

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стра- ница	Строка	Напечатано	Должно быть
601	16 сверху	$n_{3,4} = \sqrt{1-...}$	$n_{3,4} = \pm \sqrt{1-...}$
	17 сверху	$n_{5,6} \approx \pm \frac{\beta \pm ...}{\beta^2 - \beta_T^2}$	$n_{5,6} \approx \frac{\beta \pm ...}{\beta^2 - \beta_T^2}$
671	11 снизу	$\dots \bar{\Psi}^2 = \Psi^2 / \dots$ и $\bar{F}_2 = F_2 / \dots$	$\dots \bar{\Phi}_2 = \Phi^2 / \dots$ и $\bar{F}^2 = F_2 / \dots$
680	18 сверху	$n_{стаци} = \dots (Q_{31} W_{32} Q_{32} W_{31}) \dots$	$n_{стаци} = \dots (Q_{31} W_{32} - Q_{32} W_{31}) \dots$
726	11 снизу	$ a_H ^2 = \dots [F' + F'' \dots]$	$ a_H ^2 = \dots [F' \pm F'' \dots]$
759	12 снизу	$x - [\lambda + \dots] = 0$	$\xi x - [\lambda + \dots] = 0$
773	5 сверху	где $y(t) \dots$	где $y'(t) \dots$
774	12 сверху	$a_{\alpha\alpha}^+(k) = \dots \frac{\exp[p_v^- \Delta_{k+1}^-]}{(p_v^- - p_\alpha^+)(p_\alpha^+ - p_v^-)}$	$a_{\alpha\alpha}^+(k) = \dots \frac{\exp[p_v^- \Delta_{k+1}^-]}{(p_v^- - p_\alpha^+)(p_\alpha^+ - p_v^-)}$
777	9 снизу	$b_2^+ = \frac{1}{Z'(p_2^+)} \frac{u_n}{-p_1^+} = \dots$	$b_2^+ = \frac{1}{Z'(p_2^+)} \frac{u_n}{-p_2^+} = \dots$
780	6 снизу	\dots напряжения x, y_0, ϵ_a и $\epsilon_g \dots$	\dots напряжения x, y, ϵ_a и $\epsilon_g \dots$
792	5 снизу	$a + \mu_0 a/2 = -\mu_0 x z$	$\dot{a} + \mu_0 a/2 = -\mu_0 x z$
793	14 снизу	$\zeta_0 = \beta \zeta; \quad \xi = \frac{\epsilon - 1}{\mu_0 + \mu}$	$\zeta_0 = \beta \zeta; \quad \zeta = \frac{\epsilon - 1}{\mu_0 + \mu}$
796	4 снизу	$H_y^{(1)} = \dots I^{itz} dt$	$H_y^{(1)} = \dots e^{itz} dt$
798	13 снизу	$-\psi^+(\gamma_m) + \dots \frac{z_1(\gamma_m) - q}{\gamma_m^2 - \gamma_2^2} \dots$	$-\psi^+(\gamma_m) + \dots \frac{z_1(\gamma_m) - q}{\gamma_m^2 - \gamma_2^2} \dots$
	10 снизу	$\dots = -\frac{2\gamma z_0(t)}{t^2 - \gamma_2^2} \dots$	$\dots = -\frac{2\gamma z_0(t)}{t^2 - \gamma^2} \dots$
799	20 снизу	$\dots \rho = [z_2 + (x \pm l)^2]^{1/2} \rightarrow 0 \dots$	$\dots \rho = [z^2 + (x \pm l)^2]^{1/2} \rightarrow 0 \dots$

СОДЕРЖАНИЕ

Бахрах Л. Д., Могильникова К. И. Некоторые вопросы проектирования больших зеркальных радиотелескопов	585
Каменецкая Г. Х., Ковнер М. С. О высокочастотных волнах в плазме, дрейфующей в магнитном поле	596
Рыжов Ю. А., Тамойкин В. В. О тензоре эффективной диэлектрической проницаемости неоднородной магнитоактивной плазмы	605
Арсенин В. В. О потенциальных колебаниях сильно неоднородной разреженной плазмы	611
Калинский С. Механическая генерация чerenковского излучения в идеально проводящей упругой среде, граничащей с вакуумом. I	618
Калинский С. Механическая генерация чerenковского излучения в идеально проводящей упругой среде, граничащей с вакуумом II	629
Гайлitis А. Рассеяние света зарядом, движущимся в среде	646
Кондратенко А. Н. Кинетическая теория плазменного волновода в сильном магнитном поле	652
Яковенко В. М. О переходном излучении в магнитоактивной плазме	657
Кравцов Ю. А. Об одной модификации метода геометрической оптики	664
Хронопуло Ю. Г. К теории комбинационного излучения в сильных полях	674
Кузнецова Т. И., Раутиан С. Г. Плоское решение волнового уравнения для слоя с отрицательным коэффициентом поглощения при учете насыщения	682
Ахманов С. А., Комолов В. П., Чиркин А. С. О квантовании при исследовании нестационарных законов распределения фазы	693
Гершт А. М. О спектре квазигармонического сигнала при достаточно общих предположениях относительно закона распределения флюктуаций частоты	701
Малахов А. Н. Решение нелинейных уравнений для флюктуаций амплитуды и фазы автогенератора	710
Вашковский А. В. Излучение малого гиротропного шара	722
Каплун В. А., Тимофеев Л. М. О влиянии плоского диэлектрического листа на направленные свойства антенн	730
Шапиро В. Д. К нелинейной теории волн плотности заряда в пучках с переменными параметрами	736
Белов Л. А. Исследование отражательного клистрона при наличии тока отражателя	747
Чубаров М. А. Динамика схемы Фрюгауфа на полупроводниковых триодах	759
Яхинсон Б. И., Розенфельд А. С. Динамика линейных электрических цепей при циклических переключениях	771
Фейгин М. И. Жесткий режим автоколебаний триггера	780
 Краткие сообщения и письма в редакцию	
Белов И. Ф. Об учете боковых лепестков антенны при поляризационных измерениях	787
Ласточкин В. П., Станкевич К. С. Экспериментальное обнаружение флюктуаций температуры радиоизлучения атмосферы	789
Гурвич А. С., Кон А. Н. Зависимость мерцания от размеров источника света	790
Луговой В. Н. Об устойчивости синусоидальных колебаний молекулярного генератора	792
Калмыкова С. С., Курилко В. И. Отражение поверхностной волны открытым концом плоского волновода	796
Трофименко И. Т., Цельковский А. Ф. Генератор субгармоники СВЧ диапазона в режиме бинарного квантования фазы	800
 Информация	
Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т IV, № 2, 1964	804

УДК 523.164

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ БОЛЬШИХ ЗЕРКАЛЬНЫХ РАДИОТЕЛЕСКОПОВ

Л. Д. Бахрах, К. И. Могильникова

Рассматриваются вопросы, связанные с созданием больших зеркальных радиотелескопов. Анализируются требования к антеннам радиотелескопов при работе с малошумящими приемниками. Показано, что обычные параболические антенны, с точки зрения поставленных требований, не являются оптимальными. Показывается целесообразность применения модифицированных двухзеркальных и трехзеркальных антенн.

При разработке больших наземных антенн радиотелескопов основным требованием является обеспечение максимально высоких радиотехнических характеристик.

Основным критерием при разработке антennы должна быть не величина коэффициента усиления или эффективной площади, а отношение принятого сигнала S к шуму на выходе приемной системы N . Оптимальное построение антennы должно обеспечить максимальное отношение $\frac{S}{N}$.

Важнейшим параметром, характеризующим влияние приемной антennы на мощность сигнала, является коэффициент усиления или эффективная площадь антennы. При применении малошумящих приемников при оценке общих шумов необходимо учитывать шумы, принимаемые антенной из окружающего пространства, и шумы теплового электромагнитного излучения линии передачи (от облучателя до входного устройства приемника), обладающей омическими потерями. Уровень этих шумов принято характеризовать величиной эффективной шумовой температуры. Для реализации возможностей малошумящих приемников необходимо стремиться к достижению шумовой температуры антennы (совместно с фидерным трактом), по крайней мере сравнимой с шумовой температурой малошумящего приемника. Квантовые парамагнитные усилители в сантиметровом диапазоне волн практически имеют шумовую температуру порядка 20°K , и в ближайшее время эта величина, по-видимому, приблизится к 10°K .

При создании больших антenn должны серьезно учитываться вопросы их стоимости. Также необходимо иметь в виду и целесообразность работы одной антennы в различных диапазонах волн (от сантиметрового до метрового), обеспечение заданных поляризационных характеристик, в частности, круговой поляризации. Из всего перечисленного мы уделим основное внимание вопросам оптимизации антennы с точки зрения увеличения дальности приема, т. е. повышения отношения S/N . Однако при выборе схемы антennы следует учитывать и другие факторы, упомянутые выше.

1. ХАРАКТЕРИСТИКИ АНТЕНН, ВЛИЯЮЩИЕ НА ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ ПРИЕМНОЙ СИСТЕМЫ И ШУМОВУЮ ТЕМПЕРАТУРУ АНТЕННЫ

В зависимости от основных характеристик антенны отношение сигнал/шум на выходе приемника может быть записано в виде

$$F = \frac{S}{N} = C \frac{AK_i\eta}{T_{\text{пп}} + T_0(1 - \eta) + T_a\eta}, \quad (1)$$

где A — геометрическая площадь раскрыва антенны, K_i — результирующий коэффициент использования площади раскрыва антенны, $T_{\text{пп}}$ — шумовая температура приемника, T_a — эффективная шумовая температура антенны без потерь, обусловленная приемом шумов из среды, окружающей антенну, η — КПД волноводного тракта и антенны, обусловленный омическими потерями в волноводном тракте и зеркалах антенны. T_0 — температура окружающей среды, принимаемая в расчетах равной 290°K ; C — коэффициент, зависящий от характеристик приемника и от длины волны.

Эффективная шумовая температура антенны, обусловленная приемом шумов из окружающего антенну пространства, может быть представлена в виде [1]

$$T_a = T_1(1 - \beta) + T_2\beta_2 + T_3\beta_3, \quad (2)$$

где T_1 — средняя яркостная температура среды в пределах основного луча диаграммы, T_2 — средняя яркостная температура шумового излучения, принимаемого боковыми лепестками в области передней полусферы (по отношению к направлению основного луча), T_3 — средняя яркостная температура шумового излучения в области задней полусферы, β — суммарный коэффициент рассеяния антенны, показывающий, какая доля от всей излученной мощности поступает в боковые лепестки (при работе антенны на передачу), β_2 , β_3 — коэффициенты рассеяния соответственно в передней и задней полусферах;

$$\beta = \beta_2 + \beta_3.$$

Формула (2) удобна при расчете шумовой температуры антенны, когда ее основной луч направлен в зенит.

Следует отметить, что пространство, окружающее антенну, можно разбить и на большее число областей, например, из передней полусферы выделить область под малыми углами места, т. е. вблизи линии горизонта, где яркостная температура шумового излучения значительно выше; можно также выделить области с большим или малым рассеянием β , антенны. Тогда формула (2) будет содержать большее число слагаемых.

В литературе имеется достаточно данных, характеризующих шумы различных внешних источников. Основными внешними источниками шумов антенн СВЧ являются 1) тепловое радиоизлучение атмосферы, 2) космическое радиоизлучение, 3) радиоизлучение дискретных источников (Солнце, Луна, радиозвезды), 4) тепловое радиоизлучение Земли.

Анализ показывает, что наиболее существенным источником шумов антенны является тепловое радиоизлучение Земли. Земля, являясь хорошим поглотителем в микроволновом диапазоне при температуре $T_0 \sim 290^{\circ}\text{K}$, излучает шумы, которые принимаются боковыми и задними лепестками антенны. Следует заметить, что для больших антенн шумовую температуру антенны за счет излучения Земли расчетным путем определить затруднительно, так как эффективно излучающая часть поверхности Земли может при этом оказаться в зоне Френеля и даже в ближней зоне. Поэтому, несмотря на имеющиеся теоретические иссле-

дования, решающее значение здесь имеет экспериментальная проверка. Исключение составляет случай, когда шумы Земли непосредственно попадают в облучатель через область его рассеяния $\pi/2 - \Phi$ (рис. 1).

Потери в самой антенне и в линии передачи от облучателя до входного устройства приемника сильно влияют на шумовую температуру, поскольку источники шумов имеют температуру окружающей среды, т. е. $T_0 = 290^{\circ}\text{K}$.

Второе слагаемое в знаменателе (1) представляет собой шумовую температуру волноводного тракта, отнесенную ко входу приемника. Необходимо иметь в виду, что потери в волноводном тракте 0,1 дБ обусловят шумовую температуру 6°K . С учетом (2) выражение (1) примет вид

$$F = \frac{S}{N} = C \frac{AK_{ii}\eta}{T_{np} + T_0(1-\eta) + T_1(1-\beta)\eta + T_2\beta_2\eta + T_3\beta_3\eta}. \quad (3)$$

В случае направления основного луча антенны под большими углами места в большинстве случаев третьим и четвертым слагаемыми в знаменателе (3) можно пренебречь, так как они будут значительно меньше второго слагаемого, обусловленного шумами волноводной или коаксиальной линии передачи, и пятого слагаемого, обусловленного шумовым излучением Земли и наличием рассеяния в задней полусфере диаграммы направленности антенны.

Таким образом, при разработке антенны, предназначеннной для работы с малошумящим приемником, в первую очередь необходимо стремиться к получению высокого коэффициента использования площади раскрыва антенны K_{ii} , малого коэффициента рассеяния β_3 в сторону Земли и к уменьшению потерь в линии передачи от облучателя до входного устройства приемника. Суммарный коэффициент рассеяния β также имеет значение, поскольку он связан с коэффициентом использования площади раскрыва K_{ii} .

Напомним, что коэффициент рассеяния β для синфазного круглого раскрыва изменяется от 0,17 при равномерном амплитудном распределении до 0,04 при спадающем распределении к краям зеркала на 10 дБ и до 0,023 при нулевом освещении края зеркала. Следует заметить, что эти цифры определены, исходя только из амплитудного распределения поля в раскрыве антенны и не учитывают рассеяние энергии облучателя, паразитную поляризацию, задние лепестки антенны, экранировку раскрыва облучающим устройством и рассеяние вследствие погрешностей изготовления антенны. У реальных антенн все эти факторы приводят к значительному возрастанию коэффициента рассеяния и снижению коэффициента использования раскрыва. Стремиться к снижению $\beta < 0,17$ имеет смысл, если при этом будет уменьшаться β_3 и это уменьшение будет более эффективным для отношения S/N , чем неизбежное уменьшение коэффициента использования площади раскрыва антенны.

Таким образом, суммарный и дифференциальные (по зонам) коэффициенты рассеяния, коэффициент использования раскрыва, КПД волноводного тракта полностью характеризуют антенну с точки зрения отношения S/N ; оптимизация этих характеристик антенны должна проводиться для конкретного приемного устройства с определенной шумовой температурой T_{np} .

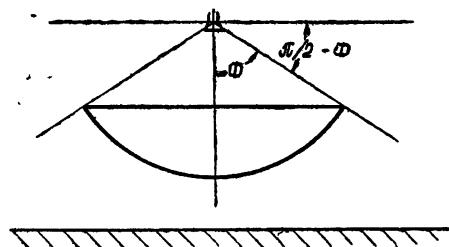


Рис. 1.

2. БОЛЬШИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ АНТЕННЫ

Коэффициент использования площади раскрыва, а также суммарный и зональные коэффициенты рассеяния зеркальной антенны определяются следующими факторами: а) амплитудным распределением поля в раскрыве, б) рассеиваемой облучателем энергией за края зеркала, в) рассеиванием энергии на элементах крепления облучателя и на самом облучателе, г) ошибками в изготовлении антенны.

Коэффициент использования площади раскрыва можно представить в виде

$$K_n = g \eta_1 \eta_2 \eta_3, \quad (4)$$

где g — апертурный коэффициент использования, учитывающий неравномерность распределения амплитуды E поля в раскрыве антенны:

$$g = \frac{\left| \int_A E dA \right|^2}{A \int_A E^2 dA},$$

η_1 — коэффициент, учитывающий рассеяние облучателя $\beta_{изл}$, т. е. излучение части энергии облучателя вне телесного угла, охватывающего зеркало:

$$\eta_1 = 1 - \beta_{изл},$$

η_2 — коэффициент, учитывающий рассеяние энергии опорами и облучателем:

$$\eta_2 = 1 - \Sigma \xi_i,$$

η_3 — коэффициент, учитывающий уменьшение КНД вследствие погрешностей изготовления поверхности зеркала антенны.

В литературе [2] имеются данные о максимуме коэффициента использования, определяемом путем компромисса между параметрами g и η_1 . Для рупорных облучателей при аппроксимации их диаграммы направленности функцией $\cos^n \varphi$ и предположении об отсутствии излучения в задних квадрантах, максимальный K_n слабо зависит от отношения фокусного расстояния к диаметру зеркала и при угловых раскрывах параболоида 2Φ от 80° до 150° равен $0,8 - 0,83$. Максимальный K_n раскрыва параболоида соответствует спаданию диаграммы облучения к краям зеркала на $8 \div 10$ дБ. Практически максимальный K_n параболоидов значительно меньше из-за воздействия всех вышеперечисленных факторов. Диаграмма реального излучателя, однако, не спадает до нуля за пределами углов облучения зеркала; часть энергии рассеивается в задней полусфере.

На рис. 2 построены расчетные кривые коэффициента рассеяния $\beta_{изл}$ по экспериментальным диаграммам семи пирамидальных рупоров для различных уровней Δ спадания облучения к краям зеркала. Оценка зональных коэффициентов рассеяния облучателей, в частности, $\beta_{изл_1}$ — рассеяние в область $\Phi \div \pi/2$ и $\beta_{изл_2}$ — рассеяние в область $\pi/2 \div \pi$, т. е. в заднюю полусферу облучателя, показывает, что $\beta_{изл_1} > \beta_{изл_2}$, т. е. основная часть рассеянной мощности приходится на область $\Phi \div \pi/2$. Знание величин $\beta_{изл_1}$ при различных уровнях Δ спадания диаграммы на границе Φ позволяет непосредственно оценить шумовую температуру параболической антенны за счет приема облучателем шумового излучения Земли.

Можно указать на несколько путей снижения величины коэффици-

ента рассеяния облучателей. Так, вместо пирамидального рупора малых размеров в [3] предлагается облучающее устройство размером в несколько длин волн, состоящее из дискретных элементов, расположенных по концентрическим окружностям. С помощью такого облучателя можно

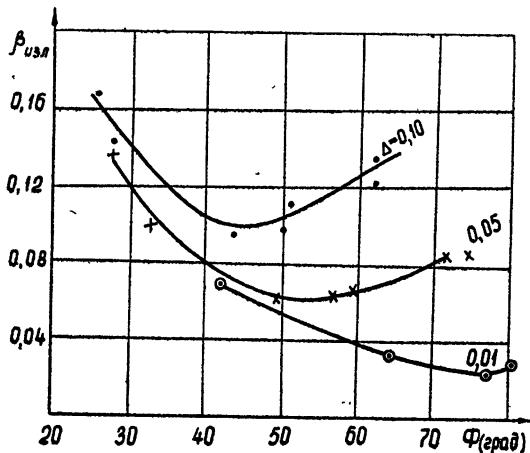


Рис. 2.

создать диаграмму, близкую к столообразной, и резко уменьшить «переливание» энергии за края зеркала.

Аналогичный эффект достигается также при установке экрана в плоскости раскрыва обычного пирамидального рупора [4]. Как показала практика, экраны даже небольших размеров (ширина порядка $\lambda/2$) с канавками позволяют снизить коэффициент рассеяния рупора примерно в 2 раза. Эффективность применения экрана в плоскости раскрыва рупора подтверждена [4] измерением шумовой температуры антенны диаметром 26 м. С улучшенным облучателем шумовая температура антенны составляла 15°К, в то время как при использовании в этой антенне обычного рупорного облучателя со спадом диаграммы на краю зеркала в 10 дБ температура $T_a = 30^{\circ}\text{K}$.

При аппроксимации диаграммы облучателя функцией $\cos^n \varphi$ апertureный коэффициент использования параболической антенны имеет вид

$$g = \frac{2(n+1)}{\operatorname{tg}^2(\Phi/2)(1-\cos^{n+1}\Phi)} \left[\int_0^\Phi \cos^{n/2}\varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} d\varphi \right]^2. \quad (5)$$

На рис. 3 приведены кривые зависимости g от углового раскрыва (или от F/D) для нескольких уровней Δ . Что касается рассеяния энергии опорами, то, как показали эксперименты, даже при сравнительно тонких опорах ($d_{\text{опор}} = 0,01 D_0$) рассеяние достигает $\xi_1 = 0,1 \div 0,12$.

Погрешности изготовления поверхности больших параболических зеркал, носящие случайный характер, приводят к уменьшению КНД антенны:

$$\eta_3 = \frac{G}{G_0} = e^{-\delta^2}, \quad (6)$$

где

$$\delta^2 = (4\pi)^2 (\sigma/\lambda)^2,$$

σ — среднеквадратичное отклонение поверхности зеркала от расчетной.

На рис. 4 приведена кривая $\eta_3 (\sigma/\lambda)$, из которой следует, что при среднеквадратичном отклонении $\sigma = 0,04 \lambda$ КНД антенны падает на 20 %. Для больших зеркал диаметром в несколько десятков метров, предназначенных для работы в сантиметровом диапазоне волн, такая погрешность изготовления поверхности зеркала часто имеет место.

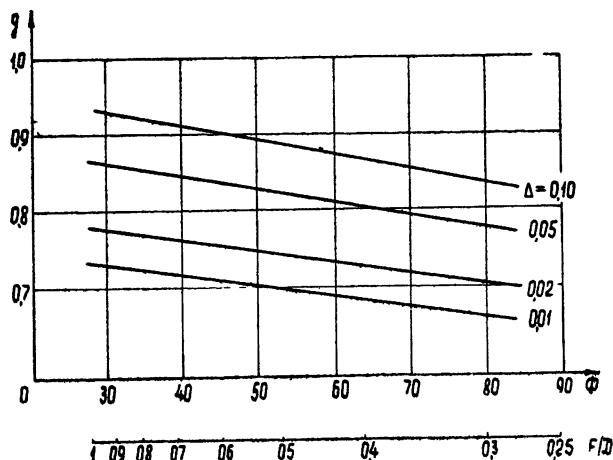


Рис. 3.

Анализ всех факторов, влияющих на величину K_i , показывает, что для больших зеркал, диаметр которых D_0 достигает $(500 \div 1000) \lambda$, максимальный коэффициент использования составит $K_{i\max} = 0,55$ при облучении края уровнем — 10 дБ и $\Phi = 50^\circ$ (при $\Phi = 75^\circ K_{i\max} = 0,5$), а при облучении края уровнем — 20 дБ коэффициент $K_{i\max} = 0,45$.

Что касается шумовой температуры параболической антенны, то она в основном, как показали расчеты и эксперименты, обусловлена приемом шумов Земли непосредственно облучателем и существенно зависит от уровня облучения края зеркала. Результаты выполненных у нас измерений шумовой температуры параболической антенны диаметром 2 м при различном уровне облучения краев в трехсантиметровом диапазоне показывают, что при изменении уровня облучения края от —11 дБ до

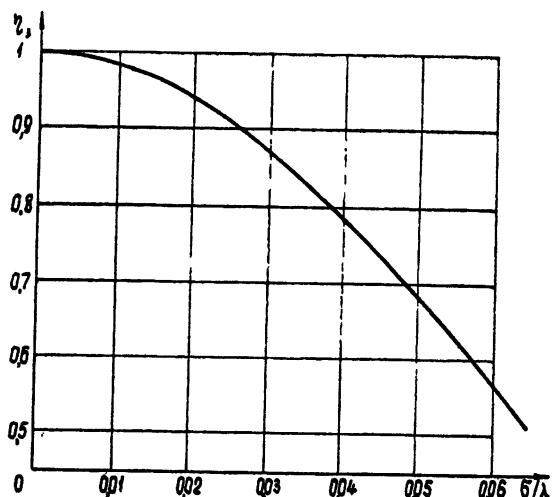


Рис. 4.

—18 дБ шумовая температура антенны уменьшается от 35° до 15°К, т. е. в 2,5 раза, а K_i при этом падает лишь на 15 %. Интересно заметить, что рассеяние облучателя в область $\Phi \div \pi/2$ при $\Delta = -11$ дБ составляет $\beta_{изл_1} = 0,05$, а при $\Delta = -18$ дБ $\beta_{изл_1} = 0,016$.

Таким образом, максимум отношения S/N для параболоидов будет сильно зависеть от $T_{пр}$ и T волноводного тракта. Уровень облучения

краев зеркала, при котором реализуется $(S/N)_{\max}$, будет ниже, чем это имеет место для получения K_{\max} , и этот уровень будет тем ниже, чем ниже $T_{\text{pp}} + T$ тракта.

Таким образом, параболоид имеет серьезные ограничения при создании высокоеффективных малошумящих антенн. К этому следует добавить, что в сантиметровом диапазоне волн потери в длинных волноводных трактах, связывающих облучатель с малошумящим приемником, существенно повышают шумовую температуру.

3. ДВУХЗЕРКАЛЬНЫЕ АНТЕННЫ

Высокоеффективными антennами для работы с малошумящими усилителями являются многозеркальные антенны и, в частности, двухзеркальные антенны. Эти системы имеют следующие принципиальные преимущества:

а) двухзеркальная антenna осевой симметрии принципиально может обеспечить заданное распределение амплитуды и фазы поля в раскрыве при любой диаграмме облучателя, облучающего малое зеркало;

б) облучатель и волноводный тракт монтируются вблизи вершины большого зеркала, где помещен малошумящий усилитель; тем самым длина волноводного тракта может быть сделана минимальной;

в) рассеяние энергии в заднюю полусферу (при направлении антennы в зенит) сравнительно мало; энергия, «переливаемая» за края малого зеркала, рассеивается в малошумящей части неба;

г) двухзеркальная система может быть сравнительно легко сделана многодиапазонной и многоцелевой. Эти замечательные свойства двухзеркальных антenn делают их весьма перспективными для радиотелескопов.

Первое из упомянутых свойств двухзеркальной антennы базируется на известном положении [5] о том, что поверхности зеркал однозначно определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dX_b}{d\varphi} &= f_1(X_b, \varphi, Y_m); \\ \frac{dY_m}{d\varphi} &= f_2(X_b, \varphi, Y_m), \end{aligned} \quad (7)$$

где X_b, Y_b, X_m, Y_m — координаты сечений большого и малого зеркал, φ — угол облучения малого зеркала. Вид функций f_1 и f_2 и зависимость $Y_b = f_3(\varphi)$ следует из уравнения энергетического баланса:

$$\int_0^{\varphi} P(\varphi) \sin \varphi d\varphi = C \int_0^y F^2(y) y dy, \quad (8)$$

где $P(\varphi)$ — диаграмма облучателя по мощности, $F(y)$ — амплитудное распределение поля в раскрыве большого зеркала, C — нормирующий множитель.

Таким образом, можно понизить облучение краев малого зеркала до сколь угодно малого уровня и при этом принципиально обеспечить распределение поля в раскрыве, близкое к равномерному. Однако практически снизить облучение края зеркала до уровня ниже -20 дБ затруднительно, так как при этом заметно увеличиваются размеры облучателя и он начинает экранировать часть потока, отраженного от малого зеркала.

В двухзеркальной антenne осевой симметрии (параболоид — гиперболоид) амплитудное распределение в раскрыве будет получаться таким

же, как в эквивалентной однозеркальной параболической антенне с тем же облучателем, но с другим фокусным расстоянием, чем у параболоида в рассматриваемой двухзеркальной антенне (рис. 5). Параметры параболоида в двухзеркальной антенне и эквивалентного параболоида однозеркальной антенны связаны соотношением

$$\frac{F_{\text{экв}}}{F_0} = \frac{\operatorname{tg}(\Phi/2)}{\operatorname{tg}(\psi_m/2)} = \frac{e+1}{e-1}, \quad (9)$$

где e — эксцентриситет гиперболоида,

$$\frac{F_{\text{экв}}}{D_0} = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\psi_m}{2}. \quad (10)$$

В простых двухзеркальных антенных коэффициент K_i несколько уменьшается из-за экранирующего влияния малого зеркала. Оно проявляется двояко: уменьшается действующая площадь и часть энергии рассеивается малым зеркалом после того, как большое зеркало сформировало параллельный пучок лучей. Первый фактор при равномерном распределении поля в раскрыве вызывает уменьшение K_i на величину D_1^2/D_0^2 , где D_1 и D_0 — диаметры малого и большого зеркал соответственно.

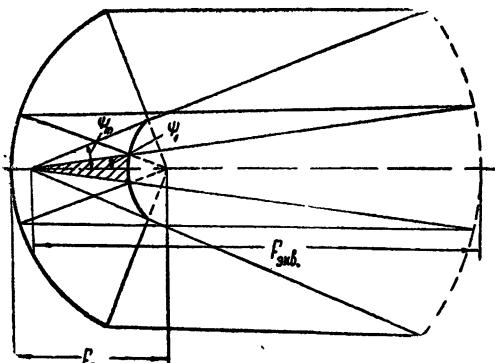


Рис. 5.

Расчеты показывают, что апертурный коэффициент использования двухзеркальной антенны с $\psi_m = 20 \div 40^\circ$, несмотря на экранировку части раскрыва малым гиперболическим зеркалом, получается такого же порядка, что и однозеркальной короткофокусной антенны с $\Phi = 60 \div 75^\circ$. Такое положение имеет место при условии, что $D_1/D_0 \leq 0,15$.

Второй фактор зависит от отношения диаметров зеркал $d = D_1/D_0$ и уровня облучения краев гиперболического зеркала. При аппроксимации диаграммы облучателя функцией $\cos^n \psi$ относительная доля энергии, рассеиваемой малым зеркалом, будет равна

$$\xi_2 = \frac{\int_0^{\psi_1} F^2 d\Omega}{\int_0^{\psi_m} F^2 d\Omega} = \frac{1 - \cos^{n+1} \psi_1}{1 - \cos^{n+1} \psi_m}; \quad (11)$$

угол ψ_1 определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\psi_1}{2} = \frac{D_1}{D_0} \operatorname{tg} \frac{\psi_m}{2}.$$

Расчеты показывают, что величина потерь на рассеяние ξ_2 растет при увеличении диаметра гиперболического зеркала и понижении уровня облучения его края. Для того, чтобы величина потеря ξ_2 не превышала 0,1, относительный диаметр гиперболического зеркала не должен

быть более 0,15; при $D_1/D_0 = 0,1$ $\xi_2 \approx 0,05$. Потери на рассеяние малым зеркалом можно исключить, если при расчете зеркал выбрать соответствующим образом пределы интегрирования в выражении (8).

Для двухзеркальных антенн с гиперболическим малым зеркалом, которые эквивалентны более длиннофокусным однозеркальным антеннам, результирующий коэффициент использования K_n может быть около 0,65 для сравнительно небольших зеркал ($D_0 < 100 \lambda$; $d = 0,1$) и 0,55 для зеркал диаметром до 1000 λ .

В двухзеркальных антенах для увеличения K_n следует в раскрыве антенны создавать распределение поля, близкое к равномерному, путем применения специально рассчитанных зеркал, которые будут в этом случае отличаться от параболоида и гиперболоида. Рассеяние облучателя в этом случае может быть сведено к минимуму, поскольку малое зеркало можно облучать весьма низким уровнем. Практически подтверждено, что при принятии специальных мер, например, при установке экранов с канавками в плоскости раскрыва пирамидального облучателя, удается снизить коэффициент рассеяния облучателя до $\beta_{изл} = 0,05 \div 0,02$ при облучении краев малого зеркала уровнем $\Delta = 0,01$ и при $\Phi_m = 20 \div 30^\circ$.

В отношении коэффициента рассеяния и шумовой температуры двухзеркальной антенны необходимо сказать следующее. Если облучатель не выступает за плоскость раскрыва зеркала, вся энергия облучателя, рассеянная за пределы малого зеркала, оказывается в передней полусфере антенны. Коэффициент рассеяния в задней полусфере антенны оказывается весьма малым, в результате чего можно получить шумовую температуру около 15°К при высоком коэффициенте использования. Эта величина специальными мерами может быть еще уменьшена.

Таким образом, для работы с малошумящими усилителями высокоэффективной является двухзеркальная антenna, рассчитанная на получение заданного амплитудного распределения. У этих антенн нет жесткой зависимости между мощностью, рассеиваемой облучателем, и коэффициентом использования раскрыва, и принципиально при малом рассеянии может быть получен высокий $K_n = 0,6 \div 0,7$. Важно также и то, что длина волноводного тракта у двухзеркальных антенн минимальна, а рассеиваемая облучателем мощность направлена в переднюю полусферу, в «холодную» часть пространства.

4. ТРЕХЗЕРКАЛЬНЫЕ АНТЕННЫ

Переход к трехзеркальной схеме при разработке больших антенн радиотелескопов может оказаться целесообразным по ряду соображений. В ряде случаев, особенно при многоцелевом использовании большой антенны в различных диапазонах волн желательно, чтобы большое зеркало было параболоидом. При этом заданное амплитудно-фазовое распределение поля в раскрыве может создаваться с помощью двух дополнительных специально рассчитанных зеркал. Второе обстоятельство связано с тем, что при помещении облучателя вблизи вершины большого зеркала, имеющего диаметр в несколько десятков метров, и при наличии малого зеркала диаметром порядка 2 \div 3 метров, угол облучения малого зеркала оказывается малым и составляет 15 \div 25°. Для эффективного облучения малого зеркала требуется применить облучатель со сравнительно большой направленностью. Синфазную направленную антенну применять для этих целей вряд ли целесообразно ввиду неизбежного рассеивания заметной части энергии за края малого зеркала. Кроме того, в этом случае отсутствует возможность гибкой регулировки амплитудного распределения поля в раскрыве. Поэтому и с этой точки зрения целесообразна установка третьего зеркала у вершины большого зеркала; оно будет являться своеобразным облучающим устройством

для второго зеркала. С точки зрения большей эффективности системы существенно, чтобы при переотражении между зеркалами были справедливы законы геометрической оптики.

На рис. 6 представлена схема осесимметричной трехзеркальной антенны с большим параболическим зеркалом. Плоская волна, падающая

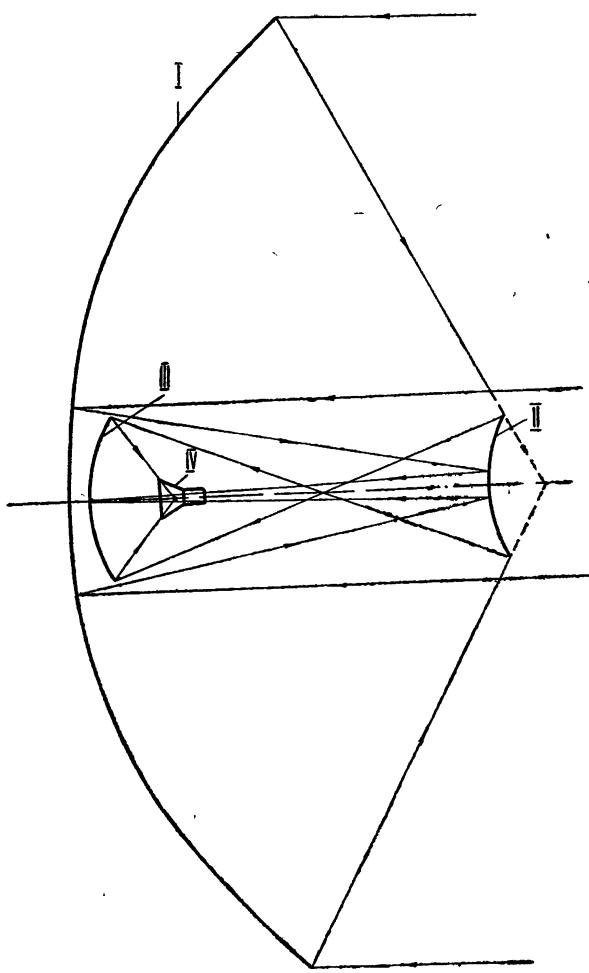


Рис. 6.

на параболическое зеркало I, преобразуется с помощью этого зеркала и двух малых переотражающих зеркал II и III в сферическую волну и принимается облучателем IV.

Зеркала II и III рассчитываются по заданному распределению поля в раскрыве и заданной диаграмме облучателя IV. Поверхности зеркал находятся путем решения дифференциальных уравнений типа (7); необходимое для составления дифференциальных уравнений соотношение между углами φ и β находится из уравнения энергетического баланса:

$$\int_0^\varphi P(\varphi) \sin \varphi d\varphi = C \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{g^2(y)}{(1 + \cos \beta)^2} \sin \beta d\beta, \quad (12)$$

где $P(\varphi)$ и $g(y)$ — функции, описывающие диаграмму облучателя и распределение поля в раскрыве. Для того, чтобы можно было применять методы геометрической оптики, надо убедиться, что на раскрыве одного малого зеркала, рассматриваемого со стороны второго малого зеркала, укладывается несколько зон Френеля (больше $3 \div 5$). Это обстоятельство при определенном расстоянии между зеркалами II и III накладывает ограничение на минимальные размеры зеркал.

В многофункциональной трехзеркальной антенне диаметром 600λ получена шумовая температура 15°K при коэффициенте использования $K_{\text{и}} = 0,5$. По-видимому, перспективный путь снижения шумовой температуры антенны и одновременного повышения $K_{\text{и}}$ состоит, в частности, в том, чтобы заменить малое зеркало III и облучатель IV рупорно-зеркальной системой, обеспечивающей совместно с зеркалом II максимальный $K_{\text{и}}$ антенны. Следует заметить, что зеркала II и III, если не требуется получения $K_{\text{и,макс}}$, могут быть рассчитаны с точки зрения апраксизма, т. е. обеспечения неискаженного качания луча.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, 667 (1960).
2. Г. З. Айзенберг, Антенны ультракоротких радиоволн, Связьиздат, М., 1957.
3. H. Jasik, A. D. Bresler, Proc. Symp. Denmark, 6, 1167, (1962), Pergamon Press, 1963.
4. D. Schuster, C. T. Stelzried, G. S. Levy, IRE Trans., AP-10, 286 (1962).
5. Л. Д. Бахрах, В. М. Гришина, Доклад на сессии Научно-технического общества радиотехники и электроники им. А. С. Попова, 1958.

Поступила в редакцию
10 ноября 1963 г.

SOME PROBLEMS OF LARGE MIRROR RADIO TELESCOPES DESIGN

L. D. Bakhrakh, K. I. Mogil'nikova

The problems are considered pertaining to the construction of large mirror radio telescopes. The requirements to the radio telescopes antennae operating with low-noise receivers are analyzed. From the point of view of these requirements the usual parabolic antennae are shown to be not optimal. In some cases there is an advisability to use three mirror antennae and modified two mirror ones.

УДК 533.951

О ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЛНАХ В ПЛАЗМЕ, ДРЕЙФУЮЩЕЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. Х. Каменецкая, М. С. Ковнер

В квазигидродинамическом приближении рассматривается распространение волн в дрейфующей магнитоактивной плазме. Число нормальных волн при этом оказывается равным восьми. Исследуются дисперсионные зависимости и обсуждаются полученные результаты.

В работах Унза [1] рассматривалось распространение высокочастотных волн в плазме, дрейфующей в магнитном поле. Им было получено соответствующее дисперсионное уравнение (оно оказалось четвертого порядка), и на его основе решалась задача о возбуждении ультразвукочастотного излучения в верхней атмосфере. Однако при выводе дисперсионного уравнения Унзом были допущены существенные неточности (например, в уравнении движения электронов плазмы он использовал частную производную от скорости по времени $d\mathbf{v}/dt$ вместо полной производной $d\mathbf{v}/dt$, не учитывал изменение концентрации электронов при распространении волн и др.), в силу чего результаты [1] являются ошибочными.

Твисс [2] изучал распространение волн в дрейфующей плазме для частного случая, когда направления распространения, дрейфа и внешнего магнитного поля совпадают, а тепловое движение отсутствует.

В настоящей статье в квазигидродинамическом приближении исследуются нормальные высокочастотные волны в неограниченной квазинейтральной плазме, дрейфующей в постоянном и однородном внешнем магнитном поле \mathbf{H}_0 с постоянной скоростью \mathbf{v}_0 . Направления дрейфа плазмы и распространения волн произвольны. Анализ и интерпретация решения полученного здесь дисперсионного уравнения 8-го порядка является основным содержанием этой работы.

1. ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ И ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Как известно [3], при изучении распространения высокочастотных волн в плазме можно пренебречь движением ионов в поле волны и их тепловым движением. В этом случае исходными будут уравнения электродинамики.

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} e(N_i \mathbf{v}_i - N_e \mathbf{v}_e) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e(N_i - N_e);$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

и уравнение движения электронов

$$m \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}] \right) - m v_{\text{эфф}} \mathbf{v}_e - \frac{T}{N_e} \nabla (N_e + N_i), \quad (1.2)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — самосогласованные электрическое и магнитное поля, N_e и N_i — концентрации электронов и ионов плазмы, \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_i — скорости электронов и ионов, m и $-e$ — соответственно масса и заряд электрона, T — электронная температура в эргах, $v_{\text{эфф}}$ — эффективная частота соударений.

Для нахождения дисперсионного соотношения, т. е. связи между частотой волны ω и волновым вектором \mathbf{k} поступаем обычным образом. Положим, что в лабораторной системе координат, в которой проводится все дальнейшее рассмотрение,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}; \quad \mathbf{v}_i \simeq \mathbf{v}_0; \quad N_e = N_0 + N; \\ N_i &\simeq N_0; \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$|\mathbf{v}| \ll |\mathbf{v}_0|; \quad N \ll N_0; \quad |\mathbf{h}| \ll |\mathbf{H}_0|, \quad (1.4)$$

и линеаризуем уравнения (1.1), (1.2). Затем, считая все возмущения f пропорциональными $e^{i(\omega t - kr)}$, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_1 - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_1) &= i \frac{4\pi}{c^2} e \omega (N_0 \mathbf{v} + N \mathbf{v}_0); \\ N(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0) &= N_0 \mathbf{k}\mathbf{v}; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} im(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 - i v_{\text{эфф}}) \mathbf{v} + e \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}_0] + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{h}] \right) - i \frac{\mathbf{k}TN}{N_0} &= 0; \\ e \left(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_0 \mathbf{H}_0] \right) + m v_{\text{эфф}} \mathbf{v}_0 &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отметим, что постоянное поле \mathbf{E}_0 , необходимое для поддержания дрейфа в магнитном поле, определяется из (1.6). В уравнения (1.5) \mathbf{E}_0 не входит и, следовательно, не влияет на распространение волн. Если дрейф вызван и другими причинами, то наводимое поле \mathbf{E}_0 определяется из соотношений, подобных (1.6).

Выберем систему координат так, чтобы ось z была направлена по волновому вектору \mathbf{k} , а поле \mathbf{H}_0 лежало в плоскости yz . Тогда вектора \mathbf{k} , \mathbf{H}_0 , \mathbf{v}_0 будут иметь следующие компоненты: $\mathbf{k}(0, 0, k)$;

$\mathbf{H}_0(H_{0y}, H_{0z}, 0)$; $\mathbf{v}_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$; на рис. 1 α — угол между \mathbf{H}_0 и \mathbf{k} . Переходя в уравнениях (1.5), (1.6) к проекциям и исключая компоненты вектора \mathbf{v} , находим

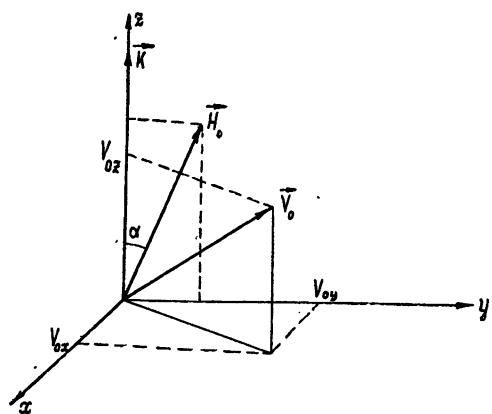


Рис. 1.

$$k^2 E_{1l} - k_l (k E_{1z}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{lj} E_{1j}, \quad (1.7)$$

где $i, j = x, y, z$, а ϵ_{ij} образуют тензор диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 1 - \frac{v}{RQ} \left[PR^2 \left(1 - \frac{n^2 \beta_T^2}{PR} \right) + \frac{n^2 \beta_x^2}{P} (R^2 - u \cos^2 \alpha) \right]; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{v}{RQ} \left[-iPR \sqrt{u} \cos \alpha \left(1 - \frac{n^2 \beta_T^2}{PR} \right) + in \beta_y R \sqrt{u} \sin \alpha + \right. \\ &\quad \left. + n \beta_x u \cos \alpha \sin \alpha - \frac{n^2 \beta_x \beta_y}{P} (R^2 - u \cos^2 \alpha) \right]; \\ \epsilon_{xz} &= \frac{v}{RQ} \left[iR \sqrt{u} \sin \alpha - \frac{n \beta_x}{P} (R^2 - u \cos^2 \alpha) \right]; \\ \epsilon_{yy} &= 1 - \frac{v}{RQ} \left[PR^2 \left(1 - \frac{n^2 \beta_T^2}{PR} \right) - P u \sin^2 \alpha - \right. \\ &\quad \left. - n \beta_y u \sin 2\alpha + \frac{n^2 \beta_y^2}{P} (R^2 - u \cos^2 \alpha) \right]; \\ \epsilon_{yz} &= \frac{v}{RQ} \left[u \cos \alpha \sin \alpha - \frac{n \beta_y}{P} (R^2 - u \cos^2 \alpha) \right]; \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{v(R^2 - u \cos^2 \alpha)}{PQR}; \quad \epsilon_{lk}(H_0) = \epsilon_{kl}(-H_0). \end{aligned} \quad (1.8)$$

В (1.8) введены обозначения

$$\begin{aligned} v &= 4\pi e^2 N/m \omega^2 \equiv \omega_0^2/\omega^2; & u &= e^2 H^2/m^2 c^2 \omega^2 \equiv \omega_H^2/\omega^2; \\ n &= ck/\omega; \quad \beta_i = v_{0i}/c; \quad \beta_T = (T/mc^2)^{1/2} \equiv v_T/c; \\ s &= \nu_{\text{эфф}}/\omega; \quad P = 1 - n \beta_z; \quad R = 1 - n \beta_z - is; \\ Q &= R^2 - u - (n^2 \beta_T^2/PR)(R^2 - u \cos^2 \alpha). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Дисперсионное уравнение для показателя преломления $n = ck/\omega$ определяется из условия существования нетривиального решения однородной системы (1.7):

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - n^2 & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} - n^2 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.10)$$

Раскрывая определитель (1.10), получим

$$\begin{aligned} n^4 \left[1 - \frac{v(R^2 - u \cos^2 \alpha)}{PQR} \right] - n^2 \left\{ 2 - \frac{2v}{Q} (PR - v - n^2 \beta_T^2) + \right. \\ \left. + \frac{v}{PQR} \left[-(R^2 - u \cos^2 \alpha)(2 + n^2 \beta_T^2) + P^2 u \sin^2 \alpha - P n \beta_y u \sin 2\alpha \right] \right\} + \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}
 & + 1 + \frac{2v}{Q} (-PR + n^2 \beta_T^2) + \frac{v}{PQR} [-(R^2 - u \cos^2 \alpha) (1 + n^2 \beta_{\perp}^2) + \\
 & + P^2 u \sin^2 \alpha + Pn \beta_y u \sin 2\alpha] + (v^2/Q) \left(P^2 - n^2 \beta_T^2 (P/R) + \right. \\
 & \left. + n^2 \beta_{\perp}^2 + 2 \right) - v^3 P/QR = 0,
 \end{aligned}$$

где $\beta_{\perp}^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2$.

Уравнение (1.11) очень громоздко, и в дальнейшем мы не будем учитывать соударений ($s = 0$). Полагая, кроме того,

$$P = 1 - n \beta_z \neq 0; \quad (1.12)$$

$$Q = P^2 - u - n^2 \beta_z^2 (P^2 - u \cos^2 \alpha)/P^2 \neq 0,$$

получим из (1.11)

$$\begin{aligned}
 & n^8 \beta_z^2 (\beta_z^2 - \beta_T^2) + 2n^7 \beta_z (\beta_T^2 - 2\beta_z^2) + n^6 [\beta_z^2 (6 - u - v) - \\
 & - \beta_T^2 (1 - u \cos^2 \alpha)] + 2n^5 \beta_z (u + v - 2) + n^4 (1 - u - v + uv \cos^2 \alpha) + \\
 & + n^3 [2\beta_z (4 - 2u - 6v + uv \sin^2 \alpha + 2v^2) - uv \beta_y \sin 2\alpha] - \\
 & - n^2 [2(1 - v)^2 - 2u + uv(1 + \cos^2 \alpha)] + n [2\beta_z (u + 5v - 4v^2 + v^3 + \\
 & + uv \sin^2 \alpha - 2) + uv \beta_y \sin^2 \alpha] + (1 - v) [(1 - v)^2 - u] + \\
 & + O(n^6 \beta^4, n^5 \beta^3, n^4 \beta^2, n^3 \beta^3, n^2 \beta^2) = 0.
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

При $\beta = 0$ последнее уравнение переходит в дисперсионное соотношение для неподвижной плазмы [3].

2. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Как известно, в неподвижной плазме при учете пространственной дисперсии высокочастотные волны описываются кубическим уравнением по n^2 , что, очевидно, отражает равноправность волн с противоположными направлениями распространения. В холодной же плазме существуют четыре поперечные волны (дисперсионное уравнение — квадратное по n^2).

Дисперсионное соотношение (1.13) даже без учета теплового движения — восьмого порядка относительно показателя преломления n , поэтому появляются четыре новых решения. Последнее связано с тем, что в лабораторной системе координат собственные колебания магнитоактивной плазмы воспринимаются как волны. В следующем разделе мы остановимся на этом более подробно.

При нерелятивистском дрейфе плазмы, когда

$$\beta = \frac{v_0}{c} \ll 1, \quad (2.1)$$

довольно легко отыскать приближенные решения уравнения (1.13). Действительно, вследствие неравенства (2.1) в широком диапазоне значений параметров плазмы корни соотношения (1.13) распадаются на две группы n_{1-4} и n_{5-8} . Первые из них n_{1-4} близки к известным решениям, получающимся в случае $\beta = 0$ [3], вторая группа корней n_{5-8} — новые решения, и они удовлетворяют условию

$$n_{5-8} \gg n_{1-4}. \quad (2.2)$$

Для нахождения n_{5-8} в силу (2.2) сохраним в (1.13) слагаемые с n в четвертой — восьмой степенях. После сокращения на n^4 , не учитывая пока теплового движения, получаем

$$(n\beta_z - 1)^4 - (u + v)(n\beta_z - 1)^2 + uv \cos^2\alpha = 0 \quad (2.3)$$

или

$$n_{5-8} = \beta_z^{-1} \left[1 \pm \left(\frac{u+v}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(u+v)^2 - 4uv \cos^2\alpha} \right)^{1/2} \right]. \quad (2.4)$$

Корни же n_{1-4} определяются выражениями

$$n_{1-4} = \pm \left[1 - \frac{2v(1-v)}{2(1-v) - u \sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4\alpha + 4u(1-v)^2 \cos^2\alpha}} \right]^{1/2}. \quad (2.5)$$

Групповая скорость волн n_{5-8} определяется из (2.4) и равна

$$v_{\text{grp } 5-8} = \frac{c}{n_{5-8} + \omega \partial n_{5-8} / \partial \omega} = v_{0z}. \quad (2.6)$$

Последний результат фактически означает, что наблюдаемые волны обязаны своим происхождением увлечению колебаний дрейфующей плазмой.

Учет теплового движения усложняет решение уравнения (1.13), поэтому рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Пусть направления распространения волны \mathbf{k} , скорости потока \mathbf{v}_0 и внешнего магнитного поля \mathbf{H}_0 совпадают: $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{H}_0$. Тогда из (1.8) и (1.10) следует, что дисперсионное уравнение распадается на два: для поперечных волн

$$n^3 \beta - n^2(1 \pm \sqrt{u}) - n\beta(1-v) + 1-v \pm \sqrt{u} = 0 \quad (2.7)$$

и для продольных волн

$$n^2(\beta^2 - \beta_T^2) - 2n\beta + 1 - v = 0. \quad (2.8)$$

Из последних соотношений видно, что тепловое движение оказывается лишь на распространении продольных волн. Приближенное решение уравнений (2.7) таково:

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= \pm \sqrt{1 - \frac{v}{1 - \sqrt{u}}} - \beta \frac{v\sqrt{u}}{2(1 - \sqrt{u})^2}; \\ n_{3,4} &= \pm \sqrt{1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u}}} + \beta \frac{v\sqrt{u}}{2(1 + \sqrt{u})^2}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$n_5 = \frac{1 + \sqrt{u}}{\beta} + \beta \frac{v\sqrt{u}}{(1 + \sqrt{u})^2}; \quad n_6 = \frac{1 - \sqrt{u}}{\beta} + \beta \frac{v\sqrt{u}}{(1 - \sqrt{u})^2},$$

что совпадает с результатами, полученными в [2]. Корни уравнения (2.8)

$$n_{7,8} = \frac{\beta \pm [\beta^2 v + \beta_T^2(1-v)]^{1/2}}{\beta^2 - \beta_T^2}. \quad (2.10)$$

При $\beta \rightarrow 0$ они описывают плазменные волны $n_{7,8} = \pm (1-v)^{1/2}/\beta_T$. Если же $\beta \neq 0$, а $\beta_T \rightarrow 0$, то $n_{7,8} = (1 \pm \sqrt{v})/\beta$. Отметим, что при $\alpha=0$ (2.10) являются точными решениями уравнения (1.10) вне зависимости

от выполнения (2.2). Ход дисперсионных кривых $n_{1-8}(v)$ при $\alpha = 0$, $u < 1$, $\beta_z \neq 0$, $\beta_T^2 = 0$ изображен на рис. 2.

2) Рассмотрим другой случай, когда \mathbf{k} и \mathbf{v}_0 совпадают по направлению, а $\mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k}$, \mathbf{v}_0 . Из (1.8) и (1.10) видно, что при $\alpha = \pi/2$ дисперсионное соотношение также разделяется на два. В результате находим, что имеются две волны, в которых вектор \mathbf{E} параллелен полю \mathbf{H}_0 , т. е. направлен по оси y (E_y -волны, см. рис. 1). Для них

$$n_{1,2} = \pm \sqrt{1 - v}, \quad (2.11)$$

что физически ясно, так как здесь магнитное поле и дрейф не влияют на движение зарядов в y -направлении. У четырех других волн вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости xz , перпендикулярной к полю \mathbf{H}_0 (волны эллиптически поляризованы — E_{xz} -волны).

Для этих волн показатели преломления находятся из уравнения

$$(n^2 - 1 + v) [(1 - n\beta)^2 - u - v - n^2\beta_T^2] + uv = 0 \quad (2.12)$$

и соответственно равны

$$n_{3,4} = \sqrt{1 - \frac{v(1-v)}{1-u-v}} + O(\beta); \quad (2.13)$$

$$n_{5,6} \approx \pm \frac{\beta \pm \sqrt{(u+v)(\beta^2 - \beta_T^2) + \beta_T^2}}{\beta^2 - \beta_T^2}.$$

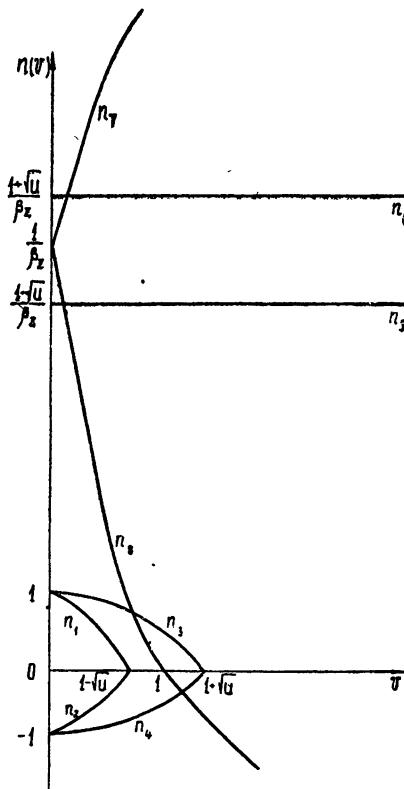


Рис. 2.

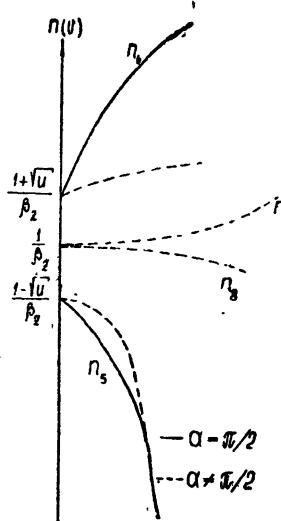


Рис. 3.

При $\beta \rightarrow 0$ показатели преломления $n_{5,6}$ соответствуют плазменным

волнам. Если в качестве исходного выбрать не уравнение (1.10), а (1.13), то кроме решений (2.11), (2.13) будут еще два одинаковых корня $n=1/\beta_z$, но они должны быть отброшены в силу условия (1.12). Заметим, что корень (2.11) является точным и остается таковым, даже если скорость потока направлена под произвольным углом к H_0 (а $\mathbf{k} \perp H_0$).

Дисперсионные кривые $n_{5,6}$ при $u < 1$, $\beta_z = 0$, $\beta_T^2 = 0$ представлены на рис. 3.

При распространении волн перпендикулярно к направлению дрейфа ($\mathbf{k} \perp \mathbf{v}_0$) дисперсионное соотношение (1.13) становится уравнением 6-го порядка относительно показателя преломления n , если учитывать тепловое движение, и 4-го порядка, если плазму считать холодной. Получаемые при этом решения незначительно отличаются от результатов, известных для неподвижной плазмы, что очевидно, так как дрейф, нормальный к направлению распространения, не деформирует поле волны.

3) Наконец, рассмотрим переход к изотропной плазме. В соотношениях (1.8) положим $u = 0$, а координатную плоскость yz возьмем так, чтобы вектор \mathbf{v}_0 лежал в ней. В этом случае существует шесть нормальных волн. У двух из них вектор напряженности поля E направлен вдоль оси x , а показатели преломления равны

$$n_{1,2} = \pm \sqrt{1-v}; \quad (2.14)$$

остальные волны линейно поляризованы в плоскости yz . Показатели преломления этих волн определяются дисперсионным уравнением

$$(n^2 - 1 + v) [(1 - n\beta_z)^2 - v - n^2 \beta_T^2] + n^2 v \beta_\perp^2 = 0. \quad (2.15)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} n_{3,4} &= \pm \frac{1-v}{(1-v+v\beta_\perp^2)^{1/2}}; \\ n_{5,6} &= \frac{\beta_z \pm [\beta_z^2 - (\beta_z^2 - \beta_T^2)(1-v)]^{1/2}}{\beta_z^2 - \beta_T^2}; \end{aligned} \quad (2.16)$$

3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследованное в разделе 2 дисперсионное уравнение (1.13) может быть получено и другим способом. Для этого надо рассмотреть распространение волн в сопровождающей системе координат, а затем перейти к величинам, воспринимаемым наблюдателем в неподвижной системе. Такие вычисления были проделаны; результаты, естественно, совпадают, но расчеты оказываются более громоздкими.

Выяснение природы дополнительных волн удобно провести, совершая обратный переход от лабораторной к сопровождающей системе. Согласно обычным формулам преобразования частоты (см., например, [4]), четырем медленным волнам в системе координат, дрейфующей вместе с плазмой, соответствуют частоты

$$\omega' = \frac{\omega [1 - \beta_z n_{5-8}(\omega)]}{(1 - \beta^2)^{1/2}}. \quad (3.1)$$

Подставляя сюда значение показателя преломления из (2.4) и учитывая условие (2.1), находим, что

$$\omega' = \pm \left(\frac{\omega_0^2 + \omega_H^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_0^2 + \omega_H^2)^2}{4} - \omega_0^2 \omega_H^2 \cos^2 \alpha} \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Выражение (3.2), как известно, определяет частоты плазменных колебаний в холодной неподвижной плазме [3]: два колебания с одной частотой и два колебания — с другой. В частности, при $\alpha = \pi/2$, т. е. когда $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0$, в сопровождающей системе координат существуют фактически только два колебания с частотами $\omega' = \pm \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$. Как было показано в разделе 2, в лабораторной системе этому случаю соответствуют две медленные волны с показателями преломления $n = (1 \pm \sqrt{u+v})/\beta_z$, а два других корня оказались лишними (так как они не удовлетворяют условию (1.12)).

Если же $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}_0$, то в дрейфующей системе есть два колебания с ленгмюровской частотой и два колебания с гирочастотой. В неподвижной системе первым соответствуют волны с показателями преломления $n = (1 \pm \sqrt{v})/\beta_z$, не зависящими от магнитного поля, а вторым — с показателями $n = (1 \pm \sqrt{u})/\beta_z$, не зависящими от концентрации плазмы.

При учете пространственной дисперсии в сопровождающей системе вместо колебаний с частотами (3.2) появляются четыре плазменные волны. Действительно, из (1.3) в случае $\beta = 0$ находим, что для медленных волн [3] квадрат показателя преломления

$$n^2 = \frac{1 - u - v + uv \cos^2 \alpha}{(1 - u \cos^2 \alpha) \beta_T^2}. \quad (3.3)$$

Отсюда частоты плазменных волн

$$\begin{aligned} \omega'_{1,2} &= \left\{ \frac{\omega_H^2 + \omega_0^2 + k^2 v_T^2}{2} \right. \\ &\quad \left. \pm \left[\frac{(\omega_H^2 + \omega_0^2 + k^2 v_T^2)^2}{4} - \omega_H^2 (\omega_0^2 + k^2 v_T^2) \cos^2 \alpha \right] \right\}^{1/2}, \\ \omega'_{3,4} &= -\omega'_{1,2}; \end{aligned} \quad (3.4)$$

соответствующие им групповые скорости равны

$$\begin{aligned} v_{rp1,2} &= \frac{kv_T^2}{2\omega_{1,2}} \left\{ 1 \pm \frac{1}{2} \left[\frac{(\omega_H^2 + \omega_0^2 + k^2 v_T^2)^2}{4} - \omega_H^2 (\omega_0^2 + k^2 v_T^2) \cos^2 \alpha \right]^{-1/2} \times \right. \\ &\quad \left. \times [\omega_H^2 (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + \omega_0^2 + k^2 v_T^2] \right\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$v_{rp3,4} = -v_{rp1,2}.$$

Формулы (3.4), (3.5) показывают, что две плазменные волны распространяются в положительном направлении оси z с одинаковыми фазовыми, но с разными групповыми скоростями, а две другие плазменные волны идут в противоположном направлении. Дрейф же приводит к различию не только групповых, но и фазовых скоростей.

Наконец, отметим, что переход от соотношений (3.4), (3.5) к фазовой и групповой скоростям в лабораторной системе координат позволяет найти точное решение уравнения (1.13).

Авторы благодарны Б. Н. Гершману и В. Л. Гинзбургу за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Unz IRE, Trans. and Prop., AP-10, 459 (1963); J. Atm. Terr. Phys., 24, 765 (1962); J. Atm. Terr. Phys., 24, 685 (1962).
2. R. Q. Twiss, Phys. Rev., 84, 448 (1951).
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
4. М. А. Тоннела, Основы электромагнетизма и теории относительности, ИЛ, М., 1962.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 ноября 1963 г.

**ON THE HIGH-FREQUENCY WAVES IN PLASMA DRIFTING
IN A MAGNETIC FIELD**

G. Kh. Kamenetskaya, M. S. Kovner

In a quasi-hydrodynamic approximation the propagation of waves is considered in a drifting magneto-active plasma. In this case the number of normal waves turns out to be equal to 8. The dispersion characteristics are investigated and the results obtained are discussed.

УДК 533.951

О ТЕНЗОРЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин

Получено выражение для тензора эффективной диэлектрической проницаемости слабонеоднородной магнитоактивной плазмы. Конкретный расчет проведен для случая, когда размеры неоднородностей малы по сравнению с длиной волны распространяющегося излучения.

Известно, что для описания среднего поля в случайно неоднородной среде удобно использовать эффективную диэлектрическую проницаемость. Для статического поля выражение для $\epsilon_{\text{ст}}^{\text{эфф}}$ имеется в [1], § 9. В работе [2] было найдено значение $\epsilon_{\text{ст}}^{\text{эфф}}(\omega)$ в слабонеоднородной изотропной среде. В дальнейшем в ряде статей [3—5] были сделаны различные обобщения результатов работы [2]. В работе [5] рассмотрены сильные флюктуации коэффициента преломления.

В настоящей статье получено выражение для тензора эффективной диэлектрической проницаемости слабонеоднородной магнитоактивной плазмы. Неоднородности электронной концентрации считаются заданными. Рассматривается однородное случайное поле флюктуаций электронной плотности. Будем исходить из уравнения для электрического поля:

$$\Delta E_i - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} E_j + k_0^2 \epsilon_{ij} E_j = 0, \quad (1)$$

где $k_0 = \omega/c$, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \Delta\epsilon_{ij}$. Здесь ϵ_{ij}^0 — среднее значение тензора диэлектрической проницаемости, а $\Delta\epsilon_{ij}$ — флюктуационное отклонение, обусловленное неоднородностями электронной концентрации.

В системе координат с осью z , направленной вдоль постоянного магнитного поля H , тензор ϵ_{ij}^0 имеет вид

$$\epsilon_{ij}^0 = \begin{vmatrix} \epsilon & -ig & 0 \\ ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Величины ϵ , η , g можно найти в [6]. Электрическое поле E_i в неоднородной среде представим в виде

$$E_i = \bar{E}_i + e_i, \quad (3)$$

где \bar{E}_i — среднее значение электрического поля, e_i — флюктуационное отклонение поля от среднего значения (поле рассеяния).

Усредняя уравнение (1) по ансамблю неоднородностей электронной плотности, получаем уравнение для среднего поля:

$$\Delta \bar{E}_i - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \bar{E}_j + k_0^2 \epsilon_{ij}^0 \bar{E}_j + k_0^2 \overline{\Delta \epsilon_{ij} e_j} = 0. \quad (4)$$

Эффективная диэлектрическая проницаемость определяет среднюю электрическую индукцию \bar{D}_i через среднее поле \bar{E}_i и находится, в соответствии с (4), из следующего соотношения:

$$\bar{D}_i = \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}} \bar{E}_j = \epsilon_{ij}^0 \bar{E}_j + \overline{\Delta \epsilon_{ij} e_j}. \quad (5)$$

Величина $\hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}$ является, вообще говоря, интегральным оператором, который для слабонеоднородной среды* является линейным. Мы видим, что уравнение для среднего поля в неоднородной среде совпадает с уравнением для поля в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\hat{\epsilon}_{ij}(\omega) = \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{эфф}}(\omega)$. Это обстоятельство может быть успешно использовано в ряде задач электродинамики неоднородных сред (см., например, [7]).

Уравнение для флюктуаций поля получается после вычитания уравнения (4) из уравнения (1):

$$\Delta e_i - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} e_j + k_0^2 \epsilon_{ij}^0 e_j = -k_0^2 \overline{\Delta \epsilon_{ij} E_j}. \quad (6)$$

При получении этого уравнения мы пренебрегли членом $k_0^2 (\Delta \epsilon_{ij} e_j - \overline{\Delta \epsilon_{ij} e_j})$, который является малым в слабонеоднородной среде.

Таким образом, для решения задачи об эффективной диэлектрической проницаемости в магнитоактивной плазме необходимо располагать решением задачи об излучении источников в анизотропной среде. Для наших целей наиболее удобной является форма решения этой задачи, развитая в работе [8]. Согласно [8], решение уравнения (6) записывается в виде

$$e_j(r) = \frac{1}{2} e_{ka\beta} e_{jm} D_{am} D_{\beta n} \Pi_k, \quad (7)$$

где $e_{ka\beta}$ — абсолютно антисимметричный единичный тензор ($e_{123} = 1$),

$$D_{am} = \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_m} - \nabla^2 \delta_{am} - k_0^2 \epsilon_{am};$$

$$\Pi_k = k_0^2 \int I_0(r - r_1) \Delta e_{kp}(r_1) \bar{E}_p(r_1) dr_1; \quad (8)$$

$$I_0(r - r_1) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{ik(r-r_1)}}{\Delta(k)} dk.$$

Детерминант матрицы $k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - k_0^2 \epsilon_{ij}$ может быть записан в виде

$$\Delta(k) = -k_0^2 N(\theta) (k^2 - k_1^2) (k^2 - k_2^2), \quad (9)$$

где

$$N(\theta) = (\eta \cos^2 \theta + \epsilon \sin^2 \theta), \quad k_1 = \frac{\omega}{c} n_1(\theta),$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c} n_2(\theta)$$

* Слабонеоднородной средой мы называем среду, в которой малы относительные флюктуации диэлектрической проницаемости.

($n_1(\theta)$, $n_2(\theta)$ — показатели преломления для необыкновенной и обыкновенной волн). Подставляя выражение (7) и (8) в формулу (5), получаем

$$\bar{D}_l = \epsilon_{ij}^0 \bar{E}_j + \frac{k_0^2}{2} e_{k\alpha\beta} e_{lmn} \int \overline{\Delta \epsilon_{ij}(r) \Delta \epsilon_{kp}(r_1)} D_{\alpha m} D_{\beta n} \bar{E}_p(r_1) \times \\ \times I_0(r - r_1) dr_1. \quad (10)$$

Из формулы (10) может быть найдено общее выражение для $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega, k)$. Мы ограничимся случаем, когда поле медленно меняется на расстояниях порядка радиуса корреляции неоднородностей $\Delta \epsilon_{ij}(r)$. Это приближение соответствует пренебрежению явлением пространственной дисперсии, обусловленным неоднородностями среды; оно справедливо при условии $k_1 l, k_2 l \ll 1$ (l — радиус корреляции флюктуаций ΔN)*.

В этом случае поле E в (10) можно вынести за знак интегрирования, и оператор $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega)$ вырождается в тензор

$$\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}(\omega) = \epsilon_{ij}^0(\omega) + \Lambda_{ij}(\omega); \\ \Lambda_{ij} = \frac{k_0^2}{2} e_{k\alpha\beta} e_{pmn} (\delta_{ip} - \delta_{lp}) (\delta_{kj} - \delta_{ki}) \frac{\overline{\Delta N^2}}{N_0^2} \times \\ \times \int \Gamma_N(r - r_1) D_{\alpha m} D_{\beta n} I_0(r - r_1) dr_1, \quad (11)$$

где $\Gamma_N(r - r_1)$ — функция корреляции однородного поля флюктуаций плотности электронов, δ_{ij} — символ Кронекера. В случае изотропных флюктуаций ΔN тензор Λ_{ij} имеет вид

* Учет нелокального характера связи между \bar{D} и \bar{E} , вызванного рассеянием поля на неоднородностях среды, приводит к появлению пространственной дисперсии, благодаря чему даже в изотропной случайной неоднородной среде эффективная диэлектрическая проницаемость среды является тензором и имеет вид

$$\epsilon_{ij}(\omega, k) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \epsilon_{\text{эфф}}^{\text{tr}}(\omega, k) + \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k).$$

В случае, когда $|k_0 \sqrt{\epsilon(\omega)} l| \ll 1$ и $|kl| \ll 1$, продольная и поперечная проницаемости равны соответственно

$$\epsilon_{\text{эфф}}^l(\omega, k) = \bar{\epsilon}(\omega) - \frac{1}{3} \frac{\overline{\Delta \epsilon^2}}{\bar{\epsilon}} + \frac{2}{3} a_1 (k_0 l)^2 \frac{\overline{\Delta \epsilon^2}}{\bar{\epsilon}} - \frac{2a_1}{15} \frac{\overline{\Delta \epsilon^2}}{\bar{\epsilon}} (kl)^2 + \\ + i \frac{2a_2 \overline{\Delta \epsilon^2}}{3} (\bar{\epsilon})^{1/2} (k_0 l)^3;$$

$$\epsilon_{\text{эфф}}^{\text{tr}}(\omega, k) = \bar{\epsilon} - \frac{1}{3} \frac{\overline{\Delta \epsilon^2}}{\bar{\epsilon}} + \frac{2a_1}{3} \frac{\overline{\Delta \epsilon^2}}{\bar{\epsilon}} (k_0 l)^2 + \frac{a_1}{15} \frac{\overline{\Delta \epsilon^2}}{\bar{\epsilon}} (kl)^2 + \\ + i \frac{2a_2 \overline{\Delta \epsilon^2}}{3} (\bar{\epsilon})^{1/2} (k_0 l)^3,$$

a_1 и a_2 — числа порядка единицы. Эти формулы, как показывают оценки, справедливы при $\overline{\Delta \epsilon^2}/\bar{\epsilon}^2 \ll 1$.

$$\Lambda_{ij} = \begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & 0 \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{33} \end{vmatrix}, \quad (12)$$

где $\Lambda_{11} = \Lambda_{22}$, $\Lambda_{12} = -\Lambda_{21}$, т. е. он обладает симметрией, характерной для среднего тензора $\epsilon_{ij}^{\text{ср}}$.

В рассматриваемом приближении результаты фактически не зависят от конкретного вида функции корреляции $\Gamma_N(r)$. Для простоты будем считать, что $\Gamma_N(r) = e^{-r/l^2}$. Процесс вычисления компонент Λ_{ij} довольно громоздок. Часть интегралов, получающихся в (11), вычисляются в конечном виде, а другие приводятся к интегралу, исследованному

Фоком: $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\beta-x} dx$, где в нашем случае $\beta = k_0 l \sqrt{2} n_{1,2}(0)$. При $\beta \ll 1$

$J \approx -i\pi$. Окончательно тензор $\epsilon_{ij}^{\text{ср}\Phi\Phi}$ имеет вид

$$\epsilon_{ij}^{\text{ср}\Phi\Phi} = \begin{vmatrix} \epsilon^{\Phi\Phi} & -ig^{\Phi\Phi} & 0 \\ ig^{\Phi\Phi} & \epsilon^{\Phi\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & \eta^{\Phi\Phi} \end{vmatrix}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \epsilon^{\Phi\Phi} &= \epsilon + A_1 (k_0 l)^2 + iC_1 (k_0 l)^3 + iC'_1 (k_0 l)^3; \\ \eta^{\Phi\Phi} &= \eta + A_2 + B_2 (k_0 l)^2 + iC_2 (k_0 l)^3 + iC'_2 (k_0 l)^3; \\ g^{\Phi\Phi} &= g + A_3 + B_3 (k_0 l)^3 + iC_3 (k_0 l)^3 + iC'_3 (k_0 l)^3. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — поляризационные члены, не зависящие от l (см. [1]):

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\overline{\Delta N^2}}{2N_0^2} [(\epsilon - 1)^2 + g^2] \left[\frac{\eta}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon}{\eta - \epsilon} \right)^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\eta - \epsilon}{\epsilon}} - \frac{1}{\eta - \epsilon} \right]; \\ A_2 &= -\frac{\overline{\Delta N^2}}{N_0^2} (\eta - 1)^2 \left[\frac{1}{\eta - \epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\epsilon}{\eta - \epsilon} \right)^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\eta - \epsilon}{\epsilon}} \right]; \\ A_3 &= -\frac{\overline{\Delta N^2}}{N_0^2} g (\epsilon - 1) \left[\frac{\eta}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon}{\eta - \epsilon} \right)^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\eta - \epsilon}{\epsilon}} - \frac{1}{\eta - \epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты B_1, B_2, B_3 имеют довольно громоздкий вид, и мы их записывать не будем.

Дело в том, что при выполнении неравенства $k_0 l \ll 1$ члены $B_i (k_0 l)^3$ значительно меньше поляризационных добавок A_i . В то же время малые члены, пропорциональные $(k_0 l)^3$, в ряде случаев необходимо учитывать, поскольку они описывают затухание среднего поля из-за рассеяния.

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 , отвечающие затуханию среднего поля за счет рассеяния в необыкновенную волну, записываются в виде

$$C_1 = -\frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{\overline{\Delta N^2}}{N_0^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta) (n_1^2 - n_2^2)} \{ [(\epsilon - 1)^2 + g^2] n_1^5 \sin^2 \theta -$$

$$-[2\epsilon(\epsilon-1)^2 \sin^2 \theta + \eta(\epsilon-1)^2(1+\cos^2 \theta) - 4g^2(\epsilon-1)\sin^2 \theta + \\ + 2\epsilon g^2 \sin^2 \theta - \eta g^2(1+\cos^2 \theta)] n_1^3 + [2\epsilon\eta(\epsilon-1)^2 - 4\eta g^2(\epsilon-1) + \\ + 2\epsilon\eta g^2] n_1];$$

$$C_2 = -(\eta-1)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\overline{\Delta N^2}}{N_0^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta)(n_1^2 - n_2^2)} \{ n_1^5 \cos^2 \theta - \\ - \epsilon(1+\cos^2 \theta) n_1^3 + (\epsilon^2 - g^2) n_1 \}; \quad (16)$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} g \frac{\overline{\Delta N^2}}{N_0^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta d\theta}{N(\theta)(n_1^2 - n_2^2)} \{ (\epsilon-1) n_1^5 \sin^2 \theta - \\ - [(\epsilon^2 - g^2 - 1) \sin^2 \theta + (\epsilon-1) \eta(1+\cos^2 \theta)] n_1^3 + \eta(\epsilon^2 - g^2 - 1) n_1 \}.$$

Коэффициенты C'_1, C'_2, C'_3 , отвечающие рассеянию в обыкновенную волну, получаются из C_1, C_2, C_3 взаимной заменой $n_1 \leftrightarrow n_2$. Дальнейшее интегрирование в общем виде затруднительно ввиду сложности функций $n_1(\theta)$ и $n_2(\theta)$. Заметим, что при стремлении постоянного магнитного поля H к нулю, выражения (14) переходят в соответствующую формулу для $\epsilon^{\text{эфф}}$, полученную в работе [2].

Здесь необходимо также сделать следующие замечания относительно применимости выражений (14). Рассматриваемое приближение справедливо при $k_0 n_1(\theta) l \ll 1$ и $k_0 n_2(\theta) l \ll 1$. Однако на частотах, определяемых уравнением $N(\omega, \theta) = 0$ [6], n_1 и $n_2 \rightarrow \infty$ и указанные условия не могут быть выполнены ни при каких l . Поэтому на частотах, при которых возможен плазменный резонанс, выражения (14) нельзя считать справедливыми. Если, например, $\omega_0 < \omega_H$, то выражения (14) верны лишь для $\omega > \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$, а также при $\omega_0 < \omega < \omega_H$. В случае $\omega_0 > \omega_H$ формулы (14) справедливы по-прежнему при $\omega > \omega_p$, а также в интервале частот $\omega_H < \omega < \omega_0$. Эти же выводы можно получить и формально, рассматривая выражения (15) и (16). Если $\omega_0 < \omega_H$, то коэффициенты A_1, A_2, A_3 при $\omega_H < \omega < \omega_p$ и $\omega < \omega_0$ становятся комплексными, что указывает на появление затухания, не связанного с рассеянием в обыкновенную или необыкновенную волну. В коэффициентах C_1, C_2, C_3 при этом вообще подынтегральные выражения содержат неинтегрируемые особенности, связанные с плазменным резонансом. В случае $\omega_0 > \omega_H$ эти замечания относятся к промежуткам $[0, \omega_H]$ и $[\omega_0, \omega_p]$, в которых возможен плазменный резонанс.

В заключение рассмотрим частный случай слабой гиротропии ($u = \omega_H^2/\omega^2 \ll 1$). При этом выражения для компонент тензора $\epsilon_{ij}^{\text{эфф}}$ существенно упрощаются, если ограничиться лишь членами, линейными по $\sqrt{u} = \omega_H/\omega$. В этом случае коэффициенты A_l и C_l приближенно равны:

$$A_1 = A_2 \simeq -\frac{1}{3} \frac{(\Delta\eta)^2}{\eta}; \quad A_3 \simeq -\frac{2}{3} \frac{(\Delta\eta)^2}{\eta} \frac{g}{\eta-1}; \quad (17)$$

$$C_1 + C'_1 = C_2 + C'_2 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6} \frac{(\Delta\eta^2)}{(\Delta\eta)} \eta^{1/2}; \quad (18)$$

$$C_3 + C'_3 \approx \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{(\Delta g \Delta \eta)}{\eta} \left(\frac{5}{3} \eta + 1 \right) \eta^{1/2}.$$

Из (18) видно, что $(C_1 + C'_1)$, $(C_2 + C'_2) \gg (C_3 + C'_3)$; поэтому ослабление среднего поля из-за рассеяния определяется в основном коэффициентами $(C_1 + C'_1)$ и $(C_2 + C'_2)$, имеющими такой же вид, как для случая изотропной среды [2]. Следовательно, при $\omega_H/\omega \ll 1$ анизотропия плазмы практически не влияет на процессы рассеяния, что согласуется с выводами работы [9].

Авторы выражают благодарность Б. Н. Гершману и Н. Г. Денисову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1957.
2. Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 827 (1959).
3. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 1015 (1959).
4. Ф. Г. Басс, С. Я. Брауде, Э. А. Канер, А. В. Мень, УФН, 73, 89 (1961).
5. В. И. Татарский, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 44, 676 (1963).
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
7. В. В. Тамойкин, С. Б. Бирагов, ЖЭТФ, 44, 1544 (1963).
8. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 32, 338 (1957).
9. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 393 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 января 1964 г.

CONCERNING THE TENSOR OF THE EFFECTIVE PERMITIVITY OF NONHOMOGENEOUS MAGNETO-ACTIVE PLASMA

Yu. A. Ryzhov, V. V. Tamoikin

The expression has been obtained for the tensor of an effective permittivity of weakly nonhomogeneous magneto-active plasma. The definite calculation has been carried out for the case when the dimensions of homogeneities are small as compared to the wavelength.

УДК 533.951

О ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

B. B. Арсенин

Исходя из найденного ранее [1] тензора диэлектрической проницаемости разреженной плазмы с произвольной степенью неоднородности, получено уравнение для потенциальных колебаний такой плазмы. Показано, что коротковолновые возмущения в разреженной плазме являются потенциальными. Рассмотрены колебания сильно неоднородной плазмы с частотами порядка ионной гироочастоты.

1. В ряде работ [2–7] рассматривалось распространение электромагнитных возмущений в слабо неоднородной разреженной плазме, помещенной в магнитное поле. Оказалось, что в такой плазме существуют неустойчивые решения, обусловленные анизотропией функций распределения частиц. Представляет интерес рассмотрение электромагнитных колебаний и в более общем случае, включающем более сильную неоднородность плазмы, когда характерный размер неоднородности может быть не только много больше, но и сравним с ларморовским радиусом ионов. Употребляемый ниже для краткости термин «сильно неоднородная плазма» имеет именно такой смысл. В настоящей работе мы рассмотрим потенциальные колебания плазмы и покажем, что некоторые результаты, полученные для слабо неоднородной плазмы, остаются справедливыми и для сильно неоднородной нейтральной плазмы (см. ниже).

Будем исходить из системы уравнений, состоящей из линеаризованных кинетических уравнений с самосогласованным полем для электронов и ионов и уравнений Максвелла для поля. Столкновениями пренебрежем. Пусть ось z декартовой системы координат направлена вдоль внешнего магнитного поля H_0 , а невозмущенная плотность частиц зависит от координаты x . Полагая отношение $\beta = \frac{8\pi N(T_i + T_e)}{H_0^2}$

(N — плотность плазмы, T_i и T_e — температуры ионов и электронов в энергетических единицах) малым, возьмем в качестве невозмущенной функции распределения частиц j -го сорта следующую функцию интегралов движения:

$$f_{0j} = N_0 \left(\frac{\alpha_j^2}{\pi} \right)^{3/2} \exp \left[-\alpha_j^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] \Phi_j \left[\alpha_j |\omega_j| \left(x + \frac{v_y}{\omega_j} \right) \right], \quad (1)$$

где N_0 — величина размерности плотности, $\alpha_j^2 = m_j/2T_j$, m_j — масса частиц, $\omega_j = e_j H_0/m_j c$ — их гирочастота, Φ_j — ограниченная положительная функция, характеризующая неоднородность. Она представляет собой плотность распределения центров ларморовских орбит частиц. Такой выбор невозмущенных функций распределения предполагает нейтральность плазмы (т. е. отсутствие разделения зарядов), так что фурье-компоненты функций Φ_e и Φ_i связаны условием

$$R_e \varphi_e(kR_e) \exp(-k^2 R_e^2/4) = R_i \varphi_i(kR_i) \exp(-k^2 R_i^2/4), \quad (2)$$

где $R_{e,i} = \frac{1}{|\omega_{e,i} \alpha_{e,i}|}$ — средние лармировские радиусы электронов и ионов, φ_e и φ_i — фурье-изображения функций Φ_e и Φ_i . При этом ионы и электроны в области неоднородности несут токи, пропорциональные температурам (в частности, при $T_e = T_i$, эти токи просто равны).

Наряду с «квазимаксвелловскими» функциями распределения (1) можно было бы рассмотреть и другие функции интегралов движения, для которых выполнено условие нейтральности. Для этого необходимо, чтобы «тепловой» разброс ионных лармировских радиусов был больше среднего лармировского радиуса электронов. Тогда при произвольном выборе распределения Φ_i (плотности центров), плотность самих ионов будет плавной функцией координаты. Поэтому наше обобщение охватывает не сколь угодно большие градиенты плотности частиц, а лишь градиенты, совместимые с тепловым разбросом частиц по скоростям (для выбранных нами функций — относительные градиенты порядка единицы: $[(R_i/N_0)(dN/dx) \ll 1]$).

Рассмотрим сначала необыкновенную волну, распространяющуюся в направлении, перпендикулярном магнитному полю H_0 . В этой волне отличны от нуля составляющие электрического поля E_x и E_y . Их компоненты Фурье $E_\alpha(k_x, k_y, \omega) = (2\pi)^{-3/2} \int E_\alpha(r, t) e^{-ikr - i\omega t} dr dt$ удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$-k_y^2 E_x - k_x k_y E_y = \frac{\omega^2}{c^2} (\overset{\wedge}{\epsilon}_{xx} E_x + \overset{\wedge}{\epsilon}_{xy} E_y); \quad (3)$$

$$-k_y k_x E_x + k_x^2 E_y = \frac{\omega^2}{c^2} (\overset{\wedge}{\epsilon}_{yx} E_x + \overset{\wedge}{\epsilon}_{yy} E_y), \quad (4)$$

где $\overset{\wedge}{\epsilon}_{\alpha\beta}$ — оператор тензора диэлектрической проницаемости. Его можно найти, определив связанные с волной добавки f_{0i} к невозмущенным функциям распределения f_{0j} и вычислив с их помощью токи, вызываемые полем волны. Как показано в [1], $\overset{\wedge}{\epsilon}_{\alpha\beta}$ является интегральным оператором* и имеет следующий вид:

$$\overset{\wedge}{\epsilon}_{\alpha\beta} E_\beta(k_x, k_y, \omega) = \delta_{\alpha\beta} E_\beta(k_x, k_y, \omega) - \int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha\beta}(k_x, l, k_y, \omega) E_\beta(l, k_y, \omega) dl. \quad (5)$$

Ядро G представляет собой сумму по всем сортам частиц:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{4}{V 2\pi \omega} \sum_j \omega_j^2 R_j \varphi_j [(k_x - l) R_j] \left\{ \left[1 + i \frac{(k_x - l) k_y R_j^2 \omega_j}{2\omega} \right] \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[in \left(\arctg \frac{l}{k_y} - \arctg \frac{k_x}{k_y} \right) \right]}{\omega - n \omega_j} \int_0^{\infty} t e^{-t^2} K_{j\alpha\beta}^{(n)} dt + \right. \quad (6)$$

* После завершения данной работы нам стало известно, что квазиклассические решения интегрального уравнения, описывающего колебания неоднородной плазмы, рассматривались несколькими авторами [8]. В рассматриваемых здесь случаях коротковолновых (длина волн меньше дебаевской) колебаний это уравнение существенно упрощается, так что некоторые выводы о характере спектра можно сделать, не ограничиваясь предположением о квазиклассичности решений.

$$+ \delta_{yy} \frac{(k_x - l)^2 R_j^2}{8\omega} e^{-\frac{(k_x - l)^2 R_j^2}{4}} \Big\},$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} K_{jxx}^{(n)} &= \frac{1}{R_j} \left[\frac{n k_x}{k_x^2 + k_y^2} J_n(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t) - i \frac{\partial}{\partial k_x} J_n(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t) \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{nl}{l^2 + k_y^2} J_n(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t) + i \frac{\partial}{\partial k_y} J_n(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t) \right]; \\ K_{jxy}^{(n)} &= -\frac{i}{R_j} \left[\frac{n k_x}{k_x^2 + k_y^2} J_n(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t) - i \frac{\partial}{\partial k_y} J_n(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t) \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{\partial}{\partial l} J_n(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t) + \frac{ink_y}{l^2 + k_y^2} J_n(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t) \right]; \quad (7) \\ K_{jyx}^{(n)} &= \frac{i}{R_j} \left[\frac{\partial}{\partial k_x} J_n(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t) - \frac{ink_y}{k_x^2 + k_y^2} J_n(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t) \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{nl}{l^2 + k_y^2} J_n(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t) + i \frac{\partial}{\partial k_y} J_n(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t) \right]; \\ K_{jyy}^{(n)} &= \frac{1}{R_j} \left[\frac{\partial}{\partial k_x} J_n(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t) - \frac{ink_y}{k_x^2 + k_y^2} J_n(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t) \right] \times \\ &\quad \times \left[\frac{\partial}{\partial l} J_n(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t) + \frac{ink_y}{l^2 + k_y^2} J_n(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t) \right], \end{aligned}$$

$\omega_{0j} = (4\pi e^2 N_0/m_j)^{1/2}$ — ленгмюровская частота частиц j -го сорта.

Правые части уравнений (3) — (4) имеют порядок β/R_j^2 . Поэтому при решении системы уравнений (3) — (4) в области длин волн $k_y^2 \geq 1/R_j^2$ можно воспользоваться методом последовательных приближений. Разрешая неоднородное интегральное уравнение (3) относительно E_x с точностью до членов первого порядка малости по β включительно и подставляя полученное решение в уравнение (4), получим следующее интегральное уравнение для определения компоненты E_y :

$$\begin{aligned} (k_x^2 + k_y^2) E_y(k_x, k_y, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (k_x l G_{xx} + k_x k_y G_{xy} + \\ &\quad + lk_y G_{yx} + k_y^2 G_{yy}) E_y(l, k_y, \omega) dl. \quad (8) \end{aligned}$$

Выполнив сложение в правой части (8) и воспользовавшись теоремой сложения бесселевых функций

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\psi} J_n(a) J_n(b) = J_0(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \psi})$$

и известным соотношением

$$\int_0^{\infty} te^{-t^2} J_0(st) dt = \frac{1}{2} e^{-s^2/4},$$

получим окончательно уравнение

$$\begin{aligned}
 (k_x^2 + k_y^2) E_y(k_x, k_y, \omega) = \sum_j \frac{4\pi e^2 N_0}{T_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_j \varphi_j [(k_x - l) R_j]}{\sqrt{2\pi}} \times \\
 \times \left[\omega + i \frac{(k_x - l) k_y R_j^2 \omega_j}{2} \right] \left\{ 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[in \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{k_y} - \operatorname{arctg} \frac{k_x}{k_y} \right) \right]}{\omega - n \omega_j} \times \right. \\
 \left. \times \int_0^{\infty} t e^{-t^2} J_n(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t) J_n(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t) dt - e^{-\frac{(k_x - l)^2 R_j^2}{4}} \right\} \times \\
 \times E_y(l, k_y, \omega) dl. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в точности такое же уравнение получится, если исходить из предположения о потенциальности возмущений. Таким образом, в разреженной ($\beta \ll 1$) плазме произвольной степени неоднородности колебания с длинами волн, удовлетворяющими условию $(k_y R_i)^2 \geq 1$, являются потенциальными. Задача об определении частот этих колебаний сводится к задаче о нахождении собственных значений ω уравнения (9).

В качестве примера рассмотрим колебания сильно неоднородной плазмы $\left(\frac{R_i}{N_0} \frac{dN}{dx} \sim 1 \right)$ в области длин волн $1/R_e \gg k_y \gg 1/R_i$ с частотами, сравнимыми с ионной гирочастотой ω_i , но не слишком близкими к ней (или к ее целым кратным значениям). Основным членом в ядре интегрального уравнения (9) будет нулевая гармоника в электронной сумме. Оставляя в правой части (9) только этот член, получим уравнение для определения собственных значений ω :

$$(k_x^2 + k_y^2) E_y(k_x) = - \frac{\omega_i}{2R_D^2 \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i k_y (k_x - l)}{\sqrt{2\pi}} R_i^3 e^{-\frac{(k_x - l)^2 R_i^2}{4}} \varphi_i[(k_x - l) R_i] E_y(l) dl$$

или, переходя к координатному представлению,

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + \left[-k_y^2 - \left(\frac{R_i}{R_D} \right)^2 \frac{k_y \omega_i}{2\omega} \frac{dN}{dx} \right] E_y = 0, \tag{10}$$

где $R_D = \sqrt{T_i / 4\pi e^2 N_0}$ — дебаевский радиус.

Уравнение (10) представляет собой уравнение Шредингера, в котором роль энергии играет величина $(-k_y^2/2)$, а потенциал равен $U(x) = (R_i^2 k_y \omega_i / 4 R_D^2 \omega) dN/dx$; он зависит от параметра ω . Требуется найти те значения ω , при которых величина $(-k_y^2/2)$ является уровнем частицы в потенциальной яме $U(x)$. Эти собственные значения ω образуют дискретный спектр. Наибольшее по модулю значение равно

$$\omega = \frac{-R_i^2 \omega_i}{2 R_D^2 k_y} \left(\frac{dN}{dx} \right)_{\max}. \tag{11}$$

Мы видим, что колебания такого типа существуют лишь при условии $k_y R_i \geq (R_i / R_D)^2$. В слабо неоднородной плазме им соответствуют так называемые дрейфовые волны.

2. Рассмотрим теперь более общий случай потенциальных возмущений, в которых имеется отличная от нуля составляющая волнового вектора вдоль направления внешнего магнитного поля. В этом случае резонансные эффекты могут привести к раскачке колебаний.

Фурье-изображение потенциала ψ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2 + \mathbf{k}_z^2) \psi(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \mathbf{k}_z, \omega) = \sum_j \frac{4\pi e^2 N_0}{T_j} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_j \varphi_j [(k_x - l) R_j]}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\omega + i \frac{(k_x - l) k_y R_j^2 \omega_j}{2} \right] \times \right. \\
 & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_j e^{-a_j^2 v_z^2} dv_z}{\omega + k_z v_z - n \omega_j} \exp \left[i n \left(\operatorname{arctg} \frac{l}{k_y} - \operatorname{arctg} \frac{k_x}{k_y} \right) \right] \times \\
 & \times \int_0^{\infty} t e^{-t^2} J_n \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_j t \right) J_n \left(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_j t \right) dt - \\
 & \left. - e^{-(k_x - l)^2 R_j^2 / 4} \right\} \psi(l, k_y, k_z, \omega) dl. \quad (12)
 \end{aligned}$$

При $k_z \ll \omega_{a_e}$, спектр колебаний не будет существенно отличаться от того, который был получен для чисто поперечного распространения. Рассмотрим далее коротковолновые ($k_y R_i \gg 1$) колебания сильно неоднородной плазмы в области частот $k_z/a_e \gg \omega \gg k_z/a_i$. Если при этом выполнено еще и условие $\sqrt{m_e T_i / m_i T_e} k_y / k_z \ll 1$, то электронные члены в (12) малы по сравнению с ионными, и их надо учитывать лишь при вычислении мнимой добавки к частоте ω . В ионных же членах в ядре уравнения (12) антиэрмитовы части можно опустить как экспоненциально малые.

Рассмотрим колебания с частотами, близкими к нулю или к целым кратным ионной гирочастоты: $|\omega - m \omega_i| \ll \omega_i$, $m = 0, \pm 1, \pm \dots$ Оставляя в сумме по n в правой части уравнения (12) только m -ю гармонику, приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
 \xi(k_x) &= \frac{k_y R_i \omega_i}{\omega - m \omega_i} \frac{1}{R_D^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i R_i^2 (k_x - l) \varphi_l [(k_x - l) R_i]}{\sqrt{2\pi} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} (l^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}} \times \\
 &\times \int_0^{\infty} t e^{-t^2} J_m \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_i t \right) J_m \left(\sqrt{l^2 + k_y^2} R_i t \right) dt \xi(l) dl, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned}
 \xi &= (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} e^{-im \operatorname{arctg} \frac{k_x}{k_y}} \psi, \\
 m \ll k_y R_i.
 \end{aligned}$$

Формально уравнение (13), как уравнение типа Фредгольма с симметричным ядром, имеет бесконечно много собственных значений ω . Однако исходное предположение накладывает на частоты ограничение $|\omega - m \omega_i| \gg k_z/a_i$. Мы видим, что при фиксированном m каждому

волновому числу k_y отвечает несколько колебаний с частотами, близкими к $m\omega_i$. К этому результату можно прийти лишь при последовательном учете неоднородности плазмы, т. е. при учете зависимости потенциала от координаты x . Рассмотрение, основанное на упрощенном подходе [7], когда зависимостью потенциала от x пренебрегается, привело бы к однозначной зависимости частоты от волнового вектора k_y .

Легко видеть, что при учете электронного члена в (12) найденные собственные значения ω приобретают отрицательные мнимые добавки. Таким образом, в сильно неоднородной плазме коротковолновые потенциальные колебания с частотами, близкими к $m\omega_i$ ($m = 0, \pm 1, \dots$), неустойчивы. Как известно [7], в слабо неоднородной плазме такие колебания также неустойчивы.

3. Обратимся теперь к колебаниям с частотами порядка ионной гирочастоты ω_i , но не близкими ни к одному из ее обертонаов. Мы покажем, что в сильно неоднородной плазме, в которой плотность частиц как функция координаты x имеет достаточно глубокий минимум, существуют колебания с частотой, примерно равной половине гирочастоты ионов. Пусть функция Φ_i (а вместе с ней и плотность плазмы) имеет в точке $x = 0$ минимум шириной порядка ларморовского радиуса ионов. Сделаем предположение (подтверждаемое результатом), что колебания локализованы в области $|x| < R_i$. В этой области функцию $\Phi_i(s)$ можно представить в виде $\Phi_i = a + bs^2$; ее фурье-изображение $\varphi_i = \sqrt{2\pi}[a\delta(s) - b\delta''(s)]$. Подставив это выражение в уравнение (12), в котором мы пренебрели электронными членами, выполнив интегрирование по l и опустив малые члены порядка $1/k_y R_i$, приходим к дифференциальному уравнению второго порядка для фурье-изображения потенциала ψ :

$$\begin{aligned} & \frac{b}{R_i^2} \frac{d^2 \psi}{dk_x^2} - i \frac{\omega_i}{\omega} k_y F(\omega, \sqrt{k_x^2 + k_y^2}) \frac{d\psi}{dk_x} + \\ & + \left[b \frac{k_y^2}{k_y^2 + k_x^2} - a - \frac{b}{2} - R_D^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \right] \psi = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$F(\omega, \sqrt{k_x^2 + k_y^2}) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{n\omega_i - \omega} \int_0^{\infty} t e^{-rt} J_n^2(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} R_i t) dt.$$

При $\omega = \omega_i/2$ значение функции $F(\omega, \sqrt{k_x^2 + k_y^2})$ равно нулю с точностью до членов порядка $1/(k_y R_i)^3$. Найдем волновые числа k_y , отвечающие частоте колебаний $\omega_i/2$. Задача сводится к определению собственных значений k_y^2 уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2 \psi}{dk_x^2} + 2(E - U)\psi = 0, \quad (15)$$

где

$$E = -\frac{R_i^2}{2} \left[\frac{a}{b} + \frac{1}{2} + \frac{R_D^2}{b} (k_y^2 + k_z^2) \right];$$

$$U = \frac{R_i^2}{2} \left[\frac{R_D^2}{b} k_x^2 - \frac{k_y^2}{k_y^2 + k_x^2} \right].$$

При $a < b/2$ уравнение (15) имеет исчезающие на бесконечности решения. Отвечающие им собственные значения

$$k_y^2 \simeq -k_z^2 + \frac{1}{R_D^2} \left[\frac{b}{2} - a - 2b \frac{R_D}{R_i} \sqrt{\frac{(3/2)b-a}{b(b/2-a)}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \\ (n=0, 1, \dots; n \ll k_y R_i).$$

Мы полагаем здесь, что дебаевский радиус меньше лармировского: $R_D^2/R_i^2 \ll 1$. При этом в координатном представлении соответствующие решения локализованы в области ширины порядка $\sqrt{R_i R_D} < R_i$ — в полном соответствии с исходным предположением.

Автор благодарен В. И. Когану за обсуждения и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Арсенин, Ядерный синтез, 3, 190 (1963).
2. Л. И. Рудаков, Р. З. Сагдеев, ДАН СССР, 138, 581 (1961).
3. М. Н. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker, Ядерный синтез, Дополнение 1962, ч. 1, 143.
4. Б. Б. Кадомцев, А. В. Тимофеев, ДАН СССР, 146, 581 (1962).
5. N. A. Krall, M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids, 5, 1435 (1962).
6. А. Б. Михайловский, Л. И. Рудаков, ЖЭТФ, 44, 912 (1963).
7. А. Б. Михайловский, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ, 44, 919 (1963).
8. А. А. Галеев, ДАН СССР, 150, 503 (1963); Л. М. Коврижных, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ЖЭТФ, 44, 1953 (1963).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию

ON THE POTENTIAL OSCILLATIONS OF STRONGLY NONHOMOGENEOUS RAREFIED PLASMA

V. V. Arsenin

Using the tensor [1] of the dielectric permittivity of the rarefied plasma with an arbitrary nonhomogeneous structure the equation has been obtained for the potential oscillations. The shortwave perturbations of the rarefied plasma are shown to be potential. The oscillations have been considered of strongly nonhomogeneous plasma with the frequencies equaled to the ionic gyrofrequency.

УДК 539.124 · 534.1

МЕХАНИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ, ГРАНИЧАЩЕЙ С ВАКУУМОМ. I

C. Калисский

Рассмотрено черенковское излучение в идеально проводящей упругой среде, заполняющей полупространство, граничащее с вакуумом при действии на поверхности среды подвижной силы (в случае, когда внешнее постоянное магнитное поле перпендикулярно плоскости движения).

Определены конусы черенковского излучения при сверхмагнитозвуковой и межмагнитозвуковой скоростях; найдена интенсивность излучения без учета дисперсии. Показано, что в случае сверхмагнитозвуковой скорости перед фронтами конусов распространения механического и электромагнитного возмущений существует возмущение стационарного характера.

В работах [1,2] мы рассмотрели черенковское излучение в бесконечной, идеально проводящей упругой среде движущегося источника в присутствии магнитного поля. В [1] рассмотрен случай изотропно действующего, в [2] — анизотропно действующего поля. Показано, что при скорости выше магнитозвуковой существуют два конуса черенковского излучения, при межмагнитозвуковой — один. В случае анизотропно действующего магнитного поля для $H = H_1$ существует так называемая область квазимагнитозвуковой скорости, характеризуемая двумя конусами излучения; у одного угол раствора по отношению к направлению движения силы меньше $\pi/2$, у другого — больше $\pi/2$.

Решение проведено для плоского случая (линейно расположенные источники) с помощью метода характеристик и без учета дисперсии материальных постоянных. Показано, что электромагнитная часть черенковского излучения обладает значительной интенсивностью.

В [3] изучена аналогичная проблема для упругого диэлектрика (в предшествующих работах рассмотрена также диэлектрическая жидкость), где существует три конуса черенковского излучения. В идеальном проводнике третий конус, связанный со скоростью света в среде, отсутствует.

Целью настоящей работы является исследование проблемы, аналогичной [1,2], но для случая идеального упругого проводника, занимающего полупространство, которое граничит с вакуумом. Источник излучения (сила) равномерно движется по поверхности раздела, электромагнитная энергия излучается в вакуум (ср. с [4] для случая волн Релея).

В настоящей работе I мы ограничимся случаем ориентации магнитного поля перпендикулярно плоскости движения; исследование задачи для других направлений постоянного поля мы отложим до статьи II. Для случая поля перпендикулярного плоскости движения (изотропное действие поля) задача значительно упрощается. Как и в работах [1,2], пре-небрегаем дисперсией, что позволяет применить метод характеристик. Учет дисперсии требует специального рассмотрения.

В первом разделе этой статьи приведены исходные уравнения и граничные условия. В третьем и четвертом поставленная задача решается при сверхмагнитозвуковой и межмагнитозвуковой скоростях перемещения силы соответственно. Подробная библиография вопроса Черенковского излучения дана в [5,6].

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Согласно [1], линеаризованные уравнения движения идеально проводящего упругого тела в стороннем однородном магнитном поле после пренебрежения токами смещения имеют вид

$$a_2^2 \nabla^2 u + (a_1^2 - a_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu}{4\pi\rho} [\operatorname{rot} \operatorname{rot} (u \times H)] \times \times H + P_1 = 0, \quad (1.1)$$

где H — вектор стороннего магнитного поля, $a_1 = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$ — скорость продольных упругих волн, $a_2 = \sqrt{G/\rho}$ — скорость поперечных упругих волн, ρP_1 — вектор поля объемных сил. Векторы возмущенного электромагнитного поля выражаются через вектор перемещений по формулам:

$$E = -\frac{\mu}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times H \right); \quad h = \operatorname{rot} (u \times H). \quad (1.2)$$

Уравнения поля в вакууме имеют вид

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (E^*, h^*) = 0. \quad (1.3)$$

При этом

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E^*}{\partial t} = \operatorname{rot} h^*; \quad \operatorname{rot} E^* = -\frac{1}{c} \frac{\partial h^*}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Границные условия на границе раздела (рис. 1) следующие (для $x_3 = 0$):

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{3}\bar{i}} + T_{\bar{3}\bar{i}} - T_{\bar{3}\bar{i}}^* &= -P \delta(x_1 + v_0 \bar{t}) \delta(y_1) \delta_{\bar{3}\bar{i}} \quad (\bar{i} = 1, 2, 3); \\ \mu (H_{\bar{3}} + h_{\bar{3}}) &= H_{\bar{3}}^* + h_{\bar{3}}^*; \\ E_{\bar{1}} &= E_{\bar{1}}^* + \frac{\mu - 1}{c} H_{\bar{2}} u_{\bar{3}, \bar{t}}; \\ E_{\bar{2}} &= E_{\bar{2}}^* - \frac{\mu - 1}{c} H_{\bar{1}} u_{\bar{3}, \bar{t}}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $T_{\bar{i}\bar{k}}$; $T_{\bar{i}\bar{k}}^*$ — тензоры Максвелла в среде и вакууме:

$$\begin{aligned} T_{\bar{3}\bar{i}} &= \frac{\mu}{4\pi} (H_{\bar{3}} h_{\bar{i}} + H_{\bar{i}} h_{\bar{3}} - H h \delta_{\bar{3}\bar{i}}); \\ T_{\bar{3}\bar{i}}^* &= \frac{1}{4\pi} (H_{\bar{3}} h_{\bar{i}}^* + H_{\bar{i}} h_{\bar{3}}^* - H h^* \delta_{\bar{3}\bar{i}}); \end{aligned} \quad (1.6)$$

$T_{\bar{3}\bar{1}}^*$ получаем из $T_{\bar{3}\bar{1}}$, заменяя $h_{\bar{1}}$ на $h_{\bar{1}}^*$ и полагая $\mu = 1$. Выражая $h_{\bar{1}}$ через u , получим

$$\begin{aligned} T_{\bar{3}\bar{1}} &= \frac{\mu}{4\pi} [H_{\bar{3}}^2 u_{\bar{1},\bar{3}} + H_{\bar{1}}^2 u_{\bar{3},\bar{1}} - H_{\bar{1}} H_{\bar{2}} (u_{\bar{1},\bar{1}} + u_{\bar{3},\bar{3}})]; \\ T_{\bar{3}\bar{2}} &= \frac{\mu}{4\pi} [H_{\bar{1}} H_{\bar{2}} u_{\bar{3},\bar{1}} - H_{\bar{2}} H_{\bar{3}} (2u_{\bar{1},\bar{1}} + u_{\bar{3},\bar{3}})]; \\ T_{\bar{3}\bar{3}} &= \frac{\mu}{4\pi} [H_{\bar{1}}^2 u_{\bar{3},\bar{3}} + H_{\bar{2}}^2 (u_{\bar{1},\bar{1}} + u_{\bar{3},\bar{3}}) - H_{\bar{3}}^2 u_{\bar{1},\bar{1}} + \\ &\quad + H_{\bar{1}} H_{\bar{3}} (u_{\bar{3},\bar{1}} - u_{\bar{1},\bar{3}})]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для плоской задачи и для выбранного направления поля число граничных условий (1.5) сокращается. В дальнейшем будем пренебрегать

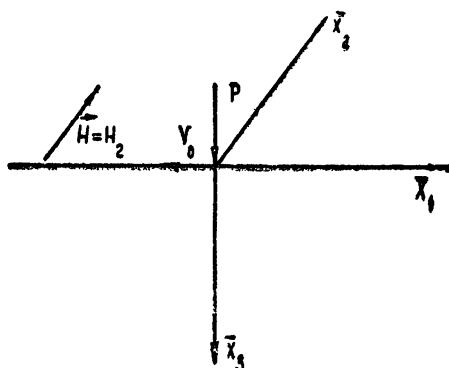


Рис. 1.

объемными силами P_1 , оставляя только, как это сделано в (1.5), подвижную силу $P_3 = P$, линейно разложенную вдоль оси x_2 , т. е. будем считать, что нет зависимости от x_2 . Для упрощений расчетов положим $\mu \approx 1$. Тогда для случая изотропно действующего поля, т. е. для $H = H_2 = H$, векторное уравнение (1.1) перейдет в следующее:

$$a_2^2 \nabla^2 u + (a_1^{*2} - a_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.8)$$

где $a_1^{*2} = a_1^2 + v^2$, $v = \sqrt{\mu H^2 / 4\pi\rho}$ — скорость Альфвена. Для $x_3 = 0$ и $\mu \approx 1$

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{3}\bar{3}} + T_{\bar{3}\bar{3}} - T_{\bar{3}\bar{3}}^* &= \lambda^* (u_{\bar{1},\bar{1}} + u_{\bar{3},\bar{3}}) + 2Gu_{\bar{3},\bar{3}} + \\ &+ \frac{H}{4\pi\rho} h_{\bar{2}}^* = -P\delta(\bar{x}_1 + v_0 \bar{t}); \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\sigma_{\bar{3}\bar{1}} + T_{\bar{3}\bar{1}} - T_{\bar{3}\bar{1}}^* = u_{\bar{1},\bar{3}} + u_{\bar{3},\bar{1}} = 0;$$

$$E_{\bar{1}} = \frac{H}{c} \frac{\partial u_{\bar{3}}}{\partial \bar{t}} = E_{\bar{1}}^* \text{ или } -\frac{H}{c^2} \frac{\partial^2 u_{\bar{3}}}{\partial \bar{t}^2} = h_{\bar{2},\bar{3}}^*.$$

Вводя затем, как и в [1], потенциал

$$u_{\bar{1}} = \Phi_{\bar{1}} + \Psi_{\bar{1}}, \quad u_{\bar{3}} = \Phi_{\bar{3}} - \Psi_{\bar{1}}, \quad (1.10)$$

сведем систему уравнений (1.9) к двум волновым уравнениям:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{a_1^{*2}} \Phi, \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{a_2^2} \Psi. \quad (1.11)$$

Введем систему координат, связанную с силой, движущейся со скоростью v_0 в направлении оси — x_1 :

$$x_1 = \bar{x}_1 + v_0 \bar{t}, \quad x_3 = \bar{x}_3, \quad t = \bar{t}. \quad (1.12)$$

Будем считать, что движение происходит достаточно долго для того, чтобы поле можно было считать стационарным по отношению к наблюдателю, связанному с подвижной системой координат. В этом случае получаем

$$\Phi_{,33} - a_1^2 \Phi_{,11} = 0, \quad \Psi_{,33} - a_2^2 \Psi_{,11} = 0, \quad (1.13)$$

где

$$a_1^2 = \frac{v_0^2}{a_1^{*2}} - 1, \quad a_2^2 = \frac{v_0^2}{a_2^2} - 1. \quad (1.14)$$

В этих уравнениях отброшены производные по t вследствие условия стационарности.

Границные условия (1.9) сохраняют свой вид и в новых координатах — производные по \bar{x}_1, \bar{x}_3 переходят в производные по x_1, x_3 , производная $\frac{\partial}{\partial t}$ переходит в $v_0 \frac{\partial}{\partial x_1}$. Аналогично уравнения (1.3) и равенства (1.4) переходят в следующие:

$$F_{,33} + a_0^2 F_{,11} = 0; \quad F = E^*; h^*, \quad (1.15)$$

где $a_0^2 = 1 - v_0^2/c^2$,

$$\frac{v_0}{c} \frac{\partial E^*}{\partial x_1} = \text{rot } h^*, \quad \text{rot } E^* = - \frac{v_0}{c} \frac{\partial h^*}{\partial x_1}. \quad (1.16)$$

Аналогично (1.2) переходят в соотношения

$$E = - \frac{v_0}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \times H \right), \quad h = \text{rot} (u \times H). \quad (1.17)$$

Для $a_1 > 0, a_2 > 0$, т. е. для сверхмагнитозвуковой скорости, существует два конуса черенковского излучения; для $a_1 < 0, a_2 > 0$ (межмагнитозвуковая скорость) существует один конус. Когда $a_1 < 0, a_2 < 0$, черенковского излучения нет. В разделах 3 и 4 будут рассмотрены случаи: $a_1 > 0, a_2 > 0$ и $a_1 < 0, a_2 > 0$. Заметим еще, что полученные в настоящей работе решения отличаются от полученных в [1]. Это объясняется тем, что при $v_0 > a_1^*$ (конечно, в нерелятивистском приближении) уравнения (1.15) для вакуума станут эллиптическими, тогда как уравнения для потенциалов Φ и Ψ будут гиперболическими. Это приводит к существованию возмущения вне конусов черенковского излучения, занимающего все полупространство и опережающего фронты конусов, если принять допущение о стационарности.

2. СВЕРХМАГНИТОЗВУКОВАЯ СКОРОСТЬ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СИЛЫ

В случае сверхмагнитозвуковой скорости перемещения силы по поверхности полупространства, т. е. для $v_0 > a_1^*$ будет $a_1 > 0, a_2 > 0$. Решение уравнений (1.13) будем искать в виде

$$\Phi = \Phi(x_1 - a_1 x_3); \quad \Psi = \Psi(x_1 - a_2 x_3). \quad (2.1)$$

Используя второе из граничных условий (1.9), получаем

$$(2\Phi_{,13} + \Psi_{,33} - \Psi_{,11})_{x_3=0} = 0, \quad (2.2)$$

откуда

$$\Phi'' = -\frac{1 - \alpha_2^2}{2\alpha_1} \Psi'', \quad (2.3)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по аргументу. Решение для h_2^* получим, решая задачу Неймана для верхнего полупространства, т. е. решая уравнение (1.15) с третьим из граничных условий (1.9). Пользуясь интегралом Пуассона, можем написать это решение с точностью до произвольной постоянной (см. работу [3]):

$$h_2^*(x_1, x_3) = -\frac{Hv_0^2}{\pi c^2} \int dx_3 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{3,11}(\xi, 0) \frac{x_3 \alpha_0}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} d\xi + C_0(x_1). \quad (2.4)$$

Из условий на бесконечности можно показать, что $C_0(x_1) = 0$. Используя первое из граничных условий (1.9), находим

$$\begin{aligned} \lambda^* \nabla^2 \Phi + 2G(\Phi_{,33} - \Psi_{,13}) - \frac{H^2 v_0^2}{4\pi^2 \rho c^2} \int dx_3 \int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_{,113}(\xi, 0) - \Psi_{,111}(\xi, 0)] \times \\ \times \frac{x_3 \alpha_0 d\xi}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} = -P \delta(x_1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Запись производных в вышенаписанных уравнениях означает, что после выполнения дифференцирования по соответствующим переменным надо положить $x_3 = 0$. После учета (2.3) получаем из (2.5)

$$\begin{aligned} \left[2G\alpha_2 - G\alpha_1(1 - \alpha_2^2) - \lambda^* \frac{1 - \alpha_2^2}{2\alpha_1} (1 + \alpha_1^2) \right] \Psi'' + \\ + \frac{H^2 v_0^2}{4\pi^2 \rho c^2} \frac{1 + \alpha_2^2}{2} \int dx_3 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi'''(\xi) \frac{x_3 \alpha_0 d\xi}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} = -P \delta(x_1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \Psi'' = R; \quad -\lambda^* (1 + \alpha_1^2) \frac{1 - \alpha_2^2}{2\alpha_1} + 2G\alpha_2 - G\alpha_1(1 - \alpha_2^2) = v; \\ -\frac{H^2 v_0^2}{4\pi^2 \rho c^2} \left(\frac{1 + \alpha_2^2}{2} \right) = x_1, \end{aligned} \quad (2.7)$$

можно уравнение (2.3) переписать в виде

$$vR - x_1 \left\{ \int dx_3 \int_{-\infty}^{+\infty} R'(\xi) \frac{\alpha_0 x_3}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} d\xi \right\}_{x_3=0} = -P \delta(x_1). \quad (2.8)$$

Преобразуем интеграл в уравнении (2.8), интегрируя по частям:

$$vR - x_1 \left\{ \int dx_3 \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) \frac{2\alpha_0 x_3 (\xi - x_1)}{[(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2]^2} d\xi \right\}_{x_3=0} = -P \delta(x_1) \quad (2.9)$$

или после изменения порядка интегрирования

$$\nu R + \frac{x_1}{\alpha_0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) \frac{\xi - x_1}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} d\xi \right\}_{x_3=0} = -P\delta(x_1). \quad (2.10)$$

Для решения уравнения (2.6) преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \nu R + \frac{x_1}{\alpha_0} & \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} R(\xi) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi - x_1 + i\alpha_0 x_3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\xi - x_1 - i\alpha_0 x_3} \right) d\xi \right\}_{x_3=0} = -P\delta(x_1), \end{aligned} \quad (2.11)$$

причем интеграл в (2.11) следует понимать в смысле главного значения.

Представим в уравнении (2.11) $\delta(x_1)$ в виде непрерывной функции, зависящей от параметра:

$$\delta(x_1) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x_1^2 + \alpha^2}. \quad (2.12)$$

Тогда можно показать, что при $\alpha \neq 0$ $R(\xi)$ удовлетворяет условиям Хольдера. Используя теорему о граничных значениях интегралов Коши, переходим в уравнении (2.11) к $x_3 = 0$:

$$\nu R + \frac{x_1}{\alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi - x_1} d\xi = - \left| \frac{P}{\pi} \frac{\alpha}{x_1^2 + \alpha^2} \right|. \quad (2.13)$$

После решения уравнения (2.13) надо перейти к $\alpha = 0$, это и будет решением нашей задачи. Применим к уравнению (2.13) преобразование Гильберта, которое обозначим через L :

$$\nu L R(x_1) - \frac{x_1}{\alpha_0} \pi R(x_1) = \frac{P}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha^2}. \quad (2.14)$$

Так как, согласно (2.13),

$$L R = -\frac{\alpha_0}{x_1 \pi} \left(\nu R + \frac{P}{\pi} \frac{\alpha}{x_1^2 + \alpha^2} \right), \quad (2.15)$$

из (2.14) получаем искомое решение:

$$R(x_1) = -\frac{P}{\alpha_0 \nu^2 / x_1 + x_1 \pi^2 / \alpha_0} \left(\frac{x_1}{x_1^2 + \alpha^2} + \frac{\alpha_0 \nu}{x_1 \pi} \frac{\alpha}{x_1^2 + \alpha^2} \right). \quad (2.16)$$

Переходя к $\alpha = 0$, найдем

$$R(x_1) = -\frac{P}{\alpha_0 \nu^2 / x_1 + x_1 \pi^2 / \alpha_0} \left[\frac{1}{x_1} + \frac{\alpha_0 \nu}{x_1} \delta(x_1) \right]. \quad (2.17)$$

Заметим, что приближенное решение для функции $R(x_1)$ можно найти значительно проще, так как в третьем граничном условии (1.9) можно из-за малости H/c^2 положить левую часть равной нулю. Тогда

в первом приближении можно считать $h_2^* = 0$, и из двух первых граничных условий найти u_1 и u_3 . Затем, найдя h_2^* из третьего граничного условия (1.9), можно искать следующие поправки к u_1 и u_3 , снова пользуясь первыми двумя граничными условиями (1.9). Когда нас не интересует поле, излученное в вакуум, можно вообще пренебречь этим взаимодействием. Тогда задача сводится к задаче классической теории упругости [7].

На основе решения (2.17) и равенств (2.3), (2.7) окончательно находим

$$u_1 = \frac{P}{\alpha_0 v^2/x_1 + x_1 \pi^2/\alpha_0} \left\{ -\frac{1 - \alpha_2^2}{2\alpha_1} \left[\frac{\alpha_0 v}{x_1} H(x_1 - \alpha_1 x_3) + \ln |x_1 - \alpha_1 x_3| \right] + \right. \\ \left. + \alpha_2 \left[\frac{\alpha_0 v}{x_1} H(x_1 - \alpha_2 x_3) + \ln |x_1 - \alpha_2 x_3| \right] \right\}; \quad (2.18)$$

$$u_3 = -\frac{P}{\alpha_0 v^2/x_1 + x_1 \pi^2/\alpha_0} \left\{ \frac{1 - \alpha_2^2}{2} \left[\frac{\alpha_0 v}{x_1} H(x_1 - \alpha_1 x_3) + \ln |x_1 - \alpha_1 x_3| \right] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_0 v}{x_1} H(x_1 - \alpha_2 x_3) - \ln |x_1 - \alpha_2 x_3| \right\}; \quad (2.19)$$

$$h_2^* = \frac{4\pi\rho}{H} x_1 \frac{1}{\alpha_0} \frac{P}{\alpha_0 v^2/x_1 + x_1 \pi^2/\alpha_0} \left[\frac{\alpha_0 v}{x_1} \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} - \pi \frac{\alpha_0 x_3}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} \right].$$

Решения (2.18) определены, как уже было сказано, с точностью до постоянной. Вычисленные же на основе (2.18) напряжения и составляющие тензора Максвелла в среде будут уже однозначными.

Функция h_2^* удовлетворяет граничным условиям. Это легко проверить, если при предельном переходе $x_3 \rightarrow 0$ воспользоваться формулой типа (2.12), где вместо α надо поставить $\alpha_0 x_3$.

Имея решение (2.18) и (2.19), вычислим составляющие поля в среде и вакууме по формулам (1.2) и (1.4).

Характерной чертой полученных решений (2.18) и (2.19) является (см. рис. 2) появление как в вакууме, так и в среде возмущения стационарного типа, заполняющего все пространство и опережающего конусы черенковского излучения. Это объясняется тем, что сила, движущаяся со сверхмагнитозвуковой скоростью (это приводит к гиперболичности уравнений для потенциалов Φ и Ψ в среде), движется со скоростью,

меньшей скорости распространения возмущений в вакууме (это приводит к эллиптичности уравнений для поля в вакууме). Поле, возбуждаемое в среде, постоянно излучается через границу в вакуум и, опережая движущуюся силу, заполняет вакуум. В свою очередь, это возмущение проникает обратно в среду, так что через достаточно большой промежуток времени, требуемый для установления стационарного режима, поле будет заполнять все пространство. Величины этих возмущений стационарного типа очень незначительны (порядка $(v^2/c^2)H^2$).

Интенсивности черенковского излучения в идеальном проводнике значительны; порядки величин даны в [1] и [2]. Если $H = 0$, отпадает связь

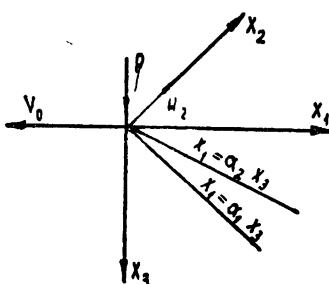


Рис. 2.

с электромагнитным полем, и получается решение классической задачи теории упругости [7].

Из решения следует, что при контакте двух сред и скорости возбуждающей силы, большей скорости распространения возмущений в одной среде и меньшей, чем в другой, в первой среде возникнут возмущения стационарного типа, опережающие фронты черенковских конусов.

Напомним еще об одном методе решения нашей краевой задачи. А именно, если принять временно, что $-\alpha_0^2 = \alpha_0^{*2} > 0$, это уравнение в вакууме тоже станет гиперболическим ($v_0 > c$). Это, конечно, формальный прием, лишенный физического смысла. Тогда решение можно искать в виде (2.1) и в виде

$$h_2^* = \varphi(x_1 + \alpha_0^* x_3). \quad (2.20)$$

Сделав в граничных условиях (1.9) указанные замены и необходимые преобразования, получаем

$$\Psi'' = R = -P \delta(x_1) \frac{1}{v - x_1 \pi / \alpha_0^*}. \quad (2.21)$$

Производя в полученном результате обратную замену $\alpha_0^* = i\alpha_0$ и применяя метод аналитического продолжения (ср. раздел 3), находим после выделения действительной части решение

$$R = -\frac{P}{\alpha_0 v^2 / x_1 + x_1 \pi^2 / \alpha_0} \left[\frac{1}{x_1} + \frac{\alpha_0 v}{x_1} \delta(x_1) \right], \quad (2.22)$$

которое совпадает с (3.17).

Остальные величины находятся по-старому. Указанный способ чрезвычайно прост и быстрее приводит к цели, особенно в более сложных краевых задачах.

3. МЕЖМАГНИТОЗВУКОВАЯ СКОРОСТЬ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СИЛЫ

В случае межмагнитозвуковой скорости перемещения силы ($\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_0 > 0$) в проводящей среде появляется только один конус черенковского излучения. Обозначим $-\alpha_1^2 = \beta_1^2 > 0$, $\beta_1 > 0$. Уравнения (1.13) перейдут тогда в следующие:

$$\begin{aligned} \Phi_{,33} + \beta_1^2 \Phi_{,11} &= 0; \\ \Psi_{,33} - \alpha_2^2 \Psi_{,11} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Границные условия (1.9) и уравнения (1.15) остаются в силе. Решения для функции Ψ будем искать в виде

$$\Psi = \Psi(x_1 - \alpha_2 x_3). \quad (3.2)$$

Чтобы решить эллиптическое уравнение для Φ , введем комплексную переменную:

$$\xi = x_1 + i\beta_1 x_3 = re^{i\varphi}, \quad (3.3)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \beta_1^2 x_3^2}$, $\varphi = \arctg(\beta_1 x_3 / x_1)$.

Искомая функция $\Phi(\xi) = \bar{\Phi} + i\bar{\Phi}^*$ ($\bar{\Phi}^*$ гармонически сопряжена с $\bar{\Phi}$) будет определена из граничных условий. Подставляя $\Phi(\xi)$ и (3.2) в граничные условия, исключая Ψ и решая интегральное уравнение для

Φ (ср. [1]), получаем искомое решение. Однако эту процедуру можно упростить, используя результаты предыдущего раздела и применяя метод аналитического продолжения. Для этого надо заменить в (2.18) и (2.19) α_1 через $i\beta_1$ и $H(x_1 - \alpha_2 x_3)$ через соответствующее аналитическое продолжение

$$H(x_1 + i\beta_1 x_3) = \frac{i}{\pi} \ln r + 1 - \frac{\varphi}{\pi} = \frac{i}{\pi} \ln \xi + 1. \quad (3.4)$$

Затем, продолжив аналитически остальные функции, выделим в окончательном результате действительную часть. Это и будет решением нашей задачи для случая межмагнитозвуковой скорости перемещения силы. Тот же самый результат, конечно, получится, если аналитически продолжить функцию Φ , а остальные функции определить из граничных условий. Равенство (3.4), которое определяет $H(\xi)$, переходит на границе ($x_3 = 0$) в функцию Хевисайда.

Легко показать, что построенное таким образом решение удовлетворяет уравнениям и граничным условиям задачи. Проделаем в (2.18) и (2.19) указанные выше замены. Входящие в них параметры примут следующий вид:

$$v = r_1 + ir_2,$$

где

$$\begin{aligned} r_2 &= \left[\lambda^* (\beta_1^2 - 1) \frac{1 - \alpha_2^2}{2\beta_1} + G (1 - \alpha_2^2) \beta_1 \right]; \\ r_1 &= 2G\alpha_2; \\ \frac{P}{\alpha_0 v^2/x_1 + x_1 \pi^2/\alpha_0} &= s_1 + is_2; \\ s_1 &= \frac{P\alpha_0(r_1^2 - r_2^2)x_1^{-1} + x_1\pi^2\alpha_0^{-1}}{[\alpha_0 x^{-1}(r_1^2 - r_2^2) + x_1\pi^2/\alpha_0]^2 + 4r_1^2 r_2^2 \alpha_0^2 x_1^{-2}}; \\ s_2 &= -\frac{2P\alpha_0 x^{-1} r_1 r_2}{[\alpha_0 x^{-1}(r_1^2 - r_2^2) + x_1\pi^2/\alpha_0]^2 + 4r_1^2 r_2^2 \alpha_0^2 x_1^{-2}}. \end{aligned}$$

Комплексные решения для u_1 , u_3 , h_2^* выражаются, таким образом, формулами

$$\begin{aligned} u_1 &= (s_1 + is_2) \left\{ \frac{1 - \alpha_2^2}{2\beta_1} i \left[\frac{\alpha_0}{x_1} (r_1 + ir_2) \left(\frac{i}{\pi} \ln r + 1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln r + i\varphi \right] + \alpha_2 \left[\frac{\alpha_0}{x_1} (r_1 + ir_2) (H(x_1 - \alpha_2 x_3) + \frac{i}{\pi} \ln |x_1 - \alpha_2 x_3|) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln |x_1 - \alpha_2 x_3| + iH(\alpha_2 x_3 - x_1) \right] \right\}; \\ u_3 &= - (s_1 + is_2) \left\{ \frac{1 - \alpha_2^2}{2} \left[\frac{\alpha_0}{x_1} (r_1 + ir_2) \left(\frac{i}{\pi} \ln r + 1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln r + i\varphi \right] - \frac{\alpha_0}{x_1} (r_1 + ir_2) [H(x_1 - \alpha_2 x_3) + \frac{i}{\pi} \ln |x_1 - \alpha_2 x_3|] - \right. \\ &\quad \left. - \ln |x_1 - \alpha_2 x_3| - iH(\alpha_2 x_3 - x_1) \right\}; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} h_2^* = \frac{4\pi\rho}{H} \frac{1}{\alpha_0} (s_1 + is_2) \left[\frac{\alpha_0}{x_1} (r_1 + ir_2) \left(\frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} - i \frac{\alpha_0 x_3}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} \right) - \right. \\ \left. - \pi \frac{\alpha_0 x_3}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} - i\pi \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} \right]. \end{aligned}$$

Находя действительные части, получаем окончательно

$$\begin{aligned} u_1 = (s_1 r_1 - s_2 r_2) \frac{\alpha_0 \alpha_2}{x_1} H(x_1 - \alpha_2 x_3) + \left[s_1 - (s_1 r_2 + s_2 r_1) \frac{\alpha_0}{x_1} \right] \times \\ \times \alpha_2 \ln |x_1 - \alpha_2 x_3| - s_2 \alpha_2 H(\alpha_2 x_3 - x_1) + \frac{1 - \alpha_2^2}{2\beta_1} \left\{ \left[\frac{\alpha_0}{x_1} (s_2 r_2 - s_1 r_1) \frac{1}{\pi} - s_2 \right] \times \right. \\ \times \ln r - s_1 \varphi - \frac{\alpha_0}{x_1} (s_2 r_1 + s_1 r_2) \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \Big\}; \quad (3.6) \\ u_3 = \frac{\alpha_0}{x_1} (s_1 r_1 - s_2 r_2) H(x_1 - \alpha_2 x_3) - s_2 H(\alpha_2 x_3 - x_1) + \\ + \left[s_1 - \frac{\alpha_0}{x_1} (r_2 s_1 + r_1 s_2) \frac{1}{\pi} \right] \ln |x_1 - \alpha_2 x_3| + \frac{1 - \alpha_2^2}{2} \times \\ \times \left\{ \frac{\alpha_0}{x_1} (s_2 r_2 - s_1 r_1) \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) + \left[\frac{\alpha_0}{x_1} \frac{1}{\pi} (s_1 r_2 + r_1 s_2) - s_1 \right] \ln r + s_2 \varphi \right\}; \\ h_2^* = \frac{4\pi\rho}{H} \frac{x_1}{\alpha_0} \left\{ \left[\frac{\alpha_0}{x_1} (s_1 r_2 + s_2 r_1) - \pi s_1 \right] \frac{\alpha_0 x_3}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\alpha_0}{x_1} (s_1 r_1 - s_2 r_2) + \pi s_2 \right] \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} \right\}. \end{aligned}$$

Решения (3.6) характеризуются одним конусом черенковского излучения в среде. Происхождение членов стационарного типа подробно объяснялось в третьем разделе. То же самое относится к членам типа $\ln(x_1 - \alpha_2 x_3)$, имеющим характер запаздывающего потенциала и заполняющим все полупространство, занятное проводником. Решения (3.6) для u_i определены, как было оговорено, с точностью до произвольных постоянных. Выражения, содержащие только производные (напряжения, тензор напряжений Максвелла и т. п.), будут определены однозначно. Как видно из (3.6), члены стационарного типа, объясняемые проникновением поля из вакуума, незначительны по сравнению с черенковским излучением. Поле \mathbf{h} в проводнике порядка $H_{\varepsilon_{lk}}$, где ε_{lk} — тензор деформаций. Составляющие тензора напряжений Максвелла и векторов поля вычисляются из соотношений (3.6).

Изложенное в данной работе относится к случаю изотропно действующего поля, когда $\mathbf{H} = H_2$. В следующей статье II будет решена задача с анизотропно действующим магнитным полем. Здесь, так же, как и в [1-3], мы ограничились решением плоской задачи без дисперсии. Использованный метод характеристик позволяет получить сравнительно простые решения, легко объяснимые качественно. Количественные результаты тоже могут оказаться полезными.

Полученные решения могут быть перенесены на случай движения

проводника с током (ср. [8,9]). Следующей интересной задачей, связанной с магнитоупругим черенковским излучением, может явиться задача об автоколебаниях механического или электрического осциллятора, движущегося по поверхности полупространства (ср. с [10]). Этот вопрос будет рассмотрен отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Kaliski, Proc. Vibr. Probl., 4, 189 (1963).
2. S. Kaliski, Proc. Vibr. Probl., 4, 301 (1963).
3. S. Kaliski, Proc. Vibr. Probl., 4, 215 (1963).
4. S. Kaliski, D. Rogula, Proc. Vibr. Probl., 1, 64 (1960).
5. Б. М. Болотовский, УФН, 62, 201 (1957).
6. Б. М. Болотовский, УФН, 75, 295 (1961).
7. J. Cole, J. Huth, J. Appl. Mech., 25, 433 (1958).
8. А. М. Морозов, Сб. Физика управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 1958.
9. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
10. В. Л. Гинзбург, УФН, 69, 537 (1959).

Институт основных проблем техники
Польской академии наук

Поступила в редакцию
15 июля 1963 г.

MECHANICAL GENERATION OF ČERENKOV RADIATION IN A PERFECTLY CONDUCTING ELASTIC MEDIUM BORDERING ON VACUUM. I.

S. Kaliski

Čerenkov radiation is considered in a perfectly conducting elastic medium filling the half-space bordering on vacuum under the mobile force action on the medium surface (in the case when external constant magnetic field is perpendicular to the plane of motion).

The cones of Čerenkov radiation have been determined at supermagnetosonic and intermagnetosonic velocities, the radiation intensity has been found out without taking into account the dispersion. The stationary perturbation of is shown to exist before the cones fronts of the propagation of the mechanical and electromagnetic perturbations in the case of supermagnetosonic velocity.

УДК 539.124 : 534.1

**МЕХАНИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ,
ГРАНИЧАЩЕЙ С ВАКУУМОМ. II**

C. Калисский

Рассмотрена та же задача, что и в статье [1], но при «анизотропной» ориентации постоянного магнитного поля. Решение строится таким же образом, что и в [1], но в количественном и качественном отношении между ними существуют значительные различия.

В первой части настоящей работы [1] была рассмотрена генерация магнитоупругого черенковского излучения с помощью некоторого источника механических возмущений. Последний движется по поверхности заполненного упругим идеальным проводником полупространства; на проводник наложено магнитное поле, оказывающее изотропное действие, т. е. поле $H = H_2$. Решение получено для плоского случая методом характеристик без учета дисперсии материальных постоянных. Принято, что полупространство, заполненное идеальным упругим проводником, граничит с вакуумом, куда излучаются электромагнитные волны.

Вследствие взаимодействия с полем из вакуума поле возмущений в проводнике заполняет область перед фронтами черенковских конусов. Это утверждение касается стационарной части решения (устанавливающегося по прошествии достаточно большого отрезка времени) и обусловлено тем фактом, что при сверхмагнитозвуковой скорости механического источника поле в вакууме описывается эллиптическим оператором.

Целью второй части работы, составляющей содержание данной статьи, является получение аналогичного решения для случая анизотропного действия стороннего магнитного поля, когда $H = H_1$ или $H = H_3$. Некоторые качественные следствия статьи [1] сохраняют свою силу и здесь; что же касается количественной стороны и других качественных результатов, то решения (ср. [2] и [3]) различаются принципиально из-за наличия поперечной анизотропии, которую вводят поле, направленное вдоль осей 1 или 3. Работа была разбита на две части потому, что в случае [1] можно ввести потенциалы, аналогичные введенным в теории упругости изотропного тела. Это сводит нашу задачу к рассмотрению волнового уравнения и позволяет получить очень простые решения. Когда же действие первичного поля анизотропно, приходится поступать по-другому. Так как для направлений поля, $H = H_1$ или $H = H_3$, решения в обоих случаях строятся аналогично, то для различных интервалов скорости перемещения механического источника подробно обсуждается только один из вариантов, а во втором лишь приводятся результаты.

Отметим, наконец, что можно было бы рассмотреть общий случай, когда все три компоненты поля H отличны от нуля. Однако вычисления при этом значительно усложняются, а качественные рассуждения теряют свою прозрачность, снижая тем самым эффективность результатов. По этой причине мы рассматриваем лишь решения, для которых поле направлено по той или иной оси.

Исходные уравнения нашей задачи, граничные условия, характеристические корни приводятся в первом разделе статьи; в третьем и четвертом разделах рассмотрено сверхмагнитозвуковое и межмагнитозвуковое перемещение механического источника по поверхности полупространства.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Согласно [2], линеаризованные уравнения движения идеально проводящей упругой среды во внешнем магнитном поле имеют вид

$$a_2^2 \nabla^2 u + (a_1^2 - a_2^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\mu}{4\pi\rho} \times \times [\operatorname{rot} \operatorname{rot}(u \times H)] \times H + f = 0, \quad (1.1)$$

причем,

$$E = -\frac{\mu}{c} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \times H \right); \quad h = \operatorname{rot}(u \times H). \quad (1.2)$$

Поле в вакууме описывается уравнениями

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E^*, \quad h^* = 0; \quad (1.3)$$

E^* и h^* связаны между собой уравнениями

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E^*}{\partial t} = \operatorname{rot} h^*; \quad \operatorname{rot} E^* = -\frac{1}{c} \frac{\partial h^*}{\partial t}. \quad (1.4)$$

(Мы используем общепринятые обозначения, аналогичные, например, приведенным в [3].)

Границные условия на поверхности полупространства $x_3=0$ (рис. 1) следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{3}\bar{i}} + T_{\bar{3}\bar{i}} - T_{\bar{3}\bar{i}}^* &= -P\delta(\bar{x}_1 + v_0\bar{t}) \delta(\bar{x}_2)\delta_{\bar{3}\bar{i}} \quad (i = 1, 2, 3); \\ \mu(H_{\bar{3}} + h_{\bar{3}}) &= H_{\bar{3}}^* + h_{\bar{3}}^*; \\ E_{\bar{1}} &= E_{\bar{1}}^* + \frac{\mu - 1}{c} H_{\bar{2}} u_{\bar{3},\bar{t}}; \\ E_{\bar{2}} &= E_{\bar{2}}^* - \frac{\mu - 1}{c} H_{\bar{1}} u_{\bar{3},\bar{t}}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $T_{\bar{3}\bar{i}}$, $T_{\bar{i}\bar{k}}^*$ — тензоры Максвелла в среде и в вакууме соответственно:

$$T_{\bar{3}\bar{i}} = (\mu/4\pi) [H_{\bar{3}} h_{\bar{i}} + H_{\bar{i}} h_{\bar{3}} - H h \delta_{\bar{3}\bar{i}}]; \quad (1.6)$$

$$T_{\bar{3}\bar{i}}^* = (1/4\pi) [H_{\bar{3}} h_{\bar{i}}^* + H_{\bar{i}} h_{\bar{3}}^* - H h^* \delta_{\bar{3}\bar{i}}]^*,$$

где $\delta_{\bar{i}\bar{k}}$ — символ Кронекера.

* Здесь H означает H в вакууме; при $\mu \approx 1$ в среде в дальнейшем не будет различия между внешними полями в среде и вакууме.

В дальнейшем мы ограничимся плоским случаем, когда источник механических возмущений, будучи равномерно распределенным вдоль оси x_2 и сосредоточенным по оси x_1 , движется в направлении \bar{x}_1 . Решения не будут зависеть от x_2 и $u_{\frac{1}{2}} = 0$.

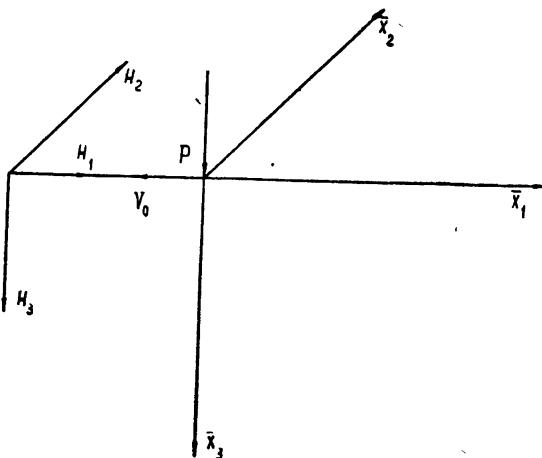


Рис. 1.

Далее для упрощения вычислений примем $\mu \approx 1$. Выразив h_i через u_i в среде, найдем

$$\begin{aligned} T_{\bar{3}, \bar{1}} &= \frac{1}{4\pi} [H_{\bar{3}}^2 u_{\bar{1}, \bar{3}} + H_{\bar{1}}^2 u_{\bar{3}, \bar{1}} - H_{\bar{1}} H_{\bar{2}} (u_{\bar{1}, \bar{1}} + u_{\bar{3}, \bar{3}})]; \\ T_{\bar{3}, \bar{2}} &= \frac{1}{4\pi} [H_{\bar{1}} H_{\bar{2}} u_{\bar{3}, \bar{1}} - H_{\bar{2}} H_{\bar{3}} (2u_{\bar{1}, \bar{1}} + u_{\bar{3}, \bar{3}})]; \\ T_{\bar{3}, \bar{3}} &= \frac{1}{4\pi} [H_{\bar{1}}^2 u_{\bar{3}, \bar{3}} + H_{\bar{2}}^2 (u_{\bar{1}, \bar{1}} + u_{\bar{3}, \bar{3}}) - H_{\bar{3}}^2 u_{\bar{1}, \bar{1}} + \\ &\quad + H_{\bar{1}} H_{\bar{3}} (u_{\bar{3}, \bar{1}} - u_{\bar{1}, \bar{3}})]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Мы рассмотрим два случая анизотропного направления первичного поля: $\mathbf{H} = H_{\bar{1}}$ и $\mathbf{H} = H_{\bar{3}}$. Для обоих этих направлений вектора первичного поля уравнения (1.1) и граничные условия (1.5) значительно упрощаются. Часть граничных условий будет тождественной.

1) Случай $\mathbf{H} = H_{\bar{1}} = H$.

Тогда уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} a_1^2 u_{\bar{1}, \bar{1}} + a_2^2 u_{\bar{1}, \bar{3}} - u_{\bar{1}, \bar{t}} + (a_1^2 - a_2^2) u_{\bar{3}, \bar{1}} &= 0; \\ (a_1^2 - a_2^2) u_{\bar{1}, \bar{1}} + a_1^{*2} u_{\bar{3}, \bar{3}} + a_2^{*2} u_{\bar{3}, \bar{1}} - u_{\bar{3}, \bar{t}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Границные условия (1.5) при этом ($\mu = 1$) будут таковы [4]:

$$\begin{aligned} a_1^{*2} u_{\bar{3}, \bar{3}} + (a_1^2 - 2a_2^2) u_{\bar{1}, \bar{1}} + \frac{H}{4\pi\rho} h_{\bar{1}}^* &= -P_1 \delta(\bar{x}_1 + v_0 \bar{t}); \\ u_{\bar{1}, \bar{3}} + u_{\bar{3}, \bar{1}} &= 0; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$h_{\bar{1}, \bar{3}}^* = -\frac{H}{c^2} u_{\bar{3}, \bar{t}} + Hu_{\bar{3}, \bar{1}},$$

где

$$a_i^{*2} = a_i^2 + \chi^2, \quad \chi^2 = \mu H^2 / 4\pi\rho, \quad P_1 = P/\rho.$$

2) Случай $H = H_{\bar{3}} = H$.

По аналогии с предыдущим будем иметь следующую систему уравнений и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} a_1^{*2} u_{\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}} + a_2^{*2} u_{\bar{1}, \bar{3}, \bar{3}} - u_{\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}} + (a_1^2 - a_2^2) u_{\bar{3}, \bar{1}, \bar{3}} &= 0; \\ (a_1^2 - a_2^2) u_{\bar{1}, \bar{1}, \bar{3}} + a_1^2 u_{\bar{3}, \bar{3}, \bar{3}} + a_2^2 u_{\bar{3}, \bar{1}, \bar{1}} - u_{\bar{3}, \bar{1}, \bar{1}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

и

$$a_1^2 u_{\bar{3}, \bar{3}} + (a_1^2 - 2a_2^2) u_{\bar{1}, \bar{1}} = -P_1 \delta(\bar{x}_1 + v_0 \bar{t});$$

$$a_2^{*2} u_{\bar{1}, \bar{3}} + a_2^2 u_{\bar{3}, \bar{1}} = \frac{H}{4\pi\rho} h_{\bar{1}}^*; \quad (1.11)$$

$$h_{\bar{1}, \bar{3}}^* = \frac{H}{c^2} u_{\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}} - Hu_{\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}}.$$

Вводя систему координат, связанную с движущимся по поверхности механическим источником, будем иметь

$$x_1 = \bar{x}_1 + v_0 \bar{t}, \quad x_3 = \bar{x}_3, \quad t = \bar{t}. \quad (1.12)$$

Тогда, принимая аналогично [3], что движение происходит столь долго, что для наблюдателя, связанного с подвижной системой координат, распределение поля имеет стационарный характер, можно после преобразования системы координат отбросить производные по новой переменной \bar{t} . При этом производные по \bar{x}_1, \bar{x}_3 перейдут в производные по x_1, x_3 , производная по \bar{t} перейдет в $v_0 (\partial/\partial x_1)$.

После преобразования уравнений (1.8) и (1.10) и граничные условия (1.9), (1.11) перейдут в следующие: для $H = H_1 = H$

$$\begin{aligned} v_1 u_{1, 33} - a_1^2 u_{1, 11} + (1 - v_2) u_{3, 13} &= 0, \\ (1 - v_2) u_{1, 13} + v_1^* u_{3, 33} - \beta_2^2 u_{3, 11} &= 0, \\ a_1^{*2} u_{3, 3} + (a_1^2 - 2a_2^2) u_{1, 1} + \frac{H}{4\pi\rho} h_1^* &= -P \delta(x_1), \\ u_{1, 3} + u_{3, 1} &= 0; \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$h_{1, 3}^* = H \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) u_{3, 11}; \quad (1.14)$$

для $H = H_3 = H$

$$\begin{aligned} v_2^* u_{1, 33} - \beta_1^2 u_{1, 11} + (1 - v_2) u_{3, 13} &= 0, \\ (1 - v_2) u_{1, 13} + u_{3, 33} - a_2^2 u_{3, 11} &= 0, \\ a_1^2 u_{3, 3} + (a_1^2 - 2a_2^2) u_{1, 1} &= -P \delta(x_1), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$a_2^{*2} u_{1, 3} + a_2^2 u_{3, 1} - \frac{H}{4\pi\rho} h_1^* = 0;$$

$$h_{1, 3}^* = -H \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) u_{1, 11}. \quad (1.16)$$

Здесь

$$\alpha_i^2 = \frac{v_0^2}{a_1^2} - v_i; \quad \beta_i^2 = \frac{v_0^2}{a_1^2} - v_i^*; \quad v_i = \frac{\alpha_i^2}{a_1^2}; \quad v_i^* = \frac{\alpha_i^{*2}}{a_1^2} \quad (v_1 = 1; \quad i = 1, 2).$$

Границные условия (1.14) и (1.16) можно, перенося члены с a_1^2 в одну сторону, переписать с помощью введенных выше безразмерных параметров. Кроме этого, в последнем из условий (1.14) и (1.16) можно пренебречь v_0^2/c^2 по сравнению с 1.

Введем в систему уравнений (1.13) и (1.15) функции

$$u_1 = \begin{vmatrix} \psi_1 & L_{13} \\ \psi_3 & L_{33} \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & \psi_1 \\ L_{13} & \psi_2 \end{vmatrix}, \quad (1.17)$$

где операторы L_{ik} определяются из систем уравнений (1.13) и (1.15) следующим образом:

$$L_{ik} u_k = 0. \quad (1.18)$$

Тогда, согласно [3], уравнения для ψ_i ($i = 1, 3$) будут иметь вид

$$\begin{vmatrix} L_{11}; & L_{13} \\ L_{13}; & L_{33} \end{vmatrix} \psi_i = 0 \quad (i = 1, 3) \quad (1.19)$$

или в явном виде для $H = H_1 = H$

$$v_1^* v_2 \psi_{1,3333} + \alpha_1^2 \beta_2^2 \psi_{1,1111} - [\alpha_1^2 v_1^* + \beta_2^2 v_2 + (1 - v_2)^2] \psi_{1,1133} = 0, \quad (1.20)$$

а для $H = H_3 = H$:

$$v_2^* \psi_{1,3333} + \alpha_2^2 \beta_1^2 \psi_{1,1111} - [v_2^* \alpha_2^2 + \beta_1^2 + (1 - v_2)^2] \psi_{1,1133} = 0. \quad (1.21)$$

Рассмотрение характеристических уравнений (1.20) и (1.21) позволяет определить области сверхмагнитозвуковых, квазисверхмагнитозвуковых, межмагнитозвуковых и домагнитозвуковых скоростей. Квазисверхмагнитозвуковая скорость, определение которой дано в [3], появляется только в случае $H = H_1$.

Рассмотрим сначала случай $H = H_1 = H$. Ниже приводятся результаты работы [3]. Корни характеристического уравнения (1.20) имеют вид

$$\tau_{1,2} = \frac{\alpha_1^2 v_1^* + \beta_2^2 v_2 + (1 - v_2)^2}{2 v_1^* v_2} \mp \sqrt{\frac{1}{2 v_1^* v_2} \left[(\alpha_1^2 v_1^* + \beta_2^2 v_2 + (1 - v_2)^2)^2 - 4 v_1^* v_2 \alpha_1^2 \beta_2^2 \right]}, \quad (1.22)$$

где $\tau = \theta^2$, если принять $\psi = \psi(x_1 - \theta x_3)$. Из (1.22) можно определить указанные области изменения скорости v_0 . Когда корни характеристического уравнения τ_1 и τ_2 действительны и положительны, мы имеем дело со сверхмагнитозвуковой или квазисверхмагнитозвуковой скоростью. Область, где существует одно действительное положительное значение τ , отвечает межмагнитозвуковой скорости, а область, где нет действительных, положительных корней,— домагнитозвуковой. В обоих первых случаях имеем два конуса черенковского излучения, в третьем— один, в последнем конусы не существуют.

Расположение конусов в случае сверхмагнитозвуковой скорости показано на рис. 2. При квазисверхмагнитозвуковой скорости один из

конусов вырождается (рис. 3), что связано с фактом существования области квазигиперболичности для уравнения (1.20). Определение области квазигиперболичности в магнитной гидродинамике дано в [5-7]. Вырождение конусов происходит также и по другим причинам, например, из-за пространственной дисперсии [8].

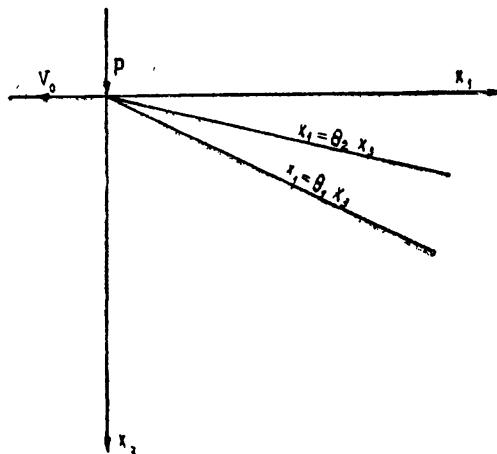


Рис. 2.

Определим граничные значения v_0 для вышеупомянутых случаев [3]. Для

$$x^2 < \frac{a_2^2}{2} \left(\sqrt{4 \frac{a_1^2}{a_2^2} - 3} - 1 \right) \quad (1.23)$$

случай сверхмагнитозвуковой скорости будет иметь место при

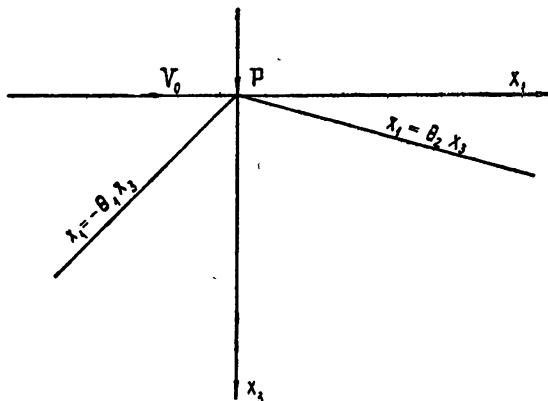


Рис. 3.

$$\frac{v_0}{a_1} > 1, \quad (1.24)$$

а межмагнитозвуковой при

$$1 > \frac{v_0}{a_1} > \sqrt{\frac{v_2^*}{a_2}}. \quad (1.25)$$

Для

$$\frac{a_2^2}{2} \left(\sqrt{4 \frac{a_1^2}{a_2^2} - 3} - 1 \right) < x^2 < a_1^2 - a_2^2$$

сверхмагнитозвуковая и межмагнитозвуковая скорости имеют место при условиях (1.24) и (1.25), а квазисверхмагнитозвуковая — при условии

$$\sqrt{v_2^*} > \frac{v_0}{a_1} > \gamma, \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \frac{1}{(v_1^* - v_2)^2} &< -[(v_1^* - v_2)(v_2^* v_2 - v_1^*) + (1 - v_2)^2(v_1^* + v_2)] + \\ &+ \{[(1 - v_2)(v_2^* v_2 - v_1^*) + (1 - v_2)^2(v_1^* + v_2)]^2 - (v_1^* - v_2)^2[(v_2^* v_2 - v_1^*)^2 + (1 - v_2)^4 - \\ &- 2(1 - v_2)v_1^* + v_2^* v_2]\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Для

$$a_1^2 - a_2^2 < x^2 < 2a_1^2 \quad (1.28)$$

и для $x^2 > 2a_1^2$ случай сверхмагнитозвуковой скорости имеет место при

$$\frac{v_0}{a_1} > \sqrt{v_2^*}, \quad (1.29)$$

межмагнитозвуковой — при

$$1 > \frac{v_0}{a_1} > \sqrt{v_2^*}. \quad (1.30)$$

Случая квазисверхмагнитозвуковой скорости нет. Картина отдельных областей представлена на рис. 4, где для определенности принято $a_1^2/a_2^2 = 3$. Заметим, что термин «квазисверхмагнитозвуковая» не отвечает точно физической сущности и был принят по аналогии с термином «квазигиперболичность», принятом при классификации характеристических областей для системы уравнений магнитной гидродинамики.

В дальнейшем рассмотрим подробно решения в случае сверхмагнитозвуковой и межмагнитозвуковой скоростей: Случая квазисверхмагнитозвуковой скорости рассматривать не будем, так как он решается аналогично случаю сверхмагнитозвуковой, если заменить $\theta_1 = \sqrt{\tau_1}$ на $\theta_1 = -\sqrt{\tau_1}$. Последнее следует из рассмотрения областей гиперболичности и квазигиперболичности; в этом можно убедиться также, рассмотрев вопрос о том, какие запаздывающие потенциалы нужно принять для корректной физической реализации граничных условий.

Перейдем к случаю $H = H_3 = H$. Корни характеристического уравнения (1.21) имеют вид

$$\tau_{1,2} = \frac{\alpha_2^2 v_2^* + \beta_1^2 + (1 - v_2)^2}{2v_2^*} \pm \frac{1}{2v_2^*} \sqrt{[\alpha_2^2 v_2^* + \beta_1^2 + (1 - v_2)^2]^2 - 4v_2^* \alpha_2^2 \beta_1^2}. \quad (1.31)$$

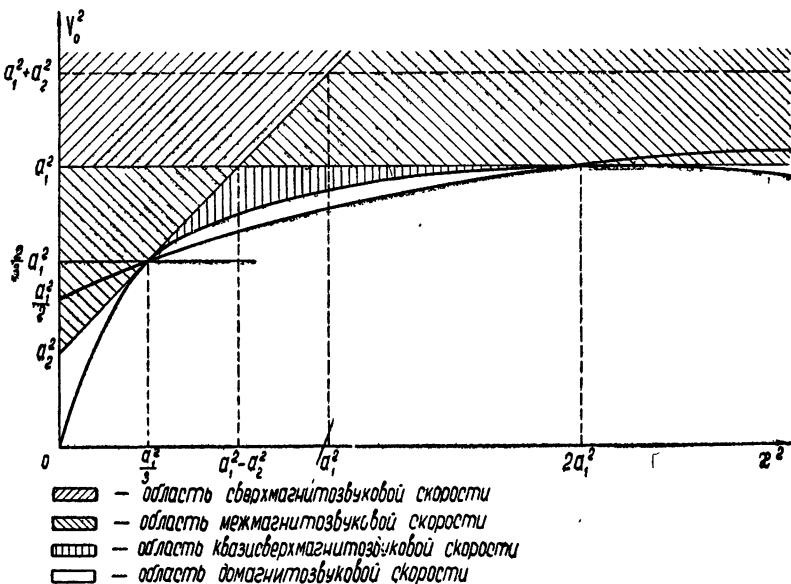


Рис. 4.

Сверхмагнитозвуковая скорость имеет место, когда

$$\frac{v_0}{a_1} > \frac{a_1^*}{a_1} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a_1^2}}, \quad (1.32)$$

межмагнитозвуковая —

$$\frac{a_2}{a_1} < \frac{v_0}{a_1} < \frac{a_1^*}{a_1}. \quad (1.33)$$

Случай квазисверхмагнитозвуковой скорости, когда поле направлено вдоль оси x_3 , отсутствует.

Перейдем к рассмотрению решений для сверх- и межмагнитозвуковой скоростей и для обоих направлений первичного магнитного поля.

2. СВЕРХМАГНИТОЗВУКОВАЯ СКОРОСТЬ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Рассмотрим сначала случай $H = H_1 = H$. В случае сверхмагнитозвуковой скорости, т. е. при выполнении условия (1.23), есть два действительных положительных значения корней характеристического уравнения (1.22) и, следовательно, два положительных значения θ . Уравнения (1.20) для функции ψ_i — гиперболические; следовательно, их решение ищется в виде

$$\psi_1(x_1, x_3) = \psi_{11}(x_1 - \theta_1 x_3) + \psi_{13}(x_1 - \theta_2 x_3); \quad (2.1)$$

$$\psi_3(x_1, x_3) = \psi_{31}(x_1 - \theta_1 x_3) + \psi_{33}(x_1 - \theta_2 x_3),$$

где θ_1 и θ_2 — корни характеристического уравнения (1.20). Подставляя (2.1) в (1.17) и пользуясь равенством, вытекающим из характеристического уравнения (ср. [3]), получим

$$\begin{aligned} u_1 &= \Phi_1(x_1 - \theta_1 x_3) + \Phi_2(x_1 - \theta_2 x_3); \\ u_3 &= r_1 \Phi_1(x_1 - \theta_1 x_3) + r_2 \Phi_2(x_1 - \theta_2 x_3), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$r_i = \frac{(1 - v_2)\theta_i}{v_1^* \theta_i^2 - \beta_2^2} \quad (i = 1, 2).$$

Функции Φ_i составляют линейные комбинации вторых производных ψ_i , выражения для которых даны в [3]. В дальнейшем будем пользоваться только решениями типа (2.2); нет необходимости приводить соотношения между функциями Φ_i и ψ_i . Функции Φ_i надо определить из граничных условий (1.14). В эти условия входит неизвестная функция h_{11}^{**} . Для отыскания ее применим метод, аналогичный использованному в работе [1]. Согласно последнему из условий (1.14) и соотношению (1.3), h_{11}^* удовлетворяет (после преобразования (1.12)), следующему эллиптическому уравнению:

$$h_{11,33}^* + \alpha_0^2 h_{11,11}^* = 0, \quad (2.3)$$

где $\alpha_0^2 = 1 - v_0^2/c^2$. Отсюда

$$h_{11}^*(x_1, x_3) = \frac{H\alpha_0^2}{\pi} \int dx_3 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{311}(\xi, 0) \frac{\alpha_0 x_3}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} d\xi + C_0(x_1); \quad (2.4)$$

$C_0(x_1)$ находится способом, аналогичным приведенному в [1], оно равно нулю. Из второго граничного условия (1.14) имеем

$$-\frac{r_1 - \theta_1}{r_2 - \theta_2} \Phi_1' = \Phi_2'; \quad (2.5)$$

из первого граничного условия (1.14), используя (2.4) и (2.5), получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$vR - x_1 \left\{ \int dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} R'(\xi) \frac{\alpha_0 x_3}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} d\xi \right\}_{x_3=0} = -P\delta(x_1). \quad (2.6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$R = \Phi_1';$$

$$\begin{aligned} v &= a_1^{*2} \left(-r_1 \theta_1 + r_2 \theta_2 \frac{r_1 - \theta_1}{r_2 - \theta_2} \right) + (a_1^2 - 2a_2^2) \left(1 - \frac{r_1 - \theta_1}{r_2 - \theta_2} \right); \\ x_1 &= -\frac{H^2 \alpha_0^2}{4\pi^2 \rho} \left(r_1 - r_2 \frac{r_1 - \theta_1}{r_2 - \theta_2} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Применяя, аналогично [1], интегрирование в смысле главного значения, интегральное преобразование Гильберта, интегрирование по частям и параметрическое представление δ , получаем следующее решение для $R(x_1)$:

* Взаимодействием полей в вакууме можно пренебречь, если нас не интересует величина поля излучения в вакууме. Но для точности решения мы учтем здесь и это поле.

$$R(x_1) = - \frac{P}{\alpha_0 v^2/x_1 + x_1 \pi^2/\alpha_0} \left[\frac{1}{x_1} + \frac{\alpha_0 v}{x_1} \delta(x_1) \right]. \quad (2.8)$$

Отсюда, используя (2.2) и (2.4), находим окончательно

$$\begin{aligned} u_1 &= - \frac{P}{\alpha_0 v^2/x_1 + x_1 \pi^2/\alpha_0} \left\{ \left[\frac{\alpha_0 v}{x_1} H(x_1 - \theta_1 x_3) + \ln |x_1 - \theta_1 x_3| \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_1 - \theta_1}{r_2 - \theta_2} \left[\frac{\alpha_0 v}{x_1} H(x_1 - \theta_2 x_3) + \ln |x_1 - \theta_2 x_3| \right] \right\}; \\ u_3 &= - \frac{P}{\alpha_0 v^2/x_1 + x_1 \pi^2/\alpha_0} \left\{ r_1 \left[\frac{\alpha_0 v}{x_1} H(x_1 - \theta_1 x_3) + \ln |x_1 - \theta_1 x_3| \right] - \right. \\ &\quad \left. - r_2 \frac{r_1 - \theta_1}{r_2 - \theta_2} \left[\frac{\alpha_0 v}{x_1} H(x_1 + \theta_2 x_3) + \ln |x_1 - \theta_2 x_3| \right] \right\}; \\ h_1^* &= \frac{4\pi\rho}{H} x_1 \frac{1}{\alpha_0} \frac{P}{\alpha_0 v^2/x_1 + x_1 \pi^2/\alpha_0} \left[\frac{\alpha_0 v}{x_1} \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} - \pi \frac{\alpha_0 x_3}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Заметим, что это решение можно получить проще (см. [1]), приняв временно $\alpha_0^2 < 1$. Тогда получившееся гиперболическое уравнение можно решить методом запаздывающих потенциалов, что свелось бы к простым алгебраическим вычислениям, а затем полученное решение аналитически продолжить в область $\alpha_0^2 > 0$. Это решение было дано в [1], и мы не будем здесь его приводить. Величины u_i (ср. [1]) определены с точностью до некоторых постоянных, а их производные, т. е. напряжения, компоненты максвелловского тензора в среде и т. д., — однозначно.

Из (2.9), (1.2) и (1.4) можно легко найти проекции векторов поля в среде и вакууме. Решение (2.9) характеризуется двумя конусами черенковского излучения, связанными со скоростями распространения возмущений θ_1 и θ_2 . Кроме того, здесь, как и в [1], есть еще стационарная часть решения (из-за стационарности процесса через достаточно большой промежуток времени), опережающая оба конуса черенковского излучения. Это следует из того, что граничные условия «сшивают» поле в среде с полем в вакууме, которое описывается эллиптическим уравнением; поэтому возмущение заполняет все свободное полупространство и, в свою очередь, индуцирует возмущения стационарного типа в проводнике.

Возмущения внутри черенковских конусов значительны, а вне — малы, что следует из анализа коэффициентов в выражении (2.9). Решения (2.9) качественно имеют ту же структуру, что и в работе [1], но отличаются от них количественно; решения здесь строятся иначе, так как в анизотропном случае нельзя ввести простые потенциалы, как это делалось в [1].

Рассмотрим еще случай, когда $H = H_3 = H$. Если искать решение в виде (2.1), получим выражение в форме (2.2), где r_i дается формулой

$$r_i = \frac{(1 - v_2)\theta_i}{\theta_i^2 - \alpha_0^2}. \quad (2.10)$$

При подстановке решения (2.2) с коэффициентами (2.10) в граничные условия (1.16) получаем из последнего

$$h_1^*(x_1, x_3) = -\frac{H\alpha_0^2}{\pi} \int dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} u_{1,11}(\xi, 0) \frac{\alpha_0 x_3}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} d\xi, \quad (2.11)$$

а из первого находим

$$\Phi'_2 = -\frac{a_1^2(1 - r_1\theta_1) - 2a_2^2}{a_1^2(1 - r_2\theta_2) - 2a_2^2} \Phi'_1 - \frac{P}{a_1^2(1 - r_2\theta_2) - 2a_2^2} \delta(x_1). \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) во второе из граничных условий (1.16), придем к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$vR - x_1 \left\{ \int dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_0 x_3}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} R'(\xi) d\xi \right\}_{x_3=0} = -N\delta(x_1) + n \frac{1}{x_1}, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi'_1 &= R; \\ v &= a_2^{*2} \left[\frac{a_1^2(1 - r_1\theta_1) - 2a_2^2}{a_1^2(1 - r_2\theta_2) - 2a_2^2} \theta_2 - \theta_1 \right] + \\ &\quad + a_2^2 \left[r_1 - r_2 \frac{a_1^2(1 - r_1\theta_1) - 2a_2^2}{a_1^2(1 - r_2\theta_2) - 2a_2^2} \right]; \\ x_1 &= -\frac{H^2 \alpha_0^2}{4\pi^2 \rho} \left[1 - \frac{a_1^2(1 - r_1\theta_1) - 2a_2^2}{a_1^2(1 - r_2\theta_2) - 2a_2^2} \right]; \\ N &= P(a_2^{*2}\theta_2 - a_2^2 r_2) \frac{1}{a_1^2(1 - r_2\theta_2) - 2a_2^2}; \\ n &= \frac{H^2 \alpha_0}{4\pi^2 \rho} \frac{P}{a_1^2(1 - r_2\theta_2) - 2a_2^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В уравнение (2.13) входит новый по сравнению с (2.6) член n/x_1 . Взяв в (2.13) интеграл по частям, изменив порядок интегрирования и интегрируя по x_3 , сведем это уравнение к следующему:

$$vR + \left\{ \frac{x_1}{\alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi) \frac{\xi - x_1}{(\xi - x_1)^2 + \alpha_0^2 x_3^2} d\xi \right\}_{x_3=0} = -N\delta(x_1) + \frac{n}{x_1}. \quad (2.15)$$

Представляя затем $\delta(x_1)$ и $1/x_1$ в виде

$$\delta(x_1) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x_1^2 + \alpha^2}; \quad \frac{1}{x_1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha^2},$$

а ядро уравнения (2.15) в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi - x_1 + i\alpha_0 x_3} + \frac{1}{\xi - x_1 - i\alpha_0 x_3} \right),$$

переходя далее под интегралом к пределу при $x_3 \rightarrow 0$ и используя теорему о граничных значениях интегралов Коши (ср. с [1]), сведем уравнение (2.15) к следующему:

$$\nu R + \frac{x_1}{\alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\xi)}{\xi - x_1} d\xi = -N \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{x_1^2 + \alpha^2} + n \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha^2}. \quad (2.16)$$

Здесь после решения положено $\alpha \rightarrow 0$ и интеграл понимается в смысле главного значения. Применяя к (2.16) интегральное преобразование Гильберта, находим

$$\nu LR - \frac{x_1}{\alpha_0} \pi R = \frac{N}{\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha^2} + n \frac{\alpha}{x_1^2 + \alpha^2}. \quad (2.17)$$

Поскольку, согласно (2.16),

$$LR = -\frac{\alpha_0}{\pi x_1} \left[\nu R + \frac{N}{\pi} \frac{\alpha}{x_1^2 + \alpha^2} - n \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha^2} \right], \quad (2.18)$$

из (2.17) следует

$$R(x_1) = -\frac{1}{x_1 \pi^2 / \alpha_0 + \alpha_0 \nu^2 / x_1} \left[\left(N - \frac{n \alpha_0 \nu}{x_1} \right) \frac{1}{x_1} + \left(n \pi^2 + \frac{\alpha_0 \nu N}{x_1} \right) \delta(x_1) \right]. \quad (2.19)$$

Отсюда, учитывая (2.2) и (2.11), окончательно находим

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{P}{x_1 \pi^2 / \alpha_0 + \alpha_0 \nu^2 / x_1} \left\{ \left(n \pi^2 + \frac{\alpha_0 \nu N}{x_1} \right) \left[H(x_1 - \theta_1 x_3) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a_1^2(1 - r_1 \theta_1) - 2a_2^2}{a_1^2(1 - r_2 \theta_2) - 2a_2^2} H(x_1 - \theta_2 x_3) \right] + \left(N - \frac{n \alpha_0 \nu}{x_1} \right) \left[\ln |x_1 - \theta_1 x_3| - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_1^2(1 - r_1 \theta_1) - 2a_2^2}{a_1^2(1 - r_2 \theta_2) - 2a_2^2} \ln |x_1 - \theta_2 x_3| \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{P}{a_1^2(1 - r_1 \theta_1) - 2a_2^2} H(x_1 - \theta_2 x_3); \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= -\frac{P}{x_1 \pi^2 / \alpha_0 + \alpha_0 \nu^2 / x_1} \left\{ \left(n \pi^2 + \frac{\alpha_0 \nu N}{x_1} \right) \left[r_1 H(x_1 - \theta_1 x_3) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r_2 \frac{a_1^2(1 - r_1 \theta_1) - 2a_2^2}{a_1^2(1 - r_2 \theta_2) - 2a_2^2} H(x_1 - \theta_2 x_3) \right] + \left(N - \frac{n \alpha_0 \nu}{x_1} \right) \left[r_1 \ln |x_1 - \theta_1 x_3| - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r_2 \frac{a_1^2(1 - r_1 \theta_1) - 2a_2^2}{a_1^2(1 - r_2 \theta_2) - 2a_2^2} \ln |x_1 - \theta_2 x_3| \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{Pr_2}{a_1^2(1 - r_1 \theta_1) - 2a_2^2} H(x_1 - \theta_2 x_3); \end{aligned}$$

$$h_1^* = \frac{4\pi\rho}{H} x_1 \frac{1}{\alpha_0} \frac{P}{x_1 \pi^2 / \alpha_0 + \alpha_0 \nu^2 / x_1} \left[\left(N - \frac{n \alpha_0 \nu}{x_1} \right) \pi \frac{\alpha_0 x_3}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} - \right.$$

$$-\left(n\pi^2 + \frac{\alpha_0 v N}{x_1}\right) \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} + \frac{H\alpha_0 P}{\pi[a_1^2(1 - r_2\theta_2) - 2a_2^2]} \times \\ \times \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2}.$$

Решение (2.20) в качественном и количественном отношении аналогично решению (2.9), и относительно его однозначности можно сделать те же замечания, что и решения (2.9). Поэтому мы не будем обсуждать отдельно решение (2.20). Краткий вывод решения (2.9) был дан из-за некоторой разницы в структуре уравнения (2.13) и уравнений, обсуждавшихся ранее. Сейчас кратко рассмотрим случай межмагнитозвуковой скорости.

3. МЕЖМАГНИТОЗВУКОВАЯ СКОРОСТЬ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Пусть импульс перемещается с межмагнитозвуковой скоростью (интервал изменения v_0 , когда имеет место этот случай, был указан в первом разделе).

Решение можно получить, строя соответствующие решения для гиперболических и эллиптических операторов с учетом граничных условий. Однако можно, как показано в [1], непосредственно использовать решения из предыдущего раздела, если в (2.9) и (2.20) заменить величину $-\theta_1$ на $i\theta_1^*$, где

$$-\theta_1^2 = \theta_1^{*2}; \quad \theta_1^* > 0, \quad (3.1)$$

и вместо $H(x_1 - \alpha_1 x_3)$ ввести аналитически продолженную функцию

$$\frac{i}{\pi} \ln \xi + 1 = \frac{i}{\pi} \ln r + 1 - \frac{\varphi}{\pi}, \quad (3.2)$$

где

$$\xi = x_1 + i\theta_1^* x_3 = re^{i\varphi}. \quad (3.3)$$

Аналогично продолжим аналитически остальные функции в решениях (2.9). Взяв действительные части решений, получим искомый результат. Выполним проделанные выше операции (ср. [1]) для $H = H_1 = H$. Параметры, входящие в решение (2.9), примут вид

$$x_1 = ix_1^*; \quad r_1 = r_1^*i; \\ x_1^* = \frac{H^2 \alpha_0^2}{4\pi^2 \rho} \left(r_1^* - r_2 \frac{r_1^* + \theta_1^*}{r_2 - \theta_2} \right), \quad (3.4)$$

где

$$r_1^* = \frac{(1 - v_2) \theta_1^*}{v_1^* \theta_1^{*2} + \beta_2^2}; \quad (3.5)$$

$$v = n_1 + in_2;$$

$$n_1 = a_1^2 - 2a_2^2 - a_1^{*2} r_1^* \theta_1^*;$$

$$n_2 = \frac{r_1^* + \theta_1^*}{r_2 - \theta_2} (a_1^{*2} r_2 \theta_2 + 2a_2^2 - a_1^2); \quad (3.6)$$

$$s_1 + is_2 = \frac{P}{\alpha_0 v^2/x_1 + x_1 \pi^2/\alpha_0};$$

$$s_1 = \frac{P_0 \alpha_0^3 x_1^* 2 n_1 n_2}{[\alpha_0^2(n_1^2 - n_2^2) - \pi^2 x_1^*]^2 + 4 \alpha_0^4 n_1^2 n_2^2};$$

$$s_2 = P_0 \alpha_0 x_1^* \frac{\alpha_0^2(n_1^2 - n_2^2) - \pi^2 x_1^*}{[\alpha_0^2(n_1^2 - n_2^2) - \pi^2 x_1^*]^2 + 4 \alpha_0^4 n_1^2 n_2^2}.$$

Отсюда после подстановки в (2.9) и выделения действительных частей решений получаем после многочисленных преобразований

$$u_1 = -\frac{\alpha_0}{x_1^*} (s_1 n_2 + s_2 n_1) \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) + \left[\frac{1}{\pi} \frac{\alpha_0}{x_1^*} (s_2 n_2 - s_1 n_1) - s_1 \right] \ln r +$$

$$+ s_2 \varphi - \frac{r_1^* + \theta_1^*}{r_2 - \theta_2} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\alpha_0}{x_1^*} (s_1 n_2 + s_2 n_1) + s_2 \right] \ln |x_1 - \theta_2 x_3| +$$

$$+ \frac{r_1^* + \theta_1^*}{r_2 - \theta_2} \frac{\alpha_0}{x_1^*} (s_1 n_1 - s_2 n_2) H(x_1 - \theta_2 x_3) -$$

$$- s_1 \frac{r_1^* + \theta_1^*}{r_2 - \theta_2} H(\theta_2 x_3 - x_1); \quad (3.7)$$

$$u_3 = \frac{\alpha_0}{x_1^*} r_1^* (s_2 n_2 - s_1 n_1) \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) + r_1^* \left[(s_1 n_2 + s_2 n_1) \frac{1}{\pi} \frac{\alpha_0}{x_1^*} + s_2 \right] \ln r +$$

$$+ r_1^* s_1 \varphi - r_2 \frac{r_1^* + \theta_1^*}{r_2 - \theta_2} \left[\frac{1}{\pi} \frac{\alpha_0}{x_1^*} (s_1 n_2 + s_2 n_1) + s_2 \right] \ln |x_1 - \theta_2 x_3| +$$

$$+ \frac{r_1^* + \theta_1^*}{r_2 - \theta_2} \left[r_2 \frac{\alpha_0}{x_1^*} (s_1 n_1 - s_2 n_2) H(x_1 - \theta_2 x_3) - s_1 r_2 H(\theta_2 x_3 - x_1) \right];$$

$$h_1^* = \frac{4\pi\rho}{H} \left[\left(s_1 n_1 - s_2 n_2 + s_1 \frac{x_1^*}{\alpha_0} \pi \right) \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} + \right.$$

$$\left. + \left(n_1 s_2 + n_2 s_1 + s_2 \frac{x_1^*}{\alpha_0} \pi \right) \frac{\alpha_0 x_3}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} \right].$$

Как и в предыдущем разделе, решения для u_i определены с точностью до постоянных; производные же, т. е. напряжения, составляющие тензоров Максвелла и т. п., будут определены однозначно. Решения (3.7) характеризуются черенковским конусом излучения значительной интенсивности (ср. [1-3]). Стационарные члены во всем проводнике происходят от непосредственного действия импульса и от взаимодействия с полем вакуума. Члены от взаимодействия с полем вакуума незначительны. Заметим, что если нас не интересует поле, излученное в вакуум, то, как и в [1], можно значительно упростить вычисления, пренебрегая малым взаимодействием с полем вакуума. Тогда мы бы имели дело только с системой уравнений в проводнике; решение получим, подставляя в граничные условия $h_1^* = 0$. С помощью (3.7) можно легко вычислить составляющие векторов поля в среде и в вакууме.

В заключение получим еще решение для случая $H = H_3 = H$. Для этой цели используем решения (2.20), применяя подстановки, аналогичные (3.1)–(3.3), и соответствующим образом продолжая аналитически остальные функции. Параметры, входящие в решения (2.20), примут вид

$$r_1 = r_1^* i; \\ r_1^* = \frac{(1 - v_2) \theta_1^*}{\theta_1^{*2} + \alpha_2^2}, \quad (3.8)$$

где

$$x_1 = \frac{H \alpha_0^2}{4 \pi^2 \rho} \left[\frac{a_1^2 (1 - r_1^* \theta_1^*) - 2 a_2^2}{a_1^2 (1 - r_2 \theta_2) - 2 a_2^2} - 1 \right]; \quad (3.9)$$

N, n не подлежат изменению,

$$v = n_1 + i n_2; \\ n_1 = \frac{a_1^2 (1 - r_1^* \theta_1^*) - 2 a_2^2}{a_1^2 (1 - r_2 \theta_2) - 2 a_2^2} (\theta_2 a_2^{*2} - a_2^2 r_2); \quad (3.10)$$

$$n_2 = a_2^{*2} \theta_1^* + a_2^2 r_2^*;$$

$$s_1 + i s_2 = \frac{P}{x_1 \pi^2 / \alpha_0 + \alpha_0 v^2 / x_1}; \\ s_1 = \frac{x_1}{\alpha_0} \frac{[x_1^2 \pi^2 / \alpha_0^2 + n_1^2 - n_2^2]}{(x_1^2 \pi^2 / \alpha_0^2 + n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 n_1^2 n_2^2} P; \quad (3.11)$$

$$s_2 = - \frac{x_1}{\alpha_0} \frac{2 n_1 n_2 P}{(x_1^2 \pi^2 / \alpha_0^2 + n_1^2 - n_2^2)^2 + 4 n_1^2 n_2^2}.$$

Тогда

$$u_1 = -s_1 \left\{ \left(n \pi^2 + \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_1 \right) \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) + \frac{n \alpha_0}{x_1} n_2 \varphi + \right. \\ + \left(N - \frac{n \alpha_0}{x_1} n_1 - \frac{\alpha_0 N}{x_1 \pi} n_2 \right) \ln r - \left(n \pi^2 + \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_1 \right) H(x_1 - \theta_2 x_3) - \\ - \frac{n \alpha_0}{x_1} n_2 M H(\theta_2 x_3 - x_1) - M \left(N - \frac{n \alpha_0 n_1}{x_1 \pi} - \frac{\alpha_0 N n_2}{x_1 \pi} \right) \ln |x_1 - \theta_2 x_3| \Big\} + \\ + s_2 \left\{ \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_2 \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) + \left(N - \frac{n \alpha_0 n_1}{x_1} \right) \varphi + \left(n \pi + \frac{\alpha_0 N}{x_1 \pi} n_1 - \frac{n \alpha_0}{x_1} n_2 \right) \ln r - \right. \\ - \frac{M \alpha_0 N}{x_1} n_2 H(x_1 - \theta_2 x_3) - M \left(N - \frac{n \alpha_0 n_1}{x_1} \right) H(\alpha_2 x_3 - x_1) + \\ + M \left[\frac{n \alpha_0 n_2}{x_1} - \left(n \pi + \frac{\alpha_0 N n_1}{x_1 \pi} \right) \right] \ln |x_1 - \theta_2 x_3| \Big\} - M_1 H(x_1 - \theta_2 x_3); \\ u_3 = -s_1 \left\{ - \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_2 r_1^* \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) + \left(N - \frac{n \alpha_0}{x_1} n_1 \right) \varphi + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{n\alpha_0}{x_1} n_2 - r_1^* \left(n\pi + \frac{\alpha_0 N}{\pi x_1} n_1 \right) \right] \ln r - r_2 \left(n\pi^2 + \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_1 \right) H(x_1 - \theta_2 x_3) - \\
& - \frac{n\alpha_0}{x_1} n_2 r_2 M H(\theta_2 x_3 - x_1) + M \left[r_2 \frac{\alpha_0 N}{\pi x_1} n_2 + \left(N - \frac{n\alpha_0}{x_1} n_1 r_2 \right) \right] \times \\
& \quad \times \ln |x_1 - \theta_2 x_3| \Big\} + s_2 \left\{ r_1^* \left(n\pi^2 + \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_1 \right) \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) + \frac{n\alpha_0}{x_1} n_2 \varphi - \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{\alpha_0 N}{\pi x_1} n_2 r_1^* + \frac{n\alpha_0 n_1}{x_1} \right) \ln r - \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_2 r_2 M H(x_1 - \theta_2 x_3) - \right. \\
& \quad \left. - \left(N - \frac{n\alpha_0 n_1}{x_1} \right) M r_2 H(\theta_2 x_3 - x_1) + \left[\frac{n\alpha_0 n_2}{x_1} - \left(n\pi + \frac{\alpha_0 N n_1}{\pi x_1} \right) \right] \times \right. \\
& \quad \left. \times r_2 M \ln |x_1 - \theta_2 x_3| \right\} - M_1 H(x_1 - \theta_2 x_3); \\
h_1^* & = \frac{4\pi\rho}{H} \frac{x_1}{\alpha_0} \left\langle s_1 \left\{ \left[\left(N - \frac{\alpha_0}{x_1} n_1 \right) \pi - \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_2 \right] \frac{\alpha_0 x_3}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} + \right. \right. \\
& + \left[\frac{\alpha_0 n_2}{x_1} \pi - \left(n\pi^2 + \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_1 \right) \right] \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} \Big\} - s_2 \left\{ \left[\left(N - \frac{\alpha_0}{x_1} n_1 \right) \pi - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_2 \right] \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} + \left[n\pi^2 + \frac{\alpha_0 N}{x_1} n_1 - \frac{\alpha_0}{x_1} n_2 \pi \right] \frac{\alpha_0 x_3}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2} \right\} \right\rangle + \\
& \quad \left. + M_1 \frac{x_1}{x_1^2 + \alpha_0^2 x_3^2}, \right.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

где

$$M = \frac{a_2^2(1 - r_1^* \theta_1^*) - 2a_2^2}{a_1^2(1 - r_2 \theta_2) - 2a_2^2}; \quad M_1 = \frac{PH\alpha_0}{\pi[a_1^2(1 - r_2 \theta_2) - 2a_2^2]}.$$

Решения (3.12) только количественно отличаются от решений (3.7); качественные результаты остаются теми же. Запаздывающие потенциалы, определяющие фронт конуса черенковского излучения, описываются членами стационарного типа. Как и в случае (3.7), члены, происходящие от взаимодействия с полем вакуума, малы по сравнению с членами, происходящими от непосредственного действия импульса. Случай скоростей, меньших магнитозвуковой, не рассматривается, так как конус излучения здесь отсутствует.

Итак, в случае анизотропного поля мы получаем решение такого же общего характера, как и в случае изотропного поля [1]. Усложнилась лишь процедура решения, что связано с невозможностью введения простых потенциалов, которые фигурировали в [1], и возникли новые области движения импульса.

Как и в [1], при сверхмагнитозвуковых скоростях мы получили поле взаимодействия, опережающее фронты конусов черенковского излучения, как результат взаимодействия поля в проводнике с полем в вакууме, где возмущения (после введения стационарности) заполняют всю область вакуума. Эти возмущения, конечно, незначительны. Интенсивности излучения в проводнике пропорциональны силе P .

Решения, полученные в [1] и в настоящей работе, можно сравнительно просто перенести на случай подвижного проводника с током, перемещающегося по поверхности полупространства, что в случае плазмы рассматривалось в [9]. Литература по этому вопросу дана в обзорной работе [10].

Как мы уже упоминали в [1], представляет интерес также проблема автоколебаний осциллятора, движущегося по поверхности полупространства. Такой эффект связан с эффектом магнитоупругого черенковского излучения как и в чисто электродинамическом случае, рассмотренном в [8]. Вопрос этот мы рассмотрим отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Калинский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, 618 (1964)
2. S. Kaliski, Proc. Vibr. Probl., 4, 189 (1963).
3. S. Kaliski, Proc. Vibr. Probl., 4, 301 (1963).
4. S. Kaliski, D. Rogula, Proc. Vibr. Probl., 1, 64(1960).
5. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, Физматгиз, М., 1962.
6. М. Н. Коган, ПММ, 23, 70 (1959).
7. М. Н. Коган, ПММ, 24, 530 (1960).
8. В. Л. Гинзбург, УФН., 69, 537 (1959).
9. А. И. Морозов, Сб. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 1958.
10. Б. М. Болотовский, УФН, 62, 201 (1957); УФН, 75, 295 (1961).

Институт основных проблем техники
Польской академии наук

Поступила в редакцию
15 июля 1963 г.

MECHANICAL GENERATION OF ČERENKOV RADIATION IN A PERFECTLY CONDUCTING ELASTIC MEDIUM BORDERING ON VACUUM. II.

S. Kaliski

The same problem has been considered as in the paper [1] but using „anisotropic“ orientation of a constant magnetic field. The general method of solution is similar to that of [1] but quantitatively and quantitatively there are real differences between them.

УДК 535. 36

РАССЕЯНИЕ СВЕТА ЗАРЯДОМ, ДВИЖУЩИМСЯ В СРЕДЕ

A. Гайлитис

Рассматривается рассеяние поперечной электромагнитной волны отдельным зарядом, движущимся в прозрачной среде как с досветовой, так и со сверхсветовой скоростью. Показано, что с ростом скорости заряда при ее приближении к скорости света в среде рассеяние света резко возрастает. При сверхсветовых скоростях рассеяние сводится к уширению линии черенковского излучения.

1. Применение мощных источников света (лазеров) позволяет экспериментально исследовать рассеяние света на электронных пучках [1]. Равномерное движение электронов пучка влияет на рассеяние тривиальным образом [2]: из-за эффекта Допплера рассеянные в разных направлениях волны имеют разную частоту, а сечение рассеяния меняется согласно формулам релятивистского преобразования сечения [3]. Наличие среды меняет положение более существенно. Достаточно быстро движущийся заряд в среде спонтанно излучает (черенковское излучение), рассеяние света приводит к изменению спектра спонтанного излучения. Изучению возникающих при этом явлений посвящено данное сообщение.

2. Пусть в изотропной среде с коэффициентом преломления $n(\omega)$ движется заряд e и распространяется электромагнитная волна

$$E = E_0 e^{i(k_0 r - \omega_0 t)}. \quad (1)$$

Если волна слабая, то она вызывает небольшие колебания заряда вокруг равномерного прямолинейного движения

$$r = ut,$$

где u — средняя скорость заряда. Гинзбургом и Эйдманом [4] (см. также [5]) вычислено излучение заряда, колеблющегося параллельно (индекс \parallel) и перпендикулярно (индекс \perp) скорости u с частотой Ω и амплитудой R . Полное нечеренковское излучение*

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-1}^1 N(\omega, \vartheta) d\cos \vartheta \quad (2)$$

представляет собой интеграл по излученным частотам** и углам ϑ между u и направлением излучения. Согласно [4],

$$N_{\parallel}(\omega, \vartheta) = \frac{e^2 R_{\parallel}^2 |\omega^3|}{4c^2 u} \sin^2 \vartheta \delta \left[\cos \vartheta - \frac{c}{un(\omega)} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right) \right]; \quad (3a)$$

$$N_{\perp}(\omega, \vartheta) = \frac{e^2 R_{\perp}^2 |\omega^3|}{8c^2 u} \left[\left(1 - \frac{un}{c} \cos \vartheta \right)^2 + \left(\frac{un}{c} - \cos \vartheta \right)^2 \right] \times \\ \times \delta \left[\cos \vartheta - \frac{c}{un(\omega)} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right) \right]. \quad (3b)$$

* Полное излучение заряда мы разбиваем на черенковское (направление и частота которого связаны соотношением $\cos \theta = c/un(\omega)$) и нечеренковское ($\cos \theta \neq c/un(\omega)$).

** Для упрощения записи формул излучению, распространяющемуся внутри черенковского конуса, формально приписывается отрицательная частота.

При выводе (3), предполагалась малость R по сравнению с длиной волны:

$$R^2 \ll (c/n\omega)^2. \quad (4)$$

Если соблюдено (4), то продольные и поперечные колебания излучают независимо, и общее излучение есть сумма выражений (3а) и (3б). Для решения поставленной задачи необходимо подсчитать Ω , R_{\parallel} , R_{\perp} для волны (1). Тогда получим*

$$\Omega = \omega_0 \left(1 - \frac{u n_0}{c} \cos \vartheta_0 \right); \quad (5)$$

$$R_{\parallel}^2 = \frac{e^2 (1 - u^2/c^2)^3}{m^2 u^2 \Omega^4} (u E_0)^2; \quad (6)$$

$$R_{\perp}^2 = \frac{e^2 (1 - u^2/c^2)}{m^2 \Omega^4} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}_0 \mathbf{u}}{\omega_0} \right)^2 E_0^2 + \left(\frac{\mathbf{k}_0^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{u^2} \right) (u E_0)^2 \right].$$

Согласно (3), (6),

$$\begin{aligned} N = N_{\parallel} + N_{\perp} &= \frac{e^4 |\omega|^3}{4 c^2 u \Omega^4 m^2} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^3 \left(\frac{u E_0}{u} \right)^2 \sin^2 \vartheta + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}_0 \mathbf{u}}{\omega_0} \right)^2 E_0^2 + \left(\frac{\mathbf{k}_0^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{u^2} \right) (u E_0)^2 \right] \times \\ &\times \left. \left[\left(1 - \frac{u n}{c} \cos \vartheta \right)^2 + \left(\frac{u n}{c} - \cos \vartheta \right)^2 \right] \right\} \delta \left[\cos \vartheta - \frac{c}{u n} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим два случая: волна поляризована (вектор E_0) в плоскости u , \mathbf{k}_0 (индекс α) и перпендикулярно ей (индекс β):

$$\begin{aligned} N_{\alpha} &= \frac{e^4 E_{\alpha}^2 |\omega|^3}{4 c^2 u \Omega^4 m^2} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^3 \sin^2 \vartheta \sin^2 \vartheta_0 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \times \right. \\ &\times \left[\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} + \left(\frac{u^2 n_0^2}{c^2} - 1 \right) \sin^2 \vartheta_0 \right] \left[\left(1 - \frac{u n}{c} \cos \vartheta \right)^2 + \left(\frac{u n}{c} - \cos \vartheta \right)^2 \right] \times \\ &\times \left. \delta \left[\cos \vartheta - \frac{c}{u n} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} N_{\beta} &= \frac{e^4 E_{\beta}^2 |\omega|^3 (1 - u^2/c^2)}{8 c^2 u m^2 \omega_0^2 \Omega^2} \left[\left(1 - \frac{u n}{c} \cos \vartheta \right)^2 + \left(\frac{u n}{c} - \cos \vartheta \right)^2 \right] \times \\ &\times \delta \left[\cos \vartheta - \frac{c}{u n} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right) \right]. \end{aligned} \quad (8b)$$

Формулами (8), (5) решен вопрос о рассеянии плоской монохроматической волны на движущемся заряде. Если на заряд падают сразу несколько волн и результирующее движение подчиняется условию (4), полная рассеянная мощность будет суммой членов типа (8).

* Выражения (6) получены из уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right] \simeq e \left[\left(1 - \frac{\mathbf{k}_0 \mathbf{u}}{\omega_0} \right) \mathbf{E} + \frac{\mathbf{k}_0 (u \mathbf{E})}{\omega_0} \right]$$

в предположении о малой амплитуде колебаний.

3. Если имеется некогерентное излучение, где волны различных волновых векторов \mathbf{q} некоррелированы, то

$$\overline{E^2} = \int (E_{q\alpha}^2 + E_{q\beta}^2) d^3q \quad (9)$$

и в формулах (8) появляется интегрирование $2 \int d^3q$. Индексом q снабдим частоту падающего излучения (вместо ω_0) и Ω , т. е.

$$\Omega_q = \omega_q \left(1 - \frac{u n_q}{c} \cos \vartheta_q \right), \quad n_q \equiv n(\omega_q).$$

Если излучение не поляризовано, т. е.

$$E_{q^\alpha}^2 = E_{q^\beta}^2 = \frac{1}{2} E_q^2, \quad (10)$$

и изотропно, то по направлениям q можно проинтегрировать. Аргумент δ -функции имеет вид

$$\cos \vartheta - \frac{c}{un} \left(1 - \frac{\omega_q}{\omega} \right) - \frac{\omega_q n_q}{\omega n} \cos \vartheta_q .$$

И, следовательно, результат, отличный от нуля, имеет место при

$$\left| \frac{n \cdot \omega}{n_q \omega_q} \left[\cos \vartheta - \frac{c}{u n} \left(1 - \frac{\omega_q}{\omega} \right) \right] \right| \leq 1.$$

Тогда

$$N = \frac{e^4 \pi}{2c^5 um^2} \frac{n(\omega)}{[1 - (un/c) \cos \vartheta]^4} \int_0^\infty n_q \omega_q \frac{dn_q \omega_q}{d \omega_q} E_q^2 \times$$

$$\times \Theta \left\{ 1 - \left| \frac{n \omega}{n_q \omega_q} \left[\cos \vartheta - \frac{c}{un} \left(1 - \frac{\omega_q}{\omega} \right) \right] \right| \right\} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^3 \times \sin^2 \vartheta + \right.$$

$$+ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \left[\left(1 - \frac{un}{c} \cos \vartheta \right)^2 + \left(\frac{un}{c} - \cos \vartheta \right)^2 \right] \left[\frac{\omega^2}{\omega_q^2} \left(1 - \frac{un}{c} \cos \vartheta \right)^2 - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{u^2 n_q^2}{c^2} \right) \right] \right\} d\omega_q,$$
(11)

где

$$\Theta(z) = \begin{cases} 0 & (z < 1) \\ 1 & (z \geq 1) \end{cases}; \quad \kappa = 1 - \frac{c^2}{u^2 n_q^2} \left[\frac{\omega}{w_q} \left(1 - \frac{u n}{c} \cos \vartheta \right) - 1 \right]^2.$$

Формуле (11) может быть придана несколько́ другая форма, если ввести эффективную температуру излучения:

$$T(\omega_q) = \pi^2 n_q \frac{d n_q}{d \omega_q} E_q^2; \quad (12)$$

$$N = \frac{e^4 n(\omega)}{2c^5 u \pi m^2 [1 - (un/c) \cos \vartheta]^4} \int_0^\infty \omega_q T(\omega_q) \times \\ \times \Theta \left\{ 1 - \left| \frac{n \omega}{n - \omega_q} \left[\cos \vartheta - \frac{c}{un} \left(1 - \frac{\omega_q}{\omega} \right) \right] \right| \right\} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^3 \times \sin^2 \vartheta + \right. \quad (13)$$

$$+ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \left[\left(1 - \frac{un}{c} \cos \vartheta\right)^2 + \left(\frac{un}{c} - \cos \vartheta\right)^2 \right] \times \\ \times \left[\frac{\omega^2}{\omega_q^2} \left(1 - \frac{un}{c} \cos \vartheta\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{u^2 n^2}{c^2} - 1\right) \right] \} d\omega_q.$$

4. Изучим ряд частных случаев.

а) $un/c \ll 1$, монохроматическая волна. Интегрируя (2), (8), получаем

$$Q = \frac{1}{2} (Q_\alpha + Q_\beta) = \frac{e^4 E_0^2 n}{3m^2 c^3} = \frac{E_0^2 cn}{8\pi} \sigma_{\text{Томс}}. \quad (14)$$

При $n = 1$ результат сводится к формуле Томсона.

б) $un/c > 1$, монохроматическая падающая волна. Излучение частот $|\omega|$ будет при углах

$$\cos \vartheta = \frac{c}{un} \left[1 \mp \frac{\omega_0}{|\omega|} \left(1 - \frac{un_0}{c} \cos \vartheta_0 \right) \right]. \quad (15)$$

Если

$$\left| 1 - \frac{un_0}{c} \cos \vartheta_0 \right| < \frac{|\omega|}{\omega_0} \left[\frac{un(\omega)}{c} - 1 \right],$$

то частота ω будет излучаться в трех направлениях: $\cos \vartheta = c/un$ (черенковское излучение) и (15) (две рассеянные волны с двух сторон черенковского конуса). Когда направление падающей волны стремится к черенковскому конусу, рассеяние волны растет по интенсивности как

$$N \sim \frac{1}{\Omega^4} \sim \frac{1}{[1 - (un_0/c) \cos \vartheta_0]^4} \quad (16)$$

до тех пор, пока не нарушится (4) и их направления приближаются к черенковским углам. Сильный рост рассеянных волн связан с одновременным снижением черенковского излучения. Из формул, приведенных Гинзбургом и Эйдманом [4], способом, которым были получены выражения (2), (3), может быть найдено изменение черенковского излучения:

$$\Delta Q_c = - \left[\frac{e^2 R_\perp^2}{2uc^2} \int_{\substack{un(\omega) > c \\ \omega > 0}} \left(1 - \frac{c^2}{u^2 n^2}\right) \omega^3 d\omega + \right. \\ \left. + \frac{e^2 R_\perp^2}{4c^2 u} \int_{\substack{un(\omega) > c \\ \omega > 0}} \omega^3 \frac{c^2}{u^2 n^2} \left(\frac{u^2 n^2}{c^2} - 1\right)^2 d\omega \right] \quad (17)$$

Это изменение равно (с обратным знаком) рассеянному излучению при $\Omega = 0$ (2), (3). Согласно (17), ΔQ_c от Ω не зависит.

Рост рассеяния с уменьшением Ω является следствием роста амплитуды колебаний. При $Rn_0\omega_0$ или $Rn\omega \sim c$, когда интенсивность рассеянных волн составляет существенную долю всего излучения, условие (4) нарушается. В этом случае вышеприведенные формулы становятся неверными; наряду с двумя рассеянными волнами излучаются и их гармоники. Когда $\Omega \ll \omega$, в каждый момент времени заряд излучает как равномерно движущийся со скоростью, равной мгновенной скорости.

Медленное изменение скорости приводит к периодическому колебанию черенковского конуса, следовательно, к отцеплению от черенковской линии боковых частот. Суммарная же излученная мощность соответствует какой-то средней скорости движения заряда. Несмотря на существенное изменение спектра, изменение энергии суммарного излучения ничтожно для достаточно слабой волны (1): $eE_0 \ll m\omega_0$.

в) Остановимся несколько подробнее на рассеянии изотропных по направлениям электромагнитных волн (см. (13)). Проследим, как меняется картина рассеяния на определенной частоте рассеянного света ω с ростом скорости заряда. Согласно (14), при малых скоростях заряда рассеяние в среде лишь множителем n отличается от рассеяния в вакууме. С приближением скорости заряда к скорости света $c/n(\omega)$ мощность рассеянного света резко возрастает. Действительно, оставляя в (13) наиболее существенные при $0 < 1 - un/c \ll 1$, $(n-1) \sim 1$ члены и проинтегрировав по углу θ , получаем

$$\int_{-1}^1 d\cos\theta N(\omega, \theta) \approx \frac{e^4 n}{6\pi u c^5 m^3} \frac{(1 - 1/n^2)^3}{(1 - un/c)^3} \int_{un_q > c} \omega_q T(\omega_q) \left(1 - \frac{c^3}{u^3 n_q^2}\right) d\omega_q. \quad (18)$$

Максимум углового распределения рассеянного света составляет небольшой угол

$$\tilde{\theta} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(1 - \frac{un}{c}\right)} \quad (19)$$

со скоростью u . При скоростях, очень близких к $u = c/n$, формулы (18), (19) становятся неприменимыми по тем же причинам, что и (8). При $un > c$ рассеянные волны распространяются в основном вблизи черенковского конуса $\cos\theta_c = c/un$. Заменяя $\cos\theta$ на $\cos\theta_c$ во всех членах (13), за исключением знаменателя, получим

$$\begin{aligned} N = & \frac{e^4 n}{2c^5 u \pi m^2 \sin^2 \theta_c (\theta - \theta_c)^4} \times \\ & \times \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^3 \cos^4 \theta_c \int_{un_q > c} \omega_q T(\omega_q) \left(1 - \frac{c^2}{u^2 n_q^2}\right) d\omega_q + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \sin^2(2\theta_c) \int_{un_q > c} \omega_q T(\omega_q) \left[\frac{u^2 n_q^2}{c^2} - 1 \right]^2 \frac{c^2}{u^2 n_q^2} d\omega_q \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассеяние приводит к уширению черенковской линии со своеобразным законом крыльев

$$N \propto \frac{1}{[\theta - \theta_c(\omega)]^4}, \quad (21)$$

уширение максимально вблизи порога (из-за знаменателя $\sin^2 \theta_c$) и исчезает для ультраквазистатических скоростей. Формула (20) применима лишь в области крыльев, вблизи же центра черенковской линии наше приближение непригодно.

Автор считает приятным долгом поблагодарить В. Н. Цытовича за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Fiocco, E. Thompson, Phys. Rev. Lett., **10**, 89 (1963).
2. R. H. Milburn, Phys. Rev. Lett., **10**, 75 (1963).
3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1960.
4. В. Л. Гинзбург и В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **36**, 1823 (1959).
5. H. Motz, J. Appl. Phys., **25**, 527 (1951); Русский перевод в сб. Миллиметровые и субмиллиметровые волны, ИЛ, М., 1959, стр. 194.

Физический институт им П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
6 июня 1963 г.

LIGHT SCATTERING BY A CHARGE, MOVING IN A MEDIUM

A. Gaillot

The scattering of a transverse electromagnetic wave by a single charge, moving through a transparent medium at sublight and super-light velocities is considered. Light scattering is shown to increase rapidly with the charge velocity increasing up to the light velocity in the medium. At super-light velocities the scattering effect determines the spread of Čerenkov radiation spectrum.

УДК 621.372 853.32 · 538.12

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

A. H. Кондратенко

На основе кинетического уравнения с самосогласованным полем при пренебрежении «ближними» столкновениями частиц рассмотрено распространение электромагнитных колебаний в плазменном цилиндрическом волноводе, граничащем с вакуумом и находящемся в сильном магнитном поле. Рассмотрены случаи изотермической и неизотермической плазмы. Найдены значения фазовой скорости и коэффициентов затухания как функции радиуса волновода, температур частиц плазмы и частоты распространяющейся волны.

Гидродинамическая теория плазменных волноводов медленных волн изучена достаточно подробно [1-4]. Однако гидродинамическая теория не рассматривает важные эффекты, связанные с тепловым движением частиц, например, затухание волн, которые особенно существенны при малых фазовых скоростях. Поскольку в волноводах медленных волн фазовая скорость распространяющейся волны V_ϕ много меньше скорости света c и может быть сравнима со средней тепловой скоростью электронов u_{Te} , то необходимость кинетического рассмотрения становится очевидной. Затухание волн в плазменном волноводе вблизи ионного циклотронного резонанса рассматривалось в работе [5].

В данной работе рассматривается вопрос о распространении аксиально-симметричных электромагнитных волн в плазменном цилиндрическом волноводе радиуса a , находящемся в постоянном, направленном вдоль оси волновода (ось z) магнитном поле, настолько сильном $e_a H_0/m_a c \gg \Omega_a, k_\perp u_{Ta}$, что движением электронов и ионов поперек поля можно пренебречь.

Учет теплового движения частиц плазмы вдоль магнитного поля произведем на основе кинетического уравнения с самосогласованным полем [6].

1. Если ограничиться линейной теорией и в качестве равновесных функций распределения для электронов ($\alpha = e$) и однократно ионизированных ионов ($\alpha = i$) взять максвелловские, то в предположении малых фазовых скоростей $V_\phi^2 \ll c^2$ для плоских волн получим следующее уравнение [7], связывающее частоту распространяющейся волны ω с составляющими волнового вектора \mathbf{k} вдоль (k_z) и перпендикулярно (k_\perp) оси z :

$$\frac{k_\perp^2}{k_z^2} \omega^2 + \omega^2 + \frac{2}{V\pi} \sum_{\alpha=e, i} \Omega_\alpha^2 z_\alpha^2 J(z_\alpha) = 0, \quad (1)$$

где $\Omega_\alpha^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_\alpha}$, n_0 — равновесная плотность электронов, равная равновесной плотности ионов, e_α и m_α — заряд и масса частиц сорта α ,

$z_\alpha = \omega / V\sqrt{2} k_3 u_{T_\alpha}$, $u_{T_\alpha} = (T_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$, T_α — температура частиц сорта α ,
 $J(z) = \int_z^\infty \frac{x e^{-x^2}}{x - z} dx$.

Решение в волноводе, отыскиваемое в виде цилиндрических волн, распространяющихся вдоль оси z ,

$$A = A_0 J_{1,0}(k_\perp r) e^{i(k_\perp z - \omega t)}$$

($J_{1,0}$ — функции Бесселя первого и нулевого порядка) также приводит к уравнению (1), в чем можно убедиться непосредственным вычислением.

Если воспользоваться условием непрерывности полей E_z и H_φ на границе плазма—вакуум:

$$\begin{aligned} E_z^{\text{пл}}(t, a, z) &= E_z^{\text{вак}}(t, a, z); \\ H_\varphi^{\text{пл}}(t, a, z) &= H_\varphi^{\text{вак}}(t, a, z), \end{aligned} \quad (2)$$

то для определения k_3 как функции k_\perp получим следующее уравнение:

$$k_\perp \frac{J_1(k_\perp a)}{J_0(k_\perp a)} = k_3 \frac{K_1(k_3 a)}{K_0(k_3 a)}. \quad (3)$$

Здесь K_1 и K_0 — функции Макдональда первого и нулевого порядка, которые являются радиальными функциями полей в вакууме.

Аналитическое исследование уравнений (1) и (3) можно провести при больших и малых z_α . Асимптотическое поведение интегралов $J(z)$ следующее [8]:

$$J(z) = -\frac{V\pi}{2} \frac{1}{z^2} \left[1 + \frac{3}{2z^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \right] + \pi i e^{-z^2}, \quad |z| \gg 1, \quad \text{Im } z \ll 1; \quad (4)$$

$$J(z) = V\pi \left[1 + i V\pi z + O(z^2) \right], \quad |z| \ll 1, \quad \text{Im } z \ll \text{Re } z. \quad (5)$$

2. Рассмотрим случай «холодной» плазмы, когда

$$|z_\alpha| \gg 1 \quad (V_\phi^2 \gg u_{T_\alpha}^2). \quad (6)$$

Подставляя разложение (4) в уравнение (1) и учитывая, что $\Omega_e^2 \gg \Omega_i^2$, найдем

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{k_\perp^2}{k_3^2} \omega^2 + \omega^2 - \Omega_e^2 \left(1 + 3 \frac{u_{T_\alpha}^2 k_3^2}{\omega^2} \right) + \\ &\quad + 2 V\pi i \Omega_e^2 z_\alpha^3 e^{-z_\alpha^2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим $\omega \rightarrow \omega_1 = \omega + i\gamma$, $\gamma \ll \omega$. Тогда, приравнивая нулю $\text{Re } \Delta$ и подставляя найденное отсюда k_\perp^2 в уравнение (3), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} + 3 \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \frac{u_{Te}^2}{V_\Phi^2}\right)^{1/2} \frac{J_1[(a/V_\Phi)(3\Omega_e^2 u_{Te}^2 V_\Phi^{-2} + \Omega_e^2 - \omega^2)]}{J_0[(a/V_\Phi)(3\Omega_e^2 u_{Te}^2 V_\Phi^{-2} + \Omega_e^2 - \omega^2)]} = \\ = \frac{K_1\left(\frac{\omega a}{V_\Phi}\right)}{K_0\left(\frac{\omega a}{V_\Phi}\right)}. \quad (8)$$

При $u_{Te} = 0$ уравнение (8) исследовалось в работе [4], где было показано, что если $\omega^2 \rightarrow \Omega_e^2$, то $V_\Phi^2 \rightarrow 0$. Однако при $\omega^2 \approx \Omega_e^2$ или больших температурах электронов плазмы гидродинамическое рассмотрение несправедливо. Если $\omega a / V_\Phi \gg 1$, то из уравнения (8) найдем

$$V_\Phi^2 = \frac{a^2}{2\lambda_p^2} \left[\Omega_e^2 - \omega^2 + \left[(\Omega_e^2 - \omega^2)^2 + 12 \frac{\lambda_p^2}{a^2} u_{Te}^2 \Omega_e^2 \right]^{1/2} \right], \quad (9)$$

где $\lambda_p = \lambda_{0p}$ — корень нулевой функции Бесселя, если

$$3\Omega_e^2 \frac{u_{Te}^2}{V_\Phi^2} \gg \Omega_e^2 - \omega^2, \quad (10)$$

и $\lambda_p = \lambda_{1p}$ — корень первой функции Бесселя в противоположном случае.

Как видно из уравнения (9), если $\omega^2 \rightarrow \Omega_e^2$, то фазовая скорость существенно зависит от средней тепловой скорости электронов плазмы.

Если $\omega a / V_\Phi \ll 1$, то аналитическое исследование уравнения (8) при выполнении неравенства (10) затруднено. При $\omega^2 \approx \Omega_e^2$ это уравнение принимает следующий вид:

$$\sqrt{3} \frac{u_{Te}}{V_\Phi} \frac{J_1(\sqrt{3} a \Omega_e u_{Te} / V_\Phi^2)}{J_0(\sqrt{3} a \Omega_e u_{Te} / V_\Phi^2)} = \frac{K_1(\Omega_e a / V_\Phi)}{K_0(\Omega_e a / V_\Phi)}. \quad (11)$$

Из уравнения (11) видно, что если $a \rightarrow 0$ или $u_{Te} \rightarrow 0$, то и $V_\Phi \rightarrow 0$, что находится в соответствии с гидродинамической теорией [4].

Учет экспоненциально малых слагаемых в уравнении (10) дает для временного коэффициента затухания γ выражение, аналогичное найденному Ландау [9] для безграничной плазмы; однако фазовая скорость здесь будет зависеть не только от температуры, но и от радиуса волновода:

$$\frac{\gamma}{\omega} = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{V_\Phi^3}{u_{Te}^3} \exp\left(-\frac{V_\Phi^2}{2u_{Te}^2}\right). \quad (12)$$

Если же рассмотреть возбуждение колебаний внешними токами, считая частоту ω вещественной, то, полагая в уравнении (7) $k_3 = k_{\parallel} + ik$, $k \ll k_{\parallel}$, для декремента пространственного затухания найдем

$$\frac{k}{k_{\parallel}} = - \frac{\Omega_e^2}{\Omega_e^2 - \omega^2 + 6\Omega_e^2 u_{Te}^2 V_\Phi^{-2}} \frac{\gamma}{\omega}. \quad (13)$$

С уменьшением радиуса волновода фазовая скорость, как это видно из формулы (9) и уравнения (11), уменьшается, поэтому затухание волн увеличивается. Затухание также увеличивается с увеличением

радиальной моды колебаний λ_p . Такая же зависимость декремента временного затухания от размеров плазмы для случая продольных плазменных колебаний получена в работе [10].

3. Рассмотрим распространение электромагнитных колебаний в анизотропной плазме (ионно-акустических волн), когда

$$|z_e| \ll 1 \ll |z_i|, \text{ т. е. } u_{Te}^2 \gg V_\Phi^2 \gg u_{Ti}^2. \quad (14)$$

В этом случае уравнение (1) при пренебрежении экспоненциально малым слагаемым принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta = & \frac{k_\perp^2}{k_3^2} \omega^2 + \omega^2 + \frac{\Omega_e^2 \omega^2}{k_3^2 u_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k_3 u_{Te}} \right) - \\ & - \Omega_i^2 \left(1 + \frac{k_3^2 u_{Ti}^2}{\omega^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Как и в предыдущем случае, полагая $\operatorname{Re} \Delta = 0$ и считая $k_\perp^2 a^2 \gg 1$, из уравнений (3) и (15) найдем

$$V_\Phi^2 = \frac{u_{Te}^2 (\Omega_i^2 - \omega^2) + [(\Omega_i^2 - \omega^2)^2 u_{Te}^4 + 12 \Omega_i^2 u_{Ti}^2 u_{Te}^2 (\Omega_e^2 + \lambda_p^2 u_{Te}^2 / a^2)]^{1/2}}{2(\Omega_e^2 + \lambda_p^2 u_{Te}^2 / a^2)}, \quad (16)$$

где $\lambda_p = \lambda_{0p}$, если $\omega a / V_\Phi \gg k_\perp a \gg 1$ и $\lambda_p = \lambda_{1p}$, если $k_\perp a \gg 1 \gg \omega a / V_\Phi$.

В случае малых радиусов волновода, когда $\lambda_p^2 = u_{Te}^2 / a^2 \gg \Omega_e^2$, фазовая скорость волны не зависит от температуры электронов плазмы и имеет вид

$$V_\Phi^2 = \frac{a^2}{2\lambda_p^2} \left[\Omega_i^2 - \omega^2 + \left((\Omega_i^2 - \omega^2)^2 + \frac{12\lambda_p^2 u_{Ti}^2 \Omega_i^2}{a^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (17)$$

Если же $\lambda_p^2 u_{Te}^2 / a^2 \ll \Omega_e^2$, то V_Φ не зависит от радиуса волновода и имеет то же значение, что и в безграничной плазме:

$$V_\Phi^2 = \frac{u_{Te}^2}{2\Omega_e^2} \left\{ \Omega_i^2 - \omega^2 + \left[(\Omega_e^2 - \omega^2)^2 + 12\Omega_i^2 \Omega_e^2 \frac{u_{Ti}^2}{u_{Te}^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (18)$$

Исследовать уравнения (3) и (15) при $\omega a / V_\Phi \ll 1$ затруднительно. Однако, если $\omega^2 \approx \Omega_i^2$ и $V_\Phi^4 \ll 3\mu u_{Ti}^2 u_{Te}^2$, то уравнение (3) имеет такой же вид, как и (11) с заменой индексов $e \rightarrow i$ ($\mu = m_e/m_i$).

Декременты ионно-акустической волны равны

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\omega} = & - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{\mu} \left(\frac{V_\Phi}{u_{Te}} \right)^3; \\ \frac{\chi}{k_\perp} = & - \frac{\Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2 + 6\Omega_i^2 u_{Ti}^2 / V_\Phi^2} \frac{\gamma}{\omega}. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как фазовая скорость волны убывает с уменьшением радиуса волновода (см. (16) и (17)), то и декременты уменьшаются и оказываются максимальными для безграничной плазмы.

Пользуюсь случаем выразить благодарность Я. Б. Файнбергу за предложенную тему и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. O. Shuman, Z. Phys., **128**, 629 (1950).
2. Ya. B. Fainberg, CERN Symposium, **1**, 84, (1956).
3. Л. М. Пятигорский, Уч. зап. Харьковского университета, **49**, 38 (1953).
4. Я. Б. Файнберг, М. Ф. Горбатенко, ЖЭТФ, **29**, 549 (1959).
5. Р. З. Сагдеев, В. Д. Шафранов, Труды второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии, М., 1959, стр. 202.
6. А. А. Власов, ЖЭТФ, **8**, 231 (1938).
7. J. B. Bernstein, R. M. Kulsrud, Phys. Fluids, **3**, 937 (1960).
8. В. Н. Фадеев, М. Н. Терентьев, Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, ГИТТЛ, М., 1954.
9. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **16**, 574 (1946).
10. D. Montgomery, Phys. Fluids, **6**, 1109 (1963).

Поступила в редакцию
21 декабря 1963 г.

KINETIC THEORY OF PLASMA WAVEGUIDE IN A STRONG MAGNETIC FIELD

A. N. Kondratenko

On the kinetic equation with a self-consistent field (neglecting „close“ collisions of particles) the propagation of electromagnetic oscillations has been considered in a plasma cylindrical waveguide bordering on vacuum and being in a strong magnetic field. The cases of the isothermal and non-isothermal plasma have been considered. The values of a phase velocity and attenuation factors have been found as the function of the waveguide radius, temperature of plasma particles and the propagating wave frequency.

УДК 533.922

О ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

B. M. Яковенко

Методом кинетического уравнения решается задача о переходном излучении в магнитоактивной плазме. При условии зеркального отражения электронов от поверхности плазмы найдено выражение для спектральной плотности излучения в вакуум. Обсуждаются особенности переходного излучения в магнитоактивной плазме.

Известно, что заряженная частица, пролетающая границу раздела двух сред, излучает электромагнитные волны. Теория этого эффекта, получившего название переходного излучения, была развита Гинзбургом и Франком [1]. Переходное излучение аналогично излучению при столкновениях, так как в момент перехода заряда из вакуума в среду происходит «аннигиляция» заряда и его изображения.

В дальнейшем задача о переходном излучении рассматривалась в ряде работ [2-4], где показано, что при больших скоростях частицы наряду с переходным возникает и черенковское излучение электромагнитных волн. Пространственная дисперсия при этом не учитывалась.

Учет пространственной дисперсии приводит к возникновению дополнительных волн [5], которые на поверхности раздела при определенных условиях трансформируются в электромагнитные волны. Влияние эффектов пространственной дисперсии на переходное излучение частицы в изотропной среде рассмотрено в работах [6-10].

В настоящей работе методом кинетического уравнения решается задача о переходном излучении в магнитоактивной плазме. При этом предполагается, что на границе плазмы электроны отражаются зеркально, а внешнее магнитное поле перпендикулярно границе раздела плазма — вакуум.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть заряд q движется по нормали к поверхности плазмы $z = 0$, которая занимает полупространство $z \geq 0$. Внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 направлено вдоль оси z . Полная система уравнений задачи состоит из уравнений Максвелла и линеаризованного кинетического уравнения для электронов плазмы:

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} [e \int u f d\mathbf{p} + q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt})]; \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}; \quad (-i\omega + v) f + e E u \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} + \frac{e}{c} [\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0.$$

Здесь \mathbf{E} , \mathbf{H} ($e^{-i\omega t}$) — электрическое и магнитное поля, f — добавка к равновесной функции распределения f_0 , ϵ , u , p , v — энергия, скорость, импульс и эффективная частота соударений электронов плазмы,

$v = (0, 0, v)$ — скорость заряда; движением ионов пренебрегается. Границные условия для полей обычные: тангенциальные компоненты E и H непрерывны. Для функции распределения на границе выполняется условие зеркального отражения:

$$f(0, u_x, u_y, u_z) = f(0, u_x, u_y, -u_z). \quad (2)$$

Если продолжить электрическое поле на область $z < 0$ (тангенциальные компоненты $E_t(z)$ — четным образом, а нормальные — нечетным), то уравнения (1) в фурье-компонентах запишутся в виде

$$E_k(\omega, k) = L_{ki}^{-1}(\omega, k) N_i(\omega, k), \quad (3)$$

где

$$L_{ik}(\omega, k) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon'_{ik}(\omega, k) + k_i k_k - k^2 \delta_{ik}; \quad (4)$$

$$N_\alpha = E'_\alpha(0, x, \omega) - i x_\alpha E_z(0, x, \omega); \quad k^2 = k_z^2 + x^2;$$

$$N_3 = \frac{i q \omega}{2 \pi c^2} \left[\delta_+ \left(\frac{\omega}{v} + k_z \right) - \delta_+ \left(\frac{\omega}{v} - k_z \right) \right]; \quad \delta_+(x) = \delta(x) + \frac{i}{\pi} P \frac{1}{x}. \quad (5)$$

(По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3; $\alpha = x, y$; штрих означает производную по z .) Символ P означает, что особенность при $x = 0$ следует понимать в смысле главного значения.

Фурье-компоненты $E(\omega, k)$ связаны с $E(\omega, x, z)$ следующим соотношением:

$$E_i(\omega, x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_i(\omega, k) e^{ikz} dk_z. \quad (6)$$

При этом тензор диэлектрической проницаемости бесстолкновительной максвелловской плазмы $\epsilon'_{ik}(\omega, k)$ в системе координат, где ось z направлена вдоль магнитного поля, а ось x — вдоль радиальной составляющей волнового вектора x , запишется так [11]:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= 1 - \frac{4z_0}{V\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{b^2} \int_0^{\infty} t J_n^2 e^{-t^2} dt \int_C \frac{e^{-y^2} dy}{z_n - y}; \\ \epsilon'_{xy} &= -i \frac{4z_0}{V\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{b} \int_0^{\infty} t^2 J_n J_n' e^{-t^2} dt \int_C \frac{e^{-y^2} dy}{z_n - y}; \\ \epsilon'_{xz} &= - \frac{4z_0}{V\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{b} \int_0^{\infty} t J_n^2 e^{-t^2} dt \int_C \frac{ye^{-y^2} dy}{z_n - y}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\epsilon'_{yy} = 1 - \frac{4z_0}{V\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t^3 J_n'^2 e^{-t^2} dt \int_C \frac{e^{-y^2}}{z_n - y} dy;$$

$$\epsilon'_{zz} = i \frac{4z_0}{V\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t^2 J_n J_n' e^{-t^2} dt \int_C \frac{ye^{-y^2} dy}{z_n - y};$$

$$\epsilon'_{zz} = 1 - \frac{4z_0}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t J_n^2 e^{-rt} dt \int_C \frac{y^2 e^{-y^2} dy}{z_n - y},$$

где

$$\epsilon'_{yx} = -\epsilon'_{xy}, \quad \epsilon'_{zx} = \epsilon'_{xz}, \quad \epsilon'_{zy} = -\epsilon'_{yz},$$

$$z_n = \frac{\omega - n\Omega}{k_s s} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{x_s}{\Omega}, \quad s^2 = \frac{3T}{m},$$

T — температура плазмы в энергетических единицах, ω_0 , Ω — ленгмюровская и циклотронная электронные частоты, J_n , J'_n — функция Бесселя n -го порядка и ее производная, причем аргумент этих функций равен bt . Интегрирование по y в (7) производится по контуру C' вдоль вещественной оси с обходом особой точки $y=z_n$ снизу.

Чтобы написать $\epsilon_{lk}(\omega, k)$ в исходной системе, необходимо воспользоваться соотношением

$$\epsilon_{lk}(\omega, k) = \gamma_{le} \gamma_{km} \epsilon'_{em}(\omega, k), \quad (8)$$

где

$$\gamma_{xx} = \gamma_{yy} = \frac{x_x}{x}, \quad \gamma_{xy} = -\gamma_{yx} = -\frac{x_y}{x}, \quad \gamma_{zz} = 1,$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zy} = 0.$$

Нас интересует поле излучения в вакууме. Для вычисления этого поля необходимо общее решение уравнений Максвелла в вакууме представить в виде суммы решений однородного и неоднородного уравнений, а затем, воспользовавшись условиями излучения на бесконечности и граничными условиями для полей, найти неопределенные константы в решениях однородных уравнений. Процедура вычислений подробно описана в работе [2].

Следует отметить, что постоянное магнитное поле приводит к возникновению азимутальной составляющей напряженности электрического поля E_ϕ , которая отсутствует в негиротропной среде. Поэтому электромагнитное поле излучения в вакууме оказывается эллиптически поляризованным.

Решение задачи о переходном излучении в среде с $\epsilon_{lk}(\omega, k)$, определяемыми (7), (8), в общем случае весьма сложно. Поэтому мы ограничимся рассмотрением отдельных частных случаев.

2. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ БЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

Без учета пространственной дисперсии ($T = 0$) тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{lk}(\omega)$ имеет вид

$$\epsilon_{lk}(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon_1, & ig, & 0 \\ -ig, & \epsilon_1, & 0 \\ 0, & 0, & \epsilon_0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_0^2(\omega + i\nu)}{\omega[(\omega + i\nu)^2 - \Omega^2]}; \quad \epsilon_0 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega + i\nu)}; \quad g = \frac{\omega_0^2 \Omega}{\omega[(\omega + i\nu)^2 - \Omega^2]}.$$

В этом случае для спектральной плотности переходного излучения,

испущенного за все время пролета частицы в телесном угле $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, получим следующее выражение:

$$\frac{d^2 W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\pi^2 c (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \cdot |\eta_1 + i\eta_2|^2; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= [(\cos \theta + A) (1 - B \cos \theta) - C^2 \cos \theta]^{-1} \times \\ &\times \left\{ (1 - B \cos \theta) (1 - \beta A) + \beta C^2 \cos \theta + \frac{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}{\epsilon_0 (a_2^2 - a_1^2)} \times \right. \\ &\times \left[\frac{(a_1^2 - s_1^2) (1 - B \cos \theta) + gC \cos \theta}{1 + \beta a_1} - \frac{(a_2^2 - s_1^2) (1 - B \cos \theta) + gC \cos \theta}{1 + \beta a_2} \right] \}; \\ \eta_2 &= [(\cos \theta + A) (1 - B \cos \theta) - C^2 \cos \theta]^{-1} \frac{gs_0^2}{\epsilon_0^2 a_1 a_2 (a_1 + a_2)} \times \\ &\times \left[\epsilon_0 - \frac{1 - \beta^2 \cos^2 \theta}{(1 + \beta a_1) (1 + \beta a_2)} \right]; \\ A &= \frac{s_0^2 (s_1^2 + a_1 a_2)}{\epsilon_0 a_1 a_2 (a_1 + a_2)}; \\ B &= -\frac{\epsilon_1 s_0^2 + \epsilon_0 a_1 a_2}{\epsilon_0 a_1 a_2 (a_1 + a_2)}; \quad C = \frac{-gs_0^2}{\epsilon_0 a_1 a_2 (a_1 + a_2)}; \\ s_1^2 &= \epsilon_1 - \sin^2 \theta; \quad s_0^2 = \epsilon_0 - \sin^2 \theta; \quad \beta = v/c; \\ a_{1,2}^2 &= (2\epsilon_0)^{-1} \left[\epsilon_1 s_0^2 + \epsilon_0 s_1^2 \pm \sqrt{(\epsilon_1 s_0^2 - \epsilon_0 s_1^2)^2 + 4\epsilon_0 g^2 s_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом $\operatorname{Re} a_{1,2} > 0$, $\operatorname{Im} a_{1,2} > 0$.

Излучение, описываемое функцией η_1 , поляризовано в вертикальной плоскости (т. е. плоскости, проходящей через ось oz и точку наблюдения), а функция η_2 описывает излучение, поляризованное в горизонтальной плоскости*.

При $g = 0$ выражение (11) переходит в известную формулу, полученную Пафомовым [4] для радиационных потерь энергии частицы на границе одноосный кристалл—вакуум. При этом вклад в переходное излучение дают только необыкновенные волны:

$$a_1 = \sqrt{\epsilon_1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \sin^2 \theta}.$$

Это связано с тем обстоятельством, что электрический вектор напряженности поля частицы, движущейся вдоль оси кристалла, поляризован в плоскости, проходящей через ось кристалла и волновой вектор, т. е. как раз соответствует той поляризации, которую имеет необыкновенная волна. Обыкновенная волна частицей не возбуждается. В гиротропной же среде, как это видно из (11), вклад в переходное излучение дают обыкновенные и необыкновенные волны.

Формулы показывают, что наряду с переходным излучением при определенных условиях имеют место также потери энергии частицы,

* В работе [8] приведена формула для излучения, поляризованного в вертикальной плоскости.

связанные с генерацией черенковского излучения на обоих типах волн. Углы, при которых наблюдается соответствующий пик черенковского излучения, определяются условиями

$$\cdot 1 - \beta \operatorname{Re} a_i = 0, \quad (12)$$

откуда

$$\begin{aligned} \sin^2 \nu_{1,2} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_1} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)(\varepsilon_1 - \beta^{-2}) \mp \right. \right. \\ \left. \left. \mp \sqrt{[(\varepsilon_1 + \varepsilon_0)(\varepsilon_1 - \beta^{-2}) - g^2]^2 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_0 [(\varepsilon_1 - \beta^{-2})^2 - g^2]} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Условия $0 \leq \sin^2 \nu_{1,2} \leq 1$ определяют область параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_0, g, \beta$, в которой может наблюдаться черенковское излучение. Как видно из (12), в той области частотного спектра, где при условии $\operatorname{Im} a_{1,2} > 0$ (убывающие решения) выполняется неравенство $\operatorname{Re} a_{1,2} > 0$, выход черенковского излучения в вакуум возможен при вылете частицы из среды в вакуум (в формулах (11) β необходимо заменить на $-\beta$). Однако, как показал Пафомов [4], в одноосном кристалле существует такая область частот, где реализуется случай $\operatorname{Im} a_1 > 0, \operatorname{Re} a_1 < 0$. В этой области частот направление черенковского излучения составляет тупой угол с направлением движения частицы и поэтому черенковское излучение на необыкновенных волнах наблюдается в вакууме при влете частицы в среду. Для плазмы в магнитном поле существует аналогичная область частот. В этом нетрудно убедиться, если в выражение (11) для a_1 подставить значение $\varepsilon'_{ik}(\omega)$ в плазме. Проделав эти вычисления, мы получим, что в области частот $\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \Omega^2}$ при условии $\omega > \Omega$ проекции фазовой и групповой скорости необыкновенной волны на ось z имеют противоположные знаки ($\operatorname{Im} a_1 > 0; \operatorname{Re} a_1 < 0$), т. е. выход в вакуум черенковского излучения осуществляется при влете частицы в плазму. Заметим, что, как и в одноосном кристалле, эта область частот удовлетворяет следующему условию: радиальная составляющая тензора диэлектрической проницаемости ε_1 меньше нуля, а z — составляющая ε_0 больше нуля.

3. УЧЕТ СЛАБОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

При слабой пространственной дисперсии в магнитоактивной плазме выполняются следующие неравенства:

$$\frac{x s}{\Omega} \ll 1; \left| \frac{\omega - n \Omega}{k_z s} \right| \gg 1. \quad (14)$$

Ограничиваюсь членами порядка k^2 в разложении $\varepsilon'_{ik}(\omega, k)$ по степеням волнового вектора, получим следующее выражение для тензора диэлектрической проницаемости [12]:

$$\varepsilon'_{ik}(\omega, k) = \varepsilon'_{ik}(\omega) + \frac{T}{mc^2} \eta'_{ik}(\omega, n); n^2 = \frac{c^2}{\omega^2} k^2. \quad (15)$$

Компоненты тензора $\eta'_{ik}(\omega, n)$ при $n=0$ равны

$$\begin{aligned} \eta'_{xx} = - \frac{3\omega_0^2 \omega^2 n_r^2}{(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - 4\Omega^2)} - \frac{\omega_0^2 \omega^2 (\omega^2 + 3\Omega^2) n_z^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^3}; \\ \eta'_{xy} = i \frac{6\omega_0^2 \omega \Omega n_r^2}{(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - 4\Omega^2)} + i \frac{\omega_0^2 (3\omega^2 + \Omega^2) \omega \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^3} n_z^2; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\eta'_{xz} = -2 \frac{\omega^2 \omega_0^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2} n_r n_z;$$

$$\eta'_{yy} = \eta'_{xx} + 2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \Omega^2} n_r^2;$$

$$\eta'_{yz} = i \frac{\omega_0^2 \Omega (3\omega^2 - \Omega^2)}{\omega (\omega^2 - \Omega^2)^2} n_r n_z; \quad \eta'_{zz} = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \Omega^2} n_r^2 - 3 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} n_z^2.$$

Учет слабой пространственной дисперсии в магнитоактивной плазме приводит к возникновению дополнительной плазменной волны, дисперсионное уравнение которой имеет вид [12]

$$\varepsilon_1 n_r^2 + \varepsilon_0 n_z^2 + \frac{T}{mc^2} (\eta'_{zz} n_z^2 + \eta'_{xx} n_r^2 + 2\eta'_{xz} n_r n_z) = 0. \quad (17)$$

Нас интересует вопрос о выходе в вакуум черенковского излучения на плазменных волнах. Поэтому при нахождении полей излучения в вакууме мы будем учитывать пространственную дисперсию лишь в тех членах, которые приводят к «резонансу». Иными словами, мы удерживаем члены, пропорциональные $(1 - \beta a_3)^{-1}$, где $\text{Re } a_3$ — корень уравнения (17) — определяется при $\nu = 0$ выражением*

$$\text{Re } a_3^2 = \frac{\varepsilon_0}{3(T/mc^2)(\omega_0^2/\omega^2)} - \frac{n_r^2}{3} \left\{ \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^3} [6\omega^4 - \Omega^2 (3\omega^2 - \Omega^2)] - 3 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right\}. \quad (18)$$

В этом случае спектральная плотность излучения задается формулой (10), в которой η_1 и η_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \eta_1 &= [(cos \theta + A)(1 - B cos \theta) - C^2 cos \theta]^{-1} \left\{ (1 - B cos \theta)(1 - \beta A) + \right. \\ &\quad \left. + \beta C^2 cos \theta + (1 - \beta^2 cos^2 \theta) \times \right. \\ &\quad \times \left. \frac{gC \left(1 + \beta \sum_{l=1}^3 a_l \right) cos \theta - (1 - B cos \theta) \left[s_1^2 \left(1 + \beta \sum a_l \right) + \beta a_1 a_2 a_3 + \sum_{3>l>k>1} a_l a_k \right]}{\prod_{j=1}^3 (1 + \beta a_j) \prod_{3>l>k>1} (a_l + a_k) \omega_0^2 \omega^{-2} s^2 c^{-2}} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2 &= [(cos \theta + A)(1 - B cos \theta) - C^2 cos \theta]^{-1} g s_0^2 [\varepsilon_0 a_1 a_2 (a_1 + a_2)]^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{c^2 \omega^2 \beta (a_1 + a_2) (a_3 - \beta a_1 a_2) (1 - \beta^2 cos^2 \theta)}{s^2 \omega_0^2 \prod_{j=1}^3 (1 + \beta a_j) \prod_{3>l>k>1} (a_l + a_k)} \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Как видно из выражений (19), черенковское излучение плазменных волн может наблюдаться в вакууме при вылете частицы из плазмы при условии $1 - \beta \text{Re } a_3 = 0$.

* Второй корень, равный $-(\varepsilon_1/\varepsilon_0) n_r^2$, характеризует плазменные колебания при $T = 0$.

Излучаемые черенковские частоты должны удовлетворять условиям

$$\left| 1 - \frac{\Omega}{\omega} \right| \gg \frac{s}{v};$$

$$1) \omega \gg \Omega, \omega_0 \sqrt{1 + s^2/v^2} < \omega \leq \omega_0 \sqrt{1 + \frac{s^2}{v^2} + \frac{s^2}{c^2}};$$

$$2) \omega \ll \Omega, \omega_0 \leq \omega \leq \omega_0 \sqrt{1 + \frac{s^2}{v^2}}.$$
(20)

Угол, под которым возникает пик черенковского излучения, можно найти из соотношения

$$\sin^2 \nu = \frac{3c^2 (\omega^2 - \omega_0^2) (\omega^2 - \Omega^2)^3 [\omega^2 - \omega_0^2 (1 + s^2/v^2)]}{s^2 \omega^2 \omega_0^2 [3\Omega^2 (\omega^2 - \Omega^2)^2 + (\omega^2 - \omega_0^2) (3\omega^4 + 3\omega^2\Omega^2 + 4\Omega^4)]}.$$

Следует отметить, что черенковское излучение плазменных волн может возникать практически при сколь угодно малых скоростях частицы.

В заключение автор выражает благодарность Э. А. Канеру за постановку задачи и обсуждение результатов, а также Ф. Г. Бассу за полезные замечания при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, 16, 15 (1946).
2. Г. М. Гариян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).
3. Г. М. Гариян, ЖЭТФ, 37, 527 (1959).
4. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 36, 1853 (1959).
5. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 34, 1594 (1958).
6. Б. Л. Желнов, ЖЭТФ, 40, 170 (1961).
7. В. М. Яковенко, ЖЭТФ, 41, 385 (1961).
8. Э. А. Канер, В. М. Яковенко, ЖЭТФ, 42, 471 (1962).
9. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, 478 (1962).
10. Ф. Г. Басс, М. И. Каганов, В. М. Яковенко, ФТТ, 4, 3260 (1962).
11. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 31, 642 (1956).
12. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Госатомиздат, М., 1961.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
5 августа 1963 г.

ON THE TRANSIENT RADIATION IN MAGNETO-ACTIVE PLASMA

V. M. Yakovenko

The transient radiation problem in magneto-active plasma is solved by the kinetic equation method. The expression has been found for the spectral density of radiation into vacuum under the condition of the specular electron reflection from plasma surface. The peculiarities are discussed of the transient radiation in magneto-active plasma.

УДК 535.31

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Ю. А. Кравцов

Решение скалярного волнового уравнения (2) может быть специально приспособлено для описания поля вблизи каустики, если его записать в виде произведения экспоненциальной функции и функции Эйри, аргументы которых, — ψ_1 и ψ_2 , соответственно. В этом случае задача сводится к решению уравнения эйконала, для некоторой функции Ψ , определяемой ψ_1 и ψ_2 . Следовательно, уравнение эйконала для функции спаредливо во всем пространстве, включая каустику. На большом расстоянии от каустики функция Ψ совпадает с фазой волны.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, подстановка

$$\varphi = Ae^{ik\psi}, \quad (1)$$

используемая при решении скалярного волнового уравнения

$$\Delta\varphi + k^2\epsilon\varphi = 0 \quad (2)$$

в приближении геометрической оптики, приводит к уравнению эйконала для фазы ψ :

$$(\nabla\psi)^2 = \epsilon. \quad (3)$$

Семейству фазовых фронтов $\psi = \text{const}$ можно сопоставить семейство ортогональных к ним лучей, которые удовлетворяют принципу Ферма. Уравнение эйконала (3) допускает существование весьма сложных лучевых картин. В частности, лучи могут иметь каустические поверхности. Однако по мере приближения волны к каустике амплитуда нулевого приближения геометрической оптики A_0 увеличивается и на самой каустической поверхности обращается в бесконечность. В результате метод геометрической оптики и, следовательно, обычное уравнение эйконала (3) теряют силу вблизи каустики.

Несмотря на это, некоторые явления, связанные с прохождением луча вблизи каустики, находят удовлетворительное лучевое описание. Из рассмотрения асимптотики точного решения волнового уравнения известно, например, что интенсивность волны, отраженной от полупространства, заполненного неоднородной слоистой средой, можно вычислять тем же способом, что и интенсивность волны, не претерпевшей отражения, а именно—пользуясь обратной пропорциональностью интенсивности сечению лучевой трубки. Далее, фаза отраженной волны, полученная из точного решения волнового уравнения, отличается от фазы, вычисленной в приближении геометрической оптики*, лишь на постоянную — $\pi/2$ [1,2]. Это наводит на мысль, что и вблизи каустики

* Т. е. вычисленной путем интегрирования показателя преломления вдоль луча, как это следует из уравнения (3).

можно подыскать некоторую функцию, определяемую уравнением эйконала и приводящую к своего рода лучевой трактовке в этой области.

Предлагаемая модификация метода геометрической оптики показывает, что это предположение справедливо и заключается в том, что решение волнового уравнения (2) ищется в виде произведения экспоненциальной функции на сумму функций Эйри и ее производной со специальными подобранными множителями, т. е. решение приспособливается для описания поля вблизи каустики*. При такой подстановке уравнение эйконала оказывается справедливым как вдали от каустики, так и вблизи нее, но оно относится не к фазе волны ψ , а к определенной функции Ψ аргументов экспоненты и функции Эйри. «Лучи», определенные как нормали к поверхностям $\Psi = \text{const}$, всюду удовлетворяют законам геометрической оптики, причем амплитуда волны вблизи каустики остается конечной. На большом удалении от каустики, где справедливо приближение (1), эйконал Ψ совпадает с фазой волны ψ (или отличается от нее на постоянную).

Предлагаемая модификация метода геометрической оптики обобщает предельный переход от волнового уравнения к уравнению эйконала при $k \rightarrow \infty$ и позволяет находить поле вблизи каустики, во-первых, располагая наглядной картиной и, во-вторых, не сложнее, чем другими разработанными к настоящему времени эффективными методами расчета поля в этой области [3,4].

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем искать решение волнового уравнения (2) вблизи обособленной каустики без особых точек в виде

$$\varphi = \left[Aw(k^{2/3}\psi_1) + \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} Bw'(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_2}, \quad (4)$$

где A, B, ψ_1, ψ_2 — искомые величины, $w(t)$ — функция, удовлетворяющая уравнению $w''(t) - kw(t) = 0$, а $w'(t)$ — ее производная. В качестве функции Эйри $w(t)$, где $t = k^{2/3}\psi_1$, удобно взять одну из комбинаций функций Эйри $u(t)$ и $v(t)$, рассмотренных Фоком [5]:

$$w_1(t) = u(t) - iv(t),$$

$$w_2(t) = u(t) + iv(t).$$

Асимптотические выражения для w_1, w_2 и их производных w'_1, w'_2 при больших отрицательных значениях аргумента t таковы:

$$\begin{aligned} w_1(t) &\simeq (-t)^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{2i}{3} (-t)^{3/2} - \frac{i\pi}{4} \right\}; \\ w_2(t) &\simeq (-t)^{-1/4} \exp \left\{ \frac{2i}{3} (-t)^{3/2} + \frac{i\pi}{4} \right\}; \\ w'_1(t) &\simeq i(-t)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{2i}{3} (-t)^{3/2} - \frac{i\pi}{4} \right\}; \\ w'_2(t) &\simeq -i(-t)^{1/4} \exp \left\{ \frac{2i}{3} (-t)^{3/2} + \frac{i\pi}{4} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

* Предполагается, что имеется только одна каустическая поверхность без особых точек. Случай двух и более каустик, а также случаи каустик с особыми точками из рассмотрения исключаются, хотя в принципе они могут быть исследованы аналогичным методом.

т. е. $w'_{1,2}(t)$ отличаются от $w_{1,2}(t)$ при $t \rightarrow -\infty$ множителем $\pm i\sqrt{-t}$. Так как второй член в решении (4) взят с весом $\frac{i}{V-t} = \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}}$, оба члена имеют одинаковую асимптотику.

Из (5) видно, что функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$ описывают волны, бегущие в сторону положительных ($w = w_1$) или отрицательных ($w = w_2$) значений t . Имея в виду указанное асимптотическое поведение этих функций вдали от точки поворота $t = 0$, т. е. вдали от каустической поверхности, назовем условно $w_1(t)$ «падающей», а $w_2(t)$ — «отраженной» волной. Разумеется, вблизи каустической поверхности $t = 0$ и тем более за ней ($t > 0$) понятие бегущих волн теряет смысл, так как при $t \rightarrow +\infty$ функции $w_1(t)$ и $w_2(t)$ неограниченно нарастают. Тем не менее, разделение полного поля на «падающую» и «отраженную» волны (как вблизи каустики, так и вдали от нее) оказывается удобным. Этот прием позволяет искать решение волнового уравнения для каждой из волн в отдельности:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \left[Aw_1(k^{2/3}\psi_1) + \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} Bw'_1(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_1}; \\ \varphi_2 &= \left[Aw_2(k^{2/3}\psi_1) + \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} Bw'_2(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_1}.\end{aligned}\quad (6)$$

Выведем теперь уравнения, которым должны удовлетворять искомые функции A , B , ψ_1 и ψ_2 .

Подставим (4) в уравнение (2) и, воспользовавшись соотношением $w'' = tw$, запишем волновое уравнение в виде

$$\begin{aligned}&\left\{ k^2(MA + NB) + ik \left[L_2(A) - L_3 \left(\frac{B}{\sqrt{-\psi_1}} \right) \right] + \Delta A \right\} w(k^{2/3}\psi_1) e^{ik\psi_1} + \\ &+ \left\{ k^2(NA + MB) - ik \left[L_1(A) - L_2 \left(\frac{B}{\sqrt{-\psi_1}} \right) \right] \right\} V\sqrt{-\psi_1} + \\ &+ V\sqrt{-\psi_1} \Delta \frac{B}{\sqrt{-\psi_1}} \left\{ \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} w'(k^{2/3}\psi_1) e^{ik\psi_1} \right\} = 0,\end{aligned}\quad (7)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}M &= \varepsilon - (\nabla\psi_2)^2 + \psi_1(\nabla\psi_1)^2, \quad N = 2\sqrt{-\psi_1}(\nabla\psi_1, \nabla\psi_2), \\ L_1(f) &= 2(\nabla\psi_1, \nabla f) + f\Delta\psi_1, \quad L_2(f) = 2(\nabla\psi_2, \nabla f) + f\Delta\psi_2, \\ L_3(f) &= 2\psi_1(\nabla\psi_1, \nabla f) + f\nabla(\psi_1\nabla\psi_1).\end{aligned}$$

В силу линейной независимости функций w и w' , каждая из фигурных скобок в уравнении (7) должна быть равна нулю:

$$\begin{aligned}&k^2(MA + NB) + ik \left[L_2(A) - L_3 \left(\frac{B}{\sqrt{-\psi_1}} \right) \right] + \Delta A = 0; \\ &k^2(NA + MB) - ik \left[L_1(A) - L_2 \left(\frac{B}{\sqrt{-\psi_1}} \right) \right] V\sqrt{-\psi_1} + \\ &+ V\sqrt{-\psi_1} \Delta \frac{B}{\sqrt{-\psi_1}} = 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Решения для амплитуд A и B будем, как обычно, искать в виде рядов по степеням $1/k$:

$$A = A_0 + \frac{1}{k} A_1 + \frac{1}{k^2} A_2 + \dots ; \quad (9)$$

$$B = B_0 + \frac{1}{k} B_1 + \frac{1}{k^2} B_2 + \dots$$

Подставив ряды (9) в уравнения (8) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях k , получаем бесконечную систему рекуррентных уравнений для A_n и B_n (при $n < 0$ $A_n = B_n = 0$):

$$\begin{aligned} MA_n + NB_n + i \left[L_2(A_{n-1}) - L_3 \left(\frac{B_{n-1}}{\sqrt{V - \psi_1}} \right) \right] + \Delta A_{n-2} &= 0; \\ NA_n + MB_n - i \left[L_1(A_{n-1}) - L_2 \left(\frac{B_{n-1}}{\sqrt{V - \psi_1}} \right) \right] V \sqrt{V - \psi_1} + \\ &+ V \sqrt{V - \psi_1} \frac{\Delta B_{n-2}}{V \sqrt{V - \psi_1}} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В нулевом приближении имеем

$$\begin{aligned} MA_0 + NB_0 &= 0; \\ NA_0 + MB_0 &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Эта система однородных линейных уравнений имеет нетривиальное решение только при условии, что ее детерминант равен нулю, т. е. при условии

$$M^2 - N^2 = 0. \quad (12)$$

Из (11) следует, что при $M = -N$ амплитуды A_0 и B_0 равны друг другу: $A_0 = B_0 = F$, а при $M = N$ — равны по величине, но противоположны по знаку: $A_0 = -B_0 = \Phi$ (F и Φ — пока произвольные функции координат).

Согласно (10), уравнения первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} MA_1 + NB_1 &= -i [L_2(A_0) - L_3(B_0 / \sqrt{V - \psi_1})] \equiv X(A_0, B_0); \\ NA_1 + MB_1 &= i [L_1(A_0) - L_2(B_0 / \sqrt{V - \psi_1})] V \sqrt{V - \psi_1} \equiv Y(A_0, B_0). \end{aligned} \quad (13)$$

В силу (12) детерминант этой системы равен нулю и, следовательно, для ее разрешимости необходимо, чтобы правые части X и Y были ортогональны к решениям транспонированной однородной системы (11), т. е. к решениям самих уравнений (11), поскольку их матрица симметрична [6,7]. Таким образом, условия ортогональности будут

$$X(F, F) + Y(F, F) = 0 \quad \text{при } M = -N;$$

$$X(\Phi, -\Phi) - Y(\Phi, -\Phi) = 0 \quad \text{при } M = N.$$

Исследование поведения функций F и Φ вблизи каустической поверхности ($\psi_1 = 0$) показывает, что при $\psi_1 \rightarrow 0$ их можно представить

в виде $F = \frac{c_1}{\sqrt[4]{\xi}} (1 + d_1 \xi + \dots)$, $\Phi = \frac{c_2}{\sqrt[4]{\xi}} (1 + d_2 \xi + \dots)$, если

$(\nabla\psi_1, \nabla\psi_2) \neq 0$, и $F = c_1(1 + d_1 \xi + \dots)$, $\Phi = c_2(1 + d_2 \xi + \dots)$, если $(\nabla\psi_1, \nabla\psi_2) = 0$, где ξ — расстояние, отсчитываемое от поверхности $\psi_1 = 0$ вдоль направления $\nabla\psi_1$. Однако амплитуды первого приближения A_1 и B_1 , а также решение (4), содержащее член $ik^{-1/3} Bw' / \sqrt{-\psi_1}$, обращаются при $\psi_1 \rightarrow 0$ в бесконечность.

Для того, чтобы избежать этой расходимости, потребуем, чтобы условия $M = -N$ и $M = N$ выполнялись одновременно. Это возможно, если

$$M = \epsilon - (\nabla\psi_2)^2 + \psi_1(\nabla\psi_1)^2 = 0; \quad (14)$$

$$N = 2\sqrt{-\psi_1} (\nabla\psi_1, \nabla\psi_2) = 0.$$

В этом случае условия разрешимости системы уравнений (13) примут вид

$$X(A_0, B_0) = 0; \quad (15)$$

$$Y(A_0, B_0) = 0.$$

Введем теперь функции F и Φ по формулам:

$$A_0 = \frac{1}{2} (F + \Phi); \quad B_0 = \frac{1}{2} (F - \Phi). \quad (16)$$

Подставив (16) в (15) и воспользовавшись ортогональностью векторов $\nabla\psi_1$ и $\nabla\psi_2$, получим

$$X\left(\frac{F + \Phi}{2}, \frac{F - \Phi}{2}\right) = \frac{1}{2} [L_2(F) - \sqrt{-\psi_1} L_1(F)] +$$

$$+ \frac{1}{2} [L_2(\Phi) + \sqrt{-\psi_1} L_1(\Phi)] = 0;$$

$$Y\left(\frac{F + \Phi}{2}, \frac{F - \Phi}{2}\right) = \frac{1}{2} [L_2(F) - \sqrt{-\psi_1} L_1(F)] -$$

$$- \frac{1}{2} [L_2(\Phi) + \sqrt{-\psi_1} L_1(\Phi)] = 0,$$

откуда следует, что

$$L_2(F) - \sqrt{-\psi_1} L_1(F) = 0; \quad (17)$$

$$L_2(\Phi) + \sqrt{-\psi_1} L_1(\Phi) = 0.$$

Ниже мы убедимся, что амплитуды F и Φ , определяемые из уравнений (17), конечны всюду, в том числе и на каустике ($\psi_1 = 0$). Для того, чтобы было конечным решение (4), необходимо потребовать, чтобы на каустике было $\Phi = F$, т. е. $B_0 = \frac{1}{2} (F - \Phi) = 0$. В этом случае уравнения первого приближения (13) также будут иметь конечное решение, поскольку при выполнении условия $F = \Phi$ правые части X и Y не имеют никаких особенностей при $\psi_1 \rightarrow 0$.

Таким образом, волновое поле описывается в нулевом приближении функциями

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \left[\frac{F + \Phi}{2} w_1(k^{2/3}\psi_1) + \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} \frac{F - \Phi}{2} w'_1(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_1}; \\ \varphi_2 &= \left[\frac{F + \Phi}{2} w_2(k^{2/3}\psi_1) + \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} \frac{F - \Phi}{2} w'_2(k^{2/3}\psi_1) \right] e^{ik\psi_2},\end{aligned}\quad (18)$$

где амплитуды F , Φ и величины ψ_1 и ψ_2 определяются из уравнений (14) и (17).

2. ЛУЧЕВАЯ КАРТИНА

Нетрудно убедиться в том, что величина Ψ , определенная как

$$\Psi = \psi_2 \mp \frac{2}{3} (-\psi_1)^{3/2}, \quad (19)$$

удовлетворяет уравнению эйконала. Действительно, так как

$$\nabla\Psi = \nabla\psi_2 \pm \sqrt{-\psi_1} \nabla\psi_1,$$

получаем

$$(\nabla\Psi)^2 = (\nabla\psi_2)^2 - \psi_1(\nabla\psi_1)^2 \pm 2\sqrt{-\psi_1} (\nabla\psi_1, \nabla\psi_2). \quad (20)$$

Согласно (14), первые два члена в (20) в сумме дают ε , а третий равен нулю, т. е.

$$(\nabla\Psi)^2 = \varepsilon. \quad (21)$$

Таким образом, волновому уравнению (2) можно сопоставить уравнение эйконала (21), которое относится, однако, не к фазе волны, а к комбинации (19) аргументов функции Эйри и экспоненты $e^{ik\psi_2}$. Выясним, в каком соотношении находятся функция Ψ и фаза волны ϕ .

Как уже было указано, на каустической поверхности мы положили $\psi_1 = 0$, причем в области тени $\psi_1 > 0$, а в области света $\psi_1 < 0$. Условимся говорить, что точка наблюдения находится вблизи каустики, если $k^{2/3} |\psi_1| \ll 1$, и находится далеко от каустики, если $k^{2/3} |\psi_1| \gg 1$.

На большом удалении от каустики можно воспользоваться асимптотическими выражениями (5) для $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w'_1(t)$, $w'_2(t)$ и записать для функций (18) следующие выражения, справедливые в области света ($\psi_1 < 0$):

$$\varphi_1 = \Phi k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4} \exp \left\{ ik\Psi_I - \frac{i\pi}{4} \right\}; \quad (22a)$$

$$\varphi_2 = F k^{-1/6} (-\psi_1)^{-1/4} \exp \left\{ ik\Psi_{II} + \frac{i\pi}{4} \right\}, \quad (22b)$$

где Ψ_I соответствует знаку «—», а Ψ_{II} — знаку «+» в выражении (19). Из (22a) — (22b) видно, что вдали от каустики функция $k\Psi$ с точностью до постоянных $\pm\pi/4$ совпадает с фазой волны $k\phi$. Вблизи же каустики решение (18) не сводится к обычному приближению геометрической оптики (1) и поэтому поверхности $\Psi = \text{const}$ нельзя отождествить с фазовыми фронтами, т. е. поверхностями равных значений аргумента волновой функции ϕ . Тем не менее, поверхности $\Psi = \text{const}$ допускают введение системы ортогональных к ним лучей. Так как Ψ удовлетворяет уравнению эйконала (21), эти лучи удовлетворяют законам геометрической оптики, в частности, принципу Ферма. Следовательно, величину Ψ мож-

но вычислить, интегрируя показатель преломления $\sqrt{\epsilon}$ вдоль траектории луча:

$$\Psi = \int_0^s \sqrt{\epsilon} d\sigma, \quad (23)$$

где $d\sigma$ — элемент длины луча. Таким образом, интеграл (23) дает значение функции Ψ , а не фазы волны. Если же нас интересует фаза волны, прошедшей вблизи каустики, то в соответствии с асимптотическим представлением (22a) — (22б) к интегралу $k \int_0^s \sqrt{\epsilon} d\sigma$ следует добавить постоянную $-\frac{\pi}{2}$.

Эйконал Ψ можно определить и в области тени $\psi_1 > 0$. Согласно (19), в этом случае Ψ будет комплексной величиной

$$\Psi = \psi_2 \mp i \frac{2}{3} \psi_1^{3/2}, \quad (19a)$$

что соответствует неоднородным волнам, затухающим в направлении $\nabla \psi$, (т. е. «перпендикулярно» каустике) и распространяющимся в направлении $\nabla \psi_2$ («параллельно» каустике).

Как в области света, так и в области тени эйконал Ψ является двухзначной функцией координат (он однозначен лишь на самой каустике $\psi_1 = 0$). Если Ψ_I и Ψ_{II} — два решения для эйконала, то, согласно (19) и (19a), функции ψ_1 и ψ_2 выражаются через них следующим образом:

а) в области света ($\psi_1 < 0$)

$$\psi_2 = \frac{1}{2} (\Psi_I + \Psi_{II}), \quad -\frac{2}{3} (-\psi_1)^{3/2} = \frac{1}{2} (\Psi_{II} - \Psi_I); \quad (24a)$$

б) в области тени ($\psi_1 > 0$)

$$\psi_2 = \frac{1}{2} (\Psi_I + \Psi_{II}), \quad i \frac{2}{3} \psi_1^{3/2} = \frac{1}{2} (\Psi_{II} - \Psi_I). \quad (24b)$$

Для иллюстрации сказанного на рис. 1 приведена лучевая картина вблизи каустики (на рисунке A — линии равных значений Ψ для отра-

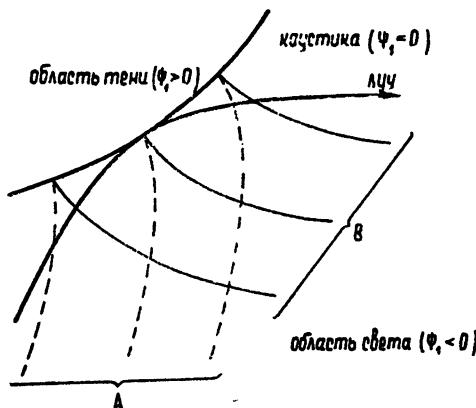


Рис. 1.

женной волны ($\Psi = \Psi_{II}$), B — линии равных значений Ψ для падающей волны ($\Psi = \Psi_I$). На рис. 2 изображена конфигурация линий равных значений ϕ_1 (кривые B) и ϕ_2 (кривые A), которые, в соответствии с (14), ортогональны между собой.

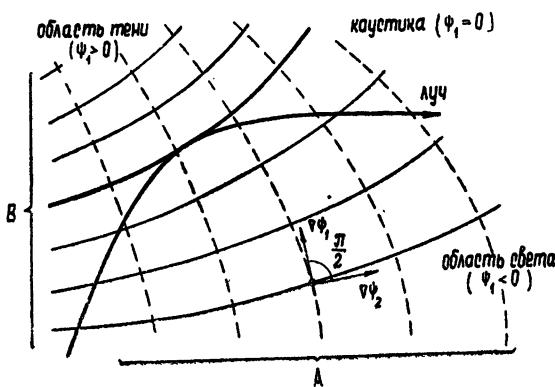


Рис. 2.

3. АМПЛИТУДА ВОЛНЫ

Выше мы установили, что амплитуды F и Φ удовлетворяют уравнениям (17). Умножив первое из этих уравнений на $\frac{F}{\sqrt{-\psi_1}}$, а второе — на $\frac{\Phi}{\sqrt{-\psi_1}}$, получаем

$$\operatorname{div} \left(\frac{\Phi^2}{\sqrt{-\psi_1}} \nabla \Psi_I \right) = 0; \quad (25a)$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{F^2}{\sqrt{-\psi_1}} \nabla \Psi_{II} \right) = 0. \quad (25b)$$

Эти уравнения устанавливают связь между изменениями функций F , Φ и эйконала Ψ . Вдали от каустики из (25a) — (25b) следует обычный закон сохранения потока энергии, так как, согласно (22a) — (22b), величины $\bar{\Psi}^2 = \Psi^2/k^{1/3}\sqrt{-\psi_1}$ и $\bar{F}^2 = F^2/k^{1/3}\sqrt{-\psi_1}$ представляет собой интенсивности соответственно падающей и отраженной волн в приближении геометрической оптики. На каустической поверхности $\bar{\Psi}^2$ и \bar{F}^2 обращаются в бесконечность, так как сечение лучевой трубки здесь равно нулю. Можно показать, что по мере приближения к каустике сечение лучевой трубки стремится к нулю пропорционально $\sqrt{-\psi_1}$. Одновременно стремится к нулю и множитель $1/\sqrt{-\psi_1}$ в (25a) — (25b), что и обеспечивает конечность амплитуд F и Φ .

Для того, чтобы полное поле, являющееся суперпозицией функций (18), затухало в области тени ($\psi_1 > 0$), в качестве решения волнового уравнения (2) следует взять разность функций (18):

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 = \\ &= \left[\frac{F + \Phi}{2} (w_1 - w_2) + \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} \frac{F - \Phi}{2} (w'_1 - w'_2) \right] e^{ik\psi_1} = \\ &= -2i \left[\frac{F + \Phi}{2} v + \frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{-\psi_1}} \frac{F - \Phi}{2} v' \right] e^{ik\psi_1},\end{aligned}$$

так как функция Эйри $v(t)$ и ее производная $v'(t)$ экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ [5]:

$$\begin{aligned}v(t) &\simeq \frac{1}{2} t^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{2}{3} t^{3/2} \right\}, \\ v'(t) &\simeq -\frac{1}{2} t^{1/4} \exp \left\{ -\frac{2}{3} t^{3/2} \right\}.\end{aligned}\quad (t \rightarrow +\infty),$$

Выше уже говорилось, что амплитуды F и Φ должны быть определенным образом связаны между собой. Именно, для того, чтобы решение (18) имело смысл, необходимо положить на каустике $F = \Phi$. В таком случае можно рекомендовать следующую последовательность определения функций F и Φ . Сначала из уравнения (25а) определяется амплитуда Φ , при этом принимаются во внимание условия, заданные видом падающей волны при $\psi_1 \rightarrow -\infty$, в соответствии с асимптотическим выражением (22а). Значения Φ на каустике берутся за основу при вычислении величины F из уравнения (25б), и таким образом определяется амплитуда отраженной волны (22б) при $k^{2/3} |\psi_1| \gg 1$.

Описанный выше способ решения скалярного волнового уравнения позволяет вычислить флюктуации фазы и интенсивности волны, прошедшей вблизи каустики при наличии в среде крупномасштабных статистических неоднородностей. Действительно, если представить диэлектрическую проницаемость среды в виде суммы регулярной (ϵ) и флюктуационной (ν) компонент: $\epsilon = \bar{\epsilon} + \nu$, то решение уравнения эйконала (21) можно, как это обычно делается, искать в виде ряда по степеням малого отношения $\sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}} / \sqrt{k}$. Вдали от каустики поправка первого порядка Ψ_1 будет описывать флюктуации фазы волны, поскольку эйконал Ψ и фаза ψ , согласно (22а) — (22б), различаются на постоянную. Следовательно, полученные ранее Денисовым [8] выражения для дисперсии фазы и угла прихода волны сохраняют силу и в случае прохождения волны вблизи каустики (этот случай реализуется, например, при отражении волны от статистически неоднородной ионосферы).

Уравнение эйконала (21) в области каустики справедливо только в том случае, когда имеется единственная каустическая поверхность без особых точек. При наличии многих каустических поверхностей, а также вблизи особых точек поле уже не описывается выражением (4) и необходимо привлекать более сложные «эталонные» функции (например, функции Вебера и другие). Уже по окончании данной работы автору стали известны статьи Маслова [9, 10], в которых проведено строгое математическое исследование асимптотического поведения волновой функции в самом общем случае. Однако, весь подход и полученные в [9, 10] выражения не обладают физической наглядностью. Поэтому, как нам кажется, данная работа сохраняет известный интерес.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. М. Рытову за руководство работой и Б. Е. Кинберу за ряд ценных советов при написании данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960
- 2 Л. М. Бреховских, Распространение волн в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957
- 3 Л. М. Бреховских, Акуст. ж., 2, 124 (1956).
- 4 Ю. Л. Газарян, Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, изд. ЛГУ, 1961, стр. 73.
- 5 В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1946.
- 6 Р. К. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, ГИТТЛ, М., 1951.
- 7 С. М. Рытов, Модулированные колебания и волны, Труды ФИАН, 1938.
- 8 Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 41 (1958)
- 9 В. П. Маслов, Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1, 638 (1961)
- 10 В. П. Маслов, ДАН СССР, 151, 306 (1963).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
17 октября 1963 г.

A MODIFICATION OF THE GEOMETRICAL OPTICS METHOD

Yu. A. Kravtsov

The solution of a scalar wave equation (2) can be specially fitted to the field's description near the caustic being written as a product of an exponential and Airy functions arguments of which are ψ_1 and ψ_2 , correspondingly. In this case the problem is reduced to the solution of the eikonal equation for a certain function Ψ with ψ_1 and ψ_2 as its arguments. Consequently, the eikonal equation for function Ψ coinciding with the wave phase only at a large distance from the caustic is valid in all the space including the caustic.

УДК 535.14 : 621.378

К ТЕОРИИ КОМБИНАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СИЛЬНЫХ ПОЛЯХ

Ю. Г. Хронопуло

Из кинетического уравнения для матрицы плотности с помощью метода усреднения получены приближенные уравнения, описывающие процессы комбинационного и двойного излучения и поглощения с учетом эффекта насыщения. В качестве примера разобран случай комбинационного взаимодействия полей в системе с неэквидистантными уровнями. На основе полученных решений оценены величины полей, необходимые для насыщения при магнито- и электродипольном взаимодействии вещества с полем.

Теоретические исследования комбинационного излучения в когерентных полях обычно проводятся методами теории возмущений в предположении, что одно из полей, участвующих в комбинационных процессах, много больше другого [2,3]. Однако в настоящее время существует ряд устройств [5-7], поля в которых достигают таких величин, что применение теории возмущения для исследования имеющих в них место нелинейных эффектов, вообще говоря, неоправдано.

Например, в найденном таким образом отклике вещества в виде поляризации или намагниченности не может быть учтен эффект насыщения населеностей соответствующих уровней вещества. В настоящей работе находится комбинационный отклик вещества без предположения о малости одного из полей.

Будем исходить из уравнений для матрицы плотности в том представлении, в котором гамильтониан невозмущенной материальной системы диагонален [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{mn} + i\omega_{mn}\rho_{mn} + \frac{1}{T_{mn}}\rho_{mn} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k (V_{mk}\rho_{kn} - \rho_{mk}V_{kn}); \\ \dot{\rho}_{mm} &= \sum_k (W_{km}\rho_{kk} - W_{mk}\rho_{mm}) - \frac{i}{\hbar} \sum_k (V_{mk}\rho_{km} - \rho_{mk}V_{km}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ_{mn} — матричные элементы матрицы плотности, $V = \sum_l V^l e^{i\omega_l t}$ — оператор энергии взаимодействия вещества с полем, V_{mk} — его матричные элементы, $\omega_{-l} = -\omega_l$, W_{km} — вероятности переходов с k -го уровня на m -й, T_{mn} — время релаксации соответствующего недиагонального элемента матрицы плотности.

Пусть частоты ω_l не совпадают ни с одной из собственных частот материальной системы, и среди них есть удовлетворяющие условию

$$\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_{ij} + \Delta\omega_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где ω_{ij} есть разность i -го и j -го термов вещества и

$$\Delta\omega_{\alpha\beta} < \frac{1}{T_{ij}}. \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать диагональные матричные элементы V_{mm}^l равными нулю*.

Введем новые переменные

$$\rho_{mn} = \sigma_{mn}(t) e^{-i\omega_{mn}t}, \quad (4)$$

что соответствует переходу к представлению взаимодействия. Система (1) в этих переменных примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{mn} + \frac{1}{T_{mn}} \sigma_{mn} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_k \left[V_{mk} \sigma_{kn} e^{i(\omega_{mn}-\omega_{kn})t} - \sigma_{mk} V_{kn} e^{i(\omega_{mn}-\omega_{mk})t} \right]; \\ \dot{\sigma}_{mm} &= \sum_k (W_{km} \sigma_{kk} - W_{mk} \sigma_{mm}) - \frac{i}{\hbar} \sum_k (V_{mk} \sigma_{km} e^{-i\omega_{km}t} - \text{к. с.}) . \end{aligned} \quad (1a)$$

Применим к системе (1a) метод усреднения [1], учитывая, что для световых частот при всех практически достижимых полях выполняются условия

$$\frac{1}{\omega_{mn} T_{mn}}, \quad \frac{V_{mk}}{\hbar \omega_{mk}} \ll 1. \quad (5)$$

В соответствии с этим методом полагаем

$$\sigma_{mn} = \sigma_{mn}^c + \tilde{\sigma}_{mn}, \quad (6)$$

где $\sigma_{mn}^c(t)$ — медленная по сравнению с $e^{i\omega_{mn}t}$, $e^{i(\omega_{mn}-\omega_l)t}$ функция времени, а

$$\tilde{\sigma}_{mn} = \overset{(1)}{\tilde{\sigma}_{mn}} + \overset{(2)}{\tilde{\sigma}_{mn}} + \dots$$

есть быстроосциллирующая часть σ_{mn} .

Так как в спектре поля нет частот, совпадающих с собственными частотами вещества, для σ_{mn}^c необходимо получить уравнение второго приближения. Для этого положим в правых частях системы уравнений (1a) $\sigma_{mn} = \sigma_{mn}^c$ и усреднив их за время, много большее $2\pi/\omega_{mn}$, получим уравнения первого приближения для σ_{mn} :

$$\dot{\sigma}_{mn}^c + \frac{1}{T_{mn}} \sigma_{mn}^c = 0; \quad (7)$$

$$\dot{\sigma}_{mm}^c = \sum_k (W_{km} \sigma_{kk}^c - W_{mk} \sigma_{mm}^c).$$

Далее, вычитая из уравнений системы (1a) соответствующие уравнения (7), получим для $\overset{(1)}{\tilde{\sigma}_{mn}}$:

* В случае, например, магнитодипольного взаимодействия вещества с полем это условие означает, что равны нулю диагональные элементы матрицы дипольного момента $\|\mu\|$. Связанная с V_{kk}^l часть комбинационного излучения может быть получена при двухуровневой идеализации системы и рассматриваться здесь не будет.

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\sigma_{mn}} + \frac{1}{T_{mn}} \overset{(1)}{\sigma_{mn}} = - \frac{i}{\hbar} \sum_k [V_{mk} \sigma_{kn}^c e^{i(\omega_{mn} - \omega_{kn})t} - \\ - \sigma_{mk}^c V_{kn} e^{i(\omega_{mn} - \omega_{mk})t}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь знак \sim над суммой в правых частях означает, что берется быстро переменная часть выражения. Вынужденные решения уравнений (8) легко найти:

$$\overset{(1)}{\sigma_{mn}} = \frac{1}{\hbar} \sum_{k,l} \frac{V_{mk}^l \sigma_{kn}^c e^{i(\omega_{mk} + \omega_l)t}}{i/T_{mn} - (\omega_{mk} + \omega_l)} - \frac{V_{kn}^l \sigma_{mk}^c e^{i(\omega_{kn} + \omega_l)t}}{i/T_{mn} - (\omega_{kn} + \omega_l)}. \quad (9)$$

Подставляя $\sigma_{mn} = \sigma_{mn}^c + \overset{(1)}{\sigma_{mn}}$ в (1а), используя (2) и усредняя по времени как и выше, получим уравнения второго приближения для σ_{ij}^c , σ_{kk}^c :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ii}^c + \left(\frac{1}{T} - i\Omega_{ji} \right) \sigma_{ji}^c = \frac{i}{\hbar^2} R (\sigma_{ii}^c - \sigma_{jj}^c); \\ \dot{\sigma}_{ii}^c = \sum_{k \neq i} \left(W_{ki} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{ki} \right) \sigma_{kk}^c + \left(W_{ji} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{ji} \right) \sigma_{jj}^c - \\ - \sum_k \left(W_{ik} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{ik} \right) \sigma_{ii}^c - \frac{2}{\hbar^2} \operatorname{Im} (\sigma_{ji}^c R^*); \\ \dot{\sigma}_{jj}^c = \sum_{k \neq i} \left(W_{kj} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{kj} \right) \sigma_{kk}^c + \left(W_{ij} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{ij} \right) \sigma_{ii}^c - \\ - \sum_k \left(W_{jk} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{jk} \right) \sigma_{jj}^c + \frac{2}{\hbar^2} \operatorname{Im} (\sigma_{ji}^c R^*); \\ \dot{\sigma}_{kk}^c = \sum_p \left[\left(W_{pk} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{pk} \right) \sigma_{pp}^c - \left(W_{kp} + \frac{4}{\hbar^2} Q_{kp} \right) \sigma_{kk}^c \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнениях (10) введены обозначения

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_{ji}} + \frac{2}{\hbar^2} \sum_{k,l} \left[\frac{(\omega_{kj}^2 + \omega_l^2) |V_{kj}^l|^2}{(\omega_{kj}^2 - \omega_l^2)^2 T_{ki}} + \frac{(\omega_{lk}^2 + \omega_l^2) |V_{lk}^i|^2}{(\omega_{lk}^2 - \omega_l^2)^2 T_{kj}} \right]; \quad (11)$$

$$R = \sum_{k,(\alpha,\beta)} \left[\frac{V_{jk}^\alpha V_{ki}^\beta}{\omega_{ki} + \omega_\beta} + \frac{V_{ki}^\alpha V_{jk}^\beta}{\omega_{kl} + \omega_\alpha} \right] e^{i\Delta\omega_{\alpha\beta} t}; \quad (12)$$

$$Q_{nm} = Q_{mn} = \sum_l |V_{nm}^l|^2 \frac{\omega_{mn}^2 + \omega_l^2}{T_{nm} (\omega_{nm}^2 - \omega_l^2)^2}; \quad (13)$$

$$\Omega_{ji} = \frac{2}{\hbar^2} \sum_{k,l} \left[\frac{\omega_{kj} |V_{jk}^l|^2}{\omega_{kj}^2 - \omega_l^2} + \frac{\omega_{ki} |V_{ki}^l|^2}{\omega_{ki}^2 - \omega_l^2} \right]. \quad (14)$$

* Ниже мы убедимся, что только эти недиагональные элементы играют роль при вычислении комбинационного отклика вещества (см. выражения (15)).

Суммирование в (11), (13), (14) ведется по всем l из (1), а заключенные в скобки α, β в (12) означают суммирование по парам индексов частот, удовлетворяющих условию (2). Напомним также, что при выводе (11) предполагалось, что $V_{mn}^l = 0$, поэтому в двухуровневой системе R равно нулю (см. сноску на стр. 2). Далее, для того, чтобы найти комбинационный отклик, обусловленный взаимодействием полей с частотами ω_α и ω_β в веществе, необходимо выделить часть $\sigma_{mn}(\omega_\alpha, \omega_\beta)$, ответственную за это взаимодействие. Используя (2), (4), (6), (9), нетрудно показать, что матричные элементы ρ , дающие вклад в этот отклик, имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_{mi} &= \frac{\sigma_{ji}^c}{\hbar} \left[\frac{V_{mj}^{-\beta} e^{i(\omega_\alpha - \Delta\omega_{\alpha\beta})t}}{\omega_{jm} + \omega_\beta} + \frac{V_{mj}^{-\alpha} e^{i(\omega_\beta - \Delta\omega_{\alpha\beta})t}}{\omega_{jm} + \omega_\alpha} \right]; \\ \rho_{jm} &= -\frac{\sigma_{ji}^c}{\hbar} \left[\frac{V_{im}^{-\beta} e^{i(\omega_\alpha - \Delta\omega_{\alpha\beta})t}}{\omega_{mi} + \omega_\beta} + \frac{V_{im}^{-\alpha} e^{i(\omega_\beta - \Delta\omega_{\alpha\beta})t}}{\omega_{mi} + \omega_\alpha} \right].\end{aligned}\quad (15)$$

Уравнения (10) вместе с выражениями (15) описывают процессы как комбинационного, так и двойного излучения и поглощения с учетом насыщения населеностей уровней i и j .

Прежде чем переходить к рассмотрению частных случаев, необходимо отметить следующее. В правых частях первых трех уравнений (10)

опущены величины порядка $\frac{1}{\omega_{mn} T_{mn}} R \sigma_{jj}$, а в выражениях для ρ_{mi} , ρ_{jm} из (15) — величины типа $V_{mj}^{-\alpha} / (\omega_{jm} + \omega_\alpha)^2 T_{jm}$. Нетрудно видеть, что наибольший вклад от этих выражений в отклик материальной системы в $\omega_{mn} T_{mn}$ раз меньше, чем вклад от оставленных членов. Кроме того, продолжая процедуру метода усреднения далее, мы получили бы $\sigma_{mn}^{(3)}$, которые также влияют на величину поляризации (или намагниченности). Однако можно показать, что обусловленная $\sigma_{mn}^{(3)}$ добавка также в $\omega_{mn} T_{mn}$ раз меньше величины отклика, определяемого из уравнений (10) с помощью выражений (15). Учитывая первое условие из (5), мы пренебрежем перечисленными добавками.

В качестве примера рассмотрим случай, когда спектр вещества не-эквидистантный и только для двух уровней ($j = 1, i = 2$) и двух полей выполняется условие (2). Предположим также, что 1 и 2 — нижние уровни материальной системы. В дальнейшем мы будем интересоваться случаем комбинационного излучения. Тогда условие (2) примет вид

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_{21} + \Delta\omega. \quad (2a)$$

Пользуясь сделанными выше предположениями, вычислим стационарный комбинационный отклик вещества, характеризуемый электрическим (магнитным) моментом M в предположении электро(магнито)-дипольного взаимодействия вещества с полем. Оператор \hat{V} имеет при этом вид

$$\hat{V} = -\mu \sum_l H_l e^{i\omega_l t}. \quad (16)$$

В нашем случае l принимает значения $\pm 1, \pm 2$, $\hat{\mu}$ — оператор электрического (магнитного) дипольного момента, H_l — амплитуда электрического (магнитного) поля частоты ω_l . M определяется как

$$M(\omega_1, \omega_2) = \text{sp} \{ \hat{\mu} \rho(\omega_1, \omega_2) \} = \sum_m (\mu_{2m} \rho_{m2} + \rho_{1m} \mu_{m1}) + \text{к. с.} \quad (17)$$

Из первого уравнения системы (10), учитывая (12) и (16), найдем стационарное решение для σ_{12}^c :

$$\sigma_{12 \text{ стаци}}^c = \frac{1}{\hbar^2} \frac{(\sigma_{22}^c - \sigma_{11}^c) \text{ стаци}}{[1/T + i(\Delta\omega - \Omega_{12})]} e^{i\Delta\omega t} R_1. \quad (18)$$

Здесь

$$R_1 = \sum_k \left[\frac{(\mu_{1k} H_1) (\mu_{k2} H_2^*)}{\omega_{k2} - \omega_2} + \frac{(\mu_{k2} H_1) (\mu_{1k} H_2^*)}{\omega_{k2} + \omega_1} \right]. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (15), где в соответствии с (2) полагаем $j = 1, i = 2$, $\alpha = 1, \beta = -2$, и пользуясь (16) и (17), получим

$$M(\omega_1, \omega_2) = \frac{i}{\hbar^3} \frac{R_1 (\sigma_{22}^c - \sigma_{11}^c) \text{ стаци}}{[1/T + i(\Delta\omega - \Omega_{12})]} \sum_m \left\{ \left[\frac{\mu_{2m} (H_2 \mu_{m1})}{\omega_{m2} + \omega_1} + \frac{\mu_{m1} (H_2 \mu_{2m})}{\omega_{m2} - \omega_2} \right] e^{i\omega_1 t} + \left[\frac{\mu_{2m} (H_1 \mu_{m1})}{\omega_{m1} - \omega_1} + \frac{\mu_{m1} (H_1 \mu_{2m})}{\omega_{m1} + \omega_2} \right] e^{-i\omega_2 t} \right\} + \text{к. с.} \quad (20)$$

Оставшиеся уравнения из (10), стационарное решение которых необходимо найти, чтобы получить окончательное выражение для M , в общем случае представляют собою бесконечную систему. Ниже мы рассмотрим некоторые представляющие практический интерес частные случаи, в которых можно ограничиться конечным числом уравнений и определить $\sigma_{22 \text{ стаци}}^c$ и $\sigma_{11 \text{ стаци}}^c$.

1. Населеностями k -х уровней ($k \neq 1, 2$) можно пренебречь. Выясним условия, при которых это можно сделать, на следующем примере. Учтем уравнение только для одного дополнительного уровня. Определив $\sigma_{33 \text{ стаци}}^c$ из четвертого уравнения (10) и подставив его во второе и третье уравнения, убеждаемся, что пренебрежение первыми членами в правых частях этих уравнений по сравнению со вторым возможно при одновременном выполнении условий типа

$$\frac{(W_{31} + 4\hbar^{-2} Q_{31}) (W_{13} + 4\hbar^{-2} Q_{31})}{(W_{31} + 4\hbar^{-2} Q_{31}) + (W_{32} + 4\hbar^{-2} Q_{32})} \ll (W_{12} + 4\hbar^{-2} Q_{21} + W_{13} + 4\hbar^{-2} Q_{13}); \quad (21)$$

$$\frac{(W_{32} + 4\hbar^{-2} Q_{32}) (W_{13} + 4\hbar^{-2} Q_{31})}{(W_{31} + 4\hbar^{-2} Q_{31}) + (W_{32} + 4\hbar^{-2} Q_{32})} \ll (W_{21} + 4\hbar^{-2} Q_{21}).$$

Легко показать, используя (13), что эти условия выполняются, если

$$|\mu_{21}| \geq \max(|\mu_{31}|, |\mu_{32}|), \quad T_{32}^{1/2} (\omega_{32} - \omega_l), \quad T_{31}^{1/2} (\omega_{31} - \omega_l) > 3T_{21}^{1/2} (\omega_{21} - \omega_l). \quad (21a)$$

В случае, когда (21a) выполнено, вычитая третье уравнение (10) из второго, получим для рассматриваемого примера

$$n + \frac{1}{\tau_{12}}(n - n_0) = -\frac{8}{\hbar^2} Q_{21} n - \frac{4}{\hbar^2} \operatorname{Im} [\sigma_{12}^c(R_1)^* e^{-i\Delta\omega t}]. \quad (22)$$

Здесь введены обозначения: $n = \sigma_{22}^c - \sigma_{11}^c$, $n_0 = \sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0$ — равновесная разность населенностей; для W_{mn} использованы выражения из работы [6]:

$$W_{mn} = \sigma_{nn}^0 / \tau_{mn},$$

где σ_{nn}^0 — равновесная населенность n -го уровня, а $\tau_{mn} = \tau_{nm}$.

Получим с помощью (18) стационарное решение уравнения (22):

$$n_{\text{стаци}} = n_0 \left\{ 1 + \frac{8}{\hbar^2} Q_{21} \tau_{21} + \frac{4}{\hbar^4} |R_1|^2 \frac{1}{[T^{-2} + (\Delta\omega - \Omega_{12})^2]} \frac{\tau_{12}}{T} \right\}^{-1}. \quad (23)$$

Выражения (19), (20) и (23) определяют $M(\omega_1, \omega_2)$. В простейшем случае, когда все μ_{2m} , μ_{m1} , H_1 и H_2 совпадают по направлению, M имеет вид

$$\begin{aligned} M(\omega_1, \omega_2) = & \frac{i}{\hbar^3} n_0 r \left[\frac{1}{T} - i(\Delta\omega - \Omega_{12}) \right] \left\{ \left[1 + \frac{8}{\hbar^2} \tau_{21} (q_{21}^{(1)} |H_1|^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + q_{21}^{(2)} |H_2|^2) \right] \left[\frac{1}{T^2} + (\Delta\omega - \Omega_{12})^2 \right] + \frac{4}{\hbar^4} r |H_1|^2 |H_2|^2 \frac{\tau_{21}}{T} \right\}^{-1} \times \\ & \times [|H_2|^2 H_1 e^{i\omega_1 t} + |H_1|^2 H_2^* e^{-i\omega_2 t}] + \text{к. с.}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$q_{21}^{(1)} = \frac{\omega_{21}^2 + \omega_1^2}{(\omega_{21}^2 - \omega_1^2)^2} \frac{|\mu_{21}|^2}{T_{21}},$$

$q_{21}^{(2)}$ получается из $q_{21}^{(1)}$ заменой ω_1 на ω_2 , и

$$r = \left| \sum_k \frac{(\omega_{k2} + \omega_{k1}) \mu_{1k} \mu_{k2}}{(\omega_{k2} + \omega_1)(\omega_{k2} - \omega_2)} \right|^2. \quad (25)$$

При выводе (24) мы пренебрегли $\Delta\omega$ по сравнению с $\omega_{k2} + \omega_{k1}$ в силу (3) и (5).

Оценим величины полей, необходимые для насыщения. Будем считать, что одно из полей, например, H_1 , задано и $\Delta\omega = \Omega_{12}$. Поле, при котором максимальна величина комбинационного отклика на частоте ω_2 ,

$$|H_2|_m = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{\tau_{21}^{-1} + 8\hbar^{-2} q_{21}^{(1)} |H_1|^2}{2q_{21}^{(2)} + \hbar^{-2} r T |H_1|^2}}. \quad (26)$$

При

$$|H_1|^2 > \frac{2\hbar^2 q_{21}^{(2)}}{r T} \quad (27)$$

комбинационный процесс играет существенную роль в эффекте насыще-

ния. Для оценки учтем в (25) один уровень, переходы с которого на уровни 1 и 2 — электродипольные. Положим $|\mu_{13}|, |\mu_{23}| \approx 10^{-18}$ CGSE и $\omega_{31} - \omega_1 \sim 3\omega_{21}$. Если $\omega_{21} - \omega_l \sim \omega_{21}$, то можно считать $T = T_{12}$ вплоть до полей, по величине равных атомным. Предположим также, что $\tau_{21} \approx 10^{-7}$ сек, $\omega_{21} \approx 10^{15}$ сек⁻¹, $T_{12} \approx 10^{-11}$ сек⁻¹, $|\mu_{12}| \approx |\mu_{13}|$. Тогда формула (27) дает

$$|H_1| > 3 \cdot 10^2 \text{ CGSE}.$$

При $|H_1| = 3 \cdot 10^3$ CGSE поле $|H_2| \approx 10^3$ CGSE.

2. В случае, когда второй уровень метастабильный и хотя бы один переход из 3—1, 3—2 — электродипольный, условия первого типа из (21) не выполняются, так как $Q_{31}(Q_{32}) \gg Q_{21}$ и пренебрегать населенностью третьего уровня нельзя*. Подобная ситуация характерна для спектров ионов редких земель [7]. Таким образом, при вычислении $M(\omega_1, \omega_2)$ необходимо пользоваться всеми уравнениями (10). Мы ограничимся учетом одного дополнительного уровня. В оптическом диапазоне $W_{12} \ll W_{21}$, $W_{13} \ll W_{31}$, $W_{23} \ll W_{32}$, $\sigma_{11}^0 \gg \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$. Кроме того, $W_{21} \ll W_{32}, W_{31}$, так как второй уровень метастабильный. Учитывая все это и (18), найдем

$$\begin{aligned} n_{\text{стаци}} = & 4\hbar^{-2} (Q_{31} W_{32} Q_{32} W_{31}) - W_{21} (W_{32} + W_{31}) \left\{ W_{21} (W_{31} + W_{32}) + \right. \\ & + 4\hbar^{-2} (Q_{31} W_{32} + Q_{32} W_{31}) + 48\hbar^{-4} Q_{11} Q_{23} + \\ & \left. + 2\hbar^{-4} |R_1|^2 \frac{(2W_{31} + 2W_{32} + 3Q_{31} + 3Q_{32})}{[T^{-2} + (\Delta\omega - \Omega_{12})^2] T} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим, что при

$$Q_{31} W_{32} - Q_{32} W_{31} > W_{21} (W_{31} + W_{32}), \quad (29)$$

наступает инверсия населенностей уровней 2 и 1 под действием нерезонансных полей (необязательно удовлетворяющих условию 2). Когда в (29) имеет место равенство, $M(\omega_1, \omega_2)$ меняет знак. Это соответствует тому факту, что при антистоксовом процессе комбинационные восприимчивости на частотах ω_1 и ω_2 имеют знаки, обратные знакам соответствующих восприимчивостей в стоксовом процессе. Наиболее легко условие (29) осуществить в системе, где переход 3—2 — магнитодипольный, 3—1 — электродипольный и $W_{32} > W_{31}$. Тогда $Q_{32} W_{31} \ll \ll W_{32} Q_{31}$ и условие (29) сводится к $Q_{31} \geq 2W_{21}$. Из определения Q_{1k} (13) найдем величину поля, при котором наступит инверсия:

$$|H| \geq \frac{2\hbar(\omega_{31}^2 - \omega_l^2) \sqrt{W_{21} T}}{\sqrt{2(\omega_{31}^2 + \omega_l^2)} |\mu_{13}|}. \quad (30)$$

При $\omega_{31} - \omega_l \sim \omega_{31} \approx 10^{15}$ сек⁻¹ время T , как и в первом случае, равно T_{12} . Полагая $T_{12} \approx 10^{-11}$ сек, $W_{21} \approx 5 \cdot 10^3$ сек⁻¹, $|\mu_{13}| \approx 10^{-18}$ CGSE, находим

$$|H| \geq 2 \cdot 10^2 \text{ CGSE}.$$

* Пренебрегать населенностью третьего уровня нельзя и в случае, когда $\omega_{31} - \omega_l$ и $\omega_{32} - \omega_l$ много меньше ($\omega_{31} - \omega_l$).

Если $Q_{32} W_{31} > Q_{31} W_{32}$, то, как видно из (28), осуществить инверсию невозможно, и в этом случае $M(\omega_1, \omega_2)$ не меняет знак при любых амплитудах полей.

Выражения (20), (29) определяют комбинационный отклик вещества в рассматриваемом случае. Мы не будем выписывать здесь громоздкого выражения для $M(\omega_1, \omega_2)$. Приведем лишь результаты численных оценок величины поля $|H_2|_m$, при которых $|M(\omega_2)|$ максимальен; оценки проведены в предположении, что все μ и H совпадают по направлению, причем $\Delta\omega = \Omega_{12}$, $T_{23} = T_{13} = T_{12} \approx 10^{-11}$ сек, $W_{13} = W_{23} \approx 10^7$ сек $^{-1}$, $W_{21} = 10^8$ сек $^{-1}$, $\omega_{ik} - \omega_i$, $\omega_{ik} \approx 10^{15}$ сек $^{-1}$. Величина $|H_1|$ взята равной $3 \cdot 10^3$ CGSE. В случае, когда переход 3—1—электродипольный, 3—2—магнитодипольный*, $|H_2|_{\text{нас}} \approx 6 \cdot 10^3$ CGSE. $M(\omega_2)$ не меняет знак при изменении $|H_2|$, так как для $|H_1|$ выполнено условие (29).

Если оба перехода электродипольные и $|\mu_{23}| = 2 |\mu_{13}|$, то $|H_2|_m \approx 10^2$ CGSE.

Как видно из изложенного выше, уравнения (10) не сводятся к уравнениям баланса для комбинационного взаимодействия полей. Учет уравнений для населенностей уровней, ближайших к рабочим, может привести к существенно иным характеристикам, чем те, которые получаются из уравнений баланса. Даже в случае, когда населенностями дополнительных уровней можно пренебречь, уравнение для разности населенностей отличается от уравнений, используемых в работах [8, 9], выражением $Q_{12}n$ (см. (21)); это выражение исчезает лишь при стремлении T_{12} к бесконечности.

Пользуюсь случаем выразить признательность В. М. Файну, Е. И. Якубовичу и Э. Г. Яшину за внимание к работе и стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Богоявленов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ГИТЛ, М., 1958.
2. В. М. Файн, Э. Г. Яшин, ЖЭТФ, 46, 695 (1964).
3. J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Dusping, P. S. Pershan, Phys. Rev., 127, 1918 (1962).
4. R. W. Hellwarth, Phys. Rev., 130, 1850 (1963).
5. G. Eckhard, R. W. Hellwarth, F. G. McClung, S. E. Schwarz, D. Weiner, E. G. Woodbury, Phys. Rev. Lett., 9, 455 (1962).
6. А. Клогстон, Квантовые параметры магнитные усилены, ИЛ, М., 1961, стр. 170.
7. М. А. Ельяшевич, Спектры редких земель, ГИТЛ, М., 1953.
8. R. W. Hellwarth, Appl. Optics, 2, 847 (1963).
9. Машкевич, Украинский физ. ж., 9, 1032 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 января 1964 г.

TO THE THEORY OF COMBINATIONAL RAMAN RADIATION IN STRONG FIELDS

Yu. G. Khrapopulo

The approximate equations have been obtained by the averaged method from the kinetic equation for the density matrix, describing the processes of combinational and double radiation and absorption, the saturation effect being taken into account. As an example, the case has been considered of the fields combinational interaction in the system with non-equidistant levels. On the basis of the solutions obtained the values of fields have been estimated which are necessary for the saturation effect in the case of a magnetic and electric dipole interactions between matter and field.

* При этом предполагалось, что μ_{13} совпадает по направлению с электрическим полем, а μ_{23} — с магнитным.

УДК 621.371.123

ПЛОСКОЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СЛОЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИ УЧЕТЕ НАСЫЩЕНИЯ

T. I. Кузнецова, С. Г. Раутян

Вычисляется монохроматическое поле, устанавливающееся внутри слоя активного вещества, ограниченного плоскими параллельными зеркалами с произвольными коэффициентами отражения. Определены частоты поля и потоки, выходящие через границы слоя. Результаты сопоставляются с выводами теории, основанной на уравнениях переноса.

1. В работе [1] было получено плоское решение волнового уравнения с учетом эффекта насыщения для слоя «активного» вещества, ограниченного зеркалами с высокими коэффициентами отражения. В указанном случае поле представляет собой почти стоячую волну, и вследствие насыщения диэлектрическая проницаемость оказывается почти периодической функцией координаты. Периодическая неоднородность среды приводит к уменьшению усиления поля из-за отражений волн на неоднородностях. Учет этого обстоятельства, как показали дальнейшие расчеты [2], оказывается весьма существенным при выяснении вопроса об устойчивости монохроматического режима оптических квантовых генераторов.

Известно, что в реальных квантовых генераторах иногда применяют зеркала с не очень высокими коэффициентами отражения и даже возможна генерация в кристалле, посеребренном только с одного конца. При этом на втором конце используется отражение от поверхности кристалла, которое обычно не превышает нескольких процентов. Представляется естественным, что при уменьшении отражения на границах слоя поле будет сильнее отличаться от стоячей волны, уменьшится глубина модуляции диэлектрической проницаемости и роль неоднородности среды станет менее значительной.

В настоящей работе мы ставим перед собою цель получить решения для случая произвольных коэффициентов отражения на границах. Кроме того, будет дано более подробное обоснование метода, использованного в [1].

2. Как и в [1], ниже рассматривается монохроматическое решение уравнений электромагнитного поля, причем зависимость от времени выбрана в виде $\exp\{-i\omega t\}$. Ограничимся случаями, когда диэлектрическая проницаемость может быть представлена следующим образом [3]:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon' - i\Delta\epsilon'' = \epsilon_0 + \frac{\beta' - i\beta''}{1 + \sigma^2 |E|^2}. \quad (1)$$

Здесь член $\Delta\epsilon$ обусловлен инверсной заселенностью каких-либо двух уровней, E — амплитуда поля. Основное допущение, используемое ниже, выражается неравенством

$$|\beta| = |\beta' - i\beta''| \ll 1. \quad (2)$$

Смысл этого неравенства состоит в том, что изменения амплитуды и фазы волны, проходящей через такую среду, малы на протяжении длины волны λ . В известных оптических квантовых генераторах $|\beta| \leq 10^{-6}$, так что в этих устройствах условие (2) выполнено в [1] на ϵ налагалось более жесткое требование

$$|\beta| \frac{l}{\lambda} \ll 1,$$

из которого следовало, что относительные изменения амплитуды поля малы на протяжении всей толщины слоя l . Кроме того, принималось $\beta' = 0$.

Рассмотрим плоско-параллельный слой активного вещества, на границах которого отражение обеспечивается за счет скачка диэлектрической проницаемости (рис. 1). При надлежащем выборе величин ϵ_1 и ϵ_2 можно обеспечить любые коэффициенты отражения r_1 и r_2 .

Из уравнений Максвелла получим следующее уравнение для напряженности электромагнитного поля внутри слоя:

$$\frac{d^2E}{d\xi^2} + \left(1 + \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0}\right) E = 0 \quad (3)$$

$$\left(\xi = \frac{\omega}{c} V \sqrt{\epsilon_0} x\right).$$

Границные условия при $x = 0$ и $x = l$:

$$\frac{dE}{d\xi} = -in_1 E \quad (\xi = 0),$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}};$$

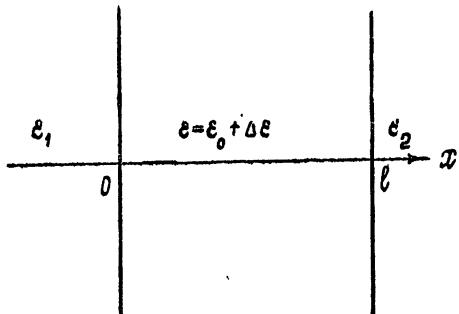


Рис. 1.

$$\frac{dE}{d\xi} = +in_2 E \quad \left(\xi = L = \frac{\omega}{c} V \sqrt{\epsilon_0} l\right), \quad n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}} \quad (4)$$

вытекают из требованияния, чтобы вне слоя существовали только уходящие волны.

Уравнению (3) эквивалентно следующее интегральное уравнение:

$$E = Ae^{-i\xi} + Be^{i\xi} - \int_0^\xi \sin(\xi - \xi') E(\xi') \frac{\Delta\epsilon(\xi')}{\epsilon_0} d\xi', \quad (5)$$

где A и B постоянные. Смысл дальнейших преобразований состоит в том, чтобы представить поле в виде двух бегущих волн, но с переменными амплитудами, и, пользуясь условием (2), получить уравнения для этих амплитуд. Итак, будем искать решение в виде

$$E(\xi) = p_1(\xi) e^{-i\xi} + p_2(\xi) e^{i\xi}. \quad (6)$$

Вводя это выражение в (5), получим уравнения для p_1 и p_2 :

$$p_1(\xi) - p_1(0) = \frac{1}{2i} \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_0^\xi e^{i\xi'} \frac{\sigma E(\xi') d\xi'}{1 + \sigma^2 |E(\xi')|^2} = \frac{1}{2i} \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_0^\xi \frac{p_1(\xi') + p_2(\xi') e^{2i\xi'}}{1 + |p_1(\xi') + p_2(\xi') e^{2i\xi'}|^2} d\xi';$$

$$\begin{aligned}
 p_2(\xi) - p_2(0) &= -\frac{1}{2i} \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_0^\xi e^{-i\xi'} \frac{\sigma E(\xi') d\xi'}{1 + \sigma^2 |E(\xi')|^2} = \\
 &= -\frac{1}{2i} \frac{\beta}{\epsilon_0} \int_0^\xi \frac{p_1(\xi') e^{-2i\xi'} + p_2(\xi')}{1 + |p_1(\xi') e^{-2i\xi'} + p_2(\xi')|^2} d\xi'.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Используя (7), легко оценить быстроту изменения p_1 и p_2 :

$$\left| \frac{dp_{1,2}}{d\xi} \right| = \left| \frac{\beta}{2\epsilon_0} e^{\mp i\xi} \frac{\sigma E}{1 + \sigma^2 |E|^2} \right| < \frac{|\beta|}{2\epsilon_0} \frac{\sigma |E|}{1 + \sigma^2 |E|^2}. \tag{8}$$

Так как $|\beta|/\epsilon_0 \ll 1$, то оценка (8) означает, что при изменении ξ на несколько единиц (т. е. при изменении координаты x на величину порядка длины волны λ) функции $p_1(\xi)$ и $p_2(\xi)$ изменяются мало и в абсолютном смысле, и по отношению к величине σE . Поэтому при вычислении интегралов в формулах (7) будем считать p_1 и p_2 постоянными на периоде тригонометрических функций. Кроме того, величины $[p_{1,2}(\xi + \pi) - p_{1,2}(\xi)]/\pi$ заменим на $dp_{1,2}/d\xi$. Таким образом, из (7) получаем систему дифференциальных уравнений для $p_1(\xi)$, $p_2(\xi)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{d\xi} &= \frac{\beta}{2\pi i \epsilon_0} \int_0^\pi \frac{p_1(\xi) + p_2(\xi) e^{2i\xi'}}{1 + |p_1(\xi) + p_2(\xi) e^{2i\xi'}|^2} d\xi'; \\
 \frac{dp_2}{d\xi} &= -\frac{\beta}{2\pi i \epsilon_0} \int_0^\pi \frac{p_1(\xi) e^{-2i\xi'} + p_2(\xi)}{1 + |p_1(\xi) e^{-2i\xi'} + p_2(\xi)|^2} d\xi'.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Для дальнейшего удобно ввести модули и фазы функций $p_1(\xi)$, $p_2(\xi)$:

$$p_1(\xi) = P_1(\xi) e^{i\varphi_1(\xi)}; \quad p_2(\xi) = P_2(\xi) e^{i\varphi_2(\xi)}. \tag{10}$$

Если обратиться теперь к разложению переменной части диэлектрической проницаемости в ряд Фурье на отрезке $[n\pi + (\varphi_1 - \varphi_2)/2; (n+1)\pi + (\varphi_1 - \varphi_2)/2]$:

$$\Delta\epsilon = \frac{\beta}{1 + P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 P_2 \cos(2\xi + \varphi_2 - \varphi_1)} = \bar{\Delta}\epsilon - \sum_m c_m \cos m(2\xi + \varphi_2 - \varphi_1), \tag{11}$$

то уравнениям (9) можно придать форму,

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_1}{d\xi} &= \frac{1}{2i\epsilon_0} \left\{ \bar{\Delta}\epsilon p_1 - \frac{1}{2} c_1 e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} p_2 \right\}; \\
 \frac{dp_2}{d\xi} &= -\frac{1}{2i\epsilon_0} \left\{ \bar{\Delta}\epsilon p_2 + \frac{1}{2} c_1 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} p_1 \right\}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Согласно уравнениям (12), изменения комплексных амплитуд p_1 и p_2 бегущих волн, составляющих поле внутри слоя, складываются из двух членов. Первые члены такие же, как при взаимодействии волн с однородной средой, обладающей усредненными (на протяжении $\lambda/2$) характеристиками ($\bar{\Delta}\epsilon$). Эти члены соответствуют, очевидно, оптико-геометрическому приближению. Вторые члены связаны с тем, что на неоднородностях среды, отстоящих друг от друга на расстоянии π и рас-

положенных симметрично относительно точек $n\pi + (\varphi_1 - \varphi_2)/2$, вторая (первая) волна отражается и интерферирует с первой (второй). Аналогичная интерпретация влияния неоднородности среды дана в работе [2] в частном случае строго периодического изменения $\Delta\varepsilon(\xi)$.

Выполняя интегрирование в (9) и разделяя вещественные и мнимые части, после некоторых преобразований получим следующую систему уравнений для P_1 , P_2 , φ_1 , φ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{d\xi} &= -\frac{\beta''}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1+(P_1+P_2)^2} + \sqrt{1+(P_1-P_2)^2}} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{1+(P_1+P_2)^2}} + \frac{P_2 - P_1}{\sqrt{1+(P_1-P_2)^2}} \right\}; \\ \frac{dP_2}{d\xi} &= \frac{\beta''}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1+(P_1+P_2)^2} + \sqrt{1+(P_1-P_2)^2}} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{1+(P_1+P_2)^2}} - \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{1+(P_1-P_2)^2}} \right\}; \\ \frac{d\varphi_1}{d\xi} &= \frac{\beta'}{\beta''} \frac{1}{P_1} \frac{dP_1}{d\xi}; \quad \frac{d\varphi_2}{d\xi} = \frac{\beta'}{\beta''} \frac{1}{P_2} \frac{dP_2}{d\xi}. \end{aligned} \quad (13)$$

Границные условия (4) в новых обозначениях имеют вид

$$P_{20} e^{i\varphi_2} = -\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} P_{10} e^{i\varphi_{10}}; \quad (15)$$

$$P_{1L} e^{i\varphi_{1L}} = -\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} P_{2L} e^{i\varphi_{2L}}, \quad (16)$$

где $P_{10} = \varphi_1(0)$, $P_{1L} = P_1(L)$, $P_{20} = P_2(0)$, $P_{2L} = P_2(L)$ и аналогично для фаз $\varphi_{10} = \varphi_1(0)$ и т. д.

Отметим, что в случае $n_1 = 1$ или $n_2 = 1$ граничным условиям нельзя удовлетворить. Пусть, например, $n_1 = 1$. Из (15) следует, что $P_{20} = 0$. В случае, когда P_2 обращается в нуль хотя бы в одной точке, решение системы (13) есть $P_2 \equiv 0$; $\ln P_1 + P_1^2/2 + \beta''\xi/2\varepsilon_0 = \text{const}$. Но если $P_{2L} \neq 0$, то ни при каком n_2 и $P_{1L} \neq 0$ нельзя удовлетворить условию (16). По отношению к квантовым генераторам это соответствует тому известному факту, что генерация невозможна без отражения волн, усиливаемых активным веществом слоя.

Решение системы уравнений (13) можно представить следующим образом:

$$\sqrt{1+(P_1+P_2)^2} - \sqrt{1+(P_1-P_2)^2} = \text{const}; \quad (17)$$

$$-\frac{\beta''}{\varepsilon_0}\xi - (P_1 - P_2)(P_1 + P_2) + \quad (18)$$

$$+\ln \frac{(P_1 + P_2)[\sqrt{1+(P_1+P_2)^2} + 1] - (P_1 - P_2)[\sqrt{1+(P_1-P_2)^2} + 1]}{(P_1 + P_2)[\sqrt{1+(P_1+P_2)^2} + 1] + (P_1 - P_2)[\sqrt{1+(P_1-P_2)^2} + 1]} = \text{const}.$$

Из уравнений (14) следуют равенства

$$\varphi_1 - \frac{\beta'}{\beta''} \ln P_1 = \text{const}; \quad \varphi_2 - \frac{\beta'}{\beta''} \ln P_2 = \text{const}. \quad (19)$$

Наконец, используя (19) и исключая случай $n_1 = 1, n_2 = 1$, из граничных условий (15), (16) находим

$$2L = 2\pi N + \operatorname{Im} \ln \frac{n_1 + 1}{n_1 - 1} \frac{n_2 + 1}{n_2 - 1} - \frac{\beta'}{\beta''} \operatorname{Re} \ln \frac{n_1 + 1}{n_1 - 1} \frac{n_2 + 1}{n_2 - 1}; \quad (20)$$

$$P_{1L} = \sqrt{r_2} P_{2L}; \quad P_{20} = \sqrt{r_1} P_{10}, \quad (21)$$

где N — целое число, а

$$r_1 = \left[\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} \right]^2; \quad r_2 = \left[\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} \right]^2 \quad (22)$$

суть френелевские коэффициенты отражения на границах слоя. Второй член в (20) равен либо 0 (если $n_1 > 1, n_2 > 1$ или $n_1 < 1, n_2 < 1$), либо π (если $n_1 > 1 > n_2$ или $n_1 < 1 < n_2$). Следовательно,

$$2L = 2 \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} l = \pi M - \frac{\beta'}{2\beta''} \ln \frac{1}{r_1 r_2}, \quad (23)$$

где M — четное или нечетное целое число в зависимости от соотношений между n_1, n_2 и 1. В дальнейшем ради определенности принимается $n_1 > 1, n_2 > 1$.

Соотношение (23) определяет, очевидно, частоту поля ω . В рассматриваемом случае, когда ϵ задается формулой (1), отношение мнимой и вещественной частей $\Delta\epsilon$ есть [3]

$$\frac{\Delta\epsilon'}{\Delta\epsilon''} = \frac{\beta'}{\beta''} = \frac{\omega - \omega_{mn}}{\Delta\omega}, \quad (24)$$

где ω_{mn} — частота атомного перехода, $\Delta\omega$ — ширина линии. Следовательно, в (23) не входит величина поля в слое, т. е. частота ω не зависит от уровня возбуждения активного вещества. Это обстоятельство связано с дисперсионной зависимостью $\Delta\epsilon$ от частоты. С помощью (23) и (24) находим

$$\omega - \omega_{mn} = (\omega_c - \omega_{mn}) \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega + \Delta\omega_c}, \quad (25)$$

где

$$\omega_c = \frac{\pi Mc}{l \sqrt{\epsilon_0}}; \quad \Delta\omega_c = \frac{c}{4l \sqrt{\epsilon_0}} \ln \frac{1}{r_1 r_2} \quad (26)$$

соответственно частота и ширина резонанса слоя.

Формула (25) полностью совпадает с тем, что имеет место без учета неоднородности среды в слое [4, 5], как и следовало ожидать в связи с независимостью условия (23) от мощности возбуждения. Подчеркнем, что формула (25) получена для специального вида зависимости $\Delta\epsilon$ от ω и E . В других случаях (например, в газовых системах, где уширение линий определяется эффектом Допплера) формула (25), вообще говоря, неприменима.

Постоянные интегрирования в (17) и (18) целесообразно связать с потоками излучения через единицу поверхности границ слоя при $\xi = 0$ и $\xi = L$:

$$\Pi_1 = \frac{c \sqrt{\epsilon_0}}{8 \pi \sigma^2} (1 - r_1) P_{10}^2; \quad \Pi_2 = \frac{c \sqrt{\epsilon_0}}{8 \pi \sigma^2} (1 - r_2) P_{2L}^2. \quad (27)$$

В дальнейшем удобно оперировать с безразмерными величинами

$$F_1 = (1 - r_1)P_{10}^2; \quad F_2 = (1 - r_2)P_{2L}^2, \quad (28)$$

пропорциональными потокам Π_1 , Π_2 . Значения F_1 и F_2 определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + n_1 F_1} - \sqrt{1 + F_1/n_1} &= \sqrt{1 + n_2 F_2} - \sqrt{1 + F_2/n_2}; \\ 2\zeta = \frac{\beta''}{\epsilon_0} L &= F_1 + F_2 + \\ + \ln \frac{n_1 [1 + \sqrt{1 + F_1/n_1}] + 1 + \sqrt{1 + n_1 F_1}}{n_1 [1 + \sqrt{1 + F_1/n_1}] - 1 - \sqrt{1 + n_1 F_1}} \times \\ \frac{n_2 [1 + \sqrt{1 + F_2/n_2}] + 1 + \sqrt{1 + n_2 F_2}}{n_2 [1 + \sqrt{1 + F_2/n_2}] - 1 - \sqrt{1 + n_2 F_2}}, \end{aligned} \quad (29)$$

которые легко получить, если в (17) и (18) подставить граничные значения $\xi = 0$ и L и воспользоваться граничными условиями (21). Таким образом, решая уравнения (29), можно найти F_1 , F_2 , а по ним, — потоки излучения и граничные значения амплитуд волн P_{10} и P_{2L} . С помощью последних можно определить постоянные интегрирования в формулах (17) и (18) и вычислить из них функции $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$. Наконец, после этого фазы $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ находятся из (19).

3. Рассмотрим некоторые общие свойства решений системы уравнений (13). Легко показать, что ввиду положительности P_1 , P_2^* выражения, заключенные в (13) в фигурные скобки, положительны. Следовательно, $dP_1/d\xi < 0$, $dP_2/d\xi > 0$, а функции $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ на отрезке $[0, L]$ монотонно убывают и возрастают соответственно. Отметим далее, что, согласно (21), имеем $P_{1L} < P_{2L}$, $P_{10} > P_{20}$. Следовательно, существует такая точка $\xi = \tilde{\xi}$, для которой $P_1(\tilde{\xi}) = P_2(\tilde{\xi})$. Вследствие монотонности функций $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ такая точка единственна. Если коэффициенты отражения на обеих границах одинаковы, то точка $\tilde{\xi}$ находится посередине слоя. Если же $r_1 \neq r_2$, то $\tilde{\xi}$ смещается к границе с большим коэффициентом отражения.

Для исследования некоторых частных случаев представляют интерес величины $P_1 + P_2$ и $P_1 - P_2$. Складывая и вычитая уравнения (13), находим

$$\begin{aligned} \frac{d(P_1 + P_2)}{d\xi} &= \frac{\beta''}{\epsilon_0} \frac{P_2 - P_1}{\sqrt{1 + (P_2 - P_1)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (P_1 + P_2)^2} + \sqrt{1 + (P_1 - P_2)^2}}; \\ \frac{d(P_2 - P_1)}{d\xi} &= \frac{\beta''}{\epsilon_0} \frac{P_2 + P_1}{\sqrt{1 + (P_2 + P_1)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (P_1 + P_2)^2} + \sqrt{1 + (P_1 - P_2)^2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Разность $P_2 - P_1$ меняет знак на отрезке $[0, L]$, причем слева от $\tilde{\xi}$ имеем $P_2 - P_1 < 0$, а справа $P_2 - P_1 > 0$. То же самое относится и к знаку производной $d(P_1 + P_2)/d\xi$. Следовательно, функция $P_1 + P_2$ имеет ми-

* Случай $P_1 = 0$ или $P_2 = 0$ мы исключили из рассмотрения (см. обсуждение формул (15) и (16) в разделе 2).

нимум в точке $\xi = \tilde{\xi}$. Наибольшее значение $P_1 + P_2$ принимает на одной из границ слоя. Функция же $P_2 - P_1$ монотонно возрастает и в соответствии с граничными условиями меняется в пределах

$$-\frac{P_{10} + P_{20}}{n_1} \leq P_2 - P_1 \leq \frac{P_{1L} + P_{2L}}{n_2}. \quad (31)$$

Оценим максимальную величину изменений $(P_1 + P_2)^2$, используя (17) и (21), легко показать, что

$$\frac{(P_{10} + P_{20})^2 - \min(P_1 + P_2)^2}{(P_{10} + P_{20})^2} < \frac{2}{n_1}, \quad \frac{(P_{1L} + P_{2L})^2 - \min(P_1 + P_2)^2}{(P_{1L} + P_{2L})^2} < \frac{2}{n_2}. \quad (32)$$

Таким образом, относительное изменение $(P_1 + P_2)^2$ не превышает $2 \max\left\{\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right\}$.

4. Используем полученные оценки для анализа предельного случая высоких коэффициентов отражения;

$$n_1 \gg 1; \quad n_2 \gg 1. \quad (33)$$

При выполнении этих условий, согласно (31) и (32), оказываются малыми относительные изменения $P_1 + P_2$, равно как и P_1, P_2 в отдельности. Поэтому в первом приближении по $\max\left\{\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\right\}$ система уравнений (30) принимает вид

$$\frac{d(P_1 + P_2)}{d\xi} = 0; \quad \frac{d(P_2 - P_1)}{d\xi} = \frac{\beta''}{\epsilon_0} \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{1 + (P_1 + P_2)^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (P_1 + P_2)^2} + 1}; \quad (34)$$

ее решение есть

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \text{const} = A; \\ P_2 - P_1 &= \frac{\beta''}{\epsilon_0} \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + A^2} + 1} \xi + \text{const}. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя (35) в (19) и (6), определяя константы из граничных условий и удерживая только члены порядка $1 - r_1, 1 - r_2$, находим

$$\begin{aligned} \sigma E(\xi) &= e^{i\varphi} A \left\{ \sin \xi + \frac{i}{4} \left[1 - r_1 - (2 - r_1 - r_2) \left(1 - i \frac{\beta'}{\beta''} \right) \frac{\xi}{L} \right] \cos \xi \right\}; \\ A^2 &= 2\eta - \frac{1}{2} [1 + \sqrt{1 + 8\eta}]; \quad \eta = \frac{\beta'' L}{\epsilon_0 [1 - (r_1 + r_2)/2]}, \end{aligned} \quad (36)$$

где $e^{i\varphi}$ — несущественный фазовый множитель. Таким образом, при высоких коэффициентах отражения поле внутри слоя представляет собою почти стоячую волну с медленно изменяющейся амплитудой.

Эти результаты были получены ранее в работе [1], но при $\beta' = 0$ и более жестких условиях, налагаемых на β'' (в [1] предполагалось, что $2\zeta \equiv \beta'' L / \epsilon_0 \ll 1$). Из приведенного выше вывода ясно, что (36) дает малую относительную ошибку, если выполняется условие (33), независимо от того, какова величина параметра $\zeta = \beta'' L / 2\epsilon_0$, т. е. при любых уровнях возбуждения среды слоя и при любых его толщинах.

5. Сопоставим наши исходные уравнения с теорией, основывающейся на уравнениях переноса [6]. В этой теории основными величинами являются потоки, связанные с волнами $p_1(\xi)e^{-i\xi}$, $p_2(\xi)e^{i\xi}$:

$$S_1(\xi) = \frac{c \sqrt{\epsilon_0}}{8\pi\sigma^2} P_1^2(\xi); \quad S_2(\xi) = \frac{c \sqrt{\epsilon_0}}{8\pi\sigma^2} P_2^2(\xi). \quad (37)$$

Реальный поток электромагнитной энергии есть $S_2 - S_1$. Для функций $S_1(\xi)$, $S_2(\xi)$ в работе [6] используются уравнения переноса:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{d\xi} &= -\frac{\beta''}{\epsilon_0} \frac{S_1}{1 + \alpha(S_1 + S_2)}; \quad \frac{dS_2}{d\xi} = \frac{\beta''}{\epsilon_0} \frac{S_2}{1 + \alpha(S_1 + S_2)}; \\ \alpha &= \frac{8\pi\sigma^2}{c \sqrt{\epsilon_0}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Отличие физических предпосылок, лежащих в основе уравнений переноса, от развитой выше теории легко установить, если в системе (13) от $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ перейти к $S_1(\xi)$, $S_2(\xi)$ и записать ее в форме, аналогичной уравнениям (12):

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{d\xi} &= -\frac{\bar{\Delta}\epsilon''}{\epsilon_0} S_1 + \frac{c_1''}{2\epsilon_0} \sqrt{S_1 S_2}; \\ \frac{dS_2}{d\xi} &= \frac{\bar{\Delta}\epsilon''}{\epsilon_0} S_2 - \frac{c_1''}{2\epsilon_0} \sqrt{S_1 S_2}, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\epsilon'' &= \frac{\beta''}{\sqrt{[1 + \alpha(S_1 + S_2)]^2 - 4\alpha^2 S_1 S_2}}; \\ c_1'' &= \bar{\Delta}\epsilon'' \frac{4\alpha\sqrt{S_1 S_2}}{1 + \alpha(S_1 + S_2) + \sqrt{[1 + \alpha(S_1 + S_2)]^2 - 4\alpha^2 S_1 S_2}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнения (39) отличаются от (38) в двух пунктах. Во-первых, коэффициент при S_1 и S_2 в (39) есть $\pm \bar{\Delta}\epsilon'' [|\vec{E}(\xi)|^2]/\epsilon_0$, в то время как в (38) фигурирует $\Delta\epsilon'' [|E(\xi)|^2/\epsilon_0]$, т. е. мнимая часть диэлектрической проницаемости при среднем значении квадрата модуля поля (усреднение производится на протяжении половины длины волны). Ясно, что в случае неоднородной среды эти величины, вообще говоря, не равны друг другу. Из (40) и (38) видно, что приближенно равенство осуществляется при условии

$$\frac{2\alpha\sqrt{S_1 S_2}}{1 + \alpha(S_1 + S_2)} = \frac{2P_1 P_2}{1 + P_1^2 + P_2^2} \ll 1. \quad (41)$$

Во-вторых, в правой части уравнений (39) имеются члены $\pm \frac{1}{2} c_1'' \sqrt{S_1 S_2}$,

отсутствующие в (38) и описывающие, как говорилось выше, отражение волн $p_1(\xi)e^{-i\xi}$, $p_2(\xi)e^{i\xi}$ на неоднородностях среды слоя. Из дальнейшего будет видно, что даже при выполнении условия (41) члены $\pm \frac{1}{2} c_1'' \sqrt{S_1 S_2}$ существенны. Таким образом, в уравнениях переноса (38) не учитываются интерференционные эффекты, как вызывающие неоднородность среды, так и возникающие вследствие этой неоднородности.

В дальнейшем нам понадобится выражение для потока излучения, получающееся с помощью уравнений переноса. Оно имеет вид [6] (в наших обозначениях)

$$2\zeta = \frac{\beta''}{\varepsilon_0} L = F_1 + F_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{r_1 r_2}. \quad (42)$$

6. Обратимся теперь к анализу формул (29). Значение параметра $2\zeta = \beta''L/\varepsilon_0$, при котором F_1, F_2 обращаются в нуль, равно

$$2\zeta_{\text{порог}} = \left[\frac{\beta''}{\varepsilon_0} L \right]_{\text{порог}} = \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}. \quad (43)$$

Формула (43) находится в полном соответствии с тем, что следует из (42), т. е. с тем, что имеет место без учета неоднородности среды. Однако на характер роста потока излучения неоднородность уже влияет. Из (29) видно, что F_1, F_2 нелинейно зависят и от толщины слоя L и от мощности возбуждения его среды. Для производной $d\zeta/dF$ в простейшем случае $F_1 = F_2 \equiv F$, имеем

$$\frac{d\zeta}{dF} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+nF}} \frac{1}{\sqrt{1+F/n}} \quad (n_1 = n_2 \equiv n). \quad (44)$$

Вблизи порога $d\zeta/dF$ не зависит от n , т. е. оказывается одной и той же при любых коэффициентах отражения на границах слоя, и равна 3/2. В случае же (42) производная $d\zeta/dF$ везде равна единице. Таким образом, скорость нарастания потока существенно зависит от неоднородности.

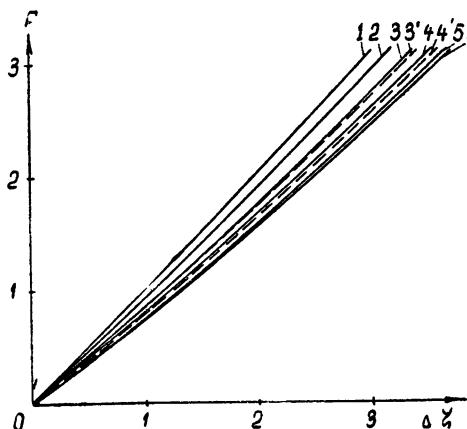


Рис. 2. Зависимость F от $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_{\text{порог}}$:

2— $r=96\%$; 3— $r=75\%$; 4— $r=50\%$; 5— $r=11\%$; 6— $r=3\%$; кривая 6 в данной области изменения $\Delta\zeta$ практически совпадает с предельной кривой, определяемой формулой (46); кривые 3' и 4' построены по приближенным формулам (36) для $r = 75\%$ и $r = 50\%$; прямая 1 соответствует формуле (42).

На рис. 2 приведены величины потоков излучения в зависимости от $\zeta - \zeta_{\text{порог}}$ для различных значений коэффициента отражения. Прямая 1 соответствует формуле (42). Пунктирные кривые построены по приближенным формулам (36). Как видно из рис. 2, эти выражения оказываются практически пригодными вплоть до $r_1, r_2 \approx 50\%$. По мере увеличения ζ относительное отличие графиков от прямой 1 становится все меньше и меньше. При уменьшении коэффициента отражения r графики отходят от прямой 1 и при $r \rightarrow 0$ приближаются к некоторой предельной кривой, обозначенной на рис. 2 цифрой 6. Рассмотрим этот случай более подробно, так как он представляет интерес и с точки зрения выяснения роли неоднородности среды слоя.

Итак, пусть

$$n_1 - 1 \ll 1; \quad n_2 - 1 \ll 1. \quad (45)$$

Разлагая выражения (29) по степеням $n_1 - 1$, $n_2 - 1$ и ограничиваясь первым приближением, можно получить следующие формулы:

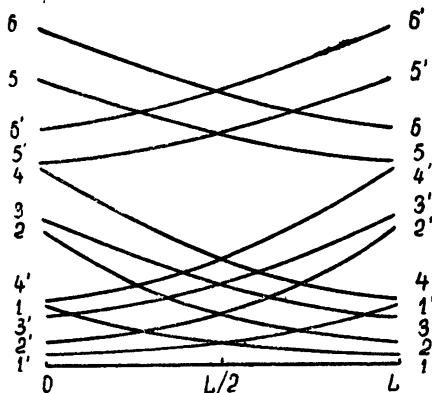
$$(n_1 - 1) \frac{F_1}{\sqrt{1 + F_1}} = (n_2 - 1) \frac{F_2}{\sqrt{1 + F_2}}; \quad (46)$$

$$2\zeta = \frac{\beta''}{\epsilon_0} L = F_1 + F_2 + \ln \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} + \frac{1}{2} \ln(1 + F_1)(1 + F_2).$$

В отличие от (42), в формуле (46) появляется еще один логарифмический член $\frac{1}{2} \ln(1 + F_1)(1 + F_2)$, который и отражает, следовательно, роль неоднородности. Формулам (46) и соответствует кривая 6 на рис. 2. Следовательно, формулы (46) хорошо описывают истинное положение вещей для $r_1, r_2 \leq 10\%$. Таким образом, даже при самых малых r_1, r_2 модуляция диэлектрической проницаемости влияет на поле внутри слоя и величину потока излучения, причем влияние этого обстоятельства наиболее существенно вблизи порога, когда F_1, F_2 малы и логарифмический член составляет половину от основного члена $F_1 + F_2$. Впрочем, последнее справедливо в общем случае произвольных значений r_1, r_2 , как это уже отмечалось в связи с формулой (44).

Рис. 3. Зависимость P_1 (кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6) и P_2 (кривые 1', 2', 3', 4', 5', 6') от координаты ξ :

$1.1' - \zeta = 1.9, r = 3\%$ (порог = 1.75); $2.2' - \zeta = 2.5, r = 3\%$ (порог = 1.75); $3.3' - \zeta = 1.9, r = 11\%$ (порог = 1.1); $4.4' - \zeta = 2.5, r = 11\%$ (порог = 1.1); $5.5' - \zeta = 1.9, r = 50\%$ (порог = 0.35); $6.6' - \zeta = 2.5, r = 50\%$ (порог = 0.35).



Приведем теперь результаты расчета (см. рис. 3) амплитуд $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$, выполненного для различных значений параметров задачи. Из графиков рис. 3 видно, что при увеличении возбуждения системы ζ и при уменьшении коэффициента отражения становится заметнее нелинейный характер зависимости P_1 и P_2 от координаты ξ . Однако для использованных комбинаций ζ и r , соответствующих современным возможностям эксперимента, нелинейность сравнительно невелика.

Проведенный анализ общих уравнений и отдельных частных случаев показывает, что всегда следует учитывать неоднородность среды (на протяжении $\lambda/2$), вызванную эффектом насыщения. Нетрудно показать, что в уравнениях (39) нельзя отбрасывать члены $\pm \frac{c_1''}{2\epsilon_0} \sqrt{S_1 S_2}$, опи- сывающие отражение, за исключением, быть может, точки порогового возбуждения. Действительно, этими членами можно было бы пренебречь, если бы одновременно выполнялись неравенства

$$\frac{c_1''}{2\Delta\epsilon''} \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = \frac{2\alpha S_2}{1 + \alpha(S_1 + S_2) + \sqrt{[1 + \alpha(S_1 + S_2)]^2 - 4\alpha^2 S_1 S_2}} \ll 1; \quad (47)$$

$$\frac{c_1''}{2\Delta\epsilon''} \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{2\alpha S_1}{1 + \alpha(S_1 + S_2) + \sqrt{[1 + \alpha(S_1 + S_2)]^2 - 4\alpha^2 S_1 S_2}} \ll 1.$$

Очевидно, что (47) выполняется только при малом насыщении $\alpha S_1 \ll 1$, $\alpha S_2 \ll 1$. На первый же взгляд может показаться, что отражения не должны играть роли при менее жестких условиях, а именно во всех тех случаях, когда модуляция диэлектрической проницаемости мала. Слабая модуляция может иметь место и при большом насыщении, если поле состоит из двух бегущих волн, амплитуды которых сильно отличаются по величине (см. (41)). Однако физически ясно, что пренебречь этой малой неоднородностью нельзя, поскольку при существенном отличии амплитуд двух волн слабые отражения волны с большей амплитудой значительно изменяют волну с меньшей амплитудой.

Возвращаясь к неравенствам (47), подчеркнем следующее. Если $\alpha S_1 \ll 1$, $\alpha S_2 \ll 1$, то роль отражений на неоднородностях действительно невелика. Но при этих условиях, как нетрудно усмотреть из (39), (40), $\Delta\epsilon$ отличается от константы β на величину того же порядка малости, что и член, описывающий отражения. Следовательно, если мы не будем учитывать отражения, мы должны вообще пренебречь насыщением, т. е. ограничиться линейной теорией. Однако с помощью последней, как известно, можно определить только пороговую точку, но нельзя получить мощность генерации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутян, ЖЭТФ, 43, 1897 (1962).
2. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутян, ФТ, 5, 2105 (1963).
3. С. Г. Раутян, И. И. Собельман, ЖЭТФ, 41, 456 (1961).
4. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, УФН, 57, 485 (1956).
5. В. Р. Беннетт, УФН, 81, 119 (1963).
6. А. П. Иванов, Б. И. Степанов, Б. М. Берковский, И. Л. Кацев, ДАН БССР, 6, 147 (1962).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
6 декабря 1963 г.

PRANE SOLUTION OF A WAVE EQUATION FOR THE LAYER WITH A NEGATIVE ABSORPTION COEFFICIENT THE SATURATION BEING TAKEN INTO ACCOUNT

T. I. Kouznetsova, S. G. Rautian

A monochromatic stationary field is calculated inside the layer of an active medium placed between the plane parallel mirrors with arbitrary reflection coefficients. The field frequencies and fluxes coming out through the layer boundaries have been determined. The results are compared with the theory based on radiation transfer equations.

Примечание при корректуре. После того, как настоящая статья была послана в редакцию, вышла из печати работа Л. А. Островского и Е. И. Якубовича (ЖЭТФ, 46, 963 (1964)), в которой также получены и обсуждаются уравнения, совпадающие с (13), (14).

УДК 621.391.11

О КВАНТОВАНИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗЫ

С. А. Ахманов, В. П. Комолов, А. С. Чиркин

Сообщаются результаты экспериментального исследования нестационарных законов распределения фазы методом квантования. В качестве квантователя фазы используется одноконтурный параметрический генератор. Обработка квантованных выборок проведена спектральным методом и методом серий. Показано, что при $(S/N)_{\text{вх}} < 1$ на входе квантователя можно получить информацию об амплитуде сигнала, а при $(S/N)_{\text{вх}} > 1 \frac{1}{2}$ — о фазе, (или частоте) квантуемого сигнала.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] исследовалась возможность использования квантования при измерении стационарных одномерных законов распределения фазы. Как было показано в [2–4], а также в [5], введение дискретизации при измерении фазы даже в простейшем случае двоичного квантования приводит лишь к незначительным потерям информации, не превышающим 2 дб. Важно отметить, однако, что этот вывод относится к сигналам с известной частотой. Случай, когда частота сигнала известна, является простейшим; поэтому значительный интерес представляет исследование возможности применения квантования фазы и оценка потерь при квантовании для стохастических сигналов и сигналов с неизвестной частотой. В обоих этих случаях одномерный закон распределения фазы уже не может, очевидно, дать информацию о наличии или отсутствии сигнала; поэтому необходимо использовать двухмерный закон распределения фазы.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы продемонстрировать один из простейших вариантов дискретизации при исследовании нестационарных законов распределения фазы, а именно, использование квантователя фазы с фиксированной опорной частотой при регистрации сигнала с неизвестной частотой, и сопоставить его характеристики с характеристиками квантователей, рассмотренных в [1–5]. В этом случае измеряемая фаза является нестационарным случайным процессом, среднее значение которого линейно зависит от времени.

В этой работе, как и раньше в [2–4], в качестве квантователя использовался одноконтурный параметрический генератор. Нетрудно видеть, что даже при несинхронном сигнале такой генератор реализует квантование, т. е. формирует импульсы, фаза которых определяется фазой сигнала в момент возбуждения. Действительно, условие квазистационарности $\tau_{\text{уст}} \ll \tau_{\text{изм}}$ реализуется при выполнении условия параметрического возбуждения $mQ > 2$, поскольку время установления фазы колебаний параметрического генератора $\tau_{\text{уст}} \sim 1/\pi mF$, а время изменения фазы внешнего сигнала относительно фазы накачки $\tau_{\text{изм}} \sim 1/2\pi\Delta F$, где F — частота параметрических колебаний; $\Delta F = F - F_c$ (F_c — частота сигнала). Рассмотрим процессы, происходящие при периодических запусках параметрического генератора, в при-

существии несинхронного сигнала. Если шум отсутствует, то, как уже отмечалось в [2], на выходе системы параметрический генератор + фазовый детектор возникает периодическая последовательность импульсов различной полярности (положительной и отрицательной), соответствующей двум квазистационарным фазам генератора. При наличии несинхронного сигнала и шума строгая периодичность биполярных импульсов на выходе квантователя нарушается, но сохраняется периодичность вероятности их выпадения. Очевидно, в том и другом случае для анализа последовательности импульсов использование счетчиков, применявшимися, например, в [2] и [3] при исследовании стационарных распределений фазы, неэффективно. В самом деле, время накопления t_n всегда больше периода расстройки измеряемого сигнала $T = 1/\Delta F$; поэтому число импульсов положительной и отрицательной полярности будет одинаковым. Однако регулярная зависимость от времени вероятности появления биполярных импульсов позволяет получить информацию о сигнале, если исследовать спектр импульсов или порядок их следования. Поэтому при анализе результатов квантования фазы несинхронного сигнала нами использовались спектральный метод и метод серий.

1. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

1. Измерение по методу серий. Измерения проводились на установке, блок-схема которой приведена на рис. 1. Параметрические генераторы ПГ-1 и ПГ-2, применяющиеся в эксперименте, собирались по балансной схеме. В качестве нелинейной реактивности использовалась нелинейная емкость $p-p$ перехода полупроводниковых диодов. Добротность контура ПГ-1 была порядка 30. Параметрический генератор ПГ-1 работал

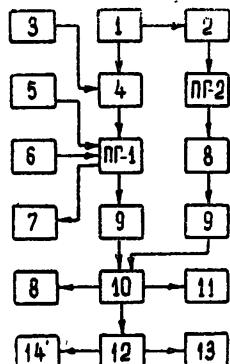


Рис. 1. Блок-схема установки для исследования нестационарных законов распределения фазы:

1—генератор накачки, 2—усилитель накачки, 3—генератор запускающих импульсов, 4—усилитель-модулятор накачки, 5—генератор сигнала, 6—генератор нормального шума, 7—микровольтметр, 8—усилитель, 9—буферный каскад, 10—фазовый детектор, 11—катодный осциллограф, 12—триггер, 13—спектроанализатор, 14—измеритель частоты.

в мягком режиме. Частота накачки параметрических генераторов была равна 6 мгц. Накачка генератора ПГ-1 периодически выключалась с частотой $F_m = 10$ кгц. В контур ПГ-1 вводился несинхронный сигнал и шум, значения которых измерялись на выходе контура. ПГ-2 служил генератором опорного напряжения фазового детектора, преобразующего радиоимпульсы ПГ-1 в видеоимпульсы, полярность которых определялась фазой установившихся колебаний генератора ПГ-1. Видеоимпульсы с выхода фазового детектора подавались на катодный осциллограф, реализующий при запуске генератора ПГ-1 выборку биполярных импульсов за время развертки (см. рис. 2). Контроль за расстройкой частоты ΔF проводился с помощью измерителя частоты.

Как уже указывалось, в методе серий используется то обстоятельство, что информация о функции распределения фазы сигнала содержится в порядке следования импульсов. При анализе мы пользовались рекуррентным определением серий. Под серией понимается последователь-

нность однополярных импульсов (положительных или отрицательных), а длина серии r определяется числом содержащихся в ней однополярных импульсов. Последовательность из l импульсов разлагается на такое число серий длины r ($r = 1, 2, \dots$), при котором они не перекрываются. Вероятность выпадения серии длины r представляет наибольший инте-

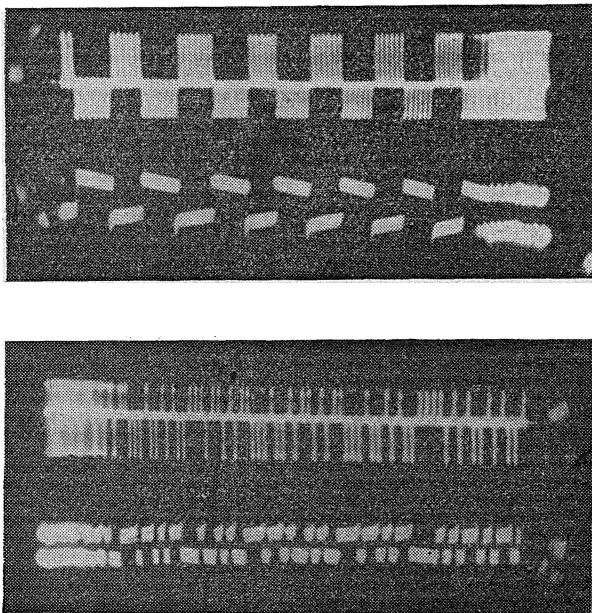


Рис. 2. Осциллограммы напряжений на выходе фазового детектора (вверху) и триггера (внизу) при периодических запусках генератора ПГ-1, соответствующие а) несинхронному сигналу ($(S/N)_{\text{вх}} \gg 1$), б) шумовому сигналу ($(S/N)_{\text{вх}} = 0$).

рес. Однако при обработке результатов оказалось, что удобнее пользоваться средним числом n_r , запусков генератора ПГ-1, необходимых для выпадения данной серии r . При этом, поскольку для описываемого эксперимента вероятности появления импульсов периодически зависят от времени, для максимального использования наблюдаемой выборки при определении величины n_r , целесообразно учитывать серии и положительных и отрицательных импульсов. В этом случае при стационарном распределении фазы принимаемого сигнала среднее число запусков для серии r (см. [6]) равно $\bar{n}_r = (1 - p^r)(1 - q^r)/qp^r + pq^r - p^r q^r$, где p — вероятность выпадения положительного импульса, q — отрицательного.

Обработка осциллограмм, полученных при запусках катодного осциллографа, проводилась следующим образом. По данной осциллограмме измерялась величина n_r , равная \tilde{l}/k_r , где \tilde{l} — число запусков ПГ-1, реализуемых на осциллограмме, и k_r — число серий длины r . Такие измерения проводились для $N = 15$ циклов, и по ним вычислялись выборочные средние значения \tilde{n}_r : $\tilde{n}_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i/k_{ri}$. Погрешность измерения оценивалась доверительными интервалами, которые определяются формулой (см. [7])

$$\varepsilon = t(\alpha, N) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (n_{ri} - \tilde{n}_r)^2}{N(N-1)}},$$

где $t(\alpha, N) = 2,98$ для $N = 15$ и вероятности $\alpha = 0,99$, с которой рассчитывались результаты эксперимента. Перед каждым измерением \tilde{n}_r проводилась операция проверки нуля (биномиальные запуски). Контролем служило то обстоятельство, что при наличии стационарного шума вероятности выпадения биполярных импульсов одинаковы, т. е. $p = q = \frac{1}{2}$.

2. Спектральный метод исследования. Спектральный метод приема слабых сигналов с неизвестной частотой можно осуществить, измеряя спектр импульсов на выходе фазового детектора с помощью спектроанализатора (см. рис. 1). Для повышения чувствительности установки между фазовым детектором и спектроанализатором включался триггер. Триггер преобразовывал серии однополярных импульсов в импульсы, длительность которых определялась длиной серий (см. рис. 2). Спектроанализатор перестраивался в диапазоне от 400 гц до 600 гц и имел полосу 20%, которая определялась стабильностью используемых генераторов накачки и сигнала. Настройка установки на частоту расстройки сигнала ΔF проводилась при больших значениях несинхронного сигнала ($(S/N)_{\text{вх}} \gg 1$).

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В методе серий исследовалась зависимость числа запусков \tilde{n}_r генератора ПГ-1, необходимых для выпадения серии длины r , от $(S/N)_{\text{вх}} = A_c/\sigma_w$, от расстройки ΔF и частоты периодических запусков F_m (A_c — амплитуда сигнала, σ_w — среднеквадратичное

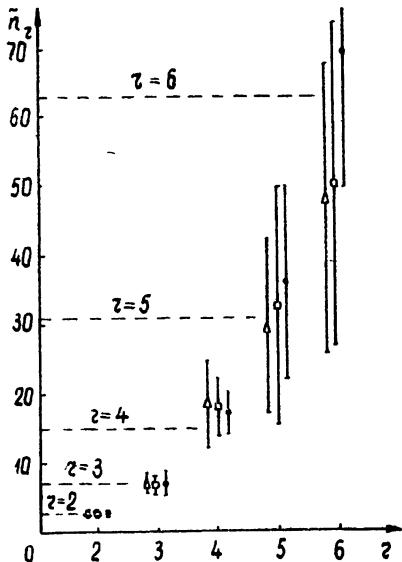


Рис. 3. Экспериментальная зависимость \tilde{n}_r от длины серии r при шумовом сигнале. Точки \triangle , \square и \bullet определены в разные времена.

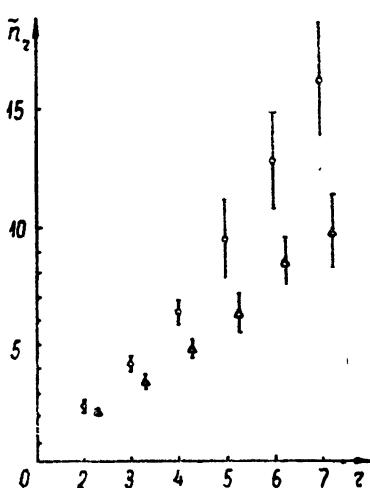


Рис. 4. Экспериментальная зависимость \tilde{n}_r от длины серии r при $F_m = 10$ кгц, $\Delta F = 250$ гц, $\sigma_w = 80$ мкв: точки $\circ\circ\circ$ — для $A_c = 50$ мкв и $\triangle\triangle\triangle$ — для $A_c = 100$ мкв.

значение шума, измеренные на входе ПГ-1). Экспериментальные значения \tilde{n}_r для биномиальных запусков ($A_c = 0$) с соответствующими доверительными интервалами приведены на рис. 3. Пунктиром (с указанием длины серии r) отмечены теоретические значения n_r , которые при $p = 1/2$ определяются выражением $\tilde{n}_r = 2^r - 1$. Экспериментальные значения \tilde{n}_r , определялись в разное время; на рис. 3 они даны в окрестности данного r . Из графика следует, что имеется хорошее совпадение экспериментальных значений \tilde{n}_r с теоретическими, особенно для коротких серий. Увеличение разброса и возрастание доверительных интервалов с ростом r объясняется относительно малым числом запусков ПГ-1 в одной реализации ($l \sim 80$ и $l/n_r \sim 1$). На рис. 4 показана зависимость \tilde{n}_r , измеренных при фиксированных расстройке ΔF и частоте F_m , от r . Видно, что при наличии сигнала существует линейная зависимость \tilde{n}_r от длины серии r . Эксперимент показал, что если $(S/N)_{\text{вых}}$ фиксировано, то для данной серии r значения \tilde{n}_r , тем меньше, чем меньше расстройка частот ΔF . На рис. 5 и в таблице 1 дана зависимость $(S/N)_{\text{вых}}$ от $(S/N)_{\text{вх}}$, характеризующая чувствительность установки при определении нестационарностей в законе распределения фазы принимаемого сигнала, от длины серии r . При измерении сигнала методом серий в качестве отношения сигнал/шум на выходе квантования следует взять очевидно, величину $(S/N)_{\text{вых}} = (\bar{n}_{\text{ш}} - \tilde{n}_c)/2\varepsilon_c$, где $\bar{n}_{\text{ш}}$ и \tilde{n}_c — среднее число запусков генератора ПГ-1, необходимое для получения серии длиной r соответственно в присутствии только шума и суммы сигнала и шума ($\bar{n}_{\text{ш}}$ вычислено теоретически), ε_c — доверительный интервал для \tilde{n}_c .

Результаты измерений, проведенных спектральным методом, представлены на рис. 6. Отмеченное пунктиром пороговое значение $(S/N)_{\text{вх}}$ (при котором сигнал еще может быть измерен) определялось при $(S/N)_{\text{вых}} = S/S_0 = 2$, где S — показание вольтметра при наличии суммы сигнала и шума, а S_0 — при наличии только шума на входе квантования. Из графиков следует, что чем больше расстройка частот ΔF , тем при меньших значениях величины сигнала A_c наступает пороговое значение $(S/N)_{\text{вх}}$. Экспериментальные результаты, полученные при одинаковых расстройках частот ΔF , но при различных частотах модуляции F_m , показали, что уменьшение частоты F_m приводит к уменьшению порогового значения $(S/N)_{\text{вх}}$. Отсюда следует, что в спектральном методе пороговое значение наступает раньше для серий меньшей длины.

Эксперимент показал, что рассмотренная система позволяет получить информацию об амплитуде сигнала неизвестной частоты лишь при

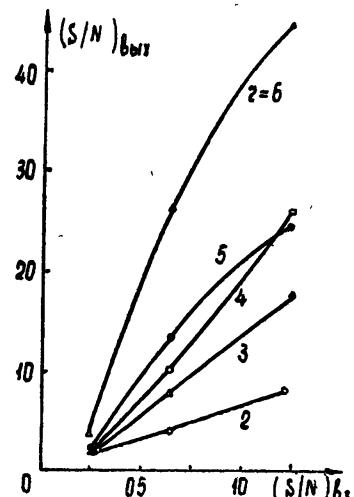


Рис. 5. Экспериментальная зависимость $(S/N)_{\text{вых}}$ от $(S/N)_{\text{вх}}$ для различных длин серий r при $F_m = 10 \text{ кГц}$ и $\Delta F = 500 \text{ Гц}$ ($r_0 = 10$).

$(S/N)_{\text{вх}} \ll 1$. При $(S/N)_{\text{вх}}$, превышающем $1 \div 2$, значение $(S/N)_{\text{вых}}$ не зависит от $(S/N)_{\text{вх}}$. Это связано с тем, что разность вероятностей возбуждения устойчивых состояний параметрического генератора $\Delta = p - q$ перестает зависеть от $(S/N)_{\text{вх}}$, когда его значение превышает единицу. Область насыщения $(S/N)_{\text{вых}}$ может быть использована

Таблица 1

Значения $(S/N)_{\text{вых}} = \frac{\bar{n}_{\text{ш}} - \tilde{n}_{\text{с}}}{2\sigma_{\text{ш}}} \text{ при } \Delta F = 250 \text{ гц}, F_m = 10 \text{ кгц} (r_0 = 20)$.
 $\sigma_{\text{ш}} = 80 \text{ мкв}$

$(S/N)_{\text{вх}}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,25	1,4	1,2	1,8	3,4	6,6	7,0	14	12	24	67	62
0,6	2,2	4,1	6,6	8,3	13	23	22	38	38	72	140
1,25	3,8	7,3	11	13	27	37	72	120	220	310	620

для определения частоты сигнала. Это можно осуществить либо подсчетом числа импульсов в сериях, при известной частоте запусков F_m , либо измерением частоты следования импульсов на выходе триггера. Однако, не имея никакой априорной информации о частоте измеряемого сигнала,

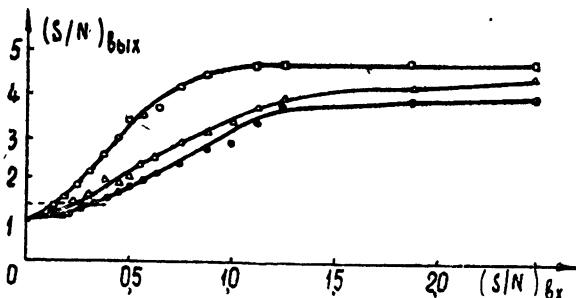


Рис. 6. Экспериментальная зависимость $(S/N)_{\text{вых}}$ от $(S/N)_{\text{вх}}$ в спектральном методе при $\sigma_{\text{ш}} = 80 \text{ мкв}$ и $F_m = 10 \text{ кгц}$:
 точки $\square \square \square - \Delta F = 600 \text{ гц}$, $\Delta \Delta \Delta - \Delta F = 500 \text{ гц}$, $\bullet \bullet \bullet - \Delta F = 400 \text{ гц}$.

последнюю можно определить только с точностью до частот, кратных частоте запусков $F_c = F \pm \{kF_m + \Delta F\}$, где $k = 1, 2, \dots$ и ΔF — измеренная частота. Вместе с тем, изменение частоты F_m позволяет более точно определить частоту сигнала F_c . Перестройка частоты запусков F_m приводит к периодическому изменению значений измеряемой частоты ΔF . Если, например, F_m уменьшается, то для двух последовательных значений частот $F_{m1,2}$, при которых измеренные частоты ΔF равны, справедливы соотношения, определяющие F_c :

$$|F_c - F| = \{kF_{m1} + \Delta F\};$$

$$|F_c - F| = \{(k+1)F_{m2} + \Delta F\}.$$

Проведенный эксперимент показал, что с помощью фазовой дискретизации, применяя спектральный метод измерений или метод серий, можно получить информацию о нестационарностях в фазе исследуемого сигнала. Выигрыши в отношении сигнал/шум при измерении сигнала по

методу серий зависит от параметров системы, расстройки частоты сигнала ΔF относительно опорной частоты квантования и от длины серии r . Сравнение значений $(S/N)_{\text{вых}}$, приведенных в таблице 1 на рис. 5, приводит к выводу, что при одинаковых $(S/N)_{\text{вх}}$ для серий равной длины $(S/N)_{\text{вых}}$ больше при большей расстройке частот ΔF . Во всех приведенных выше результатах учитывались серии, для которых $r \leq r_0 = F_m/2\Delta F$; r_0 — число импульсов в серии при $(S/N)_{\text{вх}} \gg 1$. Из таблицы видно, что выигрыш в отношении сигнал/шум тем больше, чем больше r (разумеется, $r \leq r_0$). Последнее представляется вполне естественным, поскольку длинные серии в биномиальной последовательности импульсов с $p = q = 1/2$ мало вероятны. Для квантования фазы, осуществляющего оптимальное двоичное квантование сигнала известной частоты и фазы, и для двоичного квантования, осуществляющего прием сигнала неизвестной частоты, выигрыш в отношении сигнал/шум пропорционален корню квадратному из объема выборки $K \sim \sqrt{M}$. При приеме синхронного сигнала (см. [2] и [3]) $K = 10^2 \div 10^3$. При измерении несинхронного сигнала методом серий (см. таблицу 1) K может быть того же порядка и даже больше для больших серий. Здесь высокие значения K связаны с более тщательной обработкой результатов измерений, которую позволил обеспечить метод серий, по сравнению с обработкой, проводимой в [2] и [3] для синхронного сигнала, где не использовались какие-либо статистические критерии, позволяющие исключить «промахи измерений» при применении счетчиков.

Коэффициент выигрыша квантования K как в спектральном методе, так и в методе серий можно увеличить, если связать частоту сигнала с частотой накачки, т. е. во время измерений сохранять постоянной расстройку частот ΔF . Последнее в спектральном методе позволит применить спектроанализатор с более узкой полосой. Дальнейшее увеличение чувствительности установки в спектральном методе можно осуществить при использовании в индикаторной части системы компенсационного метода. Очевидно, что в обоих методах коэффициент выигрыша увеличится при увеличении объема выборки, т. е. при увеличении времени интегрирования. В методе серий это можно осуществить, переходя на автоматический счет серий при помощи счетчиков; в спектральном методе — увеличением постоянной времени интегрирующей цепи или увеличением инерционности отсчетного устройства. Примененная установка, несмотря на то, что время интегрирования в спектральном методе было значительно больше, чем в методе серий, для последнего дала лучший результат.

Описанный режим регистрации сигнала может быть назван режимом «сверхрегенеративного приема в системе с несколькими устойчивыми состояниями». В отличие от обычного сверхрегенератора информация о сигнале сохраняется здесь и в нелинейном режиме. Хотя эта информация сводится в основном к информации о фазе, при отношении $(S/N)_{\text{вх}} < 1$ можно получить сведения и об амплитуде сигнала. Отметим, однако, что фаза несинхронного сигнала в течение периода расстройки $T = 1/\Delta F$ принимает различные значения и проходит как значения оптимальной, так и неоптимальной фазы. Поэтому значение $(S/N)_{\text{вх}}$, необходимое для насыщения $(S/N)_{\text{вых}}$ при наличии несинхронного сигнала, больше, чем при приеме синхронного сигнала оптимальной фазы. Этот вывод вполне подтверждается сравнением данных проведенных измерений с амплитудными графиками для синхронного сигнала, приведенными в [2].

Приведенные результаты характеризуют также влияние несинхронного сигнала на процесс установления колебаний в параметрическом генераторе при амплитуде сигнала, гораздо меньшей амплитуды

установившихся колебаний. Влияние несинхронного сигнала на установившийся режим параметрического генератора было исследовано в работе [8].

Авторы благодарят за полезные дискуссии В. Б. Брагинского и И. Т. Трофименко.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 769 (1961).
2. С. А. Ахманов, В. П. Комолов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 1175 (1962).
3. В. П. Комолов, Вестн. МГУ, сер. физики, № 3, 28 (1964).
4. А. С. Чиркин, Дипломная работа, МГУ, 1962.
5. Ю. Б. Черняк, Радиотехника и электроника, **8**, 1326 (1963).
6. В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, М., 1952.
7. А. М. Длин, Математическая статистика в технике, изд. Сов. наука, М., 1958.
8. В. В. Мигулин, Радиотехника и электроника, **6**, 955 (1960).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
29 января 1964 г.

ON QUANTIZATION AT THE INVESTIGATION OF NONSTATIONARY CHARACTERISTICS OF THE PHASE DISTRIBUTION

S. A. Akhmanov, V. P. Komolov, A. S. Chirkin

The results are reported of the experimental investigation of nonstationary laws of the phase distribution by the quantization method. A one-circuit parametric oscillator is used as a phase quantizer. The processing of quantized selections has been carried out by the spectral and series methods. It is shown that when $(S/N)_{\text{bx}} < 1$ there is a possibility to obtain the information about the signal amplitude on the quantizer input and when $(S/N)_{\text{bx}} > 1 \frac{1}{2}$ about the phase of the quantizing signal.

УДК 538.56 : 519.25

О СПЕКТРЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА ПРИ ДОСТАТОЧНО ОБЩИХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯХ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЛЮКТУАЦИЙ ЧАСТОТЫ

A. M. Гершт

На основе аналогии между нормированным спектром сигнала и плотностью вероятностей исследуется спектр квазигармонического сигнала при широких предположениях относительно закона распределения флюктуаций частоты.

Пусть дано колебание с флюктуирующей частотой

$$\begin{aligned} u(t) &= A_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0]; \\ \varphi(t) &= \int_0^t v(x) dx, \end{aligned} \tag{1}$$

где A_0 — амплитуда, ω_0 — центральная частота, $v(t)$ — флюктуации частоты, причем $\overline{v(t)} = 0$; черта здесь и далее означает среднее по ансамблю, φ_0 — начальная фаза, флюктуации амплитуды равны нулю*.

Предположим процесс $v(t)$ стационарным** и эргодическим, а начальную фазу — равномерно распределенной на отрезке $[-\pi, \pi]$. Кроме того предположим, что процесс $u(t)$ дифференцируем N раз. Тогда $v(t)$ дифференцируема $N - 1$ раз, а корреляционные функции процессов $u(t)$ и $v(t)$ соответственно $2N$ и $2N - 2$ раза.

Для функции корреляции процесса $u(t)$ мы имеем [3]

$$\begin{aligned} \Phi_u(\tau) &= \frac{A_0^2}{2} \operatorname{Re} (\overline{e^{i\Delta\varphi}} e^{-i\omega_0\tau}); \\ \Delta\varphi &= \int_{\tau}^{\tau+\tau} v(x) dx. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда спектр сигнала

$$S_u(\delta) = \frac{A_0^2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{i\Delta\varphi}} e^{-i\delta\tau} d\tau, \tag{3}$$

где $\delta = \omega - \omega_0$ и член, зависящий от $\omega_0 + \omega$, как обычно, отброшен вви-

* При необходимости амплитудные флюктуации легко учесть.

** Полученные в настоящей заметке (а также в [5]) результаты можно легко обобщить на случай нестационарных $v(t)$.

ду его малости для квазигармонических сигналов. Для исследования спектра сигнала (3) мы используем аналогию [1,6] между нормированным спектром сигнала и плотностью вероятностей.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_u(\delta) &= \frac{A_0^2}{2} W_u(\delta); \\ W(\delta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Delta\varphi} e^{-i\delta\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_u(\tau) e^{-i\delta\tau} d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

где $W_u(\delta)$ является «плотностью вероятностей», а $F_u(\tau)$ ее «характеристической» функцией;

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_u(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\delta) \cos(\delta\tau) d\delta; \\ \operatorname{Im} F_u(\tau) &= - \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\delta) \sin(\delta\tau) d\delta. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем спектральные моменты m_{u2n} и m_{u2n-1} :

$$\begin{aligned} m_{u2n} &= (-1)^n [\operatorname{Re} F_u(\tau)]_{\tau=0}^{(2n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{2n} W_u(\delta) d\delta; \\ m_{u2n-1} &= (-1)^{n-1} [\operatorname{Im} F_u(\tau)]_{\tau=0}^{(2n-1)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{2n-1} W_u(\delta) d\delta, \end{aligned} \quad (6)$$

которые легко выразить через спектральные моменты частотных флюктуаций в широких предположениях относительно закона распределения $v(t)^*$.

Имеем

$$\operatorname{Re} F_u(\tau) = \overline{\cos(\Delta\varphi)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\overline{\Delta\varphi})^{2k}}{(2k)!}; \quad (7)$$

$$\operatorname{Im} F_u(\tau) = \overline{\sin(\Delta\varphi)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\overline{\Delta\varphi})^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

где

$$\overline{(\Delta\varphi)^m} = \iiint_0^{\tau} \dots \int \overline{v(t+x_1)v(t+x_2)\dots v(t+x_m)} dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (8)$$

Обозначим через $\Phi_{u,m}(t_1, t_2, \dots, t_m)$ m -мерную корреляционную функцию процесса $v(t)$, т. е. при $m > 1$

* В частном случае гауссовых флюктуаций $v(t)$ связь между спектральными моментами m_{up} и m_{v_l} исследовалась в работе [2].

$$\Phi_{\nu_m}(t_1, t_2, \dots, t_m) = \overline{\nu(t_1) \nu(t_2) \dots \nu(t_m)}. \quad (8a)$$

В силу определения стационарности (в узком смысле) [3]

$$\Phi_{\nu_m}(t + x_1, t + x_2, \dots, t + x_m) = \Phi_{\nu_m}(x_1 - x_m, x_2 - x_m, \dots, 0), \quad (8b)$$

причем $\Phi_{\nu_m}(x_1 - x_m, x_2 - x_m, \dots, 0)$ связана $(m-1)$ -мерным преобразованием Фурье с $(m-1)$ -мерной спектральной плотностью процесса $\nu(t)$ ($S_{\nu_{m-1}}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1})$):

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu_m}(x_1 - x_m, x_2 - x_m, \dots, 0) &= \frac{1}{2^{m-1}} \int \int \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - x_m) \omega_k} \times \\ &\times S_{\nu_{m-1}}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}) d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_{m-1}. \end{aligned} \quad (8b)$$

Подставляя (8a), (8b) в (8) и меняя порядок интегрирования, получим после несложных вычислений

$$\begin{aligned} (\overline{\Delta \varphi})^m &= \frac{1}{2^{m-1}} \int \int \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{i \tau \omega_1} - 1)(e^{i \tau \omega_2} - 1) \dots (e^{i \tau \omega_{m-1}} - 1)}{-i^m \prod_{k=1}^{m-1} \omega_k} \times \\ &\times \frac{\left(e^{-i \tau \sum_{k=1}^{m-1} \omega_k} - 1 \right)}{\sum_{k=1}^{m-1} \omega_k} S_{\nu}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m-1}) d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_{m-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (7) — (9) легко видеть, что

$$m_{u2n} = (-1)^n [\operatorname{Re} F_u(\tau)]_{\tau=0}^{(2n)} = (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} \overline{(\Delta \varphi^{2k})}_{\tau=0}^{(2n)}; \quad (10)$$

$$m_{u2n-1} = (-1)^{n-1} [\operatorname{Im} F_u(\tau)]_{\tau=0}^{(2n-1)} = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \overline{(\Delta \varphi^{2k+1})}_{\tau=0}^{(2n-1)},$$

где $n = 1, 2, \dots, N$ и $\overline{\Delta \varphi} = 0$.

Формулы (10), (9) позволяют выразить спектральные моменты m_{uk} через спектральные моменты m -мерных корреляционных функций процесса $\nu(t)$. В частности, из (9), (10) получается

$$\begin{aligned} m_{u1} &= 0; \\ m_{u2} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\nu}(\omega) d\omega = \sigma_{\nu}^2; \\ m_{u3} &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\nu_2}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \overline{\nu^3(t)}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$m_{u4} = \int_0^\infty \omega^2 S_v(\omega) d\omega + \frac{1}{8} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty S_{v3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 = \\ = m_{v2}\sigma_v^2 + \overline{v^4(t)}, \quad (11)$$

где

$$m_{v2} = \int_{-\infty}^\infty \omega^2 S_v(\omega) d\omega / \int_{-\infty}^\infty S_v(\omega) d\omega.$$

Эти спектральные моменты имеют следующий физический смысл. Как и следовало ожидать, вследствие равенства $\overline{v(t)} = 0$ математическое ожидание $m_{u1}=0$. Поэтому все спектральные моменты процесса $u(t)$ будут центральными моментами. «Дисперсия» m_{u2} равна дисперсии частотных флюктуаций.

В силу теоремы Чебышева для «плотности вероятности» $W_u(\delta)$ имеем

$$\int_{|\delta|}^\infty W_u(\delta) d\delta + \int_{-\infty}^{-|\delta|} W_u(\delta) d\delta \leq \frac{m_{u2n}}{\delta^{2n}} \quad (12)$$

$(n=1, 2, \dots, N).$

Отсюда при $n=1$

$$\int_{|\delta|}^\infty W_u(\delta) d\delta + \int_{-\infty}^{-|\delta|} W_u(\delta) d\delta \leq \sigma_v^2 / \delta^2. \quad (13)$$

Из (12) — (13) следует, что ширина спектральной линии на уровне 0,5

$$\Delta f_{0,5} \leq \frac{\sqrt{2m_{u2}}}{2\pi} \leq \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sigma_v. \quad (14)$$

Отметим, что $\Delta f_{0,5} \leq \sqrt{2} m_{u2}/2\pi$ и для произвольных процессов $u(t)$, в том числе для процесса $v(t)$:

$$\Delta f_{v0,5} \leq \frac{\sqrt{2m_{v2}}}{2\pi}, \quad (15)$$

так как неравенство Чебышева справедливо для любой нормированной спектральной плотности корреляционной функции. С другой стороны, «момент инерции» для $W_u(\delta)$

$$(2\pi\Delta f)^2 = \frac{\int_{-\infty}^\infty \delta^2 W_u(\delta) d\delta}{\int_{-\infty}^\infty W_u(\delta) d\delta} - \frac{\int_{-\infty}^\infty \delta W_u(\delta) d\delta}{\int_{-\infty}^\infty W_u(\delta) d\delta} = \sigma_v^2. \quad (16)$$

Поэтому за ширину спектральной линии можно принять величину

$$\Delta f_u = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sigma_v. \quad (17)$$

Это определение, как будет показано ниже, совпадает для медленных, близких к гауссовым процессов $v(t)$ (корреляционная функция которых медленно и мало меняется на интервале $\tau \ll \tau_0$ — времени корреляции процесса $v(t)$) по порядку величины с обычным определением Δf :

$$\Delta f_u = \frac{1}{2\pi} W_u^{-1}(0). \quad (18)$$

При $n = 2$ из (11), (12) получается следующее неравенство, которое может быть, например, полезно при оценке вклада медленных составляющих флюктуаций $v(t)$ в крылья спектра сигнала генератора:

$$\int_{|\delta|}^{\infty} W_u(\delta) d\delta + \int_{-\infty}^{-|\delta|} W_u(\delta) d\delta \leq \frac{m_{u2} \sigma_v^2 + \overline{v^4(t)}}{\delta^4}. \quad (19)$$

Введем теперь спектральные коэффициенты асимметрии и эксцесса соответственно:

$$\gamma_1 = \frac{m_{u3}}{\sqrt{m_{u2}^3}} = \frac{\overline{v^3(t)}}{\sigma_v^3};$$

$$\gamma_2 = \frac{m_{u4}}{m_{u2}^2} - 3 = \frac{m_{u2} \sigma_v^2 + \overline{v^4(t)}}{\sigma_v^4} - 3 = \frac{m_{u2}}{\sigma_v^2} + \frac{\overline{v^4(t)}}{\sigma_v^4} - 3. \quad (20)$$

Коэффициент γ_1 характеризует асимметричность кривой, вызванную несимметричностью закона распределения $v(t)$. При положительном $\gamma_1(t)$ $W_u(\delta)$ концентрируется в основном справа от ω_0 , при отрицательном — слева от ω_0 . Коэффициент γ_2 характеризует пологость $W_u(\delta)$ около ее максимума. Он зависит как от закона распределения $v(t)$ (член $\overline{v^4(t)} / \sigma_v^4 > 1$), так и от скорости процесса $v(t)$ (член $m_{u2} / \sigma_v^2 \sim \Delta f_{v0.5} / \Delta f_{u0.5}$). Для нормального закона распределения $v(t)$

$$\gamma_1 = \frac{m_{u2}}{\sigma_v^2}; \quad (21)$$

чем этот коэффициент ближе к нулю, тем ближе спектральная плотность к гауссовой. При положительных значениях γ_1 спектральная плотность $W_u(\delta)$ имеет более острую и более высокую вершину, а при отрицательных — более плоскую и низкую вершину, по сравнению с гауссовой формой спектральной плотности (при таких же дисперсии и «центре тяжести»).

Эти коэффициенты полезны, в частности, при вычислении спектральной плотности $W_u(\delta)$, когда закон распределения медленного процесса $v(t)$ близок к нормальному. Как известно [3], для медленных процессов $v(t)$ в квазистатическом приближении спектральная плотность $W_u(\delta)$ повторяет закон распределения $v(t)$. Следовательно, если закон распределения $v(t)$ близок к гауссовому и процесс $v(t)$ достаточно медленный, то плотность вероятности $W_u(\delta)$ также близка к гауссовой. Поэтому для нахождения $W_u(\delta)$ можно воспользоваться рядом Эджворта [4]:

$$\begin{aligned}
 W(\delta) = & \frac{e^{-\delta^2/\sigma_v^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} - \frac{1}{3!}\gamma_1\varphi^{(3)}\left(\frac{\delta}{\sigma_v}\right) + \\
 & + \frac{1}{4!}\gamma_2\varphi^{(4)}\left(\frac{\delta}{\sigma_v}\right) + \frac{10}{6!}(\gamma_1)^2\varphi^{(6)}\left(\frac{\delta}{\sigma_v}\right) - \\
 & - \frac{1}{5!}\left(\frac{m_{y5}}{\sigma_v^5} - 10\gamma_1\right)\varphi^{(5)}\left(\frac{\delta}{\sigma_v}\right) - \dots,
 \end{aligned} \tag{22}$$

который позволяет учесть как отклонения от квазистатичности, так и от нормального закона $v(t)$.

Отметим, что предельные теоремы теории вероятности могут быть полезными при вычислении преобразования Фурье $\mathbf{W}_u(\omega)$ от произведения (степени) достаточно большого числа μ корреляционных функций, т. е. μ -кратных сверток. При этом для «плотности вероятности» $W_\mu(\omega)$ может получаться в качестве предельного, вообще говоря, как нормальный, так и любой другой устойчивый [6] «закон распределения вероятностей».

В частности, для дважды дифференцируемого стационарного процесса $y(t)$, корреляционная функция которого

$$\Phi_y(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \tag{23}$$

будем иметь при достаточно больших μ

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_\mu(\omega) = & \frac{2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_y^\mu(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
 = & 2\sigma_y^{2\mu} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu m_{y2}}} e^{-\omega^2/2m_{y2}} \left[1 - \frac{\gamma_{2y}}{24\mu} H_4\left(\frac{\omega}{\sqrt{m_{y2}\mu}}\right) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{24}$$

где $H_4(\omega/\sqrt{m_{y2}\mu})$ — полином Эрмита, $m_{y2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) \omega^2 d\omega / \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega$ —

коэффициент эксцесса, $\gamma_{2y} = \frac{m_{y4}}{m_{y2}^2} - 3$.

Формула (24) может быть полезна при вычислении спектра корреляционной функции на выходе нелинейной системы, когда функция корреляции процесса на выходе системы выражается через степени корреляционной функции на входе (см. [3]).

Рассмотрим следующий пример. Пусть $v(t)$ распределена нормально,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{S_v(\omega)}{\omega^2} < \infty, \quad \sigma_v^2 \tau_0^2 \gg 1.$$

Тогда [7]

$$S_u(\delta) = \frac{A_0^2}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_v(\omega)}{\omega^2} d\omega \right] \left[\delta(\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\varphi}^n(\tau) e^{-i\delta\tau} d\tau \right], \quad (25)$$

где

$$\Phi_{\varphi}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_v(\omega)}{\omega^2} e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (26)$$

Используя (24), получим для $n \geq \mu$

$$\begin{aligned} W_n(\delta) &= \sigma_{\varphi}^{2n} \left\{ \frac{\sigma_{\varphi}}{\sqrt{2\pi n m_{\varphi}^2}} e^{-\omega^2 \sigma_{\varphi}^2 / 2m_{\varphi}^2 n} \left[1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\gamma_2 \varphi}{24n} H_4 \left(\frac{\omega \sigma_{\varphi}}{\sqrt{m_{\varphi}^2 n}} \right) \right] \right\} = \sigma_{\varphi}^{2n} \left\{ \frac{\sigma_{\varphi}}{\sqrt{2\pi n \sigma_v^2}} e^{-\omega^2 \sigma_{\varphi}^2 / \omega_v^2 n} \left[1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\gamma_2 \varphi}{24n} H_4 \left(\frac{\omega \sigma_{\varphi}}{\sqrt{n \sigma_v^2}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\gamma_2 \varphi = \frac{m_{\varphi 4}}{m_{\varphi 2}^2} - 3 = \frac{m_{\varphi 2} \sigma_{\varphi}^2}{\sigma_v^2} - 3, \quad (28)$$

μ — определяется из условия малости второго члена в (28) по сравнению с первым.

В случае $\sigma_{\varphi}^2 \gg 1$ использование формулы (24) может весьма облегчить расчет. Пусть, в частности,

$$S_v(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\omega^2 \sigma_v^2 (\beta_2 + \beta_1)}{(\beta_1^2 + \omega^2)(\beta_2^2 + \omega^2)}; \quad \frac{\sigma_v^2}{\beta_1 \beta_2} \gg 1; \quad \beta_1 \neq \beta_2. \quad (29)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}^2 &= \frac{\sigma_v^2}{\beta_1 \beta_2}; \quad m_{\varphi 2} = \beta_2^2 + \beta_2 \beta_1 + \beta_1^2; \\ \gamma_2 \varphi &= \frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{\beta_1}{\beta_2} - 2. \end{aligned} \quad (30)$$

Если $\beta_1 \sim \beta_2$, то μ невелико; для $n \leq \mu$ члены разложения (25) легко вычисляются непосредственно.

Как известно, для полного определения спектра сигнала (1) необ-

ходимо, вообще говоря, по меньшей мере, знание всех k -мерных корреляционных функций процесса $v(t)$. Однако, как это следует из вышеизложенного, а также из работы [5], во многих случаях о спектре сигнала можно получить достаточную для практики информацию, зная лишь ограниченное число корреляционных функций. В частности, иногда бывает достаточно знать $S_v(\omega)$ (а следовательно, σ_v^2 и m_{v2}), $\overline{v^3(t)}$ и $\overline{v^4(t)}$.

В случае нестационарных флюктуаций частоты можно аналогично показать, что для усредненного за время наблюдения $T (T \leq \infty)$ нормированного спектра $\overline{W_{u_T}(\omega, t)}$ сигнала

$$u_T(t) = \begin{cases} A_0 \cos \left[\int_0^t \xi(x) dx + \varphi_0 \right] & (t \leq T) \\ 0 & (t > T) \end{cases}$$

также имеет место неравенство Чебышева. При этом ширина спектральной линии $\overline{\overline{W_{u_T}(\omega, t)}}$ на уровне 0,5

$$\overline{\overline{\Delta f_{0,5}}} \leq \frac{\sqrt{2} \overline{\sigma_{\xi_T}^2}}{2\pi},$$

а центральная частота—«координата центра тяжести»

$$m_{u_T} = \overline{\overline{\xi_T(t)}} = \overline{\overline{\omega_{0T}(t)}}.$$

Аналогичные соотношения имеют место и для нормированной спектральной плотности величины

$$\rho_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_T(t) u_T(t + \tau) dt,$$

а именно

$$\Delta f_{0,5} \leq \sqrt{2} \frac{\overline{\overline{\xi_T^2}} - (\overline{\overline{\xi_T}})^2}{2\pi}.$$

При этом центральная частота равна $\overline{\overline{\xi_T(t)}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, изд. Сов. радио, М., 1961.
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 912 (1961).
3. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
4. Г. Краммер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948.

5. Ю. А. Аптэк, А. М. Гершт, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 311 (1963).
6. Б. В. Гнеденко, Курс вероятности, ГИТГЛ, М.—Л., 1950.
7. J. Mullen, D. Middleton, Proc. IRE, 45, 874 (1957).

Поступила в редакцию
25 марта 1963 г.

ON THE SPECTRUM OF A QUASI-HARMONIC SIGNAL AT SUFFICIENTLY
GENERAL ASSUMPTIONS CONCERNING THE DISTRIBUTION LAW OF
FREQUENCY FLUCTUATIONS

*A. M. Gersh*t

Basing on an analogy between the normalized signal spectrum and the probability density, the spectrum of a quasi-harmonic signal is investigated at general assumptions concerning the distribution law of frequency fluctuations.

УДК 621.373.42 . 621 391 82

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФЛЮКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ АВТОГЕНЕРАТОРА

A. H. Малахов

Решаются нелинейные уравнения для флюктуаций амплитуды и фазы автогенератора, находящегося под воздействием шума с произвольной шириной полосы

В работе [1] были получены следующие нелинейные уравнения для $\alpha = \alpha(t)$ амплитудных (относительных) и $\varphi = \varphi(t)$ фазовых флюктуаций томсоновского автогенератора, находящегося под воздействием шума $E(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -p\alpha + \frac{\omega_0}{2R_0} (e_{\perp} \cos \varphi - e_{\parallel} \sin \varphi); \\ \dot{\varphi} &= -q\alpha - \frac{\omega_0}{2R_0} (e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi). \end{aligned} \quad (I)$$

Здесь p, q — прочность предельного цикла и неизохронность автогенератора, ω_0, R_0 — частота и амплитуда автоколебаний. Функции корреляции случайных стационарных процессов $e_{\parallel} = e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp} = e_{\perp}(t)$ (для которых $\langle e_{\parallel} \rangle = \langle e_{\perp} \rangle = 0$; $\langle \dots \rangle$ — статистическое усреднение) равны

$$\Phi(\tau) = \langle e_{\parallel}(t) e_{\parallel}(t + \tau) \rangle = \langle e_{\perp}(t) e_{\perp}(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^0(\Omega) \cos(\Omega\tau) d\Omega; \quad (II)$$

$$\Phi_{\parallel\perp}(\tau) = \langle e_{\parallel}(t) e_{\perp}(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^1(\Omega) \sin(\Omega\tau) d\Omega,$$

где $\tilde{S}_E(\Omega) \equiv S_E(\omega_0 + \Omega)$ — спектральная плотность шума $E(t)$. Индексы 0 и 1 означают четную и нечетную части спектральной плотности.

Уравнения (I) справедливы для любой спектральной плотности $S_E(\omega)$; однако в общем случае произвольной $S_E(\omega)$ точное решение уравнений (I) является весьма затруднительным.

В настоящей статье мы будем решать эти уравнения тремя различными методами для трех разных случаев: широкополосного шума, узкополосного шума и шума, имеющего произвольную ширину полосы. Следует отметить, что в то время как широкополосный шум характерен для действия на автогенератор естественных причин (теплового и дробового шумов), узкополосный шум необходимо рассматривать, когда изучается действие (обычно медленных) флюктуаций параметров автогенератора на поведение его амплитуды и фазы (см. [2]).

Поскольку α и φ являются случайными процессами, то решение уравнений (I) означает для нас получение лишь некоторых вероятностных характеристик, относящихся к α и φ . Мы станем считать уравнения

решенными, если будут известны средние значения, функции корреляции и спектры величин α , φ и некоторых их комбинаций.

1. ШИРОКОПОЛОСНЫЙ ШУМ

1. Пусть действующий на автогенератор шум равен, например,

$$E(t) = a_2 \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} + a_1 \frac{d \epsilon}{dt} + a_0 \epsilon, \quad (1.1)$$

где $\epsilon = \epsilon(t)$ — дельта-коррелированный шум со спектральной плотностью $S_\epsilon(\omega) = S_0 = \text{const}$. К такому случаю приводят, например, учет теплового шума контура автогенератора (см., например, [3, 4]).

На основании (1.1) нетрудно получить спектральную плотность $E(t)$, равную

$$S_E(\omega) = [(a_0 - a_2 \omega^2)^2 + a_1^2 \omega^2] S_0 = b_0 + b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4,$$

где b_k — некоторые определенные коэффициенты. Такой же вид имеет $S_E(\omega)$ и тогда, когда наряду с тепловым шумом приходится учитывать в автогенераторе дробовой шум. В этом случае b_k зависят от спектральной плотности теплового и дробового шума.

Не ограничиваясь в (1.1) второй производной, можно предположить, что в общем случае шум $E(t)$ имеет спектральную плотность

$$S_E(\omega) = b_0 + b_2 \omega^2 + \dots + b_{2n} \omega^{2n}. \quad (1.2)$$

Подставляя $\omega = \omega_0 + \Omega$ в (1.2), легко получить

$$\tilde{S}_E(\Omega) = c_0 + c_1 \Omega + c_2 \Omega^2 + \dots + c_{2n} \Omega^{2n}, \quad (1.3)$$

где

$$c_0 = S_E(\omega_0); \quad c_1 = [dS_E(\omega)/d\omega]_{\omega_0}, \dots; \quad c_k = \frac{1}{k!} [d^k S_E(\omega)/d\omega^k]_{\omega_0}. \quad (1.4)$$

Поскольку для воздействия шума на автогенератор существенно поведение $\tilde{S}_E(\Omega)$ лишь в полосе $0 - p$ и поскольку $p \ll \omega_0$, то в (1.3) все члены, кроме первого, можно отбросить. А именно, можно показать, что при любых b_{2k} выполнение условия

$$p \ll \omega_0 / \sqrt{n(2n-1)} \quad (1.5)$$

приводит к тому, что

$$c_{m+2} \Omega^2 \ll c_m \quad \text{при } 0 \ll \Omega \ll p \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 2n-2).$$

Будем считать условие (1.5) выполненным. Тогда (1.3) сводится

$$\text{к } \tilde{S}_E(\Omega) = c_0; \quad \tilde{S}_E^0(\Omega) = c_0; \quad \tilde{S}_E^1(\Omega) \equiv 0. \quad (1.6)$$

Отсюда, пользуясь формулой (II), можно найти искомые функции корреляции:

$$\Phi(\tau) = 4\pi c_0 \delta(\tau); \quad \Phi_{\parallel \perp}(\tau) \equiv 0. \quad (1.7)$$

Таким образом, для широкополосного шума со спектральной плотностью (1.2) в первом приближении случайные функции e_{\parallel} и e_{\perp} являются независимыми и дельта-коррелированными. В этом случае совокупность величин α , φ образует марковский процесс и для решения уравнения (I) можно применить метод уравнения Эйнштейна—Фоккера.

2. Для вероятности переходов $W(\alpha_0, \varphi_0, t_0; \alpha, \varphi, t)$ это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial \alpha} [K_{10}W] - \frac{\partial}{\partial \varphi} [K_{01}W] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^2} [K_{20}W] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \varphi} [K_{11}W] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [K_{02}W], \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} K_{10} = K_{10}(\alpha, \varphi) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta \alpha \rangle, \\ K_{01} = K_{01}(\alpha, \varphi) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta \varphi \rangle, \\ K_{20} = K_{20}(\alpha, \varphi) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta \alpha^2 \rangle, \\ K_{11} = K_{11}(\alpha, \varphi) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta \alpha \Delta \varphi \rangle, \\ K_{02} = K_{02}(\alpha, \varphi) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle \Delta \varphi^2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\Delta \alpha = \alpha(t + \tau) - \alpha(t), \quad \Delta \varphi = \varphi(t + \tau) - \varphi(t).$$

Для исследуемого уравнения (I) приращения $\Delta \alpha$ и $\Delta \varphi$ равны соответственно

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \int_t^{t+\tau} \left[-p\alpha + \frac{\omega_0}{2R_0} (e_\perp \cos \varphi - e_\parallel \sin \varphi) \right] dt; \\ \Delta \varphi &= \int_t^{t+\tau} \left[-q\alpha - \frac{\omega_0}{2R_0} (e_\parallel \cos \varphi + e_\perp \sin \varphi) \right] dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Искомые вероятностные характеристики α, φ могут быть найдены теперь известным образом из вероятности переходов $W(\alpha_0, \varphi_0, t_0; \alpha, \varphi, t)$, которая однозначно определяется, как решение (1.8), начальными условиями и коэффициентами K_{ij} .

Отметим, что точное нахождение коэффициентов K_{ij} , согласно (1.9), требует учета корреляций между α, φ и e_\parallel, e_\perp . Этот расчет в общем случае довольно сложен; поэтому обычно пользуются приближенными значениями K_{ij} , для которых полагают, что α и φ , входящие в $\Delta \alpha$ и $\Delta \varphi$ (см. (1.10)), являются фиксированными величинами и статистическое усреднение производят только по ансамблю значений e_\parallel и e_\perp . Производя расчет согласно (1.9) и (1.10) (с учетом (1.7)), можно получить следующие приближенные значения:

$$K_{10} = -p\alpha; \quad K_{01} = -q\alpha; \quad K_{20} = K_{02} = \omega_0^2 \pi c_0 / R_0^2; \quad K_{11} = 0. \quad (1.11)$$

Теперь можно записать уравнение (1.8) в конкретном виде; решая его, найти $W(\alpha_0, \varphi_0, t_0; \alpha, \varphi, t)$, а затем — искомые вероятностные характеристики величин α и φ . Проще, однако, поступить по-другому.

* Вообще говоря, можно находить поправки к приближенным значениям K_{ij} , учитывая корреляцию между α, φ и e_\parallel, e_\perp (см. подробнее [5]).

Вычисленные выше коэффициенты (1.11) не зависят от φ и, следовательно, не изменятся, если в $\Delta\alpha$ и $\Delta\varphi$ (другими словами, в правых частях уравнений (1)) величина φ будет иметь какое-либо конкретное значение. Наиболее удобно взять значение $\varphi = 0$. Уравнения (I) примут тогда вид

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -p\alpha + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp}(t); \\ \dot{\varphi} &= -q\alpha - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}(t).\end{aligned}\quad (1.12)$$

Итак, уравнения (1.12) и (I) приводят к тем же самым значениям коэффициентов K_{ij} , и, следовательно, дают то же самое значение вероятности переходов $W(\alpha_0, \varphi_0, t_0; \alpha, \varphi, t)$. В свою очередь, это приводит к одним и тем же вероятностным характеристикам величин α и φ . Таким образом, разные уравнения (I) и (1.12) приводят в первом приближении к одинаковым вероятностным характеристикам переменных. Назовем такие уравнения статистически эквивалентными.

Эту статистическую эквивалентность уравнений можно использовать для нахождения искомых вероятностных характеристик α и φ , не решая уравнения Эйнштейна—Фоккера. Действительно, уравнения (1.12) являются линейными и их решение может быть сразу написано:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 e^{-pt} + \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^t e_{\perp}(t-x) e^{-px} dx; \\ \varphi(t) &= \varphi_0 - \frac{q}{p} \alpha_0 (1 - e^{-pt}) - q \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^t dx \int_0^x e_{\perp}(x-y) e^{-py} dy - \\ &\quad - \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^t e_{\parallel}(x) dx.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Из этих формул легко могут быть найдены искомые вероятностные характеристики для α и φ . В частности, поскольку e_{\parallel} и e_{\perp} дельта-коррелированы, то α и φ являются нормальными. Поэтому можно сразу, не решая (I), написать выражение для плотности вероятности $W(\alpha_0, \varphi_0, t_0; \alpha, \varphi, t)$, имеющую вид двухмерного нормального распределения, где значения $\langle \alpha^2 \rangle$, $\langle \varphi^2 \rangle$, $\langle \alpha\varphi \rangle$ и т. п. находятся из (1.13).

Таким образом, решение уравнений (I) для спектральной плотности шума (1.2) совпадает (по вероятностным характеристикам) с решением уравнений (1.12).

3. Обсудим полученный результат. Во многих работах при решении задачи о воздействии на автогенератор дельта-коррелированного шума [3–9] непосредственно получались уравнения (1.12), в то время как строгий анализ приводит к (I) (см. [1]).

В [1], где применялся метод малого параметра, были получены уравнения (1.12) по той причине, что рассматриваемые фазовые флюктуации предполагались достаточно малыми ($\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$). Легко видеть, что для малых φ уравнения (I) переходят в (1.12). Однако то, что результаты, полученные в [1] для малых φ могут распространяться и на большие φ , получает теперь необходимое обоснование. А именно, указанная выше статистическая эквивалентность уравнений (I) и (1.12) говорит, в частности, о том, что зависимость $\langle \varphi^2 \rangle$ от t имеет один и тот же вид как для малых, так и для больших $\langle \varphi^2 \rangle$.

Совершенно аналогично получает обоснование и метод Блакьера [9], где также рассматривались только малые фазовые флюктуации, а полученные результаты распространялись на фазовые флюктуации произвольной величины. Для других упомянутых работ [3, 4, 6, 8] имеет место то же обстоятельство. В [6] уравнения, решаемые методом уравнений Эйнштейна—Фоккера, фактически совпадают с (1.12).

Отметим, наконец, следующее. Нет необходимости подробно рассматривать различные конкретные вероятностные характеристики α и φ , заданные уравнением (I) для рассматриваемого случая широкополосного шума, так как уравнения (1.12), статистически эквивалентные (I), неоднократно уже рассматривались (см., например, [7]). Мы приведем только две характеристики, нужные для дальнейшего — дисперсию амплитудных $\langle \alpha^2 \rangle$ и фазовых $\langle \varphi^2 \rangle$ флюктуаций. Можно показать, что для $pt \gg 1$ (т. е. для установившихся значений)

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\omega_0^2 \pi c_0}{2R_0^2 p}; \quad (1.14)$$

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{\omega_0^2}{4R_0^2} 4\pi c_0 (1 + q^2 p^{-2}) t. \quad (1.15)$$

2. УЗКОПОЛОСНЫЙ ШУМ

1. Рассмотрим теперь случай, когда спектр шума $E(t)$ сосредоточен около ω_0 и имеет достаточно малую ширину; при этом имеет место квазистатическое воздействие шума на автогенератор и мы можем положить e_{\parallel} и e_{\perp} постоянными в (I). Для удобства анализа введем новые случайные переменные $A = A(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$e_{\parallel} = A \cos \psi; \quad e_{\perp} = A \sin \psi. \quad (2.1)$$

Это представление e_{\parallel} и e_{\perp} эквивалентно представлению узкополосного шума $E(t)$ в виде $E(t) = A \cos(\omega_0 t + \psi)$, где амплитуда и фаза A и ψ — случайные функции времени, характеристики которых считаем заданными. Подставляя (2.1) в (I), получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} + p \alpha &= \frac{\omega_0}{2R_0} A \sin(\psi - \varphi); \\ \dot{\varphi} + q \alpha &= -\frac{\omega_0}{2R_0} A \cos(\psi - \varphi). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение этих уравнений представляется в общем случае функциями времени $\alpha = \alpha(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$. Однако зависимость α и φ от времени отражает лишь переходные процессы, так как A и ψ считаем, на основании ранее сказанного, постоянными. При квазистатическом рассмотрении нас интересуют установившиеся значения α и φ , зависящие от A и ψ . Для них уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} p \alpha &= \frac{\omega_0}{2R_0} A \sin(\psi - \varphi); \\ q \alpha &= -\frac{\omega_0}{2R_0} A \cos(\psi - \varphi). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда нетрудно найти

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2R_0 \sqrt{p^2 + q^2}} A; \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{p}{q} + \psi. \quad (2.4)$$

Итак, мы получили зависимость медленных флюктуаций α и φ от медленных флюктуаций A и ψ . Видно, что при таком квазистатическом приближении флюктуации амплитуды (относительные) и фазы автогенератора совпадают с флюктуациями амплитуды и фазы узкополосного шума, действующего на автогенератор.

Введение A и ψ посредством (2.1) является неоднозначным без указания пределов их изменения. Введем следующие условия на эти пределы: $-\infty < A < +\infty$, $-\pi/2 < \psi < +\pi/2$. При таких условиях, считая e_{\parallel} и e_{\perp} нормально распределенными, можно получить известными методами следующее распределение вероятностей для A и ψ :

$$W(A, \psi) = \frac{|A|}{2\pi\Phi(0)} \exp \left\{ -\frac{A^2}{2\Phi(0)} \right\}. \quad (2.5)$$

Соответствующие одномерные распределения таковы:

$$W(A) = \frac{|A|}{2\Phi(0)} \exp \left\{ -\frac{A^2}{2\Phi(0)} \right\} \quad (-\infty < A < +\infty); \quad (2.6)$$

$$W(\psi) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2} \right). \quad (2.7)$$

Таким образом видим, что при выбранных пределах изменения амплитуды A ее среднее значение равно нулю: $\langle A \rangle = 0$, кроме того, $\langle \psi \rangle = 0$. Теперь нетрудно найти некоторые вероятностные характеристики α и φ . На основании (2.4)–(2.7) имеем

$$\langle \alpha \rangle = 0; \quad \langle \varphi \rangle = \operatorname{arctg} \frac{p}{q}; \\ \langle \alpha^2 \rangle = \frac{\omega_0^2}{4R_0^2(p^2 + q^2)} \langle A^2 \rangle = \frac{\omega_0^2}{4R_0^2(p^2 + \tilde{q}^2)} 2\Phi(0); \quad (2.8) \\ \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle = \langle \psi^2 \rangle; \quad \langle \alpha(\varphi - \langle \varphi \rangle) \rangle = 0.$$

Характерной особенностью полученной формулы для интенсивности амплитудных флюктуаций является то, что $\langle \alpha^2 \rangle$ зависит не только от p , но и от q . В этом, по-видимому, заключается специфика узкополосных воздействий на автогенератор. Напомним, что в случае широкополосного шума (формула (1.14)) $\langle \alpha^2 \rangle$ зависело только от p .

2. Полученные выше решения (2.4) для α и φ являются квазистатическими, т. е. справедливы, когда производные A и ψ по времени достаточно малы. Представляет несомненный интерес отыскание следующего приближения, учитывающего первые производные A и ψ .

Пользуясь методом, изложенным в Приложении 1 работы [10] (рас-

* Помимо $W(A, \psi)$, можно найти и другие плотности вероятностей, например, плотность вероятностей перехода $W(A, \psi, t; A', \psi', t')$ и т. п. Мы этого делать не будем, считая, что все необходимые характеристики A и ψ известны.

пространяя его на случай двух задающих функций), будем искать более точное решение уравнений (2.2) в виде следующего ряда по производным (сохраняя члены только с первыми производными):

$$\alpha(t) = \frac{\omega_0}{2R_0\sqrt{p^2+q^2}} A(t) + aA'(t) + b\psi'(t); \\ \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{p}{q} + \psi(t) + cA'(t) + d\psi'(t). \quad (2.9)$$

Использование упомянутого метода приводит к следующим значениям коэффициентов a, b, c, d :

$$a = -\frac{\omega_0 p}{2R_0\sqrt{(p^2+q^2)^3}}; \quad b = -\frac{q}{p^2+q^2}; \\ c = \frac{1}{A} \frac{q}{p^2+q^2}; \quad d = -\frac{2R_0}{\omega_0 A} \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}. \quad (2.10)$$

Таким образом, вместо (2.4) имеем следующее более точное решение уравнений (2.2):

$$\alpha(t) = \frac{\omega_0}{2R_0\sqrt{p^2+q^2}} A - \frac{\omega_0 p}{(p^2+q^2)^{3/2}} \frac{A'}{2R_0} - \frac{q}{p^2+q^2} \psi'; \\ \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{p}{q} + \psi + \frac{q}{p^2+q^2} \frac{A'}{A} - \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \frac{2R_0 \psi'}{\omega_0 A}. \quad (2.11)$$

Зная вероятностные характеристики A и ψ , на основании (2.11) можно отыскать и более точные, по сравнению с (2.8), вероятностные характеристики α и φ .

3. Проанализируем теперь условия медленности, которые необходимо накладывать на A и ψ , чтобы можно было ограничиваться приближением (2.4). Очевидно (см. (2.9)), эти условия являются следующими:

$$a^2 \langle A'^2 \rangle \ll \frac{\omega_0^2}{4R_0^2(p^2+q^2)} \langle A^2 \rangle; \quad c^2 \langle A'^2 \rangle \ll 1; \\ b^2 \langle \psi'^2 \rangle \ll \frac{\omega_0^2}{4R_0^2(p^2+q^2)} \langle A^2 \rangle; \quad d^2 \langle \psi'^2 \rangle \ll 1. \quad (2.12)$$

Подставляя в (2.12) значения коэффициентов из (2.10) и используя то обстоятельство, что (см. Приложение) для случайной стационарной функции $x(t)$, спектр которой сосредоточен около нуля,

$$\langle x'^2 \rangle = \Omega_x^2 \langle x^2 \rangle$$

(Ω_x — ширина спектра функции $x(t)$), можно получить следующие приближенные условия медленности $A(t)$ и $\psi(t)$, накладываемые на ширину их спектров Ω_A и Ω_ψ :

$$\Omega_A^2 \ll \min \left\{ \frac{(p^2+q^2)^2}{p^2}, \quad \frac{(p^2+q^2)^2}{q^2} \right\}; \quad (2.13)$$

$$\Omega_\psi^2 \ll \frac{\langle A^2 \rangle}{\langle \psi^2 \rangle} \frac{\omega_0^2}{4R_0^2} \min \left\{ \frac{p^2+q^2}{p^2}, \quad \frac{p^2+q^2}{q^2} \right\}. \quad (2.14)$$

При $q \ll p$ эти неравенства переходят в

$$\Omega_A^2 \ll p^2; \quad (2.15)$$

$$\Omega_\psi^2 \ll \frac{\langle A^2 \rangle}{\langle \psi^2 \rangle} \frac{\omega_0^2}{4R_0^2}. \quad (2.16)$$

Неравенство (2.13), как видно, является отнюдь не тривиальным. Казалось бы по виду уравнения (2.2), что A медленно в том случае, если Ω_A много меньше p . Однако, как ясно из (2.15), это имеет место лишь при $q \ll p$. В общем случае нужно учитывать как p , так и q , которые в оба неравенства входят симметрично.

Легко видеть, что при произвольном отношении q/p выполнение неравенства (2.15) всегда влечет за собой выполнение неравенства (2.13). Однако последнее является более жестким. Если $q \gg p$, то (2.13) переходит в $\Omega_A^2 \ll q^2$, т. е. является более свободным в отношении Ω_A , чем (2.15). Совершенно аналогично выполнение неравенства (2.16) всегда влечет за собой (при произвольном q/p) выполнение неравенства (2.14).

3. ШУМ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ШИРИНОЙ ПОЛОСЫ

1. Перейдем теперь к рассмотрению наиболее сложного случая, когда ширина спектра воздействующего на автогенератор шума $E(t)$ является произвольной, в том числе и сравнимой с p . Очевидно, что такую же ширину спектра имеют $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$.

В этом случае мы начнем рассмотрение с исходных уравнений (I), которым нетрудно привести в соответствие следующие интегральные уравнения (при начальных условиях $\alpha(0) = \alpha_0 = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$):

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^t e^{-p(t-y)} [e_{\perp} \cos \varphi - e_{\parallel} \sin \varphi]_y dy; \\ \varphi &= \varphi_0 - q \left[\frac{\omega_0}{2R_0} \left[\int_0^t dx \int_0^x e^{-p(x-y)} [e_{\perp} \cos \varphi_y - e_{\parallel} \sin \varphi_y]_y dy \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^t [e_{\perp} \cos \varphi + e_{\parallel} \sin \varphi]_y dy \right] \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку точное решение уравнений (3.1) найти практически невозможно, будем рассматривать лишь приближенное решение. За нулевое приближение принимаем

$$\alpha = \alpha_0 = 0; \quad \varphi = \varphi_0. \quad (3.2)$$

Первое приближение (α_1 , φ_1) получим, если в правые части (3.1) подставим (3.2):

$$\alpha_1 = \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^t e^{-p(t-y)} [e_{\perp} \cos \varphi_0 - e_{\parallel} \sin \varphi_0]_y dy; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_0 - q \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^t dx \int_0^x e^{-p(x-y)} [e_{\perp} \cos \varphi_0 - e_{\parallel} \sin \varphi_0]_y dy - \\ &\quad - \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^t [e_{\perp} \cos \varphi_0 + e_{\parallel} \sin \varphi_0]_y dy. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя α_1 и φ_1 в правую часть (3.1), получим второе приближение (α_2, φ_2) и т. д. Ограничимся подробным анализом лишь первого приближения.

Полагая $pt \gg 1$ (рассматриваются только установившиеся процессы) и делая замену переменных, вместо (3.3) получим

$$\alpha_1 = \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^\infty e^{-px} [e_\perp \cos \varphi_0 - e_\parallel \sin \varphi_0]_{t-x} dx. \quad (3.5)$$

Рассмотрим вместо флюктуаций фазы флюктуации частоты $\nu = \dot{\varphi}$. При этом (3.4) примет вид

$$\nu_1 = -q\alpha_1 - \frac{\omega_0}{2R_0} [e_\parallel \cos \varphi_0 + e_\perp \sin \varphi_0]. \quad (3.6)$$

Вероятностные характеристики ν_1 и α_1 , определяемые формулами (3.5) и (3.6), в общем случае зависят от характеристик φ_0 , которые могут быть, вообще говоря, любыми. Пусть, например, φ_0 является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале $[-\pi, +\pi]$. Случайные функции e_\parallel и e_\perp считаем, по-прежнему, нормальными, стационарными с заданными выше характеристиками. Естественно также предположить, что φ_0 не зависит от e_\parallel и e_\perp .

Тогда из (3.5) и (3.6) нетрудно получить, что

$$\langle \alpha_1 \rangle = \langle \nu_1 \rangle = 0; \quad (3.7)$$

$$\Phi_{\alpha 1}(\tau) = \langle \alpha_1(t)\alpha_1(t+\tau) \rangle = \frac{\omega_0^2}{4R_0^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(x+y)} \Phi(\tau+x-y) dx dy; \quad (3.8)$$

$$\Phi_{\nu 1}(\tau) = \langle \nu_1(t)\nu_1(t+\tau) \rangle = q^2 \Phi_{\alpha 1}(\tau) + \frac{\omega_0^2}{4R_0^2} \Phi(\tau); \quad (3.9)$$

$$\Phi_{\alpha 1 \nu 1}(\tau) = \langle \alpha_1(t)\nu_1(t+\tau) \rangle = -q \Phi_{\alpha 1}(\tau). \quad (3.10)$$

2. Пусть теперь φ_0 является детерминированной величиной, равной нулю. Подставляя $\varphi_0 = 0$ в (3.5), (3.6), получим

$$\alpha_1 = \frac{\omega_0}{2R_0} \int_0^\infty e^{-px} e_\perp(t-x) dx; \quad (3.11)$$

$$\nu_1 = -q\alpha_1 - \frac{\omega_0}{2R_0} e_\parallel. \quad (3.12)$$

Вычисление вероятностных характеристик α_1 и ν_1 приводит теперь, впервых, к тем же формулам (3.7) и (3.8) и, во-вторых, к выражению

$$\Phi_{\nu 1}(\tau) = q^2 \Phi_{\alpha 1}(\tau) + \frac{\omega_0^2}{4R_0^2} \Phi(\tau) + q \frac{\omega_0^2}{4R_0^2} \int_0^\infty e^{-px} [\Phi_{\parallel \perp}(\tau-x) - \Phi_{\perp \parallel}(\tau+x)] dx; \quad (3.13)$$

$$\Phi_{\alpha 1 \nu 1}(\tau) = -q \Phi_{\alpha 1}(\tau) + \frac{\omega_0^2}{4R_0^2} \int_0^\infty e^{-px} \Phi_{\parallel \perp}(\tau+x) dx. \quad (3.14)$$

Отличие этих формул от (3.9) и (3.10) проявляется в том, что здесь сказывается влияние несимметричности спектра $\tilde{S}_E(\Omega)$ шума $E(t)$ по отношению к $\Omega = 0$. Если $\tilde{S}_E(\Omega)$ симметрична, то $\tilde{S}_E^1(\Omega) \equiv 0$ и, следо-

вательно (см. (II)) $\Phi_{\parallel \perp}(\tau) \equiv 0$. В этом случае, как легко видеть, (3.13) и (3.14) совпадают с (3.9) и (3.10) и, следовательно, выражения (3.5) и (3.6) становятся статистически эквивалентными выражениям (3.11) и (3.12) (по крайней мере в отношении к средним и корреляциям).

Нетрудно видеть, что формулам первого приближения (3.11) – (3.12) соответствуют дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -p\alpha + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp}; \\ \dot{\varphi} &= -q\alpha - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel},\end{aligned}\quad (3.15)$$

которые рассматривались выше (см. (1.12)) и которые, как было показано, являются уравнениями статистически эквивалентными (I) для случая широкополосного шума $E(t)$. Это значит, что решение уравнений (3.15) (точное решение уравнений (I) для широкополосного шума) является в то же время приближенным решением уравнений (I) для шума $E(t)$ с произвольной шириной полосы. Более того, как уже указывалось выше, (3.15) получаются из (I) при ограничении малыми фазовыми углами; следовательно, решение уравнений (3.15) является точным решением уравнений (I) для малых φ независимо от ширины спектра шума $E(t)$.

3. Для оценки характера первого приближения вычислим, например, дисперсию амплитудных флюктуаций α , заданных приближенной формулой (3.11) для узкополосного шума и сравним ее с точным выражением (2.8). Считая случайную функцию $e_{\perp}(t)$ под интегралом (3.11) медленно меняющейся за время p^{-1} получим

$$\alpha_1 = \frac{i\omega_0}{2R_0 p} e_{\perp},$$

откуда

$$\langle \alpha_1^2 \rangle = \frac{\omega_0^2}{4R_0^2 p^2} \Phi(0) \quad (3.16)$$

Это выражение легко получить также из (3.8). Сравнивая (3.16) с (2.8), видим, что наше первое приближение, во-первых, не учитывает неизохронности автогенератора q , и, во-вторых, при $q \ll p$ дает значение для дисперсии, отличающееся от точного численным коэффициентом 2. Тем самым следует признать определенную ценность уравнений первого приближения (3.15) для случая произвольной Ω_E , тем более, если учитывать, что рассмотренный пример узкополосного шума является, по-видимому, самым невыгодным для оценки эффективности первого приближения.

4. В заключение рассмотрим случай широкополосного шума, обладающего спектром (1.2), причем, в отличие от раздела I, учтем неравномерность спектра в полосе автогенератора. Это значит, что в выражении (1.3) мы сохраним также член с c_1 . Тогда вместо (1.6) будем иметь

$$\tilde{S}_E(\Omega) = c_0 + c_1 \Omega; \quad \tilde{S}_E^0(\Omega) = c_0; \quad \tilde{S}_E^1(\Omega) = c_1 \Omega. \quad (3.17)$$

Вычисление функций корреляции, согласно (II), дает

$$\Phi(\tau) = 4\pi c_0 \delta(\tau); \quad \Phi_{\parallel \perp}(\tau) = -4\pi c_1 \delta'(\tau). \quad (3.18)$$

Таким образом, учет неравномерности спектра приводит к существованию корреляций между $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$.

Можно показать, что решение уравнений (I) для случая (3.18) методом уравнения Эйнштейна—Фоккера не приносит успеха, так как попытка вычислить точные значения коэффициентов K_{ij} приводит к необходимости некоторых из них. Следовательно, остается единственный путь — замена точных уравнений (I) приближенными (1.12), непосредственное решение которых известно. Расчет показывает, например, что дисперсия флюктуаций для случая (3.18) равна (при $pt \gg 1$)

$$\langle \varphi^2 \rangle = \frac{\omega_0^2}{4R_0^2} \{ 4\pi c_0(1 + q^2 p^{-2}) t - 2\pi c_1 q p^{-1} \}. \quad (3.19)$$

По сравнению с (1.15) здесь имеется дополнительный член, пропорциональный c_1 . Для дисперсии амплитудных флюктуаций и в этом случае по-прежнему справедлива формула (1.14).

Вычисление других вероятностных характеристик свидетельствует о том, что неравномерность спектра ($c_1 \neq 0$) сказывается, кроме (3.19), на $\langle \alpha \varphi \rangle$ и на спектральной плотности флюктуаций частоты автогенератора. Последняя в этом случае равна

$$S_v(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{2R_0^2} \left\{ \frac{p^2}{p^2 + \Omega^2} (c_0 q^2 p^{-2} + c_1 q) + c_0 \right\}. \quad (3.20)$$

Определение из (3.20) эффективной ширины спектральной линии автогенератора приводит к значению (см., например, [1])

$$\Delta F = \frac{\pi}{2} S_v(0) = \frac{\pi \omega_0^2}{4R_0^2} \{ c_0(1 + q^2 p^{-2}) + c_1 q \}, \quad (3.21)$$

откуда видно, что на ΔF , помимо неизохронности автогенератора, влияет и непостоянство спектральной плотности шума вблизи частоты автоколебаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим случайную стационарную функцию $x(t)$, обладающую функцией корреляции $\Phi_x(\tau)$ и спектральной плотностью $S_x(\omega)$. Функция корреляции ее производной $x'(t)$ равна, как известно,

$$\langle x'(t)x'(t + \tau) \rangle = \Phi_{x'}(\tau) = - \frac{d^2 \Phi_x(\tau)}{d\tau^2}.$$

С другой стороны, если

$$\Phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (\text{П.1})$$

то

$$\frac{d^2 \Phi_x(\tau)}{d\tau^2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \omega^2 \cos(\omega\tau) d\omega.$$

Дисперсия производной равна, следовательно,

$$\langle x'^2 \rangle = \Phi_{x'}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \omega^2 d\omega. \quad (\text{П.2})$$

Если спектральная плотность $S_x(\omega)$ сосредоточена около нулевой частоты, то квадрат ширины спектра функции $x(t)$ можно определить как

$$\Omega_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \omega^2 d\omega / \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega.$$

В этом случае (П.2) может быть записана (принимая во внимание (П.1)) как

$$\langle x'^2 \rangle = \Phi_x(0) = \Omega_x^2 \Phi_x(0) = \Omega_x^2 \langle x^2 \rangle.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 495 (1963).
2. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 241 (1960).
3. Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, 1, 1240 (1956).
4. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 79 (1958).
5. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
6. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 145 (1950).
7. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 29, 304 (1955).
8. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 20 (1958).
9. А. Влациеге, Ann. de Radioelectricité, 8, 36; 8, 153 (1953).
10. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 501 (1963).
11. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 1295 (1957).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
4 мая 1963 г.

THE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS FOR THE AMPLITUDE AND PHASE FLUCTUATIONS OF AN AUTO-OSCILLATOR

A. N. Malakhov

Nonlinear equations of the amplitude and phase fluctuations of an auto-oscillator being under the action of noise with arbitrary bandwidth are solved.

УДК 538.561

ИЗЛУЧЕНИЕ МАЛОГО ГИРОТРОПНОГО ШАРА

A. V. Вашковский

Методом последовательных приближений в нелинейном приближении решена задача о параметрической генерации в малом гиротропном шаре. Вычислена мощность излучения гиротропного ферритового шара и найдены ее зависимости от параметров феррита.

В линейном приближении параметрическая регенерация собственных колебаний ферритового образца, в частности, условия возникновения генерации, изучена достаточно подробно. Однако исследование излучения образца при параметрической генерации никем не производилось. Исследование излучения образца существенно для выяснения ряда нелинейных характеристик магнитостатического усилителя Дэнтона [1], а также при рассмотрении магнитостатического генератора.

В настоящей работе рассматриваются нелинейные явления при параметрической генерации магнитостатического типа и определяется мощность излучения ферритовой сферы в безграничном пространстве.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

Рассмотрим гиротропный шар, радиус a которого много меньше длины волн электромагнитных колебаний λ , излучаемых им самим. Этот шар намагнчен до насыщения однородным постоянным магнитным полем H_0 , под действием которого в шаре возникает намагниченность M_0 . Пусть, кроме того, в шаре действует переменное однородное магнитное поле h_0 на частоте ω_0 , причем направление h_0 совпадает с H_0 . Это направление возьмем за направление оси OZ (см. рис. 1).

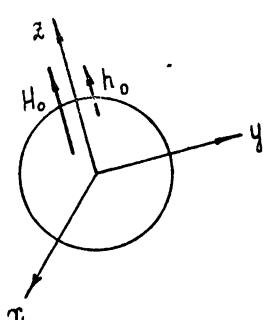
Хорошо известно, что под действием поля h_0 в шаре могут быть полностью скомпенсированы потери на частотах собственных магнитостатических колебаний ферромагнитного образца $\omega_{1,2}$: $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ (параметрическая регенерация). На этих частотах возникает генерация колебаний и излучение из шара.

Электромагнитное поле вне шара описывается уравнениями Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Рис. 1.



Решение уравнений (1) удобно взять в виде расходящихся сферических волн типа H :

$$\mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{i}_r \times \operatorname{grad} v; \quad (2)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{i}_r \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 r v + \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial r} (r v);$$

$$v = \beta_{n,m}^{(H)} h_n^{(2)} \left(\frac{\omega}{c} r \right) P_n^m (\cos \theta) e^{\pm im\varphi} e^{i\omega t}, \quad (2a)$$

и типа E

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}_r \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 r u + \operatorname{grad} \frac{\partial}{\partial r} (r u); \quad (3)$$

$$\mathbf{h} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{i}_r \times \operatorname{grad} u;$$

$$u = \beta_{n,m}^{(E)} h_n^{(2)} \left(\frac{\omega}{c} r \right) P_n^m (\cos \theta) e^{\pm im\varphi} e^{i\omega t}. \quad (3a)$$

Здесь v — магнитный потенциал Дебая, u — электрический потенциал Дебая, $h_n^{(2)}$ — сферическая функция Ганкеля второго рода порядка n , P_n^m — присоединенная функция Лежандра первого рода порядка m , степени n , $\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\varphi$ — орты сферических координат.

Электромагнитные колебания внутри гиромагнитного шара описываются следующими уравнениями:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}; \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \epsilon \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (4a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = - \operatorname{div} \mathbf{m}; \quad (4b)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = - \gamma_e \mathbf{M} \times \mathbf{H}, \quad (4v)$$

где \mathbf{M} — магнитный момент, \mathbf{m} — переменная составляющая магнитного момента, \mathbf{H} — полное магнитное поле, $\gamma_e = 2\pi \cdot 2,8 \cdot 10^6 \text{ э}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ — гиромагнитное отношение для электрона.

Уравнение движения магнитного момента (4в) нелинейным образом связывает магнитное поле \mathbf{h} с магнитным моментом \mathbf{m} . Решение этого уравнения в нелинейном приближении позволяет вычислить установившуюся амплитуду поля внутри ферритового шара при параметрической генерации.

При параметрической генерации в феррите возможны два механизма ограничения амплитуды генерации.

Первый механизм — ограничение амплитуды генерации за счет нелинейности на частоте генерации. Этот механизм для ферритового генератора упрощенно выглядит следующим образом: рост амплитуды, главным образом m_x, m_y , вызывает уменьшение постоянной составляющей M_z , что приводит к уменьшению степени регенерации системы при заданном уровне накачки и тем самым задерживает рост амплитуды генерации.

Второй механизм — ограничение амплитуды генерации за счет нелинейности на частоте накачки. Этот механизм связан с нелинейным

возрастанием потерь на частоте накачки и, как следствие, ухудшением передачи мощности накачки генерируемым колебаниям. В феррите дело осложняется тем, что в нем, кроме параметрической регенерации магнитостатических колебаний, происходит регенерация коротких спиновых волн, которая также ведет к росту потерь на частоте накачки. Заметим, что действие накачки приводит к регенерации большой группы спиновых волн с различными волновыми числами (на частоте $\omega_0/2$); поэтому можно думать, что второй механизм определяется главным образом действием спиновых волн, а не магнитостатических колебаний.

Механизм роста потерь на частоте накачки из-за регенерации спиновых волн действует независимо от механизма ограничения за счет нелинейности на частоте генерации. При расчете ферритовых систем они могут быть учтены независимо. В настоящей работе будет исследоваться прежде всего первый механизм ограничения амплитуды генерации; степень влияния второго механизма будет оценена в разделе 4.

Так как решение в общем виде нелинейной задачи для ферромагнетика конечных размеров громоздко, ограничимся рассмотрением частного случая параметрической генерации, вырожденной по частоте ($\omega_1 = \omega_2$). Этот случай может представлять интерес и для практики [1]. Установившуюся амплитуду генерации найдем из граничных условий, которые запишем с учетом нелинейных соотношений между индукцией и полем, действующим внутри феррита.

2. ПОЛЕ И НАМАГНИЧЕННОСТЬ ВНУТРИ ФЕРРИТА

Внутри феррита имеется следующее магнитное поле:

$$\mathbf{H} = i_z H_0 + i_z \frac{1}{2} h_0 (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) + \frac{1}{2} \mathbf{h} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}).$$

Здесь $\omega = \omega_0/2$, i_x , i_y , i_z — орты прямоугольных координат.

Из уравнения движения (4в) можно выразить магнитный момент \mathbf{m} на частоте ω через поле \mathbf{H} . При этом учтем, что

$$m_z \simeq 4\pi M_0 - \frac{1}{2} \frac{m_x^2 + m_y^2}{4\pi M_0}.$$

Представляя \mathbf{m} в виде гармонического ряда, получим следующие выражения для индукции в уравнении (4в):

$$\begin{aligned} b_x &= \mu h_x - ikh_y - \delta_0 (\chi m_x^* - ikm_y^*) + 2\delta_M m_x (|m_x|^2 + |m_y|^2) + \\ &\quad + \delta_M (\chi h_x^* - ikh_y^*) (m_x^2 + m_y^2); \\ b_y &= ikh_x + \mu h_y - \delta_0 (ikm_x^* + \mu m_y^*) + 2\delta_M m_y (|m_x|^2 + |m_y|^2) + \\ &\quad + \delta_M (\chi h_y^* + ikh_x^*) (m_x^2 + m_y^2); \\ b_z &= h_z, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\delta_M = \frac{1}{8\pi M_0^2}; \quad \delta_0 = \frac{h_0}{4\pi M_0}. \quad (\delta_0 \ll 1).$$

Чтобы найти электромагнитное поле внутри ферритового шара, воспользуемся тем, что радиус шара много меньше длины волн ($a \ll \lambda$). В этом случае электрическое и магнитное поля внутри феррита можно искать методом последовательных приближений, как это сделано в ра-

боте [2]. В нулевом приближении магнитное и электрическое поля можно считать квазистатическими, полагая

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \Psi_E; \quad \mathbf{h} = \operatorname{grad} \Psi_H.$$

Связь между полями \mathbf{E} и \mathbf{h} определяется из решения в первом приближении.

В отличие от результатов работы [2] квазистатическое магнитное поле \mathbf{h} необходимо вычислять с учетом нелинейных уравнений (5). Из уравнения (4в) с учетом уравнений (5) получим дифференциальное уравнение для потенциала Ψ_H (в том же приближении, что и \mathbf{b}):

$$\mu \frac{\partial^2 \Psi_H}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \Psi_H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_H}{\partial z^2} = \delta_0 L_1(\Psi_H) - \delta_M L_2(\Psi_H), \quad (6)$$

где $\mu = 1 + \chi$, k — компоненты тензора магнитной проницаемости феррита (по Полдеру);

$$\begin{aligned} L_1(\Psi_H) &= (\chi^2 - k^2) \left(\frac{\partial^2 \Psi_H^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_H^*}{\partial y^2} \right); \\ L_2(\Psi_H) &= 2(\chi^2 + k^2) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial \Psi_H}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_H}{\partial y} \right|^2 \right) \left(\chi \frac{\partial \Psi_H}{\partial x} - ik \frac{\partial \Psi_H}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial \Psi_H}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_H}{\partial y} \right|^2 \right) \left(ik \frac{\partial \Psi_H}{\partial x} + \chi \frac{\partial \Psi_H}{\partial y} \right) \left. \right\} + (\chi^2 - k^2) \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Psi_H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_H}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\chi \frac{\partial \Psi_H^*}{\partial x} - ik \frac{\partial \Psi_H^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \Psi_H}{\partial x} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial \Psi_H}{\partial y} \right)^2 \right] \left(ik \frac{\partial \Psi_H^*}{\partial x} + \chi \frac{\partial \Psi_H^*}{\partial y} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Решение для потенциала Ψ_H будем искать, применяя метод последовательных приближений и ограничиваясь вторым приближением:

$$\Psi_H = \Psi_0 + \delta_0 \Psi_1 + \delta_M \Psi_2. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и разделяя уравнение по степеням малости, получим дифференциальные уравнения для $\Psi_{0, 1, 2}$:

$$\mu \frac{\partial^2 \Psi_{0, 1, 2}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \Psi_{0, 1, 2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{0, 1, 2}}{\partial z^2} = L_{0, 1, 2}(\Psi_0), \quad (8)$$

где $L_0(\Psi_0) = 0$.

Решение уравнения (8) для Ψ_0 известно: это — магнитостатические колебания Уокера [5]. Известно также решение уравнения для Ψ_1 , причем решение Ψ_1 определяет правило отбора магнитостатических колебаний, которые могут быть параметрически регенерированы. Из работ [4, 6] известно, что в рассматриваемом вырожденном случае могут быть регенерированы только два типа колебаний: 2, 0, 1 и 3, 0, 1. Тип колебаний 3, 0, 1 не имеет никакого практического значения из-за трудностей возбуждения и из-за большей по сравнению с типом колебаний 2, 0, 1 мощности накачки, необходимой для полной компенсации потерь в ферrite (пороговое значение поля $h_{0, \text{пор}}^{3, 0, 1} = 5h_{0, \text{пор}}^{2, 0, 1}$).

Поэтому, ограничив дальнейшее рассмотрение только колебаниями типа 2, 0, 1, найдем

$$\Psi_0 = \alpha_H \left[\frac{x^2 + y^2}{2} - \mu z^2 + \frac{(\mu-1)a^2}{3} \right];$$

$$\Psi_1 = \alpha_H^* (\chi^2 - k^2) \left(z^2 - \frac{1}{3} a^2 \right);$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{4} \alpha_H |\alpha_H|^2 \frac{\chi}{\mu} (3\chi^2 + k^2) (x^2 + y^2)^2.$$

Известно, что магнитные колебания типа 2, 0, 1 связаны с электрическими типа 1, 0. Потенциал для электрического поля этого типа имеет вид

$$\Psi_E = \alpha_E z.$$

Вихревые поля в ферритовом шаре находятся как первое приближение в решении уравнений (4). Для исследуемых магнитных колебаний типа 2, 0, 1 можно воспользоваться результатами работы [2] (выражение (12)), пренебрегая слагаемыми, имеющими множители $\delta_0 \delta_M$, $\delta_M^2 \delta_0 \omega a/c$, $\delta_M \omega a/c$.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ФЕРРИТА В БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЕ

Зная выражение для напряженностей полей, нетрудно найти значение электрической и магнитной индукции в феррите и записать граничные уравнения на поверхности ферритового шара. Если внешнее поле взять в виде двух сферических волн, идущих от центра: (2а) и (3а), то граничные уравнения (непрерывность $h_{0, \text{пор}}$, E_0 , b , D , на поверхности шара) приведут к следующим выражениям для амплитуд поля внутри и снаружи ферритового шара:

$$|\alpha_H|^2 = \frac{1}{a^2 G} \left[F' + F'' \sqrt{\left(\frac{h_0}{h_{0, \text{пор}}} \right)^2 - 1} \right]; \quad (9)$$

$$|\alpha_E|^2 = \frac{4\pi^2}{25} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 k^2 \left(\frac{\epsilon + 4}{\epsilon + 2} \right)^2 \frac{1}{G} \left[F' \pm F'' \sqrt{\left(\frac{h_0}{h_{0, \text{пор}}} \right)^2 - 1} \right]; \quad (9a)$$

$$|\beta_H|^2 = \frac{4\pi^6}{81} a^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^6 \frac{1}{G} \left[F' \pm F'' \sqrt{\left(\frac{h_0}{h_{0, \text{пор}}} \right)^2 - 1} \right]; \quad (9b)$$

$$|\beta_E|^2 = \frac{(2\pi)^6}{25} a^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^6 k^2 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon + 2} \right)^2 \frac{1}{G} \left[F' \pm F'' \sqrt{\left(\frac{h_0}{h_{0, \text{пор}}} \right)^2 - 1} \right], \quad (9b)$$

где

$$F = \hat{F} + D; \quad \hat{F} = 4\mu + 1; \quad D = \frac{8\pi^2}{5} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 \epsilon k^2 \frac{\epsilon + 2}{\epsilon + 4};$$

$$G = \frac{9}{7} \delta_M \frac{\chi}{\mu} (3\chi^2 + k^2); \quad h_{0, \text{пор}} = \frac{4\pi M_0 F''}{4(\chi^2 - k^2)}.$$

При выводе выражения (9) магнитные потери в феррите учитывались методом, широко использовавшимся ранее (путем замены H_0 на $H_0 + i\Delta H$). В выражении (9б) пренебрежено величиной $(F'')^2 \left(1 - \frac{h_0}{h_{0, \text{пор}}} \right)^2$ по сравнению с 1, что справедливо при $F'' \ll 1$.

Амплитуда генерируемого поля оказывается прямо пропорциональна ширине резонансной линии и намагниченности феррита. При $h_0 < h_{0,\text{пор}}$ решение, естественно, невозможно. Амплитуда излучаемого поля существенно зависит от размера образца: она пропорциональна $(a/\lambda)^3$. Несложно найти вектор Умова—Пойнтинга и определить мощность, излучаемую ферритовым шаром в пространство в виде двух волн $H_{2,0}$ и $E_{1,0}$:

$$P_{\text{изл}} = \int_S \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \boldsymbol{\mathcal{E}}_\varphi \times \mathbf{H}_0^* dS = R_{n,m} \left[F' \pm F'' \sqrt{\left(\frac{h_0}{h_{0,\text{пор}}}\right)^2 - 1} \right], \quad (10)$$

где

$$R_{2,0} = \frac{1}{36} \pi^8 a^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^6 \frac{1}{G},$$

$$R_{1,0} = \frac{24}{25} \pi^8 a^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^6 \frac{k^2 \epsilon^2}{(\epsilon + 2)^2} \frac{1}{G}.$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выясним сначала, при каких расстройках от резонансного поля возможна генерация. Это легко сделать, анализируя любое из выражений (9) и (10). Область перестройки определяется из условия, что выражение $F' \pm F'' \sqrt{(h_0/h_{0,\text{пор}})^2 - 1}$ должно быть действительной положительной величиной. Разлагая F' и F'' в ряд Тэйлора по приращению к резонансному полю δH и ограничиваясь вторым приближением, найдем, что генерация возможна в интервале полей от $H_0 + \Delta H [3\Delta H / 4\pi M_0 - \sqrt{9(\Delta H / 4\pi M_0)^2 + (h_0/h_{0,\text{пор}})^2 - 1}]$ до $H_0 + \Delta H [3\Delta H / 4\pi M_0 + \sqrt{9(\Delta H / 4\pi M_0)^2 + (h_0/h_{0,\text{пор}})^2 - 1}]$.

Как видим, величина интервала очень мала: она примерно равна ширине резонансной кривой: $2\Delta H \sqrt{(h_0/h_{0,\text{пор}})^2 - 1}$. За пределами этого участка амплитуда излучаемого поля обращается в нули. (Решение $\alpha_H = \alpha_E = \beta_H = \beta_E = 0$ возможно во всей области полей.)

Зависимость квадрата амплитуды поля излучения в функции расстройки по полю подмагничивания представлена на рис. 2. Пунктиром на рисунке нанесена неустойчивая ветвь генерации и петля затягивания. Рассчитать петлю затягивания в рамках сделанных приближений невозможно.

Полученная зависимость характерна для параметрического генератора, в котором амплитуда колебаний нелинейным образом влияет на реактивность контура.

Для того, чтобы представить себе величину излучаемой мощности, зададимся какими-нибудь конкретными параметрами феррита. Пусть шар будет из иттриевого феррита с параметрами: $a = 1 \text{ мм}$, $\lambda = 6 \text{ см}$, $2\Delta H = 0,6 \text{ эрст}$, $4\pi M_0 = 1750 \text{ гс}$, $\epsilon = 10$. Поле подмагничивания возьмем резонансным ($F' = 0$). Тогда несложно построить по формуле (10)

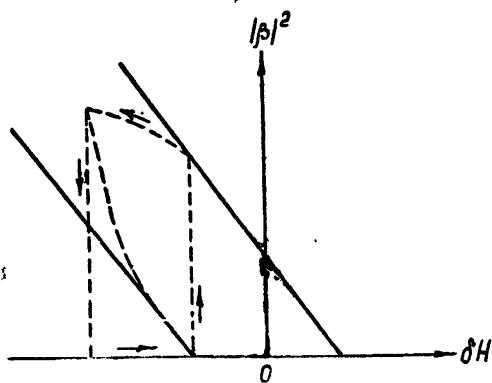


Рис. 2.

зависимость излучаемой мощности от амплитуды поля накачки (рис. 3). Как видим, излучаемая мощность имеет порядок 10^{-2} мквт.

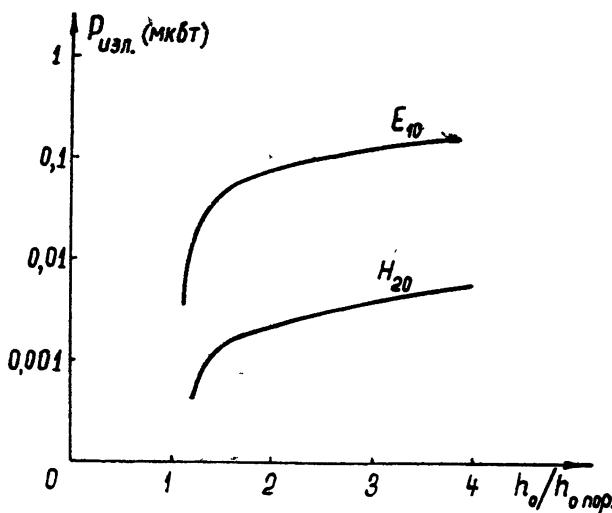


Рис. 3.

Из выражения (10) видно, что при бесконечном увеличении амплитуды накачки происходит неограниченный рост мощности излучения. Очевидно, принятый механизм ограничения амплитуды генерации за счет нелинейности на частоте генерации и то приближение, в котором найдено решение, не дает ответа на вопрос, какова величина излучения при больших амплитудах накачки.

Попробуем оценить влияние второго механизма ограничения на амплитуду излучения. С увеличением мощности накачки растут потери на частоте накачки. Шлеман [3] нашел выражение, хорошо совпадающее с экспериментом:

$$\mu_z'' = \frac{h_0/h_{0, \text{пор}} - 1}{(h_0/h_{0, \text{пор}})^2}.$$

Величина μ_z'' имеет тупой максимум при $h_0/h_{0, \text{пор}} = 2$, где она достигает величины 0,25. Несложно найти максимальное уменьшение амплитуды поля накачки внутри ферритового шара (h_{0l}), вызываемое ростом μ_z'' :

$$h_{0l} = \frac{h_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{9} (\mu_z'')^2}} \approx \left[1 - \frac{1}{18} (\mu_z'')^2 \right] h_0.$$

Итак, вклад второго механизма в ограничение амплитуды излучения ничтожен. Можно думать, что рост амплитуды излучения будет ограничен нелинейностью на частоте генерации; однако для исследования этого обстоятельства необходим учет более высоких приближений при решении уравнения движения магнитного момента.

Применение нелинейной теории к параметрически регенерированному гиротропному шару позволило выяснить основные зависимости излучения из шара от параметров феррита. Излучение при вырожден-

ном режиме регенерации при настройке на магнитостатический тип колебаний 2, 0, 1 происходит в виде двух волн H_{20} и E_{10} . Мощность излучения волны E_{10} более чем на порядок превосходит мощность волны H_{20} . Генерация возможна в очень узком интервале полей подмагничивания. При больших расстройках возможно появление петли затягивания.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании нелинейных свойств магнитостатического усилителя Дэнтона [1], а также при исследовании магнитостатического ферритового усилителя и генератора резонаторного типа.

Автор выражает благодарность проф. В. В. Мигулину за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. T. Denton, J. Appl. Phys. Suppl., **32**, 300S (1961).
2. А. В. Ващковский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 85 (1963).
3. E. Schrömann, J. Appl. Phys., **33**, 527 (1962).
4. Я. А. Монсов. РТЭ, **7**, 1130 (1962).
5. L. R. Walker, Phys. Rev., **105**, 305 (1957).
6. А. Л. Микаэлян, А. А. Васильев, РТЭ, **6**, 789 (1961).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
4 декабря 1963 г.

THE RADIATION OF A SMALL GYROTROPIC SPHERE

A. V. Vashkovsky

The problem of the parametric generation in a small gyrotropic sphere has been solved by the successive approximations method, in a nonlinear approximation. The radiation power of a gyrotropic ferrite sphere has been calculated and its dependences upon the ferrite parameters have been found.

УДК 621.396.671

О ВЛИЯНИИ ПЛОСКОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЛИСТА НА НАПРАВЛЕННЫЕ СВОЙСТВА АНТЕНН

В. А. Каплун, Л. М. Тимофеев

Рассматривается влияние на диаграмму направленности антенны расположенного вблизи ее раскрыва плоского диэлектрического слоя произвольной структуры. Показано, что поле в раскрыве антенны зависит от отражающих свойств листа и раскрыва и является функцией расстояния между ними. Получены выражения, позволяющие рассчитать диаграмму направленности системы «антенна—лист». Результаты расчета для некоторых конкретных случаев сопоставлены с экспериментальными данными.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

В технике СВЧ антенны часто находят применение защитные диэлектрические оболочки малой кривизны, расположаемые в непосредственной близости от раскрыва антенны. Поэтому представляет интерес определить воздействие этих оболочек на направленные свойства антенн. В первом приближении такая задача может быть сведена к рассмотрению влияния на диаграмму направленности антенны расположенного вблизи ее раскрыва плоского диэлектрического слоя произвольной структуры. При этом рассмотрение может быть проведено в плоскости, т. е. при представлении антенны линейным источником с заданными фазовым и амплитудным распределениями поля.

Задача рассматривалась применительно к антеннам в виде плоских решеток излучателей; приведенные экспериментальные данные, в частности, были получены с плоскими волноводно-щелевыми антennами.

Рассмотрим бесконечный вдоль оси Y диэлектрический лист, поверхность которого, обращенная к антенне, находится в плоскости $X = x_0$, и антенну, раскрыв которой размера $L \gg \lambda$ (где λ — длина рабочей волны) с центром в начале координат расположен в плоскости $X = 0$ (рис. 1). Плоская электромагнитная волна, вектор электрического поля которой с амплитудой E_0 ориентирован в направлении положительной оси Z , падает из верхнего полупространства под углом φ к оси X .

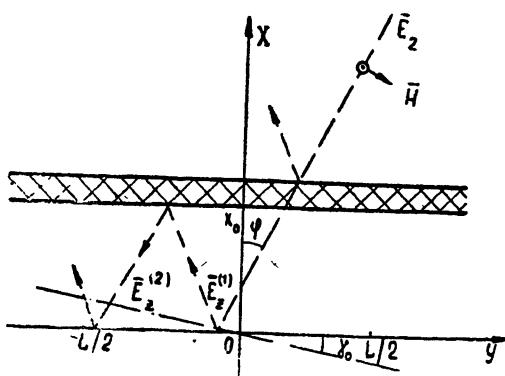


Рис. 1.

Составляющие поля падающей волны:

$$E_z = E_0 e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)};$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [\mathbf{n} E_z],$$

где ϵ и μ — параметры среды, а \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения волны.

Оперируя в дальнейшем лишь с электрическим полем волны, мы можем записать, что в плоскости раскрыва антенны ($X = 0$)

$$E_z^{(1)} = E_0 |T| e^{-j\psi - j k y \sin \varphi}, \quad (1)$$

где $|T| e^{-j\psi}$ — коэффициент прохождения, характеризующий ослабление амплитуды и сдвиг фазы волны, прошедшей через диэлектрический лист.

Поскольку диэлектрический лист — плоский и бесконечно протяженный, прошедшая волна также плоская; меняется только ее амплитуда и фаза. Падающая на раскрыв антенны волна частично поглощается (поглощается), а частично отражается с коэффициентом отражения $|r| e^{-j\zeta}$ в направлении к диэлектрическому листу. В свою очередь эта волна, частично отразившись с коэффициентом отражения $|R| e^{-j\eta}$ от листа, вновь попадает на раскрыв антенны. Для нее в плоскости раскрыва

$$E_z^{(2)} = E_0 |T| |r| |R| e^{-j(\psi + \zeta + \eta) - j k (2x_0 \cos \varphi + y \sin \varphi)}.$$

Описанный процесс повторяется многократно и для n -ой отраженной волны в плоскости раскрыва антенны

$$E_z^{(n)} = E_0 |T| |r^n| |R^n| e^{-j(\psi + n\zeta + n\eta) - j k (2n x_0 \cos \varphi + y \sin \varphi)}. \quad (2)$$

Общее поле в раскрыве является результатом суперпозиции всех полей, составляющие которых образуют убывающую геометрическую прогрессию с множителем $|r| |R| e^{-j(\zeta + \eta) - j k 2x_0 \cos \varphi}$ (здесь $|rR| < 1$). После перехода к сумме прогрессии для общего поля будем иметь

$$E_z^{(\Sigma)} = \frac{E_0 |T| e^{-j\psi - j k y \sin \varphi}}{1 - \rho e^{-j(\zeta + \eta) - j k 2x_0 \cos \varphi}}, \quad (3)$$

где $\rho = |rR|$. Заметим, что при увеличении x_0 выражение (3) переходит в (1), так как $\lim_{x_0 \rightarrow \infty} e^{-j k 2x_0 \cos \varphi} = 0$.

Найдем далее диаграмму направленности антенны с учетом диэлектрического листа.

Известно [1], что энергия, принимаемая с данного направления антенной, в раскрыве которой поле в режиме приема определяется векторами \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 , а в режиме передачи — \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 , может быть определена следующим выражением:

$$P = -C \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} ([\mathbf{E}_1 \mathbf{H}_2] \mathbf{n} - [\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_1] \mathbf{n}) dL.$$

Здесь C — постоянная величина, не влияющая на форму диаграммы направленности, \mathbf{n} — внешняя нормаль к раскрыву антенны.

Пренебрегая дифракцией на краях антенны и учитывая, что $\mathbf{H}_1 = [\mathbf{v} \mathbf{E}_1]$ и $\mathbf{H}_2 = [\mathbf{s} \mathbf{E}_2]$, где \mathbf{v} и \mathbf{s} — единичные вектора, ортогональные соответственно фазовому фронту излучаемого и принимаемого полей (рис. 2), а также имея в виду, что поляризации этих полей одинаковы, нетрудно получить

$$p = C' \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 dL, \quad (4)$$

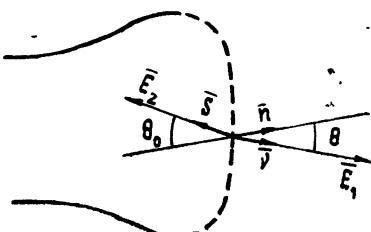


Рис. 2.

где $C' = -C(\cos \theta + \cos \theta_0)^*$. При $L \gg \lambda$ $\cos \theta$ и $\cos \theta_0$ мало влияют на форму диаграммы направленности и поэтому в дальнейшем коэффициент C' можно не учитывать.

Поле в раскрыве антенны при работе на прием — \mathbf{E}_2 в нашем случае определено выражением (3). Если принять амплитудное распределение в раскрыве при работе антенны на передачу постоянным, а фазовое — линейным с углом наклона

γ_0 , т. е. положить, что $\mathbf{E}_1 = 1 e^{\mp iky \sin \gamma_0}$, то из (4) легко получить

$$p = C' \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{E_0 |T| e^{-i[ky(\sin \varphi \mp \sin \gamma_0) + \frac{\pi}{4}]}}{1 - \rho e^{-i(\zeta + \eta) - jk 2x_0 \cos \varphi}} dy.$$

Умножая полученное выражение для p на комплексно сопряженное, найдем соотношение для расчета диаграммы направленности антенны в дальней зоне по мощности с учетом влияния диэлектрического листа. С точностью до постоянного коэффициента это выражение будет следующим:

$$|p|^2 = \frac{E_0^2 |T|^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2 \left[\frac{1}{2} (\zeta + \eta + 2kx_0 \cos \varphi) \right]} \frac{\sin^2 u}{u^2},$$

где $u = (kL/2) (\sin \varphi \mp \sin \gamma_0)$.

Нетрудно видеть, что выражение для $|p|^2$ состоит из двух сомножителей. Один из них представляет собой зависимость вида $\frac{\sin^2 u}{u^2}$ и определяет форму диаграммы направленности антенны без диэлектрического листа. Второй — учитывает влияние диэлектрического листа и эффект взаимодействия его с антенной. Этот сомножитель

$$\frac{|T|^2}{(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2 \left[\frac{1}{2} (\zeta + \eta + 2kx_0 \cos \varphi) \right]} = M \quad (5)$$

можно назвать коэффициентом модуляции диаграммы направленности.

С учетом (5) окончательное выражение для диаграммы направленности антенны с диэлектрическим листом вблизи раскрыва будет следующим:

$$|p|^2 = E_0^2 M \frac{\sin^2 u}{u^2}. \quad (6)$$

* Обозначения углов θ и θ_0 ясны на рис. 2.

2. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, НЕКОТОРЫЕ РАСЧЕТНЫЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Из (5) нетрудно видеть, что коэффициент модуляции M — периодическая функция с периодом $\lambda/2$; абсолютная величина ее изменяется гармонически при изменении x_0 . Экстремумы имеют место при

$$\sin^2 \left[\frac{1}{2} (\zeta + \eta + 2kx_0 \cos \varphi) \right] = 0 \text{ и } \sin^2 \left[\frac{1}{2} (\zeta + \eta + 2kx_0 \cos \varphi) \right] = 1;$$

они равны

$$M_{\max} = \frac{|T|^2}{(1-\rho)^2}, \quad M_{\min} = \frac{|T|^2}{(1+\rho)^2}. \quad (7)$$

Поскольку ρ всегда меньше 1, $M_{\max} > |T|^2$, $M_{\min} < |T|^2$ и только $\lim_{\rho \rightarrow 0} M = |T|^2$. Если положить, что $|T|^2$ близко к единице (случай, часто имеющий место на практике), то условие $M_{\max} \geq 1$, как легко видеть из (7), будет иметь место при выполнении неравенства

$$|r| > \frac{1 - \sqrt{1 - |R|^2}}{|R|}.$$

Это неравенство определяет условие, при котором с помощью диэлектрического листа можно согласовывать antennу со свободным пространством и тем самым увеличивать излучаемую ею мощность. На рис. 3 приведены рассчитанные кривые $M = f(x_0)$ для трех значений $\rho = |rR|$ при $|T|^2 = 0,85$. Из кривых видно, что при $\rho \geq 0,09$ имеют место такие значения x_0 , при которых $M > 1$, и, следовательно, отдаваемая antennой мощность $|p|^2$ при наличии листа больше, чем при его отсутствии.

Рассмотрим далее случаи $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 \neq 0$, отметив предварительно, что поскольку $\cos \varphi$ — четная функция, коэффициент модуляции M (при $x_0 = \text{const}$) — также четная функция относительно φ .

В первом случае, при котором параметр u является лишь функцией φ (см. выражение (6)), изменение коэффициента модуляции M (за счет x_0) приводит только к изменению величины максимума диаграммы направленности antennы, т. е. ее коэффициента усиления G без смещения направления максимального излучения. Коэффициент усиления antennы, таким образом, является функцией $x_0: G = f(x_0)$. Расчетные диаграммы направленности для $\gamma_0 = 0$, $\rho = 0,09$, $|T|^2 = 0,85$ и $\zeta + \eta = 270^\circ$ при разных значениях x_0 и кривая $G = f(x_0)$ приведены на рис. 4.

Во втором случае максимальное излучение осуществляется под углом γ_0 к оси antennы и параметр u — функция углов φ и γ_0 . Коэффициент модуляции, являясь функцией только φ , приводит в этом случае к асимметричнымискажениям диаграммы направленности antennы и, как следствие, к изменению ее пространственной ориентации на угол $\Delta\gamma_0$. Следовательно, при $\gamma_0 \neq 0$ функцией x_0 являются как коэффи-

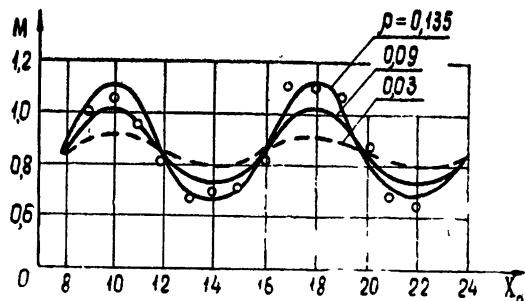


Рис. 3.

циент усиления антенны, так и направление максимального излучения: $G = f(x_0)$ и $\Delta\gamma_0 = f(x_0)$.

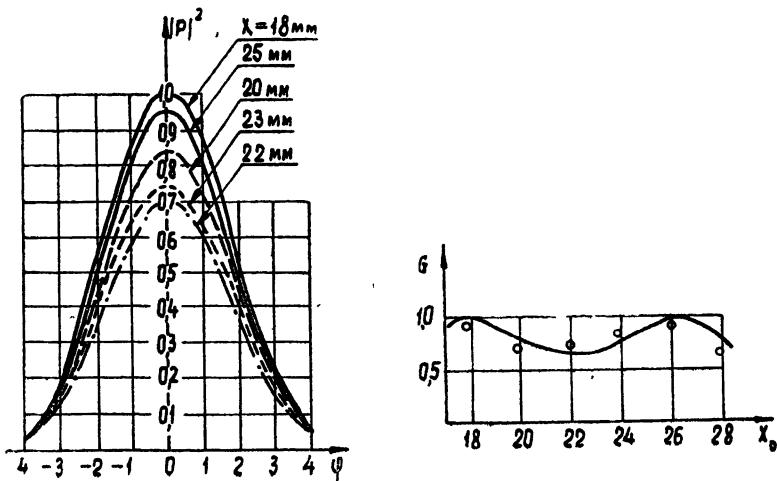


Рис. 4.

На рис. 5 приведены расчетные диаграммы направленности антенны для $\gamma_0 = 30^\circ$, $\rho = 0,135$, $|T|^2 = 0,85$ и $\zeta + \eta = 270^\circ$ при различных значениях x_0 , а также соответствующие кривые $G = f(x_0)$ и $\Delta\gamma_0 = f(x_0)$.

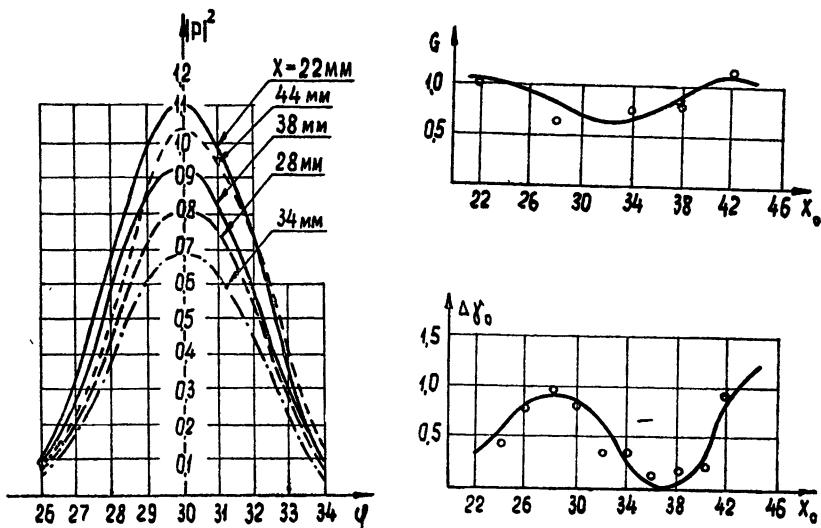


Рис. 5.

При безграничном увеличении расстояния x_0 необходимо учитывать рассеяние энергии, излучаемой антенной. Принимая эффективную поверхность рассеяния антенны A_s , а коэффициент ее усиления при рассеянии G_s , для достаточно большого x_0 нетрудно в первом приближении получить [2] следующее выражение для n -ой отраженной волны в плоскости раскрыва антенны:

$$E_z^{(n)} = E_0 |T| |R^n| \left(\frac{A_s G_s}{4\pi x_0^2} \right)^{1/2} e^{-j(\psi + n\zeta + n\eta)} - jk(2\pi x_0 \cos \varphi + y \sin \varphi).$$

Для общего же поля, являющегося результатом суперпозиции всех n полей в раскрыве антенны, при достаточно большом x_0

$$E_z^{(\Sigma)} = \frac{E_0 |T| e^{-j\psi - jky \sin \varphi}}{1 - \beta e^{-j(\zeta + \gamma) - jk2x_0 \cos \varphi}},$$

где $\beta = (A_s G_s / 4\pi x_0^2)^{1/2} / R$. Отсюда выражение для диаграммы направленности при достаточно большом x_0 будет следующим:

$$|P|^2 = \frac{E_0^2 |T|^2}{(1 - \beta)^2 + 4\beta \sin^2 \left[\frac{1}{2} (\zeta + \gamma + 2kx_0 \cos \varphi) \right]} \frac{\sin^2 u}{u^2} = E_0^2 M' \frac{\sin^2 u}{u^2}.$$

Полученное выражение отличается от (6) коэффициентом модуляции M' , в котором параметр ρ заменен на β . Так как β обратно пропорционально расстоянию x_0 , то эффект воздействия на диаграмму направленности антенны диэлектрического листа (определенный величиной коэффициента M') при большом его удалении от раскрыва быстро убывает.

В заключение отметим, что полученные выше теоретические положения были проверены экспериментально. Результаты измерений достаточно хорошо совпали с расчетами. На рис. 3, 4 и 5 приведены экспериментальные точки соответственно для зависимостей $M = f(x_0)$ при $\rho = 0,135$, $G = f(x_0)$ при $\gamma_0 = 0$ и $\rho = 0,09$ а также для $G = f(x_0)$ и $\Delta\gamma_0 = f(x_0)$ при $\gamma_0 = 30^\circ$ и $\rho = 0,135$.

Хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных говорит о правильности сделанных теоретических предпосылок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Бурштейн, Радиотехника и электроника, 3, 186 (1958).
2. Антенны сантиметровых волн, перевод с англ., изд. Сов. радио, М., 1951.

Поступила в редакцию
13 сентября 1963 г.

TO THE INFLUENCE OF A FLAT DIELECTRIC SHEET ON THE ANTENNA DIRECTIONAL PROPERTIES

V. A. Kaplun, L. M. Timofeev

The influence of a flat dielectric layer of an arbitrary structure (the layer being near the aperture of an antenna) upon the radiation antenna pattern is considered. The field in the antenna aperture is shown to depend on the sheet reflection properties and the aperture and to be function of the distance between them. Expressions have been obtained by which there is a possibility to calculate the pattern of the "antenna—sheet" system. For some definite cases the calculation results have been compared with the experimental data.

УДК 537.533.1

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВОЛН ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА В ПУЧКАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

B. D. Shapiro

Рассматривается нелинейная теория параметрического возбуждения волн плотности заряда в промодулированном по плотности и скорости пучке. Рассмотрение ограничено простейшим случаем бесконечно широкого и однородного по сечению пучка и малой глубины модуляции. Показано, что в нелинейном режиме амплитуда и фаза колебаний становятся периодическими функциями координаты; найдены максимальное и минимальное значения амплитуды и период ее изменения.

В пучках с переменной плотностью и скоростью возможно параметрическое возбуждение волн плотности заряда. При определенных, обычных для параметрического резонанса соотношениях между длиной волны модуляции скорости или плотности пучка L и плазменной длиной волны $\lambda = 2\pi V_{00}/\omega_0$:

$$2L = n\lambda \quad (n = 1, 2, \dots),$$

амплитуда волны в линейной теории экспоненциально нарастает вдоль пучка [1]. В настоящее время явление параметрического возбуждения широко используется в радиотехнике; однако теория этого явления до сих пор фактически ограничена линейным по амплитуде волны приближением. Как обычно, линейная теория позволяет определить условия возникновения неустойчивости и коэффициенты нарастания на начальной стадии, но не дает возможности выяснить характер решения при больших амплитудах и найти максимальные амплитуды колебаний. В настоящей работе рассматривается нелинейная теория параметрического возбуждения в модулированном пучке для простейшего случая бесконечно широкого и однородного по сечению пучка и малой глубины модуляции. При этом, в отличие от [5], рассмотрение не ограничено требованием малой нелинейности и условием стационарности амплитуды и фазы.

Исходная система уравнений задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{e}{m} E; \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(NV) &= 0; \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= -4\pi e(N - N_+). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь N , V — плотность и скорость электронов пучка, N_+ — плотность ионного фона. В стационарном состоянии N и V определяются соотношениями

$$N_0 = N_{00}[1 - \varepsilon \cos(kz)]; \quad V_0 = \frac{V_{00}}{1 - \varepsilon \cos(kz)}, \quad (2)$$

где $\varepsilon \ll 1$ (для определенности будем считать, что $\varepsilon > 0$). Ток частиц NV в стационарном состоянии сохраняется вдоль пучка: $\frac{\partial}{\partial z} (N_0 V_0) = 0$, а наличие у электронов пучка переменной скорости приводит к возникновению стационарного электрического поля

$$\begin{aligned} E_0(z) = -4\pi e \left(\int_0^z N_0 dz - \int_0^z N_+ dz \right) = -\frac{m}{2e} \frac{\partial}{\partial z} V_0^2 = \\ = \varepsilon k \frac{m V_{00}^2}{e} \frac{\sin(kz)}{[1 - \varepsilon \cos(kz)]^3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим следующую граничную задачу. Пусть при $z = 0$ на стационарные значения скорости и тока частиц пучка накладываются зависящие от времени возмущения

$$\begin{aligned} j|_{z=0} = N_{00}[V_{00} - g'(t)]; \\ V|_{z=0} = \frac{V_{00}}{1 - \varepsilon} + \omega_0 s(t) \quad (\omega_0^2 = 4\pi e^2 N_{00}/m). \end{aligned} \quad (4)$$

В результате в пучке возникнут колебания плотности заряда. Наша задача состоит в том, чтобы исследовать характер распространения этих колебаний вдоль пучка, не предполагая малости их амплитуды и не линеаризуя на этом основании исходных уравнений.

При исследовании нелинейных колебаний в пучке с переменными параметрами удобно провести замену независимых переменных. От обычных переменных t и z мы перейдем к переменным t и ψ , где $\psi(t, z)$ определяется из уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{N}{N_{00}}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{NV}{N_{00}}, \quad (5)$$

где $\psi(t, z)$ — «потоковая» функция, которая сохраняется вдоль траектории частицы:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + V \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

Введение $\psi(t, z)$ в качестве независимой переменной с успехом применялось при решении некоторых задач газодинамики [6]. К задаче нелинейных ленгмюровских колебаний в однокомпонентной плазме это преобразование впервые применил Кальман [7].

При выполнении (5) уравнение непрерывности удовлетворяется автоматически, а уравнение Пуассона легко интегрируется и приводит к следующему соотношению для электрического поля:

$$E = -4\pi e(N_{00}\psi - \int_0^z N_+ dz) + G(t).$$

Для определения $G(t)$ воспользуемся тем, что в стационарном состоянии, когда колебания отсутствуют,

$$E = E_0(z) = -4\pi e \left[\int_0^z N_0 dz - \int_0^z N_+ dz \right]$$

(предполагается, что внешнее электрическое поле равно 0), а

$$\psi = \frac{1}{N_{00}} \int_0^z N_0 dz - V_{00}t.$$

Поэтому для $E(t, \psi)$ имеем

$$E = E_0(z) - 4\pi e N_{00} \left(\psi - \frac{1}{N_{00}} \int_0^z N_0 dz + V_{00}t \right). \quad (6)$$

Учитывая, что $d\psi/dt = 0$, имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_\psi + \frac{\partial V}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_\psi = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)_\psi.$$

Поэтому в переменных t и ψ уравнение движения запишется так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{4\pi e^2}{m} \int_0^z N_0 dz = \omega_0^2 (\psi + V_{00}t) - \frac{e}{m} E_0(z). \quad (7)$$

Подставив в это уравнение $N_0(z)$ из (2) и $E_0(z)$ из (3), придем к следующему уравнению для $z(t, \psi)$ — смещения электронов пучка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \omega_0^2 \left[z - \frac{\varepsilon}{k} \sin(kz) \right] + \varepsilon k V_{00}^2 \frac{\sin(kz)}{[1 - \varepsilon \cos(kz)]^3} = \omega_0^2 (\psi + V_{00}t). \quad (7a)$$

Представим $z(t, \psi)$ в виде $z = z_0(t, \psi) + \delta z(t, \psi)$, где смещение в стационарном состоянии $z_0(t, \psi)$ определяется из соотношения

$$z_0 - \frac{\varepsilon}{k} \sin(kz_0) = \psi + V_{00}t. \quad (8)$$

Воспользовавшись малостью ε , для z_0 имеем приближенно

$$z_0(t, \psi) = \psi + V_{00}t + \frac{\varepsilon}{k} \sin[k(\psi + V_{00}t)] + \dots \quad (8a)$$

С помощью (3) и (8) нетрудно также показать, что $z_0(t, \psi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial t^2} = -\frac{e}{m} E_0(z_0) = -\varepsilon k V_{00}^2 \frac{\sin(kz_0)}{[1 - \varepsilon \cos(kz_0)]^3}.$$

В уравнение (7) удобно ввести переменные ζ, ψ , где $\zeta = \psi + V_{00}t$. Подставляя $z_0(t, \psi)$ из (8а) и ограничиваясь членами, линейными по ε , получим следующее уравнение для смещения $\delta z(t, \psi)$, обусловленного колебаниями:

$$\frac{\partial^2 \delta z}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega_0^2}{V_{00}^2} \delta z = \varepsilon \frac{\omega_0^2}{k V_{00}^2} \left(1 - \frac{k^2 V_{00}^2}{\omega_0^2} \right) \{ \sin[k(\zeta + \delta z)] - \sin(k\zeta) \}. \quad (9)$$

При линеаризации по δz (9) переходит в уравнение Маттье, зоны неустойчивости которого имеют вид

$$\frac{n}{2} k \simeq \frac{\omega_0}{V_{00}}.$$

(В линейном по ε приближении неустойчивость существует только при $n = 1$.)

При произвольных δz (9) — уравнение осциллятора с нелинейным членом, пропорциональным малому параметру и зависящим от переменной ζ . Решение такого типа уравнений получено в [8]. Мы для простоты ограничимся рассмотрением первой неустойчивой зоны, т. е. положим $k/2 \simeq \omega_0/V_{00}^*$. В этом случае, согласно [8], решение уравнения (9) имеет вид

$$\delta z = a(\zeta, \psi) \cos \left[\frac{k\zeta}{2} + \theta(\zeta, \psi) \right] + u_1(a, \theta, \zeta) + \dots \quad (10)$$

Здесь u_1 — осциллирующая по ζ функция, пропорциональная малому параметру ϵ .

Явный вид u_1 для дальнейшего несущественен, так как при малых ϵ влияние u_1 сводится лишь к незначительному искажению основного в решении гармонического члена с медленно меняющимися по ζ амплитудой и фазой. Изменение с ζ амплитуды a и фазы θ решения находится из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\zeta} = & -\frac{3\epsilon}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2in\theta} \int_0^{2\pi} d(k\zeta) e^{in\zeta k} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi e^{-2in\varphi} \{ \sin[k\zeta] - \\ & - \sin[k(\zeta + a \cos \varphi)] \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\zeta} = & \frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2} - \frac{3\epsilon}{8\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2in\theta} \int_0^{2\pi} d(k\zeta) e^{in\zeta k} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi e^{-2in\varphi} \times \\ & \times \{ \sin[k\zeta] - \sin[k(\zeta + a \cos \varphi)] \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользовавшись известным разложением

$$e^{ika \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi + \frac{\pi}{2})} J_n(ka)$$

и вычисляя интегралы, входящие в (11), получим следующую систему уравнений для $a(\zeta, \psi)$, $\theta(\zeta, \psi)$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\zeta} = & \frac{3\epsilon}{4} \sin(2\theta) [J_1(ka) + J_3(ka)]; \\ \frac{d\theta}{d\zeta} = & \frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2} + \frac{3\epsilon}{4a} \cos(2\theta) [J_1(ka) - J_3(ka)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $a(0, \psi)$, $\theta(0, \psi)$ определяются из граничных условий (4). Для ψ при $z=0$ имеем из (4), (5):

$$\psi = -V_{00}t + g(t). \quad (13)$$

Откуда с учетом малости амплитуды колебаний при $z=0$ получим приближенно: $t \simeq -\psi/V_{00}|_{z=0}$, т. е. при $z=0$ $\zeta=0$. Подставляя (13) в (6) и заменяя t в аргументе функции g на $-\psi/V_{00}$, находим при $z=0$

$$E = -4\pi e N_{00} g \left(-\frac{\psi}{V_{00}} \right). \quad (14)$$

* Для нелинейного осциллятора (9) условие возникновения параметрических резонансов имеет вид $nk \simeq m\omega_0/V_{00}$, где m и n — целые числа. Однако резонансы при $n \neq 1$ возможны только в нелинейном приближении по ϵ , а при $m \neq 2$ — только в нелинейном приближении по амплитуде.

Аналогичным образом для V при $z = 0$ имеем из (4)

$$V = \frac{V_{00}}{1 - \varepsilon} + \omega_0 s \left(-\frac{\psi}{V_{00}} \right). \quad (14a)$$

С другой стороны, пренебрегая малыми членами, пропорциональными ε , и учитывая (10), получим при $\zeta = 0$

$$\begin{aligned} E &= 4\pi e N_{00} \delta z = 4\pi e N_{00} a(0, \psi) \cos \theta(0, \psi); \\ V &= \frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{\partial \delta z}{\partial t} = \frac{V_{00}}{1 - \varepsilon} - \omega_0 a(0, \psi) \sin \theta(0, \psi). \end{aligned} \quad (14b)$$

Сравнивая (14) и (14a) с (14б), придем к уравнениям, определяющим $a(0, \psi)$, $\theta(0, \psi)$:

$$a^2(0, \psi) = s^2(-\psi/V_{00}) + g^2(-\psi/V_{00}); \quad (15)$$

$$\theta(0, \psi) = \operatorname{arctg} \frac{s(-\psi/V_{00})}{g(-\psi/V_{00})}.$$

Рассматриваемая задача сводится, таким образом, к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (12) с граничными условиями (15).

При $ka \ll 1$ (12) упрощается и переходит в следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\zeta} &= \frac{3\varepsilon}{8} ka \sin(2\theta); \\ \frac{d\theta}{d\zeta} &= \frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2} + \frac{3\varepsilon}{8} k \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (16)$$

Чтобы решить систему уравнений (16), сделаем замену переменных: $u = a \cos \theta$, $v = a \sin \theta$. Тогда для u и v получим систему уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\zeta} &= \left(\frac{3\varepsilon}{8} k - \frac{\omega_0}{V_{00}} + \frac{k}{2} \right) v; \\ \frac{dv}{d\zeta} &= \left(\frac{3\varepsilon}{8} k + \frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2} \right) u, \end{aligned} \quad (17)$$

решение которой имеет вид

$$u = C_1 e^{\lambda \zeta} + C_2 e^{-\lambda \zeta};$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{3\varepsilon}{8} k + \frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2} \right) \left(\frac{3\varepsilon}{8} k - \frac{\omega_0}{V_{00}} + \frac{k}{2} \right)^{-1}} (C_1 e^{\lambda \zeta} - C_2 e^{-\lambda \zeta}); \quad (17a)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{9\varepsilon^2}{64} k^2 - \left(\frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2} \right)^2}.$$

Отсюда для $\delta z = u \cos(k\zeta/2) - v \sin(k\zeta/2)$ получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} \delta z = C_1 & \left(\cos y + \sqrt{\frac{c_1 + c_0 - 1}{c_1 - c_0 + 1}} \sin y \right) [1 + O(\epsilon)] e^{\mu y} + \\ & + C_2 \left(\cos y - \sqrt{\frac{c_1 + c_0 - 1}{c_1 - c_0 + 1}} \sin y \right) [1 + O(\epsilon)] e^{-\mu y}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь введены обозначения

$$y = \frac{k\zeta}{2}; \quad \mu = \frac{2\lambda}{k} = \frac{c_1}{2} \sqrt{1 - \frac{(c_0 - 1)^2}{c_1^2}};$$

$$c_1 \approx \frac{3\epsilon}{2}; \quad c_0 = \frac{4\omega_0^2}{k^2 V_{00}^2};$$

C_1 и C_2 определяются через s и g с помощью граничных условий:

$$\begin{aligned} C_1 = - & \frac{g\left(-\frac{\psi}{V_{00}}\right) - s\left(-\frac{\psi}{V_{00}}\right) V(c_1 - c_0 + 1)(c_1 + c_0 - 1)^{-1}}{2}; \\ C_2 = - & \frac{g\left(-\frac{\psi}{V_{00}}\right) + s\left(-\frac{\psi}{V_{00}}\right) V(c_1 - c_0 + 1)(c_1 + c_0 - 1)^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Имея формулу (18) для смещения электронов, обусловленного колебаниями — $\delta z(t, \psi)$, можно также найти плотность и скорость электронов с помощью соотношений

$$V = \frac{\partial \delta z}{\partial t} + V_0; \quad N = \frac{N_{00}}{\partial z_0 / \partial \psi + \partial \delta z / \partial \psi}.$$

При отыскании формул перехода от переменных t, ψ к переменным t и z следует иметь в виду, что в линейном приближении в формулах (5) для $\psi(t, z)$ можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными амплитуде колебаний. Пренебрегая также членами, пропорциональными ϵ , получим следующие простые формулы перехода:

$$\zeta = z; \quad \psi = z - V_{00}t. \quad (19)$$

В том случае, когда $s(t), g(t) \sim e^{i\omega t}$, наше решение совпадает с найденным Блиохом и Файнбергом [4], если в последнем положить $v_T = 0$ *. Это обстоятельство тем более существенно, что в последнее время высказывались сомнения в обоснованности метода решения задачи, примененного в [4] (см. [9]). Мы использовали в настоящей работе принципиально иной метод решения, в частности, не предполагали заранее периодической зависимости решения от времени (в виде $e^{i\omega t}$), но получили решение, совпадающее с найденным в [4].

Условие возникновения неустойчивости в рассматриваемом случае, как следует из (18), имеет вид

$$|c_0 - 1| \leq c_1, \quad \text{т. е. } \left| \frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2} \right| \leq \frac{3\epsilon}{8} k. \quad (19a)$$

* При сравнении следует иметь в виду, что в окончательных формулах работы [4] имеется неточность. В действительности из правильного уравнения (9а) в случае, когда $V_0(z)$ определяется формулой (16), следует уравнение Матье (17), но с $c_0 = 4\omega_0^2/k^2 V_{00}^2$; $c_1 = 3\epsilon/2$. (Нумерация всех формул в примечании относится к работе [4]) Автор благодарен П. В. Блиоху, указавшему на это обстоятельство.

Фаза при неустойчивости стремится к постоянному значению

$$\theta_\infty = \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{3\epsilon}{8}k + \frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2}\right)\left(\frac{3\epsilon}{8}k - \frac{\omega_0}{V_{00}} + \frac{k}{2}\right)^{-1}},$$

а амплитуда в рамках линейной теории неограниченно возрастает. Однако при $ka \sim 1$ становятся существенными нелинейные эффекты и необходимо решать точную систему (12).

Воспользовавшись известными соотношениями

$$ka(J_1(ka) + J_3(ka)) = 4J_2(ka);$$

$$J_1(ka) - J_3(ka) = \frac{2}{k} \frac{dJ_2(ka)}{da},$$

систему уравнений (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\zeta} &= \frac{3\epsilon}{ka} J_2(ka) \sin(2\theta); \\ \frac{d\theta}{d\zeta} &= \frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2} + \frac{3\epsilon}{2ka} \frac{dJ_2(ka)}{da} \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (20)$$

Вводя для удобства записи обозначения

$$\frac{3\epsilon k \zeta}{2} = \tau; \quad ka = x; \quad \frac{\omega_0}{V_{00}} - \frac{k}{2} = \frac{3\epsilon k}{8} \Delta,$$

получим вместо (20)

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{2J_2(x)}{x} \sin(2\theta); \quad (21)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} - \frac{\Delta}{4} = \frac{1}{x} \frac{dJ_2(x)}{dx} \cos(2\theta)$$

или

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}; \\ x \left(\frac{d\theta}{d\tau} - \frac{\Delta}{4} \right) &= \frac{\partial H}{\partial x}, \end{aligned} \quad (21a)$$

где $H(x, \theta) = J_2(x) \cos(2\theta)$. Домножив первое из уравнений (21a) на $-d\theta/d\tau$, а второе на $dx/d\tau$ и сложив их, получим

$$\frac{d}{d\tau} \left(H(x, \theta) + \frac{\Delta}{8} x^2 \right) = 0.$$

Последнее означает, что система уравнений (21) имеет интеграл

$$H(x, \theta) + \frac{\Delta}{8} x^2 = \text{const} = J_2(x_0) \cos(2\theta_0) + \frac{\Delta}{8} x_0^2, \quad (22)$$

в котором $x_0 = ka_0$, a_0 и θ_0 — значения амплитуды и фазы при $\zeta = 0$, определяемые из (15).

Находя из (22) $\sin(2\theta)$, подставляя результат в первое из уравнений (21) и интегрируя по τ , получим*

* Автор благодарен В. К. Юллатову, предложившему использованный в работе метод решения системы (12) при произвольных ka .

$$\tau = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\Phi(\eta, \eta_0, \xi_0)}}; \\ \Phi(\eta, \eta_0, \xi_0) = 16J_2^2(\sqrt{\eta}) - \left[\frac{\Delta}{2}(\eta - \eta_0) - 4J_2(\sqrt{\eta_0})\xi_0 \right]^2; \\ \eta = x^2; \quad \eta_0 = x_0^2; \quad \xi_0 = \cos 2\theta_0.$$

Определяемая уравнением (23) η является периодической функцией τ и изменяется в пределах от η_{\min} до η_{\max} , где η_{\min} , η_{\max} — два наименьших по величине положительных корня уравнения $\Phi(\eta, \eta_0, \xi_0) = 0$, в интервале между которыми $\Phi > 0$.

Как нетрудно видеть, $\eta_{\min} < \eta_0 \ll 1$, в то время как в зоне неустойчивости, т. е. при $|\Delta| < 1$, η_{\max} велико по сравнению с η_0 и поэтому с большой степенью точности может быть найдено путем решения уравнения**

$$8J_2(\sqrt{\eta_{\max}}) = |\Delta| \eta_{\max}. \quad (24)$$

Изменение a_{\max} при изменении «расстройки» Δ показано на рис. 1. Период функции $\eta(\tau)$ также легко может быть найден из (23):

$$\tau_0 = 2 \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{\max}} \frac{d\eta}{\sqrt{\Phi(\eta, \eta_0, \xi_0)}}.$$

Вблизи границ зоны неустойчивости, когда $\Delta = \pm(1 - \delta)$, $0 < \delta \ll 1$, амплитуда колебаний остается малой при любых ζ , и в (23) можно вместо $J_2(\sqrt{\eta})$ подставить разложение по степеням η , сохранив в нем два первых члена:

$$J_2(\sqrt{\eta}) = \frac{1}{8} \left(\eta - \frac{\eta^2}{12} \right).$$

Пользуясь тем, что $\eta \ll 1$, $\eta_0 \ll 1$, $\delta \ll 1$, и сохраняя только старшие

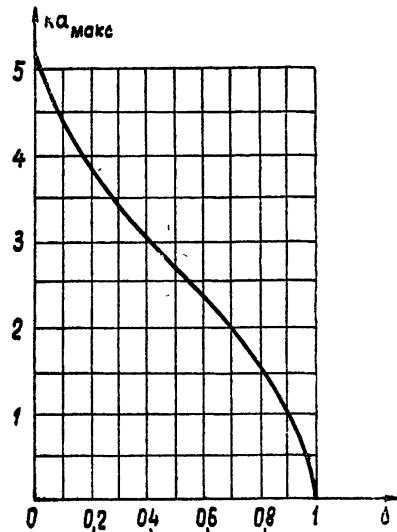


Рис. 1. Зависимость максимальной амплитуды колебаний a_{\max} от «расстройки» Δ .

** При больших амплитудах $a \sim \frac{1}{k}$ может иметь место пересечение траекторий и возникновение многопотокового движения. Границы областей многопотокового движения определяются из условия обращения в 0 производной $\frac{dz}{d\psi}$: при этом обращается в 0 расстояние dz между двумя траекториями с разными значениями ψ . Внутри этих областей $\frac{dz}{d\psi} < 0$ и неприменимо рассмотрение настоящей работы. Воспользовавшись (10), (12) и пренебрегая малыми членами $\sim \epsilon, x_0$, получим следующее уравнение для определения границ областей многопотокового движения $\zeta_B(\psi)$:

$$ka(\zeta_B, \psi) \cos \left[\frac{k}{2} \zeta_B + \theta(\zeta_B, \psi) \right] = 2.$$

члены, получим в рассматриваемом случае вместо (23) следующее уравнение:

$$\frac{\tau}{2\sqrt{6}} = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{12\delta\eta^2 - \eta^3 + 12\eta\eta_0\gamma - 6\eta_0^2\gamma^2}}, \quad (25)$$

$$\gamma = 1 - \delta \pm \xi_0$$

(предполагается, что $\gamma \neq 0$). Уравнение (25) может быть также записано в виде

$$\frac{\tau}{2\sqrt{6}} = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta_3 - \eta)(\eta - \eta_2)(\eta - \eta_1)}}. \quad (25a)$$

Корни η_i можно легко найти, воспользовавшись тем, что $\eta_0 \ll \delta$:

$$\eta_1 = -\frac{\eta_0}{\delta}\gamma; \quad \eta_2 = \frac{\eta_0\gamma}{2}; \quad \eta_3 = 12\delta + \frac{\eta_0\gamma}{\delta}. \quad (26)$$

Интеграл в правой части (25a) вычислен в [10].

В дальнейшем в зависимости от значения γ следует рассмотреть три различных случая.

a) $\gamma > 0$. Тогда $\eta_1 < 0$, $0 < \eta_2 < \eta_0$. В этом случае из (25a) имеем

$$F \left[\arcsin \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_2} \frac{\eta - \eta_2}{\eta - \eta_1}}; \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 - \eta_1}} \right] -$$

$$- F \left[\arcsin \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_2} \frac{\eta_0 - \eta_2}{\eta_0 - \eta_1}}; \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 - \eta_1}} \right] = \frac{\tau \sqrt{\eta_3 - \eta_1}}{4\sqrt{6}}, \quad (27)$$

F — эллиптический интеграл первого рода. Обращая (27), получим для η следующую формулу:

$$\eta = \left\{ \eta_2 - \eta_1 \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 - \eta_1} \operatorname{sn}^2 \left[Z, \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 - \eta_1}} \right] \right\} \left\{ 1 - \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 - \eta_1} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{sn}^2 \left[Z, \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 - \eta_1}} \right] \right\}^{-1}; \quad (28)$$

$\operatorname{sn} \left[Z, \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 - \eta_1}} \right]$ — эллиптический синус,

$$Z = \frac{\epsilon k \zeta}{8} \sqrt{\frac{3(\eta_3 - \eta_1)}{2}} + F \left[\arcsin \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_2}}; \frac{\eta_0 - \eta_2}{\eta_0 - \eta_1}; \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 - \eta_1}} \right]. \quad (29)$$

Последним слагаемым в (29) можно пренебречь для достаточно больших ζ , для которых $\eta \gg \eta_0$.

Воспользовавшись известными свойствами эллиптического синуса (см., например, [11]), получим, что период функции $a(\zeta)$ равен

$$\zeta_0 = \frac{16}{\epsilon k} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{\eta_3 - \eta_1}} K \left(\sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 - \eta_1}} \right) \quad (30)$$

(K — полный эллиптический интеграл первого рода). На одном периоде a вначале возрастает от a_0 до $a_{\max} \approx \frac{1}{k} \sqrt{\eta_3}$ при $\zeta \approx \frac{\zeta_0}{2}$, затем

убывает до $a_{\min} = \frac{1}{k} \sqrt{\eta_2}$ и вновь возрастает до a_0 .

б) $-\delta < \gamma < 0$. Тогда $\eta_2 < 0$, $0 < \eta_1 < \eta_0$. В этом случае для η получим формулу (28) с той лишь разницей, что в (28), так же как и в (29), η_1 и η_2 следует поменять местами. Максимальное и минимальное значения амплитуды при этом равны соответственно

$$a_{\max} = \frac{1}{k} \sqrt{\eta_3}, \quad a_{\min} = \frac{1}{k} \sqrt{\eta_1}.$$

в) $\gamma = 0$. В этом случае формула (25) неприменима, так как в разложении $J_2(\sqrt{\eta_0})$ по степеням η_0 надо учитывать следующие члены. В результате вместо (25) получим

$$\frac{\tau}{2\sqrt{6}} = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{12\delta\eta^2 - \eta^3 + \eta\eta_0^2}}. \quad (31)$$

Это уравнение также может быть приведено к виду (25а), но с

$$\eta_1 = -\eta_0^2/12\delta; \quad \eta_2 = 0; \quad \eta_3 = 12\delta + \eta_0^2/12\delta. \quad (31a)$$

Тогда вместо (27) имеем

$$F\left[\arcsin \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3}} \frac{\eta}{\eta - \eta_1}; \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_3 - \eta_1}}\right] - \\ - F\left[\arcsin \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3}} \frac{\eta_0}{\eta_0 - \eta_1}; \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_3 - \eta_1}}\right] = \frac{\tau\sqrt{\eta_3 - \eta_1}}{4\sqrt{6}}.$$

Отсюда для η получим следующую формулу:

$$\eta = -\frac{\eta_1\eta_3 \operatorname{sn}^2 [\bar{Z}, \sqrt{\eta_3(\eta_3 - \eta_1)^{-1}}]}{\eta_3 \{1 - \operatorname{sn}^2 [\bar{Z}, \sqrt{\eta_3(\eta_3 - \eta_1)^{-1}}]\} - \eta_1}, \quad (32)$$

где

$$\bar{Z} = \frac{\varepsilon k \zeta}{8} \sqrt{\frac{3}{2} (\eta_3 - \eta_1)} + F\left[\arcsin \sqrt{\frac{\eta_3 - \eta_1}{\eta_3}} \frac{\eta_0}{\eta_0 - \eta_1}; \sqrt{\frac{\eta_3}{\eta_3 - \eta_1}}\right]. \quad (32a)$$

Величина a_{\max} в рассматриваемом случае по-прежнему равна $\frac{1}{k} \sqrt{\eta_3}$,

a_{\min} равна 0, период $a(\zeta)$

$$\zeta_0 = \frac{16}{\varepsilon k} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1}{\eta_3 - \eta_1}} K\left(\frac{\eta_3}{\eta_3 - \eta_1}\right).$$

Переход от переменных ζ, ϕ к исходным z и t в рассматриваемом случае малых амплитуд колебаний $k a \ll 1$ производится с помощью формул (19).

Таким образом, в исходных переменных t и z $\eta = k^2 a^2$ определяется формулами (28), (32), где Z находится из (29), либо из (32а) с заменой ζ на z , η_1 — из соотношений (26), (31а). В формулах (26), (31а) ξ_0 и η_0 определяются через s и g , входящие в граничные условия (4), с помощью соотношений (15).

$$\xi_0 = \left[g^2 \left(t - \frac{z}{V_{00}} \right) - s^2 \left(t - \frac{z}{V_{00}} \right) \right] \left[g^2 \left(t - \frac{z}{V_{00}} \right) + s^2 \left(t - \frac{z}{V_{00}} \right) \right]^{-1}; \\ (33)$$

$$\eta_0 = k^2 \left[g^2 \left(t - \frac{z}{V_{00}} \right) + s^2 \left(t - \frac{z}{V_{00}} \right) \right].$$

Изменение фазы колебаний θ с изменением ζ находится из (22), куда необходимо подставить $\eta = x^2$, определяемое соотношениями (28), (32).

В заключение следует отметить преимущества, которые дает использованный в настоящей работе прием введения «потоковой» функции ψ в качестве независимой переменной при исследовании параметрического возбуждения в пучках. В этом случае в основное уравнение задачи — уравнение нелинейного осциллятора (9) — входят только производные по ζ ; ψ входит в решение через граничные условия. Это позволяет применить при решении (9) известные из нелинейной теории колебаний методы, развитые Ван-Дер-Полем, Крыловым и Боголюбовым. В то же время при рассмотрении задачи в переменных t и z (такой подход использован в [5]) вместо (9) получается нелинейное уравнение в частных производных. Ввиду отсутствия разработанных методов решения таких уравнений, решение в [5] получено при дополнительных условиях стационарности амплитуды и фазы: $d\alpha/dt = d\theta/dt = 0$, которые, вообще говоря, не выполняются (см. (28), (32)). Кроме того, в переменных t и z исходное нелинейное уравнение настолько сложно, что его решение в [5] удалось получить, предполагая, кроме малости ϵ , малость амплитуды $ka \ll 1$. Последнее условие не выполняется при удалении от границы зоны неустойчивости $\delta \sim 1$.

Автор благодарен Я. Б. Файнбергу за ценные советы при выполнении работы, П. В. Блиоху, В. И. Шевченко за обсуждение ее результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. E. H. Rydbeck, B. Agdug, L'onde Electrique, **34**, 499 (1954).
2. R. W. Peter, S. Bloom, RCA Rev., **15**, 113 (1954).
3. Я. Б. Файнберг, Уч. зап. ХГУ, **6**, 31 (1955).
4. П. В. Блиох, Я. Б. Файнберг, ЖТФ, **26**, 530 (1956).
5. П. В. Блиох, Диссертация, ХГУ, 1958.
6. R. Courant, K. O. Friedrichs, Supersonic Flow and Shock Waves, New York, 1948.
7. G. Kalman, Ann. of Phys., **10**, 1 (1960).
8. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, М., 1958, стр. 170.
9. Г. Ф. Филимонов, Радиотехника и электроника, **6**, 593 (1961).
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений, Физматгиз, М., 1962, стр. 233
11. Higher transcendental functions, ed. Bateman, New York, 1953.

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
27 ноября 1963 г.

TO THE NONLINEAR THEORY OF CHARGE DENSITY WAVES IN BEAMS
WITH VARIABLE PARAMETERS

V. D. Shapiro

The nonlinear theory is considered of parametric excitation of charge density waves in the density and velocity modulated beam. The consideration is restricted by the simplest case of an infinitely wide and homogeneous beam with small modulation index. The oscillation amplitude and phase are shown to become periodical functions of the coordinate. The period of the amplitude oscillations as well as its minimum and maximum have been found out.

УДК 621.385.623.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРАЖАТЕЛЬНОГО КЛИСТРОНА ПРИ НАЛИЧИИ ТОКА ОТРАЖАТЕЛЯ

Л. А. Белов

В кинематическом приближении рассмотрен режим работы отражательного клаистрона с током отражателя. Исследован механизм группировки электронов по плотности в плоскости отражателя и при возвращении к зазору. Изучена форма импульсов тока отражателя и резонатора; получены выражения для гармоник этих токов. Рассмотрены особенности работы автогенератора на клаистроне, связанные с появлением тока отражателя.

Отражательный клаистрон находит широкое применение в радиотехнике. Его удобно использовать как автогенератор колебаний СВЧ небольшой мощности с электронной настройкой. Отражательный клаистрон в недовозбужденном режиме может работать как регенерированный усилитель СВЧ [1]. Отражательный клаистрон успешно используют в качестве простого умножителя частоты высокой кратности [2]. При этом колебания умножаемой частоты подаются между отражателем и резонатором клаистрона, а умноженные колебания выводятся из резонатора. Наконец, отражательный клаистрон применяют в качестве амплитудного детектора и измерителя мощности [3,4], используя то обстоятельство, что постоянная составляющая тока отражателя зависит от амплитуды СВЧ напряжения в резонаторе.

Для понимания особенностей работы названных устройств необходимо исследование режима работы отражательного клаистрона с током отражателя. В одних схемах (амплитудное детектирование) ток отражателя в принципе используется, в других рост тока отражателя ставит предел увеличению полезного эффекта. В литературе, однако, отсутствует исследование режима клаистрона с током отражателя. Лишь в [5] обсуждалось влияние тока отражателя на ток резонатора и вычислена постоянная составляющая последнего в этом случае.

В настоящей статье анализируется работа отражательного клаистрона с током отражателя. Исследование проводится для обычной схемы отражательного клаистрона. Полученные результаты в дальнейшем можно будет использовать в исследовании устройств, где высокочастотное напряжение подается на отражатель.

Рассмотрение проводится в одномерном кинематическом приближении в следующих предположениях: 1) разброс скоростей электронов отсутствует; 2) электроды плоские, а траектории электронов нормальны к плоскости электродов; 3) влияние пространственного заряда несущественно; 4) вторичная эмиссия электродов отсутствует. Такая элементарная кинематическая теория весьма наглядна и дает вместе с тем достаточно хорошее качественное представление о процессах в отражательном клаистроне.

1. ВРЕМЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ОТРАЖАТЕЛЬНОМ КЛИСТРОНЕ

Пусть на отражателе и катоде клистрона приложены (относительно резонатора) ускоряющее (E_p) и тормозящее (E_A) напряжения, а между сетками резонатора действует напряжение $u = U \sin(\omega t)$. Для электрона с зарядом e и массой m , находящегося между отражателем и резонатором на расстоянии x от сеток, можно составить следующее уравнение движения:

$$\frac{2mL\omega^2x}{eE_A} - \tau_0 \sqrt{1 + \xi \sin \tau_1} (\tau - \tau_1) + (\tau - \tau_1)^2 = 0; \quad (1)$$

здесь $\omega t = \tau$ — безразмерное время, τ_1 — момент первого пролета электронами зазора, $\tau_0 = 2\omega \sqrt{(2m/e)E_p (E_A/L)}$ — невозмущенный угол пролета, L — расстояние между сетками резонатора и отражателем, $\xi = U/E_p$.

Электроны, двигающиеся по закону (1), могут либо попадать на отражатель в момент τ_a , либо возвращаться к зазору резонатора в момент τ_b . Связь между моментом вылета электрона из сеток τ_1 и моментом оседания его на отражателе τ_a получим из (1), используя то обстоятельство, что $x = L$ при $\tau = \tau_a$:

$$\tau_a = \tau_1 + \frac{\tau_0}{2} \sqrt{1 + \xi \sin \tau_1} \pm \frac{\tau_0}{2} \sqrt{1 + \xi \sin \tau_1 - 8mL^2\omega^2/eE_A \tau_0^2}.$$

Если $\xi \ll 1$, то выражение упрощается:

$$\tau_a = \tau_1 + \tau_0/2 + (\tau_0\xi/4) \sin \tau_1 \pm (\tau_0/2) \sqrt{\gamma + \xi \sin \tau_1}, \quad (2)$$

где

$$\gamma = 1 - \frac{E_A}{E_p} = 1 - \frac{8mL^2\omega^2}{eE_A \tau_0^2}$$

— коэффициент торможения. Этот коэффициент характеризует степень близости траектории невозмущенного электрона к отражателю.

При $\gamma = 0$ точка максимального удаления электрона находится в плоскости отражателя. При этом тормозящее напряжение E_A , равно ускоряющему напряжению E_p , и электрон с нулевой начальной скоростью у катода, пролетающий зазор в момент нулевого напряжения между сетками, имеет также нулевую скорость у отражателя. При $\gamma < 0$ такой электрон, тормозясь, поворачивает к резонатору, не достигнув отражателя. Поскольку в зазоре электроны испытывают модуляцию по скорости, то при $\gamma < 0$ часть ускорившихся электронов попадает на отражатель, а большая часть их возвращается в зазор.

Двойной знак перед радикалом в (2) показывает, что электроны, двигающиеся по закону (1), могут дважды пересекать плоскость $x = L$. Физический смысл, разумеется, имеет лишь знак минус, соответствующий моменту оседания электронов на отражателе.

Из (1) получим также соотношение для связи момента вылета τ_1 электронов и момента возвращения их к зазору τ_2 , используя то, что при $\tau = \tau_2$ координата $x = 0$:

$$\tau_2 = \tau_1 + \tau_0 + (\tau_0\xi/2) \sin \tau_1. \quad (3)$$

Вводя $\theta = \arccos(-\gamma/\xi)$ — угол отсечки тока отражателя, убеждаемся, что (2) справедливо в области $(\pi/2 - \theta) \leq \tau_1 \leq (\pi/2 + \theta)$, поскольку при этом выражение под радикалом неотрицательно. Выражение (3) справедливо в интервале $(\pi/2 + \theta) < \tau_1 < (2\pi + \pi/2 - \theta)$.

Рассмотрим подробнее временные соотношения, определяемые

выражениями (2) и (3). На рис. 1 построены фазовые диаграммы движения электронов в соответствии с этими уравнениями. Здесь обозначено: $r = \xi \tau_0 / 2$ — параметр группировки, $r_{\text{гр}} = -\gamma \tau_0 / 2$ — граничное значение параметра группировки, при превышении которого часть электронов поступает на отражатель в соответствии с (3).

Особенность диаграмм тока отражателя (рис. 1-а) состоит в том, что электроны поступают на отражатель в течение отрезка времени $a\delta$ (кривая 1), большего, чем интервал их вылета 2θ . Кроме того, в потоке поступающих на отражатель электронов имеется участок фокусировки, так что электроны, вылетевшие в моменты времени от $\tau_{1\phi} - \Delta\tau$ до $\tau_{1\phi} + \Delta\tau$ (кривая 2), поступают на отражатель одновременно (в момент τ_a).

Для пояснения этого обстоятельства воспользуемся пространственно-временной диаграммой движения электронов между отражателем и резонатором (рис. 2). Из этой диаграммы видно, что хотя электроны вылетают из сеток равномерно, но на отражатель поступают они резко неравномерно и большая часть этих электронов фокусируется в начале импульса тока отражателя. Обгон одних электронов другими, как видно из рис. 2, связан с тем, что они замедляют свое движение к отражателю по мере приближения к точке поворота. А так как напряжение в зазоре возрастает, то электрон, вылетающий позже, не успеет потерять свою скорость к тому моменту, когда вылетевшая раньше частица затормозится. Как видно из рис. 1, такое увеличение интервала пролета, как и явление

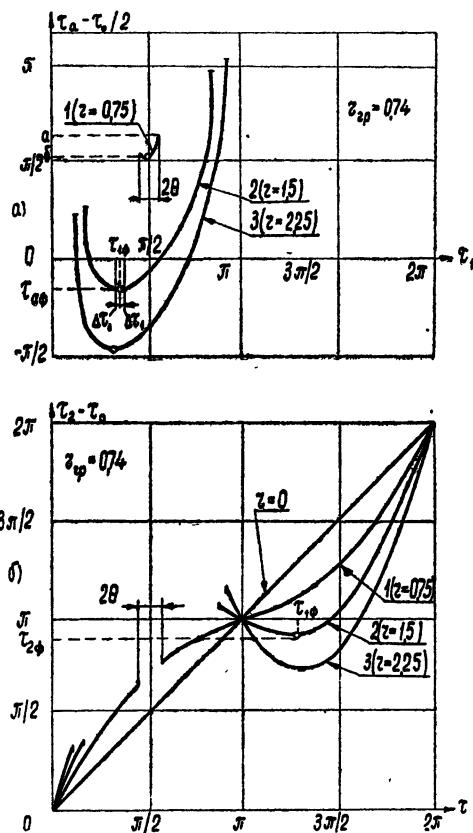


Рис. 1. Фазовые диаграммы движения электронов.

фокусировки, имеет место даже при малых r и θ (кривая 1). Попадание части электронов на отражатель оказывается на графиках рис. 1б

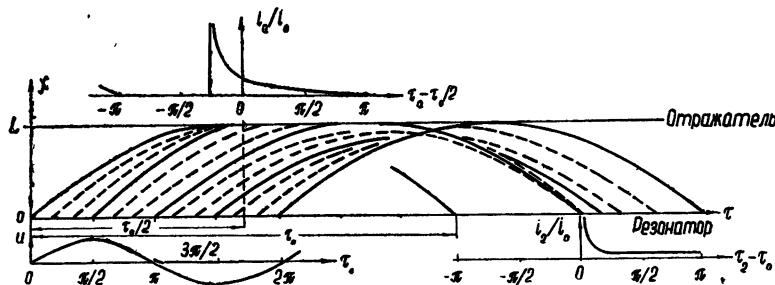


Рис. 2 Пространственно-временная диаграмма движения электронов.

фокусировки, имеет место даже при малых r и θ (кривая 1). Попадание части электронов на отражатель оказывается на графиках рис. 1б

с $r > r_{rp}$ в том, что для значений угла вылета от $\pi/2 - \theta$ до $\pi/2 + \theta$ зависимость τ_2 от τ_1 теряет смысл, так как электроны к зазору не возвращаются. Однако, если фазовая фокусировка в токе резонатора имела место ($r > 1$) без тока отражателя, то с появлением этого тока участок фокусировки, соответствующий экстремумам кривых 2 и 3 рис. 1б, сохраняется.

2. ИМПУЛЬСЫ ТОКА ОТРАЖАТЕЛЯ И РЕЗОНАТОРА В РЕЖИМЕ С ОТСЕЧКОЙ

Чтобы найти выражение для импульсов тока отражателя и резонатора, воспользуемся соотношениями непрерывности заряда. В режиме с отсечкой для тока резонатора $i_2(\tau_2)$ справедливо равенство $i_0 d\tau_1 = i_2 d\tau_2$, при τ_1 , удовлетворяющих соотношению

$$r_{rp} + r \sin \tau_1 \leqslant 0, \quad (4)$$

а для тока отражателя $i_a(\tau_a)$ равенство $i_0 d\tau_1 = i_a d\tau_a$ при τ_1 , удовлетворяющих соотношению

$$r_{rp} + r \sin \tau_1 \geqslant 0. \quad (5)$$

Используя (2) — (5), получим выражение для токов i_2 и i_a :

$$i_2 = \frac{i_0}{d\tau_2/d\tau_1} = \frac{i_0}{1+r \cos \tau_1} \quad (\pi/2 + \theta \leqslant \tau_1 \leqslant 5\pi/2 - \theta); \quad (6)$$

$$i_a = \frac{i_0}{d\tau_a/d\tau_1} = \frac{i_0}{1+(r/2) \cos \tau_1 - r \cos \tau_1 / 2\sqrt{1+\xi \sin \tau_1}} \quad (\pi/2 - \theta < \tau_1 < \pi/2 + \theta). \quad (7)$$

На рис. 3 приведены построенные по формулам (4) и (6) импульсы тока резонатора при различных углах отсечки θ . Из этого рисунка вид-

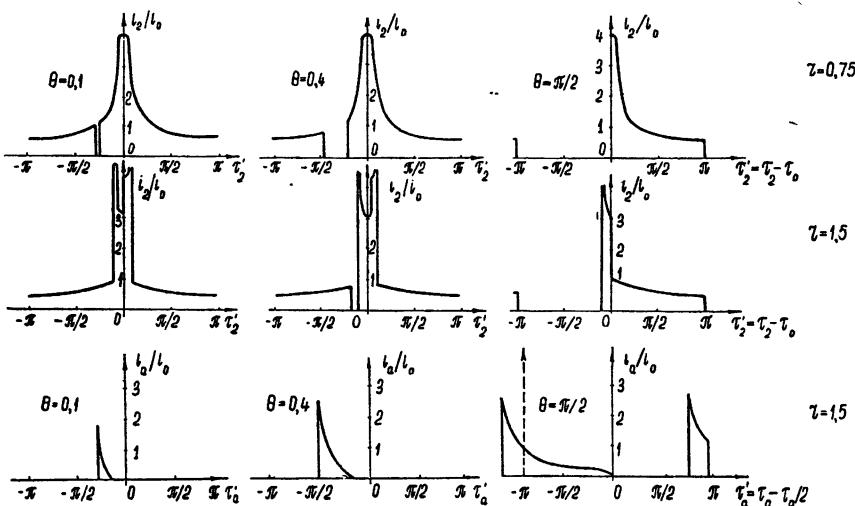


Рис. 3. Импульсы тока резонатора и отражателя.

но, что появление тока отражателя приводит к значительному искажению формы импульсов наведенного тока в резонаторе, которые становятся резко несимметричными.

На рис. 3б приведены также импульсы тока отражателя, построенные по формулам (5) и (7). Поскольку фазовые диаграммы рис. 1б

похожи при различных r и θ , то форма импульсов мало меняется при различных значениях параметров. Из (7) можно видеть, что даже при малом r выражение в знаменателе обращается в нуль при некотором τ_1 . Это соответствует фазовой фокусировке электронов и выражается в том, что импульс тока неограниченно возрастает, а фазовая диаграмма рис. 1а имеет минимум.

Из анализа процесса группировки электронов в кластроне с током отражателя можно заключить, что в отражательном кластроне имеют место два механизма преобразования скоростной модуляции электронов в модуляцию плотности тока. Первый механизм, проявляющийся в токе возвращающихся к зазору электронов, хорошо известен: он связан с большим временем пролета электронов. Точно так же группируются электроны в пролетном кластроне. Второй механизм проявляется в токе отражателя и связан с тем, что электроны движутся к отражателю с замедлением. Этот второй механизм оказывается более эффективным в том смысле, что для появления фазовой фокусировки в токе отражателя не требуются большие значения параметра группировки. (Для фокусировки в токе резонатора нужно, чтобы $r > 1$.)

Следует отметить также, что при большой отсечке тока ($\theta \rightarrow \pi/2$) импульсы при различных параметрах группировки мало отличаются друг от друга.

3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОКА РЕЗОНАТОРА

Конвекционный ток резонатора $i_2(\tau_2)$ можно представить в виде ряда Фурье в комплексной форме:

$$i_2(\tau'_2) = I_0 + \sum_{p=1}^{\infty} I_p e^{ip\tau'_2}, \quad (8)$$

где $I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_2 d\tau'_2$ — постоянная составляющая, $I_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i_2 e^{-ip\tau'_2} d\tau'_2$ —

— p -я гармоника тока резонатора, $\tau'_2 = \tau_2 - \tau_0$ — текущее время для возвращающихся электронов. Поскольку напряжение в зазоре было принято в виде $u = U \sin(\omega t) = \operatorname{Re}[U e^{i(\tau_1 - \pi/2)}]$, то сдвиг фазы p -й гармоники тока относительно напряжения равен $-p(\tau_0 - \pi/2)$, т. е.

$$i_2 = I_0 + \sum_{p=1}^{\infty} I_p e^{-ip(\tau_0 - \pi/2)} e^{ip\tau_1}.$$

Используя соотношения непрерывности заряда (4), (5), получим для гармоник тока резонатора

$$I_0 = \frac{i_0}{2\pi} \int_{0+\pi/2}^{5\pi/2-\theta} d\tau_1 = i_0 \left(1 - \frac{\theta}{\pi} \right);$$

$$I_p = \frac{i_0}{\pi} \int_{\theta+\pi/2}^{5\pi/2-\theta} e^{-ip(\tau_1 + r \sin \tau_1)} d\tau_1.$$

Когда ток отражателя отсутствует ($\theta = 0$), последний интеграл вычисляется через функцию Бесселя [6]:

$$I_p = \frac{i_0}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ip(\tau_1 + r \sin \tau_1)} d\tau_1 = (-1)^p 2i_0 J_p(pr).$$

Однако при $\theta \neq 0$ вычислить p -ю гармонику в конечном виде не удается. Воспользовавшись соотношением

$$e^{jpr \sin \tau_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(pr) e^{jk\tau_1},$$

получаем

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{i_0}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} e^{-ip(\tau_1 + r \sin \tau_1)} d\tau_1 - \int_{\pi/2-\theta}^{\pi/2+\theta} e^{-ip(\tau_1 + pr \sin \tau_1)} d\tau_1 \right] = \\ &= 2i_0 e^{jp\pi} J_p(pr) - \frac{2i_0}{\pi} J_0(pr) e^{ip\pi/2} \frac{\sin p\theta}{p} - \\ &\quad - \frac{2i_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(pr) e^{j(p+k)\pi} \left[\frac{\sin(p+k)\theta}{p+k} + \frac{\sin(p-k)\theta}{p-k} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как $J_k(pr)$ весьма быстро убывает при $k > pr$, ряд (9) быстро сходится и при вычислении гармоник малых номеров ($p = 1, 2, 3$) можно ограничиться несколькими первыми его членами.

При $\theta = \pi/2$, что соответствует нулевому напряжению на отражателе ($\gamma = 0$), ряд (9) свертывается:

$$I_{p|_{\theta=\pi/2}} = (-1)^p i_0 [J_p(pr) + jE_p(pr)],$$

где

$$E_p(pr) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left[\int_{\pi}^{2\pi} e^{-ip(\tau_1 + r \sin \tau_1)} d\tau_1 \right]$$

— функция Вебера [6]. Для первой гармоники тока резонатора ($p = 1$) в режиме с отсечкой из (9) получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= -2i_0 \left\{ J_1(r) - \left[J_1(r) \left(\frac{\sin 2\theta}{2\pi} + \frac{\theta}{\pi} \right) - J_3(r) \left(\frac{\sin 4\theta}{4\pi} + \frac{\sin 2\theta}{2\pi} \right) + \dots \right] + \right. \\ &\quad + j \left[J_0(r) \frac{\sin \theta}{\pi} - J_2(r) \left(\frac{\sin 3\theta}{3\pi} + \frac{\sin \theta}{\pi} \right) + J_4(r) \left(\frac{\sin 5\theta}{5\pi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin 3\theta}{3\pi} \right) + \dots \right] \right\} = I_1(r, \theta) e^{j\varphi_1(r, \theta)}. \end{aligned} \quad (10)$$

При вычислении гармоник следует иметь в виду, что параметр группировки $r = U\tau_0/2E_p$ и угол отсечки θ связаны между собой соотношением $\cos \theta = r_{rp}/r$. Поэтому при снятии колебательной характеристики прибора, т. е. зависимости $I_1(r)$ надо обращать внимание на то, как именно меняется r . Если фиксировать питающие напряжения, а менять U , то зависимости модуля $I_1(r, \theta)$ и фазы $\varphi_1(r, \theta)$ первой гармоники тока резонатора от параметра группировки r имеют вид, представленный на рис. 4 сплошными линиями. Эти кривые построены по формуле (10) с удержанием членов до $k = 5$. В качестве параметра таких кривых удобно выбрать величину $r_{rp} = (\tau_0/2)(E_A/E_p - 1)$.

Можно рассматривать также колебательные характеристики $I_1(r)$, принимая в качестве параметра угол отсечки $\theta = \text{const}$. Эти характеристики представлены на рис. 4 пунктиром. В этом случае надо одновременно с U менять и γ так, чтобы выдержать выбранный угол отсечки.

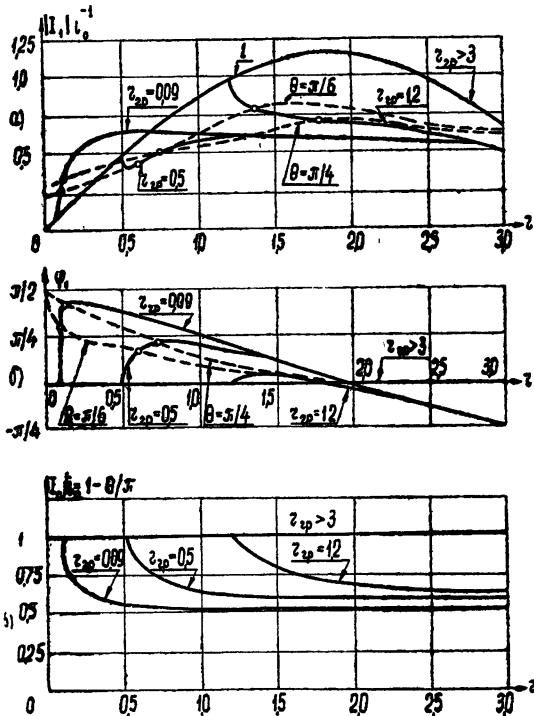


Рис. 4. Колебательные характеристики $I_1(r), I_0(r)$
при наличии тока отражателя

Из рис. 4 следует, что при $r > 0,6$ появление тока отражателя приводит к падению первой гармоники наведенного тока $I_1(r, r_{rp})$ и появлению дополнительного сдвига фазы $\varphi_1(r, r_{rp})$. Наиболее резко падает первая гармоника при r , немного большем, чем r_{rp} . При дальнейшем увеличении $r > r_{rp}$ первая гармоника наведенного тока остается почти постоянной благодаря тому, что угол отсечки θ быстро приближается к $\pi/2$ и затем мало меняется с ростом r . Это обстоятельство можно проследить по кривым $\theta = \text{const}$ рис. 4а или по кривым постоянной составляющей тока резонатора рис. 4в ($I_0/i_0 = 1 - \theta/\pi$).

В области небольших r_{rp} и $r > r_{rp}$ модуль тока первой гармоники с отсечкой выше, чем без отсечки. Это объясняется тем, что в режиме без отсечки поток слабо сгруппирован, так как r невелико ($r < 0,6$) и первая гармоника в токе мала. Появление отсечки приводит к тому, что в импульсе тока возникает резкий провал, за счет чего вес первой гармоники значительно увеличивается. Поскольку этот провал не совпадает с максимумом плотности сгруппированных электронов, появляется значительный дополнительный сдвиг фаз $\varphi_1(r, r_{rp})$ (рис. 4б).

4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОКА ОТРАЖАТЕЛЯ

Ток отражателя $i_a(\tau_a)$ по аналогии с (8) можно представить в виде

$$i_a = I_{a0} + \sum_{n=1}^{\infty} i_{an} e^{ip(\tau_a - \tau_0/2)}, \quad (11)$$

где

$$I_{a_0} = \frac{i_0}{\pi} \int_{\pi/2-\theta}^{\pi/2+\theta} d\tau_1 = i_0 \frac{\theta}{\pi}$$

— постоянная составляющая тока отражателя,

$$I_{ap} = \frac{i_0}{\pi} \int_{\pi/2-\theta}^{\pi/2+\theta} e^{-ip[\tau_1 + (r/2) \sin \tau_1 - (r/V\xi) \sqrt{\sin \tau_1 - \cos \theta}]} d\tau_1 \quad (12)$$

— p -я гармоника тока отражателя.

Интеграл (12) уже нельзя вычислить разложением подынтегрального выражения в ряд Фурье, как это было сделано при нахождении гармоник тока резонатора, так как не удается найти выражение для коэффициентов такого ряда. Приближенное решение можно получить численными методами. На рис. 5 представлены полученные таким путем зависимости модуля $|I_{ap}|/i_0$ и фазы $\varphi_{ap}(r)$ первой гармоники тока отражателя при фиксированном значении $r_{gp} = 1,2$. Из приведенных графиков видно, что $|I_{ap}|/i_0$ весьма быстро нарастает лишь при r , немного больших r_{gp} , что связано с быстрым перераспределением токов. При дальнейшем увеличении r рост $|I_{ap}|/i_0$ прекращается.

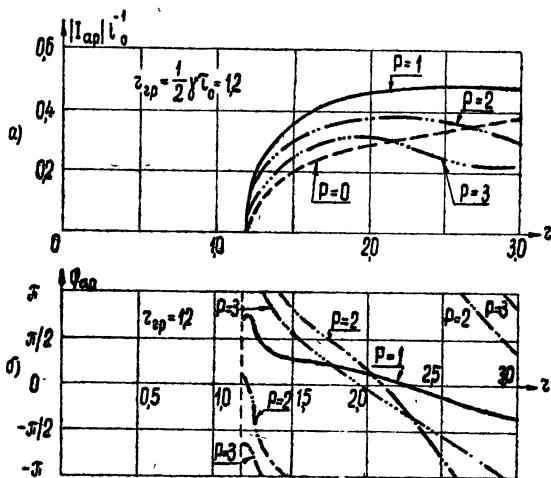


Рис. 5. Зависимость гармоник тока отражателя от параметра группирования.

На том же рис. 5 представлены также графики модуля и фазы второй ($p = 2$) и третьей ($p = 3$) гармоник тока отражателя. Из рассмотрения этих кривых видно, что в токе отражателя большой вес имеют высшие гармоники. Хотя приведенные кривые построены для $r_{gp} = 1, 2$, аналогичные результаты получаются для широкого интервала значений r_{gp} .

Аналитическое выражение для гармоник тока отражателя можно найти из (8) для практически интересного случая малого тока отражателя: если $i_a/i_0 \ll 1$, то

$$\tau_a - \frac{\tau_0}{2} = \tau_1 + \frac{r}{2} \sin \tau_1 - \frac{r}{V\xi} \sqrt{\sin \tau_1 - \cos \theta} \ll 1.$$

После интегрирования можно получить из (12)

$$I_{ap} = 2i_0 \frac{\theta}{\pi} \sqrt{(1-p^2 \theta^2/6)^2 + (pr/12)^2} \exp \left\{ j \left[p \frac{r}{2} - \operatorname{arctg} \frac{pr \theta^3}{12(1-p^2 \theta^2/6)} \right] \right\}. \quad (13)$$

Из выражения (13) следует, что при малом токе отражателя в его состав входят высшие гармоники с амплитудой, вдвое большей, чем постоянная составляющая.

Благодаря тому, что ток отражателя имеет широкий спектр гармоник, можно использовать цепь отражателя для возбуждения в волноводе гармоник частоты колебаний в зазоре. Клистрон в таком умножителе частоты может находиться в самовозбужденном режиме с током отражателя, причем частота автоколебаний может быть захвачена внешней силой, введенной в резонатор. Можно также ввести колебания умножаемой частоты в резонатор, поставив клистрон в такой режим, когда автоколебания отсутствуют.

Экспериментальное исследование умножителя частоты из десятисантиметрового в трехсантиметровый диапазон показало, что в такой системе можно получить мощность умноженной частоты порядка милливатта с помощью клистрона, который может давать максимальную мощность в десятисантиметровом диапазоне около 100 мвт. По-видимому, на клистроне с выводом отражателя, более удобным для возбуждения волновода, выходную мощность можно еще повысить. Недостатком умножителя является сильная зависимость фазы выходного сигнала от режима клистрона.

5. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ ОТРАЖАТЕЛЬНОГО КЛИСТРОНА С ТОКОМ ОТРАЖАТЕЛЯ

Современные клистроны с большой полосой электронной настройки имеют обширный интервал самовозбуждения по напряжению отражателя. В части его, соответствующей небольшим напряжениям отражателя, работа происходит с током отражателя. Часто также при большой амплитуде автоколебаний вблизи середины зоны генерации имеет место ток отражателя, который прекращается у краев зоны. В связи с этим возникает необходимость исследовать, как влияет появление тока отражателя на мощность и частоту генерации клистрона.

Амплитуда напряжения в зазоре $u = U e^{j\omega t}$ связана с наведенным током первой гармоники $i_1 = I_1 e^{-i(\tau_0 - \pi/2)} e^{j\omega t}$ через импеданс колебательной системы $I_1 R(1 + j\alpha)^{-1} = U$. При этом $\alpha = 2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0$ — обобщенная расстройка частоты автоколебаний ω от собственной частоты контура ω_0 ; Q — добротность нагруженного резонатора. Отсюда, приравняв действительную и мнимую части, можно получить

$$\frac{|I_1|/i_0}{r} = \frac{1}{m \cos[\delta - \varphi_1(r, r_{rp})]}, \quad (14)$$

$$\alpha = -\operatorname{tg}[\delta - \varphi_1(r, r_{rp})], \quad (15)$$

здесь $m = i_0 R \tau_0 / 2E_p$ — коэффициент регенерации, $\delta = \tau_0 - \tau_0^{\text{опт}}$ — угол неоптимальности, т. е. отклонение невозмущенного угла пролета от оптимального значения $\tau_0^{\text{опт}} = 2\pi(N - 1/4)$, $N = 1, 2, 3, \dots$ — номер зоны генерации. Соотношение (14) является уравнением баланса амплитуд, а (15) — уравнением баланса фаз автогенератора на отражательном клистроне. Эти соотношения определяют форму зоны генерации $r(\delta)$ и кривой электронной настройки $\alpha(\delta)$.

Для отыскания стационарной амплитуды r и частоты колебаний α при наличии тока отражателя надо на графике модуля проводимости зазора $2J_1(2)/r$ провести прямую обратной связи на высоте $1/m \cos \delta'$, где $\delta' = \delta - \varphi_1(r, r_{\text{гр}})$. Меняя δ' и отмечая точки пересечения как точки стационарного режима, построим амплитуду r в зависимости от $\delta' = \delta - \varphi_1(r, r_{\text{гр}})$. После этого можно получить искомую зону $r(\delta)$, перейдя от δ' к δ с помощью графика $\varphi_1(r, r_{\text{гр}})$. Точно так же следует поступить и с кривой электронной настройки. На рис. 6 приведены рассчитанные таким путем зависимости мощности, частоты генерации и тока отражателя от напряжения отражателя. Из этих кривых видно, что при работе в низковольтных зонах в области максимума зональной кривой появляется ток отражателя. В связи с этим падает содержание первой гармоники в наведенном токе, мощность генерации уменьшается и вершина зональной кривой уплощается.

Из-за появления дополнительного сдвига фазы тока первой гармоники максимум мощности смещается относительно значения E_A , при котором $\tau_0 = \tau_0^{\text{опт}} = 2\pi(N-1/4)$.

Величина и знак смещения определяются установившимся значением параметра группировки в соответствии с рис. 4б. В то же время на

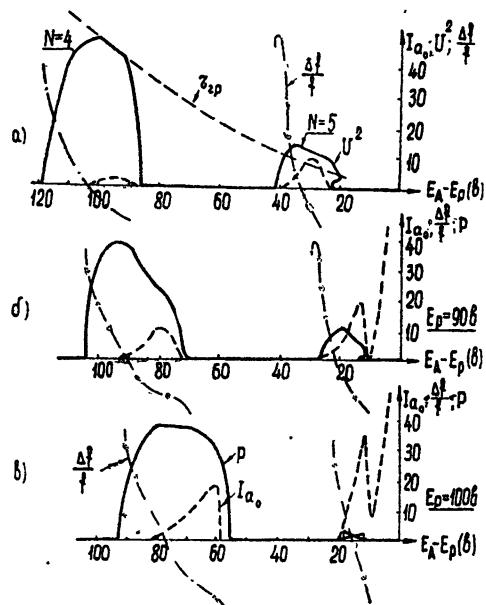


Рис. 6. Теоретические (а) и экспериментальные (б, в) зависимости мощности частоты генерации и тока отражателя от напряжения на отражателе.

краях зоны генерации, где параметр группировки небольшой ($r < r_{\text{гр}}$) ток отражателя прекращается, аномальное падение мощности и смещение зональной кривой исчезает.

В зональных кривых из-за тока отражателя могут появиться области электронного гистерезиса. Это может происходить по двум причинам. Во-первых, для небольших $r_{\text{гр}} < 0,6$, как уже отмечалось выше, первая гармоника тока с отсечкой может быть больше, чем без отсечки, поэтому условия поддержания автоколебаний выполняются при меньшем значении регенерации ($m < 1$), чем без отсечки. Если же колебания так малы, что отсечки нет, то для самовозбуждения, как обычно, необходимо иметь $m > 1$. Поэтому поддержать колебания с отсечкой легче, чем их возбудить. Во-вторых, смещение зональной кривой из-за сдвига фаз $\varphi_1(r, r_{\text{гр}})$ может оказаться таким большим, что установившаяся амплитуда колебаний будет соответствовать такому углу пролета $\delta = \tau_0 - \tau_0^{\text{опт}}$, при котором условие самовозбуждения не выполняется. Поэтому колебания с отсечкой можно поддержать при больших δ , чем $\delta_{\text{возб}}$ ($m \cos \delta_{\text{возб}} = 1$). Эти гистерезисные явления имеют место при небольших r и $r_{\text{гр}}$ и расширяют зону.

Кривая электронной настройки, определяемая формулой (15) также деформируется из-за сдвига фазы, связанного с током отражателя. Смещение генерируемой частоты происходит в соответствии с установившейся амплитудой r согласно кривой рис. 4б.

Найдем из (15) локальную крутизну электронной настройки:

$$S_{\text{эл.н.}} = \frac{d\omega}{dE_A} = \frac{\omega_0}{2Q} \frac{2\pi(N-1/4) - \delta[1 - (d\varphi_1/dr)(dr/d\delta)]}{E_A \cos^2[\delta - \varphi_1(r, r_{rp})]}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что крутизна электронной настройки в точке, отвечающей максимальной мощности режима с током отражателя ($dr/d\delta = 0$; $\delta = \varphi_1(r, r_{rp}) = 0$), отличается от значения ее без этого тока S_0 на малую величину, связанную со смещением максимума:

$$S_{\text{эл.н.}}|_{\frac{dr}{d\delta}=0} = S_0 + \frac{\varphi_1(r, r_{rp})}{E_A}. \quad (17)$$

В связи с тем, что имеются области, где условия поддержания колебаний с отсечкой выполняются легче, чем условия самовозбуждения, пределы электронной настройки кластрона могут расширяться. Это связано, однако, с появлением гистерезисных явлений.

Кроме того, как видно из (15) и (16), могут существовать такие области параметров, когда изменение δ вызывает большие по величине и противоположные по знаку изменения $\varphi_1(r, r_{rp})$. При этом кривая электронной настройки, проходя через максимум, падает (рис. 6а).

Экспериментальное исследование автоколебательного режима отражательного кластрона с током отражателя проводилось на серийных кластронах в диапазонах 3 и 10 см. Наиболее характерные результаты такого исследования представлены на рис. 6б, в. На этом рисунке показаны зависимости мощности, частоты колебаний и тока отражателя от напряжения на отражателе при нескольких значениях ускоряющего напряжения. Следует обратить внимание на то, что с появлением тока отражателя I_{a_0} форма зоны генерации становится несимметричной и генерируемая мощность падает. На кривой электронной настройки в то же время имеются уплощения и даже появляется перегиб (рис. 6б).

Из сравнения рис. 6а и 6б, в видно, что теоретические выводы качественно подтверждаются. При количественном сравнении получается расхождение до 20–30% между расчетным и экспериментальным значением ширины зон генерации.

Такого же порядка расхождения в крутизне электронной настройки. Это связано с тем, что кинематическое рассмотрение движения электронов проводилось без учета пространственного заряда. Приведенные данные показывают, что весьма наглядный кинематический подход в данном случае достаточно хорошо отражает явления в отражательном кластроне с током отражателя. Кроме того, в нашем рассмотрении не учитывался тепловой разброс начальных скоростей электронов. Из экспериментальных кривых $I_{a_0}(E_A - E_p)$ (рис. 6б, в) видно, что это явление существенно лишь при малом напряжении между отражателем и катодом. Невелико также влияние вторичной эмиссии отражателя, поскольку при небольшом токе отражателя скорость электронов, поступающих на отражатель, мала.

Основные результаты проведенного исследования состоят в следующем.

1) Выяснен механизм токораспределения в кластроне между отражателем и резонатором. Это позволило обнаружить и объяснить явление фазовой фокусировки в токе отражателя. Построены импульсы тока отражателя и резонатора.

2) Получены выражения, позволяющие вычислить любую гармонику тока резонатора в общем случае с учетом тока отражателя.

3) Рассмотрен гармонический состав тока отражателя, что позволяет по постоянной составляющей этого тока оценить первую и высшие гармоники его.

4) Предложена схема использования цепи отражателя для возбуждения гармоник частоты напряжения в зазоре.

5) Рассмотрены явления, связанные с появлением тока отражателя для клистрона, находящегося в режиме генерации.

Выражаю благодарность М. В. Капранову за ценные советы и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Ishii, Rep. Res. Inst. Tech., Nihon Univ., № 4, 87 (1962).
2. Л. А. Белов, М. В. Капранов, Радиотехника и электроника, № 4, 600 (1963).
3. B. G. Whitford, IRE Trans., ED—8, 131 (1961).
4. В. Е. Васильев, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, № 3, 37 (1961).
5. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов СВЧ, ГИТТЛ, М., 1956.
6. Г. П. Ватсон, Теория функций Бесселя, ч 1, ГИТТЛ, М., 1949.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
7 мая 1963 г.
после переработки
6 декабря 1963 г.

INVESTIGATION OF REFLEX KLYSTRON WITH THE REFLECTOR CURRENT

L. A. Belov

The operating conditions of a reflex klystron with reflector current in a kinematic approximation have been considered. The mechanism of electron density bunching has been investigated in the reflector plane and when returning to a gap. The impulses form of reflector and resonator current has been studied. Expressions have been obtained for harmonics of these currents. The peculiarities of klystron autooscillator due to appearance of the reflector current have been considered.

УДК 621.382.311

ДИНАМИКА СХЕМЫ ФРЮГАУФА НА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ТРИОДАХ

M. A. Чубаров

Рассмотрена динамика схемы Фрюгауфа при кусочно-линейной аппроксимации статических характеристик транзисторов и учете малых паразитных параметров. Показано существование автоколебаний, найден их период и амплитуда

1. Уравнения движения для схемы Фрюгауфа [1,2] в обозначениях рис. 1 при кусочно-линейной аппроксимации [3] статических характеристик триодов

$$I_j = g_r v'_j - \alpha g_s e'_j, \quad i_j = g_s v'_j - \beta g_r e'_j$$

(где $r = m, s = n$ при $j = 1, r = \mu, s = \nu$ при $j = 2$) и введении безразмерных величин

$$\frac{r}{R} = \lambda, \quad \frac{C}{C_0} = \xi, \quad \frac{\sigma}{C_0} = \delta,$$

$$\frac{x'}{E} = x, \quad \frac{y'}{E} = y, \quad \frac{z'}{E} = z, \quad \frac{u'}{E} = u, \quad \frac{W'}{E} = W,$$

$$\frac{v'_1}{E} = v_1, \quad \frac{e'_1}{E} = e_1, \quad \tau = \frac{t}{rC_0}, \quad r g_\gamma = \gamma_1, \quad \gamma = m, \mu, n, \nu$$

имеют вид

$$x - [\lambda + (1 - \beta) m_1] v_1 - (1 - \alpha) n_1 e_1 = 0;$$

$$\xi y - [\lambda + (1 - \beta) \mu_1] v_2 - (1 - \alpha) \nu_1 e_2 = 0;$$

$$z + \delta \dot{u} + \beta m_1 v_1 - (1 + n_1) e_1 = x;$$

$$z + \delta \dot{w} + \beta \mu_1 v_2 - (1 + \nu_1) e_2 = y;$$

$$z + \delta(\dot{u} + \dot{w}) + (\lambda + m_1)v_1 + (\lambda + \mu_1)v_2 - \alpha n_1 e_1 - \alpha \nu_1 e_2 = 0;$$

$$v_1 - e_1 - e_2 = z + y;$$

$$v_2 - e_1 - e_2 = 1 + z + x;$$

$$v_1 - e_1 = u;$$

$$v_2 - e_2 = w.$$

В матричной форме их можно записать так:

$$AV = A_0 V_0, \quad (1a)$$

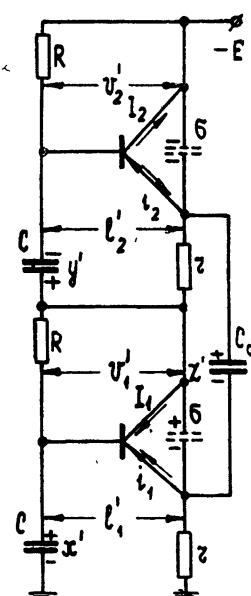


Рис. 1.

где $V = (\dot{u}, \dot{w}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, v_1, v_2, e_1, e_2)^T$ и $V_0 = (u, w, z, x, y, 1)^T$ — транспортированные матрицы-строчки, а точкой обозначено дифференцирование по новому времени τ . Двоичные переменные m, μ, n и ν , определяющие индексы областей линейности $G_{m\mu n\nu}$, находятся из неравенств

$$(-1)^m v_1 \leq 0, (-1)^\mu v_2 \geq 0, (-1)^n e_1 \leq 0, (-1)^\nu e_2 \geq 0. \quad (2)$$

Предполагая, что в схеме использованы плоскостные триоды, аналогично [4] будем считать в дальнейшем

$$g_0 \ll g_1, \quad 0 < (1-\alpha) \ll 1, \quad 0 < (1-\beta) < 1. \quad (3)$$

Образование новой матрицы \tilde{A} путем вычеркивания строк i_1, i_2, \dots, i_k и столбцов j_1, j_2, \dots, j_e из матрицы A будем обозначать в виде

$$\tilde{A} = A \left\{ \begin{array}{c} i_1 i_2 \dots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_e \end{array} \right\}.$$

Пятимерное фазовое пространство системы (1) при $\xi \rightarrow \infty$ ($C \gg C_0$) и при $\delta \rightarrow 0$ ($\sigma \ll C_0$) можно разбить, следуя [5-7], на подпространства движений первого, второго и третьего порядков со скоростями, соответственно пропорциональными $1/\xi, 1$ и $1/\delta$. Переходя в системе (1) к новому, «быстрому» времени $t' = \tau/\delta$, получим уравнения движений третьего порядка в виде

$$A_3 \left(\frac{du}{dt'}, \frac{dw}{dt'}, v_1, v_2, e_1, e_2 \right)^T = A_{03} V_{03}, \quad (4)$$

где

$$V_{03} = (u, w, z_0, x_0, y_0, 1)^T, \\ A_3 = A' \left\{ \begin{array}{c} 1 2 5 \\ 3 4 5 \end{array} \right\}, \quad A_{03} = A_0 \left\{ \begin{array}{c} 1 2 5 \\ \dots \end{array} \right\},$$

а матрица A' образуется из A , если положить в ней $\delta = 1$ и вычесть пятую строку из третьей и четвертой. Движения первого и второго порядка описываются в трехмерном фазовом пространстве уравнениями

$$A_{12}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, v_1, v_2, e_1, e_2)^T = A_{012} V_{012}, \quad (5)$$

где

$$A_{12} = A \left\{ \begin{array}{c} 8 9 \\ 1 2 \end{array} \right\}, \quad A_{012} = A_0 \left\{ \begin{array}{c} 8 9 \\ 1 2 \end{array} \right\}, \quad V_{012} = (z, x, y, 1)^T.$$

Эти уравнения получаются из системы (1) при $\delta = 0$. При $\xi \rightarrow \infty$ из системы (5) можно выделить уравнения движений второго порядка:

$$A_2(\dot{z}, v_1, v_2, e_1, e_2)^T = A_{02} V_{02}, \quad (6)$$

где

$$A_2 = A_{12} \left\{ \begin{array}{c} 1 2 \\ 1 2 \end{array} \right\}, \quad A_{02} = A_{012} \left\{ \begin{array}{c} 1 2 \\ \dots \end{array} \right\}, \\ V_{02} = (z, x_0, y_0, 1)^T.$$

В дальнейшем будет показано, что в рассматриваемой системе могут существовать устойчивые автоколебания среди движений второго

порядка, поэтому переход к движениям первого порядка не совсем три-виален.

2. Движения третьего порядка. Если обозначить через B_j^i обобщенный минор матрицы A_3 относительно A_{03} (см. Приложение I), то уравнения движений третьего порядка в координатах u и w получатся из системы (4) в виде

$$\begin{aligned} A_3 \frac{du}{dt'} &= B_1 V_{03}; \\ A_3 \frac{dw}{dt'} &= B_2 V_{03}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$A_3 = \det A_3 = 1, \quad B_j = (B_j^1, B_j^2, B_j^3, B_j^4, B_j^5, B_j^6).$$

Разрешая эту же систему относительно переменных v_i и e_i и подставляя их в неравенства (2), получим

$$(-1)^{\eta_j} E_j \leq 0, \quad (8)$$

где

$$E_j = B_j V_{03}, \quad j=3 \div 6, \quad \eta_3 = m, \quad \eta_4 = \mu + 1, \quad \eta_5 = n, \quad \eta_6 = \nu + 1.$$

Нетрудно усмотреть, что кусочно-линейная фазовая поверхность F системы (7) не имеет наложений, так как в любой ее точке вне границ $E_j = 0$ переменные m , μ , n и ν имеют единственное значение в силу того, что выражения E_j от них не зависят. При выполнении неравенств (3) состояние равновесия системы (7), как следует из вида характеристического уравнения

$$p^2 + (B_1^1 + B_2^2) p + B_{12}^{12} = 0,$$

в котором

$$\begin{aligned} B_1^1 + B_2^2 &= -4\lambda - 2 - (2 - \beta)(m_1 + \mu_1) - (1 - \alpha)(n_1 + \nu_1) < 0; \\ B_{12}^{12} &= (1 - \alpha\beta)(m_1 n_1 + \mu_1 \nu_1) + (1 + \alpha\beta - \beta)(\mu_1 n_1 + m_1 \nu_1) + \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ (2 - \beta)(m_1 + \mu_1) + 2\lambda(2 + n_1 + \nu_1) + (1 - \alpha)(n_1 + \nu_1) + 1 - (2\alpha - 1)n_1\nu_1,$$

может быть неустойчивым (седло) только в области G_{0011} при условии

$$(2\alpha - 1)rg_1 - 2(2 - \beta)rg_0 - 4\lambda - 1 > 0, \quad (10)$$

выполняющемся в областях II и III на рис. 2.

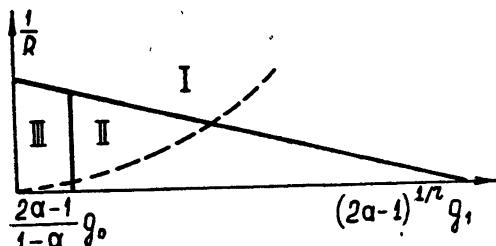


Рис. 2.

Учитывая неравенство (9), заметим, что по критерию Бендиксона предельных циклов среди движений третьего порядка не существует. Записывая неравенства (8) для достаточно удаленных точек плоскости F в виде $(-1)^m(u + w) \leq 0$, $(-1)^\mu(u + w) \geq 0$, $(-1)^n w \leq 0$, $(-1)^\nu u \geq 0$, легко усмотреть, что двоичные переменные m и μ для этих точек не могут быть одинаковыми; в частности, область G_{0011} ограничена, а бесконечность фазовой плоскости F неустойчива. Следовательно, траектории на плоскости F идут в устойчивые состояния равновесия и движения третьего порядка переходят в движения второго порядка.

3. *Движения второго порядка.* Обозначив через $D_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_s}$ обобщенный минор матрицы A_2 относительно A_{02} и разрешив систему (6) относительно переменных z , v_i и e_i , нетрудно получить уравнение движений второго порядка:

$$A_2 \dot{z} = D_1 V_{02}, \quad (11)$$

где $A_2 = \det A_2$, $D_j = (D_j^1, D_j^2, D_j^3, D_j^4)$, $j = 1$; неравенства, определяющие разбиение фазовой прямой z на области линейности, имеют вид

$$\frac{(-1)^{\eta_{j+1}}}{A_2} D_j V_{02} \leq 0, \quad (12)$$

где $j = 2 \div 5$. Состояние равновесия этих движений, имеющее координату

$$\bar{z} = -\frac{1}{D_1^1} (D_1^2 x_0 + D_1^3 y_0 + D_1^4), \quad (13)$$

неустойчиво только в области G_{0011} при условии (10), так как

$$A_2 = B_{12}^{12}, D_1^1 = -2\lambda(1+n_1)(1+v_1) - (1-\alpha\beta) \times \\ \times [m_1 n_1 (1+v_1) + \mu_1 v_1 (1+n_1)] - m_1 (1+v_1) - \mu_1 (1+n_1) < 0.$$

Неравенства для нахождения областей линейности $G_{m_\mu n_\nu}$, в которые попадает состояние равновесия при различных x_0 и y_0 , из (12) и (13) получаются в виде

$$\frac{(-1)^{\eta_{j+1}}}{D_1^1} \Gamma_j^1 \leq 0, \quad (14)$$

где $j = 2 \div 5$, $\Gamma_j^1 = D_{j,j}^{12} x_0 + D_{j,j}^{13} y_0 + D_{j,j}^{14}$, $j_1 = 1$. Разбиение плоскости x_0, y_0 на эти области (см. Приложение II) показано на рис. 3, где границы $\Gamma_j^1 = 0$ обозначены теми переменными η_{j+1} , которые на них меняют значение. В силу знакопостоянства D_1^1 , на прямой z при любых x_0, y_0 может существовать только одно состояние равновесия.

Границы областей линейности на прямой z имеют координаты

$$z_{j_1}(m, \mu, n, \nu) = -\frac{1}{D_{j_1}^2} [D_{j_1}^2 x_0 + D_{j_1}^3 y_0 + D_{j_1}^4] \quad (15)$$

и попадают во вспомогательные области линейности, определяемые неравенствами

$$\frac{(-1)^{j_1+1} \Gamma_j^{j_1}}{D_{j_1}^1} \leq 0, \quad j \neq j_1. \quad (16)$$

Последние нетрудно получить, подставляя (15) в неравенства (12). С помощью неравенств (16) плоскость x_0, y_0 можно разбить на части, в которых структура областей линейности на прямой z качественно не меняется. Действительно, изменение качественной структуры имеет место при совпадении границ (15), а это, как видно из разности

$$z_{j_1} - z_j = \frac{A_2 \Gamma_j^{j_1}}{D_j^1 D_{j_1}^1}, \quad (17)$$

возможно лишь на вспомогательной границе $\Gamma_j^{j_1} = 0$.

Покажем, что разрывные автоколебания у движений второго порядка могут существовать лишь при значениях x_0, y_0 попадающих в область

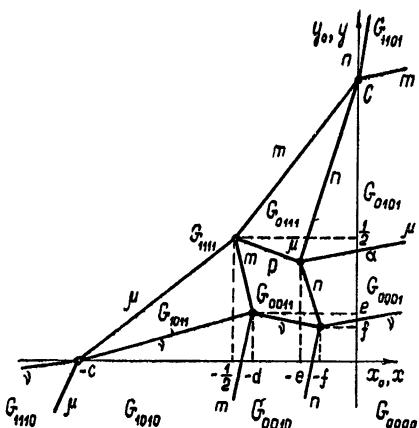


Рис. 3.

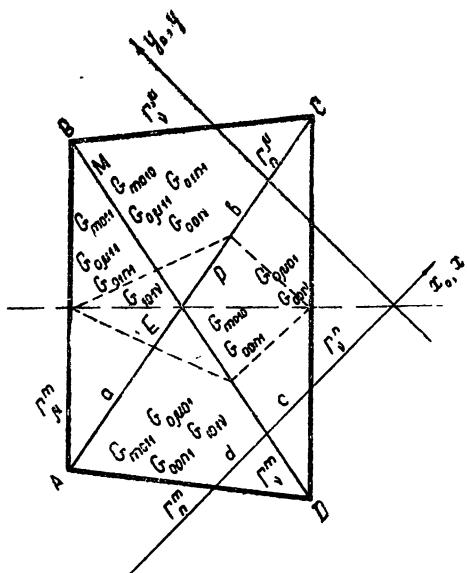


Рис. 4.

M (см. рис. 4 и Приложение III). Действительно, из уравнения (11), записанного в виде

$$z = \frac{D_1^1}{A_2} (z - \bar{z}), \quad (18)$$

следует, что при отсутствии области G_{0011} на прямой z , или нарушении условия (10) фазовые траектории при любых начальных условиях идут в устойчивое состояние равновесия, определяемое (13). Прямая z содержит область G_{0011} только при тех значениях x_0, y_0 , при которых существует хотя бы одна из вспомогательных областей линейности $G_{m011}, G_{0p11}, G_{00n1}, G_{0001}$ (см. Приложение III); они, в свою очередь, расположаются целиком в области M , так как из неравенств (16) следует, что любая из них связна и не может иметь более трех границ.

Вспомогательные области линейности показаны на рис. 4 для области III пространства параметров (рис. 2). Для параметров из обла-

сти II рис. 4 изменяется следующим образом: в области a добавляются G_{m001} , G_{m010} , $G_{0\mu 01}$ и $G_{0\mu 10}$, в области b — $G_{0\mu 01}$ и $G_{0\mu 10}$, в области d — G_{m010} и G_{m001} . Кроме того, в области b G_{m010} заменяется на G_{m001} , в области c — G_{m010} на G_{m001} и $G_{0\mu 01}$ на $G_{0\mu 10}$, в области d — $G_{0\mu 01}$ на $G_{0\mu 10}$. Пунктирные линии на рис. 4 ограничивают область P значений x_0, y_0 , при которых состояние равновесия (13) попадает в область G_{0011} (см. рис. 3), а среди движений второго порядка существуют разрывные автоколебания.

По найденным вспомогательным областям производится разбиение прямой z на области линейности (см. Приложение III) и показывается, что она является прямой «с наложениями», состоящей из трех частей, $z \leq z', z' \leq z \leq z''$ и $z \geq z'$, где $z' = z_3(0\mu 11)$, $z'' = z_2(m011)$ в области a и $z' = z_4(00n1)$, $z'' = z_5(001v)$ в области b .

При $z' \leq z \leq z''$ на полуправой $z \leq z''$ области линейности могут располагаться (при движении в сторону увеличения z) только в последовательности $G_{0010}, G_{1010}, G_{1011}$ в области a и G_{1010}, G_{0010} в области c . На полуправой $z \geq z'$ аналогичная последовательность будет $G_{0111}, G_{0101}, G_{0001}$ в области a и G_{0001}, G_{0101} в области c .

4. Движения первого порядка. Преобразуем системы (2) и (5) к виду

$$A_{12} \dot{x} = L_1 V_{012}; \quad A_{12} \dot{y} = L_2 V_{012}; \quad (19)$$

$$A_2 \dot{z} = D_1^! (z - \tilde{z}); \quad (20)$$

$$\frac{(-1)^{\eta_{j-1}}}{A_{12}} L_j V_{012} \leq 0, \quad (21)$$

где $A_{12} = \det A_{12}$, $j = 4 + 7$, $\tilde{z} = -\frac{1}{D_1^!} [D_1^2 x + D_1^3 y + D_1^4]$, $L_j = (L_j^1, L_j^2, L_j^3, L_j^4)$,

и L_j^i — обобщенный минор матрицы A_{12} относительно A_{012} . Состояние равновесия этой системы имеет координаты (см. Приложения I, II)

$$\bar{z}_{12} = -L \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = L \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = -L \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

и, как следует из неравенства

$$(-1)^{\eta_{j-1}} \gamma_L \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3_j \end{bmatrix} \leq 0, \quad (22)$$

располагается в области G_{0011} и единственно.

Подставляя в соотношения (19) и (21) вместо z усредненную координату движений второго порядка в виде $Z = \tilde{z}(x, y, m, \mu, n, v) + \varphi(x, y)$, где функция $\varphi(x, y)$ отлична от нуля только в области P (рис. 3, 4), получим уравнения движений первого порядка [1]:

$$N \frac{dx}{dt^*} = H_1^1 x + H_1^2 y + H_1^3 + k_1 \varphi(x, y); \quad (23)$$

$$N \frac{dy}{dt^*} = H_2^1 x + H_2^2 y + H_2^3 + k_2 \varphi(x, y);$$

$$\frac{(-1)^{\gamma_j+1}}{D_1^1} \Gamma_j \leq 0, \quad (24)$$

где $j = 2 \div 5$, $N = \det N$, $\Gamma_j = \Gamma_j^1 + k_j \varphi(x, y)$, $k_i = L_i^1 N / A_2 \xi$, $t^* = \tau / \xi$; матрица N имеет элементы, совпадающие с элементами определителя L_3^1 при $\xi=1$ и H_k^i — ее обобщенный минор относительно $N_0 = A_{012} \begin{pmatrix} \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\varphi(x, y) \equiv 0$ неравенства (24) совпадают с (14), а состояние равновесия системы (23) находится в виде

$$\bar{x} = H \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y} = -H \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

и попадает в область линейности, определяемую неравенствами (22), т. е. располагается в области G_{0011} и имеет координаты

$$\bar{y} = -\bar{x} = \frac{1}{2+h}, \quad (25)$$

где

$$h = \frac{2(1-\alpha)a}{\lambda(1+a)+(1-\beta)b+(1-\alpha\beta)ab}, \quad a=r g_1, \quad b=r g_0.$$

В этом случае оно представляет собой устойчивый узел, так как система (23) имеет характеристическое уравнение $Np^2 - (H_1^1 + H_2^2)p + H_{12}^{12} = 0$, у которого $N = D_1^1 < 0$, $H_1^1(0011) = H_2^2(0011) > 0$, $H_{12}^{12} < 0$, а дискриминант $(H_1^1 - H_2^2)^2 + 4H_1^2 H_2^1$ положителен в силу равенства $H_1^2(0011) = H_2^1(0011)$.

Координата Z ограничена крайними отклонениями z при автоколебаниях, поэтому функция $\varphi(x, y)$ в области P удовлетворяет неравенствам

$$z_3(0\mu 11) - \tilde{z}(0011) \leq \varphi(x, y) \leq z_2(m011) - \tilde{z}(0011); \quad (26)$$

$$z_4(00n1) - \tilde{z}(0011) \leq \varphi(x, y) \leq z_5(001\nu) - \tilde{z}(0011), \quad (27)$$

где $z_{j_1}(m, \mu, n, \nu) = \frac{1}{D_{j_1}^1} [D_{j_1}^2 x + D_{j_1}^3 y + D_{j_1}^4]$, а знак равенства имеет место

только на границах области P . В силу симметрии функции $\tilde{z}(z)$ на прямой $y_0 = -x_0$ выполняется тождество $\varphi(-y, y) \equiv 0$.

Задаваемое неравенствами (24) разбиение плоскости x, y на области линейности совпадает вне P с изображенным на рис. 3. Покажем, что и внутри P существует только область G_{0011} . Это справедливо в некоторой окрестности точки E (см. рис. 4), так как при $\varphi(x, y) \equiv 0$ для любой области линейности, кроме G_{0011} , внутри P не выполняется хотя бы одно из неравенств (14), а при условии (10) всегда можно подобрать такое ϵ и окрестность точки E , что при отличной от нуля функции $\varphi(x, y) < \epsilon$ те же неравенства будут нарушены. Используя указанные на рис. 4 вспомогательные области, нетрудно установить, что кроме G_{0011} внутри P могли бы существовать лишь следующие области

линейности: G_{1011} , G_{0111} , G_{0001} , G_{0010} , G_{0101} , G_{1001} , G_{1010} и G_{0110} . Однако из неравенств (26) и (27) следует, что области G_{1011} , G_{0111} , G_{0001} и G_{0010} не могут располагаться в P . Так, например, для перехода в область G_{1011} при движении по плоскости x , y из указанной окрестности точки E необходимо пересечь границу $\Gamma_2 = z(0011) - z_2(m011) + \varphi(x, y) = 0$, что невозможно внутри P в силу неравенства (26). В P не могут находиться также и области G_{0101} , G_{1001} , G_{1010} , G_{0110} , так как при указанном движении в них можно попасть только через области, не существующие в P .

В силу единственности состояния равновесия системы (5) состояние равновесия системы (23) также единственно, попадает в область G_{0011} и имеет координаты, определяемые выражением (25). Движения первого порядка не имеют предельных циклов, так как через это состояние равновесия проходит интегральная прямая $y = -x$, в чем нетрудно убедиться, учитывая соотношения

$$H_2^1(m, \mu, n, v) = H_1^2(\mu, m, v, n);$$

$$H_1^1(m, \mu, n, v) = H_2^2(\mu, m, v, n);$$

$$H_2^3(m, \mu, n, v) = -H_1^3(\mu, m, v, n); \quad L_2^1(m, \mu, n, v) = L_1^1(\mu, m, v, n).$$

Направления вектора фазовой скорости системы (23) на границе области P для случаев $\varphi(x, y) \equiv 0$ и $\varphi(x, y) \neq 0$ совпадают, за исключением конечного числа точек. Поэтому индекс границы области P равен в обоих случаях +1, а состояние равновесия системы (23) при $\varphi(x, y) \neq 0$ также является устойчивым узлом и единственным элементом притяжения для фазовых траекторий движений первого порядка.

5. Период и амплитуда автоколебаний. При изменении параметров r и R состояние равновесия (25) перемещается по прямой $x = -x$ и попадает в область $a(x < x_E)$ при условии $\lambda - \lambda a(4\alpha - 3) + (1 - \beta) b + ab \times (3 - 2\beta - 4\alpha + 3\alpha\beta) < 0$, и в область $c(x > x_E)$ в противном случае. В соответствии с этим плоскость параметров разбита на две области гиперболой, показанной на рис. 2 пунктиром.

Покажем теперь, что при движении точки x_0, y_0 по прямой $y_0 = -x_0$ из вершин области P в точку E период колебаний по движениям второго порядка увеличивается. Действительно, вводя тангенс угла наклона $k(m, \mu, n, v) = D_1^1 / A_2$ функции $\dot{z}(z)$ и применяя формулу обращения детерминантов [4, 9], получим $|k(1011)| > |k(1010)|, |k(0111)| > |k(0101)|$ далее, в области II $-|k(1010)| > |k(0010)|, |k(0101)| > |k(0001)|$, а в области III $-|k(0010)| > |k(1010)|, |k(0001)| > |k(0101)|$.

При указанном движении $|\Gamma_\mu^n|$ и $|\Gamma_v^n|$, а следовательно, (см. (17)) и размер области G_{0011} увеличиваются, поэтому период колебаний монотонно возрастает. Тогда, обозначая через T_a и T_c период автоколебаний в областях a и c , получим, что в области II $T_1 \leq T_a \leq T_2$ и $T_c = T_2$, а в области III $T_1 \leq T_a \leq T_3$ и $T_2 \leq T_c \leq T_3$, где $T_1 = T(1011)$, $T_2 = T(0001)$, $T_3 = T(0101)$,

$$T(m, \mu, n, v) = \frac{2rC_0}{|k(m, \mu, n, v)|} \ln \left[1 + \frac{1}{2} \frac{|k(m, \mu, n, v)|}{|k(0011)|} \right].$$

Подставляя координату (25) в (17), получим выражения для амплитуд автоколебаний:

$$A_a = \frac{(1-\alpha) a}{(2\alpha - 1) a - 1} S; \quad (28)$$

$$A_c = \frac{\lambda + (1-\beta) b}{2\lambda + (2-\beta) b} S,$$

где

$$a = rg_1, \quad b = rg_0,$$

$$S = \frac{(2\alpha - 1) a - 2(2 - \beta) b - 1 - 4\lambda}{\lambda(1 + a) + (1 - \beta) b + (1 - \alpha\beta) ab + (1 - \alpha) a}.$$

Проведенный эксперимент дал удовлетворительное совпадение с теоретическими результатами. На рис. 5 показан один из случаев установления разрывных автоколебаний в проекции на плоскость z, \dot{z} . Предельный цикл состоит из четырех участков движений 2-го порядка и двух участков движений 3-го порядка. В соответствии с теоретическими

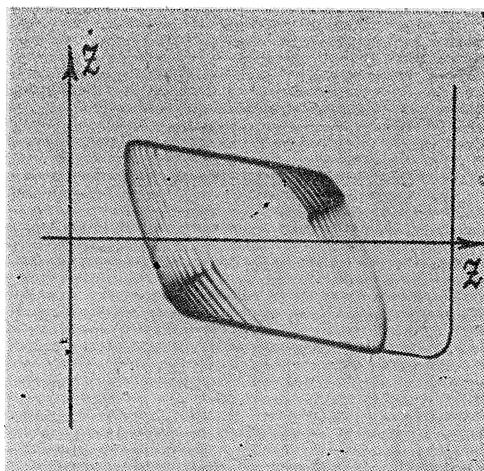


Рис. 5.

результатами при установлении автоколебаний происходит увеличение размера области G_{0011} и уменьшение примыкающих к ней областей, что можно проследить по сокращению участков движений 2-го порядка с большим наклоном. Снятая экспериментально область существования автоколебаний на плоскости параметров удовлетворительно совпала с теоретической.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\mathbf{A}_1(y_1, y_2, \dots, y_n)^T = \mathbf{A}_0(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 1)^T,$$

где

$$\mathbf{A}_1 = (a_{ij}), \quad i=1 \div n, \quad j=1 \div n, \quad \mathbf{A}_0 = (b_{il}), \quad l=1 \div m.$$

Разрешая ее относительно неизвестных y_j , получим

$$A_1 y_j = B_j^1 x_1 + B_j^2 x_2 + \dots + B_j^{m-1} x_{m-1} + B_j^m,$$

где $A_1 = \det A_1$, $B_j^l = \sum_{i=1}^n b_{il} A_j^i$, A_j^i — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A_1 . Легко видеть, что B_j^l — определитель, составленный из матрицы A_1 , в которой столбец j заменен столбцом l матрицы A_0 . По аналогии введем обобщенный минор $B_{j_1 j_2 \dots j_s}^{l_1 l_2 \dots l_s}$ матрицы A_1 относительно A_0 порядка s , представляющий собой определитель матрицы A_1 , в которой столбцы j_i заменены на столбцы l_i матрицы A_0 [8].

Применяя формулу обращения детерминантов [4,9], нетрудно показать, что

$$\begin{vmatrix} B_{j_1}^{l_1} & B_{j_2}^{l_1} & \dots & B_{j_s}^{l_1} \\ B_{j_1}^{l_2} & B_{j_2}^{l_2} & \dots & B_{j_s}^{l_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{j_1}^{l_s} & B_{j_2}^{l_s} & \dots & B_{j_s}^{l_s} \end{vmatrix} = A_1^{s-1} B_{j_1 j_2 \dots j_s}^{l_1 l_2 \dots l_s},$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Неравенства (14) после вычисления определителей принимают вид

$$\frac{(-1)^m}{D_1^1} [(1+p)x_0 - (1-q)y_0 + 1] \leq 0;$$

$$\frac{(-1)^n}{D_1^1} [(1+s)x_0 - (1-q)y_0 + 1] \leq 0;$$

$$\frac{(-1)^p}{D_1^1} [- (1-q')x_0 + (1+p')y_0 - 1] \geq 0;$$

$$\frac{(-1)^q}{D_1^1} [- (1-q')x_0 + (1+s')y_0 - 1] \geq 0,$$

где

$$p = \frac{\alpha n_1 (1+v_1)}{(1+n_1)[\lambda(1+v_1) + \mu_1 + (1-\alpha\beta)\mu_1 v_1]},$$

$$q = \frac{\alpha v_1}{\lambda(1+v_1) + \mu_1 + (1-\alpha\beta)\mu_1 v_1},$$

$$s = \frac{(2\lambda + m_1 + \mu_1)(1+v_1) - \alpha\beta\mu_1 v_1}{\beta m_1 [\lambda(1+v_1) + \mu_1 + (1-\alpha\beta)\mu_1 v_1]},$$

p' , q' и s' получаются из p , q и s заменой m_1 на μ_1 , а n_1 на v_1 и обратно. Вводя обозначения

$$D \left[\begin{matrix} i_1 i_2 \dots i_n \\ j_1 j_2 \dots j_n \end{matrix} \right] = \frac{D_{j_1 j_2 \dots j_n}^{i_1 i_2 \dots i_n}}{D_{i_1 i_2 \dots i_n}^{j_1 j_2 \dots j_n}}, \quad \gamma_D [j_1 j_2 \dots j_n] = \frac{D_{i_1 i_2 \dots i_n}^{1 2 \dots n}}{D_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{1 2 \dots (n-1)}},$$

запишем для точек пересечения границ $\Gamma_{j_1}^1 = 0$ и $\Gamma_{j_2}^1 = 0$ следующие соотношения:

$$\bar{x}_0 = D \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & j_1 & j_2 \end{bmatrix}; \quad \bar{y}_0 = -D \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & j_1 & j_2 \end{bmatrix};$$

$$(-1)^{\eta_{i+1}} \gamma_D [1 j_1 j_2 j] \leq 0,$$

где $j \neq j_1, j \neq j_2$. Эти точки показаны на рис. 3, где

$$a = rg_1, \quad b = rg_0,$$

$$c = \frac{1}{1 + \alpha a [\lambda(1+a) + a + (1-\alpha\beta)a^2]^{-1}},$$

$$d = \frac{1}{1 + \alpha a (1 + \beta b) (\lambda + b)^{-1} (1 + a)^{-1}},$$

$$e = \frac{1}{1 + [(\lambda + b)(1 + a) + \alpha a] (\alpha \beta ab)^{-1}}, \quad f = \frac{1}{2(1 + 1/\beta b)}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Точки пересечения вспомогательных границ $\Gamma_{j_1}^1 = 0$ и $\Gamma_{j_2}^1 = 0$ определяются соотношениями

$$x_{j_1 j_2 j_3}^{j_1} = D \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix}, \quad y_{j_1 j_2 j_3}^{j_1} = -D \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix},$$

$$(-1)^{\eta_{i+1}} \gamma_D [j_1 j_2 j_3 j_4] \leq 0,$$

где $j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_4$, $j_i = 2 \div 5$, и имеют координаты

$$x_{\mu n}^m = -\frac{\alpha a}{1+a}, \quad y_{\mu n}^m = \frac{1 + (1-\alpha) a}{1+a}, \quad a = rg_1, \quad b = rg_0 \quad (A, n=1);$$

$$x_{\mu v}^m = -\frac{1 + (1-\alpha) a}{1+a}, \quad y_{\mu v}^m = \frac{\alpha a}{1+a} \quad (B, n=1);$$

$$x_{n v}^{\mu} = \frac{\lambda + (1-\beta) b}{1+\beta b}, \quad y_{n v}^{\mu} = \frac{\lambda+b}{1+\beta b} \quad (C, m=0);$$

$$x_{n v}^m = -\frac{\lambda + b}{1+\beta b}, \quad y_{n v}^m = -\frac{\lambda + (1-\beta) b}{1+\beta b} \quad (D, \mu=0).$$

Справа здесь указаны обозначение точки на рис. 4 и переменная η_{i+1} .

Построив по этим точкам вспомогательные границы $\Gamma_{j_1}^1 = 0$ (см. рис. 4) и используя значение переменной η_{i+1} , нетрудно определить расположение вспомогательных областей линейности G_{m011} , $G_{0\mu11}$, $G_{00\mu1}$, G_{001v} в пределах области M , определяемой границами Γ_{μ}^m , Γ_v^m , Γ_v^n и Γ_n^m . В M нетрудно построить и остальные вспомогательные области, если по известным выражениям для определителей $D_{j_1}^1$:

$$D_2^1 = D_3^1 = (1-\alpha) r(g_n + g_v) + 1 - (2\alpha - 1) r^2 g_n g_v,$$

$$D_4^1 = -2\lambda(1+\nu_1) - (1-\beta)m_1 - \mu_1 - (1+\alpha\beta-\beta)m_1\nu_1 - (1-\alpha\beta)\mu_1\nu_1 < 0,$$

$$D_5^1 = -2\lambda(1+n_1) - (1-\beta)\mu_1 - m_1 - (1+\alpha\beta-\beta)\mu_1n_1 - (1-\alpha\beta)m_1n_1 < 0$$

найти границы, у которых прилегающие области линейности лежат по одну сторону от них. Такие границы (Γ_n^m и Γ_v^m при $j_1=2$, Γ_v^μ и Γ_n^μ при $j_1=3$) существуют только при условии

$$\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}g_0 < \frac{1}{r} < (2\alpha-1)g_1,$$

которое совместно с неравенством (10) разбивает плоскость параметров системы на три области (см. рис. 2).

Используя индексы η_{i+1} вспомогательных областей линейности, нетрудно произвести разбиение прямой z в соответствии с неравенствами (12), определяя расположение границ z_{j_i} путем последовательного применения равенства

$$\operatorname{sgn}[z_{j_i} - z_j] = \operatorname{sgn}\left[\frac{A_2(-1)^{\eta_{j+1}}}{D_j^1}\right],$$

которое получается из соотношений (17) и (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. Полупроводниковые диоды и триоды и их применение, Сб. статей, ЦБТИ, М., 1958.
3. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 766 (1959).
4. Н. И. Ашбель и Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 319 (1961).
5. Н. А. Железцов и Л. В. Родыгин, ДАН СССР, 81, 391 (1961).
6. Н. А. Железцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 40 (1958).
7. М. И. Фейгин, Сб. памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955.
8. Л. В. Постников, Диссертация, Горький.
9. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТЛ, М., 1953.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 декабря 1963 г

THE DYNAMICS OF FRÜHAUF CIRCUIT WITH SEMICONDUCTOR TRIODES

M. A. Chubarov

The dynamics of Frühauf circuit has been considered using the piecewise linear approximation of the transistors static characteristics taking into account the small parasitic parameters. The existence of autooscillations has been shown and their period and amplitude have been found.

УДК 621.372 061

ДИНАМИКА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯХ

Б. И. Яхинсон, А. С. Розенфельд

Обсуждается методика составления системы линейных разностных уравнений для исследования переходных и установившихся режимов линейной электрической цепи, на входе которой многократно включается и отключается идеализированный ключ мгновенного действия. Получены формулы для определения коэффициентов разностных уравнений непосредственно по входному сопротивлению (проводимости) цепи с постоянными параметрами и вынужденными составляющими тока и напряжения ключа. Рассмотрены условия установления в цепи с ключом периодического процесса.

1. Многие устройства автоматического управления, связи и вычислительной техники работают в режиме многократно повторяющихся, относительно быстрых переключений. Исследование динамики таких систем в некоторых случаях может быть выполнено с помощью модели в виде линейной электрической цепи, параметры которой претерпевают изменения из-за циклически повторяющихся срабатываний выключающегося мгновенного действия. Об актуальности задачи свидетельствует как наличие работ, освещающих методику анализа периодических процессов в моделях подобного рода [1-3], так и ряда работ, посвященных исследованию переходных и установившихся процессов таких моделей путем составления и решения линейных разностных уравнений [4-6]. Этим вопросам посвящена также недавно вышедшая монография [7].

В настоящей статье изложена методика составления системы линейных разностных уравнений электрической цепи с ключом, коэффициенты которой вычисляются с помощью готовых, стандартных формул непосредственно по входному операторному сопротивлению (проводимости) цепи с постоянными параметрами и вынужденным составляющим тока и напряжения ключа.

Для простейшего режима периодических переключений решение системы разностных уравнений выполнено до конца, что позволило рассмотреть особенности установления стационарного процесса.

2. Линейная электрическая цепь произвольной структуры с постоянными сосредоточенными параметрами рассматривается в виде активного двухполюсника, на входе которого многократно отключается и включается идеализированный ключ мгновенного действия. При этом допускаются так называемые «запретные» коммутации, сопровождающиеся скачками напряжений емкостей и токов индуктивностей [8]. Интервалы времени, на протяжении которых ключ последовательно находится в положении «отключено» и «включено», составляют цикл переключений цепи; число таких циклов неограниченно возрастает по мере удаления начала работы ключа в отдаленное прошлое.

Каждое срабатывание ключа влечет за собой прерывистое изменение коэффициентов линейного дифференциального уравнения рассмат-

риваемого двухполюсника. Поскольку на интервалах времени между моментами переключения коэффициенты этого уравнения остаются постоянными, полные изменения коэффициентов представляются кусочно-постоянными функциями времени.

Для отыскания решения линейного дифференциального уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами рассмотрим произвольный k -ый цикл переключения двухполюсника, начинающийся в момент времени t_k с размыкания ключа и состоящий из промежутков времени Δ_k^- и Δ_k^+ , в которые ключ соответственно разомкнут и замкнут.

Связь между напряжением и током ключа в операторной форме выражается уравнениями

$$\begin{aligned} U^-(k, p) &= Z(p) I^+(k, p); \\ I^+(k, p) &= Y(p) U^-(k, p), \end{aligned} \quad (1)$$

в которых $U^-(k, p) = U(k, p)$ и $I^+(k, p) = I(k, p)$ — напряжение и ток ключа на смежных интервалах Δ_k^- и Δ_k^+ k -го цикла переключений, а $Z(p)$ и $Y(p)$ — входные сопротивление и проводимость двухполюсника на зажимах разомкнутого ключа при накоротко замкнутых источниках ЭДС и отключенных источниках тока, причем

$$Z(p) = \frac{1}{Y(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{H_+(p)}{H_-(p)}.$$

Числители $H_+(p)$ входного сопротивления и $H_-(p)$ — входной проводимости выражают собой характеристический многочлен дифференциального уравнения двухполюсника соответственно в режиме короткого замыкания входа и в режиме холостого хода.

Индекс «—» у $U^-(k, p)$ и индекс «+» у $I^+(k, p)$ можно опустить, поскольку напряжение на ключе отлично от нуля только в режиме холостого хода, равно как и ток ключа отличен от нуля только в режиме короткого замыкания.

Пользуясь зависимостью (1) между величинами на смежных интервалах времени произвольного цикла переключений, можно составить систему разностных уравнений для определения тока и напряжения ключа.

При наличии у характеристических многочленов $H_+(p)$ и $H_-(p)$ только простых корней p_a^+ и p_a^- соответственно, напряжение и ток ключа могут быть представлены в виде

$$u(k; t) = u_n(t) + \sum_{\alpha=1}^m U_\alpha(k) \exp [p_\alpha^-(t - t_k)], \quad k = 1, 2, \dots; \quad (2)$$

$$i(k; t) = i_n(t) + \sum_{\alpha=1}^m I_\alpha(k) \exp [p_\alpha^+(t - t_k - \Delta_k^-)], \quad k = 1, 2 \dots \quad (3)$$

Вынужденные составляющие напряжения $u_n(t)$ и тока $i_n(t)$ ключа не зависят от номера цикла переключений двухполюсника и могут быть определены одним из известных методов. Поэтому в дальнейшем будем считать, что они известны.

Коэффициенты $U_\alpha(k)$, $I_\alpha(k)$ постоянны для каждого цикла переключений, они определяются путем составления и решения системы соответствующих линейных разностных уравнений, для получения которых воспользуемся интегралом Дионеля [9]. Запишем связь между

свободной составляющей тока ключа и напряжением на его зажимах для k -го цикла переключений:

$$\sum_{\alpha=1}^n I_{\alpha}(k) \exp \left[p_{\alpha}^{+}(t-t_k-\Delta_k^{-}) \right] = - \int y'(t-\tau) u(k; \tau) d\tau \Big|_{\tau=t_k+\Delta_k^{-}} = \\ = - \int \sum_{\alpha=1}^n \frac{\exp [p_{\alpha}^{+}(t-\tau)]}{z'(p_{\alpha}^{+})} \left\{ u_n(\tau) + \sum_{v=1}^m U_v(k) \exp [p_v^{-}(\tau-t_k)] \right\} d\tau \Big|_{\tau=t_k+\Delta_k^{-}}, \quad (4)$$

где $y(t)$ — производная входной переходной проводимости двухполюсника, в котором накоротко замкнуты источники ЭДС и отключены источники тока.

Приравнивая коэффициенты у экспонент в правой и левой частях тождества (4), получим систему линейных алгебраических уравнений, связывающих коэффициенты I_{α} и U_v , k -го цикла переключений:

$$I_{\alpha}(k) = \frac{-1}{Z'(p_{\alpha}^{+})} \left\{ \int u_n(\tau) \exp [p_{\alpha}^{+}(t_k+\Delta_k^{-}-\tau)] d\tau \Big|_{\tau=t_k+\Delta_k^{-}} + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^m U_v(k) \frac{\exp [p_v^{-}\Delta_k^{-}]}{p_v^{-}-p_{\alpha}^{+}} \right\}, \quad (5)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, n.$$

Аналогично из связи между свободной составляющей напряжения ключа на $(k+1)$ -ом и током ключа на k -ом цикле переключений:

$$\sum_{v=1}^m U_v(k+1) \exp [p_v^{-}(t-t_{k+1})] = - \int z'(t-\tau) i(k; \tau) d\tau \Big|_{\tau=t_{k+1}} = \\ = - \int \sum_{v=1}^m \frac{\exp [p_v^{-}(t-\tau)]}{Y'(p_v^{-})} \left\{ i_n(\tau) + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^n I_{\alpha}(k) \exp [p_{\alpha}^{+}(\tau-t_k-\Delta_k^{-})] \right\} d\tau \Big|_{\tau=t_{k+1}},$$

где $z'(t)$ — производная входного переходного сопротивления двухполюсника, получим:

$$U_v(k+1) = \frac{-1}{Y'(p_v^{-})} \left[\int i_n(\tau) \exp [p_v^{-}(t_{k+1}-\tau)] d\tau \Big|_{\tau=t_{k+1}} + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^n I_{\alpha}(k) \frac{\exp [p_{\alpha}^{+}\Delta_k^{+}]}{p_{\alpha}^{+}-p_v^{-}} \right], \quad (6)$$

$$v = 1, 2, \dots, m.$$

Подстановка значений $I_{\alpha}(k)$, определенных соотношениями (5), в (6) образует систему линейных разностных уравнений m -го порядка для коэффициентов свободных составляющих напряжения ключа в положении «отключено»:

$$- U_{\nu}(k+1) + \sum_{\sigma=1}^m a_{\nu\sigma}^-(k) U_{\sigma}(k) = b_{\nu}^-(k), \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

где

$$a_{\nu\sigma}^-(k) = \frac{\exp[p_{\sigma}^+ \Delta_k^-]}{Y'(p_{\nu}^-)} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\exp[p_{\alpha}^+ \Delta_k^+]}{Z'(p_{\alpha}^+) (p_{\alpha}^+ - p_{\nu}^-) (p_{\sigma}^- - p_{\alpha}^+)}, \quad (8)$$

$$b_{\nu}^-(k) = \frac{1}{Y'(p_{\nu}^-)} \left\{ \int i_n(\tau) \exp[p_{\nu}^-(t_{k+1} - \tau)] d\tau \Big|_{\tau=t_{k+1}} - \right. \\ \left. - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\int u_n(\tau) \exp[p_{\alpha}^+(t_{k+1} - \tau)] d\tau \Big|_{\tau=t_k + \Delta_k^-}}{Z'(p_{\alpha}^+) (p_{\alpha}^+ - p_{\nu}^-)} \right\} \quad (9)$$

и p_{σ}^- принимает поочередно все значения p_{ν}^- .

Подстановка значений $U_{\nu}(k)$ из (6) в (5) образует систему линейных разностных уравнений n -го порядка для коэффициентов свободных составляющих тока ключа в положении «включено»:

$$- I_{\alpha}(k+1) + \sum_{\sigma=1}^m a_{\alpha\sigma}^+(k) I_{\sigma}(k) = b_{\alpha}^+(k), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

где

$$a_{\alpha\sigma}^+(k) = \frac{\exp[p_{\sigma}^+ \Delta_k^+]}{Z'(p_{\alpha}^+)} \sum_{\nu=1}^m \frac{\exp[p_{\nu}^- \Delta_{k+1}^-]}{Y'(p_{\nu}^-) (p_{\nu}^- - p_{\sigma}^+) (p_{\alpha}^+ - p_{\nu}^-)}; \quad (11)$$

$$b_{\alpha}^+(k) = \frac{1}{Z'(p_{\alpha}^+)} \left\{ \int u_n(\tau) \exp[p_{\alpha}^+(t_{k+1} + \Delta_{k+1}^- - \tau)] d\tau \Big|_{\tau=t_{k+1} + \Delta_{k+1}^-} - \right. \\ \left. - \sum_{\nu=1}^m \frac{\int i_n(\tau) \exp[p_{\nu}^-(t_{k+1} + \Delta_{k+1}^- - \tau)] d\tau \Big|_{\tau=t_{k+1}}}{Y'(p_{\nu}^-) (p_{\nu}^- - p_{\alpha}^+)} \right\} \quad (12)$$

и p_{σ}^+ принимает поочередно все значения p_{α}^+ .

Решения уравнений (7) и (10) позволяют вычислять ток и напряжение ключа в виде сумм (2) и (3). Для расчета линейной электрической цепи в режиме циклически повторяющихся переключений достаточно решить только одну из систем разностных уравнений. Выбор системы разностных уравнений (7) или (10) определяется конкретными особенностями задачи и возможным уменьшением объема вычислительной работы. Обычно определяющим оказывается соотношение между n и m .

Отыскание токов или напряжений в любой ветви рассматриваемой цепи производится после вычисления функций $u(k; t)$ и $i(k; t)$ одним из известных приемов.

3. Интервалы времени Δ_k^- , Δ_k^+ в общем случае могут изменяться с номером цикла переключений. Коэффициенты уравнений (7) и (10) при этом также меняются с номером k , что существенно усложняет определение решений.

В простейшем режиме периодических переключений, когда длительность цикла является периодом, интервалы времени Δ^- , Δ^+ и коэффициенты $a_{\nu\sigma}^-$, $a_{\alpha\sigma}^+$ разностных уравнений оказываются постоянными. Система линейных разностных уравнений с постоянными коэффициента-

ми может быть получена и для сложных периодических режимов переключений двухполюсника, если в уравнениях (7) либо (10) последовательно выполнить подстановку переменных, так, чтобы аргументом неизвестных функций стал номер периода. Методика определения решений таких разностных уравнений хорошо разработана [10].

Так, например, общее решение системы уравнений (7) определяется в виде суммы

$$U_v(k) = A_{nv}(k) + \sum_{\sigma=1}^m A_{v\sigma} \lambda_{\sigma}^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где $A_{nv}(k)$ — частное решение, обусловленное правой частью уравнений (7), $A_{v\sigma}$ — постоянные коэффициенты, зависящие от начальных условий в момент первого срабатывания ключа, λ_{σ} — корни характеристического многочлена

$$\det(a_{ij} - \delta_{ij}\lambda) = 0, \quad (14)$$

определяющие условия установления стационарного процесса в линейной цепи с ключом.

Этот режим будет периодическим, с периодом, равным длительности цикла переключений, если правые части разностных уравнений (7) или (10) не зависят от моментов срабатывания ключа и все $|\lambda_{\sigma}| < 1$. Такое положение имеет место, например, когда период изменения вынужденных составляющих тока $i_n(t)$ и напряжения $u_n(t)$ кратен периоду переключений цепи.

Для расчета только периодических процессов в линейной цепи с ключом достаточно в соотношениях (7), (10) выполнить подстановки $U_v(k+1) = U_v(k)$, $I_a(k+1) = I_a(k)$ и решить полученную таким путем систему линейных алгебраических уравнений.

Режим линейной цепи с ключом, когда модуль одного из корней характеристического многочлена (14) равен единице, существенно зависит от аргумента корня или его знака (если корень веществен). Этот случай является критическим и в каждой конкретной задаче требует специального исследования.

Два нижеследующих примера поясняют порядок применения полученных формул для расчета линейных электрических цепей с ключом многократного действия.

4. Рассмотрим последовательный контур R , L , C с источником постоянного напряжения E . Ключ, шунтирующий емкость, начиная с момента времени $t = 0$, периодически включается и отключается; длительности интервалов «включено» и «отключено» соответственно равны Δ^+ и Δ^- . Требуется определить ток и напряжение на сопротивлении R при заданных начальных условиях.

В этом случае входное сопротивление цепи на зажимах ключа, при закороченном источнике напряжения, равно

$$Z(p) = \frac{(1/pC)(R + pL)}{R + pL + 1/pC} = \frac{p - p^+}{C(p - p_1^-)(p - p_2^-)} = \frac{H_+(p)}{H_-(p)}, \quad (15)$$

причем корни числителя и знаменателя выражаются следующим образом:

$$p^+ = -2\delta, \quad p_1^- = -\delta + \omega, \quad p_2^- = -\delta - \omega, \quad \delta = R/2L, \quad \omega = \sqrt{\delta^2 - 1/LC}.$$

Коэффициенты у экспонент свободных составляющих тока ключа определяются (см. (10)) разностным уравнением первого порядка:

$$-I(k+1) + a^+ I(k) = b^+, \quad (16)$$

где, согласно (11) и (12), при $u_n = E$ и $i_n = E/R$,

$$a^+ = \exp[-\delta(2\Delta^+ + \Delta^-)] \left\{ \operatorname{ch}(\omega\Delta^-) - \frac{\delta}{\omega} \operatorname{sh}(\omega\Delta^-) \right\}; \quad (17)$$

$$b^+ = \frac{E}{R} \left[1 - \exp(-\delta\Delta^-) \left\{ \operatorname{ch}(\omega\Delta^-) + \frac{\delta}{\omega} \operatorname{sh}(\omega\Delta^-) \right\} \right]. \quad (18)$$

Вынужденная составляющая определяется из условий периодического режима как $A_n = \frac{b^+}{a^+ - 1}$, а корень характеристического многочлена $\lambda = a^+$. Общим решением уравнения (16) является сумма

$$I(k) = A_n + A \lambda^{k-1} = A_n + [I(1) - A_n] \lambda^{k-1} = I(1)(a^+)^{k-1} - b^+ \frac{1 - (a^+)^{k-1}}{1 - a^+}. \quad (19)$$

Ток ключа определяется (см. (2) и (3)) зависимостью

$$i(k; t) = \frac{E}{R} + I(k) \exp[-2\delta t], \quad (20)$$

где принято $t_k + \Delta_k^- = 0$, а напряжение

$$u(k; t) = E + U_1(k) \exp[p_1^- t] + U_2(k) \exp[p_2^- t]. \quad (21)$$

Здесь $t_k = 0$ и

$$U_1(k) = \frac{1}{2\omega C} \left\{ I(k) \exp[-2\delta\Delta^+] - \frac{E}{R} \frac{\delta + \omega}{\delta - \omega} \right\}; \quad (22)$$

$$U_2(k) = \frac{-i}{2\omega C} \left\{ I(k) \exp[-2\delta\Delta^+] - \frac{E}{R} \frac{\delta - \omega}{\delta + \omega} \right\}. \quad (23)$$

Ток на выходе четырехполюсника содержит сингулярную составляющую $C u(k; 0) \delta(t)$, поскольку ключ шунтирует емкость. При определении зависимости токов и напряжений четырехполюсника от номера цикла переключений вычисление такого рода составляющих решений дифференциальных уравнений цепи не является необходимым.

В интервале времени, когда на входе рассматриваемого четырехполюсника имеет место короткое замыкание, ток на выходе совпадает с током ключа и описывается уравнением (20), а напряжение равно $R i(k; t)$.

Во время холостого хода ток на выходе совпадает с током емкости:

$$i_{\text{вых}}^-(k; t) = C \frac{d}{dt} u(k; t) = \{U_1(k) p_1^- \exp[p_1^- t] + U_2(k) p_2^- \exp[p_2^- t]\} C, \quad (24)$$

а напряжение равно $R i_{\text{вых}}^-(k; t)$.

5. Рассмотрим контур, образованный последовательным соединением источника постоянного напряжения E , индуктивности L и двух емкостей C и C_0 . Емкость C_0 шунтирована периодически срабатывающим ключом. Необходимо определить условия, которые должны быть наложены на режим работы ключа и значения параметров цепи, для того чтобы в ней установился периодический процесс.

Входное сопротивление цепи на зажимах ключа

$$Z(p) = \frac{(1/pC_0)(pL + 1/pC)}{pL + 1/pC + 1/pC_0} = \frac{(p - p_1^+)(p - p_2^+)}{(p - p_1^-)(p - p_2^-)pC_0} = \frac{H_+(p)}{H_-(p)}, \quad (25)$$

где

$$p_1^+ = j\omega_+, \quad p_2^+ = -j\omega_+; \quad p_1^- = j\omega_-, \quad p_2^- = -j\omega_-, \quad p_3^- = 0,$$

$$\omega_+ = 1/\sqrt{LC}, \quad \omega_- = \sqrt{(1/L)(1/C + 1/C_0)}.$$

Система уравнений (10) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} -I_1(k+1) + a_{11}^+ I_1(k) + a_{12}^+ I_2(k) &= b_1^+; \\ -I_2(k+1) + a_{21}^+ I_1(k) + a_{22}^+ I_2(k) &= b_2^+. \end{aligned} \quad (26)$$

В рассматриваемой цепи устанавливается периодический процесс, если система (26) имеет отличное от нуля и ограниченное при $k \rightarrow \infty$ решение. Для этого по крайней мере один из коэффициентов b_1^+ либо b_2^+ должен быть отличен от нуля и модули всех корней характеристического многочлена

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11}^+ - \lambda; & a_{12}^+ \\ a_{21}^+ ; & a_{22}^+ - \lambda \end{array} \right| = 0 \quad (27)$$

должны быть меньше единицы.

После подстановки в формулы (12) вынужденных составляющих напряжения $u_n = EC(C + C_0)^{-1}$ и тока $i_n = 0$ и значений корней p_1^+ и p_2^+ получим

$$\begin{aligned} b_1^+ &= -\frac{1}{Z'(p_1^+)} \frac{u_n}{-p_1^+} = -\frac{u_n}{2j\sqrt{\frac{L}{C}}}; \\ b_2^+ &= -\frac{1}{Z'(p_2^+)} \frac{u_n}{-p_2^+} = +\frac{u_n}{2j\sqrt{\frac{L}{C}}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Модули корней уравнения (27) меньше единицы, если значения его коэффициентов удовлетворяют неравенству

$$|a_{11}^+ + a_{22}^+| < 1 + |a_{11}^+ a_{22}^+ - a_{12}^+ a_{21}^+|. \quad (29)$$

Из (11) получим попарно комплексно-сопряженные коэффициенты:

$$a_{11}^+ = \exp[j\omega_+ \Delta^+] \left\{ \cos \frac{\omega_- \Delta^-}{2} + j \frac{\omega_+}{\omega_-} \sin \frac{\omega_- \Delta^-}{2} \right\}; \quad (30)$$

$$a_{12}^+ = -\exp[-j\omega_+ \Delta^+] \left\{ 1 - \frac{\omega_+^2}{\omega_-^2} \right\} \sin^2 \frac{\omega_- \Delta^-}{2}; \quad (31)$$

$$a_{21}^+ = -\exp[j\omega_+ \Delta^+] \left\{ 1 - \frac{\omega_+^2}{\omega_-^2} \right\} \sin^2 \frac{\omega_- \Delta^-}{2}; \quad (32)$$

$$a_{22}^+ = \exp[-j\omega_+ \Delta^+] \left\{ \cos \frac{\omega_- \Delta^-}{2} - j \frac{\omega_+}{\omega_-} \sin \frac{\omega_- \Delta^-}{2} \right\}^2. \quad (33)$$

Неравенство (29) при этом преобразуется к виду

$$\left| \cos(\omega_+ \Delta^+) \left[\cos^2 \frac{\omega_- \Delta^-}{2} - \frac{\omega_+^2}{\omega_-^2} \sin^2 \frac{\omega_- \Delta^-}{2} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\omega_+}{\omega_-} \sin(\omega_- \Delta^-) \sin(\omega_+ \Delta^+) \right| < \cos^2 \frac{\omega_- \Delta^-}{2} + \frac{\omega_+^2}{\omega_-^2} \sin^2 \frac{\omega_- \Delta^-}{2} \quad (34)$$

и определяет зависимость между параметрами цепи и режимом ее переключений, при выполнении которых в этой цепи устанавливается периодический процесс. Оно представляет собой условие параметрического возбуждения периодических колебаний в рассматриваемой электрической цепи.

Для ряда частных случаев соотношение (34) упрощается. Такое положение имеет место, например, для $\cos(\omega_- \Delta^-/2) = \pm 1$, при котором неравенство (34) преобразуется к виду $|\cos \omega_+ \Delta^+| < 1$. В этом случае $a_{12}^+ = a_{21}^+ = 0$, $a_{11}^+ = \exp[j\omega_+ \Delta^+]$, $a_{22}^+ = \exp[-j\omega_+ \Delta^+]$ и система (26) распадается на два независимых разностных уравнения первого порядка, общее решение которых представляется суммами типа (19).

При $\cos(\omega_- \Delta^-/2) = \pm 1$ и $\cos(\omega_+ \Delta^+) = +1$ коэффициент a^+ и корень характеристического многочлена соответствующего разностного уравнения равны единице. Общее решение этого уравнения (после раскрытия в (19) неопределенности по правилу Лопитала) представляется в виде

$$I(k) = I(1) + (k - 1) b^+. \quad (35)$$

Соотношение (35) показывает, что при нарушении условия $|\cos(\omega_+ \Delta^+)| < 1$ в рассматриваемой идеализированной цепи без потерь возможен неограниченный рост коэффициентов у экспонент свободных составляющих токов и напряжений, что представляет собой режим параметрического резонанса.

При $\cos(\omega_- \Delta^-/2) = \pm 1$ и $\cos(\omega_+ \Delta^+) = -1$ коэффициент a^+ и корень характеристического многочлена равны минус единице. Общее решение (19) в этом случае остается ограниченным при $k \rightarrow \infty$, и в цепи устанавливается периодический режим. Полное решение поставленной задачи определяется неравенством (34). Рассмотрение критического случая, когда модуль корня характеристического многочлена разностного уравнения равен единице, позволило проиллюстрировать влияние знака корня на процесс установления стационарного режима в линейной цепи с ключом.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Bennett, IRE Trans. on Circuit Theory, CT-2, 17 (1955).
2. A. Fettweis, IRE Trans. on Circuit Theory, CT-6, 252 (1959).
3. Л. А. Синицкий, Ю. М. Шумков, Всесоюзная межвузовская конференция по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей, Средне-Азиатский политехнич. инст., Ташкент, 1960, Сборник докладов, № 2—1.
4. М. Ф. Гарднер, Д. Л. Бернс, Переходные процессы в линейных системах, Гостехиздат, М., 1949.
5. Я. З. Цыпкин, Теория импульсных систем, Физматгиз, М., 1958.
6. Ф. М. Килин, Автоматика и телемеханика, 18, 1061 (1957).
7. S. Hayashi, Periodically Interrupted Electric Circuits, Denki-Shoin, Kyoto, Japan, 1961.
8. А. С. Розенфельд, Б. И. Яхинсон, Электричество, № 3, 50 (1962).
9. А. С. Розенфельд, Изв. высш. уч. зав.—Электромеханика, № 4, 363 (1962).
10. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Физматгиз, М., 1959.

DYNAMICS OF LINEAR ELECTRIC CIRCUITS AT CYCLIC SWITCHINGS

B. I. Yakhinson, A. S. Rosenfel'd

The method of obtaining the system of linear difference equations are discussed for the investigation of transient and stationary regimes of a linear electric circuit in the input of which an idealized key of immediate action is multiple switched on and off. Formulae are obtained for the determination of difference equations coefficients directly from the input resistance (conductance) of the line with constant parameters and forced components of key current and voltage. The conditions are considered of setting up the periodical process in the circuit with the key.

УДК 621.373.45

ЖЕСТКИЙ РЕЖИМ АВТОКОЛЕБАНИЙ ТРИГГЕРА*

М. И. Фейгин

Выделена область значений параметров триггера, при которых имеют место два устойчивых состояния равновесия и устойчивые разрывные автоколебания. Вычислен период автоколебаний и произведена оценка возможностей переброса триггера из одного устойчивого режима в другие с помощью узкого импульса.

1. Рассматривается схема симметричного триггера, собранная на двух триодах и изображенная на рис. 1. Если характеристики анодного и сеточного токов идеализировать кусочно-линейными функциями сеточных напряжений, то уравнения движений триггера в безразмерной форме принимают вид [1]

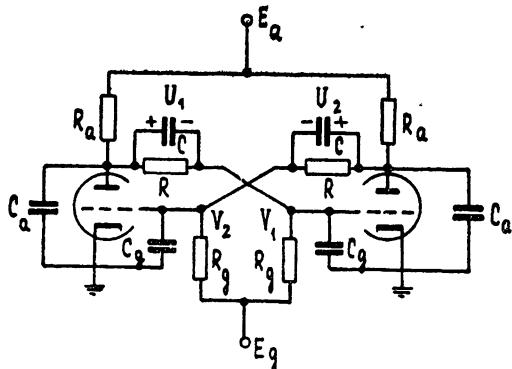


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= qf(x_1) + x_1 - py_1 - \varepsilon_g; \\ \dot{y}_2 &= qf(x_2) + x_2 - py_2 - \varepsilon_g; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} -\lambda \dot{x}_1 &= kf(x_2 + 1) + \\ &+ gf(x_1) + x_1 + y_1 + \gamma; \\ -\lambda \dot{x}_2 &= kf(x_1 + 1) + \\ &+ gf(x_2) + x_2 + y_2 + \gamma. \end{aligned}$$

В предположении, что учитывающие паразитные емкости малы, т. е. $C_a \ll C$ и $C_g \ll C$, коэффициенты уравнений (1) равны

$$q = S_g R_g; \quad p = \frac{R_a + R_g}{R}; \quad k = \frac{S_a R_a R_g}{R_a + R_g}; \quad (2)$$

$$g = \frac{S_g R_a R_g}{R_a + R_g}; \quad \lambda = \frac{R_a R_g (C_a + C_g)}{C(R_a + R_g)^2}; \quad \gamma = -\frac{R_a \varepsilon_g + R_g \varepsilon_a}{R_a + R_g}.$$

В качестве масштаба времени выбрана величина $T_0 = C(R_a + R_g)$, а безразмерные напряжения x, y_0, ε_a и ε_g пропорциональны соответственно напряжениям v, u, E_a и E_g . Кусочно-линейная функция $f(x)$ определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

* Некоторые результаты статьи доложены на II Всесоюзной межвузовской конференции по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей, Ташкент, 1963.

Четырехмерное фазовое пространство системы (1) делится на девять областей (рис. 2), в каждой из которых уравнения (1) линейны.

Полагаем, что коэффициенты уравнений (1) удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{\lambda} \gg q \gg k, g, p, \gamma, \varepsilon_g. \quad (3)$$

Условие (3) позволяет применить к изучению динамики триггера приближенный метод исследования, заключающийся в разбиении четырехмерного фазового пространства на подпространства, в которых совершаются движения с различными скоростями [1-3].

Самое быстрое движение третьего порядка обозначим через D_3 ; подпространство, в котором оно происходит, выделяется из системы (1) при условии $\lambda \rightarrow 0$. Уравнения D_3 имеют вид

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{const}; \quad -\lambda \dot{x}_1 = kf(x_2+1) + gf(x_1) + x_1 + y_1 + \gamma; \\ y_2 &= \text{const}; \quad -\lambda \dot{x}_2 = kf(x_1+1) + gf(x_2) + x_2 + y_2 + \gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

Равновесные состояния D_3 расположены на поверхности

$$\begin{aligned} kf(x_2+1) + gf(x_1) + x_1 + y_1 + \gamma &= 0; \\ kf(x_1+1) + gf(x_2) + x_2 + y_2 + \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

и устойчивы лишь в областях I, IV, VII, VIII, IX, где выполняется условие

$$[1 + gf'(x_1)][1 + gf'(x_2)] - k^2f'(x_1+1)f'(x_2+1) > 0.$$

Таким образом, более медленные движения могут иметь место лишь в указанных областях и происходят в сколь угодно малой окрестности поверхности (5).

Уравнения движений второго порядка D_2 получаем из системы (1) при условии $\lambda = 0$, $\frac{1}{q} \rightarrow 0$. Но так как коэффициент q присутствует в уравнениях лишь для областей с сеточными токами (I и IX), то D_2 могут иметь место лишь только в указанных областях. Уравнения D_2 включают уравнения поверхности (5) и уравнения

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= gf(x_1); \quad y_2 = \text{const} \quad \text{в области I}, \\ \dot{y}_2 &= gf(x_2); \quad y_1 = \text{const} \quad \text{в области IX}. \end{aligned} \quad (6)$$

Равновесные состояния D_2 устойчивы и расположены на пересечении поверхности (5) с плоскостями $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$.

Для областей без сеточных токов* (IV, VII, VIII) условие $\lambda = 0$

* Уравнения D_1 в областях с сеточными токами получаются из системы (1), если положить $\lambda = 0$ и $\frac{1}{q} = 0$.

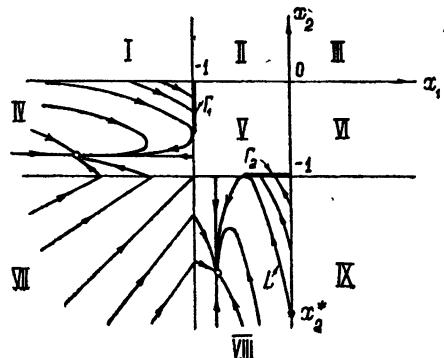


Рис. 2.

выделяет из системы (1) уравнения самых медленных движений первого порядка — D_1 :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - py_1 - \varepsilon_g; \\ y_2 &= x_2 - py_2 - \varepsilon_g. \end{aligned} \quad (7)$$

Равновесные состояния D_1 являются равновесными состояниями триггера.

2. Рассмотрим случай, когда одно из устойчивых равновесных состояний триггера расположено в области IV:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= x - \frac{pk}{1+p} (1+x); \quad x_2^0 = x; \\ y_1^0 &= -(1+x) \frac{k}{1+p} - x - \gamma; \quad y_2^0 = -x - \gamma, \end{aligned}$$

а другое — в области VIII:

$$\begin{aligned} x_1^0 &= x; \quad x_2^0 = x - \frac{pk}{1+p} (1+x); \\ y_1^0 &= -x - \gamma; \quad y_2^0 = -\frac{k(1+x)}{1+p} - x - \gamma. \end{aligned}$$

Здесь $x = \frac{\varepsilon_g - p\gamma}{1+p}$ и удовлетворяет неравенству
 $-1 < x < 0$.

Фазовые траектории D_1 могут в этом случае приводить фазовую точку не только в равновесные состояния, но и на отрезки Γ_1 и Γ_2 границы области устойчивости этих движений (рис. 2).

Предположим для определенности, что D_1 привело фазовую точку на отрезок Γ_1 . Тогда движение D_1 сменяется движением D_3 , в результате которого фазовая точка в соответствии с уравнениями (4) переходит в область VIII или IX. В области IX движение D_3 сменяется движением D_2 , которое, согласно уравнениям (6), приводит изображающую точку в область VIII, после чего наступает D_1 . Если же в результате D_3 фазовая точка сразу попадает в область VIII, то D_1 наступает непосредственно после D_3 . Фазовая траектория D_1 , находимая из уравнений (7) и расположенная на поверхности (5), может привести фазовую точку на отрезок Γ_2 , и процесс «разрывных» движений повторится.

Для выяснения вопроса о наличии в триггере разрывных автоколебаний рассмотрим точечное отображение отрезка $\Gamma_1: x_1 = -1; x_2 = -1 + z_1$ в отрезок $\Gamma_2: x_1 = -1 + z_2; x_2 = -1$, получаемое с помощью уравнений (4) — (7). Так как длина отрезка Γ_1 ограничена точкой пересечения с изоклиной вертикальных касательных, а длина отрезка Γ_2 — точкой пересечения с изоклиной горизонтальных касательных, значения z_1 и z_2 должны удовлетворять неравенству

$$1 > z_1, \quad z_2 > (1+x)(1+p) \frac{k-1}{k} > 0. \quad (8)$$

Функция соответствия $z_2(z_1)$ для $z_1 \leq \frac{1}{k}$, когда D_3 приводят фазовую точку в область VIII, имеет вид

$$z_1 = \left[\left(\frac{kp}{1+p} - 1 - k\tau \right) e^{-(1+p)\tau} + 1 - \frac{kp}{1+p} \right] \frac{(1+x) e^{(1+p)\tau}}{k^2 - k^2 \tau - 1}; \quad (9)$$

$$z_2 = (kz_1 - 1 - x) e^{-(1+p)\tau} + 1 + x.$$

Если $z_1 \geq 1/k$, то D_3 приводят фазовую точку в область IX и функция соответствия имеет вид

$$z_1 = k(1 + x\tau) + (1 + x) \left(\frac{kp}{1+p} - 1 \right) [e^{(1+p)\tau} - 1]; \quad (10)$$

$$z_2 = 1 + x [1 - e^{-(1+p)\tau}].$$

Параметр τ в выражениях (9) и (10) равен времени движения фазовой точки по траектории D_1 и для неподвижной точки преобразования совпадает с полупериодом автоколебаний.

Проведем исследование неподвижных точек $z_1 = z_2$ для уравнений (10). При изменении параметра τ от 0 до ∞ координата $z_2(\tau)$ монотонно уменьшается от 1 до $1+x$, а координата $z_1(\tau)$ уменьшается от $z_1(0) = k$ до своего минимального значения, а потом неограниченно растет (рис. 3).

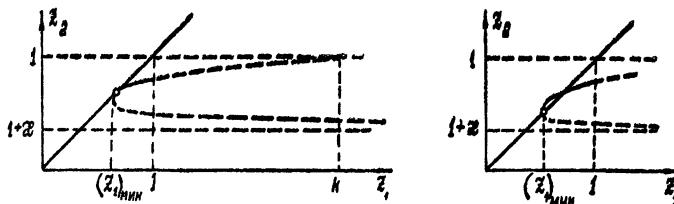


Рис. 3.

С изменением параметров триггера в момент касания функцией $z_2(z_1)$ биссектрисы $z_2 = z_1$ появляются сразу два предельных цикла: устойчивый и неустойчивый. При дальнейшем изменении параметров в том же направлении неустойчивый цикл исчезает, слившись с фазовой траекторией L , которая касается отрезка G_2 (рис. 3).

Таким образом, имеется область значений параметров триггера, в которой наряду с двумя устойчивыми состояниями равновесия имеется устойчивый предельный цикл, соответствующий разрывным автоколебаниям.

Границами указанной области являются части поверхностей $\frac{kp}{1+p} = 1$ и $x = -1$, соответствующие исчезновению двух устойчивых равновесных состояний триггера, и поверхность

$$k(1 + x\tau) + x e^{-(1+p)\tau} + (1 + x) \left[\left(\frac{kp}{1+p} - 1 \right) e^{(1+p)\tau} - \frac{kp}{1+p} \right] = 0; \quad (11)$$

$$\frac{kx}{1+p} - x e^{-(1+p)\tau} + \left(\frac{kp}{1+p} - 1 \right) (1 + x) e^{(1+p)\tau} = 0,$$

соответствующая касанию функции последовательности $z_2(z_1)$ и биссектрисы $z_2 = z_1$, т. е. исчезновению устойчивого предельного цикла. Область

расширяется с уменьшением параметра p . Чтобы не проводить довольно сложное исключение параметра τ из уравнений (11), проведено приближенное построение граничной поверхности (рис. 4), для чего в качестве второго уравнения (11) взято условие попадания на биссектрису точки $(z_1)_{\min}$:

$$kx + (1+x)(kp - 1 - p)e^{(1+p)\tau} = 0. \quad (12)$$

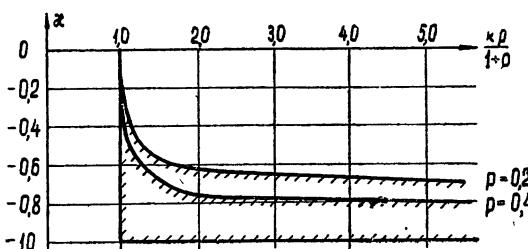


Рис. 4.

Очевидно, что условие (12) выделяет область пространства параметров, несколько меньшую истинной.

На рис. 5 приведены зависимости периода колебаний триггера от коэффициента усиления k , вычисленные из уравнений (10) для ряда значений параметров p и x . Следует отметить, что жесткий режим автоколебаний

может иметь место и после слияния двух устойчивых состояний равновесия триггера, т. е. при $x < -1$.

Наличие жесткого режима автоколебаний триггера проверялось экспериментально. Триггер, собранный на двойном триоде 6Н1П ($R_a = 10$ ком, $R_g = 82$ ком, $R = 470$ ком, $C = 82$ пкФ, $E_a = 195$ в), находился в любом из трех устойчивых режимов. Переход триггера из одного режима в другой осуществлялся путем задания начальных условий, «закидывающих» фазовую точку в соответствующую область притяжения одной из трех предельных фазовых траекторий.

3. Выясним возможность перехода триггера из любого равновесного состояния в режим автоколебаний и обратного перехода под действием узких импульсов, длительность которых порядка длительности D_3 . При воздействии таких импульсов в триггере происходят лишь быстрые движения D_3 , а координаты y_1 и y_2 не изменяются. Механизм переброса заключается в следующем. При подаче перебрасывающего импульса фазовая точка движется в деформированном фазовом пространстве, выходит из области «притяжения» исходного режима, а после снятия импульса стремится к другому режиму. Таким образом, необходимым условием переброса триггера в некоторую область фазового пространства импульсом, чья длительность порядка длительности D_3 , является наличие равновесного состояния D_3 в этой области при значениях параметров триггера, соответствующих исходному устойчивому режиму.

а) Пусть триггер находится в состоянии равновесия, расположенному в области IV. В этом случае, как это следует из уравнений (4),

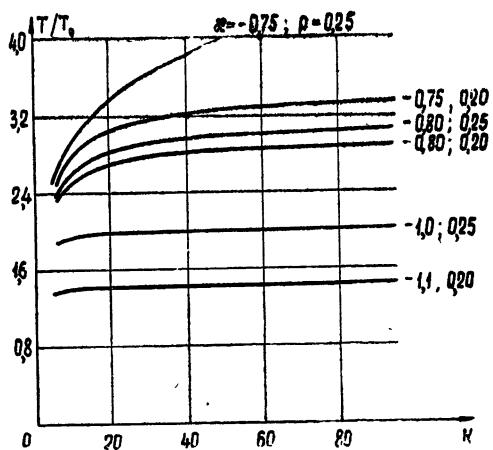


Рис. 5.

в плоскости $y_1^0 = \text{const}$, $y_2^0 = \text{const}$ имеет место еще одно устойчивое равновесное состояние D_3 :

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \frac{1}{1+g} \left[\frac{k(1+x)}{1+p} + x \right]; \\ x_2^0 &= x - k(1+x_1^0), \end{aligned} \quad (13)$$

расположенное в области IX. Предположим, что после действия импульса фазовая точка перешла в точку (13). Затем начинается D_2 , которое в соответствии с уравнениями (6) приводит фазовую точку на границу области VIII в точку

$$\bar{x}_1 = 0; \quad \bar{x}_2 = x - k. \quad (14)$$

Если дальнейшее движение D_1 происходит по траектории, которая расположена выше траектории L , касающейся отрезка Γ_2 (рис. 2), то триггер переходит в автоколебательный режим; если по траектории, расположенной ниже L , то осуществляется переход в другое равновесное состояние*.

Уравнение фазовой траектории L получаем, интегрируя уравнение (7) и налагая условия касания траекторией L отрезка Γ_2 . Найденная траектория пересекает ось $x_1 = 0$ в точке

$$x_2^* = -\frac{kx}{1+p} \left[\ln \frac{(1+x)(pk-p-1)}{-kx} + 1 \right] + x - \frac{kp}{1+p} (1+x). \quad (15)$$

Переброс в автоколебательный режим возможен при выполнении неравенства

$$\bar{x}_2 > x_2^*. \quad (16)$$

Условие (16) выполняется в области пространства параметров, расположенной между поверхностью $\bar{x}_2 = x_2^*$ и границей (11) области жесткого режима автоколебаний триггера. Однако, как показали вычисления, эти поверхности расположены очень близко друг к другу. (Поверхность $\bar{x}_2 = x_2^*$ практически сливаются с приближенной границей жесткого режима, построенной на основании первого из уравнения (11) и уравнения (12).)

б) Пусть триггер находится в автоколебательном режиме. В этом случае надежный переброс его в одно из равновесных состояний под действием узкого импульса оказывается невозможным. Действительно, если движущаяся по траектории D_1 предельного цикла фазовая точка находится вблизи отрезков Γ_1 или Γ_2 , то второе равновесное состояние D_3 обязательно расположено в области притяжения предельного цикла.

Таким образом, осуществить надежные переходы триггера между тремя устойчивыми режимами возможно лишь с помощью более длительных импульсов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. И. Фейгин, Сб. Памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 300
2. Н. А. Железцов, Л. В. Родыгин, ДАН СССР, 81, 391 (1951).
3. Н. А. Железцов, М. И. Фейгин, Радиотехника и электроника, 2, 751 (1957).

Горьковский институт инженеров водного транспорта

Поступила в редакцию
22 ноября 1963 г.

* Это справедливо, очевидно, при отсутствии неустойчивого предельного цикла, т. е. в выделенных на рис. 4 областях значений параметров.

HARD REGIME OF TRIGGER AUTOOSCILLATIONS

M. I. Feigin

In the space of trigger parameters there has been found the region in which there exist two stable equilibrium conditions and stable relaxational autooscillations. The period of autooscillations has been calculated and the possibilities have been evaluated of trigger switching from one stable regime into the other ones by means of a narrow pulse.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 522 617 + 621 396 67

ОБ УЧЕТЕ БОКОВЫХ ЛЕПЕСТКОВ АНТЕННЫ ПРИ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

И. Ф. Белов

Измерения поляризации радиоизлучения космических источников позволяют получить информацию о механизме его возбуждения, о физических условиях в областях генерации, а также о магнитных полях в средах, через которые это излучение распространяется. Однако измерение поляризации является весьма трудной задачей в основном потому, что поляризованный компонент, как правило, мала — составляет проценты и доли процента от общего излучения. Обычно измерения проводят с антенной, чувствительной к линейной поляризации, поворачивая ее вокруг луча зрения*. При этом любая асимметрия антennы может привести к появлению паразитной поляризации. В [1] проведен учет паразитной поляризации, обусловленной двумя причинами — асимметрией главного лепестка диаграммы направленности и наличием кросс-поляризационной компоненты излучения параболических антенн.

В настоящем сообщении мы хотим обратить внимание еще на одну причину появления паразитной поляризации, заключающуюся в существовании излучения антennы в боковые лепестки. Ниже будет проведена оценка максимально возможной паразитной поляризации при приеме излучения неполяризованного точечного источника, обусловленной наличием бокового излучения. Запишем температуру антennы при приеме излучения точечного источника в виде [2]

$$T_a = \frac{1}{k} \frac{\lambda^2}{4\pi} D_0 (1-\beta) \eta S_v + T_{cp\ gl} (1-\beta) \eta + T_{cp\ bok} \beta \eta + T_0 (1-\eta), \quad (1)$$

где S_v — интенсивность источника, D_0 — КНД антennы, λ — длина рабочей волны, k — постоянная Больцмана, $T_{cp\ gl} = \int_{\Omega_{gl}} T F d\Omega / \int_{\Omega_{gl}} F d\Omega$, $T_{cp\ bok} = \int_{\Omega_{bok}} T F d\Omega / \int_{\Omega_{bok}} F d\Omega$ — усредненные интенсивности фона по телесному углу главного лепестка и по всем боковым лепесткам, $\beta = \int_{\Omega_{bok}} F d\Omega / \int_{4\pi} F d\Omega$ — коэффициент рассеяния, определяющий долю мощности, излученной в боковые лепестки, η — КПД антennы, $T_0(1-\eta)$ — температура собственных шумов антennы.

При изменении плоскости поляризации облучателя в (1) все члены, кроме $T_{cp\ bok}$ земли остаются постоянными, так как в первом приближении излучение атмосферы и космическое радиоизлучение неполяризованы; поэтому приращение температуры антennы можно записать следующим образом:

$$\Delta T = (T_{(v)} - T_{(h)}) \beta \eta. \quad (2)$$

Здесь

$$T_{(v,h)} \text{ср бок земли} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^0 T_s (1 - r_{(v,h)}^2) \cos \vartheta d\theta$$

— температура антennы, обусловленная радиоизлучением земли, попадающим в боковые лепестки антennы, ϑ — угол луча с горизонтом, $r(v, h)$ — коэффициент отражения

* Существуют и другие методы измерения, но здесь мы их не рассматриваем.

для вертикальной (v) и горизонтальной (h) поляризации, T_3 — температура поверхности земли. Температура антенны за счет излучения Земли, попадающего в боковые лепестки, оценена в [2], где для $\epsilon = 4$

$$T_{(v)}_{\text{ср бок земли}} = 0,4T_3;$$

$$T_{(h)}_{\text{ср бок земли}} = 0,3T_3.$$

Подставляя эти значения в (2), найдем

$$\Delta T_a = 0,1T_3\beta\eta.$$

Паразитная поляризация составляет, следовательно,

$$P = \frac{0,1T_3\beta}{(\lambda^2/4\pi k) D_0(1-\beta)S_v}. \quad (3)$$

Как видно из (3), наличие боковых лепестков ($\beta \neq 0$) приводит к ошибкам в измерении поляризационной компоненты, причем величина ошибки обратно пропорциональна КНД антенны и интенсивности источника.

На рис. 1 показаны результаты расчета паразитной поляризации излучения Солнца вследствие наличия бокового излучения антенны в зависимости от отношения

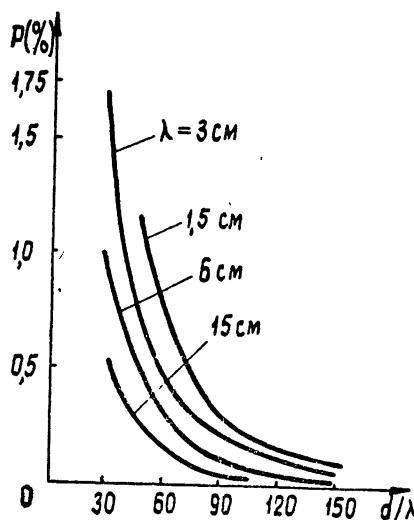


Рис. 1.

диаметра антенны к длине волны (d/λ), выполненного для нескольких длин волн (при $T_3 = 300^\circ\text{K}$, $\beta = 0,3$). Отсюда видно, например, что измерение поляризованной компоненты излучения Солнца, составляющей $\sim 4 \pm 5\%$, с погрешностью, не превышающей 10%, можно приводить с антенной, размеры которой удовлетворяют условию

$$d/\lambda \geq 30 \text{ на } \lambda = 15 \text{ см}; \quad d/\lambda \geq 45 \text{ на } \lambda = 6 \text{ см};$$

$$d/\lambda \geq 60 \text{ на } \lambda = 3 \text{ см}; \quad d/\lambda \geq 75 \text{ на } \lambda = 1,5 \text{ см}.$$

В заключение пользуясь случаем выразить глубокую признательность М. М. Кобрину и Н. М. Цейтлину за полезное обсуждение настоящего сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Есепкина, Д. В. Корольков, Научно-технический информационный бюллетень № 10—Радиофизика, ЛПИ, 1957, стр. 49.

2. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 389 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 января 1964 г.

УДК 551.52

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ ФЛЮКТУАЦИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич

В работе [1] вычислена температура средне-квадратичных флюктуаций радиоизлучения атмосферы. Для экспериментальных исследований важно знать временной (частотный) спектр флюктуаций, который в некотором приближении можно вычислить, пользуясь представлением о «замороженной» турбулентности. Согласно этому представлению, изменение флюктуаций во времени происходит за счет переноса неоднородностей среды ветром [2].

Средние скорости ветра в пределах эффективно излучающего слоя атмосферы (до 5 км) изменяются линейно с высотой от 12 м·сек⁻¹ до 10 м·сек⁻¹; угол наклона плоскости ветра составляет 45° [3].

Из этих данных следует, что средняя горизонтальная составляющая скорости ветра равная скорости движения турбулентного потока в целом, составляет $v_t \sim (\epsilon L_0)^{1/3} \sim 10 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$, где ϵ — энергия, диссилируемая в единицу времени в единице массы воздуха; L_0 — внешний масштаб турбулентности. В плоскости наблюдения в момент времени $t_0 + \tau$ флюктуации температуры в точке ρ_0 будут такими же, как в точке $\rho_0 - v_t \tau$ в момент t_0 , что соответствует пространственной структурной функции $D_{T_a}(\rho) = D_{T_a}(v_t \tau)$.

Используя функцию корреляции, полученную в [1], имеем

$$D_{T_a}(v_t \tau) = c^2 \tau^{5/3}. \quad (1)$$

Известно, что такому виду структурной функции соответствует спектральная плотность [3]

$$W(\omega) = \frac{\Gamma(1 + 5/3)}{2\pi} \sin \frac{5\pi}{6} c^2 \omega^{-8/3}. \quad (2)$$

Спектр $W(\omega)$ расходится при нулевых частотах. Однако поскольку наибольший размер неоднородностей не может превосходить внешний масштаб турбулентности L_0 , то спектр можно ограничить частотами

$$\omega_{\min} \sim \frac{2\pi v_t}{L_0} \sim 2\pi \left(\frac{\epsilon}{L_0^2} \right)^{1/3}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что максимальные флюктуации температуры радиоизлучения атмосферы имеют период $\tau \sim L_0/v_t \sim 10 \text{ сек}$.

Оценим условия, при которых справедливо выражение (2). Критерием «замороженности» является то, что время жизни отдельной неоднородности, имеющей размеры L , $\tau \sim L(\epsilon L)^{-1/3}$ было больше времени корреляции температуры радиоизлучения атмосферы $\tau_0 = \rho/v_t$, где ρ — радиус пространственной корреляции, существующий для спектра, обрезанного на нижних частотах (3). Производя соответствующие оценки, получим, что условие «замороженности» выполняется для неоднородностей, имеющих размеры

$$L > 0,6L_0. \quad (4)$$

На основе развитых выше и в [1] представлений о флюктуациях радиоизлучения атмосферы была предпринята попытка их экспериментального обнаружения. На длине волны $\lambda = 3,2 \text{ см}$ использовалась параболическая антenna диаметром 4 м (ширина диаграммы направленности по точкам половинной мощности (36')). Радиометр

имел чувствительность $0,5^{\circ}\text{К}$ при постоянной времени $\tau = 1 \text{ сек}$. Измерения проводились в ясную, безоблачную погоду с постоянной времеми $\tau = 16 \text{ сек}$. Калибровка принимаемых сигналов осуществлялась путем сравнения их с температурой радиоизлучения «абсолютно черной» горы, закрывавшей весь главный лепесток диаграммы [4].

Поскольку величина ожидавшегося эффекта порядка величины собственных шумов радиометра, то при измерениях использовался тот факт, что флюктуации температуры радиоизлучения атмосферы возрастают с уменьшением высоты ϑ над горизонтом [1] как

$$\Delta T_a(\vartheta) = \frac{0,02^{\circ}\text{К}}{\sqrt{\sin \vartheta}} \quad (5)$$

и на высотах около $3^{\circ} \Delta T_a(\vartheta)$ становится сравнимой с собственными шумами радиометра. В соответствии с этим в течение одинакового промежутка времени ($15 + 20 \text{ мин}$) велась запись флюктуаций сначала в направлении высот $\vartheta = 50^{\circ}$, потом в направлении $\vartheta = 3^{\circ}$. Средняя составляющая радиоизлучения атмосферы компенсировалась опорным сигналом для каждой из высот отдельно. Поскольку время корреляции флюктуаций радиоизлучения атмосферы $\tau_a \sim 10 \text{ сек}$ меньше постоянной времени, времени корреляции шумов аппаратуры $\tau = 16 \text{ сек}$, то на выходе флюктуации излучения атмосферы должны иметь такой же спектр, как спектр шумов аппаратуры.

Вычисление дисперсии для каждой записи за время T , $2T$, $3T$ ($T = 5 \text{ мин}$) показало стационарность регистрируемых флюктуаций. В результате 10 измерений была найдена средняя разность дисперсий для флюктуаций, записанных в направлении $\vartheta = 50^{\circ}$ и $\vartheta = 3^{\circ}$, которая оказалась равной $0,04^{\circ}\text{К}$.

По полученному значению температуры флюктуаций радиоизлучения атмосферы трудно судить о совпадении с теорией, поскольку измерения производились не при оптимальных условиях. Однако этот результат с несомненностью свидетельствует о том, что флюктуации радиоизлучения стандартной атмосферы существуют.

Авторы искренне признательны Н. Г. Денисову за ценное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Станкевич, Л. Н. Бондарь, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 670 (1963).
2. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
3. В. А. Белинский, Динамическая метеорология, ГИИТЛ, М., 1948.
4. В. П. Ласточкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1098 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 ноября 1963 г.

УДК 621.371.24

ЗАВИСИМОСТЬ МЕРЦАНИЯ ОТ РАЗМЕРОВ ИСТОЧНИКА СВЕТА

A. С. Гурвич, А. И. Кон

Хорошо известно, что при визуальном наблюдении планеты мерцают значительно слабее, чем звезды. В работах [1, 2] был проведен теоретический расчет флюктуаций светового потока I -мерцаний источника конечных угловых размеров, возникающих при наблюдении через турбулизованную атмосферу. Полученные оценки уменьшения мерцания за счет конечных угловых размеров источника согласуются с результатами наблюдения мерцания звезд и планет. Однако для количественной проверки использовать результаты астрономических наблюдений затруднительно. Значительно проще поставить измерения зависимости мерцания от размеров искусственного источника света в приземном слое атмосферы, используя последний искусственный источник света как естественную лабораторию. В настоящем сообщении приведены результаты таких измерений, выполненных в августе 1963 г. в районе Цимлянского на ровном участке открытой степи.

В качестве источника использовалась ртутная лампа, помещенная в фокусе объектива с фокусным расстоянием 200 м.м. Световой пучок модулировался с частотой, 5000 Гц за счет питания лампы переменным напряжением с частотой 2500 Гц (лампа удваивает частоту). Модуляция позволяла выделить свет от источника на фоне рассеянного дневного света. Частота модуляции в несколько раз превышала наивысшую

частоту спектра мерцания. Экземпляр лампы выбирался так, чтобы флюктуации светового потока на выходе из объектива не превышали $3 \pm 5\%$; в процессе работы эта величина периодически контролировалась. Приемник света с фотоумножителем ФЭУ-17 имел входное отверстие 2 мм и располагался на расстоянии 250 м от источника. Траска проходила на высоте примерно 2 м от подстилающей поверхности. Так как измерения проводились днем, в условиях большого нагрева подстилающей поверхности, турбулентные пульсации были очень сильны и мерцания, связанные с турбулентностью атмосферы, значительно превышали все остальные шумы.

Принимая, что средняя длина волны света $\lambda = 0,5 \text{ мк}$, получаем для значения радиуса первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda L} \approx 1,1 \text{ см}$, что в пять раз больше входного отверстия приемника. Как показано в [1], ослабление мерцания за счет осреднения по входному отверстию приемника в таких условиях практически не будет иметь места.

Изменение угловых размеров источника осуществлялось диафрагмированием объектива. Так как угол расхождения светового пучка, определяемый отношением размеров светящегося тела δ к фокусному расстоянию F , был существенно больше, чем угол γ , под которым из точки наблюдения виден объектив с выходным диаметром D , то последний будет определять угловые размеры источника $\gamma = D/L$ в рамках поставленной задачи*. Поскольку светящееся тело лампы находится в фокусе объектива, можно рассматривать объектив как источник пучка плоских волн с угловым размером γ . При измерениях диаметр D принимал значения 0,6; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 4 см (угол γ соответственно был равен $2,4 \cdot 10^{-5} \pm 1,6 \cdot 10^{-4}$). Здесь необходимо отметить, что минимальные размеры диафрагмы были меньше зоны Френеля и поэтому в этих случаях, вообще говоря, считать волну плоской нельзя. Однако, как показано в [1], различие в интенсивностях флюктуаций для плоских и сферических волн в случае, когда зона Френеля много больше внутреннего масштаба турбулентности (что имело место в данных измерениях) невелико. По-видимому, по этой причине значения флюктуаций в случае малых диафрагм получились несколько заниженными.

Методика измерений заключалась в следующем. Электронная схема приемника позволяла измерять величину $\langle |I - \langle I \rangle|^2 \rangle / \langle I \rangle$, по которой рассчитывалось значение $\beta^2 = \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ с учетом нормально-логарифмического распределения вероятностей для случайной величины I [1]. Измерения с каждой диафрагмой проводились в течение 10 мин, что давало устойчивые средние значения. Изменения диаметра диафрагмы осуществлялись в следующем порядке: каждый раз после измерений с диафрагмой диаметром D проводилось измерение мерцания с наименьшей диафрагмой $D = 0,6 \text{ см}$. Постоянство значений мерцания при последовательных измерениях с диафрагмой $D = 0,6 \text{ см}$ свидетельствовало о том, что турбулентный режим остается

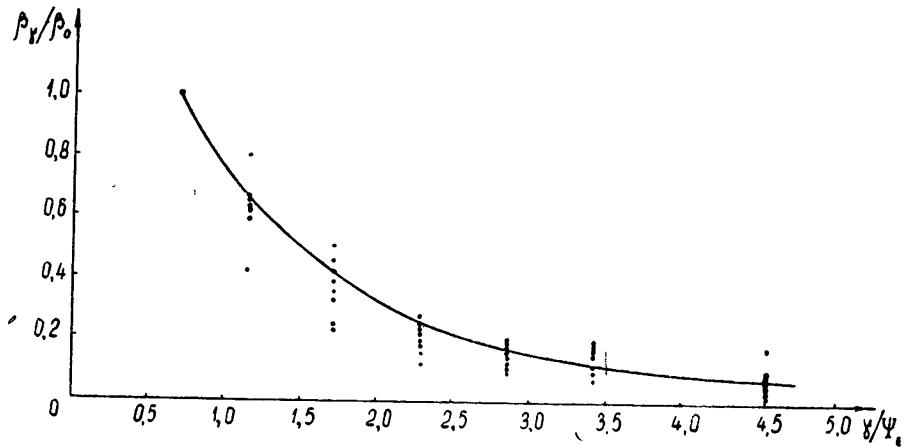


Рис. 1. Зависимость мерцания от угловых размеров источника света. Сплошная кривая — теоретическая зависимость, точками отмечены результаты отдельных измерений. Отношение $\beta_\gamma/\beta_0 = (\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle / \langle I \rangle^2)_\gamma / (\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle / \langle I \rangle^2)_0 = 2,4 \cdot 10^{-5}$,

где γ — угловой размер источника, $\psi_0 = \sqrt{2\lambda/\pi L}$ — характерный угол.

* В случае $D/L > \delta/F$ угловые размеры источника будут определяться значением δ/F — углом расхождения пучка.

практически неизменным от измерения к измерению; значения, полученные с малой диафрагмой, использовались при обработке результатов для нормировки.

Результаты эксперимента приведены на рис. 1, где точками отмечены результаты отдельных измерений. В [2] показано, что ослабление мерцания за счет конечных угловых размеров γ источника является функцией γ/ψ_0 (где ψ_0 — характерный угол, равный $\sqrt{2\lambda/\pi L}$), и результаты расчета приведены в виде семейства кривых с параметром, характеризующим «интенсивность» мерцания источника бесконечно малых угловых размеров $\sigma_{\gamma=0}^2 = 4 \left\langle \ln^2 \frac{A}{A_0} \right\rangle_{\gamma=0}$. Нормировка проводилась на значение флюктуаций интенсивности β^2 , соответствующее $\gamma = 0$.

В нашем эксперименте использовать источник с очень малыми угловыми размерами оказалось затруднительным, так как для этого пришлось бы изготовить источник с углом расхождения порядка 10^{-6} или менее. Для удобства сравнения экспериментальных результатов с расчетными теоретическая кривая былаrenomирована на значение β^2 , соответствующее $\gamma = 0.24 \cdot 10^{-4}$ рад и нанесена на тот же график (сплошная кривая 1), причем из семейства выбрана кривая с «интенсивностью» мерцания $\left\langle 4 \ln^2 \frac{A}{A_0} \right\rangle = 2$, что наиболее близко к условиям эксперимента.

Из рис. 1 видно, что расчетные и теоретические значения хорошо согласуются, что может служить рекомендацией для практического использования результатов [2].

В заключение авторы выражают свою благодарность В. И. Татарскому за ряд ценных советов, а также А. В. Мигулину и М. Е. Грачевой за помощь при производстве измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, М., 1959.
2. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 306 (1964).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
12 февраля 1964 г.

УДК 621.378.31

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА

B. N. Луговой

Устойчивость синусоидальных колебаний молекулярного генератора исследовалась в работах [1–3]. В работе [1] указано на существование областей параметров генератора, где синусоидальные колебания неустойчивы. В работе [2] показано, что в пределе при $\mu_0/\mu \rightarrow 0$ (см. ниже) область неустойчивости исчезает и, наконец, в работе [3] определены области устойчивости и неустойчивости синусоидальных колебаний для случая, когда частота линии излучения точно совпадает с собственной частотой резонатора.

В настоящем сообщении области устойчивости и неустойчивости синусоидальных колебаний молекулярного генератора определены в общем случае (при наличии расстройки собственной частоты резонатора относительно частоты линии излучения вещества).

Колебания молекулярного генератора описываются следующей системой уравнений [4, 5]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu x + \varepsilon x &= -\gamma \mu \dot{z}; \\ \ddot{z} + \mu_0 \dot{z} + z &= \mu_0(-f_0 + a/2)x; \\ a + \mu_0 a/2 &= -\mu_0 x z. \end{aligned} \quad (1)$$

Эти уравнения написаны в переменных: $x = (\sqrt{2/\hbar}) |\mu_1|_2 | \tau E$, $z = \sqrt{2} Q P$, $a = 2Q |\mu_1|_2 (N_0 - N)$, $\mu = 1/Q$, $\mu_0 = 2/\tau \omega_0$, $\varepsilon = (\omega_p/\omega_0)^2$, $\gamma = (4\pi/\hbar) |\mu_1|_2 \tau E_p^2$, $f_0 = Q |\mu_1|_2 N_0$. Здесь E — напряженность электрического поля в пучке активных молекул (на протяжении этого пучка электрическое поле рассматриваемого типа колебаний

предполагается однородным), P — дипольный момент всего объема активного вещества, N_0 и N — соответственно начальное и полное число активных молекул в объеме пучка, μ_{12} — матричный элемент дипольного момента используемого перехода вещества, τ — среднее время пролета молекул через резонатор, Q — добротность типа колебаний резонатора, ω_0 — центральная частота линии излучения вещества, ω_p — собственная частота резонатора, E_p — величина нормированного (по объему резонатора) типа колебаний в активном веществе. Безразмерное время выбрано так, что безразмерная частота линии излучения равна единице.

В дальнейшем будем считать выполненными следующие практически интересные условия

$$\mu, \mu_0, |\epsilon - 1| \ll 1, \quad (2)$$

которые означают, что полоса пропускания резонатора значительно меньше ее центральной частоты, ширина линии излучения вещества также, значительно меньше ее центральной частоты и расстройка собственной частоты резонатора относительно частоты линии излучения значительно меньше этой частоты.

При условиях (2) для решения задачи может быть использован метод Ван-дер-Поля. Следуя [6], представим величины x, z в виде

$$\begin{aligned} x &= x_1(\tau) \cos(\omega t) + x_2(\tau) \sin(\omega t); \\ z &= z_1(\tau) \cos(\omega t) + z_2(\tau) \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau = (1/2)\mu t$ — медленное время. Подставляя (3) в (1) и учитывая (2), приходим к следующим укороченным уравнениям*:

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1 + \zeta x_2 - \gamma z_2; \\ x'_2 &= -\zeta x_1 - x_2 + \gamma z_1; \\ z'_1 &= -\beta z_1 - \zeta_0 z_2 + \beta(f_0 - a/2)x_2; \\ z'_2 &= \zeta_0 z_1 - \beta z_2 - \beta(f_0 - a/2)x_1; \\ a' &= -\beta a + \beta x_2 z_1 - \beta x_1 z_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь обозначено $\zeta = (\epsilon - \omega^2)/\mu$, $\zeta_0 = (\omega^2 - 1)/\mu$, $\beta = \mu_0/\mu$ (штрих означает производную по медленному времени τ). Согласно (3), положение равновесия системы (4) соответствует синусоидальным колебаниям молекулярного генератора и, наоборот, всякий режим синусоидальных колебаний может быть получен как положение равновесия этой системы при некотором значении ω .

Можно убедиться, что для положений равновесия системы (4) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1/\tilde{x}_2 &= f_0 - a/2 = f_0/(1 + A^2); \quad \tilde{x}_1/\tilde{x}_2 = \zeta; \quad \gamma f_0/(1 + A^2) = 1 + \zeta^2; \\ \frac{N_0}{N_0 \text{ пор}} &= \frac{f_0}{f_0 \text{ пор}} = 1 + A^2; \quad \omega^2 = \frac{\mu_0 \epsilon + \mu}{\mu_0 + \mu}; \\ \zeta_0 &= \beta \zeta; \quad \xi = \frac{\epsilon - 1}{\mu_0 + \mu}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $A^2 = \tilde{x}_2^2/2$, $\gamma f_0 \text{ пор} = 1 + \zeta^2$; здесь использована также автономность исходных уравнений и соответственно положено $\tilde{z}_2 = 0$ (волна сверху относится к положениям равновесия системы (4)).

Для исследования устойчивости синусоидальных колебаний исходных уравнений (1) надо, как обычно, линеаризовать систему (4) в окрестности ее положений равновесия. Составляя при этом вековое уравнение и используя соотношения (5), приходим к следующему характеристическому полиному:

$$\Phi(\lambda) = a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4, \quad (6)$$

где

$$a_0 = 1;$$

$$a_1 = 3\beta + 2;$$

* Эти уравнения могут быть получены также путем усреднения по быстрым движениям (см. [6]).

$$\begin{aligned} a_3 &= \beta^2(3 + \zeta^2) + 2\beta(2 - \zeta^2) + 1 + \zeta^2 + A^2\beta^2(1 + \zeta^2); \\ a_3 &= \beta^2(1 + \zeta^2) + 2\beta^2(1 - \zeta^2) + \beta(1 + \zeta^2) + A^2\beta^2(\beta + 3)(1 + \zeta^2); \\ a_4 &= 2A^2\beta^2(\beta + 1)(1 + \zeta^2) \end{aligned} \quad (7)$$

(здесь величины ζ и A^2 определяются из соотношений (5)). В выражении (6) отброшен множитель λ , который появляется вследствие автономности исходных уравнений (см. [6]).

Орбитную устойчивость предельного цикла определяют только корни полинома $\Phi(\lambda)$. Применяя теперь к полиному (6) условия Раута—Гурвица, находим, что исследуемые колебания всегда устойчивы при $\beta > 1/2$. При $\beta < 1/2$ эти колебания устойчивы только в том случае, когда отношение U начального числа активных молекул к его пороговому значению ($U = N_0/N_{0\text{пор}}$) не превышает некоторого критического значения U_{kp} . При $U > U_{kp}$ синусоидальные колебания молекулярного генератора неустойчивы. Величина U_{kp} зависит от $\beta = \mu_0/\mu = 2Q/\tau\omega_0$ и от относительной расстройки $\zeta = \frac{\epsilon - 1}{\mu_0 + \mu} \approx 2 \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_p/Q + 2/\tau}$. При этом справедлива следующая формула:

$$U_{kp} = 1 + \frac{B + \sqrt{P}}{H}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} B &= (\beta + 1)(2\beta + 1)(5\beta^2 + 5\beta - 2) + \zeta^2(\beta - 1)^2(4\beta^2 + 7\beta + 6); \\ P &= (\beta - 1)^2(3\beta + 2)^2((\beta + 1)^2(2\beta + 1)^2 + 2\zeta^2(\beta + 1)(-2\beta^2 + 13\beta - 3) + \\ &\quad + 9\zeta^4(\beta - 1)^2); \\ H &= 2\beta^2(1 - 2\beta)(\beta + 3)(1 + \zeta^2) \end{aligned} \quad (9)$$

($\sqrt{P} > 0$). В частном случае $\zeta = 0$ из выражения (8) следует результат, полученный в [3]: $U_{kp} = \beta^{-1}(1 - 2\beta)^{-1}(1 + 4\beta)$. Если $\beta \rightarrow 0$, то из (8) (в согласии с [2]) находим, что $U_{kp} \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $\zeta^2 \gg 1$. В этом случае выражения (8) и (9) дают

$$U_{kp} = \frac{2 - 2\beta - \beta^2}{\beta^2(1 - 2\beta)}. \quad (10)$$

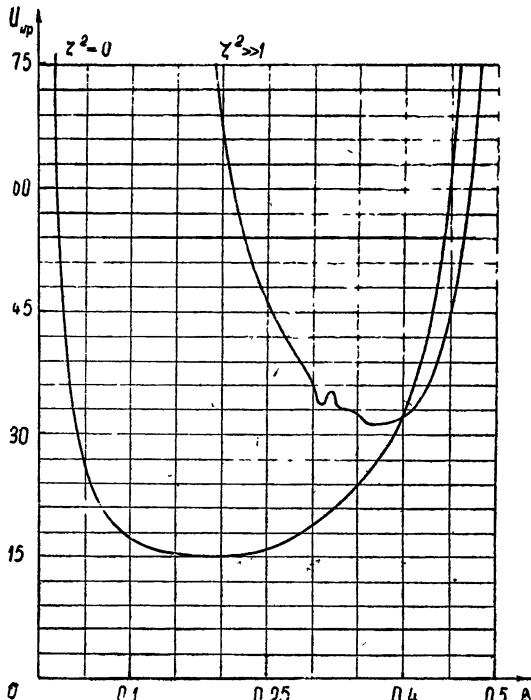


Рис. 1.

На рис. 1 для сравнения приведены графики функций $U_{kp}(\beta)$ при $\zeta^2=0$ и при $\zeta^2 \gg 1$. Соответствующие кривые пересекаются при $\beta = 0,4$. Выражение (8) упрощается также при $\beta \rightarrow 1/2$ и при $\beta \rightarrow 0$. При $\beta \rightarrow 1/2$

$$U_{kp} = \frac{3}{1 - 2\beta} \frac{2 + \zeta^2}{1 + \zeta^2}; \quad (11)$$

при $\beta \ll 1$

$$U_{kp} = \frac{1}{\beta} \frac{1 + \zeta^2}{1 - 3\zeta^2} \quad (\text{при } 1 - 3\zeta^2 \gg \beta);$$

$$U_{kp} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{2}{3\beta}} \quad (\text{при } \zeta^2 = 1/3); \quad (12)$$

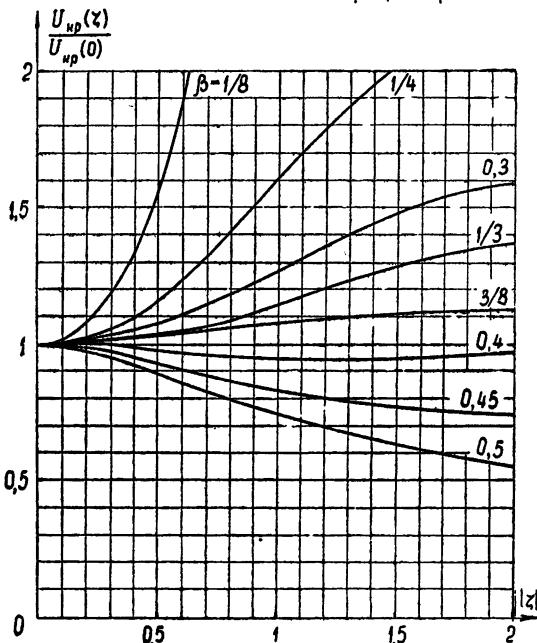


Рис. 2.

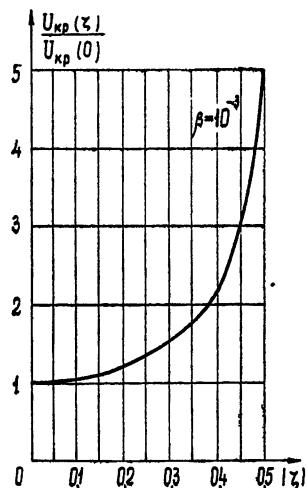


Рис. 3.

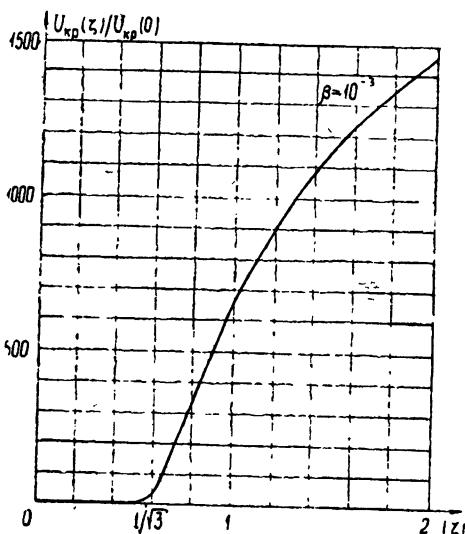


Рис. 4.

$$U_{kp} = \frac{2}{3\beta^2} \frac{3\zeta^2 - 1}{1 + \zeta^2} \quad (\text{при } 3\zeta^2 - 1 \gg \beta).$$

На рис. 2 построено семейство кривых $U_{kp}(\zeta)/U_{kp}(0)$ при разных значениях β . Мы видим, что при $\beta < 0,4$ кривые возрастают и при $\beta > 0,4$ — убывают. Рост этих кривых особенно крут при малых β и $\zeta^2 > 1/3$. На рис. 3 и 4 приведена зависимость $U_{kp}(\zeta)/U_{kp}(0)$ при $\beta = 10^{-3}$. Крутой рост функции $U_{kp}(\zeta)$ (отображеный на этих рисунках) характеризует быстрый рост критического превышения порога начального числа активных молекул с увеличением расстройки собственной частоты резонатора относительно частоты линии излучения вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 3, 1298 (1958).
2. Х. Ю. Халдре, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 60 (1958).
3. А. С. Гуртовник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 83 (1958).
4. В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 945 (1957).
5. А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 4, 718 (1959).
6. В. Н. Луговой, Радиотехника и электроника, 6, 1700 (1961).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
14 октября 1963 г.

УДК 538.56 : 621.372

ОТРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ ОТКРЫТЫМ КОНЦОМ ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА

C. С. Калмыкова, B. I. Курилко

Рассмотрим анизотропную диэлектрическую пластину ($|x| \leq l$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$) с кусочно непрерывными диэлектрическими постоянными:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp}^{(1)} \\ \epsilon_{zz} = \epsilon_{||}^{(1)} \end{array} \right\} z > 0; \quad \left. \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp}^{(2)} \\ \epsilon_{zz} = \epsilon_{||}^{(2)} \end{array} \right\} z < 0; \quad \epsilon_{||} = \epsilon_{\perp} = 1 \quad |x| > l.$$

Пусть вдоль правого волновода со стороны $z = +\infty$ распространяется симметричная [1] поверхность волна, характеризуемая волновым числом γ . Найдем поля, возникающие при рассеянии этой волны на скачке диэлектрических постоянных. Рассмотрим сначала случай, когда волноводы разделены идеально проводящей пленкой ($z = 0$, $|x| \leq l$, $-\infty < y < +\infty$).

В каждой из областей, где диэлектрические проницаемости непрерывны, решение уравнений Максвелла представим в виде суперпозиции плоских волн [2,3]:

$$H_y^{(1)} = 2A \frac{\sin(gx)}{\sin(gl)} \cos(\gamma z) + \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(t) \sin[\beta_1(t)x] Itz dt \quad (1)$$

(|x| \geq l; z \geq 0);

$$H_y^B = \exp[p(l - |x|) - i\gamma z] + \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(itz - v|x|) dt \quad (1a)$$

(|x| \geq l; -\infty < z < +\infty),

где

$$v(t) = (t^2 - k^2)^{1/2}; \quad \beta_n(t) = \left[\frac{\epsilon_{\parallel}^{(n)}}{\epsilon_{\perp}^{(n)}} (k^2 \epsilon_{\perp}^{(n)} - t^2) \right]^{1/2};$$

$$k = \frac{\omega}{c}; \quad n=1, 2; \quad p \equiv v(\gamma); \quad g \equiv \beta_1(\gamma).$$

Левый волновод ($|x| \ll l, z < 0$) отличается от правого отсутствием падающей волны; поэтому рассеянное поле в этом волноводе можно получить, полагая $A = 0$ в (1) и заменив индекс «1» на «2». Остальные поля легко получить из уравнений Максвелла, а неизвестные функции $h(t)$ и $H_n(t)$ — определить из граничных условий:

$$\begin{cases} E_z^B = E_z^{(1)} \\ H_y^B = H_y^{(1)} \end{cases} \begin{cases} z > 0 \\ x = l \end{cases}; \quad \begin{cases} E_z^B = E_z^{(2)} \\ H_y^B = H_y^{(2)} \end{cases} \begin{cases} z < 0 \\ x = l \end{cases}; \quad (2)$$

$$E_x^{(1)}(z = +0) = E_x^{(2)}(z = -0) = 0; \quad |x| \ll l. \quad (2a)$$

Подставляя поля (1) в граничные условия (2), получим, согласно [4], соотношения, связывающие неизвестные функции $h(t)$ и $H_n(t)$ с граничными значениями на контуре $\text{Im}t = 0$ функций, аналитических в верхней (+) и нижней (—) полуплоскостях комплексной переменной t :

$$\begin{aligned} h(t) e^{-vt} &= \left[z_1(t) \varphi^+(t) - \psi^+(t) + \frac{\gamma}{\pi i} \frac{z_1(t) - q}{t^2 - \gamma^2} \right] \frac{1}{\Delta_1(t)}; \\ H_1(t) \sin(\beta_1 t) &= \left[z_0(t) \varphi^+(t) - \psi^+(t) + \frac{\gamma}{\pi i} \frac{z_0(t) - q}{t^2 - \gamma^2} \right] \frac{1}{\Delta_1(t)}; \\ H_2(t) \sin(\beta_2 t) &= \left[-z_0(t) \varphi^-(t) + \psi^-(t) - \frac{\gamma}{\pi i} \frac{z_0(t) - q}{t^2 - \gamma^2} \right] \frac{1}{\Delta_2(t)}; \\ h(t) e^{-vt} &= \left[-z_2(t) \varphi^-(t) + \psi^-(t) - \frac{\gamma}{\pi i} \frac{z_2(t) - q}{t^2 - \gamma^2} \right] \frac{1}{\Delta_2(t)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\varphi^-(t) \equiv \varphi^+(-t); \quad \psi^-(t) \equiv \psi^+(-t); \quad A = 1;$$

$$z_n(t) \equiv \frac{i \beta_n(t)}{k \epsilon_{\parallel}^{(n)}} \operatorname{ctg} [\beta_n(t) l]; \quad z_0(t) = -\frac{i v(t)}{k};$$

$$\Delta_n(t) \equiv z_n(t) - z_0(t); \quad q \equiv z_1(\gamma) \equiv z_0(\gamma).$$

Из первого и последнего равенства в (3) получим граничную задачу:

$$\frac{1}{\Delta_1(t)} \left[z_1 \varphi^+ - \psi^+ + \frac{\gamma}{\pi i} \frac{z_1 - q}{t^2 - \gamma^2} \right] = \frac{1}{\Delta_2} \left[-z_2 \varphi^- + \psi^- - \frac{\gamma}{\pi i} \frac{z_2 - q}{t^2 - \gamma^2} \right], \quad (4)$$

которая эквивалентна системе из двух граничных задач для двух неизвестных функций и может быть сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши [5]. Для функции $\psi(t) \equiv \psi^+(t) - \psi^-(t)$, например, это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(t') dt'}{t' - t} + \frac{z_0}{2} \left(\frac{z_1}{\Delta_1} + \frac{z_2}{\Delta_2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{z_0(t')} - \frac{1}{z_0(t)} \right] \times \\ \times \frac{\psi(t') dt'}{t' - t} = - \frac{\gamma z_0}{t^2 - \gamma^2} \left\{ \frac{z_2 - q}{\Delta_2} + \frac{z_1 - q}{\Delta_1} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

Решение этого уравнения однозначно определяет поле в вакууме и в обоих волноводах.

Ниже мы используем соотношения (3) — (5) для решения задачи об отражении поверхностной волны от покрытого идеально проводящей пленкой торца тонкого ($l \ll \lambda = \lambda/2\pi$) плазменного волновода.

Если внешнее магнитное поле отсутствует ($\omega_H \ll \omega, \omega_0; \omega_0^2 = 4\pi n_0 e^2/m$), вдоль плазменного волновода распространяется одна поверхностная волна и при $\delta \ll l \ll \lambda$ ($\delta = c/\omega_0$ — глубина скин-слоя) в наиболее существенной области длины волн $k \ll t \ll 1/\delta$ дисперсией поверхностного импеданса $z_1(t)$ можно пренебречь. В этом случае приближенное решение (4) можно найти, полагая $z_1(t) \equiv q$. При этом коэффициент отражения в нулевом приближении оказывается одинаковым для симметричной и антисимметричной волн:

$$R_0 = -i \frac{\delta}{\lambda} \{1 + O(l/\lambda, \delta/l)\}. \quad (6)$$

При наличии сильного магнитного поля ($\omega_H \gg \omega, \omega_0$), параллельного направлению распространения падающей волны, вдоль волновода может распространяться бесконечное количество медленных волн, волновые числа которых определяются дисперсионным уравнением

$$\beta_1 \operatorname{ctg}(\beta_1 l) = \epsilon v, \quad \epsilon_{\perp}^{(1)} = 1, \quad \epsilon = |\epsilon_{\parallel}^{(1)}| \quad (7)$$

(для несимметричной волны в (7) необходимо заменить $\operatorname{ctg}(\beta_1 l)$ на $-\operatorname{tg}(\beta_1 l)$ [1]). В этом случае даже при большой погонной плотности плазмы ($\delta \ll l$) нельзя пренебречь пространственной дисперсией импеданса z_1^* , так как при этом теряется эффект возбуждения волн высших порядков, которые могут иметь фазовые скорости, близкие к фазовой скорости падающей волны.

Согласно (1), (3), магнитное поле над пластиной в области $z > 0$ определяется значениями функций $\varphi^+(t)$ и $\psi^+(t)$:

$$H_y^B = \left\{ e^{pl-p\tau-i\gamma_m z} + 2\pi l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{i\gamma_m l} \sin^2(v_m l \sqrt{\epsilon}) \left[z_1(\gamma_m) \varphi^+(\gamma_m) - \right. \right. \\ \left. \left. - \psi^+(\gamma_m) + \frac{\gamma}{\pi i} \frac{z_1(\gamma_m) - q}{\gamma_m^2 - \gamma_2^2} \right] \exp(i\gamma_m z - v_m x) \right\} \\ (x \gg l). \quad (8)$$

При $\delta \ll l \ll \lambda$ уравнение (5) для функции $\psi(t)$ может быть упрощено:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_0(t')}{t' - t} dt' + z_0(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_0(t') dt'}{z_0(t') (t' - t)} = -\frac{2\gamma z_0(t)}{t^2 - \gamma_2^2} \left[1 + \frac{z_1(t) - q}{\Delta_1(t)} \right]. \quad (9)$$

Отсюда

$$\psi_0^+(\gamma_m) \simeq \frac{1}{k} \left[\frac{1}{\pi} \ln \frac{\Gamma l}{\pi \delta} - 1 + O(\delta/l) \right], \quad \ln \Gamma = C, \quad (10)$$

где C — постоянная Эйлера.

Решая аналогичное уравнение для $\varphi(t)$, можно показать, что $z_1(\gamma_m) \varphi^+(\gamma_m) \sim \frac{\delta^2}{l \lambda} \psi^+(\gamma_m)$. Таким образом, для коэффициента отражения R_{∞} (по магнитному полю) и амплитуд T_m возбуждаемых волн высших порядков получим следующие выражения:

* Вопросы применимости импедансных граничных условий рассмотрены в обзоре [6].

$$R_{\infty} = \frac{2\pi}{kl \epsilon} \left[1 - \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Gamma l}{\pi \delta} + O(\delta/l) \right]; \quad (11)$$

$$T_m = - \frac{2}{\pi m \sqrt{\epsilon}} + R_{\infty} \quad (m \gg 1).$$

Повторяя эти вычисления для несимметричной волны, можно убедиться в том, что соответствующие коэффициенты возбуждения отличаются от (11) заменой m на $m + 1/2$.

Можно показать, что замена идеально проводящей пленки идеально магнитной ($H_y^{(n)}(z=0) \equiv 0$, $|x| \ll l$) не меняет коэффициента отражения (6) и приводит к изменению знака в (11).

Таким образом, при нулевом магнитном поле, когда пространственная дисперсия практически отсутствует, коэффициент отражения не зависит от граничных условий на торце волновода в нулевом приближении и совпадает с результатами работы [7]. В случае сильного магнитного поля, когда пространственная дисперсия оказывается существенной, характеристики полубесконечного волновода зависят от условий на торце волновода, так что для волновода без проводящей пленки формулы (11) позволяют лишь оценить порядок соответствующих величин.

В общем случае (при отсутствии малого параметра) уравнение (5) можно решить только численно. Следует отметить, что при наличии малого параметра решение рассматриваемой задачи можно было бы найти и приближенными методами. В частности, в случае малых значений коэффициентов отражения, те же результаты для поля излучения дает метод Кирхгофа, а для коэффициентов отражения — вариационный метод [8]*. При этом уравнение (5) позволяет оценить пределы применимости приближенных решений.

Одним из новых результатов, которые дает строгое решение, является асимптотическое поведение поля вблизи скачка диэлектрических постоянных. Исследуя решение (5) при $t \rightarrow \infty$, можно показать, что при $\rho = [z_2 + (x \pm l)^2]^{1/2} \rightarrow 0$ электрическое поле растет пропорционально $\rho^{2\alpha-1}$, где

$$\alpha = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi \sqrt{3} \epsilon} \quad (\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{\perp} < 0, \quad \epsilon = |\epsilon_{\parallel}| \gg 1);$$

$$\alpha = \frac{1}{3} - \frac{i}{\pi \sqrt{3} \epsilon} \quad (\epsilon_{\perp} = 1, \quad \epsilon_{\parallel} < 0, \quad \epsilon = |\epsilon_{\parallel}| \gg 1);$$

$$\hat{\epsilon}^{(2)} \equiv 1.$$

Авторы пользуются случаем выразить благодарность А. В. Гапонову и М. А. Миллеру, а также участникам руководимого ими семинара за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
- А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, М., 1953.
- Л. А. Вайнштейн, Дифракция электромагнитных и звуковых волн, изд. Сов. радио, М., 1953; ЖТФ, 25, 841 (1955).
- И. М. Рапорт, ДАН СССР, 59, 1403 (1948).
- Н. И. Мусхелишивили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.

* Так как использование поля падающей волны в качестве пробного в вариационном методе дает относительную ошибку порядка коэффициента отражения, то результаты [8] справедливы лишь в той области частот, где коэффициенты отражения малы.

6. М. А. Миллер, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 795 (1961).
 7. Н. Г. Тренев, Радиотехника и электроника, 3, 27 (1959).
 8. С. М. Ангело, W. S. Chang, IRE Trans., AP-7, 207 (1959); С. М. Ангело, IRE Trans., AP-5, 100 (1957).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
10 марта 1964 г.

УДК 621.374.4

ГЕНЕРАТОР СУБГАРМОНИКИ СВЧ ДИАПАЗОНА В РЕЖИМЕ БИНАРНОГО КВАНТОВАНИЯ ФАЗЫ

И. Т. Трофименко, А. Ф. Цельковский

Применение параметрического генератора субгармоники в режиме многократных запусков с последующим считыванием импульсов одинаковой фазы позволяет построить одну из возможных схем фазового метода обнаружения сигналов с накопителем дискретного действия [1–3]. Цель настоящей работы — экспериментальное исследование подобной схемы приема непрерывного синхронного сигнала с использованием одноконтурного параметрического генератора в диапазоне СВЧ ($\sim 2500 \text{ мГц}$). При этом основное внимание уделялось изучению влияния режима работы параметрического генератора и способа его модуляции на чувствительность приема.

Одноконтурный параметрический генератор характеризуется двумя значениями стационарной фазы, разделенными интервалом π , выбор которых определяется в основном начальными условиями в момент запуска параметрического генератора (см. [1]). Обнаружение сигнала A_c , синхронного с субгармоникой, сводится к определению разности Δh относительных частот появления импульсов двух различных фаз параметрического генератора и сравнению ее с порогом. В предположении, что выбор стационарных фаз определяется только начальными условиями:

$$\Delta p = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta h = \Phi \left(\frac{A_c}{\sigma \sqrt{2}} \cos \theta_c \right), \quad (1)$$

где n — число запусков генератора, σ — дисперсия шума, θ_c — сдвиг фазы между внешним сигналом и колебаниями в контуре субгармоники, Φ — интеграл вероятности. Для случая малого сигнала ($A_c/\sigma \ll 1$) из (1) следует

$$\Delta p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A_c}{\sigma} \cos \theta_c \quad (2)$$

(см. [4] и [1]). Основными элементами схемы (см. рис. 1) являются ПГ-1 — квантователь фазы и усилитель-ограничитель; ФД — фазовый детектор; СЧ-1, СЧ-2 — амплитудный счетчик (накопитель). Периодический срыв колебаний ПГ-1 осуществлялся путем модуляции мощности накачки прямоугольными импульсами. Опорный сигнал подавался на фазовый детектор от непрерывно работающего ПГ-2. Сигнал этого же ПГ-2, снятый с дополнительного выхода, использовался в качестве внешнего синхронного сигнала, поступающего на ПГ-1.

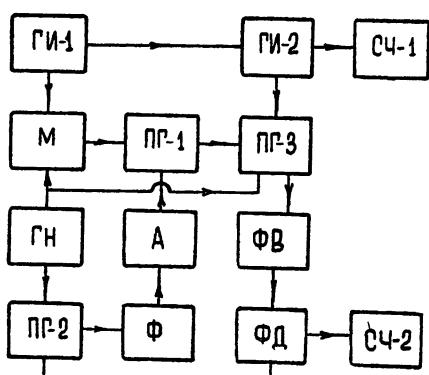


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

ГИ — генератор импульсов, ГН — генератор накачки, М — модулятор накачки, А — аттенюатор, Ф — фазовращатель, ФВ — ферритовый вентиль, ПГ — параметрический генератор, ФД — фазовый детектор, СЧ — счетчик импульсов.

Основным требованием к установке является тщательная экранировка ПГ-1 от воздействия дополнительного когерентного сигнала опорного генератора, проникающего в ПГ-1 в основном через тректы фазового детектора. Для увеличения развязки ПГ-1 и ПГ-2 по этим цепям в схему был введен третий, буферный ПГ-3, работающий в импульсном режиме с жесткой синхронизацией по фазе от ПГ-1. Для устранения обратного влияния буферного ПГ-3 на ПГ-1 запуск ПГ-3 производился с некоторой задержкой по времени относительно запуска ПГ-1. В такой схеме длительность и амплитуда выходных импульсов фазового детектора не зависят от режима работы ПГ-1. В схему также введен ряд аттенюаторов, ферритовых вентилей, фазовращателей,

лей и фильтров для развязки всех ПГ и регулировок амплитуд и фаз сигналов.

Определение абсолютной величины входного сигнала производилось с погрешностью не более 3 дБ путем измерения мощности ПГ-2 на «сигнальном» выходе ($\sim 10 \text{ мквт}$) и общего затухания в тракте сигнала. Остаточный «паразитный» сигнал на входе ПГ-1 составлял менее $2 \cdot 10^{-18} \text{ вт}$.

Конструкция и рабочие характеристики параметрического генератора описаны в [5].

Экспериментально определялась зависимость Δh от мощности P_c и фазы θ_c входного сигнала, коэффициента связи контура субгармоники с входной линией, напряжения смещения на диоде U_{cm} , мощности накачки P_n (т. е. глубины модуляции емкости диода m), а также глубины модуляции мощности накачки M . Каждая экспериментальная точка находилась как среднее из десяти измерений; число запусков ПГ в каждом измерении составляло $\sim 10^5$ при частоте модуляции (частоте срывов ПГ) $\sim 10 \text{ кгц}$. При измерениях периодически производилась «проверка нуля», т. е. счет при отсутствии сигнала.

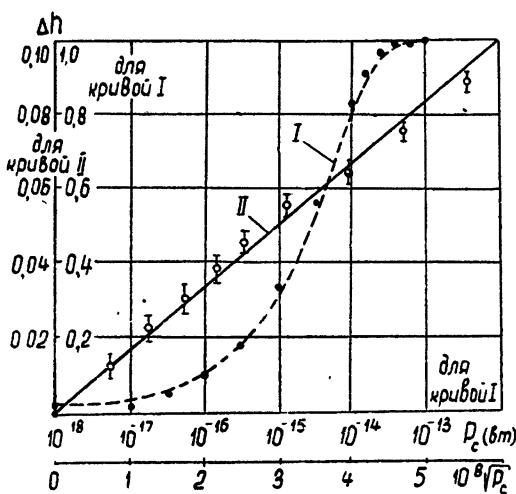


Рис. 2. Зависимость Δh от величины входного сигнала. Кривые I и II соответствуют формулам (1) и (2).

На рис. 2 представлена зависимость Δh от величины входного сигнала при оптимальной фазе ($\cos \theta_c = 1$). Экспериментальные кривые в качественном отношении хорошо подтверждают теоретические зависимости (1) и (2). Однако количественное сопоставление кривых представляется затруднительным, так как σ , определяемая величиной собственных и входных шумов генератора в предосцилляционный период, в наших экспериментах не измерялась. (На рис. 2 проведена «привязка» теоретической кривой I к экспериментальной по одной точке на линейном участке.) Следует, однако, обратить внимание на более быстрый спад экспериментальной кривой I, в особенности при малых Δh , что объясняется, по-видимому, флюктуациями параметров системы.

Экспериментальная зависимость Δh от $\cos \theta_c$ имеет аналогичный характер.

Чувствительность параметрического генератора к внешнему сигналу существенно зависит от режима питания и настройки генератора. Хотя при регулировке величин U_{cm} , P_n и др. происходит изменение ряда рабочих параметров генератора, изучение таких зависимостей представляет большой практический интерес, например, с точки зрения стабильности устройств. Заметим, что вообще в параметрических СВЧ-устройствах обычно не удается независимо изменять такие параметры, как добротность, расстройку, связь с нагрузкой, особенно если учитывать нелинейные динамические поправки.

На рис. 3 приведена зависимость Δh от U_{cm} для ряда фиксированных значений P_n при полной ($M = 100\%$, кривые 1, 2, 3) и неполной ($M = 35\%$, кривая 4) модуляции мощности накачки, а также от M при постоянных P_n и U_{cm} (кривые 5, 6). Характерным является увеличение чувствительности как при уменьшении абсолютной величины P_n , так и глубины модуляции накачки.

Ход кривых рис. 3 можно качественно объяснить следующим образом. Изменение U_{cm} приводит к изменению m и m_{kp} — критического коэффициента модуляции па-

метра контура. Длительность переднего фронта импульса накачки в большинстве наших экспериментов была довольно большой ($\sim 10^{-7}$ сек), что сравнимо с длительностью других переходных процессов в схеме. Поэтому момент возникновения генерации сдвинут относительно начала фронта импульса накачки на большую или меньшую величину в зависимости от P_n и U_{cm} . При $t < t_{kp}$ генератор ведет себя как регенеративный усилитель, полоса пропускания которого зависит от степени регенерации. Это приводит к изменению эффективной величины σ в предосцилляционный период в зависимости от режима работы генератора. Существенное влияние могут оказывать переходные процессы, возникающие в контуре субгармоники при ударном возбуждении его импульсом накачки. Очевидно, что чем дальше отстоит момент возбуждения генератора от участка с наибольшей крутизной фронта накачки, тем меньше влияние таких ударных колебаний. При высокой частоте модуляции существенную роль могут также играть остаточные колебания контура генератора после выключения накачки.

Оценка предельной чувствительности генератора производилась по минимальной величине Δh_0 , для которой доверительный интервал (вычисленный для надежности, равной 0,99) еще не перекрывался с доверительным интервалом для «нуля». При оптимальной настройке предельные величины составляли $\Delta h_0 \approx 0,015$ и $P_{c0} \approx 10^{-17}$ вт. Дальнейшее увеличение чувствительности может быть достигнуто путем увеличения объема выборки (т. е. увеличения частоты модуляции и времени наблюдения) и уменьшения собственных шумов генератора за счет охлаждения диода.

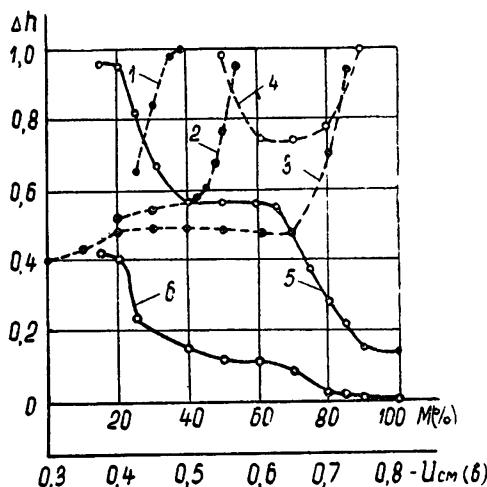


Рис. 3. Зависимость Δh от режима питания ПГ. Для кривых 1, 2, 3 относительная мощность накачки P_n/P_{n0} соответственно равна 1; 1,8; 5. Для кривых 5, 6 мощность сигнала $P_c = 10^{-13}$ и 10^{-14} вт.

Ввиду отсутствия счетчиков с малым разрешающим временем для оценки максимальной допустимой скорости переключения осуществлялась модуляция ПГ-1 короткими импульсами накачки «на возбуждение» и «на срыв» при низкой частоте повторения. Чувствительность сохранялась неизменной при уменьшении длительности импульсов в обоих случаях до 10 нсек, что указывает на возможность увеличения частоты модуляции по крайней мере до 50 мег.

Помимо амплитудной модуляции мощности накачки были опробованы два других метода срыва колебаний ПГ. При модуляции напряжения смещения на диоде чувствительность получалась низкой, так как на краях области генерации ПГ обычно возникают невырожденные колебания и значительно возрастают шумы ПГ. При фазовой модуляции накачки быстрое изменение фазы накачки приводит к эффективному увеличению t_{kp} (см. [8]). Поскольку при фазовой модуляции отсутствуют паразитные эффекты, отмеченные выше, чувствительность возрастает; экспериментально обнаружено улучшение чувствительности на 10 дБ по сравнению с амплитудной модуляцией. Однако подробно фазовый метод модуляции не был исследован.

Авторы благодарят С. А. Ахманова и В. П. Комолова за постоянный интерес к работе и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 769 (1961).
2. Ю. Б. Черняк, Радиотехника и электронника, 8, 1326 (1963).
3. С. А. Ахманов, В. П. Комолов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1175 (1962).
4. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1960.
5. В. Ф. Марченко, И. Т. Трофименко, Радиотехника и электронника, 9, 822 (1964).
6. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
29 января 1964 г.