

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
100	Рис. 1	Дуга ΦP_r обозначена $90 - \delta$	Следует читать $90 - \alpha$
410	10 сверху	$\Phi(x) = \dots \int_{-\infty}^x e^{t^2/2} dt$	$\Phi(x) = \dots \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$
443	8 снизу	$\dots \delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 + \eta \frac{(\omega - ku)^2}{c^2} \right) d\omega dk$	$\dots \delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 + \eta \frac{(\omega - ku)^2}{c^2} \right) d\omega dk$
477	11 сверху	$E_2(n/r, \omega) = e^{i nr} \dots$	$E_2(n/r, \omega) = e^{iknr} \dots$
482	1 снизу	$x = X_0 \cos(\omega t + \varphi) + \dots$	$x = X_0 \cos(\omega t + \varphi) + \dots$
484	1 сверху	$\delta = \dots \frac{H_1 \beta_1 c + H_2 \beta_2 c}{4T/\tau X_0}$	$\delta = \dots \frac{H_1 \beta_1 c + H_2 \beta_2 c}{4(T/\tau) X_0}$
	7 сверху	$\dots \int_0^\infty \langle [\dots - \bar{J}(t)] [\dots \bar{J} \dots] \rangle \dots$	$\dots \int_0^\infty \langle [\dots - \langle J \rangle (t)] [\dots \langle J \rangle \dots] \rangle \dots$
498	8 сверху	$= 4 \int_0^\infty 2 \langle [N_t N_{t+\tau}]^2 \rangle \dots$	$= 4 \int_0^\infty 2 [\langle N_t N_{t+\tau} \rangle]^2 \dots$
	4 снизу	$\dots \langle m(t) \rangle = 0 \dots \overline{(N_t N_{t+\tau})_0}$	$\dots \overline{m(t)} = 0 \dots \langle (N_t N_{t+\tau})_0 \rangle$
	1 сверху	$\overline{N_t N_{t+\tau}} = \dots \overline{(N_t N_{t+\tau})_0}$	$\langle N_t N_{t+\tau} \rangle = \dots \langle (N_t N_{t+\tau})_0 \rangle$
499	3 сверху	$M^2 = \frac{1}{1 + \langle m^2(t) \rangle}$	$M^2 = \frac{1}{1 + \overline{m^2(t)}}$
503	13 снизу	$\dots \langle E_1 E_2 \rangle = \dots$	$\dots \langle E_1 E_2 \rangle = \dots$
	10 сверху	$\dots = 2 \int_0^\infty \langle \overline{B_1(t, \tau)} \rangle \dots$	$\dots = 2 \int_0^\infty \overline{B_1(t, \tau)} \dots$
504	19 сверху	$\dots (a_m \cos m\nu_0 t + b_m \sin m\nu_0 t)$	$\dots [a_m \cos(m\nu_0 t) + b_m \sin(m\nu_0 t)]$
510	4 снизу	$\dots \frac{1}{\sqrt{\gamma_0 \gamma_1 / \Omega^2}} \dots$	$\dots \frac{1}{\sqrt{\gamma_0 \gamma_1} \Omega^2} \dots$
526	4 снизу	$\dots \left\{ \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} h_{1l}^{(2)} e(h, \xi_0) + \dots \right.$	$\dots \left\{ \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} h_{1l}^{(2)}(h, \xi_0) + \dots \right.$
543	5 сверху	$y_0(t) \rightarrow 0 \dots$	$\dot{y}_0(t) \rightarrow 0 \dots$
557	12 снизу	интегральных градиентов $(\partial N / \partial \xi) dz \dots$	интегральных градиентов $\int (\partial N / \partial \xi) dz \dots$

СОДЕРЖАНИЕ

Разин В. А. Физические условия в окрестностях солнечной системы по данным измерений поляризации космического радиоизлучения	395
Стародубцев А. М. Эффективная температура лунной поверхности, обусловленная отражением от нее космического радиоизлучения	399
Водолазский В. И., Терпугов А. Ф. Оптимальные антенны моноимпульсных фазовых радиолокационных станций	406
Викторова А. А. О вращательном спектре и интенсивности поглощения димеров водяного пара в атмосфере. I. Конфигурация димера с линейной водородной связью	415
Викторова А. А. О вращательном спектре и интенсивности поглощения димеров водяного пара в атмосфере. II. Концентрация димеров	424
Тамойкин В. В. О реакции излучения при движении заряда в периодически неоднородной среде	432
Болотовский Б. М., Столяров С. Н. Принцип излучения в электродинамике движущихся сред	442
Поспелов Л. А. К распространению электромагнитных волн в нелинейных средах	446
Шолохов Н. В. О рассеянии электромагнитных волн неравновесной плазмой	452
Блиох П. В. Сжатие импульса излучения в диспергирующей среде со случайными неоднородностями	460
Долин Л. С. О соотношениях взаимности для частично-когерентных электромагнитных полей	471
Беленов Э. М., Ораевский А. Н. Исследование молекулярного генератора с двумя последовательными резонаторами	479
Таланов В. И. Распространение коротких электромагнитных импульсов в активной среде	491
Маркелов В. А. Чувствительность радиометра, содержащего систему с переменными параметрами	497
Маркелов В. А. Прохождение шумового сигнала через систему с переменными параметрами	502
Белянцев А. М., Фрейдман Г. И. Электромагнитные волны конечной амплитуды в связанных линиях передачи с нелинейными параметрами	514
Дупленков Д. А., Иванов С. Н. Излучение вытянутых сферoidalных антенн	524
Козлов И. Г., Шаповалов А. С. К вопросу о фокусирующих и дисперсионных свойствах поля цилиндрического конденсатора	531
Брусин В. А. Об абсолютной устойчивости следящей системы с люфтом	539
Розенфельд А. С. Преобразование Лапласа и исследования переходных процессов	546

Краткие сообщения и письма в редакцию

Захаров А. В., Кротиков В. Д., Троицкий В. С., Цейтлин Н. М. Результаты измерений интенсивности радиоизлучения ряда дискретных источников, Луны и Юпитера на волне $70,16 \text{ см}$	553
Дмитренко Д. А., Каменская С. А., Рахлин В. Л. Результаты измерения радиоизлучения Луны на волне $\lambda = 1,6 \text{ см}$	555
Ерухимов Л. М., Митяков Н. А. Некоторые методы исследования ионосферы путем пространственно-разнесенного приема сигналов ИСЗ	556
Долин Л. С. О лучевом описании слабо-неоднородных волновых полей	559
Литвак А. Г. О нелинейном возбуждении плазменных волн	562
Таланов В. И. О самофокусировке электромагнитных волн в нелинейных средах	564
Коваленко А. Н., Марков Г. Т. Излучение вибраторных антенн на кромке клина	566
Цейтлин Н. М. К вопросу об измерении параметров антенн по радиоизлучению «черного» диска, расположенного в зоне Френеля	571
Нагибаров В. Р. Двухквантовые импульсные генераторы на парамагнитных центрах	572
Ревокатов О. П. О форме линий ядерного магнитного резонанса в твердом теле	574

Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомagnetизм и аэрoномия», т. IV, № 1, 1964	576
---	-----

ФИЗИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ В ОКРЕСТНОСТЯХ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ*

В. А. Разин

Приводятся данные, указывающие на существование короны солнечной системы,

Многообещающим методом исследования межпланетной и межзвездной среды являются наблюдения фарадеевского вращения плоскости поляризации космического радиоизлучения. Угол поворота плоскости поляризации излучения при распространении радиоволны в космическом пространстве дается выражением [1, 2]

$$\psi = \frac{0,94 \cdot 10^6}{\omega^2} \int_0^L NH_1 dl, \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота излучения в герцах, N — число электронов в $см^3$, H_1 — продольная составляющая магнитного поля в эрстедах, L — путь, проходимый волной, в $см$. Измеряя угол ψ , можно определить величину $\int_0^L NH_1 dl$, представляющую важную интегральную

характеристику среды, через которую проходят радиоволны.

В этой статье приводятся данные о среде в окрестностях солнечной системы, которые были получены на основании поляризационных измерений, проводившихся на частоте 207 мГц в октябре 1957 г., в октябре и декабре 1961 г. и в марте—апреле 1962 г. Измерения проводились с помощью неподвижных параболических антенн диаметром 30 м в Крымской научной станции ФИАН СССР. Ширина диаграммы антенн по точкам половинной мощности составляла около $3^{\circ}30'$. Исследованию была доступна полоса на небосводе со средним склонением $+22^{\circ}$.

Облучатели антенн, приемная аппаратура и методика наблюдений были аналогичны во всех четырех сериях измерений. Облучатели представляли собой вибраторы с рефлекторами; их можно было поворачивать вокруг электрической оси антенн на $\pm 360^{\circ}$. Чувствительность аппаратуры была $\sim 1^{\circ}К$ при постоянной времени 40 сек. Наблюдения проводились методом модуляции ширины полосы пропускания аппаратуры [1, 2]: полоса пропускания с частотой 25 гц скачком изменялась от 0,2 мГц (на уровне 0,5 по мощности) до 7 мГц и измерялась разность интенсивностей линейно поляризованных сигналов, отвечающих двум различным полосам пропускания аппаратуры.

Величину, показывающую, какая часть интенсивности поляризованного сигнала регистрируется аппаратурой («глубину модуляции» поляризованной компоненты), нетрудно связать с углом поворота плоскости

* Из доклада на конференции по радиоастрономии (г. Горький, 28 февраля, 1963 г.).

поляризации волн и шириной полосы пропускания приемника. Если энергетическая частотная характеристика приемника может быть аппроксимирована гауссовой кривой

$$F(\omega - \omega_0) = \exp[-\ln 2(\omega - \omega_0)^2/(\Delta\omega)^2] \quad (2)$$

(ω_0 — резонансная частота, $\Delta\omega$ — полуширина полосы пропускания приемника на уровне 0,5 по мощности), то деполяризация излучения из-за дисперсии фарадеевского вращения определяется фактором [1]

$$\exp[-(\Delta\psi)^2/\ln 2]. \quad (3)$$

Здесь

$$\Delta\psi = 2\psi \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (4)$$

есть разность углов поворота плоскостей поляризации волн, частоты которых отличаются на $\Delta\omega$. Глубина модуляции поляризованной компоненты равна разности двух выражений типа (3) с величинами $\Delta\psi$, соответствующими узкой и широкой полосам пропускания приемника. Если при узкой полосе приемника $\Delta\psi \ll 1$, то глубина модуляции линейно поляризованной компоненты

$$m = 1 - \exp[-(\Delta\psi)^2/\ln 2]. \quad (5)$$

В таблице 1 приведены величины m , вычисленные по формуле (5) для некоторых значений $\Delta\psi$.

Таблица 1

$\Delta\psi$	0	0,3	0,5	0,7	1	1,3	1,5	1,8
m	0	0,12	0,3	0,5	0,76	0,91	0,96	0,99

Зная глубину модуляции m , можно определить $\Delta\psi$, а следовательно, и ψ — угол поворота плоскости поляризации радиоволн на их пути от источников до наблюдателя. При полосе пропускания 7 мГц на частоте 207 мГц $\Delta\psi = \psi / (207/7) \approx \psi / 30$. Если $\psi \gtrsim 30$ радиан, то глубина модуляции $m \gtrsim 0,76$, так как излучение, принимаемое в полосе частот 0,2 мГц, при $\psi \sim 30$ не деполяризуется ($\Delta\psi = \psi / (207/0,2) \sim (30/1035) \ll 1$) и справедлива формула (5).

Обратимся теперь к экспериментальным данным. Согласно измерениям, проведенным в октябре 1957 г., из области небосвода с $\delta = +22^\circ$ и $\alpha = 6^h - 10^h$, расположенной вблизи плоскости эклиптики, приходит линейно поляризованное излучение с температурой $\sim 10^\circ\text{K}$ (принимается $m = 1$). Наблюдения указанной области проводились в утренние часы, когда концентрация электронов на луче зрения в ионосфере сильно меняется. Связанное с этим регулярное вращение плоскости поляризации излучения давало убедительное доказательство того, что наблюдаемое поляризованное излучение имеет внеземное происхождение.

Величина ψ , обусловленная ионосферой Земли, даже в самые поздние часы наблюдений, по-видимому, не превосходила 10 радиан. Следовательно, плоскость поляризации излучения поворачивалась на угол больше или порядка 20 радиан при распространении радиоволн в межзвездной и межпланетной среде.

Результаты поляризационных измерений, выполненных в октябре и декабре 1961 г., а также в марте — апреле 1962 г., оказались иными. Регистрируемая интенсивность поляризованного сигнала из области

$\delta = +22^\circ$, $\alpha = 6^h - 10^h$ составляла меньше или порядка 4°K , т. е. по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем в 1957 г. Такое различие результатов поляризационных измерений побудило прежде всего пересмотреть данные, полученные в 1957 г., так как измерения были тогда довольно кратковременными (с 1 по 12-октября). Однако самый пристрастный анализ результатов наблюдений и условий, при которых проводились измерения, не дал повода для сомнений в достоверности данных 1957 г. По-видимому, расхождение результатов поляризационных измерений, выполненных в 1957 г. и в 1961—1962 гг., связано с более глубокими причинами, нежели ошибки измерений.

Встав на эту точку зрения, мы приходим к неожиданным и очень интересным выводам. Дело в том, что различие результатов поляризационных измерений можно объяснить уменьшением фарадеевского вращения плоскости поляризации космического радиоизлучения до величины $\psi \ll 15$ радиан. Такая возможность в принципе не исключена, так как в 1957 г. измерения проводились в период, близкий к максимуму солнечной деятельности, а в 1961—1962 гг. — в период, когда активность Солнца заметно упала. Из-за уменьшения концентрации электронов на луче зрения в ионосфере величина ψ могла уменьшиться, но, вероятно, не более, чем на 5 радиан. Поэтому уменьшение ψ должно быть связано в основном с изменением состояния среды в околосолнечном пространстве, подверженном воздействию Солнца. Вместе с тем величина фарадеевского вращения плоскости поляризации радиоволн с частотой 207 мГц в межпланетной среде вряд ли превосходит несколько радиан.

Все эти факты наводят на мысль о том, что в периоды максимума деятельности Солнца вокруг солнечной системы образуется обширная «корона» из ионизированного газа, которая в периоды минимума деятельности Солнца заметно уменьшается. Термин «корона солнечной системы» употребляется здесь в весьма широком смысле как название среды, окружающей солнечную систему и вызывающей вращение плоскости поляризации космического радиоизлучения. Он может означать, например, радиационные пояса или, если солнечная система находится в облаке газа, область в окрестностях солнечной системы, где газ ионизирован, и т. п.

Параметры короны солнечной системы в направлении, близком к плоскости эклиптики, для периода максимума деятельности Солнца можно оценить, исходя из того, что на частоте 207 мГц угол поворота плоскости поляризации излучения, проходящего через корону, составляет около 15 радиан. Отсюда $NH_{\parallel}l \sim 2,7 \cdot 10^{13}$ (на частоте 207 мГц $\psi = 5,5 \cdot 10^{-13} NH_{\parallel}l$). При $H_{\parallel} = 10^{-5}$ эрстед и $N = 10 \text{ см}^{-3}$ протяженность короны $l \sim 2,7 \cdot 10^{17} \text{ см}$, т. е. во много раз больше размера солнечной системы.

Существование короны солнечной системы может проявиться также в поглощении длинноволнового космического радиоизлучения. Пусть оптическая толщина короны $\tau_{\nu} \sim 1$ на частоте ν . Тогда $N^2l \sim 5\nu^2 T^{3/2}$, где T — температура газа в короне. Из приведенного соотношения и равенства $NH_{\parallel}l \sim 2,7 \cdot 10^{13}$ следует, что $N \sim 2 \cdot 10^{-13} \nu^2 T^{3/2} H_{\parallel}$ и $l \sim 1,3 \cdot 10^{26} \nu^{-2} T^{-3/2} H_{\parallel}^{-2}$. При $\nu = 2 \cdot 10^6 \text{ гц}$, $T = 10^4 \text{ K}$, $H_{\parallel} = 10^{-5}$ эрстед оказывается, что $N \sim 8 \text{ см}^{-3}$, $l \sim 3,2 \cdot 10^{17} \text{ см}$. Варьируя значения ν , T и H_{\parallel} , можно получить другие величины для N и l . Однако это ни в какой мере не отражается на выводе о существовании короны солнечной системы.

Развитые выше соображения основаны на сравнительно небольшом экспериментальном материале и, разумеется, нуждаются в проверке. В первую очередь, необходимы дальнейшие наблюдения фарадеевского вращения плоскости поляризации космического радиоизлучения (как распределенного, так и дискретных источников). Большой интерес пред-

ставляют продолжительные измерения интенсивности длинноволнового космического радиоизлучения, так как можно ожидать изменений величины поглощения радиоволн в короне солнечной системы. Некоторую информацию могли бы дать также исследования 11-летних вариаций интенсивности первичных космических лучей.

Я благодарен В. В. Виткевичу и Ю. Л. Кокурину за любезно предоставленную возможность воспользоваться антенными системами в Крымской научной станции ФИАН СССР и А. Н. Родионову за помощь при измерениях в 1961 и 1962 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Разин, Радиотехника и электроника, 1, 846 (1956).
2. В. А. Разин, Астрон. ж., 35, 241 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 августа 1963 г.

PHYSICAL CONDITIONS IN THE VICINITY OF THE SOLAR SYSTEM ACCORDING TO MEASUREMENTS DATA OF POLARIZATION OF COSMIC RADIATION

V. A. Razin

Data are given pointing out at the corona of the solar system existence.

ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕМПЕРАТУРА ЛУННОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ОТРАЖЕНИЕМ ОТ НЕЕ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

А. М. Стародубцев

Рассчитана эффективная температура лунной поверхности, обусловленная отражением от нее космического радиоизлучения на частотах 100, 200 и 400 *мгц*. В качестве модели Луны рассмотрен шар с идеально гладкой поверхностью из вещества, диэлектрическая проницаемость которого — от 1,5 до 4. Из расчетов следует, что а) с изменением угла восхождения Луны средняя яркостная температура изменяется мало, и лишь в области углов $\alpha = 280^\circ$ происходит некоторое возрастание температуры; б) степень поляризации излучения, отраженного от лунной поверхности, слабо зависит от частоты, и для $\epsilon = 1,5$ не превышает 12%, составляя в среднем около $2 \pm 5\%$.

Радиоизлучение космических источников, падая на поверхность Луны, частично отражается в окружающее пространство и попадает на Землю. Величина рассеянного в направлении Земли излучения зависит, с одной стороны, от взаимного расположения Луны, Земли и источников космического излучения, а, с другой стороны, от геометрической структуры лунной поверхности (шероховатости) и диэлектрической проницаемости покрывающего ее вещества.

Точное решение задачи об отражении космического радиоизлучения от поверхности Луны должно учитывать влияние шероховатости лунной поверхности; однако этот учет, будучи очень сложным, возможен лишь в том случае, если известен характер шероховатости лунной поверхности. Существенную помощь здесь могут оказать данные о рассеивающей способности лунной поверхности, полученные методами активной локации.

В качестве первого приближения представляется целесообразным произвести оценку/рассеянного Луной в направлении Земли космического излучения в предположении, что Луна представляет собой шар с идеально гладкой поверхностью, вещество которого имеет диэлектрическую проницаемость ϵ . Для определения отраженного излучения с большой степенью точности можно пользоваться методами геометрической оптики.

Облучение Луны радиоволнами от Солнца и Земли в этой работе не учитывается, так как этот эффект оказывается несущественным по сравнению с обсуждаемым явлением. Собственное тепловое радиоизлучение Луны здесь также не рассматривается.

Космический фон достигает значительных величин в диапазоне дециметровых и особенно метровых волн; поэтому для оценки яркости Луны, обусловленной отражением от ее поверхности космического радиоизлучения, были выбраны частоты 100, 200 и 400 *мгц*.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для вывода основных соотношений обратимся к рис. 1. Точка *N* является следом полярной оси экваториальной системы координат. Точки

P_Γ и L — следы линий, направленных на полюс Галактики и Луну соответственно. Линии, соединяющие точки на рисунке, — дуги большого круга сферы, а треугольники, образуемые этими линиями, — сферические треугольники.

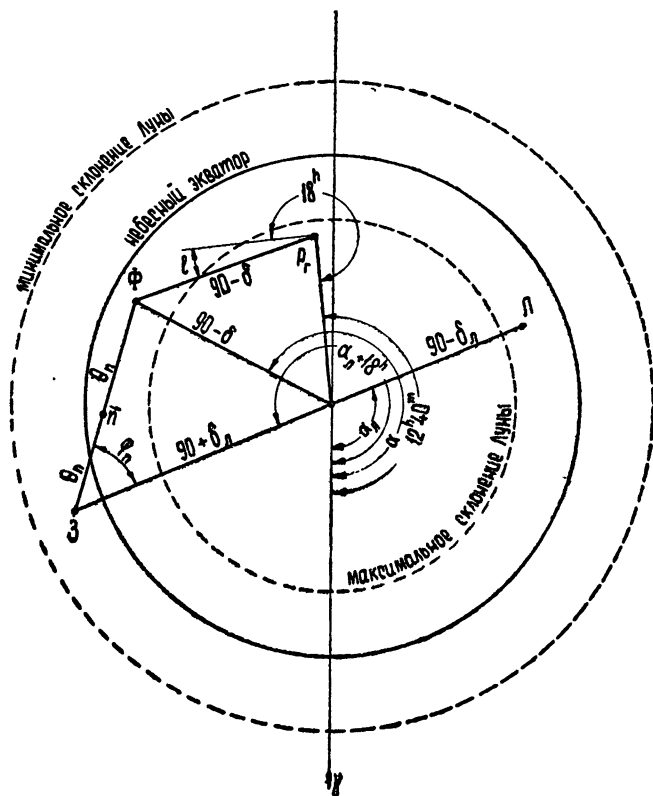


Рис. 1.

Пусть экваториальными координатами Луны будут α_L и δ_L . Установив приемную антенну в той точке земной поверхности, где Луна находится в зените, направим ее на центр Луны. При этом для определенности будем считать вертикально поляризованной антенну, вектор электрического поля которой лежит в плоскости, проходящей через зенит (точку L) и полюс мира (точку N).

Перенесем экваториальную систему координат в центр Луны. Так как расстояние до звезд, к которым привязана экваториальная система координат, во много раз больше, чем расстояния между Землей и Луной, то направление на центр Земли (точка Z) будет иметь координаты $\alpha_Z = \alpha_L + 12^h$ и $\delta_Z = -\delta_L$. Точка лунной поверхности, имеющая эти координаты, будет служить центром лунного диска, видимого с Земли.

Расчет средней яркостной температуры в направлении Земли удобно производить в сферической системе координат, связанной с точкой Z . Угол разумно отсчитывать от плоскости, проходящей через центр Земли, полюс мира и центр Луны (т. е. через точки Z , N , L).

Рассчитаем радиояркость элементарной площадки, видимой части лунной поверхности, обусловленную переотражением космического радиоизлучения в направлении на Землю. С этой целью выберем любую элементарную площадку dS , нормаль n к которой имеет углы θ_n и φ_n .

Условием видимости площадки со стороны Земли служит соотношение $\theta_n \ll \pi/2$. Полярная ось, направленная на центр Земли, и нормаль \mathbf{n} лежат в плоскости падения излучения, а угол θ_n , заключенный между ними, является углом отражения радиоволны. Углом падения будет угол, заключенный между нормалью \mathbf{n} и вычисленным по законам геометрической оптики направлением на тот участок космического пространства, откуда производится прием излучения (точка Φ). Луч, идущий в сторону этого источника излучения, также лежит в плоскости падения. Положение этой плоскости в пространстве определяется дугой $Zn\Phi$, равной $2\theta_n$.

Приходящее к поверхности Луны космическое излучение в данном случае можно считать неполяризованным. (Некоторые космические источники имеют поляризованное излучение, но их телесные углы незначительны.) Пусть излучение, падающее на элемент площади dS из направления $2\theta_n, \varphi_n$, имеет радиотемпературу $T_\Phi(2\theta_n, \varphi_n)$. Обозначим через $R_1(\theta_n)$ коэффициент отражения от площадки в случае, когда электрический вектор падающего излучения лежит в плоскости падения, и через $R_2(\theta_n)$ — аналогичный коэффициент для случая, когда электрический вектор падающего излучения перпендикулярен плоскости падения; при этом, как известно,

$$R_1(\theta_n) = \left[\frac{\varepsilon \cos \theta_n - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_n}}{\varepsilon \cos \theta_n + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_n}} \right]^2; \quad (1)$$

$$R_2(\theta_n) = \left[\frac{\cos \theta_n - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_n}}{\cos \theta_n + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta_n}} \right]^2. \quad (2)$$

Доля отраженного излучения с вертикальной поляризацией равна $T_1(\theta_n, \varphi_n) = T_\Phi(2\theta_n, \varphi_n) R_1(\theta_n)$, а доля отраженного излучения с горизонтальной поляризацией $T_2(\theta_n, \varphi_n) = T_\Phi(2\theta_n, \varphi_n) R_2(\theta_n)$. Яркость элемента площади при наблюдении с Земли с помощью вертикально поляризованной антенны определяется выражением

$$T_{1a}(\theta_n, \varphi_n) = T_\Phi(2\theta_n, \varphi_n) [R_1(\theta_n) \cos^2 \varphi_n + R_2(\theta_n) \sin^2 \varphi_n], \quad (3)$$

а при приеме на горизонтально поляризованную антенну —

$$T_{2a}(\theta_n, \varphi_n) = T_\Phi(2\theta_n, \varphi_n) [R_1(\theta_n) \sin^2 \varphi_n + R_2(\theta_n) \cos^2 \varphi_n]. \quad (4)$$

Средняя яркостная температура видимого диска Луны на i -ой поляризации

$$T_{i\text{cp}}(\alpha_L, \delta_L) = \frac{1}{S_{\text{вид}}} \int_{S_{\text{вид}}} T_{ia}(\theta_n, \varphi_n) dS_{\text{вид}}. \quad (5)$$

Подставляя сюда значения $S_{\text{вид}} = \pi r^2$ (r — радиус Луны), $dS_{\text{вид}} = (1/2)r^2 \sin 2\theta_n d\theta_n d\varphi_n$ и $T_{ia}(\theta_n, \varphi_n)$ из (3), (4), получим

$$T_{i\text{cp}}(\alpha_L, \delta_L) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta_n d\theta_n \int_0^{2\pi} T_i(\theta_n, \varphi_n) d\varphi_n. \quad (6)$$

Контрастная радиотемпература лунной поверхности, определенная для отраженного излучения по отношению к фоновому излучению, идущему из-за Луны,

$$\Delta T_{i\text{cp}}(\alpha_L, \delta_L) = T_{i\text{cp}}(\alpha_L, \delta_L) - T_\Phi(\alpha_L, \delta_L). \quad (7)$$

Требуемые для расчетов изофоты космического излучения на частотах 100 и 200 мГц взяты из [2-4], а для частоты 400 мГц из [5, 6]. К сожалению, полные изофоты приведены только на частоте 200 мГц; поэтому о недостающих участках изофот для других частот пришлось судить по ходу изофот на 200 мГц. Изофоты космического радиоизлучения даны в галактической системе координат; поэтому для связи со сферической системой координат θ_n, φ_n , в которой проводится интегрирование, на рис. 1 указаны сферические треугольники $3N\Phi$ и $\Phi N P_{\Gamma}$.

Вычисление средней яркостной температуры лунной поверхности производилось на электронной машине. Результаты вычислений приведены на рис. 2-8.

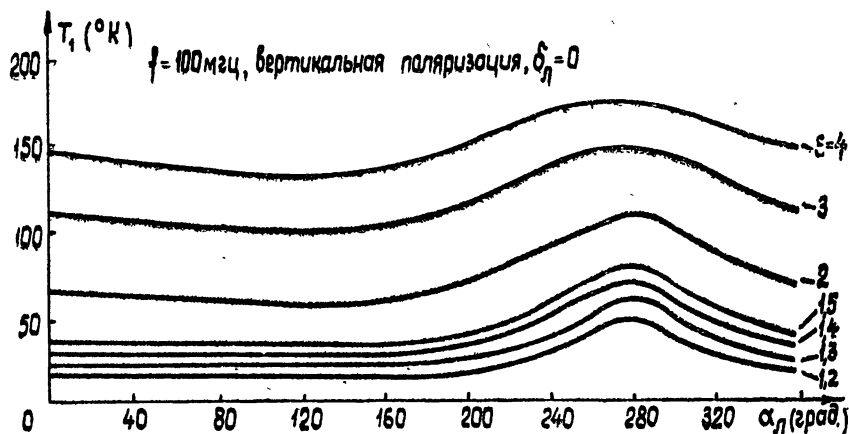


Рис. 2.

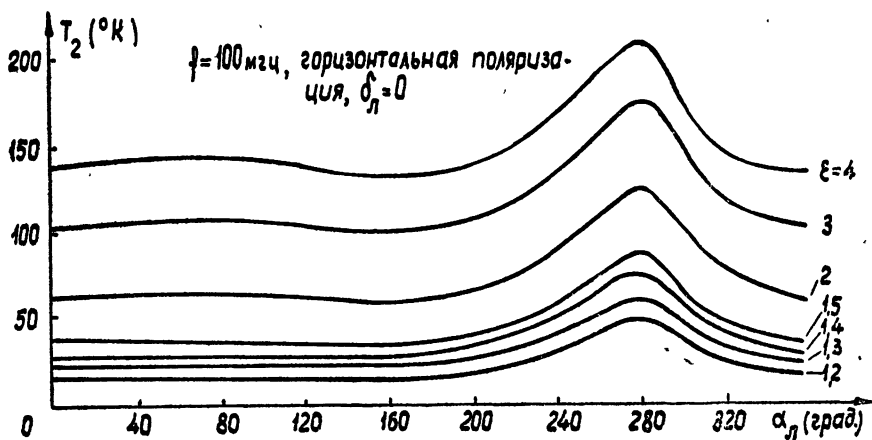


Рис. 3.

2. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

При расчетах диэлектрическая проницаемость лунного вещества принималась равной $\epsilon = 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 2; 3; 4$. Предварительно было выяснено, что склонение Луны δ_L мало влияет на среднюю температуру лунной поверхности. Поэтому все дальнейшие расчеты были сделаны для $\delta_L = 0$.

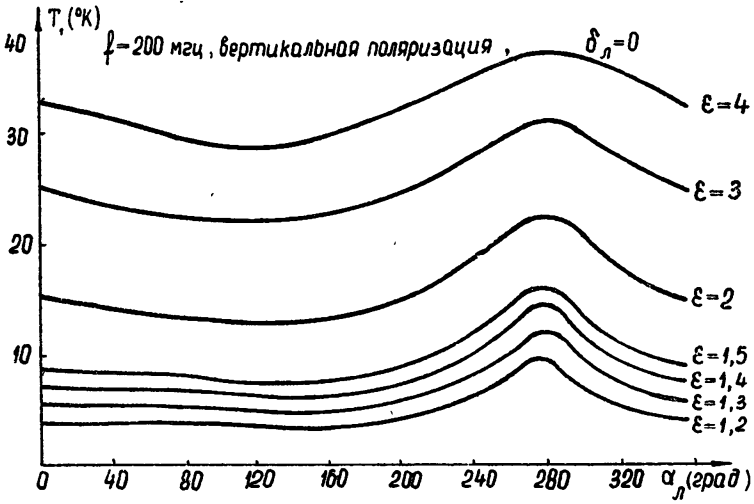


Рис. 4.

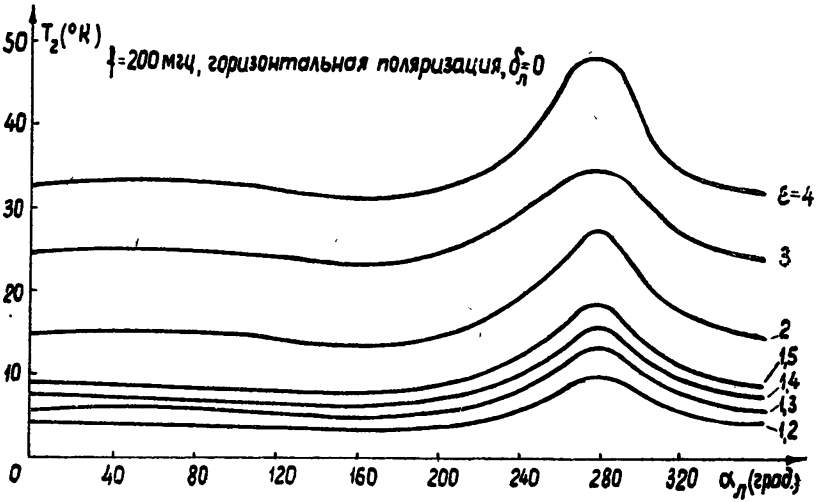


Рис. 5.

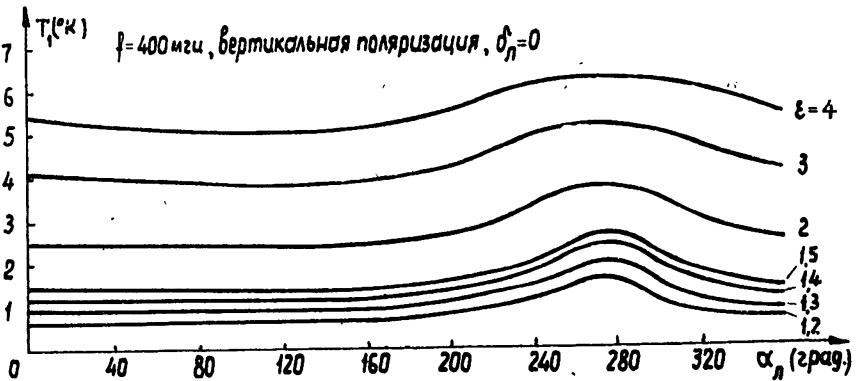


Рис. 6.

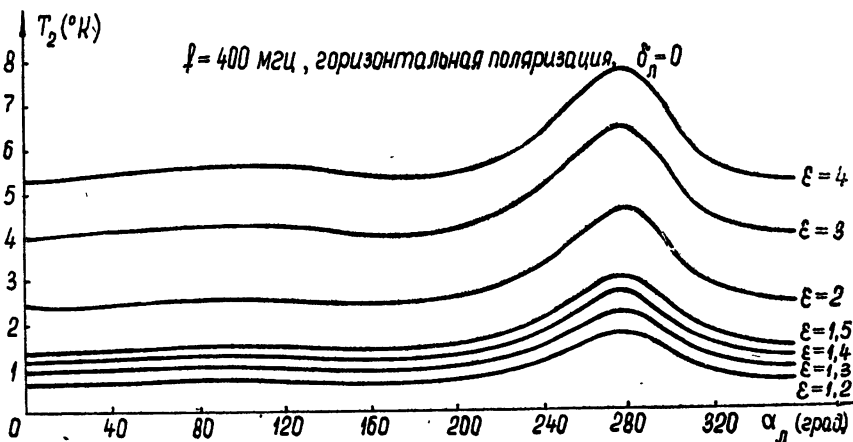


Рис. 7.

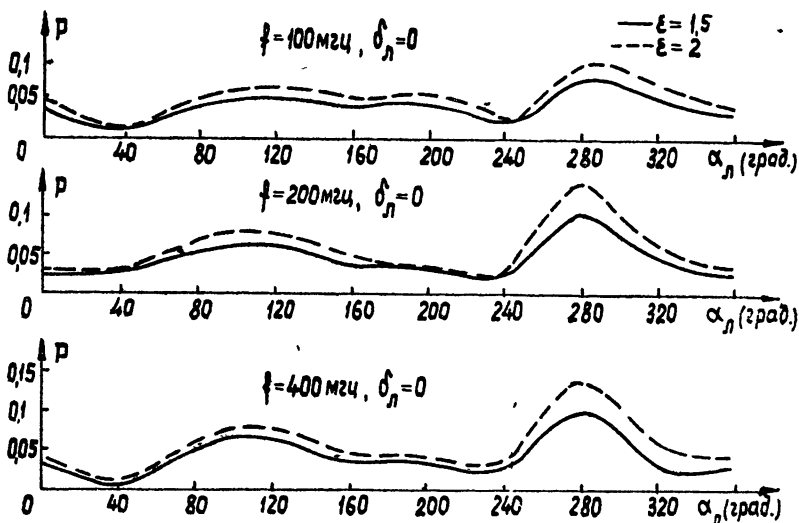


Рис. 8.

На рис. 2—7 приведены графики, дающие представление о влиянии угла восхождения α_L на яркостную температуру Луны для разных частот, поляризаций и значений ϵ , а на рис. 8 — степени поляризации принимаемого излучения P .

Из приведенных рисунков, кроме очевидных выводов о том, что яркостная температура, обусловленная отражением, растет с ростом ϵ и длины волны, ясно следующие:

а) с изменением угла восхождения средняя яркостная температура изменяется мало и лишь в области углов $\alpha_L = 280^{\circ}$ имеется некоторое возрастание температуры;

б) степень поляризации излучения, отраженного от лунной поверхности, несколько растет с ростом диэлектрической проницаемости, но для $\epsilon = 1,5$ не превышает 10%, составляя в среднем около $2 \div 5\%$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. С. Троицкому за постановку задачи и активное содействие в ее решении, В. А. Разину за ценные советы и Я. И. Альберу за программирование задачи и проведение расчетов на электронной вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж., **39**, 1089 (1962).
2. И. С. Шкловский, Космическое радиоизлучение, ГИТТЛ, М., 1956.
3. J. Bolton, K. Westfold, Austr. J. Sci. Res., **3A**, 19 (1950).
4. F. Dröge, W. Priester, Zs. f. Astrophys., **40**, 236 (1956).
5. C. L. Seeger, F. L. H. M. Stumpers and N. Van Hurck, Philips Tech. Rev., **21**, 317 (1959).
6. G. Westerhout, C. L. Seeger, W. N. Brouw, L. Tinbergen, BAN, **16**, 187 (1962).
7. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **6**, 242 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 марта 1963 г.

THE EFFECTIVE TEMPERATURE OF THE LUNAR SURFACE DUE
TO REFLECTION OF COSMIC RADIATION

A. M. Starodoubtsev

The effective temperature of the lunar surface due to reflection of cosmic radiation at the frequencies 100, 200 and 400 Mc/s is calculated. As the model of the Moon the dielectric sphere has been considered with perfectly smooth surface, the permittivity being equal 1.5–4. From calculations, it follows that a) the average brightness temperature changes weakly as a function of the Moon elevation angle and only in the angle region $\alpha=280^\circ$ some temperature increasing takes place b) the polarization ratio of radiation reflected from the lunar surface weakly depends on frequency and for $\epsilon=1.5$ does not exceed 12%, the averaged value being about $2 \div 5\%$.

ОПТИМАЛЬНЫЕ АНТЕННЫ МОНОИМПУЛЬСНЫХ ФАЗОВЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СТАНЦИЙ

В. И. Водолазский, А. Ф. Терпугов

Находятся оптимальные диаграммы направленности антенн моноимпульсных фазовых радиолокационных станций, обеспечивающие минимум ошибки в определении угла цели.

1. В последние годы все более широкое применение находят моноимпульсные радиолокационные станции (РЛС), позволяющие значительно повысить точность в определении угловых координат цели. В случае моноимпульсных фазовых РЛС информация об угле цели получается из сравнения фаз отраженных импульсов на выходах пространственно разнесенных антенн. Если шумы отсутствуют, то точность определения угла ограничивается лишь инструментальными ошибками. При наличии шумов точность определения угла можно повысить за счет рационального формирования диаграмм направленности антенн.

Мы исследуем простейший случай, когда о цели и шумах делаются следующие предположения.

1. Известно среднее значение отношения сигнал/шум на выходе антенны.

2. Шумы на выходах антенн — независимые, нормальные, аддитивно взаимодействующие с сигналом.

3. Угловое положение цели характеризуется одним углом φ , т. е. цель считается расположенной на плоскости.

4. Известна плотность вероятностей $P(\varphi)$ для углового положения цели.

Под диаграммой направленности антенны мы будем понимать следующее. Пусть антенна излучает мощность N . Тогда через площадь dS сферы радиуса R будет проходить поток

$$dN = \frac{NdS}{R^2} \Gamma^2(\varphi) = N\Gamma^2(\varphi) d\Omega. \quad (1)$$

Под диаграммой направленности антенны и будет пониматься величина $\Gamma(\varphi)$. Она удовлетворяет условию «нормировки»

$$\int \Gamma^2(\varphi) d\Omega = 1 \quad (\Gamma \geq 0), \quad (2)$$

которое получается из (1) интегрированием по всем углам. Так как мы приняли, что угловое положение цели характеризуется одним углом φ , то $d\Omega$ ниже заменяется на $d\varphi$.

2. Начнем со случая, когда мы должны точно определить угол цели. Наличие шума приводит к тому, что угол определяется с некоторой ошибкой $\Delta\varphi$. За оптимальные естественно считать те антенны, которые обеспечивают минимум среднего значения $\Delta\varphi^2$.

Пусть отношение сигнал/шум на выходе антенны достаточно велико (≥ 2). В случае отсутствия шума мы имели бы на выходах антенн разность фаз

$$\delta = 2\pi \frac{d}{\Lambda} \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{G}, \quad (3)$$

где d — расстояние между фазовыми центрами антенн, Λ — длина волны РЛС и φ — угол между направлением на цель и перпендикуляром к прямой, соединяющей центры антенн. Отсюда можно определить угол

$$\varphi = \arcsin G\delta. \quad (4)$$

При наличии шума на выходах антенн получается разность фаз $\theta = \delta + \Delta\theta$. В этом случае угол φ определяется с ошибкой

$$\Delta\varphi = \arcsin G(\delta + \Delta\theta) - \arcsin G\delta \simeq \Delta\theta \frac{G}{\sqrt{1 - G^2\delta^2}}. \quad (5)$$

Будем считать, что цель облучается лишь одной антенной, а диаграмма направленности обеих антенн идентичны. В этом случае отношение сигнал/шум по мощности на выходах обеих антенн будет одинаковым и равным $\frac{1}{2} a\Gamma^4$, где $\Gamma(\varphi)$ — диаграмма направленности антенны, а коэффициент a зависит от отражающих свойств цели, мощности шума и сигнала. Как указывается в литературе [1], если a достаточно велико, а $\Delta\theta$ распределена приближенно нормально с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 1/a\Gamma^4$. Отсюда мы получаем

$$\overline{\Delta\varphi^2} = \frac{G^2}{a\Gamma^4(1 - G^2\delta^2)} = \frac{G^2}{a\Gamma^4 \cos^2 \varphi}; \quad (6)$$

усредняя еще и по φ , окончательно найдем

$$D_\varphi = \frac{G^2}{a} \int \frac{P(\varphi) d\varphi}{\Gamma^4(\varphi) \cos^2 \varphi}. \quad (7)$$

Для определения оптимальных диаграмм направленности минимизируем это выражение по $\Gamma(\varphi)$, учитывая условия нормировки $\int \Gamma^2 d\varphi = 1$. Используя метод неопределенных множителей, мы получаем

$$\Gamma^6(\varphi) = \lambda \frac{P(\varphi)}{\cos^2 \varphi}, \quad (8)$$

где λ — некоторый коэффициент. Если дисперсия цели по углу α^2 мала, то φ также достаточно мало и $\cos^2 \varphi \simeq 1$. Тогда

$$\Gamma^6(\varphi) = \lambda P(\varphi). \quad (9)$$

Мы видим, что при слабых шумах диаграмма направленности не зависит от отношения сигнал/шум и определяется лишь $P(\varphi)$. Например, для нормального распределения цели по углу мы получаем

$$\Gamma^6(\varphi) = \frac{1}{\sqrt[4]{6\alpha^2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{12\alpha^2}}. \quad (10)$$

В этом случае

$$D_\varphi = 0,827 \frac{\alpha^2}{a} \frac{\Lambda^2}{d^2}. \quad (11)$$

В случае малых отношений сигнал/шум $\Delta\theta$ имеет дисперсию [1]

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{3} [1 - Aq(1 + Bq)e^{-q}] \quad (q = a\Gamma^4), \quad (12)$$

где $A = 0,955$, $B = 0,42$. Проводя те же рассуждения, что и выше, мы получаем

$$2,57\sqrt{q} [1 - 0,16q - 0,42q^2] e^{-q} = \frac{\lambda}{P(\varphi)}. \quad (13)$$

Отсюда

$$\sqrt{a} \Gamma^2 = \psi_1 \left(\frac{\lambda}{P(\varphi)} \right). \quad (14)$$

График функции $\psi_1(x)$ дан на рис. 1. Для значений аргумента $x \geq 1$ $\psi(x) \leq 0$ и поэтому для $P(\varphi) \leq \lambda$ (14) приводит к отрицательным значениям Γ . Как указывается в [2], в этом случае мы должны полагать $\Gamma = 0$ во всей области углов φ , для которых $P(\varphi) \leq \lambda$.

Для случая нормального распределения цели по углу имеем

$$\sqrt{a} \Gamma^2 = 2\psi_1(\lambda e^{\varphi^2/2\alpha^2}), \quad (15)$$

причем $\Gamma = 0$ для $\varphi \geq \varphi_m = \alpha \sqrt{-2 \ln \lambda}$.
Условие нормировки дает

$$\frac{\sqrt{a}}{\alpha} = 4 \int_0^{\sqrt{-2 \ln \lambda}} \psi_1(\lambda e^{x^2/2}) dx = f(\lambda). \quad (16)$$

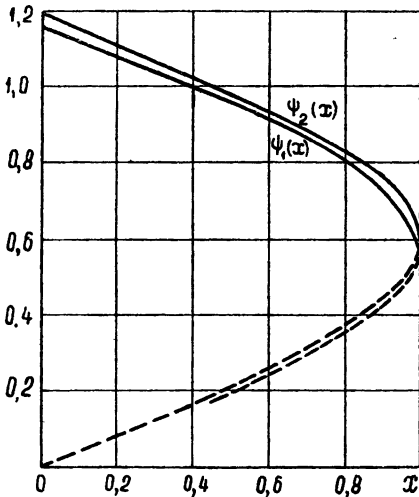


Рис. 1.

В этом случае диаграмма направленности уже зависит от a . Для D_φ получается формула

$$D_\varphi = G^2 \frac{\pi^2}{3} \left[1 - 2A \int_0^{\sqrt{-2 \ln \lambda}} \psi(\lambda e^{x^2/2}) (1 + B\psi) e^{-\psi} e^{-x^2/2} \times \right. \\ \left. \times \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right] = \frac{\pi^2}{3} G^2 F(\sqrt{a}/\alpha). \quad (17)$$

Графики функций $f(\lambda)$ и $F(\sqrt{a}/\alpha)$ приведены на рис. 2.

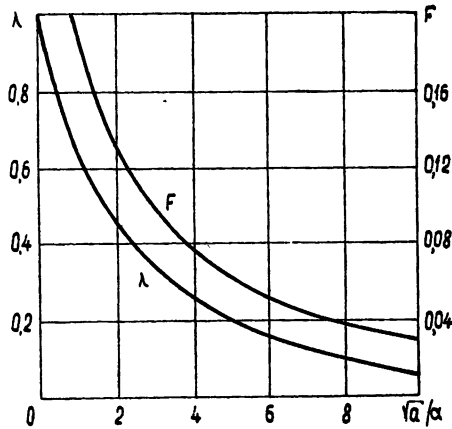


Рис. 2.

3. Иногда от РЛС требуется определение не точного значения угла цели, а лишь ответ на вопрос, вправо или влево отклонилась цель от некоторой избранной оси. С подобной ситуацией мы встречаемся, например, в следящих РЛС. Поэтому представляет интерес определение оптимальных диаграмм направленности антенн для подобных систем.

В данном случае необходимо несколько изменить критерий оптимальности. А именно, система может совершать два рода ошибок: с вероятностью P_1 утверждать, что цель находится слева от оси, в то время как в действительности она находится справа, и наоборот, с вероятностью P_2 утверждать, что цель находится справа, в то время как в действительности она находится слева. За оптимальную естественно считать ту систему, которая минимизирует $P = \frac{1}{2} (P_1 + P_2)$.

Если θ — разность фаз на выходах антенн, то, как уже указывалось выше, в случае идентичных антенн и большой величины отношения сигнал/шум

$$P(\theta|\varphi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(\theta - \delta)^2/2\sigma^2] \quad (-\infty \leq \theta \leq +\infty), \quad (18)$$

где $\sigma^2 = 1/a\Gamma^4 = 1/q$. В случае малых отношений сигнал/шум верно другое приближение [1]:

$$P(\theta|\varphi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{q}{4} \left(1 + \frac{q}{2}\right) e^{-q} \cos(\Delta\theta) + \frac{q^2}{4\pi} e^{-q} \cos(2\Delta\theta), \quad (19)$$

где $\Delta\theta = \theta - \delta$.

Будем рассматривать лишь четные функции $P(\varphi)$. Тогда цель оказывается слева или справа от оси с вероятностью 1/2; поэтому

$$P(\theta | \text{цель справа}) = 2 \int_0^{\pi} P(\theta|\varphi) P(\varphi) d\varphi; \quad (20)$$

$$P(\theta | \text{цель слева}) = 2 \int_{-\pi}^0 P(\theta|\varphi) P(\varphi) d\varphi.$$

Из соображений симметрии следует, что решение о направлении отклонения цели следует выносить в зависимости от того, будет ли θ больше или меньше 0. Если отклонение цели в направлении отсчета углов приводит к положительным значениям δ , то

$$P = \int_{-\infty}^0 d\theta \int_0^{\pi} P(\theta|\varphi) P(\varphi) d\varphi + \int_0^{\infty} d\theta \int_{-\pi}^0 P(\theta|\varphi) P(\varphi) d\varphi. \quad (21)$$

Для больших отношений сигнал/шум это выражение преобразуется к следующему виду:

$$P = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(-\sqrt{a}|\delta|\Gamma^2(\varphi)) P(\varphi) d\varphi, \quad (22)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Варьируя по Γ , получаем, учитывая условия нормировки

$$e^{-\frac{a\Gamma^2\delta^2}{2}} |\delta| P(\varphi) = \lambda. \quad (23)$$

Откуда

$$\sqrt{a} \Gamma^2(\varphi) = \frac{1}{|\delta|} \sqrt{2 \ln \frac{|\delta| P(\varphi)}{\lambda}}.$$

В случае нормального распределения вероятностей углового положения цели эта формула приобретает вид

$$\sqrt{a} \Gamma^2(\varphi) = \frac{1}{|\delta(\varphi)|} \sqrt{2 \ln \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\varphi^2}{2\alpha^2}} \sin \varphi \right]}. \quad (24)$$

Подкоренное выражение будет положительным только для тех значений углов, где

$$e^{-\frac{\varphi^2}{2\alpha^2}} \sin \varphi > \lambda. \quad (25)$$

Для остальных значений углов следует полагать $\Gamma = 0$. Таким образом, границы интервала, где $\Gamma \neq 0$ находятся из уравнения

$$e^{-\frac{\varphi^2}{2\alpha^2}} \sin \varphi = \lambda. \quad (26)$$

Характерной особенностью получающихся диаграмм является то, что они имеют провал в середине, т. е. $\Gamma(\varphi)$ отлична от нуля лишь на интервалах $[-\varphi_2; -\varphi_1]$, $[\varphi_1; \varphi_2]$. Это происходит, по-видимому, потому, что при малых значениях углов влияние шумов сказывается особенно сильно и поэтому оказывается более выгодным вообще не изучать область пространства в непосредственной близости от оси.

Из условия нормировки мы получаем

$$2\pi \frac{d}{\Lambda} \sqrt{a^-} = 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{2 \ln \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\varphi^2}{2a^2}} \sin \varphi \right]} d\varphi = f(\lambda; \alpha). \quad (27)$$

Для вероятности ошибки получается выражение

$$P_{\text{ош}} = 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Phi \left(- \sqrt{2 \ln \left[\frac{1}{\lambda} \sin \varphi e^{-\frac{\varphi^2}{2a^2}} \right]} \right) P(\varphi) d\varphi + \frac{1}{2} - \left[\Phi \left(\frac{\varphi_2}{\alpha} \right) - \Phi \left(\frac{\varphi_1}{\alpha} \right) \right]. \quad (28)$$

Последние члены появились в силу того, что для тех значений углов, где $\Gamma \equiv 0$, разность фаз распределена по равномерному закону и условная вероятность ошибочного решения равна $\frac{1}{2}$. Графики для величины $P_{\text{ош}}$ приведены на рис. 3. В области слабых сигналов

$$P = 2 \int_0^{\pi} P(\varphi) d\varphi \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} + \frac{q}{4} \left(1 + \frac{q}{2} \right) e^{-q} \cos(\Delta\theta) + \frac{q^2}{4\pi} e^{-q} \cos(2\Delta\theta) \right\} d\theta. \quad (29)$$

При интегрировании по θ интеграл с $\cos(2\Delta\theta)$ обращается в нуль и мы получаем

$$P = \frac{1}{2} - \int_0^{\pi} q \left(1 + \frac{q}{2} \right) e^{-q} \sin \left(2\pi \frac{d}{\Lambda} \sin \varphi \right) P(\varphi) d\varphi. \quad (30)$$

Минимизируя это выражение по $\Gamma(\varphi)$, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{q} \left(1 - \frac{q^2}{2} \right) e^{-q} &= \\ &= \frac{\lambda}{P(\varphi) \sin [2\pi (d/\Lambda) \sin \varphi]}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \sqrt{a^-} \Gamma^2 &= \psi_2 \times \\ &\times \left(\frac{\lambda}{P(\varphi) \sin [2\pi (d/\Lambda) \sin \varphi]} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

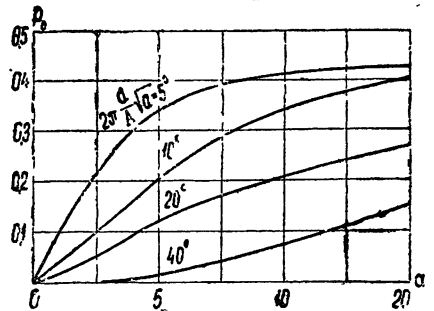


Рис. 3.

График функции ψ_2 дан на рис. 1. В случае нормального распределения цели по углу и малых значений α мы получаем

$$\sqrt{a} \Gamma^2 = \psi_2 \left(\frac{\lambda e^{\varphi^2/2a^2}}{\sin(\Delta\varphi/a)} \right), \quad (32)$$

где $\Delta = 2\pi(d/\Lambda)\alpha$. Так как для $x \gg 1$ $\psi_2(x) \ll 0$, то для значений аргумента ψ_2 , больших единицы, следует полагать $\Gamma = 0$. Отсюда получается уравнение для определения граничных углов диаграммы направленности:

$$\lambda = \sin \left(\Delta \frac{\varphi_m}{\alpha} \right) e^{-\varphi_m^2/2a^2}. \quad (33)$$

Графики φ_m/α в зависимости от λ и Δ приведены на рис. 4. Следует отметить, что для устранения неоднозначности у получающихся диаграмм-направленности следует оставлять лишь два главных лепестка.

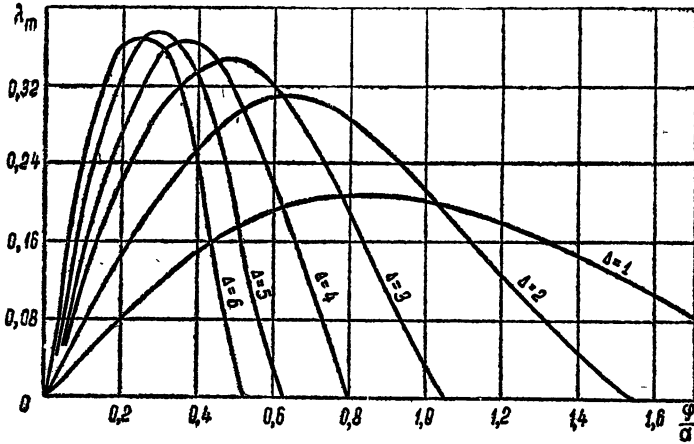


Рис. 4.

Условие нормировки дает

$$\frac{\sqrt{a}}{\alpha} = 2 \int_{z_1}^{z_2} \psi_2 \left(\frac{\lambda e^{z^2/2}}{\sin \Delta z} \right) dz = f(\lambda, \Delta). \quad (34)$$

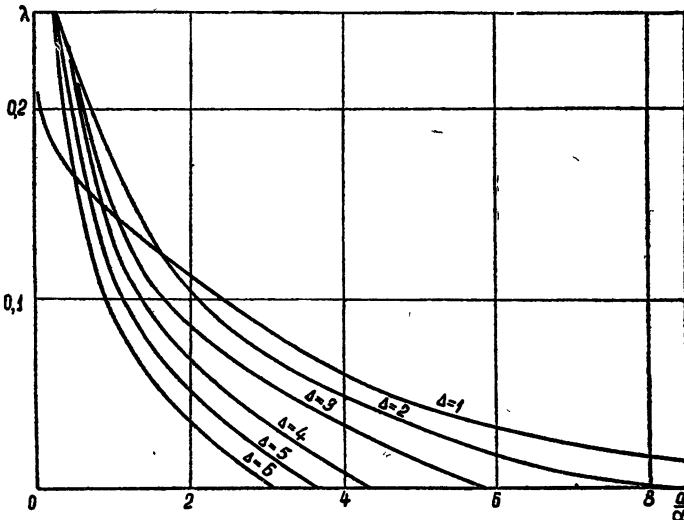


Рис. 5.

Графики $f(\lambda, \Delta)$ даны на рис. 5. Кривые для P приведены на рис. 6, а пример получающихся диаграмм направленности на рис. 7.

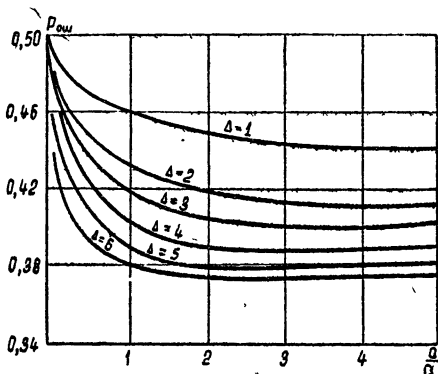


Рис. 6.

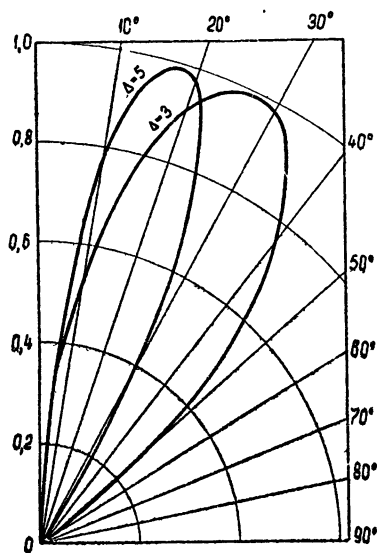


Рис. 7.

4. Исследуем теперь вопрос о том, какой выигрыш дает применение оптимальных диаграмм направленности по сравнению с диаграммами направленности, описываемыми уравнением

$$\Gamma^2(\varphi) = \frac{1}{\beta \sqrt{2\pi}} e^{-\varphi^2/2\beta^2}. \quad (35)$$

Параметр β определяет ширину диаграммы и связан с углом раскрыва диаграммы по уровню $1/\sqrt{2}$ — ϑ соотношением

$$\vartheta = \beta \sqrt{2 \ln 2}.$$

Подобная аппроксимация хорошо описывает реально применяемые диаграммы направленности [3].

Сравнивая (35) с (8), мы видим, что в случае сильных сигналов и критерия минимума D_φ оптимальная диаграмма направленности совпадает с (35), причем

$$\vartheta = \alpha \sqrt{6 \ln 2}.$$

В случае слабых сигналов оптимальная диаграмма направленности отлична от (35). Для того, чтобы иметь возможность сравнивать диаграммы, найдем оптимальное значение параметра β . Для малых значений α приближенно можно записать

$$\frac{3}{\pi^2} \sigma^2 \approx 1 - 1100 q + 0,485 q^2. \quad (36)$$

Коэффициенты при q и q^2 подобраны здесь таким образом, чтобы (36) равномерно аппроксимировало точное выражение для $3\sigma^2/\pi^2$ (13) в интервале значений q между 0 и 1,465 (точка минимума функции (13)).

Подставляя $q = ae^{-\varphi^2/2\beta^2}/2\beta\sqrt{2\pi}$ и усредняя по φ , мы получим

$$\frac{3}{\pi^2} \overline{\sigma^2} = F' = 1 - 0,193 \frac{a}{\alpha^2} \left\{ \frac{k^2}{(1+k^2)^{3/2}} - 0,0875 \frac{a}{\alpha^2} \frac{k}{(2+k^2)^{3/2}} \right\}, \quad (37)$$

где $k = \beta/\alpha$. Отсюда легко находится уравнение для определения оптимального значения параметра k :

$$\frac{a}{\alpha^2} = 11,5 k \left(\frac{2+k^2}{1+k^2} \right)^{5/2} \frac{k^2-2}{2(k^2-1)}. \quad (38)$$

Определяя $k(\sqrt{a}/\alpha)$ и подставляя его в (37), можно вычислить величину $F'(\sqrt{a}/\alpha)$ и отношение $z = F/F'$. Из численных расчетов вытекает, что применение оптимальных диаграмм направленности сравнительно мало уменьшает средний квадрат ошибки—не более чем на 20%.

Для сравнения диаграмм направленности, описываемых уравнением (24) и (35), в выражение (22) подставлялось (35) и путем численных расчетов находилось оптимальное значение параметра $k = \beta/\alpha$ и соответствующее ему минимальное значение величины $P = P_0$. Из них следует, что оптимальные диаграммы направленности в 4 ÷ 5 раз уменьшают вероятность ошибки в определении направления отклонения цели. Это не удивительно, так как оптимальные диаграммы направленности сильно отличаются по форме от диаграмм, описываемых уравнением (35).

1. Существуют оптимальные формы диаграмм направленности моноимпульсных фазовых РЛС, дающие минимум погрешности в определении угла цели.

2. Применение оптимальных диаграмм направленности для определения точного значения угла цели сравнительно мало уменьшает средний квадрат ошибки—не более чем на 20%.

3. Применение оптимальных диаграмм направленности для определения знака угла позволяет уменьшить вероятность ошибки в 4 ÷ 5 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Цветков, Радиотехника, № 5, 12 (1957).
2. J. Guenin, Operations Research, 9, 1 (1961).
3. L. Blake, Proc. IRE, 41, 770 (1953).

Поступила в редакцию
25 марта 1963 г.

OPTIMAL ANTENNAE OF MONOPULSE PHASE RADARS

V. E. Vodolazkiy, A. F. Terpugov

Optimal antennae patterns of monopulse phase radars are found which provide the minimum error in target angle.

О ВРАЩАТЕЛЬНОМ СПЕКТРЕ И ИНТЕНСИВНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ ДИМЕРОВ ВОДЯНОГО ПАРА В АТМОСФЕРЕ. I. КОНФИГУРАЦИЯ ДИМЕРА С ЛИНЕЙНОЙ ВОДОРОДНОЙ СВЯЗЬЮ

А. А. Викторова

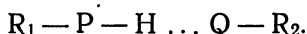
Рассматривается модель димера водяного пара в рамках теории водородной связи. Взаимная ориентация молекул и потенциальный барьер внутреннего вращения рассчитываются на основе точечной модели молекулы воды. Оценивается точность точечной аппроксимации.

В водяном паре атмосферы часть молекул находится в ассоциированном состоянии [1]. В настоящей работе рассматриваются димеры, концентрация которых является максимальной среди всех прочих полимеров водяного пара. При вычислении поглощения радиоволн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов в случае их распространения в атмосфере знание спектра этого соединения представляет определенный интерес [2].

Для расчета поглощения необходимо знать как конфигурацию димеров, так и их концентрацию в атмосфере. В настоящей статье мы займемся расчетами конфигурации димеров водяного пара.

I. СИЛЫ СВЯЗИ В ДИМЕРЕ ВОДЯНОГО ПАРА

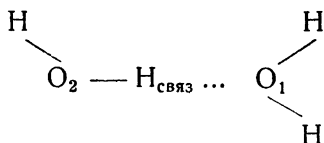
Для нахождения взаимной ориентации молекул воды в димере необходимо, прежде всего, рассмотреть характер сил, связывающих молекулы. Они по своей природе относятся к силам водородных связей [2-6], и их главные черты можно грубо описать следующим образом:



Здесь P и Q — электроотрицательные атомы (например, кислород), H — электроположительный атом (обычно водород, специфика которого состоит в том, что у него нет внутренних электронов).

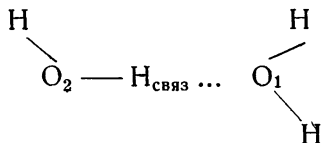
Связь P—H будет поляризоваться в поле атома Q, что уменьшит электронную плотность в районе атома H. При достаточно сильной полярности группы PH молекула R₁PH может соединиться с молекулой QR₂ посредством связи, которая по своей природе весьма близка к донорно-акцепторной. Заметим, что подобная связь может быть и между частями одной молекулы.

Рассмотрим конкретный пример — димер водяного пара:



Расстояние между атомами H_{связ} и O₁ приблизительно на один ангстрем меньше суммы ван-дер-ваальсовых радиусов водорода и кислорода (2,6 Å). На этих расстояниях силы отталкивания велики, и хотя для по-

лярных молекул отталкивание меньше, одни электростатические и дисперсионные силы не могли бы его преодолеть — важная роль принадлежит здесь обменным силам между связью $O_2-H_{\text{связ}}$ и O_1 . Таким образом, в случае структурной формулы



(полярная структура молекулы воды имеет вполне определенный вес) энергия взаимодействия равна, в основном, энергии взаимодействия $(H_{\text{связ}}-O_1)^+$ с поправкой на отталкивание от O_2^- . Это — связь донора O_1 с катионом (акцептором) $H_{\text{связ}}^+$, сопровождаемая изменением распределения электронной плотности у O_2 .

Донорно-акцепторная связь обуславливается неподеленными (несвязывающими) электронами атома $Q(O_1)$. Следовательно, устойчивость водородной связи



должна зависеть от их конфигурации, зависящей, в свою очередь, от строения молекулы QR_2 . Если облако неподеленной пары имеет ось симметрии (что справедливо, например, для кислорода), то энергетически наиболее выгодно, чтобы линия связи $P-H$ совпадала с направлением этой оси [2,5].

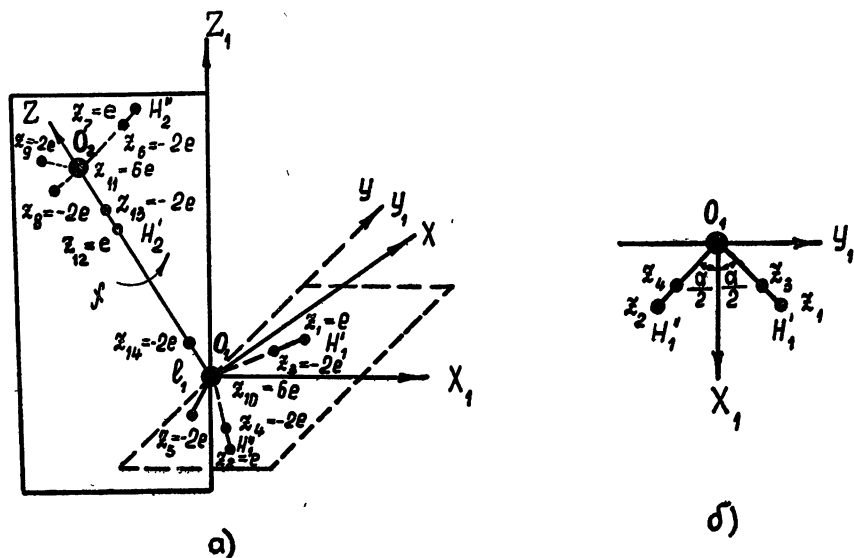
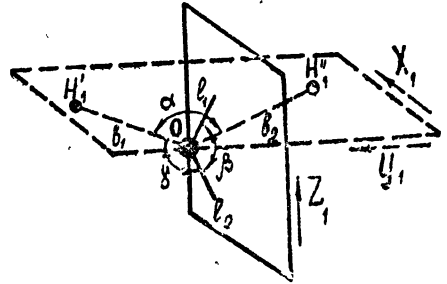


Рис. 1. а) Точечная модель линейного димера водяного пара. Электронные распределения молекул воды представлены через эквивалентные орбиты. Сплошные линии лежат в плоскости XZ (X_1Z_1), пунктирные линии — в плоскости X_1Y_1 ; заряды z_5 и z_{14} расположены симметрично относительно плоскости молекулы воды $H_1'O_1H_1''$, заряды z_8 и z_9 расположены симметрично относительно плоскости молекулы $H_2'O_2H_2''$; χ — угол между плоскостью молекулы $H_2'O_2H_2''$ и плоскостью ZX . б) Ориентация молекулы воды $H_1'O_1H_1''$ в системе координат $X_1Y_1Z_1$; плоскость X_1Z_1 — плоскость симметрии молекулы. Молекула $H_2'O_2H_2''$ расположена идентичным образом в системе координат $X_2Y_2Z_2$.

Учитывая сказанное, мы предлагаем следующую модель для димера водяного пара (рис. 1). Связь осуществляется, главным образом, путем взаимодействия несвязывающей электронной пары l_1 одной молекулы воды со связью $O_2-H'_2$ другой молекулы. Электронная структура мономеров воды представлена через эквивалентные орбиты [7,8]. Каждая из них является sp^3 -гибридной орбитой, что отражает приблизительно тетраэдральную симметрию молекулы воды и способность воды образовывать связи приблизительно в тетраэдральном направлении (это подтверждается структурой как твердой, так и жидкой воды [2, 7-10]). У молекулы H_2O имеются четыре эквивалентные орбиты (рис. 2). Две из этих орбит—связывающие (b_1, b_2) с осями, лежащими в плоскости моле-

Рис. 2. Структура молекулы воды, представленная через эквивалентные электронные орбиты. Начало системы координат $X_1Y_1Z_1$ — в ядре O_1 . Сплошные линии лежат в плоскости X_1Z_1 , пунктирные — в плоскости X_1Y_1 . Орбиты связи b_1, b_2 расположены симметрично относительно плоскости X_1Z_1 ; несвязывающие орбиты l_1, l_2 расположены симметрично относительно плоскости молекулы X_1Y_1 .



кулы по линиям связи $O-H$, при этом каждая из орбит является зеркальным изображением другой в плоскости $Y_1 = 0$. Две другие орбиты (l_1, l_2) — несвязывающие (или разрыхляющие), так как их центры тяжести лежат со стороны кислорода, удаленной от атомов водорода; эти орбиты расположены в плоскости симметрии молекулы X_1Z_1 и являются зеркальными изображениями друг друга относительно плоскости молекулы. Два внутренних $1s$ -электрона кислорода в связях не участвуют; их роль сводится в основном к уменьшению эффективного заряда ядра кислорода.

Эквивалентные орбиты — один из видов направленных молекулярных орбит, хорошо объясняющий направленные свойства молекулы. В работах Попла и Данкена [7,8], результатами которых мы будем пользоваться, даны конкретные выражения для эквивалентных орбит воды в виде определенной линейной комбинации атомных орбиталей электронов*:

$$b_1 = 0,58 (1s)_{H_1}' + 0,06 (2s) + 0,49 (2p_{Y_1}) + 0,37 (2p_{X_1});$$

$$b_2 = 0,58 (1s)_{H_2}' + 0,06 (2s) - 0,49 (2p_{Y_1}) + 0,37 (2p_{X_1});$$

$$l_1 = 0,58 (2s) - 0,41 (2p_{X_1}) + 0,71 (2p_{Z_1});$$

$$l_2 = 0,58 (2s) - 0,41 (2p_{X_1}) - 0,71 (2p_{Z_1}).$$

(1)

* Здесь $(1s)_{H_1}'$, $(1s)_{H_2}'$ — слейтеровские атомные орбиты водорода; $(2s)$, $(2p_{X_1})$, $(2p_{Y_1})$, $(2p_{Z_1})$ — слейтеровские орбиты кислорода. Попл и Данкен приводят также углы между эквивалентными орбитами:

* Заметим, что расчет эквивалентных орбит для молекулы воды был сделан также Кулсоном и Бурнель. В их расчетах, в отличие от работы Попла и Данкена, связи $O-H$ слегка изогнуты [16].

$$\alpha = 104,5^\circ; \quad \beta = 120,2^\circ; \quad \gamma = 107,8^\circ$$

и междуядерное расстояние $r_{\text{OH}} = 0,97 \text{ \AA}$.

В нашем случае связь образована l_1 — несвязывающей орбитой O_1 и O_2-H_2 — связью другой молекулы. Считаем, что водородная связь линейная, и при образовании ее изменились лишь электронные распределения вышеуказанных двух орбит, углы же и прочие параметры остались прежними. Длину связи O_2-H_2 можно считать также неизменной ($0,97 \text{ \AA}$), так как связь в данном случае слабая. Расстояние $O_1 \dots O_2$ известно из инфракрасного спектра достаточно плотного водяного пара; оно равно $R = 2,85 \text{ \AA}$ [2]. Таким образом, в конфигурации димера неизвестна лишь взаимная ориентация молекул, а именно их положение относительно линии водородной связи — оси Z .

Рассматриваемая нами модель димера известна в литературе под названием «открытой структуры» димера. Как уже говорилось ранее, водородная связь в этом случае линейная: направление водородной связи (оси $O_1 \dots O_2$) и направления осей несвязывающей электронной орбиты кислорода l_1 и орбиты O_2-H_2 коллинеарны. Наряду с этим существуют и другие предположения о взаимном расположении молекул воды в димере; мы рассмотрим их, указывая направления несвязывающих электронных орбит кислорода на схемах пунктиром.

1) «Циклическая структура» димера с двумя нелинейными водородными связями (рис. 3). Связи образуются несвязывающей электронной орбитой и OH группой каждой из взаимодействующих молекул.

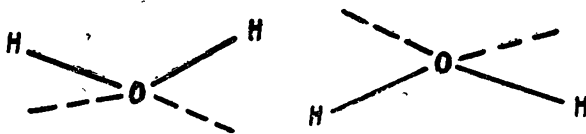


Рис. 3.

2) «Бифуркационная структура» (рис. 4) включает также две нелинейные водородные связи.

Эти структуры менее стабильны по сравнению с открытой структурой. В них значительно сильнее отталкивание кислородных и водородных ядер, кроме того, изгибная водородная связь слабее линейной. Шнейдер сделал приблизительную оценку энергии взаимодействия для открытой и циклической структур [17] и показал, что в случае циклического димера она почти вдвое меньше ($-3,63 \text{ ккал на моль}$). Расстояние

между ядрами кислорода в этих расчетах бралось равным $2,76 \text{ \AA}$.

Структура 2, очевидно, вообще не представляет практического интереса, так как спектроскопические исследования колебательных мод водородносвязанных молекул воды убеждают, что этой структуры нет [18].

Ниже мы займемся расчетом линейной (открытой) модели димера.

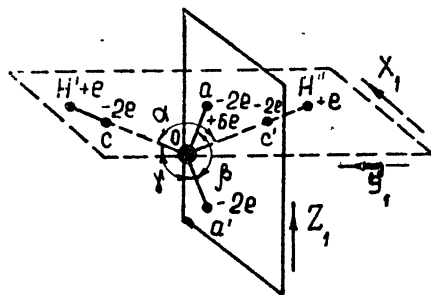
2. ТОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ДИМЕРА. РАСЧЕТ КОНФИГУРАЦИИ

Для определения взаимной ориентации молекул воды в димере рассмотрим ту часть потенциальной энергии взаимодействия молекул, которая меняется при вращении их вокруг оси Z . Это будет потенциал взаимодействия всех зарядных распределений, центры и оси которых не лежат вдоль линии водородной связи. Энергия водородной связи не войдет в эту часть потенциала, и если в водородной связи перекрывание орбит $l_1(O_1)$ и O_2-H_2' (кулоновское и обменное взаимодействия) необходимо для возникновения связи, то перекрыванием остальных орбит первой и второй молекул воды можно совсем пренебречь и считать электронное обменное взаимодействие их равным нулю, а кулоновское взаимодействие рассматривать как взаимодействие точечных зарядов.

Мы приняли, таким образом, точечную модель молекул воды в димере. Существует несколько подобных моделей как теоретических, так и эмпирических, которые в общем хорошо согласуются между собой [8, 10]. Наиболее полно отражает пространственное распределение заряда и тетраэдральную симметрию молекулы воды теоретическая модель Попла и Данкена ([8] и [11], стр. 787).

Попл и Данкен рассматривают молекулы воды в терминах эквивалентных орбит; они представляют молекулу воды семью зарядами

Рис. 5. Точечная модель молекулы воды (модель Попла — Данкена) Начало системы координат $X_1Y_1Z_1$ — в ядре O . Сплошные линии лежат в плоскости X_1Z_1 , пунктирные — в плоскости X_1Y_1 . Заряды H', c являются соответственно зеркальными изображениями зарядов H'', c' в плоскости X_1Z_1 ; заряды a и a' являются зеркальными изображениями друг друга в плоскости X_1Y_1 .



(рис. 5), координаты которых в системе отсчета $X_1Y_1Z_1$ приводятся в таблице 1.

Таблица 1

Частицы	Обозначение	Заряд	X_1 (Å)	Y_1 (Å)	Z_1 (Å)
Неподеленные пары электронов	a	$-2e$	$-0,158$	0	$0,275$
	a'	$-2e$	$-0,158$	0	$-0,275$
Ядро кислорода и два $1s$ -электрона	O	$+6e$	0	0	0
Связывающие электроны	c	$-2e$	$0,355$	$0,463$	0
	c'	$-2e$	$0,355$	$-0,463$	0
Протоны	H'	$+e$	$0,586$	$0,764$	0
	H''	$+e$	$0,586$	$-0,764$	0

Отнесем систему координат $X_1Y_1Z_1$ к первой молекуле воды в димере, а со второй молекулой свяжем совершенно аналогичным образом систему $X_2Y_2Z_2$ с центром в ядре O_2 . Далее введем систему координат XYZ с центром в ядре O_1 и осью Z , совпадающей с линией водородной связи $O_2H_2'O_1$. Эта система жестко связана с первой молекулой воды и повернута относительно системы $X_1Y_1Z_1$ вокруг оси Y_1 на определенный угол ($90^\circ - \beta/2$).

Найдем координаты зарядов обеих молекул в системе XYZ . Мы

возьмем за меру поворота второй молекулы относительно первой угол χ между плоскостью ZX и плоскостью второй молекулы; угол $\chi = 0$, когда они совпадают и связь O_2-H_2 образует острый угол с осью X . Из таблицы 1 и модели димера координаты всех зарядов в системе XYZ находятся элементарно; они приведены в таблице 2 (номера зарядов в таблице взяты из рис. 1а).

При этом в соответствии с работой Попла и Данкена углы α и β принимаются равными $104,5^\circ$ и $120,2^\circ$ соответственно.

Таблица 2

Заряды	X (Å)	Y (Å)	Z (Å)
z_1	$0,586 \sin \beta/2$	$0,764$	$-0,586 \cos \beta/2$
z_2	$0,586 \sin \beta/2$	$-0,764$	$-0,586 \cos \beta/2$
z_3	$0,355 \sin \beta/2$	$0,463$	$-0,355 \cos \beta/2$
z_4	$0,355 \sin \beta/2$	$-0,463$	$-0,355 \cos \beta/2$
z_5	$(-0,158 \sin \beta/2 -$ $-0,275 \cos \beta/2)$	0	$(0,158 \cos \beta/2 -$ $-0,275 \sin \beta/2)$
z_6	$(0,355 \sin \alpha/2 +$ $+0,463 \cos \alpha/2) \cos \chi$	$(0,355 \sin \alpha/2 +$ $+0,463 \cos \alpha/2) \sin \chi$	$(-0,355 \cos \alpha/2 +$ $+0,463 \sin \alpha/2 + 2,85)$
z_7	$(0,586 \sin \alpha/2 +$ $+0,764 \cos \alpha/2) \cos \chi$	$(0,586 \sin \alpha/2 +$ $+0,764 \cos \alpha/2) \sin \chi$	$(-0,586 \cos \alpha/2 +$ $+0,764 \sin \alpha/2 + 2,85)$
z_8	$(-0,158 \sin \alpha/2 \cos \chi -$ $-0,275 \sin \chi)$	$(-0,158 \sin \alpha/2 \sin \chi +$ $+0,275 \cos \chi)$	$(0,158 \cos \alpha/2 + 2,85)$
z_9	$(-0,158 \sin \alpha/2 \cos \chi +$ $+0,275 \sin \chi)$	$(-0,158 \sin \alpha/2 \sin \chi -$ $-0,275 \cos \chi)$	$(0,158 \cos \alpha/2 + 2,85)$
z_{10}	0	0	0
z_{11}	0	0	$2,85$
z_{12}	0	0	$1,88$
z_{13}	0	0	$1,923$
z_{14}	0	0	$0,1006$

Часть потенциала взаимодействия, зависящая от ориентации молекул относительно линии водородной связи (угла χ), запишется в виде

$$V(\chi) = \frac{e^2}{r_{17}} - \frac{2e^2}{r_{16}} - \frac{2e^2}{r_{18}} - \frac{2e^2}{r_{19}} + \frac{e^2}{r_{27}} - \frac{2e^2}{r_{26}} - \frac{2e^2}{r_{28}} - \frac{2e^2}{r_{29}} - \frac{2e^2}{r_{37}} + \frac{4e^2}{r_{36}} +$$

$$+ \frac{4e^2}{r_{39}} + \frac{4e^2}{r_{38}} - \frac{2e^2}{r_{47}} + \frac{4e^2}{r_{46}} + \frac{4e^2}{r_{48}} + \frac{4e^2}{r_{49}} - \frac{2e^2}{r_{57}} + \frac{4e^2}{r_{56}} + \frac{4e^2}{r_{58}} + \frac{4e^2}{r_{59}}, \quad (2)$$

где значения $r_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}$ рассчитываются с помощью таблицы 2.

Найдем значения угла χ , соответствующие экстремуму функции $V(\chi)$, т. е. корни уравнения

$$\frac{dV(\chi)}{d\chi} = 0. \quad (3)$$

Введем функцию

$$U_{ij} = (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2,$$

которую представим в виде

$$U_{ij}(\chi) = c_{ij} [1 + \varphi_{ij}(\chi)].$$

Здесь c_{ij} — константа, а

$$\varphi_{ij}(\chi) = c'_{ij} (a_{ij} \cos \chi + b_{ij} \sin \chi).$$

Значения постоянных c_{ij} , c'_{ij} , a_{ij} и b_{ij} находятся с помощью таблицы 2. Конкретное рассмотрение всех функций U_{ij} показывает, что для каждой функции U_{ij} найдется соответствующая функция

$$\bar{U}_{ij}(\chi) = c_{ij}[1 + c'_{ij}(a_{ij} \cos \chi - b_{ij} \sin \chi)],$$

отличающаяся от $U_{ij}(\chi)$ знаком перед $\sin \chi$. В выражение (3) члены, содержащие функции $U_{ij}(\chi)$ и $\bar{U}_{ij}(\chi)$, входят с одинаковыми коэффициентами.

Левая часть уравнения (3) представляет сумму членов вида

$$(\text{const})_{ij} \frac{dU_{ij}(\chi)}{d\chi} / [U_{ij}(\chi)]^{3/2}.$$

Разложим все знаменатели в сходящиеся (благодаря тому, что все $|\varphi_{ij}(\chi)|_{\max} \ll 1$) ряды. Тогда, учитывая вышесказанное, легко показать, что уравнение (3) сведется к выражению

$$\text{const} \sin \chi = 0. \quad (4)$$

Как видно из (4), искомыми значениями угла χ будут 0 и π , причем минимуму энергии взаимодействия соответствует $\chi = 0$.

Теперь можно, пользуясь выражением (2) и таблицей 2, найти величину потенциального барьера внутреннего вращения:

$$V_0 \simeq |V(\pi) - V(0)|.$$

Не приводя расчетов, сообщаем результат:

$$V_0 \simeq 1,3 \text{ ккал/моль}.$$

Таким образом, конфигурация димера найдена полностью.

В другом месте будет показано, что при расчете вращательного спектра димера водяного пара барьером можно пренебречь и рассматривать вращение вокруг линии водородной связи как свободное.

3. КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОЛЕКУЛ ВОДЫ В ДИМЕРЕ. СРАВНЕНИЕ С ТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛЮ

В основе наших расчетов лежала точечная модель молекулы воды; ее применение позволило нам записать потенциал взаимодействия, зависящий от χ , в виде (2). Покажем, что выражение (2) в нашем случае можно получить и из строгого квантовомеханического рассмотрения задачи.

В приближении Борна-Оппенгеймера роль потенциальной энергии в уравнении Шредингера для ядер играет сумма энергии электронов в поле фиксированных ядер и энергии отталкивания ядер. Используя выражение для энергии электронов через молекулярные орбиты, в частности — через эквивалентные орбиты [12, 13], получим для ядерной потенциальной энергии [14]:

$$V_{\alpha} = 2 \sum_n H_{nn} + \sum_m \sum_n \{(mn | G | mn) - (mn | G | nm)\} + \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{z_{\alpha} z_{\beta}}{r_{\alpha\beta}}. \quad (5)$$

Здесь

$$H_{nn} = \int \psi_n^*(j) \hat{H}(j) \psi_n(j) dv_j,$$

где $\psi_n(j)$ — n -ая молекулярная (у нас эквивалентная) орбита электрона, а

$$\hat{H}(j) = -\frac{1}{2} \nabla_j^2 - \sum_{\alpha} \frac{z_{\alpha}}{r_{\alpha j}}$$

— оператор кинетической энергии j -го электрона в поле одних только ядер (z_{α} — заряд α -го ядра; $r_{\alpha j}$ — расстояние j -го электрона до α -го ядра);

$$(mn | G | kl) = \iint \psi_m^*(i) \psi_n^*(j) \psi_k(i) \psi_l(j) \frac{dv_i dv_j}{r_{ij}},$$

где r_{ij} — расстояние между i -м и j -м электронами.

В ядерную энергию, зависящую от угла χ , войдет часть выражения (5):

$$V_{\chi}(\chi) = -2 \sum_n \sum_{\alpha} z_{\alpha} \int \psi_n^*(j) \psi_n(j) \frac{dv_j}{r_{\alpha j}} + \sum_m \sum_n 2 (mn | G | mn) + \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{z_{\alpha} z_{\beta}}{r_{\alpha \beta}}. \quad (6)$$

Здесь первый член соответствует взаимодействию электронов одной молекулы с ядрами другой, второй описывает кулоновскую энергию взаимодействия электронов различных молекул и, наконец, последнее выражение представляет отталкивание ядер первой и второй молекул воды. Как видно, мы не учитывали обменного взаимодействия, что соответствует пренебрежению членами вида $(mn | G | nm)$ (ψ_m и ψ_n — эквивалентные орбиты различных молекул). Возможность такого приближения вытекает из теоремы Геллмана-Фейнмана ([11], стр. 716).

Сравнивая выражения (2) и (6), нетрудно заметить, что каждому члену в (2) найдется соответствующий член в (6). Для количественной оценки соответствия надо рассчитать интегралы, входящие в $V_{\chi}(\chi)$. Рассчитывался точно один член, соответствующий взаимодействию несвязывающих орбит $l_2(O_1)$ и $l_2(O_2)$:

$$S = \iint [l_2^{O_1}(1)]^* [l_2^{O_2}(2)]^* l_2^{O_1}(1) l_2^{O_2}(2) \frac{dv_1 dv_2}{r_{12}}. \quad (7)$$

Напомним (см. (1)), что орбиты $l_2^{O_1}$ и $l_2^{O_2}$ выражаются в виде линейной комбинации атомных (слейтеровских) орбит (конкретный вид их см. в [15]).

Использовались следующие атомные единицы: единица длины — борковский радиус

$$a_H = 0,5293 \text{ \AA},$$

единица энергии

$$\frac{e^2}{a_H} = 27,204 \text{ эв}$$

— двойная энергия ионизации атома водорода. В этих единицах оператор энергии отталкивания электронов 1 и 2 на расстоянии r_{12} есть функция $1/r_{12}$.

Интеграл S в (7) разбивается на сумму двухцентровых интегралов, каждый из которых может быть легко записан в виде, позволяющем вычислить его по таблицам двухцентровых интегралов, имеющихся в литературе. Расчет был выполнен по таблицам Рутана [15]. В результате величина S получилась равной

$$0,704 (1 + 0,002 \cos \chi + 0,004 \sin \chi) \text{ эв.}$$

Соответствующая величина, даваемая точечной моделью, есть $4e^2/r_{58}$. В атомных единицах, использовавшихся при расчете S ,

$$S_{\text{точеч. мод}} = \frac{4e^2}{r_{58}} \bigg/ \frac{e^2}{a_H} = \frac{4a_H}{r_{58}} \simeq$$

$$\simeq 0,675 (1 + 0,003 \cos \chi + 0,006 \sin \chi) \text{ эв}$$

(см. таблицу 2). Как видно, совпадение хорошее: ошибка в величине S около 4%; зависимость от угла χ одинаковая, хотя у точечной модели она выражена несколько ярче.

Отсюда следует, что довольно простое выражение (2) для ядерной энергии, зависящей от взаимной ориентации молекул (угла χ), есть предельный случай квантовомеханического выражения, который для нашей задачи пригоден с достаточной степенью точности.

В заключение выражаю глубокую благодарность С. А. Жевакину за постоянное внимание и помощь в работе и Н. Д. Соколову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Landsberg, J. Phys. Radium, **6**, 305 (1945).
2. C. A. Coulson, Hydrogen Bonding, Symposium on Hydrogen Bonding held at Ljubliana, 1957, ed. by D. Hadzi, Pergamon Press, 1959, p. 339.
3. Н. Д. Соколов, ДАН СССР, **58**, 611 (1947).
4. Н. Д. Соколов, ДАН СССР, **82**, 369 (1952).
5. Н. Д. Соколов, УФН, **57**, 205 (1955).
6. М. В. Волькенштейн, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов, ЖФХ, **24**, 1158 (1950).
7. J. A. Pople, Proc. Roy. Soc., **A202**, 323 (1950).
8. A. V. F. Duncan, J. A. Pople, Trans. Faraday Soc., **49**, 217 (1953).
9. L. Pauling, Hydrogen Bonding, Symposium on Hydrogen Bonding held at Ljubliana, 1957, ed. by D. Hadzi, Pergamon Press, 1959, p. 1.
10. E. S. Cambell, J. Chem. Phys., **20**, 1411 (1952).
11. Дж Гиршфельдер, Ч. Кертис, Р. Берд, Молекулярная теория газов и жидкостей, МЛ, М., 1961.
12. J. Lennard-Jones, Proc. Roy. Soc., **A198**, 1 (1949).
13. J. Lennard-Jones, Proc. Roy. Soc., **A198**, 14 (1949).
14. G. G. Hall, J. Lennard-Jones, Proc. Roy. Soc., **A202**, 155 (1950).
15. C. C. Roothaan, J. Chem. Phys., **19**, 1445 (1951).
16. L. Burnell, C. A. Coulson, Trans. Faraday Soc., **53**, 403 (1957).
17. W. G. Schneider, J. Chem. Phys., **23**, 26 (1955).
18. M. Van Thiel, E. D. Becker, G. C. Pimentel, J. Chem. Phys., **27**, 486 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 июня 1963 г.

ON ROTATIONAL SPECTRUM AND ABSORPTION INTENSITY OF WATER VAPOUR DIMERS IN ATMOSPHERE

I. DIMER CONFIGURATION WITH LINEAR HYDROGEN BOND

A. A. Viktorova

A model of water vapour is considered in the frames of the theory of hydrogen bond. The mutual orientation of molecules and potential barrier of the internal motion are calculated on the basis of the point model of molecular H_2O . The precision of a point approximation is evaluated.

**О ВРАЩАТЕЛЬНОМ СПЕКТРЕ И ИНТЕНСИВНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ ДИМЕРОВ ВОДЯНОГО ПАРА В АТМОСФЕРЕ.
II. КОНЦЕНТРАЦИЯ ДИМЕРОВ**

А. А. Викторова

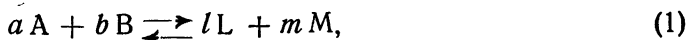
На основе обобщенного закона действия масс записывается общий вид выражения для концентрации димеров. Находится концентрация димеров водяного пара в атмосфере.

Вычисление поглощения миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн димерами водяного пара в атмосфере требует знания концентрации димеров. Необходимые для расчета концентрации данные о конфигурации димера приводятся в [2].

1. ОБЩИЙ ВИД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ДИМЕРОВ

Согласно обобщенному закону действия масс ([1], стр. 330) существует ряд констант равновесий химических реакций газов.

Для равновесной газовой реакции

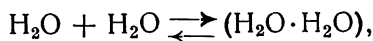


протекающей при температуре T , величина

$$k_c = \frac{c_L^l c_M^m}{c_A^a c_B^b}$$

является одной из констант равновесия. Здесь c_A , c_B , c_L , c_M — концентрации веществ A , B и т. д. соответственно.

В случае образования димера воды уравнение реакции запишется следующим образом:



и выражение для указанной выше константы равновесия k_c примет вид

$$k_c = \frac{c_{\text{димер}}}{(c_{H_2O})^2}. \tag{2}$$

Предполагаем, что концентрация мономеров воды в атмосфере известна. Тогда значение постоянной k_c даст возможность найти нужную нам концентрацию димеров.

Для расчета константы k_c запишем ее общее выражение через статистические суммы по состояниям ([1], стр. 331):

$$k_c = e^{-\Delta \epsilon_0 / kT} \frac{(q_L / N_0 v)^l (q_M / N_0 v)^m}{(q_A / N_0 v)^a (q_B / N_0 v)^b}, \tag{3}$$

где

$$\Delta \epsilon_0 = l \epsilon_{0L} + m \epsilon_{0M} - a \epsilon_{0A} - b \epsilon_{0B}$$

— прирост нулевой энергии при реакции (1) (ϵ_{0i} — нулевая энергия i -го вещества), k — постоянная Больцмана, N_0 — число Авогадро, v — объем, q_A, q_B, q_L, q_M — статистические суммы по состояниям, вычисленные по энергиям, отсчитанным от нулевого уровня.

Для реакции образования димера водяного пара выражение (3) переходит в

$$k_c = e^{-\Delta\epsilon_0/kT} \left(\frac{q_{\text{димер}}}{N_0 v} \right) \left(\frac{q_{\text{H}_2\text{O}}}{N_0 v} \right)^{-2}. \quad (4)$$

При расчетах будем полагать, что сумму по состояниям q можно представить в виде произведения сумм соответственно по поступательным, электронным, колебательным, вращательным и спиновым состояниям:

$$q = q_{\text{п}} q_{\text{эл}} q_{\text{кол}} q_{\text{вр}} q_{\text{я с}}.$$

В предположении, что температура достаточно высока, можно воспользоваться следующим выражением q для многоатомных газов ([1], стр. 341):

$$q = \frac{2\pi M kT}{h^3} v \rho_0 \prod_i \frac{1}{1 - e^{-h\nu_i/kT}} q_{\text{вр}} \alpha, \quad (5)$$

где M — масса молекулы, h — постоянная Планка, ρ_0 — вес низшего электронного уровня (считаем, что другие электронные уровни не возбуждаются), ν_i — колебательные частоты, α — вес состояния молекулы, обусловленный ядерным спином.

Множитель $\alpha_L^l \alpha_M^m / \alpha_A^a \alpha_B^b$, который входит в выражение (3) для константы k_c и для конкретной реакции образования димера имеет вид $\alpha_{\text{димер}} / (\alpha_{\text{H}_2\text{O}})^2$, можно с достаточной степенью точности положить равным единице. Это хорошо выполняется для комнатных температур и выше ([1], стр. 342). Считаем далее, что электронные оболочки молекул в основном состоянии являются замкнутыми, т. е. $\rho_0 = 1$. Заметим также, что колебательная сумма $\prod_i \frac{1}{1 - e^{-h\nu_i/kT}}$ близка по величине к единице, так как в большинстве случаев $h\nu_i \gg kT$ (в нашем случае $T = 293^\circ\text{K}$). Это хорошо выполняется для одиночной молекулы воды. Необходимую поправку к колебательной сумме димера внесем в дальнейшем.

Таким образом, нахождение концентрации димеров свелось к расчетам вращательных сумм для мономеров и димеров воды.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЙ СУММЫ ДИМЕРА ВОДЯНОГО ПАРА С ЛИНЕЙНОЙ ВОДОРОДНОЙ СВЯЗЬЮ

В линейном димере водяного пара молекулы могут вращаться относительно друг друга вокруг линии водородной связи — оси Z (рис. 1а) [2]. Будем рассматривать димер водяного пара как систему, состоящую из остова, за который возьмем первую молекулу воды, и одного асимметричного волчка, в качестве которого возьмем вторую молекулу воды (рис. 1а). Это, очевидно, будет система с четырьмя степенями свободы и числом симметрии, равным единице.

Воспользуемся классическим выражением для вращательной суммы, которое справедливо при достаточно высокой температуре. Тогда, если выбрать в качестве независимых переменных эйлеровы углы θ, ψ, φ , определяющие пространственную ориентацию молекулы в целом (осто-

ва), и угол χ , описывающий положение волчка относительно остова, вращательная сумма будет иметь вид ([1], стр. 289)

$$q_{\text{вр}} = \frac{1}{h^4} (2\pi kT)^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [s_{ik}]^{1/2} e^{-V(\chi)/kT} \sin \theta d\theta d\psi d\varphi d\chi, \quad (6)$$

где $V(\chi)$ — потенциальная энергия, зависящая от вращения волчка, а $[s_{ik}]$ — детерминант матрицы кинетической энергии димера, выраженной через проекции угловой скорости вращения остова ω_x , ω_y , ω_z и производную $\dot{\chi}$ угла, характеризующего положение волчка.

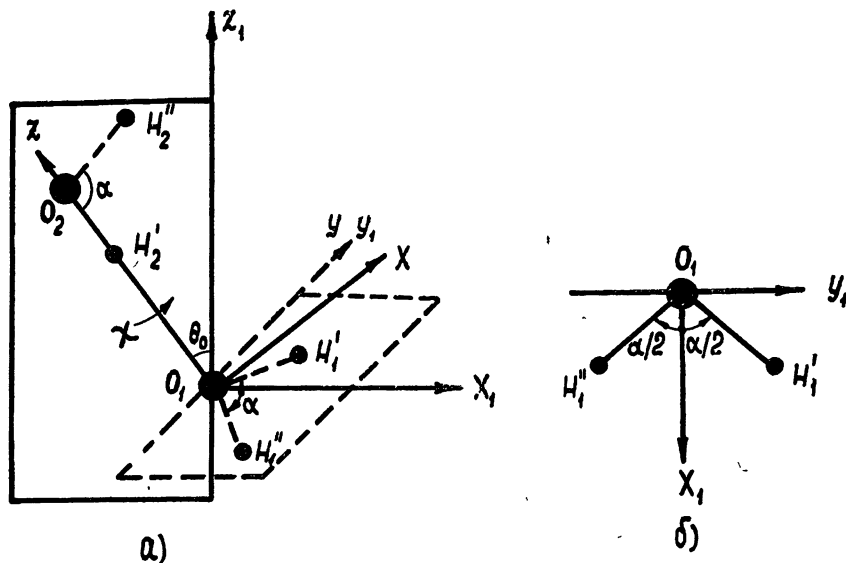


Рис. 1. а) Конфигурация ядер в линейном димере водяного пара. Сплошные линии лежат в плоскости $XZ(X_1Z_1)$, пунктирные — в плоскости X_1Y_1 ; χ — угол между плоскостью XZ и плоскостью молекулы воды $H_2O_2H_2$.

б) Ядерная структура молекулы воды $H_1O_1H_1$ в системе координат $X_1Y_1Z_1$; плоскость X_1Z_1 — плоскость симметрии молекулы.

Детерминант матрицы кинетической энергии $[s_{ik}]$ для случая одного асимметричного волчка есть [3]

$$[s_{ik}] =$$

$$= \begin{vmatrix} K - \frac{M''}{M} r^2 & b_1 + M''(y_0\alpha_3 - z_0\alpha_2) & b_2 + M''(z_0\alpha_1 - x_0\alpha_3) & b_3 + M''(x_0\alpha_2 - y_0\alpha_1) \\ b_1 + M''(y_0\alpha_3 - z_0\alpha_2) & J_{xx} & -J_{yx} & -J_{zx} \\ b_2 + M''(z_0\alpha_1 - x_0\alpha_3) & -J_{xy} & J_{yy} & -J_{zy} \\ b_3 + M''(x_0\alpha_2 - y_0\alpha_1) & -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{vmatrix}.$$

Здесь M — масса молекулы, M'' — масса волчка, K — момент инерции волчка относительно оси его вращения, J_{xx} , J_{xy} , J_{xz} , J_{yy} , J_{zz} , J_{yz} — моменты и произведения инерции всей молекулы относительно соответствующих осей центральной системы координат xyz , жестко связанных с остовом и параллельных осям системы $X'Y'Z'$, и, наконец, x_0 , y_0 , z_0 — координаты в системе xyz точки, лежащей на оси волчка и совпадающей

с началом координат $X'Y'Z'$. Прочие величины определяются формулами:

$$\begin{aligned} b_1 &= \lambda J''_{X'X'} - \mu J''_{X'Y'} - \nu J''_{X'Z'}; & \alpha_1 &= \mu\zeta - \nu\eta; \\ b_2 &= -\lambda J''_{Y'X'} + \mu J''_{Y'Y'} - \nu J''_{Y'Z'}; & \alpha_2 &= \nu\xi - \lambda\zeta; \\ b_3 &= -\lambda J''_{Z'X'} - \mu J''_{Z'Y'} + \nu J''_{Z'Z'}; & \alpha_3 &= \lambda\eta - \mu\xi; \\ r^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \end{aligned}$$

где ξ, η, ζ — координаты центра инерции волчка по отношению к осям $X'Y'Z'$, а $J''_{X'X'}, J''_{Y'Y'}, J''_{Z'Z'}, J''_{X'Z'}, J''_{X'Y'}, J''_{Y'Z'}$ — моменты и произведения инерции волчка в системе $X'Y'Z'$; λ, μ, ν — направляющие косинусы оси волчка в системе xyz .

Очевидно, что для расчета $[s_{ik}]$ необходимо знание конфигурации соединения. Как уже говорилось выше, мы рассматриваем наиболее стабильную модель димера водяного пара — димер с линейной водородной связью. Структура димера изображена на рис. 1; она подробно обсуждалась в работе [2] (все обозначения те же, что и в [2]).

Напомним, что молекулы воды в димере с линейной водородной связью могут вращаться друг относительно друга вокруг оси Z — линии водородной связи; энергия водородной связи при этом практически не меняется. Мерой поворота второй молекулы относительно первой является угол χ .

Вычислим теперь детерминант $[s_{ik}]$. Центральную систему координат xyz выберем так, чтобы оси ее были параллельны осям системы XYZ . Используя таблицу 2 работы [2], определим в системе XYZ положение центра инерции димера, пренебрегая зависимостью этого положения от ориентации волчка*, после чего координаты ядер в центральной системе координат xyz находятся элементарно (они приведены в таблице 1).

Таблица 1

Ядра	$m_i 10^{24}(z)$	$x_i(\text{Å})$	$y_i(\text{Å})$	$z_i(\text{Å})$
O ₁	26,768	-0,02861	0	-1,3883
O ₂	26,768	-0,02861	0	1,4617
H ₁ '	1,673	0,48644	0,76688	-1,68447
H ₁ ''	1,673	0,48644	-0,76688	-1,68447
H ₂ '	1,673	-0,02861	0	0,4917
H ₂ ''	1,673	(-0,02861 + 0,93925 cos χ)	0,93925 sin χ	1,7037

Пользуясь таблицей 1 (где m_i — масса i -го ядра), легко рассчитать следующие величины, входящие в детерминант $[s_{ik}]$ (в единицах $z \cdot \text{см}^2$):

$$J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = (125,50618 + 1,4759 \sin^2 \chi) 10^{-40};$$

$$J_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) = (125,37677 + 1,4759 \cos^2 \chi - 0,08991 \cos \chi) 10^{-40};$$

$$J_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = (4,28205 - 0,08991 \cos \chi) 10^{-40};$$

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = (1,4759 \sin \chi \cos \chi - 0,04495 \sin \chi) 10^{-40};$$

* Такое допущение делалось при выводе формулы для $[s_{ik}]$.

$$J_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i = (-2,90324 + 2,67713 \cos \chi) 10^{-40};$$

$$J_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i = 2,67713 \sin \chi 10^{-40}.$$

Систему $X'Y'Z'$ выберем с центром в ядре O_2 . Координаты ядер волчка относительно нее приведены в таблице 2.

Таблица 2

Ядра	$m_i 10^{24}(z)$	$X'_i (\text{Å})$	$Y'_i (\text{Å})$	$Z'_i (\text{Å})$
O_2	26,768	0	0	0
H'_2	1,673	0	0	-0,97
H''_2	1,673	$0,93925 \cos \chi$	$0,93925 \sin \chi$	0,242

В нашем случае осью вращения волчка является ось Z ; тогда очевидно, что

$$\lambda = \mu = \alpha_2 = 0, \quad \nu = 1.$$

Учитывая это, найдем с помощью таблицы 2 остальные величины в $[s_{ik}]$:

$$\xi = \alpha_2 = 0,0522 \cos \chi 10^{-8} \text{ см};$$

$$\eta = -\alpha_1 = 0,0522 \sin \chi 10^{-8} \text{ см};$$

$$\zeta = -0,04044 \cdot 10^{-8} \text{ см};$$

$$r^2 = 0,00436 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2;$$

$$J''_{X'Z'} = -b_1 = 0,38027 \cos \chi 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2;$$

$$J''_{Y'Z'} = -b_2 = 0,38027 \sin \chi 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2;$$

$$J''_{Z'Z'} = b_3 = K = 1,4759 \cdot 10^{-40} \text{ г} \cdot \text{см}^2.$$

Наконец, расчет детерминанта $[s_{ik}]$ дает:

$$[s_{ik}] = 5,706(1 - 0,002 \cos \chi) 10^{-156} \approx 5,71 \cdot 10^{-156} \text{ г}^4 \cdot \text{см}^8;$$

$$[s_{ik}]^{1/2} \approx 2,39 \cdot 10^{-78} \text{ г}^2 \cdot \text{см}^4.$$

Как видно, $[s_{ik}]$ практически не зависит от угла, характеризующего положение волчка, и димер водяного пара, следовательно, ведет себя в этом отношении как почти симметричный волчок. Вследствие этого формула (6) для вращательной суммы запишется так:

$$q_{\text{вп}} = \frac{1}{h^4} (2\pi kT)^2 8\pi^2 [s_{ik}]^{1/2} \int_0^{2\pi} e^{-V(\chi)/kT} d\chi. \quad (7)$$

Для оценки величины интеграла необходимо знать форму потенциального барьера при вращении второй молекулы относительно остова, т. е. вид функции $V(\chi)$. Обычно для потенциальной кривой с n минимумами одинаковой глубины принимается зависимость вида ([1], стр. 285):

$$V(\chi) = \frac{V_0}{2} [1 - \cos(n\chi)],$$

где V_0 — высота потенциального барьера. Это соответствует разложению $V(\chi)$ в ряд Фурье и ограничению первыми двумя слагаемыми.

Как было показано в работе [2], для димера водяного пара $n = 1$ и $V_0 = 1,3$ ккал/моль. Тогда при $T = 293^\circ\text{K}$ вращательная сумма димера

$$(q_{\text{вр}})_{\text{димер}} = 2 \cdot 10^4.$$

Заметим, что наше вычисление вращательной суммы для случая асимметричного волчка является приближенным, так как вращение рассматривалось независимо от колебаний. При вращении асимметричных волчков, вообще говоря, будет происходить смещение центра инерции молекулы относительно остова. Учет этого смещения должен быть выполнен вместе с рассмотрением колебаний. Правда, в нашем случае смещение центра инерции димера при вращении волчка ничтожно мало, так как ось вращения проходит через тяжелые ядра кислорода и положение центра лишь слегка изменяется из-за вращение ядер водорода, не лежащих на оси Z .

3. РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ

Перейдем непосредственно к расчету концентрации линейных димеров. Из соотношений (2), (4) и (5) имеем:

$$c_{\text{димер}} = (c_{\text{H}_2\text{O}})^2 e^{-\Delta\varepsilon_0/kT} \frac{(2\pi M_{\text{дим}} kT)^{3/2}/h^3 N_0}{(2\pi M_{\text{H}_2\text{O}} kT)^3/h^6 N_0^2} \times \quad (8)$$

$$\times \left[\prod_i (1 - e^{-h\nu_i/kT})^{-1} \frac{(q_{\text{вр}})_{\text{димер}}}{(q_{\text{вр}})_{\text{H}_2\text{O}}^2} \right],$$

где $\Delta\varepsilon_0$ равно энергии линейной водородной связи с обратным знаком:

$$\Delta\varepsilon_0 = -\varepsilon_{\text{в св}} \simeq 6 \text{ ккал/моль}$$

(см. [4]) и

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{M_{\text{димер}}}{2} = 30,114 \cdot 10^{-24} \text{ г}; \quad T = 293^\circ\text{K}.$$

Вращательную сумму мономера воды найдем из формулы вращательной суммы для жесткого волчка ([1], стр. 236):

$$q_{\text{вр}} = \frac{8\pi^2}{\sigma} \left(\frac{2\pi kT}{h^2} \right)^{3/2} (A'B'C')^{1/2}.$$

Для воды число симметрии $\sigma = 2$, а произведение главных центральных моментов инерции ([5], стр. 531)

$$A'B'C' = 5,8 \cdot 10^{-120} \text{ г}^3 \cdot \text{см}^6.$$

Колебательная сумма одиночной молекулы воды, как говорилось выше, с достаточной степенью точности равна 1. Однако в димере наблюдается ряд низкочастотных колебаний, для которых $h\nu_i \sim kT$. К ним относятся некоторые из межмолекулярных колебаний молекул воды в димере. Этой теме посвящено много работ [6-13], главным образом экспериментальных; они подтверждают существование низкочастотных колебаний при водородной связи. Точные значения всех частот окончательно не установлены, но их приблизительные величины известны. Учтем две частоты колебаний водородной связи: первая представляет колебание группы $\text{O}_2\text{—H}_2'$ (рис. 1) как целого относительно атома O_1 и равна приблизительно 200 см^{-1} (т. е. почти совпадает с kT); другая, связанная с изгибными колебаниями водородной связи, имеет величину около 500 см^{-1} . Колебательная сумма с учетом этих частот (особенно

первой) станет равной 1,6. Частоты других низкочастотных колебаний известны лишь ориентировочно, с большим разбросом. Однако ясно, что рассмотрение их увеличит колебательную сумму димера, и мы не сделаем большой ошибки, положив ее равной 2.

Принимая во внимание сказанное, получим окончательно из формулы (8):

$$c_{\text{димер}} = 2 \cdot 10^4 (c_{\text{H}_2\text{O}})^2. \quad (9)$$

Выразим концентрацию через плотность ρ :

$$c = \frac{N}{v} = \frac{\rho}{M}. \quad (10)$$

Здесь N — число молей в объеме v ; M — вес молекулы в граммах.

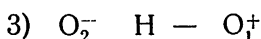
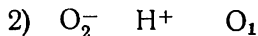
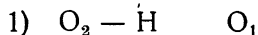
При $T = 293^\circ\text{K}$, $p = 760$ мм рт. ст. и абсолютной влажности воздуха $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$, отвечающей средним летним условиям, из соотношений (9) и (10) получаем:

$$\rho_{\text{димер}} \simeq 0,12 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3};$$

$$c_{\text{димер}} \simeq 0,01 c_{\text{H}_2\text{O}},$$

т. е. связанные молекулы воды составляют около 2% от общего числа водяных молекул в атмосфере.

Интересно отметить, что наши расчеты можно сопоставить с расчетами других авторов. Правда, в работах [4, 14–17] преследовалась другая цель — нахождение весов структур



(в [17] рассматривались еще две структуры 4) $\text{O}_2^+ \text{H} - \text{O}_1$ и 5) $\text{O}_2 \text{H} - \text{O}_1^+$).

Расчеты выполнялись методами, совершенно отличными от наших (например, полуэмпирическим способом или с помощью теории ковалентно-ионного резонанса [15, 16]). Для расстояния между ядрами кислорода, равного $2,7 \div 2,8 \text{ \AA}$ (что близко к принятому нами значению $2,85 \text{ \AA}$), вес структур, соответствующих образованию водородной связи (структура 3 или структуры 3 и 5), составляет приблизительно 2%. Это значит, что на сто пар молекул воды приходится два димера, т. е.

$$c_{\text{димер}} \simeq 0,01 c_{\text{H}_2\text{O}}.$$

Нельзя не отметить, однако, что эти расчеты носят скорее качественный, чем количественный характер.

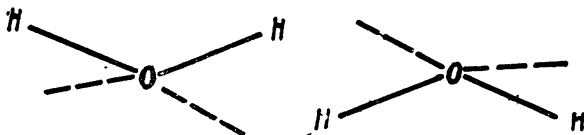


Рис. 2.

В наших расчетах мы пользовались моделью димера с линейной водородной связью. Возможна и другая, менее стабильная конфигурация димера — циклическая (рис. 2) [2]. На рисунке пунктирные линии показывают направление несвязывающих электронных орбит. В этом

случае димер образован двумя нелинейными водородными связями. Энергия водородной связи (по приближенным оценкам [18]) для циклической структуры вдвое меньше, чем для линейной структуры:

$$E_{в\text{ св}} \approx -3,63 \text{ ккал/моль.}$$

Аналогичный расчет концентрации димеров с циклической структурой дает величину, приблизительно в 100 раз меньшую, чем для димеров с линейной водородной связью:

$$c_{\text{цикл-димер}} \approx 10^{-4} c_{\text{H}_2\text{O}}.$$

Таким образом, при рассмотрении поглощения радиоволн димерами воды в атмосфере циклические димеры можно не учитывать.

В заключение выражаю глубокую признательность С. А. Жевакину за постоянный интерес к работе и ряд ценных советов и Н. Д. Соколову за внимание и интересные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Годнев, Вычисление термодинамических функций по молекулярным данным, ГИТТЛ, М., 1956.
2. А. А. Викторова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, 415 (1964).
3. Н. А. Власов, И. Н. Годнев, Сб. науч. иссл. работ ИТИ, 4, 92 (1947).
4. С. А. Coulson, Hydrogen Bonding, Symposium on Hydrogen Bonding held at Ljubliana, 1957, ed. by D. Hadzi, Pergamon Press, 1959, p. 339.
5. М. А. Ельяшевич, Атомная и молекулярная спектроскопия, ГИТТЛ, М., 1962.
6. N. Sheppard, Hydrogen Bonding, Symposium on Hydrogen Bonding held at Ljubliana, 1957, ed. by D. Hadzi, Pergamon Press, 1959, p. 85.
7. S. Bratoz, D. Hadzi, N. Sheppard. Spectr. Acta, 8, 249 (1946).
8. J. Halford, J. Chem. Phys., 14, 395 (1946).
9. Н. Д. Соколов, ЖЭТФ, 23, 404 (1952).
10. Е. Ф. Гросс, В. И. Валков, ДАН СССР, 67, 619 (1949); 68, 473 (1949); 74, 453 (1950).
11. В. И. Степанов, ЖФХ, 19, 507 (1945).
12. В. И. Валков, Г. Л. Масленкова, Оптика и спектроскопия, 1, 881 (1956).
13. E. F. Gross, Hydrogen Bonding, Symposium on Hydrogen Bonding held at Ljubliana, 1957, ed. by D. Hadzi, Pergamon Press, 1959, p. 203.
14. L. Pauling, J. Chem. Phys., 46, 435 (1949).
15. С. А. Coulson, U. Danielsson, Arkiv Fysik, 8, 239 (1954).
16. E. Warhurst, Proc. Roy. Soc., A207, 32 (1951).
17. H. Tsubomura, Bull. Chem. Soc. Japan, 27, 445 (1954).
18. W. G. Schneider, J. Chem. Phys., 23, 26 (1955).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 июня 1963 г.

ON ROTATIONAL SPECTRUM AND ABSORPTION INTENSITY OF WATER VAPOUR DIMERS IN ATMOSPHERE. II. DIMER CONCENTRATION

A. A. Viktorova

A general form of expression for dimers concentration is written down on the basis of generalized law of masses action. Dimers concentration of water vapour in atmosphere is determined.

О РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. В. Тамойкин

Рассмотрено излучение электромагнитных волн при движении заряженной частицы в среде с периодически меняющимися свойствами. Предполагается, что кроме поступательного движения заряд совершает колебания с частотой Ω . Показано, что даже в слабо неоднородной среде в отдельных случаях необходимо учитывать резонанс между колебаниями осциллятора и полем переходного излучения, что может приводить к раскачке колебаний. Выражения для энергии излучаемых электромагнитных волн получены для среды с крупномасштабными и мелкомасштабными неоднородностями.

Излучение осциллятора, движущегося в среде, рассматривалось в ряде работ [1-5]. В [1] было получено выражение для интенсивности излучения при движении осциллятора в произвольной среде с частотной дисперсией. Близко к ней примыкает работа [3], в которой вычислена энергия излучения электромагнитных волн при движении заряда в магнитоактивной плазме. В [4] рассмотрено излучение плазменных волн осциллятором, движущимся в среде с пространственной дисперсией. Особенно подробно вопрос об излучении движущегося осциллятора рассмотрен в работе [2], где, в частности, доказана возможность раскачки колебаний осциллятора при его движении в анизотропной среде, в то время как при движении осциллятора в изотропной среде раскачка колебаний места не имеет.

Результаты, полученные в [1-4], относятся к случаю, когда среда всюду однородна. Однако наличие неоднородностей в среде может приводить к новым весьма существенным эффектам. Достаточно указать на появление переходного излучения заряда при наличии резкой границы раздела двух сред [6, 7], резонансного излучения заряда в периодически неоднородной среде [8-10], излучения равномерно движущегося заряда в среде со случайными неоднородностями [10-12].

Для случая движущегося осциллятора учет неоднородностей среды проведен в [5], где предполагалось, что диэлектрическая проницаемость периодически изменяется вдоль одной координаты. Однако в [5] совершенно не рассматривается параметрический резонанс между колебаниями осциллятора и полем переходного излучения, возникающего при движении заряда в периодически неоднородной среде. Как мы увидим ниже, этот эффект оказывается существенным и может привести к раскачке колебаний осциллятора.

Настоящая статья посвящена изложению этого круга вопросов. Результаты, полученные в работе, могут оказаться полезными при рассмотрении, например, проблемы устойчивости досветовых и сверхсветовых пучков, движущихся в неоднородных средах.

1. Уравнения поля заданных источников можно записать в виде системы уравнений для электрического поля E [13]:

$$\Delta E - \text{grad div } E - \epsilon(z) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t};$$

$$\text{grad div } E = 4\pi \text{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) - \text{grad} \left(E_z \frac{d}{dz} \ln \epsilon \right).$$
(1)

Здесь ρ — плотность заряда, j — плотность тока, ϵ — диэлектрическая проницаемость, зависящая лишь от одной координаты z . Разложим все величины в интегралы Фурье:

$$E = \int E_{\omega x}(z) \exp[i(\mathbf{x}\rho - \omega t)] d\omega d\mathbf{x},$$
(2)

где $\rho = \{x; y; 0\}$, $\mathbf{x} = \{k_x; k_y; 0\}$. Тогда для фурье-компонент полей получим следующие уравнения:

$$\frac{d^2 E_{x\omega}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(z) - \mathbf{x}^2 \right) E_{x, z, \omega} = - \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{x, z, \omega} +$$

$$+ \frac{4\pi i k_x}{\epsilon} \rho_{x\omega} - i k_x E_{z\omega} \frac{d}{dz} \ln \epsilon;$$
(3)

$$\frac{d^2 E_{z\omega}}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left(E_{z\omega} \frac{d}{dz} \ln \epsilon \right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - \mathbf{x}^2 \right) E_{z\omega} =$$

$$= - \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{z\omega} + 4\pi \frac{d}{dz} \left(\frac{\rho_{z\omega}}{\epsilon} \right).$$
(4)

Уравнение для $E_{y\omega}$ имеет вид, аналогичный (3). В уравнениях (4) сделаем следующую замену:

$$Y(z) = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{1/2} E_{z\omega}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \epsilon(z) dz,$$
(5)

где L — характерное расстояние, на котором существенно изменяется ϵ . При этом $Y(z)$ будет решением уравнения

$$\frac{d^2 Y}{dz^2} + Y \left[\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(z) - \mathbf{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \epsilon}{dz^2} \left/ \epsilon - \frac{3}{4} \left(\frac{d\epsilon}{dz} \right/ \epsilon \right)^2 \right] =$$

$$= \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \left[- \frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{z\omega} + 4\pi \frac{d}{dz} \left(\frac{\rho_{z\omega}}{\epsilon} \right) \right].$$
(6)

2. Рассмотрим сначала случай, когда свойства среды мало изменяются на расстоянии порядка длины волны ($\lambda d\epsilon/dz \ll \epsilon$). Нам в дальнейшем потребуются более жесткое условие, а именно*

$$\lambda \ll L.$$
(7)

Используя решения уравнений (3) и (6), полученные на основе приближения геометрической оптики, легко получить следующие выражения для компонент электрического поля:

* Условие (7) является достаточным для того, чтобы, во-первых, можно было ограничиться в фазе решения для E первым членом разложения и, во-вторых, чтобы выполнялось интегральное условие применимости геометрической оптики, накладывающее ограничение на путь, проходимый волной (в случае, когда диэлектрическая проницаемость ϵ — немонотонная функция) [14].

$$E_{z\omega}(z) = \frac{B_z}{2i} \left\{ \exp \left[i \int_0^z q dz \right] \int_{-\infty}^z J_\alpha(z') \exp \left[-i \int_0^{z'} q(z'') dz'' \right] dz' - \right. \\ \left. - \exp \left[-i \int_0^z q dz \right] \int_{+\infty}^z J_\alpha(z') \exp \left[i \int_0^{z'} q(z'') dz'' \right] dz' \right\}, \quad (8)$$

где

$$\alpha = x; y; z; \quad q = V(\omega^2/c^2) \varepsilon - x^2; \quad B_{x,y} = (\varepsilon - \tilde{x}^2)^{-1/4}; \\ B_z = \varepsilon^{-1/2} (\varepsilon - \tilde{x}^2)^{-1/4}; \quad \tilde{x} = (c/\omega) x; \quad (9)$$

$$J_{x,y} = \frac{4\pi i}{B_{x,y} q} \left(-\frac{\omega^2}{c^2} j_{x\omega} - \frac{k_{x,y}}{\varepsilon} \rho_{x\omega} \right);$$

$$J_z = \frac{4\pi i}{B_z q} \left(-\frac{\omega}{c^2} j_{z\omega} + \frac{1}{\varepsilon i} \frac{d}{dz} \rho_{x\omega} \right).$$

Определим энергию излучения путем подсчета работы силы торможения за время τ :

$$A = e \int_0^\tau \mathbf{v} E_{z\omega}(z_e) e^{i(x\rho_e - \omega t)} d\omega dx dt. \quad (10)$$

Энергия излучаемых электромагнитных волн, очевидно, равна

$$W = -A. \quad (11)$$

3. Рассмотрим случай, когда заряд e движется вдоль оси z с постоянной скоростью v_0 , совершая гармонические колебания в направлении поступательной скорости с частотой Ω . Тогда

$$j_x = j_y = 0; \quad j_z = \rho v_e(t); \quad \rho = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)); \\ \mathbf{r}_e(t) = \{0; 0; v_0 t + R_0 \sin(\Omega t)\}; \quad (12) \\ \mathbf{v}_e(t) = \{0; 0; v_0 + R_0 \Omega \cos(\Omega t)\}.$$

Величины $\rho_{x\omega}$ и $j_{z\omega}$ легко найти, если воспользоваться следующими представлениями:

$$\delta(z - v_0 t - R_0 \sin(\Omega t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik'(z - v_0 t - R_0 \sin(\Omega t))] dk'; \quad (13)$$

$$e^{-iX \sin(\Omega t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(X) e^{-in\Omega t}, \quad (14)$$

где $J_n(X)$ — функция Бесселя порядка n . Будем считать далее, что диэлектрическая проницаемость среды меняется по закону

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 [1 + m \cos(2pz)]; \quad m \ll 1. \quad (15)$$

Тогда для величины $q(z)$ имеем:

$$q(z) \simeq q_0 + \tilde{\Delta} \cos(2pz); \quad \tilde{\Delta} = \omega^2 \varepsilon_0 m / 2c^2 q_0, \quad (16)$$

где

$$q_0 = V(\omega^2/c^2) \varepsilon_0 - x^2, \quad q_0^2 \gg \tilde{\Delta}^2.$$

В результате для компоненты электрического поля $E_{z\omega}$ в точке, где находится заряд, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 E_{z\omega}(z_e) = & -\frac{i e \omega}{2 \pi^2 v_0^2 \epsilon_0} \sum_{n, n', s, s' = -\infty}^{\infty} J_s(Y) J_{s'}(Y) J_n\left(\frac{\omega - n \Omega}{v_0} R_0\right) \times \\
 & \times \left(\frac{\omega - n \Omega}{\omega} - \frac{\omega}{\omega - n \Omega} \epsilon_0 \beta^2\right) \exp[i(n' - n) \Omega t - i \omega t] \times \\
 & \times \left\{ J_{n'}\left[\left(\frac{\omega - n \Omega}{v_0} + (s - s') 2p\right) R_0\right] \left(\frac{\omega - n \Omega}{v_0} - q_0 - s' 2p\right)^{-1} \times \right. \\
 & \times \exp[i(s - s') 2p v_0 t] - J_{n'}\left[\left(\frac{\omega - n \Omega}{v_0} - (s - s') 2p\right) R_0\right] \times \\
 & \left. \times \left(\frac{\omega - n \Omega}{v_0} + q_0 + s' 2p\right)^{-1} \exp[-i(s - s') 2p v_0 t], \right. \quad (17)
 \end{aligned}$$

где

$$Y = \tilde{\Delta}/2p.$$

Подставляя (17) в (10) и считая τ достаточно большим, можно показать, что в случае, когда величина $2pv_0/\Omega$ — иррациональное число, основной вклад в (10) вносят члены с $n = n'$ и $s = s'$. Тогда выражения для A_1 и A_2 принимают следующий вид*:

$$\begin{aligned}
 A_1 = & -\frac{e^2 \tau \beta}{c} \int \sum_{s, n} \frac{\omega^2}{\omega - n \Omega} J_s^2(Y_0) J_n^2\left(\frac{\omega - n \Omega}{v_0} R_0\right) \times \\
 & \times \left[1 - \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} \left(1 - \frac{n \Omega}{\omega}\right)^2\right] d\omega; \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 = & -\frac{e^2 \tau \beta \Omega}{c} \int \sum_{s, n = -\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 n}{(\omega - n \Omega)^2} J_s^2(Y_0) J_n^2\left(\frac{\omega - n \Omega}{v_0} R_0\right) \times \\
 & \times \left[1 - \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} \left(1 - \frac{n \Omega}{\omega}\right)^2\right] d\omega. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Здесь A_1 — работа силы реакции излучения, затрачиваемая на уменьшение поступательной скорости заряда, A_2 — работа, затрачиваемая на уменьшение (увеличение) амплитуды колебаний осциллятора, $\beta = v_0/c$, величина $Y_0 = Y(x_0)$, где x_0 — действительный и положительный корень уравнения

$$q_0^2 = \left(\frac{\omega - n \Omega}{v_0} - 2ps\right)^2, \quad (20)$$

которое определяет полюса подынтегрального выражения в (10). Найдем полные потери энергии осциллятора:

$$\begin{aligned}
 W = - (A_1 + A_2) = & \frac{e^2 \tau \beta}{c} \int \sum_{s, n = -\infty}^{+\infty} \frac{\omega^3}{(\omega - n \Omega)^2} J_s^2(Y_0) J_n^2\left(\frac{\omega - n \Omega}{v_0} R_0\right) \times \\
 & \times \left[1 - \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} \left(1 - \frac{n \Omega}{\omega}\right)^2\right] d\omega. \quad (21)
 \end{aligned}$$

* Особый случай, когда $2pv_0/\Omega$ — целое число, рассмотрен ниже.

При условии $|Y_0| \ll 1$ член с $s = 0$ в (21) дает, естественно, энергию, излучаемую осциллятором, движущимся в однородной среде*. Угол излучения и частота ω связаны соотношением

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta \sqrt{\epsilon_0}} \left(1 - \frac{n\Omega}{\omega} - \frac{s2pv_0}{\omega} \right), \quad (22)$$

которое следует из (20).

Обсудим более подробно выражение (19). Ограничимся случаем малых колебаний осциллятора, когда выполняется неравенство

$$\frac{\omega - n\Omega}{v_0} R_0 \ll 1. \quad (23)$$

Тогда основной вклад в (19) вносят лишь члены с $n = \pm 1$:

$$A_2^+ = -\frac{e^2 \Omega \tau R_0^2}{4\beta c^3} \int \omega^2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s^2(Y_{s,1}) \left[1 - \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right]; \quad (24)$$

$$A_2^- = \frac{e^2 \Omega \tau R_0^2}{4\beta c^3} \int \omega^2 \sum_s J_s^2(Y_{s,-1}) \left[1 - \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (25)$$

В однородной среде член с $n = +1$ соответствует излучению нормальных, $n = -1$ — аномальных доплеровских волн [2]. В (24) и (25) для каждого порядка s существует свой интервал излучаемых частот, который дается выражением (22). Например, при $\epsilon_0 = \text{const}$ и $\beta \sqrt{\epsilon_0} < 1$ интервалы излучаемых частот определяются неравенствами

$$\frac{\Omega + s2pv_0}{1 + \beta \sqrt{\epsilon_0}} \leq \omega \leq \frac{\Omega + s2pv_0}{1 - \beta \sqrt{\epsilon_0}} \quad (n = +1, s > -s_{\text{макс}});$$

$$\frac{-\Omega + s2pv_0}{1 + \beta \sqrt{\epsilon_0}} \leq \omega \leq \frac{-\Omega + s2pv_0}{1 - \beta \sqrt{\epsilon_0}} \quad (n = -1, s > s_{\text{макс}}),$$

где $s_{\text{макс}} = \Omega/2pv_0 \gg 1$ в силу условия $\lambda \ll L$. В слабонеоднородной среде ($Y_{s,1}, Y_{s,-1} \ll 1$) выражения для A_2^+ и A_2^- изменяются незначительно по сравнению с соответствующими выражениями, полученными для случая однородной среды, поскольку наличие неоднородностей учитывается лишь во втором приближении по малому параметру Y . Поэтому здесь раскочка колебаний осциллятора, так же как и в однородной среде, не имеет места.

Рассмотрим теперь более интересный случай, когда за время одного колебания осциллятор проходит расстояние, равное периоду неоднородностей среды:

$$2pv_0/\Omega = 1. \quad (26)$$

Условие (26) может оказаться совместным с неравенством (7), если хотя бы в некоторой области частот выполняется неравенство

$$\beta \sqrt{\epsilon_0(\omega)} \gg 1. \quad (27)$$

* Условие $m \ll 1$ недостаточно для того, чтобы среду можно было считать слабонеоднородной, поскольку все полученные для этого случая выражения переходят в формулы, справедливые для однородной среды, лишь при условии $|Y| \ll 1$. В то же время величина Y приближенно равна

$$Y = mL/\lambda$$

и при $m \ll 1$ может быть не мала по сравнению с единицей.

В этом случае формулы для A_1 и A_2 имеют довольно громоздкий вид. Поэтому здесь мы приведем лишь выражения для A_2 , поскольку они имеют принципиальный характер. Для слабонеоднородной среды ($Y \ll 1$), предполагая амплитуду колебаний осциллятора малой (см. условие (23)), найдем

$$A_2^+ = - \frac{e^2 \Omega R_0^2 \tau}{4c^3 \beta} \int_{\beta n \cos \theta < 1} \omega^2 \left[1 - \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] d\omega \quad (s=0, n=n'=\pm 1); \quad (28)$$

$$A_2^- = + \frac{e^2 \Omega R_0^2 \tau}{4c^3 \beta} \int_{\beta n \cos \theta > 1} \omega^2 \left[1 - \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} \left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] d\omega \quad (s=0, n=n'=-1); \quad (29)$$

$$A_2^{s=\pm 1} = - \frac{e^2 R_0 \tau \beta^2 \Delta}{4c^2} \int_{\substack{\beta n(\omega) \cos \theta < 1 \\ \beta n(\omega) \gg 1}} \omega^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} \right) \frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega}{\omega} \right)} d\omega \quad (n=0, n'=\pm 1); \quad (30)$$

$$A_2^{s=-1} = \frac{e^2 R_0 \tau \beta^2 \Delta}{4c^2} \int_{\substack{\beta n(\omega) \cos \theta > 1 \\ \beta n(\omega) \gg 1}} \omega^2 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_0 \beta^2} \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{\Omega}{\omega} \right)} d\omega \quad (n=0, n'=\pm 1), \quad (31)$$

где $\Delta = \epsilon_0 m \ll 1$ по условиям задачи.

Полная работа силы торможения, затрачиваемая на уменьшение (увеличение) амплитуды колебаний осциллятора при его движении в периодически неоднородной среде, равна

$$A_2 = A_2^+ + A_2^- + A_2^{s=\pm 1} + A_2^{s=-1}.$$

Случай $A_2 < 0$ соответствует затуханию колебаний осциллятора, $A_2 > 0$ — раскачке колебаний. При движении осциллятора в однородной среде полная работа A_2 равна сумме выражений (28) и (29) [2]. При этом всегда $A_2^+ < 0$, $A_2^- > 0$; однако $|A_2^+| > |A_2^-|$, т. е. в однородной среде раскачка колебаний не происходит. В то же время, как легко видеть, наличие периодических неоднородностей среды приводит к появлению дополнительных членов (30) и (31) в выражении для A_2 , которые, вообще говоря, могут оказаться сравнимыми с (28) и (29). Оценка показывает, что

$$\frac{A_2^{s=\pm 1}}{A_2^+} \approx \frac{\Delta \lambda}{R_0}. \quad (32)$$

Таким образом, при условии (26) и $\lambda/R_0 \gg 1$ работа, затрачиваемая на уменьшение (увеличение) амплитуды колебаний осциллятора, может резко отличаться даже в слабонеоднородной среде от соответствующей величины, характерной для однородной среды. Это связано, очевидно, с тем, что появляется своего рода параметрический резонанс между колебаниями осциллятора и полем переходного излучения, возникающего при движении заряда в неоднородной среде; другими словами, появляется дополнительное эффективное взаимодействие колебаний осциллятора с теми нормальными волнами, которые могут распространяться в периодически неоднородной среде.

В принципе наличие параметрического резонанса может привести к раскачке колебаний, поскольку член $A_2^{s=-1}$ всегда положителен, а $A_2^{s=\pm 1}$ может быть как положительным, так и отрицательным. В частности, $A_2^{s=\pm 1} > 0$, например, при условии, если область частот, при

которых $\beta\sqrt{\epsilon_0(\omega)} \gg 1$, лежит ниже частоты колебаний осциллятора Ω . Для иллюстрации рассмотрим следующий гипотетический случай:

$$n(\omega) = \begin{cases} \text{const} \gg 1 & \text{при } \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ < 0 & \text{при } \omega < \omega_1, \omega > \omega_2. \end{cases} \quad (33)$$

Если, кроме того, $\omega_2 < \Omega$, то при соответствующем выборе параметров m и R_0 возможна раскачка колебаний осциллятора. Правда, в реальных средах, обладающих дисперсией, может найтись также область частот, в которых $n(\omega)$ — порядка единицы. Здесь при условии (26) также возможен параметрический резонанс, однако длины волн излучения могут оказаться сравнимыми с периодом неоднородностей ($\lambda \approx L$) и этот случай требует дополнительного изучения.

Таким образом, излучение, возникающее при движении осциллятора в периодически неоднородной среде и попадающее в область частот, в которой диэлектрическая проницаемость среды велика ($\epsilon_0 \gg 1$), может раскачивать колебания при условии, если эта область излучаемых частот лежит ниже частоты колебаний заряда Ω , в то время как излучение на других частотах может приводить к затуханию колебаний. В зависимости от того, что здесь превалирует, может наступить либо раскачка, либо затухание.

4. Рассмотрим теперь осциллятор, колеблющийся перпендикулярно поступательной скорости \mathbf{v}_0 . При этом

$$\begin{aligned} j_x &= \rho v_x; \quad j_y = 0; \quad j_z = \rho v_z; \quad \rho = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)); \\ \mathbf{r}_e(t) &= \{R_0 \sin(\Omega t); 0; v_0 t\}; \quad \mathbf{v}_e(t) = \{R_0 \Omega \cos(\Omega t); 0; v_0\}. \end{aligned}$$

Поступая совершенно аналогично предыдущему и предполагая амплитуду колебаний заряда малой ($kR_0 \ll 1$), найдем:

$$\begin{aligned} A_1^+ &= -\frac{e^2 R_0^2 \tau}{8c^3 \beta_0} \int \omega^3 \sum_s J_s^2(Y_{s,1}) \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right) \left[2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \left(\frac{\Omega}{\omega} + \frac{2spv_0}{\omega}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x_0 + \Omega/\omega + 2spv_0/\omega)^2}{\epsilon_0 \beta_0^2}\right] d\omega; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} A_1^- &= -\frac{e^2 R_0^2 \tau}{8c^3 \beta_0} \int \omega^3 \sum_s J_s^2(Y_{s,-1}) \left(1 + \frac{\Omega}{\omega}\right) \left[2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \left(\frac{\Omega}{\omega} - \frac{2spv_0}{\omega}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x_0 - \Omega/\omega + 2spv_0/\omega)^2}{\epsilon_0 \beta_0^2}\right] d\omega; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} A_2^+ &= -\frac{e^2 R_0^2 \Omega \tau}{8c^3 \beta_0} \int \omega^2 \sum_s J_s^2(Y_{s,1}) \left[2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \left(\frac{\Omega}{\omega} + \frac{2spv_0}{\omega}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\epsilon_0 \beta_0^2} \left(x_0 + \frac{\Omega}{\omega} + \frac{2spv_0}{\omega}\right)^2\right] d\omega; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} A_2^- &= \frac{e^2 R_0^2 \Omega \tau}{8c^3 \beta_0} \int \omega^2 \sum_s J_s^2(Y_{s,-1}) \left[2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \left(\frac{\Omega}{\omega} - \frac{2spv_0}{\omega}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\epsilon_0 \beta_0^2} \left(x_0 - \frac{\Omega}{\omega} + \frac{2spv_0}{\omega}\right)^2\right] d\omega. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь $x_0 = \epsilon_0 \beta_0^2 - 1$.

Полная работа, затрачиваемая на уменьшение поступательной скорости заряда,

$$A_1 = A_1^0 + A_1^+ + A_1^-,$$

где A_1^0 — работа силы реакции, связанной с черенковским и переходным излучением заряда, движущегося в периодически неоднородной среде (см., например, [11, 13]).

Выражения (34) — (37) получены при условии, что величина $2pv_0/\omega$ — иррациональное число. В слабонеоднородной среде ($|Y| \ll 1$) наличие неоднородностей в этом случае приводит лишь к очень незначительному по сравнению с однородной средой изменению величин A_1 и A_2 . Исследования показывают также, что при $2pv_0/\Omega = 1$ параметрический резонанс между колебаниями осциллятора и полем переходного излучения отсутствует. Конечно, резонанс на следующей гармонике: $2pv_0/\Omega = 2$, когда осциллятор за период колебаний проходит расстояние, равное удвоенному периоду неоднородностей среды, имеет место; однако члены, отвечающие этому условию, вносят лишь незначительный вклад (порядка $|Y|^2$) в полную работу A_2 . В то же время при движении осциллятора в однородной среде $A_2 < 0$ [2].

Таким образом, при движении осциллятора в периодической слабонеоднородной среде в случае, когда поступательная скорость v_0 совпадает с направлением изменения свойств среды, а колебания заряда перпендикулярны поступательной скорости, раскачка колебаний практически никогда не происходит.

5. Остановимся теперь на другом предельном случае $\lambda \gg L$. При этом оказывается удобным иной подход к решению задачи. Пусть осциллятор колеблется вдоль оси z и направление последней совпадает с направлением поступательного движения (см. (12)). При решении задачи будем исходить из уравнения (6). Подставляя в (6) $\epsilon(z)$ в виде

$$\epsilon(z) = \epsilon_0[1 + m \cos(2pz)] \quad (15a)$$

и ограничиваясь членами, порядок которых не превышает m^2 , получаем следующее уравнение (см., например, [9]):

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + F(x) Y = F_1(x). \quad (38)$$

Здесь $x = pz$, $F(x)$ — периодическая (с периодом π) функция:

$$F(x) = \theta_0 + 2\theta_2 \cos(2x) + 2\theta_4 \cos(4x); \quad (39)$$

$$\theta_0 = \frac{k^2 \epsilon_0 - x^2}{p^2} - \frac{m^2}{2}; \quad \theta_2 = \frac{m}{2} \left(\frac{k^2 \epsilon_0}{p^2} - 2 \right); \quad \theta_4 = \frac{5}{4} m^2;$$

$$F_1(x) = \frac{ie}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-2}^{+2} J_n \left(\frac{\omega - n\Omega}{v_0} R_0 \right) M_{2s, n} \exp \left(i \frac{\omega - n\Omega}{pv_0} x + i2sx \right); \quad (40)$$

$$M_{0, n} = \frac{\omega - n\Omega}{p^2 \epsilon_0 v_0} \left\{ 1 - \epsilon_0 \beta^2 \frac{\omega^2}{(\omega - n\Omega)^2} + \frac{3}{16} m^2 \left(1 + \frac{1}{3} \epsilon_0 \beta^2 \frac{\omega^2}{(\omega - n\Omega)^2} \right) \right\};$$

$$M_{\pm 2, n} = - \frac{m}{p \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\omega - n\Omega}{pv_0} (1 + \epsilon_0 \beta^2) \pm 1 \right\}; \quad (41)$$

$$M_{\pm 4, n} = \frac{3m^2}{4p \epsilon_0} \left\{ \frac{\omega - n\Omega}{8pv_0} \left(1 + \frac{1}{3} \epsilon_0 \beta^2 \frac{\omega^2}{(\omega - n\Omega)^2} \right) \pm 1 \right\}.$$

Дальнейший расчет состоит в следующем. Получив решение неоднородного уравнения Хилла (38) [15], вычисляем работу, затрачиваемую полем на уменьшение поступательной скорости заряда A_1 и работу, затрачиваемую полем на уменьшение (увеличение) амплитуды колебаний заряда A_2 . При этом выражение для A_1 и A_2 в общем случае имеют громоздкий вид, поэтому мы их здесь опускаем. Приведем лишь выражения для A_1 и A_2 в случае малой амплитуды колебаний заряда. Легко видеть, что условие $\lambda \gg L$ может оказаться совместным с равенством $(2\rho v_0/\Omega) = 1$ лишь в случае, когда

$$v_0 \ll c/\sqrt{\epsilon_0},$$

т. е. при нерелятивистских скоростях заряда. При этом

$$A_1 = -\frac{e^2 \tau R_0 m}{4c^2} \int \omega^2 \left\{ \frac{2}{\epsilon_0(\omega) \beta_0^2} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right) - 1 \right\} d\omega - \frac{e^2 \tau m^2}{8c \beta_0} \int \frac{\omega}{\epsilon_0(\omega)} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right) d\omega + A_1^+; \quad (42)$$

A_1^+ — работа, затрачиваемая полем на уменьшение поступательной скорости заряда при движении последнего в однородной среде со скоростью $v_0 < c/\sqrt{\epsilon_0}$. Выражение для A_1^+ можно найти из (18), если в последнем положить $|Y_0| \ll 1$ и ограничиться лишь членом $s = 0$, $n = +1$ при $\left| \frac{\omega - n\Omega}{v_0} R_0 \right| \ll 1$.

Интересно отметить, что в (42) при наличии неоднородностей ϵ появляется член, не зависящий от амплитуды колебаний R_0 . В то же время в однородной среде это возможно лишь при скорости $v_0 > c/\sqrt{\epsilon_0}$. т. е. при выполнении условия черенковского излучения. В нашей задаче полученный результат станет понятным, если учесть, что в периодически неоднородной среде могут распространяться медленные волны, для которых черенковское условие выполнено даже при скоростях $v_0 \ll c/\sqrt{\epsilon_0}$. Аналогичные вычисления приводят к следующему выражению для A_2 :

$$A_2 = -\frac{e^2 R_0 \Omega \tau m}{4c^2 \beta^2} \int \frac{\omega}{\epsilon_0(\omega)} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega}\right) d\omega + A_2^+, \quad (43)$$

где A_2^+ — работа, затрачиваемая полем на уменьшение амплитуды колебаний осциллятора при его движении в однородной среде со скоростью $v_0 < c/\sqrt{\epsilon_0}$. Формула для A_2^+ может быть получена из (24), если положить $|Y_{s,1}| \ll 1$ и ограничиться членом $s = 0$; величина A_2^+ всегда отрицательна. Из (43) видно, что добавочный член, обусловленный наличием неоднородностей среды и по порядку величины, вообще говоря, сравнимый с A_2^+ , также всегда отрицателен.

Таким образом, если во всей области излучаемых частот $\lambda \gg L$, то наличие слабых периодических неоднородностей среды практически никогда не приводит к раскачке колебаний осциллятора, поскольку при $v_0 \simeq c/\sqrt{\epsilon_0}$ отсутствует параметрический резонанс, в то время как при $v_0 \ll c/\sqrt{\epsilon_0}$ резонанс возможен, но он приводит к еще более сильному затуханию колебаний осциллятора.

Автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность В. Л. Гинзбургу, Н. Г. Денисову и В. Я. Эйману за ценные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ., **6**, 3 (1942).
2. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **36**, 1823 (1959).
3. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **34**, 131 (1958).
4. Л. Г. Нарышкина, ЖЭТФ, **43**, 953 (1962).
5. Б. В. Хачатрян, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 904 (1963).
6. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, **16**, 16 (1946).
7. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, **33**, 1403 (1957).
8. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖЭТФ, **32**, 884 (1957).
9. П. В. Блюх, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 63 (1959).
10. М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН Арм. ССР, **14**, 103 (1961).
11. С. П. Капица, ЖЭТФ, **39**, 1367 (1960).
12. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 257 (1963).
13. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 897 (1962).
14. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
15. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, М., 1961.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 июля 1963 г.

ON RADIATION FRICTION OF A CHARGE MOVING IN PERIODICALLY
INHOMOGENEOUS MEDIUM

V. V. Tamoykin

The radiation of electromagnetic waves has been considered when the charged particle moving in a medium with periodically varying properties. The charge is assumed to perform both the translational motion and oscillations with frequency Ω . It is shown that in some cases even in weakly inhomogeneous medium the resonance between oscillations and the field of transient radiation must be taken into account. It leads to oscillations swinging. Expressions have been obtained for radiated electromagnetic waves energy for the medium with large-scale and small-scale inhomogeneities.

ПРИНЦИП ИЗЛУЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров

Показано, как выделять запаздывающие решения в электродинамике движущихся сред.

1. При решении уравнений электродинамики возникает вопрос об однозначном выделении запаздывающих решений. Если отыскиваются не сами решения, а их фурье-компоненты, то возникает эквивалентный вопрос об обходе полюсов, встречающихся на пути интегрирования. Было показано [1,2], что запаздывающее решение уравнений поля в покоящейся среде есть такое решение, которое вместе с первой своей производной по времени обращается в нуль при $t = -\infty$. Ниже мы покажем, какую форму принимает решение, удовлетворяющее этому физически ясному требованию в случае движущейся среды.

2. 4-потенциал A_s поля в движущейся среде удовлетворяет уравнению [3,4]

$$[\partial_k^2 + \kappa c^{-2} (u_k \partial_k)^2] A_s = -\frac{4\pi}{c} \left[\delta_{st} - \frac{\kappa}{c^2 (1+\kappa)} u_s u_t \right] j_t, \quad (1)$$

где $\partial_k (-\nabla, \partial/\partial ct)$ — 4-вектор градиента, u_k — 4-скорость среды, $j_t (j, c\rho)$ — плотность источников поля, $\kappa = \epsilon\mu - 1$, ϵ и μ — диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость среды. По дважды встречающимся индексам производится суммирование, причем, например, $a_i b_i = a_4 b_4 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$.

Обозначим правую часть уравнения (1) через ρ_s и разложим A_s и ρ_s в интегралы Фурье по пространственным координатам:

$$A_s = \int e^{ikr} A_{s,k}(t) dk; \quad \rho_s = \int e^{ikr} \rho_{s,k}(t) dk. \quad (2)$$

Подставляя эти разложения в уравнение (1), найдем, что функция $A_{s,k}(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left[\frac{1}{c^2} (1+\eta) \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2i\eta}{c^2} (uk) \frac{d}{dt} + k^2 - \eta \frac{(uk)^2}{c^2} \right] A_{s,k}(t) = \rho_{s,k}(t), \quad (3)$$

где $\eta = \kappa (1 - u^2/c^2)^{-1}$. Если $1 + \eta \neq 0$, то уравнение (3) эквивалентно следующему:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{2i\eta}{1+\eta} (uk) \frac{d}{dt} + \frac{c^2 k^2 - \eta (uk)^2}{1+\eta} \right] A_{s,k}(t) = \frac{c^2}{1+\eta} \rho_{s,k}(t). \quad (4)$$

Потребуем, чтобы решение $A_{s,k}(t)$ уравнения (4) удовлетворяло требованию

$$A_{s,k}(t) = 0 \Big|_{t=-\infty}; \quad \frac{d}{dt} A_{s,k}(t) = 0 \Big|_{t=-\infty}. \quad (5)$$

Если ввести обозначения

$$(\mathbf{uk}) \frac{2i\eta}{1+\eta} = a; \quad \frac{c^2 k^2 - \eta(\mathbf{uk})^2}{1+\eta} = b; \quad \frac{c^2}{1+\eta} \rho_{s,k} = f_{s,k}(t), \quad (6)$$

то решение уравнения (4), удовлетворяющее требованию (5), запишется в виде [5]

$$A_{s,k}(t) = \frac{2}{\lambda} \int_{-\infty}^t f_{s,k}(\xi) e^{a\lambda(t-\xi)/2} \sin \left[\frac{\lambda}{2} (t-\xi) \right] d\xi, \quad (7)$$

где

$$\lambda^2 = 4b - a^2. \quad (8)$$

Если теперь в выражение (7) подставить разложение функции $f_{s,k}(\xi)$ в интеграл Фурье

$$f_{s,k}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\xi} f_{s,k,\omega} d\omega \quad (9)$$

и провести интегрирование по ξ , мы получим

$$A_{s,k}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{s,k,\omega} \left[\frac{-1}{\omega^2 - ia\omega - b} + \frac{\pi}{i\lambda} \delta \left(\omega - \frac{ia+\lambda}{2} \right) - \frac{\pi}{i\lambda} \delta \left(\omega - \frac{ia-\lambda}{2} \right) \right] e^{i\omega t} d\omega. \quad (10)$$

Переходя с помощью (2) в координатное пространство, получаем

$$A_s(\mathbf{r}, t) = \int e^{i\mathbf{kr} + i\omega t} f_{s,k,\omega} \left[\frac{-1}{\omega^2 - ia\omega - b} - \pi i \operatorname{sgn} \left(\omega - \frac{ia}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \delta(\omega^2 - ia\omega - b) \right] d\omega d\mathbf{k}. \quad (11)$$

Подставляя из (6) значения a , b и $f_{s,k}$, получаем окончательно

$$A_s(\mathbf{r}, t) = \int e^{i\omega t + i\mathbf{kr}} \rho_{s,k,\omega} \left[\frac{1}{\omega^2/c^2 - k^2 + \eta(\omega - \mathbf{ku})^2/c^2} - \right. \\ \left. - \pi i \operatorname{sgn} \left(\omega + \frac{\eta(\mathbf{ku})}{1+\eta} \right) \delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 + \eta \frac{(\omega - \mathbf{ku})^2}{c^2} \right) \right] d\omega d\mathbf{k}. \quad (12)$$

Первый член в квадратных скобках под знаком интеграла дает частное решение неоднородного уравнения (3), в чем легко убедиться простой подстановкой. Член с дельта-функцией описывает решение уравнения (3) без правой части. Это решение однородного уравнения подобрано так, чтобы выполнялись начальные условия (5). В случае покоящейся среды $\mathbf{u} = 0$, и равенство (12) переходит в хорошо известное выражение для решения уравнения Даламбера.

Так как дельта-функция под знаком интеграла имеет особенности в тех точках, где обращается в нуль знаменатель первого члена, выражение (12) фактически дает правило обхода полюсов, встречающихся на пути интегрирования.

3. Посмотрим, к каким результатам приводит эта формула в задаче об излучении равномерно движущегося заряда в движущейся среде. Если скорость заряда \mathbf{v} , то величина $\rho_{s,k,\omega}$ пропорциональна $\delta(\omega + k\mathbf{v})$, поэтому интегрирование по ω сводится к замене ω на $-k\mathbf{v}$. При этом функция $\text{sgn}\left(\omega + \frac{\eta}{1+\eta} k\mathbf{u}\right)$ перейдет в $\text{sgn}\left(k\mathbf{v} - \frac{\eta}{1+\eta} k\mathbf{u}\right)$. Физический смысл такого выражения следующий. В случае покоящейся среды под знаком интеграла в (12) стоит $\text{sgn}(k\mathbf{v}) \delta\left\{\frac{(k\mathbf{v})^2}{c^2} - \varepsilon\mu - k^2\right\}$. Аргумент дельта-функции обращается в нуль при

$$(k\mathbf{v})^2 \frac{\varepsilon\mu}{c^2} = k^2 \quad \text{или при} \quad \cos^2 \vartheta = \frac{c^2}{v^2 \varepsilon\mu},$$

где ϑ — угол между волновым вектором \mathbf{k} излучаемой волны и скоростью частицы \mathbf{v} .

Из последнего равенства $\cos \vartheta$ может быть определен с точностью до знака. Наличие функции $\text{sgn}(k\mathbf{v})$ оставляет в разложении поля по гармоникам только такие волны, для которых угол ϑ между скоростью заряда и волновым вектором является острым. Это — хорошо известное требование в теории излучения Вавилова—Черенкова. В случае движущейся среды волновой вектор излучения Вавилова—Черенкова должен составлять острый угол с вектором $\mathbf{v} - \frac{\eta}{1+\eta} \mathbf{u}$, чему и соответствует функция $\text{sgn}\left(\mathbf{k}, \mathbf{v} - \frac{\eta}{1+\eta} \mathbf{u}\right)$. Следует отметить, что в работе [4], где рассматривались потери энергии заряда в движущейся среде, учитывалась функция $\text{sgn}(k\mathbf{v})$, справедливая для случая покоящейся среды, вместо правильного выражения $\text{sgn}\left(k\mathbf{v} - \frac{\eta}{1+\eta} k\mathbf{u}\right)$. Поэтому найденные там выражения для потерь неправильны.

4. Рассмотрим прохождение заряженной частицы с зарядом q через движущуюся среду в том случае, когда скорость заряда \mathbf{v} и скорость среды \mathbf{u} параллельны. Для потерь энергии заряда, как показано в [4], получается выражение

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= \frac{iq^2}{2\pi^2 v} \int (k\mathbf{v})_\mu \left\{ 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{x}{1+x} \frac{1-u\mathbf{v}/c^2}{1-u^2/c^2} \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{(k\mathbf{v})^2}{c^2} - k^2 + \eta \frac{(k\mathbf{v} - k\mathbf{u})^2}{c^2} \right\}^{-1} dk. \end{aligned} \quad (13)$$

Для однозначного вычисления этого выражения следует в соответствии с результатом (12) произвести замену выражения

$$\left\{ \frac{(k\mathbf{v})^2}{c^2} - k^2 + \eta \frac{(k\mathbf{v} - k\mathbf{u})^2}{c^2} \right\}^{-1}$$

на

$$\left\{ \frac{(k\mathbf{v})^2}{c^2} - k^2 + \eta \frac{(k\mathbf{v} - k\mathbf{u})^2}{c^2} \right\}^{-1} + \pi i \operatorname{sgn} \left(k\mathbf{v} - \frac{\eta}{1+\eta} k\mathbf{u} \right) \times \\ \times \delta \left(\frac{(k\mathbf{v})^2}{c^2} - k^2 + \eta \frac{(k\mathbf{v} - k\mathbf{u})^2}{c^2} \right)$$

и затем все получающиеся интегралы брать в смысле главного значения.

Введем замену $\omega' = k(\mathbf{v} - \mathbf{u}) / \sqrt{1 - u^2/c^2}$. Интегрируя по компонентам k , перпендикулярным \mathbf{v} и \mathbf{u} , получим выражение для потерь энергии на излучение Вавилова—Черенкова в движущейся среде в виде

$$\frac{dW'}{dx} = - \operatorname{sgn}(v-u) \frac{q^2}{c^2} \int_{\substack{\mu(\omega')\epsilon(\omega')\beta_{\text{отн}}^2 > 1 \\ \omega' > 0}} \left(1 - \frac{1}{\epsilon(\omega')\mu(\omega')\beta_{\text{отн}}^2} \right) \mu(\omega') \omega' d\omega'; \quad (14)$$

здесь

$$v_{\text{отн}} = \frac{v-u}{1-uv/c^2}, \quad \beta_{\text{отн}} = \frac{v_{\text{отн}}}{c}$$

и интегрирование распространяется на область положительных частот ω' , для которых выполнено условие $\epsilon(\omega')\mu(\omega')\beta_{\text{отн}}^2 > 1$. Здесь $\epsilon(\omega')$ и $\mu(\omega')$ имеют такой же вид, как и в покоящейся среде.

Это выражение отличается от выражения, полученного в [4], множителем $\operatorname{sgn}(v-u)$. Физически это соответствует тому, что при $v > u$ заряд тормозится средой (потери энергии положительны), а при $v < u$ заряд ускоряется средой (потери отрицательны).

За исключением $\operatorname{sgn}(v-u)$ выражение (14) совпадает с выражением для потерь энергии заряженной частицей, движущейся в покоящейся среде со скоростью $v = v_{\text{отн}}$. Этот результат вполне естественен, ибо величина потерь dW/dx определяется компонентой электрического поля вдоль направления движения, последняя же в силу преобразований Лоренца остается без изменения во всех системах отсчета. Из-за эффекта Доплера меняется лишь частотный спектр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, Диссертация, ФИАН, М., 1954.
2. Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов, Классическая теория поля, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
3. М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 32, 4244 (1957).
4. Б. М. Болотовский и А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
5. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, М., 1950.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
10 ноября 1963 г.

RADIATION PRINCIPLE IN ELECTRODYNAMICS OF MOVING MEDIA

B. M. Bolotovsky, S. N. Stolyarov

It is shown how to choose the retarded solutions in electrodynamics of moving media.

К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Л. А. Поспелов

Проведен учет диссипации и нелинейной зависимости индукции от напряженности поля для произвольной анизотропной среды. Для случая малой диссипации и слабой нелинейности исходная система уравнений Максвелла сведена к одному уравнению (7), исследование точного решения которого дает возможность выяснить роль диссипации (конечной проводимости среды) в процессе искажения профиля волны и образования разрыва (ударной волны).

В области частот, удовлетворяющих неравенству $\omega \ll \omega_p \sim 1/\tau$, где τ — время релаксации, дисперсия отсутствует и процесс распространения электромагнитных волн полностью описывается системой уравнений Максвелла. Наличие нелинейной зависимости индукции от напряженности поля приводит при этом к искажению профиля волны и к образованию разрыва. Исследование этого явления в отсутствие диссипации проведено в работе [1]. Учет слабой диссипации для случая, когда среда изотропна и зависимость индукции от напряженности слабо отклоняется от линейной, проведен в работах [3, 4]. В настоящей статье асимптотическим методом, разработанным в работах [2, 3], изучен случай произвольной анизотропии среды. При этом предполагается, что в линейном приближении распространяется лишь одна волна и все искомые величины зависят лишь от координаты вдоль направления распространения волны и времени.

Будем исходить из системы уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_i \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial t}; \\ \operatorname{rot}_i \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial D_i}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma_{ik} E_k; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

считая, что связь магнитной индукции \mathbf{B} с напряженностью магнитного поля \mathbf{H} и электрической индукции \mathbf{D} с напряженностью электрического поля \mathbf{E} имеет вид

$$\begin{aligned} B_i &= \mu_{ik} H_k + b_i(H_x, H_y, H_z); \\ D_i &= \varepsilon_{ik} E_k + d_i(E_x, E_y, E_z); \end{aligned} \tag{2}$$

($i, k = x, y, z$),

где b_i и d_i произвольно зависят от напряженности поля и удовлетворяют неравенствам

$$|b_i| \ll |B_i|; \quad |d_i| \ll |D_i|. \tag{3}$$

Пусть все компоненты поля зависят лишь от величин ωt и $kr = kz$. Перейдем к переменным $\psi = kz - \omega t$ и $\zeta = xkz$, где x — безразмерный параметр, характеризующий порядок малости нелинейных и диссипативных членов в уравнении Максвелла ($x \ll 1$). В новых переменных ψ и ζ система уравнений (2) с точностью до членов порядка x^2 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \{ \mu_{xi} H_i + \beta E_y \} &= - \frac{\partial b_x}{\partial \psi} - x \frac{\partial E_y}{\partial \zeta}; \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \{ \mu_{yi} H_i - \beta E_x \} &= - \frac{\partial b_y}{\partial \psi} + x \frac{\partial E_x}{\partial \zeta}; \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \{ \mu_{zi} H_i \} &= - \frac{\partial b_z}{\partial \psi}; \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \{ \epsilon_{xi} E_i - \beta H_y \} &= - \frac{\partial d_x}{\partial \psi} + x \frac{\partial H_y}{\partial \zeta} + \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xi} E_i; \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \{ \epsilon_{yi} E_i + \beta H_x \} &= - \frac{\partial d_y}{\partial \psi} - x \frac{\partial H_x}{\partial \zeta} + \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{yi} E_i; \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \{ \epsilon_{zi} E_i \} &= - \frac{\partial d_z}{\partial \psi} + \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{zi} E_i, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\beta = ck/\omega$ — действительный корень дисперсионного уравнения

$$\begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} & 0 & \beta & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} & -\beta & 0 & 0 \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \beta & 0 & 0 & \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Решая систему первых пяти уравнений (4) относительно пяти неизвестных функций, выразим их через шестую, например, через $E_x \equiv \eta$:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\Delta_1}{\Delta} \eta + \frac{\Delta'_1}{\Delta}; & H_y &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \eta + \frac{\Delta'_2}{\Delta}; & H_z &= \frac{\Delta_3}{\Delta} \eta + \frac{\Delta'_3}{\Delta}; \\ E_y &= \frac{\Delta_4}{\Delta} \eta + \frac{\Delta'_4}{\Delta}; & E_z &= \frac{\Delta_5}{\Delta} \eta + \frac{\Delta'_5}{\Delta}, \end{aligned} \tag{6}$$

где определитель системы пяти рассматриваемых уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} & \beta & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} & 0 & 0 \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix},$$

а $\Delta_i \eta + \Delta'_i$ — определитель, получающийся из Δ заменой i -го столбца столбцом, составленным из свободных членов тех же уравнений.

Подставляя соотношения (6) в шестое уравнение системы (4), получим уравнение, определяющее функцию η :

$$\eta_c + \varphi(\eta) \eta_\psi = -\delta\eta, \quad (7)$$

где

$$\frac{\varphi}{b} = -\frac{1}{\Delta} \{ \varepsilon_{zy} [b_{x,\eta} b_1 + b_{y,\eta} b_2 + b_{z,\eta} b_3 + d_{x,\eta} b_4 + d_{y,\eta} b_5] + \varepsilon_{zz} [b_{x,\eta} a_1 + b_{y,\eta} a_2 + b_{z,\eta} a_3 + d_{x,\eta} a_4 + d_{y,\eta} a_5] + d_{z,\eta} \};$$

$$\delta = \frac{c}{b}; \quad a = \frac{x^2}{\Delta^2} [\varepsilon_{zy}(-\Delta_1 b_1 + b_2 + \Delta_2 b_4 - \Delta_1 b_5) + \varepsilon_{zz}(\Delta_4 a_1 + a_2 + \Delta_2 a_4 - \Delta_1 a_5)];$$

$$-c = \frac{4\pi}{\omega} \left[(\varepsilon_{zy} b_4 + \varepsilon_{zz} a_4) \left(\sigma_{xx} + \frac{\Delta_4}{\Delta} \sigma_{xy} + \frac{\Delta_5}{\Delta} \sigma_{xz} \right) + (\sigma_{zy} b_5 + \varepsilon_{zz} a_5) \left(\sigma_{yx} + \sigma_{yy} \frac{\Delta_4}{\Delta} + \sigma_{yz} \frac{\Delta_5}{\Delta} \right) + \left(\sigma'_{zx} + \sigma_{zy} \frac{\Delta_4}{\Delta} + \sigma_{yz} \frac{\Delta_5}{\Delta} \right) \right];$$

$$b_1 = \beta [-\varepsilon_{xx}(\mu_{yy} \mu_{zz} - \mu_{zy} \mu_{yz}) + \varepsilon_{yz}(\mu_{yx} \mu_{zz} - \mu_{zx} \mu_{xz})];$$

$$b_2 = \beta [\varepsilon_{xx}(\mu_{xy} \mu_{zz} - \mu_{zy} \mu_{xz}) - \varepsilon_{yz}(\mu_{xr} \mu_{zz} - \mu_{zx} \mu_{xz})];$$

$$b_3 = \beta [-\varepsilon_{xx}(\mu_{xy} \mu_{yz} - \mu_{yy} \mu_{xz}) + \varepsilon_{yz}(\mu_{yz} \mu_{zy} - \mu_{yx} \mu_{xz})];$$

$$b_4 = -\varepsilon_{yz} \|\mu\|; \quad b_5 = \varepsilon_{xz} \|\mu\|.$$

Можно, конечно, выбрать и другой путь определения соотношений (6), хотя он не может привести к уравнению для E_x , отличному от (7).

Если среда гиротропна и направление гиротропии совпадает с направлением распространения волны, то поперечные компоненты поля распространяются независимо от продольных и можно считать, что

$$H_z = \text{const}, \quad E_z = \text{const}.$$

Дисперсионное соотношение, определяющее фазовую скорость, с которой распространяются поперечные компоненты, имеет вид

$$\begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 & \beta \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & -\beta & 0 \\ 0 & -\beta & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \beta & 0 & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} = 0.$$

Выражая снова все компоненты поля через одну, получим

$$E_y = \eta, \quad H_x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \eta + \frac{\Delta_1'}{\Delta}, \quad H_y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \eta + \frac{\Delta_2'}{\Delta}, \quad E_x = \frac{\Delta_3}{\Delta} \eta + \frac{\Delta_3'}{\Delta},$$

где Δ и Δ_i находятся аналогично тому, как это делалось ранее. Отличие заключается лишь в том, что исходная система сейчас содержит лишь четыре уравнения.

Уравнение, определяющее η , в последнем случае совпадает с уравнением (7), где, однако,

$$a = -\kappa\beta[\mu_{yy} \varepsilon_{xx} - \beta^2] - \varepsilon_{yx} \mu_{yx} + \kappa\beta \frac{\Delta_3}{\Delta} (\varepsilon_{yx} \mu_{xx} - \mu_{xy} \varepsilon_{xx}) + \kappa \frac{\Delta_2}{\Delta} [\varepsilon_{yx}(\mu_{xx} \mu_{yy} - \mu_{yx} \mu_{xy}) - \beta^2 \mu_{xy}] + \kappa \frac{\Delta_1}{\Delta};$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) = & -\beta b_{x, \eta} (\mu_{yy} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yx} \mu_{yx} - \beta^2) - \beta b_{y, \eta} (\varepsilon_{yx} \varepsilon_{xx} - \mu_{xy} \varepsilon_{xx}) - \\ & - d_{x, \eta} [\varepsilon_{yx} (\mu_{xx} \mu_{yy} - \mu_{yx} \mu_{xy} - \beta^2 \mu_{xy})] + d_{y, \eta}; \\ c = & -\frac{4\pi}{\omega} \left\{ \left(\sigma_{yx} \frac{\Delta_3}{\Delta} + \sigma_{yy} \right) - \left(\sigma_{xx} \frac{\Delta_3}{\Delta} + \sigma_{xy} \right) [\varepsilon_{yx} (\mu_{xx} \mu_{yy} - \mu_{yx} \mu_{xy}) - \beta^2 \mu_{xy}] \right\}. \end{aligned}$$

В изотропном случае $\mu_{ik} = \varepsilon_{ik} = 0$, если $i \neq k$, $\mu = \mu_0 + \mu_1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$ и исходная система уравнений переходит в систему двух уравнений для $H_x = H$, $E_y = E$:

$$-\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\mu_n}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mu_1(H) H;$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_1(E) E.$$

Все остальные компоненты можно считать равными нулю.

Уравнение для $\eta = E$ имеет вид (7), где

$$\varphi(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + \frac{\mu_1}{\mu_0} \right] \eta, \quad \delta = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon_0\omega} \frac{1}{2x}.$$

Магнитное поле определяется соотношением $H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E$, волновой вектор $k = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \omega/c$.

Заметим, что для $\varphi(\eta) \sim \eta$ уравнение (7) совпадает с уравнением (11) работы Хохлова [3], относящейся к изотропному случаю. Таким образом, появление анизотропии качественно меняет решение, если при этом качественно меняется вид зависимости $\varphi = \varphi(\eta)$.

Решая уравнение (7), удобно перейти к новой искомой функции, определяемой соотношением $\eta = e^{-\delta\zeta} u$. Уравнение для u имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \varphi(u e^{-\delta\zeta}) \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0. \quad (8)$$

Меняя ролями в уравнении (8) независимое переменное ψ и искомую функцию u , получим уравнение для $\psi = \psi(u, \zeta)$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \varphi(u e^{-\delta\zeta}). \quad (9)$$

Решение уравнения (9) имеет вид

$$\psi(\zeta, u) = \psi(0, u) + \int_0^\zeta \varphi(u e^{-\delta\zeta'}) d\zeta'. \quad (10)$$

Если граничное условие для u при $\zeta = 0$ (линейное приближение, $\sigma = 0$)

$$u(\zeta, \psi)_{\zeta=0} = f(\psi), \quad (11)$$

то решение уравнения (8) будет иметь вид

$$u = f\left[\psi + \int_0^\zeta \varphi(u e^{-\delta\zeta'}) d\zeta'\right]. \quad (12)$$

Оно содержит в себе все нелинейные эффекты, которые имеют место при

распространении в нелинейной проводящей среде одной электромагнитной волны частоты ω .

Заметим, что нелинейные эффекты успеют проявиться на расстояниях $\zeta \sim 1$, если $\delta \ll 1$, и на расстояниях $\zeta \sim 1/\delta$, если $\delta \gg 1$. В последнем случае величина нелинейной добавки к линейному решению имеет порядок $\frac{1}{\delta} \ll 1$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим случай малых $\delta(1/\delta)$ аналогично гидродинамическому числу Рейнольдса и представляет собой отношение нелинейной силы к диссипативной). При $\delta \ll 1$ аргумент выражения (12) можно разложить в ряд Тейлора по степеням δ и переписать его в виде

$$u = f\left(\psi + \varphi(u)\zeta - \delta\zeta^2 \frac{\varphi'(u)}{2} + \dots\right). \quad (13)$$

При $\delta = 0$ выражение (13) аналогично волне Римана.

Из (13) следует, что наличие проводимости (диссипации) уменьшает тенденцию к образованию разрыва. Поэтому можно ожидать, что разрыва не произойдет в случае, когда величина диссипативной силы больше величины нелинейной силы ($\delta > 1$). В последнем случае выражение (12) можно разложить в ряд Тейлора по степеням $1/\delta$. Ограничиваясь двумя членами ряда, получим

$$u = f(\psi) + \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta\zeta} \varphi(u e^{-\xi}) d\xi f'(u) + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right). \quad (14)$$

Первое слагаемое в выражении (14) представляет собой решение линейных уравнений. Второе слагаемое характеризует результат действия нелинейных сил; вследствие малости оно не может привести к существенному изменению исходного решения, например, к разрыву в профиле волны.

Для оценки точности полученных результатов заметим, что учет членов порядка x при $\delta \ll 1$ и $\zeta \sim 1$ приводит, как следует из соотношения (13), к изменению исходного решения на величину порядка единицы. Поэтому следует ожидать, что пренебрежение членами порядка x^2 при переходе от исходной системы уравнений Максвелла (1) к уравнению (7) в случае $\delta \ll 1$ и $\zeta \sim 1$ приведет к ошибке порядка x в полученном решении. Это означает, что в указанной области изменения параметров учет членов типа Δ_i/Δ в выражениях (6) производить не следует, так как они имеют порядок x . Для случая $\delta \gg 1$ члены Δ_i/Δ совпадают по порядку с величиной нелинейного искажения исходной волны, заключенной в решении (12), и должны быть учтены в окончательном результате. Однако в последнем случае все сведения о влиянии нелинейности и диссипации могут быть получены более простым методом возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, **36**, 957 (1959).
2. J. Cole, Quart. Appl. Math., **9**, 225 (1951).
3. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, **6**, 917 (1961).
4. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 955 (1961).

TO THE ELECTROMAGNETIC WAVES PROPAGATION IN NONLINEAR MEDIA

L. A. Pospelov

Dissipation and nonlinear dependence of induction on field intensity are considered in an arbitrary anisotropic medium. In the case of small dissipation and weak nonlinearity the initial system of Maxwell equation is reduced to one equation. The investigation of an exact solution gives the possibility to clear up the role of dissipation (conductivity of medium) in the process of wave profile distortion and discontinuity formation (a shock wave).

О РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМОЙ

Н. В. Шолохов

Исследуется влияние поперечных волн в плазме на рассеяние электромагнитных волн системой плазма—пучок.

Рассеяние электромагнитных волн неравновесной плазмой исследовалось в работах [1, 2, 8]. Как известно, неизотермичность электронно-ионной плазмы при $T_e \gg T_i$ приводит к появлению дополнительной колебательной степени свободы в плазме (специфических волн ионного звука с частотой $\omega_s = k\sqrt{T_e/m_i}$) и, тем самым, к появлению в спектре рассеянных волн спутников с $\Delta\omega = \omega_s$. Ширина этих линий и вклад в сечение рассеяния исследованы в работах [1, 9].

Однако основное отличие рассеяния на неравновесной плазме состоит в том, что при приближении состояния плазмы к критически неустойчивому (например, при наличии в плазме пучка) сечение рассеяния становится аномально большим [1], что связано с аномальным ростом флуктуаций в плазме [5, 6]. При этом обычно ограничиваются учетом лишь кулоновского взаимодействия частиц (продольные волны), так как рост флуктуаций связан с неустойчивостью продольных волн в плазме.

Влияние поперечных волн на рассеяние термодинамически равновесной плазмой пренебрежимо мало, так как их фазовая скорость больше скорости света. При наличии в плазме пучка положение меняется. В частности, при определенных параметрах плазмы в ней возможно распространение чисто поперечных низкочастотных волн [3]. Более того, поперечные волны, распространяющиеся перпендикулярно пучку, могут оказаться нарастающими [7]. Можно ожидать, что такие волны при определенных условиях дадут заметный вклад в сечение рассеяния.

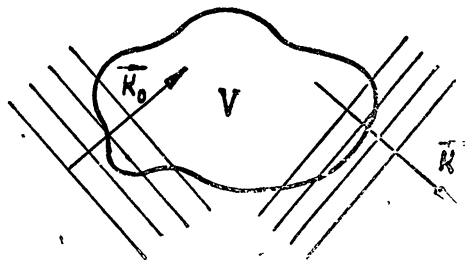


Рис. 1.

1. Пусть на плазму, занимающую некоторый объем V , падает плоская электромагнитная волна $E_0 e^{i(k_0 r - \omega_0 t)}$ (рис. 1) с частотой $\omega_0 \gg \omega_{Le}$. Мы предполагаем, что частота падающей ω_0 и рассеянной волны ω значительно больше плазменной. Вычислим дифференциальное сечение рассеяния единицы объема плазмы.

Из уравнения Максвелла для полного поля имеем

$$\text{rot rot } E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (1)$$

где

$$j = \sum_a e_a v_a(t) \delta(r - r_a(t));$$

суммирование распространено по всем частицам плазмы. Для движения одной частицы имеем уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha(t), t) + \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} [\mathbf{v}_\alpha(t), \mathbf{H}(\mathbf{r}_\alpha(t), t)]. \quad (2)$$

Ограничившись нерелятивистскими скоростями $v_\alpha/c \ll 1$ и учитывая, что в высокочастотных полях $E \sim H$, мы можем пренебречь вторым членом в уравнении (2). Далее имеем

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \sum_\alpha \left\{ e_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha(t)}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) - e_\alpha \mathbf{v}_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)) \right\}. \quad (3)$$

Второй член в (3) существенен лишь при учете пространственной дисперсии и может быть опущен, если $k_0 v_\alpha / \omega_0 \ll 1$.

С учетом (2) и (3) уравнение (1) приводится к виду

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi e^2}{mc^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) n_e(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где

$$n_e(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)).$$

Ионным током пренебрегли из-за большой массы ионов.

Положим

$$\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t); \quad n_e(\mathbf{r}, t) = n_0 + \delta n_e(\mathbf{r}, t); \quad (5)$$

\mathbf{E}_0 и \mathbf{E}' — поля падающей и рассеянной волны, n_0 — средняя плотность электронов и δn_e — флюктуационное отклонение от средней плотности.

Подставляя (5) в (4), преобразуя по Фурье во времени и ограничиваясь линейным приближением, получим

$$\text{rot rot } \mathbf{E}' - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}' = \frac{\omega_{Le}^2}{n_0 c^2} \delta n_e(\mathbf{r}, \Delta\omega) \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (6)$$

Тогда при выполнении условий $kL \gg 1$ и $r/L \gg 1$, где L — максимальный размер объема плазмы, для поля рассеянной волны в дальней зоне будем иметь

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi r} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{n_0 c^2} \omega_{Le}^2 \delta n_e(\Delta\omega, \mathbf{q}) \frac{\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0]}{k^2}, \quad (7)$$

где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ и $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$.

Разделив средний поток рассеянной мощности $\langle \mathbf{S}' \cdot \frac{\mathbf{k}}{k} \rangle = \frac{c}{8\pi} \langle |\mathbf{E}'|^2 \rangle$

в единицу телесного угла $d\Omega$ на поток падающей мощности $\left| \frac{\mathbf{k}_0}{k_0} \mathbf{S} \right| =$

$= \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2$, для дифференциального коэффициента рассеяния получим

$$d^2\sigma = (e^2/mc^2)^2 (1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi) \langle \delta n_e(\mathbf{r}_1, t_1) \delta n_e(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}} d\omega d\Omega, \quad (8)$$

где φ — угол между плоскостями векторов \mathbf{k}_0 , \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 , \mathbf{E}_0 , ϑ — угол рассеяния и скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по ансамблю частиц.

Величина $\langle \delta n_e(\mathbf{r}_1, t_1) \delta n_e(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle_{\Delta\omega, \mathbf{q}}$ представляет корреляционную функцию флюктуаций плотности электронов, фурье-преобразованную по времени и пространству.

2. Таким образом, рассеяние электромагнитных волн плазмой полностью определяется корреляцией флюктуаций плотности электронов. Для вычисления спектральных функций корреляции в неравновесной плазме без столкновений воспользуемся методикой работы [4], позволяющей сравнительно просто учесть как кулоновское взаимодействие частиц, так и поперечное поле.

Опуская промежуточные выкладки, мы приведем лишь окончательный результат:

$$\begin{aligned} \langle e^2 \delta n_e^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} &= e^2 n_0 \int f_{0e}(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{p} + \\ &+ \left(\frac{e^2 n}{\omega} \right)^2 \int \frac{v_i}{\omega + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{k} \frac{\partial f_{0e}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} \int \frac{v_j}{\omega - i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{k} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} (\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}} - \\ &- \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \left(\frac{e^2 n}{\omega} \right)^2 \left\{ A_{ji}^{-1}(\omega + i0, \mathbf{k}) \int \frac{v_i}{\omega + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{k} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} \int v_i f_{0e}(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{p} + \right. \\ &\left. + A_{ji}^{-1*}(\omega - i0, \mathbf{k}) \int \frac{v_i}{\omega - i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{k} \frac{\partial f_{0e}}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} \int v_j f_{0e}(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{p} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$(\delta E_i \delta E_j)_{\omega, \mathbf{k}} = \sum_{\alpha} \left(\frac{4\pi e_{\alpha} \omega}{c} \right)^2 A_{i\alpha}^{-1} A_{j\alpha}^{-1*} \int \frac{v_{\alpha}^i v_{\alpha}^j}{c^2} n_{\alpha} f_{0\alpha} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}) d\mathbf{p}_{\alpha}; \quad (10)$$

$$A_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2 \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

Для изотропной функции распределения $f_0(\mathbf{v}^2)$ формулы (9) и (10) переходят в формулы (8) и (7) работы [4].

Подставим в выражение (8) в качестве начального максвелловское распределение при наличии пучка и проинтегрируем. Тогда после простых, но несколько громоздких преобразований получим

$$\begin{aligned} \langle e^2 \delta n_e^2 \rangle_{\omega, \mathbf{k}} &= \left| b(\varepsilon^{(2)l} + \varepsilon^{(1)l} - 1) + \frac{k^2 u^2}{c^2} \sin^2 \Theta \varepsilon^{(2)l} (\varepsilon^{(1)l} - 1) \right|^{-2} \times \\ &\times \left\{ \frac{k^2 u^2}{c^2} |4\pi x_e^{(1)} + 4\pi x_e^{(1)} 4\pi x_e^{(2)} - 4\pi x_i^{(1)} 4\pi x_e^{(2)}|^2 \left(\frac{k^2 T_i^{(1)}}{m_i c^2} \frac{k^2 T_i^{(1)}}{\pi \omega'} \operatorname{Im} x_i^{(1)} + \right. \right. \\ &+ \frac{k^2 T_e^{(2)}}{m_e c^2} \frac{k^2 T_e^{(2)}}{\pi \omega} \operatorname{Im} x_e^{(2)} + \frac{k^2 T_e^{(1)}}{m_e c^2} \frac{k^2 T_e^{(1)}}{\pi \omega'} \operatorname{Im} x_e^{(1)} + \frac{k^2 T_e^{(2)}}{m_e c^2} \frac{k^2 T_e^{(2)}}{\pi \omega} \operatorname{Im} x_e^{(2)} \left. \right) + \\ &+ \frac{k^2 T_i^{(1)}}{\pi \omega'} \operatorname{Im} x_i^{(1)} \left| b(4\pi x_e^{(1)} + 4\pi x_e^{(2)}) + \frac{k^2 u^2}{c^2} \sin^2 \Theta 4\pi x_e^{(1)} \varepsilon^{(2)l} \right|^2 + \\ &+ \frac{k^2 T_i^{(2)}}{\pi \omega} \operatorname{Im} x_i^{(2)} \left| b(4\pi x_e^{(1)} + 4\pi x_e^{(2)}) + \frac{k^2 u^2}{c^2} \sin^2 \Theta 4\pi x_e^{(2)} (\varepsilon^{(1)l} - 1) \right|^2 + \\ &+ \frac{k^2 T_e^{(1)}}{\pi \omega'} \operatorname{Im} x_e^{(1)} \left| b(1 + 4\pi x_i^{(1)} + 4\pi x_i^{(2)}) + \frac{k^2 u^2}{c^2} \sin^2 \Theta 4\pi x_i^{(1)} \varepsilon^{(2)l} \right|^2 + \\ &+ \frac{k^2 T_e^{(2)}}{\pi \omega} \operatorname{Im} x_e^{(2)} \left| b(1 + 4\pi x_i^{(1)} + 4\pi x_i^{(2)}) + \frac{k^2 u^2}{c^2} \sin^2 \Theta (1 + 4\pi x_i^{(2)}) (\varepsilon^{(1)l} - 1) \right|^2 \left. \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\epsilon^{(1)l}$ и $\epsilon^{(2)l}$ — продольная диэлектрическая проницаемость пучка и плазмы:

$$\epsilon^l = 1 + 4\pi\kappa_e + 4\pi\kappa_i = 1 + (1/k^2 R_{De}^2) [1 - J_+(\beta_e)] + (1/k^2 R_{Di}^2) [1 - J_+(\beta_i)];$$

$R_{De, i}$ — дебаевский радиус электронов и ионов, Θ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{u} , $\beta_\alpha = (\omega/k) \sqrt{m_\alpha / T_\alpha}$ и функция $J_+(\beta)$ определена следующим образом:

$$J_+(\beta) = \beta e^{-\beta^2/2} \int_0^\beta e^{x^2/2} dx - i \sqrt{\pi/2} \beta e^{-\beta^2/2}. \quad (12)$$

Индекс (1) относится к пучку, индекс (2) — к покоящейся плазме. В величинах, определяющих пучок, вместо ω должно стоять $\omega' = \omega - \mathbf{k}\mathbf{u}$.

Уравнение $b(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u}) = 0$ определяет спектр поперечных волн в плазме при наличии пучка, причем

$$b = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \frac{\omega_{Le}^{(1)2}}{c^2} J_+^{(1)}(\beta_e) - \frac{\omega_{Le}^{(2)2}}{c^2} J_+^{(2)}(\beta_e) - \frac{\omega_{Li}^{(1)2}}{c^2} J_+^{(1)}(\beta_i) - \frac{\omega_{Li}^{(2)2}}{c^2} J_+^{(2)}(\beta_i). \quad (13)$$

Когда скорость пучка $\mathbf{u} \equiv 0$, формула (11) переходит в выражение (20) работы [2].

Выше мы предполагали, что скорость пучка \mathbf{u} , а также тепловые скорости электронов и ионов v_e и v_i значительно меньше скорости света.

3. Исследование выражения (10) в общем виде несколько громоздко; поэтому для изучения эффектов, связанных с поперечными волнами, ограничимся рассмотрением электронного дрейфа в плазме.

В этом случае выражение (11) значительно упрощается: $n_i^{(1)} = n_e^{(2)} = 0$. Тогда, подставляя в (8) корреляционную функцию из (11) для дифференциального коэффициента рассеяния, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma(\omega)}{d^2\sigma(0)} &= (k^2 R_{Di}^2 + 2)^2 \{1 + \sqrt{m_e/m_i} (1 + k^2 R_{Di}^2)\}^{-1} \times \\ &\times \left| \left(\frac{\omega^2}{k^2 c^2} - 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 c^2} J_+(\beta_e) - \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 c^2} J_+(\beta_i) \right) \left[k^2 R_{Di}^2 + \frac{T_i}{T_e} (1 - J_+(\beta_e)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - J_+(\beta_i)) \right] + \frac{u^2 \sin^2 \Theta}{c^2 k^2 R_{De}^2} (1 - J_+(\beta_e)) (k^2 R_{Di}^2 + 1 - J_+(\beta_i)) \right|^{-2} \times \\ &\times \left\{ |1 - J_+(\beta_e)|^2 |k^2 R_{Di}^2 + 1 - J_+(\beta_i)|^2 \frac{u^2}{c^2} \frac{1}{k^2 R_{Di}^2} \left(\frac{v_i^2}{c^2} \frac{1}{k^2 R_{Di}^2} e^{-\beta_i^2/2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{v_e^2}{c^2} \frac{1}{k^2 R_{De}^2} \frac{v_i}{v_e} e^{-\beta_e^2/2} \right) + \left| \frac{\omega^2}{k^2 c^2} - 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 c^2} J_+(\beta_e) - \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 c^2} J_+(\beta_i) \right|^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{T_i^2}{T_e^2} e^{-\beta_i^2/2} |1 - J_+(\beta_e)|^2 + \frac{v_i}{v_e} e^{-\beta_e^2/2} |k^2 R_{Di}^2 + 1 - J_+(\beta_i)|^2 \right) \right\} \Bigg|_{\substack{\omega = \Delta\omega \\ \mathbf{k} = \mathbf{q}}} \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\beta_e = \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{k} \sqrt{m_e/T_e}.$$

Мы нормировали коэффициент рассеяния на коэффициент при $\Delta\omega=0$ в отсутствие дрейфа $\mathbf{u}=0$ и при равных температурах $T_i=T_e$:

$$d^2\sigma(0) = \frac{2\sqrt{2}\pi (e^2/m_e c^2)^2 n_0 (1 - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi) [1 + \sqrt{m_e/m_i} (1 + k^2 R_{Di}^2)]}{k v_i (2 + k^2 R_{Di}^2)^2} d\omega d\Omega. \quad (15)$$

а) Рассмотрим рассеяние электромагнитных волн при условии $\mathbf{u} \parallel \mathbf{q}$, когда разностный волновой вектор $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ параллелен скорости пучка (рис. 2). В этом случае формула (14) дает

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma(\omega)}{d^2\sigma(0)} &= \frac{(2 + k^2 R_{Di}^2)^2}{1 + \sqrt{m_e/m_i} (1 + k^2 R_{Di}^2)} \times \\ & \left\{ [(T_i/T_e)^2 |1 - J_+(\beta_e)|^2 e^{-\beta_e^2/2} + (v_i/v_e) e^{-\beta_e^2/2} |k^2 R_{Di}^2 + \right. \\ & + 1 - J_+(\beta_i)|^2 |k^2 R_{Di}^2 + (T_i/T_e) [1 - J_+(\beta_e)] + 1 - J_+(\beta_i)|^{-2} + \\ & + (u^2/c^2 k^2 R_{De}^2) |1 - J_+(\beta_e)|^2 |k^2 R_{Di}^2 + 1 - J_+(\beta_i)|^2 [(v_i^2/c^2 k^2 R_{Di}^2) e^{-\beta_e^2/2} + \\ & + (v_e^2 v_i/c^2 k^2 R_{De}^2 v_e) e^{-\beta_e^2/2}] |\omega^2/k^2 c^2 - 1 - (\omega_{Le}^2/k^2 c^2) \times \\ & \times J_+(\beta_e) - (\omega_{Li}^2/k^2 c^2) J_+(\beta_i)|^{-2} |k^2 R_{Di}^2 + (T_i/T_e) [1 - J_+(\beta_e)] + \\ & \left. + 1 - J_+(\beta_i)|^{-2} \right\}_{\omega=\Delta\omega, \mathbf{k}=\mathbf{q}}. \quad (16) \end{aligned}$$

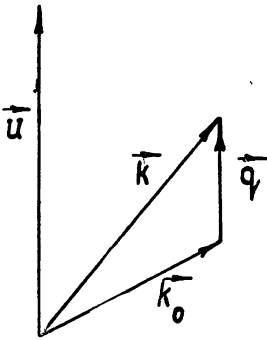


Рис. 2.

В выражении (16) легко видеть влияние плазменных волн на рассеяние. В самом деле, знаменатель первого члена в (16) есть дисперсионное соотношение для продольных волн, распространяющихся вдоль пучка:

$$\begin{aligned} k^2 R_{Di}^2 + \frac{T_i}{T_e} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega - ku}{kv_e} \right) \right] + \\ + 1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_i} \right) = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

При некотором $u = u_{кр} > v_i$ мнимая часть в (17) меняет знак и продольные волны становятся неустойчивыми. При $u < u_{кр}$ (17) достигает минимума в области действительных ω , в частности, в неизотермической плазме $T_e \gg T_i$ при $\omega \sim k \sqrt{T_e/m_i}$. При стремлении $T_e \rightarrow T_i$ минимум смещается в область $\omega > k \sqrt{T_e/m_i}$, но всегда остается в области $\omega < ku \leq ku_{кр}$, когда скорость пучка стремится к критической скорости.

Влияние поперечных волн на рассеяние полностью связано с наличием второго члена в (16). Если формально положить $c \rightarrow \infty$, то второй член в (16) исчезает. Однако фактически в (16) скорость света входит в комбинации $a = v^2/c^2 k^2 R_D^2$, где v — скорость пучка, либо тепловая скорость электронов или ионов, а R_D — дебаевский радиус электронов или ионов. Ясно, что влияние поперечных волн может быть существенным при больших значениях $a \gg 1$. При заданных параметрах плазмы это условие всегда будет выполняться в области достаточно больших длин волн. Для плазмы в лабораторных условиях при плотностях $N \sim 10^{14} \div$

$\div 10^{15}$ эл.см⁻³ это условие может реализоваться уже в сантиметровом диапазоне волн; для ионосферы ($N < 3 \cdot 10^6$ см⁻³)—при $\lambda > 1$ км, в солнечной короне ($N < 3 \cdot 10^8$ см⁻³)—при $\lambda > 100$ м.

Кроме того, в знаменатель второго члена в (16) наряду с (17) входит величина

$$\frac{\omega^2}{k^2 c^2} - 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 c^2} J_+ \left(\frac{\omega'}{k v_e} \right) - \frac{\omega_{Li}^2}{k^2 c^2} J_+ \left(\frac{\omega}{k v_i} \right) = 0, \quad (18)$$

равенство которой нулю определяет спектр поперечных волн, распространяющихся вдоль пучка. При $\omega = ku$ выражение (18) достигает минимума, что связано с возможностью распространения низкочастотных поперечных волн в этой области частот [3].

Тогда сечение рассеяния (16) наряду с пиком в области частот ионного звука $\Delta\omega = k \sqrt{T_e/m_i}$ будет достигать максимума при $\Delta\omega = ku$. Величина этого максимума при условиях

$$\frac{\omega_{Li}^2}{q^2 c^2} \gg 1, \quad 1 \gg \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{5/2} \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \quad (19)$$

равна

$$\frac{d^2\sigma(qu)}{d^2\sigma(0)} = \frac{4}{|1 + T_i/T_e - J_+(u/v_i)|^2} \left\{ \frac{T_i^2}{T_e^2} e^{-u^2/2v_i^2} + \frac{v_i^2}{v_e^2} |1 - J_+(u/v_i)|^2 + \frac{u^2}{v_e^2} \frac{v_i}{v_e} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^2 \frac{|1 - J_+(u/v_i)|^2}{|J_+(u/v_i)|^2} \right\} \quad (20)$$

и может быть значительно больше единицы в некоторой области скоростей дрейфа вблизи ионной тепловой скорости:

$$v_i \sim u \leq \sqrt{T_e/m_i} < u_{кр}. \quad (21)$$

При этом величина первых двух членов в (20) значительно меньше последнего; тем самым, вклад продольных волн в сечение рассеяния значительно меньше вклада поперечных.

Условия (19) ограничивают возможные значения q сверху. Это ограничение может быть выполнено для малого смещения частоты $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. Тогда для волнового вектора q получим

$$|q| = (2\omega_0/c) \sin(\vartheta/2). \quad (22)$$

Используя (22), из неравенства (19) найдем ограничение на угол рассеяния

$$\vartheta \ll \sqrt{m_e/m_i}. \quad (23)$$

Таким образом учет поперечных плазменных волн приводит в рассматриваемом случае к появлению дополнительной линии с $\Delta\omega = ku$ при рассеянии под малыми углами.

б) Перейдем к рассмотрению случая, когда разностный волновой вектор q направлен перпендикулярно скорости пучка u (рис. 3). При этом $ku = 0$, $\sin \theta = 1$ и выражение (14) преобразуется к виду

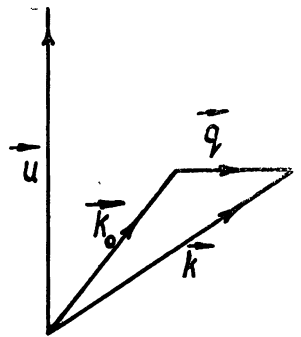


Рис. 3.

$$\frac{d^2\sigma(\omega)}{d^2\sigma(0)} = (2 + q^2 R_{Di}^2)^2 \{1 + \sqrt{m_e/m_i} (1 + q^2 R_{Di}^2)\}^{-1} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ |\Delta\omega^2/\omega_{Li}^2 - q^2c^2/\omega_{Li}^2 - (m_i/m_e) J_+(\beta_e) - J_+(\beta_i) \} \times \\
& \times \{ q^2R_{Di}^2 + (T_i/T_e) [1 - J_+(\beta_e)] + 1 - J_+(\beta_i) \} + (m_i u^2/m_e v_e^2) [1 - J_+(\beta_e)] \times \\
& \times [1 + q^2R_{Di}^2 - J_+(\beta_i)]^{-2} [|1 - J_+(\beta_e)|^2 |1 + q^2R_{Di}^2 - J_+(\beta_i)|^2 \times \\
& \times (m_i/m_e) (u^2/v_e^2) (e^{-\beta_i^2/2} + (m_i v_i/m_e v_e) e^{-\beta_e^2/2}) + |\Delta\omega^2/\omega_{Li}^2 + q^2c^2/\omega_{Li}^2 - \\
& - (m_i/m_e) J_+(\beta_e) - J_+(\beta_i)|^2 [(T_i^2/T_e^2) e^{-\beta_i^2/2} |1 - J_+(\beta_e)|^2 + \\
& + (v_i/v_e) e^{-\beta_e^2/2} |1 + q^2R_{Di}^2 - J_+(\beta_i)|^2] \}.
\end{aligned} \quad (24)$$

Равенство нулю величины, стоящей в знаменателе (24):

$$\begin{aligned}
& [\omega^2/\omega_{Li}^2 - k^2c^2/\omega_{Li}^2 - (m_i/m_e) J_+(\beta_e) - J_+(\beta_i)] [k^2R_{Di}^2 + (T_i/T_e)(1 - J_+(\beta_e)) + \\
& + 1 - J_+(\beta_i)] + (m_i/m_e) (u^2/v_e^2) [1 - J_+(\beta_e)] [1 + k^2R_{Di}^2 - J_+(\beta_i)] = 0,
\end{aligned} \quad (25)$$

определяет спектр волн в плазме, распространяющихся под углом $\pi/2$ к пучку. При этом вектор электрического поля \mathbf{E} лежит в плоскости векторов \mathbf{k} , \mathbf{u} и имеет составляющую, параллельную скорости пучка. Такие волны могут быть неустойчивы. В работе [7] приведены коэффициенты нарастания для волн (25) в определенных областях спектра. Однако в данной постановке задачи о рассеянии представляет интерес граница наступления неустойчивости, так как мы ограничиваемся рассмотрением только устойчивой плазмы.

Проанализируем выражение (24) в области частот $\beta_e, \beta_i \ll 1$. Разлагая функции $J_+(\beta_i)$ и $J_+(\beta_e)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми степенями, из уравнения (25) получим

$$\begin{aligned}
\beta_i = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{k^2c^2}{\omega_{Li}^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} + k^2R_{Di}^2 \right) - \frac{m_i}{m_e} \frac{u^2}{v_e^2} (1 + k^2R_{Di}^2) \right\} \times \\
\times \left\{ \left(1 + \frac{m_i}{m_e} \frac{v_i}{v_e} \right) \left(1 + \frac{T_i}{T_e} + k^2R_{Di}^2 \right) + \frac{m_i}{m_e} \frac{u^2}{v_e^2} \right\}^{-1}.
\end{aligned} \quad (26)$$

При выводе (26) предполагалось $m_i v_i/m_e v_e \gg k^2c^2/\omega_{Li}^2$. Тогда с ростом u при

$$\frac{u_{кр}^2}{c^2} = k^2R_{De}^2 \frac{1 + T_i/T_e + k^2R_{Di}^2}{1 + k^2R_{Di}^2} \quad (27)$$

мнимая часть ω меняет знак и плазма становится неустойчивой. Если u равно $u_{кр}$, то выражение (25) имеет корень $\omega = 0$. Приравняем нулю действительную и мнимую части уравнения (25) и разрешим их относительно u^2 . Тогда получим

$$u^2 = y_1(\omega) = y_2(\omega), \quad (28)$$

где $y_1(\omega)$ и $y_2(\omega)$ — функции от ω и параметров плазмы, явный вид которых легко получить из (25). Графическое исследование соотношения (28) показывает, что $y_1(\omega)$ и $y_2(\omega)$ нигде не пересекаются в области $y_{1,2} > 0$. Таким образом можно показать, что корень $\omega = 0$ является единственным в области действительных ω .

Для сечения рассеяния (24) при $\beta_i, \beta_e \ll 1$ и $q^2R_{Di}^2 \ll 1$ будем иметь

$$\frac{d^2\sigma(\omega)}{d^2\sigma(0)} = \left\{ 2 \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^2 \frac{v_i u^3}{v_e^3} + \left[\frac{v_i}{v_e} + \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{q^2 c^2}{\omega_{Li}^2} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \beta_e^2 \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^2 \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \left[\frac{q^2 c^2}{\omega_{Li}^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) - \frac{m_i}{m_e} \frac{u^2}{v_e^2} \right]^2 + \frac{\pi}{2} \beta_i^2 \left[\left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 + \frac{m_i}{m_e} \frac{v_i}{v_e} \right) + \frac{m_i}{m_e} \frac{u^2}{v_e^2} \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (29)$$

При $u \rightarrow u_{кр}$ (т. е. при $\beta_i \rightarrow 0$) сечение рассеяния стремится к бесконечности как $1/\beta_i^2$. Это ведет к расходимости полного сечения

$$\sigma_{полн} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\sigma(\omega) \rightarrow \infty \quad (u \rightarrow u_{кр}). \quad (30)$$

Таким образом, учет поперечных волн приводит в рассматриваемом случае к появлению полюса второго порядка в дифференциальном сечении рассеяния бесстолкновительной плазмы на частоте $\omega = 0$ при приближении скорости дрейфа к критически неустойчивой.

В работе [5] было показано, что неустойчивость продольных волн, возникающая при наличии в плазме пучка, приводит к аномальному рассеянию при приближении скорости пучка к критической (явление, аналогичное критической опалесценции). Существенный момент заключался в том, что критическая скорость пучка для продольных волн всегда больше тепловой скорости ионов.

Учет поперечных волн приводит к качественно новому результату: аномальное рассеяние в бесстолкновительной плазме может иметь место при скорости пучка, меньшей и даже много меньшей тепловой скорости ионов, если характерный размер системы $L \gtrsim \lambda_{кр}$ больше или порядка критической длины волны, определяемой из соотношения (27).

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность В. П. Силину за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. N. Rosenbluth, N. Rostoker, Phys. fluids, **5**, 776 (1962).
2. А. И. Ахиезер, А. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, **41**, 664 (1961).
3. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред, Атомиздат, М., 1961.
4. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, ДАН СССР, **145**, 764 (1962).
5. S. Ichimaru, D. Pines, N. Rostoker, Phys. Rev. Lett., **8**, 231 (1962).
6. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 1093 (1962).
7. В. Г. Маханьков, А. А. Рухадзе, Ядерный синтез, **2**, 4 (1962).
8. E. E. Salpeter, Phys. Rev., **120**, 1523 (1960).
9. А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 469 (1963).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
11 июня 1963 г.

ON THE ELECTROMAGNETIC WAVES SCATTERING IN NON-EQUILIBRIUM PLASMA

N. V. Sholokhov

The influence of plasma transverse waves upon the scattering of electromagnetic waves by a plasma-beam system is investigated.

СЖАТИЕ ИМПУЛЬСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

П. В. Блюх

Рассматривается сжатие импульса частотно-модулированного сигнала в диспергирующей среде со случайными неоднородностями. Показано, что при длине трассы больше некоторого критического значения импульс всегда расплывается. Полученные результаты применяются при исследовании прохождения радиосигнала через ионосферу.

Длительность импульса излучения, проходящего через диспергирующую среду, вообще говоря, возрастает: импульс расплывается. Этот вопрос подробно рассмотрен в книге Гинзбурга [1] и в ряде других работ (соответствующую литературу см. в [1]).

Однако на заданной длине трассы можно не только предотвратить расплывание импульса, но и добиться его сокращения, если специальным образом подобрать исходный сигнал. Известный в радиолокации метод компрессии импульса [2] может служить примером такого сжатия; в этом случае роль диспергирующей среды играет цепочка фильтров. Представляет интерес выяснить возможности сжатия импульса в плазме, например, в ионосфере. При этом, однако, должен быть выяснен вопрос о влиянии случайных неоднородностей. В работе Широковой [3] показано, что из-за своеобразной дисперсии, возникающей вследствие рассеяния излучения на неоднородностях, импульс расплывается, даже если коэффициент преломления не зависит от частоты.

При распространении специально сформированного сигнала в диспергирующей среде со случайными неоднородностями возникают два противоположных процесса: за счет дисперсии импульс сжимается, за счет неоднородностей — расплывается. В настоящей заметке показано, что на трассе с длиной больше критической всегда преобладает процесс расплывания, и сжатие импульса становится невозможным.

1. СЖАТИЕ ИМПУЛЬСА В ОДНОРОДНОЙ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

Интенсивность сигнала, распространяющегося в диспергирующей среде, может быть представлена в виде

$$|u(t, z)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{-i(\omega t - kz + \psi(\omega))} d\omega \right|^2. \quad (1)$$

Здесь $G(\omega) e^{-i\psi(\omega)}$ — комплексная спектральная плотность исходного сигнала kz — набег фазы на длине трассы z . Пренебрегая поглощением в среде, рассмотрим достаточно узкополосный сигнал с равномерной спектральной плотностью вблизи средней частоты ω_0 :

$$\begin{aligned} G(\omega) &= G_0 & (\omega_0 - \Omega \leq \omega \leq \omega_0 + \Omega), \\ G(\omega) &= 0 & (\omega > \omega_0 + \Omega, \quad \omega < \omega_0 - \Omega), \\ & & \Omega/\omega_0 \ll 1. \end{aligned}$$

Для исследования процесса деформации импульса разложим фазу экспоненты в (1) в ряд по степеням $\omega - \omega_0$, учитывая члены второго порядка. После несложных преобразований получим следующую формулу для $|u(t, z)|^2$:

$$|u(t, z)|^2 = \frac{G_0^2}{|\beta|} \left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i\eta^2} d\eta \right|^2, \quad (2)$$

$$\alpha = t + \psi'_0 - k'_0 z, \quad \beta = 1/2 [\psi'_0 - k'_0 z] \quad (\text{нулевой индекс показывает, что все производные по } \omega \text{ берутся в точке } \omega_0).$$

Прежде чем анализировать выражение (2), остановимся на полезной для дальнейших рассуждений аналогии между процессами расплывания импульса и дифракции волны на щели (рис. 1). Пусть распределение поля в плоскости щели $z=0$ задано функцией $u(x, 0)$:

$$u(x, 0) = u_0 e^{-i\Phi(x)} \quad (-a \leq x \leq +a);$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (|x| > a).$$

Здесь a — полуширина щели, $-\Phi(x)$ — изменение фазы волны по сечению (длина щели вдоль оси y предполагается бесконечной). По задан-

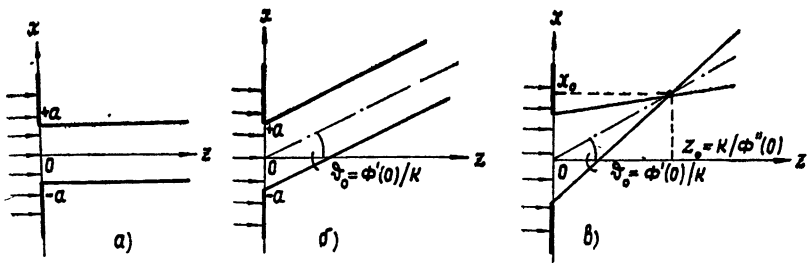


Рис. 1. Границы пучка в приближении геометрической оптики при дифракции волны на щели: а) плоская волна с фронтом, параллельным плоскости щели ($\Phi'(0) = \Phi''(0) = 0$); б) плоская волна с наклонным фронтом ($\Phi'(0) \neq 0$, $\Phi''(0) = 0$); в) сферическая волна с центром в точке (x_0, z_0) ($\Phi'(0) \neq 0$, $\Phi''(0) \neq 0$).

ной функции $u(x, 0)$ можно известным образом [4] получить выражение для дифрагированного поля в любой точке x, z . Разлагая $\Phi(x)$ в ряд по степеням x с учетом квадратичных членов, получим в зоне дифракции Френеля следующую формулу:

$$|u(x, z)|^2 = \frac{u_0^2}{\pi |\gamma|} \left| \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{i\eta^2} d\eta \right|^2, \quad (3)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{z}{k}} \left(1 + \frac{\Phi'_0}{a} \frac{z-x}{k} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Phi'_0}{a} \frac{z-x}{k} \right).$$

где $m = ka^2/2z$ — волновой параметр, $\gamma = \Phi'_0 z/k - 1$. Все производные от Φ по x берутся в точке $x=0$.

В предельном случае геометрической оптики, когда $|\gamma| m \rightarrow \infty$, интеграл в (3) будет равен 0 либо $\sqrt{\pi i}$ в зависимости от того, имеют ли

пределы интегрирования одинаковые или разные знаки. Поэтому границы пучка без учета дифракции определяются уравнениями

$$x = x^{(+)} = a + \frac{z}{k} (\Phi'_0 - a\Phi''_0); \quad (4)$$

$$x = x^{(-)} = -a + \frac{z}{k} (\Phi'_0 + a\Phi''_0),$$

а ось пучка —

$$x = x^{(0)} = \frac{x^{(+)} + x^{(-)}}{2} = z \frac{\Phi'_0}{k}. \quad (5)$$

Если фаза поля в плоскости щели имеет постоянное значение ($\Phi'_0 = \Phi''_0 = 0$), границы пучка представляют собой две параллельные прямые $x = \pm a$, а ось пучка $x = 0$ совпадает с осью z . Линейный набег фазы приводит к наклону этих прямых и оси пучка на угол $\vartheta_0 = \Phi'_0/k$, а квадратичный сдвиг Φ''_0 нарушает их параллельность (положение оси остается неизменным). При $\Phi''_0 > 0$ граничные прямые пересекаются в точке $z = z_0 = k/\Phi''_0$, $x = x_0 = z_0\Phi'_0/k$. Таким образом, за счет квадратичного набега фазы поперек щели осуществляется фокусировка пучка. В приближении геометрической оптики размеры фокального пятна равны 0, а интенсивность в фокусе (x_0, z_0) обращается в бесконечность, так как при $z = z_0$ $\gamma = z/z_0 - 1 = 0$.

Правильное значение интенсивности в фокусе и поперечный размер пятна могут быть найдены, если в формуле (3) перейти к пределу $\gamma \rightarrow 0$:

$$|u(x, z_0)|^2 = \frac{2u_0^2 \sin^2 ka (\Phi'_0/k - x/z_0)}{\pi z_0 k (\Phi'_0/k - x/z_0)^2}. \quad (6)$$

Отсюда получаем интенсивность в фокусе

$$|u_\phi(x_0, z_0)|^2 = \frac{2u_0^2 ka^2}{\pi z_0}. \quad (7)$$

Поперечный размер фокального пятна Δx (между первыми нулями интенсивности)

$$\Delta x = \frac{2\pi z_0}{ka} = \lambda \frac{z_0}{a}. \quad (8)$$

Очевидно, что фокусировка излучения имеет смысл лишь при условии $ka^2/z_0 \gg 1$, т. е. в ближней зоне излучателя. При этом $|u_\phi|^2 \gg u_0^2$ и $\Delta x \ll a$. Непосредственно по формуле (3) легко оценить дифракционное размытие границ пучка δx . Эта величина соответствует изменению пределов интегрирования на величину порядка единицы:

$$\delta x \sim a \sqrt{\frac{|\gamma|}{m}} = \sqrt{\frac{2z}{k} \left| \frac{z}{z_0} - 1 \right|}. \quad (9)$$

В случае дифракции плоской волны на щели ($\Phi''_0 = 0$, $z_0 = \infty$) величина $\delta x \sim \sqrt{\frac{2z}{k}}$ соответствует размерам первой зоны Френеля.

Возвратимся теперь к задаче о распространении импульса, заметив, что $|u(t, z)|^2$ и $|u(x, z)|^2$, согласно (2), (3), выражаются через один и тот же интеграл. Рассмотрим сначала деформацию импульса в предельном случае «геометрической оптики», когда $\Omega \sqrt{\beta} \rightarrow \infty$. Рассуждая так же, как и при анализе формулы (3), найдем границы импульса из условия $\alpha = \pm 2\Omega|\beta|$. Отсюда получаются уравнения трех прямых в плоскости t, z , определяющих начало $t_n(z)$, конец $t_k(z)$ и середину $t_0(z) = \frac{t_n + t_k}{2}$ импульса:

$$\begin{aligned} t_n &= -\psi'_0 - \Omega\psi''_0 + z(k'_0 + \Omega k''_0); \\ t_k &= -\psi'_0 + \Omega\psi''_0 + z(k'_0 - \Omega k''_0); \\ t_0 &= -\psi'_0 + zk'_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Центр импульса перемещается вдоль оси z с групповой скоростью

$$v_0 = \frac{dz}{dt_0} = \frac{1}{dk/d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0},$$

передний фронт — со скоростью

$$v_n = \frac{dz}{dt_n} = \left[\frac{d}{d\omega} \left(k + \Omega \frac{dk}{d\omega} \right) \right]_{\omega=\omega_0}^{-1},$$

а задний фронт имеет скорость

$$v_k = \frac{dz}{dt_k} = \left[\frac{d}{d\omega} \left(k - \Omega \frac{dk}{d\omega} \right) \right]_{\omega=\omega_0}^{-1}.$$

Длительность импульса $\Delta t = |t_k - t_n|$ определяется по формулам (10):

$$\Delta t = 2\Omega |\psi''_0 - zk''_0|. \quad (11)$$

Размытие границ импульса δt можно оценить из условия изменения пределов интегрирования в (2) на величину порядка единицы:

$$\delta t \sim \sqrt{|\psi''_0 - zk''_0|} = \sqrt{\Delta t / 2\Omega}. \quad (12)$$

Формулы (10) в какой-то мере правильно описывают деформацию импульса только при условии $\delta t \ll \Delta t$, которое заведомо нарушается в точке пересечения граничных прямых:

$$z = z_\phi = \psi''_0/k''_0, \quad t = t_\phi = -\psi'_0 + \frac{\psi''_0}{k''_0} k'_0 = -\psi'_0 + z_\phi/v_0.$$

Точка (z_ϕ, t_ϕ) по аналогии с фокусом линзы может быть названа точкой временной фокусировки.

Временная фокусировка (сжатие импульса) может быть реально осуществлена только при $z_\phi > 0$, $t_\phi > -\psi'_0$, что приводит к условиям

$$\psi''_0/k''_0 > 0, \quad k'_0 > 0.$$

Для определения размеров фокального пятна Δt_ϕ (минимальной длительности импульса) надо перейти в формуле (2) к пределу $\beta \rightarrow 0$:

$$|u(t, z_\phi)|^2 = 4G_0^2 \frac{\sin^2 \Omega (t + \psi'_0 - k'_0 z_\phi)}{(t + \psi'_0 - k'_0 z_\phi)^2}. \quad (13)$$

Отсюда легко находится величина максимальной интенсивности в фокусе:

$$|u(t_\phi, z_\phi)|^2 = 4G_0^2 \Omega^2. \quad (14)$$

Она, как и следовало ожидать, равна полной интенсивности всего спектра частот входного сигнала. Длительность импульса в фокусе Δt_ϕ (интервал времени между первыми нулями $u(t, z_\phi)$) равна

$$\Delta t_\phi = 2\pi/\Omega. \quad (15)$$

Согласно формулам (11) и (12), длительность сигнала на входе (при $z = 0$)

$$\Delta t_0 = 2\Omega \psi_0'', \quad (16)$$

а размытие границ

$$\delta t_0 \sim \sqrt{|\psi_0''|}.$$

Условие $\delta t_0 \ll \Delta t_0$ приводит к соотношению

$$4\Omega^2 \psi_0'' \gg 1.$$

При выполнении этого условия одновременно происходит эффективное сжатие импульса, так как $\Delta t_0/\Delta t_\phi = \frac{1}{\pi} \Omega^2 \psi_0'' \gg 1$.

На рис. 2 изображены границы импульса в плоскости (t, z) в при-

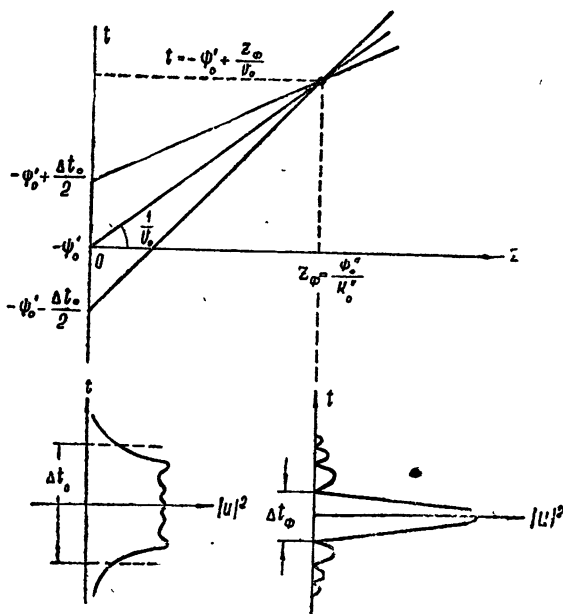


Рис. 2. Границы импульса излучения в плоскости (t, z) в приближении геометрической оптики и распределение интенсивности во времени в плоскостях $z=0$ и $z=z_\phi$.

ближении «геометрической оптики» и показано изменение интенсивности во времени в фокальной плоскости и в плоскости $z = 0$.

В данной статье мы не станем развивать дальше аналогию между распространением «лучей» в плоскости (t, z) и законами геометрической оптики, так как нашей главной задачей является исследование влияния случайных неоднородностей среды. Укажем лишь, что формально длине волны в плоскости (t, z) соответствует величина $\lambda^* = 2\pi\psi'_0/z_\phi = 2\pi k'_0$, а полуширине щели — параметр $a^* = \Omega\psi'_0$. Легко убедиться, что минимальная длительность импульса (15) может быть вычислена по обычной формуле (8) для дифракционного размытия фокального пятна линзы:

$$\Delta t_\phi \approx (\lambda^*/a^*) z_\phi = 2\pi/\Omega.$$

Так же, как и в случае обычной линзы, временная фокусировка имеет смысл, если расстояние z_ϕ соответствует в ближней зоне, т. е. если «волновой параметр»

$$m^* = 2\pi a^{*2}/\lambda^* z_\phi = \Omega^2 \psi_0^2 \quad (17)$$

достаточно велик.

2. ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НА СЖАТИЕ ИМПУЛЬСА

В работе Широковой [3] рассмотрено расплывание импульса в недиспергирующей среде со случайными неоднородностями. Следуя схеме вычислений цитируемой работы, но учитывая дисперсию, получим следующее выражение для средней интенсивности излучения:

$$\begin{aligned} \overline{|u|^2} = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_1) G(\omega_2) \exp \left\{ -\frac{8\sqrt{\pi} z^3}{l^3} \left(\frac{\overline{\mu_1^2}}{D_1^2} + \frac{\overline{\mu_2^2}}{D_2^2} \right) + \right. \\ & + \frac{32\sqrt{\pi} z^3 \sqrt{\overline{\mu_1^2 \mu_2^2}}}{l^3 D_1 D_2} \frac{1}{D_1 - D_2} \operatorname{arctg} \frac{D_1 - D_2}{2} - \\ & - i \frac{16\sqrt{\pi} z^3 \sqrt{\overline{\mu_1^2 \mu_2^2}}}{l^3 D_1 D_2} \frac{1}{D_1 - D_2} \ln \left[1 + \frac{(D_1 - D_2)^2}{4} \right] + \\ & \left. + i [\psi(\omega_2) - \psi(\omega_1) + z(k_1 - k_2) - (\omega_1 - \omega_2)t] \right\} d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\overline{\mu_i^2}$ — средний квадрат флуктуаций коэффициента преломления $n_i = n(\omega_i)$ на частоте ω_i , $D_i = 4z/k_i l^2$. Функция корреляции флуктуаций предполагается гауссовой с характерным размером неоднородностей l .

Рассматривая по-прежнему распространение достаточно узкополосного импульса, разложим показатель экспоненты в (18) в ряд по степеням

$$\nu_i = \omega_i - \omega_0,$$

пренебрегая членами третьего порядка:

$$\begin{aligned} \overline{|u|^2} = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_0 + \nu_1) G(\omega_0 + \nu_2) \times \\ & \times \exp \{ -S(\nu_1 - \nu_2)^2 + i [P(\nu_1 - \nu_2) + Q(\nu_1^2 - \nu_2^2)] \} d\nu_1 d\nu_2, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$S = \frac{\sqrt{\pi} z l \bar{\mu}_0^2}{8c^2} \left\{ \frac{2}{3} D_0^2 (n_0 + \omega_0 n'_0)^2 + \right. \\ \left. + \left[2 (n_0 + \omega_0 n'_0) + \omega_0 n_0 \frac{(\bar{\mu}_0^2)'}{\bar{\mu}_0^2} \right]^2 \right\}; \\ P = k'_0 z - t + \frac{\sqrt{\pi} z^2 \bar{\mu}_0^2}{lc} (n_0 + \omega_0 n'_0) - \psi'_0; \\ Q = \frac{1}{2} z k'_0 + \frac{\sqrt{\pi} z^2 \bar{\mu}_0^2}{lc} \left[\frac{1}{2} (n_0 + \omega_0 n'_0) \frac{(\bar{\mu}_0^2)'}{\bar{\mu}_0^2} + \right. \\ \left. + n'_0 + \frac{1}{2} \omega_0 n'_0 \right] - \frac{1}{2} \psi_0''.$$

(Все величины с нулевым индексом относятся к частоте ω_0 , дифференцирование по ω)

Далее будем рассматривать входной сигнал с амплитудой спектральной плотности

$$G(\omega) = G_0 e^{-(\omega - \omega_0)^2 / \Omega^2} = G_0 e^{-v^2 / \Omega^2}. \quad (20)$$

Такой выбор распределения спектральной плотности позволяет рассмотреть все интересующие нас физические явления и в то же время упрощает вычисление интеграла (19) по сравнению с равномерным спектром, рассматривавшимся в предыдущем параграфе.

Подставив функцию (20) в формулу (19) и произведя интегрирование, получим следующее выражение:

$$|u|^2 = \frac{\pi G_0^2}{\left[\left(\frac{1}{\Omega^2} + S \right)^2 + Q^2 - S^2 \right]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{P^2}{2\Omega^2 \left[\left(\frac{1}{\Omega^2} + S \right)^2 + Q^2 - S^2 \right]} \right\}. \quad (21)$$

Покажем прежде всего, что при отсутствии случайных неоднородностей ($\bar{\mu}_0^2 = 0$) из формулы (21) получаются те же результаты, что и в предыдущем разделе. Действительно, при этом

$$S = 0, \quad P = k'_0 z - t - \psi'_0, \quad Q = \frac{1}{2} (z k'_0 - \psi_0''),$$

центру импульса ($P = 0$) соответствует момент времени

$$t_0 = -\psi'_0 + k'_0 z,$$

а ширина импульса (на уровне $1/e$ от максимального) равна

$$\Delta t = \sqrt{2} \Omega \sqrt{\frac{1}{\Omega^4} + \frac{1}{4} (z k'_0 - \psi_0'')^2}. \quad (22)$$

Как и раньше, ширина импульса имеет минимальное значение в точке фокусировки при $z = z_\phi = \psi_0''/k_0''$. Она равна

$$\Delta t_\phi = \sqrt{2}/\Omega. \quad (23)$$

Исходная длительность импульса при $z = 0$

$$\Delta t_0 = \sqrt{2} \Omega \sqrt{\frac{1}{\Omega^4} + \frac{1}{4} (\psi_0'')^2}.$$

Если выполнено условие (17), обеспечивающее фокусировку,

$$\Delta t_0 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega \psi_0''. \quad (24)$$

Формулы (23), (24) с точностью до постоянного множителя совпадают с формулами (15), (16). Коэффициент сокращения импульса

$$K = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_\phi} = \frac{1}{2} \Omega^2 \psi_0''. \quad (25)$$

При сокращении длительности импульса в K раз во столько же раз увеличивается максимальная интенсивность сигнала, которая изменяется от $2\pi G_0^2/\psi_0''$ при $z = 0$ до $\pi G_0^2 \Omega^2$ при $z = z_\phi$.

Рассмотрим теперь влияние случайных неоднородностей. С учетом неоднородностей момент прохождения центра импульса определяется по формуле,

$$t_0 = -\psi_0' + k_0' z + z^2 \frac{\sqrt{\pi} \mu_0'^2}{lc} (n_0 + \omega_0 n_0'),$$

а ширина импульса

$$\Delta t = \sqrt{2} \Omega \left[\left(\frac{1}{\Omega^2} + S \right)^2 + Q^2 - S^2 \right]^{1/2}. \quad (26)$$

Отношение длительностей импульса в начале и в конце трассы равно

$$K = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \left[\frac{1/\Omega^4 + (\psi_0'')^2/4}{1/\Omega^4 + 2S/\Omega^2 + Q^2} \right]^{1/2}.$$

Величина K как функция Q по-прежнему имеет максимальное значение при $Q = 0$, что приводит к равенствам

$$K_{\max} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_\phi} = \left[\frac{1/\Omega^4 + (\psi_0'')^2/4}{1/\Omega^4 + 2S/\Omega^2} \right]^{1/2}; \quad (27)$$

$$\psi_0'' = z_\phi k_0'' + \frac{\sqrt{\pi} z_\phi^2}{lc} \mu_0'^2 \left[\frac{1}{2} (n_0 + \omega_0 n_0') \frac{\mu_0'^2}{\mu_0^2} + n_0' + \frac{1}{2} \omega_0 n_0'' \right]. \quad (28)$$

Условиями эффективности фокусировки $K_{\max} \gg 1$ являются неравенства

$$\psi_0'' \gg 2/\Omega^2; \quad (\psi_0'')^2 \gg 8S/\Omega^2. \quad (29)$$

Первое из них совпадает с неравенством (17), а второе — показывает, когда неоднородности не мешают фокусировке.

При наличии неоднородностей ($S \neq 0$) коэффициент сжатия им-

пульса уменьшается, т. е. сфокусированный импульс всегда шире, чем в однородной среде. Из условия $K_{\max} = 1$ можно найти критическую длину трассы $z_{\text{кр}}$, при которой сжатие импульса становится невозможным:

$$S(z_{\text{кр}}) = \frac{1}{8} \Omega^2 (\psi_0'')^2. \quad (30)$$

Явное выражение для $z_{\text{кр}}$ в общем случае оказывается слишком громоздким (оно определяется из уравнения третьей степени). Мы выпишем его только для дальней зоны, когда $D_0^2 = 16 z^2 c^2 / l^4 \omega_0^2 n_0^2 \gg 1$. Кроме того, будем считать, что в формуле (27) можно пренебречь членом с $\bar{\mu}_0^2$. При этих условиях

$$z_{\text{кр}} = \frac{3}{32} \Omega^2 k_0''^2 \frac{l^3 \omega_0^2 n_0^2}{\sqrt{\pi} \bar{\mu}_0^2 (n_0 + \omega_0 n_0')^2}. \quad (31)$$

3. СЖАТИЕ ИМПУЛЬСА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ РАДИОСИГНАЛА ЧЕРЕЗ ИОНОСФЕРУ

Ионосфера представляет собой неоднородную среду со сложным законом изменения коэффициента преломления по высоте. В настоящей статье мы не будем производить точных расчетов, а лишь проиллюстрируем применение выведенных выше формул на грубой модели ионосферы в виде плоского слоя с постоянной электронной плотностью. Толщину слоя h примем равной 300 км, а плотность электронов $N = 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$.

Пренебрегая влиянием магнитного поля Земли и затуханием, используем известное выражение для коэффициента преломления:

$$n = (1 - \omega_k^2 / \omega^2)^{1/2}, \quad (32)$$

где $\omega_k = (4\pi e^2 N / m)^{1/2} = 8 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{сек}}$ — критическая круговая частота.

Средний квадрат флуктуаций коэффициента преломления, связанный в данном случае с флуктуациями плотности $\delta N = (\overline{\Delta N^2})^{1/2} / N$, равен

$$\bar{\mu}^2 = \frac{1}{4n^2} \frac{\omega_k^4}{\omega^4} \delta N^2. \quad (33)$$

Численные значения δN и характерного размера неоднородностей l , которые понадобятся нам в дальнейшем, выберем так:

$$\delta N = 10^{-2}; \quad l = 200 \text{ м.}$$

Эти цифры лежат в пределах наиболее вероятных значений δN и l для слоев E и F , приведенных в книге Альперта [5]. Для того, чтобы удобным образом ввести параметры, от которых зависит сжатие импульса, наряду со спектральной плотностью нам понадобится временное представление исходного сигнала:

$$G(\omega) = G_0 e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{(1/\Omega^2 + i\psi_0''/2)}};$$

$$u(t) = \left(\frac{\pi}{\frac{1}{\Omega^2} + i\frac{\psi_0''}{2}} \right)^{1/2} G_0 \exp \left\{ \frac{t^2}{4\Omega^2 (1/\Omega^2 + \psi_0''/4)} - \right.$$

$$\left. - it \left[\omega_0 - \frac{\psi_0'' t}{8 (1/\Omega^2 + \psi_0''/4)} \right] \right\}.$$

В выражении для $G(\omega)$ мы положили $\psi_0 = \psi'_0 = 0$, так как коэффициент сжатия K не зависит от этих величин; $u(t)$ записана с точностью до постоянной фазы, не играющей никакой роли.

Пользуясь формулами (32) и (33), вычислим функции S , P , Q , входящие в (21):

$$S = \frac{\sqrt{\pi} h \omega_k^4 \delta N^2}{16 c^2 n_0^2 \omega_0^4} \left[\frac{1}{3} D_0^2 + 2 \left(1 - \frac{2}{n_0} \frac{\omega_k^2}{\omega_0^2} \right)^2 \right];$$

$$P = \frac{h}{cn_0} - t + \frac{\sqrt{\pi} h^2 \omega_k^4 \delta N^2}{4 lcn_0^3 \omega_0^4};$$

$$Q = -\frac{1}{2} \left(\frac{h\omega_k^2}{cn_0^3 \omega_0^3} + \psi_0'' \right) - \frac{\sqrt{\pi} h^2 \omega_k^4 \delta N^2}{2 lcn_0^5 \omega_0^5} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_k^2}{\omega_0^2} \right).$$

Введем безразмерные параметры, от которых зависит коэффициент сжатия: $x = \omega_k/\omega_0$, $y = \Omega/\omega_0$. В дальнейшем исключается из рассмотрения случай, когда несущая частота близка к критической частоте ионосферного слоя, т. е. можно считать $x < 1$, $n_0 \sim 1$. Кроме несущей частоты, исходный сигнал $u(t)$, имеющий вид частотно-модулированного колебания, характеризуется относительным изменением частоты $\Delta\omega/\omega_0 = \Omega/2\omega_0 = y/2$ за время импульса $\Delta t_0 = \sqrt{2\Omega} \sqrt{1/\Omega^4 + \psi_0''^2/4}$. Так как ψ_0'' однозначно определяется из условия фокусировки $Q = 0$:

$$\psi_0'' = -\frac{h\omega_k^2}{cn_0^3 \omega_0^3} - \frac{\sqrt{\pi} h^2 \omega_k^4}{lcn_0^5 \omega_0^5} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_k^2}{\omega_0^2} \right) \delta N^2,$$

длительность импульса Δt_0 и глубина частотной модуляции являются эквивалентными параметрами начального сигнала. Формула для коэффициента сжатия и условие фокусировки с безразмерными параметрами имеют вид

$$K = \left\{ \frac{1 + 1,6 \cdot 10^9 x^2 y^4 (1-x^2)^{-3} [1 + 2,6 \cdot 10^{-1} x^2 (1-3x^2/2) (1-x^2)^{-1}]^2}{1 + 9,5 \cdot 10 x^2 y^2 (1-x^2)^{-2} [4,2 \cdot 10^3 x^2 (1-x^2)^{-1} + 2(1-2x^2(1-x^2)^{-1/2})^2]} \right\}; \quad (34)$$

$$\psi_0'' = -1,25 \cdot 10^{-11} x^3 (1-x^2)^{-3/2} \left[1 + 2,6 \cdot 10^{-1} x^2 \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{3}{2} x^2 \right) (1-x^2)^{-1} \right]. \quad (35)$$

При работе на достаточно высоких частотах ($x \ll 1$) выражения для K и ψ_0'' упрощаются:

$$K \approx \left[\frac{1 + 1,6 \cdot 10^9 x^2 y^4}{1 + 9,5 \cdot 10 x^2 y^2 (4,2 \cdot 10^3 x^2 + 2)} \right]^{1/2}; \quad (36)$$

$$\psi_0'' \approx -1,25 \cdot 10^{-11} x^3. \quad (37)$$

На рис. 3 изображены построенные по формуле (36) кривые $y=f(x)$, соответствующие трем значениям $K = 1; 10$. Как видно из приведенных данных, сжатие импульса в $10 \div 10^2$ раз (и соответствующее повышение мощности) требует изменения частоты сигнала за время импульса на десятки процентов.

Для расчета исходной длительности импульса можно воспользоваться формулой (24), которая с безразмерными параметрами x , y имеет вид

$$\Delta t_0 = 1,8 \cdot 10^{-8} \frac{x}{y} \sqrt{1 + 1,6 \cdot 10^9 x^2 y^4} \text{ сек.} \quad (38)$$

В качестве иллюстрации на рис. 4 построены графики $\Delta t_0 = f(K)$ при $x = 10^{-1}$ ($\lambda = 2,4 \text{ м}$) и $x = 10^{-2}$ ($\lambda = 0,24 \text{ м}$). С уменьшением длины

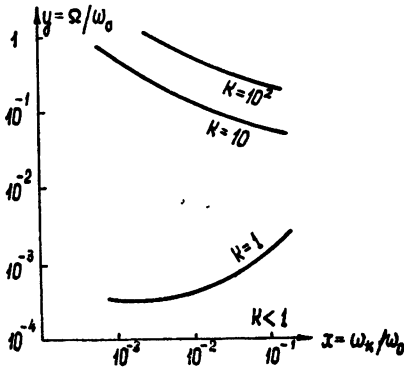


Рис. 3. Кривые равных значений $K = \text{const}$ в плоскости x , y .

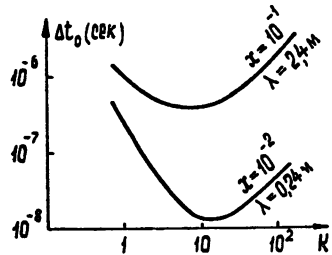


Рис. 4. Зависимость исходной длительности импульса Δt_0 от коэффициента сжатия K при разных длинах волн.

волны исходная длительность импульса становится столь малой, что практическое использование ионосферной фокусировки оказывается весьма затруднительной.

Мы рассмотрели временную фокусировку радиоимпульса при прохождении его через всю толщу ионосферы. Само собой разумеется, что такой же эффект будет иметь место и при отражении радиоволны от ионосферы. В этом случае специальным подбором закона частотной модуляции исходного сигнала также можно достичь сокращения длительности ответного импульса.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, ГИТТЛ, М., 1960.
2. Я. Д. Ширман, Авторское свидетельство № 146803, 1956; С. Е. Соок, Proc. IRE, 48, 310 (1960).
3. Т. А. Широкова, Акуст. ж., 9, 101 (1963).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, ГИТТЛ, М., 1960.
5. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.

Институт радиопизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
8 июля 1963 г.

THE COMPRESSION OF RADIATION IMPULSE IN DISPERSIVE MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

P. V. Bliokh

Impulse compression of frequency-modulated signal is considered in a dispersive medium with random inhomogeneities. It is shown that when the propagation path exceeds some critical value, impulse always broadens completely and vanishes. The results obtained are used when investigating the passage of radio signal through ionosphere.

О СООТНОШЕНИЯХ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЧНО-КОГЕРЕНТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ*

Л. С. Долин

Получены соотношения взаимности для корреляционных функций случайного стационарного электромагнитного поля. Рассмотрены некоторые возможности использования этих соотношений в задачах дифракции случайных полей.

В последнее время появилось значительное число работ (см., например, [1-6]), посвященных строгой корреляционной теории частично-когерентного электромагнитного поля. В основу этой теории положены тензорные функции корреляции, введенные впервые Вольфом [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \langle E_j(\mathbf{r}_1, t + \tau) E_k^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle; \\ J_{jk}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \langle j_j(\mathbf{r}_1, t + \tau) j_k^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Скобки означают здесь усреднение по времени; величины в скобках есть комплексные аналитические функции [10], соответствующие действительным функциям E_j^r, j_j^r — проекциям векторов поля E^r и тока j^r на базисные векторы e_j некоторой ортогональной системы координат.

Для корреляционных функций вида (1) оказывается возможным [2-5] получить линейную систему дифференциальных уравнений, эквивалентную системе уравнений Максвелла, и тем самым дать строгую математическую формулировку проблемы излучения и распространения случайных полей непосредственно в терминах усредненных по времени квадратичных величин. Переход к такому описанию, разумеется, не приводит к каким-то существенно новым результатам, которые не могли бы быть получены обычными методами; однако с методической точки зрения он, несомненно, заслуживает внимания.

В связи с этим представляет интерес провести также соответствующее обобщение ряда соотношений и принципов, сформулированных ранее для регулярных полей, таких как соотношения взаимности и принцип двойственности, теорема единственности и т. д. Из этих обобщений в известном смысле нетривиальным является переход к корреляционной формулировке принципа взаимности. Этому вопросу и посвящена настоящая статья.

1. Покажем, что электродинамический принцип взаимности может быть сформулирован в виде соотношений, связывающих не сами поля и токи, а непосредственно их корреляционные функции.

Будем рассматривать два случайных стационарных во времени поля $E^r(\mathbf{r}, t)$ и $\tilde{E}^r(\mathbf{r}, t)$, соответствующих двум различным распределениям источников — сторонних электрических токов $j^r(\mathbf{r}, t)$ и $\tilde{j}^r(\mathbf{r}, t)$. Тензоры

* Результаты работы доложены на сессии НТОР и Э им. А. С. Попова, Москва, май, 1963 г

корреляции этих полей и токов обозначим, соответственно, через ε_{jk} , $\tilde{\varepsilon}_{jk}$ и J_{jk} , \tilde{J}_{jk} .

Интересующие нас соотношения в принципе могут быть получены непосредственно из системы дифференциальных уравнений для поля корреляции (как следствие линейности этих уравнений); однако мы ограничимся здесь более простым выводом, основанным на теореме взаимности для регулярных полей.

Представим корреляционные тензоры J_{ik} и ε_{ik} в виде

$$J_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_0^{\infty} J_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \int_0^{\infty} \varepsilon_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) e^{i\omega\tau} d\omega;$$

$$J_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} j_i(T, \mathbf{r}_1, \omega) j_k^*(T, \mathbf{r}_2, \omega); \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} E_i(T, \mathbf{r}_1, \omega) E_k^*(T, \mathbf{r}_2, \omega), \quad (4)$$

где $j_i(T, \mathbf{r}, \omega)$ и $E_i(T, \mathbf{r}, \omega)$ — фурье-трансформанты комплексных аналитических функций $j_i(T, \mathbf{r}, t)$ и $E_i(T, \mathbf{r}, t)$, соответствующих току

$$j_i'(T, \mathbf{r}, t) = \begin{cases} j_i(\mathbf{r}, t) & \text{при } -T < t < T \\ 0 & \text{при } |t| \geq T \end{cases}$$

и полю $E_i'(T, \mathbf{r}, t)$, которое создается этим током*. Введем, далее, вспомогательное поле $E_i(\mathbf{s}/\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t}$, создаваемое элементарным электрическим током с плотностью $\mathbf{j}_0(\mathbf{s}, t) = e_i \delta(\mathbf{s} - \mathbf{r}) e^{i\omega t}$. Как следует из обычной теоремы взаимности,

$$E_i(T, \mathbf{r}, \omega) = \int_V j_j(T, \mathbf{s}, \omega) E_{ji}(\mathbf{s}/\mathbf{r}, \omega) dV_s, \quad (5)$$

где $E_{ji} = e_j E_i$ и интегрирование производится по всему объему, занятому источниками.

Подставляя (5) в (4), имеем

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \iint_V dV_{s_1} dV_{s_2} J_{j_1}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \omega) E_{j_1}(\mathbf{s}_1/\mathbf{r}_1, \omega) E_{i_k}^*(\mathbf{s}_2/\mathbf{r}_2, \omega). \quad (6)$$

Аналогично

$$\tilde{\varepsilon}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \iint_V dV_{s_1} dV_{s_2} \tilde{J}_{j_1}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \omega) E_{j_1}(\mathbf{s}_1/\mathbf{r}_1, \omega) E_{i_k}^*(\mathbf{s}_2/\mathbf{r}_2, \omega). \quad (7)$$

Умножим соотношение (6) на $-\tilde{J}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$, соотношение (7) — на $J_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$, сложим их левые и правые части и проинтегрируем полу-

* Соотношение (4) и все дальнейшие выкладки неприменимы к системам с дискретным спектром собственных частот. Это связано с тем, что в моменты $t = \pm T$ в такой системе возбуждаются незатухающие собственные колебания, дающие конечный вклад в $E(T, \mathbf{r}, \omega)$ при любых сколь угодно больших T . Поскольку, однако, амплитуды этих колебаний случайно зависят от T , предел (4) не существует. Кроме того, если в спектре случайного тока содержатся резонансные частоты, то возбуждаемые при этом колебания будут нестационарны, что в целом исключает применимость рассматриваемого корреляционного описания к системам такого рода.

ченное соотношение по объему многомерного пространства $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, занятому источниками. В итоге получим

$$\begin{aligned} & \int_V \int_V dV_{r_1} dV_{r_2} [J_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \tilde{\varepsilon}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) - \tilde{J}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \varepsilon_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \\ & = \int_V \int_V dV_{r_1} dV_{r_2} \int_V \int_V dV_{s_1} dV_{s_2} [J_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \tilde{J}_{ji}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \omega) \times \\ & \times E_{ji}(\mathbf{s}_1/\mathbf{r}_1, \omega) E_{ik}^*(\mathbf{s}_2/\mathbf{r}_2, \omega) - \tilde{J}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) J_{jl}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \omega) \times \\ & \times E_{jl}(\mathbf{s}_1/\mathbf{r}_1, \omega) E_{ik}^*(\mathbf{s}_2/\mathbf{r}_2, \omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Пользуясь соотношениями взаимности

$$E_{ji}(\mathbf{s}_1/\mathbf{r}_1, \omega) = E_{ij}(\mathbf{r}_1/\mathbf{s}_1, \omega), \quad E_{ik}^*(\mathbf{s}_2/\mathbf{r}_2, \omega) = E_{kl}^*(\mathbf{r}_2/\mathbf{s}_2, \omega),$$

нетрудно убедиться в том, что правая часть (8) тождественно равна нулю. Следовательно,

$$\int_V \int_V dV_{r_1} dV_{r_2} [J_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \tilde{\varepsilon}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) - \tilde{J}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \varepsilon_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)] = 0. \quad (9)$$

Это и есть искомое соотношение взаимности между фурье-трансформантами функций корреляции двух случайных полей.

Чтобы получить аналогичное соотношение для самих корреляционных функций, достаточно в (9) произвести обратное фурье-преобразование подынтегрального выражения и воспользоваться теоремой о свертке. Это соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_V \int_V dV_{r_1} dV_{r_2} \int_{-\infty}^{\infty} dt [J_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \tilde{\varepsilon}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau - t) - \\ & - \tilde{J}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \varepsilon_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau - t)] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Как можно видеть из самого вывода формул (9), (10), условия их применимости полностью совпадают с условиями применимости принципа взаимности в его обычной формулировке.

Полученные соотношения легко обобщаются на случай, когда наряду с электрическими имеются также магнитные токи или когда система содержит невзаимные элементы — любое из таких обобщений может быть получено, исходя из обобщенных соответствующим образом соотношений взаимности для регулярного поля.

Укажем еще на одно возможное обобщение формул (9), (10). Пусть имеется некоторая система статистически зависимых полей $E^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots$). Для описания этой системы, вообще говоря, недостаточно корреляционных функций вида (1) — необходимы функции, которые характеризовали бы степень корреляции двух различных полей. Эти функции (при $s \neq p$ мы будем называть их функциями взаимной корреляции s и p -полей) естественно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik}^{sp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \langle E_i^{(s)}(\mathbf{r}_1, t + \tau) E_k^{(p)*}(\mathbf{r}_2, t) \rangle; \\ J_{ik}^{sp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) &= \langle j_i^{(s)}(\mathbf{r}_1, t + \tau) j_k^{(p)*}(\mathbf{r}_2, t) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

При $s = p$ они совпадают с корреляционными тензорами (1); в этом случае верхние индексы мы будем опускать. Нетрудно убедиться в том, что функции взаимной корреляции (11) удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений и, следовательно, тем же соотношениям

взаимности, что и функции (1). Таким образом, обобщенные соотношения взаимности (в дальнейшем мы будем обозначать их цифрами (I) и (II)) получаются из (9), (10) путем следующей замены:

$$\varepsilon_{jk} \rightarrow \varepsilon_{jk}^{sp}; \quad J_{ik} \rightarrow J_{ik}^{sp}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ik} \rightarrow \varepsilon_{ik}^{lg}; \quad \tilde{J}_{ik} \rightarrow J_{ik}^{lg}.$$

Соотношения (9), (10) и (I), (II) существенно упрощаются в случае, когда источниками случайных полей служат элементарные электрические диполи. Пусть имеется два диполя, расположенных в точках ρ_1 и ρ_2 и ориентированных вдоль векторов e_1 и e_2 . Тогда, как это следует из (9) и (10),

$$J(\omega) \tilde{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_1, \omega) = \tilde{J}(\omega) \varepsilon_{22}(\rho_2, \rho_2, \omega);$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(t) \tilde{\varepsilon}_{11}(\rho_1, \rho_1, \tau - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}(t) \varepsilon_{22}(\rho_2, \rho_2, \tau - t) dt,$$

где $J(t)$ и $\tilde{J}(t)$ — функции автокорреляции токов, соответственно, первого и второго диполей. Написанные соотношения имеют точно такой же вид, как соотношения взаимности для регулярных полей: первое из них подобно соотношению взаимности для комплексных амплитуд гармонического поля, второе — соотношению взаимности для неустановившихся электромагнитных процессов [7].

При увеличении числа диполей, естественно, возрастает и число различных соотношений, которые могут быть написаны для корреляционных функций создаваемых ими полей. Выпишем для примера одно из них. Предположим, что диполей три и они расположены в точках ρ_s и ориентированы вдоль векторов e_s , $s = 1, 2, 3$. Функции взаимной корреляции их токов обозначим через $J^{sp}(\tau)$, а корреляционные тензоры полей — через $\varepsilon_{ik}^{sp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$. Тогда имеем

$$J^{11}(\omega) \varepsilon_{11}^{23}(\rho_1, \rho_1, \omega) = J^{23}(\omega) \varepsilon_{23}^{11}(\rho_2, \rho_3, \omega).$$

Если, в частности, $J^{11}(\omega) = J^{23}(\omega)$, то взаимная корреляция проекций второго и третьего полей на направление первого диполя совпадает с корреляцией соответствующих компонент первого поля в точках ρ_2 и ρ_3 .

2. Как показано в работах Левина [8, 9], метод вспомогательных источников, широко распространенный в теории излучения и дифракции регулярных полей, может быть обобщен и на поля, случайно изменяющиеся во времени и пространстве*. Основываясь на соотношениях (I), (II), мы сделаем здесь некоторые замечания, касающиеся содержания и возможностей этого метода.

Пусть источниками дифрагирующего поля являются сторонние электрические токи с заданным корреляционным тензором $J_{jl}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \tau)$. Распределение корреляции $\varepsilon_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$, возникающее при дифракции этого поля на некотором объекте, можно искать следующим образом. Поместим в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 вспомогательные шумовые источники — элементарные электрические диполи с одинаковыми (в любой момент времени) токами, изменяющимися во времени по закону белого шума, и с дипольными моментами, направленными вдоль векторов e_i и e_k .

Тензор взаимной корреляции этих источников имеет вид

$$\delta_{ji} \delta_{ik} \delta(\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \delta(\tau), \quad (12)$$

* Пользуюсь случаем поблагодарить М. Л. Левина за любезно предоставленную возможность ознакомиться с некоторыми еще не опубликованными результатами, относящимися к рассматриваемому кругу вопросов.

где δ_{ji} — символ Кронекера, $\delta(x)$ — дельта-функция. Обозначим тензор взаимной корреляции электрических компонент создаваемых ими полей через

$$G_{jilk}(s_1/r_1, s_2/r_2, \tau) \quad (13)$$

и применим соотношение (II) к $\varepsilon_{ji}(s_1, s_2, \tau)$ и $G_{jilk}(s_1/r_1, s_2/r_2, \tau)$. В результате получим

$$\varepsilon_{ik}(r_1, r_2, \tau) = \iint_V dV_{s_1} dV_{s_2} \int_{-\infty}^{\infty} dt J_{jl}(s_1, s_2, t) G_{jilk}(s_1/r_1, s_2/r_2, \tau - t). \quad (14)$$

Эта формула представляет поле ε_{ik} в виде интеграла по объему семимерного пространства (r_1, r_2, τ) от произведения плотности источников J_{jl} на поле корреляции G_{jilk} точечного (в этом пространстве) источника (12); G_{jilk} есть, очевидно, не что иное, как функция Грина многомерного тензорного поля ε_{ik} . Таким образом, задача нахождения поля корреляции ε_{ik} сводится к квадратурам, если известна функция взаимной корреляции полей двух элементарных шумовых источников, произвольно ориентированных в пространстве.

Не представляет труда выразить G_{jilk} через функцию Грина регулярного поля. Для этого достаточно написать соотношение взаимности для G_{plsk} и для функции взаимной корреляции полей $E_j(\rho_1/s_1, \omega) e^{i\omega t}$ и $E_l(\rho_2/s_2, \omega) e^{i\omega t}$, которые имеют своими источниками элементарные электрические диполи, помещенные в точках s_1 и s_2 и ориентированные вдоль векторов e_j и e_l .

Тензоры корреляции, соответствующие этим источникам и полям, равны соответственно

$$\delta_{pj} \delta_{sl} \delta(\rho_1 - s_1) \delta(\rho_2 - s_2) e^{i\omega t}$$

и

$$E_{pj}(\rho_1/s_1, \omega) E_{sl}^*(\rho_2/s_2, \omega) e^{i\omega t}, \quad (15)$$

где E_{pj} — p -проекция поля E_j . Из (12), (15) и (II) имеем

$$G_{jilk}(s_1/r_1, s_2/r_2, \omega) = E_{jl}(s_1/r_1, \omega) E_{ik}^*(s_2/r_2, \omega). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (14), приходим к уже известному соотношению (6).

Методика, основанная на соотношениях такого типа, использовалась в [8, 9] для расчета тепловых флуктуационных полей, создаваемых нагретыми телами с заданными электродинамическими параметрами. Разумеется, она применима и к дифракционным задачам самого общего вида. В качестве одного из примеров рассмотрим дифракцию на произвольном объекте статистически однородного и изотропного поля (такое поле реализуется, например, внутри нагретой полости, размеры которой велики по сравнению с длиной волны).

Очевидно, что источниками рассматриваемого поля можно считать некоррелированные токи, равномерно распределенные по поверхности сферы бесконечно большого радиуса. Поэтому из (6) имеем

$$\varepsilon_{ik}(r_1, r_2, \omega) \sim \oint_S E_l(s/r_1, \omega) E_k^*(s/r_2, \omega) dS, \quad (17)$$

где по-прежнему $E_l(s/r, \omega)$ — поле элементарного диполя, помещенного в точке r и ориентированного вдоль вектора e_l ; интегрирование производится по поверхности бесконечно большой сферы.

Нетрудно видеть, что действительная часть интеграла (17) с точностью до множителя, не зависящего от координат, совпадает со взаимным сопротивлением излучения (в присутствии тела) двух элементарных диполей, расположенных в точках r_1, r_2 и направленных вдоль e_l и

e_k . Следовательно, задача определения корреляционных характеристик поля сводится к нахождению этого сопротивления при произвольном взаимном расположении тела и диполей.

Заметим, что и для полей с произвольными (но заданными) корреляционными характеристиками дифракционная задача всегда может быть сведена к соответствующей задаче с источниками. Для этого достаточно ввести на некоторой поверхности эквивалентные поверхностные токи (электрические и магнитные) и выразить их корреляционные функции через функции корреляции тангенциальных к этой поверхности компонент поля, после чего решение может быть представлено в квадратурах аналогично тому, как это делается для объемных источников.

3. Остановимся несколько подробнее на том частном, но довольно распространенном случае, когда дифрагирующее поле на протяжении объекта можно считать однородным*. Покажем, что в качестве его эквивалентных источников всегда можно выбрать некоррелированные электрические или магнитные токи (в общем случае они частично коррелированы), и найдем соотношения, связывающие распределение интенсивности этих источников с корреляционными характеристиками поля.

Для описания однородного поля будем использовать тензор корреляции $\varepsilon_{ik}(\rho, \tau)$ декартовых компонент электрического вектора ($\rho = r_1 - r_2$). Как следует из [2], ε_{ik} удовлетворяет системе уравнений

$$\Delta \varepsilon_{ik} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \rho_i} = 0; \quad (18)$$

$$\varepsilon_{ik}(-\rho, -\tau) = \varepsilon_{ki}^*(\rho, \tau).$$

Нетрудно видеть, что полный набор ее решений представляет собой систему плоских волн корреляции со всевозможными частотами и направлениями волнового вектора:

$$\varepsilon_{ik}(\rho, \tau) = F_{ik}(\omega, \mathbf{n}) \exp [i(\omega\tau - \mathbf{k}\rho)],$$

где $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$, \mathbf{n} — единичный произвольно ориентированный вектор,

$$F_{ki}(\omega, \mathbf{n}) = F_{ik}^*(\omega, \mathbf{n}), \quad (19)$$

$$k_i F_{ik}(\omega, \mathbf{n}) = 0, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Следовательно, $\varepsilon_{ik}(\rho, \tau)$ всегда можно представить в виде

$$\varepsilon_{ik}(\rho, \tau) = \int_0^\infty e^{i\omega\tau} d\omega \int_{4\pi} d\Omega F_{ik}(\omega, \mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k}\rho}, \quad d\Omega = \sin\theta d\varphi d\theta, \quad (20)$$

где r, θ, φ — сферические координаты (соответствующие им координатные векторы будем обозначать через e_r, e_θ и e_φ) и $\mathbf{n} = e_r$.

Как следует из уравнений (19), компоненты тензора F_{ik} — углового спектра функции $\varepsilon_{ik}(\rho, \omega)$ — не независимы; для описания произвольного однородного поля достаточно трех компонент, не принадлежащих одной строке тензора и не лежащих по разные стороны от его диагонали. В качестве таких компонент мы возьмем F_{11}, F_{12} и F_{22} .

* Под однородным понимается поле с функцией корреляции вида

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}(\rho, \tau), \quad \rho = r_1 - r_2$$

Предположим, что на сфере $r = R$ задан поверхностный электрический ток $i(s, t)$ с корреляционным тензором вида

$$\langle i_s(s_1, t + \tau) i_t^*(s_2, t) \rangle = I_{st}(s_2, \tau) \delta(s_2 - s_1),$$

где $(s, t) = (1, 2)$, $e_1 = e_\theta$, $e_2 = e_\varphi$. Согласно (6), тензор $\varepsilon_{ik}(\omega)$ электромагнитного поля, которое создается этим током внутри сферы, может быть записан в виде

$$\varepsilon_{ik}(r_1, r_2, \omega) = \oint_{\hat{s}} I_{st}(s, \omega) E_{si}(s/r_1, \omega) E_{tk}^*(s/r_2, \omega) dS. \quad (21)$$

При $R \rightarrow \infty$ и $r_{1,2}$ конечной величины

$$E_i(s/r, \omega) \rightarrow \frac{i\omega}{R} e^{-ikR} E_i(n/r, \omega),$$

где

$$E_1(n/r, \omega) = e^{iknr} (\cos \theta \cos \varphi e_1 - \sin \varphi e_2), \quad (22)$$

$$E_2(n/r, \omega) = e^{i\varphi nr} (\sin \varphi \cos \theta e_1 + \cos \varphi e_2),$$

n — единичный вектор, направленный из начала координат в точку сферы s .

Подставляя (22) в (21), можно убедиться в том, что при $R \rightarrow \infty$ распределение корреляции внутри сферы представляется интегралом вида (20). Это позволяет сделать вывод об однородности поля и дает возможность выразить угловой спектр его функции корреляции через компоненты тензора I_{st} или, если считать заданным угловой спектр F_{ik} , — выразить распределение интенсивности эквивалентных источников I_{st} через F_{ik} .

Производя соответствующие несложные выкладки, имеем

$$I_{11}(-n, \omega) = \frac{1}{\cos^2 \theta} [F_{11}(n, \omega) \cos^2 \varphi + F_{22}(n, \omega) \sin^2 \varphi + \text{Re } F_{12} \sin 2\varphi];$$

$$I_{22}(-n, \omega) = F_{11}(n, \omega) \sin^2 \varphi + F_{22}(n, \omega) \cos^2 \varphi - \text{Re } F_{12}(n, \omega) \sin 2\varphi; \quad (23)$$

$$\text{Re } I_{12}(-n, \omega) = \frac{1}{\cos \theta} \left[\frac{F_{22}(n, \omega) - F_{11}(n, \omega)}{2} \sin 2\varphi + \text{Re } F_{12}(n, \omega) \cos 2\varphi \right];$$

$$\text{Im } I_{12}(-n, \omega) = \frac{1}{\cos \theta} \text{Im } F_{12}(n, \omega).$$

Таким образом, в качестве эквивалентных источников однородного поля всегда можно выбрать некоррелированные токи, распределенные по поверхности бесконечно удаленной сферы. Распределение интенсивности этих источников определяется соотношениями (23). С помощью (23) распределение корреляции, возникающее при дифракции поля на некотором объекте, может быть представлено в виде

$$\varepsilon_{ik}(r_1, r_2, \omega) = \int_{4\pi} d\Omega I_{st}(n, \omega) E_{si}(n/r_1, \omega) E_{tk}^*(n/r_2, \omega), \quad (24)$$

где

$$E_{si}(n/r, \omega) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R}{i\omega} e^{i\varphi R} E_{si}(s/r, \omega), \quad R = |s - r|,$$

$E_{si}(s/r, \omega)$ есть s -компонента поля E_i элементарного электрического диполя (в присутствии объекта), помещенного в точке r и ориентированного вдоль вектора e_i .

Проиллюстрируем соотношения (23), (24) простым примером. Рассмотрим прохождение однородного поля через отверстие в экране в приближении геометрической оптики. Будем считать, что экран находится в плоскости $z = 0$, а источники поля — в области $z > 0$. Чтобы определить распределение корреляции при $z < 0$, необходимо найти поле, которое создается на верхней полусфере элементарным источником, помещенным в произвольной точке области $z < 0$.

В приближении геометрической оптики это поле отличается от поля диполя в свободном пространстве функциональным множителем $\Phi(\mathbf{n}/\mathbf{r})$, который равен 1 для \mathbf{n} , соответствующих части сферы, видной из точки \mathbf{r} сквозь отверстие в экране, и равен 0 для остальных \mathbf{n} . Из формул (23), (24) имеем

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \int_{2\pi} d\Omega F_{ik}(\omega, \mathbf{n}) \Phi(-\mathbf{n}/\mathbf{r}_1) \Phi(-\mathbf{n}/\mathbf{r}_2) e^{-ikn\rho}.$$

Как следует из последнего соотношения, корреляция поля в любых двух точках за экраном такая же, как в однородном поле, которое создавалось бы в отсутствие экрана эквивалентными источниками, расположенными на той части сферы, которая видна из обеих этих точек одновременно.

В заключение выражаю благодарность М. А. Миллеру за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **12**, 884 (1954).
2. P. Roman, E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **17**, 462 (1960).
3. P. Roman, E. Wolf, *Nuovo Cimento*, **17**, 462 (1960).
4. P. Roman, *Nuovo Cimento*, **20**, 759 (1961).
5. P. Roman, *Nuovo Cimento*, **22**, 1005 (1961).
6. M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1959.
7. Я. Н. Фельд, *ДАН СССР*, **41**, 292 (1943).
8. М. Л. Левин, *ДАН СССР*, **102**, 53 (1955).
9. М. Л. Левин, *ЖЭТФ*, **31**, 302 (1956).
10. D. Gabor, *J. Inst. Electr. Engrs.*, **9**, Pt III, 429 (1946).

Научно-исследовательский радиопизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 июля 1963 г.

ON RECIPROCITY RELATIONS FOR PARTIALLY COHERENT ELECTROMAGNETIC FIELDS

L. S. Dolin

The reciprocity relations have been obtained for correlated functions of a random stationary electromagnetic field. Some possibilities of utilization of these relations have been considered in the problems of random fields diffraction.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА С ДВУМЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ

Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский

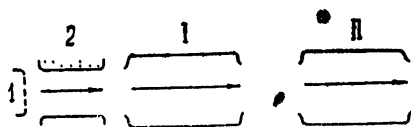
Показано, что в молекулярном генераторе с двумя последовательными резонаторами возможен режим колебаний, при котором ширина линии излучения определяется в основном временем пролета между резонаторами. При этом значительно уменьшается влияние эффекта бегущей волны на частоту колебаний. Определена зависимость от параметров генератора границ устойчивости указанного режима

1. ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Известно, что стабильность частоты молекулярного генератора характеризуется шириной спектральной линии, излучаемой пучком молекул при пролете их через резонатор. Ширина линии определяется временем пролета молекул через резонатор и эффектом Допплера, возникающим из-за непараллельности траекторий молекул в пучке [1]. Уширение, связанное со временем пролета через резонатор, можно уменьшить, увеличивая длину последнего. Уширение из-за эффекта Допплера уменьшается по мере сужения спертуры пучка. Однако с увеличением длины резонатора возрастает сдвиг частоты, обусловленный эффектом бегущей волны, так что компенсация этого эффекта за счет двух встречных пучков становится затруднительной [1]. В свое время Рамзей для получения узких спектральных линий предложил использовать два разнесенных резонатора [2]. В его методе ширина линии определяется суммой времен пролета молекулы через резонаторы и между ними. Поэтому, используя резонаторы небольшой длины при достаточно большом расстоянии между ними, можно получить узкие спектральные линии. В молекулярном генераторе аналогом системы Рамзея могли бы служить два последовательно расположенных резонатора, соединенных между собой волноводом. Но сложность настройки подобной системы вызовет, по-видимому, значительные трудности.

В работах [3-5] показано, что пучок молекул, вылетающий из резонатора молекулярного генератора, в котором установился колебательный процесс, возбуждает в последующем резонаторе (рис. 1) колебания

Рис. 1. Молекулярный генератор с двумя последовательными резонаторами: 1—источник молекулярного пучка; 2—сортирующая система; I—первый резонатор, в котором происходят автоколебания; II—второй резонатор, возбуждаемый поляризованным молекулярным пучком.



той же частоты, что и в первом. В силу этого возникает естественная мысль использовать в системе из двух последовательных резонаторов два встречных пучка. При выполнении условия самовозбуждения может возникать режим взаимной синхронизации и частота колебаний должна существенно зависеть от времени пролета между резонаторами.

Ниже проведен детальный анализ двухрезонаторного молекулярного генератора*.

2. УРАВНЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА

Уравнения колебаний молекулярного генератора имеют вид [1, 6]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu_1 \frac{dx}{dt} + \varepsilon_1 x = -\gamma \frac{d^2v}{dt^2}; \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \mu \frac{dv}{dt} + v = \frac{1}{2} \mu x w + \mu \frac{dv_0}{dt}; \quad (2.2)$$

$$\frac{dw}{dt} + \frac{1}{2} \mu w = \frac{1}{2} \mu \omega_0 - 2\mu x \frac{dv}{dt}. \quad (2.3)$$

Здесь

$$x = \frac{p \tau E}{\hbar}; \quad \mu_1 = \frac{\omega_p}{\omega_0} \frac{1}{Q}; \quad \gamma = \frac{4\pi N p^2 \tau}{\hbar};$$

$$v = \frac{P}{N_0 P}; \quad \varepsilon_1 = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2; \quad \mu = \frac{2}{\tau \omega_0}; \quad \omega = -2 \frac{N}{N_0},$$

E — напряженность электрического поля в резонаторе генератора, P — усредненное значение поляризации молекулярного пучка, N — число активных молекул, ω_p и Q — собственная частота и добротность резонатора, ω_0 — частота молекулярного перехода, τ — среднее время пролета молекулы через резонатор, p — матричный элемент дипольного момента молекулы, P_0 и N_0 — поляризация и число активных молекул в момент влета в резонатор. Дифференцирование производится по безразмерному времени t .

Уравнения (2.2)—(2.3) можно получить усреднением по времени Θ нахождения молекулы в резонаторе следующих уравнений:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + v = \frac{1}{2} \mu x w; \quad (2.4)$$

$$\frac{dw}{dt} = -2\mu x \frac{dv}{dt}, \quad (2.5)$$

используя функцию $\tau^{-1} \exp\left[-\frac{\Theta}{\tau}\right]$.

Так как μ достаточно мало, то эта система допускает упрощения. Представляя поле x и поляризацию v в виде

$$x = X_1 \cos(\omega t) + X_2 \sin(\omega t);$$

$$v = V_1 \cos(\omega t) + V_2 \sin(\omega t)$$

(X_i и V_i — медленно меняющиеся функции времени), а частоту ω — в виде $\omega = 1 + \delta$, и пользуясь методом Ван-дер-Поля [10], получаем систему укороченных уравнений:

$$\frac{dV_1}{dt} = \delta V_2 - \frac{1}{4} \mu X_2 w; \quad (2.6)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = -\delta V_1 + \frac{1}{4} \mu X_1 w; \quad (2.7)$$

* Некоторые результаты настоящей работы кратко изложены в [12].

$$\frac{d\omega}{dt} = -\mu X_1 V_2 + \mu X_2 V_1. \quad (2.8)$$

3. МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ГЕНЕРАТОР ИЗ ДВУХ РАЗНЕСЕННЫХ РЕЗОНАТОРОВ СО ВСТРЕЧНЫМИ ПУЧКАМИ МОЛЕКУЛ

Как уже указывалось, имеются основания полагать, что ширина спектральной линии излучения в двухрезонаторном генераторе определяется суммарным временем пролета молекулы через резонаторы и между резонаторами; это, в свою очередь, должно существенно сказаться на частоте колебаний генератора.

Ниже отыскивается частота колебаний двухрезонаторного молекулярного генератора.

При незначительном отклонении параметров резонаторов друг от друга в данной системе возможен устойчивый одночастотный режим. Поэтому поле в первом резонаторе можно представить в виде $x = X \cos(\omega t + \varphi)$, а во втором — в виде $y = Y \cos(\omega t)$. Если в момент влета молекулы в резонатор ($t = t_0$)

$$V_1 = V_{01}, \quad V_2 = V_{02}, \quad \omega = \omega_0,$$

то решением системы (2.6) — (2.8) применительно ко второму резонатору являются функции

$$V_1 = V_{01} + \frac{\delta}{k} V_{02} \sin(k\Theta) + \frac{\delta}{k^2} \left[-\delta V_{01} + \frac{1}{4} \mu Y \omega_0 \right] [1 - \cos(k\Theta)]; \quad (3.1)$$

$$V_2 = V_{02} \cos(k\Theta) + \frac{1}{k} \left[-\delta V_{01} + \frac{1}{4} \mu Y \omega_0 \right] \sin(k\Theta); \quad (3.2)$$

$$\omega = \omega_0 - \mu Y V_{02} \frac{\sin(k\Theta)}{k} - \frac{\mu Y}{k^2} \left[-\delta V_{01} + \frac{1}{4} \mu Y \omega_0 \right] [1 - \cos(k\Theta)]. \quad (3.3)$$

Здесь $k^2 = \delta^2 + [\mu Y/2]^2$, $\Theta = t - t_0$. Заменяя в (3.1) — (3.3) Θ на τ , получим поляризацию $V_1(\tau)$, $V_2(\tau)$ и число активных молекул $\omega(\tau)$ в момент вылета из резонатора.

Молекулы, вылетевшие из второго резонатора, через время T попадают в первый. Учтя, что в это время изменение их поляризации описывается уравнением (2.4) с правой частью, равной нулю, получим начальные условия для молекулы, попадающей в первый резонатор справа:

$$V_1(\tau, T) = V_1(\tau) \cos(\delta T) + V_2(\tau) \sin(\delta T); \quad (3.4)$$

$$V_2(\tau, T) = -V_1(\tau) \sin(\delta T) + V_2(\tau) \cos(\delta T). \quad (3.5)$$

Чтобы движение молекулы, попавшей в первый резонатор, описывалось формулами (3.1) — (3.3), нужно от времени t перейти к $\tilde{t} = t + \varphi/\omega$; соответственно этому для молекул, влетающих справа, изменяются начальные условия (3.4) — (3.5):

$$V_{01} = V_1(\tau, T) \cos \varphi - V_2(\tau, T) \sin \varphi; \quad (3.6)$$

$$V_{02} = V_1(\tau, T) \sin \varphi + V_2(\tau, T) \cos \varphi; \quad (3.7)$$

$$\omega_0 = \omega(\tau). \quad (3.8)$$

Для молекул, влетающих в первый резонатор слева, начальные условия в результате перехода ко времени \tilde{t} , очевидно, не изменятся: $V_{01} = 0$, $V_{02} = 0$, $\omega_0 = -2$.

Теперь уже нетрудно вычислить полную поляризацию и число активных молекул в первом резонаторе, хотя расчет в общем виде становится довольно громоздким. Поэтому ограничимся режимом автоколебаний с малой амплитудой и частотой ω , близкой к вершине спектральной линии. Для высокостабильного генератора именно такие режимы и представляют наибольший интерес. В этом случае полная поляризация молекул, усредненная по скоростям, ставится равной

$$\bar{V}_1 = -Y \left[\frac{\delta}{\mu} 2 \frac{T}{\tau} \cos \varphi - \sin \varphi \right] - \frac{\delta}{\mu} X;$$

$$\bar{V}_2 = -Y \left[\cos \varphi + 2 \frac{T}{\tau} \frac{\delta}{\mu} \sin \varphi \right] - X.$$

Подставляя теперь x и v в уравнение (2.1) и приравнявая члены при $\sin(\omega \tilde{t})$ и $\cos(\omega \tilde{t})$, имеем

$$[\varepsilon_1 - \omega^2] X = \gamma \omega^2 \bar{V}_1; \quad -\mu_1 \omega X = \gamma \omega^2 \bar{V}_2. \quad (3.9)$$

Для второго резонатора подобные формулы получаются заменой $X \rightarrow Y$, $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$, $\mu_1 \rightarrow \mu_2$, $\varphi \rightarrow -\varphi$.

Решая далее систему четырех алгебраических уравнений, можно найти отклонение частоты колебаний от частоты молекулярного перехода:

$$\delta = 1 - \omega = \mu \left[\frac{\varepsilon_1 - 1}{\mu_1} \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{\varepsilon_2 - 1}{\mu_2} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \right] \left[2 \frac{T}{\tau} + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1 \mu_2} \right]^{-1}. \quad (3.10)$$

Если учесть, что из N молекул, вылетающих из одного резонатора во второй, попадает лишь xN , то в формуле (3.10) нужно произвести за-

мену: $T \rightarrow xT$; $1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \rightarrow x + z$; $1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow x + \frac{1}{z}$; $\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{\mu_1 \mu_2} \rightarrow z + \frac{1}{z}$,

где $z = \sqrt{\frac{1}{4x} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1}} - \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)$.

Для однорезонаторного генератора аналогичная формула выглядит так:

$$\delta = 1 - \omega = (1 - \sqrt{\varepsilon}) \mu / \mu_1. \quad (3.11)$$

Таким образом, в двухрезонаторном молекулярном генераторе отклонение частоты колебаний от частоты молекулярного перехода меньше, чем в случае однорезонаторного генератора, в xT/τ раз.

4. СДВИГ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫЙ ЭФФЕКТОМ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Одним из основных эффектов, ограничивающих стабильность частоты молекулярного генератора, является эффект бегущей волны [9]. Но, как показывает расчет, используя двухрезонаторный молекулярный генератор, можно значительно уменьшить влияние этого эффекта.

Вычисление частоты колебаний проведем в предположении, что резонаторы одинаковы, настроены на частоту молекулярного перехода и что наличие бегущих волн вносит лишь малое возмущение в первоначальный режим. В этом случае напряженности полей в первом и втором резонаторах можно привести к виду

$$x = X_0 \cos(\omega t + \varphi) + H_1 \beta_1 z \sin(\omega t + \varphi); \quad (4.1)$$

$$y = X_0 \cos(\omega t) + H_2 \beta_2 z \sin(\omega t). \quad (4.2)$$

Введем обозначения: $X_0 = Y_1$, $H_2 \beta_2 z = Y_2$. Тогда изменение поляризации молекул, влетающих во второй резонатор, описывается системой уравнений

$$\frac{dV_1}{dt} = \delta V_2 - \frac{1}{4} \mu \omega Y_2; \quad (4.3)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = -\delta V_1 + \frac{1}{4} \mu \omega Y_1. \quad (4.4)$$

Нетрудно показать, что разложение $\omega(y)$ имеет вид

$$\omega = \omega_0 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y_i^2} Y_i^2 + \dots,$$

так что при достаточно малом поле ω , входящее в систему (4.3) — (4.4), может считаться постоянной величиной.

Уравнения (4.3) — (4.4) решаем методом теории возмущений. Представим V_1 и V_2 в виде

$$V_1 = V_{01} + V_1' + \dots;$$

$$V_2 = V_{02} + V_2' + \dots$$

Тогда, заменив координату z на $c \Theta$ (c — скорость молекулы), для молекул, попадающих во второй резонатор справа, получим

$$V_1 = \frac{1}{4} [-\delta \mu X_0 + \mu H_2 \beta_2 c] \Theta^2;$$

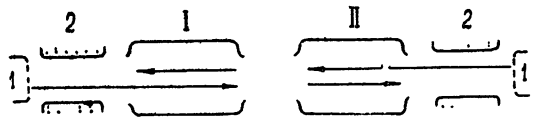
$$V_2 = \frac{1}{4} \mu \omega_0 X_0 \Theta.$$

Далее молекула попадает в первый резонатор с начальными условиями

$$V_{01} = \frac{1}{2} \omega_0 X_0 \left[\frac{\delta}{\mu} 2 \frac{T}{\tau} \cos \varphi - \sin \varphi \right];$$

$$V_{02} = \frac{1}{2} \omega_0 X_0 \left[\cos \varphi - \frac{\delta}{\mu} 2 \frac{T}{\tau} \sin \varphi \right].$$

Рис. 2. Генератор с двумя последовательными резонаторами и с двумя встречными пучками. Автотолебания происходят в обоих резонаторах.



Решаем теперь систему (4.3) — (4.4), учитывая еще, что слева в первый резонатор попадает пучок «невыветившихся» молекул. Это дает следующее значение для усредненной поляризации:

$$\bar{V}_1 = -\frac{5}{3} \frac{\delta}{\mu} X_0^2 + \frac{H_1 \beta_1 c}{\mu} - X_0 \left[\frac{\delta}{\mu} 2 \frac{T}{\tau} \cos \varphi - \sin \varphi \right];$$

$$\bar{V}_2 = -2X_0.$$

Дальнейшие выкладки, полностью аналогичные проделанным в разделе 3, дают для отклонения частоты выражение

$$\delta = 1 - \omega = \frac{H_1 \beta_1 c + H_2 \beta_2 c}{4T/\tau X_0}$$

Сравнение последнего с формулой

$$\delta = \frac{H \beta c}{2X_0},$$

полученной в работе [9] для однорезонаторного генератора, показывает, что система из двух последовательных резонаторов существенно уменьшает влияние бегущей волны на частоту колебаний генератора.

5. МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ГЕНЕРАТОР С ЗАМКНУТОЙ ЦИРКУЛЯЦИЕЙ ПУЧКА МОЛЕКУЛ

Выводы, полученные в предыдущих разделах, показывают, что в режиме взаимной синхронизации ширина линии излучения становится обратно пропорциональной всему времени нахождения молекулы в генераторе. Это дает основание предположить, что и молекулярный генератор с замкнутой циркуляцией пучка (рис. 3) будет столь же выгодно отличаться от обычного однорезонаторного генератора. Его устройство позволяет каждой молекуле несколько раз пролететь через резонатор, так что «характеристическое» время, влияющее на ширину спектральной линии (а стало быть, и на частоту колебаний) будет пропорциональным всему пути, пройденному молекулой, и может стать весьма значительным.

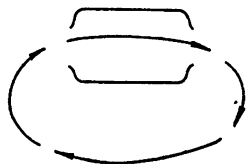


Рис. 3. Генератор с замкнутой циркуляцией пучка молекул.

Однако, если такую циркуляцию пучка молекул осуществить с помощью замкнутой сортирующей системы, то оказывается, что наличие постоянного поля E в сортирующем устройстве существенно влияет на частоту колебаний. Ее отклонение от частоты молекулярного перехода (при условии, что среднее число «оборотов» молекулы $\bar{n} \gg 1$ и время пролета сортирующего устройства T много больше времени пролета резонатора τ) дается формулой

$$\delta = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{\bar{n} (\mu_1/\mu) (T/\tau)} + \frac{1}{2} [\mu X]^2. \quad (5.1)$$

Второе слагаемое, связанное с постоянным полем $\left(X = \frac{E\tau}{\hbar} \right)$, может во много раз превышать первое. Таким образом, подобная схема не явится, по-видимому, новым решением задачи повышения стабильности частоты

6. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИНХРОННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО РЕЖИМА МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА С 2-мя ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ

Одночастотный режим колебаний, рассмотренный в предыдущих разделах, будет существовать не всегда. Если частоты резонаторов сильно разнятся друг от друга, то режим взаимной синхронизации может не иметь места, и в каждом резонаторе будут существовать колебания с частотой, определяемой собственной частотой резонатора (согласно формуле (3.11)). Таким образом теряются все преимущества, даваемые двухрезонаторной системой генератора. Это, в свою очередь, делает желательным оценку полосы взаимной синхронизации резонаторов.

Для анализа устойчивости синхронного синусоидального режима

воспользуемся методом Ван-дер-Поля. Представим напряженность поля и поляризацию пучка в виде синусоидальных колебаний с медленно меняющимися амплитудами и фазами:

$$x = X \cos(t + \varphi); \quad v = V \cos(t + \psi); \quad v_0 = V_0 \cos(t + \psi_0).$$

Тогда эти величины меняются со временем согласно системе укороченных уравнений (следующей из (2.1)–(2.3)):

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{1}{2} \mu_i X + \frac{\gamma}{2} V \sin \Phi; \tag{6.1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{2} \gamma \frac{V}{X} \cos \Phi; \tag{6.2}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} \mu V + \frac{1}{2} \mu V_0 \cos \xi - \frac{1}{4} \mu \omega X \sin \Phi; \tag{6.3}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{4} \mu \omega \frac{X}{V} \cos \Phi + \frac{1}{2} \mu \frac{V_0}{V} \sin \xi; \tag{6.4}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2} \mu \omega + \frac{1}{2} \mu \omega_0 + \mu X V \sin \Phi, \tag{6.5}$$

где $\Phi = \psi - \varphi$, $\xi = \psi_0 - \psi$, $\Delta = 1 - \epsilon$.

Систему (6.1)–(6.5) можно разбить на две различные группы [1], поскольку правые части уравнений для X и φ по абсолютной величине значительно больше правых частей уравнений для V , ψ , ω .

При нарушении равновесия «быстрые» координаты устанавливаются в соответствии с начальными значениями «медленных» (V , ψ и ω), которые для этого процесса установления можно считать постоянными. После установления «быстрых» координат происходит установление медленных координат, к которым в каждый момент «квазистатически» приспосабливаются «быстрые» координаты. Проводя исследование «быстрых» движений подобно тому, как это сделано в работе [1], можно показать, что они всегда устойчивы.

Дальнейший анализ устойчивости приводит к исследованию «медленных» движений (уравнения (6.3)–(6.4)) при условии, что dX/dt и $d\varphi/dt$ равны нулю, т. е. к исследованию уравнений

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\psi}{dt} = \alpha \omega + \frac{1}{2} \frac{V_0}{V} \sin \xi; \tag{6.6}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2} V - \beta \omega V + \frac{1}{2} V_0 \cos \xi; \tag{6.7}$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2} \omega + 4\beta V^2 + \frac{1}{2} \omega_0, \tag{6.8}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\gamma \Delta}{\mu_i + \Delta^2}; \quad \beta = \frac{1}{4} \frac{\gamma}{\mu_i + \Delta^2}.$$

Характеристическое уравнение «медленных» движений

$$\begin{vmatrix} \partial \dot{\psi} / \partial \psi - \lambda & \partial \dot{\psi} / \partial V & \partial \dot{\psi} / \partial \omega \\ \partial \dot{V} / \partial \psi & \partial \dot{V} / \partial V - \lambda & \partial \dot{V} / \partial \omega \\ \partial \dot{\omega} / \partial \psi & \partial \dot{\omega} / \partial V & \partial \dot{\omega} / \partial \omega - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

можно записать в виде

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0.$$

Тогда

$$A_1 = 1,5 + 2\beta \omega;$$

$$A_2 = 0,75 + 3\beta \omega - \beta \omega_0 + \frac{1}{4} \beta \omega^2;$$

$$A_3 = \frac{1}{8} [1 + 2\beta \omega] [1 + 6\beta \omega - 4\beta \omega_0] + \frac{3}{2} \alpha^2 \omega^2 - \alpha \omega \omega_0.$$

Для того, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательную действительную часть, необходимо, согласно критерию Гурвица, выполнение неравенств

$$A_1 > 0; \quad A_1 A_2 - A_3 > 0; \quad A_3 > 0. \quad (6.9)$$

Выражения для A_i получены в предположении, что частота колебаний генератора равна единице. Согласно (3.10), это выполняется лишь при симметричной расстройке резонаторов относительно частоты молекулярного перехода (т. е. при $\epsilon_1 = 1 + \Delta$, $\epsilon_2 = 1 - \Delta$), что и будет предполагаться ниже.

Пусть в какой-то момент времени нарушен стационарный режим, например, во втором резонаторе. Если этот режим устойчив, то через время $1/\mu \sim \tau$ (совпадающее со средним временем пролета молекулы через резонатор) колебания во втором резонаторе установятся вновь, и лишь через время порядка $2T$ (T — время пролета молекулы между резонаторами) начальные условия ω_0, V_0, ψ_0 для второго резонатора начнут изменяться во времени. Если взять $T \gg \tau$, то процесс установления стационарного режима в резонаторе можно рассматривать при неизменных начальных условиях.

При колебаниях с частотой 1 амплитуды полей в обоих резонаторах равны. Поэтому, если поле в первом резонаторе $x = Y \cos t$, а во втором $y = Y \cos(t + \varphi)$, то начальные условия для второго резонатора

$$V_0^2 = \frac{4Y^2}{[1+Y^2]^4}; \quad \omega_0 = -2 \frac{1-Y^2}{[1+Y^2]^2} - 2. \quad (6.10)$$

Выражения (6.10) получены с учетом того, что пучок молекулы не монохроматичен по скоростям; поэтому усреднение по времени проводилось по функции $\tau^{-1} \exp[-\Theta \tau^{-1}]$, а усреднение по скоростям — по $\bar{V} V^{-2} \exp[-\bar{V}/V]$.

Решая теперь систему (6.6) — (6.8) в предположении, что «медленные» движения уже установились, получим

$$\tilde{\Delta}^2 = \frac{4\tilde{\gamma}^2}{[1+Y^2]^4} - \left[\frac{\tilde{\gamma}}{2} \omega + 1 \right]^2. \quad (6.11)$$

Связь ω с Y^2 дается формулой

$$\tilde{\gamma} \omega = 2Y^2 + \tilde{\gamma} \left[-2 - 2 \frac{1-Y^2}{[1+Y^2]^2} \right];$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\mu_1} = \frac{\gamma}{\mu_2}; \quad \tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{\mu_1} = \frac{\Delta}{\mu_2}.$$

Если учесть коэффициент ослабления молекулярного пучка, то (6.11) переходит в

$$\tilde{\Delta}^2 = \kappa \frac{4\tilde{\gamma}^2}{[1+Y^2]^4} - \left[\frac{\tilde{\gamma}}{2} \omega + 1 \right]^2. \quad (6.12)$$

Анализ этого уравнения совместно с (6.9) приводит к следующим результатам.

1) При $\tilde{\gamma} < 0,5$ (в обычных обозначениях — при числе молекул каждого пучка $N_0 < 0,5 \hbar/p^2 \tau 4 \pi Q$) условие возбуждения генератора не выполнено и колебания вообще невозможны.

2) При $0,5 < \tilde{\gamma} < 1$ возникает одночастотный колебательный режим, устойчивый при любом рассеянии молекул (совместимым с условием возбуждения) и при любой расстройке $\tilde{\Delta}$ собственных частот. В этом случае $\tilde{\Delta}^2(\omega)$ представляет монотонно возрастающую с $|\omega|$ функцию и условия (6.9) выполняются на всем интервале изменения ω .

3) При $1 < \tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}_{кр}$ ($\tilde{\gamma}_{кр}$ порядка 6) одночастотный режим колебаний генератора, работающего на пучках молекул с достаточно малым угловым раствором (т. е. при $\kappa \sim 1$) всегда устойчив ($\tilde{\Delta}^2(\omega)$ при $\kappa = 1$ монотонно возрастает с увеличением $|\omega|$). Если же κ может принимать любые значения между 0 и 1, то функция $\tilde{\Delta}^2(\omega)$ будет иметь, вообще говоря, вид, показанный на рис. 4. Условия критерия Гурвица (6.9) не выполняются на участке BC; и в зависимости от величины расстройки могут существовать различные режимы колебаний. Другими словами, для каждого $\tilde{\gamma}$ (или, что то же, для N_0) из указанного выше интервала можно найти такое $\kappa(\tilde{\gamma})$, что при $\kappa < \kappa(\tilde{\gamma})$ одночастотный режим может быть как устойчивым (при малом отклонении собственных частот резонаторов друг от друга), так и неустойчивым. Задав конкретные $\tilde{\gamma}$ и κ , нетрудно найти граничную расстройку, отделяющую указанные режимы друг от друга.

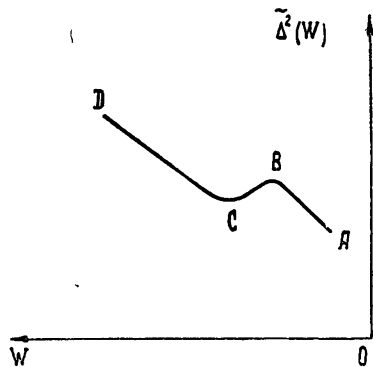


Рис. 4.

4) При $\tilde{\gamma} > \tilde{\gamma}_{кр}$ даже при $\kappa = 1$ возможны два режима колебаний: при достаточно малых $\tilde{\Delta}$ одночастотный режим устойчив; с увеличением расстройки происходит срыв одночастотного режима и в каждом резонаторе возникают свои собственные колебания.

7. УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОЧАСТОТНОГО РЕЖИМА КОЛЕБАНИЙ ГЕНЕРАТОРА С ПУЧКОМ МОЛЕКУЛ, ПРОХОДЯЩИМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ЧЕРЕЗ ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ РЕЗОНАТОРЫ

В работах [3-5] показано, что пучок молекул, вылетающий из резонатора молекулярного генератора, в котором установился автоколебательный процесс, возбуждает в последующем резонаторе (рис. 1) колебания той же частоты. В данном разделе более строго рассмотрены возможность существования и границы подобного режима.

Устойчивость колебаний проводилась в предположении, что первый резонатор настроен на частоту 1. Тогда, поскольку частота молекулярного перехода совпадает с собственной частотой первого резонатора, возникающие в молекулярном генераторе колебания (при изменении параметров второго резонатора в определенных границах), также будут иметь частоту, равную 1. Математически этот факт учитывается значениями начальных данных системы (6.6) — (6.8).

Положив поле в первом резонаторе равным $x = X \cos t$, легко находим $V_1(\theta)$, $V_2(\theta)$, $\omega(\theta)$. Усредняя V_1 и V_2 по времени пребывания молекулы в резонаторе и решая уравнение (1.1), получаем для амплитуды поля выражение

$$X^2 = [\gamma - \mu_1]/\mu_1, \quad (7.1)$$

а для поляризации и числа активных молекул в момент вылета—

$$V_1(\tau) = 0, \quad V_2(\tau) = -\sin\left(\frac{1}{2} \mu X \tau\right), \quad \omega(\tau) = -2\cos\left(\frac{1}{2} \mu X \tau\right).$$

Начальные условия во втором резонаторе даются этими же формулами, усредненными лишь по функции распределения скоростей. Таким образом,

$$V_0^2 = 4\mu_1(\gamma - \mu_1)/\gamma^4. \quad (7.2)$$

Рассматривая теперь систему стационарных уравнений «медленных» движений (т. е. систему уравнений (6.6) — (6.8) с левой частью, равной нулю), получим

$$\frac{2\gamma_2 V_0^2}{\omega - \omega_0} - \left[\frac{\gamma_2}{2} \omega + 1 \right]^2 = \tilde{\Delta}^2, \quad (7.3)$$

где

$$\gamma_2 = \gamma/\mu_2, \quad \tilde{\Delta} = \Delta/\mu_2.$$

Функция $\tilde{\Delta}^2(\omega)$ имеет вид, показанный на рис. 4. Условия критерия Гурвица (6.9) не выполняются для участка BC . Критические значения ω удовлетворяют условию $\frac{d\tilde{\Delta}^2}{d\omega} = 0$, сводящемуся к

$$\frac{4V_0^2}{[\omega - \omega_0]^2} + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\mu}_2} \omega + 2 = 0, \quad (7.4)$$

где

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\mu_1}, \quad \tilde{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad V_0^2 = \frac{4}{\tilde{\gamma}} (\tilde{\gamma} - 1), \quad \omega_0 = \frac{2}{\tilde{\gamma}^2} (\tilde{\gamma} - 2).$$

Для того, чтобы первый резонатор вообще влиял на колебательный режим второго, необходимо, чтобы $\tilde{\gamma} > 1$. Из дальнейших результатов будет видно (см. (7.7)), что при больших (сравнимых с 1) отклонениях $\tilde{\gamma}$ от единицы колебания второго резонатора на частоте первого всегда устойчивы. Поэтому имеет смысл исследовать колебательный режим при $\tilde{\gamma} \sim 1$. Если ввести достаточно малое $\eta = \tilde{\gamma} - 1 > 0$, то $V_0^2 \simeq 4\eta$, $\omega \simeq -2$ и уравнение (7.4) упрощается:

$$\frac{1}{[\omega + 2]^2} = - \left[\frac{1}{16\tilde{\mu}_2} \omega + \frac{2}{16\eta} \right].$$

Точка пересечения графиков функций

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{[\omega+2]^2}, \quad f(\omega) = -\frac{1}{16\tilde{\gamma}\tilde{\mu}_2} \omega - \frac{2}{16\tilde{\gamma}} \quad (7.5)$$

и дает $\omega_{кр}$ (рис. 5). Функция $\varphi(\omega)$ не зависит ни от каких параметров и всегда имеет один и тот же вид; меняются лишь точки A и B , через которые проходит линейная функция $f(\omega)$.

Поскольку точка B отстоит от начала координат на расстоянии $-2\tilde{\mu}_2$,

то при $\tilde{\mu}_2 > 1$ (т. е. при условии, что добротность первого резонатора больше добротности второго) кривые не пересекаются и $\tilde{\Delta}^2(\omega)$ монотонно возрастает с увеличением $|\omega|$. Поэтому колебания во втором резонаторе никогда не срываются.

При $\tilde{\mu}_2 < 1$ (добротность первого резонатора меньше добротности второ-

го) всегда можно, меняя $\tilde{\gamma}$, так подобрать точку A , отстоящую от начала координат на $-1/(2\tilde{\gamma})$, что кривые будут пересекаться. Точки пересечения определяют $\omega_{кр}$, а значит, и критическую расстройку $\tilde{\Delta}_{кр}^2 = \tilde{\Delta}^2(\omega_{кр})$.

Увеличивая $\tilde{\gamma}$ (или, что то же самое, η), мы приближаем точку A к началу координат. При некоторых η_0 кривые касаются и при дальнейшем увеличении $\tilde{\gamma}$ режим с частотой 1 во втором резонаторе становится всегда устойчивым. В этом случае функция $\tilde{\Delta}^2(\omega)$ имеет лишь одну особую точку — точку перегиба, а η_0 удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\tilde{\Delta}^2}{d\omega} = 0; \quad \frac{d^2\tilde{\Delta}^2}{d\omega^2} = 0. \quad (7.6)$$

При условии, что $\tilde{\mu}_2$ не очень близко к нулю, из (7.6) находим

$$\eta_0 = \frac{[1 - \tilde{\mu}_2]^3}{13,5 \tilde{\mu}_2}. \quad (7.7)$$

Итак, мы получили следующие результаты.

1) Если добротность первого резонатора больше добротности второго, то во втором резонаторе всегда устойчивыми являются колебания на частоте первого резонатора.

2) Если добротность второго резонатора больше добротности первого, происходящие во втором резонаторе процессы протекают (по мере возрастания числа молекул N_0 , влетающих в первый резонатор) по следующей схеме. При $N_0 > \hbar/p^2 \tau 4\pi Q_2 (\hbar/p^2 \tau 4\pi Q_1)$ совпадает с условием самовозбуждения первого резонатора) возникают колебания лишь во втором резонаторе, так как условия самовозбуждения первого резонатора еще не выполнены. Естественно, что частота колебаний определяется лишь параметрами второго резонатора. С дальнейшим ростом числа

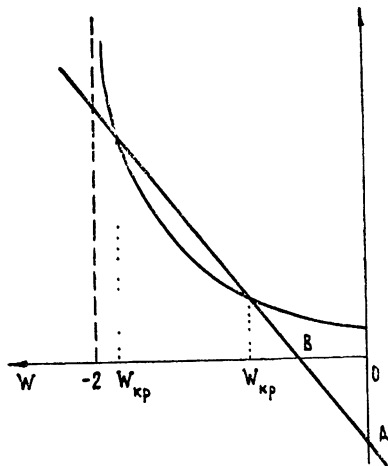


Рис. 5.

влетающих молекул возникают гармонические колебания и в первом резонаторе (при $N_0 = \hbar/p^2 \tau 4\pi Q_1$), но до тех пор, пока

$$N_0 < \frac{\hbar^2}{p^2 \tau} \frac{1}{4\pi Q_1} \left[1 + \left(1 - \frac{Q_1}{Q_2} \right)^3 \frac{Q_2}{13,5 Q_1} \right], \quad (7.8)$$

амплитуда колебаний первого резонатора недостаточна для синхронизации колебаний второго.

Синхронизация становится возможной лишь при таком числе молекул N_0 , когда неравенство (7.8) меняет смысл; тогда возникает устойчивый одночастотный режим.

Все эти выводы получены в предположении, что первый резонатор настроен на частоту спектральной линии. Если это не так, то даже при условии $Q_1 > Q_2$ возможны различные режимы колебаний. В самом деле, по мере роста расстройки первого резонатора его «эффективная» добротность, влияющая на амплитуду колебаний (а значит, и его воздействие на второй резонатор через пучок молекул) падает и при достаточно большом отклонении влияние первого резонатора становится столь слабым, что второй получает известную «самостоятельность». В этом случае во втором резонаторе возможны колебания на его собственной частоте.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Ораевский, Диссертация, ФИАН СССР, 1960.
2. Н. Ф. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
3. F. H. Reeder, C. J. Vikart, Rev. Scient. Instrum., **31**, 1164 (1960).
4. Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, ЖЭТФ, **42**, 907 (1962).
5. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ, **42**, 1529 (1962).
6. А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, **4**, 711 (1959).
7. Н. Г. Басов, Докторская диссертация, ФИАН СССР, 1956.
8. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, УФН, **57**, 485 (1955).
9. K. Shimoda, T. C. Wang, C. H. Townes, Phys. Rev., **102**, 1308 (1956).
10. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
11. X. Ю. Халдре, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 5—6, 60 (1958).
12. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, **8**, 158 (1963).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
29 июля 1963 г.

THE INVESTIGATION OF MOLECULAR GENERATOR WITH TWO SUCCESSIVE RESONATORS

E. M. Belenov, A. N. Oraevsky

It is shown that there may exist oscillations regime in a molecular generator with two successive resonators in which the line width of radiation is mainly determined by a transient time between resonators. In this case the influence of the travelling wave effect upon the oscillation frequency decreases considerably. The dependence has been determined of the boundaries stability of the given regime on generator parameters.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОРОТКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ

В. И. Таланов

Получены соотношения, описывающие изменение концентрации возбужденных атомов и плотности излучения в среде под действием падающего импульса заданной формы.

Излучение ряда оптических квантовых генераторов (на рубине, на оргстекле, активированном неодимом) имеет характер отдельных импульсов («пичков»), число, длительность и интенсивность которых зависят от режима работы генератора. Число пичков может меняться от нескольких сотен до единиц, длительность — от 10^{-7} до 10^{-9} сек, интенсивность — от десятков киловатт до десятков мегаватт в импульсе. Частотный спектр излучения состоит из отдельных узких линий, лежащих в пределах полосы люминесценции активного вещества и соответствующих разным типам колебаний резонаторной системы генератора. В связи с разработкой квантовых усилителей оптического диапазона представляет интерес задача о прохождении таких импульсов через среду, находящуюся в состоянии с отрицательной температурой.

Рассмотрим электромагнитный пучок, падающий на плоскопараллельный слой двухуровневой активной среды толщиной L . При ширине пучка $a \gg \sqrt{\lambda L}$ (λ — длина волны падающего излучения) можно пренебречь зависимостью поля от поперечных координат и считать, что все величины, характеризующие состояние среды и поля, зависят только от продольной координаты z и времени t . В соответствии с приведенными выше характеристиками оптических квантовых генераторов будем предполагать, что падающее излучение представляет собой импульс, длительность которого T_n удовлетворяет соотношению

$$T, T_2 \ll T_n \ll T_1, \quad (1)$$

где T_1 — время жизни возбужденного состояния (время «продольной» релаксации активной среды [1]), $T_2 = 2/\Delta\omega$ — время, характеризующее ширину линии $\Delta\omega$ рабочего перехода (время «поперечной» релаксации [1]), $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний.

Индукцированное излучение среды под действием падающего импульса в этом случае может быть рассчитано на основе уравнений баланса для изменений разности населенностей уровней $n(z, t)$ и числа фотонов $m(z, t)$ в единице объема активного вещества:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -B_s m n - \frac{n}{T_1} + J; \quad (2)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial z} = B_s m n - \beta m. \quad (3)$$

Здесь B_s — коэффициент Эйнштейна, J — параметр, характеризующий интенсивность накачки, v — групповая скорость волны*. Последний член в правой части уравнения (3) учитывает постоянное (не зависящее от n) затухание в среде за счет потерь в основном веществе. При написании уравнения (3) предполагалось, что распространение волны носит однонаправленный характер, т. е. она не испытывает отражений на границах активного участка. Коэффициент B_s зависит от величины матричного элемента перехода μ , параметра расстройки средней частоты импульса от средней частоты перехода $\Delta = T_2(\omega - \omega_0)$ и времени «поперечной» релаксации T_2 :

$$B_s = \frac{4\pi T_2 \mu^2 \omega}{\hbar(1 + \Delta^2)}. \quad (4)$$

Чтобы упростить исследование уравнений (2) и (3) будем считать, что накачка за полное время прохождения импульса через активный участок не успевает существенно изменить число возбужденных атомов, т. е. что

$$\int_0^{T_n} J dt \ll \int_0^{T_n} B_s mn dt.$$

Кроме того, отбросим в (2), исходя из (1), релаксационный член, а в (3) положим $\beta = 0$, пренебрегая постоянным затуханием в среде, которое обычно невелико.

Учитывая сделанные допущения, перепишем уравнения (2) и (3) в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -B_s mn; \quad (2a)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial z} = B_s mn \quad (3a)$$

и проинтегрируем их при следующих начальных и граничных условиях:

$$n = n_0 = \text{const}, \quad m = 0 \quad |_{t=0} \quad (0 < z \leq L); \quad (5)$$

$$m = m_0(t), \quad n = n_0 \exp\left(-B_s \int_0^t m_0 dt\right) \Big|_{z=0}, \quad (0 < t < T_n), \quad (6)$$

где $m_0(t)$ — заданная функция, определяемая формой падающего импульса.

Подставляя m из (2a) в выражение (3a) и интегрируя последнее по t при начальных условиях (5), имеем

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial z} = B_s(n^2 - n_0 n). \quad (7)$$

Общий интеграл этого уравнения находится методом характеристик:

$$t - \frac{1}{B_s n_0} \ln \frac{n_0 - n}{n} = f(t - z/v). \quad (8)$$

* Предполагается, что дисперсия коэффициента преломления в интересующем интервале частот пренебрежимо мала.

Произвольную функцию $f(t - z/v)$ определим, учитывая граничные условия (6):

$$f(t) = t - \frac{1}{B_s n_0} \ln \left[\exp \left(B_s \int_0^t m_0 dt \right) - 1 \right]. \quad (9)$$

Из (9), (8) и (2а) имеем окончательно

$$n(z, t) = \frac{n_0}{1 + K(z) \left[\exp \left(B_s \int_0^{t_1} m_0 dt \right) - 1 \right]}; \quad (10)$$

$$m(z, t) = \frac{m_0(t_1)}{1 - [1 - K^{-1}(z)] \exp \left(-B_s \int_0^{t_1} m_0 dt \right)}, \quad (11)$$

где $t_1 = t - z/v$, а $K(z) = \exp(B_s n_0 z/v)$ — начальное значение (при $t=0$) коэффициента усиления слоя толщиной z .

Полученные соотношения полностью решают (при сделанных предположениях) поставленную задачу. Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из приведенных формул.

Распределение концентрации активных атомов в слое в первый момент сразу же после прохождения импульса дается выражением (10) при $t = z/v + T_n$:

$$n(z) = \frac{n_0}{1 + K(z) \left[\exp \left(B_s \int_0^{T_n} m_0 dt \right) - 1 \right]}. \quad (12)$$

Отсюда может быть найдено полное число фотонов, излученное когерентно слоем толщины L с единицы поверхности под действием проходящего импульса:

$$M = \int_0^L [n_0 - n(z)] dz = \frac{v}{B_s} \ln [e^{-B_s M_n/v} + K(L) (1 - e^{-B_s M_n/v})], \quad (13)$$

где $M_n = v \int_0^{T_n} m_0 dt$ — общее число фотонов в падающем импульсе.

Степень высвечивания активной среды под действием падающего излучения можно охарактеризовать параметром:

$$\eta = \frac{M}{M_s} = 1 + \frac{\ln [1 - K_n^{-1} + (K K_n)^{-1}]}{\ln K}, \quad (14)$$

где $K = K(L) = \exp(B_s M_s/v)$, $K_n = \exp(B_s M_n/v)$, $M_s = n_0 L$ — общее число фотонов, которое может высветиться из слоя при полном выравнивании населенностей. Параметр K_n имеет смысл коэффициента усиления слоя, из которого при выравнивании населенностей может высветиться число фотонов, равное числу фотонов в падающем импульсе.

Соотношение (14) удобно переписать в форме

$$K_n = \frac{K-1}{K-K^\eta}, \quad (15)$$

определяющей при заданном начальном коэффициенте усиления слоя K число фотонов в падающем импульсе $M_n = (v/B_s) \ln K_n$, необходимое для обеспечения нужной степени высвечивания слоя η .

На рис. 1 приведены кривые зависимости $\ln K_n = \frac{B_s}{v} M_n$ от $\ln K = \frac{B_s}{v} M_s$, построенные в соответствии с (15) для нескольких значений степени высвечивания η (сплошные кривые). На том же рисунке

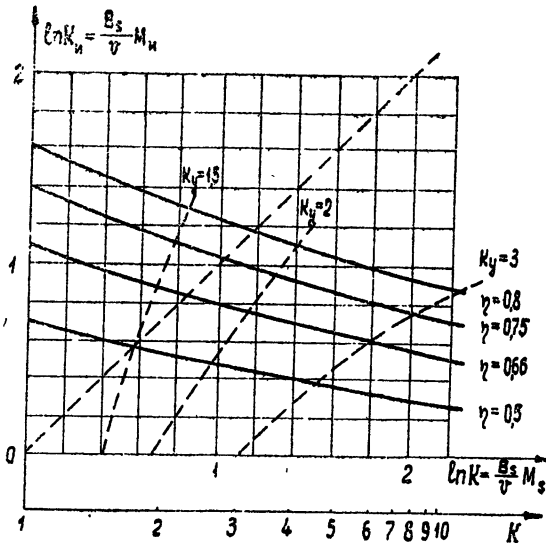


Рис. 1.

пунктиром нанесены линии постоянного коэффициента усиления K_y , определяемого как отношение энергии выходного и падающего импульсов. Из рисунка видно, что при начальных коэффициентах усиления слоя порядка нескольких единиц для достижения сравнительно высокой степени высвечивания ($\eta > 0,8$) энергия падающего импульса должна быть того же порядка, что и запасенная в слое. С ростом начального значения коэффициента усиления K величина энергии падающего импульса, обеспечивающая заданную степень высвечивания, уменьшается.

Рассмотрим форму выходного импульса. Она находится из (11) как функция t_1 при $z = L$:

$$m(L, t_1) = \frac{m_0(t_1)}{1 - (1 - K^{-1}) \exp(-B_s \int_0^{t_1} m_0 dt)} \quad (16)$$

В течение промежутка времени $(0, t_1^{(1)})$, определяемого неравенством*

* При $K < 2$ правая часть этого неравенства должна быть заменена единицей.

$$B_s \int_0^{t_1^{(1)}} m_0 dt \ll \frac{1}{K-1},$$

усиление импульса происходит без искажений:

$$m(L, t_1 < t_1^{(1)}) \simeq K m_0(t_1).$$

Если длительность импульса $T_n > t_1^{(1)}$, то при $t_1 > t_1^{(1)}$ форма импульса искажается. При достаточно сильном входном сигнале эти искажения формы наблюдаются лишь до момента $t_1^{(2)}$, такого, что

$$\exp\left(-B_s \int_0^{t_1^{(2)}} m_0 dt\right) \ll \frac{K}{K-1}.$$

При $t_1 > t_1^{(2)}$

$$m(L, t_1) \simeq m_0(t_1).$$

Для иллюстрации рассмотрим прохождение через плоский слой активной среды синусоидального импульса

$$m = m_0 \sin\left(\frac{\pi}{T_n} t\right) \quad (0 \leq t \leq T_n).$$

Выходной сигнал в этом случае равен

$$m(L, t_1) = m_0 \sin\left(\frac{\pi}{T_n} t_1\right) \left\{ 1 - (1-K^{-1}) \exp\left[-\frac{B_s M_n}{v} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{T_n} t_1\right)}{2}\right] \right\}^{-1},$$

где $M_n = \frac{2}{\pi} m_0 v T_n$ — число фотонов в падающем импульсе.

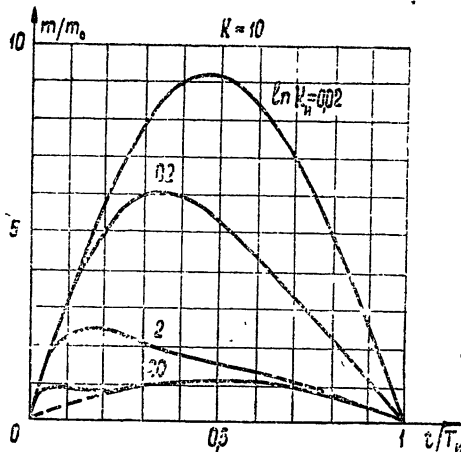


Рис. 2.

Форма выходного импульса при $K = 10$ и разных значениях параметра $\ln K_n = B_s M_n / v$ показана на рис. 2. Видно, что с увеличением

входной мощности импульс сильно искажается: максимум импульса смещается к его началу и соответственно увеличивается крутизна переднего фронта. При фиксированной мощности падающего импульса эти искажения формы будут выражены тем сильнее, чем больше начальное значение коэффициента усиления слоя K .

В приведенном расчете не принималось во внимание постоянное затухание в основном веществе активной среды. Однако добавление к правой части уравнения (3а) члена $-\beta m$, учитывающего такое затухание, не вносит дополнительных принципиальных трудностей в интегрирование системы уравнений (2а), (3а). Не останавливаясь на деталях, приведем лишь окончательный результат интегрирования этих уравнений при $\beta \neq 0$:

$$\frac{z}{v} = \int_{-B_s \int_0^{t_1} m_0 dt}^{\ln[n(t, z)/n_0]} \frac{du}{n_0 B_s (e^u - 1) - \beta u}; \quad (17)$$

$$m(z, t) = m_0(t_1) \left(1 - \frac{n}{n_0} + \frac{\beta}{n_0 B_s} \ln \frac{n}{n_0} \right) \times \quad (18)$$

$$\times \left[1 - \exp(-B_s \int_0^{t_1} m_0 dt) - \frac{\beta}{n_0} \int_0^{t_1} m_0 dt \right]^{-1}.$$

Первое из этих выражений определяет в неявном виде зависимость $n(t, z)$, а второе позволяет найти форму выходного импульса. В отличие от (10) и (11) применение соотношений (17), (18) в конкретных расчетах требует выполнения численного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 167 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 августа 1963 г.

PROPAGATION OF SHORT ELECTROMAGNETIC IMPULSES IN ACTIVE MEDIUM

V. I. Talanov

The relations have been obtained describing the concentration change of excited atoms and radiation density in a medium under the action of an incident impulse of the given form.

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РАДИОМЕТРА, СОДЕРЖАЩЕГО СИСТЕМУ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. А. Маркелов

Показано, что при компенсационном или модуляционном методе приема шумового сигнала пороговая чувствительность аппаратуры, содержащей систему с переменными параметрами, будет хуже, чем в случае использования системы обычного типа, с теми же значениями шум-фактора и полосы пропускания

Вопрос о чувствительности радиометра неоднократно обсуждался в литературе (см., например, [1-3]), однако, как правило, рассматривался лишь случай применения усилителя с постоянными параметрами, свойства которого полностью характеризуются шум-фактором и полосой пропускания*. Для усилителей с переменными параметрами, таких как параметрический и сверхрегенеративный, прежняя оценка чувствительности уже недостаточна. Впервые на это было обращено внимание в работе [4]; об этом же идет речь и в [5]. В данной статье на основании результатов [6] проводится более полный и строгий анализ вопроса о чувствительности радиометра.

Под радиометром в настоящей работе понимается радиоприемная установка, использующая компенсационный или модуляционный метод приема и состоящая из усилителя, квадратичного детектора и фильтра низких частот. На входе устройства имеются сигнал и шум, представляющие собой два независимых δ -коррелированных случайных процесса. Сигналом на выходе будем считать ΔJ_{ω} — приращение постоянной составляющей тока детектора под воздействием входного сигнала. Мощность флуктуаций на выходе низкочастотного фильтра при достаточно узкой ширине его полосы пропускания Π_{Φ} будет составлять $(1/2\pi) G_J(0) \Pi_{\Phi}$, где $G_J(0)$ — спектральная плотность флуктуаций тока детектора вблизи нулевой частоты. За отношение сигнал/шум на выходе устройства примем, как обычно, величину

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} = \frac{\Delta J_{\omega}}{\sqrt{(1/2\pi) G_J(0) \Pi_{\Phi}}}. \quad (1)$$

В качестве $(S/N)_{\text{вых}}$ естественно принять корень квадратный из отношения спектральных плотностей сигнала и шума на входе устройства (собственные шумы усилителя, приведенные ко входу, будем считать частью входного шума устройства). Если усилитель линейный, то, обозначив через $S(t)$ и $N(t)$ соответственно сигнал и шум на выходе усилителя, можно записать

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} = \sqrt{\frac{\langle S^2(t) \rangle}{\langle N^2(t) \rangle}}. \quad (2)$$

* В двух последних работах рассмотрение проводилось с учетом медленных стационарных флуктуаций шум-фактора и коэффициента усиления усилителя.

Здесь и дальше прямая черта сверху означает усреднение по времени, $\langle \rangle$ — по ансамблю.

Найдем соотношение между $(S/N)_{\text{вых}}$ и $(S/N)_{\text{вх}}$. При $(S/N)_{\text{вх}} \ll 1$, исходя из выражения для функции корреляции тока на выходе квадратичного детектора (детектируемый процесс предполагается нормальным), будем иметь

$$\begin{aligned} G_J(\omega) &= 4 \int_0^{\infty} \overline{\langle [J(t) - \bar{J}(t)] [J(t+\tau) - \bar{J}(t+\tau)] \rangle} \cos(\omega\tau) d\tau = \\ &= 4 \int_0^{\infty} 2 \overline{\langle [N_t N_{t+\tau}]^2 \rangle} \cos(\omega\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее, учитывая, что $\Delta J = \overline{\langle S^2(t) \rangle}$, получим из (1), (3) при $\omega = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{вых}} &= \frac{\overline{\langle S^2(t) \rangle}}{\sqrt{\int_0^{\infty} \overline{\langle [N_t N_{t+\tau}]^2 \rangle} d\tau}} \sqrt{\frac{\pi}{4\Pi_{\Phi}}} = \\ &= \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{вх}}^2 \sqrt{\frac{\pi}{4\Pi_{\Phi}}} \frac{\overline{\langle N^2(t) \rangle}}{\sqrt{\int_0^{\infty} \overline{\langle [N_t N_{t+\tau}]^2 \rangle} d\tau}} = \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{вх}}^2 \sqrt{\frac{\Pi_y}{\Pi_{\Phi}}} kM, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Pi_y = \int_0^{\infty} G_N(\omega) d\omega / [G_N(\omega)]_{\text{макс}}$ — ширина спектра шума на выходе усилителя (Π_y можно назвать также шириной полосы пропускания усилителя), а k — коэффициент, зависящий от формы этого спектра (например, для случая одиночного LC-контура $k = 1/\sqrt{2}$); наконец, величина M определяется следующим образом:

$$M^2 = \int_0^{\infty} \overline{\langle [N_t N_{t+\tau}]^2 \rangle} d\tau / \int_0^{\infty} \overline{\langle [N_t N_{t+\tau}] \rangle}^2 d\tau. \quad (5)$$

Выражение для чувствительности радиометра (4) отличается от обычного наличием множителя M , учитывающего степень нестационарности шума. Легко показать, что $M \leq 1$, причем знак равенства выполняется только для стационарного шума.

Таким образом, нестационарность шума (и сигнала) на выходе системы с переменными параметрами или, другими словами, наличие корреляционных зависимостей между его отдельными спектральными амплитудами приводит к тому, что применение ее в качестве усилителя в радиометре ухудшает чувствительность последнего по сравнению со случаем использования усилителя с неизменяющимися во времени параметрами (имеющего те же значения шум-фактора и Π_y).

Для иллюстрации вышеизложенного сначала приведем простой пример: пусть коэффициент усиления (по мощности) усилителя меняется во времени по закону $[1 + m(t)]$, где $m(t)$ — некоторая периодическая функция, причем $\langle m(t) \rangle = 0$ и $|m(t)| \leq 1$. Обозначим через $\overline{\langle N_t N_{t+\tau} \rangle}_0$ функцию корреляции шума на выходе усилителя при $m = 0$. Тогда, если период $m(t)$ много больше времени корреляции шума, то в общем случае при $m(t) \neq 0$ можем записать

$$\overline{N_t N_{t+\tau}} = [1 + m(t)] (\overline{N_t N_{t+\tau}})_0. \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), получим

$$M^2 = \frac{1}{1 + \langle m^2(t) \rangle}. \quad (7)$$

Если $m(t)$ является синусоидой с амплитудой, равной единице, то $M^2 = 2/3$; если же $m(t)$ представляет собой меандр такой же «амплитуды», то $M^2 = 1/2$. Следовательно, хотя чувствительность радиометра и не зависит от величины коэффициента усиления — если он постоянен —, периодическое изменение усиления приводит к ухудшению чувствительности.

Определим теперь значение величины M в случае одноконтурного параметрического усилителя с контуром, настроенным точно на половину частоты накачки. Используя выражение для функции корреляции шума на выходе усилителя для этого случая (см. формулы (8) и (14) работы [6]), будем иметь, согласно (5),

$$M^2 = \frac{\alpha^2 + \beta_0^2}{\alpha^2 + 3\beta_0^2}, \quad (8)$$

где α — затухание контура, а β_0 характеризует параметрическую регенерацию. При большом усилении, когда $\alpha \simeq \beta_0$, $M = 1/\sqrt{2}$.

Перейдем к параметрическому усилителю, работающему в сверхрегенеративном режиме, причем будем рассматривать только случай сильной регенерации ($\alpha \simeq \beta_0$). При высокой частоте суперизации $\Omega \gg \alpha \simeq \beta_0$, исходя из (5) и формул (7), (8) и (22) работы [6], получим

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\alpha_0^2(\beta_1)}{\alpha_0^2(\beta_1) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^2(\beta_1)}}, \quad (9)$$

где $\alpha_m(\beta_1)$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\beta_1 \phi(t)$, определяющей закон суперизации, а β_1 — «амплитуда» суперизации. Отсюда, учитывая значение ширины спектра для этого случая (см. формулу (24) работы [6])* , можно преобразовать (4) к виду

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} = \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вх}}^2 k \sqrt{\frac{(\Pi_y)_0}{\Pi_\phi}} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (10)$$

где $(\Pi_y)_0 = \pi(\alpha - \beta_0)$ — ширина спектра шума в отсутствие суперизации ($\beta_1 = 0$) при том же значении ($\alpha - \beta_0$).

Выражение (10) совпадает с выражением для $(S/N)_{\text{вых}}$, справедливым при регенеративном режиме работы усилителя. Следовательно, хотя суперизация и вызывает значительное расширение полосы пропускания системы, это не приводит в рассматриваемом случае $\Omega \gg \alpha - \beta_0$ к улучшению чувствительности радиометра.

При глубокой суперизации ($\beta_1 \gg \alpha - \beta_0$ и $\beta_1 \gg \Omega$), согласно формулам (7), (8), (25), (26) и (29) работы [6], после необходимых вычислений получим (Ω — любое)

* Напомним, что случаю $\Omega \gg \alpha - \beta_0$ соответствует сильно изрезанный спектр шума на выходе усилителя.

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\Omega^2}{\pi\beta_1\gamma_0}}. \quad (11)$$

Это выражение справедливо для непрерывных $\varphi(t)$, причем γ_0 является производной $\varphi(t)$ в точке пересечения ею нулевого уровня. При скачкообразном характере $\varphi(t)$ вместо (11) будем иметь

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{2\Omega}{\pi\beta_1\xi_0}}, \quad (12)$$

где $2\xi_0$ — величина скачка.

Очевидно, что в обоих случаях $M < 1$, поскольку $\beta_1 \gg \Omega$, а $\xi_0 \simeq 1$ и $\gamma_0 \simeq \Omega$. Если подставить (11) или (12) в (4), а также учесть выражения для ширины спектра (см. (35) и (37) в [6]), то для $(S/N)_{\text{вых}}$ будем иметь

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} = \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вх}}^2 k \sqrt{\frac{\Omega}{2\Pi_\Phi} \frac{\text{ch}[2\pi(\alpha - \beta_0)/\Omega] - 1}{\text{sh}[2\pi(\alpha - \beta_0)/\Omega]}}. \quad (13)$$

Таким образом, соотношение (13) оказывается справедливым для $\varphi(t)$ любого вида. При $\Omega \gg \alpha - \beta_0$ (13) переходит в (10); при $\Omega \ll \alpha - \beta_0$ (13) можно записать

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} = \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вх}}^2 k \sqrt{\frac{\Omega}{2\Pi_\Phi}}, \quad (14)$$

т. е. в выражение для чувствительности радиометра в данном случае вместо ширины полосы пропускания сверхрегенеративного усилителя входит существенно меньшая величина — частота суперизации Ω .

Для обычного сверхрегенератора, у которого меняется лишь затухание контура по закону $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1\varphi(t)$, при замене $\alpha - \beta_0$ на α_0 и β_1 на α_1 полученные выше формулы останутся почти без изменений: в (9) ÷ (14) необходимо убрать лишь множитель $1/\sqrt{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. И. Бунимович, Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, изд. Сов. радио, М., 1951, гл. 7.
- 2 В. С. Троицкий, ЖТФ, **21**, 994 (1951).
- 3 Ф. В. Бункин, Н. В. Карлов, ЖТФ, **25**, 430, 733 (1955).
- 4 И. Л. Берштейн, К. А. Горонина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **4**, 515 (1961).
- 5 С. Р. Wang, С. Wade, IRE Trans., **GT-9**, № 4, 20 (1962).
- 6 В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, 502 (1964).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 октября 1963 г.

* При $\Omega \ll \alpha - \beta_0$ спектр шума на выходе сверхрегенератора практически неизрезан.

THE SENSITIVITY OF RADIOMETER CONTAINING SYSTEM WITH VARIABLE
PARAMETERS*V. A. Markelov*

The threshold sensitivity of apparatus containing the system with variable parameters is shown to be worse than that of the system of usual type with the same values of noise-figure and pass band when using the compensational or modulational method.

ПРОХОЖДЕНИЕ ШУМОВОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ СИСТЕМУ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. А. Маркелов

На примере параметрического регенеративного и сверхрегенеративного усилителей рассматриваются особенности прохождения случайного процесса (белого шума) через систему с периодически меняющимися параметрами. Получены выражения для функции корреляции и спектра периодически нестационарного процесса на выходе системы. Рассмотрен также вопрос детектирования такого процесса

В настоящей работе анализируется прохождение случайного процесса через одноконтурный параметрический усилитель, работающий в регенеративном или сверхрегенеративном режиме. В некоторых работах (см., например, [1]) при рассмотрении систем с переменными параметрами был применен метод переходных функций. При воздействии на систему сигнала шумового характера проще исходить непосредственно из дифференциального уравнения системы. При помощи полученных выражений для функции корреляции определяется спектр процесса на выходе усилителя; определяется также спектр данного процесса после квадратичного детектирования. Некоторые из результатов данной работы совпадают с результатами, полученными в [1].

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть исследуемая система является колебательным контуром, емкость которого периодически (или почти периодически) меняется во времени. Уравнение контура запишем в виде

$$L \frac{d}{dt} \left[(C_0 + C_1) \frac{dx}{dt} \right] + r (C_0 + C_1) \frac{dx}{dt} + x = E(t), \quad (1)$$

где x — напряжение на емкости, L и r — индуктивность и сопротивление контура, C_0 и C_1 — соответственно постоянная и переменная составляющие емкости, а $E(t)$ — случайная ЭДС, включенная последовательно в контур; $E(t)$ везде в дальнейшем будем считать δ -коррелированной. Запишем C_1 в форме

$$C_1 = 4C_0\beta(t) \cos(2\omega t + \chi_0), \quad (2)$$

где $\beta(t)$ представляет собой периодическую функцию времени, медленную по сравнению с $\cos(\omega t)$. Учитывая это и вводя обозначения

$$t_n = \omega t, \quad \alpha = \omega r C_0 / 2, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}, \quad \gamma = (\omega - \omega_0)/\omega,$$

перепишем (1) в виде

$$\frac{d^2 x}{dt_n^2} + x = -2\alpha \frac{dx}{dt_n} + 2\gamma x + 4\beta(t_n) \frac{d}{dt_n} \left[\cos(2t_n + \chi_0) \frac{dx}{dt_n} \right] + E(t_n). \quad (3)$$

В дальнейшем индекс у t_n будем опускать.

Положим, как обычно, $\alpha \ll 1$, $|\gamma| \ll 1$, $|\beta(t)| \ll 1$. В этом случае урав-

нение (3) описывает узкополосный случайный процесс, который представим в виде

$$x = u \cos(t + \chi_0/2 + \pi/4) + v \sin(t + \chi_0/2 + \pi/4);$$

$$\frac{dx}{dt} = -u \sin(t + \chi_0/2 + \pi/4) + v \cos(t + \chi_0/2 + \pi/4) \quad (4)$$

(u и v — медленно меняющиеся функции). Отбрасывая быстро осциллирующие члены, перейдем теперь от уравнения (3) к укороченным уравнениям относительно переменных u и v :

$$\frac{du}{dt} = -[\alpha - \beta(t)]u - \gamma v + E_1(t);$$

$$\frac{dv}{dt} = -[\alpha + \beta(t)]v + \gamma u + E_2(t), \quad (5)$$

где $E_1 = -E \sin(t + \chi_0/2 + \pi/4)$ и $E_2 = E \cos(t + \chi_0/2 + \pi/4)$.

Если контур настроен точно на половину частоты накачки $\omega/2$ ($\gamma=0$), то система (5) распадается на два независимых уравнения. Этот случай, как наиболее простой, и будет в основном рассматриваться в дальнейшем. Для $\gamma \neq 0$ мы приведем лишь некоторые окончательные результаты.

Установившееся решение уравнений (5) при $\gamma = 0$ имеет вид

$$u = \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\int_{t'}^t [\alpha - \beta(z)] dz\right\} E_1(t') dt';$$

$$v = \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\int_{t'}^t [\alpha + \beta(z)] dz\right\} E_2(t') dt'. \quad (6)$$

Положим $\beta(t) = \beta_0 - \beta_1 \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — некоторая периодическая функция периода $T_q = 2\pi/\Omega$. Согласно сделанным выше предположениям $\Omega \ll 1$; кроме того, $\overline{\varphi(t)} = 0^*$ и $|\varphi(t)|_{\max} = 1$. Положив $\langle E_{t_1} E_{t_2} \rangle = 2k\delta(t_1 - t_2)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция, для функций корреляции u и v получим при $\tau > 0$

$$\langle u_t u_{t+\tau} \rangle = ke^{-(\alpha-\beta_0)\tau} e^{-\beta_1[\Phi(t)+\Phi(t+\tau)]} \times$$

$$\times \left\{ e^{-2(\alpha-\beta_0)t} \int_{-\infty}^t e^{2(\alpha-\beta_0)t'} e^{2\beta_1\Phi(t')} dt' \right\};$$

$$\langle v_t v_{t+\tau} \rangle = ke^{-(\alpha+\beta_0)\tau} e^{\beta_1[\Phi(t)+\Phi(t+\tau)]} \times$$

$$\times \left\{ e^{-2(\alpha+\beta_0)t} \int_{-\infty}^t e^{2(\alpha+\beta_0)t'} e^{-2\beta_1\Phi(t')} dt' \right\}; \quad (7)$$

$$\langle u_t v_{t+\tau} \rangle = 0.$$

Здесь $\Phi(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t') dt'$ (t_0 — произвольная константа). Отсюда нетрудно определить функцию корреляции исследуемого процесса $x(t)$. Действительно, согласно (4), имеем

* Здесь и в дальнейшем прямая черта сверху означает усреднение по времени, $\langle \rangle$ — по ансамблю.

$$\begin{aligned} \langle x_t x_{t+\tau} \rangle &= \frac{1}{2} (\langle u_t u_{t+\tau} \rangle + \langle v_t v_{t+\tau} \rangle) \cos \tau + \\ &+ \frac{1}{2} (\langle u_t u_{t+\tau} \rangle - \langle v_t v_{t+\tau} \rangle) \cos (2t + \tau) = \\ &= B_1(t, \tau) \cos \tau + B_2(t, \tau) \cos (2t + \tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно из (7), $B_1(t, \tau)$ и $B_2(t, \tau)$ представляют собой затухающие функции τ и периодические функции t (с периодом $2\pi/\Omega$). Таким образом, в общем случае средний квадрат и функция корреляции процесса $x(t)$ зависят от времени с частотами Ω и 2 .

Зная функцию корреляции (8), найдем выражение для спектра исследуемого процесса:

$$G_x(\omega) = 4 \int_0^{\infty} \langle \overline{x_t x_{t+\tau}} \rangle \cos(\omega\tau) d\tau = 2 \int_0^{\infty} \langle \overline{B_1(t, \tau)} \rangle \cos[(1-\omega)\tau] d\tau. \quad (9)$$

Поскольку $B_1(t, \tau)$ — затухающая функция τ , медленная по сравнению с $\cos \tau$, то $G_x(\omega)$ представляет собой сплошной узкий спектр, сосредоточенный вблизи частоты 1.

В случае стационарного случайного процесса его спектральные амплитуды, как известно, некоррелированы; нестационарность же приводит к появлению определенной корреляционной зависимости между ними. Действительно, представляя случайный процесс $x(t)$ рядом Фурье на интервале $[-T/2; T/2]$:

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\nu_0 t + b_m \sin m\nu_0 t), \quad (10)$$

где $\nu_0 = 2\pi/T$, можем записать

$$\begin{aligned} \langle a_m a_n \rangle &= \frac{4}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \langle x_t x_{t+\tau} \rangle \cos(m\nu_0 t) \cos[n\nu_0(t+\tau)] dt d(t+\tau) = \\ &= \frac{4}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\nu_0 t) \cos(n\nu_0 t) \int_{-T/2-t}^{T/2-t} \langle x_t x_{t+\tau} \rangle \cos(n\nu_0 \tau) dt d\tau - \\ &- \frac{4}{T^2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\nu_0 t) \sin(n\nu_0 t) \int_{-T/2-t}^{T/2-t} \langle x_t x_{t+\tau} \rangle \sin(n\nu_0 \tau) dt d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичным же образом получаются выражения для $\langle b_m b_n \rangle$ и $\langle a_m b_n \rangle$.

Пусть теперь $T \rightarrow \infty$; одновременно с T будем увеличивать m и n таким образом, чтобы $m\nu_0 = \omega_1 = \text{const}$ и $n\nu_0 = \omega_2 = \text{const}$. Тогда, если $\langle x_t x_{t+\tau} \rangle$ будет периодической функцией времени с периодом $2\pi/\theta_0$, то, согласно (11), коэффициент корреляции спектральных амплитуд $\lim_{T \rightarrow \infty} \langle a_{\omega_1} a_{\omega_2} \rangle (\langle a_{\omega_1}^2 \rangle \langle a_{\omega_2}^2 \rangle)^{-1/2}$ будет отличным от нуля не только при $\omega_1 = \omega_2$, но, вообще говоря, и при $\omega_1 = |\omega_2 \pm n\theta_0|$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

Рассмотрим теперь прохождение исследуемого процесса $x(t)$ через квадратичный детектор. Для нормального процесса (процесс является нормальным, поскольку сила, действующая на систему, дельта-коррелирована) справедливо следующее соотношение между моментами распределения (см., например, [2], стр. 197):

$$\langle x_{t_1}^2 x_{t_2}^2 \rangle = \langle x^2(t_1) \rangle \langle x^2(t_2) \rangle + 2 [\langle x_{t_1} x_{t_2} \rangle]^2. \quad (12)$$

Учитывая, что детектор выполняет преобразование вида $J = x^2$, и пользуясь (12), для усредненной по времени функции корреляции тока детектора получим

$$\begin{aligned} \overline{\langle J_t J_{t+\tau} \rangle} &= \overline{\langle x^2(t) \rangle \langle x^2(t+\tau) \rangle} + 2 \overline{[\langle x_t x_{t+\tau} \rangle]^2} = \overline{B_1(t, 0) B_1(t+\tau, 0)} + \\ &+ \frac{1}{2} \overline{B_2(t, 0) B_2(t+\tau, 0)} \cos(2\tau) + \overline{B_1^2(t, \tau)} + \overline{B_2^2(t, \tau)} + \\ &+ \overline{B_1^2(t, \tau)} \cos(2\tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда по формуле (9) можно найти и спектр тока детектора. Поскольку $B_1(t, \tau)$ и $B_2(t, \tau)$ являются периодическими функциями t , то легко видеть, что первые два слагаемые в (13) определяют дискретную часть спектра. Слагаемому $\overline{B_1(t, 0) B_1(t+\tau, 0)}$ соответствуют дискретные линии на частотах $0, \Omega, 2\Omega, \dots$, а слагаемому $\frac{1}{2} \overline{B_2(t, 0) B_2(t+\tau, 0)} \times \cos(2\tau)$ дискретные линии вблизи частоты $2: 2, 2 \pm \Omega, 2 \pm 2\Omega \dots$

При $\beta(t) = 0$ (детектируемый процесс стационарный) дискретные линии в спектре тока будут отсутствовать (за исключением лишь одной — на нулевой частоте)*.

Сплошная часть спектра определяется оставшимися тремя слагаемыми: $\overline{B_1^2(t, \tau)}$ и $\overline{B_2^2(t, \tau)}$ дают спектр, примыкающий к нулю, $\overline{B_1^2(t, \tau)} \cos(2\tau)$ — к частоте 2. Отметим, что в рассматриваемом (нестационарном) случае нет равенства мощностей низкочастотных и высокочастотных флюктуаций на выходе детектора. Если детектор линейный, то дискретные линии, как это можно показать, также будут присутствовать в спектре тока детектора; они сгруппированы в этом случае около частот $0, 2, 4, \dots$ Применим полученные выше результаты к отдельным частным случаям.

2. РЕГЕНЕРАТИВНЫЙ РЕЖИМ

Положив в (7) $\beta_1 = 0$ (амплитуда «накачки» постоянна), получаем

$$\begin{aligned} \langle u_t u_{t+\tau} \rangle &= k e^{-(\alpha - \beta_0) |\tau|} / 2 (\alpha - \beta_0); \\ \langle v_t v_{t+\tau} \rangle &= k e^{-(\alpha + \beta_0) |\tau|} / 2 (\alpha + \beta_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Пользуясь (8) и (9), получим выражение для спектра:

$$G_x(\omega) = \frac{k}{2} \left[\frac{1}{(\alpha - \beta_0)^2 + (1 - \omega)^2} + \frac{1}{(\alpha + \beta_0)^2 + (1 - \omega)^2} \right], \quad (15)$$

откуда ширина спектра

$$\Pi = \frac{\int_0^\infty G_x(\omega) d\omega}{G_x(1)} = \pi \alpha \frac{\alpha^2 - \beta_0^2}{\alpha^2 + \beta_0^2} \simeq \pi (\alpha - \beta_0). \quad (16)$$

* Наличие дискретных линий в спектре тока детектора при детектировании периодически нестационарного процесса было показано теоретически (и подтверждено экспериментально) для частного случая в работе [3]

Последнее приближенное значение Π имеет место при практически применяемом случае $\alpha - \beta_0 \ll \alpha$.

Формулы (14)–(16) были получены в предположении $\gamma = 0$ (расстройка контура относительно половины частоты накачки отсутствует). При $\gamma \neq 0$ расчет функции корреляции и спектра весьма громоздок. Ограничимся приведением лишь окончательных результатов. При $|\gamma| < \beta_0$ для функции корреляции имеем

$$\begin{aligned} \overline{\langle x_t x_{t+\tau} \rangle} &= \frac{k}{4\alpha} \left[\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2 - \beta_0^2 + \gamma^2} (e^{-\lambda_1 |\tau|} + e^{-\lambda_2 |\tau|}) \cos \tau + \right. \\ &+ \frac{\beta_0^2 \alpha}{\alpha^2 - \beta_0^2 + \gamma^2} \sqrt{\frac{\beta_0^2 - \gamma^2}{\beta_0^2 - \gamma^2}} (e^{-\lambda_1 |\tau|} - e^{-\lambda_2 |\tau|}) \cos \tau + \\ &\left. + \frac{\gamma}{\sqrt{\beta_0^2 - \gamma^2}} (e^{-\lambda_1 |\tau|} - e^{-\lambda_2 |\tau|}) \sin |\tau| \right], \end{aligned} \quad (17)$$

где $\lambda_1 = \alpha - \sqrt{\beta_0^2 - \gamma^2}$; $\lambda_2 = \alpha + \sqrt{\beta_0^2 - \gamma^2}$. Наличие члена с $\sin |\tau|$ свидетельствует об асимметрии спектра относительно центральной частоты 1; спектр вытянут в сторону частоты, соответствующей настройке контура. При больших расстройках, а именно при $|\gamma| > \beta_0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{\langle x_t x_{t+\tau} \rangle} &= \frac{ke^{-a|\tau|}}{4\alpha} \left\{ \left[\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + a^2} - \frac{\gamma}{a} \right] \cos [(1+a)\tau] + \right. \\ &+ \frac{\beta_0^2 \alpha / a}{\alpha^2 + a^2} \sin [(1+a)|\tau|] + \left[\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + a^2} + \frac{\gamma}{a} \right] \cos [(1-a)\tau] - \\ &\left. - \frac{\beta_0^2 \alpha / a}{\alpha^2 + a^2} \sin [(1-a)|\tau|] \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $a^2 = \gamma^2 - \beta_0^2$.

Таким образом, если при $|\gamma| < \beta_0$ функция $\overline{\langle x_t x_{t+\tau} \rangle}$ спадала к нулю с двумя различными постоянными затухания λ_1 и λ_2 , то теперь постоянные становятся одинаковыми и равными постоянной затухания нерегулируемого контура. Кроме того, как видно из (18), при $|\gamma| > \beta_0$ самовозбуждение усилителя становится невозможным при любом α (система находится вне зоны неустойчивости на диаграмме Матье). Спектр, соответствующий функции корреляции (18), имеет два максимума разной высоты, расположенных вблизи частот $1+a$ и $1-a$.

Примерный ход спектральных кривых для разобранных выше трех случаев изображен на рис. 1.

Пользуясь (8), (11) и (14), найдем (при $\gamma = 0$) корреляционную зависимость между спектральными амплитудами процесса:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle a_{\omega_1} a_{\omega_2} \rangle}{\sqrt{\langle a_{\omega_1}^2 \rangle} \sqrt{\langle a_{\omega_2}^2 \rangle}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle b_{\omega_1} b_{\omega_2} \rangle}{\sqrt{\langle b_{\omega_1}^2 \rangle} \sqrt{\langle b_{\omega_2}^2 \rangle}} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_1 = \omega_2 \\ \frac{2\alpha\beta_0}{\alpha^2 + \beta_0^2 + (1 - \omega_1)^2} & \text{при } \omega_1 = 2 - \omega_2 \\ 0 & \text{для всех остальных } \omega_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

и $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle a_{\omega_1} b_{\omega_2} \rangle}{\sqrt{\langle b_{\omega_1}^2 \rangle} \sqrt{\langle b_{\omega_2}^2 \rangle}} = 0$ для всех частот*. Следовательно, спек-

тральные амплитуды на зеркальных частотах (относительно половины частоты накачки) оказываются коррелированными и тем больше, чем больше регенерация. На пороге самовозбуждения (при $\beta_0 \rightarrow \alpha$) коэффициент корреляции для частот, лежащих в полосе пропускания регенерированного контура ($|1 - \omega_1| \ll \alpha$), стремится к 1. Интенсивность процесса (при любом γ) равна

$$\langle x^2 \rangle = k \left\{ 2\alpha \left[1 - \frac{\beta_0^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \right] \right\}^{-1}. \quad (20)$$

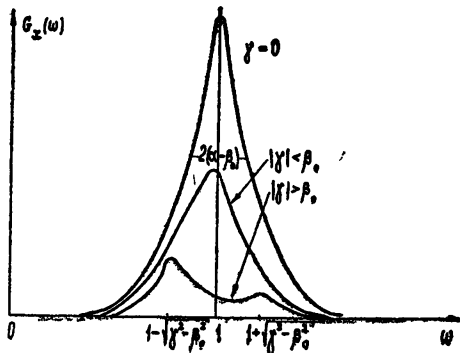


Рис. 1.

Подставляя (14) в (13), можно определить функцию корреляции и спектр процесса после квадратичного детектирования. Спектр в данном случае будет состоять из двух дискретных линий на частотах 0 и 2 и примыкающего к ним сплошного спектра.

3. СВЕРХРЕГЕНЕРАТИВНЫЙ РЕЖИМ

Проведенный ниже анализ параметрического сверхрегенератора относится в основном к наиболее интересному на практике случаю $\alpha - \beta_0 \ll \alpha + \beta_0$ (степень параметрической регенерации достаточно высока). Из (7) легко видеть, что при таком условии $\langle v_t v_{t+\tau} \rangle \ll \langle u_t u_{t+\tau} \rangle$ и поэтому в дальнейших расчетах $v(t)$ можно не принимать во внимание.

Заметим, что для обычного сверхрегенератора (емкость контура постоянна, затухание α меняется с частотой Ω), как это легко усмотреть из (5), весь расчет можно провести тем же способом, что и ниже: в этом случае $\langle v_t v_{t+\tau} \rangle = \langle u_t u_{t+\tau} \rangle$.

Основная математическая трудность в рассмотрении сверхрегенеративного режима заключается в вычислении интеграла в формуле (7). Однако, если частота суперизации много больше ширины полосы пропускания контура без суперизации, т. е. $\Omega \gg \alpha - \beta_0$ (при любом β_1^{**}), или если степень суперизации, определяемая β_1 , достаточно высока (при любом Ω), то при вычислении интеграла можно воспользоваться асимптотическими выражениями. Действительно, представив функции $e^{-\beta_1 \Phi(t)}$ и $e^{\beta_1 \Phi(t)}$ рядами Фурье:

$$e^{-\beta_1 \Phi(t)} = a_0(\beta_1) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\beta_1) \cos(m\Omega t + x_m); \quad (21)$$

$$e^{\beta_1 \Phi(t)} = b_0(\beta_1) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\beta_1) \cos(m\Omega t + \lambda_m)$$

* Отметим, что в случае $\gamma \neq 0$ имеет место также корреляция между a_{ω_1} и b_{ω_2} при $\omega_2 = 2 - \omega_1$.

** Условия, налагаемые на β_1 , будут выяснены в дальнейшем.

и обозначив для краткости $\alpha - \beta_0$ через α_0 , запишем выражение в фигурной скобке в первой из формул (7) так:

$$\left\{ e^{-2\alpha_0 t} \int_{-\infty}^t e^{2\alpha_0 t'} e^{2\beta_1 \Phi(t')} dt' \right\} = \left\{ \frac{b_0(2\beta_1)}{2\alpha_0} + \right. \quad (22)$$

$$\left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m(2\beta_1)}{4\alpha_0^2 + m^2\Omega^2} [2\alpha_0 \cos(m\Omega t + \lambda_m) + m\Omega \sin(m\Omega t + \lambda_m)] \right\}.$$

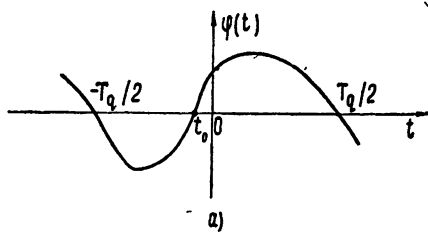
При $\Omega \gg \alpha_0$ в полученном ряде можно учитывать лишь один первый член. Воспользовавшись этим, найдем, согласно (7), (8), усредненную за период суперизации функцию корреляции:

$$\langle \overline{x_t x_{t+\tau}} \rangle = \frac{k}{4\alpha_0} b_0(2\beta_1) e^{-\alpha_0 |\tau|} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^2(\beta_1) \cos[(1+m\Omega)\tau] \right\}. \quad (23)$$

Спектр, соответствующий такой функции корреляции, изображен на рис. 2. Он представляет собой ряд равноотстоящих всплесков высоты $a_m^2(\beta_1)$, каждый из которых повторяет по форме спектр на выходе усилителя в отсутствие суперизации (при том же значении α_0). Ширина спектра

$$\Pi = \frac{\int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega}{G_x(1)} = \pi\alpha_0 \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^2(\beta_1)}{a_0^2(\beta_1)} \right] = \pi\alpha_0 \frac{a_0(2\beta_1)}{a_0^2(\beta_1)}. \quad (24)$$

Точные аналитические выражения для коэффициентов Фурье $a_m(\beta_1)$ и $b_m(\beta_1)$ можно получить лишь для некоторых простейших законов модуляции (синусоидальной, прямоугольной, треугольной и др.). Положение значительно облегчается при больших β_1 , когда полностью знать ход $\varphi(t)$ не обязательно — значения коэффициентов определяются в основном лишь поведением $\varphi(t)$ при пересечении ею оси абсцисс и площадью под одной ее полуволной. При этом имеет смысл различать два типа функций $\varphi(t)$: первый, когда $\varphi(t)$ непрерывна вблизи точки пере-



а)

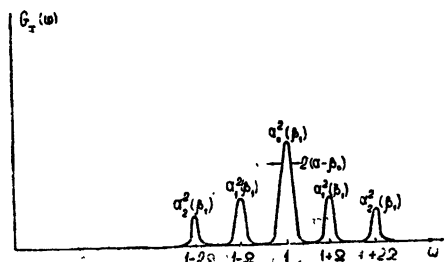


Рис. 2.

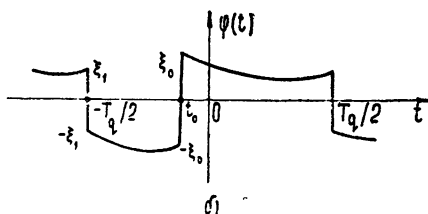


Рис. 3.

сечения ею оси абсцисс (рис. 3а), и второй, когда $\varphi(t)$ пересекает ось абсцисс скачком (рис. 3б).

Остановимся сначала на первом типе. Тогда вблизи точки пересечения t_0 можно положить $\Phi(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t') dt' \approx \frac{1}{2} \eta_0 (t - t_0)^2$, где $\eta_0 = (d\varphi/dt)_{t=t_0}$. Если $\beta_1 \gg \Omega$, то*

$$a_m(\beta_1) = \frac{1}{T_q} \int_{-T_q/2}^{T_q/2} e^{-\beta_1 \Phi(t)} \cos(m\Omega t) dt \approx \tag{25}$$

$$\approx \frac{1}{T_q} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta_1 \eta_0}{2} t^2\right) \cos(m\Omega t) dt = \sqrt{\frac{\Omega^2}{2\pi\beta_1 \eta_0}} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2\beta_1 \eta_0} m^2\right),$$

Аналогично

$$b_m(\beta_1) = \frac{1}{T_q} \int_{-T_q/2}^{T_q/2} e^{\beta_1 \Phi(t)} \cos(m\Omega t) dt \approx (-1)^m e^{\beta_1 S_\varphi} \times \tag{26}$$

$$\times \sqrt{\frac{\Omega^2}{2\pi\beta_1 \eta_1}} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{2\beta_1 \eta_1} m^2\right),$$

где

$$\eta_1 = |(d\varphi/dt)_{t=T_q/2}|; \quad S_\varphi = \int_{t_0}^{T_q/2} \varphi(t) dt.$$

Если $\varphi(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 3б, то вместо (25) и (26) будем иметь

$$a_m(\beta_1) = \frac{\Omega}{\pi\beta_1 \zeta_0} \frac{1}{1 + (\Omega/\beta_1 \zeta_0)^2 m^2}; \tag{27}$$

$$b_m(\beta_1) = (-1)^m e^{\beta_1 S_\varphi} \frac{\Omega}{\pi\beta_1 \zeta_1} \frac{1}{1 + (\Omega/\beta_1 \zeta_1)^2 m^2}. \tag{28}$$

Нетрудно рассмотреть и смешанный случай, когда $\varphi(t)$ пересекает ось абсцисс один раз плавно, другой — скачком.

Если наложить на β_1 дополнительное условие $\beta_1 \gg \alpha_0$, то ряд в правой части (22) можно просуммировать ([5], стр. 53), и, таким образом, отказаться от прежнего ограничения $\Omega \gg \alpha_0$:

$$\left\{ e^{-2\alpha_0 t} \int_{-\infty}^t e^{2\alpha_0 t'} e^{2\beta_1 \Phi(t')} dt' \right\} \approx \tag{29}$$

$$\approx b_0(2\beta_1) \frac{e^{-2\alpha_0 t}}{\Omega/\pi \operatorname{sh}(2\pi\alpha_0/\Omega)} \left(-\frac{T_q}{2} \leq t \leq \frac{T_q}{2} \right).$$

* Здесь и в дальнейшем для упрощения выкладок принято $t_0=0$; можно показать, однако, что положение точки t_0 при $\beta_1 \gg \Omega$ не оказывает существенного влияния на искомую функцию корреляции $x(t)$.

Последнее, приближенное, выражение справедливо, как видно, лишь на протяжении одного периода суперизации.

Подставив (29) в (7) и положив там $\tau = 0$, найдем сначала зависимость от времени среднего квадрата огибающей $A_x(t)$ исследуемого процесса:

$$\langle A_x^2(t) \rangle = \langle u^2(t) \rangle + \langle v^2(t) \rangle \approx \langle u^2(t) \rangle = \frac{\pi k b_0 (2\beta_1)}{\Omega \operatorname{sh}(2\pi\alpha_0/\Omega)} e^{-2\beta_1\Phi(t)} e^{-2\alpha_0 t} \quad (30)$$

$$\left(-\frac{T_q}{2} \leq t \leq \frac{T_q}{2} \right).$$

Процесс имеет, следовательно, характер всплесков, форма которых определяется при больших β_1 (глубокая суперизация) в основном модулирующей функцией $\varphi(t)$. Нетрудно показать, что максимум $\langle A_x^2(t) \rangle$ приходится на тот момент времени, когда эквивалентное затухание контура $\alpha_0 + \beta_1\varphi(t)$ меняет знак с отрицательного на положительный (конец периода самовозбуждения).

Определим теперь из (7) и (29) усредненную за период суперизации функцию корреляции $u(t)$ (при $\tau > 0$):

$$\overline{\langle u_t u_{t+\tau} \rangle} = \frac{k b_0 (2\beta_1) e^{-\alpha_0\tau}}{\Omega/\pi \operatorname{sh}(2\pi\alpha/\Omega)} \left\{ \frac{1}{T_q} \int_{-T_q/2}^{T_q/2} e^{-\beta_1[\Phi(t+\tau)+\Phi(t)]} e^{-2\alpha_0 t} dt \right\} = \quad (31)$$

$$= \frac{\pi k b_0 (2\beta_1)}{\Omega \operatorname{sh}(2\pi\alpha/\Omega)} e^{-\alpha_0\tau} R(\tau).$$

Рассмотрим поведение $R(\tau)$ при больших β_1 ($\beta_1 \gg \max\{\alpha_0, \Omega\}$) вблизи $\tau=0$. Пусть $\varphi(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 3а; тогда, учитывая характер $e^{-\beta_1\Phi(t)}$, можем написать

$$R(\tau) = \frac{1}{T_q} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta_1\eta_0/2)[(t+\tau)^2+t^2]} e^{-2\alpha_0 t} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Omega^2}{\pi\beta_1\eta_0}} \times \quad (32)$$

$$\times e^{-\beta_1\eta_0\tau^2/4} e^{\alpha_0\tau}.$$

Как видно, функция $R(\tau)$ очень быстро (за время порядка $(\beta_1\eta_0)^{-1/2} \simeq (\beta_1\Omega)^{-1/2}$) спадает практически до нуля. В силу своей периодичности, $R(\tau)$ точно так же ведет себя вблизи точек $\pm T_q$, $\pm 2T_q$ и т. д. Таким образом, $R(\tau)$ представляет собой ряд узких (шириной $(\beta_1\Omega)^{-1/2}$) всплесков, отстоящих друг от друга на расстоянии T_q . За время $\tau = (\beta_1\Omega)^{-1/2}$ множитель $e^{-\alpha_0\tau}$ не успеет существенно измениться и его на протяжении одного всплеска можно считать постоянным. Поэтому (31) можно переписать в виде

$$\overline{\langle u_t u_{t+\tau} \rangle} = \frac{k}{4} \frac{e^{2\beta_1 S_\varphi}}{\beta_1 \operatorname{sh}(2\pi\alpha/\Omega)} \frac{1}{\sqrt{\eta_0\eta_1/\Omega^2}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha_0 m T_q} \times \quad (33)$$

$$\times e^{-(\beta_1\eta_0/4)(\tau - m T_q)^2}.$$

Отсюда, пользуясь (8) и (9), найдем спектр процесса на выходе сверхрегенератора:

$$G_x(\omega) = \frac{(k/4) e^{2\beta_1 S_\varphi} \Omega \sqrt{\pi/\beta_1 \eta_1}}{\beta_1 \operatorname{sh}(2\pi\alpha_0/\Omega) \eta_0} e^{-(1-\omega)^2/\beta_1 \eta_0} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_0 m T_q} \times \right. \\ \left. \times \cos(1-\omega) m T_q \right] = \frac{k e^{2\beta_1 S_\varphi} \Omega \sqrt{\pi/\beta_1 \eta_1}}{4\beta_1 \operatorname{sh}(2\pi\alpha_0/\Omega) \eta_0} e^{-(1-\omega)^2/\beta_1 \eta_0} \times \quad (34) \\ \times \frac{\operatorname{sh}(2\pi\alpha_0/\Omega)}{\operatorname{ch}[2\pi\alpha_0/\Omega] - \cos[2\pi(1-\omega)/\Omega]}.$$

В последнем равенстве суммирование ряда проведено согласно [5] (стр. 55). Ширина спектра в этом случае оказывается равной

$$\Pi = \frac{\int_0^{\infty} G_x(\omega) d\omega}{G_x(1)} = \sqrt{\pi\beta_1 \eta_0} \frac{\operatorname{ch}(2\pi\alpha_0/\Omega) - 1}{\operatorname{sh}(2\pi\alpha_0/\Omega)}. \quad (35)$$

Для кривой $\varphi(t)$ второго типа (рис. 3б) после аналогичных вычислений получим соответственно

$$G_x(\omega) = \frac{k e^{2\beta_1 S_\varphi} \Omega}{\beta_1 \operatorname{sh}(2\pi\alpha_0/\Omega) (\beta_1 \zeta_0)^2 \pi \zeta_1} \frac{[\zeta_0 \beta_1]^4}{[(1-\omega)^2 + (\zeta_0 \beta_1)^2]^2} \times \quad (36) \\ \times \frac{\operatorname{sh}[2\pi\alpha_0/\Omega]}{\operatorname{ch}[2\pi\alpha_0/\Omega] - \cos[2\pi(1-\omega)/\Omega]};$$

$$\Pi = \frac{\pi}{2} \zeta_0 \beta_1 \frac{\operatorname{ch}(2\pi\alpha_0/\Omega) - 1}{\operatorname{sh}(2\pi\alpha_0/\Omega)}. \quad (37)$$

Множитель $\operatorname{sh}(2\pi\alpha_0/\Omega) \{\operatorname{ch}[2\pi\alpha_0/\Omega] - \cos[2\pi(1-\omega)/\Omega]\}^{-1}$ в формулах (34) и (36) является периодической функцией ω (период ее Ω). Характер этой функции определяет степень изрезанности спектра и зависит только от отношения α_0/Ω при $\alpha_0/\Omega \gg 1$ она почти постоянна (спектр практически неизрезан); при $\alpha_0/\Omega \ll 1$ она представляет собой ряд узких (шириной $2\alpha_0$) всплесков, расположенных на частотах $1 \pm n\Omega$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Их форма, как нетрудно показать, соответствует форме спектра на выходе системы при $\beta_1 = 0$ (в этом случае спектр сильно изрезан). Функция $e^{-(1-\omega)^2/\beta_1 \eta_0}$ или соответственно $(\zeta_0 \beta_1)^4 / [(1-\omega)^2 + (\zeta_0 \beta_1)^2]^2$ (сомножители в формулах (37) и (39) является огибающей спектра, поскольку ширина этих функций при сделанных вышепредположениях относительно величины β_1 много больше Ω .

Как видно, форма огибающей спектра определяется поведением $\varphi(t)$ в момент времени t_0 , соответствующий концу периода самовозбуждения системы. При плавном переходе $\varphi(t)$ через нуль огибающая представляет собой гауссову кривую, при скачкообразном* — резонансную кривую двух слабо связанных колебательных контуров (по мощности). Картины спектров для трех различных соотношений между значениями α_0 и Ω приведены на рис. 4. Интересно отметить, что в [4] при исследовании синусоидального воздействия на сверхрегенератор были получены аналогичные выражения для огибающей резонансной кривой системы, причем ее характер определяется поведением эффективного затухания контура в момент времени, соответствующий началу периода самовозбуждения; таким образом, вид огибающей может, вообще говоря, сильно

* Можно показать, что идеализация скачкообразности изменения функции $\varphi(t)$ разумна при условии, что длительность «скачка» существенно меньше величины $1/\beta_1$.

отличаться от огибающей спектра на выходе сверхрегенератора в рассматриваемом случае.

Интенсивность процесса на выходе сверхрегенератора, как видно из (34) и (36), определяется в основном множителем $e^{2\beta_1 S_\varphi}$. Напомним, что S_φ есть площадь под одной полуволевой функцией $\varphi(t)$.

В случае обычного сверхрегенератора, если принять, что затухание

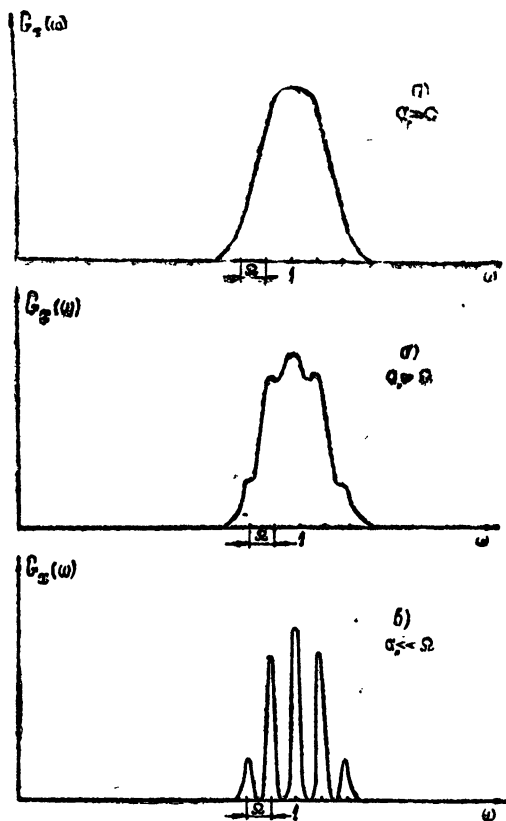


Рис. 4.

его контура меняется по закону $(\alpha - \beta_0) + \beta_1 \varphi(t)$, полученные выше формулы (24), (31), (33), (35) и (37) останутся без изменений, а в правых частях формул (23), (30), (34) и (36) лишь добавится множитель 2.

В заключение приношу благодарность И. Л. Берштейну за руководство и помощь в работе и К. А. Горониной за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Е. Дьяков, Диссертация, Москва, 1961 г.
2. В. Б. Давенпорт и В. Л. Рут, Введение в статистическую теорию сигналов и шумов, ИЛ, М., 1961.
3. С. И. Боровицкий, ДАН СССР, 74, 233 (1950).
4. Л. С. Гуткин, Радиотехника, № 9, 40 (1946).
5. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, 1951.

NOISE SIGNAL PASSAGE THROUGH THE SYSTEM WITH VARIABLE
PARAMETERS*V. A. Markelov*

By the example of the parametric regenerative and superregenerative amplifier the peculiarities are considered of the random signal passage (white noise) through the system with periodically varying parameters. The expressions have been obtained for the correlation function and the spectrum of periodically non-stationary process at the output of the system. The detection of such a process has been considered.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В СВЯЗАННЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. М. Белянцев, Г. И. Фрейдман

Рассматриваются некоторые особенности электромагнитных волн в связанных (многопроводных) линиях передачи. На примере двух связанных линий передачи с нелинейными параметрами показывается, что в нелинейных многопроводных линиях передачи могут существовать несколько типов простых и ударных волн. Ударные электромагнитные волны в некоторых случаях могут быть неэволюционными. Исследуется структура ударных волн. Показано, что неэволюционная ударная волна в двух связанных линиях передачи распадается на две эволюционные ударные волны, распространяющиеся с одинаковой скоростью.

Распространение электромагнитных волн конечной амплитуды в безграничной нелинейной среде и двухпроводных линиях передачи с нелинейными параметрами, образование ударных электромагнитных волн, их структура, взаимодействие и другие вопросы исследовались в ряде работ [1-12]. В настоящей статье рассматриваются некоторые особенности электромагнитных волн в связанных (многопроводных) линиях передачи с нелинейными параметрами. В отличие от двухпроводных линий в таких системах в линейном приближении при сколь угодно малой частоте может распространяться несколько типов нормальных волн. Поэтому, так же, как и в магнитной гидродинамике [15], в многопроводных линиях передачи с нелинейными параметрами может существовать несколько типов простых (§ 1) или ударных (§ 2, 3) электромагнитных волн. При этом ударные волны могут быть в некоторых случаях неэволюционными (§ 2), т. е. распадаются под действием сколь угодно малых возмущений на несколько разрывов. Так же, как и в магнитной гидродинамике структура стационарных неэволюционных ударных волн определяется, как показано в § 3, неоднозначно. Отметим, что из примера, рассмотренного в § 3, видно, что неэволюционная ударная волна в системе двух одинаковых связанных нелинейных линий передачи всегда распадается на две эволюционные ударные волны, распространяющиеся с одинаковой скоростью, в то время как при распаде неэволюционного разрыва в безграничной нелинейной среде [12, 15] образуются вращательный разрыв и ударные волны, распространяющиеся с разными скоростями.

1. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

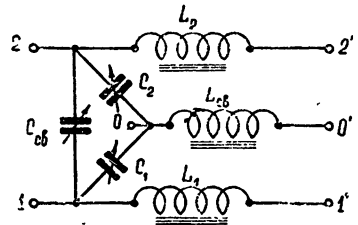
Рассмотрим две одинаковые связанные линии передачи, эквивалентная схема которых показана на рис. 1. При достаточно малой величине постоянной времени ячейки волны в таких линиях передачи могут быть найдены из решения системы телеграфных уравнений (1.1):

$$\frac{\partial I_m}{\partial z} = - \sum_{n=1}^{N-2} \frac{\partial Q_{mn}}{\partial t}; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial U_m}{\partial z} = - \sum_{n=1}^{N-2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial t} \quad (m = 1, 2),$$

где I_m, U_m — ток и напряжение в m -ой линии, Q_{mn}, Φ_{mn} — погонные заряд и поток индукции, которые при малых скоростях изменения токов и напряжений можно считать функциями I_m и U_m :

Рис. 1. Эквивалентная схема двух одинаковых связанных линий передачи с нелинейными индуктивностями.



$$Q_{mn} = Q_{mn}(U_m, U_n), \tag{1.2}$$

$$\Phi_{mn} = \Phi_{mn}(I_m, I_n).$$

Частное решение уравнений (1.1) и квазистатических уравнений связи (1.2) будем искать в виде $I_m(x), U_m(x)$, где x одна из величин I_m, U_m . Такие решения по аналогии с магнитной гидродинамикой будем называть простыми волнами.

Если I_m и U_m — функции только $x = x(t, z)$, то уравнения в частных производных (1.1) легко сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$v(x)^{-1} \frac{dI_m}{dx} = \sum_{n=1}^{N-2} \frac{\partial Q_{mn}}{\partial U_n} \frac{dU_n}{dx}; \tag{1.3}$$

$$v(x)^{-1} \frac{dU_m}{dx} = \sum_{n=1}^{N-2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial I_n} \frac{dI_n}{dx} \quad (m = 1, 2)$$

или для рассматриваемого частного случая связанных линий:

$$v(x)^{-1} \frac{dI_m}{dx} = [C(U_m) + \check{C}_{cb}(-U_m + U_n)] \frac{dU_m}{dx} - C_{cb}(U_n - U_m) \frac{dU_n}{dx}; \tag{1.4}$$

$$v(x)^{-1} \frac{dU_m}{dx} = [L(I_m) + L_{cb}(I_m + I_n)] \frac{dI_m}{dx} + L_{cb}(I_n + I_m) \frac{dI_n}{dx} \quad (m = 1, 2; n = 1, 2; n \neq m),$$

где $C(U), L(I)$ — нелинейные емкость и индуктивность линий, C_{cb}, L_{cb} — нелинейные емкость и индуктивность связи.

Нетрудно убедиться, что уравнения (1.4) имеют два решения вида простых волн*:

* При $N > 2$ число частных решений вида простых волн для уравнений (1.1) и (1.2) не превышает числа связанных линий передачи [13].

$$I_1^\pm = \pm I_2^\pm = \pm f \left(t - \frac{z}{v_\pm(x)} \right), \quad U_1^\pm = U_2^\pm = \pm F(x). \quad (1.5)$$

Эти решения соответствуют симметричной I^+ , U^+ и антисимметричной I^- , U^- волнам*. Из условия существования нетривиального решения уравнений (1.4) несложно найти скорости распространения таких волн и вид функциональной связи между напряжением и током (полагаем $x = I_\pm^\pm$):

$$v_+^n = [C(U_1^+) (L(I_1^+) + 2L_{\text{св}}(2I_1^+))]; \quad (1.6a)$$

$$\int \sqrt{C(U_1^+)} dU_1^+ = \int \sqrt{L(I_1^+) + 2L_{\text{св}}(2I_1^+)} dI_1^+;$$

$$v_-^n = [L(I_1^-) (C(U_1^-) + 2C_{\text{св}}(2U_1^-))]^{-1/2}; \quad (1.6b)$$

$$\int \sqrt{C(U_1^-) + 2C_{\text{св}}(2U_1^-)} dU_1^- = \int \sqrt{L(I_1^-)} dI_1^-.$$

Из (1.5) и (1.6) видно, что скорость распространения точек профиля простой волны определяется значениями погонных индуктивностей и емкостей при соответствующих значениях токов (или напряжений) в связанных линиях передачи. Как и в одиночной нелинейной двухпроводной линии [1, 3], профиль простой волны при ее распространении вдоль системы связанных линий деформируется. Изменение профиля волны будет определяться видом функции $v_\pm^n(I)$. На отдельных участках профиля простой волны крутизна будет возрастать, а на других уменьшаться. Решение (1.5), (1.6) остается справедливым до момента появления в профиле простой волны точек с вертикальными касательными — до момента образования разрыва. После образования разрыва волна перестает быть простой [17].

2. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ (РАЗРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ)

Если не интересоваться структурой областей сравнительно быстрого изменения поля, где нарушаются квазистатические уравнения связи (1.2) (т. е. структурой фронта ударных волн), то их можно рассматривать как разрывы в решениях телеграфных уравнений (1.1) с уравнениями связи (1.2). Нетрудно показать, что на этих разрывах выполняются граничные условия:

$$(v^p)^{-1} (I_m^{(2)} - I_m^{(1)}) = \sum_{n=1}^2 (Q_{mn}^{(2)} - Q_{mn}^{(1)}); \quad (2.1)$$

$$(v^p)^{-1} (U_m^{(2)} - U_m^{(1)}) = \sum_{n=1}^2 (\Phi_{mn}^{(2)} - \Phi_{mn}^{(1)}),$$

где $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ — значения Y до и после разрыва. Известно, что из разрывных решений, удовлетворяющих граничным условиям, в данном случае соотношениям (2.1), реальный смысл имеют лишь те разрывы, для которых выполняется условие эволюционности [15, 16]:

$$n_1 + n_2 = n - 1. \quad (2.2)$$

Здесь n — число граничных условий (2.1), n_1 — число простых волн перед разрывом, имеющих скорость $v^n(x^{(1)}) > v^p$, n_2 — число волн за

* Предполагаем, что нелинейные индуктивности и емкости линий — симметричные функции, т. е. $L(I) = L(-I)$, $C(U) = C(-U)$.

разрывом со скоростью $v^n(x^{(2)}) < v^p$. Условие эволюционности в рассматриваемом случае, как нетрудно заметить, одновременно является и условием устойчивости в обычном смысле (расходящиеся от разрыва волны не нарастают со временем).

Если условие (2.2) не выполняется ($n_1 + n_2 < n - 1$), то разрыв неэволюционен относительно малых возмущений, т. е. малые возмущения вызывают конечные изменения (расщепление) разрыва. Когда $n_1 + n_2 > n - 1$, ударная волна неустойчива (возмущение нарастает со временем).

Исследование разрывных решений уравнений (2.1) в общем случае не представляются возможным. Заметим, что число ударных волн с заданной скоростью и заданными перед ее фронтом условиями зависит как от числа связанных линий, так и от вида нелинейных уравнений связи (1.2).

В случае двух одинаковых связанных линий передачи (рис. 1) часть разрывных решений уравнений (2.1) может быть найдена из свойств симметрии. Так, при $C = \text{const}$, $C_{св} = \text{const}$ и $L_{св} = 0$ в двух связанных линиях передачи возможны симметричная и антисимметричная ударные волны:

$$(v_+^p)^2 = \frac{\{I_+\}}{C \{\Phi(I_-)\}}; \quad I_1^{(1)} = I_2^{(1)} = I_+^{(1)}; \quad I_1^{(2)} = I_2^{(2)} = I_+^{(2)}; \quad (2.2)$$

$$(v_-^p)^2 = \frac{\{I_-\}}{(C + 2C_{св}) \{\Phi(I_-)\}}; \quad I_1^{(1)} = -I_2^{(1)} = I_-^{(1)}; \quad I_1^{(2)} = -I_2^{(2)} = I_-^{(2)}, \quad (2.3)$$

где $\{Y\} = Y^{(2)} - Y^{(1)}$. В данном случае симметричная волна быстрая, а антисимметричная — медленная, в том смысле, что при $\{I_+\} = \{I_-\}$ $v_+^p > v_-^p$.

В рассматриваемом частном случае системы двух одинаковых связанных линий передачи возможны по крайней мере еще две двухкратно вырожденные ударные волны:

$$I_1^{(1)} = -I_2^{(1)} = I_{\mp}^{(1)}, \quad I_1^{(2)} = I_2^{(2)} = I_{\mp}^{(2)}, \quad (2.4)$$

$$I_1^{(1)} = I_2^{(1)} = I_{\pm}^{(1)}, \quad I_1^{(2)} = -I_2^{(2)} = I_{\pm}^{(2)}. \quad (2.5)$$

Такие волны наблюдаются только при определенной связи между $I^{(2)}$ и $I^{(1)}$, а именно:

$$(v_{\mp}^p)^2 = \frac{I_{\mp}^{(2)}}{C \Phi^{(2)}(I_{\mp}^{(2)})} = \frac{I_{\mp}^{(1)}}{(C + 2C_{св}) \Phi^{(1)}(I_{\mp}^{(1)})}; \quad (2.6)$$

$$(v_{\pm}^p)^2 = \frac{I_{\pm}^{(1)}}{C \Phi^{(1)}(I_{\pm}^{(1)})} = \frac{I_{\pm}^{(2)}}{(C + 2C_{св}) \Phi^{(2)}(I_{\pm}^{(2)})}. \quad (2.7)$$

Из (2.6), (2.7) и (2.2), (2.3) легко заметить, что волна (2.4) (антисимметричная перед и симметричная за разрывом) имеет скорость

$$v_{\mp}^p = v_-^p (I_-^{(2)} = I_{\mp}^{(1)}) = v_+^p (I_+^{(2)} = I_{\mp}^{(2)}),$$

а волна (2.5) — скорость

$$v_{\pm}^p = v_+^p (I_+^{(2)} = I_{\pm}^{(1)}) = v_-^p (I_-^{(2)} = I_{\pm}^{(2)}),$$

где v_+^p и v_-^p — скорости симметричной и антисимметричной волн при $I_+^{(1)} = I_-^{(1)} = 0$.

Разрывные решения (2.2)—(2.5), как нетрудно убедиться, соответствуют устойчивым ударным электромагнитным волнам только при определенных значениях v^p (или $|I_1|$). В частности, если $\Phi(I)$ — однозначная, монотонно возрастающая функция I , а зависимости v_+^n , v_-^n и v_+^p ($I_+^{(1)} = 0$, $I_+^{(2)}$), v_-^p ($I_-^{(1)} = 0$, $I_-^{(2)}$) от I имеют вид, показанный на рис. 2, то симметричная ударная волна с $I_+^{(1)} = 0$ неэволюционна при $I' < I_+^{(2)} < I'''$ (см. рис. 2, 3а), антисимметричная — при $I'' < I_-^{(2)}$ (см.

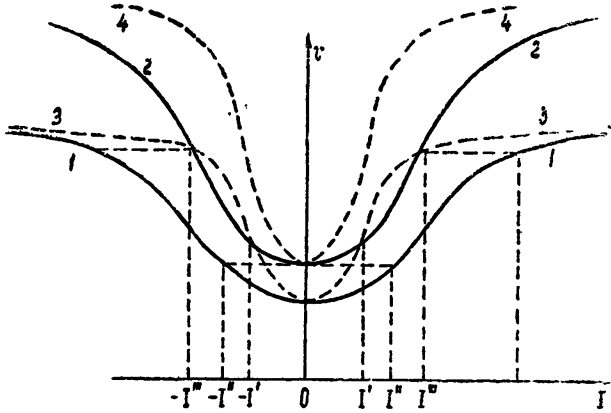


Рис. 2. Зависимость скоростей v_-^p — (кривая 1), v_+^p — (кривая 2) при $I_{\pm}^{(1)} = 0$, v_-^n — (кривая 3) и v_+^n — (кривая 4) от тока $I^{(2)}$ и I в случае, когда $L_{св} = 0$.

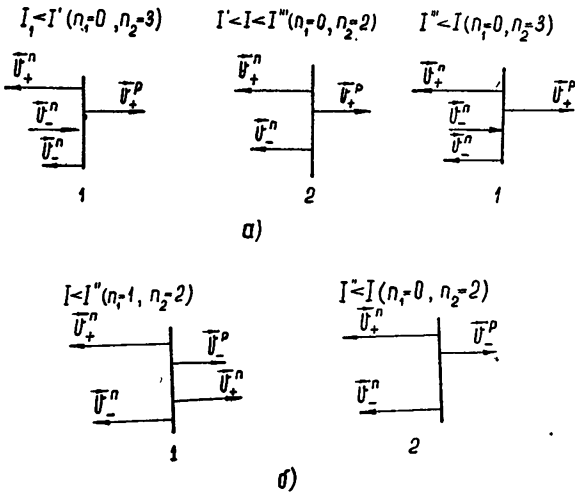


Рис. 3. Диаграммы возмущений, распространяющихся от эволюционной (1), неэволюционной (2) и неустойчивой (3) ударных волн: а) для симметричного; б) для несимметричного.

рис. 2, 3б). Ударная волна (2.5) неустойчива при $I' < I_{\pm}^{(1)} < I'''$ и эволюционна при всех других значениях $I_{\pm}^{(1)}$ (см. рис. 2, 3г), ударная волна (2.4) всегда неустойчива (рис. 2, 3в). Заметим, что нарушение условия

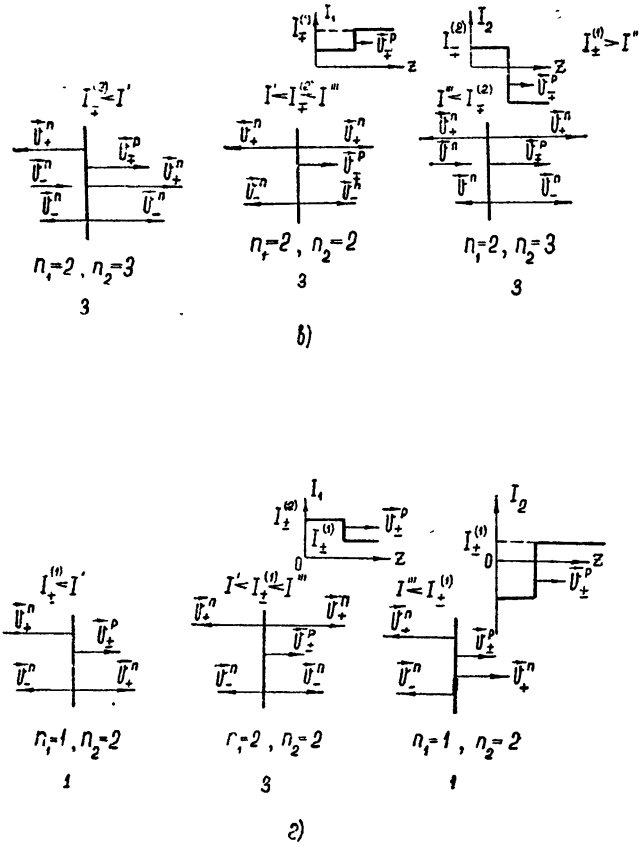


Рис. 3. Диаграммы возмущений, распространяющихся от эволюционной (1), неэволюционной (2) и неустойчивой (3) ударных волн: в) для (⊖) разрыва; г) для (+) разрыва.

эволюционности (или устойчивости) всегда происходит при тех значениях скачка $\{I\}$, при которых скорость разрыва v^p равна скорости возмущения (простой волны) перед или за разрывом. Как уже отмечалось выше, неэволюционные ударные электромагнитные волны расщепляются под действием малых возмущений. На какие волны происходит распад неэволюционного разрыва, можно увидеть, исследуя качественную структуру фронта ударной волны.

3. СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН

Для исследования структуры фронта ударной волны необходимо учитывать дисперсию и диссипативные процессы, которые становятся существенными при быстрых изменениях тока и напряжения и обуславливают конечную ширину фронта ударной волны. Будем считать, что в рассматриваемом примере двух одинаковых связанных линий передачи диссипация на фронте ударной волны определяется проводимостью G включенной так, как это показано на рис. 4. Уравнения связи в этом случае будут

$$Q_{mn} = \begin{cases} (C + C_{cb}) U_m & (n = m) \\ -C_{cb} U_n & (n \neq m) \end{cases}; \quad (3.1a)$$

$$G \frac{\partial \Phi_{mm}}{\partial t} + I(\Phi_{mm}) = I_m \quad (m = 1, 2). \quad (3.16)$$

Для стационарных волн (волн, распространяющихся с постоянной скоростью v^p) заменой $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -v^p \frac{d}{d\xi}$ и $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{d}{d\xi}$ уравнения в частных производных (1.1) сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям и интегрируются:

$$\begin{aligned} I_m - I_m^{(1)} &= v^p [(C + C_{cb}) U_m - (C + C_{cb}) U_m^{(1)} - C_{cb} U_n + C_{cb} U_n^{(1)}]; \\ U_m - U_m^{(1)} &= v^p [\Phi_{mm} - \Phi_{mm}^{(1)}] \\ (m = 1, 2, n = 1, 2, n \neq m). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь через $Y_m^{(1)}$ обозначены значения Y_m (I_m , U_m , Φ_{mm} , Q_{nm}) при $\xi \rightarrow +\infty$. Очевидно, что v^p связана с величинами $Y_m^{(2)}$ (при $\xi \rightarrow -\infty$) соотношениями (2.1). Как и в разрывной идеализации, одному значению v^p в пространстве Y_m могут соответствовать несколько точек $Y_m^{(2)}$. Точки $Y_m^{(1)}$ и $Y_m^{(2)}$ являются, как нетрудно заметить, особыми точками

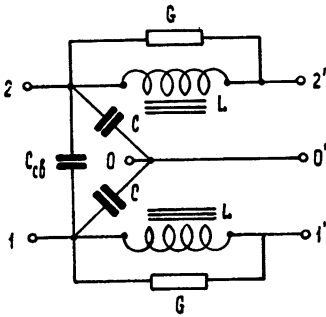


Рис. 4. Эквивалентная схема двух связанных линий передачи с нелинейными индуктивностями и диссипативными элементами.

в пространстве Y_m , определяющими состояние равновесия системы (при $\xi \rightarrow \pm\infty$ производные $dI_m/d\xi$, $dU_m/d\xi$, $dQ_{nm}/d\xi$ и $d\Phi_{mm}/d\xi$ стремятся к нулю). Качественно структура фронта стационарных ударных волн может быть найдена при исследовании хода фазовых траекторий, соединяющих положения равновесия $Y_m^{(1)}$ и $Y_m^{(2)}$ в фазовом пространстве Y_m . Для случая одинаковых связанных линий передачи (рис. 4) за фазовое пространство удобно взять плоскость $\Phi_1 = \Phi_{11}$, $\Phi_2 = \Phi_{22}$, а в качестве параметра — скорость распространения ударной волны v^p .

Уравнения (3.1) и (3.2) в этом случае приводятся к виду

$$\begin{aligned} G \frac{d\Phi_1}{dt} &= -\tilde{I}(\Phi_1) + (v^p)^2 (C + C_{cb}) \Phi_1 - C_{cb} (v^p)^2 \Phi_2; \\ G \frac{d\Phi_2}{dt} &= -\tilde{I}(\Phi_2) + (v^p)^2 (C - C_{cb}) \Phi_2 - C_{cb} (v^p)^2 \Phi_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В (3.3) положение равновесия $Y_m^{(1)}$ полагается в начале координат:

$\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, а $\tilde{I}(\Phi)$ считается однозначной непрерывной и дифференцируемой нечетной функцией Φ вида, показанного на рис. 5. Для простоты будем полагать \tilde{I} монотонной функцией Φ и $d\tilde{I}/d\Phi > 0$.

Опуская все промежуточные выкладки по исследованию уравнений (3.3)**, приведем лишь окончательный результат в виде фазовых портре-

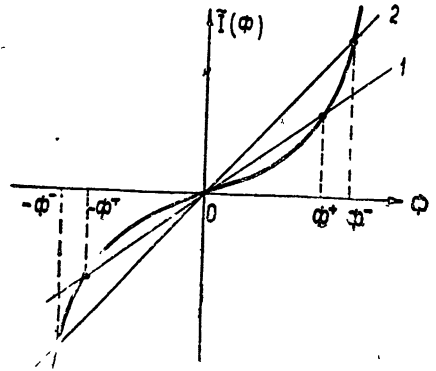
*. Размерность фазового пространства определяется порядком уравнений связи (3.1).

** Уравнения (3.3) по форме совпадают с уравнениями системы двух одинаковых динамомашии последовательного возбуждения, работающих параллельно на общую нагрузку [14].

Рис. 5. Зависимость $\tilde{I}(\Phi)$ и прямые

$$1 - \tilde{I} = (v^p)^2 C \Phi;$$

$$2 - \tilde{I} = (v^p)^2 (C + 2C_{св}) \Phi.$$



тов, показанных на рис. 6. Заметим, что каждой особой фазовой траектории, соединяющей два положения равновесия на фазовой плоскости

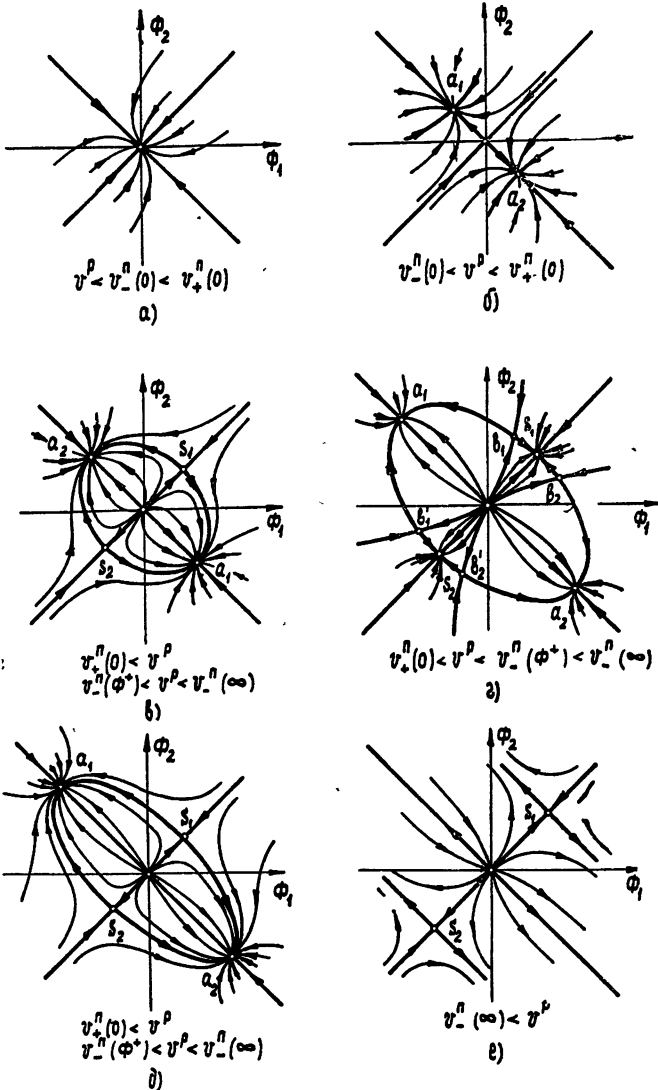


Рис. 6. Изменение структуры фазовой плоскости с ростом v^p .

Φ_1 и Φ_2 , соответствует ударная волна с определенной структурой фронта. Если траектория не одна, то структура ударной волны определена неоднозначно. Положения равновесия (седло и узел) соединяются единственной фазовой траекторией (сепаратрисой) и соответствуют ударной волне с однозначно определенной структурой фронта. Такими волнами являются, например, симметричные волны* os_i (рис. 6в, д, е), антисимметричные волны oa_i (рис. 6б), а также волны $s_j a_i$ (рис. 6в, д). Антисимметричные волны oa_i (рис. 6в, г, д) с положениями равновесия типа неустойчивого и устойчивого узлов и симметричные волны os_i (рис. 6г) имеют неоднозначную структуру фронта. В разрывной идеализации этим волнам соответствуют неэволюционные разрывы** (см. раздел 2). Из фазовых портретов на рис. 6 легко видеть, на какие волны распадаются неэволюционные разрывы. Так, антисимметричные неэволюционные разрывы oa_i (рис. 6в, г) распадаются на две эволюционные ударные волны: симметричную волну os_j и волну $s_j a_i$ (волна \pm , см. (2.5)), а антисимметричные неэволюционные волны oa_i (рис. 6г)— на две эволюционные волны: волну ob_j и волну $b_j s_i$. Интересно отметить, что в рассматриваемом случае двух одинаковых связанных линий передачи все неэволюционные ударные волны распадаются на две эволюционные ударные волны, распространяющиеся с одинаковой скоростью***.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. Л. Фрейдман, ЖЭТФ, **36**, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав. Радиофизика, **3**, 79 (1960).
2. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 277 (1960)¹.
3. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, **6**, 917 (1961).
4. Л. А. Островский, ЖТФ, **33**, 1080 (1963).
5. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 324 (1963).
6. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 680 (1961); **5**, 1130, (1962).
7. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖТФ (в печати).
8. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖТФ (в печати).
9. А. М. Белянцев, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 183 (1962).
10. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 116 (1962).
11. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 551, 561 (1963).
12. Г. И. Фрейдман, Диссертация, Горький, 1963.
13. А. М. Белянцев, Диссертация, Москва, 1963.
14. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
15. Р. В. Половин, УФН, **72**, № 1, 33 (1960).
16. Г. Я. Любарский, ПМП, **25**, 1041 (1961).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 сентября 1963 г.

* При больших значениях v^p (или l) в системе двух одинаковых связанных линий возможны только две ударные волны с нулевыми начальными условиями—две симметричные ударные волны различной полярности.

** Справедливость этого утверждения для волн в связанных линиях передачи не [сложно доказать в общем виде (см. [13]) аналогично тому, как это сделано в работах [7, 8, 16].

*** Плоская неэволюционная электромагнитная ударная волна, распространяющаяся под углом к постоянному магнитному полю в насыщенном феррите, распадается на ударную волну и вращательный разрыв, не имеющий стационарной структуры [12].

ELECTROMAGNETIC WAVES OF FINITE AMPLITUDE IN COUPLED
TRANSMISSION LINES WITH NONLINEAR PARAMETERS*A. M. Beljantsev, G. I. Freidman*

Some peculiarities of electromagnetic waves are considered in coupled (multiwire) transmission lines. By the example of two coupled transmission lines with nonlinear parameters, it is shown that there may exist several types of simple and shock waves in nonlinear multi-wire transmission lines. In some cases electromagnetic shock waves may be non-evolutionary. The structure of shock waves is investigated. In two coupled transmission lines a non-evolutionary shock wave is shown to decompose into two evolutionary shock waves propagating with an equal velocity.

ИЗЛУЧЕНИЕ ВЫТЯНУТЫХ СФЕРОИДАЛЬНЫХ АНТЕНН

Д. А. Дупленков, С. Н. Иванов

Рассматривается решение задачи о возбуждении вытянутого идеально-проводящего сфероида кольцевой щелью с равномерным распределением магнитного тока. Приводятся рассчитанные и экспериментальные диаграммы направленности излучения.

Задача о возбуждении тел, размеры которых сравнимы с длиной волны, всегда представляла большой интерес. Известно большое число работ, посвященных исследованию полей цилиндрических антенн конечной длины, возбуждению сферических тел, а также возбуждению тел иных форм. Однако, чем сложнее поверхность возбуждаемого тела, тем сложнее решение задачи, а в подавляющем большинстве случаев точное решение вообще не может быть получено. Поэтому при расчете характеристик излучения антенн на телах реальной формы приходится аппроксимировать эти тела простейшими геометрическими поверхностями, для которых может быть получено решение. С этой точки зрения задача о возбуждении вытянутого сфероида очень важна, так как многие реальные тела могут быть с достаточной степенью точности заменены вытянутым сфероидом, а система вытянутых сфероидальных координат позволяет получить строгое решение методом собственных функций.

В общем виде задача о возбуждении вытянутого сфероида решена в работе [1]. Однако в настоящее время из-за отсутствия достаточного количества табулированных сфероидальных функций не могут быть проведены расчеты несимметричных случаев возбуждения. Вместе с тем различные частные случаи симметричного возбуждения тела в виде вытянутого сфероида представляют большой практический интерес. По этой причине в настоящей работе исследуется случай возбуждения тела в виде идеально-проводящего вытянутого сфероида кольцевым магнитным током с равномерным распределением вдоль витка. Эта задача уже рассматривалась в [2], однако приводимые там результаты относятся к телам существенно более тонким и коротким.

1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Коротко поясним ход решения, с помощью которого получены окончательные расчетные формулы. Система сфероидальных координат ξ , η , φ приведена на рис. 1, где связь декартовых и сфероидальных координат дается соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi; \\ y &= \frac{d}{2} \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi; \\ z &= \frac{d}{2} \xi \eta, \end{aligned} \quad (1)$$

а коэффициенты Ляме

$$h_1 = h_\xi = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = h_\eta = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}},$$

$$h_3 = h_\varphi = \frac{d}{2} \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{1 - \eta^2}.$$
(2)

Если теперь воспользоваться известными выражениями для функции Грина в свободном пространстве в сферидальной системе координат и общими выражениями, связывающими компоненты токов и векторных потенциалов [3], то векторный потенциал кольца магнитного тока с поверхностной плотностью J_φ^M , расположенного в свободном пространстве, представляется следующей формулой:

$$A_\xi^M = A_\eta^M = 0;$$

$$A_\varphi^M = -ik \int_{\eta'=\eta_1}^{\eta_2} J_\varphi^M h'_2 h'_3 d\eta' \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{N_{1l}} S_{1l}(h, \eta) S_{1l}(h, \eta') \times$$

$$\times \begin{cases} j e_{1l}(h, \xi') h e_{1l}^{(2)}(h, \xi) & \text{при } \xi > \xi' \\ j e_{1l}(h, \xi) h e_{1l}^{(2)}(h, \xi') & \text{при } \xi < \xi', \end{cases}$$
(3)

где $h=kd/2$, k — волновое число,

$$N_{1l} = \sum_n' [d_n(h|1l)]^2 \frac{2(n+2)!}{(2n+3)n!} = \int_{-1}^{+1} [S_{1l}(h, \eta)]^2 d\eta,$$

$S_{1l}(h, \eta)$ — угловые сферидальные функции, $d_n(h|1l)$ — коэффициенты разложения угловых сферидальных функций в ряд по присоединенным полиномам Лежандра, $j e_{1l}(h, \xi)$ — радиальные сферидальные функции первого рода, $h e_{1l}^{(2)}(h, \xi)$ — радиальные сферидальные функции четвертого рода.

Введем в кольцо магнитного тока идеально проводящий вытянутый сфероид, совмещая ось кольца с большой осью сфероида. В этом случае под воздействием первичного поля на поверхности сфероида наведутся η -компоненты электрического тока и, следовательно, вторичное поле можно искать в таком же виде, что и первичное поле, только с неизвестными коэффициентами для каждой гармоники. В итоге получаем выражение для суммарного векторного потенциала:

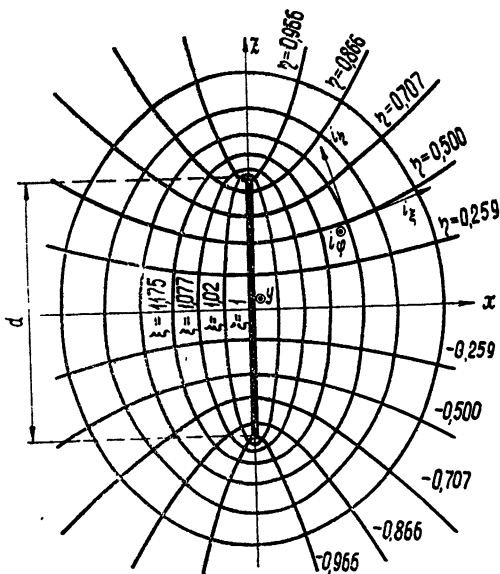


Рис. 1. Система сферидальных координат.

В итоге получаем выражение для суммарного векторного потенциала:

$$A_{\varphi}^{\text{сумм}} = -ik \int_{\eta'=\eta_1}^{\eta_2} J_{\varphi}^{\text{м}} h_2' h_3' d\eta' \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{N_{1l}} S_{1l}(h, \eta) S_{1l}(h, \eta') \times$$

$$\times \begin{cases} [je_{1l}(h, \xi) he_{1l}^{(2)}(h, \xi') + a_l h e_{1l}^{(2)}(h, \xi) je_{1l}(h, \xi_0')] & \text{при } \xi < \xi' \\ [je_{1l}(h, \xi') h e_{1l}^{(2)}(h, \xi) + a_l h e_{1l}^{(2)}(h, \xi) je_{1l}(h, \xi_0')] & \text{при } \xi > \xi' \end{cases} \quad (4)$$

где ξ_0 — радиальная координата поверхности сфероида, а штрихованные координаты соответствуют точкам истоков.

Неизвестные коэффициенты a_l находятся из условия равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности сфероида. В свою очередь, компоненты поля могут быть вычислены с помощью соотношений

$$E_{\xi} = -\frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial(h_3 A_{\varphi}^{\text{сумм}})}{\partial \eta};$$

$$E_{\eta} = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial(h_3 A_{\varphi}^{\text{сумм}})}{\partial \xi}; \quad (5)$$

$$H_{\varphi} = -i \omega \varepsilon A_{\varphi}^{\text{сумм}}.$$

Таким образом, подставляя (4) в (5), опуская кольцо магнитного тока на поверхность сфероида (при этом образуется щель на сфероиде) и используя граничное условие

$$E_{\eta} = 0, \quad \text{при } \xi = \xi_0$$

получаем неизвестные коэффициенты:

$$a_l = -h e_{1l}^{(2)}(h, \xi_0) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} [je_{1l}(h, \xi)]_{\xi=\xi_0} + \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} je_{1l}(h, \xi_0) \right] \times$$

$$\times \left\{ je_{1l}(h, \xi_0) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} [h e_{1l}^{(2)}(h, \xi)]_{\xi=\xi_0} + \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} h e_{1l}^{(2)}(h, \xi_0) \right] \right\}^{-1}. \quad (6)$$

Воспользовавшись формулами (4) ÷ (6), а также вронкианом для радиальных сфероидальных функций первого и четвертого рода

$$je_{1l}(h, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi} [h e_{1l}^{(2)}(h, \xi)]_{\xi=\xi_0} - h e_{1l}^{(2)}(h, \xi_0) \frac{\partial}{\partial \xi} [je_{1l}(h, \xi)]_{\xi=\xi_0} = \frac{1}{ih(\xi_0^2 - 1)}$$

и асимптотическими представлениями для радиальных сфероидальных функций, получаем формулу для расчета компоненты электрического поля в дальней зоне при условии малости ширины щели:

$$E_{\eta} = iI_{\varphi}^{\text{м}} \frac{e^{-ih\xi}}{\xi} \frac{2}{d} \left[\frac{1 - (\eta')^2}{\xi_0^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{N_{1l}} S_{1l}(h, \eta) S_{1l}(h, \eta') \times$$

$$\times e^{i\pi(l+1)/2} \left\{ \frac{\xi_0}{\xi_0^2 - 1} h_{1l}^{(2)} e(h, \xi_0) + \frac{\partial}{\partial \xi} [h e_{1l}^{(2)}(h, \xi)]_{\xi=\xi_0} \right\}^{-1} \quad (7)$$

Радиальная компонента электрического поля E_{ξ} не рассматривается потому, что ее изменение пропорционально $1/\xi^2$, тогда как E_{η} с ростом ξ убывает обратно пропорционально первой степени ξ .

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ЭКСПЕРИМЕНТОВ

По формуле (7) был произведен расчет ряда диаграмм направленности исследуемой антенны при различных параметрах $\xi_0 = 1,077$; $h = 1; 4; 7$; $\eta' = 0; 0,4; 0,7$. Выбор именно этих значений обусловливался, с одной стороны, желанием расширить круг рассчитанных в [2] характеристик; с другой стороны, при таком выборе ξ_0 и h имелась возможность частично контролировать точность расчета радиальных сфероидальных функций путем сравнения с значениями, приведенными в [4]. Для расчета сфероидальных функций использовались формулы, аналогичные содержащимся в [5], и таблицы коэффициентов разложения сфероидальных функций [6].

Одновременно было проведено экспериментальное исследование характеристик направленности, для чего было изготовлено четыре универсальных макета. Каждый из этих макетов позволял перемещать щель вдоль большой оси сфероида в фиксированные положения и соответствовал $\xi_0 = 1,077$ или $1,12$. Изменение параметра h осуществлялось либо сменой макета, либо изменением частоты.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований в виде диаграмм направленности приведены на рис. 2—4. Внимательное рассмотрение рисунков и их сопоставление позволяет сделать ряд замечаний.

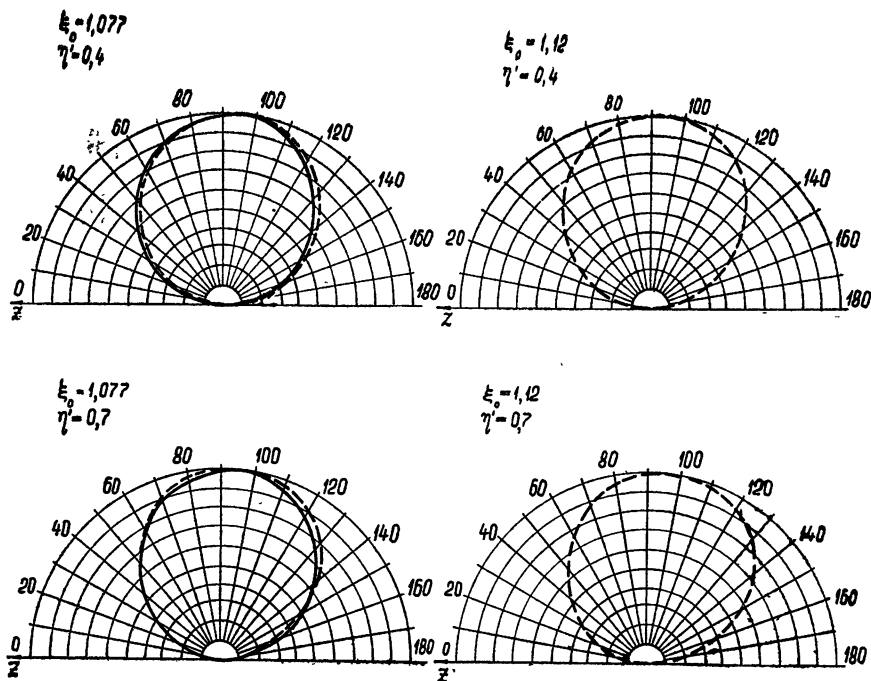


Рис. 2. Диаграммы направленности сфероидальных антенн ($h=1$):

— расчетная диаграмма, - - - экспериментальная диаграмма.

Во-первых, следует отметить достаточно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов. Например, среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных в максимумах лепестков диаграмм от теоретических составляет величину $\sigma = \pm 0,094$. Аналогичная величина для минимумов составляет $\sigma = \pm 0,11$ и для углового отклонения максимумов $\sigma = \pm 2,4^\circ$. Во всех случаях экспериментальные кривые точно повторяют характер изменения теоретических кривых. Это

позволяет сделать вывод о правильности математического и расчетного аппарата, а также о приемлемой точности экспериментальных измерений.

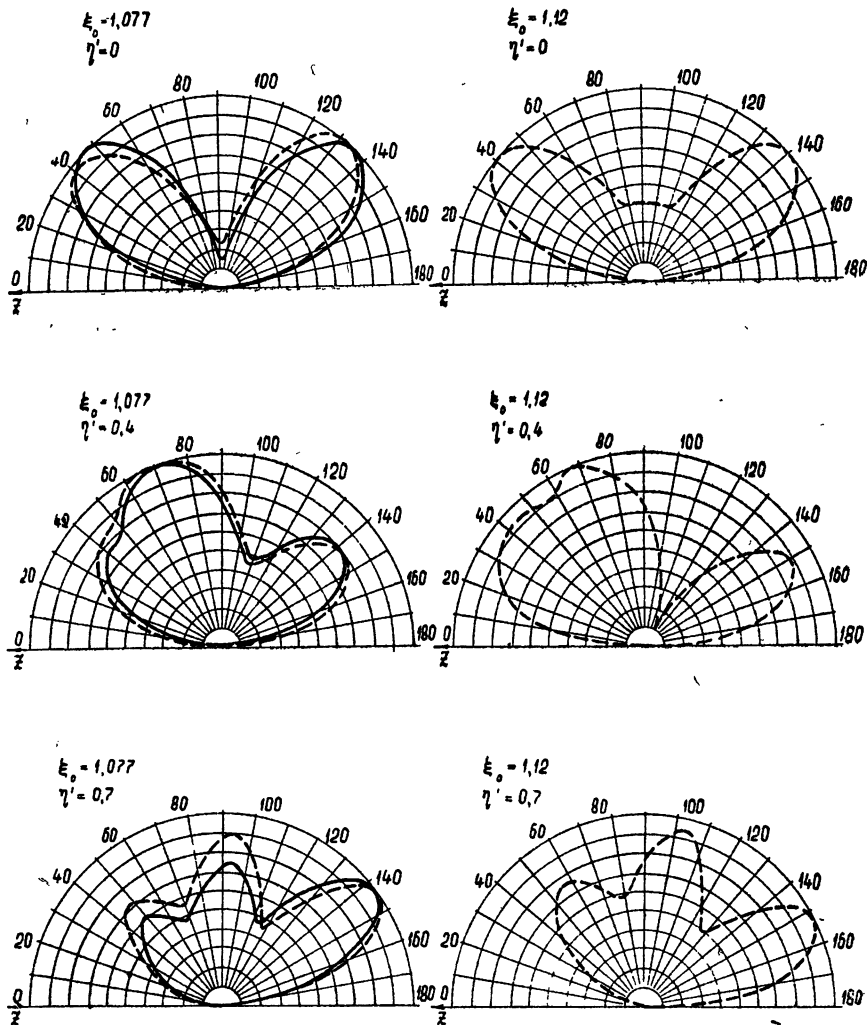


Рис. 8. То же, что на рис. 2 для $h = 4$.

Наиболее сильное изменение диаграмм направленности вызывается изменением электрической длины сфероида, что, впрочем, очевидно, так как по существу мы имеем дело с вибраторами различной длины. Сравнивая рис. 2а, 3а, 4а, отметим, что увеличение электрической длины сфероидальной антенны $l = (h\xi/\pi)\lambda$, составляющей для выбранных значений h соответственно $0,34\lambda$; $1,37\lambda$; $2,40\lambda$, приводит в последнем случае к появлению четырех максимумов вместо одного в первом. Однако диаграмма рис. 4а существенно отличается от диаграммы направленности тонкого вибратора с такой же электрической длиной. Последнее обстоятельство говорит о значительном влиянии толщины вибратора на его диаграмму направленности. В какой-то мере можно судить о влиянии изменения толщины антенны на ее диаграмму направленности,

сопоставляя рис. 3а и 3б, 4а и 4б, и другие пары диаграмм, относящихся к антеннам с различными ξ_0 . Правда, выявить в чистом виде влияние толщины антенны на диаграмму направленности по приведенным результатам не представляется возможным, поскольку с изменением ξ_0 одновременно меняется и длина антенны, хотя в долях длины волны изменение последней меньше при малых величинах ξ_0 . Теоретическое исследование этого вопроса связано с расчетом сферидальных функций для существенно большего числа параметров h и ξ_0 , а экспериментальное — с изготовлением макетов. Обе задачи вполне выполнимы, хотя и требуют больших затрат времени.

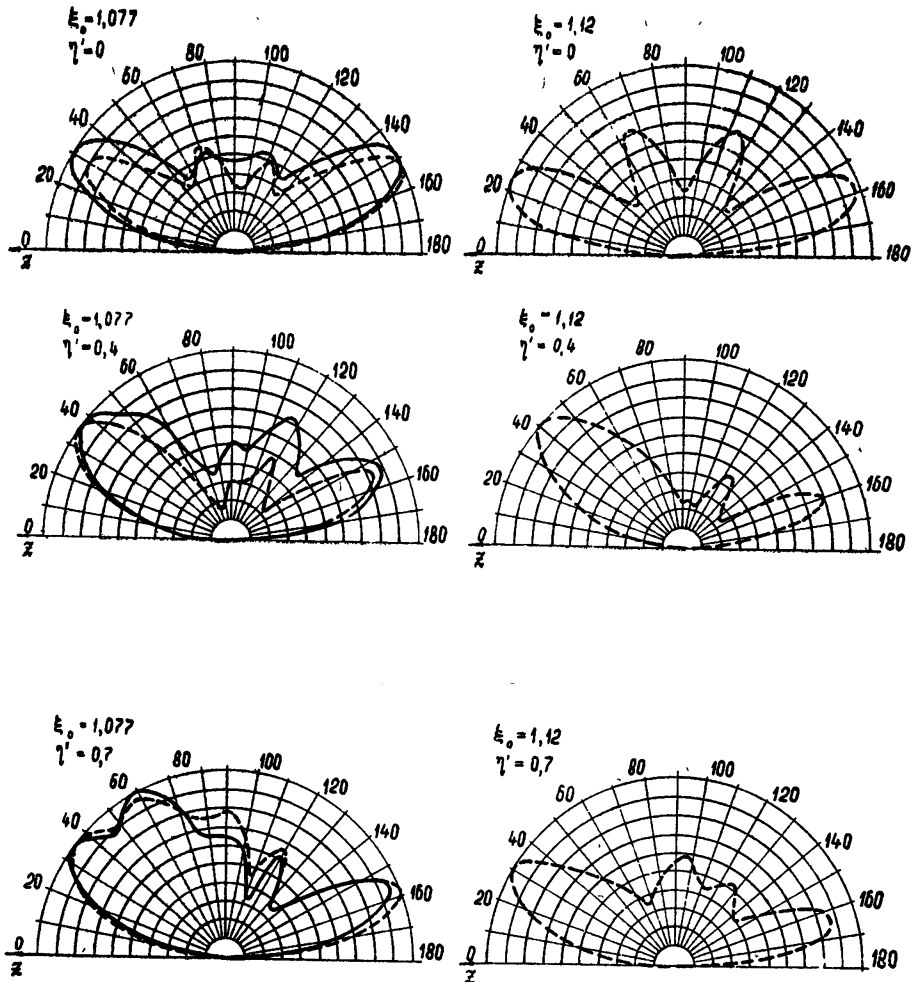


Рис. 4. То же, что на рис. 2 для $h = 7$.

Смещение возбуждающей щели от центра сфероида вызывает сужение лепестка диаграммы направленности, ориентированного в сторону, противоположную смещению. Одновременно лепесток поворачивается к оси сфероида. Такая тенденция изменения диаграммы направленности видна на всех рисунках, относящихся к случаю смещения щели от центра; она указывает на образование бегущей волны вдоль большого плеча сфероида. Однако в целом диаграммы направленности существенно отличаются от проволочной с бегущей волной тока. Отличие обуслов-

ливается большими электрическими размерами тел в поперечном сечении и сказывается для сфероидов с параметром $h = 4; 7$ в образовании широкого лепестка, обращенного в ту же сторону, в которую смещается щель. Амплитуда этого лепестка в ряде случаев превосходит амплитуду лепестка, направленного в сторону бегущей волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Т. Марков, Радиотехника и электроника, 2, вып. 4, 432 (1957).
2. Mayers, Trans. IRE, AP-4, 58 (1956).
3. Г. Т. Марков, Труды МЭИ, вып. 30, 126 (1958).
4. Carson Flammer, Spheroidal wave functions, Stanford Univ. Press, 1957.
5. Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. II, ИЛ, М., 1960
6. J. A. Stratton, L. J. Chu, P. M. Morse, J. D. C. Little, F. J. Corbato, Spheroidal Wave functions, New York, 1956.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
28 октября 1963 г.

RADIATION OF PROLONGED SPHEROIDAL ANTENNAE

D. A. Douplenkov, S. N. Ivanov

The solution is considered of the problem of excitation of prolonged perfectly conducting spheroid by a ring slot with uniform distribution of a magnetic current. Both calculated and measured radiation patterns are given.

К ВОПРОСУ О ФОКУСИРУЮЩИХ И ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

И. Г. Козлов, А. С. Шаповалов

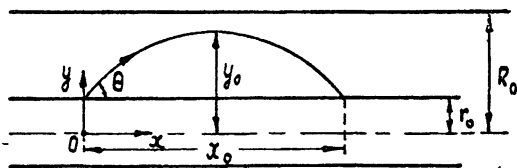
Исследована возможность определения энергии заряженных частиц по их отклонению в неоднородном электростатическом поле цилиндрического конденсатора. Определены основные параметры траекторий заряженных частиц в поле цилиндрического конденсатора и условия фокусировки частиц по направлению. Получено выражение для удельной дисперсии по энергии в поле цилиндрического конденсатора. Показано, что в поле цилиндрического конденсатора удельная дисперсия по энергии более чем в 1,23 превосходит соответствующую величину в поле плоского конденсатора.

Исследование особенностей работы генераторов и усилителей СВЧ колебаний, в частности усилителей с низким уровнем шума, а также эмиссионных свойств различных катодов, тесно связано с изучением энергетического состава электронных потоков. В связи с этим возникает необходимость создания новых спектральных приборов, пригодных для решения подобных задач. В настоящей статье исследуются свойства электронно-оптической системы, представляющей собой цилиндрический конденсатор, в которую, в отличие от конденсатора Юза—Рожанского, поток заряженных частиц вводится под острым углом к общей оси цилиндров.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ТОРМОЗЯЩЕМ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Рассмотрим движение заряженной частицы в тормозящем поле цилиндрического конденсатора. Предположим, что цилиндрический конденсатор рассечен осевой плоскостью, и в этой плоскости (см. рис. 1)

Рис. 1. Осевое сечение рассматриваемой электронно-оптической системы.



под углом θ к его внутренней обкладке в него входит поток заряженных частиц. Составляющими скоростей частиц в плоскости, перпендикулярной оси цилиндров, пренебрегаем. Между цилиндрами конденсатора приложена разность потенциалов ΔU . Единственная отличная от нуля радиальная составляющая поля в обозначениях рис. 1 может быть представлена в виде

$$E_y = \frac{\Delta U}{\ln(R_0/r_0)} \frac{1}{y}.$$

Будем считать, что кинетическая энергия частиц, влетающих в конденсатор, определяется потенциалом его внутреннего цилиндра U , а полярность разности потенциалов ΔU такова, что поле оказывает на частицы тормозящее действие. При определенном соотношении между отклоняющим напряжением и ускоряющим потенциалом частицы, влетающие в поле конденсатора, не достигая внешней обкладки, попадают на его внутренний цилиндр.

Для нахождения расстояния x_0 от точки ввода до точки возвращения частицы на внутренний цилиндр и максимального удаления y_0 частицы от оси цилиндров (рис. 1) решим систему уравнений движения частицы в поле конденсатора:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0; \\ \ddot{y} &= -A/y, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$A = \frac{\eta \Delta U}{\ln(R_0/r_0)},$$

$\eta = e/m$ — отношение заряда к массе. Задав следующие начальные условия при $t = 0$:

$$\begin{aligned} x &= 0; \\ \dot{x} &= \sqrt{2\eta U} \cos \theta; \\ y &= r_0; \\ \dot{y} &= \sqrt{2\eta U} \sin \theta \end{aligned}$$

и дважды интегрируя первое уравнение движения системы (1), находим

$$x = (\sqrt{2\eta U} \cos \theta) t. \quad (2)$$

После однократного интегрирования второго уравнения системы (1) получаем

$$\dot{y} = \sqrt{2\eta U \sin^2 \theta + 2A \ln(r_0/y)}. \quad (3)$$

Приравнявая выражение (3) нулю, определяем максимальное удаление заряженной частицы от оси цилиндров y_0 :

$$y_0 = r_0 e^{\xi \sin^2 \theta}, \quad (4)$$

где

$$\xi = \sqrt{\frac{U}{\Delta U} \ln \frac{R_0}{r_0}}.$$

Расстояние x_0 может быть найдено из соотношения (2) при подстановке в него времени движения частицы в поле конденсатора. Это время может быть определено путем интегрирования уравнения (3). Вводя обозначения

$$B = 2\eta U \sin^2 \theta + 2A \ln r_0;$$

$$C = 2A$$

и интегрируя уравнение (3), находим

$$\int_{r_0}^y \frac{dy}{\sqrt{B - C \ln y}} = \int_0^t dt = t. \quad (5)$$

Выражение (5) совпадает с соответствующим выражением работы [1] (в одном частном случае). Интеграл, стоящий в левой части уравнения (5), подстановкой

$$\frac{\sqrt{B - C \ln y}}{\sqrt{C}} = z$$

сводится к интегралу Пуассона:

$$\int_{r_0}^y \frac{dy}{\sqrt{B - C \ln y}} = -\frac{2e^{B/C}}{\sqrt{C}} \int_{\sqrt{B/C - \ln r_0}}^{\sqrt{B/C - \ln y}} e^{-z^2} dz.$$

Принимая во внимание соотношение (4), из выражения (5) находим полное время движения частицы t_n в поле конденсатора:

$$t_n = 4\xi r_0 e^{\xi^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{\sqrt{2\eta U}} \int_0^{\xi \sin \theta} e^{-z^2} dz. \quad (6)$$

Подставляя в соотношение (2) $t = t_n$, получаем выражение для x_0 :

$$x_0 = 4\xi r_0 e^{\xi^2 \sin^2 \theta} \cos \theta \int_0^{\xi \sin \theta} e^{-z^2} dz. \quad (7)$$

Можно показать, что в пределе при $R_0/r_0 \rightarrow 1$, когда неоднородное поле цилиндрического конденсатора становится однородным, а параметр ξ неограниченно уменьшается, выражения (4), (6) и (7) совпадают с соответствующими выражениями для плоского конденсатора [2].

Выражение (7), устанавливая зависимость смещения частиц вдоль оси конденсатора x_0 от их ускоряющего напряжения U , входящего в безразмерный параметр ξ , показывает, что рассматриваемая электронно-оптическая система может быть использована для энергетического анализа потоков заряженных частиц. Однако, как и большинство существующих в настоящее время спектрометров, она должна не только разделять частицы по энергии, но и фокусировать их по направлению.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОКУСИРУЮЩИХ СВОЙСТВ ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Для выяснения фокусирующих свойств поля цилиндрического конденсатора рассмотрим зависимость величины x_0 от угла ввода θ . Для этого продифференцируем выражение для x_0 по θ . Равенство $dx_0/d\theta = 0$ определит условие фокусировки частиц по углу ввода (по направлению):

$$\sin \theta (2\xi^2 \cos^2 \theta - 1) \int_0^{\xi \sin \theta} e^{-z^2} dz + \xi \cos^2 \theta e^{-\xi^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (8)$$

Из соотношения (8) видно, что угол фокусировки θ_f , под которым должен входить в поле цилиндрического конденсатора слаборасходящийся пучок заряженных частиц (для того, чтобы сфокусироваться на внутреннем цилиндре в узкую фокальную полоску на расстоянии x_0 от точки ввода), зависит от величины параметра ξ . Следует также отметить, что при угле ввода $\theta = \theta_f$, удовлетворяющем условию (8), величина x_0 максимальна.

Уравнение (8) было решено относительно Θ численным методом. Его решение Θ_ϕ представлено на рис. 2. Из рисунка видно, что величина угла фокусировки возрастает от 45° при $\xi = 0$ (случай плоского конденсатора) и стремится к 90° при $\xi \rightarrow \infty$.

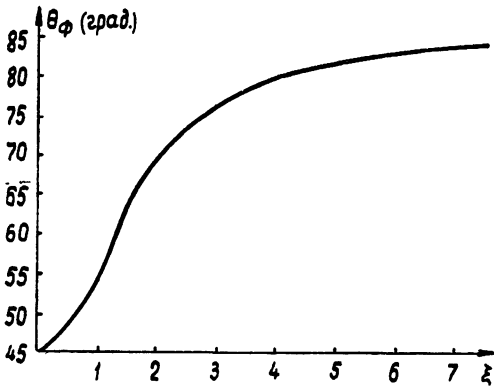


Рис. 2. Зависимость величины угла фокусировки Θ_ϕ от величины параметра ξ .

Строго говоря, угол ввода, равный углу фокусировки Θ_ϕ , оптимален для минимальной величины для получения изображения лишь при бесконечно малых углах раствора α пучка частиц. При конечном угле раствора пучка оптимальный угол ввода $\Theta_{оп}$ меньше угла фокусировки на некоторую поправку δ :

$$\Theta_{оп} = \Theta_\phi - \delta. \quad (9)$$

Однако анализ показывает, что при реальных величинах угла раствора

α и параметра ξ величиной поправки δ можно пренебречь.

Отличие оптимального угла $\Theta_{оп}$ от угла фокусировки Θ_ϕ вызывает тем, что поле цилиндрического конденсатора оказывает различное фокусирующее действие на частицы, влетающие в пределах углов Θ_ϕ , $\Theta_\phi + \Delta\theta$ и $\Theta_\phi - \Delta\theta$. На рис. 3 представлены зависимости $\frac{x_0(\Theta_\phi) - x_0(\Theta_\phi - \Delta\theta)}{x_0(\Theta_\phi)}$ и $\frac{x_0(\Theta_\phi) - x_0(\Theta_\phi + \Delta\theta)}{x_0(\Theta_\phi)}$ от величины $\Delta\theta$.

Изображения $x_0(\Theta_\phi) - x_0(\Theta_\phi - \Delta\theta)$ и $x_0(\Theta_\phi) - x_0(\Theta_\phi + \Delta\theta)$ накладываются друг на друга, не совпадая по величине, и большее из них, т. е. $x_0(\Theta_\phi) - x_0(\Theta_\phi + \Delta\theta)$, является изображением, соответствующим полному углу раствора пучка $\alpha = 2\Delta\theta$.

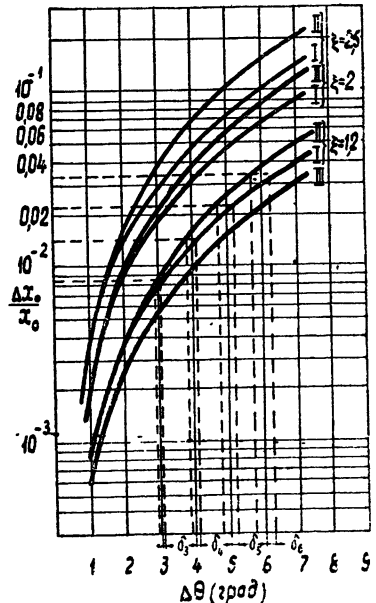


Рис. 3. Зависимость $\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{x_0(\Theta_\phi) - x_0(\Theta_\phi - \Delta\theta)}{x_0(\Theta_\phi)}$ (кривые I) и $\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{x_0(\Theta_\phi) - x_0(\Theta_\phi + \Delta\theta)}{x_0(\Theta_\phi)}$ (кривые II) от величины угла полураствора пучка $\Delta\theta$ при разных ξ . Кривая III—зависимость $\frac{\Delta x_0}{x_0}$ от $\Delta\theta$ в случае плоского конденсатора ($\xi = 0$).

Минимальная величина $\Delta x_{0 мин}$ изображения, соответствующего углу раствора пучка $2\Delta\theta$, очевидно, будет тогда, когда изображения, образованные частицами, вошедшими в поле в пределах углов Θ , $\Theta + \Delta\theta$

и θ , $\theta - \Delta\theta$, совпадут по величине. Для этого угол ввода должен быть уменьшен на такую величину δ , чтобы выполнялось равенство

$$x_0(\theta_\phi - \delta + \Delta\theta) = x_0(\theta_\phi - \delta - \Delta\theta). \quad (10)$$

Принимая во внимание (10), величины $\Delta x_{0\text{мин}}/x_0$ и δ можно графически определить на рис. 3, подбирая для заданных ξ и $\Delta\theta$ такие величины δ , чтобы перпендикуляры, восстановленные из точек оси абсцисс $\Delta\theta + \delta$ и $\Delta\theta - \delta$ до пересечения с соответствующими данному ξ кривыми I и II, имели одинаковую высоту. На рис. 3 пунктирными линиями проведено графическое определение величин δ и $\Delta x_{0\text{мин}}/x_0$ для $\xi = 1, 2$. Величины δ , определенные для $\Delta\theta = 3^\circ; 4^\circ; 5^\circ; 6^\circ$, составляют соответственно 0,075°; 0,125°; 0,2°; 0,3°, а величина $\Delta x_{0\text{мин}}/x_0$ практически совпадает с величиной

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x_0(\theta_\phi) - x_0(\theta_\phi + \Delta\theta)}{x_0(\theta_\phi)} + \frac{x_0(\theta_\phi) - x_0(\theta_\phi - \Delta\theta)}{x_0(\theta_\phi)} \right].$$

Из рис. 3 ясно, что при реальных углах раствора пучка частиц и значениях ξ от 0 до 2,5 δ составляет все еще небольшую величину по сравнению с α , так что можно считать $\theta_{\text{оп}} \approx \theta_\phi$.

Кривая III рис. 3 характеризует фокусирующие свойства поля плоского конденсатора. Сравнение ее с остальными кривыми показывает, что поле цилиндрического конденсатора по своим фокусирующим свойствам уступает полю плоского конденсатора и тем больше, чем выше параметр ξ . Однако, как будет показано ниже, по своим дисперсионным свойствам цилиндрический конденсатор превосходит плоский конденсатор и некоторые другие типы конденсаторов.

3. УДЕЛЬНАЯ ДИСПЕРСИЯ ПО ЭНЕРГИИ В ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

Удельная дисперсия по энергии

$$\delta_u = \frac{U}{\Delta x_0} \frac{dx_0}{dU}, \quad (11)$$

где Δx_0 — ширина линии изображения, соответствующая заданной величине угла раствора α , является одной из основных характеристик полей, используемых в качестве анализирующих элементов спектрометров.

Продифференцируем выражение (7) по U :

$$\frac{dx_0}{dU} = \frac{x_0}{U} \frac{1}{2} \left(1 + 2\xi^2 \sin^2 \theta + \frac{\xi \sin \theta e^{-\xi^2 \sin^2 \theta}}{\int_0^{\xi \sin \theta} e^{-z^2} dz} \right).$$

Обозначив

$$k = \frac{1}{2} \left(1 + 2\xi^2 \sin^2 \theta + \xi \sin \theta e^{-\xi^2 \sin^2 \theta} / \int_0^{\xi \sin \theta} e^{-z^2} dz \right), \quad (12)$$

найдем

$$dx_0/dU = kx_0/U. \quad (13)$$

Это соотношение отличается от соответствующего выражения для поля плоского конденсатора [2] коэффициентом k и совпадает с ним при $k = 1$. Можно показать, что в пределе при $\xi \rightarrow 0$, когда поле цилиндрического конденсатора вырождается в однородное поле плоского конденсатора, коэффициент k стремится к единице.

С ростом ξ и Θ коэффициент k увеличивается. Кривая, изображенная на рис. 4, выражает зависимость коэффициента k от параметра ξ при угле ввода Θ , равном углу фокусировки Θ_f . Последний, как это было показано выше, практически может считаться оптимальным для получения минимальной ширины линии изображения при заданной величине угла раствора α пучка частиц.

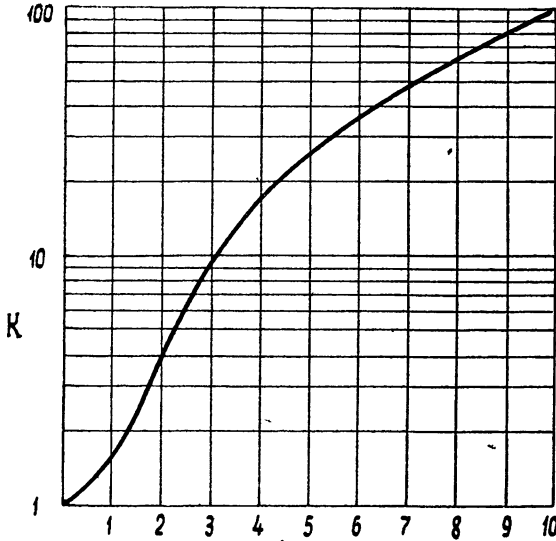


Рис. 4. Зависимость величины коэффициента k от величины параметра ξ при $\Theta = \Theta_f$.

Большие значения коэффициента k ($k > 4 \div 5$) получить практически трудно, так как с ростом ξ и Θ быстро растут геометрические размеры системы. Кривые рис. 5 показывают зависимость x_0/r_0 (кривая I) и y_0/r_0 (кривая II) от ξ для $\Theta = \Theta_f$. Указанные кривые позволяют судить о характере траектории частицы при заданном ξ , т. е. при выбранном отношении радиусов цилиндров конденсатора R_0/r_0 и выбранном отношении ускоряющего напряжения U к отклоняющему ΔU . При $\xi > 3$ величины x_0 и y_0 , а следовательно, и размеры системы становятся нереально большими.

Теперь найдем выражение для удельной дисперсии по энергии в поле цилиндрического конденсатора. Для этого в выражение (11) подставим соотношение (13):

$$\delta_{\text{из}} = kx_0/\Delta x_0. \quad (14)$$

С ростом ξ не только возрастают геометрические размеры конденсатора, но и ухудшаются фокусирующие свойства его поля, все более усту-

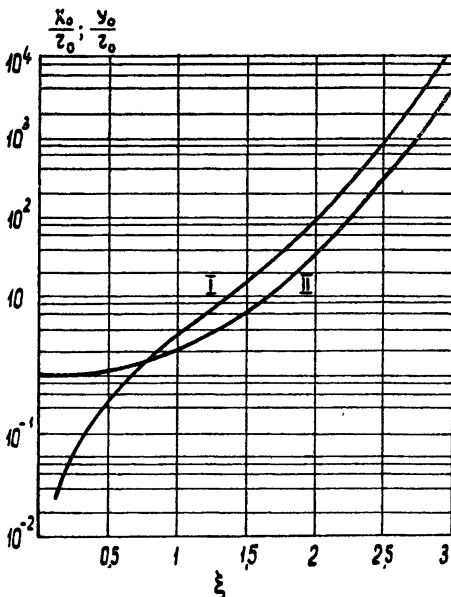


Рис. 5. Зависимость x_0/r_0 (кривая I) и y_0/r_0 (кривая II) от величины параметра ξ при $\Theta = \Theta_f$.

пая в этом отношении свойствам поля плоского конденсатора. Ширина линии изображения Δx_0 , соответствующая заданному $\alpha = 2\Delta\theta$, увеличивается. Однако при увеличении ξ одновременно с ростом Δx_0 в соотношении (14) значительно быстрее растет коэффициент k . В результате удельная дисперсия $\delta_{uц}$ в поле цилиндрического конденсатора оказывается выше, чем в поле плоского конденсатора $\delta_{uпл}$.

Очевидно, что удельная дисперсия $\delta_{uц}$ в поле цилиндрического конденсатора в отличие от удельной дисперсии в поле плоского конденсатора зависит не только от угла раствора α пучка, но и от параметра ξ . При этом зависимость от α является определяющей.

Для удобства сравнения величины удельной дисперсии в поле цилиндрического конденсатора с величиной удельной дисперсии в поле плоского конденсатора и в других полях введем коэффициент n , показывающий, во сколько раз при данных ξ и α величина удельной дисперсии в поле цилиндрического конденсатора больше соответствующей величины в поле плоского конденсатора (как предельного случая цилиндрического при $\xi = 0$):

$$n(\xi, \alpha) = \frac{\delta_{uц}(\xi, \alpha)}{\delta_{uпл}(\alpha)}. \quad (15)$$

Используя результаты расчета параметров траектории заряженной частицы в поле плоского конденсатора [2], найдем выражение для удельной дисперсии в поле плоского конденсатора в обозначениях, принятых в данной работе,

$$\delta_{uпл} = \frac{x_0}{\Delta x_0} \simeq \frac{2}{\alpha^2}. \quad (16)$$

Используя выражения (15) и (16), удельную дисперсию в поле цилиндрического конденсатора можно представить в следующем виде:

$$\delta_{uц} = n(\xi, \alpha) \frac{2}{\alpha^2}. \quad (17)$$

На рис. 6 изображена зависимость коэффициента n от ξ при фиксированных значениях α . Как видно из рассмотрения кривых, приведенных на рис. 6, наиболее рациональной величиной ξ является 1, 2. При этом коэффициент n при изменении α от 2° до 20° принимает значения от 1,232 до 1,262.

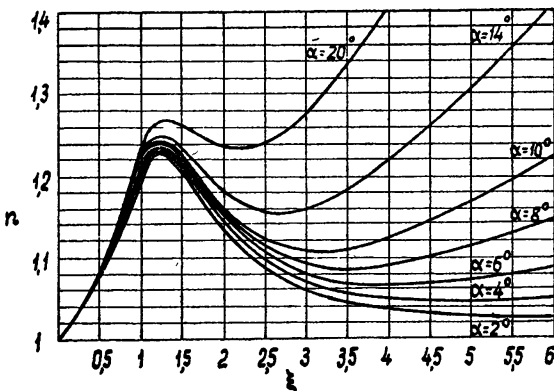


Рис. 6. Зависимость величины коэффициента n от ξ для разных α .

В заключение сравним удельную дисперсию для поля цилиндрического конденсатора с удельной дисперсией для электростатических полей других типов спектрометров, приведенных в таблице 1. Анализируя содержащиеся в указанной таблице величины, можно утверждать, что удельная дисперсия для поля цилиндрического конденсатора уступает по величине лишь удельной дисперсии в электростатическом поле сферического конденсатора. Однако в конструктивном отношении рассмотренный спектрометр проще, чем спектрометр, использующий поле сферического конденсатора.

Таблица 1

Тип электронно-оптической системы спектрометра	Плоский конденсатор	Сферический конденсатор	Конденсатор Юза-Рожанского	Цилиндрический конденсатор с вводом частиц под острым углом к оси цилиндров
Величина удельной дисперсии	$\frac{2}{a^2}$	$\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{a^2}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{a^2}$	$1,23 \frac{2}{a^2}$

В настоящее время проводится экспериментальная проверка основных теоретических соотношений, полученных в данной работе.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность П. В. Голубкову за обсуждение полученных результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Кельман, С. Я. Явор, ЖТФ, **24**, 1329 (1954).
2. G. A. Harrower, Rev. Sci. Instr., **26**, 850 (1955).
3. Г. Р. Рик, Масс-спектроскопия, ГИИТЛ, М., 1953.
4. E. M. Purcell, Phys. Rev., **54**, 818 (1938).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
8 июля 1963 г.CONCERNING THE FOCUSING AND DISPERSING PROPERTIES OF THE
CYLINDRICAL CAPACITOR FIELD

I. G. Kostov, A. S. Shapovalov

The possibility has been investigated of energy determination of charged particles by their deflection in the inhomogeneous electrostatic field of a cylindrical capacitor. Main parameters have been determined of charged particles trajectories in the field of the cylindrical capacitor and direction focussing conditions of particles. Expression has been obtained of specific energy dispersion in the field of the cylindrical capacitor. It is shown that in the field of the cylindrical capacitor the specific energy dispersion exceeds more than 1,23 the corresponding value of that in a plane capacitor.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ С ЛЮФТОМ

В. А. Брусин

Методом В. М. Попова отыскиваются достаточные условия абсолютной устойчивости для следящей системы с люфтом.

Рассмотрим следящую систему, структурная схема которой изображена на рис. 1. На этом рисунке ($T_i \geq 0$) $K(p) = (T_n p^n + \dots + T_1 p)^{-1}$ — коэффициент передачи линейной модели управляющей части, $U_{вх}(t)$ — входной, $U_{вых}(t)$ — выходной сигнал; $\tau \geq 0$ — коэффициент воздействия по производной от ошибки слежения, $\delta(t) = U_{вх}(t) - U_{вых}(t)$ — ошибка слежения.

Зависимость $y(t)$ от $x(t)$ дается соотношениями

$$\dot{y} = F(\dot{x}, x, y) = \begin{cases} \dot{x}, & \text{если } \begin{matrix} x - y = \Delta & \text{и } \dot{x} > 0; \\ x - y = -\Delta & \text{и } \dot{x} < 0; \end{matrix} \\ 0, & \text{если } \begin{matrix} |x - y| < \Delta; \\ x - y = \Delta & \text{и } \dot{x} \leq 0; \\ x - y = -\Delta & \text{и } \dot{x} \geq 0. \end{matrix} \end{cases} \quad (1)$$

Согласно [1], режим $y = x$ называется режимом выбранного люфта, а режим $y = 0$ — режимом выбора люфта.

Предположения, при которых справедлива данная идеализация люфта, учтены в [1]. Уравнения движения рассматриваемой системы записываются в виде

$$T_n \dot{x}^{(n)} + \dots + T_1 \dot{x} = \delta + \tau \dot{\delta}$$

$$(T_i \geq 0, \tau \geq 0);$$

(2)

$$\delta = U_{вх}(t) - y(t);$$

$$\dot{y} = F(\dot{x}, x, y).$$

Из уравнений (1) — (2) легко видеть, что при $U_{вх} = \text{const} = C$ система имеет множество состояний равновесия $\bar{M}(\bar{x}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(n-1)}, \bar{y}, \bar{y}^{(1)})$, удовлетворяющее соотношению

$$\begin{aligned} \bar{x}^{(i)} = \bar{y}^{(i)} = 0 & \quad (i = 1, \dots, n - 1); \\ \bar{y} = C, \quad |\bar{x} - \bar{y}| \leq \Delta. & \end{aligned} \quad (3)$$

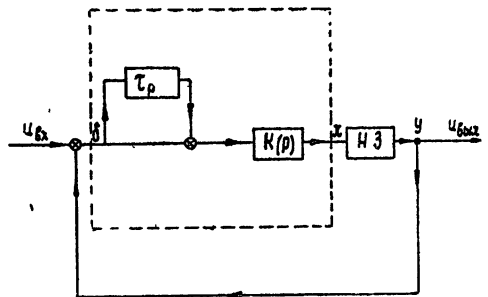


Рис. 1.

Одним из важнейших моментов изучения следящих систем является исследование на устойчивость состояния равновесия при постоянном входном сигнале, а при наличии в ней существенных нелинейностей (как это имеет место в данном случае) — исследование на абсолютную устойчивость. Конечным результатом такого исследования является вывод эффективных достаточных условий абсолютной устойчивости.

Под абсолютной устойчивостью следящей системы (1)—(2) будем понимать следующее: каково бы ни было начальное состояние $M_0(x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}, y_0, \dot{y}_0)$ системы (1)—(2) при $U_{вх} = C$ соответствующее решение $y(t)$ системы (1)—(2) при $t \rightarrow \infty$ стремится к C .

В работе [1] для одностепенной модели с $K(p) = k(T_2 p^2 + T_1 p)^{-1}$ методом точечных отображений были получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости. Однако уже для полустепенной модели с $K(p) = k(T_3 p^3 + T_2 p^2 + T_1 p)^{-1}$ данный метод встречается с большими трудностями.

То же можно сказать и о другом хорошо известном классическом методе исследования на абсолютную устойчивость, связанном с построением функции Ляпунова.

В последнее время появился ряд работ В. М. Попова [3–5], в которых предложен новый эффективный метод исследования абсолютной устойчивости по частотной характеристике линейной части. Этим методом в [3–7] были получены достаточные условия абсолютной устойчивости для различных типов нелинейностей. В данной работе этот метод распространяется на нелинейность типа (1); с его помощью выводятся достаточные условия абсолютной устойчивости системы (1)—(2).

1. При исследовании на абсолютную устойчивость величину C можно принять равной нулю. Пусть $G(t)$ — импульсная переходная функция линейного звена с коэффициентом передачи

$$(1 + \tau p) K(p) \quad (4)$$

и пусть $M_0(x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}, y_0, \dot{y}_0)$ — начальное состояние системы. Тогда, согласно [2], имеем

$$\begin{aligned} -x(t) = & \int_0^t G(\tau) y(t - \tau) d\tau + T_n G^{(n-1)}(t) x_0 + \\ & + (x_0 T_{n-1} + \dot{x}_0 T_n) G^{(n-2)}(t) + (x_0 T_{n-2} + \dot{x}_0 T_{n-1} + \\ & + \ddot{x}_0 T_n) G^{(n-3)}(t) + \dots + (x_0 T_1 + \dot{x}_0 T_2 + \dots + x_0^{(n-2)} T_n) G(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Мы предположим далее, что корни уравнения

$$T_n p^{n-1} + \dots + T_1 = 0 \quad (6)$$

имеют отрицательные действительные части. Тогда, если λ_0 — наименьший по абсолютной величине реальной части корень уравнения (6), то

$$|G^{(s)}(t)| \rightarrow 0 \quad (s = 1, \dots, n-1); \quad (7)$$

$$|G(t)| \rightarrow C_0 = \text{const}$$

при $t \rightarrow \infty$, причем стремление к нулю и соответственно к C_0 имеет порядок $e^{\text{Re}\lambda_0 t}$. Для произвольной функции $\dot{y}(t)$ определим функцию $y_T(t)$ по формуле

$$y_T(t) = \begin{cases} \dot{y}(t) & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t < 0, t > T) \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим через $x_T(t)$ выход $x(t)$ линейного звена при $y(t) = \dot{y}_T(t)$.
Обозначим

$$\psi_T(t) = \beta \dot{x}_T(t) - \eta \dot{y}_T(t), \quad (9)$$

где β, η — числа, удовлетворяющие неравенству

$$\beta - \eta = \xi > 0. \quad (9a)$$

Составим выражение

$$\begin{aligned} \rho_T &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}_T(t) \psi_T(t) dt = \int_0^T \dot{y}_T(t) [\beta \dot{x}_T(t) - \\ &- \eta \dot{y}_T(t)] dt = \int_0^T \dot{y}(t) [\beta \dot{x}(t) - \eta \dot{y}(t)] dt, \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $\dot{Y}_T(j\omega), \dot{X}_T(j\omega)$ — фурье-изображения функций $\dot{y}_T(t)$ и $\dot{x}_T(t)$.
Согласно равенству Парсеваля, имеем

$$\begin{aligned} \rho_T &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_T(-j\omega) \psi_T(j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_T(-j\omega) [\beta \dot{X}_T(j\omega) - \eta \dot{Y}_T(j\omega)] d\omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Дифференцируя по t соотношение (5) и полагая $y(t) = \dot{y}_T(t)$, получим

$$\begin{aligned} -\dot{x}_T(t) &= \int_0^t G(\tau) \dot{y}_T(t-\tau) d\tau + G(t) y_T(0) + \\ &+ T_n G^{(n)}(t) x_0 + (x_0 T_{n-1} + \dot{x}_0 T_n) G^{(n-1)}(t) + \dots + \\ &+ (x_0 T_1 + \dots + x_0^{(n-1)} T_n) G'(t). \end{aligned} \quad (5a)$$

Согласно определению $G(t)$,

$$\dot{X}_T(j\omega) = -(1 + \tau j\omega) K(j\omega) \dot{Y}_T(j\omega) - \Phi(j\omega), \quad (12)$$

где через $\Phi(j\omega)$ обозначено фурье-изображение функции

$$F(t, M_0) = G(t) y(0) + (x_0 T_1 + x_0^{(n-1)} T_n) G'(t) + \dots + T_n G^{(n-1)}(t) x_0. \quad (12a)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$\begin{aligned} \rho_T &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Y}_T(-j\omega) [-\beta(1 + \tau j\omega) K(j\omega) \dot{Y}_T(j\omega) - \beta \Phi(j\omega) - \eta \dot{Y}_T(j\omega)] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(j\omega) |\dot{Y}_T(j\omega)|^2 d\omega - \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(j\omega) \dot{Y}_T(-j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(j\omega) |\dot{Y}_T(j\omega)|^2 d\omega - \beta \int_0^T F(t, M_0) \dot{Y}_T(t) dt, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Pi(j\omega) = -\beta(1 + \tau j\omega) K(j\omega) - \eta. \quad (13a)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_0^T \dot{y}_T(t) \dot{x}_T(t) dt = \int_0^T \dot{y}(t) \dot{x}(t) dt,$$

в котором $y(t)$ — выход нелинейного звена при входе $x(t)$. Согласно [1], отрезок $[0, T]$ можно разбить на интервалы

$$[T_{i-1}, T_i] \quad (i=1, \dots, n), \quad T_0 = 0, \quad T_n = T$$

так, что на каждом из этих интервалов реализуется один и только один из режимов выбранного люфта или выбора люфта. Согласно (1),

$$\int_{T_{i-1}}^{T_i} \dot{y}_T(t) \dot{x}_T(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{для режима выбора люфта} \\ \int_{T_{i-1}}^{T_i} \dot{y}_T^2(t) dt & \text{для режима выбранного,} \\ & \text{люфта} \end{cases} \quad (14)$$

откуда

$$\int_0^T \dot{y}_T(t) \dot{x}_T(t) dt = \sum \int_{T_{i-1}}^{T_i} \dot{y}_T(t) \dot{x}_T(t) dt = \int_0^T \dot{y}_T^2(t) dt. \quad (15)$$

Учитывая далее (9), (10), (15), получаем

$$\rho_T = \xi \int_0^T \dot{y}_T^2(t) dt. \quad (16)$$

Объединяя (16) и (13), приходим к равенству

$$\xi \int_0^T \dot{y}_T^2(t) dt + \beta \int_0^T F(t, M_0) \dot{y}_T(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(j\omega) |\dot{Y}_T(j\omega)|^2 d\omega \quad (\xi > 0). \quad (17)$$

Теорема. Для абсолютной устойчивости состояния равновесия (3) системы (1) — (2) достаточно выполнения следующих условий:

- 1) уравнение $T_n p^n + \dots + T_1 = 0$ имеет корни только с отрицательной действительной частью;
- 2) существуют числа β, η , удовлетворяющие неравенству (9а), причем

$$\operatorname{Re} \Pi(j\omega) = \operatorname{Re} [-\beta(1 + \tau j\omega) K(j\omega) - \eta] \leq 0; \quad (18)$$

доказательство опирается на равенство (17).

Докажем сначала следующее утверждение: пусть $Y_0 \{y_0(t)\}$ — класс решений уравнения (1) — (2) при $U_{\text{вх}} = 0$, таких, что $y_0(t=0) = 0$. Тогда $y_0(t) \rightarrow 0, \dot{y}_0(t) \rightarrow 0, x^{(s)}(t) \rightarrow 0$ ($s = 1, 2, \dots, n-1$) при $t \rightarrow \infty$.

В предположении $y(0) = 0$ имеем, согласно (12а),

$$F_0(t) \equiv F(t, x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}, 0, \dot{y}_0) = G'(t) [x_0^{(n-1)} T_n + \dots + x_0 T_1] + \dots + G^n(t) x_0 T_n. \quad (12б)$$

Условие теоремы 1, в соответствии с (7), обеспечивает существование такого числа λ_0 ($\operatorname{Re} \lambda_0 < 0$), что порядок стремления к нулю $|F_0(t)|$

при $t \rightarrow \infty$ равен $e^{\text{Re} \lambda_0 t}$. Выполнение (18), согласно равенству (17), означает, что для любого T

$$\xi \int_0^T \dot{y}_0^2(t) dt + \beta \int_0^T F_0(t) \dot{y}_0(t) dt \leq 0. \quad (19)$$

Нам достаточно показать, что из (19) и (17) следует стремление $y_0(t) \rightarrow 0$ так как, согласно (1), (2), при этом $y_0(t) \rightarrow 0$, $x^{(s)}(t) \rightarrow 0$ ($s=1, 2, \dots, n-1$); $|x(\infty)| \leq \Delta$. Из неравенства (19) следует неравенство

$$\int_0^T \dot{y}_0^2(t) dt \leq |\beta/\xi| \left| \int_0^T F_0(t) \dot{y}_0(t) dt \right|. \quad (20)$$

Применяя к интегралу в правой части (20) неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\left| \int_0^T F_0(t) \dot{y}_0(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_0^T F_0^2(t) dt} \sqrt{\int_0^T \dot{y}_0^2(t) dt}. \quad (21)$$

Из (20) и (21) находим:

$$\int_0^T \dot{y}_0^2(t) dt \leq |\beta/\xi| \sqrt{\int_0^T F_0^2(t) dt} \sqrt{\int_0^T \dot{y}_0^2(t) dt},$$

откуда

$$\sqrt{\int_0^T \dot{y}_0^2(t) dt} \leq |\beta/\xi| \sqrt{\int_0^T F_0^2(t) dt}. \quad (22)$$

Интеграл в правой части (22) в силу указанных ниже свойств функции $F_0(t)$ сходится при $T \rightarrow \infty$; следовательно, сходится при $T \rightarrow \infty$ и интеграл в левой части; поэтому $\dot{y}_0(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Итак, выполнение пунктов 1—2, согласно доказанному выше, дает устойчивость состояния равновесия (3) системы (1), (2) при $y(0) = 0$. Покажем, что не существует функции $y(t)$, удовлетворяющей системе (1), (2), при $U_{\text{вх}} = 0$, такой, что

$$\text{либо } y(t) \geq \bar{y} > 0 \quad \text{при } t > \bar{t}, \quad (23)$$

$$\text{либо } y(t) \leq -\bar{y} < 0 \quad \text{при } t > \bar{t}. \quad (24)$$

Действительно, из (2) имеем

$$T_n x^{(n-1)} + \dots + T_1 x = - \int_0^t y(\xi) d\xi - \tau y(t) + T_n x_0^{(n-1)} + \dots + \\ + T_1 x_0 + \tau y_0 \equiv \alpha(t).$$

Согласно (23) (соответственно (24)), для любого сколь угодно большого $\bar{a} > 0$ найдется такое \bar{t} , что $\alpha(t) \leq -\bar{a}$ (соответственно $\alpha(t) > \bar{a}$) при $t > \bar{t}$, откуда в силу пункта 1 теоремы получим: $x(t) \rightarrow -\infty$ (соответственно $x(t) \rightarrow +\infty$). Однако это противоречит условию $|x - y| \leq \Delta$. Утверждение доказано.

Итак, можно теперь сказать, что при выполнении пункта 1 любое движение системы (1), (2) либо стремится к состоянию равновесия, либо после соответствующего выбора начала отсчета времени может быть включено в класс Y_0 . Этим и завершается доказательство теоремы.

2. Рассмотрим применение теоремы на примере системы, в которой

$$K(p) = \frac{1}{T_3 p^3 + T_2 p^2 + T_1 p}, \quad T_i > 0, \quad \tau > 0. \quad (25)$$

Согласно (13а),

$$\Pi(j\omega) = \frac{-(1 + \tau j\omega)\beta}{-T_2\omega^2 + j(T_1\omega - T_3\omega^3)} - \eta, \quad (26)$$

откуда

$$\operatorname{Re} \Pi(j\omega) = \frac{\beta[T_2\omega^2 + \tau\omega(T_1\omega - T_3\omega^3)] + \eta[T_2^2\omega^4 + (T_1\omega - T_3\omega^3)^2]}{T_2^2\omega^4 + (T_1\omega - T_3\omega^3)^2}. \quad (27)$$

Неравенство (18) будет эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{aligned} \eta &> 0; \\ -\beta T_3 \tau + \eta(T_2^2 - 2T_1 T_3) &\geq 0; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\beta(\tau T_1 - T_2) + \eta T_1^2 \geq 0,$$

где

$$\beta - \eta = \xi > 0.$$

Рассмотрим отдельно случаи $T_3 = 0$ и $T_3 \neq 0$.

а) Одноступенчатая модель: $T_3 = 0$.

Условие пункта 1 теоремы выполняется, поскольку $T_1, T_2 > 0$. Неравенства (28) сводятся к одному неравенству

$$\beta(\tau T_1 - T_2) + \eta T_1^2 \geq 0,$$

в котором

$$\beta - \eta = \xi > 0, \quad \eta \geq 0.$$

Удовлетворить его можно в том и только в том случае, если

$$T_1^2 > T_2 - \tau T_1. \quad (29)$$

Соотношение (29) и будет достаточным условием абсолютной устойчивости однозначной модели, наложенным только на параметры системы.

В работе [1] была выделена область абсолютной устойчивости в пространстве параметров (δ_1, δ_2) , где δ_1 и δ_2 связаны с T_i соотношениями

$$\delta_1 = \frac{T_1}{2T_2} \sqrt{T_2}; \quad \delta_2 = \frac{\tau}{2T_2} \sqrt{T_2}.$$

Условие (29) в этих обозначениях принимает вид

$$\delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 > 1/4. \quad (30)$$

На рис. 2 показаны область абсолютной устойчивости, полученная в [1] (горизонтальная штриховка), и область абсолютной устойчивости, соответствующая (30) (вертикальная штриховка).

б) Полуторастепенчатая модель: $T_3 \neq 0$.

Нужно показать, при каких значениях параметров T_1, T_2, T_3 и τ могут быть выполнены неравенства (28), если

$$\beta - \eta = \xi > 0.$$

Первое неравенство дает: $\beta > 0$, $\eta \geq 0$ и $\beta/\eta > 1$. Деля второе неравенство на η и $T_3 \tau$, а третье на β и T_2 , получаем

$$\beta > 0, \quad \eta \geq 0, \quad \beta/\eta > 1;$$

$$\frac{T_2^2 - 2T_1 T_3}{T_3 \tau} \geq \beta/\eta;$$

$$\frac{T_2 - \tau T_1}{T_1^2} < \eta/\beta.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие выполнения (28)

$$T_3 \tau \leq T_2^2 - 2T_1 T_3;$$

$$T_2 - \tau T_1 \leq T_1^2.$$

(31)

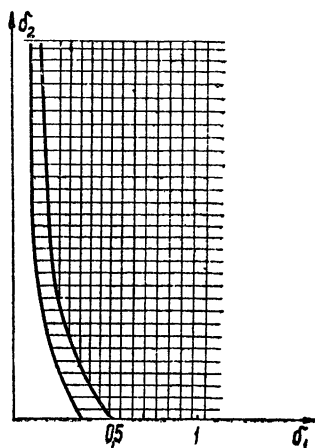


Рис. 2.

Условия (31) вместе с условием $T_1 > 0$ выделяют в пространстве (T_1, T_2, T_3, τ) область, в которой система (1)—(2) является абсолютно устойчивой.

3. Как легко заметить, пункт 2 условия теоремы выполняется тогда и только тогда, когда $K(j\omega)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\operatorname{Re}(1 + \tau j\omega) K(j\omega) > -1. \quad (32)$$

Если условие пункта 1 выполнено, то условие (32) является частотным критерием абсолютной устойчивости следящей системы (1)—(2).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. А. Бруси́н, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 751 (1962).
- 2 Сб. Теория следящих систем, под редакцией Х. Джеймса, Н. Никольса, Р. Филлипса, ИЛ, М., 1951.
- 3 В. М. Попов, Автоматика и телемеханика, 22, 961 (1961).
- 4 В. М. Попов, Автоматика и телемеханика, 23, 3 (1962).
- 5 В. М. Попов, Автоматика и телемеханика, 24, 7 (1963).
- 6 А. Х. Гелиг, ДАН СССР, 147, 526 (1962).
- 7 Я. З. Цыпки́н, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 3, 121 (1963).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 сентября 1963 г.

ON ABSOLUTE STABILITY OF SERVO SYSTEM WITH A BACKLASH

V. A. Brusin

The sufficient conditions of absolute stability are found out for the servosystem with a backlash by V. M. Popov's method.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. С. Розенфельд

Рассматривается возможность изменения некоторых правил преобразования Лапласа с целью устранить известные трудности и неясности операционных методов исследования переходных процессов (учет начальных условий, операции с дельта-функцией и другие).

Известные правила преобразования Лапласа обоснованы для функций-оригиналов: а) равных нулю при отрицательных значениях аргумента; б) растущих не быстрее экспоненты; в) имеющих разрывы только первого рода [1, 2].

В задачах о переходных процессах условие а) выполняется для функций-оригиналов, если они определяют только приращения физических величин. Условие в) исключает из общей схемы правил преобразования Лапласа операции над дельта-функцией и ее производными [1, 3].

При исследовании переходных процессов в общем случае приходится рассматривать обобщенные функции типа

$$f(t) = f_-(t)1(-t) + f_+(t)1(t) + \sum_{\alpha=0}^q c_\alpha \delta^{(\alpha)}(t), \quad (1)$$

где $\delta^{(\alpha)}(t)$ — дельта-функция и ее производные, c_α — числовые коэффициенты, $f_-(t)$, $f_+(t)$ — гладкие функции, имеющие непрерывные производные любого порядка и, обычно, растущие не быстрее экспоненты. Сингулярные составляющие в виде дельта-функции и ее производных появляются в задачах о переходных процессах при дифференцировании разрывных оригиналов [4]. Они являются также полезной идеализацией импульсных источников воздействий.

Состояние динамической системы до возникновения переходного процесса задается постановкой задачи и определяет функции $f_-(t)$. При этом момент возникновения переходного процесса, обычно, принимается за начало отсчета времени, как это сделано в соотношении (1). Функции $f_+(t)$ и коэффициенты c_α являются неизвестными и подлежат определению путем решения дифференциальных либо интегро-дифференциальных уравнений.

Применение известных правил преобразования Лапласа для отыскания решений таких уравнений в виде обобщенных функций (1) формально не обосновано и не всегда возможно. При решении задач о переходных процессах необходимо располагать надежной методикой операционных преобразований как обычных, так и обобщенных функций типа (1). Для построения такой методики приходится изменить некоторые исходные положения известной теории односторонних преобразований Лапласа; этому посвящена настоящая статья.

В общепринятой схеме построения правил преобразования Лапласа нижний предел интеграла принят равным +0. Наглядно это проявляется при переводе в область изображений разрывных функций, в формулировках правил дифференцирования и интегрирования в области оригиналов

[3, 5]. При таком выборе нижнего предела интеграла Лапласа особенности разрывных оригиналов и их производных в точке $t = 0$ не отображаются в область изображений и теряются.

Предлагается нижний предел интеграла Лапласа всегда полагать равным $-\infty$ и определять изображение обобщенных функций (1) как

$$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F_+(p) + \sum_{\alpha=0}^q c_{\alpha} p^{\alpha} = F(p), \quad (2)$$

где $F_+(p)$ — изображение обычной функции $f_+(t) \cdot 1(t)$. При таком выборе нижнего предела интеграла Лапласа возможные сингулярные особенности производных неизвестных оригиналов сохраняются при переводе соответствующих уравнений в область изображений. Для функций, не содержащих такого рода слагаемых, определение (2) совпадает с общепринятым.

Предлагаемое изменение нижнего предела не нарушает известных условий сходимости интеграла Лапласа, если число q сингулярных слагаемых оригинала остается конечным. Изображение $F(p)$, как и $F_+(p)$, является аналитической функцией комплексного переменного. Отличием $F(p)$ является степенной порядок роста, в то время как $F_+(p) \rightarrow 0$, когда p стремится к ∞ вдоль любого луча комплексной плоскости, образующего с положительной вещественной осью угол, по абсолютной величине меньший $\pi/2$ [1, 3].

Посмотрим, как проявляется исключение условий а) и в) для оригиналов и изменение нижнего предела интеграла Лапласа на связи между операциями в области оригиналов и изображений.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПОДСТАНОВКИ

Известные правила подобия и смещения аргумента изображения [3, 5] сохраняются для интегрального преобразования (2). Правило смещения аргумента оригинала видоизменяется, поскольку оригиналы могут быть отличны от нуля при $t < 0$:

$$L[f(t \mp a)] = e^{\mp pa} (F(p) - \int_{-\infty}^{\mp a-0} f(t) e^{-pt} dt); \quad a > 0. \quad (3)$$

Соотношение (3) получается путем замены переменных при выполнении преобразования (2). Оно упрощается и дает известную формулу смещения вправо $L[f(t-a)] = e^{-pa} F(p)$, если оригинал равен нулю для $t < 0$.

2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Аналитическая функция $F(p)$ имеет производные любого порядка, которые можно определять путем дифференцирования интеграла (2) по параметру.

Дифференцирование обобщенных функций (1) выполняется согласно известным правилам для суммы и произведения, если полагать коэффициенты у всех сингулярных составляющих постоянными и $l'(\pm t) = \pm \delta(t)$ [4]. Для первой производной таким образом получаем

$$f'(t) = f'_-(t) \cdot 1(-t) + f'_+(t) \cdot 1(t) + [f_+(0) - f_-(0)] \delta(t) + \sum_{\alpha=0}^q c_{\alpha} \delta^{(\alpha+1)}(t). \quad (4)$$

Изображение производной (4), учитывая известную формулу $L[f'_+(t) \times 1(t)] = pF_+(p) - f_+(0)$, определяется интегралом (2) как

$$\int_{-0}^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \int_{-0}^{\infty} f'_+(t) 1(t) e^{-pt} dt + \int_{-0}^{\infty} [\{f_+(0) - f_-(0)\} \delta(t) +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^q c_{\alpha} \delta^{(\alpha+1)}(t)] e^{-pt} dt = pF_+(p) - f_+(0) + f_+(0) - f_-(0) + \dots$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^q c_{\alpha} p^{\alpha+1} = pF(p) - f_-(0) = L[f'(t)].$$

Путем последовательного применения (5) получаем формулы для изображений производных более высокого порядка:

$$L[f''(t)] = p[pF(p) - f_-(0)] - f'_-(0) = p^2F(p) - pf_-(0) - f'_-(0); \quad (6)$$

$$\dots$$

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f_-(0) - p^{n-2} f'_-(0) \dots - pf^{(n-2)}_-(0) - f^{(n-1)}_-(0), \quad (7)$$

где n — произвольное, целое, положительное число.

Формулы (5) — (7) по своей структуре аналогичны известным соотношениям для изображений $L[f^{(n)}_+(t) 1(t)]$, которые приводятся в руководствах по применению преобразования Лапласа [3, 5]. Отличие состоит только в том, что подставляются предельные значения оригинала и его производных для $t \rightarrow -0$. При исследовании переходных процессов это отличие очень важно, поскольку прошлое динамической системы, заданное постановкой задачи, определяет начальные условия как предельные значения функций для $t \rightarrow -0$.

Известная операционная методика решения дифференциальных уравнений на основе формул $L[f^{(n)}_+(t) 1(t)]$ требует введения правил перехода от начальных условий для $t \rightarrow -0$ к предельным значениям неизвестных функций при $t \rightarrow +0$, которые должны подставляться в уравнения для изображений. При расчете линейных цепей, например, для этой цели приходится составлять и решать специальную систему алгебраических уравнений, так называемые «уравнения скачков» [6, 7].

Применение полученных формул исключает необходимость вычисления предельных значений неизвестных функций при $t \rightarrow +0$ и позволяет непосредственно подставлять в уравнения для изображений начальные условия, заданные для $t \rightarrow -0$.

Для оригиналов, равных нулю при отрицательных значениях аргумента, так что $f_-(0) = f'_-(0) = \dots = f^{(n-1)}_-(0) = 0$, формулы (5), (6), (7) упрощаются. В этом случае операции дифференцирования оригиналов соответствует операция умножения изображений на p , и это соответствие имеет место независимо от предельных значений оригинала для $t \rightarrow +0$. Функции такого рода определяют изменения приращений физических величин. Поэтому при решении дифференциальных уравнений для приращений путем применения интегральных преобразований (2) все вычислительные операции с начальными условиями исключаются.

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

При исследовании переходных процессов приходится выполнять операции над обобщенными функциями, которые находятся под знаком интеграла и могут быть представлены как

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-a}^t f(t) dt = \int_{-a}^{-0} f(t) dt + \int_{-0}^t f(t) dt = f^{(-1)}(0) + \int_{-0}^t f(t) dt, \quad a > 0, \quad (8)$$

Постоянная $f^{(-1)}(0)$ определяется состоянием динамической системы непосредственно к моменту возникновения переходного процесса $t \rightarrow -0$ и как физическая величина остается ограниченной. В области сходимости интеграла Лапласа функции $f\{t\}$ второе слагаемое соотношения (8) растет медленнее экспоненты e^{-pt} и при $t \rightarrow \infty$ $e^{-pt} f^{(-1)}\{t\} \rightarrow 0$. Поэтому при выполнении операций перехода в область изображений получим

$$\int_{-0}^{\infty} f^{(-1)}\{t\} e^{-pt} dt = \left| -\frac{e^{-pt} f^{(-1)}\{t\}}{p} \right|_{-0}^{\infty} + \frac{1}{p} \int_{-0}^{\infty} f\{t\} e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{f^{(-1)}(0)}{p} + \frac{F(p)}{p}. \quad (9)$$

Изображения повторных, тройных и т. д. интегралов обобщенных функций (1) определяются путем последовательного применения формулы (9).

В отличие от известных соотношений [5] формула (9) требует подстановки в уравнения для изображений предельных значений соответствующих оригиналов для $t \rightarrow -0$. Такая формулировка правила интегрирования в области оригиналов освобождает от необходимости вычислять предельные значения неизвестных функций при $t \rightarrow +0$ и позволяет подставлять в уравнения для изображений начальные условия, заданные прошлым динамической системы. Формула (9) совпадает с известными соотношениями [5], когда интеграл (8) является непрерывной функцией. Она обобщает эти соотношения для оригиналов с сингулярными особенностями.

Для изображений обобщенных функций (2) сохраняются известные правила интегрирования по комплексному переменному, поскольку изменение нижнего предела не нарушает условий сходимости интеграла Лапласа.

4. УМНОЖЕНИЕ И СВЕРТКА

Для обобщенных функций сохраняется известное операционное соответствие между произведением изображений и сверткой оригиналов, если один из оригиналов равен нулю при отрицательных значениях аргумента. Условие $g\{t-\tau\}=0$ для $\tau > t$ влечет за собой равенства

$$L[g\{t-\tau\}] = e^{-p\tau} G(p); \quad (10)$$

$$\int_{-0}^{\infty} f\{\tau\} g\{t-\tau\} d\tau = \int_{-0}^{t+0} f\{\tau\} g\{t-\tau\} d\tau = \int_{-0}^{t+0} f\{t-\tau\} g\{\tau\} d\tau$$

и позволяет представить произведение изображений как

$$G(p)F(p) = G(p) \int_{-0}^{\infty} f\{\tau\} e^{-p\tau} d\tau = \int_{-0}^{\infty} G(p) e^{-p\tau} f\{\tau\} d\tau =$$

$$= \int_{-0}^{\infty} f\{\tau\} d\tau \int_{-0}^{\infty} e^{-pt} g\{t-\tau\} dt = \int_{-0}^{\infty} e^{-pt} dt \int_{-0}^{\infty} f\{\tau\} g\{t-\tau\} d\tau = \quad (11)$$

$$= \int_{-0}^{\infty} e^{-pt} dt \int_{-0}^{t+0} f\{\tau\} g\{t-\tau\} d\tau = L \left[\int_{-0}^{t+0} f\{\tau\} g\{t-\tau\} d\tau \right].$$

Интеграл Лапласа (2) сходится равномерно, и это позволяет изменить порядок интегрирования при выводе соотношения (11).

Отличием операции свертки, определенной соотношением (11), является такой выбор пределов интеграла, чтобы точки разрыва обобщенных функций находились внутри интервала интегрирования. Это исключает возможность потери дельта-функций и их производных. Результатом такой свертки является обобщенная функция, равная нулю при отрицательных значениях аргумента.

5. ОБРАЩЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИИ

Преобразование Фурье обобщенных функций возможно, если соответствующие изображения имеют степенной порядок роста [4]. Для обобщенных функций конечного порядка изображения по Лапласу (2) растут не быстрее степени $|p|^q$ и формула Фурье, также как и для обычных оригиналов [8], определяет обратное преобразование Лапласа:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} e^{pt} F(p) dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{pt} dp \int_{-0}^{\infty} \left[f_-(t) 1(-t) + f_+(t) 1(t) + \sum_{\alpha=0}^q c_\alpha \delta^{(\alpha)}(t) \right] e^{-pt} dt = f_+(t) 1(t) + \sum_{\alpha=0}^q c_\alpha \delta^{(\alpha)}(t) = L^{-1}[F(p)]. \quad (12)$$

Интегрирование выполняется по прямой, параллельной мнимой оси $j\omega$ и расположенной в области сходимости интеграла Лапласа (2). При этом интеграл обращения (12) сходится в смысле обобщенных функций и определяет оригинал для $t \geq 0$, оставляя неопределенными его значения при $t < 0$. Это обусловлено выбором нижнего предела интеграла Лапласа (2), при котором значения оригинала для $t < 0$ не отображаются в область изображений и не могут быть восстановлены операцией обращения. Такое положение имеет место при любых односторонних интегральных преобразованиях. При исследовании переходных процессов эта особенность односторонних интегральных преобразований не вносит каких-либо трудностей, поскольку состояние динамической системы для $t < 0$ задается и определению подлежит только оригинал при $t \geq 0$.

Интеграл обращения определяет гладкую функцию $f_+(t)$ и коэффициенты c_α оригинала. При этом значения этих величин можно вычислять, не выполняя операции интегрирования изображений по комплексному переменному.

Коэффициенты у сингулярных составляющих оригинала вычисляются по изображению (2):

$$c_q = \lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p^q}; \quad c_{q-1} = \lim \left[\frac{F(p)}{p^{q-1}} - c_q p \right] \quad (13)$$

и т. д. Гладкая составляющая оригинала определяется как сумма вычетов изображения:

$$f_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{pt} F_+(p) dp = \sum \text{Res } e^{pt} F_+(p) = \sum \text{Res } e^{pt} F(p), \quad (14)$$

поскольку

$$\text{Res } e^{pt} \sum_{\alpha=0}^q c_\alpha p^\alpha = 0.$$

Соотношение (14) позволяет вычислять значения как обычных, так и обобщенных функций для $t > 0$. При этом операция выделения целой части из растущих изображений, как это следует из (14), не является необходимой. Поэтому теорема разложения на простые дроби, формула включения Хевисайда и другие положения, которые получаются на основе соотношения (14), могут непосредственно применяться для обращения растущих изображений. Ограничения для показателей степенного роста числителя m и знаменателя n изображений, которые вводятся обычно в виде условия $m \leq n$, и операцию выделения целой части, которая усложняет обращение растущих изображений, следует исключить. Известные формулы при этом определяют только гладкую составляющую оригинала для $t > 0$. Для вычисления коэффициентов у дельта-функции и ее производных следует обратиться к соотношениям (13).

Изложенное свидетельствует о возможности и целесообразности изменения, согласно требованиям задач исследования переходных процессов, некоторых положений о преобразовании Лапласа. Это позволило построить единую, надежно обоснованную систему правил для выполнения операционных преобразований как обычных, так и обобщенных функций конечного порядка. Известный порядок применения такого рода операционных правил при этом полностью сохраняется.

6. ПРИМЕР

В качестве примера применения рационализированных правил преобразования Лапласа рассмотрим задачу определения переходного процесса при переключении реле в цепи постоянного тока. Схема цепи представлена на рис. 1. В момент времени $t = 0$ от источника постоянного напряжения U отключается первое реле (сопротивление R_1 и индуктивность L_1) и подключается второе реле (сопротивление R_2 , индуктивность L_2). Определить ток в ветви источника и напряжение на зажимах переключателя реле.

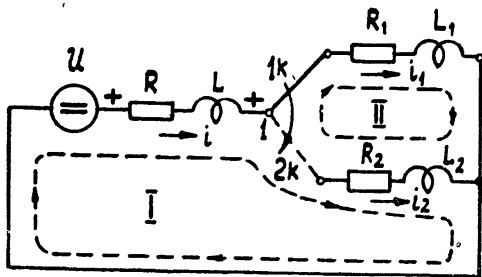


Рис. 1.

Система уравнений в этом случае имеет вид

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + U_{2k} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (\text{контур I}), \quad (1)$$

$$0 = U_{1k} + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - U_{2k} \quad (\text{контур II}), \quad (2)$$

$$i = i_1 + i_2 \quad (\text{узел I}); \quad (3)$$

условия переключения цепи:

$$t < 0; \quad U_{1k} = 0; \quad i_2 = 0; \quad i_-(t) = i_-(t); \quad (4)$$

$$t \geq 0; \quad U_{2k} = 0; \quad i_1 = 0; \quad i_+(t) = i_2(t). \quad (5)$$

Переходя к изображениям, получим

$$\frac{U}{p} = RJ(p) + pLJ(p) - Li_-(0) + U_{2k}(p) + R_2 J_2(p) + pL_2 J_2(p) - L_2 i_2(0); \quad (6)$$

$$0 = U_{1k}(p) + R_1 J_1(p) + p L_1 J_1(p) - L_1 i_{1-}(0) - p L_2 J_2(p) + L_2 i_{2-}(0) - R_2 J_2(p) - U_{2k}(p); \quad (7)$$

$$J(p) = J_1(p) + J_2(p); \quad (8)$$

$$U_{2k}(p) = 0; \quad J_1(p) = 0; \quad i_{2-}(0) = 0. \quad (9)$$

Решение уравнений для изображений дает

$$J(p) = J_2(p) = \frac{U + p L i_{-}(0)}{p[p(L+L_2) + R + R_2]}; \quad (10)$$

$$U_{1k}(p) = L_1 i_{-}(0) + \frac{[U + p L i_{-}(0)][R_2 + p L_2]}{p[p(L+L_2) + R + R_2]}. \quad (11)$$

Оригиналы, соответствующие $J(p)$ и $U_{1k}(p)$, определяют ток источника и напряжение ключа для $t \geq 0$. Учитывая, что только ток источника отличен от нуля при $t < 0$, получим после обращения этих изображений:

$$i(t) = i_{-}(t) 1(-t) + \left[\frac{L i_{-}(0)}{L + L_2} e^{\alpha t} + \frac{U}{R + R_2} (1 - e^{\alpha t}) \right] 1(t), \quad \alpha = -\frac{R + R_2}{L + L_2}; \quad (12)$$

$$i_2(t) = \left[\frac{L i_{-}(0)}{L + L_2} e^{\alpha t} + \frac{U}{R + R_2} (1 - e^{\alpha t}) \right] 1(t); \quad (13)$$

$$U_{1k}(t) = \left[L_1 + \frac{L L_2}{L + L_2} \right] i_{-}(0) \delta(t) + \frac{U R_2}{R + R_2} + \left[\frac{L i_{-}(0)}{L + L_2} - \frac{U}{R + R_2} \right] \left[R_2 - L_2 \frac{R + R_2}{L + L_2} \right] e^{\alpha t}. \quad (14)$$

Полученные соотношения дают решение поставленной задачи. Для этого не потребовалось допущений о характере изменения токов в индуктивностях типа известных «законов» коммутации.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.
2. В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, ГТИ, М., 1951.
3. Г. Деч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, М., 1958.
4. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1959.
5. М. Ф. Гарднер и Дж. Л. Бэрнс, Переходные процессы в линейных системах, Физматгиз, М., 1961.
6. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Прикладная математика и механика, **20**, 639 (1956).
7. А. С. Розенфельд, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, **89**, 4 (1961).
8. Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, М., 1948.

Одесский энерготехнический институт связи

Поступила в редакцию
10 мая 1963 г.

LAPLACE TRANSFORMATION AND TRANSIENT PROCESSES INVESTIGATION

A. S. Rosenfeld

A possibility of improvement of some Laplace transformation rules is considered in order to eliminate known difficulties and vaguenesses of operational methods of investigation of transient processes (initial conditions are taken into account: operation with delta-function and others).

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

**РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ РЯДА
ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ, ЛУНЫ И ЮПИТЕРА НА ВОЛНЕ
70,16 см**

А. В. Захаров, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин

Измерения радиоизлучения дискретных источников относительно Кассиопеи-А проводились рядом наблюдателей, в том числе и на волнах близ 70 см. Однако при составлении каталога спектров дискретных источников необходимы исследования единой методикой, путем прецизионных измерений наиболее мощных источников с помощью метода «искусственной Луны» и последующего сравнения с ними слабых источников. Частичному выполнению этой задачи и посвящены настоящие измерения интенсивности излучения дискретных источников. Что касается измерений температуры радиоизлучения Луны и Юпитера, то они являются более точными, нежели имеющиеся весьма немногочисленные экспериментальные данные на волнах $\lambda \sim 70$ см [1, 2].

Измерения были проведены в сентябре 1963 г. путем сравнения с излучением Кассиопеи-А, принятым за эталонное с интенсивностью $S_{\nu \text{Касс}} = 6,1 \cdot 10^{-23}$ вт·м⁻²·Гц⁻¹. Ширина диаграммы направленности приемной антенны (измеренной по радиоизлучению Кассиопеи-А) составляла 1,5°; при измерениях использовался модуляционный радиометр с флюктуационным порогом чувствительности $0,2 \div 0,3^\circ\text{К}$ при постоянной времени 1 сек. Методика исследований заключалась в проведении серий чередующихся измерений интенсивности эталонного источника Кассиопеи-А и исследуемых источников относительно опорных областей, соответствовавших отведению антенны по азимуту в обе стороны от источника. Это позволило исключить ошибки из-за возможного изменения интенсивности попадающего в боковые лепестки диаграммы радиоизлучения атмосферы и Земли, а также автоматически учесть возможное несовпадение температур космического радиоизлучения в районе источника и в опорных областях. При наблюдении какой-либо одной из опорных областей в антенное плечо через направленный ответвитель вводился шумовой сигнал от газоразрядной трубки для компенсации сигнала, вызванного разностью температуры антенны и холодного эталона.

а) *Результаты измерения температуры излучения Луны и Юпитера.* Превышение температуры радиоизлучения Луны над экранируемым ею космическим фоном определялось по формуле:

$$T'_L = \frac{\lambda^2}{2k} \frac{S_{\nu \text{Касс}}}{(\Delta n_{\text{Касс}}/\Delta n_{\text{Луны}})} \frac{1}{\Omega_L \bar{F}} e^{\Gamma(h_{\text{Луны}}) - \Gamma(h_{\text{Касс}})}, \quad (1)$$

где λ — длина волны, k — постоянная Больцмана, Ω_L — телесный угол Луны, $\Omega_L \bar{F} = \int_{\Omega_L} F d\Omega = (0,96 \pm 0,002) \Omega_L$ — телесный угол Луны, усредненный по диа-

грамме антенны. Температура экранируемого Луной фона определялась по радиоизотопам на волнах $\lambda = 75$ см [4, 11] и $\lambda = 1,5$ м [3] с пересчетом на $\lambda = 70,16$ см со спектральным индексом 2,6. Определенная по 100 записям величина радиотемпературы оказалась равной

$$T'_L = 195 \pm 10^\circ\text{К}.$$

Средняя температура радиоизлучения Луны T_L с учетом средней температуры экранируемого ею фона ($T_\phi = 23^\circ\text{К} \pm 10^\circ\text{К}$), а также с учетом отражения от Луны космического радиоизлучения

$$T_L = 215 \pm 16^\circ\text{К}.$$

Этот результат в пределах точности измерений не противоречит данным [1] ($T_L = 185 \pm 37^\circ\text{К}$), но является более точным и согласуется с нашими измерениями на $\lambda = 36$ см и $\lambda = 50$ см [8, 9] ($T'_L = 237 \pm 7,5^\circ\text{К}$ и $T_L = 240 \pm 14^\circ\text{К}$) при учете ра-

диолокационных данных об увеличении коэффициента отражения с ростом длины волны [10].

Интенсивность излучения Юпитера, найденная как среднее из 41 измерения, оказалась равной

$$S_{\nu_{Ю}} = 4,55 \cdot 10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$$

(с точностью $\pm 13\%$). Эта величина, учитывая пределы изменения позиционного угла, представляет собой среднее между возможными максимальным и минимальным уровнями излучения за счет предполагаемой поляризации. Соответствующая средняя температура Юпитера, приведенная к его оптическому диску,

$$T_{Ю} = 20000 \pm 2600^\circ \text{К.}$$

Измеренное значение $T_{Ю}$ значительно ниже приведенного в [2] ($T_{Ю} = 70000 \pm 30000^\circ \text{К}$).

б) *Результаты измерения интенсивности дискретных источников.* Интенсивность дискретного источника вне земной атмосферы определялась по очевидной формуле

$$S_{\nu} = S_{\nu_{\text{Касс}}} \frac{\Delta n_{\text{ист}}}{\Delta n_{\text{Касс}}} e^{\Gamma(h_{\text{ист}}) - \Gamma(h_{\text{Касс}})}, \quad (2)$$

где $\Delta n_{\text{ист}}$, $\Delta n_{\text{Касс}}$ — приращения показаний выходного прибора радиометра при наведении антенны на исследуемый источник и на Кассиопею-А, $\Gamma(h_{\text{Касс}})$ и $\Gamma(h_{\text{ист}})$ — поглощение в атмосфере на высоте Кассиопеи-А и источника.

В таблице 1 представлены измеренные значения S_{ν} , а также число записей источников, случайная ошибка измерений σ и общая относительная погрешность измерений

$\gamma_{S_{\nu}} = \sqrt{\sigma^2 + \gamma_{S_{\nu_{\text{Касс}}}}^2}$, где $\gamma_{S_{\nu_{\text{Касс}}}} = 5\%$ — погрешность в значении S_{ν} Кассиопеи.

Таблица 1

Наименование источника	Для двух поляризаций (S_{ν} , вт·м ⁻² ·Гц ⁻¹)	Число записей	σ (%)	$\gamma_{S_{\nu_{\text{Касс}}}}$ (%)	$\gamma_{S_{\nu}}$ (%)
Лебедь-А	$4,76 \cdot 10^{-23}$	17	3,2	5	6
Телец-А	$1,18 \cdot 10^{-23}$	14	2	5	5,5
Дева-А	$5,6 \cdot 10^{-24}$	16	<1	5	5
Орион	$2,13 \cdot 10^{-24}$	23	1,8	5	5,3
Розетка	$1,83 \cdot 10^{-24}$	18	6	5	8
Гидра	$1,25 \cdot 10^{-24}$	22	3	5	6

Представленные в таблице значения S_{ν} в пределах точности измерений согласуются (за исключением Розетки) с данными других авторов (см., например, [5]). Вместе с измерениями, проведенными в НИРФИ на волнах 25, 35, 42 и 53 см [6, 7], наши результаты позволяют уточнить спектры ряда дискретных источников в дециметровом диапазоне. С этой целью предполагается провести прецизионные измерения интенсивности излучения Кассиопеи-А на $\lambda = 70$ см с помощью «искусственной Луны».

Авторы весьма признательны И. М. Айнбиндеру, Л. К. Солошеку и Ю. Ф. Коптеву, разработавшим высокочувствительный усилитель для радиометра.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. L. Seeger, J. Westerhout, R. J. Conway, *Astroph. J.*, **126**, 585 (1955).
2. F. D. Drake, S. Hvatum, *Astron. J.*, **64**, 329 (1959).
3. F. Droge, W. Priester, *Z. Astroph.*, **40**, 236 (1956).
4. C. L. Seeger, F. L. H. M. Stumpers, H. Hurck, *Phil. Tec. Rev.*, **21**, 317 (1960).
5. R. G. Conway, K. I. Kellerman, R. J. Long, *Monthly Not. Roy. Astr. Soc.*, **125**, 260 (1963).
6. В. П. Ласточкин, В. А. Порфирьев, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Н. Н. Холодилов, Н. М. Цейтлин, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **6**, 629 (1963).

7. В. А. Разин, В. Т. Федоров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1052 (1963).
 8. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 242 (1963).
 9. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1087 (1963);
 10. J. V. Evans, G. H. Pettengil, J. Geoph. Res., 68, 423 (1963).
 11. I. I. K. Pauliny-Toth, J. R. Shakeshaft, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 124, 61 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
 при Горьковском университете

Поступила в редакцию
 21 декабря 1963 г.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНЕ

$$\lambda = 1,6 \text{ см}^*$$

Д. А. Дмитренко, С. А. Камонская, В. Л. Рахлин

Осенью 1962 года в Крыму были проведены измерения фазового хода Луны на волне $\lambda = 1,6 \text{ см}$ методом «искусственной Луны» [1]. Для измерений применялся модуляционный радиометр супергетеродинного типа с параметрическим усилителем на входе**. Флюктуационный порог чувствительности радиометра был равен $0,15^\circ\text{К}$ для постоянной времени выходного прибора $\tau = 16 \text{ сек}$, при которой проводились все измерения. Антенная система представляла собой параболический отражатель диаметром $1,5 \text{ м}$ и облучатель для приема горизонтальной поляризации. Диаграмма направленности антенной системы, снятая по излучению Солнца, составляла $49'$ на уровне 3 дБ . Для компенсации фонового сигнала второй вход радиометра соединялся с рупорной системой, направленной в зенит.

Измерения велись в часы, близкие к кульминации Луны. Радиоизлучение Луны сравнивалось с излучением «черного эталона» — диска, помещенного на фоне неба во френгоферовой зоне антенны под углом места $h = 19^\circ$ на расстоянии $L = 142,4 \text{ м}$ от радиотелескопа. Диаметр эталона выбирался так, чтобы его угловые размеры были близки к среднему угловому размеру лунного диска. Процесс калибровки заключался в измерении разности сигналов от поднятого эталона и участка небосвода за ним при опущенном эталоне. Направление антенны радиотелескопа в процессе калибровки оставалось неизменным. Радиотемпература Луны определялась как разность показаний выходного прибора при антенне, направленной на центр лунного диска и отведенной от него по азимуту на высоте Луны. Угловое расстояние между Луной и опорными областями составляло 2° , что соответствует уровню диаграммы направленности, не превышающему $0,3\%$. Однодневное наблюдение включало в себя не менее десяти циклов (эталон—Луна—эталон).

Радиотемпература Луны находилась по формуле

$$T_{LF} = \frac{n_L^{-1}}{n_d} d T_d e^{-\Delta\tau}, \quad (1)$$

где n_L и n_d — соответственно показания выходного прибора радиометра, пропорциональные температурам Луны и калибровочного эталона, d — коэффициент, учитывающий разницу угловых размеров Луны и калибровочного эталона, T_d — температура калибровочного эталона, измеряемая термометром в $^\circ\text{К}$, $e^{-\Delta\tau}$ — коэффициент, учитывающий поглощение радиоизлучения Луны в атмосфере и излучение атмосферы за эталоном. Формулу (1) легко получить [2], учитывая, что поглощение радиоизлучения «черного» диска в атмосфере на расстоянии $L = 142,4 \text{ м}$ мало.

Обработка результатов измерений, полученных в течение двух лунаций, показала, что фазовые зависимости радиотемпературы Луны достаточно хорошо аппроксимируются выражениями

$$T_{LF} = 207^\circ + 33^\circ \cos(\Omega t - 8^\circ)$$

(измерения 2 сентября—2 октября 1962 г.) и

$$T_{LF} = 207^\circ + 34^\circ \cos(\Omega t - 18^\circ)$$

(измерения 2 октября—2 ноября 1962 г.)

* Доклад на VI Всесоюзной конференции по радиоастрономии, Горький, 1963.

** Конструкция параметрического усилителя разработана А. С. Берлиным.

Погрешность в значении переменной составляющей равна $\pm 4\%$. Ошибка в определении постоянной составляющей не более $\pm 3\%$. Погрешность в определении фазы составляет около $10 \pm 20^\circ$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 1004 (1961).
2. С. А. Каменская, Б. И. Семенов, В. С. Троицкий, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 882 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 декабря 1963 г.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ ПУТЕМ ПРОСТРАНСТВЕННО-РАЗНЕСЕННОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ ИСЗ

Л. М. Ерухимов, Н. А. Митяков

Существующие методы определения параметров ионосферы путем наземного приема сигналов ИСЗ (метод когерентных частот, метод Фарадея и другие [1, 2]) основаны на анализе записей сигналов в одной приемной точке. Однако определение электронной концентрации этими методами в ряде случаев затруднено из-за наличия горизонтальных градиентов электронной концентрации в ионосфере [2]. В настоящей заметке кратко рассмотрены некоторые методы определения параметров ионосферы, основанные на пространственно-разнесенном приеме сигналов ИСЗ. Подобные измерения в сочетании с измерениями в одной точке дают возможность вычислить вклад горизонтальных градиентов электронной концентрации в наблюдаемые эффекты.

Как известно, выражение для оптического пути радиоволны в среде имеет вид $L = \int n ds$, где n — показатель преломления, ds — элемент пути. В случае квазипродольного распространения [3]

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2 [1 \pm (\omega_H/\omega) \cos \gamma]} = 1 - \frac{2aN}{\omega^2 [1 \pm (\omega_H/\omega) \cos \gamma]}, \quad (1)$$

где индексы 1 и 2 относятся к обыкновенной и необыкновенной волнам, e и m — заряд и масса электрона, ω — рабочая частота, $\omega_H = eH/mc$ — гирочастота электронов, γ — угол между радиусом-вектором волны и направлением магнитного поля. Принимая $\omega \gg \omega_H$ и используя закон преломления Снеллиуса, легко показать, что в случае сферически-слоистой среды при условии $2aN/\omega^2 \gg \cos^2 \varphi$ (см. рис. 1) выражение для $L_{1,2}$ приобретает вид

$$L_{1,2} = \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{aN}{\omega^2 [1 \pm (\omega_H/\omega) \cos \gamma]} \right) dr = r_0 - \int_R^{R_c} \frac{aN dR}{\omega^2 \cos \varphi [1 \pm (\omega_H/\omega) \cos \gamma]}, \quad (2)$$

т. е. интегрирование можно проводить по прямой, соединяющей источник с наблюдателем (рис. 1).

При наличии горизонтальных градиентов электронной концентрации закон преломления отличается от закона Снеллиуса (см., например, [4]). Можно показать, что в этом случае выражение (2) справедливо при выполнении дополнительных условий, требующих малость горизонтальных градиентов ионизации. Эти условия имеют вид

$$\int \frac{\partial n}{\partial x} ds \ll \cos^2 \varphi; \quad \int \frac{\partial n}{\partial y} ds \ll 1,$$

где s — текущая координата вдоль луча, x и y — текущие горизонтальные координаты на луче (ось x расположена в плоскости падения волны).

При исследовании ионосферы методом, основанным на эффекте Фарадея, обычно анализируются фединги сигнала, наблюдаемые при приеме на линейно поляризованную антенну. Эти фединги характеризуются изменением разности фаз обыкновенной и необыкновенной волн:

$$\psi = \frac{\omega}{c} (L_1 - L_2) = \frac{2a \omega_H}{\omega^2 c} \int \cos \gamma \frac{NdR}{\cos \varphi}. \quad (3)$$

Вычислим производные от ψ по горизонтальным направлениям x_0 и y_0 (рис. 1). В общем виде окончательные выражения для $\partial \psi / \partial x_0$ и $\partial \psi / \partial y_0$ получаются довольно громоздкими; поэтому мы ограничимся случаем плоской Земли и однородного по величине и направлению магнитного поля. В этом случае

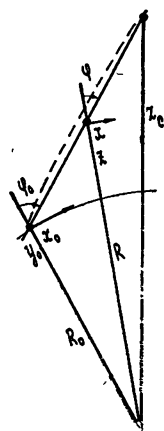


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_0} &= \frac{2a \omega_H}{\omega^2 c} \left[\frac{\sin \alpha \cos \beta}{z_c} \int Ndz - \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} \int \frac{\partial N}{\partial x} \left(1 - \frac{z}{z_c} \right) dz \right]; \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_0} &= \frac{2a \omega_H}{\omega^2 c} \left[\frac{\sin \alpha \sin \beta}{z_c} \int Ndz - \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi_0} \int \frac{\partial N}{\partial y} \left(1 - \frac{z}{z_c} \right) dz \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $z_c = R_c - R_0$ — высота спутника, $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \cos \beta \sin \varphi$, α — угол между направлением магнитного поля и вертикалью, β — угол между проекцией направления поля на плоскость земли и осью x_0 . Величины $\partial \psi / \partial x_0$ и $\partial \psi / \partial y_0$ можно получить из измерения сдвигов фарадеевских федингов на пространственно разнесенных антеннах. Располагая приемные антенны на расстояниях D_η и D_ξ по взаимно перпендикулярным осям η , ξ и выбирая ось η по направлению магнитного меридиана, получим

$$\frac{\Delta \psi_\xi}{D_\xi} = 2a \frac{\omega_H}{c \omega} \left[\frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial \xi} \left(1 - \frac{z}{z_c} \right) dz \right]; \quad (5)$$

$$\frac{\Delta \psi_\eta}{D_\eta} = 2a \frac{\omega_H}{c \omega} \left[\frac{\sin \alpha}{z_c} \int_0^{z_c} Ndz - \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi} \int_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial \eta} \left(1 - \frac{z}{z_c} \right) dz \right]. \quad (5a)$$

Здесь $\partial N / \partial \xi$ и $\partial N / \partial \eta$ — производные N по направлениям ξ и η .

Из (5) видно, что измерения сдвигов фарадеевских федингов на антеннах, разнесенных вдоль магнитной параллели, позволяют непосредственно оценить величины интегральных градиентов $(\partial N / \partial \xi) dz$ электронной концентрации в этом направлении. Оценки показывают, что для неоднородностей, расположенных в F -слое ионосферы, с горизонтальными градиентами $\int (\partial N / \partial \xi) dz \sim 10^4 \text{ см}^{-3}$ при высотах спутника $z_c \sim 700 \div 1000 \text{ км}$ на частоте $f \sim 20 \text{ мГц}$ изменения $\Delta \psi_\xi \sim (0,5 \div 1)$ радиан можно получить при разное антенн на расстояние порядка $10 \div 20 \text{ км}$. Величина $\Delta \psi_\eta / D_\eta$

определяется как интегральной электронной концентрацией $\int_0^{z_c} Ndz$, так и горизонтальными градиентами N в направлении магнитного меридиана. Если $\int_0^{z_c} Ndz =$

$= 10^{13} \text{ эл} \cdot \text{см}^{-2}$ и $\sin \alpha \approx 0,4$, то при $\int_0^z (\partial N / \partial \eta) dz \approx 10^4 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$ первый член в выражении (5a) в несколько раз больше второго. Поэтому базу D_η в направлении магнитного меридиана не следует брать больше нескольких километров.

При исследовании ионосферы методом когерентных частот можно получить аналогичные выражения для производных разности фаз когерентных частот $m_1 \omega_0$ и $m_2 \omega_0$,

приведенных к частоте $m_1 m_2 \omega_0$ (ω_0 —частота опорного генератора, m_1, m_2 —целые числа). В этом случае при $m_1 \omega_0 \gg \omega_H$ и $m_2 \omega_0 \gg \omega_H$ влиянием магнитного поля можно пренебречь и выражения для разности фаз Φ и ее производных по направлениям x_0 и y_0 можно записать в виде

$$\Phi = \frac{\omega}{c} [L(m_1 \omega_0) - L(m_2 \omega_0)] = \frac{a}{\omega c} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) \int_{R_0}^{R_c} \frac{NdR}{\cos \varphi}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \frac{a}{\omega c} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{\cos \varphi_0}{r_c} \left[\int_{R_0}^{R_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{r_c - r}{\cos \varphi} dR - R_0 R_c \sin \varphi_0 \cos \varphi_c \int_{R_0}^{R_c} \frac{NdR}{R^2 \cos^3 \varphi} \right];$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_0} = \frac{a}{\omega c} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{1}{2c} \int_{R_0}^{R_c} \frac{\partial N}{\partial y} \frac{r_c - r}{\cos \varphi} dR,$$

где $r_c = R_c \cos \varphi_c - R_0 \cos \varphi_0$ —расстояние между источником и приемником, φ_0 и φ_c —значение углов φ на поверхности Земли и в точке спутника.

Величины $\partial \Phi / \partial x_0$ и $\partial \Phi / \partial y_0$ могут быть определены из измерений разности $\Delta \Phi$ на пространственно-разнесенных антеннах. Если антенны расположены по осям η и ξ , составляющим с осями x_0 и y_0 угол δ , и расстояния между антеннами соответственно равны D_ξ и D_η , легко видеть, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \frac{\Delta \Phi_\eta}{D_\eta} \cos \delta + \frac{\Delta \Phi_\xi}{D_\xi} \sin \delta; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_0} = \frac{\Delta \Phi_\eta}{D_\eta} \sin \delta - \frac{\Delta \Phi_\xi}{D_\xi} \cos \delta,$$

где $\Delta \Phi_\eta$ и $\Delta \Phi_\xi$ —разности фаз на базах D_η и D_ξ . Как видно из (6) и (7), измерения разности фаз когерентных частот в пространственно-разнесенных точках позволяют непосредственно определить величину регулярных и нерегулярных горизонтальных градиентов электронной концентрации в направлении, перпендикулярном плоскости падения волны. Необходимые для измерений на частотах 20 и 90 мГц величины баз D_ξ и D_η , как показывают оценки, могут быть порядка нескольких сот метров.

Измерения сигналов ИСЗ на пространственно-разнесенных антеннах позволяют оценить также величины горизонтальной R_r и вертикальной R_v рефракции в ионосфере. Действительно, в случае малых углов рефракции, согласно [5],

$$R_v = \frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{\partial L}{\partial x_0}; \quad (8)$$

$$R_r = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y_0},$$

где оси x' и y' перпендикулярны к радиусу-вектору, причем ось x' расположена в плоскости падения волны. Используя (2) и (8), получаем

$$R_v = \frac{a}{\omega^2} \frac{1}{2c} \left[R_0 R_c \sin \varphi_0 \cos \varphi_c \int_{R_0}^{R_c} \frac{NdR}{R^2 \cos^3 \varphi} - \int_{R_0}^{R_c} \frac{\partial N}{\partial x} \frac{r_c - r}{\cos^2 \varphi} \right] dR; \quad (9)$$

$$R_r = \frac{a}{\omega^2} \frac{1}{2c} \int_{R_0}^{R_c} \frac{\partial N}{\partial y} \frac{r_c - r}{\cos^2 \varphi} dR.$$

Из (6) и (9) легко установить связь между производными от разности фаз когерентных частот и углами рефракции. В случае метода Фарадея связь между углами вертикальной и горизонтальной рефракции и величинами $\partial \Psi / \partial x_0$ и $\partial \Psi / \partial y_0$ легко установить, используя выражения (2), (3), (8). Вынося из-под интеграла в (3) $\cos \gamma$ с некоторым средним значением и проводя дифференцирование, получим более общие, чем (4), (5), выражения

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_0} = \frac{2a \omega_H}{\omega^2 c} \frac{\partial}{\partial x_0} (\cos \gamma) \int \frac{NdR}{\cos \varphi} + \frac{2\omega_H}{c} \cos \gamma \cos \varphi_0 R_B; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_0} = \frac{2a \omega_H}{\omega^2 c} \frac{\partial}{\partial y_0} (\cos \gamma) \int \frac{NdR}{\cos \varphi} + \frac{2\omega_H}{c} \cos \gamma R_r.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, УФН, 71, 369 (1960).
2. Н. А. Митяков, Э. Е. Митякова. Геомagnetизм и аэрономия, 3, 858 (1963).
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
4. В. Льюис, Проблемы современной физики, вып. 4, 1954, стр. 156.
5. В. В. Виткевич, Радиотехника и электроника, 3, 478 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 июля 1963 г.

Примечание при корректуре. Как показали результаты обработки экспериментальных данных по разнесенному приему сигналов «Космос-1», в ионосфере могут наблюдаться крупномасштабные неоднородности ($l > 500$ км) с горизонтальными градиентами, большими $10^5 \frac{\partial l}{\text{см}^2}$, вызывающие существенные сдвиги фарадеевских федингов уже при разnose антенн на расстояние порядка километра.

О ЛУЧЕВОМ ОПИСАНИИ СЛАБО-НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Л. С. Долин

Как известно [1, 2], корреляционная функция $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \overline{E(\mathbf{r}_1)E^*(\mathbf{r}_2)}$ случайно неоднородного (в частном случае регулярного) монохроматического поля $E(\mathbf{r})$ описывается системой уравнений*

$$(\Delta_1 + k_0^2) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0; \quad (1)$$

$$(\Delta_2 + k_0^2) \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0, \quad (2)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c}$ — волновое число в свободном пространстве. Постановка краевой задачи для этих уравнений и ее решение методом функции Грина содержится в работе [3]. Ниже развивается другой подход к этой задаче, основанный на некоторых свойствах спектра корреляционной функции.

Перейдем в уравнениях (1), (2) к новым переменным $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r} = (1/2)(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ а затем сложим эти уравнения и вычтем одно из другого. В результате получим

$$(\nabla_\rho \nabla_r) \Gamma(\rho, \mathbf{r}) = 0; \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{4} \Delta_r + \Delta_\rho + k_0^2 \right) \Gamma(\rho, \mathbf{r}) = 0. \quad (4)$$

Если теперь разложить функцию Γ в трехмерный интеграл Фурье

$$\Gamma(\rho, \mathbf{r}) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\rho} d^3\mathbf{k}, \quad (5)$$

то для ее спектра $F(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ будем иметь следующую систему уравнений:

$$(\mathbf{k} \nabla_r) F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0; \quad (6)$$

$$\left(\frac{1}{4} \Delta_r + k_0^2 - k^2 \right) F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0. \quad (7)$$

Первое из этих уравнений показывает, что спектр корреляционной функции сохраняется вдоль лучей, параллельных вектору \mathbf{k} : $\frac{d}{ds} F(\mathbf{k}, \mathbf{r}_0 + \mathbf{k}s) = 0$; второе опре-

* Корреляционная функция такого вида может рассматриваться как фурье-компонента функции взаимной корреляции, введенной в [2].

деляет класс возможных распределений $F(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ в плоскости, нормальной к направлению этого вектора. Поэтому если на границе области известно истинное распределение спектра $F(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, то продолжение этого спектра внутрь области может быть осуществлено с помощью уравнения переноса (6). Это вовсе не означает, что система (6), (7) упростилась по сравнению с исходной (1), (2), так как в общем случае для отыскания спектра на границе необходимо знать функцию корреляции в некоторой ее окрестности, вплоть до расстояний от границы порядка наибольшего из размеров области корреляции поля. Однако в некоторых частных случаях, например, для полей типа волнового пучка, рассматриваемых ниже, краевая задача фактически сводится к такому продолжению; тогда использование уравнения (6) оказывается весьма удобным.

Пусть $\Gamma(\rho, \mathbf{r})$ есть медленная в масштабе длины волны функция \mathbf{r} . Нетрудно показать, что интервал Δk значений $|\mathbf{k}|$, при которых ее спектр $F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \neq 0$, определяется соотношением

$$\Delta k/k_0 \sim \lambda^2/L^2 \ll 1, \quad (8)$$

где λ — длина волны, L — наименьший из характерных размеров неоднородности поля. Если положить $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$ и записать (5) в виде

$$\Gamma(\rho, \mathbf{r}) = \int_{4\pi} e^{-ik_0 \rho} d\omega_{\mathbf{n}} \int_0^{\infty} k^2 F(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i(k-k_0) \rho} dk$$

($d\omega_{\mathbf{n}} = \sin \theta d\theta d\varphi$, θ и φ — полярный и азимутальный углы вектора \mathbf{n}), то, как следует из условия (8), при $|\rho| \ll L^2/\lambda^2$ фазовый добавок $(k - k_0) \rho \ll \pi$ и корреляционная функция приближенно представится в виде

$$\Gamma(\rho, \mathbf{r}) = \int_{4\pi} I(\mathbf{n}, \mathbf{r}) e^{-ik_0 \rho} d\omega_{\mathbf{n}}. \quad (9)$$

Функция I , которую мы назовем угловым спектром функции корреляции, по-прежнему удовлетворяет уравнению переноса:

$$(\mathbf{n} \nabla_{\mathbf{r}}) I(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = 0. \quad (10)$$

Если учесть далее, что спектр I волнового пучка отличен от нуля в малом телесном угле $\Delta\omega_{\mathbf{n}} \ll 1$ около некоторого направления (для определенности будем считать его совпадающим с направлением оси z декартовой системы координат), то из (9) получим соотношение, выражающее спектр пучка непосредственно через распределение корреляции в его поперечном сечении:

$$I(\mathbf{n}, \mathbf{r}_s) = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\rho_s, \mathbf{r}_s) e^{ik_0 \rho_s} d^2 \rho_s \quad (11)$$

(\mathbf{r}_s — радиус-вектор точки в плоскости $z = \text{const}$).

Расчет поля корреляции по его заданному распределению в некотором сечении пучка (например, в плоскости $z = 0$) сводится теперь к решению уравнения (10) при граничном условии

$$[I(\mathbf{n}, \mathbf{r})]_{z=0} = \tilde{I}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_s),$$

где $\tilde{I}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_s)$ — фурье-трансформанта $[\Gamma(\rho, \mathbf{r})]_{z=0}$. Это решение записывается в виде

$$I(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = \tilde{I}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{n}_{\perp} z), \quad (12)$$

где через \mathbf{r}_{\perp} и \mathbf{n}_{\perp} обозначены проекции векторов \mathbf{r} и \mathbf{n} на плоскость $z = 0$.

Этим же методом может быть решена задача о прохождении волнового пучка через плоский преобразователь с заданным коэффициентом трансформации (который, в частности, может быть и случайным). Чтобы свести эту задачу к предыдущей, достаточно выразить спектр корреляционной функции $I_+(\mathbf{n}, \mathbf{r}_s)$ на верхней границе преобразователя через спектр $I_-(\mathbf{n}, \mathbf{r}_s)$ на его нижней границе* (последний предпола-

* Функции I_- и I_+ должны рассматриваться как спектры падающего и дифрагированного полей, аналитически продолженных соответственно в верхнее и нижнее полупространства. Соответствующие им корреляционные функции имеют смысл при условии, что вектор ρ не пересекает плоскости $z = 0$.

гается известным). Соотношение между I_+ и I_- может быть легко получено и имеет вид*

$$I_+(n, r_s) = \iint_{-\infty}^{\infty} I_-(m, r_s) G(n_{\perp} - m_{\perp}, r_s) d^2 m_{\perp}, \quad (13)$$

где

$$G(n_{\perp}, r_s) = \left(\frac{k_0}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} K\left(r_s + \frac{\rho_s}{2}\right) K^*\left(r_s - \frac{\rho_s}{2}\right) e^{ik_0 n_{\perp} \rho_s} d^2 \rho_s \quad (14)$$

и $K(r_s)$ — коэффициент передачи преобразователя по полю.

Рассмотрим в качестве примера прохождение плоской волны через регулярный амплитудный экран с коэффициентом передачи $K(r_s) = e^{-\alpha r_s^2}$. Из (11), (13), (14)

имеем $I_- = \delta(n_{\perp})$, $I_+ = G(n, r_s) = \left(\frac{k_0^2}{2\pi\alpha}\right) e^{-\alpha r_s^2 - \left(\frac{k_0^2}{2\alpha}\right) \sin^2 \theta}$. Как видно, угловой спектр,

соответствующий плоской волне, представляется в виде пучка параллельных лучей. На экране каждый из лучей трансформируется в расходящийся пучок, угловое распределение интенсивности в котором совпадает с диаграммой направленности экрана при облучении его плоской волной. В дальнейшем спектр преобразуется по лучевым законам; при этом плотность энергии за экраном $\psi(r) = \Gamma(0, r)$ находится суммированием интенсивности лучей, приходящих в точку наблюдения из различных точек экрана. Таким образом, дифракционная задача формально свелась к чисто энергетической задаче о рассеянии пучка лучей гипотетической шероховатой поверхностью, рассеивающие и поглощающие свойства которой определяются формулами (13), (14).

Нетрудно показать, что уравнение переноса (11) может быть обобщено и на поля в случайно-неоднородных средах. Будем рассматривать рассеивающую среду как бесконечную последовательность плоских параллельных слоев, перпендикулярных направлению некоторого произвольно выбранного луча $r(s) = r_0 + ns$, и попытаемся связать значение n — составляющей спектра функции корреляции на верхней границе i -го слоя $[I(n, r)]_{s=s_i}$ с угловым распределением спектра $[I(m, r)]_{s=s_{i-1}}$ на его нижней границе. Если предположить, что радиус корреляции флюктуаций показателя преломления удовлетворяет условию $a \gg \lambda$, толщина слоя $\Delta s \gg \lambda$, характерный размер регулярной неоднородности поля $L \gg \Delta s$ и, наконец, величина флюктуаций такова, что поле, рассеянное в слое, мало по сравнению с падающим на него, то спектры рассеянного и падающего полей оказываются связанными соотношением вида (13). Иными словами, элементарный слой действует на поле как преобразователь со случайным коэффициентом трансформации.

Поскольку падающее и рассеянное поля статистически независимы, спектр I за слоем представляется в виде суммы спектров рассеянного и ослабленного падающего полей (соответствующий коэффициент ослабления определяется из закона сохранения энергии). Составляя для $[I(n, r)]_{s=s_i}$ разностное уравнение и переходя формально к пределу $\Delta s \rightarrow 0$ (что, очевидно, допустимо при достаточно слабых флюктуациях показателя преломления), получим интегро-дифференциальное уравнение

$$n \nabla_r I(n, r) = -(\alpha + \sigma) I(n, r) + \sigma \int_{4\pi} I(m, r) G(|n-m|) d\omega_m. \quad (15)$$

Фигурирующие здесь величины по аналогии с характеристиками мутной среды можно назвать так: σ и α — коэффициенты рассеяния и истинного поглощения, \underline{G} — индикатор рассеяния. Если показатель преломления среды положить равным $n = \bar{n} - i\delta + \Delta n(r)$, $\Delta n(r) = 0$, то их можно представить в виде

$$\sigma = 2k^2 \int_0^{\infty} N(s) ds, \quad \alpha = 2k_0 \delta, \quad G(|n-m|) = \frac{k^4}{4\pi^2 \sigma} \iint_{-\infty}^{\infty} N(s) e^{ik(m-n)s} d^3 s,$$

где

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = k_0 \bar{n}, \quad N(s) = \frac{\Delta n(s_1) \Delta n(s_2)}{(\bar{n})^2}, \quad s = |s_1 - s_2|.$$

* Как заметил Н. Г. Денисов, при $n_{\perp} = 0$ из (12), (13) получается известный закон сохранения функции корреляции комплексного поля [4].

В отличие от обычного уравнения переноса, это уравнение (так же, как и уравнение (10)) описывает распространение излучения с учетом некоторых дифракционных эффектов.

Автор благодарен М. А. Миллеру за советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, London, 1959.
2. E. Wolf, Il Nuovo Cimento, 12, 884 (1954).
3. G. B. Parrent, J. O. S. A., 49, 787 (1959).
4. J. Ratcliff, Rev. Progr. Phys., 19, 183 (1956).
5. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 января 1964 г.

О НЕЛИНЕЙНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

А. Г. Литвак

1. Как показано в работе [1], сильные плазменные волны могут генерировать пары электромагнитных волн, частоты ω_1 , ω_2 и волновые векторы k_1 , k_2 которых удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega_1 + \omega_2; \\ k &= k_1 + k_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где Ω и k — частота и волновой вектор плазменной волны. Подобный эффект возможен лишь в магнитоактивной плазме, так как электромагнитные волны с частотами ω_1 , $\omega_2 < \Omega$ в изотропной плазме не могут распространяться. Для волн, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned}\Omega &= \omega_1 - \omega_2; \\ k &= k_1 - k_2,\end{aligned}\tag{2}$$

неустойчивость отсутствует. Цель данной заметки показать, что при распространении в изотропной плазме пары сильных плоских электромагнитных волн возникает плазменная волна, волновой вектор и частота которой удовлетворяют равенствам (2).

2. Рассмотрим движение одиночной заряженной частицы в поле, представляющем суперпозицию двух бегущих плоских волн:

$$E = E_1 e^{i\omega_1 t - ik_1 r} + E_2 e^{i\omega_2 t - ik_2 r}.\tag{3}$$

Аналогично [2], движение можно представить в виде суммы быстро осциллирующего и плавного движений, если выполняются следующие условия:

$$|\vartheta|/c \ll 1; \quad \Omega/\omega_1 \sim \Omega/\omega_2 \ll 1\tag{4}$$

(ϑ — скорость движения частицы, c — скорость света). Действуя, как в [2], но оставляя при усреднении по высокой частоте члены, меняющиеся с разностной частотой Ω , получим выражение для усредненной силы, действующей на заряженную частицу:

$$\begin{aligned}F_{\text{уср}} &= \frac{ie^2}{m\omega_1^2\omega_2} \{ \Omega ((E_1 k_2) E_2 - (E_2 k_1) E_1) + \\ &+ \omega_1 k (E_1 E_2) \} e^{i\Omega t - ikr}.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь e и m — заряд и масса частицы.

В общем случае бегущая сила (5) имеет как поперечную, так и продольную относительно (направления распространения) k составляющую. Поскольку к возбуждению плазменной волны может привести лишь продольная составляющая, мы в даль-

нейшем рассмотрим одномерный случай (обе волны бегут вдоль оси z), в котором полная усредненная сила продольно поляризована:

$$F_{\text{уср}} = -\nabla \left(\frac{e^2 E_1 E_2}{m \omega_1 \omega_2} e^{i\Omega t - ikz} \right). \quad (6)$$

3. Для описания плазмы воспользуемся гидродинамическими уравнениями. Предполагая ионы холодными, запишем систему линеаризованных относительно низкочастотных возмущений уравнений для электронов (одномерный случай):

$$\begin{aligned} m \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\kappa T}{N} \frac{\partial n'}{\partial z} + F_{\text{уср}} + e\mathcal{E}; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} &= 4\pi e n'; \\ \frac{\partial n'}{\partial t} + N \frac{\partial v}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь N — концентрация невозмущенной плазмы, n' — отклонение электронной концентрации от равновесного значения, v — усредненная скорость электронов, \mathcal{E} — кулоновское электрическое поле, T — электронная температура, κ — постоянная Больцмана. Задача решается в приближении заданного поля, т. е. возмущениями высокочастотных электромагнитных полей пренебрегается.

Система уравнений (7) сводится к неоднородному уравнению второго порядка для скорости v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega_p^2 v - \kappa T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{F_{\text{уср}}}{m} \right), \quad (8)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$. Уравнение (8) носит общий характер, поскольку вид усредненной силы не конкретизирован. В поле одиночной бегущей плоской волны в приближении заданного поля $F_{\text{уср}} = 0$ [2]. Поэтому для выяснения влияния высокочастотного поля плоской волны на плазменные колебания необходимо учесть возмущение высокочастотного поля [3]. Если усредненная сила зависит от времени, в плазме возбуждятся вынужденные движения. Например, в поле стоячей плоской волны таких движений не возникнет, так как в ней [2] $\partial F_{\text{уср}}/\partial t = 0$, а установится стационарное распределение электронной концентрации [4].

В рассматриваемом нами случае (сила (6)) появится продольная бегущая волна, по структуре похожая на плазменную. Резонансное возбуждение плазменной волны возможно, если Ω и k удовлетворяют дисперсионному уравнению для плазменных волн. При этом частоты поперечных электромагнитных волн должны быть связаны следующими соотношениями:

$$\text{а) } k_2 k_1 > 0; \quad (\omega_1 - \omega_2)^2 = \omega_p^2 \left[1 - \frac{\kappa T}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} \right) \right]^{-1}, \quad (9)$$

$$\text{б) } k_2 k_1 < 0; \quad (\omega_1 - \omega_2)^2 = \omega_p^2 + \frac{4\kappa T}{c^2} (\omega_1^2 - \omega_p^2). \quad (10)$$

В заключение заметим, что приведенные результаты легко обобщаются на случай магнитоактивной плазмы, в которой возможно возбуждение плазменных волн и на суммарных частотах.

Автор благодарен М. А. Миллеру и А. А. Андронову за внимание, проявленное к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 45, 1473 (1963).
2. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 3, 110 (1958).
3. Т. Ф. Волков, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 98.
4. А. Г. Литвак, М. И. Петелин, Е. И. Якубович (в печати).

О САМОФОКУСИРОВКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

В. И. Таланов

Как известно [1], воздействие сильного высокочастотного поля на плазму вызывает перераспределение концентрации электронов и ионов в зависимости от амплитуды поля, что, в свою очередь, может приводить к самофокусировке электромагнитных волн [2]. Ниже эта возможность иллюстрируется на примере изотермической равновесной водородной плазмы*, находящейся в монохроматическом поле частоты ω . В стационарном состоянии диэлектрическая проницаемость плазмы ε без учета столкновений и пространственной дисперсии зависит от напряженности поля E следующим образом [3]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 [1 - q^2 \exp(-|\mathcal{E}|^2)], \quad (1)$$

где $q^2 = \omega_{p_0}^2 / \omega^2$, $\omega_{p_0}^2 = e^2 N_0 / m_e \varepsilon_0$, $\mathcal{E} = E / E_p$, N_0 — концентрация электронов в отсутствие поля, $E_p = 8\chi T \omega^2 m_e$, χ — постоянная Больцмана, m_e — масса, e — заряд электрона.

Рассмотрим бегущие двумерные ТЕ-волны

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}(x) e^{i(\omega t - \hbar z)} \quad (2)$$

в среде с диэлектрической проницаемостью (1). Амплитуда $\mathcal{E}(x)$ такой волны удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{E}'' + k_0^2 \left[\frac{\varepsilon(\mathcal{E}^2)}{\varepsilon_0} - \gamma^2 \right] \mathcal{E} = 0, \quad (3)$$

первый интеграл которого при условии, что поле убывает при $x \rightarrow \infty$ (условие локализации поля), может быть записан в виде.

$$(\mathcal{E}')^2 = k_0^2 [\mathcal{E}^2 (\gamma^2 - 1) + q^2 (1 - e^{-\mathcal{E}^2})], \quad (4)$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, $\gamma = \hbar / k_0$. Интегрируя (4) еще раз, получим

$$k_0 x = \pm \int_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_m} \frac{d\mathcal{E}}{\sqrt{q^2 (1 - e^{-\mathcal{E}^2}) - (1 - \gamma^2) \mathcal{E}^2}}. \quad (5)$$

Здесь \mathcal{E}_m — максимальное значение амплитуды поля (предполагается, что оно достигается при $x = 0$), определяемое из (4) при $\mathcal{E}' = 0$:

$$(1 - \gamma^2) \mathcal{E}_m^2 = q^2 (1 - e^{-\mathcal{E}_m^2}). \quad (6)$$

Уравнение (6) может рассматриваться как характеристическое, связывающее между собой постоянную распространения γ и амплитуду поля в максимуме волны \mathcal{E}_m . Оно имеет нетривиальное решение $\mathcal{E}_m \neq 0$ лишь при условии

$$\gamma^2 > 1 - q^2 = 1 - \omega_{p_0}^2 / \omega^2, \quad (7)$$

означающем, что волна (2) является медленной по сравнению с плоской однородной волной в невозмущенной плазме. При $q^2 > 1$, когда плоские однородные волны распространяться в плазме не могут, однородная волна (2) будет распространяющейся, если поле в ее максимуме превысит некоторое критическое значение, определяемое формулой (6) при $\gamma = 0$.

В практически важном случае не слишком больших полей ($\mathcal{E}_m^2 \ll 1$) зависимость $\mathcal{E}(x)$ может быть получена из (5) в явном виде:

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_m} = (\operatorname{ch} [k_0 \sqrt{\gamma^2 - (1 - q^2)} x])^{-1}. \quad (8)$$

Структура поля $\mathcal{E}(x)$ соответствует образованию в плазме волноводного канала, поддерживаемого действием самого поля. Можно показать, что волноводный канал

* В случае многозарядных ионов в выражении для E_p в (1) появится численный множитель $(Z + 1)/2Z$, где Z — заряд иона.

образуется при любой мощности волны*; от уровня мощности зависит эффективная ширина канала (по x) и структура поля в нем.

Почти аналогично проводится рассмотрение и неоднородных двухмерных ТМ-волн в среде с диэлектрической проницаемостью (1). И в этом случае имеются решения типа бегущей волны $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x(x) e^{-ihz}$, $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z(x) e^{-ihz}$ с максимумом поля в конечной области пространства, убывающие до нуля при $x \rightarrow \pm \infty$.

Обобщение на трехмерные поля сталкивается с большими трудностями интегрирования нелинейных уравнений в частных производных с неразделяющимися переменными. Следует, однако, иметь в виду, что для цилиндрических волновых пучков разделение переменных может быть осуществлено, если рассматривать бегущие волны вида

$$\{E, H\} = \{E_0, H_0\} e^{-ihz - im\varphi}$$

(m — целое число), вызывающие лишь аксиально симметричные деформации среды. Симметричная ($m = 0$) ТЕ₀-волна является здесь аналогом рассмотренной выше двухмерной ТЕ-волны. В тех случаях, когда диэлектрическая среда практически полностью вытесняется из области, занятой сильным высокочастотным полем, задача может быть сведена к нахождению положения равновесия стенки волноводного канала с учетом давления окружающей среды.

Образование самофокусирующихся волноводных каналов под действием высокочастотного поля в рассмотренных случаях связано с возрастанием диэлектрической проницаемости ϵ с увеличением амплитуды поля. Нетрудно убедиться, что такая зависимость имеет место и в произвольной изотропной среде, если предположить, что под действием поля происходит изотермическая деформация, изменяющая плотность ρ такой среды, и считать изменения плотности ρ и давления p пропорциональными друг другу.

Для зависимости $\epsilon(E)$ такой среды будем иметь соотношение, аналогичное (1):

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} + \rho_0 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{T, \rho_0} \left(e^{-|E|^2/E^2} - 1 \right), \quad (9)$$

где $\tilde{E}^2 = 4/(\partial \epsilon / \partial \rho)_{T, \rho_0} (\partial \rho / \partial p)_{T, \rho_0}$, а ρ_0 и $\epsilon^{(0)}$ — равновесные параметры среды в отсутствие поля. Из (9) вытекает, что при любом знаке $(\partial \epsilon / \partial \rho)_{T, \rho_0}$ выполняется необходимое условие самофокусировки волн: $\partial \epsilon / \partial (|E|^2) > 0$.

Представляет интерес также изучение возможности образования самофокусирующихся волноводных каналов в анизотропных (как в отношении электрических, так и механических параметров), в том числе и гиротропных средах. В частности, это относится к плазме, находящейся в магнитном поле.

Влияние слабого затухания в нелинейной среде на условия формирования и структуру самофокусирующихся волноводных каналов в двух предельных случаях может быть учтено обычным энергетическим методом*. При малой величине переносимой мощности, когда можно считать, что коэффициент потерь не зависит от амплитуды поля, затухание приводит к постепенному расплыванию волноводного канала. Напротив, при большой мощности волнового потока, вытесняющего среду (имеется в виду плазма) из области, занятой полем, потери в основном сосредоточены на границах волноводного канала; при этом с уменьшением переносимой мощности канал сужается. В случае отрицательного поглощения в среде картина распространения волны в самофокусирующемся волноводном канале будет соответствовать обращенной во времени картине распространения в поглощающей среде. Последнее может иметь место, например, при прохождении сфокусированного оптического луча через среду с неравномерной разностью населенностей уровней на частоте сигнала.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, 34, 242 (1952).
2. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 42, 1567 (1962)
3. H. A. N. Boot, S. A. Self, R. Harvie, J. Electron and Control, 4, 434 (1958).

Поступила в редакцию
25 февраля 1963 г.

* Мы рассматриваем только равновесные самофокусирующиеся волноводные каналы, отвлекаясь от вопросов их установления и устойчивости, для изучения которых требуется совместное решение уравнений электромагнитного поля и уравнений гидродинамики для среды.

* Следует иметь в виду, что наличие потерь может привести к неравномерному распределению температуры в области, занятой полем

ИЗЛУЧЕНИЕ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН НА КРОМКЕ КЛИНА

А. Н. Коваленко, Г. Т. Марков

При заданном распределении объемной плотности тока задача о возбуждении бесконечного идеально проводящего клина решена в общем виде в работе [1]. Случай электрического диполя, расположенного на ребре клина, рассмотрен в работе [2]. Здесь мы исследуем излучение горизонтального симметричного вибратора, вертикального вибратора и шлейф-вибратора, причем во всех случаях будем считать, что электрический ток в вибраторе распределен по синусоидальному закону.

Согласно [1], составляющие векторного потенциала в дальней зоне имеют вид

$$A_z^{\circ} = \int_{v'} dv' \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} j_z^{\circ} \sin v\varphi' \sin v\varphi e^{iv\pi/2} J_v(kr' \sin \theta) \frac{e^{-ikR}}{R}; \quad (1)$$

$$A_{\{\varphi\}}^{\circ} = \int_{v'} dv' \frac{1}{2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} j_r^{\circ} \sin v\varphi' \left\{ \frac{\sin v\varphi}{\cos v\varphi} \right\} e^{i(v-1)\pi/2} \times \\ \times [J_{v-1}(kr' \sin \theta) \mp J_{v+1}(kr' \sin \theta)] \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad (2)$$

где $v = \pi n / \alpha$, α — внешний угол клина. Тогда напряженность магнитного поля определяется по формуле $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}^{\circ}$, а сопротивление излучения — по формуле

$$R_{\Sigma 0} = \frac{W}{I_0^2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \{H_{\theta} H_{\theta}^* + H_{\varphi} H_{\varphi}^*\} R_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3)$$

Здесь $W = 120 \pi \text{ ом}$, I_0 — ток в точках питания вибратора.

Сопротивление излучения горизонтального вибратора. Запишем выражение для объемной плотности тока вибратора, параллельного ребру клина:

$$j_z^{\circ} = I_0 \frac{\sin k(l - |z'|)}{\sin kl} \delta(r' - h) \frac{\delta(\varphi' - \varphi_0)}{r'}. \quad (4)$$

Используя формулы (1)–(4), для сопротивления излучения вибратора получим выражение

$$R_{\Sigma 0} = \frac{2W}{\alpha \sin^2 kl} \int_0^{\pi} F^2(\theta) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{\alpha} \varphi_0 n \frac{J_{\frac{\pi}{\alpha} n}^2}{\alpha n} (kh \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (5)$$

где

$$F(\theta) = \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos(kl)}{\sin \theta}.$$

Если положить в (5) $\alpha = \pi$ или $\alpha = 2\pi$, то при $\varphi_0 = \alpha/2$ получим

$$R_{\Sigma 0} = \frac{W}{2\pi \sin^2 kl} \int_0^{\pi} F^2(\theta) [1 - J_0(2kh \sin \theta)] \sin \theta d\theta; \quad (6)$$

$$R_{\Sigma 0} = \frac{W}{\pi^2 \sin^2 kl} \int_0^{\pi} F^2(\theta) \text{Si}(2kh \sin \theta) \sin \theta d\theta.$$

Для малых длин вибраторов ($kl \ll 1$) последние формулы сводятся к следующим:

$$R_{\Sigma 0} = 20 (kl_{\partial})^2 \left\langle 1 - \frac{3}{2} \left\{ \frac{\sin(2kh)}{2kh} - \frac{1}{4(kh)^2} \left[\frac{\sin(2kh)}{2kh} - \cos(2kh) \right] \right\} \right\rangle; \quad (7)$$

$$R_{\Sigma 0} = 20 (kl_{\partial})^2 \left\{ 1 - \left[\text{Ji}_1(2kh) - \frac{J_2(2kh)}{4kh} \right] \right\},$$

где

$$kl_0 = 2 \frac{1 - \cos(kl)}{\sin(kl)}, \quad J_{i1}(x) = \int_x^\infty \frac{J_1(t)}{t} dt.$$

Сравнительный расчет сопротивления излучения по формулам (6) и (7) показывает, что при $kl \leq \pi/2$ и любых kh ошибка в определении относительного сопротивления излучения $R_{\Sigma 0}/R_{\Sigma 0 \text{ св}}$ по формулам (7) меньше 4%.

На рис. 1 приведена рассчитанная по формулам (7) зависимость от величины kh сопротивления излучения вибратора $R_{\Sigma 0}$, отнесенная к сопротивлению излучения

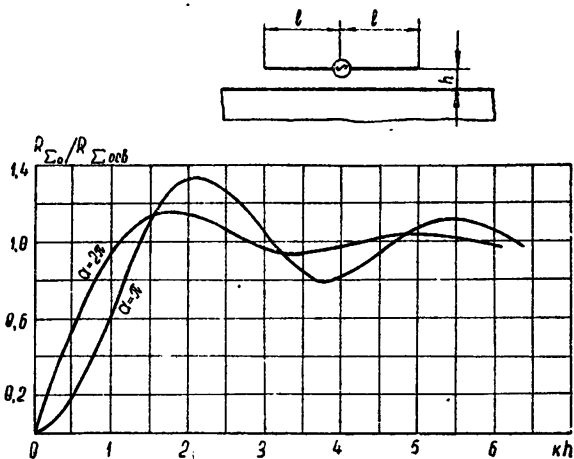


Рис. 1. Сопротивление излучения горизонтального вибратора.

того же вибратора в свободном пространстве $R_{\Sigma 0 \text{ св}}$. При малых kh и любых углах α формула (5) сводится к следующей:

$$R_{\Sigma 0} = \frac{W\alpha \sin^2(\pi\varphi_0/\alpha)}{\pi^2 \sin^2(kl)} \left[\frac{1/2 + \cos^2(kl)}{\Gamma(2\pi/\alpha)} + \left(J_{\pi/\alpha-1/2}(2kl) - 4 \cos(kl) \frac{J_{\pi/\alpha-1/2}(kl)}{2^{1/2-\pi/\alpha}} \right) \frac{\sqrt{\pi}(kl)^{1/2-\pi/\alpha}}{2^{2\pi/\alpha}\Gamma(\pi/\alpha)} \right] (kh)^{2\pi/\alpha}. \quad (8)$$

Из рассмотрения кривых на рис. 1 видно, что расчет по формуле (8) дает удовлетворительные результаты для высот подвеса до $h = 0,1 \lambda$.

Излучение вертикального вибратора. Вначале рассмотрим вибратор с равномерным законом распределения тока. При этом выражение для объемной плотности тока имеет вид

$$J_r^z = I_0 \delta(z') \frac{\delta(\varphi' - \varphi_0)}{r'} \quad (0 \leq r' \leq h). \quad (9)$$

Интегрирование по r' интеграла (2) (после подстановки в него выражения (9)) затруднительно. Поэтому мы рассмотрим случай, когда размеры вибратора много меньше длины волны ($kh \ll 1$). При этом, представляя функцию Бесселя в виде разложения в степенной ряд, оставим в бесконечных суммах выражения (2) один член ряда с наименьшей степенью kh , после чего определим поле H :

$$H_0 = i \frac{I_0 e^{i(\pi/\alpha-1)\pi/2}}{\pi 2^{\pi/\alpha} \Gamma(\pi/\alpha)} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi_0\right) (kh)^{\pi/\alpha} (\sin \theta)^{\pi/\alpha-1} \times \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) \frac{e^{-ikR_0}}{R_0}; \quad (10)$$

$$H_{\varphi} = -i \frac{I_0 e^{i(\pi/\alpha - 1)\pi/2}}{\pi 2^{\pi/\alpha} \Gamma(\pi/\alpha)} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi_0\right) (kh)^{\pi/\alpha} (\sin \theta)^{\pi/\alpha - 1} \times \\ \times \cos \theta \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) \frac{e^{-ikhR_0}}{R_0}.$$

При синусоидальном законе распределения тока в вибраторе выражение для поля можно получить приближенно путем замены в выражении (10) высоты вибратора h на действующую высоту h_{∂} . Последняя находится из условия равенства полей в главном направлении, т. е. при $\theta \rightarrow 0$, в том и другом случаях:

$$h_{\partial} = \frac{1}{k} \left[\frac{\pi}{\alpha} \int_0^{kh} \frac{\sin [k(h - r')]}{\sin(kh)} (kr')^{\pi/\alpha - 1} d(kr') \right]^{\alpha/\pi}. \quad (11)$$

Если длина вибратора меньше $0,1 \lambda$, закон распределения тока в нем можно считать линейным и, как следует из формулы (11), действующая высота может быть определена следующим образом:

$$h_{\partial} = h \left(\frac{\alpha}{\alpha + \pi} \right)^{\alpha/\pi}.$$

Формула для сопротивления излучения вибратора, полученная из выражения (3), имеет вид

$$R_{\Sigma 0} = W \sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi_0\right) \frac{\alpha(\pi + \alpha)}{2\pi^2(2\pi + \alpha)\Gamma(2\pi/\alpha)} (kh_{\partial})^{2\pi/\alpha}. \quad (12)$$

Она является приближенной и справедлива при малых kh . В общем случае сопротивление излучения представляется в виде разложения в ряд по степеням kh . Более подробное исследование показывает, что для целей инженерной практики можно пользоваться формулой (12), если длина вибратора не превышает $0,3 \lambda$. В случае полуплоскости ($\alpha = 2\pi$) формула (12) сводится к следующей:

$$R_{\Sigma 0} = 45 \pi \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \left[C(\sqrt{kh}) - \operatorname{ctg}(kh) S(\sqrt{kh}) \right]^2,$$

где $C(x)$ и $S(x)$ — косинус и синус интеграла Френеля. Для коротких вибраторов ($h/\lambda < 0,1$) при $\varphi_0 = \pi$ $R_{\Sigma 0} = 40 kh$, что совпадает с выражением для сопротивления излучения, приведенном в работе [3]. На рис. 2 показана зависимость сопротивления излучения вибратора от угла α при разных длинах и $\varphi_0 = \alpha/2$.

Излучение электрического шлейф-вибратора. Расположение шлейф-вибратора на кромке клина показано на рис. 3. Объемная плотность тока в данном случае имеет две составляющие:

$$j_r^{\partial} = I_0 \frac{\sin [k(h + l - r')]}{\sin [k(h + l)]} \delta(z') \frac{\delta(\varphi' - \varphi_0)}{r'}; \\ j_z^{\partial} = I_0 \frac{\sin [k(l - z')]}{\sin [k(h + l)]} \delta(r' - h) \frac{\delta(\varphi' - \varphi_0)}{r'}. \quad (13)$$

Будем полагать высоту вибратора малой ($kh \ll 1$). Тогда из общих выражений для составляющих векторного потенциала (1), (2) можно получить

$$H_{\theta} = iB \frac{e^{-ikhR_0}}{R_0} (\sin \theta)^{\pi/\alpha - 1} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right); \\ H_{\varphi} = -iB \frac{e^{-ikhR_0}}{R_0} (\sin \theta)^{\pi/\alpha - 1} \cos \theta \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) - \\ - B \frac{(h/h_{\partial})^{\pi/\alpha}}{\sin [k(h + l)]} \frac{e^{-ikhR_0}}{R_0} (\sin \theta)^{\pi/\alpha - 1} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) (\alpha + i\beta), \quad (14)$$

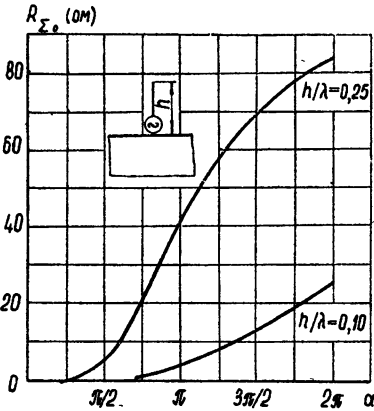


Рис. 2. Сопротивление излучения вертикального вибратора.

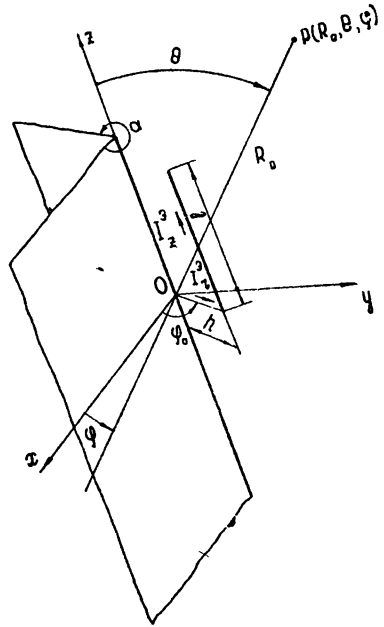


Рис. 3. Взаимное расположение клина и шлейф-вибратора.

где

$$B = \frac{I_0 e^{i(\pi/\alpha - 1)\pi/2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi_0\right)}{\pi 2^{\pi/\alpha} \Gamma(\pi/\alpha)} (kh_\partial)^{\pi/\alpha}, \quad a = \cos(kl \cos \theta) - \cos(kl),$$

$$b = \sin(kl \cos \theta) - \sin(kl) \cos \theta, \quad h_\partial = h \left\{ 1 - \frac{\pi}{\pi + \alpha} \frac{kh}{\operatorname{tg}[k(h+l)]} \right\}^{\alpha/\pi}$$

Выражение (14) для напряженности магнитного поля позволяет рассчитать сопротивление излучения по формуле (3)

$$R_{\Sigma 0} = a W \sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi_0\right) \frac{(\pi + \alpha) (kh_\partial)^{2\pi/\alpha}}{2\pi^2 (2\pi + \alpha) \Gamma(2\pi/\alpha)} +$$

$$+ \alpha W \sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi_0\right) \frac{(kh)^{2\pi/\alpha}}{\pi^2 \sin^2[k(h+l)]} \left\{ \frac{\alpha + \pi(2 - \sin^2(kl)) - (h_\partial/h)^{\pi/\alpha} a \sin(kl) \sin[k(h+l)]}{2(2\pi + \alpha) \Gamma(2\pi/\alpha)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi} J_{\pi/\alpha + 1/2}(kl) \{(h_\partial/h)^{\pi/\alpha} \sin[k(h+l)] - \sin(kl)\} - \sqrt{\pi} \cos(kl) J_{\pi/\alpha - 1/2}(kl)}{(kl/2)^{\pi/\alpha - 1/2} 2^{2\pi/\alpha} \Gamma(\pi/\alpha)} \right\}. \quad (15)$$

Расчет сопротивления излучения по формуле (15) может вызвать затруднение при тех углах α , для которых нет табулированных значений функций Бесселя. Однако для антенн, длина которых $h+l$ меньше $0,3 \lambda$, можно предложить приближенную формулу, удобную для практических расчетов:

$$R_{\Sigma 0} = W \sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi_0\right) \left\{ \frac{\alpha(\pi + \alpha)(kh_\partial)^{2\pi/\alpha}}{2\pi^2(2\pi + \alpha)\Gamma(2\pi/\alpha)} + \right.$$

$$\left. + 4 \frac{(\pi/\alpha + 1)^2 [1 - \cos(kl)]^2 (kh)^{2\pi/\alpha}}{\alpha \sin^2[k(h+l)] \Gamma(2\pi/\alpha + 4)} \right\}. \quad (16)$$

На рис. 4 приводятся кривые зависимости сопротивления излучения шлейф-вибратора от его длины при $\alpha = \pi$ и $\alpha = 2\pi$, причем пунктирными кривыми показан расчет по приближенной формуле (16).

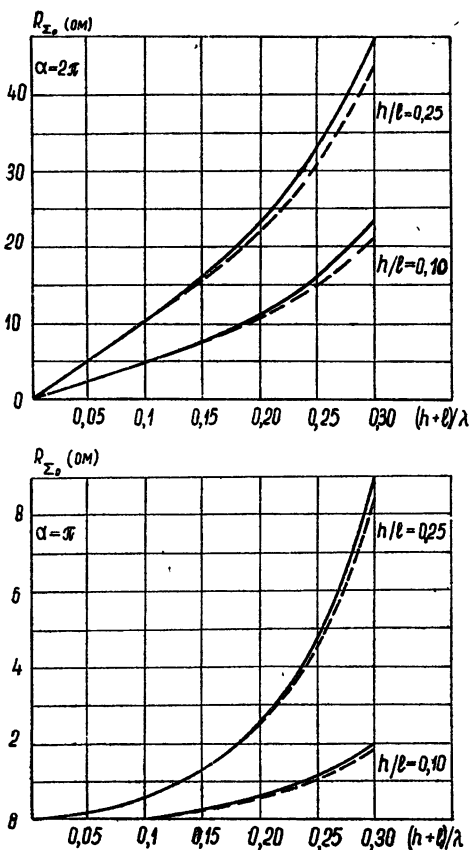


Рис. 4. Сопротивление излучения шлейф-вибратора.

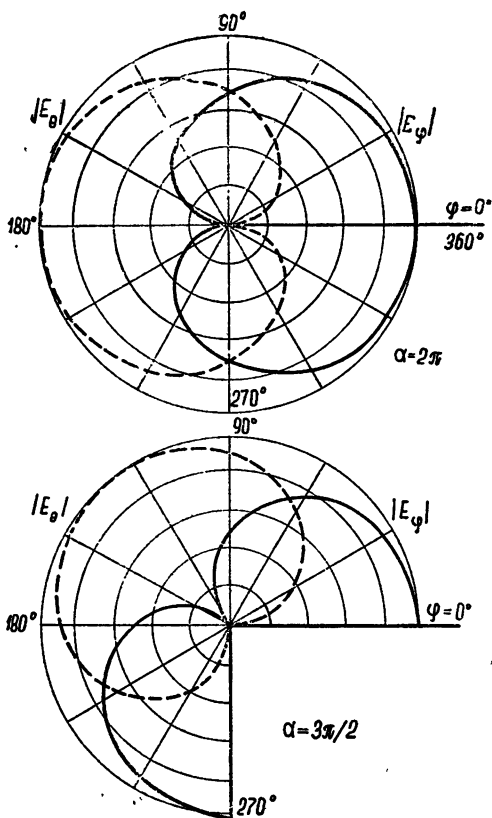


Рис. 5. Диаграмма направленности шлейф-вибратора в плоскости $\theta = \pi/2$.

Что касается диаграмм направленности шлейф-вибратора, то они могут быть найдены по формулам (14). На рис. 5 приведены диаграммы в экваториальной плоскости для $\alpha = 2\pi$ и $\alpha = 3/2 \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Т. Марков, Возбуждение бесконечного клина, Труды МЭИ, вып. 21, Радиотехника, Госэнергоиздат, М., 1956.
2. А. Н. Потехин, Л. Б. Тартаковский, Радиотехника и электроника, 3, 592 (1958).
3. W. A. Johnson, Proc. IEE, 102, 211 (1955).

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПАРАМЕТРОВ АНТЕНН ПО РАДИОИЗЛУЧЕНИЮ «ЧЕРНОГО» ДИСКА, РАСПОЛОЖЕННОГО В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ

Н. М. Цейтлин

В работах [1] был предложен и экспериментально проверен метод измерения параметров небольших антенных систем на сантиметровых и дециметровых волнах по эталонному радиоизлучению расположенного в дальней зоне антенны диска, покрытого поглощающим материалом. Этот метод, однако, в случае больших антенн связан с техническими трудностями, поскольку диск приходится помещать на достаточно большой высоте (для уменьшения дифракционной поправки; см. [2,3]) и в дальней зоне антенны (на расстоянии $r = D^2/\lambda$, где D — диаметр раскрыва, λ — длина волны). В то же время для зеркальных антенн представляется возможным в значительной степени устранить эти трудности, располагая диск не в дальней, а во френелевой зоне антенны, т. е. на значительно более близком расстоянии (и, соответственно, на небольшой высоте), что позволит измерять параметры больших антенн. Цель настоящего сообщения — обратить внимание на эту возможность и обсудить некоторые вопросы, связанные с ее реализацией.

Диск может быть расположен во френелевой зоне при сочетании метода [1] с выносом облучателя из фокуса [4,5].

Как показано в [4], вынос облучателя из фокуса вдоль оси антенны на $\Delta = (f^2/r_0)(1 + D^2/16f^2)$ (f — фокусное расстояние) приводит к фокусированию поля антенны на расстоянии $r_0 = D^2/n\lambda$ ($n = 10 \div 20$), т. е. во френелевой зоне. На этом расстоянии r_0 оказывается возможным измерить не только диаграмму, но и усиление G , поскольку, как показано в [6], оно может отличаться от усиления несфокусированной антенны, измеренного в дальней зоне, лишь на малую поправку (несколько процентов) за счет возможного изменения реакции зеркала на облучатель. Последнее обстоятельство позволяет помещать «черный» диск диаметра d на расстоянии $r_0 = D^2/n\lambda$ от сфокусированной антенны, где он перекрывает часть главного лепестка диаграммы ($\theta_{г\lambda} \approx \lambda/D$), равную

$$\theta_g/\theta_{г\lambda} = dn/D. \quad (1)$$

При этом, однако, приходится учитывать, что сфокусированные на расстоянии r_0 лучи далее расходятся, и, следовательно, величина температуры радиоизлучения экранируемого диском фона T_ϕ оказывается неопределенной, главным образом, из-за влияния в отсутствие диска радиоизлучения земли, попадающего в расходящийся пучок лучей. Для исключения этой неопределенности можно воспользоваться тем обстоятельством, что боковые лепестки диаграммы формируются значительно ближе, чем главный (см. [6]). Если наблюдать диск на расстоянии $r_0 = r_m$, где уже сформировался лепесток номера m^* , под углом $\vartheta > \vartheta_m$ к горизонту ($\vartheta_m = m\lambda/D$ — угловое расстояние от максимума диаграммы до m -го лепестка), то можно ожидать, что влияние земли на величину T_ϕ будет отсутствовать, коль скоро вынос облучателя, соответствующий расстоянию r_m , не приводит к существенному изменению структуры m -ого и следующих боковых лепестков. При этом, поскольку в сантиметровом и дециметровом диапазонах температура радиоизлучения атмосферы и космического радиоизлучения значительно меньше температуры диска T_g , то несмотря на вынос облучателя из фокуса, в качестве T_ϕ можно использовать температуру экранируемого диском фона. (Естественно, на сантиметровых волнах, где существенно излучение атмосферы, диск необходимо наблюдать под углами $\vartheta > 4 \div 5^\circ$ для уменьшения T_ϕ , а в дециметровом диапазоне наблюдения диска следует проводить в часы, когда он проецируется на высокие галактические широты с низкой температурой космического радиоизлучения; на миллиметровых волнах использование метода ограничено за счет большой величины T_ϕ .)

При выполнении указанных условий остаются справедливыми соотношения, приведенные в [1,3], но при прочих равных условиях диск может располагаться на расстоянии и высоте, в n раз меньших, чем при измерениях в дальней зоне.

Отметим одну возможность измерения коэффициента рассеяния, реализуемую при выносе облучателя из фокуса и расположении «черного» диска на поверхности земли. Возможность эта заключается в последовательном измерении радиоизлучения «черного» и металлического дисков, имеющих угловые размеры, превышающие $\theta_{г\lambda}$ (главный лепесток). Металлический диск отражает радиоизлучение неба, заменяя «черный» диск. Фактически это и есть метод, рассмотренный в [7]; однако вынос облучателя из фокуса позволяет с помощью сравнительно небольшого диска перекрывать главный

* Необходимую оценку легко провести, используя результаты работы [6].

лепесток диаграммы, т. е. уменьшить дифракционное «потепление» металлического диска. Нам представляется, что этот метод может найти широкое применение, поскольку диски располагаются непосредственно на поверхности земли, что технически легко осуществимо.

Сочетание метода «черного» диска с выносом облучателя из фокуса может существенно облегчить измерение так называемого дифференциального коэффициента рассеяния $\Delta\beta_{ij}$ (доли мощности, излучаемой антенной в область, ограниченную телесными углами Ω_i и Ω_j ; $\Omega_j > \Omega_i$) путем использования дисков с различными угловыми размерами. Этот коэффициент более детально характеризует энергетические соотношения в диаграмме антенны.

Наряду с выносом облучателя из фокуса представляется возможным измерять дифференциальный коэффициент рассеяния $\Delta\beta_{ij}$ и коэффициент рассеяния β в области более далеких боковых лепестков (например, четвертого и т. д.) без выноса облучателя из фокуса, но при расположении диска в области дифракции Френеля. Эта возможность связана с тем, что, как уже отмечено выше, боковые лепестки формируются значительно ближе к антенне, чем главный. Поэтому «черный» диск соответствующих размеров, расположенный на расстоянии r_m от антенны, будет поглощать всю мощность, поступающую в главный и m боковых лепестков, как бы она ни перераспределялась между ними. Необходимый для этого диаметр диска, вероятно, может быть достаточно точно оценен на основе работы [8], однако этот вопрос требует специального рассмотрения. Измерение дифференциального коэффициента рассеяния без выноса облучателя из фокуса наиболее целесообразно проводить для сравнительно небольших антенн или в процессе макетирования. В процессе макетирования целесообразно также помещать черный диск с $d \approx 2D$ в область геометрической оптики так, что последний поглощает всю мощность, излучаемую антенной в цилиндрическом волновом пучке в переднее полупространство. Это позволяет измерить долю мощности, излучаемую антенной в заднее относительно раскрыва полупространство. Знание этой величины существенно при разработке малозумящих антенн.

В заключение отметим, что хотя изложенные выше методы, естественно, требуют экспериментальной проверки и разработки, они, несомненно, должны найти применение, поскольку являются развитием апробированных методов [1, 4].

Автор благодарен В. С. Троицкому, В. А. Разину, Б. Е. Кинберу за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 393 (1961); 5, 623 (1962).
2. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 759 (1961).
3. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1265 (1963).
4. Н. А. Есепкина, ДАН СССР, 113, 82 (1957).
5. J. J. Stangel, W. M. Yarnall, IRE Intern. Convent. Res., 10, 3 (1962).
6. Б. Е. Кинбер, В. Б. Цейтлин, Радиотехника и электроника (в печати).
7. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 667 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 декабря 1963 г.

ДВУХКВАНТОВЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ НА ПАРАМАГНИТНЫХ ЦЕНТРАХ

В. Р. Нагибаров

Создание трехуровневых квантовых усилителей и генераторов миллиметрового и субмиллиметрового диапазона сопряжено со значительными трудностями [1]. Имеющиеся двухуровневые системы малозффективны. Представляется перспективным использовать для этих целей двухквантовые процессы с участием виртуальных состояний (комбинационное рассеяние) [1-4], что позволяет осуществить генерацию излучения микроволнового диапазона за счет использования энергии монохроматического оптического излучения.

Схема энергетических уровней показана на рис. 1. Здесь $h\nu_0$ — квант энергии оптического диапазона, $h\nu_1$ — квант энергии микроволнового диапазона, E_1 и E_3 — основное и возбужденное состояние системы, E_2 — виртуальное состояние, h — постоянная Планка. Интересующий нас процесс заключается в поглощении оптического кванта $h\nu_0$ и одновременном испускании кванта $h\nu_1$, в результате чего система переходит из состояния E_1 в E_3 . Такой двухквантовый процесс идет с участием виртуального состояния E_2 и частота ν_1 определяется соотношением $(E_3 - E_1) + h\nu_1 = h\nu_0$.

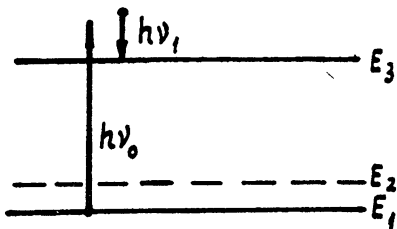


Рис. 1

Если поместить такую систему в резонатор с собственной частотой ν_1 и выполнить условие самовозбуждения, то получим генератор миллиметрового и субмиллиметрового диапазона, работающий за счет энергии оптических квантов. Преимущество такого типа генератора перед трехуровневыми системами заключается в возможности работы при умеренных температурах рабочего вещества, так как оптический уровень E_3 мало заселен уже при довольно высоких температурах.

При одной и той же длине волны оптической накачки можно исследовать генераторы с различными ν_1 , подбирая образцы с различными значениями $E_3 - E_1$ или меняя эту разность в образце внешними полями.

Импульсный характер работы генератора обусловлен тем, что заселение уровня E_3 может происходить быстрее, чем его релаксация в основное состояние. Поэтому, после заселения E_3 необходима пауза порядка времени жизни этого состояния, после чего можно подавать следующий импульс. Если стимулировать переходы $E_3 \rightarrow E_1$ (скажем, изготовить резонатор одновременно на ν_1 и $\hbar^{-1}(E_3 - E_1)$), то возможна работа в непрерывном режиме.

Рассмотрим условие самовозбуждения таких генераторов. Вероятность перехода системы из состояния $|1\rangle$ в $|3\rangle$ в единицу времени на один ион вычисляется по формуле (7) [5]:

$$W_{1 \rightarrow 3} = \frac{1}{16 \hbar^4} \frac{| \langle 1 | H_2 | 2 \rangle |^2 | \langle 2 | H_1 | 3 \rangle |^2}{(\omega_1 + \omega_3)^2} g(\nu_1 - \nu_2 - \nu_{31}), \quad (1)$$

где $g(\nu)$ — форм-фактор линии, $| \langle i | H_k | j \rangle | \sim E_k \cdot 10^{-18}$ для электрических дипольных переходов и $| \langle i | H_k | j \rangle | \sim H_k 10^{-20}$ для магнитных дипольных переходов [1]. Здесь $H_k = \mu_k E_k$ — гамильтониан взаимодействия электрического (μ_e) или магнитного (μ_m) диполя с электрическим или магнитным вектором электромагнитного излучения, E_k и H_k соответственно амплитуды электрического и магнитного полей, $\omega = 2\pi\nu$, $\langle 1 |$ — матричный элемент.

Если через N обозначить число рабочих частиц в единице объема, то получим условие самовозбуждения:

$$N \geq \frac{A_\alpha}{QE^2} \text{ см}^{-3}, \quad (2)$$

где Q — добротность резонатора, E — напряженность электрического поля световой волны, $\omega_1 + \omega_3 \sim 10^{15}$, β примерно равно отношению ширины линии генератора к ширине линии оптической подкачки, A_α — число, принимающее следующие значения:

- а) $A_\alpha \sim 10^{21}$ для электрических дипольных переходов;
- б) $A_{M3} \sim 10^{25}$ для случая, когда $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ — магнитный дипольный переход, а $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$ — электрический дипольный переход;
- в) $A_M \sim 20^{23}$ для магнитных дипольных переходов.

Если $Q = 10^3$, $E = 10^3$ ед. CGSE, то из (2) получим:

- а) $N \geq \beta 10^{14} \text{ см}^{-3}$; б) $N \geq \beta 10^{18} \text{ см}^{-3}$; в) $N \geq \beta 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Случай б) может, например, иметь место при облучении правополяризованным светом образца Al_2O_3 с примесью Cr^{3+} , помещенном в сильное магнитное поле, параллельное тригональной оси кристалла. При этом $E_1 = {}^4A_2(-3/2)$, $E_2 = {}^4A_2(-1/2)$, $E_3 = \bar{E}({}^2E)$ [6], частота генерации ω_1 определяется равенством $\hbar\omega_1 = \hbar\omega_0 - (E_3 - E_1)$. Случай в) может быть осуществлен в образце MgO с примесью Cr^{3+} в магнитном поле, параллельном оси [001] кристалла, который облучается линейно поляризованным светом линии R_1 рубинового лазера ($\hbar\omega_0 = 14418 \text{ см}^{-1}$) с E вдоль [100] и H параллельном [001] [7]. (E и H — векторы электрической и магнитной напряженности световой волны; $E_1 = {}^4A_2(-3/2)$, $E_2 = {}^4A_2(-1/2)$, $E_3 = {}^2E$, ${}^2E - {}^4A_2 = 14319 \text{ см}^{-1}$, $\hbar\omega_1 \sim 100 \text{ см}^{-1}$).

Благодарю У. Х. Копвиллема за интерес к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Зингер, Мазеры, ИЛ, М., 1961.
2. A. Javan, Bull. Am. Phys. Soc., **3**, 213 (1958).
3. J. Weber, Rev. Mod. Phys., **31**, 681 (1959).
4. Proceedings of the Third Quantum Electronics Conference, Paris, 1963.
5. А. Р. Кессель, У. Х. Копвиллем, ФТТ, **5**, 667 (1963).
6. S. Sugano, Y. Tanabe, J. Phys. Soc. Japan, **13**, 880 (1958).
7. S. Sugano, A. Z. Schawlow, F. Warsanyc, Phys. Rev., **120**, 2045 (1960).

Казанский физико-технический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
19 июля 1963 г.

О ФОРМЕ ЛИНИЙ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

О. П. Ревакатов

При исследовании методом ядерного магнитного резонанса кристаллической структуры твердого тела и движения молекул в нем приходится записывать и измерять параметры широких и малоинтенсивных линий поглощения. Для записи таких линий используют фазовое детектирование по частоте модуляции ω_m при медленном изменении поля h [1].

Сигнал $f(h)$ на выходе такой системы при постоянном поле h пропорционален коэффициенту при $\sin(\omega_m t)$ в фурье-разложении функции $g(h)$ формы линии. Этот коэффициент определяется соотношением [2]

$$f(h) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{h_m^{2q+1}}{2^{2q} (q+1)! q!} g_h^{(2q+1)}, \quad (1)$$

где h_m — амплитуда. В случае отличной от нуля скорости изменения h сигнал на выходе записывающего устройства отличен от $f(h)$ и имеет вид [3]

$$F(h) = \frac{1}{v\tau} e^{-\frac{h}{v\tau}} \int_{-\infty}^h f(\xi) e^{\xi/v\tau} d\xi, \quad (2)$$

где τ — постоянная времени записывающего устройства, v — скорость записи, $f(h)$ — форма сигнала на входе интегрирующего элемента схемы.

Обычно при исследовании твердого тела методом ядерного магнитного резонанса измеряют моменты линии. Эти величины удобно выражаются через параметры кристаллической решетки [4]. Момент линии S_{2k} порядка $2k$ определяется, если нам известна первая производная функция $g(h)$ формы линии, соотношением [5]

$$S_{2k} = \frac{1}{2k+1} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g'_h(h) h^{2k+1} dh}{\int_{-\infty}^{+\infty} g'_h(h) h dh}. \quad (3)$$

Экспериментально мы измеряем величину $F(h)$ (см. (2)). Подставляя ее в (3) вместо $g'_h(h)$ и учитывая, что $F(h)$ обращается в нуль в точке h_0 , отличной от нуля функции $g'_h(h)$, мы получим для экспериментально определяемой величины S_{2k} выражение

$$S_{2k}^* = \frac{1}{2k+1} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(h) (h-h_0)^{2k+1} dh}{\int_{-\infty}^{+\infty} F(h) (h-h_0) dh}. \quad (4)$$

Предполагая, что $F(h)$ и ее производные стремятся к нулю быстрее, чем $1/h^{2k+1}$ при $h \rightarrow \pm \infty$ (что обычно выполняется для линий ЯМР твердых тел), и что $g'(-h) = -g'(h)$, получим, используя очевидное соотношение $F(h) = f(h) - v\tau F'_h(h)$ и интегрируя по частям, что

$$S_{2k}^* = \sum_{q=0}^k \frac{(2k)! h_m^{2q}}{2^{2q} q! (q+1)!} \sum_{n=0}^{2(k-q)} (v\tau)^n \sum_{l=0}^{l < \frac{2(k-q)-n}{2}} \frac{S_{2l} (S_1^* - v\tau)^{2(k-q-l)-n}}{(2l)! [2(k-q-l)-n]!}, \quad (5)$$

где индексы суммирования—целые положительные числа, S_{2l} — истинное значение момента порядка $2l$, а

$$S_1^* = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} F(h) (h - h_0)^2 dh}{2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(h) (h - h_0) dh}, \quad (6)$$

т. е. S_1^* — величина, определяемая экспериментально. Зависимость момента любого порядка линии ЯМР от h_m и отдельно второго момента от $v\tau$ была получена в [6–8].

Нами найдена форма зависимости измеренных моментов линии ЯМР любого порядка от h_m и $v\tau$ одновременно, что соответствует обычным условиям эксперимента.

При исследовании твердого тела методом ЯМР измеряют обычно второй и четвертый моменты линии. Из (5) следует, что их зависимость от h_m и $v\tau$ определяется соотношениями

$$S_2^* = S_2 + v^2 \tau^2 + S_1^{*2} + \frac{h_m^2}{4}; \quad (7)$$

$$S_4^* = S_4 + 6 S_2 (v^2 \tau^2 + S_1^{*2}) + (S_1^{*4} + 6 v^2 \tau^2 S_1^{*2} + 8 v^3 \tau^3 S_1^* + 9 v^4 \tau^4) + \frac{3}{2} h_m^2 (S_2 + v^2 \tau^2 + S_1^{*2}) + \frac{h_m^4}{8}. \quad (8)$$

Из формул (7) и (8) видно, что поправки ко второму моменту, зависящие от h_m и $v\tau$, складываются аддитивно, а для четвертого момента зависимость более сложная.

Расчет величины S_1^* , проведенный нами для лоренцевой, гауссовой и треугольной формы линии, показал, что при $v\tau/\sqrt{S_2} < 0,4$ можно пренебречь S_1^{*2} , не внося во второй и четвертый моменты ошибки более 1%. Следовательно, при $v\tau/\sqrt{S_2} < 0,4$ уравнения (7) и (8) можно записать так:

$$S_2^* = S_2 + v^2 \tau^2 + \frac{h_m^2}{4}; \quad (7a)$$

$$S_4^* = S_4 + 6 S_2 v^2 \tau^2 + 9 v^4 \tau^4 + \frac{3}{2} h_m^2 (S_2 + v^2 \tau^2) + \frac{h_m^4}{8} \quad (8a)$$

при любой амплитуде модуляции h_m .

Эта формула была экспериментально проверена для вещества с гауссовой формой линии при h_m до 1 и $v\tau$ до 0,4. Величина S_2^* измерялась с точностью ~2%, S_4^* — с точностью 5%. Величины S_2 и S_4 определенные по формулам (7) и (8), совпали в пределах точности эксперимента для различных значений h_m и $v\tau$.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Lippman, Exp. Techn. d. Phys., 1, 1 (1953).
2. A. C. Bartlett, Phil. Mag., 16, 845 (1933).
3. М. И. Конторович, Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях, ГИИТЛ, М., 1953.
4. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 74, 1168 (1948).
5. G. E. Pake, E. M. Purcell, Phys. Rev., 74, 1184 (1948).
6. E. R. Andrew, Phys. Rev., 91, 425 (1953).
7. Н. М. Александров, В. В. Москалев, Вестник ЛГУ, № 10, 55 (1960).
8. Ю. П. Петров, Вестник ЛГУ, № 22, 123 (1960).