \beta_c v_y - \frac{\eta}{u_0} E_x \quad \left( \beta_e = \frac{\omega_s}{u_0}, \quad \beta_c = \frac{\omega_c}{u_0} \right); \\ \frac{dv_y}{dz} &= \beta_c v_x - j\beta_e v_y - \frac{\eta}{u_0} E_y \quad \left( \omega_c = \eta B_0, \quad \eta = \frac{|e|}{m} \right); \\ \frac{dx}{dz} &= -j\beta_e x + \frac{1}{u_0} v_x; \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{1}{u_0} v_y - j\beta_e y; \\ \frac{dV_c}{dz} &= -j\beta_n Z_n I_c; \\ \frac{dI_c}{dz} &= -j\beta_n Z_n^{-1} V_c - \frac{di_n}{dz}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $v_x, v_y, x, y$  — поперечные скорости и координаты бесконечно тонкого луча,  $u_0$  — постоянная скорость,  $Z_n$  — характеристическое сопротивление линии,  $di_n$  — наведенный ток на отрезке  $dz$  линии,  $E_x, E_y$  — переменная напряженность поля:

$$E_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (2)$$

$U$  — переменное напряжение в области луча.

Будем полагать, что  $E_y \equiv 0$ , а

$$U = \Phi V_c, \quad (3)$$

где  $\Phi$  — некоторая функция координат. Отсюда

$$E_x = \Phi' V_c, \quad \Phi' \equiv \partial \Phi / \partial x. \quad (4)$$

Для наведенного тока может быть получено следующее выражение [3]:

$$\frac{di_n}{dz} = j \omega_s \Phi'(0) \frac{|I_0|}{u_0} x, \quad (5)$$

$\Phi'(0)$  — значение  $\Phi'$  на оси  $z$ ,  $I_0$  — постоянный ток луча.

Уравнение (1) удобнее преобразовать к собственным волнам потока и линии:

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \gamma_1 (v_x \pm jv_y), \quad a_3 = a_1 - j\omega_c \gamma_1 (x + jy), \\ a_{5,6} &= \gamma_2 (V_c \pm Z_n I_c), \quad a_4 = a_2 + j\omega_c \gamma_1 (x - jy), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{|I_0| \omega_s}{8 \eta \omega_c}}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{8 Z_n}}. \quad (7)$$

Здесь  $a_1, a_2$  — быстрая и медленная циклотронные волны,  $a_3, a_4$  — синхронные волны,  $a_5, a_6$  — прямая и обратная волны линии,  $\gamma_1, \gamma_2$  — нормирующие множители, выбранные так, что  $|a_i|^2$  представляет собой мощность, переносимую волной  $a_i$ . Обратную волну в линии можно опустить, поскольку она далека от синхронизма с волнами луча. После этого получаем уравнения собственных волн потока и линии в виде

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dz} &= -j\beta_- a_1 + \sqrt{\omega} \beta_c k a_5; \\ \frac{da_2}{dz} &= -j\beta_+ a_2 + \sqrt{\omega} \beta_c k a_5 \quad (\beta_{\mp} = \beta_e \mp \beta_c); \\ \frac{da_3}{dz} &= -j\beta_e a_3 + \sqrt{\omega} \beta_c k a_5; \\ \frac{da_4}{dz} &= -j\beta_e a_4 + \sqrt{\omega} \beta_c k a_5; \\ \frac{da_5}{dz} &= -\sqrt{\omega} \beta_c k (a_1 - a_2 - a_3 + a_4) - j\beta_n a_5. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\omega \equiv \omega_s/\omega_c$  — относительная частота,  $k$  — коэффициент связи, определяемый соотношением

$$\beta_c k = \Phi'(0) \sqrt{G_0 Z_n/8}, \quad (9)$$

$G_0 = |I_0|/U_0$  — проводимость по постоянному току.

Отыскивая решение системы (8) в виде  $\exp(-j\beta z)$ , с помощью подстановок

$$\beta = \beta_e - \mu\beta_c, \quad \beta_n = \beta_e - b\beta_c \quad (10)$$

приводим характеристическое уравнение системы к уравнению относительно  $\mu$ :

$$\mu^2 [(\mu - a)(\mu + 1)(\mu - b) - 2\omega k^2] = 0. \quad (11)$$

В реальных системах имеют место слабые связи:  $2\omega k^2 \ll 1$ . При этом приближенные корни уравнения (11)\*

$$\mu_{3,4} = 0, \quad \mu_{1,5} \simeq \frac{1+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-b}{2}\right)^2 + \omega k^2}, \quad \mu_2 \simeq -1 + \frac{\omega k^2}{1+b}, \quad (12)$$

т. е. корни  $\mu_1, \mu_2, \mu_5$  близки соответственно к  $1, -1, b$ . При отсутствии связи ( $k=0$ )  $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1, \mu_5 = b$ .

Решение (8) имеет вид

$$a_i(z) = \sum_{r=1}^5 M_{ir}(z) a_{r0} \quad (i = 1, 2, \dots, 5), \quad (13)$$

где  $a_{r0}$  ( $r = 1, 2, \dots, 5$ ) — амплитуды волн на входе в систему ( $z = 0$ ), или

$$a(z) = M(z) a_0, \quad M(z) \equiv \| M_{ir}(z) \|, \quad (14)$$

где  $a = (a_1, \dots, a_5)'$  — вектор собственных волн,  $M(z)$  — матрица системы. Распространение быстрой циклотронной волны потока и прямой волны линии описывается формулами

$$a_1(\psi, \omega) = \sum_{r=1}^5 M_{1r}(\psi, \omega) a_{r0}(\omega), \quad a_5(\psi, \omega) = \sum_{r=1}^5 M_{5r}(\psi, \omega) a_{r0}(\omega), \quad (15)$$

причем  $\psi = \beta_c z$  — пролетный угол в радианах циклотронной частоты. Для интересующих нас элементов матрицы  $M$  находим\*

\* Формулы (16) — (20) могут быть проще всего получены с помощью теории вычетов [3]. Решение с помощью матричных методов приводится, например, в [5]

$$M_{11}(\psi, \omega) = -e^{-j\omega\psi} \left[ \frac{(\mu_1 + 1)(\mu_1 - b) + \omega k^2}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_2 - \mu_1)} e^{j\mu_1\psi} + \right. \\ \left. + \frac{(\mu_5 + 1)(\mu_5 - b) + \omega k^2}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_5 - \mu_2)} e^{j\mu_5\psi} + \frac{(\mu_2 + 1)(\mu_2 - b) + \omega k^2}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_5 - \mu_2)} e^{j\mu_2\psi} \right]; \quad (16)$$

$$M_{12}(\psi, \omega) = -\omega k^2 e^{-j\omega\psi} \left[ \frac{e^{j\mu_1\psi}}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_2 - \mu_1)} + \right. \\ \left. + \frac{e^{j\mu_5\psi}}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_5 - \mu_2)} + \frac{e^{j\mu_2\psi}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_5 - \mu_2)} \right]; \quad (17)$$

$$M_{13}(\psi, \omega) = -\omega k^2 e^{-j\omega\psi} \left[ \frac{(\mu_1 + 1)e^{j\mu_1\psi}}{\mu_1(\mu_1 - \mu_5)(\mu_2 - \mu_1)} + \right. \\ \left. + \frac{(\mu_5 + 1)e^{j\mu_5\psi}}{\mu_5(\mu_1 - \mu_5)(\mu_5 - \mu_2)} + \frac{(\mu_2 + 1)e^{j\mu_2\psi}}{\mu_2(\mu_2 - \mu_1)(\mu_5 - \mu_2)} + \frac{1}{\mu_1\mu_2\mu_5} \right] = M_{14}(\psi, \omega); \quad (18)$$

$$M_{15}(\psi, \omega) = j\sqrt{\omega} k e^{-j\omega\psi} \left[ \frac{(\mu_1 + 1)e^{j\mu_1\psi}}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_2 - \mu_1)} + \right. \\ \left. + \frac{(\mu_5 + 1)e^{j\mu_5\psi}}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_5 - \mu_2)} + \frac{(\mu_2 + 1)e^{j\mu_2\psi}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_5 - \mu_2)} \right] = -M_{51}(\psi, \omega); \quad (19)$$

$$M_{55}(\psi, \omega) = -e^{-j\omega\psi} \left[ \frac{(\mu_1^2 - 1)e^{j\mu_1\psi}}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_2 - \mu_1)} + \frac{(\mu_5^2 - 1)e^{j\mu_5\psi}}{(\mu_1 - \mu_5)(\mu_5 - \mu_2)} + \right. \\ \left. + \frac{(\mu_2^2 - 1)e^{j\mu_2\psi}}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_5 - \mu_2)} \right]. \quad (20)$$

При  $\psi = 0$ , т. е. на входе в систему

$$M_{11}(0, \omega) = M_{55}(0, \omega) = 1, \quad M_{12}(0, \omega) = M_{13}(0, \omega) = \\ = M_{14}(0, \omega) = M_{15}(0, \omega) = M_{51}(0, \omega) = 0,$$

т. е. быстрая циклотронная волна шума находится в потоке, а сигнал— в линии.

## 2. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Определим, прежде всего, условия, при которых вся мощность шума быстрой циклотронной волны, имеющаяся на входе, переходит в линию—так называемые условия «минимума Компфнера». Эти условия находятся из комплексного уравнения

$$M_{11}(\psi_0, b_0, \bar{\omega}) = 0, \quad (21)$$

где  $\psi_0$ ,  $b_0$  — искомые параметры,  $\bar{\omega}$  — частота, для которой отыскиваются условия минимума,  $M_{11}$  дается формулой (16). Приближенное решение (21) с точностью до членов  $\sim \sqrt{\bar{\omega} k}$  дает

$$b_0 = 1, \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{\bar{\omega} k}} (2n + 1), \quad \bar{k} \equiv k(\bar{\omega}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Наименьшее значение длины  $\psi_0$  будет при  $n = 0$ . Таким образом\*,

$$b_0 = 1, \quad (22)$$

$$\Psi_0 = \frac{1}{4 \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}}}, \quad (23)$$

где  $\Psi_0$  — количество циклотронных волн, укладываемых вдоль системы:  $\Psi_0 = \psi_0/2\pi$ .

Из (10), (22) видно, что на частоте  $\bar{\omega}$  имеет место полный синхронизм волны холодной системы и быстрой циклотронной волны:  $\beta_+ = \beta_-$ . Очевидно, эффективная работа входного устройства возможна только при  $\bar{\omega} \neq 1$ , так как при  $\bar{\omega} = 1$  должно быть  $\beta_+ = \beta_- = 0$ , что не имеет места в реальных линиях при конечных  $L, C$ . При  $\bar{\omega} > 1$   $\beta_- > 0$ , так что осуществляется взаимодействие прямой волны системы и прямой быстрой циклотронной волны, при  $\bar{\omega} < 1$  — взаимодействие обратных волн\*\*. Соответствующие фазовые скорости волн:

$$v_{\phi 1} = u_0 \left( 1 - \frac{1}{\bar{\omega}} - \frac{\bar{k}}{\sqrt{\bar{\omega}}} \right)^{-1}, \quad v_{\phi 5} = u_0 \left( 1 - \frac{1}{\bar{\omega}} + \frac{\bar{k}}{\sqrt{\bar{\omega}}} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Обычно полагают, что на входе в систему (на выходе из электронной пушки)  $v_{x0}, v_{y0}, x_0, y_0$  не коррелированы между собой, а их спектральные плотности

$$|\overline{v_{x0}(\omega)}|^2 = |\overline{v_{y0}(\omega)}|^2 = \omega_{01}(\omega), \quad |\overline{x_0(\omega)}|^2 = |\overline{y_0(\omega)}|^2 = \omega_{03}(\omega)$$

(черта означает усреднение по ансамблю реализаций процесса)\*\*\*. Тогда спектральная плотность быстрой циклотронной волны в потоке дается выражением

$$\begin{aligned} \overline{|a_1(\psi, \omega)|^2} = & [ |M_{11}(\psi, \omega)|^2 + |M_{12}(\psi, \omega)|^2 + 2 \operatorname{Re} M_{11}(\psi, \omega) M_{13}^*(\psi, \omega) + \\ & + 2 \operatorname{Re} M_{14}(\psi, \omega) M_{14}^*(\psi, \omega) ] s_{01} + [ |M_{13}(\psi, \omega)|^2 + |M_{14}(\psi, \omega)|^2 ] s_{03} + \\ & + |M_{15}(\psi, \omega)|^2 s_{05}, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$s_{01} = 2 \gamma_1^2 \omega_{01} = |\overline{a_{10}}|^2, \quad s_{03} = 2 \gamma_1^2 (\omega_{01} + \omega_c^2 \omega_{03}) = |\overline{a_{30}}|^2, \quad s_{05} = |\overline{a_{50}}|^2. \quad (26)$$

При  $\omega = \bar{\omega}$ ,  $b_0 = 1$  и  $\mu_{1,5} \simeq 1 \pm \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}}$ ,  $\mu_2 \simeq -1$  находим для матричных элементов

$$M_{11}(\psi, \bar{\omega}) = e^{-j \bar{\omega} \psi} \cos \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}} \psi, \quad |M_{11}|^2 = \cos^2 \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}} \psi, \quad (27)$$

$$M_{12}(\psi, \bar{\omega}) = -j \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}} e^{-j \bar{\omega} \psi} \sin \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}} \psi, \quad |M_{12}|^2 = \bar{\omega} \bar{k} \sin^2 \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}} \psi, \quad (28)$$

$$M_{13}(\psi, \bar{\omega}) = -j \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}} e^{-j \bar{\omega} \psi} \sin \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}} \psi = M_{14}, \quad |M_{13}|^2 = \bar{\omega} \bar{k} \sin^2 \sqrt{\bar{\omega} \bar{k}} \psi, \quad (29)$$

\* Выражение (23) совпадает с аналогичной формулой Джонсона [1] и отличается от формулы Чакраборти [3]. Результаты [3] не совпадают также с результатами Сигмана [2] и являются сомнительными.

\*\* При этом в системе (8) следовало сохранить волну  $a_6$  вместо  $a_5$ . Устройство связи на обратной волне здесь не рассматриваем.

\*\*\* Спектральные плотности  $\omega_{01}, \omega_{03}$  вычислены, например, в [6].

$$M_{15}(\psi, \bar{\omega}) = e^{-i\bar{\omega}\psi} \sin \sqrt{\bar{\omega}k}\psi = -M_{51}, \quad |M_{15}|^2 = |M_{51}|^2 = \sin^2 \sqrt{\bar{\omega}k}\psi, \quad (30)$$

$$M_{55}(\psi, \bar{\omega}) = e^{-i\bar{\omega}\psi} \cos \sqrt{\bar{\omega}k}\psi, \quad |M_{55}|^2 = \cos^2 \sqrt{\bar{\omega}k}\psi, \quad (31)$$

$$M_{11}(\psi, \bar{\omega}) M_{13}^*(\psi, \bar{\omega}) = j \sqrt{\bar{\omega}k} \cos \sqrt{\bar{\omega}k}\psi \sin \sqrt{\bar{\omega}k}\psi, \quad 2\text{Re} M_{11} M_{13}^* = 0 \quad (32)$$

( $\bar{\omega}_- \equiv \bar{\omega} - 1$ ). Выражения (27)–(32) характеризуют изменение матричных элементов вдоль системы на частоте  $\bar{\omega}$ . При  $\psi = \psi_0 = \pi / (2 \sqrt{\bar{\omega}k})$   $|M_{11}(\psi_0, \bar{\omega})|^2 = 0$ , т. е. быстрая циклотронная волна входного шума полностью удаляется из потока, а  $|M_{15}(\psi_0)|^2 = 1$ ,  $|M_{55}(\psi_0)|^2 = 0$ , так что сигнал полностью переходит в быструю циклотронную волну. Из  $|M_{51}(\psi_0)|^2 = 1$  также следует, что шум быстрой циклотронной волны перешел на длине  $\psi_0$  в линию. Поскольку  $|M_{13}(\psi_0)|^2 = \bar{\omega}k^2$ , энергетический взаимообмен между быстрой циклотронной волной и медленной пропорционален  $\bar{\omega}k^2$ . Эта величина обычно очень мала ( $\sim 10^{-3} \div 10^{-5}$ ). Из (32) следует, что шум, вносимый синхронными волнами, вообще говоря, пропорционален  $\sqrt{\bar{\omega}k}$ , но в середине полосы  $\bar{\omega}$  синхронные волны вносят ту же величину шума, что и медленная циклотронная волна (см. (30), (32)).

Если в (12)  $(1-b)^2 \gg 4\omega k^2$ , то  $\mu_1 \simeq 1$ ,  $\mu_5 \simeq b$ ,  $\mu_2 \simeq -1$ , поскольку членами порядка  $\omega k^2$  можно пренебречь. При этом волны практически не связаны. Можно полагать, что заметная связь волн потока и линии имеется в области частот, при которых величины, стоящие под корнем в (12), одного порядка:

$$\left[ \frac{1-b(\omega)}{2} \right]^2 \simeq \omega k^2(\omega) \simeq \bar{\omega} k^2(\omega) \quad (33)$$

( $\bar{\omega}$  — средняя частота полосы). Из (33) можно приближенно оценить полосу устройства связи с известными дисперсионными характеристиками  $\beta_L(\omega)$ ,  $Z_L(\omega)$ .

Так, для линии без дисперсии  $\beta_L = \omega_s \sqrt{LC} = \beta_e - b\beta_e$ ,  $Z_L = \sqrt{L/C} = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ , причем на частоте  $\omega = \bar{\omega}$  должно быть  $b = b_0 = 1$ . Отсюда находим частотную зависимость  $b$ :

$$b(\omega) = \omega / \bar{\omega}. \quad (34)$$

Из (33), (34) получаем приближенную оценку полосы связи:

$$\frac{\omega_{\text{макс}} - \omega_{\text{мин}}}{\bar{\omega}} \simeq 2 \frac{\omega_{\text{макс}} - \bar{\omega}}{\bar{\omega}} \simeq 4 \sqrt{\bar{\omega}k} = \frac{1}{\Psi_0}, \quad (35)$$

где  $\omega_{\text{макс}}$ ,  $\omega_{\text{мин}}$  — граничные частоты. В практических случаях это величина порядка нескольких процентов.

Если линия обладает благоприятной дисперсией и условия (22), (23) выполняются для всех частот в некоторой полосе  $\Delta\omega$ , то во всей этой полосе входной шум быстрой циклотронной волны полностью удаляется из потока, а сигнал из линии полностью переходит в поток. Очевидно, в диапазоне  $\Delta\omega$  фазовая постоянная  $\beta_L$  и сопротивление связи  $Z_L$  должны изменяться с частотой так, что

$$\beta_L(\omega_s) = \beta_-(\omega_s), \quad Z_L(\omega_s) \sim 1/\omega_s. \quad (36)$$

Квадрупольный усилитель с распределенным входным устройством

обладает некоторыми особенностями. Как показано, например, в [5], условием усиления здесь является

$$\omega_s + \omega_i = 2\omega_c + \beta_p u_0, \quad (37)$$

где  $\omega_i$  — разностная частота,  $\beta_p$  — постоянная распространения накачки. Если  $\beta_p = 0$ , то усилитель может работать лишь в невырожденном режиме ( $\omega_s \neq \omega_i \neq \omega_c$ ), поскольку средняя частота полосы  $\bar{\omega} = \omega_s/\omega_c$  должна быть всегда отлична от 1, как указывалось выше\*. При  $\omega_s > \omega_i$  ( $1 < \bar{\omega} < 2$ ), согласно соотношениям Мэнли-Роу, большая часть шума холостой волны  $\omega_i$  перейдет в квадруполь в волну сигнала, так что этот режим неблагоприятен для получения минимального коэффициента шума.

Если  $\omega_s < \omega_i$  ( $0 < \bar{\omega} < 1$ ), шум с частоты сигнала переходит на разностную частоту, что позволяет уменьшить коэффициент шума; однако при этом осуществляется взаимодействие обратной волны системы и обратной быстрой циклотронной волны, которое здесь не рассматривается. Как показано в [7], при  $\omega_s \neq \omega_c$  сказывается разброс продольных скоростей электронов  $u_0$ , и коэффициент шума усилителя ухудшается. Если  $\beta_p \neq 0$  (скрученный квадруполь), то возможен вырожденный режим ( $\omega_s = \omega_i$ ). При использовании обычного квадруполя ( $\beta_p = 0$ ) и  $\bar{\omega} < 1$  вырожденный режим можно осуществить путем увеличения циклотронной частоты в области квадруполя до величины  $\omega_s$  с помощью дополнительного соленоида.

### 3. ВЛИЯНИЕ ПОТЕРЬ В ЛИНИИ

В случае линии с потерями будем полагать

$$\beta_n = \beta_e - b\beta_c - j\zeta\beta_c, \quad (38)$$

причем коэффициент затухания  $\zeta$  может зависеть от частоты. Потери в децибелах на циклотронную длину волны

$$L_1 = 20 (2\pi) \lg e \zeta = 54,5 \zeta. \quad (39)$$

Полные холодные потери в линии длиной  $\Psi_0$ , очевидно, составляют

$$\zeta_0 = L_1 \Psi_0 = 54,5 \zeta \Psi_0 \text{ (дБ)}. \quad (40)$$

Считая, по-прежнему, что на частоте  $\bar{\omega}$  имеется полный синхронизм волны холодной системы и быстрой циклотронной волны, т. е.  $b = b_0 = 1$ , находим

$$\mu_{1,5} \simeq 1 + \frac{j\zeta}{2} \pm \sqrt{\bar{\omega} k^2 (1 - \varepsilon^2)}; \quad (41)$$

$$M_{11}(\psi, \bar{\omega}) \simeq e^{-j\bar{\omega}\psi} e^{-(1/2)\zeta\psi} \left( \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin \theta \right); \quad (42)$$

$$M_{15}(\psi, \bar{\omega}) \simeq e^{-j\bar{\omega}\psi} e^{-(1/2)\zeta\psi} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin \theta, \quad (43)$$

\* Вблизи  $\bar{\omega} \simeq 1$  фазовая скорость быстрой циклотронной волны быстро меняется, и линия должна обладать сильной дисперсией. При  $\bar{\omega} = 1$  фазовая скорость быстрой циклотронной волны меняет знак. Если  $\bar{\omega}$  значительно больше 1, необходимая дисперсия в линии уменьшается; однако абсолютная величина полосы частот, в которой фазовые скорости волн должны совпадать, увеличивается.



где

$$\bar{\omega}_- = \bar{\omega} - 1,$$

$$\varepsilon = \frac{\zeta}{2\sqrt{\bar{\omega}\bar{k}}} = 2\zeta\Psi_{00}, \quad \Psi_{00} = \frac{1}{4\sqrt{\bar{\omega}\bar{k}}}, \quad \theta = \sqrt{\bar{\omega}\bar{k}^2(1-\varepsilon^2)}\psi, \quad (44)$$

$\Psi_{00}$  — необходимая длина линии при отсутствии затухания (23).

С помощью (42) определим длину линии  $\psi_0$ , при которой имеет место первый минимум Компфнера, т. е.  $M_{11}(\psi_0, \bar{\omega}) = 0$ :

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\bar{\omega}\bar{k}^2(1-\varepsilon^2)}\psi_0\right) = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}. \quad (45)$$

В случае  $\varepsilon^2 \ll 1$

$$\Psi_0 \simeq \Psi_{00}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{\pi}\right) = \Psi_{00}\left(1 + \frac{4\zeta}{\pi}\Psi_{00}\right), \quad (46)$$

т. е. длина энергетического взаимодействия  $\Psi_0$  линейно возрастает с увеличением затухания  $\zeta$ . При  $\varepsilon^2 \rightarrow 1$

$$M_{11}(\psi, \bar{\omega}) \rightarrow e^{-j\bar{\omega}_-\psi} e^{-(1/2)\zeta\psi} \left(1 + \frac{1}{2}\zeta\psi\right)$$

и условия минимума выполняются лишь на бесконечности. Таким образом, критическая величина затухания

$$\zeta_{\text{крит}} = (2\Psi_{00})^{-1}. \quad (47)$$

Если при конструировании устройства связи длина линии была определена в предположении, что потери отсутствуют, то на выходе из системы при учете потерь ( $0 < \varepsilon^2 \ll 1$ ) будем иметь:

$$M_{11}(\psi_{00}, \bar{\omega}) \simeq \varepsilon e^{-j\bar{\omega}_-\psi_{00}} e^{-(1/2)\zeta\psi_{00}}, \quad |M_{11}(\psi_{00}, \bar{\omega})| \simeq \varepsilon e^{-(1/2)\zeta\psi_{00}},$$

т. е. небольшая доля входного шума быстрой циклотронной волны еще остается в луче.

Быстрая циклотронная волна сигнала на выходе из устройства связи при  $\omega = \bar{\omega}$ , согласно (43), имеет вид

$$M_{15}(\psi_0, \bar{\omega}) \simeq e^{-j\bar{\omega}_-\psi_0} e^{-(1/2)\zeta\psi_0}, \quad |M_{15}(\psi_0, \bar{\omega})|^2 \simeq e^{-\zeta\psi_0} = e^{-2\pi\zeta\Psi_0}. \quad (48)$$

Затухание волны сигнала  $|M_{15}|^2$  в линии

$$\zeta_s = 10 \lg e^{2\pi\zeta\Psi_0}(\delta b) = 27,25\zeta\Psi_0(\delta b) = \frac{1}{2}\zeta_0, \quad (49)$$

т. е. равняется половине холодных потерь. На эту же величину уменьшается отношение сигнал/шум на выходе из устройства связи\*.

Порядок встречающихся величин можно оценить следующим образом. Если  $E_x$  слабо зависит от  $x$ , то  $\Phi' \simeq 1/d$ , где  $d$  — ширина зазора (в направлении  $x$ )\*\*. Тогда из (23), (9) находим

$$\frac{\Psi_0}{\delta} \simeq \pi \sqrt{\frac{2}{\bar{\omega}G_0Z_L}}, \quad (50)$$

\* Это совпадает с результатами Чжана, о которых упоминается в кратком сообщении [4]. При  $\omega_s \neq \omega_c$  отношение сигнал/шум уменьшается также вследствие разброса продольных скоростей [8].

\*\* Для более точных расчетов  $\Phi'$  можно использовать [9].

где  $\delta = \beta_c d/2\pi$  — ширина зазора в циклотронных длинах волн. Для случая  $I_0 = 100$  мка,  $U_0 = 10$  в,  $\bar{\omega} = 2$ ,  $Z_n = 400$  ом получаем  $\Psi_0/\delta = 50$ , т. е. длина зазора в 50 раз превышает поперечный размер. Если  $\zeta = 0,002$ , т. е.  $L_1 \approx 0,11$  дБ на длину волны, и  $\Psi_0 = 50$ , ожидаемая потеря составляет около 2%, холодные потери  $\zeta_0 = 5,5$  дБ, а отношение сигнал/шум уменьшается вследствие потерь на 2,7 дБ. Последнее равносильно увеличению шумовой температуры.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Численные расчеты были выполнены на электронно-вычислительной машине. Рассматривался только случай линии без дисперсии и потерь. Для заданной середины полосы  $\bar{\omega}$  и коэффициента связи  $k$  вычислялась необходимая длина линии  $\Psi_0$  по формуле (23), а затем исследовалась зависимость от  $\omega$  матричных элементов (16) — (20) на выходе из устройства связи:  $M_{11}(\psi_0, \omega)$ ,  $M_{12}(\psi_0, \omega)$  и т. д. При этом для каждой частоты  $\omega$  находились  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , которые являются корнями кубического уравнения

$$(\mu - 1)(\mu + 1)\left(\mu - \frac{\omega}{\bar{\omega}}\right) - 2\omega k^2 = 0. \quad (51)$$

Типичные графики представлены на рис. 2, 3. Как видно из рисунков,  $M_{11}(\psi_0, \omega) \approx 0$ , так что найденные приближенно значения  $b_0 = 1$  и  $\Psi_0$  (23) очень мало отличаются от точных корней уравнения (21). По-

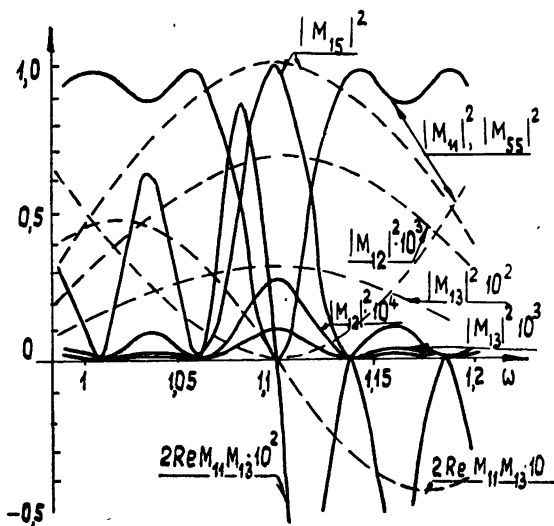


Рис. 2. Частотные характеристики важнейших матричных элементов на выходе из распределенного устройства связи (дисперсия в линии отсутствует;  $\bar{\omega} = 1,1$ ): —  $k = 0,01$ ; - - -  $k = 0,05$

скольку  $|M_{15}(\psi_0, \bar{\omega})|^2 \approx 1$ , сигнал полностью перешел из линии в быструю циклотронную волну. Поскольку  $|M_{12}|^2, |M_{13}|^2$  и  $2|\text{Re } M_{11} M_{13}^*|$  много меньше единицы, шумы, вносимые медленной циклотронной и синхронными волнами, незначительны. Кривые  $|M_{11}(\psi_0, \omega)|^2$  и  $|M_{15}(\psi_0, \omega)|^2$  пересекаются вблизи значения  $|M_{11}|^2 = |M_{15}|^2 \approx 0,5$ , так что полоса согласования (по половинной мощности) совпадает с полосой удаления шума быстрой циклотронной волны по уровню 0,5 от

входного значения. По графикам можно также определить полосу удаления шума по любому уровню.

Как показывают расчеты, полоса согласования достаточно точно дается формулой

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \equiv \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega} = \frac{0,8}{\Psi_0} = 3,2\sqrt{\omega k}. \tag{52}$$

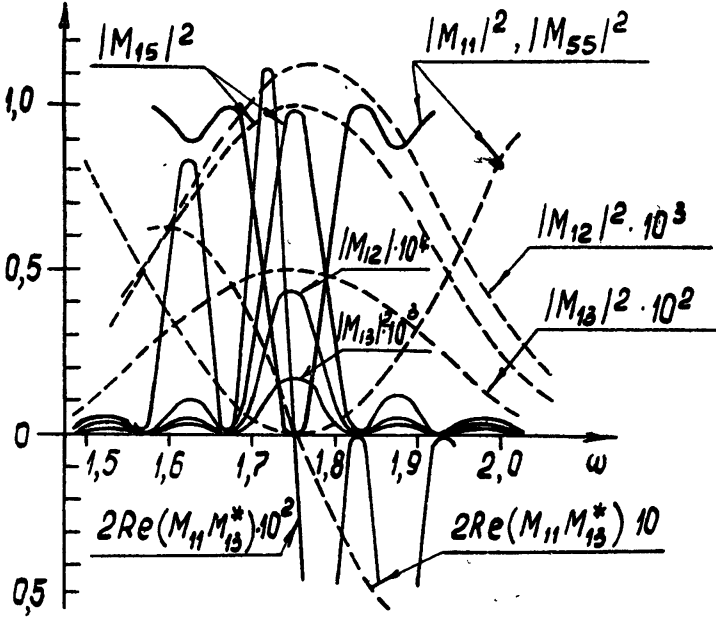


Рис. 3. Частотные характеристики основных матричных элементов на выходе из устройства связи (дисперсия отсутствует;  $\bar{\omega} = 1,75$ ); —  $k=0,01$ ; - - -  $k = 0,05$ .

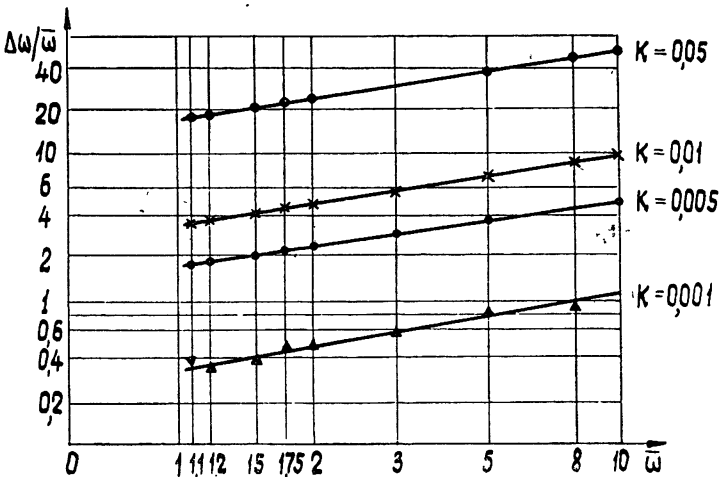


Рис. 4. Зависимость относительной ширины полосы согласования  $\Delta\omega/\omega$  (в процентах) от положения середины полосы  $\bar{\omega}$  для линии без дисперсии. Параметры  $\Psi_0, b_0$  линии определены из условия минимума Комффера.

Это значение близко к сделанной выше оценке (35). Полоса ослабления шума быстрой циклотронной волны по уровню 0,01 от входного значения примерно в  $6 \div 8$  раз меньше полосы согласования (52). На рис. 4 показаны полученные результаты для величины полосы согласования (в процентах) при различных  $\bar{\omega}$  и  $\bar{k}$ . На рисунке также нанесены прямые, отвечающие формуле (52) для указанных значений  $k$ . Как видно из рисунка, рассчитанные значения полосы (точки, крестики и т. п.) в пределах точности вычислений располагаются на соответствующих прямых.

Если распределенное устройство связи с быстрой циклотронной волной электронного потока представляется в виде линии без дисперсии, то такое входное устройство не отличается широкополосностью. Ширина полосы согласования такого устройства составляет  $0,8 \Psi_0^{-1}$ , где  $\Psi_0$  — необходимая длина линии в циклотронных длинах волн; таким образом, она близка к ширине полосы входных устройств резонаторного типа. Полоса удаления шума быстрой циклотронной волны в несколько раз меньше полосы согласования и зависит от требуемого уровня ослабления входного шума. Если линия обладает благоприятной дисперсией и в некоторой полосе частот фазовые скорости волны линии и быстрой циклотронной волны совпадают, возможно расширение полосы. Перекачка шума из медленной циклотронной волны в быструю пропорциональна  $(4\Psi_0)^{-2}$ . Энергетический обмен между быстрой циклотронной и синхронными волнами пропорционален  $(4\Psi_0)^{-1}$ , а в середине полосы  $\sim (4\Psi_0)^{-2}$ . Наличие собственных потерь в линии уменьшает отношение сигнал/шум на выходе из устройства связи на половину величины полных холодных потерь в линии.

Авторы приносят благодарность В. М. Лопухину за ценные указания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. C. C. Johnson J. Appl. Phys., 31, 338 (1960).
2. A. E. Siegman, J. Appl. Phys., 31, 17 (1960).
3. N. B. Chakraborty, J. Electronics Control, 10, 147 (1961).
4. N. C. Chang, Proc. IRE, 49, 637 (1961).
5. R. W. Gould, C. C. Johnson, J. Appl. Phys., 32, 248 (1961).
6. K. Blotekjaer, J. Appl. Phys., 33, 2409 (1962).
7. R. Adler, C. W. Hrbek, IEEE Trans., ED-10, 1 (1963).
8. E. J. Gordon, Proc. IRE, 49, 1208 (1961).
9. J. S. Cook, R. Kompfner, C. Quate, Bell Sys. Tech. J., 35, 127 (1956).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
8 июля 1963 г.

#### DISTRIBUTED COUPLER FOR FAST CYCLOTRON WAVE

A. S. Roshal', V. S. Popov

Frequency characteristics are investigated and the magnitude of the matching band (noise removal) is estimated of the coupling system with a travelling cyclotron wave for the electron-beam parametric amplifiers. The system is shown to be the broad-band one only if the equivalent line has the proper dispersion. The existence of the line losses decreases the signal to noise ratio at the output of the coupling system.

УДК 621.373.42.072.9

## К ВОПРОСУ О ПРИНУДИТЕЛЬНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ АВТОГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*В. П. Рубаник, П. Ф. Ярема*

Исследуются процессы принудительной синхронизации автогенератора с запаздывающей обратной связью в случае основного и дробного резонанса.

Как известно, при воздействии на автоколебательную систему внешней периодической силы с частотой, близкой к частоте автоколебаний (основной резонанс), или же с частотой, приблизительно кратной частоте автоколебаний (дробный резонанс), происходит процесс принудительной синхронизации или захватывания автоколебаний вынужденными колебаниями: автоколебания подавляются, а в системе возникают интенсивные периодические колебания с частотой внешней силы или же с частотой, в точности кратной частоте внешней силы и близкой к частоте автоколебаний. Вне области синхронизации вынужденные колебания существуют совместно с автоколебаниями, образуя квазипериодический режим биений. Явлению синхронизации автоколебаний посвящено много работ. Подробное исследование синхронизации при основном резонансе проведено в работах [1, 2] и др.; в статьях [3, 4] рассматривается синхронизация автогенератора при дробном резонансе.

В современной технике широкое применение находят автогенераторы с запаздыванием (ламповые генераторы с запаздывающей обратной связью, клистроны и др.). Процессы синхронизации автоколебаний в генераторах с запаздыванием рассматривались в ряде работ ([5-9] и др.). Во всех этих работах изучен лишь случай основного резонанса и сравнительно небольшого запаздывания (в пределах одного периода колебаний). Синхронизация автогенератора с очень большим запаздыванием, а также синхронизация автогенератора с запаздыванием при дробном резонансе до сих пор в литературе не рассматривалась. В настоящей статье мы рассмотрим принудительную синхронизацию автогенератора с запаздывающей обратной связью в случае очень большого запаздывания, а также в случае дробного резонанса.

Будем рассматривать простейший ламповый генератор с запаздывающей обратной связью, схема которого показана на рис. 1. Если пренебречь сеточным током и анодной реакцией, то вынужденные колебания такого генератора будут описываться дифференциально-разностным уравнением вида

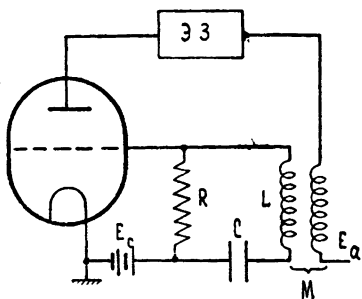


Рис. 1.

$$\begin{aligned}
 LC \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + RC \frac{dv(t)}{dt} + v(t) &= \\
 &= Ms[v(t - \delta)] \frac{dv(t - \delta)}{dt} + u_0 \cos(pt).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Предположим, что крутизна характеристики лампы выражается квадратным трехчленом

$$s[v] = s_0 + s_1 v - s_2 v^2, \quad s_0 > 0, \quad s_2 > 0. \tag{2}$$

Тогда заменой переменных уравнение (1) приводится к виду

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} + x(\tau) + \varepsilon \frac{dx(\tau)}{d\tau} &= \varepsilon a[1 + \beta x(\tau - \Delta) - \\
 &- x^2(\tau - \Delta)] \frac{dx(\tau - \Delta)}{d\tau} + b \cos(\nu\tau),
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр.

### 1. СЛУЧАЙ ОСНОВНОГО РЕЗОНАНСА И БОЛЬШОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Рассмотрим сначала синхронизацию автогенератора при основном резонансе ( $\nu \simeq 1$ ) и при очень большом относительном запаздывании  $\Delta$ . В этом случае, как показано в [10], автоколебания могут возбуждаться на нескольких частотах. По-видимому, это отразится и на процессах принудительной синхронизации.

В области синхронизации должен существовать устойчивый стационарный периодический режим колебаний с частотой внешней силы  $\nu$  и некоторым постоянным сдвигом фаз  $\varphi$ , который может быть равен и нулю. Чтобы исследовать не только стационарный режим, но и его устойчивость, будем рассматривать также режимы колебаний, близких к стационарным, предполагая, что амплитуда и дополнительная фаза колебаний могут медленно изменяться во времени. Решение уравнения (3) при таких предположениях будем искать приближенно с помощью метода усреднения в форме

$$x(\tau) \simeq a(\tau) \cos[\nu\tau + \varphi(\tau)]. \tag{4}$$

Если в случае небольшого запаздывания в процессе усреднения уравнений для амплитуды и фазы запаздывания последних можно опустить, то в случае большого запаздывания мы не можем это сделать, и усредненные уравнения для амплитуд и фаз будут также с запаздыванием:

$$\begin{aligned}
 \frac{da(\tau)}{d\tau} &= -\frac{\varepsilon a(\tau)}{2} + \frac{\varepsilon a a(\tau - \Delta)}{2} \cos[\varphi(\tau - \Delta) - \varphi(\tau) - \nu\Delta] \times \\
 &\times \left[ 1 - \frac{a^2(\tau - \Delta)}{4} \right] - \frac{b}{2\nu} \sin \varphi(\tau); \\
 \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} &= \frac{1 - \nu^2}{2\nu} + \frac{\varepsilon a a(\tau - \Delta)}{2a(\tau)} \sin[\varphi(\tau - \Delta) - \varphi(\tau) - \nu\Delta] \times \\
 &\times \left[ 1 - \frac{a^2(\tau - \Delta)}{4} \right] - \frac{b}{2\nu a(\tau)} \cos \varphi(\tau).
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Стационарные колебания или близкие к стационарным можно получить лишь в случае малого  $b$  и малой расстройки резонанса  $1 - \nu^2$ . Для получения стационарного режима колебаний положим, что

$$a(\tau) = a(\tau - \Delta) = a_c = \text{const}, \quad \varphi(\tau) = \varphi(\tau - \Delta) = \varphi_c = \text{const}.$$

Из этих условий получаем систему уравнений для определения  $a_c$  и  $\varphi_c$ :

$$\begin{aligned} -\nu a + \varepsilon \nu a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \cos(\nu \Delta) - b \sin \varphi &= 0; \\ (1 - \nu^2)a - \varepsilon \nu a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \sin(\nu \Delta) - b \cos \varphi &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

которая после исключения  $\varphi$  приводится к одному уравнению:

$$\begin{aligned} a^2 \left\{ (\nu^2 - 1)^2 + 2\varepsilon \alpha \nu \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) [(\nu^2 - 1) \sin(\nu \Delta) - \varepsilon \nu \cos(\nu \Delta)] - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 \nu^2 + \varepsilon^2 \alpha^2 \nu^2 \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^2 \right\} = b^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда определяем зависимость  $a$  от  $\nu$ , решая (7) приближенным методом при фиксированных значениях параметров.

Исследование устойчивости стационарных режимов проводим по уравнениям первого приближения. Для этого составляем систему уравнений в вариациях, соответствующую системе (5) с учетом уравнений стационарного режима (6), и для нее составляем характеристическое уравнение (трансцендентное):

$$\begin{aligned} D(\rho) = \rho^2 + \varepsilon \rho + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{(\nu^2 - 1)^2}{4\nu^2} - \varepsilon \alpha \cos(\nu \Delta) \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \rho e^{-\Delta \rho} + \\ + \frac{\varepsilon \alpha}{2} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \left[ \frac{\nu^2 - 1}{\nu} \sin(\nu \Delta) - \varepsilon \cos(\nu \Delta) \right] + \\ + \frac{\varepsilon^2 \alpha^2}{64} [3a^4 + 16(1 - a^2)] e^{-2\Delta \rho} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Исследование устойчивости стационарных режимов на основании уравнения (8) проводим методом  $D$ -разбиения [13] плоскости  $(\nu, a^2)$ .

Для получения границ области устойчивости мы должны положить в уравнении (8)  $\rho = i\beta$  и изменять  $\beta$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Однако для интересующей нас области значений  $\nu$ ,  $a^2$  достаточно ограничиться малыми значениями  $\beta$ , что несколько упрощает исследование.

Рассмотрим синхронизацию при определенных значениях параметров генератора и запаздывания обратной связи:

$$\varepsilon = 0,05, \quad \alpha = 3, \quad \Delta = 16\pi.$$

В этом случае можно показать, что при отсутствии внешней силы автогенератор имеет одночастотный режим колебаний с относительной частотой, близкой к единице. Картина принудительной синхронизации при различных значениях относительной амплитуды внешней силы:  $b = b_1 = 0,05$ ,  $b = b_2 = 0,1$ ,  $b = b_3 = 0,2$  показана на рис. 2. Области неустойчивых стационарных режимов заштрихованы. Области устойчивых синхронизованных колебаний лежат в достаточно узком интервале

частот, симметрично относительно  $\nu = 1$ . Для значений  $b = b_1$  и  $b = b_2$  существует по четыре ветви амплитудно-частотных кривых (соответственно 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8), из которых лишь по одной устойчивой (1 и 5). Для  $b = b_3$  получаем одну сложную кривую, охватывающую все предыдущие кривые, с небольшой устойчивой средней частью. Синхронизация

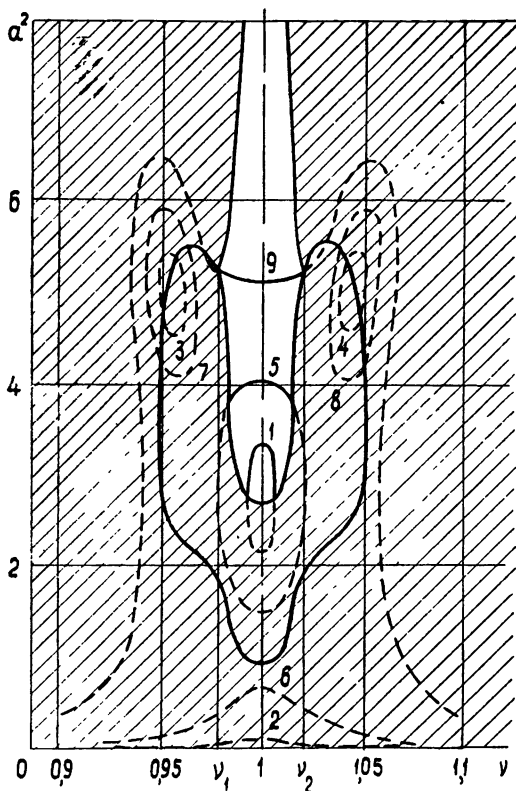


Рис. 2.

имеет место при любой амплитуде внешней силы, причем сначала с увеличением амплитуды внешней силы область синхронизации увеличивается, а при дальнейшем значительном увеличении амплитуд начинает уменьшаться. Это, по-видимому, обусловлено тем, что при очень больших амплитудах внешней силы автоколебания на основной частоте подавляются, но начинают возбуждаться колебания на боковых частотах, на которых они раньше не возбуждались (режим регенерации).

Возьмем теперь  $\Delta = 15\pi$  при тех же значениях  $\epsilon$  и  $\alpha$ . В этом случае можно показать, что при отсутствии внешних сил автоколебания могут возбуждаться на двух частотах, близких к единице, но несколько отличных от нее. Картина синхронизации в этом случае показана на рис. 3. Заштрихованы, как и раньше, области неустойчивых стационарных режимов. Здесь имеется не одна, а две области устойчивых стационарных режимов, между которыми лежит область неустойчивости. Амплитудно-частотные кривые строим для тех же значений  $b = b_1$ ,  $b = b_2$ ,  $b = b_3$ . Как и в предыдущем случае, для  $b = b_1$  и  $b = b_2$  получаем по четыре ветви амплитудно-частотных кривых (соответственно 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8), из которых уже по две устойчивых (1, 2 и 5, 6). Для  $b = b_3$  существует одна сложная кривая, которая имеет уже два устойчивых участка (9 и 10). Как и раньше, при малых амплитудах внешней силы происходит сначала увеличение областей синхронизации, а затем при дальней-



шем увеличении амплитуды внешней силы начинается уменьшение областей синхронизации. При приближении частоты внешней силы к единице амплитуды синхронизованных колебаний возрастают, а затем сразу становятся неустойчивыми. Это снова объясняется, по-видимому,

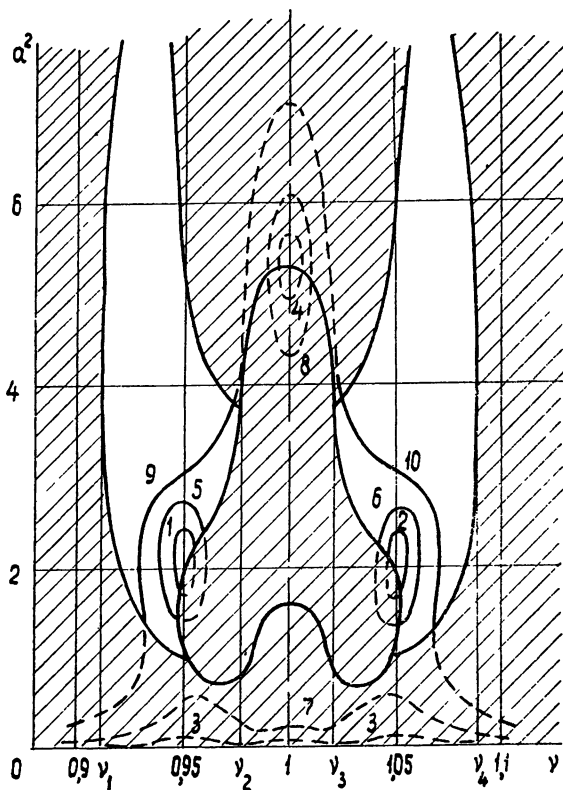


Рис. 3.

тем, что начинают возбуждаться автоколебания с частотой 1, которые раньше не возбуждались.

## 2. СЛУЧАЙ ДРОБНОГО РЕЗОНАНСА $\nu \approx 3$

В случае дробного резонанса указанного вида в области синхронизации наряду с колебаниями частоты внешней силы  $\nu$  должны возбуждаться колебания частоты  $\nu/3$ , которые захватывают автоколебания.

Решение уравнения (3) в случае дробного резонанса ищем в виде.

$$x(\tau) = \frac{b}{1 - \nu^2} \cos(\nu\tau) + a(\tau) \cos \left[ \frac{\nu\tau}{3} + \varphi(\tau) \right], \quad (9)$$

где  $a(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  должны быть постоянными или медленно изменяющимися функциями времени. Уравнения для амплитуд и фаз мы снова будем получать приближенно с помощью метода усреднения. При этом будем различать два случая: случай небольшого запаздывания (в пределах одного периода колебаний) и случай большого запаздывания (порядка нескольких периодов колебаний).

При небольшом запаздывании в усредненных уравнениях, как показано в работах [11, 12], можно опустить запаздывания у фаз и амплитуд. Запаздывание войдет в уравнения лишь в качестве параметра.

Тогда получаем приближенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \frac{\varepsilon a}{2} \left\{ \alpha \cos \frac{\nu \Delta}{3} \left[ 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{H^2(\nu)}{2} \right] - 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(2-\nu) H(\nu)a}{4} \cos \left( 3\varphi + \frac{\nu \Delta}{3} \right) \right\}; \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{9-\nu^2}{6\nu} - \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \alpha \sin \frac{\nu \Delta}{3} \left[ 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{H^2(\nu)}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(2-\nu) H(\nu)a}{4} \sin \left( 3\varphi + \frac{\nu \Delta}{3} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$H(\nu) = \frac{b}{1-\nu^2} \simeq -\frac{b}{8}.$$

Для определения стационарных синхронизованных режимов колебаний имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\alpha \left\{ \alpha \cos \frac{\nu \Delta}{3} \left[ 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{H^2(\nu)}{2} \right] - 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(2-\nu) H(\nu)a}{4} \cos \left( 3\varphi + \frac{\nu \Delta}{3} \right) \right\} = 0; \\ &\varepsilon \left\{ \alpha \sin \frac{\nu \Delta}{3} \left[ 1 - \frac{a^2}{4} - \frac{H^2(\nu)}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(2-\nu) H(\nu)a}{4} \sin \left( 3\varphi + \frac{\nu \Delta}{3} \right) \right\} = \frac{9-\nu^2}{6\nu}. \end{aligned} \quad (11)$$

Эта система имеет решение  $a = 0$ , которое нас не интересует. Для ненулевого решения из системы (11) после исключения  $\varphi$  получаем уравнение

$$\begin{aligned} a^4 + \left[ \frac{8(9-\nu^2)}{3\varepsilon\alpha\nu} \sin \frac{\nu \Delta}{3} + \nu(4-\nu) H^2(\nu) + \frac{8}{\alpha} \cos \frac{\nu \Delta}{3} - 8 \right] a^2 + \\ + \frac{16(9-\nu^2)^2}{9\varepsilon^2\alpha^2\nu^2} + \frac{16(9-\nu^2)(H^2-2)}{3\varepsilon\alpha\nu} \sin \frac{\nu \Delta}{3} + \\ + \frac{16[H^2(\nu)-2]}{\alpha} \cos \frac{\nu \Delta}{3} + 4[H^2(\nu)-2]^2 + \frac{16}{\alpha^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко разрешая уравнение (12) относительно  $a^2$ , находим зависимость  $a^2$  (или  $a$ ) от  $\nu$ .

Получаемые стационарные решения еще необходимо исследовать на устойчивость (по уравнениям первого приближения). Для этого составляем систему уравнений в вариациях, соответствующую системе (10); для нее составляем характеристическое уравнение и выписываем условия устойчивости Раута—Гурвица:

$$1 + \alpha \cos \frac{\nu \Delta}{3} \left[ \frac{a^2}{2} + \frac{H^2(\nu)}{2} - 1 \right] > 0;$$

$$\alpha^2 a^4 - \frac{16(9 - \nu^2)^2}{9\varepsilon^2 \nu^2} - \frac{16\alpha(9 - \nu^2) |H^2(\nu) - 2|}{3\varepsilon \nu} \sin \frac{\nu \Delta}{3} - 16\alpha |H^2(\nu) - 2| \cos \frac{\nu \Delta}{3} - 4\alpha^2 |H^2(\nu) - 2|^2 - 16 > 0. \quad (13)$$

Для сравнения рассмотрим сначала случай, когда запаздывание отсутствует, т. е.  $\Delta = 0$ . Пусть  $\varepsilon = 0,05$ ,  $\alpha = 3$ ; амплитуда внешней силы  $b = b_1 = 0,5$ ,  $b = b_2 = 1$ ,  $b = b_3 = 3$ .

На основании уравнения (12) получаем кривые, изображенные на

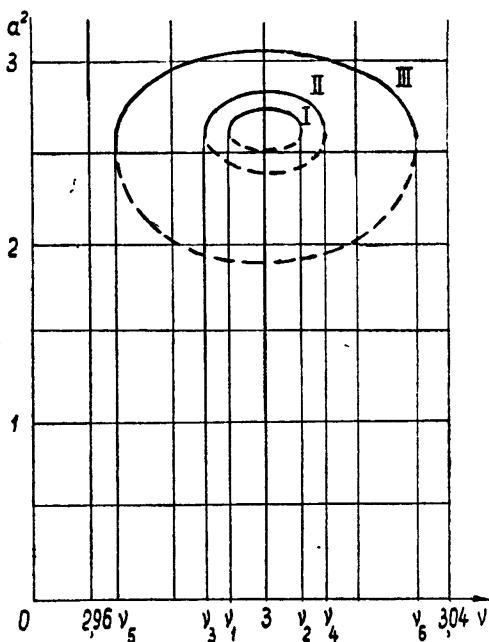


Рис. 4.

рис. 4. Сплошными линиями отмечены участки устойчивых периодических режимов, которые соответствуют условиям (13), пунктирными—неустойчивых.

Из рис. 4 мы видим, что синхронизация при дробном резонансе реализуется при любой амплитуде внешней силы; однако, в отличие от основного резонанса, при конечной величине амплитуды внешней силы ширина области синхронизации имеет малую величину порядка  $\varepsilon$ . Области синхронизации и амплитудно-частотные кривые симметричны относительно прямой  $\nu = 3$ . С увеличением амплитуды внешней силы область синхронизации и максимум амплитуд синхронизованных колебаний увеличиваются приблизительно пропорционально амплитуде внешней силы  $b$ .

Теперь рассмотрим влияние небольшого запаздывания обратной связи на процессы синхронизации.

Возьмем сначала  $\Delta = \pi/6$ . Давая остальным параметрам генератора прежние значения, получим картину синхронизации, изображенную на рис. 5. Как и раньше, сплошными линиями отмечены участки устойчивых режимов, пунктирными—неустойчивых. Из рис. 5 мы видим, что уже небольшое запаздывание приводит к некоторому увеличению областей синхронизации и к значительному сдвигу влево этих областей и максимумов амплитуд. Амплитуды синхронизованных колебаний несколько уменьшаются.

Возьмем теперь  $\Delta = \pi/3$  при тех же значениях остальных параметров генератора. Соответствующая картина синхронизации изображена на рис. 6. С увеличением запаздывания области синхронизации еще больше сдвигаются влево и увеличиваются, а амплитуды синхронизованных колебаний уменьшаются, особенно в левых частях областей синхронизации.

При приближении  $\Delta$  к  $\pi/2$  амплитудно-частотные кривые переходят

в нижнюю полуплоскость, т. е. амплитуды становятся мнимыми. При дальнейшем увеличении запаздывания от  $\pi/2$  до  $3\pi/2$  ненулевые значения амплитуды отсутствуют, а значение  $a = 0$  становится устойчивым, т. е. колебания с частотой  $\nu/3$  не возбуждаются. Синхронизованные ко-

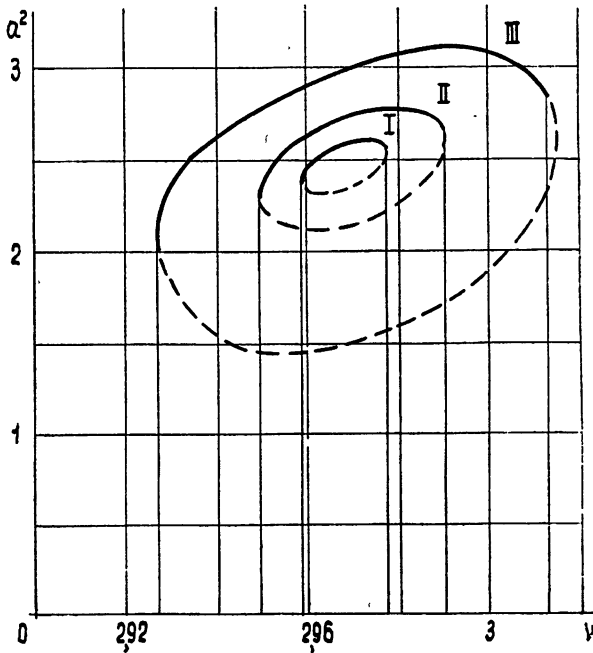


Рис. 5.

лебания появляются лишь при  $\Delta > 3\pi/2$ . При изменении  $\Delta$  от  $3\pi/2$  до  $2\pi$  получаем почти такие же картины синхронизации, как и при изменении  $\Delta$  от  $\pi/2$  до 0, с той существенной разницей, что вместо сдвигов областей синхронизации влево происходят сдвиги вправо. При  $\Delta = 2\pi$  картина синхронизации почти такая же, как и при  $\Delta = 0$ .

Рассмотрим теперь процессы синхронизации автогенератора при

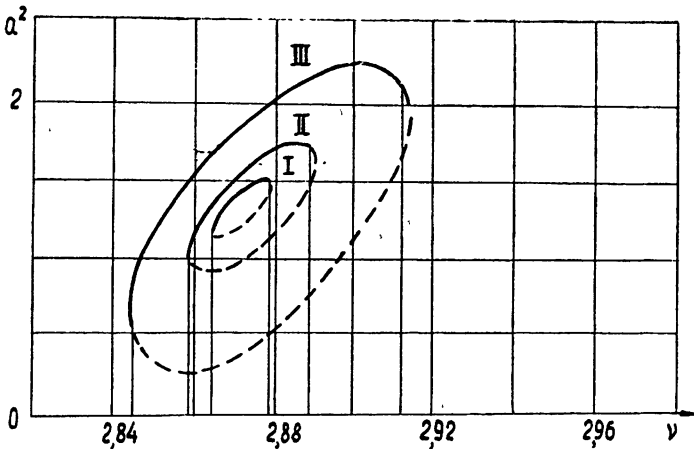


Рис. 6.

достаточно больших значениях запаздывания обратной связи и при том же резонансном условии  $\nu \simeq 3$ .

Решение уравнения (3) ищем снова приближенно с помощью метода усреднения в форме (9). Но в отличие от предыдущего случая в усредненных уравнениях уже нельзя опускать запаздывания у амплитуды и фазы:

$$\begin{aligned} \frac{da(\tau)}{d\tau} &= -\frac{\varepsilon}{2} a(\tau) + \frac{\varepsilon\alpha}{2} a(\tau - \Delta) \cos \left[ \varphi(\tau - \Delta) - \varphi(\tau) - \frac{\nu\Delta}{3} \right] \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{a^2(\tau - \Delta)}{4} - \frac{H^2(\nu)}{2} \right] - \frac{\varepsilon\alpha}{8} H(\nu) a^2(\tau - \Delta) \cos \left[ \frac{\nu\Delta}{3} + 2\varphi(\tau - \Delta) + \varphi(\tau) \right]; \\ \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} &= \frac{9 - \nu^2}{6\nu} + \frac{\varepsilon\alpha a(\tau - \Delta)}{2a(\tau)} \sin \left[ \varphi(\tau - \Delta) - \varphi(\tau) - \frac{\nu\Delta}{3} \right] \times \\ &\times \left[ 1 - \frac{a^2(\tau - \Delta)}{4} - \frac{H^2(\nu)}{2} \right] + \frac{\varepsilon\alpha H(\nu) a^2(\tau - \Delta)}{8a(\tau)} \times \\ &\times \sin \left[ \frac{\nu\Delta}{3} + 2\varphi(\tau - \Delta) + \varphi(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

В стационарном режиме синхронизованных колебаний

$$a(\tau - \Delta) = a(\tau) = a_c = \text{const}, \quad \varphi(\tau - \Delta) = \varphi(\tau) = \varphi_c = \text{const}.$$

Поэтому для определения амплитуд и сдвигов фаз стационарного режима получаем те же уравнения (11), (12), что и в предыдущем случае. Таким образом, построение амплитудно-частотных кривых в случае большого запаздывания проводится так же, как и в случае небольшого запаздывания, хотя сами кривые, как мы увидим ниже, получаются сложнее. В случае большого запаздывания исследование устойчивости стационарных синхронизованных режимов становится значительно сложнее.

Как и в предыдущих случаях, для исследования устойчивости стационарного решения составляем систему уравнений в вариациях, соответствующую системе (14) с учетом уравнений (11). Но в отличие от предыдущего случая уравнения в вариациях будут дифференциально-разностными, а их характеристическое уравнение — трансцендентным. Последнее с учетом (11) приводится к виду.

$$\begin{aligned} D(\rho) &= \left( \rho + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 + \varepsilon\alpha \cos \frac{\nu\Delta}{3} \left[ \frac{a^2}{2} + \frac{H^2(\nu)}{2} - 1 \right] \left( \rho + \frac{\varepsilon}{2} \right) e^{-\Delta\rho} + \\ &+ \frac{(9 - \nu^2)^2}{36\nu^2} + \varepsilon\alpha \sin \frac{\nu\Delta}{3} \left[ \frac{a^2}{2} + \frac{H^2(\nu)}{2} - 1 \right] \frac{9 - \nu^2}{6\nu} e^{-\Delta\rho} + \\ &+ \left\{ \frac{3\varepsilon^2\alpha^2}{4} \left[ \frac{a^4}{16} - \left( 1 - \frac{H^2(\nu)}{2} \right)^2 \right] - \frac{(9 - \nu^2)^2}{9\nu^2} - \varepsilon^2 + \right. \\ &\left. + \varepsilon\alpha \left[ 2 - H^2(\nu) - \frac{a^2}{4} \right] \left( \varepsilon \cos \frac{\nu\Delta}{3} + \frac{9 - \nu^2}{3\nu} \sin \frac{\nu\Delta}{3} \right) \right\} e^{-2\Delta\rho} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Исследование устойчивости на основе уравнения (15) в общем виде весьма сложно. Оно будет несколько проще, если подставить численные значения параметров системы и амплитуды  $a$ . В этом случае к исследованию устойчивости можно применить известный принцип аргумента.

который можно найти, например, в [14]. Для устойчивости стационарного режима необходимо показать, что уравнение (15) не имеет корней в правой полуплоскости. Так как уравнение (15) может иметь в правой полуплоскости лишь конечное число корней, то достаточно с помощью принципа аргумента показать, что это уравнение не имеет корней в полукружности достаточно большого радиуса, лежащей в правой полуплоскости.

Перейдем теперь к исследованию процессов синхронизации при конкретных значениях параметров генератора. Возьмем сначала  $\Delta = 2\pi \varepsilon = 0,05$ ,  $\alpha = 3$ , дав амплитуде внешней силы три значения:  $b = b_1 = 0,5$ ,  $b = b_2 = 2$ ,  $b = b_3 = 6$ . Тогда при отсутствии внешней силы автоколебания возбуждаются лишь на одной частоте, близкой к единице. Кар-

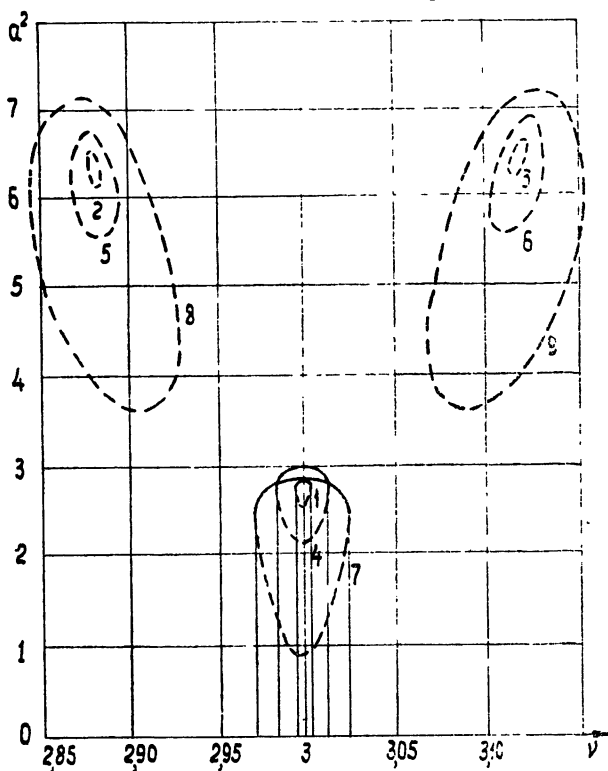


Рис. 7.

тина синхронизации автоколебаний в рассматриваемом случае показана на рис. 7. Сплошными линиями, как всегда, отмечены участки устойчивых стационарных режимов, пунктирными—неустойчивых.

Из рис. 7 мы видим, что каждому из значений  $b$  амплитуды внешней силы соответствует по три ветви амплитудно-частотных кривых (для  $b = b_1$ —кривые 1, 2, 3, для  $b = b_2$ — кривые 4, 5, 6, для  $b = b_3$ — кривые 7, 8, 9), причем для каждого значения амплитуды лишь на одной из ветвей имеется участок устойчивых режимов. При дальнейшем значительном увеличении амплитуды внешней силы три ветви сливаются в одну кривую (на рисунке не показана) с устойчивой средней частью. Области синхронизации симметричны относительно прямой  $v = 3$  и увеличиваются с увеличением  $b$ . Амплитуды синхронизованных колебаний сначала увеличиваются с увеличением  $b$ , а затем начинают несколько уменьшаться.

Возьмем теперь  $\Delta=19\pi$  при тех же значениях остальных параметров. В этом случае при отсутствии внешней силы автоколебания возбуждаются на двух частотах. Картина синхронизации показана на рис. 8. Для каждого значения  $b$  получаем снова по три ветви амплитудно-частотной кривой (для  $b = b_1$  — кривые 1, 2, 3, для  $b = b_2$  — кривые 4, 5,

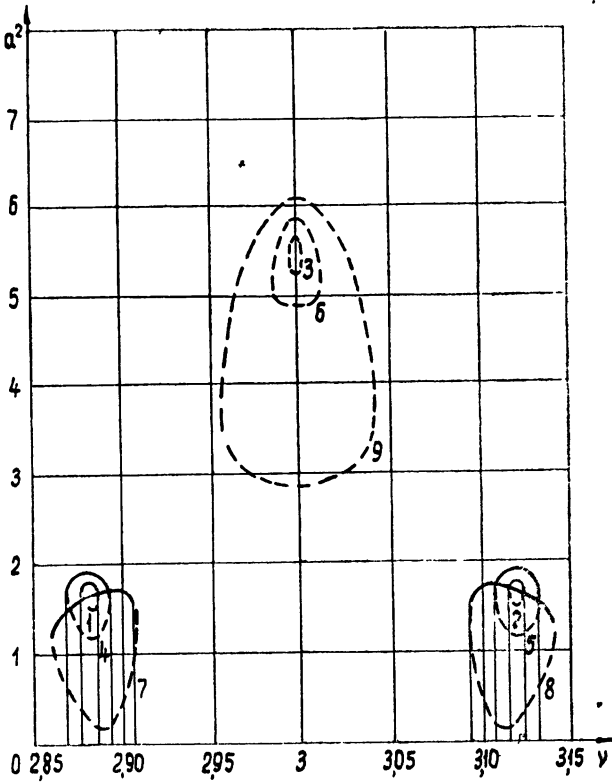


Рис. 8.

6, для  $b = b_3$  — кривые 7, 8, 9), но уже не по одной, а по две устойчивых ветви. Таким образом, для каждого значения  $b$  мы имеем по две области синхронизации, расположенные симметрично относительно  $\nu = 3$ , между которыми лежит область неустойчивых периодических колебаний. Как и в предыдущем случае, области синхронизации несколько увеличиваются с увеличением  $b$ , а амплитуды синхронизованных колебаний при больших значениях  $b$  начинают несколько уменьшаться.

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. van der Pol, Radio revue, 1, 701 (1920)
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, Ж. прикл. физ., 7, 3 (1930).
3. Ю. Н. Болотов, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 3, 319 (1958).
4. S. Hayashi, R. Shibaayama, Y. Nishikawa, IRE Trans., CT-7, 413 (1960).
5. Н. В. Бутениц, Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1955
6. Ф. М. Климентьев, Радиотехника и электроника, 1, 1284 (1956).
7. И. И. Минакова, Н. В. Степанова, Радиотехника и электроника, 1, 805 (1956).
8. В. А. Малышев, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 4, 513 (1961).
9. В. П. Рубаник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 561 (1962).
10. П. А. Перепелятник, Радиотехника и электроника, 6, 1832 (1961).
11. В. П. Рубаник, Научн. ежегодник Чернов. госуниверситета, 533 (1960).

12. А. Халанай, Rev. Mathemat. Pures. Appl., 4, 467 (1959).
13. Ю. И. Неймарк, ДАН СССР, 60, 1500 (1948).
14. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.

Черновицкий государственный университет

Поступила в редакцию  
30 ноября 1963 г.

TO THE FORCED SYNCHRONIZATION OF AN AUTOOSCILLATOR  
WITH DELAYED FEEDBACK

*V. P. Rubanik, P. F. Yarema*

The processes of the forced synchronization are investigated of an autooscillator with delayed feedback in cases of the principal resonance and subharmonic resonance.



УДК 621.373

## К ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ ОСЦИЛЛЯТОРА С ПОДТАЛКИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

В. И. Горюнов

На примере лампового генератора с Z-характеристикой и пилообразной внешней ЭДС, включенной в анодный контур, рассмотрено существование и устойчивость периодического решения (с периодом внешней ЭДС) для осциллятора с подталкивающей силой. Построены резонансные кривые и найдены границы областей устойчивости.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ТОЧЕЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим схему лампового генератора (рис. 1). Уравнение для тока  $i$  запишем в виде

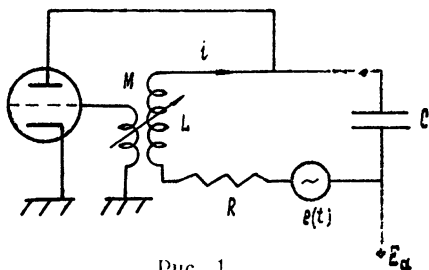


Рис. 1.

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a + C \frac{de(t)}{dt} \quad (1.1)$$

Предположим далее, что

$$1) \quad i_a = \begin{cases} i_s & \text{при } di/dt > 0 \\ i_a = i_s/2^* & \text{при } di/dt = 0; \\ 0 & \text{при } di/dt < 0 \end{cases}$$

2)  $e(t)$  — пилообразный сигнал с произвольной постоянной составляющей и одинаковой скоростью и длительностью роста и спада фронтов;

3) собственные колебания тока в контуре, составленном из последовательно включенных  $R$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 1), имеют осцилляторный характер. Тогда уравнение (1.1) можно заменить эквивалентной системой

$$x = (1 + \gamma^2)y; \quad (1.2)$$

$$\dot{y} = -x - 2\gamma y + \text{sgn}[y] \lambda \text{sgn} \left[ \sin \frac{\tau}{p} \right],$$

где точкой обозначено дифференцирование по новому времени, а безразмерные величины означают следующее:  $x = (2i/i_s - 1)$  — ток, текущий через  $L$ ,  $\tau = \omega t$  — время, где  $\omega = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$ ,  $p = \omega/\Omega$  — приведенный период внешней ЭДС, имеющей частоту  $\Omega$ ,  $\gamma = R/2L\omega$  — приведенное затухание,  $\lambda = 2\mathcal{E}C\Omega/i_s$  — приведенная амплитуда внешней ЭДС, а  $\mathcal{E}$  — крутизна фронта нарастания  $e(t)$ .

\* Несущественное предположение.

Система уравнений (1.2) с точностью до знака нелинейного трения и внешней силы совпадает с системой, исследованной в [1]. Поэтому решение системы (1.2) для каждой из полуплоскостей  $y > 0$  и  $y < 0$  плоскости  $x, y$  имеет (с учетом указанных изменений) аналогичный вид.

Будем рассматривать решение системы (1.2) в пространстве  $x, y, \tau$ , требуя, чтобы оно было фазовым, т. е. требуя непрерывности интегральной кривой системы (1.2). Последнее является следствием постулата ограниченности энергии на элементах схемы рис. 1 в любой момент времени.

Методом, примененным в [1], нетрудно убедиться, что в фазовом пространстве на плоскости  $x, \tau$  существует полоса отталкивания фазовых траекторий, а при  $\lambda < 1$  — и отрезок отталкивания, соединяющий точки  $(\lambda - 1, 0)$  и  $(-\lambda + 1, 0)$  плоскости  $x, y$  (рис. 2) Следствие такого поведения фазовых траекторий очевидно: аналитическая запись фазовой траектории системы (1.2) с точностью до знака нелинейного трения и внешней силы совпадает с аналитической записью фазовой траектории, соответствующей движению без длительных остановок в задаче, рассмотренной в [1]. Поэтому при сохранении обозначений работы [1] преобразование  $S'$  точек плоскости  $\tau = 0$  в точки плоскости  $\tau = p\pi$  получается из соответствующих формул [1]

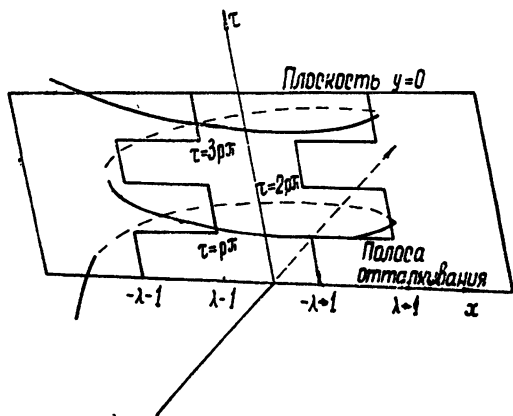


Рис. 2.

путем формальной замены знака нелинейного трения и внешней силы (поэтому определение областей (I) и (II) плоскости начальных условий переносится из [1] без изменений).

Преобразование точек плоскости  $\tau = p\pi$  в точки плоскости  $\tau = 2p\pi$ , очевидно, есть  $S'$  с инверсией знака. Это означает, что знания  $S'$  достаточно для получения  $S_n$ -преобразования точек плоскости  $\tau = 0$  в точки плоскости  $\tau = 2np\pi$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

## 2. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ $S_1$ - ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ

Вследствие отмеченной связи между  $S'$  и  $S_1$  неподвижная точка  $(x^*, y^*)$  преобразования  $S_1$  определяется уравнениями

$$x_0 + x' = 0, \quad y_0 + y' = 0, \quad (2.1)$$

где  $x' = x(\tau = p\pi, x_0, y_0)$ ,  $y' = y(\tau = p\pi, x_0, y_0)$ , а  $x_0$  и  $y_0$  суть  $x$  и  $y$  при  $\tau = 0$ . Второе уравнение (2.1) принимает вид

$$R^* \sin \varphi^* + (-1)^N [R^* + r_N \operatorname{sgn} R^*] e^{-p\beta} \sin(\varphi^* - \beta\pi) = 0, \quad (2.2)$$

когда начальные точки  $(x_0, y_0)$  в области (I), и

$$R^* \sin \varphi^* + (-1)^N [R^* + r_{N+1} \operatorname{sgn} R^*] e^{-p\beta} \sin(\varphi^* - \beta\pi) = 0, \quad (2.3)$$

когда начальные точки  $(x_0, y_0)$  в области (II). Из (2.2) и (2.3) следует, что при  $\beta \neq 0$  (2.1) для начальных точек в области (I) может решаться

только при  $N = 1, 3, 5, \dots$ , а для начальных точек в области (II) — только при  $N = 0, 2, 4, \dots$ . Аналогичный результат в [1] имел место при  $\Lambda > 1$ .

Разрешая (2.1) при  $\beta \neq 0$  с учетом (2.2) и (2.3) относительно  $R^*$  и  $\lambda$ , получаем

$$\rho [e^{p\delta} \sin \varphi^* \mp \sin(\varphi^* - \beta\pi)] = -\sin(\varphi^* - \beta\pi); \quad (2.4)$$

$$\Lambda [e^{p\delta} \sin \varphi^* \mp \sin(\varphi^* - \beta\pi)] = e^{\frac{\delta\varphi^*}{\pi}} \sin(\beta\pi),$$

где области (I) в (2.4) соответствует знак минус ( $\rho = R^*/r_N < 0$ ,  $\Lambda = \lambda/r_N$ ,  $N = 1, 3, 5, \dots$ ); области (II) в (2.4) соответствует знак плюс ( $\rho = R^*/r_{N+1} > 0$ ,  $\Lambda = \lambda/r_{N+1}$ ,  $N = 0, 2, 4, \dots$ ).

Рассмотрим свойства (2.4). Область существования аргумента для нечетных  $N$  есть  $[\beta\pi, \varphi_1)$ , где  $\varphi_1$  — корень

$$e^{p\delta} \sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 - \beta\pi) = 0 \quad (\varphi_1 < \pi), \quad (2.5)$$

для четных  $N$  ( $\varphi_2, \beta\pi$ ), где  $\varphi_2$  — корень

$$e^{p\delta} \sin \varphi_2 + \sin(\varphi_2 - \beta\pi) = 0 \quad (\varphi_2 < \pi). \quad (2.6)$$

Нетрудно убедиться, что зависимость  $\rho$  от  $\varphi^*$  системы (2.4) представляет собой монотонную функцию, а  $\Lambda(\varphi^*)$  может иметь минимум: для  $N$  нечетных минимум появляется при  $\beta < \beta_1$ , где  $\beta_1$  — корень

$$e^{(N+\beta_1)\delta} \left[ \frac{\delta}{\pi} \sin(\beta_1\pi) - \cos(\beta_1\pi) \right] = -1 \quad (\beta_1 < 1), \quad (2.7)$$

и минимальному значению  $\Lambda(\varphi^*)$  соответствует

$$\rho_{m_1} = \frac{1 + (\delta/\pi) e^{p\delta} \sin(\beta\pi) - e^{p\delta} \cos(\beta\pi)}{1 - 2e^{p\delta} \cos(\beta\pi) + e^{2p\delta}}; \quad (2.8)$$

для  $N$  четных минимум появляется при  $\beta > \beta_2$ , где  $\beta_2$  — корень

$$e^{(N+\beta_2)\delta} \left[ \frac{\delta}{\pi} \sin(\beta_2\pi) - \cos(\beta_2\pi) \right] = 1 \quad (\beta_2 < 1), \quad (2.9)$$

и минимальному значению  $\Lambda(\varphi^*)$  соответствует

$$\rho_{m_2} = \frac{-1 + (\delta/\pi) e^{p\delta} \sin(\beta\pi) - e^{p\delta} \cos(\beta\pi)}{1 + 2e^{p\delta} \cos(\beta\pi) + e^{2p\delta}}. \quad (2.10)$$

Наличие минимума зависимости  $\Lambda(\varphi^*)$  означает, что возможно существование двух неподвижных точек  $S_1$ -преобразования, соответствующих одному значению  $\rho$ . При  $\Lambda > 1$  в [1] рассматривались только монотонные участки  $\Lambda(\varphi^*)$ .

Разрешая (2.1) при  $\beta = 0$  (область (II) отсутствует), получаем для  $N = 1, 3, 5, \dots$  и  $\varphi^* \neq 0, \pi$ , что

$$\rho = \frac{\operatorname{sgn} \rho}{e^{N\delta} - 1}, \quad \Lambda = 0; \quad (2.11)$$

для  $\varphi^* = 0$

$$\rho = \frac{\Lambda + e^{-N\delta} \operatorname{sgn} \rho}{1 - e^{-N\delta}} \quad (2.12)$$

и для  $\varphi^* = \pi$

$$\rho = \frac{-\Lambda + e^{-(N-1)\delta} \operatorname{sgn} \rho}{(1 - e^{-N\delta}) e^{\delta}} \quad (2.13)$$

Если подставить решение (2.11), (2.12) и (2.13) при  $\Lambda = 0$  в выражения для  $x$  и  $y$ , являющихся решением нашей задачи, то на плоскости  $x, y$  получится предельный цикл соответствующей автономной задачи. Для четных  $N$  и  $\beta=0$  решение (2.1) для  $\varphi^* \neq 0, \pi$  отсутствует (результат симметричности (1.2)), а для  $\varphi^* = 0$

$$\rho = \frac{\Lambda - e^{-N\delta} \operatorname{sgn} \rho}{1 + e^{-N\delta}}, \quad (2.14)$$

для  $\varphi^* = \pi$

$$\rho = -\frac{\Lambda + (r_{N-1}/r_{N+1}) e^{-(N-1)\delta} \operatorname{sgn} \rho}{(1 + e^{-N\delta}) e^{\delta}} \quad (2.15)$$

Подставляя решение систем (2.4), (2.11)–(2.15) в выражения для  $x, y$ , являющихся решением задачи, можно убедиться, что при непрерывном изменении  $\rho$  точка  $(x^*, y^*)$  (если она существует) непрерывно перемещается по плоскости  $x, y$ , достигая оси  $x$  при  $\beta = 0$ .

Из (2.4) следует, что отсутствие неподвижных точек  $S_1$ -преобразования возможно только при  $\lambda < e^{\delta} (e^{\delta} - 1)^{-1}$ ; в противном случае при любых  $\rho$  существует одна неподвижная точка  $S_1$ -преобразования.

Отметим, что совместное решение (2.4) при  $\varphi = \beta\pi$ , (2.7) и (2.9) позволяет установить границы существования различного числа неподвижных точек  $S_1$ -преобразования, которые в пространстве параметров  $\lambda, \rho, \gamma$  имеют вид, представленный на рис. 3. Области существования двух неподвижных точек  $S_1$ -преобразования лежат внутри клинообразных зубьев, вне зубьев: над граничной поверхностью — область существования одной неподвижной точки  $S_1$ -преобразования, под поверхностью неподвижных точек  $S_1$ -преобразования нет. Толщина клинообразных зубьев при  $\gamma \rightarrow 0$  убывает до нуля. При  $\rho \rightarrow \infty$  и  $\gamma = 0$  накрывающая сверху клинообразные зубья часть поверхности стремится по  $\lambda$  в бесконечность, в то время как при  $\gamma = 1$  она остается ограниченной для четных  $N$  величиной  $\lambda = 1,04, \dots$ , а для нечетных — величиной  $\lambda = 0,043, \dots$

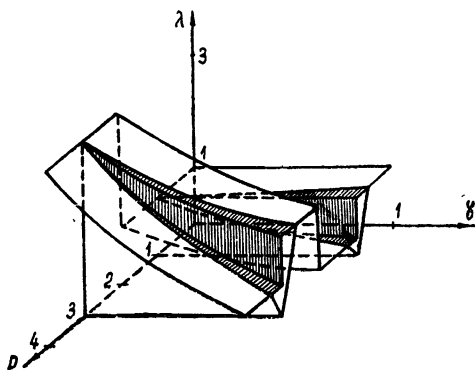


Рис. 3

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК $S_1$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вследствие симметричности  $S_1$ -преобразования достаточно рассмотреть устойчивость  $S'$ -преобразования способом, указанным в [2]. Неподвижной точке  $S_1$ -преобразования при  $\tau = 0$  соответствует точка  $(R^*, \varphi^*)$ . Для получения характеристического полинома достаточно представить  $S'$ -преобразование близких с  $(R^*, \varphi^*)$  точек в виде рядов по малым приращениям  $R$  и  $\varphi$ . Нетрудно убедиться, что получается характеристический полином вида

$$e^{2(i/\pi)\varphi^*} (Az^2 + Bz - C) = 0, \quad (3.1)$$

где ниже знак плюс и минус в  $B$  и  $C$  соответствует  $N$  нечетному и четному соответственно,

$$\begin{aligned} A &= \rho; \\ B &= e^{-\rho^2} [\pm 2\rho \cos(\beta\pi) - \cos(\beta\pi) + (\delta/\pi) \sin(\beta\pi)]; \\ C &= (-\rho \pm 1) e^{-2\rho^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\rho$  имеет принятую зависимость от  $R^*$ . Полином (3.1) для любых  $N$ , исключая  $N = 0$ , имеет на плоскости  $\rho, \beta$  одну простую и три особых границы  $D$ -разбиения.

Якобиан преобразования окружности единичного радиуса в плоскости комплексных переменных  $z = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$  на плоскость  $\rho, \beta$  имеет вид

$$\Delta = F(\vartheta) \sin \vartheta. \quad (3.3)$$

Решая совместно (3.1), (3.2) и  $F(\vartheta) = 0$ , с учетом первого уравнения системы (2.4), получим уравнение особой границы, соответствующей этому случаю. В получающемся алгебраическом относительно  $\rho$  уравнении старший член

$$k[\sin(\beta\pi) + (\delta/\pi) \cos(\beta\pi)] \rho^k \quad (k \neq 0). \quad (3.4)$$

При  $0 < \beta_0 < 1$  одна из ветвей границы уходит по  $\rho$  в бесконечность, так как при  $\beta = \beta_0$  коэффициент при старшем члене относительно  $\rho$  обращается в нуль, свободный член уравнения при этом не равен нулю. С другой стороны, из (3.1) при условии (3.2) для  $\rho \rightarrow \infty$  следует

$$z^2 \pm 2e^{-\rho^2} \cos(\beta\pi)z + e^{-2\rho^2} = 0. \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, что для любых  $\delta, \beta, N$ , соответствующих ограничениям задачи, наибольший по абсолютной величине корень (3.5) при  $\rho \neq 0$  меньше единицы. Из доказанного следует, что рассмотренная особая граница не влияет на разбиение плоскости  $\rho, \beta$  на области устойчивости.

С учетом (3.2) простая граница  $D$ -разбиения, выраженная через параметр  $\cos \vartheta$  имеет вид

$$A + C = 0, \quad (3.6)$$

$$2A \cos \vartheta + B = 0$$

и существует в интервале значений  $\beta$ , ограниченном пересечением кривой, описываемой первым уравнением (3.6), с особыми границами, получающимися из (3.1) при  $z = \pm 1$  и имеющими вид

$$\rho_1 = \pm \frac{1 - (\delta/\pi) \sin(\beta\pi) e^{\rho^2} + \cos(\beta\pi) e^{\rho^2}}{1 + 2 \cos(\beta\pi) e^{\rho^2} + e^{2\rho^2}}; \quad (3.7)$$

$$\rho_2 = \pm \frac{1 + (\delta/\pi) \sin(\beta\pi) e^{\rho^2} - \cos(\beta\pi) e^{\rho^2}}{1 - 2 \cos(\beta\pi) e^{\rho^2} + e^{2\rho^2}}, \quad (3.8)$$

где знак плюс соответствует нечетному, а минус — четному  $N$ , а  $\rho$  имеет принятую зависимость от  $R^*$ .

#### 4. АМПЛИТУДА КОЛЕБАНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ $S_1$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Для получения зависимости амплитуды колебаний, соответствующей неподвижной точке  $S_1$ -преобразования  $H = \max |x^*(\tau)|$ , от параметров задачи достаточно учесть следующее:

1) вследствие симметричности рассматриваемого движения последнее принимает свое амплитудное значение в каждый из полупериодов внешней ЭДС;

2) колебание принимает амплитудное значение при пересечении (если оно существует) траекторией плоскости  $y = 0$  при  $x_k < -1 - \lambda$  в первый полупериод внешней ЭДС;

3) для различных  $|R^*|$  формула для  $H$  различна, поскольку

$$\frac{d'x_k}{dk} = 2\delta e^{-(k-1)\delta} \left( -|R^*| + \frac{1}{e^\delta - 1} \right). \quad (4.1)$$

Поэтому для  $|R^*| < (e^\delta - 1)^{-1} H$  задается последним пересечением траекторией  $x^*(\tau)$ ,  $y^*(\tau)$  плоскости  $y = 0$  при  $x_k < -1 - \lambda$  и  $0 < \tau \leq p\pi$ :

$$H = 2(-r_N \rho + r_{N-1}) e^{-(N-1)\delta} + 1 + \lambda \quad \text{при } N=1, 3, \dots \quad (0 \leq \beta < 1); \quad (4.2)$$

$$H = 2(r_{N+1} \rho + r_{N-1}) e^{-(N-1)\delta} + 1 + \lambda \quad \text{при } N=2, 4, \dots \quad (0 \leq \beta < 1). \quad (4.3)$$

Для  $|R^*| > (e^\delta - 1)^{-1} H$  задается первым пересечением указанной траекторией плоскости  $y = 0$  при  $x_k < -1 - \lambda$  и  $0 < \tau \leq p\pi$ :

$$H = -2r_N \rho + 1 + \lambda \quad \text{при } N = 1, 3, \dots \quad (0 \leq \beta < 1); \quad (4.4)$$

$$H = +2e^{-\delta}(r_{N+1} \rho + 1) + 1 + \lambda \quad \text{при } N=2, 4, \dots \quad (0 \leq \beta < 1). \quad (4.5)$$

При  $N = 1$  и  $2$  (4.2) и (4.3) совпадают соответственно с (4.4) и (4.5), так как в этих случаях при  $x_k < -1 - \lambda$  в первый полупериод внешней ЭДС имеется единственное пересечение фазовой траекторией рассматриваемого движения плоскости  $y = 0$ . При  $N = 0$  в первый полупериод внешней ЭДС имеется единственное пересечение плоскости  $y = 0$  фазовой траекторией при  $x_1 > 1 - \lambda$ . В соответствии с этим для любых  $|R^*|$

$$H = 2\rho + 1 - \lambda \quad (0 \leq \beta < 1). \quad (4.6)$$

Нетрудно убедиться, что при  $|R^*| = (e^\delta - 1)^{-1}$  указанные выше зависимости для  $H$  соответственно непрерывно переходят друг в друга.

В заключение отметим, что, как и следовало ожидать, формулы (4.4), (4.5) и (4.6) аналогичны приведенным в работе [1] вследствие (4.1) и отмеченной в первом разделе настоящей статьи связи рассматриваемой задачи с задачей, рассмотренной в [1].

## 5. РЕЗОНАНСНЫЕ КРИВЫЕ РАССМАТРИВАЕМОГО ДВИЖЕНИЯ

Соотношения, приведенные в четвертом разделе, совместно с системой (2.4) (случай  $\beta = 0$  получается предельным переходом) позволяют построить резонансные кривые, выражающие зависимость амплитуды колебаний  $H$ , соответствующих неподвижной точке  $S_1$ -преобразования, от периода внешней ЭДС (от параметра  $p$ ) при фиксированных значениях параметров  $\lambda$  и  $\gamma$ .

Опираясь на указанные соотношения, нетрудно показать, что

1) если  $\lambda$  резонансной кривой больше  $r_N e^{-N\delta}$  и  $r_{N+1} e^{-N\delta}$  для нечетного и соседнего с ним четного значения  $N$  соответственно, то резонансная кривая непрерывна как внутри интервалов  $p$ , соответствующих указанным  $N$ , так и включая границу между ними;

2) при  $p \rightarrow 1, 3, 5, \dots$  резонансные кривые с  $\lambda \rightarrow 0$  имеют вид простых замкнутых кривых, которые при  $p < (1/\delta) \ln(1 + 2e^\delta)$  вложены друг в друга, в противном случае замкнутые кривые, оставаясь простыми, с увеличением  $\lambda$  смещаются вверх на плоскости резонансных кривых;

3) при переходе через  $p = 1, 3, 5, \dots$  (в сторону увеличения) всегда существует конечный континуум резонансных кривых, для которых зависимость  $H(p)$  из двухзначной становится однозначной;

4) вследствие подобия указанных в разделе 4 формул (4.4), (4.5) и (4.6) с соответствующими формулами работы [1] по-прежнему для  $N < p < N + 1$ , где  $N = 0, 2, 4, \dots$  и  $\lambda > r_{N+1} e^{-N\delta}$ ,  $\partial H / \partial p > 0$ , а для  $N < p < N + 1$ , где  $N = 1, 3, 5, \dots$  и  $\lambda > r_N e^{-N\delta}$ ,  $\partial H / \partial p < 0$ ;

5) существует нижний порог значений  $H$ , если  $N < \frac{1}{\delta} \ln(1 + 2e^\delta)$ ,

то он равен

$$H = 0 \quad \text{для } N=0 \quad (0 \leq \beta < 1); \quad (5.1)$$

$$H = 2r_{N-1} e^{-(N-1)\delta} + r_{N+1} e^{-N\delta} \quad \text{для } N=1, 3, 5, \dots \quad (\beta_1 \leq \beta < 1); \quad (5.2)$$

$$H = 2r_{N-1} e^{-(N-1)\delta} + r_{N+2} e^{-N\delta} \quad \text{для } N=2, 4, 6, \dots \quad (0 < \beta \leq \beta_2). \quad (5.3)$$

Если условие на  $N$  не выполняется, то нижний порог  $H$  соответствует  $\lambda = 0$  и равен

$$H = \frac{e^\delta + 1}{e^\delta - 1} \quad (0 \leq \beta < 1); \quad (5.4)$$

6) по тем же, что и в [1] причинам непрерывные при всех значениях  $p$  резонансные кривые при  $p = 0, 2, 4, \dots$  имеют минимумы, а при  $p = 1, 3, 5, \dots$  максимумы.

Формулы для максимальных (резонансных) значений амплитуды колебаний и, в частности, для амплитуды первого резонанса получаются из соответствующих формул работы [1] инверсией в них знака  $\lambda$  и  $H$ .

Минимальное значение амплитуды колебаний, как и в [1], для  $p = 0$  равно нулю, для  $\lambda > (e^\delta + 1)(e^\delta - 1)^{-1}$  и  $p = 2, 4, \dots$  определяется формулой, получающейся из [1] инверсией знака  $\lambda$  и  $H$ . Для  $\lambda < (e^\delta + 1) \times (e^\delta - 1)^{-1}$

$$(H_{\text{мин}})_{p=2,4,\dots} = \lambda \left( 1 + \frac{2e^\delta}{e^{p\delta} + 1} \right) + \frac{e^{2\delta} r_{p-1}}{e^{p\delta} - 1}; \quad (5.5)$$

7) для замкнутых резонансных кривых и кривых, отмеченных в п. 3, максимумы определяются формулами п. 6, а минимумы

$$(H_{\text{мин}})_{p=1,3,\dots} = \lambda \left( 1 - \frac{2e^\delta}{e^{p\delta} - 1} \right) + \frac{e^\delta + 1}{e^\delta - 1}. \quad (5.6)$$

Из формул для  $H_{\text{макс}}$  и  $H_{\text{мин}}$  видно, что с ростом  $p$  максимальные значения амплитуды колебаний убывают, а минимальные возрастают.

Очевидно, что, как и в [1], при  $\delta \rightarrow 0$   $H_{\text{макс}} \rightarrow \infty$  при любой, сколь угодно малой величине внешней ЭДС, что соответствует консервативному случаю. Следует отметить, что, как и в задаче о вынужденных колебаниях осциллятора с «комбинированным» трением, наличие минимумов и максимумов непрерывных при всех значениях  $p$  резонансных кривых обусловлено спектром внешней ЭДС (поскольку в этом случае  $\lambda$  велико).

## 6. ГРАНИЦЫ УСТОЙЧИВОСТИ НА ПЛОСКОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ КРИВЫХ

В разделе 3 устойчивость неподвижных точек  $S_1$ -преобразования рассматривалась на плоскости  $\rho, \beta$ . Построение границ устойчивости рассматриваемого движения на плоскости  $\dot{H}, p$  состоит в решении урав-

нений (3.6)—(3.8), в нахождении по полученному  $\rho$  соответствующих значений  $\lambda$ , являющихся результатом решения (2.4), и в подстановке полученных  $\rho$  и  $\lambda$  в соответствующую формулу для  $H$ .

При  $p \rightarrow 1, 3, 5, \dots$  возможно точное определение  $dH_i/dp$ , где  $H_r$  — значение  $H(p)$  резонансной кривой при пересечении ее с границей устойчивости. Для этого достаточно отметить, что при  $p \rightarrow 1, 3, 5, \dots$  слева  $\rho_{m_2} = \rho_1$ , а при стремлении к этим значениям  $p$  справа  $\rho_{m_1} = \rho_1$ . Это означает, что на плоскости  $H, p$  указанные свойства поведения также сохранятся. Но найти

$$\frac{dH_{m_1}}{dp} = \frac{dH_{m_1}}{d\beta} (\rho_{m_1}, \beta \rightarrow 0) \text{ и } \frac{dH_{m_2}}{dp} = \frac{dH_{m_2}}{d\beta} (\rho_{m_2}, \beta \rightarrow 1)$$

не составляет труда, поскольку в этом случае для (2.4)  $d\Lambda/d\varphi^* = 0$ . Тогда

$$\frac{dH_{m_1}}{dp} (p = 1) = - \frac{4\delta e^\delta}{(e^\delta - 1)^2} + \frac{\pi \sqrt{1 + (\delta/\pi)^2}}{e^\delta - 1} \exp \left\{ \frac{\delta}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\delta} \right\}; \quad (6.1)$$

$$\frac{dH_{m_2}}{dp} (p = 3, 5, \dots) = \quad (6.2)$$

$$= r_{p+1} \left( - \frac{4\delta e^{(p+1)\delta}}{(e^{(p+2)\delta} - 1)^2} - \frac{\pi \sqrt{1 + (\delta/\pi)^2}}{e^{(p+2)\delta} - 1} \exp \left\{ \frac{\delta}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\delta} \right\} \right);$$

$$\frac{dH_{m_1}}{dp} (p = 1, 3, \dots) = r_p \left( - \frac{4\delta e^\delta}{(e^\delta - 1)^2} + \frac{\pi \sqrt{1 + (\delta/\pi)^2}}{e^\delta - 1} \exp \left\{ \frac{\delta}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\delta} \right\} \right), \quad (6.3)$$

Заметим, что

$$\frac{dH_{m_2}}{dp} (p = 1) = \frac{dH_{m_1}}{dp} (p = 1), \quad (6.4)$$

а при  $p = 3, 5, 7, \dots$

$$\left| \frac{dH_{m_2}}{dp} \right| < \left| \frac{dH_{m_1}}{dp} \right|. \quad (6.5)$$

Равенство (6.4) выделяет случай  $p = 1$  из остальных. Из (6.2) следует, что  $\frac{dH_{m_2}}{dp} (p = 3, 5, \dots) < 0$ . Нетрудно показать, что  $\frac{dH_{m_1}}{dp} (p = 3, 5, \dots) > 0$ . Для этого достаточно отметить, что  $\frac{dH_{m_1}}{dp} (p = 1, 3, 5, \dots) = 0$  при

$$p = p^* = \frac{1}{\delta} \ln \left\{ 1 + 4\delta e^\delta \left[ \sqrt{\pi^2 + \delta^2} \exp \left( \frac{\delta}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\delta} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (6.6)$$

Взяв за мажоранту

$$p_{\text{маж}}^* = \frac{1}{\delta} \ln \left[ 1 + \frac{4\delta}{\pi} e^\delta \right], \quad (6.7)$$

получим  $(p_{\text{маж}}^*)_{\text{макс}} = 1,43 < 3$ .

С другой стороны,  $p^* = p^*(\delta) \neq 1$  при  $0 \leq \delta \leq \pi$ , поскольку неубывающие функции  $\delta$

$$z_1 = \frac{\delta}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\delta} \quad (0 \leq \delta \leq \pi); \quad (6.8)$$



$$z_2 = \ln \left[ \frac{4 \delta e^\delta}{\sqrt{\pi^2 + \delta^2} (e^\delta - 1)} \right] \quad (0 \leq \delta < \pi), \quad (6.9)$$

получающиеся из (6.6) при  $p^* = 1$ , в указанном интервале значений  $\delta$  не пересекаются. Последнее видно из следующей таблицы значений  $z_1$  и  $z_2$ :

Таблица 1

$z_1$	0	0,15	0,27	0,38	0,47	0,55	0,78	$\pm 0,01$
$z_2$	0,23	0,39	0,52	0,63	0,73	0,82		$\pm 0,01$
$\frac{\delta}{\pi}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1	

Поскольку  $p(\delta = 0) = 1,27 > 1$ ,  $p^*$  лежит в интервале  $1 < p^* < 3$  при  $0 \leq \delta \leq \pi$ , поэтому

$$\frac{dH_{m_1}}{dp}(p=1) = \frac{dH_{m_2}}{dp}(p=1) < 0. \quad (6.10)$$

Чтобы убедиться, что граница устойчивости на плоскости  $H, p$  при  $p = 2, 4, 6, \dots$  разрывна, достаточно по (3.7), (3.8) найти из (2.14), (2.15) значение  $\lambda$  резонансной кривой, пересекающей границу устойчивости слева и справа при  $p = 2, 4, 6, \dots$  Подставляя найденные значения  $\lambda$  и  $p$  в (4.2) — (4.5), получим соответствующие предельные значения  $H$ . Именно таким путем контролировались результаты построения границы

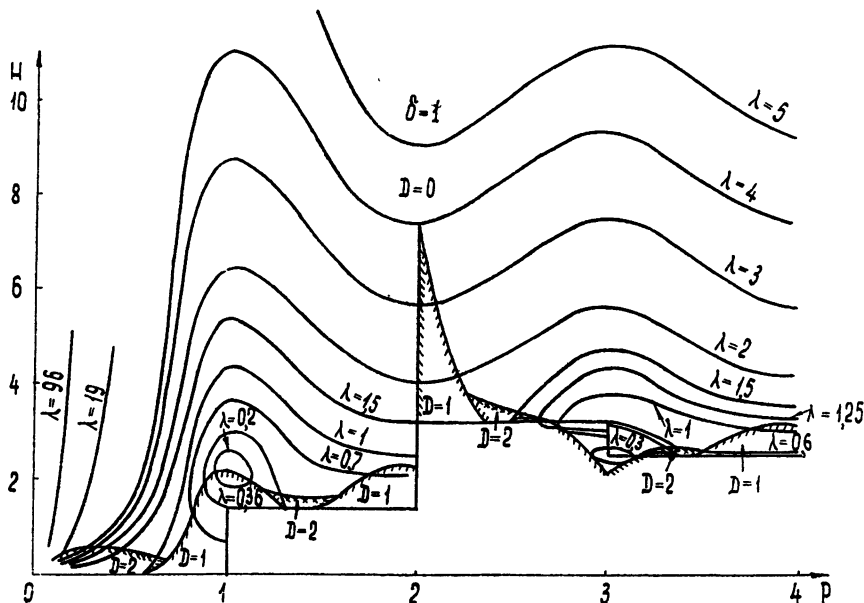


Рис 4

устойчивости на плоскости резонансных кривых (рис. 4 и 5). Однократная штриховка на рисунках соответствует появлению корня  $|z_1| > 1$  уравнения (3.1). Необходимо отметить, что слева и справа от  $p = 3, 5, \dots$  (рис. 4 и 5) при  $p > (1/\delta) \ln(1 + 2e^\delta)$  только верхняя точка пересече-

ния двухзначных ветвей резонансных кривых с границей устойчивости соответствует появлению корня  $|z| > 1$  уравнения (3.1) Это является следствием своеобразного поведения резонансных кривых, отмеченного в разделе 5.

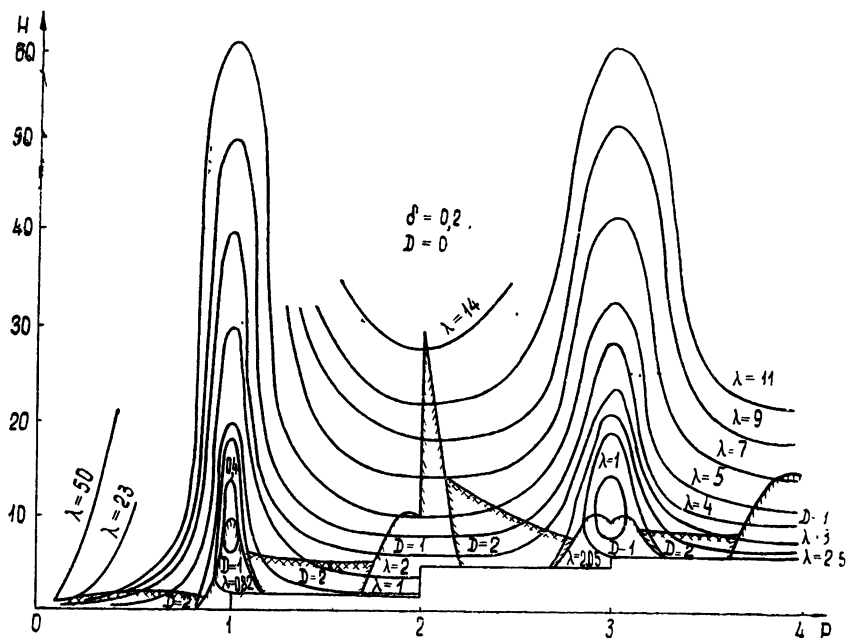


Рис. 5.

### 7. О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ $S_n$ -ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Как было отмечено в разделе 1 значения  $S'$ -преобразования достаточно для нахождения условий существования и устойчивости неподвижных точек  $S_n$ -преобразований. Однако выяснение этих вопросов приводит к серьезным математическим трудностям; поэтому мы ограничимся здесь рядом замечаний общего характера.

Из  $S_1$ -преобразования следует, что оно не является непрерывным. Поэтому, хотя на плоскости  $x, y$  и существует простая замкнутая кривая, такая, что траектории с ростом  $\tau$  стягиваются в область  $G$ , внутреннюю по отношению к ней [1], теорема Брауэра к системе (1.2) (со сделанным предположением относительно непрерывности траекторий) неприменима. Но наличие указанной простой замкнутой кривой на плоскости  $x, y$  означает, что любым конечным начальным условиям соответствует ограниченное решение задачи, располагающееся в области  $G$ . Поэтому, если неподвижные точки  $S_n$ -преобразования существуют, то они расположены в указанной выше области.

Рассмотрение периодического решения задачи (с периодом внешней ЭДС) позволяет отметить некоторые особенности динамики неавтономных колебательных систем второго порядка с подталкивающей силой:

- 1) наличие разрыва или излома границы устойчивости на плоскости резонансных кривых в случае кратной синхронизации ( $p = 2, 3, \dots$ );
- 2) непрерывность, отсутствие излома и отрицательность наклона

границы устойчивости на плоскости резонансных кривых при простой синхронизации ( $p = 1$ );

3) возможность исчезновения неустойчивого решения при  $p = 1, 2, 3, \dots$ ;

4) возможность существования двух неустойчивых решений, их слияния и последующего исчезновения в окрестности  $p = 1, 3, 5, \dots$ ;

5) неустойчивость решения при ограниченной амплитуде внешней ЭДС и частоте ЭДС, намного большей частоты собственных колебаний осциллятора без подталкивания.

В заключение автор выражает благодарность Н. А. Железцову за предложенную задачу и ряд ценных указаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Железцов, ПММ, 13, 16 (1949).
2. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 49 (1958).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 ноября 1963 г.

#### TO THE THEORY OF SYNCHRONIZATION OF OSCILLATOR WITH PUSHING FORCE

*V. I. Goryunov*

By the example of a tube generator with  $z$ -response and sawtooth external electromotive force in an anode circuit the existence and periodical solution stability of oscillator with a pushing force has been considered. Resonance curves have been plotted and boundaries of stability regions have been found out.

УДК 621.373.52

## НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ПОЧТИ ГАРМОНИЧЕСКОГО АВТОГЕНЕРАТОРА НА ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ ТРИОДЕ В НЕДОНАПРЯЖЕННОМ РЕЖИМЕ

*И. Н. Важенин*

Проводится нелинейный анализ автогенератора на полупроводниковом триоде в недонапряженном режиме с учетом инерционных свойств полупроводникового триода. Даны формулы инженерного расчета генератора как на низких частотах, так и на частотах, сравнимых с критической. Результаты расчетов проверены экспериментально.

Теоретическое исследование почти гармонических автогенераторов на полупроводниковых триодах и методы их расчета представляют практический интерес. Имеющиеся работы посвящены либо нелинейному анализу низкочастотных автогенераторов в пренебрежении инерционными свойствами полупроводникового триода [1-4], либо линейному рассмотрению условий возбуждения с учетом инерционных свойств триода [5,6]. В предлагаемой работе проводится нелинейный анализ автогенераторов на полупроводниковом триоде с учетом инерционных свойств последнего.

### 1. СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ГЕНЕРАТОРА. АППРОКСИМАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ТРИОДА

В статье исследуется автогенератор на плоскостном полупроводниковом триоде, включенном по схеме с общей базой, с колебательным контуром в цепи коллектора и с емкостной обратной связью. Его принципиальная схема дана на рис. 1, а процессы в схеме могут быть описаны следующей системой уравнений:

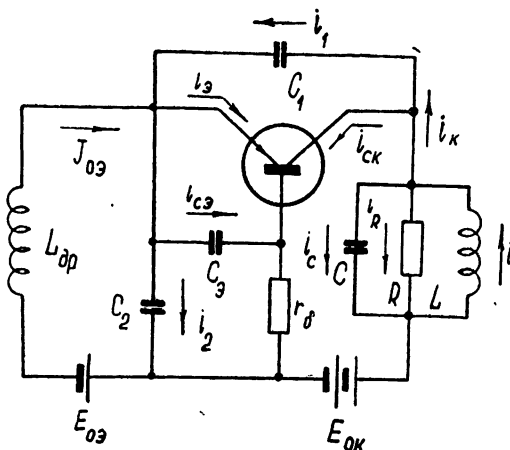


Рис. 1. Принципиальная схема автогенератора.

$$\begin{aligned}
 i'' + \frac{1}{CR} i' + \omega_0^2 i &= \omega_0^2 (i_k - i_{Ck} - i_1); \\
 Li' &= \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = v; \\
 i_2 + i_3 - J_{30} - i_1 + i_{C3} &= 0; \\
 i_{Ck} &= C_{0k} [(1 - v/V_{0k})^{-1/2} - 1] Li'; \\
 i_k &= f(i_3, Li'); \\
 i_{C3} &= C_3 v_3^1,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Все обозначения системы (1) соответствуют обозначениям схемы рис 1; индекс «0» добавляется к постоянным составляющим токов и напряжений;  $R$  — сопротивление, обусловленное совокупностью всех потерь энергии колебательного контура на линейных элементах (потерями на омическом сопротивлении катушки, потерями в емкостной цепи контура и на активном сопротивлении нагрузки).

Емкость на входе триода представлена барьерной емкостью эмиттерного перехода  $C_3$  и постоянной емкостью схемы  $C_2$ . Практикой установлено, что в большинстве важных режимов работы полупроводникового триода на частотах, сравнимых с критической и ниже, подключение на вход триода емкости  $C_2$  определенной величины значительно улучшает энергетические характеристики автоколебательной системы; кроме того, наличие емкости на входе триода снижает обратное напряжение на эмиттерном переходе при отсечках диффузионного тока эмиттера  $i_3$ .

Ток и напряжение барьерной емкости эмиттера могут быть выражены очевидными соотношениями:

$$\begin{aligned}
 v_3 &= U_d - \frac{(\int i_{C3} dt)^2}{4C_{03}^2 U_d}; \\
 i_{C3} &= \frac{C_{03} \sqrt{U_d} v_3'}{\sqrt{U_d - v_3}},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где  $U_d$  — диффузионный потенциал  $p-n$ -перехода,  $C_{03}$  — значение барьерной емкости эмиттерного перехода при отсутствии смещения на переходе.

При исследовании значения емкости на входе триода в автоколебательной системе и определении ее оптимальной величины сначала выясняется роль емкости  $C_3$  в зависимости от частоты генерации и режимов работы триода, а затем на основе полученных результатов делаются заключения об оптимальной полной емкости  $C_{вх} = C_2 + C_3$ . Как видно из шестого уравнения системы (1), при расчете  $i_{C3}$  пренебрежено падением напряжения на распределенном сопротивлении базы  $r_6$ . В области отсечки диффузионного тока эмиттера такое пренебрежение возможно в диапазоне частот

$$\omega \ll (C_3 + C_2)/C_3 r_6.$$

В активной области входных характеристик триода это пренебрежение оправдывается другими ограничениями, накладываемыми на решение системы (1).

Для облегчения решения системы (1) барьерная емкость коллекторного перехода представлена в виде

$$C_k = C_{0k} + C_{0k}[(1 - v/V_{0k})^{-1/2} - 1].$$

Емкость  $C_{0k}$  включена в контур, а влияние емкости

$$C_{k1} = C_{0k}[(1 - v/V_{0k})^{-1/2} - 1].$$

учтено соответствующим током  $i_{Ck} = C_{0k}[(1 - v/V_{0k})^{-1/2} - 1] v'$ . Такое представление емкости коллекторного перехода позволяет свести рассматриваемую автоколебательную систему с нелинейной емкостью в автоколебательном контуре к обычной автоколебательной системе с постоянными параметрами контура и возмущающими токами  $i_1, i_3, i_{Ck}, i_k, i_2, i_{C3}$ .

Считая искомой величиной  $i$ , будем искать функциональную зависимость  $i_1, i_3, i_{Ck}, i_k, i_2, i_{C3}$  от  $i, Li'$ , определяемую системой (1).

Наибольшая трудность возникает при отыскании  $i_3$ . Установить эту зависимость в общем виде не представляется возможным. Однако в большинстве практически важных режимов работы автогенератора на основе сравнительно простой аппроксимации входной характеристики триода можно определить  $i_3(i_1, J_{30}, v_3)$  с приемлемой точностью.

Работа автогенератора с отсечкой диффузионного тока эмиттера  $i_3$  является наиболее общим случаем. Аппроксимацию входной характеристики триода произведем отдельно в активной области и в области отсечки диффузионного тока эмиттера  $i_3$ . Границей между активной областью входной характеристики триода и областью отсечки будем считать то значение тока  $i_3 = J_{3\text{ мин}}$  (соответствующее ему значение напряжения  $v_3$  обозначим через  $U_{30}$ ), при котором  $\sup i_3 = J_{3\text{ макс}} = \lambda J_{3\text{ мин}}$ ,  $\lambda \gg 1$ . Обозначим  $\sup v_3$  через  $U_{3\text{ макс}}$ .

Систему уравнений (1) решаем при условиях

$$(U_{3\text{ макс}} - U_{30}) C_{\text{вх}} \ll J_{30} \frac{2\pi}{\omega};$$

$$(U_{3\text{ макс}} - U_{30}) \ll \sup |v|;$$

$$|\omega_\alpha (J_{3\text{ макс}}) - \omega_\alpha (J_{3\text{ мин}})| \ll \omega_\alpha (J_{30}).$$

Здесь  $\omega_\alpha$  — критическая частота триода, включенного по схеме с общей базой, определенная через известное соотношение  $|\alpha(\omega_\alpha)| = \alpha(0)/\sqrt{2}$ , в котором  $\alpha(\omega)$  — коэффициент усиления по току для триода в схеме с общей базой при закороченном выходе.

Первое из неравенств (3) означает, что в активной области входной характеристики триода количество электричества, связанное с перезарядом входной емкости, должно быть значительно меньше того количества электричества, которое было перенесено за это же время диффузионным током эмиттерного перехода  $i_3$ . Сказанное означает, что в данном случае токами перезаряда емкости  $C_{\text{вх}}$  в активной области характеристики триода можно пренебречь по сравнению с  $i_3$ .

Второе неравенство (3) означает, что в активной области входной характеристики триода коэффициент усиления по напряжению должен быть много больше единицы.

Третье ограничение в (3) связано с тем, что ток  $i_k$  будет найден путем решения диффузионного уравнения распространения носителей тока в базе триода в линейном приближении.

Перейдем к решению системы уравнений (1) при условиях (3).

Пусть  $C_2 = 0$ . Тогда в активной области входной характеристики триода в силу второго из условий (3)

$$Li' \gg v_3 \approx 0;$$

из совместного решения второго и третьего уравнения системы (1) находим

$$i_{c_3} = 0; \quad (4)$$

$$i_3 = J_{30} + C_1 Li''.$$

Если в некоторый момент времени  $t_1$

$$i_3 = J_{30} + LC_1 i'' = J_{3 \text{ мин}} \simeq 0, \quad (5)$$

то автоколебательная система переходит в область отсечки диффузионного тока эмиттера, а второе и третье уравнения системы (1) примут вид

$$i_{c_3} = i_1 + J_{30}; \quad (6)$$

$$Li'(t) = Li'(t_1) + \frac{1}{C_1} \int_{t_1}^t (i_{c_3} - J_{30}) dt - \frac{\left( \int_{t_1}^t i_{c_3} dt \right)^2}{4C_{30}^2 U_{\kappa}} + U_{\kappa}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) находим  $i_{c_3}$  и  $i_1$  в области отсечки диффузионного тока эмиттера:

$$i_1 = i_{c_3} - J_{30}; \quad (8)$$

$$i_{c_3} = (LC_1 i'' + J_{30}) \left\{ 1 - \left( \frac{C_1}{C_{30}} \right)^2 \frac{Li'(t_1) - Li'(t) - C_1^{-1}(t-t_1)J_{30}}{U_{\kappa}} \right\}^{-1}. \quad (9)$$

Таким образом,  $i_3$ ,  $i_1$ ,  $i_{c_3}$  определены как в активной области входной характеристики триода, так и в области отсечки диффузионного тока эмиттера.

Если решение системы (1) искать в виде  $i = J \sin(\omega t) = J \sin \vartheta$  то токи  $i_{c_3}$ ,  $i_1$ ,  $i_3$  могут быть представлены рядами Фурье:

$$i_3 = J_{30} + \sum_{n=1}^{\infty} J_{3n}^I \sin(n\vartheta) - J_{3n}^{II} \cos(n\vartheta) = J_{30} + \sum_{n=1}^{\infty} J_{3n} \sin(n\vartheta - \varphi_n); \quad (10)$$

$$i_{c_3} = \sum_{n=1}^{\infty} J_{c_3n}^I \sin(n\vartheta) - J_{c_3n}^{II} \cos(n\vartheta) = \quad (11)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} J_{c_3n} \sin(n\vartheta - \varphi_n);$$

$$i_1 = i_{c_3} + i_3 - J_{30}; \quad (12)$$

$$J_{3n}^I = \frac{1}{\pi} \int_{\psi_2}^{2\pi+\psi_1} i_3 \sin(n\vartheta) d\vartheta; \quad J_{3n}^{II} = -\frac{1}{\pi} \int_{\psi_2}^{2\pi+\psi_1} i_3 \cos(n\vartheta) d\vartheta, \quad (13)$$

$$J_{C_3 n}^I = \frac{1}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} i_{C_3} \sin(n\vartheta) d\vartheta, \quad J_{C_3 n}^{II} = -\frac{1}{\pi} \int_{\psi_1}^{\psi_2} i_{C_3} \cos(n\vartheta) d\vartheta, \quad (14)$$

где  $i_3$  соответствует (4),  $i_{C_3}$  соответствует (9). Углы начала отсечки  $\psi_1$  и конца отсечки  $\psi_2$  тока  $i_3$  находятся соответственно из (5):

$$C_1 L \omega^2 J \sin \psi_1 = J_{30} \quad (15)$$

и из (3), (7):

$$\cos \psi_1 - \cos \psi_2 - (\psi_2 - \psi_1) \sin \psi_1 = 0. \quad (16)$$

Ток  $i_k$  определим на основе решения диффузионного уравнения распространения носителей тока в базе триода с заданными граничными условиями на переходах. Если на эмиттерном переходе задать градиент концентрации носителей тока (линейно связанный с входным током), а на коллекторном переходе концентрацию неосновных носителей в зависимости от приложенного напряжения, то, решая задачу о движении неосновных носителей тока в базе в линейном приближении и не учитывая распределенное сопротивление базы, получим следующую зависимость тока  $i_k$  от тока эмиттера и напряжения на коллекторе с точностью до величин второго порядка малости:

$$i_k = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_{3 n} \sin(n\vartheta - \varphi_n - \eta_n) - L \omega J \left( 1 + B - \frac{\pi}{4} \right) (g_{kk} \cos \vartheta - C_{dk} \omega \sin \vartheta).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_n &= |\operatorname{sch}(W_0 s_n)|; \\ \eta_n &= \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \operatorname{sch}(W_0 s_n)}{\operatorname{Re} \operatorname{sch}(W_0 s_n)}; \\ s_n &= \frac{1}{L_p} (1 + j n \omega \tau_p)^{1/2}, \end{aligned}$$

$W_0$  — ширина базы против эмиттерного перехода,  $\tau_p$  — время жизни дырок с учетом рекомбинации на поверхности,  $L_p$  — диффузионная длина дырок в базе,  $g_{kk}$ ,  $C_{dk}$  — активная проводимость и диффузионная емкость коллекторного перехода на частоте  $\omega$  при разомкнутом для переменной составляющей входе. Полный эллиптический интеграл  $B$  можно аппроксимировать выражением

$$B = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16} \left( \frac{L \omega J}{V_{0k}} \right)^2. \quad (17)$$

Расчет соотношения (17) дан в Приложении.

Решение системы уравнений (1) для  $C_1/C \ll 1$  проведем методом медленно меняющихся амплитуд. Подставив найденные значения токов  $i_1$ ,  $i_k$ ,  $i_{Ck}$  в первое уравнение системы (1), обычным способом получим систему укороченных уравнений:



$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega} \left[ J_{\partial 1} \alpha_1 \sin(\varphi_1 + \gamma_{11}) - \frac{\omega L}{R} J - J_{\partial 1} \sin \varphi_1 - J_{C \partial 1} \sin \alpha_1 - \left(1 + B - \frac{\pi}{4}\right) JL \omega g_{\kappa \kappa} \right]; \quad (18)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_0 + \frac{1}{2} \omega_0 \left[ \frac{J_{\partial 1}}{J} \alpha_1 \cos(\varphi_1 + \gamma_{11}) - \frac{J_{\partial 1}}{J} \cos \varphi_1 - \frac{J_{C \partial 1}}{J} \times \right. \\ \left. \times \cos \alpha_1 - \frac{C_{\text{дк}}}{C} - \frac{\pi}{16} \left(\frac{a}{V_{0\kappa}}\right)^2 \frac{C_{0\kappa} + C_{\text{дк}}}{C} \right].$$

При анализе системы уравнений (18) удобнее перейти от  $J$  к  $a = JL\omega$ . Из соотношений (10)–(14) с учетом (16) найдем

$$J_{\partial 1} = a\omega C_1 \sin \psi_1 (2 - \sin \psi_1); \quad (19)$$

$$\sin \varphi_1 = (1 - \sin \psi_1)^2; \quad (20)$$

$$\sin \psi_1 = J_{\partial 0}/a\omega C_1. \quad (21)$$

В случае  $C_{0\partial} \ll C_1$  выполняется условие  $J_{\partial 1} \gg J_{C \partial 1} \approx 0$  и система уравнений (18) принимает вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{a\omega_0}{2} \left\{ \frac{C_1}{C} \sin \psi_1 (2 - \sin \psi_1) [\alpha_1 \sin(\varphi_1 + \gamma_{11}) - \sin \varphi_1] - \frac{L\omega_0}{R} - \left[ 1 + \frac{\pi}{16} \left(\frac{a}{V_{0\kappa}}\right)^2 \right] L\omega g_{\kappa \kappa} \right\}; \quad (22)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \left\{ \frac{C_1}{C} \sin \psi_1 (2 - \sin \psi_1) [\alpha_1 \cos(\varphi_1 + \gamma_{11}) - \cos \varphi_1] - \frac{C_{\text{дк}}}{C} - \frac{\pi}{16} \left(\frac{a}{V_{0\kappa}}\right)^2 \frac{C_{0\kappa} + C_{\text{дк}}}{C} \right\}.$$

Система уравнений (22) дает закон установления амплитуды и частоты автоколебаний. Если  $da/dt > 0$  для  $\psi_1 = \pi/2$ , то автоколебательная система возбуждается. При  $\frac{da}{dt}(\psi_{11}) < 0$ , где  $\sin \psi_{11} = J_{\partial 0}/\omega C_1 E_{0\kappa}$ ,

в автогенераторе будут устойчивые колебания с амплитудой  $a < E_{0\kappa}$  (недонапряженный режим). Полагая  $da/dt = 0$ , из первого уравнения системы (22) находим  $\psi_{10}$ , соответствующее установившемуся режиму автоколебаний; затем получаем  $a_0 = J_{\partial 0}/\omega C_1 \sin \psi_{10}$ . Если же  $\frac{da}{dt}(\psi_{11}) > 0$ , то амплитуда установившихся автоколебаний  $a_0 > E_{0\kappa}$  (перенапряженный режим).

В случае  $C_{\text{вх}} \gg C_1$

$$\begin{aligned} J_{\partial 1} \sin \varphi_1 + J_{21} \sin \alpha_1 &= 0, \\ J_{\partial 1} \cos \varphi_1 + J_{21} \cos \alpha_1 &= a\omega C_1 \end{aligned} \quad (23)$$

и система (22) несколько упрощается:

$$\frac{da}{dt} = \frac{a\omega_0}{2} \left\{ \frac{C_1}{C} \sin \psi_1 (2 - \sin \psi_1) \alpha_1 \sin(\varphi_1 + \gamma_{11}) - \frac{L\omega_0}{R} - \left[ 1 + \frac{\pi}{16} \left( \frac{a}{V_{0к}} \right)^2 \right] L\omega_0 g_{кк} \right\}; \quad (24)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \left[ \frac{C_1}{C} \sin \psi_1 (2 - \sin \psi_1) \alpha_1 \cos(\varphi_1 + \gamma_{11}) - \frac{C_1 + C_{лк}}{C} - \frac{\pi}{16} \left( \frac{a}{V_{0к}} \right)^2 \frac{C_{0к} + C_{лк}}{C} \right].$$

Сравнивая первые уравнения (22) и (24), необходимо отметить, что в случае (23) отсутствует декрементный член  $\frac{C_1}{C} \sin \psi_1 (2 - \sin \psi_1) \sin \varphi_1$ ,

обусловленный сдвигом фаз  $\varphi_1$  между первой гармоникой тока  $i_1$  и тока  $i$ . Это обстоятельство с практической точки зрения является весьма ценным: оно способствует повышению к. п. д. автогенератора, а также дает возможность получать устойчивые автоколебания при сколь угодно низких частотах. Правда, в системе (24) на низких частотах могут выполняться только условия жесткого возбуждения. В остальном результаты анализа систем (22) и (24) совпадают.

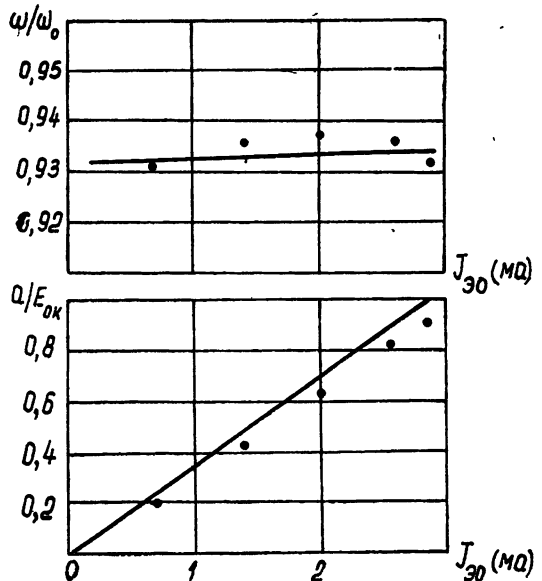
Для инженерного расчета установившихся режимов в автогенераторе систему (24) лучше представить следующим образом:

$$\frac{1}{R} + g_{кк} \left[ 1 + \frac{\pi}{16} \left( \frac{a_0}{V_{0к}} \right)^2 \right] = g_0 = C_1 \omega_0 \alpha_1 \sin \psi_{10} (2 - \sin \psi_{10}) \sin(\varphi_1 + \gamma_{11}); \quad (25)$$

$$\sin \psi_{10} = J_{э0} / \omega C_1 a_0; \quad (26)$$

$$\sin \varphi_1 = (1 - \sin \psi_{10})^2; \quad (27)$$

Рис. 2. Зависимость амплитуды и частоты низкочастотного автогенератора от тока эмиттера ( $L = 25$  мкгн;  $C = 8200$  пф;  $C_1 = 1000$  пф;  $L_{др} = 25$  мкн;  $E_{ок} = 9,8$  в;  $R = 7,6$  ком;  $\omega_{э}/2\pi = 2,5$  мГц;  $\omega_0/2\pi = 108$  кГц;  $C_2 = 10000$  пф). Сплошные линии—расчетные, точки—экспериментальные значения.



$$\omega = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2} \left[ L\omega g_0 \operatorname{ctg}(\gamma_{11} + \varphi_1) - \frac{C_1 + C_{\text{л.к.}}}{C} - \frac{\pi}{16} \left( \frac{a_0}{V_{0\text{к}}} \right)^2 \frac{C_{0\text{к}} + C_{\text{л.к.}}}{C} \right]. \quad (28)$$

Если требуется рассчитать автогенератор по схеме рис. 1 с частотой  $\omega$ , амплитудой  $a_0$ , нагруженный на сопротивление  $R$ , то, задавшись углом отсечки  $\psi_{10}$ , из (25)–(28) легко определить остальные парамет-

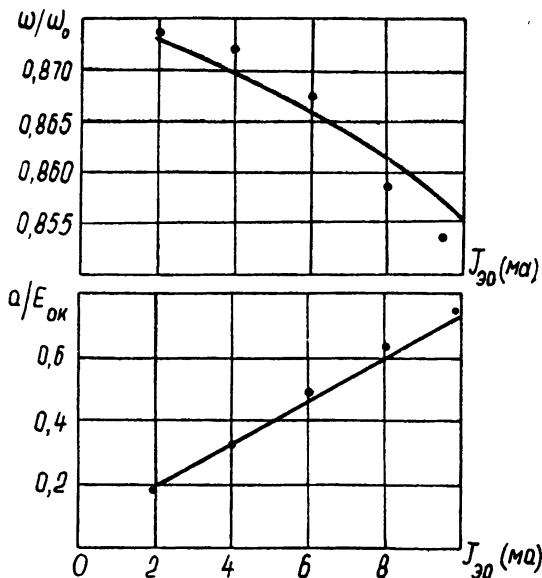


Рис. 3. Зависимость амплитуды и частоты высокочастотного автогенератора от тока эмиттера ( $L = 4,7$  мкГн,  $C = 443$  пф,  $C_1 = 100$  пф;  $C_2 = 510$  пф;  $L_{др} = 2,5$  мГн;  $E_{ок} = 9,8$  в;  $R = 2,5$  ком;  $\omega_a/2\pi = 1,25$  МГц;  $\omega_0/2\pi = 3,48$  МГц;  $d_0 = 4,8$  мн). Сплошные линии — расчетные, точки — экспериментальные значения.

ры схемы  $C_1, L, C, C_2, J_{э0}$ . На рис. 2, 3 сопоставлены расчетные и экспериментальные результаты. При соблюдении условий (3) относительная погрешность амплитуды меньше, чем  $C_1/C$ , а относительная погрешность частоты меньше, чем  $(C_1/C)^2$ .

## 2. ОЦЕНКА УСЛОВИЙ (3)

Для оценки первых двух условий (3) можно воспользоваться соотношением (19). Если значение  $J_{э0}$ , определенное соотношением (19), подставить в первое неравенство (3), то последнее можно переписать в форме

$$\frac{C_1}{C_{\text{вх}}} \sin \psi_1 \gg \frac{1}{2\pi} \frac{U_{э \text{ макс}} - U_{э 0}}{a}. \quad (29)$$

Для случая  $C_{\text{вх}} \gg C_1$  возможна дальнейшая конкретизация неравенства (29). Как видно из уравнений (24) и (25),  $(C_1/C) \sin \psi_1$  является малым параметром автоколебательной системы. Принимая  $C_{\text{вх}} = C$ , из (29) становится ясным, что для удовлетворения первого условия (3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{U_{э \text{ макс}} - U_{э 0}}{a} \ll \frac{C_1 \sin \psi_1}{C}.$$

Если учесть, что коэффициент усиления по току триода в схеме с общей базой всегда меньше единицы и тем меньше, чем выше частота сигнала, то требование  $(U_{э \text{ макс}} - U_{э 0}) \ll a$  станет очевидным. Следовательно, можно подобрать значения элементов автоколебательной си-

стемы так, чтобы они удовлетворяли оптимальным энергетическим соотношениям в автогенераторе. Исключение могут составить режимы работы триода с отсечкой диффузионного тока эмиттера на таких частотах, когда емкости  $C$  и  $C_{вх}$  будут в основном определяться барьерными емкостями эмиттера и коллектора. Как известно, барьерная емкость эмиттера при положительном смещении на переходе может быть значительно больше барьерной емкости коллектора при значительном отрицательном смещении на переходе.

При обсуждении третьего условия (3) заметим, что это требование является обязательным лишь тогда, когда частота генерации сравнима с  $\omega_\alpha$  и выше ее. Для частот генерации  $\omega \ll \omega_\alpha$  в нем нет необходимости. Результаты экспериментальных исследований сплавных полупроводниковых триодов при произвольном уровне инжекции [8,9] показывают, что изменение  $\omega_\alpha$  не превышает  $10 \div 15\%$  для триодов типа П1, П6, П13—П16 в диапазоне токов эмиттера 1—50 *ма* и для триодов типа П4, П201, П203 в диапазоне токов эмиттера 5—50 *ма*.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить глубокую благодарность А. Б. Сапожникову за подробное обсуждение работы и В. В. Мигулину за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

При решении диффузионного уравнения будут дополнительно использованы следующие обозначения:  $p$ ,  $p_0$  — неравновесная и равновесная концентрации дырок в базе,  $D_p$  — коэффициент диффузии дырок,  $q$  — заряд электрона,  $d_\alpha$ ,  $d_k$  — толщина эмиттерного и коллекторного переходов,  $N_a$ ,  $N_d$  — концентрация акцепторов, доноров в полупроводнике,  $T$  — абсолютная температура,  $k$  — постоянная Больцмана,  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная полупроводника,  $\mu = q/kT$ ,  $x$  — координата в направлении от эмиттера к коллектору,  $S_\alpha$  — площадь эмиттерного перехода.

Уравнения непрерывности носителей тока в базе для сплавного  $p-n-p$  триода в случае одномерной задачи запишутся в виде:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p - p_0}{\tau_p} + D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \quad (29a)$$

Граничные условия на эмиттерном переходе определяются равенствами (10), (13):

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{qD_p S_\alpha} \left[ J_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} J_{\alpha n} \sin(n\vartheta - \varphi_n) \right], \quad (30)$$

а на коллекторном переходе концентрацией дырок в зависимости от приложенного напряжения:

$$p_2 = p_0 + p_0 \exp[\mu(a \cos \vartheta - E_{0k})]. \quad (31)$$

Поскольку  $a < E_{0k}$ , то  $p_2 = p_0$ .

Если начало координат совместить с эмиттером, то координату коллектора можно определить через ширину базы  $W_0$  и толщину перехода  $d_k$ :

$$x_k = W_0 - d_k, \quad (32)$$

где

$$d_k = \sqrt{\frac{2\epsilon}{qN_d} (V_{0k} - a \cos \vartheta)} = d_0 \sqrt{1 - \frac{a}{V_{0k}} \cos \vartheta},$$

Равенство (32) перепишем в форме

$$x_k = W_0 - d_0 \left[ \frac{1}{2} v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\vartheta) \right]. \quad (33)$$

Коэффициенты  $v_n$  имеют вид

$$v_{2k} = \sum_{m=k}^{\infty} \left( \frac{a}{V_{0k}} \right)^{2m} \frac{(4m-3)!!}{4m!!} 2^{1-2m} \binom{2m}{m-k} (-1)^m; \quad (34)$$

$$v_{2k-1} = \sum_{m=k}^{\infty} \left( \frac{a}{V_{0k}} \right)^{2m-1} \frac{(4m-5)!!}{(4m-2)!!} 2^{2-2m} \binom{2m-1}{m-k} (-1)^m. \quad (35)$$

Как видно из (34), (35), ряд (33) сходится очень быстро. Пренебрежение гармониками выше первой даже при  $a/V_{0k} = 1$  не вызывает ошибки более 30%, но напряжение на переходе всегда меньше контактной разности потенциалов ( $a/V_{0k} < 1$ ) и, следовательно, в реальном случае ошибка будет еще меньше. Коэффициент  $v_0/2$  изменяется от  $v_0(0)/2 = 1$  до  $v_0(1)/2 = 0,9$ . В пределах этой точности

$$x_k = W_0 - d_0 - d_0 v_1 \cos \vartheta. \quad (36)$$

Коэффициент  $v_1$  можно выразить через полный эллиптический интеграл  $B(a/V_{0k})$ :

$$v_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{a}{V_{0k}} \right) \left[ 1 + B - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (37)$$

Решение уравнения (29а) будем искать в виде

$$p = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n e^{jn\omega t} \quad (38)$$

с граничными условиями (30) при  $x = 0$  и (31) при  $x = W_0 - d_0$ . Эффект пульсации базовой области учтем позднее как возмущение, налагаемое на решение с фиксированными граничными условиями. Подставляя (38) в (29а), получим дифференциальные уравнения для постоянной и каждой гармонической составляющей:

$$\frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} - \frac{1 + jn\tau_p \omega}{L_p} p_n = 0 \quad (39)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial p_n}{\partial x} = \left( \frac{\partial p_{-n}}{\partial x} \right)^* = -j \frac{J_{\vartheta n} \exp(-j\varphi_n)}{2qD_p S_{\vartheta}} \quad \text{при } x = 0; \quad (40)$$

$$p_n = p_{-n} = 0, \quad p_0 = p_0 \quad \text{при } x = W_0 - d_0 = W'_0. \quad (41)$$

Решение уравнения (39) ищем в виде

$$p_n = A_n \exp(s_n x) + B_n \exp(-s_n x). \quad (42)$$

Из (39) с учетом (40), (41) получим

$$p_n = \frac{J_{\vartheta n} \exp(-j\varphi_n) \operatorname{sh}[s_n(x - W'_0)]}{4qD_p S_{\vartheta} s_n \operatorname{ch}[s_n(W'_0)]}; \quad (43)$$

$$p_{-n} = (p_n)^*; \quad (44)$$

$$p_0 = p_6 \frac{\text{ch}(s_0 x)}{\text{ch}(s_0 W'_0)} - \frac{J_{\varepsilon 0} \text{sh}[s_0(x - W'_0)]}{4qD_p S_{\varepsilon} s_0 [\text{ch}(s_0 W'_0)]}. \quad (45)$$

Теперь по известным функциям (38), (43), (44) найдем дырочную составляющую плотности тока коллектора:

$$i_k = \sum_{n=0}^{\infty} J_{\varepsilon n} \alpha_n \sin(n\vartheta - \varphi_n - \eta_n).$$

Решение уравнения (29а) с условиями (36), (30), (31) выражается функциями

$$P = p + p^1,$$

в которых  $p$  задается уравнениями (43)—(45), а  $p^1$  есть возмущение, связанное с  $d_0 \nu_1 \cos \vartheta$ . Из (30), (31) найдем граничные условия для  $p^1$ . Поскольку  $p^1$  также удовлетворяет уравнению непрерывности, то дальнейший порядок расчета остается прежним. Полное выражение для дырочной составляющей тока  $i_k^1$ , вызванного модуляцией ширины коллекторного барьера, получается громоздким. Ограничившись точностью порядка  $d_0 \nu_1 / W'_0$  для каждой гармоники тока  $i_k^1$ , запишем окончательное выражение  $i_k$ :

$$i_k = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_{\varepsilon n} \sin(n\vartheta - \varphi_n - \eta_n) - \frac{\nu_1 d_0 \alpha_0 J_{\varepsilon 0}}{W'_0} [\text{Re } s_1 W'_0 \text{th}(s_1 W'_0) \cos \vartheta + \text{Im } s_1 W'_0 \text{th}(s_1 W'_0) \sin \vartheta],$$

где

$$\frac{J_{\varepsilon 0} d_0 \alpha_0}{E_{0k} W'_0} \text{Re } s_1 W'_0 \text{th}(s_1 W'_0) = g_{kk},$$

$$\frac{J_{\varepsilon 0} d_0 \alpha_0}{\omega E_{0k} W'_0} \text{Im } s_1 W'_0 \text{th}(s_1 W'_0) = C_{dk}$$

соответственно активная проводимость и диффузионная емкость коллектора на частоте  $\omega$  при разомкнутом входе для переменной составляющей в схеме с общей базой.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л. Н. Капцов, Радиотехника и электроника, 2, 1127 (1957).
- 2 Л. Н. Капцов, К. Я. Сенаторов, О. И. Поплавская, Радиотехника и электроника, 4, 1549 (1959).
- 3 М. И. Конторович, С. Г. Пеликан, В. Н. Фролов, Радиотехника и электроника, 5, 439 (1960).
- 4 А. С. Майдановский, Радиотехника и электроника, 6, 1554 (1961).
- 5 К. С. Ржевкин, Л. А. Логунов, Радиотехника и электроника, 1, 647 (1956).
- 6 Л. Н. Капцов, В. В. Яблонский, Радиотехника и электроника, 2, 1138 (1957).
- 7 Ю. А. Каменецкий, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, вып. 2, изд. Сов радио, М., 1957.
- 8 М. А. Абдуханов, Радиотехника и электроника, 5, 473 (1960).
- 9 Г. А. Блинов, И. Н. Важенин, Изв. высш. уч. зав.—Физика, 5, 55 (1961).

**NONLINEAR ANALYSIS OF QUASI-HARMONIC AUTOOSCILLATOR WITH SEMICONDUCTOR TRIODE IN UNDERVOLTAGED REGIME***I. N. Vazhenin*

The nonlinear analysis is carried out of an autooscillator having the semiconductor triode in the undervoltaged regime, taking into account their inertial properties. Formulae are given of an engineer calculation of the autooscillator both at low frequencies and the frequencies compared with the critical one. The calculation results have been tested experimentally.

---

УДК 62 501.333

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ В ПРОЦЕССЕ ИХ НОРМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

*Б. А. Арефьев*

Рассматривается методика определения характеристик нелинейных объектов в процессе их нормальной эксплуатации по статистическим свойствам входного и выходного сигналов. Математическая расчетная модель объекта—последовательно включенные инерционное и нелинейное звенья. Параметры указанных звеньев определяются по записи одной реализации процесса.

Во многих случаях оказывается необходимым определить характеристики объектов в процессе их нормальной работы, когда не удастся выделить типовые возмущения и найти реакцию объекта на них. Более того, вследствие несправедливости принципа суперпозиции движений в нелинейных объектах не удастся полностью раскрыть свойства системы по одной или даже нескольким реализациям типовых возмущений.

Не случайным поэтому является обращение к вероятностным методам для определения свойств объектов. Как указывает Винер [1], входной процесс в виде броуновского движения или «дробового эффекта» может в известном смысле имитировать любой входной процесс и при довольно общих условиях реакция системы на броуновское движение раскрывает многие ее свойства. Другой стороной дела, заставляющей нас обращаться к вероятностным методам, является стремление получить характеристики объекта, не нарушая его нормальной работы. Создание всякого рода типовых возмущений, создание искусственных условий может привести к порочным результатам. Особенно это относится к промышленным объектам.

Реализация идеи Винера весьма сложна и, как указывают авторы [2], представляет скорее теоретический, чем практический интерес. Кроме того, результат такого исследования будет состоять в определении коэффициентов рядов из специально образованных функций времени; использовать такой результат для расчетов экстремальных регуляторов и других автоматических устройств будет трудно.

Статическую характеристику нелинейного объекта иной раз определяют при помощи аппарата математической статистики и отождествляют с линией регрессии выходного сигнала на входной. Однако при этом динамические свойства системы остаются неизвестными, сам же прием замены в динамических системах статической характеристики линией регрессии требует обоснования и оценки возникающей при этом погрешности.

Ниже приводится один способ определения характеристик нелинейных объектов по одной реализации процесса в условиях нормальной работы. Адекватной математической моделью, имеющей все интересующие нас свойства нелинейного объекта, будем считать схему, состоящую из инерционного звена и включенного вслед за ним нелинейного. Такое замещение нелинейного объекта часто используется, например, при рас-



чете систем экстремального регулирования ([3] и др.), где характеристика нелинейного звена обычно считается параболической. Можно показать, что при рассмотрении «в малом» большое число объектов приводится к такой схеме.

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БЕЗЫНЕРЦИОННОГО ОБЪЕКТА

Будем сначала предполагать, что безынерционный объект имеет статическую характеристику, которая в рабочем диапазоне изменения переменных есть отрезок параболы с параметром  $q$  и с вертикальной осью, вершина которой  $O_m$  смещена на величину  $a$  по оси  $X$  и на  $b$  по оси  $Y$  (рис. 1).  $X$  и  $Y$  означают соответственно вход и выход объекта. Подчеркнем, что для прикладных вопросов всегда надо знать только ограниченный отрезок характеристики на рабочем диапазоне, который в большинстве случаев хорошо аппроксимируется частью параболы (не обязательно расположенной около ее вершины).

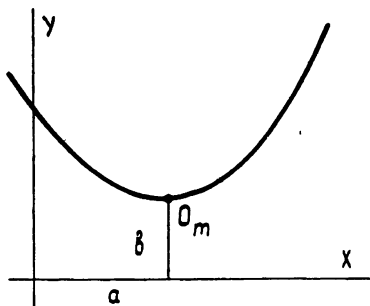


Рис. 1.

Требуется найти постоянные  $a$ ,  $b$  и  $q$ , определяющие статическую характеристику, зная входную и выходную величины в виде случайных функций времени, которые обычно даются в виде осциллограмм реализации процесса. В дальнейшем будем предполагать, что имеем дело с параболой второй степени (первое приближение), хотя все рассуждения могут быть обобщены на объекты с характеристиками, аппроксимируемыми параболой третьей и высших степеней.

Нетрудно видеть, что уравнение характеристики должно иметь вид

$$Y = b + a^2q - 2aqX + qX^2. \quad (1)$$

Вводя обозначение

$$c = b + a^2q, \quad (2)$$

запишем уравнение (1) в виде

$$Y = c - 2aqX + qX^2. \quad (3)$$

Считая входную  $X = X(t)$  и выходную  $Y = Y(t)$  переменные случайными функциями времени, постараемся установить связь между статистическими характеристиками этих процессов и искомыми постоянными. Попутно отметим, что наша задача имеет много общего с известной задачей радиотехники о прохождении случайного сигнала через квадратичный детектор ([4] и др.). Основное отличие заключается в том, что в задаче радиотехники определяется выходной сигнал (или его статистические характеристики) по известному входному и заданным свойствам детектора, мы же ищем характеристику детектора по свойствам входного и выходного сигналов. В этом смысле наша задача является обратной задачей. Кроме того, в задачах автоматического управления, в отличие от задач радиотехники, сигналы часто не меняют своих знаков (например, подача горючего в топку не может быть отрицательной). Поэтому нам будет удобнее оперировать с нецентрированными функциями.

Будем для простоты записи во многих случаях опускать переменную  $t$  (время). Значения переменных при аргументе, сдвинутом на  $\tau$

относительно  $t$ , отмечаем индексом  $\tau$ ; там, где это необходимо для понимания, величина сдвига будет указана. Усреднение по времени станем обозначать чертой сверху.

Считая процессы стационарными и эргодическими, получим, используя (3) и производя элементарные преобразования [4], что моментная функция выхода второго порядка

$$\overline{Y Y_\tau} = c^2 - 4acq\overline{X} + 2cq\overline{X^2} + 4a^2q^2\overline{X X} - 4aq^2(\overline{X X_\tau^2} + \overline{X^2 X_\tau}) + q^2\overline{X^2 X_\tau}. \quad (4)$$

Здесь были использованы очевидные соотношения:

$$\overline{X} = \overline{X_\tau}, \quad \overline{X^2} = \overline{X_\tau^2}. \quad (5)$$

В уравнении (4) левая часть является функцией только  $\tau$ ; правая — также функция  $\tau$ , зависящая от трех искомых постоянных  $a$ ,  $b$  и  $q$ . В том случае, если характеристика объекта в точности совпадает с частью параболы с неизвестными пока параметрами, равенство в (4) выполняется по  $\tau$  тождественно. В этом можно убедиться следующим образом.

Если бы мы имели квадратичный детектор с известными характеристиками, то, подавая на него известный входной сигнал  $X$ , мы могли бы определить значение правой части (4), и вместе с этим, моментную функцию выхода  $\overline{Y Y_\tau}$  в левой части для любого  $\tau$ . Если детектирование происходит фактически, то специально замеренный и преобразованный в  $\overline{Y Y_\tau}$  выходной сигнал должен давать (при правильной работе устройства) те же самые значения этой функции, которые мы получим расчетным путем для любого значения  $\tau$ . Тождественное выполнение (4) позволяет получить из него при фиксированных значениях  $\tau$  нужное число уравнений для определения постоянных  $a$ ,  $b$  и  $q$ , которые в предыдущих рассуждениях только считались известными, но их значения могли быть любыми.

Если какие-либо из сделанных допущений будут нарушены, скажем, характеристика будет несколько отлична от параболической, то замеренные значения будут несколько отличаться от расчетных, тождество нарушается, но может быть опять использовано для приближенного определения параметров характеристики; в соответствии со сказанным выше, точность возрастает с уменьшением рабочего диапазона изменения переменных. В пределе равенство переходит в тождество. В общем случае выбор параметров  $a$ ,  $b$  и  $q$  может рассматриваться, как задача о наилучшем приближении  $\overline{Y Y_\tau}$  «полиномами» в виде правой части (4).

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ИНЕРЦИОННОГО ОБЪЕКТА

Будем теперь рассматривать объекты, в схеме замещения которых нелинейной части предшествует инерционное линейное звено с импульсной переходной функцией  $Q(t)$  (рис. 2)\*. Вход объекта теперь обозначен через  $V$ ;  $X$  — вход нелинейного элемента (в этом случае — промежуточная переменная), как правило, не поддается специальным измерениям.

Для определения параметров нелинейного звена следует, в соответ-

\* В [3] приводятся соображения, которые могут помочь установить принадлежность изучаемого объекта к данному типу.

ствии с (4), выразить моментные функции  $\bar{X}$ ,  $\bar{X}^2$ , ...,  $\overline{X^2 X_\tau^2}$  в правой части этого равенства через статистические характеристики входного сигнала (которые должны быть в конечном счете функциями одной переменной  $\tau$ ) и параметры импульсной переходной функции  $Q(t)$ . Нужные для этой цели выражения могут быть найдены так.

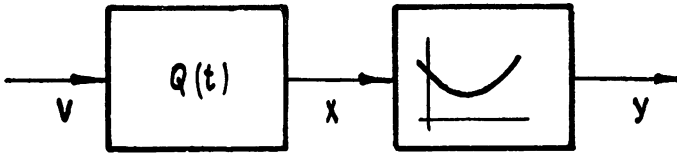


Рис. 2.

По определению импульсной переходной функции можно написать

$$X(t) = \int_0^{\infty} Q(\xi) V(t - \xi) d\xi. \quad (6)$$

Как нетрудно показать [5], для стационарного процесса

$$\bar{X}(t) = \bar{V} \int_0^{\infty} Q(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Используя (6), для квадрата переменной  $X^2$  имеем

$$X^2(t) = \left[ \int_0^{\infty} Q(\xi) V(t - \xi) d\xi \right]^2;$$

среднее по времени от этой величины

$$\bar{X}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ \int_0^{\infty} Q(\xi) V(t - \xi) d\xi \right]^2 dt. \quad (8)$$

Приведем это выражение к виду, содержащему не сам входной сигнал, а его статистические характеристики. Для этой цели правую часть (8) представим так:

$$\bar{X}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ \int_0^{\infty} Q(\xi) V(t - \xi) d\xi \right] \left[ \int_0^{\infty} Q(\eta) V(t - \eta) d\eta \right] dt.$$

Произведение под знаком внешнего интеграла можно трактовать и как двойной интеграл [6]. Таким образом,

$$\bar{X}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_0^{\infty} Q(\xi) d\xi \int_0^{\infty} Q(\eta) V(t - \xi) V(t - \eta) d\eta. \quad (9)$$

Меняя порядок интегрирования, усредняем выражение, содержащее  $t$ . Учитывая, что для стационарных процессов

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V(t - \xi) V(t - \eta) dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V(t) V(t + \xi - \eta) dt = \\ &= \overline{V V_\tau}(\xi - \eta), \end{aligned}$$

выражение (9) можно написать в виде

$$\overline{X^2} = \int_0^\infty Q(\xi) d\xi \int_0^\infty Q(\eta) \overline{VV}_\tau(\xi - \eta) d\eta. \quad (10)$$

Моментная функция  $\overline{XX}_\tau$  в зависимости от функции  $\overline{VV}_\tau$ , которую можем считать известной, определяется уравнением [6]

$$\overline{XX}_\tau(\tau) = \int_0^\infty Q(\xi) d\xi \int_0^\infty Q(\eta) \overline{VV}_\tau(\tau - \eta + \xi) d\eta. \quad (11)$$

Для вычисления  $\overline{XX}_\tau^2$  нам придется обратиться к моментной функции третьего порядка от входного сигнала. Действительно, в соответствии с (6)

$$X(t)X_\tau^2(t + \tau) = \int_0^\infty Q(\xi) V(t - \xi) d\xi \left[ \int_0^\infty Q(\eta) V(t + \tau - \eta) d\eta \right]^2. \quad (12)$$

Представив правую часть (12) в виде произведения трех интегралов и сведя его к тройному интегралу, получим:

$$\overline{XX}_\tau^2 = \int_0^\infty Q(\xi) d\xi \int_0^\infty Q(\eta) d\eta \int_0^\infty Q(\zeta) V(t - \xi) V(t + \tau - \eta) V(t + \tau - \zeta) d\zeta. \quad (13)$$

Усредним по времени обе части последнего равенства. При этом учтем, что для стационарного процесса

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V(t - \xi) V(t + \tau - \eta) V(t + \tau - \zeta) d\zeta = \quad (14)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V(t) V(t + \tau - \eta + \xi) V(t + \tau - \zeta + \xi) dt = \overline{VV}_\tau(\tau - \eta + \xi, \tau - \zeta + \xi).$$

Эта моментная функция третьего порядка зависит, вообще говоря, от двух переменных  $\tau_1 = \tau - \eta + \xi$  и  $\tau_2 = \tau - \zeta + \xi$ , означающих сдвиг аргументов второго и третьего сомножителей по отношению к первому. Следовательно,

$$\overline{XX}_\tau^2 = \int_0^\infty Q(\xi) d\xi \int_0^\infty Q(\eta) d\eta \int_0^\infty Q(\zeta) \overline{VV}_\tau(\tau - \eta + \xi, \tau - \zeta + \xi) d\zeta. \quad (15)$$

По аналогии с (15) можно получить выражение для  $\overline{X^2X}_\tau$ :

$$\overline{X^2X}_\tau = \int_0^\infty Q(\xi) d\xi \int_0^\infty Q(\eta) d\eta \int_0^\infty Q(\zeta) \overline{VV}_\tau(\xi - \eta, \tau + \xi - \zeta) d\zeta. \quad (16)$$

Для моментной функции  $\overline{X^2X}_\tau^2$  такими же приемами получим выражение

$$\begin{aligned} \overline{X^2X}_\tau^2 &= \int_0^\infty Q(\xi) d\xi \int_0^\infty Q(\eta) d\eta \int_0^\infty Q(\zeta) d\zeta \times \\ &\times \int_0^\infty Q(\chi) \overline{VVVV}_\tau(\tau - \eta + \xi, \tau - \zeta + \xi, \tau - \chi + \xi) d\chi. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, мы нашли выражения для всех моментных функций, входящих в (4); все они содержат неизвестную импульсную переходную функцию  $Q(t)$ . Известно [7], что для большинства промышленных объектов  $Q$  соответствует звену первого или второго порядка и имеет типовую форму с небольшим числом параметров. Простейшая и самая распространенная импульсная переходная функция отвечает аperiодическому звену и имеет вид

$$Q(t) = e^{-(1/T)t} \quad (18)$$

(отличный от единицы коэффициент усиления может быть отнесен к нелинейному звену). Все моментные функции, входящие в (9)—(11), (13), (15)—(17) с любой степенью точности могут быть выражены через тригонометрические, показательные функции и их суммы и произведения так, что их произведения на типовые импульсные функции в указанных выражениях интегрируются в общем виде\*. В итоге, как будет показано ниже на примере, мы избавляемся от всех интегралов, входящих через моментные функции в правую часть (4). Левая часть этого выражения определяется непосредственно по данным эксперимента. Если выполнены все допущения, сделанные при выводе этого равенства, то оно будет выполняться тождественно по  $\tau$ . Придавая этой величине нужное число фиксированных значений, получим соответствующее число уравнений для определения всех постоянных, от которых зависит вид и расположение статической характеристики объекта и также входящих в импульсную переходную функцию. Разумеется, должны быть учтены возможности физической реализации полученных решений: все комплексные и мнимые корни отбрасываются, учитываются только положительные значения для постоянных времени. Некоторое расхождение в величинах параметров, получаемых из разных систем уравнений, образованных при различных  $\tau$ , свидетельствует либо о том, что характеристика сильно отличается от параболической, либо о том, что в расчетах следует брать импульсную функцию  $Q$  для звена с уравнением более высокого порядка, т. е. использовать следующее приближение в решении нашей задачи.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведенные выше рассуждения и расчеты полезно проиллюстрировать примером. Предположим, что соображения физического порядка (см. примечание на стр. 951) говорят нам о том, что модель объекта состоит из последовательно включенного инерционного и нелинейного звеньев. Допустим, что сняв осциллограммы входа и выхода, нам удалось построить моментные функции входа  $\bar{V}$ ,  $\bar{V}^2$ ,  $\bar{V}\bar{V}_\tau$ ,  $\bar{V}\bar{V}\bar{V}_\tau$  и  $\bar{V}\bar{V}\bar{V}\bar{V}_\tau$  и мы нашли моментную функцию выхода  $\bar{Y}\bar{Y}_\tau(\tau)$ .

Допустим, что с достаточной степенью точности функции входа представляются такими выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{V}\bar{V}_\tau(\tau) &= Ae^{-\tau/\tau_0}; \\ \bar{V}\bar{V}\bar{V}_\tau(\tau) &= Be^{-\tau/\tau_1}e^{-\tau/\tau_2}; \\ \bar{V}\bar{V}\bar{V}\bar{V}_\tau(\tau) &= Ce^{-\tau/\tau_1}e^{-\tau/\tau_2}e^{-\tau/\tau_3}. \end{aligned}$$

Моментная функция выхода  $\bar{Y}\bar{Y}_\tau(\tau)$  для расчетов не обязательно представляется аналитическим выражением; она может быть задана и таблицей.

\* Практически специальной аппроксимации делать не придется, поскольку эту операцию все равно приходится выполнять, переходя от графиков на выходе коррелографов к записи в аналитической форме.

Пусть имеются основания считать, что инерционная часть системы — это аperiodическое звено с импульсной переходной функцией вида (18). (Такое же выражение для  $Q$  выбирается при решении задачи в первом приближении.) Для того, чтобы при решении задачи мы имели возможность использовать основное уравнение (4), следует найти моментные функции, входящие в его правую часть.

Для нашего случая, в соответствии с (7),

$$\bar{X} = T\bar{V}. \tag{19}$$

Далее, интегрируя (10) при указанных выше значениях  $Q$  и  $\bar{V}\bar{V}_\tau$ , получаем

$$\bar{X}^2 = \int_0^\infty e^{-\xi/T} d\xi \int_0^\infty e^{-\eta/T} A e^{-\gamma_0(\xi-\eta)} d\eta = \frac{AT}{\gamma_0(1-\gamma_0T)}. \tag{20}$$

Используя (11), находим моментную функцию

$$\bar{X}\bar{X}_\tau(\tau) = \int_0^\infty e^{-\xi/T} d\xi \int_0^\infty e^{-\eta/T} A e^{-\gamma_0(\tau-\eta+\xi)} d\eta$$

или, что то же самое,

$$\bar{X}\bar{X}_\tau(\tau) = \frac{AT^2}{1-(\gamma_0T)^2} e^{-\gamma_0\tau}. \tag{21}$$

Используя (15), найдем

$$\bar{X}\bar{X}_\tau^2 = \int_0^\infty e^{-\xi/T} d\xi \int_0^\infty e^{-\eta/T} d\eta \int_0^\infty e^{-\zeta/T} B e^{-\gamma_1(\tau-\eta+\zeta)} e^{-\gamma_2(\tau-\zeta+\xi)} d\zeta.$$

После выполнения всех операций интегрирования в правой части последнего равенства придем к выражению

$$\bar{X}\bar{X}_\tau^2(\tau) = \frac{BT^3}{(1-\gamma_1T)(1-\gamma_2T)(1+\gamma_1T+\gamma_2T)} e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\tau}. \tag{22}$$

Используя (16), таким же образом получим

$$\bar{X}^2\bar{X}_\tau = \frac{BT^3}{(1-\gamma_1T)(1-\gamma_2T)(1+\gamma_1T+\gamma_2T)} e^{-\gamma_2\tau}. \tag{23}$$

Последняя моментная функция  $\bar{X}^2\bar{X}_\tau^2$ , согласно (17), равна

$$\begin{aligned} \bar{X}^2\bar{X}_\tau^2(\tau) = & \int_0^\infty e^{-\xi/T} d\xi \int_0^\infty e^{-\eta/T} d\eta \int_0^\infty e^{-\zeta/T} d\zeta \int_0^\infty e^{-\chi/T} C e^{-\gamma_3(\tau-\eta+\xi)} \times \\ & \times e^{-\gamma_4(\tau-\zeta+\xi)} e^{-\gamma_5(\tau-\chi+\xi)} d\chi. \end{aligned}$$

Пропуская все элементарные операции, которые нам придется выполнить при указанном интегрировании, сразу запишем:

$$\bar{X}^2\bar{X}_\tau^2 = \frac{CT^4}{(1-\gamma_3T)(1-\gamma_4T)(1-\gamma_5T)[1+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)T]} e^{-(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5)\tau}. \tag{24}$$

Собирая значения всех моментных функций из (19) — (24) в уравнении (4), получим для нашего случая выражение

$$\bar{Y}\bar{Y}_\tau(\tau) = c^2 - 4acqT\bar{V} + 2cq \frac{AT}{\gamma_0(1-\gamma_0T)} + 4a^2q^2 \frac{AT^2}{1-(\gamma_0T)^2} e^{-\gamma_0\tau} -$$

$$-4aq^2 \frac{BT^3}{(1-\gamma_1 T)(1-\gamma_2 T)(1+\gamma_1 T+\gamma_2 T)} e^{-\gamma_3 \tau} (1+e^{-\gamma_1 \tau}) + \quad (25)$$

$$+ q^2 \frac{CT^4 e^{-(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5)\tau}}{(1-\gamma_3 T)(1-\gamma_4 T)(1-\gamma_5 T)[1+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)T]}.$$

Моментную функцию  $\overline{Y\overline{Y}}_\tau$ , отыскиваемую с помощью осциллограммы выхода объекта, здесь следует считать известной.

Фиксируя в (25) четыре значения  $\tau$ , получаем четыре уравнения для определения  $a$ ,  $b$  (или  $c$ ),  $q$  и  $T$ :

$$\overline{Y\overline{Y}}_\tau(\tau_i) = c^2 - 4acqT\overline{V} + 2cq \frac{AT}{\gamma_0(1-\gamma_0 T)} + 4a^2 q^2 \frac{AT^2}{1-(\gamma_0 T)^2} e^{-\gamma_0 \tau_i} -$$

$$- 4aq^2 \frac{BT^3}{(1-\gamma_1 T)(1-\gamma_2 T)(1+\gamma_1 T+\gamma_2 T)} e^{-\gamma_3 \tau_i} (1+e^{-\gamma_1 \tau_i}) + \quad (26)$$

$$+ q \frac{CT^4 e^{-(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5)\tau_i}}{(1-\gamma_3 T)(1-\gamma_4 T)(1-\gamma_5 T)[1+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)T]},$$

где  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Систему уравнений (26) можно несколько упростить, учтя структуру членов в правых частях. Можно, например, временно исключить неизвестную  $c$ , вычитая одно из другого два уравнения, составленные для разных  $\tau_i$  ( $\tau_i$  и  $\tau_k$ ). Такая операция приведет нас к системе трех уравнений вида

$$\frac{\overline{Y\overline{Y}}_\tau(\tau_i) - \overline{Y\overline{Y}}_\tau(\tau_k)}{q^2} = 4a^2 \frac{A(e^{-\gamma_0 \tau_i} - e^{-\gamma_0 \tau_k}) T^2}{(1-\gamma_0 T)(1+\gamma_0 T)} -$$

$$- 4a^2 \frac{BT^3(e^{-\gamma_3 \tau_i} + e^{-\gamma_1 \gamma_3 \tau_i} - e^{-\gamma_3 \tau_k} - e^{-\gamma_1 \gamma_3 \tau_k})}{(1-\gamma_1 T)(1-\gamma_2 T)(1+\gamma_1 T+\gamma_2 T)} + \quad (27)$$

$$+ \frac{CT^4(e^{-(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5)\tau_i} - e^{-(\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5)\tau_k})}{(1-\gamma_3 T)(1-\gamma_4 T)(1-\gamma_5 T)[1+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)T]}.$$

Хотя можно было бы произвести дальнейшие исключения неизвестных, сведя систему к одному уравнению, содержащему, скажем,  $T$ , в общем виде его все равно решить не удастся, а промежуточные преобразования неудобны тем, что они сопровождаются операциями, при которых появляются ложные корни соответствующих уравнений. Конечный процесс вычислений сводится к численному решению системы (27) при заданных  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\gamma_0$ , ...,  $\gamma_5$ ,  $\tau_i$ ,  $\tau_k$  и известных  $\overline{Y\overline{Y}}_\tau(\tau_i)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н Винер, Нелинейные задачи в теории случайных процессов, ИЛ, М., 1961.
- 2 Приспосабливающиеся автоматические системы, под ред. Э. Мишкина и Л. Брауна, ИЛ, М., 1963.
- 3 В. М. Кунцевич, Системы экстремального управления, Гостехиздат УССР, 1961.
- 4 В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951.
- 5 В. С. Пугачев, Теория случайных функций, Физматгиз, М., 1960.
- 6 Дж. Х. Лэннинг, Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1959.
- 7 Е. К. Круг, О. М. Минина, Электрические регуляторы промышленной автоматики, Госэнергоиздат, М., 1962.

THE DETERMINATION OF NONLINEAR OBJECT CHARACTERISTICS IN THE  
PROCESS OF THEIR NORMAL OPERATION*B. A. Aref'ev*

The determination method of the nonlinear object characteristics is investigated in the process of their normal operation according to the statistical properties of the input and output signals. The mathematical calculating model of the object is represented by the series connected inertia and nonlinear element. Parameters of these elements are determined according to the record of one realization of process.

---



УДК 62.506

## ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШЕЙ СИСТЕМЫ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ШАГОВОГО ТИПА

Н. Н. Леонов

С помощью метода точечных отображений изучаются режимы работы простейшей системы экстремального регулирования с шаговым типом поиска. Установлено существование континуального множества периодических режимов работы системы и выяснена их зависимость от начальных условий.

Изучению систем экстремального регулирования с шаговым типом поиска посвящен ряд работ [2-9], но в этих работах либо рассматриваются лишь симметричные режимы, либо отмечается зависимость периодических режимов от начальных условий, но не изучается эта зависимость.

В настоящей статье с помощью метода точечных отображений изучается простейшая система экстремального регулирования шагового типа. Установлено существование континуального множества периодических режимов работы системы, среди которых лишь конечное число симметричных, и выяснена их зависимость от начальных условий. Исследование зависимости периодических режимов от начальных условий позволило дать оценку ошибке слежения за экстремумом нелинейной характеристики объекта регулирования.

1. Уравнения движения. Фазовое пространство. Уравнения движения простейшей системы экстремального регулирования шагового типа можно записать следующим образом (описание работы системы см. в [1]):

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \varphi &= -u^2; \\ \dot{u} &= \begin{cases} \eta, & \text{если } n\tau < t < n\tau + t_1 \\ 0, & \text{если } n\tau + t_1 < t < n\tau + \tau \end{cases}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\eta = F[\varphi(n\tau) - \varphi(n\tau - \tau) + \Delta] \operatorname{sgn} \dot{u}(n\tau - \tau + \rho),$$

где

$$F(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0 \\ -1, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 0 < \rho < t_1, \quad \tau = t_1 + t_2,$$

а  $t_1$ ,  $t_2$  и  $\Delta$  — положительные параметры. При  $0 < t < t_1$   $\dot{u}$  постоянно и равно либо  $+1$ , либо  $-1$ , а при  $t_1 < t < \tau$   $u = 0$ .

Система (1) имеет трехмерное фазовое пространство  $\Phi(t, u, \varphi)$ , образованное пространствами  $\Phi_{+1}$ ,  $\Phi_0$  и  $\Phi_{-1}$ , такими, что в них  $u$  равно  $+1$ ,  $0$  и  $-1$  соответственно. При  $n\tau + t_1 < t < n\tau + \tau$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) пространство  $\Phi$  есть  $\Phi_0$ . При  $n\tau < t < n\tau + t_1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) пространство  $\Phi$  образовано пространствами  $\Phi_{+1}$  и  $\Phi_{-1}$ ; в этом случае  $\Phi$  является трехмерным аналогом двулистного плоского пространства (см. [10]).

В системах экстремального регулирования шагового типа вход объекта изменяется импульсно, шагами. Длительность каждого шага  $\tau$ , а длительность импульса, изменяющего входную координату объекта,  $t_1$ .

Движение фазовой точки в пространстве  $\Phi$  происходит следующим образом. Первые  $t_1$  единиц времени каждого шага фазовая точка, в зависимости от знака  $\eta$ , движется вдоль траектории пространства  $\Phi_{+1}$  или  $\Phi_{-1}$  и затем  $t_2$  единиц времени вдоль соответствующей траектории пространства  $\Phi_0$ . Знак  $\eta$  на каждом шаге определяется на основе анализа движения системы на предшествующем шаге. Если началу предшествующего шага сопоставить момент времени  $t = 0$ , то при  $\varphi(\tau) - \varphi(0) + \Delta > 0$  знак  $\eta$  на следующем шаге не меняется, а при  $\varphi(\tau) - \varphi(0) + \Delta \leq 0$  знак  $\eta$  на следующем шаге меняется на обратный.

Уравнения фазовых траекторий в пространстве  $\Phi_{+1}$  имеют вид

$$u = u_0 + t_1, \quad \varphi = Ce^{-u} - u^2 + 2u - 2. \quad (2)$$

Проекция этих траекторий на плоскость  $u\varphi$  изображены на рис. 1а. По этим траекториям фазовая точка из области  $\varphi > 0$  приходит в область  $\varphi < 0$ , а из области  $\varphi < 0$  в область  $\varphi > 0$  попасть не может.

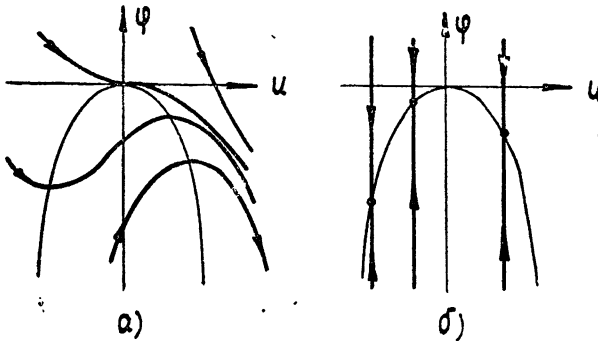


Рис. 1.

В пространстве  $\Phi_0$  уравнения фазовых траекторий имеют вид.

$$u = u_0, \quad \varphi = (\varphi_0 + u_0^2)e^{-t} - u_0^2. \quad (3)$$

Проекция этих траекторий на плоскость  $u\varphi$  изображены на рис. 1б. Фазовая точка по ним из области  $\varphi > 0$  приходит в область  $\varphi < 0$ , а из области  $\varphi < 0$  в область  $\varphi > 0$  попасть не может.

Из (1) следует, что траектории пространства  $\Phi_{-1}$  симметричны относительно плоскости  $u = 0$  траекториям пространства  $\Phi_{+1}$ . Поэтому фазовая точка и в пространстве  $\Phi_{-1}$  из области  $\varphi > 0$  приходит в область  $\varphi < 0$ , а из области  $\varphi < 0$  в область  $\varphi > 0$  попасть не может.

Таким образом, для изучения режимов работы рассматриваемой системы достаточно ограничиться областью  $\varphi < 0$  фазового пространства.

2. Сведение задачи к точечному отображению. Все движения системы разбиваются на движения по шагам, каждый длительностью  $\tau$  единиц времени. Пусть в начале некоторого шага ( $t = 0$ ) фазовая точка  $(0, u_0, \varphi_0) \in \Phi_\eta$  (т. е.  $\Phi_{+1}$  или  $\Phi_{-1}$ ). Спустя  $t_1$  единиц времени ее координаты примут следующие значения:

$$u'_1 = u_0 + \eta t_1, \quad \varphi'_1 = Ae^{-t_1} - t_1^2 - at_1 - b, \quad (4)$$

где  $a = 2(u_0\eta - 1)$ ,  $b = u_0^2 - a$ ,  $A = \varphi_0 + b$ , и она перейдет в пространство  $\Phi_0$ . Спустя еще  $t_2$  единиц времени ее координаты примут значения.

$$u_1 = u'_1, \quad \varphi_1 = \varphi'_1 e^{-t_2} - u_1'^2 (1 - e^{-t_2}). \quad (5)$$

Равенства (4) и (5) задают отображение точки  $(u_0, \varphi_0)$  плоскости  $t = 0$  в точку  $(u_1, \varphi_1)$  плоскости  $t = \tau$ . Исходя из этого, приходим к отображению  $\Pi$  плоскости  $t = 0$  в себя:

$$u_1 = u_0 + \eta t_1, \quad \varphi_1 = \nu \varphi_0 + \psi(\eta u_0), \quad (6)$$

где  $\nu = e^{-\tau}$ ,  $\psi(\eta u_0) = \nu(u_0^2 - 2\eta u_0 + 2) - (\eta u_0 + t_1)^2 + 2(\eta u_0 + t_1 - 1)e^{-t_1}$ .

Покажем, что отображение  $\Pi$  имеет неподвижные точки кратности  $n \geq 4$ . Обозначим для этого отображение  $\Pi$  при  $\eta = +1$  через  $\Pi_{+1}$ , а при  $\eta = -1$  через  $\Pi_{-1}$ . Тогда  $\Pi^n = \Pi_{i_n} \Pi_{i_{n-1}} \dots \Pi_{i_1}$ , где  $i_s (s=1, 2, \dots, n)$  равно либо  $+1$ , либо  $-1$ . Обозначив через  $(u_n, \varphi_n)$   $n$ -ую итерацию точки  $(u_0, \varphi_0)$ , получим, согласно (6),

$$u_n = u_0 + t_1 \sum_{s=1}^n i_s, \quad \varphi_n = \nu^n \varphi_0 + F_n(u_0), \quad (7)$$

где  $F_n(u_0)$  — некоторая функция, не зависящая от  $\varphi_0$ . Из (7) следует, что отображение  $\Pi^n$  может иметь неподвижные точки лишь в том случае, когда  $\sum_{s=1}^n i_s = 0$ ; последнее может иметь место лишь при четном  $n$ . Если допустить существование у отображения  $\Pi$  двухкратной неподвижной точки, то при движении фазовой точки по соответствующей замкнутой траектории после каждого шага происходило бы изменение знака  $\eta$ , т. е. на каждом шаге  $\varphi$  уменьшалось бы не менее, чем на  $\Delta$ . Поэтому отображение  $\Pi$  двухкратных неподвижных точек не имеет.

Таким образом, для отыскания неподвижных точек отображения  $\Pi$  нужно исследовать отображение  $\Pi^n$  ( $n \geq 4$ ) при выполнении условия  $\sum_{s=1}^n i_s = 0$ :

$$u_n = u_0, \quad \varphi_n = \nu^n \varphi_0 + F_n(u_0). \quad (8)$$

Из (8) следует, что характеристическое уравнение отображения  $\Pi^n$  имеет один единичный корень ( $\lambda_1 = 1$ ) и один корень, меньший единицы ( $\lambda_2 = \nu^n$ ), и что отображение  $\Pi$  для фиксированного натурального  $n \geq 4$  либо не имеет неподвижных точек кратности  $n$ , либо имеет инвариантную кривую  $\varphi_n^* = (1 - \nu^n)^{-1} F_n(u_n^*)$ , образованную неподвижными точками  $(u_n^*, \varphi_n^*)$  кратности  $n$ . Отыскание этих неподвижных точек, как нетрудно обнаружить, сводится к изучению отображения прямой в прямую.

Очевидно,  $u_0$  можно записать так:  $u_0 = (m - \theta)t_1$ , где  $m$  — некоторое целое число, а  $\theta \in [0, 1)$ . Тогда  $u_0 + \eta t_1 = (m + \eta - \theta)t_1$ .

Обозначим отображение  $\Pi_{+1}$ , определенное на линии  $u = (m - \theta)t_1$  и отображающее ее точки в точки линии  $u = (m + 1 - \theta)t_1$ , через  $A_{m, m+1}$ . Согласно (6),

$$A_{m, m+1} \varphi = \nu \varphi + f(m - \theta), \quad (9)$$

где  $f(x) = \psi(xt_1)$ .

Отображение  $\Pi_{-1}$ , определенное на линии  $u = (m - \theta)t_1$  и переводящее ее точки в точки линии  $u = (m - 1 - \theta)t_1$ , обозначим через  $B_{m, m-1}$ . Согласно (6),

$$B_{m, m-1} \varphi = \nu \varphi + f_1(m - \theta), \quad (10)$$

где  $f_1(m - \theta) = f(\theta - m)$ .

Обозначим через  $H$  отображение, распадающееся на отображения  $A_{m, m+1}$  и  $B_{m, m-1}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Отображение  $H$  при каждом фиксированном  $\theta \in [0, 1)$  определено на множестве точек прямых

$u = (m - \theta)t_1$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и отображает эти точки в точки этого же множества. Поэтому отыскание неподвижных точек отображения  $H$  сводится к изучению некоторого отображения  $T$  прямой в прямую. Поскольку при фиксированном  $\theta$  неподвижные точки отображения  $\Pi$  являются неподвижными точками отображения  $H$ , изучение неподвижных точек отображения  $\Pi$  при каждом фиксированном  $\theta$  сводится к изучению указанного отображения  $T$  прямой в прямую.

3. *Изучение отображения  $H$ .* В силу симметрии фазовой картины относительно плоскости  $u = 0$ , изучение отображения  $H$  достаточно провести лишь при  $\theta \in [0, 1/2]$ .

Рассмотрим диаграмму  $\varphi, \bar{\varphi} = H\varphi$  отображения  $H$ . На этой диаграмме отображениям  $A_{m, m+1}$  и  $B_{m, m-1}$  соответствуют параллельные прямые  $a_{m, m+1}$  и  $b_{m, m-1}$  с коэффициентом наклона  $\nu$ , пересекающие ось  $\bar{\varphi}$  в точках  $(0, f(m - \theta))$  и  $(0, f_1(m - \theta))$  соответственно.

Взаимное расположение прямых  $a_{m, m+1}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) на плоскости  $\varphi, \bar{\varphi}$  характеризуется следующими соотношениями ( $m \geq 0$ ):

$$f(-m - 2 - \theta) < f(m - \theta) < f(-m - 1 - \theta) \text{ при } 0 \leq \theta < \theta_1; \quad (11)$$

$$f(-m - 2 - \theta) < f(m - \theta) = f(-m - 1 - \theta) \text{ при } \theta = \theta_1; \quad (12)$$

$$f(m + 1 - \theta) < f(-m - 1 - \theta) < f(m - \theta) \text{ при } \theta_1 < \theta \leq 0,5, \quad (13)$$

где  $\theta_1 \in (0, 1/2)$ ,  $\theta_1 = (t_1 - 2e^{-t_1} + 2\nu + t_1\nu)0,5t_1^{-1}(1 - \nu)^{-1}$ , а взаимное расположение прямых  $b_{m, m-1}$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) характеризуется соотношениями ( $m \geq 0$ )

$$f_1(-m - \theta) < f_1(m + 2 - \theta) < f_1(1 - m - \theta) \text{ при } 1 - \theta_2 < \theta \leq 0,5; \quad (14)$$

$$f_1(-m - \theta) = f_1(m + 2 - \theta) < f_1(1 - m - \theta) \text{ при } \theta = 1 - \theta_2; \quad (15)$$

$$f_1(m + 2 - \theta) < f_1(-m - \theta) < f_1(m + 1 - \theta) \text{ при } 0 \leq \theta < 1 - \theta_2, \quad (16)$$

где  $\theta_2 \in (1/2, 1)$ ,  $\theta_2 = (t_1 - e^{-t_1} + \nu)t_1^{-1}(1 - \nu)^{-1}$ .

Расположение линий  $b_{m, m-1}$  относительно линий  $a_{m, m+1}$  в плоскости  $\varphi, \bar{\varphi}$  характеризуется следующими соотношениями:

$$f_1(1 - \theta) > f(-\theta), \quad f_1(1 - \theta) > f(-1 - \theta) \text{ при } \theta \in [0, 1/2]; \quad (17)$$

$$f(-m - \theta) < f_1(m - \theta) < f(m - 2 - \theta) \text{ при } m > 1 \text{ и } \theta \in [0, \theta_1]; \quad (18)$$

$$f(m - \theta) < f_1(-m - \theta) < f(-m - 2 - \theta) \text{ при } m \geq 0 \text{ и } \theta \in [0, \theta_1]; \quad (19)$$

$$f(m - 1 - \theta) < f_1(m - \theta) < f(1 - m - \theta) \text{ при } m > 1 \text{ и } \theta \in [\theta_1; 0,5]; \quad (20)$$

$$f(m + 1 - \theta) < f_1(-m - \theta) < f(-m - 1 - \theta) \text{ при } m \geq 0 \text{ и } \theta \in [\theta_1; 0,5). \quad (21)$$

Кроме того,  $f(m - \theta) < 0$  и  $f_1(m - \theta) < 0$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Диаграмма отображения  $H$  для  $0 \leq \theta < \min(\theta_1; 0,5 - \theta_1)$  изображена на рис. 2.

Последовательность  $\{H^n \varphi\}$  итераций точки  $\varphi$  образуется по следующему закону. Пусть  $H^n \varphi = A_{m-1, m} H^{n-1} \varphi$  (или  $H^n \varphi = B_{m+1, m} H^{n-1} \varphi$ ). Если при этом  $H^n \varphi > H^{n-1} \varphi - \Delta$ , то  $H^{n+1} \varphi = A_{m, m+1} H^n \varphi$  (или соответственно  $H^{n+1} \varphi = B_{m, m-1} H^n \varphi$ ). Если же  $H^n \varphi \leq H^{n-1} \varphi - \Delta$ , то  $H^{n+1} \varphi = B_{m, m-1} H^n \varphi$  (или соответственно  $H^{n+1} \varphi = A_{m, m+1} H^n \varphi$ ).

Обозначим через  $A_{m, m+p}$  и  $B_{m, m-p}$  произведения преобразований  $A_{m+p-1, m+p} A_{m+p-2, m+p-1} \dots A_{m, m+1}$  и  $B_{m-p+1, m-p} B_{m-p+2, m-p+1} \dots B_{m, m-1}$ .

Из (9) получаем

$$A_{m, m+p} \varphi = v^p \varphi + a(m, p), \quad (22)$$

где

$$a(m, p) = (1-v^p)(1-v)^{-1} f(m-\theta) + [g + 2h(m-\theta)](1-v)^{-2}(1-p+pv-v^p) + h(1-v)^{-3}[-(p-1)^2 + (2p^2 - 2p - 1)v - p^2v^2 + v^p + v^{p+1}],$$

$$g = 2t_1(t_1 - e^{-t_2} + v), \quad h = t_1^2(1-v).$$

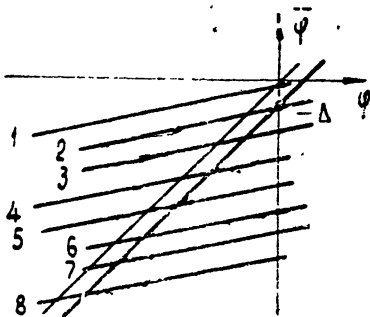


Рис. 2. Индексами 1, 2, ..., 8 обозначены линии  $b_{1,0}$ ,  $a_{-1,0}$ ,  $a_{0,1}$ ,  $b_{0,-1}$ ,  $b_{2,1}$ ,  $a_{-2,-1}$ ,  $a_{1,2}$ ,  $b_{-1,-2}$ .

Можно показать, что для любых фиксированных  $m$  и  $\varphi$ , таких, что  $A_{m, m+1} \varphi > \varphi - \Delta$ , существует такое конечное  $p > 0$ , что  $A_{m, m+p} \varphi - A_{m, m+p-1} \varphi \leq -\Delta$ , и для любых фиксированных  $m$  и  $\varphi$ , таких, что  $B_{m, m-1} \varphi > \varphi - \Delta$ , существует такое  $p > 0$ , что  $B_{m, m-p} \varphi - B_{m, m-p+1} \varphi \leq -\Delta$ . При этом

$$B_{m, m-p} \varphi = v^p \varphi + b(m, p), \quad (23)$$

где

$$b(m, p) = (1-v^p)(1-v)^{-1} f_1(m-\theta) + [g - 2h(m-\theta)](1-v)^{-2}(1-p+pv-v^p) + h(1-v)^{-3}[-(p-1)^2 + (2p^2 - 2p - 1)v - p^2v^2 + v^p + v^{p+1}].$$

4. Построение отображения  $T$ . Рассмотрим отображение точек линии  $l = -\theta t_1$ ,  $\varphi < 0$  (обозначим ее через  $l$ ), осуществляемое отображением  $H$ . При этом будем предполагать выполненным условие

$$\Delta < (g - h)(1 + v)^{-1}. \quad (24)$$

На основании изложенного выше можно утверждать, что в каждой точке линии  $l$  определено отображение  $A_{0,p}$  ( $p \geq 1$ ), такое, что  $A_{0,p-1} \varphi > A_{0,p-2} \varphi - \Delta$  ( $p > 1$ ) и  $A_{0,p} \varphi \leq A_{0,p-1} \varphi - \Delta$  ( $p \geq 1$ ) ( $A_{0,0} \varphi \equiv \varphi$ ). Согласно (22), выражение  $Q(p, \varphi) = A_{0,p} \varphi - A_{0,p-1} \varphi + \Delta$  ( $p \geq 1$ ) является линейной функцией  $\varphi$ . Поэтому существует  $\varphi = \alpha_p$ , для которого  $Q(p, \alpha_p) = 0$ . Согласно (9) и (22),  $\alpha_p = v^{1-p}(1-v)^{-1}[\Delta + f(p-1-\theta)] - v^{1-p}a(0, p-1)$  ( $p > 0$ ) и  $\alpha_0 = (1-v)^{-1}f(-1-\theta) < 0$ .

Нетрудно обнаружить, что при выполнении условия (24)  $\alpha_2 < \alpha_0$  и  $\alpha_2 < \alpha_1$  при  $\theta \in [0, 1/2]$ . Кроме того, можно показать, что  $\alpha_{p+1} < \alpha_p$  ( $p = 2, 3, \dots$ ) при  $\theta \in [0, 1/2]$ .

Таким образом, линия  $l$  разбивается на интервалы  $[\alpha_1, 0)$ ,  $[\alpha_p, \alpha_{p-1})$  ( $p = 2, 3, \dots$ ); в интервале  $[\alpha_1, 0)$  определено отображение  $A_{0,1}$  и  $A_{0,1} \varphi < \varphi - \Delta$  для  $\varphi \in (\alpha_1, 0)$ , а в интервале  $[\alpha_p, \alpha_{p-1})$  ( $p \geq 2$ ) определено отображение  $A_{0,p}$  и  $A_{0,p} \varphi < A_{0,p-1} \varphi - \Delta$  для  $\varphi \in (\alpha_p, \alpha_{p-1})$ . Поэтому в интервале  $[\alpha_1, 0)$  определено отображение  $B_{1,0} A_{0,1}$ , а в интервале  $[\alpha_p, \alpha_{p-1})$  ( $p \geq 2$ ) — отображение  $B_{p,p-1} A_{0,p}$ .

В том случае, когда  $B_{m, m-1} \varphi > \varphi - \Delta$ , имеет место неравенство  $B_{m, m-2} \varphi > B_{m, m-1} \varphi - \Delta$  для  $m \geq 2$ . Отсюда получаем, что если

$B_{p,p-1} A_{0,p} \varphi > A_{0,p} \varphi - \Delta$  ( $p \geq 2$ ) в некоторой точке  $\varphi \in [\alpha_p, \alpha_{p-1})$ , то в этой точке определено отображение  $B_{p,0} A_{0,p}$  и  $B_{p,0} A_{0,p} \varphi > B_{p,1} A_{0,p} \varphi - \Delta$ .

Обозначим через  $G_p(\theta)$  выражение  $B_{p,p-1} A_{0,p} \alpha_{p-1} - A_{0,p} \alpha_{p-1} + \Delta = \Delta(1 - \nu^2) + (2p - 1 - 2\theta)[g - h(1 + \nu)] - \nu(g - 2h)$ . Будем далее предполагать, что  $g > h(1 + \nu)$ . В этом случае  $G_p(\theta) > 0$  ( $p > 1$ ). Поэтому в интервале  $[\alpha_p, \alpha_{p-1})$  ( $p = 2, 3, \dots$ ) определено отображение  $B_{p,0} A_{0,p}$ , т. е. определено отображение линии  $l$  в себя (назовем его  $T_1$ ), распадающееся на отображения  $B_{p,0} A_{0,p}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ).

Отображение  $T_1$  является разрывным, ибо  $B_{p+1,0} A_{0,p+1} \alpha_p < B_{p,0} A_{0,p} \alpha_p$  ( $p \geq 1$ ). Согласно (22) и (23),  $\lim_{p \rightarrow \infty} B_{p,0} A_{0,p} \alpha_{p-1} = \delta = (1 - \nu)^{-3} \{f_1(-\theta)(1 - \nu)^2 + g(1 - \nu) + h[2\theta(1 - \nu) - 1 - \nu]\}$ . Диаграмма отображения  $T_1$  изображена на рис. 3а.

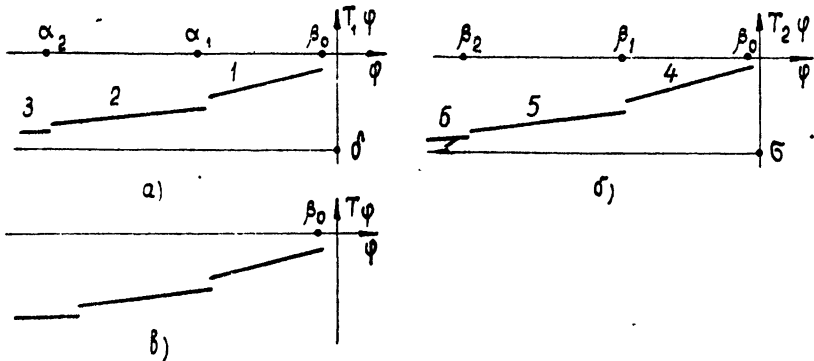


Рис. 3. 1, 2, ..., 6 — диаграммы отображений  $B_{1,0} A_{0,1}$ ,  $B_{2,0} A_{0,2}$ ,  $B_{3,0} A_{0,3}$ ,  $A_{-1,0} B_{0,-1}$ ,  $A_{-2,0} B_{0,-2}$ ,  $A_{-3,0} B_{0,-3}$ .

При построении отображения  $T_1$  мы опирались на тот факт, что в каждой точке линии  $l$  определено отображение  $A_{0,p}$  ( $p \geq 1$ ), такое, что  $A_{0,p} \varphi \leq A_{0,p-1} \varphi - \Delta$ . Но в каждой точке линии  $l$  определено также отображение  $B_{0,-p}$  ( $p \geq 1$ ), для которого  $B_{0,-p} \varphi \leq B_{0,1-p} \varphi - \Delta$  ( $B_{0,0} \varphi \equiv \varphi$ ). Согласно (23), выражение  $R(p, \varphi) = B_{0,-p} \varphi - B_{0,1-p} \varphi + \Delta$  ( $p \geq 1$ ) является линейной функцией  $\varphi$ . Поэтому существует  $\varphi = \beta_p$ , при котором  $R(p, \beta_p) = 0$ . Согласно (10) и (23),  $\beta_p = \nu^{1-p} |\Delta + f_1(1 - p - \theta)|(1 - \nu)^{-1} - \nu^{1-p} b(0, p - 1)$  ( $p \geq 1$ ) и  $\beta_0 = (1 - \nu)^{-1} f_1(1 - \theta) < 0$ .

При выполнении условия (24) и при  $\theta \in [0, 1/2]$  имеют место неравенства  $\beta_{p+1} < \beta_p$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ). Поэтому линия  $l$  разбивается на интервалы  $[\beta_1, \beta_0)$ ,  $[\beta_p, \beta_{p-1})$  ( $p = 2, 3, \dots$ ), такие, что в интервале  $[\beta_1, \beta_0)$  определено отображение  $B_{0,-1}$  и  $B_{0,-1} \varphi < \varphi - \Delta$  для  $\varphi \in (\beta_1, \beta_0)$ , а в интервале  $[\beta_p, \beta_{p-1})$  ( $p \geq 2$ ) определено отображение  $B_{0,-p}$  и  $B_{0,-p} \varphi < B_{0,1-p} \varphi - \Delta$  для  $\varphi \in (\beta_p, \beta_{p-1})$ . Следовательно, в интервале  $[\beta_1, \beta_0)$  определено отображение  $A_{-1,0} B_{0,-1}$ , а в интервале  $[\beta_p, \beta_{p-1})$  ( $p \geq 2$ ) отображение  $A_{-p,1-p} B_{0,-p}$ .

В том случае, когда  $A_{m,m+1} \varphi > \varphi - \Delta$ , имеет место неравенство  $A_{m,m+2} \varphi > A_{m,m+1} \varphi - \Delta$  для  $m \leq -2$ . На основании этого можно утверждать, что если  $A_{-p,1-p} B_{0,-p} \varphi > B_{0,-p} \varphi - \Delta$  ( $p \geq 2$ ) в некоторой точке  $\varphi \in [\beta_p, \beta_{p-1})$ , то в этой точке определено отображение  $A_{-p,0} B_{0,-p}$  и  $A_{-p,0} B_{0,-p} \varphi > A_{-p,-1} B_{0,-p} \varphi - \Delta$ .

Обозначим через  $G_p^1(\theta)$  выражение  $A_{-p,1-p} B_{0,-p} \beta_{p-1} - B_{0,-p} \beta_{p-1} + \Delta$ . Можно показать, что  $G_p^1(\theta) = G_p(-\theta)$ . А так как при  $g > h(1 + \nu)$

$G_p(-\theta) > G_p(\theta)$ , то  $G_p^1(\theta) > 0$ . Поэтому при  $g > h(1 + \nu)$  в интервале  $[\beta_p, \beta_{p-1})$  ( $p = 2, 3, \dots$ ) определено отображение  $A_{-p, 0} B_{0, -p}$ , т. е. определено отображение линии  $l$  в себя (назовем его  $T_2$ ), распадающееся на отображения  $A_{-p, 0} B_{0, -p}$  ( $p = 1, 2, \dots$ ).

Отображение  $T_2$  является разрывным, так как  $A_{-p-1, 0} B_{0, -p-1} \beta_p < A_{-p, 0} B_{0, -p} \beta_p$  ( $p \geq 1$ ). Согласно (22) и (23),  $\lim_{p \rightarrow \infty} A_{-p, 0} B_{0, -p} \beta_{p-1} = \sigma = (1 - \nu)^{-3} \{f(-\theta)(1 - \nu)^2 + g(1 - \nu) - h[1 + \nu + 2\theta(1 - \nu)]\}$ . Диаграмма отображения  $T_2$  изображена на рис. 3б.

С помощью диаграммы отображения  $H$  (рис. 2) нетрудно убедиться в том, что  $H\varphi < \varphi$  для  $\varphi \in [\beta_0, 0)$  и  $H\varphi < \beta_0$  для  $\varphi < \beta_0$ . Поэтому предельное множество последовательностей итераций, порождаемых отображением  $H$ , расположено в области  $\varphi < \beta_0$ .

Можно установить для любой точки линии  $u = (m - \theta)t_1$ ,  $\varphi < 0$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) существование такого натурального  $n$ , что  $H^n$  отображает эту точку в точку линии  $l$ . Поэтому изучение неподвижных точек отображения  $H$  при  $g > h(1 + \nu)$  сводится к изучению точечного отображения  $T$  части  $\varphi < \beta_0$  прямой  $l$  в себя.

Установим вид отображения  $T$ . Для этого из последовательности  $\{H^n \varphi\}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) выделим подпоследовательность  $\{H^{n_k} \varphi\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) точек, принадлежащих линии  $l$ .

Пусть в точке  $\varphi$  линии  $l$  определено отображение  $T_1$ . При выполнении условия  $g > h(1 + \nu)$  имеют место неравенства  $B_{p, 0} A_{0, p} \varphi > B_{p, 1} A_{0, p} \varphi - \Delta$  для  $\varphi \in [\alpha_p, \alpha_{p-1})$  ( $p = 2, 3, \dots$ ). Кроме того,  $B_{1, 0} A_{0, 1} \varphi > A_{0, 1} \varphi - \Delta$  для  $\varphi \in [\alpha_1, \beta_0)$ . Поэтому в точке  $T_1 \varphi$ , согласно закону образования последовательности  $\{H^n \varphi\}$ , определено отображение  $B_{0, -1}$ , т. е. определено отображение  $T_2$ , и следующей за  $T_1 \varphi$  точкой в последовательности  $\{H^{n_k} \varphi\}$  будет  $T_2 T_1 \varphi$ .

Если в точке  $\varphi$  линии  $l$  определено отображение  $T_2$ , то  $T_2 \varphi$  вновь принадлежит линии  $l$ . При этом  $A_{-p, 0} B_{0, -p} \varphi > A_{-p, -1} B_{0, -p} \varphi - \Delta$  для  $\varphi \in [\beta_p, \beta_{p-1})$  ( $p = 2, 3, \dots$ ) и  $A_{-1, 0} B_{0, -1} \varphi > B_{0, -1} \varphi - \Delta$  для  $\varphi \in [\beta_1, \beta_0)$ . Поэтому в точке  $T_2 \varphi$ , согласно закону образования последовательности  $\{H^n \varphi\}$ , определено отображение  $A_{0, 1}$ , т. е. определено отображение  $T_1$ , и следующей за  $T_2 \varphi$  точкой в  $\{H^{n_k} \varphi\}$  будет  $T_1 T_2 \varphi$ .

На основании изложенного выше можно утверждать, что  $\{H^{n_k} \varphi\}$ , в зависимости от первой итерации точки  $\varphi$ , имеет вид

$$\varphi, T_1 \varphi, T_2 T_1 \varphi, \dots, T_1 (T_2 T_1)^{n-1} \varphi, (T_2 T_1)^n \varphi, \dots \quad (25)$$

или

$$\varphi, T_2 \varphi, T_1 T_2 \varphi, T_2 T_1 T_2 \varphi, \dots, T_1 (T_2 T_1)^{n-1} T_2 \varphi, (T_2 T_1)^n T_2 \varphi, \dots \quad (26)$$

Предельные множества этих последовательностей совпадают. В этом нетрудно убедиться, положив в (26)  $T_2 \varphi = \varphi_1$ . Поэтому ограничимся последовательностью (25). Эта последовательность может быть разбита на две подпоследовательности:

$$\varphi, T_2 T_1 \varphi, \dots, (T_2 T_1)^n \varphi, \dots; \quad (27)$$

$$T_1 \varphi, T_1 T_2 T_1 \varphi, \dots, T_1 (T_2 T_1)^n \varphi, \dots, \quad (28)$$

такие, что каждая точка последовательности (27) отображается отображением  $T_1$  в соответствующую точку последовательности (28). Поэтому изучение предельного множества последовательности (25) сводится к изучению предельного множества последовательности (27).

Последовательность (27) порождается отображением  $T_2 T_1$ , которое и обозначим через  $T$ .

5. Исследование отображения  $T$ . Выше было указано, что  $T_1(\alpha_p + 0) > T_1(\alpha_p - 0)$  и  $T_2(\beta_p + 0) > T_2(\beta_p - 0)$ . Так как в области непрерывности отображений  $T_1$  и  $T_2$  функции  $T_1\varphi$  и  $T_2\varphi$  возрастающие, то  $T\varphi$  является возрастающей функцией  $\varphi$ , причем в точках разрыва непрерывности отображения  $T$  предел слева меньше соответствующего предела справа (рис. 3в). Это говорит о том, что отображение  $T$  имеет неподвижные точки кратности не выше первой.

Можно показать, что отображение  $T$  при любом  $\theta \in [0, 1/2)$  имеет по крайней мере одну простую неподвижную точку.

Так как отображение  $T_1$  распадается на отображения вида  $B_{q,0}A_{0,q}$  и отображение  $T_2$  — на отображения вида  $A_{-p,0}B_{0,-p}$ , то отображение  $T$  распадается на отображения вида  $A_{-p,0}B_{q,-p}A_{0,q}$ . Обозначим через  $\varphi_{p,q}^*$  неподвижную точку отображения  $T$ , такую, что  $\varphi_{p,q}^* = A_{-p,0}B_{q,-p}A_{0,q}\varphi_{p,q}^*$ . На основании изложенного выше можно утверждать, что при  $g > h(1 + \nu)$  и  $\Delta < (g - h)(1 + \nu)^{-1}$  отображение  $T$  имеет неподвижные точки лишь вида  $\varphi_{p,q}^*$ .

Покажем, что при  $\Delta < (g - h)(1 + \nu)^{-1}$  отображение  $T$  имеет неподвижные точки лишь двух типов —  $\varphi_{p,p}^*$  и  $\varphi_{p,p+1}^*$ .

Нетрудно проверить, что при  $\theta = 0$   $T_1 = T_2$  и  $T = T_1^2$ . Поэтому при  $\theta = 0$  отображение  $T$  имеет неподвижные точки лишь типа  $\varphi_{p,p}^*$ .

Величины  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  таковы, что  $\alpha_{p+1} < \beta_p < \alpha_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) при  $0 < \theta \leq 0,5$ . Далее, в точках, принадлежащих пересечению областей определения отображений  $B_{p,0}A_{0,p}$  и  $A_{-p,0}B_{0,-p}$  ( $p \geq 1$ ) имеет место неравенство:  $B_{p,0}A_{0,p}\varphi > A_{-p,0}B_{0,-p}\varphi$ . Наконец, при  $\Delta < (g - h)(1 + \nu)^{-1}$  справедливо неравенство  $A_{-p,0}B_{0,-p}\beta_p > \beta_p$  ( $p \geq 1$ ).

Из неравенств  $\alpha_{p+1} < \beta_p < \alpha_p$  ( $p = 1, 2, \dots$ ) следует, что точка  $\varphi = \alpha_p$  принадлежит области определения отображения  $A_{-p,0}B_{0,-p}$  и поэтому  $B_{p,0}A_{0,p}\alpha_p > A_{-p,0}B_{0,-p}\alpha_p$ , а так как  $\alpha_p > \beta_p$ , то  $A_{-p,0}B_{0,-p}\alpha_p > A_{-p,0}B_{0,-p}\beta_p$ . Однако  $A_{-p,0}B_{0,-p}\beta_p > \beta_p$  и, следовательно,  $B_{p,0}A_{0,p}\alpha_p > \beta_p$ . Поэтому  $B_{p,0}A_{0,p}\varphi > \beta_p$  для  $\varphi \in (\alpha_p, \alpha_{p-1})$ ; отсюда следует, что  $q \geq p$ . Далее,  $A_{-p,0}B_{0,-p}\beta_p > \beta_p > \alpha_{p+1}$  и поэтому  $A_{-p,0}B_{0,-p}\varphi > \alpha_{p+1}$  для  $\varphi \in [\beta_p, \beta_{p-1})$ . Отсюда получаем, что  $q \leq p + 1$ .

Условия существования неподвижной точки  $\varphi_{p,p}^*$  записываются следующим образом:  $\varphi_{p,p}^* > \alpha_p$  и  $B_{p,0}A_{0,p}\varphi_{p,p}^* < \beta_{p-1}$ . Они эквивалентны условиям  $\alpha_p < A_{-p,0}B_{p,-p}A_{0,p}\alpha_p$  и  $\beta_{p-1} > B_{p,0}A_{-p,p}B_{0,-p}\beta_{p-1}$ , раскрывая которые, приходим к следующим неравенствам:

$$2\theta[\nu^p g + (\nu^{1-p} + \nu^{p+1} - 2\nu^p)(1 - \nu)^{-1}h](1 - \nu^{2p}) < -\nu^{1-p}(1 - \nu^{4p})\Delta + \\ + g[\nu^{1-p}(1 - \nu^{4p})(1 - \nu)^{-1} - 2p\nu^p - 2p\nu^{3p}] + h\{(1 - \nu)(1 + \nu^{2p})[4p\nu^p + \\ + (2p - 1)\nu^{1-p}(1 - \nu^{2p})] - 2\nu^{1-p}(1 - \nu^{4p})\}(1 - \nu)^{-2}; \tag{29}$$

$$2\theta[\nu^p g + (\nu^{2-p} + \nu^{p+2} - 2\nu^p)(1 - \nu)^{-1}h](1 - \nu^{2p}) < \nu^{2-p}(1 - \nu^{4p})\Delta - \\ - g[\nu^{2-p}(1 - \nu^{4p})(1 - \nu)^{-1} - 2p\nu^p - 2p\nu^{3p}] - h\{(1 - \nu)(1 + \nu^{2p})[4p\nu^p + \\ + (2p - 3)\nu^{2-p}(1 - \nu^{2p})] - 2\nu^{2-p}(1 - \nu^{4p})\}(1 - \nu)^{-2}. \tag{30}$$

Условия существования неподвижной точки  $\varphi_{p,p+1}^*$  имеет следующий вид:  $\varphi_{p,p+1}^* < \alpha_p$ ,  $\beta_p < B_{p+1,0}A_{0,p+1}\varphi_{p,p+1}^*$ . Они эквивалентны условиям  $\alpha_p > A_{-p,0}B_{p+1,-p}A_{0,p+1}\alpha_p$  и  $\beta_p < B_{p+1,0}A_{-p,p+1}B_{0,-p}\beta_p$ . Можно показать, что отображение  $T$  при выполнении условия (24) не имеет не-



подвижных точек типа  $\varphi_{p,p}^*$  с  $p > 2$  и неподвижных точек типа  $\varphi_{p,p-1}^*$  с  $p > 1$ . Таким образом, отображение  $T$  при  $\Delta < (g-h)(1+\nu)^{-1}$  и  $g > h(1+\nu)$  имеет неподвижные точки  $\varphi_{1,1}^*$ ,  $\varphi_{1,2}^*$  и  $\varphi_{2,2}^*$ .

Условие (29) для  $p = 1$  выполняется при любом  $\theta \in [0, 1/2]$ . Условие (30) выполняется при  $\theta \in [0, \theta_{1,1})$ , где  $\theta_{1,1} = 0,5 |g-h-\Delta(1+\nu)| \times (1+\nu^2)[\nu g + (1-\nu)h]^{-1}(1+\nu)^{-1}$ . При выполнении условия (24)  $\theta_{1,1} > 0$ . Кроме того, нетрудно проверить, что  $\theta_{1,1} < 0,5$ . Таким образом, отображение  $T$  при  $g > h(1+\nu)$  и  $\Delta < (g-h)(1+\nu)^{-1}$  имеет неподвижную точку  $\varphi_{1,1}^*$ , если  $\theta \in [0, \theta_{1,1})$ .

Согласно (29) и (30), неподвижная точка  $\varphi_{2,2}^*$  существует при  $0 \leq \theta < \min(\theta'_{2,2}, \theta''_{2,2})$ , где  $\theta'_{2,2} = (1+\nu^4)(1-\nu^4)^{-1}(1-\nu)\nu^{-1} [g(1+2\nu+3\nu^2) + h(1-3\nu^2) - (1+\nu)(1+\nu^2)\Delta] 0,5[\nu^2g + (\nu^{-1} + 1 + \nu - \nu^2)h]^{-1}$ ,  $\theta''_{2,2} = (1+\nu^4)(1-\nu^4)^{-1}(1-\nu)[h(1+4\nu+\nu^2) - g(1+2\nu-\nu^2) + (1+\nu)(1+\nu^2)\Delta] \times 0,5[\nu^2g + (1+\nu)(1-\nu^2)h]^{-1}$ . Нетрудно убедиться в том, что  $\theta''_{2,2} < 0,5$  и что при выполнении условия (24)  $\theta'_{2,2} > \theta''_{2,2}$ . Поэтому отображение  $T$  имеет неподвижную точку  $\varphi_{2,2}^*$ , если  $h(1+4\nu+\nu^2) > g(1+2\nu-\nu^2)$  и  $\theta \in [0, \theta''_{2,2})$ . Если же  $h(1+4\nu+\nu^2) < g(1+2\nu-\nu^2)$ , то неподвижная

точка  $\varphi_{2,2}^*$  существует при  $\Delta \in (\Delta_1, \frac{g-h}{1+\nu})$  и  $\theta \in [0, \theta''_{2,2})$ , где  $\Delta_1 = (1+\nu)^{-1}(1+\nu^2)^{-1}[g(1+2\nu-\nu^2) - h(1+4\nu+\nu^2)]$ .

Из условий  $\alpha_1 > A_{-1,0} B_{2,-1} A_{0,2} \alpha_1$  и  $\beta_1 < B_{2,0} A_{-1,2} B_{0,-1} \beta_1$  получаем, что неподвижная точка  $\varphi_{1,2}^*$  существует при  $\theta > \max(\theta'_{1,2}, \theta''_{1,2})$ , где  $\theta'_{1,2} = [g(1+\nu^2+2\nu^3-\nu^4) - h(1+\nu^2+4\nu^3+\nu^4) - \Delta(1+\nu^3)] \times (1+\nu+\nu^2)^{-1} 0,5(1+\nu+\nu^2)^{-1}[\nu g + (1-\nu-\nu^2)h]^{-1}$ ,  $\theta''_{1,2} = [h(1+4\nu+\nu^2+\nu^4) - g(1+2\nu-\nu^2+\nu^4) + \Delta(1+\nu^3)(1+\nu+\nu^2)] 0,5(1+\nu+\nu^2)^{-1}[\nu^2g + (1+\nu-\nu^2)h]^{-1}$ . Можно показать, что при выполнении условия (24)  $\max(\theta'_{1,2}, \theta''_{1,2}) < 0,5$ . В зависимости от значений параметров может быть как  $\theta'_{1,2} < \theta''_{1,2}$ , так и  $\theta'_{1,2} > \theta''_{1,2}$ .

**б. Режимы работы системы и ошибка слежения за экстремумом.** Неподвижной точке  $\varphi_{p,q}^*$  отображения  $T$  соответствует  $2(p+q)$ -кратная неподвижная точка отображения  $H$  (и  $\Pi$ ). В силу симметрии фазовой картины относительно плоскости  $u = 0$ , отображение  $H$  имеет неподвижную точку  $\varphi_{1,1}^*(\theta)$ ,  $u = -\theta t_1$  не только при  $\theta \in [0, \theta_{1,1})$ , но и при  $\theta \in [1-\theta_{1,1}, 1)$ , неподвижную точку  $\varphi_{1,2}^*(\theta)$ ,  $u = -\theta t_1$  при  $\theta \in [\max(\theta'_{1,2}, \theta''_{1,2}), 1 - \max(\theta'_{1,2}, \theta''_{1,2})]$  и неподвижную точку  $\varphi_{2,2}^*(\theta)$ ,  $u = -\theta t_1$  при  $\theta \in [0, \theta''_{2,2}]$  и  $\theta \in [1 - \theta''_{2,2}, 1)$ .

Так как неподвижной точке  $\varphi_{p,q}^*$  отображения  $T$  соответствует  $2(p+q)$ -кратная неподвижная точка отображения  $\Pi$ , то этой неподвижной точке отвечает периодический режим работы системы периода  $2(p+q)\tau$ . Поэтому при  $\Delta < (g-h)(1+\nu)^{-1}$  и  $g > h(1+\nu)$  система может иметь периодические режимы работы периодов  $4\tau$ ,  $6\tau$  и  $8\tau$ . Области существования этих режимов изображены на рис. 4.

Пусть величина  $\varphi$  при движении фазовой точки вдоль траектории, соответствующей периодическому режиму работы системы периода  $2(p+q)\tau$ , изменяется по закону  $\varphi = \varphi_{p,q}(t)$ . Тогда средняя за период ошибка слежения за экстремумом определяется следующим образом:

$$\delta_{p,q}(\theta) = \frac{1}{2(p+q)\tau} \left| \int_0^{2(p+q)\tau} \varphi_{p,q}(t) dt \right|. \quad (31)$$

Разбивая интервал интегрирования на этапы, соответствующие отдельным шагам, получим интегрированием по этапам, что  $\delta_{1,1}(\theta) = \theta^2 r_{1,1}^2 - r_{1,1}$ ,

$$\delta_{1,2}(\theta) = -\theta(1-\theta)t_1^2 - r_{1,2}, \quad \delta_{2,2}(\theta) = \theta^2 t_1^2 - r_{2,2}, \quad \text{где } r_{1,1} = -\frac{t_1^2}{2} - \frac{t_1^3}{6\tau} + t_1^2 e^{-t_1(1+\nu^2)} \frac{1-\nu}{4\tau},$$

$$r_{1,2} = -\frac{7}{6} t_1^2 + \frac{t_1^3}{6\tau} + t_1^2 e^{-t_1(1+\nu^2+4\nu^3+\nu^4)} \times \frac{1-\nu}{6\tau},$$

$$r_{2,2} = -\frac{3}{2} t_1^2 + \frac{t_1^3}{6\tau} + t_1^2 e^{-t_1(1+\nu^4)} (1+4\nu+\nu^2) \frac{1-\nu}{8\tau}.$$

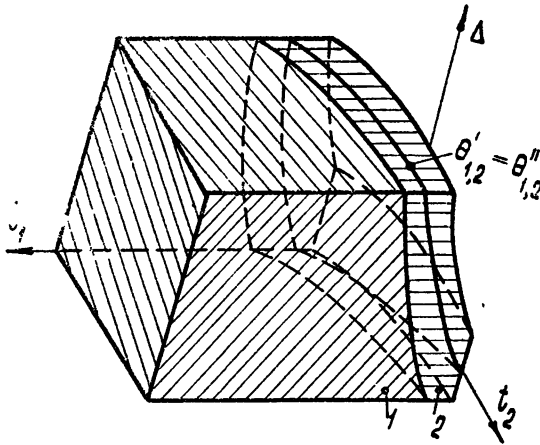


Рис. 4. Области существования режимов: 1) с периодами  $4\tau$  и  $6\tau$ , 2) с периодами  $4\tau$ ,  $6\tau$  и  $8\tau$ .

Однако средняя за период ошибка существенно зависит от начальных условий и поэтому не дает удовлетворительной оценки процесса слежения за экстремумом. Величина  $\theta$  для одной и той же траектории движения системы меняется со временем при изменении нелинейной характеристики объекта регулирования. Кроме того, существует постоянная составляющая скорости изменения величины  $\theta$ , вызванная тем, что вход объекта  $u$  в сторону увеличения изменяется с иной скоростью, нежели в сторону уменьшения. Поэтому для получения оценки процесса слежения за экстремумом необходимо усреднение по  $\theta$  ошибки за период:

$$\sigma = \int_0^1 \delta(\theta) d\theta, \tag{32}$$

где  $\delta = \delta(\theta)$  — изменение средней за период ошибки в зависимости от  $\theta$ .

Для определения зависимости  $\delta = \delta(\theta)$  найдем изменение периода работы системы с изменением  $\theta$ . Очевидно, при переходе  $\theta$  через значение  $\theta_{1,1}$  в сторону увеличения происходит увеличение периода работы системы. При переходе  $\theta$  через значение  $\theta''_{2,2}$  в сторону увеличения происходит уменьшение периода работы системы. Нетрудно также убедиться в том, что при переходе  $\theta$  через значение  $\theta'_{1,2}$  в сторону уменьшения происходит уменьшение периода, а при переходе  $\theta$  через значение  $\theta''_{1,2}$  в сторону уменьшения происходит увеличение периода работы системы. Зависимость величины периода от  $\theta$  изображена на рис. 5.

Из приведенных диаграмм следует, что в зависимости от начальных условий может существовать периодическое движение любого из трех периода ( $4\tau$ ,  $6\tau$ ,  $8\tau$ ). При равномерном изменении  $\theta$  в одну сторону (на-

пример, при увеличении) период работы системы меняется со временем, принимая, по истечении некоторого промежутка времени, лишь два значения (либо  $4\tau$  и  $6\tau$ , либо  $6\tau$  и  $8\tau$ ).

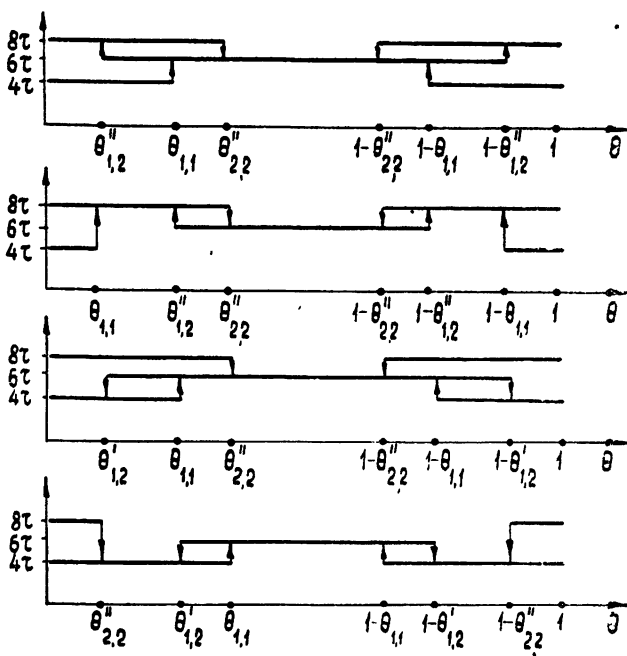


Рис. 5.

Можно показать, что направление изменения  $\theta$  не влияет на величину  $\sigma$ . Поэтому рассмотрим лишь случай равномерного роста  $\theta$  со временем. Обозначим  $\delta(\theta)$  при  $\theta_{1,2} > \theta'_{1,2}$  через  $\delta_1(\theta)$ , а при  $\theta_{1,2} < \theta'_{1,2}$  через  $\delta_2(\theta)$ . Тогда

$$\delta_1(\theta) = \begin{cases} \delta_{1,1}(\theta), & \text{если } 0 \leq \theta \leq \theta_{1,1} \text{ или } 1 - \theta'_{1,2} < \theta < 1; \\ \delta_{1,2}(\theta), & \text{если } \theta_{1,1} < \theta \leq 1 - \theta'_{1,2} \end{cases};$$

$$\delta_2(\theta) = \begin{cases} \delta_{1,2}(\theta), & \text{если } \theta'_{2,2} < \theta \leq 1 - \theta''_{1,2} \\ \delta_{2,2}(\theta), & \text{если } 0 \leq \theta \leq \theta'_{2,2} \text{ или } 1 - \theta''_{1,2} < \theta < 1 \end{cases}.$$

Обозначим в этих случаях  $\sigma$  соответственно через  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . В результате интегрирования получим

$$\sigma_1 = 0,5t_1^2 (\theta_{1,1}^2 + \theta_{1,2}^2) - (\theta_{1,1} + \theta'_{1,2})(r_{1,1} - r_{1,2}) - r_{1,2} - \frac{t_1^2}{6};$$

$$\sigma_2 = 0,5t_1^2 (\theta_{1,2}^2 + \theta_{2,2}^2) - (\theta'_{1,2} + \theta''_{2,2})(r_{2,2} - r_{1,2}) - r_{1,2} - \frac{t_1^2}{6}.$$

Величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  есть функции параметров  $t_1$ ,  $t_2$  и  $\Delta$ . При этом  $\sigma_1$  определено в общей части областей, для которых  $\Delta < (g-h)(1+\nu)^{-1}$ ,  $g > h(1+\nu)$  и  $\theta_{1,2} > \theta'_{1,2}$ , а  $\sigma_2$  определено в общей части областей, для которых  $\Delta < (g-h)(1+\nu)^{-1}$ ,  $g > h(1+\nu)$ ,  $\theta'_{1,2} < \theta''_{1,2}$  и  $\theta'_{2,2} > \theta''_{2,2}$ .

Было проведено исследование зависимости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  от  $t_1$  и  $t_2$  при  $\Delta = 10$ . В этом случае область значений  $t_1$  и  $t_2$ , где  $\theta'_{1,2} > \theta''_{1,2}$ , принад-

лежит области, где  $\Delta < (g - h)(1 + \nu)^{-1}$  и  $g > h(1 + \nu)$ , а часть области, где  $\theta'_{2,2} > \theta''_{2,2}$ , не принадлежит области, где  $\Delta < (g - h)(1 + \nu)^{-1}$ . Однако эта область принадлежит области, где  $g > h(1 + \nu)$ . Поэтому можно показать, что при  $\Delta = 10$  функция  $\sigma_2(t_1, t_2)$  определена по всей области значений  $t_1$  и  $t_2$ , где  $\theta'_{2,2} > \theta''_{2,2}$ .

В результате численного исследования получено, что при  $\Delta = 10$  функция  $\sigma_1(t_1, t_2)$  достигает наименьшего значения ( $\approx 9,4$ ) на границе ее области определения в окрестности точки  $t_1 = 3,2$ ;  $t_2 = 3,8$ , а функция  $\sigma_2(t_1, t_2)$  имеет минимум ( $\approx 7,6$ ) в окрестности точки  $t_1 = 2,4$ ;  $t_2 = 7,6$ .

Заметим, что при  $\Delta > (g - h)(1 + \nu)^{-1}$  и  $g > h(1 + \nu)$  в системе существуют периодические режимы периодов  $2n\tau$ , где  $n \geq 3$ ; они характерны тем, что полпериода вход объекта регулирования  $u$  увеличивается, а полпериода уменьшается. При  $g < h(1 + \nu)$  в системе возможны периодические режимы более сложных форм, характерные тем, что в течение любого промежутка времени, равного полупериоду соответствующего режима, вход объекта изменяется как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ивахненко, Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования, изд. АН СССР, Киев, 1957.
2. В. М. Кунцевич, Автоматика, № 2, 48 (1958).
3. П. И. Акинин, Автоматика, № 2, 65 (1958).
4. В. М. Кунцевич, Сб. Теория и применение дискретных систем, изд. АН СССР, М., 1960.
5. В. М. Кунцевич, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 5, 77 (1960).
6. В. М. Кунцевич, Автоматика и телемеханика, 22, 589 (1961).
7. В. М. Кунцевич, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 5, 113 (1961).
8. Е. Ю. Бенуа, Сб. работ по вопросам электромеханики, изд. АН СССР, М.—Л., 1961.
9. П. И. Акинин, Автоматика, № 4, 34 (1962).
10. Г. А. Новинская, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 566 (1961).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
16 января 1964 г.

### DYNAMIC OF THE SIMPLEST EXTREME CONTROL SYSTEM OF THE STEP-BY-STEP TYPE

*N. N. Leonov*

The operating conditions are being investigated of the simplest extreme control system with the step-by-step type of search by means of the point-wise transformation method. The existence of the continual number of periodical regimes in the system has been found and their dependence on the initial conditions has been determined.

УДК 681.142 652.2

## ТЕОРИЯ РЕЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВ И ГЕНЕРАТОРОВ\*

М. Я. Эйнгорин

Рассматривается теория новых типов  $N$ -мерных генераторов импульсов, счетчиков и запоминающих устройств, которые могут быть использованы в последовательных и параллельных вычислительных и управляющих устройствах. Дается геометрическая интерпретация этих устройств и приведены некоторые примеры их моделирования на ферритовых сердечниках.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим алфавит

$$A_1 A_2 \dots A_i \dots A_N, \quad (1.1)$$

подалфавит

$$A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in_i}\} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.2)$$

и систему допустимых в нем подстановок

$$a_{ij} \rightarrow a_{ij+1}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, n_i \end{matrix}, \quad n_i + 1 = 1, \quad (1.3)$$

где  $n_i$  — число элементов  $a_{ij}$  в подалфавите  $A_i$ :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$\{a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{ij_i}, \dots, a_{Nj_N}\}^0$  — начальное слово,  $1 \leq j_i \leq n_i$ .

В этом случае в зависимости от величин  $n_i$  может быть сформулирован ряд утверждений относительно числа независимых замкнутых дедуктивных цепочек  $M$  и числа элементов  $S$  в каждой из них при использовании подстановки (1.3) к начальному слову в алфавите (1.1).

Можно показать, что для заданных (1.1) и (1.2) при принятой системе допустимых подстановок (1.3) величины  $M$  и  $S$  постоянны и определяются общими делителями величин  $n_i$ . Для дальнейшего заметим, что

$$MS = \prod_{i=1}^N n_i. \quad (1.4)$$

Пусть  $m_p$  ( $p = 1, 2, \dots, r$ ) — общие делители величин  $n_i$  и  $n_j$ , а

$$w_i = n_i / \prod_{g=k_i}^{m_i} m_g \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

\* Доклад на I Всесоюзном симпозиуме по оперативным и постоянным запоминающим устройствам, Ленинград, 1963 г.

— частные от деления величин  $n_i$  на их общие делители;  $\prod_{g=k_i}^{m_i} m_i$  — наибольший делитель  $n_i$ . Тогда

$$S = S_1 S_2, \quad (1.5)$$

где

$$S_1 = \prod_{p=1}^r m_p; \quad S_2 = \prod_{i=1}^N \omega_i.$$

Рассмотрим несколько наиболее интересных для дальнейшего случаяв.

1. Величины  $n_i = m$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $p = 1$ ). В этом случае

$$M = m^{N-1}; \quad (1.6)$$

$$S = m. \quad (1.7)$$

2. Все  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) взаимно просты,  $m = 1$ ,  $p = 1$ . Тогда

$$M = 1; \quad (1.8)$$

$$S = \prod_{i=1}^N n_i. \quad (1.9)$$

3. Величины  $n_i = m$  для  $l = 1, 2, \dots, \gamma$ ; остальные  $n_i$  ( $i = \gamma, \gamma + 1, \dots, N$ ) взаимно просты. В этом случае

$$M = m^{\gamma-1}; \quad (1.10)$$

$$S = \prod_{i=\gamma}^N n_i. \quad (1.11)$$

В частности,  $m$  может быть равно  $g^\omega$ , где  $g$  — основание системы счисления, а  $\omega$  — целая положительная степень.

4. Величина  $n_\gamma = m$  — наибольший общий делитель  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ); все  $n_i/m$  взаимно просты. Тогда

$$M = m^{N-1}; \quad (1.12)$$

$$S = m \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \gamma}}^N n_i/n_\gamma. \quad (1.13)$$

5. Для  $n_l$  ( $l = 1, 2, \dots, \gamma$ ) существует общий наибольший делитель  $m$ ;  $n_l/m$  ( $l = 1, 2, \dots, \gamma$ ),  $n_i$  ( $i = \gamma + 1, \dots, N$ ) — взаимно просты. В этом случае

$$M = m^{\gamma-1}; \quad (1.14)$$

$$S = m \prod_{l=1}^{\gamma} (n_l/m) \prod_{i=\gamma+1}^N n_i. \quad (1.15)$$

В частности, для  $l = 1, 2, \dots, N$

$$M = m^{N-1}; \quad (1.16)$$

$$S = m \prod_{l=1}^N n_l/m. \quad (1.17)$$

На основе формул (1.6) ÷ (1.17), а также формул, которые легко могут быть получены из (1.4) и (1.5), можно построить ряд интересных физических устройств, свойства которых зависят от  $N$  и соотношения чисел  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Перейдем к рассмотрению геометрических моделей, а затем соответствующих физических устройств.

## 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ВРЕМЕННАЯ МОДЕЛЬ

Каждый элемент  $A_i$  алфавита (1.1) (подалфавита (1.2)) можно представить в виде одного из измерений  $N$ -мерного пространства, которое принимает  $n_i$  дискретных значений.

Согласно допустимой системе подстановок, в каждом из подалфавитов (1.2) один из элементов  $a_{ij}$  равен единице, остальные — нулю. Поэтому все равные единице элементы  $a_{ij}$  всех  $N$  подалфавитов составляют слово

$$B_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} = \{a_{1\alpha_1}, \dots, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{i\alpha_i}, \dots, a_{N\alpha_N}\}, \quad (2.1)$$

общее число которых определяется выражением (1.4). Это эквивалентно тому, что каждому набору элементов (2.1) соответствует точка нашего  $N$ -мерного пространства.

Пусть все элементы  $a_{ij}$  являются функциями времени и переход (1.3) во всех измерениях куба осуществляется одновременно и мгновенно через каждое  $\Delta t = \tau$ . Пусть далее каждая дискретная точка (2.1) пространства представляет собой конъюнкцию из

$$\beta_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} = \bigg\{ \bigg\{ a_{i\alpha_i} \bigg\}_{i=1}^N \bigg\} \quad (2.2)$$

элементов, входящих в (2.1). Тогда в каждый момент времени  $t$  всего лишь одна конъюнкция  $\beta_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}$  пространства конъюнкций будет равна

единице, остальные  $\prod_{i=1}^N n_i - 1$  — нулю, в следующий момент времени

$t + \tau$  единице будет равна конъюнкция  $\beta_{\alpha_1+1, \dots, \alpha_N+1}$  и т. д. (величины  $i + \delta$  берутся по mod  $n_i$ ). Нетрудно показать, что в зависимости от величин  $n_i$  в пространстве существуют  $M$  замкнутых траекторий (дедуктивных цепочек) конъюнкций по  $S$  конъюнкций (см. формулу (1.5)) в каждой. Выбор той или иной траектории определяется начальными условиями, а следовательно, той конъюнкцией  $\beta_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}$ , которая в момент  $t = 0$  была равна единице.

Введем некоторые вспомогательные величины  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), которые определяются следующим образом: есть произведение двух чисел  $P = n_1 n_2$ , таких, что  $n_1$  и  $n_2$  имеют общий наибольший делитель  $m$ . Пусть  $\omega_1 = n_1/m$  и  $\omega_2 = n_2/m$ . Вынесем  $m$  за скобку произведения и запишем его в виде

$$P = [(\omega_1 p_1) (\omega_2 p_2)] m, \quad (2.3)$$

где  $p_1 = m$ ,  $p_2 = 1$  или  $p_1 = 1$  и  $p_2 = m$ . образуем из величин  $p_1 - 1$  и  $p_2 - 1$  код  $\{m - 1, 0\}$  или  $\{0, m - 1\}$ , который назовем кодом адреса. Для случая большего числа величин  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) код адреса получается путем выделения всех общих множителей отдельных групп величин  $n_i$  и перемножения всех величин  $p_i$ , относящихся к данному  $n_i$ . Например,  $n_1, n_2, n_3$  имеют общий делитель  $m$ . В результате операции вида (2.3) получим код частичного адреса  $\{m, m, 1\}$ . Кроме того, пусть  $n_1$  и  $n_2$  имеют также свой общий делитель  $d$ ; тогда второй частный адрес будет равен  $\{d, -, 1\}$ . Следовательно, адрес будет равен  $\{md - 1, m - 1, 0\}$ , где  $p_1 = md_1$ ,  $p_2 = m$ ,  $p_3 = 1$ .

Можно показать, что в общем случае

$$M = \prod_{i=1}^N p_i, \quad (2.4)$$

а код

$$X = \{x_N, x_{N-1}, \dots, x_1\}, \quad (2.5)$$

где  $0 \leq x_i \leq p_i - 1$  является кодом адреса данной траектории из  $M$ . При этом код  $X$  необходимо рассматривать как обычное позиционное число с переменным основанием счисления каждого  $i$ -го разряда, равного  $p_i$ .

Каждая траектория имеет  $S$  элементов (конъюнкций). На основе величин  $s_i$ , составляющих

$$S = \prod_{i=1}^N s_i \quad (2.6)$$

можно сформировать некоторый код

$$\Phi = \{f_N, f_{N-1}, \dots, f_1\} \quad (2.7)$$

при  $0 \leq f_i \leq s_i - 1$  и

$$s_i p_i = n_i. \quad (2.8)$$

Код  $\Phi = \{0, 0, \dots, 0, \dots, 0, 0\}$  будем называть нулевой фазой, а код, имеющий в разрядах (2.7) наибольшие величины  $f_i = s_i - 1$ ,  $s$ -ой фазой. При этом для каждого дискретного значения времени  $t = h\tau$  ( $h = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ) может быть задано (см. (2.1)) значение величины

$$a_i = 1 + \{x_i + f_i p_i\} \bmod n_i, \quad (2.9)$$

где  $x_i = [t + t_i^0] \bmod p_i$ ,  $f_i = \left[ E \left( \frac{t + t_i^0}{p_i} \right) \right] \bmod s_i$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ,

$x_i^0 = [t_i^0] \bmod p_i$  — начальное значение координаты и  $f_i^0 = [E(t_i^0/p_i)] \bmod s_i$  — начальное значение фазы в момент  $t = 0$ .

Движение по заданной траектории может быть начато не с нулевой фазы, а, скажем, с фазы  $f_i^0$ , определяемой величиной  $t^0$ , т. е. не с начального, а с некоторого промежуточного элемента (2.2) выбранной адресом (2.5) траектории.

Сдвиг по каждой из координат  $i$  (см. (1.3)) может быть изменен на противоположный, т. е.

$$a_{ij} \rightarrow a_{ij-1} \quad (j = 1, 2, \dots, n_j; \text{ при } j = 1, j - 1 = n_j). \quad (2.10)$$

При этом нетрудно показать, что число всевозможных направлений сдвига по всем координатам равно  $2^N$ . Если принять, что

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & \text{— при сдвиге согласно формуле (1.3)} \\ 1 & \text{— при сдвиге согласно формуле (2.10)} \end{cases}, \quad (2.11)$$

то тот или иной сдвиговый режим по  $N$  координатам может быть задан кодом

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_N\}; \quad (2.12)$$

каждому коду соответствует вершина нашего  $N$ -мерного пространства.

В зависимости от кода (2.12) могут быть взяты различные «сечения» нашего  $N$ -мерного пространства  $M$  траекториями. Изменение кода  $\omega$  на дополнительный дает обратную последовательность элементов конъюнкций (2.2) в каждой из  $M$  траекторий.



Рассмотрим несколько примеров. Для простоты возьмем случай двухмерных и трехмерных пространств. На рис. 1, который представляет из себя плоскость переходов, точкой обозначен элемент конъюнкций, стрелкой — направление мгновенного перехода, соответствующее (1.3). Время равенства каждой конъюнкции единице есть  $\tau$ .

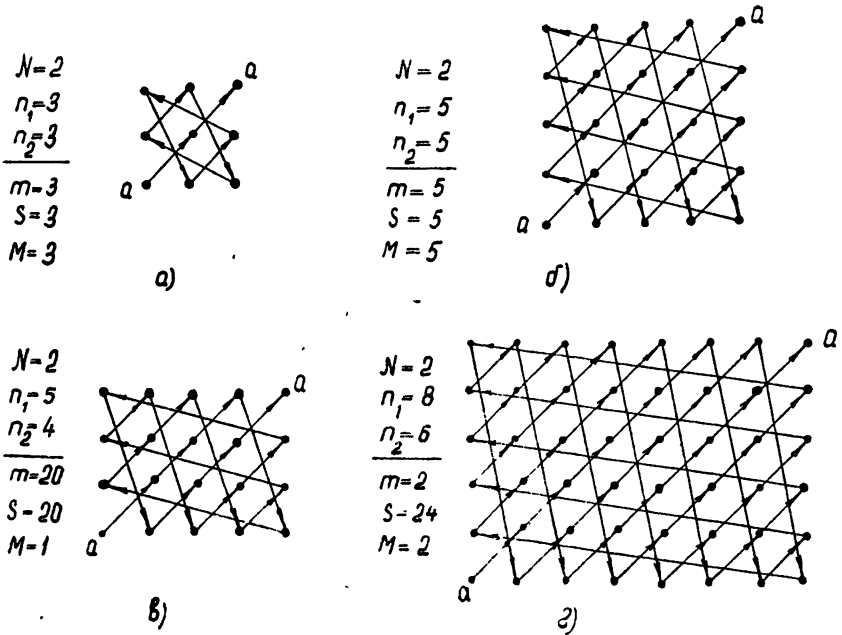


Рис. 1.

1.  $N = 2, n_1 = n_2 = 3$ ; тогда  $m_1 = 1, m_2 = 3, p = 2, S = 3$  и  $M = 3$ . Плоскость переходов представлена на рис. 1а.

2.  $N = 2, n_1 = n_2 = 5$ ; тогда  $m_1 = 1, m_2 = 5, p = 2, S = 5$  и  $M = 5$ . Плоскость переходов дана на рис. 1б.

3.  $N = 2, n_1 = 5, n_2 = 4$ ; при этом  $m = 1, p = 1, S = 20$  и  $M = 1$ . Плоскость переходов см. на рис. 1в.

4.  $N = 2, n_1 = 6, n_2 = 8$ . Легко видеть, что  $m_1 = 1, m_2 = 2, p = 2, S = 24$  и  $M = 2$ . Плоскость переходов представлена на рис. 1г.

Для случая  $N > 2$  геометрическое изображение плоскости переходов представляет известные трудности; поэтому для случая  $N = 3$  воспользуемся таблицей переходов.

5.  $N = 3, n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 6$ . Величины  $m_1 = 1, m_2 = 2$  и  $m_3 = 3, p = 3, S = 12$  и  $M = 6$ . Переходы указаны в таблице 1, где  $i, j$  и  $k$  номер траектории  $M$ , измерения  $N$  и элемента в данной траектории соответственно.

6.  $N = 3, n_1 = 4, n_2 = 4, n_3 = 7$ ; тогда  $m_1 = 1, m_2 = 2, p = 2, S = 28$  и  $M = 4$ . Переходы указаны в таблице 2 (обозначения те же, что и в примере 5).

Аналогичным образом могут быть построены другие примеры для случая произвольных пространств. Необходимо лишь заметить, что случай  $N = 2$  геометрически дает трехмерный тор, по поверхности которого происходит циркуляция активизированных элементов. Аналогично  $N$ -мерный куб с учетом траекторий движения активизированных элементов может быть представлен как  $N + 1$ -мерный тор.

Таблица 1

$k \backslash j$	1			2			3			4			5			6		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1	1	1	2	1	1	3	1	1	1	2	1	2	2	1	3	2	1
2	2	2	2	3	2	2	1	2	2	2	3	2	3	3	2	1	3	2
3	3	3	3	1	3	3	2	3	3	3	4	3	1	4	3	2	4	3
4	1	4	4	2	4	4	3	4	4	1	1	4	2	1	4	3	1	4
5	2	1	5	3	1	5	1	1	5	2	2	5	3	2	5	1	2	5
6	3	2	6	1	2	6	2	2	6	3	3	6	1	3	6	2	3	6
7	1	3	1	2	3	1	3	3	1	1	4	1	2	4	1	3	4	1
8	2	4	2	3	4	2	1	4	2	2	1	2	3	1	2	1	1	2
9	3	1	3	1	1	3	2	1	3	3	2	3	1	2	3	2	2	3
10	1	2	4	2	2	4	3	2	4	1	3	4	2	3	4	3	3	4
11	2	3	5	3	3	5	1	3	5	2	4	5	3	4	5	1	4	5
12	3	4	6	1	4	6	2	4	6	3	1	6	1	1	6	2	1	6

Таблица 2

$k \backslash j$	1			2			3			4		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1	1	1	2	1	1	3	1	1	4	1	1
2	2	2	2	3	2	2	4	2	2	1	2	2
3	3	3	3	4	3	3	1	3	3	2	3	3
4	4	4	4	1	4	4	2	4	4	3	4	4
5	1	1	5	2	1	5	3	1	5	4	1	5
6	2	2	6	3	2	6	4	2	6	1	2	6
7	3	3	7	4	3	7	1	3	7	2	3	7
8	4	4	1	1	4	1	2	4	1	3	4	1
9	1	1	2	2	1	2	3	1	2	4	1	2
10	2	2	3	3	2	3	4	2	3	1	2	3
11	3	3	4	4	3	4	1	3	4	2	3	4
12	4	4	5	1	4	5	2	4	5	3	4	5
13	1	1	6	2	1	6	3	1	6	4	1	6
14	2	2	7	3	2	7	4	2	7	1	2	7
15	3	3	1	4	3	1	1	3	1	2	3	1
16	4	4	2	1	4	2	2	4	2	3	4	2
17	1	1	3	2	1	3	3	1	3	4	1	3
18	2	2	4	3	2	4	4	2	4	1	2	4
19	3	3	5	4	3	5	1	3	5	2	3	5
20	4	4	6	1	4	6	2	4	6	3	4	6
21	1	1	7	2	1	7	3	1	7	4	1	7
22	2	2*	1	3	2	1	4	2	1	1	2	1
23	3	3	2	4	3	2	1	3	2	2	3	2
24	4	4	3	1	4	3	2	4	3	3	4	3
25	1	1	4	2	1	4	3	1	4	4	1	4
26	2	2	5	3	2	5	4	2	5	1	2	5
27	3	3	6	4	3	6	1	3	6	2	3	6
28	4	4	7	1	4	7	2	4	7	3	4	7

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ФЕРРИТОВЫХ СЕРДЕЧНИКАХ

Рассмотрим несколько вариантов моделирования рассмотренных устройств на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса. Путем моделирования могут быть получены разнообразные генераторы (распределители) импульсов, счетчики и запоминающие устройства с достаточно хорошими рабочими характеристиками.

*Моделирование генераторов (распределителей) импульсов и счетчиков.* Для простоты рассмотрим моделирование для случая двухмерных плоскостей переходов ( $N = 2$ ), хотя аналогичным образом может быть выполнено моделирование для произвольного  $N$ .

Пусть имеем два сдвиговых регистра, выполненных, например, на элементах, рассмотренных в [1, 2] и работающих в режиме сдвига одной единицы (код 100...0...0) или распределителя импульсов работы [3]. Пусть также каждый из выходов этих регистров или распределителей импульсов является источником тока, что с достаточной степенью точности может быть всегда выполнено.

Выбрав числа разрядов сдвиговых регистров (числа выходов распределителей импульсов) равными  $n_1$  и  $n_2$ , а их выходы подав на ферритовую матрицу (как это показано, например, на рис. 2а для случая  $n_1 = 5$  и  $n_2 = 5$ ), получим с выходов ферритов импульсы, число которых на периоде совпадает с  $S$  (период  $T = S\tau$ , где  $\tau$  — время перехода информации в регистрах или такт работы распределителя импульсов). Число независимых последовательностей выходов равно  $M$ . Выбор той или иной последовательности определяется начальными условиями (положением единиц в регистрах  $n_1$  и  $n_2$  в  $t = 0$ ). При этом обмотки ферритов организованы так, что если феррит  $\beta_{ij}$  переходит из состояния «0» в состояние «1», то феррит  $\beta_{i+\sigma_i, i+\sigma_j}$  той же траектории восстанавливается из состояния «1» в состояние «0». При этом в генераторах переход феррита  $\beta_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}$  из состояния «0» → «1» соответствует положительному (отрицательному), «0» → «0» нулевому и «1» → «0» отрицательному (положительному) импульсу тока на его выходной обмотке. Для примера, данного на рис. 2а,  $\sigma_i = \sigma_j = -1$ . Для двухмерного случая каждая обмотка, обеспечивающая переход феррита «0» → «1» и «1» → «0», имеет  $0,5AW_0$ , где  $AW_0$  — ампервитки, необходимые для перевода феррита из одного насыщенного состояния в другое. Аналогичное восстановление может быть выполнено для  $\sigma_i = \sigma_j$ , лежащих в пределах

$$0 < -\sigma_i < n_j, \quad (3.1)$$

при  $n_j$  — наименьшем из величин  $n_1$  и  $n_2$ .

На рис. 2а, б, в и г приведены примеры схем генераторов импульсов для случая  $N = 2$ ,  $n_1 = n_2 = 5$  с восстановлением ферритов полутактами  $0,5AW_0$  через 1, 2, 3 и 4 такта (т. е. для  $\sigma_i = \sigma_j = -1, -2, -3, -4$ ). Случай генераторов с  $N = 2$ ,  $n_1 = 5$  и  $n_2 = 4$  с восстановлением полутактами при  $\sigma_i = \sigma_j = -1, -2, -3$  дан на рис. 2д, е и ж.

В общем случае  $N$ -мерного пространства для  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_i = \dots = \sigma_N$  ток считывания и восстановления в каждой из шин равен  $J/N$ , при этом  $\sigma_i$  должно удовлетворять неравенству (3.1) при

$$n_j = \min \{ n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_N \}.$$

В случае  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \dots \neq \sigma_N$  ток восстановления в каждой из шин должен быть не менее  $J$ . При этом восстановление может быть выполнено током всего лишь одного измерения. Восстанавливающие обмотки других измерений могут отсутствовать. Реализация указанных уст-

ройств с  $N > 2$  представляет определенные трудности. Задача значительно облегчается, если  $N$ -мерное пространство будет выполнено в виде  $n^{N-\bar{N}}$  пространств при  $\bar{N} < N$ . При этом в каждый момент времени  $t$  включено одно из  $n^{N-\bar{N}}$  пространств  $\bar{N}$ . Устройства могут быть выполнены простейшим образом, если взять  $\bar{N} = 2$ .

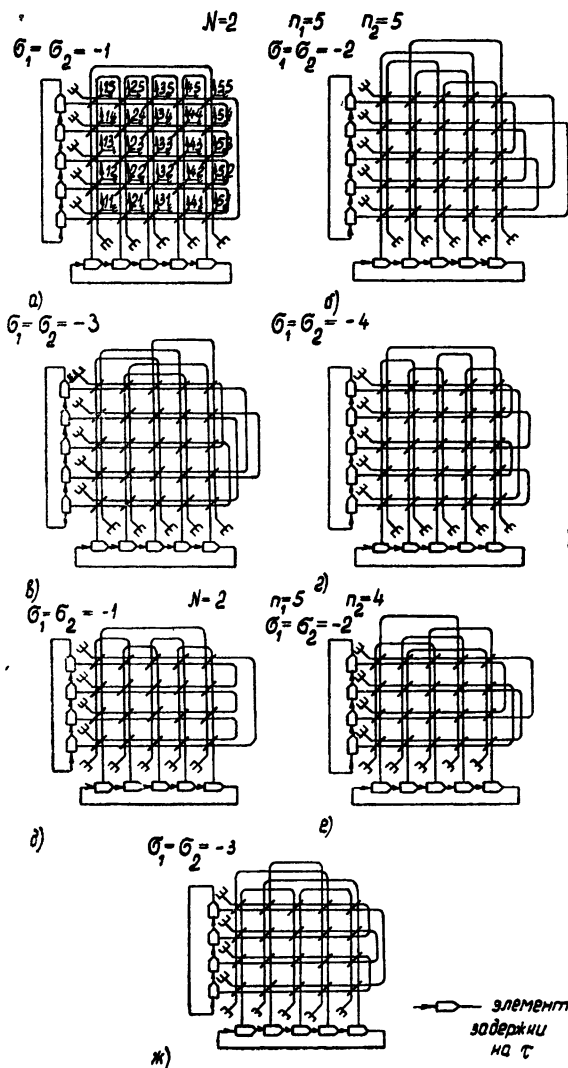


Рис. 2.

Полученные устройства представляют собой счетчики, если сдвиг единицы в регистрах производится только в момент прихода на схему счетного импульса, и генераторы (или распределители) импульсов, если во всех  $N$  регистрах существует непрерывная рециркуляция. При этом каждое устройство имеет  $M$  отдельных счетчиков (распределителей) импульсов, работающих по  $\text{mod } S$ . Выбор того или иного счетчика (распределителя) в данном устройстве, а также начальная «фаза» работы определяется начальными условиями  $X^0$  и  $\Phi^0$  (см. (2.5) и (2.7)), заданными в  $t = 0$  на рециркуляционных регистрах всех  $N$  измерений. Если начальное положение единиц в регистрах определяется формулой (2.1),

что может быть легко пересчитано в  $x_i$  и  $f_i$ , то сдвиг фазы работы генератора или прибавление к счетчику некоторой величины  $\alpha$  может быть легко осуществлено путем сдвига единиц во всех регистрах на величину  $\alpha$ . Новые координаты  $\beta_i$  единиц в регистрах будут иметь значения, определяемые формулой (2.9) или соотношением

$$\beta_i = [\alpha_i + \alpha] \bmod n_i. \quad (3.2)$$

*Моделирование запоминающих устройств.* На основе вышеизложенного могут быть построены многие типы рециркуляционных запоминающих устройств, выполненные в любом пространстве с любой кратностью совпадения тока и сколь угодно малой помехой при считывании.

Рассмотрим один из возможных вариантов выполнения запоминающего устройства.

Пусть требуется выполнить запоминающее устройство в  $N$ -мерном пространстве с измерением по каждой из координат, равным  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Для этого выполним  $C_N^{n_1-1} = N$  различных генераторов

$$W_{\xi_i}(n_1, n_2, \dots, n_{\xi-1}, n_{\xi}, n_{\xi+1}, \dots, n_N) \quad (3.3)$$

при  $n_{\xi} = 0$  для  $\xi = 1, 2, \dots, N$  с  $N-1$  кратным совпадением тока. В каждом из  $N$  генераторов отсутствует одна из координат  $n_{\xi}$  (см. раздел о моделировании генераторов). При этом все обмотки  $n_i$ -ых измерений генераторов соединим, например, последовательно. Для каждого из генераторов восстановление ферритов выполним с различными\*

$$\sigma_i = -i \text{ при } i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4)$$

Кроме того, на каждый из генераторов наматывается несколько (две-три) дополнительных общих обмоток восстановления. Необходимо, чтобы в каждый момент времени одна из этих обмоток проходила через восстанавливаемый «1» → «0» феррит и не проходила через феррит, обеспечивающий выход генератора («0» → «1»). Выходные обмотки каждого генератора являются совокупностями прошивок заданного направления запоминающего  $N$ -мерного куба. Считывающая обмотка нашего запоминающего куба также разбивается на отдельные группы, такие, что если в одну группу входит восстанавливаемый феррит после считывания с него «1», во время  $t$ , то в другую — феррит, с которого производится считывание в  $t + \tau$ . При считывании с феррита запоминающего куба единицы восстановления ее ведется импульсами обратной полярности, получающимися при восстановлении ферритов  $N$  генераторов импульсов дополнительными обмотками восстановления. Каждый генератор дает ток  $J^0/N$ ; общий ток восстановления в феррите  $J^0$ . Если же с запоминающего куба считан нуль, то восстановления соответствующего феррита запоминающего куба не требуется. Поэтому восстановление ферритов координатных генераторов происходит постепенно (за счет различных  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ), обеспечивая суммарный ток в соответствующем феррите запоминающего куба не более  $J^0/N$  или  $J^0/\beta$ .

Так, например, для случая  $N = 3$ ,  $n_1 = 5$ ,  $n_2 = 2$  и  $n_3 = 3$  будем иметь  $C_3^2 = 3$  генератора  $W_1(n_1 n_2) \sim 2 \times 5$ ;  $W_2(n_1 n_3) \sim 3 \times 5$  и  $W_3(n_2 n_3) \sim 2 \times 3$ , соединенные, как показано на рис. 3а. На рисунке шины  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) — дополнительные обмотки восстановления генераторов,  $k$  — элементы конъюнкции,  $\tau$  — элементы задержки на время  $\tau$

\* Это условие не является обязательным. Необходимо лишь, чтобы ток восстановления через заданный феррит запоминающего  $N$ -мерного куба от одновременно восстанавливаемых генераторов не превышал  $J_i \beta$  при  $\beta = 2, 3, 4, \dots$

(рециркуляционные регистры). Для упрощения рисунков на них не показаны основные цепи восстановления генераторов. Заметим лишь, что для  $W_1(n_1 n_2) \sim \sigma_1(\sigma_1^{n_1}, \sigma_1^{n_2}) = -3$ ;  $W_2(n_1 n_3) \sim \sigma_2(\sigma_2^{n_1}, \sigma_2^{n_3}) = -2$ ;  $W_3(n_2 n_3) \sim \sigma_3(\sigma_3^{n_2}, \sigma_3^{n_3}) = -1$ , где  $\sigma_1^{n_1} = -3$ ,  $\sigma_1^{n_2} = -1$ ,  $\sigma_2^{n_1} = -2$ ,  $\sigma_2^{n_3} = -2$ ,  $\sigma_3^{n_2} = -1$ ,  $\sigma_3^{n_3} = -1$ .

На рис. 3б показан пример выполнения куба памяти с совпадением трех токов  $J^{0/3}$  для считывания и трех токов  $-J^{0/3}$  для восстановления единицы. Указанные токи берутся с коммутатора, данного на рис. 3а.

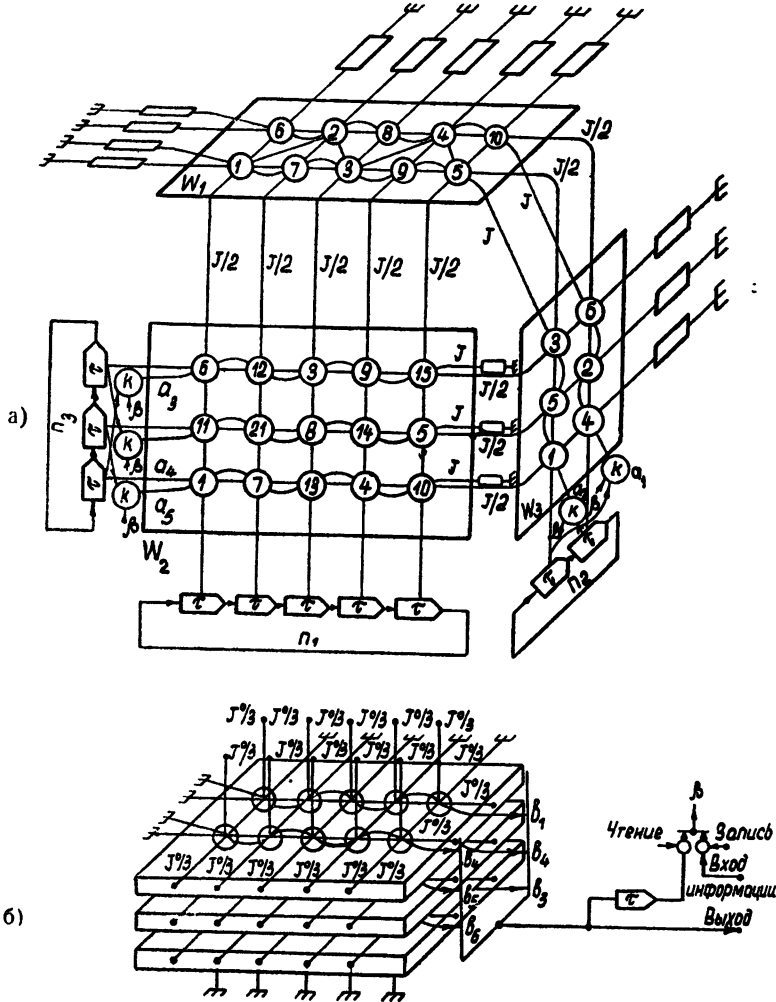


Рис. 3.

В случае необходимости восстановления единицы в кубе памяти сброс на «0» ферритов коммутаторов происходит одновременно от дополнительных восстанавливающих обмоток, обеспечивая на выходе три тока  $-J^{0/3}$ , совпадающие в восстанавливаемом феррите. В случае восстановления нуля сброс на «0» координатных коммутаторов происходит постепенно, обеспечивая в ферритах куба памяти ток не более  $J^{0/3}$ . Обмотки  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) — считывающие с плат куба памяти, выходы которых дизъюнктивно складываются.

В заключение заметим, что для случая  $N > 2$  выполнение запоминающего  $N$ -мерного куба и координатных генераторов легко может быть сведено к выполнению плоских (двухмерных) плат. Это дает возможность свести  $N$ -мерный куб к набору  $n^{N-2}$  двухмерных плат ( $\bar{N} = 2$ ) с  $N$ -кратным совпадением тока в каждой и помехой не более  $J^0/N$ .

На основе сказанного могут быть выполнены как последовательные (с длиной слова  $S$  и числом слов  $M$ ), так и параллельные запоминающие устройства. В случае выполнения параллельных запоминающих устройств удобно, чтобы каждый  $N$ -мерный куб хранил один разряд всех чисел. Для  $m$ -разрядного слова требуется  $m$   $N$ -мерных кубов. Необходимо отметить, что рециркуляционные регистры для всех  $m$  кубов могут быть общими, а одноименные координатные обмотки дешифрующих генераторов соединены последовательно.

Для случая последовательных запоминающих устройств при выборе достаточно больших  $S$  и малом  $M$  легко может быть получено запоминающее устройство с переменной длиной слова (в том числе при  $M = 1$  вся память — одно слово, которое может быть разделено на произвольные отрезки в зависимости от управления сдвигowymi регистрами  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ).

Интересно отметить, что при выполнении сдвигowych регистров  $n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) в виде реверсивных устройств со сдвигом единицы как в одном, так и другом направлении легко получить  $2^N$  сечений (см. формулы (2.11) и (2.12)) слов, хранящихся в запоминающих устройствах. Это может иметь большое значение для различных информационных и управляющих машин. В таких машинах при использовании рассмотренных запоминающих устройств к адресу по каждой из координат  $n_i$  может быть добавлен разряд, говорящий о направлении сдвига единицы в  $n_i$ -ом регистре.

Для выбора в рассмотренных устройствах того или иного слова необходимо адрес, состоящий из адресов отдельных измерений, преобразовать в  $N$  единиц, которые заносятся в соответствующие места соответствующих измерений. Это может быть выполнено двумя путями.

1. Путем преобразования с помощью дешифраторов кодов адресов каждого измерения в коды, содержащие  $p_i$  — 1 нуль и одну единицу, расположенную в месте, однозначно определяемом каждым адресом измерения (см. (2.5)). Этот код заносится в соответствующее место рециркуляционного регистра.

2. Путем занесения в рециркуляционные регистры единиц во времена, пропорциональные адресам отдельных измерений. Для этой цели может быть использован обычный счетчик. Сдвиг в регистрах измерений начинается после внесения единиц во все рециркуляционные регистры  $N$  измерений:

Заметим, что второй метод требует значительного времени для подготовки записи и чтения, но минимального оборудования. Отметим также, что при получении величин  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) существует определенный «произвол», вследствие чего вопрос о выборе наилучшего соотношения чисел  $p_i$  должен решаться в каждом конкретном случае отдельно. Для упрощения дешифрации желательно, чтобы эти числа были близки к целым степеням двойки ( $p_i \leq 2^{Q_i}$ ), а также были близки по величине между собой.

Кратко рассмотрим преимущества описанных запоминающих устройств. По сравнению с широко известными запоминающие устройства, описанные в настоящей работе, обеспечивают:

1) считывание кода в прямом и обратном направлении, а также выборку всевозможных сечений по разным кодам;

- 2) значительное упрощение дешифрации;
- 3) существенное упрощение выполнения групповых операций как с целыми кодами, так и с их частями;
- 4) упрощение выборки части кода;
- 5) существенное упрощение сдвига кода в любую сторону на заданную величину;
- 6) выборку и запись кодов параллельно-последовательными группами с заданным периодом;
- 7) выполнение вычислительных и управляющих машин с переменной длиной слова и т. д.

На основе изложенных выше результатов могут быть построены различные новые типы генераторов (распределителей) импульсов, счетчиков и запоминающих устройств на разнообразных элементах, позволяющих моделировать; некоторые логические функции и обладающие (для запоминающих устройств) функцией сохранения информации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1027 (1962).
2. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 858 (1963).
3. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 810 (1963).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
29 декабря 1963 г

#### THEORY OF RECIRCULATION MEMORY DEVICES AND GENERATORS

*M. Ya. Eingorin*

The theory is considered of new types of  $n$ -dimensional generators of impulses, computers and memory devices being used in series and parallel computers and control devices. The geometrical interpretation of these devices is given and some examples are set forth of their modelling by means of ferrite cores.

---

*Примечание при корректуре* В работе «Динамические задержки, регистры и триггеры без сдвига информации», опубликованной в журнале № 5 за 1962 год, имеются две опечатки в рисунках: 1) на рис. 2в число точек  $u_i$  и тактовых импульсов  $t_i$  должно быть не 10, а 11; 2) на рис. 3ж стрелка на шине  $\beta'_k$  должна быть не слева направо, а справа налево относительно вертикально указанного феррита.



## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 523.164

### СПЕКТР РАСПРЕДЕЛЕННОГО КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ДЕКАМЕТРОВЫМ ДИАПАЗОНЕ РАДИОВОЛН

Ю. С. Коробков

Исследованию спектра космического радиоизлучения посвящен ряд работ [1-6]. До недавнего времени считалось, что интенсивность космического радиоизлучения  $I \propto f^{-\alpha}$ , где  $f$ —частота, а  $\alpha$ —спектральный индекс, постоянный в широком диапазоне частот. В то же время значения спектрального индекса, приводимые в различных работах, колебались в пределах  $0,2 \div 1$  даже при измерении индекса в одном и том же частотном диапазоне. Дальнейшие измерения показали, что уже в метровом диапазоне радиоволн обнаруживается зависимость спектрального индекса от частоты [4]. В настоящее время имеющиеся в литературе сведения о спектре космического радиоизлучения относятся либо к диапазону метровых волн [1-4], либо к средневолновому диапазону [5, 6]. Насколько нам известно, данных о спектре космического радиоизлучения в декаметровом диапазоне радиоволн (10 — 30 м) в литературе до сих пор не приводилось.

Между тем представляет интерес проследить за поведением спектра и в этом диапазоне. Измерения в этом диапазоне интересны, во-первых, с точки зрения исследования механизма генерации космического радиоизлучения и распространения его через межзвездную среду, так как именно в этом диапазоне наиболее существенно меняется спектральный индекс излучения  $\alpha$ ; во-вторых, интенсивно развивающиеся в настоящее время радиоастрономические методы исследования ионосферы используют декаметровый диапазон радиоволн и в ряде случаев при расчете аппаратуры и калибровке антенно-фидерных систем возникает потребность в знании абсолютных значений температуры космического радиоизлучения и зависимости ее от частоты в этом диапазоне радиоволн.

Измерения спектра распределенного космического радиоизлучения в диапазоне  $40 \div 6,3$  МГц, о результатах которых здесь сообщается, проводились в сентябре—октябре 1963 г. Ввиду того, что в этом диапазоне некоторое влияние на спектр может оказать ионосфера, при построении спектра использовались результаты наблюдений в ночное время, когда критическая частота ионосферы была достаточно низкой ( $f_0F_2 \sim 2 \div 3$  МГц). Прием космического радиоизлучения производился на частотах 40; 25; 18,6; 13; 9 и 6,3 МГц с помощью многодипольных антенн, обладающих идентичными электрическими параметрами. Максимум основного лепестка диаграммы направленности был направлен в зенит; ширина лепестка в точках половинной мощности составляла  $35^\circ \times 25^\circ$ .

В целях уменьшения потерь в земле антенны на частотах 40; 25; 18,6; 13 МГц были снабжены проволочными рефлекторами. Антенны на 9 и 6,3 МГц рефлекторов не имели, так как на этих частотах электрические свойства влажной почвы (измерения проводились в осеннее время) близки к электрическим свойствам металла.

Калибровка уровня фона производилась с помощью шумового диода в узком диапазоне значений анодного тока. Для приведения уровня космического радиоизлучения в динамический диапазон шумового диода использовались специальные делители. С целью компенсации потерь в антенном кабеле сигнал от шумового генератора подавался на вход приемника через кабель, имеющий такую же длину и находящийся при той же температуре, что и антенный.

При оценке погрешности измерений учитывались следующие ошибки: 1) ошибки при калибровке аттенуаторов ( $\pm 3\%$ ), 2) погрешность калибровки шумовым диодом ( $\pm 2\%$ ), 3) ошибка, связанная с неидентичностью диаграмм направленности антенн ( $\pm 1\%$ ), 4) флюктуационные ошибки и погрешности регистрации ( $\pm 2\%$ ), 5) ошибки при учете рассогласования ( $\pm 2\%$ ), 6) неидентичность потерь в антенном кабеле и кабеле шумового генератора ( $\pm 1\%$ ), 7) ошибки, возникающие при учете потерь в земле ( $\pm 5\%$  на частотах 40; 25; 18,6; 13 МГц и  $\pm 8\%$  на частотах 9 и 6,3 МГц), 8) погреш-

ности при учете поглощения в ионосфере (на частоте  $18,6 \text{ МГц} \pm 1\%$ , на частоте  $13 \text{ МГц} \pm 1,8\%$ , на частоте  $9 \text{ МГц} \pm 3,5\%$  и на частоте  $6,3 \text{ МГц} \pm 6,5\%$ ). В результате погрешность измерения температуры, определенная как корень квадратный из суммы квадратов приведенных выше ошибок, составляет на частотах 40; 25; 18,6;  $13 \text{ МГц} \pm 7\%$ , на частоте  $9 \text{ МГц} \pm 10\%$  и на частоте  $6,3 \text{ МГц} \pm 12\%$ .

Исследовался спектр космического радиоизлучения из области, определяемой угловыми размерами диаграммы направленности антенны с центром, имеющим галактические координаты  $l = 98,5^\circ$ ,  $b = -5,3^\circ$ . На рис. 1 представлен полученный спектр космического радиоизлучения в декаметровом диапазоне радиоволн. Можно видеть, что величина интенсивности космического радиоизлучения достигает плоского участка на частотах около 8 -- 9 МГц, после чего намечается тенденция к уменьшению интенсивности.

В работе [7] указаны три возможные причины «завала» спектра. Во-первых, «завал» спектра может быть обусловлен изменением энергетического спектра релятивистских электронов из-за ионизационных потерь. Во-вторых, следует иметь в виду, что релятивистские электроны излучают не в вакууме, а в среде, показатель преломления которой на достаточно низких частотах может отличаться от единицы. Поэтому на частоте

$$f' \approx 10 \epsilon c N_e / H_{\perp},$$

где  $e$  — заряд электрона,  $c$  — скорость света,  $N_e$  — электронная концентрация,  $H_{\perp}$  — компонента межзвездного магнитного поля, перпендикулярная скорости релятивистского электрона, интенсивность космического радиоизлучения достигает максимума, а на частотах  $f < f'$  спектральный индекс  $\alpha$  становится отрицательным. Если принять, что  $H_{\perp} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ эрстед}$ , то максимум на частоте 8 — 9 МГц будет обеспечен, если предположить, что концентрация электронов в плоскости Галактики достигает  $0,2 \text{ э. см}^{-3}$ . И, наконец, поглощение в межзвездной среде может привести к «завалу» спектра космического радиоизлучения, начиная с частоты, на которой оптический путь в межзвездном газе  $\tau \approx \alpha/2$ . В нашем слу-

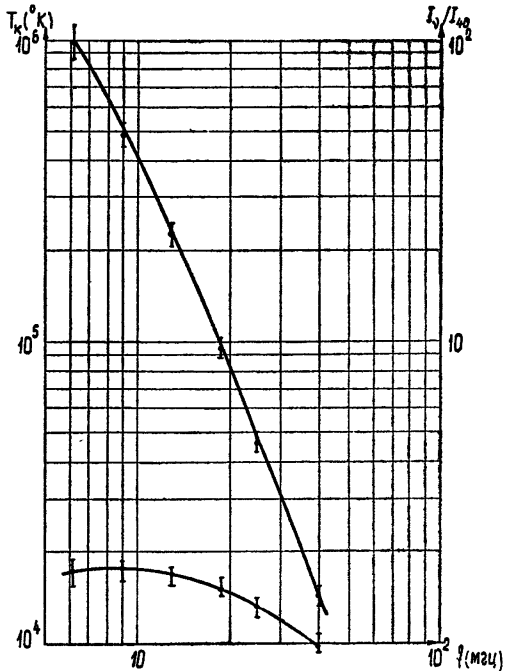


Рис. 1. Зависимость температуры  $T_k$  и относительной интенсивности  $I_0/I_{40}$  космического радиоизлучения от частоты в декаметровом диапазоне волн.

чае для выполнения этого условия необходимо иметь в плоскости Галактики ионизированный газ со средней плотностью порядка  $0,13 \text{ э. см}^{-3}$ .

Во всем диапазоне исследуемых частот заметна также зависимость спектрального индекса от частоты. На рис. 2 построен частотный ход величины  $\alpha' = \alpha + 2$  — спектрального индекса температуры космического радиоизлучения. На этом же рисунке крестиками отмечен ход кривой, определяемой зависимостью:  $\alpha' = 2,7(1 - 2,1/f)$  ( $f$  — в МГц). Эта зависимость достаточно хорошо аппроксимирует наблюдаемое изменение  $\alpha'$  с частотой. Если эта зависимость сохраняется и на более низких частотах, то максимума температуры космического радиоизлучения следует ожидать на частоте 2,1 МГц, где  $\alpha'$  обращается в нуль. Аналогичный вывод может быть сделан и по результатам работы [6].

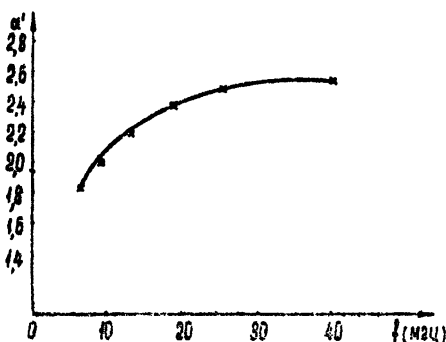


Рис. 2. Зависимость спектрального индекса температуры космического радиоизлучения  $\alpha'$  от частоты  $f$ .

Следует, однако, иметь в виду, что из-за погрешностей, которые имелись в настоящей работе при измерении температуры, спектральный индекс  $\alpha'$  определен с точностью  $\pm 0,3$  на частотах 40; 25; 18,6 и 13 МГц и с точностью  $\pm 0,35$  на частотах 9 и 6,3 МГц. Поэтому даже в пределах исследуемого диапазона допустимы зависимости  $\alpha'$  от  $f$ , отличные от  $\alpha' = 2,7 (1 - 2,1/f)$  ( $f$  — в МГц). Недостаточно высокой точностью измерений можно, по-видимому, объяснить различия, имеющиеся в частотном ходе  $\alpha'$ , полученном в настоящей работе и в работах [4,6].

Автор благодарен А. Ф. Тарасову за помощь в работе и Н. М. Цейтлину за ценные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. Westerhout, Bull. Austr. Inst. Nethelds, **14**, 215 (1958).
2. M. M. Komesaroff, Austr. J. Phys., **14**, 515 (1961).
3. C. H. Costain, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., **120**, 248 (1960).
4. A. J. Turtle, J. F. Pugh, S. K. Enderdine, I. I. K. Pauliny-Toth, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., **124**, 297 (1962).
5. G. R. A. Ellis, J. Geophys. Res., **62**, 229 (1957).
6. G. R. A. Ellis, M. D. Waterworth, M. Bessell, Nature, **196**, 1079 (1962).
7. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 921 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
16 июня 1964 г.

УДК 621.371.2

### ИЗМЕРЕНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В АТМОСФЕРЕ НА ДЛИНЕ ВОЛНЫ $\lambda = 3,2$ см

В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева

Впервые измерения поглощения радиоволн в атмосфере на длине волны 3,2 см были произведены в 1956 г. [1]. С тех пор значительно усовершенствовалась методика калибровки антенных систем, и повторение измерений поглощения представляло определенный интерес.

В наших измерениях определялась температура теплового радиоизлучения атмосферы на различных высотах над горизонтом. На длине волны 3,2 см поглощение радиоволн происходит в кислороде и водяном паре, и для высот  $\varphi > 7^\circ$  над горизонтом можно записать температуру радиоизлучения атмосферы в виде

$$T_a(\varphi) = [(T_0 - 6,5 H_1) \kappa_{01} H_1 + \kappa_{02} H_2 (T_0 - 6,5 H_2)] \operatorname{cosec} \varphi, \quad (1)$$

где  $H_1$  и  $H_2$  — эффективные высоты поглощения в кислороде и водяном паре,  $\kappa_{01}$  и  $\kappa_{02}$  — коэффициенты поглощения в кислороде и водяном паре на поверхности земли.

Если уровень нулевого отсчета фиксируется на высоте  $\varphi_0$ , то приращение температуры антенны при приеме радиоизлучения атмосферы на высоте  $\varphi$

$$n_a(\varphi) = \alpha [(T_0 - 6,5 H_1) \kappa_{01} H_1 + \kappa_{02} H_2 (T_0 - 6,5 H_2)] (\operatorname{cosec} \varphi - \operatorname{cosec} \varphi_0), \quad (2)$$

где  $\alpha$  — аппаратный коэффициент пропорциональности. Калибровка принимаемых сигналов осуществлялась путем сравнения их с излучением «абсолютно черной» горы, находившейся во френгоферовой зоне антенны и закрывавшей весь главный лепесток диаграммы направленности.

Приращение температуры антенны при приеме радиоизлучения горы

$$n_r = \alpha \{ T_0 - [(T_0 - 6,5 H_1) \kappa_{01} H_1 - \kappa_{02} H_2 (T_0 - 6,5 H_2)] \operatorname{cosec} \varphi_0 \}. \quad (3)$$

Взяв отношение  $n_a/n_r$  и принимая для оценок  $H_1 = 5$  км и  $H_2 = 1,8$  км [2], получим

$$\Gamma' = \kappa_{01} H_1 + 1,08 \kappa_{02} H_2 = \frac{1,1 n_a(\varphi)/n_r}{\operatorname{cosec} \varphi - \operatorname{cosec} \varphi_0}. \quad (4)$$

Поскольку поглощение в водяном паре пропорционально абсолютной влажности  $\rho: \kappa_{02} = a\rho$ , то, экстраполируя экспериментальные значения  $\Gamma'$  к значениям  $\rho = 0$ , можно получить поглощение в кислороде  $\kappa_{01} H_1$ .

Исследования проводились с антенной диаметром 4 м. Радиометр имел чувствительность 0,5°К при постоянной времени 1 сек. В течение сентября было получено 50 значений  $\Gamma'$ , соответствующих различным  $\rho$ . Зависимость  $\Gamma'$  от  $\rho$  представлена на

рис. 1. В результате этих измерений получена величина поглощения в кислороде на  $\lambda = 3,2$  см  $\tau_{01} H_1 = (0,054)$  дб, которая на 16% больше приведенной в [1]. Для поглощения в водяном паре коэффициента  $= 7 \cdot 10^{-4}$  дб  $\cdot$  м<sup>3</sup>  $\cdot$  км<sup>-1</sup>  $\cdot$  г<sup>-1</sup>, который по этим данным в 2 раза меньше принятого ранее [1]. Точность приведенных результатов  $\pm 7\%$ . При вычислении поглощения в водяном паре эффективная высота принималась равной  $H_2 \text{эфф} = 1,8$  км.

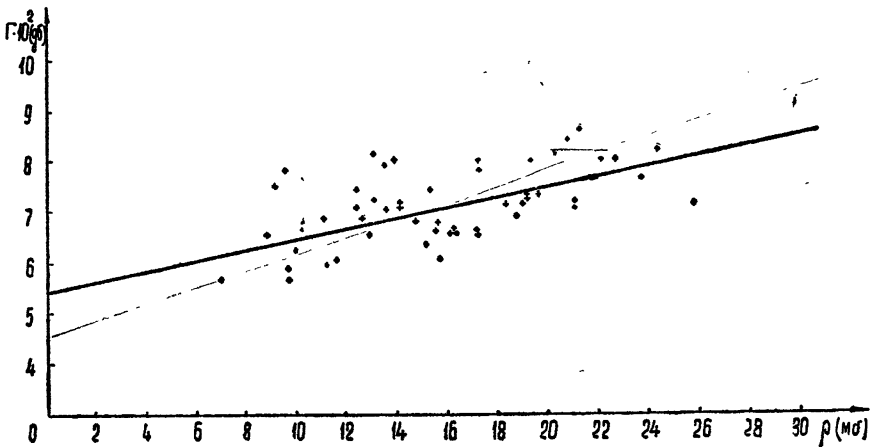


Рис. 1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 19 (1958).
2. В. В. Кузовлев, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, 175 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 ноября 1963 г.

УДК 533.951

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ПЛАЗМА — ДИЭЛЕКТРИК

Ц. Д. Лолодзе

Вопросу преобразования волн на границе раздела двух плазменных сред посвящены работы [1—3]. В них рассматривается связь электромагнитного излучения с плазменными волнами на границе плазмы. Частный случай плазмы, граничащей с вакуумом, исследован в [4, 5]. В [6] изучена связь электромагнитных и акустических волн. Преобразование поперечной волны, падающей из диэлектрика на плазменную границу, в продольную волну в плазме, рассмотрено в [7].

В настоящей заметке рассматривается преобразование волн на границе плазма — диэлектрик во внешнем постоянном магнитном поле. Выяснена зависимость поля излучения от поля падающей волны.

Как известно, в анизотропной плазменной среде возможно существование анизотропной альфвеновской волны [8] и быстрой и медленной магнитозвуковых волн. Преобразование волн на границе двух сред непосредственно связано с отражением и преломлением волн. Как показано в [9], при падении на границу быстрой (или медленной) магнитозвуковой волны в составе отраженных и преломленных волн есть волны обоих типов (быстрые и медленные). Если же плазма граничит с диэлектриком, то при выбранной поляризации волн, сходящихся и расходящихся от границы, в диэлектрике будет распространяться лишь одна волна электромагнитного типа, тогда как в плазме по-прежнему будут отражаться две волны.

Для установления связи амплитуд возникших волн с амплитудой падающей волны воспользуемся граничными условиями непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей и нормальной составляющей электрического поля.

Выберем систему координат с осью  $z$ , направленной перпендикулярно поверхности раздела плазма—диэлектрик  $xy$ . В области  $z < 0$  находится плазма, область  $z > 0$  занимает диэлектрик. Внешнее постоянное магнитное поле  $H_0$  направлено по нормали к поверхности раздела вдоль оси  $z$ .

Согласно дисперсионному соотношению [9], в анизотропной плазме могут существовать магнитозвуковые волны и анизотропная альфвеновская волна, распространяющаяся со скоростью  $V_A^2 = S_{\perp}^2 + v_0^2 - S_{\parallel}^2$ , где  $v_0 = \sqrt{H_0/4\pi\rho_0}$  — изотропная альфвеновская скорость,  $S_{\perp}$  и  $S_{\parallel}$  — перпендикулярная и параллельная скорости звука соответственно.

Пусть на поверхность раздела плазма — диэлектрик под углом  $\vartheta_i$  к направлению внешнего магнитного поля падает со стороны анизотропной плазмы волна с волновым вектором  $k_i$ , несущая с собой электрическое поле  $E_i$ . Исходя из граничных условий, для отношения амплитуд преломленной и падающей волн получим выражение

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2k_t \cos^2 \vartheta_i (k_r^2 - k_i^2)}{(k_r^2 - k_i^2) \sqrt{k_r^2 - k_i^2 \sin^2 \vartheta_i} + (k_r^2 - k_i^2) \sqrt{k_r^2 - k_i^2 \sin^2 \vartheta_i} + (k_r^2 - k_i^2) k_i \cos \vartheta_i}, \quad (1)$$

где  $k_r$ ,  $k_t = (\omega/c)\sqrt{\epsilon}$  — волновые векторы отраженной и преломленной волн соответственно,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость диэлектрика

Как видно из выражения (1), для излучения необходимо выполнение условия

$$\sin \vartheta_i \leq k_t/k_i, \quad (2)$$

так как в противном случае  $\cos \vartheta_i$  ( $\vartheta_i$  — угол преломления) комплексный и поперечная волна становится поверхностной волной, распространяющейся вдоль границы и экспоненциально затухающей в направлении нормали к границе. Для волн в анизотропной плазме

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V_A^2 \cos^2 \vartheta}, \quad k^2 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - B^2}}{D \cos^2 \vartheta},$$

где

$$A = 3S_{\parallel}^2 k_x^2 (S_{\perp}^2 + S_{\parallel}^2 + V_A^2) - \omega^2 (3S_{\parallel}^2 + V_A^2) - k_x^2 S_{\perp}^4;$$

$$B = \sqrt{12} S_{\parallel} V_A \omega \sqrt{\omega^2 - k_x^2 (S_{\perp}^2 + S_{\parallel}^2 + V_A^2)};$$

$$D = 6 S_{\parallel}^2 V_A^2.$$

Для существования этих волн в плазме необходимо, чтобы

$$|A| > \sqrt{A^2 - B^2} > 0, \quad A < 0.$$

Рассмотрим падение на поверхность раздела плазма — диэлектрик волны, для которой

$$k_i^2 = \frac{-A + \sqrt{A^2 - B^2}}{D \cos^2 \vartheta_i}.$$

Для оценки амплитудного соотношения (1) рассмотрим предельные случаи  $V_A \rightarrow 0$  и  $V_A \rightarrow v_0$ .

Устремим сначала к нулю анизотропную альфвеновскую скорость  $V_A$ . Согласно [8, 10, 11], это соответствует приближению к границе неустойчивости анизотропной плазмы, для устойчивости которой необходимо одновременно выполнение условий

$$V_A^2 > 0;$$

$$S_{\parallel}^2 > \frac{S_{\perp}^4}{3(S_{\perp}^2 + S_{\parallel}^2 + V_A^2)}.$$

В таком случае для соотношения амплитуд получим

$$\frac{E_t}{E_i} = 2 \frac{\cos \vartheta_i}{\cos \vartheta_i}. \quad (3)$$

При нормальном падении волн на границу ( $\vartheta_i = 0$ ) амплитуда преломленной волны вдвое больше амплитуды падающей волны.

Переходя к случаю изотропной среды, т. е. полагая  $S_{\perp} = S_{\parallel}$  и, следовательно,  $V_A = v_0$ , из общего выражения (1) для соотношения амплитуд получим

$$\left. \frac{E_t}{E_i} \right|_{\substack{\vartheta_i = 0 \\ V_A = v_0}} = \frac{2c \sqrt{\epsilon} (v_0 + \sqrt{3} S)}{c \sqrt{\epsilon} (v_0 + \sqrt{3} S) + (c^2 + \sqrt{3} S v_0 \epsilon)}, \quad (4)$$

где  $S = S_{\perp} = S_{\parallel}$ . Выражение (4) представляет собой отношение амплитуды преломленной волны с волновым вектором  $k_t = (\omega/c) \sqrt{\epsilon}$  к амплитуде падающей волны с волновым вектором  $k_i = \omega/v_0$ .

Условия  $V_A \rightarrow 0$  и  $V_A \rightarrow v_0$  приводят к различным результатам для отношения амплитуд преобразованных волн на границе при падении волны перпендикулярно к поверхности раздела. Сравнение выражений (3) и (4) приводит к выводу, что преломленная волна в случае  $V_A \rightarrow v_0$  распространяется с меньшей амплитудой, чем в случае  $V_A \rightarrow 0$ .

Для оценки степени трансформации электромагнитной волны в диэлектрик в этих двух предельных случаях найдем отношение потоков энергии преломленной и падающей волн. Трансформация волн будет иметь место лишь в очень узком конусе углов падения (см. (2)). Поэтому относительную энергию излучения надо искать при очень малых значениях углов падения волн. В результате для случая  $V_A \rightarrow 0$  получим величину  $4k_t/k_i$ , а для случая  $V_A \rightarrow v_0$  — величину  $4(k_t/k_i) \epsilon (v_0/c)^2$ . Учитывая малость параметра  $v_0/c$ , видим, что энергия трансформации при  $V_A \rightarrow 0$  больше, чем при  $V_A \rightarrow v_0$ .

Автор признателен Н. Л. Цинцадзе за обсуждение результатов работы и ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Kritzer, D. Mintzer, Phys. Rev., **117**, 382 (1960).
2. D. A. Tidman, Phys. Rev., **117**, 366 (1960).
3. D. A. Tidman, S. M. Boyd, Phys. Fluids., **5**, 213 (1962).
4. G. V. Field, Astrophys. J., **124**, 555 (1956).
5. Ц. Д. Лоладзе, Н. Л. Цинцадзе, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, 374 (1964).
6. В. М. Конторович, А. М. Глуцук, ЖЭТФ, **41**, 852 (1962).
7. А. М. Федорченко, ЖТФ, **32**, 589 (1962).
8. Н. Л. Цинцадзе, А. Д. Патарая, ЖТФ, **30**, 1178 (1960).
9. Ц. Д. Лоладзе, Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ, **33**, 929 (1963).
10. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, **3**, изд. АН СССР, М., 1958.
11. Р. В. Половин, Н. Л. Цинцадзе, УФЖ, **4**, 30 (1959).

Поступила в редакцию  
30 января 1964 г.

УДК 533.951

### ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ГИРОТРОПНОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ

И. Г. Кондратьев

Настоящая работа посвящена электромагнитным поверхностным волнам, направляемым гиротропным плазменным слоем. Она, по существу, дополняет результаты работ, посвященных поверхностным волнам в изотропном плазменном слое [1–3], а также поверхностным волнам вдоль границ раздела плазма—вакуум [4] и плазма—металл [5] при наличии поперечного (по отношению к направлению распространения) внешнего магнитного поля,— в смысле оценки влияния магнитного поля в первом случае и конечной толщины плазмы — во втором\*.

\* Существует также ряд статей, в которых рассматриваются поверхностные волны в плазменном слое с продольным магнитным полем [6–8]. Аналогичные вопросы обсуждаются в монографиях [9, 10].

Предполагается, что плазма однородна и заполняет пространство между плоскостями  $x = -x_0$ ,  $x = x_0$ , постоянное магнитное поле  $H^{(0)}$  ориентировано вдоль оси  $y$ , а поверхностная волна распространяется в  $z$ -направлении ( $e^{\mp i h z}$ )\*. Так же, как в изотропном случае ( $H^{(0)} = 0$ ), из числа двухмерных только волны типа ТМ (по отношению к  $z$ -направлению) могут иметь локализованные вблизи слоя поля, т. е. быть поверхностными. Как нетрудно показать, характеристическое уравнение для волновых чисел в случае слоя в свободном пространстве имеет вид [11]

$$\left[ p x_0 + \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \kappa x_0 \operatorname{cth}(\kappa x_0) \right] \left[ p x_0 + \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \kappa x_0 \operatorname{th}(\kappa x_0) \right] = \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\varepsilon_{\perp}^2} (h x_0)^2. \quad (1)$$

Здесь обозначено:

$$p^2 = h^2 - k_0^2, \quad \kappa^2 = h^2 - k_0^2 \varepsilon_{\perp}, \quad k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0, \quad \varepsilon_{\perp} = \frac{(1-v)^2 - u}{1-v-u},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{v \sqrt{u}}{1-v-u}, \quad v = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad u = \frac{\omega_H^2}{\omega^2},$$

$\omega_0$  — плазменная частота,  $\omega_H$  — гирочастота,  $\varepsilon_0, \mu_0$  — проницаемости вакуума. Для обеспечения поверхностного характера поля необходимо, чтобы  $\operatorname{Re} p > 0$ .

При отсутствии магнитного поля ( $u = 0$ ) это уравнение распадается на два независимых, соответствующих четным ( $E_z(x) = E_z(-x)$ ) и нечетным ( $E_z(x) = -E_z(-x)$ ) поверхностным волнам; при  $u \neq 0$  такое разбиение становится невозможным. В силу этого самостоятельный интерес представляют случаи гиротропного слоя над идеально проводящей плоскостью ( $x = 0, E_z = 0$ ), а также над плоскостью с  $H_{\text{тан}} = 0$  ( $x = 0, H_y = 0$ ); соответствующие характеристические уравнения записываются в виде:

$$p x_0 = - \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} \frac{(\kappa x_0)^2 - \tilde{\varepsilon}^2 (h x_0)^2}{\kappa x_0 + \tilde{\varepsilon} h x_0 \operatorname{th}(\kappa x_0)} \operatorname{th}(\kappa x_0); \quad (2)$$

$$p x_0 = - \frac{1}{\varepsilon_{\perp}} [\kappa x_0 \operatorname{cth}(\kappa x_0) - \tilde{\varepsilon} h x_0]. \quad (3)$$

Отличительной особенностью уравнений (2), (3) по сравнению с (1) является зависимость от знака постоянной распространения  $h$  [11].

Перейдем к анализу решений уравнений (1)–(3). На рис. 1 приведены некоторые из дисперсионных кривых (зависимостей  $\gamma = h/k_0$  от  $\varepsilon_1 = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ ), отвечающих этим трем случаям, для двух значений параметра  $u_0 = \omega_0^2/\omega_0^2 = 0,1$  и  $2$ ; во всех случаях параметр  $l = 2\pi x_0/\lambda_p$  ( $\lambda_p$  — плазменная длина волны) выбирался равным  $0,1$  (см. [2]). Там же для сравнения показаны соответствующие кривые для истинных поверхностных волн ( $l = \infty$ ); характеристическое уравнение этих волн получается из (1)–(3) при  $x_0 \rightarrow \infty: p = -\varepsilon_{\perp}^{-1}(\kappa - \tilde{\varepsilon} h)$ . (Верхняя граница области существования истинных поверхностных волн  $\varepsilon_1^*$  определяется соответственно уравнениями

$\varepsilon_{\perp} + 1 = \pm \tilde{\varepsilon}$ .) Знаки «+» и «-» относятся к волнам, распространяющимся в «+» и «-»  $z$ -направлениях; индексы 1 и 2 отмечают два набора волн, которые могут существовать в случае слоя в свободном пространстве (характеристики этих волн, как уже отмечалось, не зависят от направления распространения) Ветви дисперсионных кривых, где производная  $\frac{d}{d\varepsilon_1}(\gamma\omega)$  отрицательна, отвечают обратным волнам, для ко-

торых групповая скорость противоположна фазовой, условие  $\frac{d}{d\varepsilon_1}(\gamma\omega) = \infty$  определяет значение  $\varepsilon_1$ , при котором прямые волны переходят в обратные (и наоборот).

Поясним основные особенности дисперсионных характеристик рассматриваемых систем.

\* Зависимость от времени определяется множителем  $e^{i\omega t}$ ; используется практическая рационализованная система единиц

Заметим прежде всего, что дисперсионные характеристики волн первого (1) и второго (2) типа, направляемых слоем в свободном пространстве, по своему общему характеру (за небольшими исключениями) подобны соответственно характеристикам поверхностных волн, распространяющихся в +z-направлении вдоль слоя над плоскостью с  $H_{\text{тан}} = 0$  и в -z-направлении вдоль слоя над идеально проводящей плоскостью

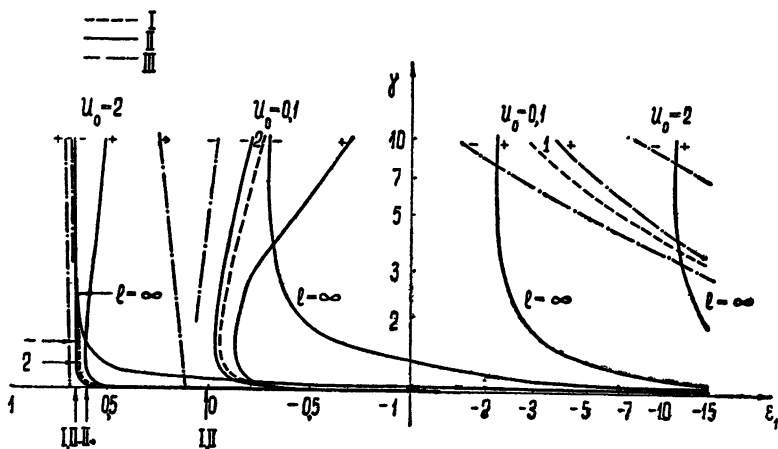


Рис. 1.

Общая тенденция изменения характеристик с изменением величины внешнего магнитного поля состоит в том, что по мере увеличения магнитного поля (параметра  $u_0$ ) существование поверхностных волн (в том числе и истинных) с  $\gamma$ , не слишком близкими к единице оказывается возможным лишь в областях все больших отрицательных значений  $\epsilon_1$ , а также значений  $\epsilon_1$ , близких к единице. В пределе при  $u_0 \rightarrow \infty$  соответствующие области вырождаются ( $\epsilon_{\perp} = 1, \tilde{\epsilon} = 0$ ), так что поверхностные волны вообще отсутствуют.

В случае  $u_0 = 2$  при положительных значениях  $\epsilon_1$  существуют полосы запирания для поверхностных волн, описываемых характеристическими уравнениями (1), (2), с действительными значениями  $\gamma$ . Эти полосы определяются условиями

$$\Delta_I = - \frac{1}{\epsilon_{\perp} \sqrt{\epsilon_{\perp} - 1}} \left\{ \frac{1}{2k_0 x_0} - \sqrt{\frac{1}{4(k_0 x_0)^2} + \tilde{\epsilon}^2 \epsilon_{\perp}} \right\} < 1,$$

$$\Delta_{II} = \frac{\tilde{\epsilon}^2 k_0 x_0}{(1 \pm \tilde{\epsilon} \sqrt{\epsilon_{\perp} - 1}) k_0 x_0 \sqrt{\epsilon_{\perp} - 1}} < 1;$$

их границы отмечены на рис. 1 стрелками. Для волн, распространяющихся в +z-направлении, приведенное условие ( $\Delta_I^+ < 1$ ) определяет, по существу, полосу запирания прямых волн, так как обратные волны (см. рис. 1) существуют и внутри этой полосы. Нижняя граница области существования обратных волн определяется условием

$$\tilde{\epsilon} = -1, \tag{4}$$

а верхняя — условием

$$\Delta_{II}^+ = 1. \tag{5}$$

Внутри этих полос запирания существуют поверхностные волны, поле которых внутри слоя имеет осцилляторный характер («объемные» волны;  $\gamma$  — чисто мнимая величина) [12]. В частности, в области значений  $\epsilon_1$ , определяемой условиями (4), (5), могут существовать прямая «объемная» и обратная чисто поверхностная ( $\gamma$  — действительная величина) волны. Соответствующие дисперсионные кривые показаны на рис. 1.

Остановимся, наконец, на индивидуальных особенностях, присущих отдельным системам.



В случае гиротропного слоя над идеально проводящей плоскостью в определенной области значений  $\epsilon_1 < (\epsilon_1^*)^+$ , должна появиться вторая ветвь прямых волн, распространяющихся в  $+z$ -направлении; ее появление связано с переходом знаменателя в характеристическом уравнении (2) через нуль. Верхняя граница соответствующей области при  $u_0 = 0,1$  определяется условием  $\tilde{\epsilon} = -1$ , а при  $u_0 = 2$  совпадает с  $(\epsilon_1^*)^+$ . Необходимо отметить, что с увеличением толщины слоя  $l$  вторые ветви прямых, а при специфических условиях, может быть, и обратных волн могут иметь место и в области значений  $\epsilon_1 > (\epsilon_1^*)^+$ .

В случае гиротропного плазменного слоя над плоскостью с  $H_{\text{тан}} = 0$  поверхностные волны, распространяющиеся в  $+z$ -направлении, существуют не только в области  $\epsilon_1 < (\epsilon_1^*)^+$  (аналогичной изотропному случаю), но и в области, границы которой определяются условиями

$$\sqrt{1 - \epsilon_{\perp}} \operatorname{cth} (\sqrt{1 - \epsilon_{\perp}} k_0 x_0) = \tilde{\epsilon},$$

$$\epsilon_1 = 1 - \left\{ (1/2) (2 + u_0) - \sqrt{\frac{(2 + u_0)^2}{4} - 1} \right\}.$$

При этом  $\gamma$  изменяется от единичного значения на нижней границе указанной области до бесконечно большого на верхней.

Поверхностные волны, распространяющиеся в  $-z$ -направлении, в отличие от волн, распространяющихся в обратном направлении, существуют, вообще говоря, не во всей области значений  $\epsilon_1 < (\epsilon_1^*)^-$ , что связано с переходом эффективной диэлектрической проницаемости в этой области через нуль. Поверхностные волны могут распространяться при всех значениях  $\epsilon_1 < (\epsilon_1^*)^-$ , для которых  $\epsilon_{\perp}$  отрицательна; верхняя граница этой области связана с параметром  $u_0$  следующим образом:

$$\epsilon_1 = 1 - \left\{ (1/2) (2 + u_0) + \sqrt{(1/4) (2 + u_0)^2 - 1} \right\}.$$

Кроме того, поверхностное поле, отвечающее уравнению (3) с действительными  $\kappa$ , может существовать в интервале значений параметров, границы которого определяются условием

$$\epsilon_1 = (\epsilon_1^*)^-$$

и одним из двух следующих соотношений:

$$\sqrt{1 - \epsilon_{\perp}} \operatorname{cth} (\sqrt{1 - \epsilon_{\perp}} k_0 x_0) = -\tilde{\epsilon} \quad (\epsilon_{\perp} < 1), \quad (6)$$

$$-\frac{1 + \tilde{\epsilon} \sqrt{\epsilon_{\perp}} k_0 x_0}{\epsilon_{\perp} \sqrt{\epsilon_{\perp} - 1} k_0 x_0} = 1 \quad (\epsilon_{\perp} > 1). \quad (7)$$

При этом очевидно, что полученное из соотношений (6), (7) значение  $\epsilon_1$  не обязательно меньше  $(\epsilon_1^*)^-$ . Представленные на рис. 1 кривые (относящиеся к отмеченному интервалу) соответствуют обратным волнам; верхняя граница определяется условием (6). При значении  $\epsilon_1$ , отвечающем этому условию, должны появиться «объемные» волны (уравнение (3) с мнимым  $\kappa$ ), непрерывно смыкающиеся с соответствующими чисто поверхностными волнами.

Автор признателен М. А. Миллеру за полезные советы и замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. O. Schumann, Sud-Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-naturwiss, **225**, 255 (1948).
2. T. Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEE, **51**, 317 (1963).
3. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, 124 (1964).
4. М. А. Гинцбург, Труды ИЗМИРАН, вып. 17 (27), (1960).
5. S. R. Sechadri, IRE Trans., MTT-10, 573 (1962).
6. W. O. Schumann, Z. Angew. Phys., **10**, 26 (1958).
7. J. R. Wait, Canad. J. Phys., **38**, 1586 (1960).
8. Н. Нодага, Г. I. Сohn, IRE Trans., AP-10, 452 (1962)

9. W. P. Allis, S. J. Buchbaum, A. Bers. Waves in anisotropic plasmas, The M. I. T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1953
10. K. G. Budden, The wave-Guide mode theory of wave propagation, Lnd, Akad. Press., 1961.
11. М. А. Гинцбург, ЖЭТФ, 34, 1635 (1958); Научн. докл. высш. шк.—Радиотехника и электроника, № 3, 38 (1958).
12. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 февраля 1964 г

УДК 621.378.33

## О ФОРМЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ В ПУЧКЕ МОЛЕКУЛ

А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов

В последнее время в области радиоспектроскопии и пучковых мазеров все большее распространение получают резонаторы типа Фабри—Перо и резонаторы на высших типах колебаний [1—5]. Для таких резонаторов характерным явлением является существенно неоднородное вдоль траекторий молекул поле СВЧ. Поляризация молекулярного пучка в таком поле рассматривалась в [6—8]. В данной работе находится форма спектральной линии при взаимодействии пучка молекул с полем произвольной конфигурации. Напряженность поля достаточно мала, так что эффектом насыщения можно пренебречь.

Рассмотрим случай пролета молекулой резонатора, настроенного на частоту перехода молекулы  $\omega_{12}$ , с полосой много шире спектральной линии. В резонатор подается сигнал с частотой  $\omega_c$ . Форма спектральной линии определяется зависимостью вероятности перехода  $P_{12}$  от частоты сигнала  $\omega_c$  [9].

Вероятность перехода молекулы с верхнего энергетического уровня на нижний\* за время пролета области поля СВЧ  $E(t)$  определяется выражением [10]

$$P_{12} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} V_{21} e^{-i\omega_{12}t} dt \right|^2.$$

Для перехода с матричным элементом дипольного момента  $\mu_{21}$  в случае линейной поляризации  $E(t)$  матричный элемент возмущения равен  $V_{21} = \mu_{21} E(t)$ . Тогда

$$P_{12} = \frac{\mu_{21}^2}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega_{12}t} dt \right|^2 = \frac{\mu_{21}^2}{\hbar^2} F(\omega_{12}), \quad (1)$$

где  $F(\omega_{12})$  — значение квадрата модуля спектра поля  $E(t)$  на частоте, равной частоте перехода молекулы  $\omega_{12}$ . Благодаря движению молекулы вдоль пространственного распределения поля возмущение имеет вид модулированного импульса СВЧ, длительность которого равна времени пролета  $\tau$ . Спектр этого импульса обычно представляется в виде  $F(\omega, \omega_c)$ , где  $\omega$  — текущая частота. Из выражения (1) следует, что если в  $F(\omega, \omega_c)$  положить  $\omega = \omega_{12}$ , то выражение  $F(\omega_{12}, \omega_c)$  дает форму спектральной линии. Таким образом, нахождение формы спектральной линии в резонаторе для малого сигнала сводится просто к разложению в спектр импульса поля СВЧ, действующего на молекулу при пролете через резонатор.

С другой стороны, по форме спектральной линии можно получить представление о распределении поля СВЧ в резонаторе.

Для случая синусоидального распределения поля СВЧ вдоль траектории молекулы возмущение имеет вид  $E(t) = E_0 \sin(\Omega t) \cos(\omega_c t)$ , где  $\Omega$  — частота изменения амплитуды поля при пролете молекулы вдоль пространственного распределения поля  $E(z)$ ,  $z = vt$ ,  $v$  — скорость молекулы. Форма спектральной линии будет описываться (в зависимости от числа вариаций поля, укладываемых в резонаторе  $n = (\Omega/\pi)\tau$ ,  $\tau$  — время пролета молекулы через резонатор) одной из следующих формул:

\* Мы рассматриваем молекулу с двумя энергетическими уровнями.

$$F(\omega_{12}, \omega_c) = \frac{\Omega^2 E_0^2}{[\Omega^2 - (\omega_{12} - \omega_c)^2]^2} \begin{cases} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} n \frac{\omega_{12} - \omega_c}{\Omega} \right) & (n \text{—нечетное}) \\ \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} n \frac{\omega_{12} - \omega_c}{\Omega} \right) & (n \text{—четное}) \end{cases}$$

Таким образом, при  $n > 1$  линия расщепляется.

Такая картина расщепления линии излучения  $l_{01} - l_{00}$  молекулы формальдегида наблюдалась нами для  $n = 2$  в пучковом молекулярном генераторе с резонатором типа Фабри—Перо [1]. Обнаруженная в [2] бигармоническая генерация может быть также объяснена генерацией на двух компонентах расщепленной линии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Прохоров, ЖЭТФ, **34**, 1658 (1958).
2. D. Marcuse, J. Appl. Phys., **32**, 743 (1961);
3. А. И. Барчуков, А. М. Прохоров, В. В. Савранский, Радиотехника и электроника, **8**, 438 (1963).
4. D. Marcuse, Proc. IRE, **49**, 1706 (1961).
5. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, ЖЭТФ, **45**, 2080 (1963).
6. Г. П. Любимов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, **33**, 1396 (1957).
7. J. Vonoponi, Helv. Phys. Acta, **31**, 282 (1958).
8. В. Б. Цареградский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 275 (1963).
9. Н. Рамзэй, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
10. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Квантовая механика, часть 1, ГИТТЛ, М., 1948.
11. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, ЖЭТФ (в печати).
12. А. И. Барчуков, А. М. Прохоров, Н. Н. Савранский, Радиотехника и электроника, **8**, 1641 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 января 1964 г.

УДК 621.378.3

### НОВЫЙ МЕТОД НАСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА С ПОМОЩЬЮ МОДУЛЯЦИИ ВЫСОКОГО ВАКУУМА В ВАКУУМНОМ КОРПУСЕ ГЕНЕРАТОРА

Г. М. Страховский, В. М. Татаренков

Практика работы с молекулярными стандартами частоты показала, что частота молекулярного генератора, кроме частоты резонатора, интенсивности пучка  $\text{NH}_3$  и напряжения на сортирующей системе [1,2], зависит также от давления в вакуумной камере [3-5]. Нами было обнаружено, что это явление может быть использовано для настройки частоты молекулярного генератора. Этот метод особенно удобен для настройки двухпучкового генератора, так как он не нарушает симметрии пучков. Результаты экспериментов по зависимости частоты молекулярного генератора от давления в вакуумной камере для различных частот резонатора показаны на рис. 1, 2. Каждая из этих кривых очень близка к прямой до давлений  $1 \cdot 10^{-5}$  мм рт. ст.; при более высоких давлениях начинается отклонение от линейности.

Семейство кривых рис. 1 и 2 можно выразить аналитически в виде

$$\frac{df_{\text{мг}}}{dp} = A(p) (f_{\text{мг}} - f_l), \quad (1)$$

где  $f_{\text{мг}}$  — частота генератора в герцах,  $f_l$  — частота, соответствующая вершине линии излучения,  $p$  — давление в вакуумной камере в мм рт. ст.,  $A(p)$  — нелинейная функция давления  $p$ . При изменении давления в камере генератора от  $10^{-6}$  до  $1 \cdot 10^{-5}$  величина  $A$  не зависит от давления  $p$  и имеет значение  $A = 10^4$  (мм рт. ст.)<sup>-1</sup>.

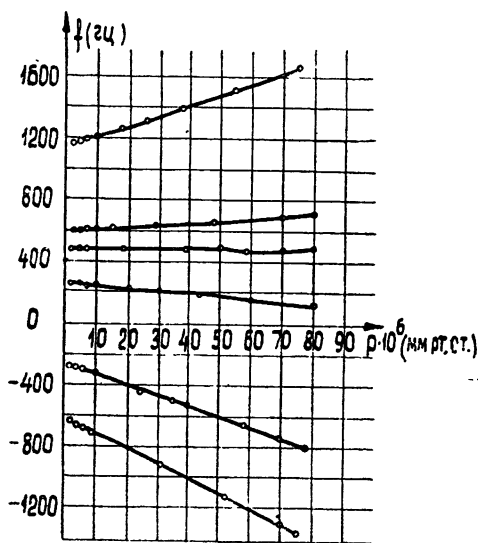


Рис. 1. Зависимость частоты генератора от давления в вакуумной камере при различных настройках резонатора.

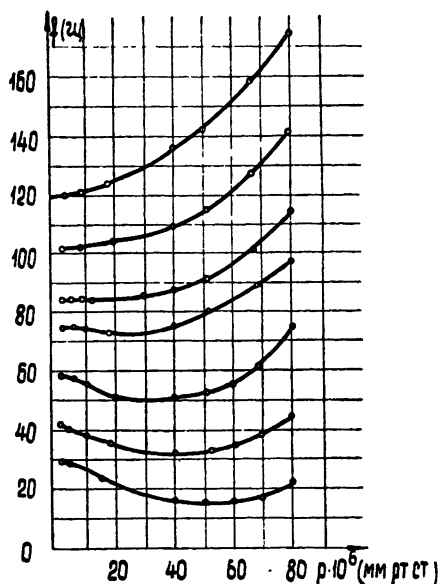


Рис. 2. Зависимость частоты генератора от давления в вакуумной камере в области, близкой к настройке генератора на линию излучения.

Предлагается, основываясь на графиках рис. 1, 2 и выражении (1), использовать зависимость частоты молекулярного генератора от давления в вакуумной камере для настройки генератора на вершину спектральной линии. Методом модуляции вакуума нам удавалось довольно просто воспроизводить частоту генератора на линии  $J = 3$ ,  $K = 3$   $N^{14}H_3$  с точностью  $5 \cdot 10^{-10}$ . Частота генератора, настроенного методом модуляции вакуума, и частота генератора, настроенного методом модуляции давления в источнике пучка, совпадает в пределах их ошибок. По нашему мнению, при улучшенной кратковременной стабильности генератора ( $10^{-11}$ ) и применении несложной электроники для увеличения чувствительности можно улучшить воспроизводимость частоты на порядок, т. е. довести ее до  $5 \cdot 10^{-11}$  на линии  $J = 3$ ,  $K = 3$ .

Частота, на которую настраивается генератор методом модуляции вакуума, зависит от давления в источнике пучка. Эта зависимость была исследована экспериментально; результаты представлены графиком на рис. 3.

Метод настройки молекулярного генератора модуляцией вакуума особенно удобен в двухпучковом генераторе, поскольку симметричную модуляцию пучков другими способами осуществить затруднительно. Этот метод имеет преимущество и над методом модуляции магнитным полем, так как использование последнего в генераторе с резонаторами из инвара, которые пока имеют наименьший коэффициент температурного расширения, но являются магнитонепроницаемыми, невозможно.

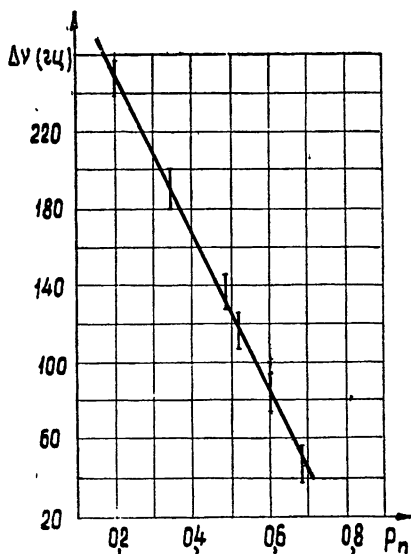


Рис. 3. Зависимость частоты генератора, настроенного методом модуляции давления в вакуумной камере, от давления в источнике пучка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов и А. М. Прохоров, УФН, 57, 485 (1955).
2. А. Н. Ораевский, Труды ФИАН, 21, 3 (1963).
3. К. Shimoda, J. Phys. Soc. Japan, 16, 1728 (1961).
4. К. Shimoda, N. Kohno, Japan J. Appl. Phys., 1, 5 (1962).
5. J. A. Barnes, D. W. Allan, A. E. Wainwright, IRE Trans. Instr., 11, 26 (1962).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
20 апреля 1964 г.

УДК 621.378.3

## НОВЫЙ СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ ПУЧКА МЕДЛЕННЫХ МОЛЕКУЛ ДЛЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА

Г. М. Страховский, В. М. Татаренков

Как известно, существуют возможности значительного повышения стабильности частоты молекулярных генераторов, связанные с использованием пучков «медленных молекул», т. е. таких молекул, средняя скорость которых значительно меньше тепловой при обычных (комнатных) температурах [1]. Основной трудностью для создания молекулярного генератора на медленных молекулах является получение достаточно узкого пучка медленных молекул необходимой интенсивности. Устройства для получения медленных молекул, известные из литературы, либо трудно реализуемы на опыте, либо дают сильно расходящиеся пучки медленных молекул [2], что приводит к дополнительной потере интенсивности.

Для получения пучка медленных молекул мы предлагаем использовать искривленную с радиусом кривизны  $R$  обычную сортирующую систему (рис. 1). Искривленная сортирующая система будет играть двойную роль: сортировать молекулы по энергетическим состояниям и выполнять роль селектора скоростей. Все активные молекулы, имеющие скорости меньше определенной:  $v < v_{\text{крит}}$ , будут следовать внутри сортирующей системы и будут направлены в резонатор. Молекулы с большими скоростями, а также молекулы в нижнем энергетическом состоянии уйдут из сортирующей системы и в резонатор не попадут.

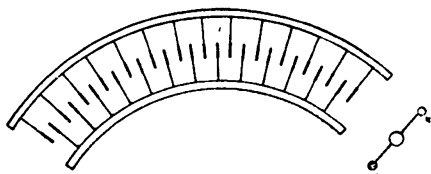


Рис. 1. Искривленная кольцевая сортирующая система.

Расчеты показывают, что в случае искривленного квадрупольного конденсатора для молекул  $\text{NH}_3$ , находящихся в состоянии  $J, K$ , отношение максимальной скорости молекул, прошедших через квадрупольный конденсатор, к средней тепловой скорости молекул газа  $\text{NH}_3$  ( $T = 300^\circ$ )

$$\frac{v_{\text{макс}}}{v_{\text{ср}}} \leq 10^{-5} \mu \sqrt{\frac{K^2 M^2}{J^2 (J+1)^2} R}, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус кривизны квадрупольного конденсатора в см,  $\mu$  — разность потенциалов на квадрупольном конденсаторе в вольтах. При значениях  $R = \text{см}$ ,  $\mu = 3000 \text{ в}$  для линии аммиака  $J = 3$ ,  $K = 3$   $v_{\text{макс}}/v_{\text{ср}} \approx 0,1$ .

Технологически проще изготовить искривленную сортирующую систему с практическим любым  $R$  из сортирующей системы типа колец или спирали [3]. С такой сортирующей системой, изогнутой на угол  $30^\circ$ , нам удавалось получить сигнал индуцированного излучения на обычном приемнике молекулярного генератора с отношением сигнал/шум около 3. В качестве сигнала подсветки использовался сигнал кварцевого генератора, умноженный до частоты линии  $3,3 \text{ N}^{14}\text{N}_3$ . Большой геометрической точности можно достигнуть, изготавливая квадрупольный конденсатор из пластин, являющихся частью дуги кругов и цилиндров, выточенных на токарном станке. Для дискового или прямогоугольного резонаторов ленточный пучок медленных молекул можно создавать с помощью изогнутой сортирующей системы, представляющей часть цилиндра с проводочками, натянутыми по его образующей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ, 37, 1069 (1959).
2. А. Н. Ораевский, Тр. ФИАН, 21, 3 (1963).
3. А. Ф. Крупнов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 658 (1959).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
20 апреля 1964 г.

УДК 621.385

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГАЗОРАЗРЯДНЫХ ДЕТЕКТОРОВ СВЧ КОЛЕБАНИЙ

Р. А. Валитов, В. Т. Царенко, Ю. Я. Миленко

В статьях [1—5] приведены результаты экспериментального и теоретического исследования газоразрядных детекторов непроходного типа, которые не могут без подстроечных элементов работать в широком диапазоне частот. В настоящей работе выясняется возможность использования газоразрядной трубки для детектирования СВЧ колебаний в 20% диапазоне частот в отсутствие элементов подстройки (поршня, штоля и т. д.) в детекторной секции. С этой целью были исследованы две волноводные проходные детекторные секции, одна из которых схематически показана на рис. 1. Для сравнения были сняты аналогичные характеристики кристаллического детектора в волноводной секции проходного типа. Детекторная секция № 1 (рис. 1) представляет собой отрезок стандартного волновода сечением  $10 \times 23$  см, в котором под углом  $45^\circ$

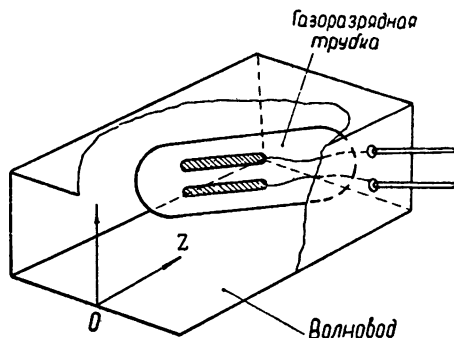


Рис. 1. Конструкция экспериментального макета газоразрядного детектора.

к продольной оси  $Oz$  расположена газоразрядная трубка. Плоскость расположения молибденовых электродов параллельна, а сами электроды перпендикулярны направлению электрического поля волны  $TE_{01}$ . В детекторной секции № 2 газоразрядная трубка располагалась перпендикулярно продольной оси волновода. Обе трубки были наполнены неоном при давлении в  $30 \div 60$  мм рт. ст. Режим тлеющего разряда в обеих детекторных секциях создавался путем приложения постоянного напряжения к электродам трубок. В качестве нагрузки использовалось активное сопротивление  $20 \div 50$  ком. Разрядный ток составлял примерно  $2 \div 6$  ма для разных образцов трубок и устанавливался в соответствии с достижением устойчивого режима тлеющего разряда.

В 20% диапазоне частот снимались зависимости коэффициента передачи  $k_n$  от частоты, коэффициента бегущей волны КБВ и коэффициента затухания  $\alpha$  газовых секций № 1, 2 и проходных детекторных секций с кристаллическими диодами (№ 3—с подстроечным шлейфом, № 4—без шлейфа).

Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 2. В качестве источника амплитудно-модулированных СВЧ колебаний использовался клистронный генератор (1). Продетектированное напряжение измерялось ламповым вольтметром и кон-

тролировалось с помощью осциллографа. Измерение коэффициента затухания осуществлялось методом замещения исследуемой секции градуированным аттенуатором, а индикация выходной мощности производилась детекторной головкой, развязанной аттенуатором на уровне 10 дБ. При измерении коэффициента передачи в качестве выходного индикатора был использован термисторный ваттметр. Частотные характеристики КБВ снимались с помощью измерительной линии при условии, что за исследуе-

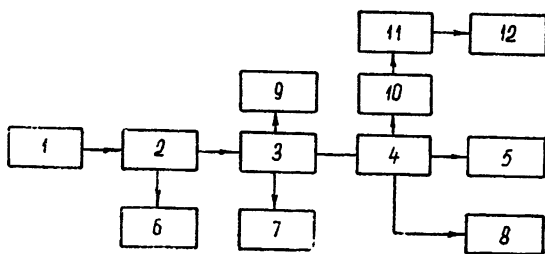


Рис. 2. Блок-схема измерений:

1—клинотронный генератор, 2—измерительная линия, 3—исследуемая детекторная секция, 4—крановый (волноводный) переключатель, 5—эквивалент антенны, 6—измерительный усилитель, 7—ламповый вольтметр, 8—термисторный измеритель мощности, 9—осциллограф, 10—аттенуатор, 11—детекторная головка, 12—измерительный усилитель.

мой секцией включался эквивалент антенны. При всех измерениях выходная мощность источника поддерживалась на уровне 1 мвт.

На рис. 3а приведены графики зависимости коэффициентов передачи от частоты. По вертикальной оси отложено отношение коэффициента передачи детектора  $k_n$  на частоте  $f$  к коэффициенту передачи  $k_{no}$  по средней частоте  $f_{cp}$ , по горизонтальной оси — отношение  $\Delta f = f - f_{cp}$  к  $f_{cp}$ . Приведенные зависимости показывают, что газоразрядные детекторные секции (№ 1—кривая 1 и № 2—кривая 2) характеризуются неравномерностью коэффициента передачи, не превышающей 30% в диапазоне частот  $\pm 10\%$  относительно  $f_{cp}$ . Коэффициент передачи проходной детекторной секции с кристаллическим диодом и шлейфом (кривая 3) достигает максимального значения на средней частоте диапазона, на которую настроен коаксиальный шлейф секции, предназначенный для компенсации реактивного сопротивления зонда и диода в детекторных секциях. Неравномерность зависимости коэффициента передачи от частоты детекторной секции без шлейфа (кривая 4) объясняется особенностями эквивалентной схемы полупроводникового диода. Когда сопротивление такой эквивалентной схемы становится на некоторой частоте близким к волновому сопротивлению волновода, коэффициент передачи достигает максимального значения.

Из графиков рис. 3б видно, что газовые секции практически остаются равномерно согласованными во всем частотном диапазоне при вносимом КБВ больше 0,6. В отношении степени согласования лучшей оказалась секция № 1, что объясняется каплевидной формой трубки, ее расположением в волноводе и более тонкими стенками. Сильно рассогласованы секции № 3 и 4. Очевидно, здесь сказывается отсутствие согласующего поршня в волноводе.

Графики зависимости затухания, вносимого секциями № 1, 2, 3, 4, от частоты приведены на рис. 3в. Для газовых секций (кривые 1 и 2) возрастание затухания при уменьшении частоты хорошо согласуется с возрастанием коэффициента передачи (кривые 1 и 2 на рис. 3а). Очевидно, возрастание затухания мощности связано с усилением взаимодействия волны с плазмой. Значительное ослабление мощности в нагрузке создают секции № 3 и 4 (кривая 3, 4 на рис. 3в) в нижнем крае диапазона. Ослабление объясняется, в первую очередь, отражением, а не поглощением мощности кристаллическим диодом. Такой вывод следует из того, что измеренный КБВ этих секций не превышает 0,15 и 0,25 для секций № 3 и № 4 соответственно.

Итак, простейшую конструкцию газоразрядного детектора можно осуществить, используя стандартный отрезок волновода и газоразрядную трубку из стекла, наполненную неоном (аргоном или гелием) при давлении в несколько десятков мм рт. ст. В качестве электродов можно использовать стержни из молибдена или никеля, разнесенные на расстояние в 2–5 мм. Коэффициент передачи таких устройств составляет не меньше чем 5 мв/мвт при постоянной составляющей разрядного тока, лежащего в пределах 2–5 ма, и сопротивлениях нагрузки в несколько десятков ком.

Прходные газоразрядные детекторы являются широкополосными устройствами для индикации и отбора мощности из волновода. Сравнительное изучение кривых на

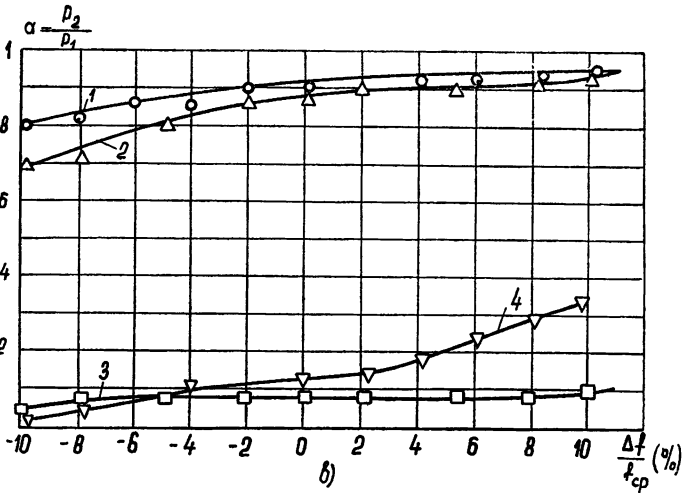
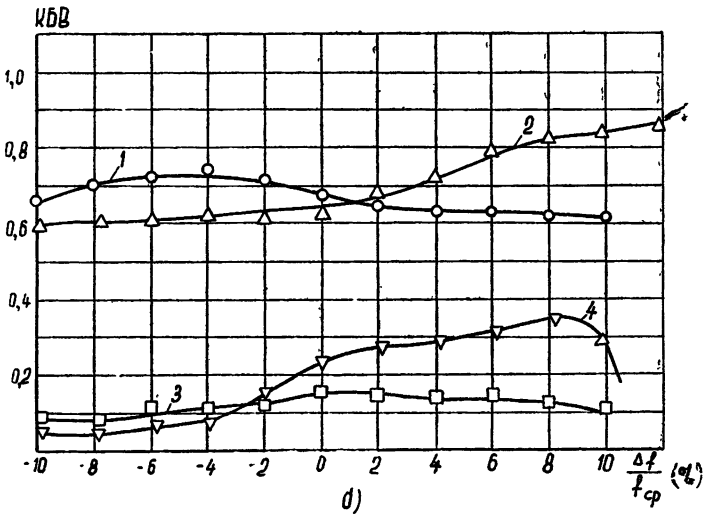
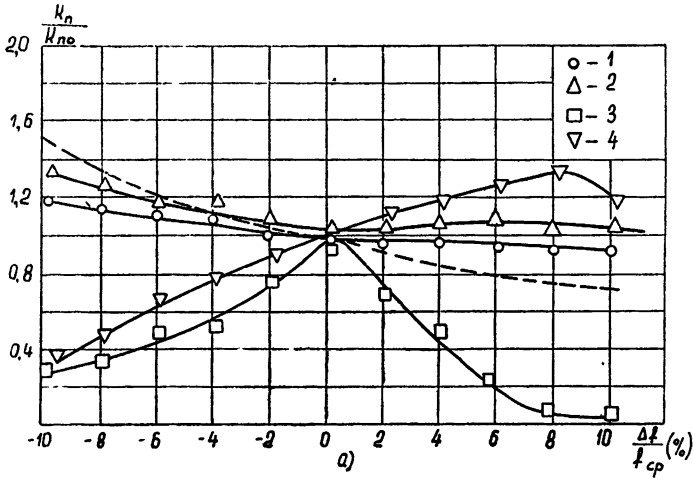


Рис. 3 Частотные характеристики детекторных секций:  
 а) зависимость коэффициента передачи от частоты; б) зависимость КВВ от частоты; в) зависимость коэффициента затухания от частоты.



рис 3 показывает, что газоразрядные детекторы обладают сравнительно хорошим постоянством своих характеристик в 20%-ном диапазоне частот. На рис. 3а пунктиром показана кривая зависимости коэффициента передачи газоразрядной плазмы от частоты, построенная расчетным путем по формуле

$$\Delta I_p = \frac{kP}{a(\omega^2 + \nu^2)(1 - \omega_k^2/\omega^2)^{1/2}},$$

учитывающей результаты работы [4]. Здесь  $k$  — частотно-независимый коэффициент,  $\nu$  — частота упругих соударений электронов с частицами газа,  $\omega$ ,  $\omega_k$  — частота и критическая частота СВЧ колебаний,  $\Delta I_p$  — приращение разрядного тока, обусловленное мощностью  $P$ . Отклонение кривых 1 и 2 от пунктирной кривой объясняется как погрешностью измерения, так и целым рядом неучтенных факторов и допущений теории.

Газоразрядные детекторы можно включать непосредственно в волноводный тракт последовательно с генератором и нагрузкой, не применяя направленных ответвителей. При таком включении получается выигрыш по мощности, действующей на детектор, численно равный переходному затуханию направленного ответвителя, а также исключается дополнительный частотнозависимый фактор, обусловленный неравномерностью величины переходного затухания направленного ответвителя по диапазону.

Прходной тип газоразрядного детектора может найти применение в широкополосных волноводных стабилизаторах СВЧ мощности как нестраиваемое устройство для отбора мощности из волновода в цепь обратной связи; его можно использовать также в автоматических измерителях КСВ и импедансметрах, предназначенных для работы в диапазоне частот  $\pm 10\%$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Барроуз, А. Бренвел, Вопросы радиолокационной техники, 1, 159 (1953).
2. Е. А. Здорнова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 262 (1959).
3. О. Н. Яковлев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 285 (1960).
4. Г. Д. Лобов, Радиотехника и электроника, 6, 117 (1961).
5. Г. Д. Лобов, В. В. Захаров, Радиотехника и электроника, 7, 652 (1962).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
24 марта 1964 г.

УДК 621 396 673 1

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ШТЫРЕВЫХ СИСТЕМ

П. И. Госьков

Наряду с применением в технике СВЧ, штыревые замедляющие системы представляют интерес для ускорительной техники. Расчет шунтового сопротивления штыревых систем показывает, что в области малых замедлений оно сравнимо с шунтовым сопротивлением обычно используемых диафрагмированных волноводов [1, 2]. Однако работ, посвященных экспериментальному исследованию электродинамических характеристик штыревых систем, определяющих их эффективность в ускорительной технике, в литературе, насколько нам известно, нет.

В настоящей заметке приводятся результаты экспериментального исследования электродинамических характеристик двухрядной лестничной системы с выступами и однорядной штыревой гребенки (рис. 1). Проводится сравнение результатов экспериментального исследования дисперсии обеих систем и сопротивления связи двухрядной лестницы с результатами расчета. Данные системы исследовались методом малых возмущающих тел. Резонансные макеты двухрядной лестничной системы содержали 3 и 7 периодов, макеты штыревой гребенки—10 периодов

На рис. 2 представлены расчетные и экспериментальные дисперсионные кривые симметричной волны двухрядной лестничной системы. Расчет дисперсионных кривых проводился с помощью выражений, приведенных в [3]. Экспериментальные дисперсионные кривые сдвинуты относительно теоретических в сторону более длинных волн. Расхождение объясняется тем, что при расчете волновых проводимостей учитывались лишь три гармоники ( $S = 0, \pm 1$ ); высшими типами волн пренебрегалось,

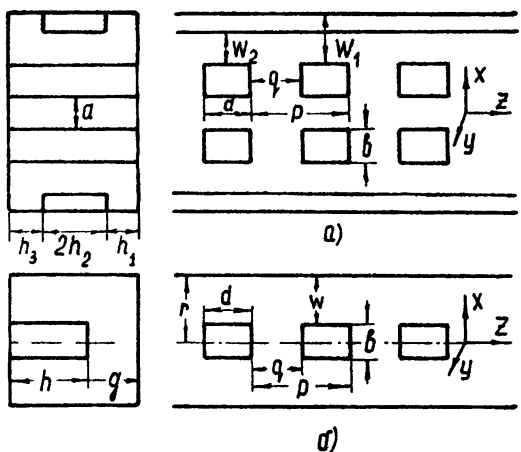


Рис. 1. Штыревые замедляющие системы: а) двухрядная лестница с выступами; б) однорядная гребенка.

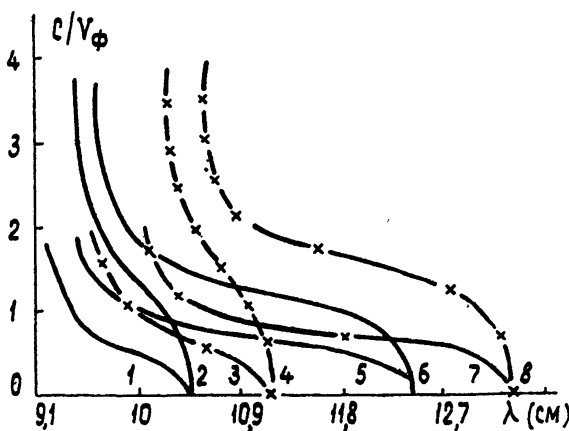


Рис. 2. Дисперсионные кривые двухрядной лестницы: 1, 3—противофазная, 5, 7—синфазная волна для  $p=30$  мм; 2, 4—противофазная, 6, 8—синфазная волна для  $p=15$  мм ( $a=20$  мм,  $b=10$  мм,  $d=10$  мм,  $h_1=h_2=h_3=h=11$  мм,  $w_1=16$  мм,  $w_2=6$  мм). Точки на кривых—экспериментальные значения.

На рис. 3 представлены зависимости добротности, сопротивления связи и шунтового сопротивления на единицу длины от режима работы  $\psi$  для синфазной волны лестничной системы. Как следует из рис. 3, зависимость  $Q$  от  $\psi$  имеет максимум вблизи  $\psi = 0,5\pi$ . Его положение слабо зависит от расстояния между штырями. С увеличением последнего добротность системы увеличивается, стремясь в пределе к добротности резонатора, невозмущенного штырями. Для противофазных волн добротность получилась примерно в два раза меньше, чем для синфазных волн.

Для бесконечно тонкого пучка электронов, пропускаемого в центре пространства между рядами штырей ( $X=0$ ,  $Y=2h$ ), сопротивление связи можно получить, воспользовавшись выражениями для компонент поля, приведенными в [3]. Для нулевой гармоники симметричной синфазной волны имеем

$$R_{св} = \frac{2ph}{\psi^2} \frac{c}{V_{гp}} \left[ \frac{\text{sh}(a\psi/2p)}{\cos(kh)} \frac{\sin(\psi/2)}{\text{sh}(a\psi/p)} \frac{\sin(q\psi/2p)}{q\psi/2p} \right]^2 \left[ \frac{M_1(\psi)}{\sin^2(kh)} + \frac{M_2(\psi)}{\cos^2(kh)} \right]^{-1}, \quad (1)$$

где  $\psi$  — фазовый угол между соседними штырями в  $z$ -направлении;  $K = \omega/c = 2\pi/\lambda$  — постоянная распространения в  $Y$ -направлении;  $M_1(\psi)$  и  $M_2(\psi)$  — волновые проводимости областей без выступа и с выступом;  $V_{гр}$  — групповая скорость

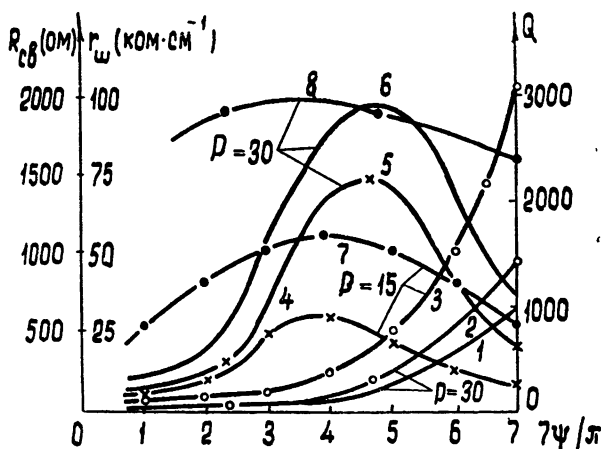


Рис. 3. Зависимость  $R_{св}$  (кривые 1, 2, 3);  $r_{ш}$  (кривые 4, 5, 6);  $Q$  (кривые 7, 8) синфазной волны двухрядной лестницы от  $\psi$ . Точки на кривых — экспериментальные значения.

Наибольшее расхождение между теоретическими значениями  $R_{св}(\psi)$ , рассчитанными с помощью выражения (1) при  $p = 30$  мм (кривая 1) и экспериментальными (кривая 2) наблюдается при  $\psi > 0,5\pi$ . Расхождение явилось следствием того, что в выражениях для компонент поля не учтены высшие типы волн; расчет волновых проводимостей был приближенным (учитывались лишь 3 гармоники без учета высших типов волн). Из рис. 3 следует, что сопротивление связи резко увеличивается при  $\psi > 0,5\pi$ . Оно изменяется обратно пропорционально расстоянию между штырями.

Наиболее важным параметром замедляющей системы, характеризующим эффективность применения ее в ускорительной технике, является шунтовое сопротивление на единицу длины системы; оно рассчитывалось по формуле [2]

$$r_{ш} = \frac{2\pi}{\lambda} R_{св} Q \frac{V_{гр}}{c}. \quad (2)$$

Теоретическая кривая 6 рассчитана при  $Q = 6000$ , так как примерно такая величина добротности замедляющих систем получена в работающих ускорителях. Кривые 4 и 5 построены по результатам экспериментального исследования.

Из рис. 2 и 3 следует, что в области малых замедлений  $r_{ш}(\psi)$  имеет максимум при  $\psi = 0,6\pi$ . Положение его сильно зависит от расстояния между штырями.

На рис. 4 представлены расчетные и экспериментальные дисперсионные кривые однорядной штыревой гребенки. Расчет проводился с помощью выражений, приведенных в [4], при  $S = 0, \pm 1$  без учета высших типов волн. В данном случае наблюдается более хорошее согласие расчета с экспериментом, чем при использовании результатов [3] для лестничной системы.

На рис. 5 представлены экспериментальные зависимости добротности, сопротивления связи, шунтового сопротивления штыревой гребенки от режима работы  $\psi$ . Сопротивление связи измерялось в пространстве над штырями; оно резко увеличивается при  $\psi > 0,4\pi$ . Зависимость добротности штыревой гребенки от  $\psi$ , как и у лестницы, имеет максимум вблизи  $\psi = 0,5\pi$ . Максимум  $r_{ш}(\psi)$  сдвигается при увеличении пространства над штырями  $g$  к  $\psi = \pi$ . Результаты проведенного экспериментального исследования двухрядной лестничной системы с выступами и однорядной штыревой гребенки подтверждает возможность получения в области малых замедлений в тщательно изготовленных системах ( $Q = 6000 \div 7000$ ) при правильно выбранных размерах шунтовых сопротивлений порядка  $0,1 \div 0,3$  мгом. см<sup>-1</sup>.

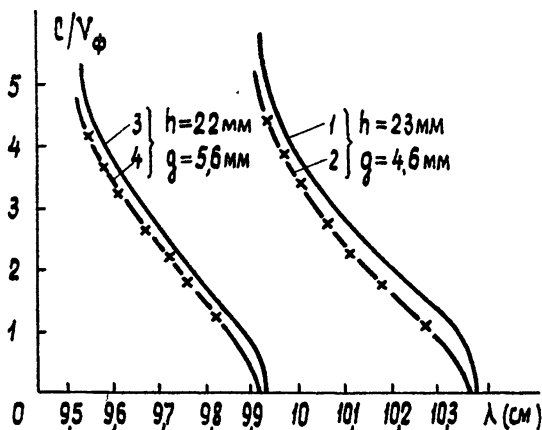


Рис. 4. Дисперсионные кривые штыревой гребенки ( $p = 9$  мм,  $q = 5$  мм,  $r = 4,6$  мм,  $b = 2$  мм,  $\omega = 3,6$  мм). Точки на кривых—экспериментальные значения.

При этом следует заметить, что двухрядная лестничная система с выступами представляет больший интерес, так как в ней можно получить более высокие шунтовые сопротивления, чем в однорядной штыревой гребенке. Максимальное шунтовое сопротивление в данных системах получается для режимов работы  $\psi = (0,6 \div 0,8) \pi$ .

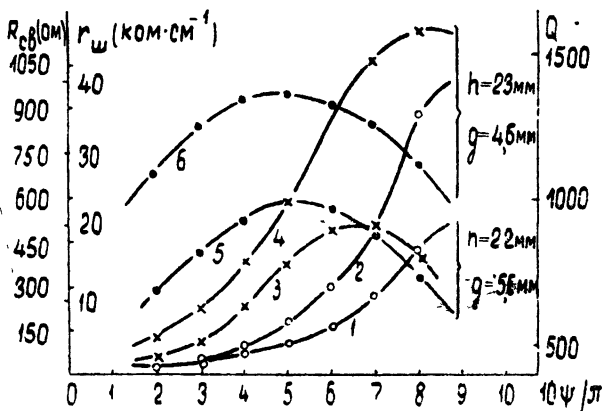


Рис. 5. Экспериментальные зависимости  $R_{св}$  (кривые 1, 2);  $r_{ш}$  (кривые 3, 4);  $Q$  (кривые 5, 6) штыревой гребенки от  $\psi$ .

Полученные результаты экспериментального исследования электродинамических характеристик двухрядной лестничной системы с выступами и однорядной штыревой гребенки могут представлять также интерес в технике СВЧ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Воробьев, А. Н. Диденко, Е. С. Коваленко, Атомная энергия, 8, 459 (1960).
2. А. Н. Диденко, Ю. А. Панов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 187 (1962).
3. Ю. Г. Альтшулер, А. С. Татаренко, В. И. Скородумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 126 (1961).
4. Е. С. Коваленко, В. С. Коваленко, Радиотехника и электроника, 8, 1374 (1963).

Поступила в редакцию  
26 августа 1963 г.

**РАСЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА С ПОЛЕМ  
БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ ПРИ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРАХ  
ПРОСТРАНСТВА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ;**

*М. Н. Куликов, В. С. Стальмахов*

Для прямолинейных электронных потоков конечной толщины, имеющих малую плотность пространственного заряда ( $\omega_p^2 \ll \omega_c^2$ , где  $\omega_p$  — плазменная частота,  $\omega_c$  — циклотронная частота), методом теории поля [1—3] в линейном приближении был проведен анализ взаимодействия с полем замедляющей системы с учетом конечных размеров пространства взаимодействия и положения в нем электронного потока. Этот метод, как отмечается в [1], является более строгим, чем метод, основанный на расчете возмущения поля замедляющей системы высокочастотным током луча (метод возмущений).

В пренебрежении циклотронными волнами (адиабатическое приближение) при  $D \ll 1$  для постоянных распространения  $\Gamma$  было получено уравнение

$$(\Gamma - \Gamma_{e0}) [(\Gamma - \Gamma_{e0})^2 - 2\alpha a_1 \Gamma_{e0} (\Gamma - \Gamma_{e0}) + \alpha^2 a_2 \Gamma_{e0}^2] = \pm D^2 \Gamma_{e0} [(\Gamma - \Gamma_{e0}) - \alpha a_3 \Gamma_{e0}], \quad (1)$$

которое введением нормированных параметров  $\delta$ ,  $b$  и  $d$  [8] приводится к следующему виду:

$$(\delta + jb \pm d) (\delta^2 + 2ja_1 S \delta - a_2 S^2) = \pm (\delta + ja_3 S). \quad (2)$$

В (1), (2)  $\Gamma_0$  — постоянная распространения «невозмущенной» волны в системе,  $\Gamma_{e0} = \omega/v_{e0}$ ,  $v_{e0}$  — скорость электронов на оси пучка,  $\alpha = \omega_p^2 \Delta / \omega_c v_{e0}$ ,  $2\Delta$  — толщина пучка,

$$D^2 = \frac{\omega}{\omega_c} \frac{I_0}{2V_{s0}} \frac{\text{sh}(2\Gamma_{e0}\Delta)}{2\Gamma_{e0}\Delta} R_{св} \text{cth}[\Gamma_{e0}(a + \Delta)],$$

$I_0$  — ток луча,  $V_{s0} = v_{e0}^2/2\eta$ ,  $R_{св}$  — сопротивление связи на оси пучка,  $S = a/D$ . В (1) и (2) верхний знак относится к взаимодействию с прямой волной, нижний — с обратной. Коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  в (1) и (2) определяются следующими соотношениями:

$$a_1 = \frac{\text{sh}(2\Gamma_{e0}\Delta)}{2\Gamma_{e0}\Delta} \frac{\text{sh}[\Gamma_{e0}(d-a)]}{\text{sh}[\Gamma_{e0}(a+2\Delta+d)]}; \quad (3)$$

$$a_2 = \frac{1}{(\Gamma_{e0}\Delta)^2} \left\{ -(\Gamma_{e0}\Delta)^2 + \frac{\text{ch}[\Gamma_{e0}(a+2\Delta+d)] - \text{ch}(2\Gamma_{e0}\Delta) \text{ch}[\Gamma_{e0}(d-a)]}{\text{sh}[\Gamma_{e0}(a+2\Delta+d)]} (\Gamma_{e0}\Delta) - \frac{\text{sh}(\Gamma_{e0}a) \text{sh}(2\Gamma_{e0}\Delta) \text{sh}(\Gamma_{e0}d)}{\text{sh}[\Gamma_{e0}(a+2\Delta+d)]} \right\}, \quad (4)$$

$$a_3 = \frac{1}{2\Gamma_{e0}\Delta} \left\{ \frac{2\Gamma_{e0}\Delta}{\text{sh}(2\Gamma_{e0}\Delta)} \frac{\text{sh}^2[\Gamma_{e0}(a+2\Delta)] + \text{sh}^2(\Gamma_{e0}a)}{\text{sh}[2\Gamma_{e0}(a+\Delta)]} - \frac{2\text{sh}[\Gamma_{e0}(a+2\Delta)] \text{sh}(\Gamma_{e0}a)}{\text{sh}[2\Gamma_{e0}(a+\Delta)]} \right\}, \quad (5)$$

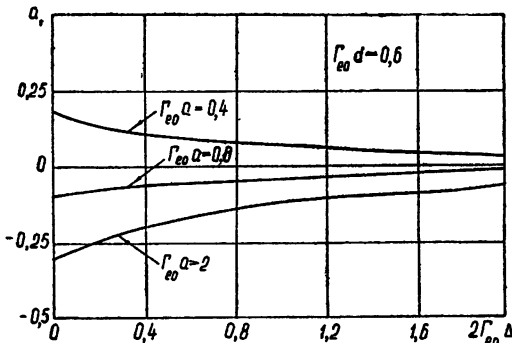


Рис. 1.

где  $a$  — расстояние от нижней границы пучка до «холодного катода» (основания),  $d$  — расстояние от верхней границы пучка до замедляющей системы. Зависимости  $a_1, a_2, a_3$  от толщины пучка  $2\Gamma_{e0}\Delta$  для нескольких значений  $\Gamma_{e0}a$  и  $\Gamma_{e0}d$  представлены на рис 1–3.

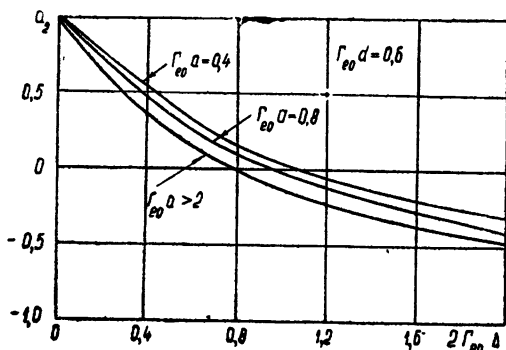


Рис. 2.

Расчет начальных амплитуд парциальных волн приводит к следующему выражению.

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{iz}(0) = & \frac{\delta_i^2 + 2ja_1S\delta_i - a_2S^2}{(\delta_i - \delta_j)(\delta_i - \delta_k)} \left\{ \tilde{E}_z(0) - \frac{\Gamma_{e0}\tilde{y}_+(0)}{(1-a_4)A_+} \left[ (\delta_j + \delta_k + 2ja_1S) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\delta_j\delta_k + a_2S^2}{jS} \right] + \frac{\Gamma_{e0}\tilde{y}_-(0)}{(1-a_4)A_-} \left[ (\delta_j + \delta_k + 2ja_1S)a_4 - \frac{\delta_j\delta_k + a_2S^2}{jS} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $i, j, k$  — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3,  $\tilde{E}_{iz}(0)$  — продольная составляющая высокочастотного электрического поля  $i$ -ой волны на замедляющей системе,  $\tilde{E}_z(0)$  — продольная составляющая высокочастотного электрического поля

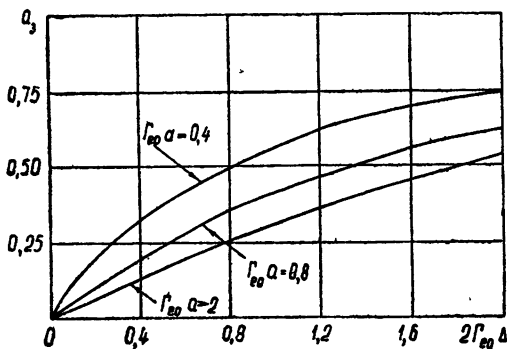


Рис. 3.

входного сигнала,  $\tilde{y}_+(0)$  и  $\tilde{y}_-(0)$  — высокочастотные вертикальные смещения верхней и нижней границ пучка соответственно,

$$\begin{aligned} A_+ = & \frac{1}{B_0Dv_{e0}} \frac{\text{sh}[\Gamma_{e0}(a+2\Delta)]}{\text{sh}[\Gamma_{e0}(a+2\Delta+d)]}, \quad A_- = \frac{1}{B_0Dv_{e0}} \frac{\text{sh}(\Gamma_{e0}a)}{\text{sh}[\Gamma_{e0}(a+2\Delta+d)]}, \\ a_4 = & \frac{\text{sh}(\Gamma_{e0}a) \text{sh}(\Gamma_{e0}\Delta)}{\text{sh}[\Gamma_{e0}(a+2\Delta+d)]} \frac{1}{\Gamma_{e0}\Delta} - 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Зависимость  $a_4$  от  $2\Gamma_{e0}\Delta$  для нескольких значений  $\Gamma_{e0}a$  представлена на рис. 4.

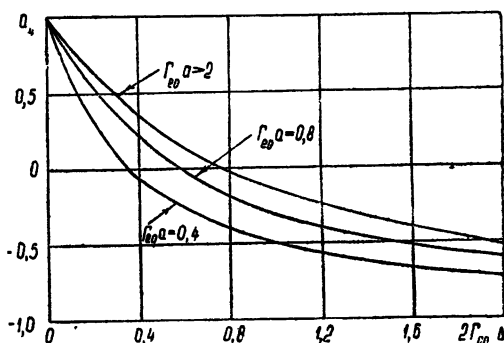


Рис. 4.

Высокочастотное поле и модуляция электронного потока на расстоянии  $z$  от начала системы будут определяться следующими соотношениями:

$$\tilde{E}_z(z) = e^{-j\Gamma_{e0}z} \sum_{i=1}^3 \tilde{E}_{iz}(0) e^{\Gamma_{e0}D\delta_i z}; \quad (8)$$

$$\frac{\Gamma_{e0} \tilde{y}_+(z)}{A_+} = e^{-j\Gamma_{e0}z} \sum_{i=1}^3 \tilde{E}_{iz}(0) \frac{\delta_i - ja_4 S}{\delta_i^2 + 2ja_1 S \delta_i - a_2 S^2} e^{\Gamma_{e0}D\delta_i z}; \quad (9)$$

$$\frac{\Gamma_{e0} \tilde{y}_-(z)}{A_-} = e^{-j\Gamma_{e0}z} \sum_{i=1}^3 \tilde{E}_{iz}(0) \frac{\delta_i - jS}{\delta_i^2 + 2ja_1 S \delta_i - a_2 S^2} e^{\Gamma_{e0}D\delta_i z}. \quad (10)$$

Аналогичные расчеты были проведены также методом возмущений [4–7]. Для рассматриваемых электронных потоков ( $\omega_p^2 \ll \omega_c^2$ ) в указанных выше приближениях анализ взаимодействия методом возмущений при учете влияния на поле пространственного заряда проводящих плоскостей, окружающих электронный поток, приводит к тем же результатам, что и более строгий полевой метод.

Соотношения (1) (или (2)), (6), (9) и (10) являются более общими, чем известные в литературе: они учитывают как толщину луча, так и его положение в пространстве взаимодействия, а также позволяют определить начальные амплитуды парциальных волн, что необходимо для расчета характеристик реальных приборов. При этом толщина луча и его положение в пространстве взаимодействия учитываются четырьмя коэффициентами, определяемыми соотношениями (3)–(5) и (7), которые могут быть легко рассчитаны. Результаты работ [1–7] могут быть получены как частные случаи приведенных соотношений (следует отметить, что в [4–6] при определении полей пространственного заряда не было учтено влияние окружающих плоскостей, так что результаты этих работ, строго говоря, справедливы лишь для случая  $\Gamma_{e0}a \approx \Gamma_{e0}d \gg 1$ ).

Полученные соотношения могут быть использованы для расчета основных характеристик линейного режима работы ЛБВМ и ЛОВМ с учетом конечных размеров пространства взаимодействия и анализа влияния на эти характеристики (например, на стартовые условия) изменений положения луча в пространстве взаимодействия (например, при изменении напряжения на замедляющей системе или тока луча). При этом возможен анализ работы не только однокаскадных, но и многокаскадных приборов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1961.
2. R. W. Gould, J. Appl. Phys., **28**, 599 (1957).
3. R. Hutter, Beam and Wave Electronics in Microwave Tubes, New York (1960).
4. M. de Bennetot, Ann. Radioelec., **10**, 328 (1955).
5. M. de Bennetot, Ann. Radioelec., **11**, 230 (1956).
6. В. С. Стальмахов, Основы электроники сверхвысокочастотных приборов со скрещенными полями, изд. Сов. радио, М., 1963.
7. H. Apter, G. Mougier, Intern. Congress on Microwave Tubes, Munich, 1960.
8. Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.

О СЛОИСТОСТИ РАЗРЯДА ВНУТРИ ПОЛОГО КАТОДА

С. Б. Мочнев

Настоящее сообщение имеет целью указать на один возможный механизм образования слоистости тлеющего разряда внутри протяженного полого катода\*.

Рассмотрим область отрицательного тлеющего свечения в полом катоде, выполненном в виде протяженной цилиндрической трубки. Как показывают непосредственные измерения, распределение концентрации заряженных частиц по поперечному сечению в этой области близко к однородному. Поэтому уравнение (типа использованного в [1]), определяющее изменение концентрации  $n$  вдоль оси катода, становится одномерным и в стационарном состоянии приближенно может быть записано в виде

$$D_a \frac{d^2 n}{dz^2} + (\nu_i - \nu_a)n + \nu_p \int_0^\infty f(\xi)[n(z - \xi) + n(z + \xi)] d\xi = 0 \quad (1)$$

Здесь  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии,  $\nu_i$  и  $\nu_a$  — эффективные частоты соответственно рождения новых частиц и ухода их на электроды. Последний член в левой части уравнения описывает производство частиц той частью потока быстрых электронов, поступающих из темного пространства, которая обязана своим происхождением фотоэмиссии с катода. Весовая функция  $f(\xi)$  под интегралом характеризует относительный вклад различных участков разряда в фотоэмиссию. Вид  $f(\xi)$  зависит от геометрии катода и области тлеющего свечения и от угловой зависимости квантового выхода с катода. На рис. 1б показана  $f(\xi)$ , вычисленная для типичной угловой зависимости фотоэффекта с металлической поверхности [2] (рис. 1а) и в предположении, что разряд занимает центральную часть круглого цилиндрического полого катода. Вид  $f(\xi)$  (рис 1б) показывает, что на ионизацию частицами фотоэлектронного происхождения наибольшее влияние оказывают участки разряда, расположенные на расстоянии порядка радиуса катода от рассматриваемого сечения. Распределение концентрации  $n(z)$  определяется уравнением (1) совместно с граничными условиями на концах системы

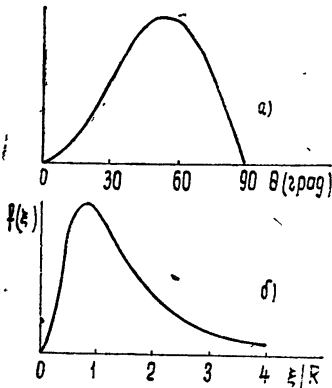


Рис 1.

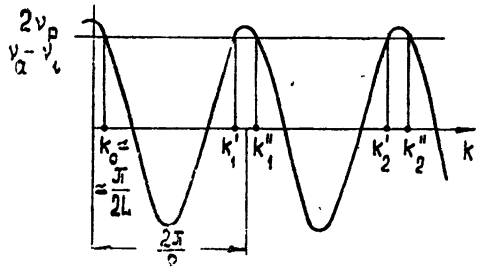


Рис 2.

Качественно характер возможных решений можно исследовать, рассматривая характеристическое уравнение, определяющее спектр пространственных гармоник распределения  $n(z) = \sum_j a_j \cos(k_j z)$ . Пренебрегая для наглядности диффузией и заменяя

$f(\xi) = \delta(\xi - R)$ , получим характеристическое уравнение

$$\nu_i - \nu_a + 2 \nu_p \cos(k_j R) = 0, \quad (2)$$

расположение корней которого видно из рис. 2. Помимо основного члена с  $k_0 \approx \pi/2L$ , описывающего плавное спадающее к концам ( $z = \pm L$ ) распределение концентрации, в решении могут присутствовать пространственные гармоники с периодом порядка  $R/j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Учет диффузии или размытия функции  $f(\xi)$  в характеристическом уравнении, соответствующем (1), приводит к физически ясному результату: значения

\* Автор признателен Б. И. Москвалеву, обратившему его внимание на это обнаруженное им явление.



$k_j$ , начиная с достаточно большого номера, становятся комплексными. С ростом коэффициента диффузии или для более плавных  $f(\xi)$  все более низкие гармоники распределения становятся спадающими, т. е. осцилляции  $n(z)$  становятся более плавными или исчезают совсем.

Таким образом, в разряде в протяженной полости, где роль фотоэмиссионных процессов особенно велика, их «дальнодействующий» характер может привести (при соответствующем возбуждении) к появлению слоистости облака отрицательного свечения, если сильная диффузия или другие, не учтенные здесь процессы (скажем, рэабсорбция), не маскируют указанного явления.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. P. Heyderhoff, Z. Physik, 175, 139 (1963).
2. G. L. Weissler, Handbuch der Physik, 21, Berlin, Springer, 1956, стр. 304.

Научно-исследовательский радиопизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
4 февраля 1964 г

УДК 621.376

### К АНАЛИЗУ СИСТЕМ С МОДУЛИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

В. С. Эткин

Схемы с периодически модулированными параметрами, находящие широкое применение при анализе некоторых радиотехнических устройств (параметрические усилители, преобразователи частоты и т. п.), являются некоторой ограниченной моделью соответствующих реальных устройств с нелинейными элементами (например, полупроводниковыми диодами). В работе [1] была предложена методика расчета характеристик некоторых систем с модулируемыми параметрами, которые можно рассматривать как устройства, охваченные нестационарной обратной связью. Используя возможности анализа цепей с помощью ориентированных графов [2, 3], можно существенно упростить в некоторых случаях расчеты по методике [1], а также и обобщить эту методику на соответствующие нелинейные системы. Последнее будет сделано на примере систем, использующих нелинейную емкость полупроводниковых диодов.

Во многих случаях зависимость емкости от напряжения для  $p-n$  переходов может быть записана в виде

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} \left[ 1 + \frac{u_{\sim}}{k(\varphi + u_0)} \right], \quad (1)$$

где  $u_{\sim}$  — переменное напряжение на постоянной составляющей емкости  $C_0$ ,  $k = 2$  для резких,  $k = 3$  для плавных  $p-n$  переходов,  $u_0$  — напряжение смещения,  $\varphi$  — контактная разность потенциалов [4, 5]. Если  $u_{\sim}$  — сумма гармонических напряжений с амплитудами  $v_i$ , фазами  $\psi_i$  и частотами  $p_i$ , то глубина модуляции емкости соответствующим гармоническим тоном есть  $m_i$ . Таким образом, мы можем рассматривать процессы в нелинейной системе как в системе с модулируемыми параметрами.

В [1] было показано, что, разбив схему с переменными параметрами на схему с постоянными параметрами и схему с чисто периодическими (с нулевым средним значением) параметрами, можно рассматривать последнюю как цепь нестационарной обратной связи, охватывающей часть схемы с постоянными параметрами. Если за отклик системы принять напряжение  $u$  на емкости  $C_0$ , то спектр ЭДС обратной связи [1] для входного сигнала частоты  $s$

$$-e_0(\omega) = \sum_i \frac{m_i}{2} e^{j\psi_i} U_0(s - p_i) + \frac{m_i}{2} e^{-j\psi_i} U_0(s + p_i) \quad (2)$$

Из вида выражения (2) видно, что модуляция цепи обратной связи частотой  $p_i$  приводит к сдвигу частоты входного сигнала на  $\pm p_i$  и умножению его амплитуды на множитель

$$P_i^{+,-} = -\frac{m_i}{2} e^{\pm j\psi_i} = -P_i e^{\pm j\psi}. \quad (3)$$

Кольцо обратной связи оказывается замкнутым на одной и той же частоте в результате обратного преобразования частоты при прохождении смещенных спектральных компонент через цепь модулируемой обратной связи. Обозначим коэффициент передачи системы с постоянными параметрами  $\xi(\omega)$ . Прохождение сигнала через систему можно представить в виде соответствующей блок-схемы, или, как еще говорят, диаграммы прохождения сигналов, т. е. с помощью соответствующего ориентированного графа [2,3]. При этом для вычисления передачи, описываемой сложным разветвленным графом, можно воспользоваться правилом (алгоритмом) Мэзона [2].

Прохождение сигналов через систему с модулируемой обратной связью можно также сопоставить соответствующий граф, так как операциям в нестационарной части системы соответствует оператор  $P_i^{+,-}$ , который обозначает сдвиг частоты и умножение на его величину (3). Взаимодействию между сигналами разных источников на нелинейной емкости или другом нелинейном элементе (взаимной модуляции сигналов) можно сопоставить обмен между графами, описывающими соответствующие линейные модулируемые подсистемы.

Выдвинутые положения можно применить к анализу конкретных систем.

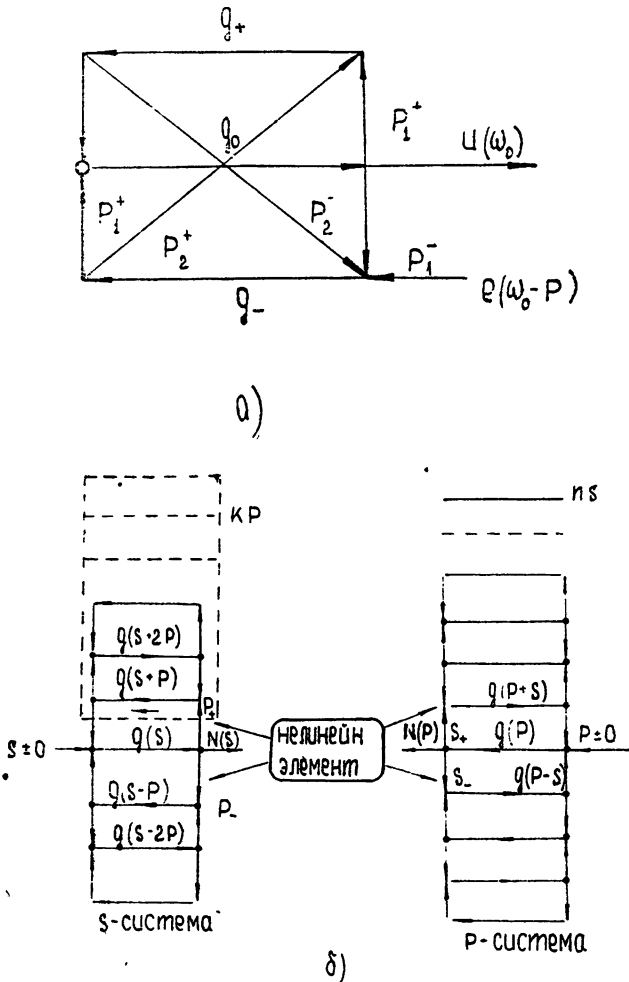


Рис. 1.

**Пример 1.** Найдем коэффициент передачи для системы с обратной связью, модулируемой двумя частотами  $p$  и  $2p$  (глубина модуляции  $m_1$  и  $m_2$ ). Такая схема описывает преобразователь частоты и усилитель-преобразователь, рассмотренные в [6, 7]. В такой системе колебания существуют на частотах  $s, s \pm p$ . Обозначив коэффициенты передачи системы с постоянными параметрами на этих частотах  $g_0, g_+, g_-$  и операторы преобразования частоты  $P_1^{+,-} = -(m_1/2)e^{\pm j\psi}$ ,  $P_2^{+,-} = -(m_2/2)e^{\pm 2j\psi}$ , мо-

жем вычертить ориентированный граф, соответствующий всем возможным путям прохождения сигналов в системе (см. рис 1а). Применяя правило Мэсона к этому графу [2], найдем коэффициент передачи преобразователя с частоты  $\omega_0 - p$  на частоту  $\omega_0$ :

$$N_{-1,0} = \frac{-(m_1/2)g_0 g_- e^{j\psi} + (m_1 m_2 / 4) g_0 g_- g_+ e^{j\psi}}{1 - (m_1/2)^2 g_0 (g_+ + g_-) + 2(m_1/2)^2 (m_2/2) g_- g_+ g_0 - (m_2/2)^2 g_- g_+} \quad (4)$$

Выражение (4) может быть получено решением соответствующей системы из 9 уравнений с 9 неизвестными, если использовать непосредственно методикку [1]. Отметим, что анализ устойчивости устройства облегчается, поскольку он сводится к анализу устойчивости цепи с обратной связью, т. е. соответствующего графа.

**Пример 2.** Определим характер взаимодействия сигналов в преобразователе на нелинейной емкости с двумя основными частотами при сильных входных сигналах. Будем для простоты учитывать только взаимную модуляцию колебаний сигнала частоты  $s$  и накачки частоты  $p$  частотами  $p$  и  $s$  соответственно.

Обозначая операторы преобразования частоты в цепи сигнала через  $P^+, -$ , в цепи накачки через  $S^+, -$ , можно составить соответствующие графы преобразования частот в цепях сигнала ( $S$ -система) и накачки ( $P$ -система) и представить их связь (см. рис 1б)

Коэффициенты передачи соответствующих графов имеют подобный вид, например, для  $S$ -системы

$$N^{(s)} = \frac{g(s)}{1 - P^2 g(s) [N_{00}^{s+p} + N_{00}^{s-p}]} \quad (5a)$$

где

$$N_{00}^{s \pm ip} = \frac{g(s \pm ip)}{1 - P^2 g(s \pm ip) N_{00}^{s - (i+1)p}} \quad (5b)$$

Для преобразователя нелинейной емкости с резонансными контурами на частотах  $s$ ,  $p$ ,  $p \pm s$  рассмотрим случай, когда  $s \ll p$  и добротности контуров частот  $p$ ,  $p \pm s$  практически одинаковы ( $Q_p \approx Q_+ = Q_-$ ). Тогда, учитывая, что  $g(\omega_i) = -jQ_i$  для  $\omega_i > 0$ ,  $g(\omega_i) = jQ_i$  для  $\omega_i < 0$ , получим

$$|N(s)| = Q_s, \quad N_{s, s \pm p} = P Q_p Q_s; \quad (6a)$$

$$S = \frac{E(s) Q_s}{2k(u_0 + \varphi)}, \quad (6b)$$

$$P = \frac{E(p) Q_p}{2k(u_0 + \varphi) \{1 + 2[E(s) Q_s / 2k(u_0 + \varphi)]^2 Q_p^2\}} \quad (6b)$$

где  $E(s)$ ,  $E(p)$  — амплитуды ЭДС сигнала и накачки.

При большом сигнале второе слагаемое в знаменателе (6б) больше единицы. Тогда напряжение комбинационной частоты обратно пропорционально амплитуде входного сигнала:

$$U_{+, -} = E(s) |N_{s, s \pm p}| = \frac{E(p) (u_0 + \varphi) k}{Q_p E(s)} \quad (7)$$

Таким образом, преобразователь из перемножителя при слабых сигналах

$$U_{+, -} = L(s) |N_{s, s \pm p}| = \Gamma(s) E(p) \frac{Q_s Q_p^2}{2k(u_0 + \varphi)} \quad (8)$$

превращается в делитель (см. [7]).

Как видно из примеров, применение ориентированных графов при исследовании линейных и нелинейных систем с периодически модулируемыми параметрами или сводимых к ним позволяет со значительно меньшими затратами труда, чем ранее, и весьма наглядным путем получить необходимые результаты.

Автор признателен М. Е. Герценштейну за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати)
- 2 С. Мэзон, Г. Циммерман, Электронные цепи, сигналы, системы, ИЛ, М., 1963.
3. Приспосабливающиеся автоматические системы, под ред. Э. Мишкина, Л. Брауна, ИЛ, М., 1963, гл. 2
- 4 D. Leeson, Proc. IEE, 51, 1052 (1963).
5. В. С. Эткин, Е. М. Гершензон, Параметрические системы СВЧ на полупроводниковых диодах, изд. Сов. радио, М., 1964.
- 6 Байард, Труды ИРЭ, 51, 105 (1963)
7. Л. Н. Никулина, Н. Е. Селиваненко, В. С. Эткин, Электросвязь, № 11, 3 (1963)

Московский государственный педагогический институт  
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию  
10 ноября 1963 г.

— — — — —