

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
222	4 сверху	A_e расц η эксп M_3	A_e расц η эксп M^2
277	8 сверху	$H \parallel \dots$	$\bar{H} \parallel \dots$
281	18 сверху	$\Delta N^{(0)} = \dots$	$\Delta N^{(1)} = \dots$
285	6 снизу	$\times [\sigma\gamma] [\nu\delta]' \dots$	$\times [\sigma\gamma] [\lambda\delta]' \dots$
285	1 снизу	$[\sigma\gamma] \rightarrow \delta_{\gamma i}; [\nu\delta] \rightarrow \delta_{\nu\delta}$	$[\sigma\gamma] \rightarrow \delta_{\alpha\gamma}; [\lambda\delta] \rightarrow \delta_{\nu\delta}$
315	6 снизу	$\psi(x, y, z_0) = \psi^*(x, y, -z)$	$\psi(x, y, z_0) = \psi^*(x, y, -z_0)$
376	16 сверху	... волновым числом γ	волновым числом β

СОДЕРЖАНИЕ

Брауде С. Я., Вайсберг В. В. О распределении тепловой и нетепловой компонент радиоизлучения в диске Галактики	193
Станкевич К. С. О спектре радиоизлучения дискретных источников Кассиопея-А и Лебедь-А в сантиметровом и дециметровом диапазонах	202
Троицкий В. С. К теории радиоизлучения Венеры и Марса	208
Базелян Л. Л., Брук Ю. М., Жук И. Н., Мень А. В., Содин Л. Г., Шарыкин Н. К. Широкополосный радиоинтерферометр с электрическим управлением диаграммой направленности	215
Делов И. А., Лагутин М. Ф., Лысенко И. А. Исследования некоторых параметров турбулентных движений методом радиолокации метеорных следов	225
Иванов Ю. Б., Рухадзе А. А. О высокочастотной проводимости магнитоактивной плазмы	232
Романов Ю. А. Электромагнитные волны в полуограниченной плазме	242
Андронов А. А., Железняков В. В., Петелин М. И. О кинетической неустойчивости однородной магнитоактивной плазмы	251
Гиоргадзе Н. П., Цинцадзе Н. Л. О нелинейных колебаниях двухкомпонентной плазмы	262
Бирюлин И. А. О поляризации электромагнитных волн в изотропной неоднородной среде	273
Погуце О. П. Кинетическая теория рассеяния электромагнитных волн в плазме	280
Барсуков К. А., Болотовский Б. М. Об излучении заряженной частицы, движущейся в нестационарной неоднородной среде	291
Маркус Ф. А., Черемухин А. М. Измерение пространственного спектра флюктуаций коэффициента преломления с помощью линзы	300
Кон А. И., Татарский В. И. Мерцание источников конечных угловых размеров	306
Бондаренко Н. Г., Таланов В. И. Некоторые вопросы теории квазиоптических систем	313
Берштейн И. Л. Флюктуации частоты генератора при применении схем автоматической стабилизации частоты	328
Воробьев А. А., Безматерных Л. Н., Диценко А. Н., Лисицын А. И., Ольшанский А. П. Диэлектрические слоистые покрытия с большим коэффициентом отражения	338
Панченко Б. А. Внешние частичные проводимости узкого прямолинейного отверстия в плоском экране	343
Гареев Ф. А., Попов В. А. Логические схемы на основе бездиодной ячейки с мостовой связью	352
Неймарк Ю. И., Фейгин М. И. Об одном типе бифуркаций релейных систем	358
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Карапетян Р. В. О материальных уравнениях в электродинамике периодически нестационарных сред	372
Лоладзе Ц. Д., Цинцадзе Н. Л. О трансформации волн в неравновесной плазме	374
Якименко И. П. О рассеянии электромагнитных волн на флюктуациях в плазменном волноводе	375
Денисов Н. Г. О рассеянии волн в условиях полного отражения	378
Долин Л. С. О рассеянии светового пучка в слое мутной среды	380
Захаров В. И. Некоторые вопросы теории надежности работы циклической автоматики	383
Письмо в редакцию	386
Информация	
Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. III, № 6, 1963	387

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛОВОЙ И НЕТЕПЛОВОЙ КОМПОНЕНТ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ДИСКЕ ГАЛАКТИКИ

С. Я. Брауде, В. В. Вайсберг

Предлагается возможная модель распределения источников нетеплого и теплового излучения в диске Галактики. Проведен анализ данных наблюдений в рамках этой модели. Оказалось, что отношение плотностей указанных компонент радиоизлучения в направлении на полюс Галактики в полтора раза меньше, чем в направлении на центр при $b^H = 20^\circ$, а средняя плотность электронов в диске составляет $0,2 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$.

По современным представлениям [1–3], излучение сферической компоненты (гало) космического радиоизлучения носит чисто нетепловой характер. В диске, интенсивность которого на два порядка выше, чем в гало, наряду с этой составляющей излучения, имеется еще и тепловая компонента, связанная с наличием областей ионизированного водорода HII. На высоких частотах эта составляющая определяет излучение, а на низких частотах — поглощение радиоволн. Представляет большой интерес выяснить вклад в общее излучение дисковой компоненты тепловой и нетепловой составляющих. Для их разделения обычно используют тот факт, что частотные спектры у этих составляющих различны.

Впервые такое разделение было проведено в работе [2] на частотах 1390 и 85 мгц. Более детально этот вопрос изучен в работе [3], где был использован еще обзор радиоизлучения Галактики на частоте 19,7 мгц [4].

При разделении компонент в работах [2, 3] были сделаны следующие основные предположения.

а) Для частот от 1390 мгц до 19,7 мгц (т. е. в отношении примерно 70 : 1) спектр радиоизлучения на различных галактических долготах и на широтах выше $4^\circ \div 5^\circ$ от экватора постоянен и имеет вид $I_v \sim v^{-\alpha}$, где $\alpha = 0,6 \pm 0,1$.

б) Ближе к экватору на низких частотах (19,7 мгц) интенсивность излучения I_v меньше, чем следует из степенного закона; однако это изменение спектра связано с поглощением радиоизлучения в облаках ионизированного водорода HII, а не с изменением спектрального индекса в диске Галактики.

в) Проведенные измерения [2, 3] согласуются с моделью, в которой отношение интенсивностей нетепловой и тепловой компонент примерно постоянно вдоль любого луча зрения.

В последнее время появились работы [5, 6], в которых проведены измерения галактического радиоизлучения в направлении на полюс и вблизи диска ($b^H \approx 20^\circ$) на частотах вплоть до 1,5 мгц. Было обнаружено, что на очень низких частотах имеет место «излом» спектра радиоизлучения, так что в направлении на галактический полюс максимум плотности потока наблюдается на частоте около 5 мгц, а в направлении, близком к диску, — на частоте 7 мгц. Для объяснения таких частотных спектров авторы работы [7], кроме механизма, связанного с поглощением излучения в слое ионизированного водорода HII, полутолщину которого они приняли равной 300 pc, прибегают также к модификации спектра синхротронного излучения. В частности, для частот ниже 10 мгц предла-

гается использовать спектральный индекс, меньший, чем для более высоких частот. По мнению авторов работы [7], такое изменение спектрального индекса обусловливается потерями на ионизацию и столкновения.

Представляется, что несколько видоизмененная модель распределения в диске Галактики теплового и нетеплового излучения, которая принята в работах [2,3], может быть распространена и на область частот ниже 10 мгц, причем в этом случае нет необходимости для объяснений результатов измерений на низких частотах [5,6] привлекать дополнительные гипотезы. Указанной задаче посвящена настоящая статья.

Для разделения тепловой и нетепловой компонент, а также для построения частотного спектра галактического радиоизлучения необходимо выбрать ту или иную галактическую модель радиоизлучения. Так, в работе [3] с экспериментом сравнивались три модели. В первой модели вдоль луча зрения располагались — сначала область синхротронного излучения, затем — область теплового излучения и поглощения, во второй модели — синхротронное и тепловое излучение, перемешанные при постоянном отношении; наконец, в третьей модели — область теплового излучения и поглощения предшествовала области синхротронного излучения. Оказалось, что в диапазоне частот от 1390 до 19,7 мгц с наблюдениями лучше всего совпадает распределение излучения, лежащее между первой и второй моделями.

Рассмотренные модели, по-видимому, весьма далеки от того распределения, которое имеется в галактическом диске. Действительно, в этих моделях считается, что синхротронное и тепловое излучения либо полностью перемешаны друг с другом, либо резко разделены. Вместе с тем известно [1], что в диске Галактики области НII имеют клочковатую структуру и на луче зрения таких облаков может оказаться довольно много. Поэтому для того, чтобы удовлетворить данным всех экспериментальных обзоров [2—6], предположим, что вдоль любого луча зрения в диске имеется M чередующихся слоев, состоящих из синхротронного излучения и ионизированного водорода. Для разных лучей зрения число таких слоев, естественно, может быть различным. Если число слоев очень велико ($M \rightarrow \infty$), то это должно соответствовать второй модели работы, если же $M \rightarrow 1$, то первой или третьей модели (в зависимости от первоначального расположения слоев).

Если вдоль данного направления расположить слои так, как показано на рис. 1, то для плотности потока, принятого из k -го слоя, в котором сосредоточено синхротронное излучение I_0/M , можно записать:

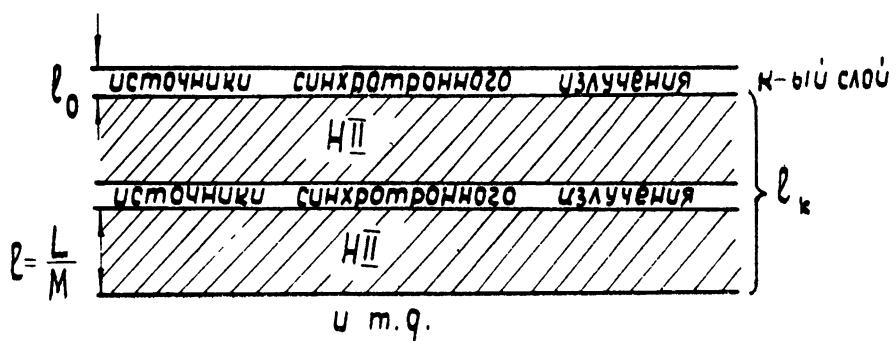


Рис. 1.

$$I_k = \frac{I_0}{M} v^{-\alpha} e^{-\tau_k}; \quad (1)$$

$$\tau_k = \frac{9,8 \cdot 10^{-3} \bar{n}_e^2 l_k}{T_e^{3/2} v^2} \left[17,7 + \ln \frac{T_e^{3/2}}{v} \right]. \quad (2)$$

Здесь v — частота, α — спектральный индекс, I_0 — плотность потока всего синхротронного излучения, τ_k , l_k — оптическая толщина и длина поглощающего слоя [8], T_e — кинетическая температура HII, \bar{n}_e^2 — средний квадрат плотности электронов. Как видно из рис. 1,

$$l_k = L - (k-1)l; \quad (3)$$

здесь L — толщина всего слоя HII, причем толщины слоев синхротронного излучения l_0 выбраны так, что $l_0 \ll l$. Учитывая, что полная плотность потока излучения, принятая наблюдателем,

$$I = \sum_{k=1}^M I_k, \quad (4)$$

и подставляя в (4) выражения (1) — (3), получим

$$I = \frac{I_0}{M} v^{-\alpha} e^{-\beta/v^2} \frac{1 - e^{\beta/v^2}}{1 - e^{\beta/v^2 M}}; \quad (5)$$

здесь

$$\beta = \frac{9,8 \cdot 10^{-3}}{T_e^{3/2}} \bar{n}_e^2 L \left[17,7 + \ln \frac{T_e^{3/2}}{v} \right]. \quad (2a)$$

Пользуясь (5), рассмотрим сначала два предельных случая $M \rightarrow 1$ и $M \rightarrow \infty$. Если $M \rightarrow 1$, то из (5) имеем

$$I = I_0 v^{-\alpha} e^{-\beta/v^2}. \quad (5a)$$

Аналогичное выражение было получено в работе [9] для поглощения синхротронного излучения в слое HII. Как видно из (5a), $I = f(v)$ имеет максимум $I = I_m$ при $v = v_0$, причем величины I_m , v_0 , β и α связаны друг с другом так, что

$$I_m = I_0 v^{-\alpha} e^{-\tau_0}; \quad \tau_0 = \frac{\beta}{v_0^2} = \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Здесь τ_0 — оптическая толщина при $v = v_0$. Подставляя (6) в (5a) и логарифмируя, получаем частотную зависимость относительной плотности потока:

$$\lg \frac{I}{I_m} = \alpha \lg \frac{v_0}{v} + \frac{\alpha}{2} \left[1 - \frac{v_0^2}{v^2} \right] \lg e. \quad (7)$$

Как видно из (7), в формулу входит частота, отнесенная к частоте максимума излучения v_0 .

Зная из измерений на высокой частоте α , а из опытов на низкой частоте v_0 , можно из (6) определить τ_0 , β , а следовательно, и меру эмиссии $ME = \bar{n}_e^2 L$ (из (2a)). В том случае, когда $M \rightarrow \infty$, исключая неопределенность в (5), получаем

$$I = I_0 v^{-\alpha} \frac{1 - e^{-\beta/v^2}}{\beta/v^2}. \quad (8)$$

В этом случае $I = f(\nu)$ также имеет максимум. Вводя те же обозначения, что и выше, получим выражения для определения $\tau_0 = \beta/\nu_0^2$:

$$1 - \frac{\tau_0 e^{-\tau_0}}{1 - e^{-\tau_0}} = \frac{\alpha}{2}. \quad (9)$$

Для частотной зависимости имеем

$$\lg \frac{I}{I_m} = (\alpha - 2) \lg \frac{\nu_0}{\nu} + \lg \frac{1 - e^{-\tau_0 \nu_0^2 / \nu^2}}{1 - e^{-\tau_0}}. \quad (10)$$

Из (9) можно, зная α , определить τ_0 , а следовательно, и меру эмиссии, если из экспериментов известна величина ν_0 .

В общем случае, когда $1 < M < \infty$, из (5) получаем для τ_0 выражение

$$\frac{\tau_0/M}{1 - e^{-\tau_0/M}} - \frac{\tau_0 e^{-\tau_0}}{1 - e^{-\tau_0}} = \frac{\alpha}{2}, \quad (11)$$

а для частотной зависимости — выражение

$$\begin{aligned} \lg \frac{I}{I_m} = \alpha \lg \frac{\nu_0}{\nu} + \frac{\tau_0}{M} \left(1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \right) \lg e + \lg \frac{1 - e^{-\tau_0 \nu_0^2 / \nu^2}}{1 - e^{-\tau_0}} - \\ - \lg \frac{1 - e^{-\tau_0 \nu_0^2 / M \nu^2}}{1 - e^{-\tau_0/M}}. \end{aligned} \quad (12)$$

В соответствии с (11), на рис. 2 приведены кривые $\alpha = \varphi(\tau_0)$ для разных значений M . Задавшись α , можно определить для данного M величину τ_0 :

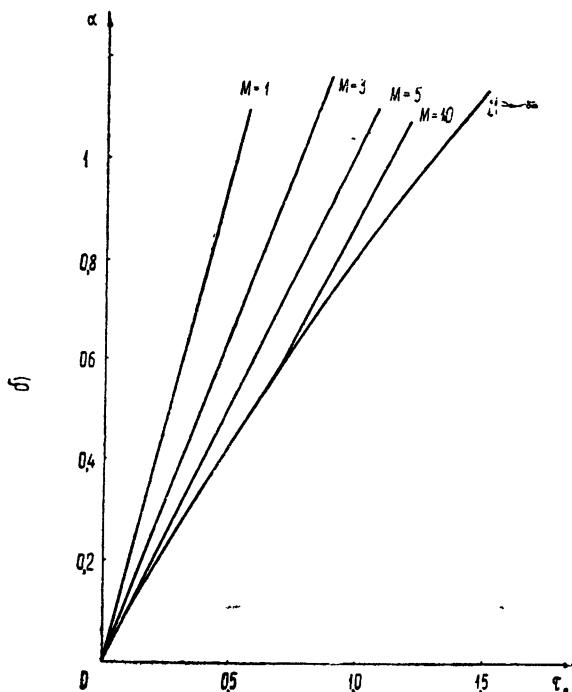


Рис. 2.

затем, пользуясь (12), построить частотную зависимость относительной плотности потока. Такая зависимость для ряда значений α приведена на рис. 3.

Из данных, приведенных на рис. 2 и 3, можно сделать ряд выводов. Так, при заданном спектральном индексе увеличение M приводит снача-

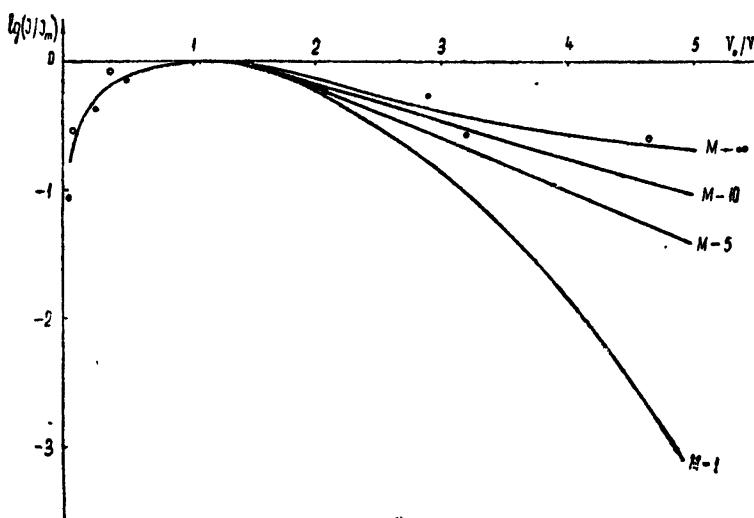
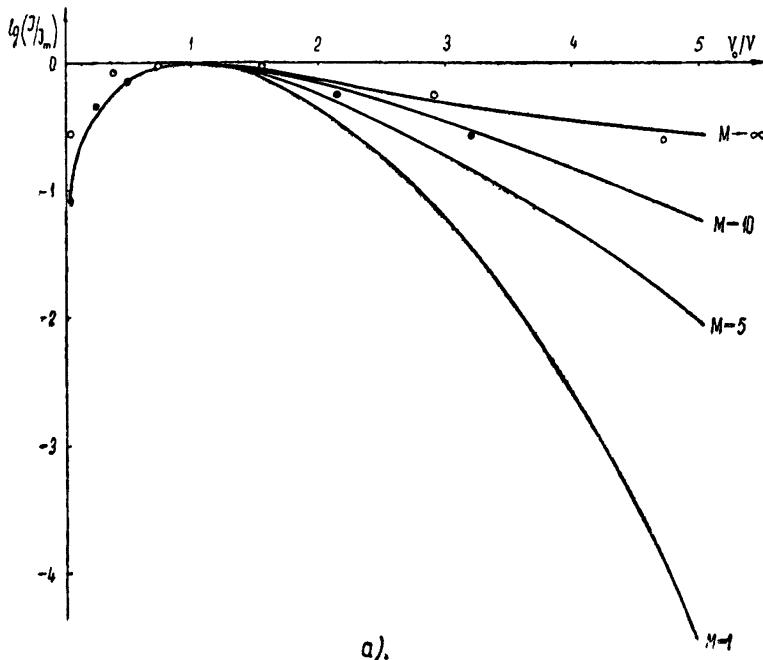
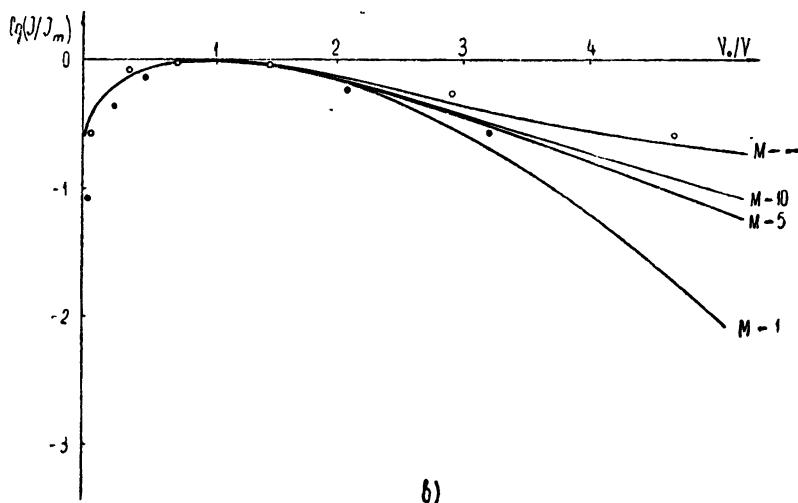
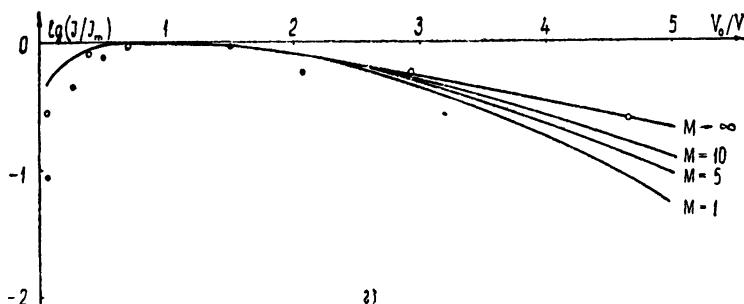


Рис. 3 а, б — теоретические кривые для различных моделей распределения тепловой и нетепловой компонент радиоизлучения в плоскости Галактики при спектральном индексе нетепловой компоненты, соответственно равных 1; 0,7; 0,5; 0,3. (Интенсивности в направлении на полюс Галактики (темные кружки) и на центр ($b^{II} = 20^\circ$) (светлые кружки)—по данным [5,6].)

ла к увеличению τ , а затем τ перестает изменяться. С помощью формул (2), (2а) и (11) можно по заданным α , M определить τ_0 и для данного ν_0 — меру эмиссии ME .



б)



г)

Рис. 3 в, г—теоретические кривые для различных моделей распределения тепловой и нетепловой компонент радиоизлучения в плоскости Галактики при спектральном индексе нетепловой компоненты, соответственно равным 1; 0,7; 0,5; 0,3. (Интенсивности в направлении на полюс Галактики (темные кружки) и на центр ($b^{II}=20^\circ$) (светлые кружки)—по данным [5,6]).

В таблице 1 приведены значения τ_0 и меры эмиссии ME для $\nu_0 = 5$ и 7 мГц и $\alpha = 0,6$. При вычислениях принималось, что кинетическая температура областей НП $T_e = 10^4$ К. В приведенных значениях для ME величина n_e взята в $\text{эл} \cdot \text{см}^{-3}$, а L — в парсеках.

Таблица 1

M	1	3	5	10	∞
τ_0	0,30	0,46	0,58	0,70	0,70
ME $\nu_0=7$ (мГц)	30	50	60	75	75
ME $\nu_0=5$ (мГц)	15	25	30	35	35

Изменение числа M оказывает существенное влияние на частотную зависимость плотности потока излучения в области частот ниже частоты максимального излучения ($\nu_0/\nu > 1$) и практически не сказывается там, где $\nu_0/\nu < 1$ (см. рис. 3). По мере возрастания спектрального индекса α увеличивается различие между однослоиной ($M = 1$) и однородной ($M \rightarrow \infty$) моделями.

Пользуясь кривыми рис. 3, можно сопоставить полученные расчетные зависимости с данными работ [5-7], которые нанесены на рис. 3 кружками для направления на центр Галактики при $b^H = 20^\circ$ и точками для полюса ($b^H = 90^\circ$). Как видно из рисунков, измеренные и рассчитанные значения относительных плотностей потоков хорошо совпадают для первого направления при $\alpha \approx 0,5 - 0,8$ и $M \rightarrow \infty$, а для второго — при $M \approx 5 - 10$. Если учесть, что кривые I/I_m для $M \geq 10$ и $M \rightarrow \infty$ не очень сильно отличаются (рис. 3), то указанное совпадение эксперимента с расчетом говорит о том, что в направление на полюс количество облаков HII ненамного меньше, чем в направлении $b^H = 20^\circ$.

Таким образом, однослоиная ($M = 1$) и однородная ($M \rightarrow \infty$) модели имеют существенно отличные частотные характеристики (рис. 3). Как будет показано ниже, формулу (8) для однородной модели можно получить из уравнения переноса, выведенного в предположении о постоянстве отношения плотностей источников теплового и нетеплового излучения вдоль луча зрения. Это доказывает эквивалентность предельного случая многослойной модели при $M \rightarrow \infty$ и случая полного перемешивания двух компонент радиоизлучения. Очевидно, что любое возможное распределение компонент является промежуточным между однослоиной моделью [9] ($M = 1$) и случаем полного перемешивания. Поэтому предложенная схема расположения излучающих и поглощающих областей может рассматриваться как первое приближение к реальному распределению, удобное для теоретического анализа.

Пользуясь приведенной моделью, можно попытаться определить отношение синхротронного излучения к поглощению в HII.

Как было показано выше, для дисковой компоненты экспериментальные и расчетные значения плотности потоков совпадают при $M \rightarrow \infty$, т. е. для полностью перемешанной модели. Поэтому для нахождения отношения синхротронного излучения к поглощению HII воспользуемся уравнением переноса [1, 10], которое запишем в следующем виде:

$$dI_v(l) = -\kappa_v(l) I_v dl + j(l) dl. \quad (13)$$

Здесь $j(l)$ — плотность нетеплового излучения, $\kappa_v(l)$ — коэффициент поглощения на единицу длины в HII.

Уравнение (13) будем интегрировать в пределах по l от 0 до l_0 (l_0 — протяженность диска в данном направлении):

$$I_v = \int_0^{l_0} j(l) \exp \left(- \int_l^{l_0} \kappa_v(x) dx \right) \kappa_v dl. \quad (14)$$

Так как $d\tau = \kappa_v(l) dl$, то, переходя к новым переменным τ и t , получаем, учитывая, что $l \rightarrow t$, а $l_0 \rightarrow \tau$:

$$I_v = \int_0^\tau \frac{j(t)}{\kappa_v(t)} e^{-\tau+t} dt. \quad (15)$$

Как следует из (15), интенсивность плотности потока излучения I_v определяется величинами τ и j/κ_v . Если принять, как это сделано в работах [2, 3], что вдоль любого луча зрения $j/\kappa_v = \gamma = \text{const}$, но для разных направлений значения γ различны, то из (15)

$$I_v = \gamma (1 - e^{-\tau}). \quad (15a)$$

Для определения постоянной γ найдем суммарное нетепловое излучение I_0 в данном направлении:

$$I_0 = \int_0^l j(l) dl = \int_0^l \frac{j(l)}{x_v(l)} x_v(l) dl = \gamma \int_0^l x_v(l) dl = \gamma \tau.$$

Таким образом,

$$\gamma = I_0 / \tau. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15a), получим

$$I_v = I_0 \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}, \quad (8a)$$

что совпадает с (8), так как $\tau = \beta/v^2$.

Если воспользоваться (8a) и данными работ [5-7], можно определить γ_1 в направлении на полюс и γ_2 в направлении на диск ($b^{II} = 20^\circ$). Как следует из (15a),

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{I_1}{I_2} \frac{1 - e^{-\tau_2}}{1 - e^{-\tau_1}}. \quad (17)$$

Согласно [5-7], для $v_1 = 5$ мгц $I_1 = 22 \cdot 10^{-20}$, а для $v_2 = 7$ мгц $I_2 = 34 \cdot 10^{-20}$. Согласно таблице 1, $\tau_2 = 0,7$. Полагая $M = 10$ и $\alpha = 0,6$, получаем (в соответствии с рис. 2) $\tau_1 = 0,7$. Тогда из (16) имеем

$$\gamma_1/\gamma_2 = 0,65. \quad (18)$$

Как следует из (18), отношение $j(l)/x_v(l)$ для полюса в полтора раза меньше, чем для диска. Если считать, что коэффициент поглощения, рассчитанный на единицу длины, $x_v(l)$ одинаков повсюду в диске, то полученное отношение означает, что плотность источников синхротронного излучения в направлении на центр (при $b^{II} = 20^\circ$) в полтора раза выше, чем в направлении на полюс.

Если принять, что дисковая компонента синхротронного излучения и поглощения в НII простирается примерно на 500 нс, то при мере эмиссии $ME = 75$ (см. таблицу 1) получаем для $b^{II} = 20^\circ$ плотность электронов $n_e \approx 0,2$ эл \cdot см $^{-3}$, а для $b^{II} = 90^\circ$ при $ME = 35$ (ибо здесь $M = 10$) $n_e \approx 0,26$ эл \cdot см $^{-3}$.

Приведенные значения плотности электронов для дисковой компоненты получаются довольно большими, хотя и мало отличающимися от тех, которые получены в работе [7] ($n_e \approx 0,1$ эл \cdot см $^{-3}$). Таким образом, можно считать, что принятая модель дисковой компоненты галактического радиоизлучения позволяет объяснить результаты работ [5,6], не прибегая к гипотезе об изломе спектра синхротронной компоненты на частотах ниже 10 мгц, которая использовалась в статье [7].

Предварительный анализ данных [5,6], который является целью настоящей статьи, проведен без учета излучения гало. Соответствующий расчет показывает, что эта поправка не изменит выводов, если отношение суммарного излучения гало и диска q порядка единицы, и совпадение теоретических кривых с наблюдательными данными будет неудовлетворительным, если $q \sim 10 \div 15$. Однако и в этом случае нам представляется возможным по-прежнему, не вводя дополнительных сообра-

жений о спектре излучения гало, добиться согласия с наблюдениями, учитывая несомненную «ключковатость» областей HII в диске. Более детально этот вопрос будет рассмотрен авторами в последующей работе.

В заключение следует отметить то обстоятельство, что в дальнейшем необходимо получить экспериментальные значения плотностей потока космического радиоизлучения на частотах ниже 10 мгц. В данных, приведенных в работах [5,6], не содержится важных поправок, без знания которых затруднительно использовать результаты этих исследований. В частности, не сделаны поправки на поглощение радиоизлучения в ионосфере, которое на частотах 1,5–5 мгц даже при крайне низкой критической частоте слоя F_2 , равной 0,5 мгц [5,6], должно быть весьма значительным. Кроме того, в цитируемых работах не указана точность, с которой измерялась плотность потока излучения. Неясно также, какие поправки следует ввести в экспериментальные данные в связи с тем, что в работах [5–7] на разных частотах измерения велись с помощью антенн различных типов, но в результате приведены плотности потоков космического радиоизлучения, а не его интенсивность.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Шкловский, Космическое радиоизлучение, Гостехиздат, М., 1956.
2. G. Westerhout, Bull. Astr. Inst. Netherlands, 14, 215 (1958).
3. M. M. Komesaroff, Austral. J. Phys., 14, 515 (1961).
4. C. A. Shain, M. M. Komesaroff, C. S. Higgins, Austral. J. Phys., 14, 508 (1961).
5. G. R. A. Ellis, R. J. Green, Preprint Physics, Department, University of Tasmania, 1962.
6. G. R. A. Ellis, M. D. Waterworth, M. Besell, Nature, 196, 1079 (1962).
7. F. Hoyle, G. R. A. Ellis, Austral. J. Phys., 16, 1 (1963).
8. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
9. Е. В. Чаевский, С. Я. Брауде, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 211 (1962).
10. J. L. Pawsey, R. N. Bracewell, Radio Astronomy, Oxford, 1955.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
1 июня 1963 г.

ON THE DISTRIBUTION OF THERMAL AND NON-THERMAL RADIATION COMPONENTS OVER THE GALAXY DISK

S. Ya. Braude, V. V. Vajsberg

A possible model of distribution of the thermal and nonthermal radiation sources over the Galaxy disk is proposed. The analysis of observation data has been carried out in the frame of this model. The ratio of the mentioned component in the Galaxy pole direction was proved to be 1.5 times less than in the direction at $b^{\text{II}}=20^\circ$ and the averaged electron density in the disk to be $0.2 \text{ el} \cdot \text{cm}^{-3}$.

О СПЕКТРЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ КАССИОПЕЯ-А И ЛЕБЕДЬ-А В САНТИМЕТРОВОМ И ДЕЦИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНАХ

К. С. Станкевич

В результате прецизионных измерений потоков Кассиопеи-А в сантиметровом и дециметровом диапазонах обнаружены существенные отклонения спектра от простой зависимости $A\nu^{-\alpha}$. Рассматривается возможная теоретическая интерпретация этих отклонений. Показано, что спектр радиоизлучения источника Лебедь-А имеет спектральный индекс, плавно увеличивающийся с ростом частоты, и не имеет излома.

1. КАССИОПЕЯ-А

В настоящее время принято считать, что спектр источника Кассиопея-А для частот, больших 10 мгц, хорошо описывается простой зависимостью $A\nu^{-\alpha}$ с одним спектральным индексом α . Величину спектрального индекса Уитфилд получил равной $\alpha = 0,8$ [1], другие авторы принимают $\alpha = 0,75$ [2]. Измерения, из которых следовал этот вывод, имели большей частью погрешности 10–20 %. Применение калибровки приемаемых сигналов по методу искусственной «луны» [3] позволило уменьшить погрешность определения потоков радиоизлучения до 2–3 % и выявить детали поведения спектра. Результаты прецизионных измерений потоков Кассиопеи-А на длинах волн 3,2 см и 9,8 см дали значение спектрального индекса в этом диапазоне $\alpha = 0,87$ [4].

Значение $\alpha = 0,87$ нельзя принять для всего диапазона, поскольку уже на частотах порядка 1000 мгц получаются величины потоков, которые не согласуются с имеющимся экспериментальным материалом. Поэтому в [4] был сделан вывод о том, что спектр Кассиопеи-А в сантиметровом диапазоне становится более крутым. Ввиду важности этого факта летом 1962 года были вновь проведены измерения на длинах волн 3,2 см [5] и 10,26 см [6], результаты которых находятся в хорошем согласии с предыдущими данными [4]. Тем самым подтверждается достоверность значения спектрального индекса $\alpha = 0,87$ в этом диапазоне.

В связи со сказанным большой интерес представляет детальное исследование спектра Кассиопеи-А на волнах дециметрового диапазона. Ранее были известны данные, выполненные с погрешностью, меньшей 10 %, только на волнах 31,4 см [7] и 21 см [8,9]. Поэтому в НИРФИ были проведены прецизионные абсолютные измерения потоков на волнах длиной 25,2 см; 34,9 см; 42,4 см и 54,3 см. Результаты измерений и методика подробно изложены в [10].

По измеренным потокам на волнах 54,3 см, 42,4 см и 34,9 см можно построить спектр источника, который хорошо описывается спектральным индексом $\alpha = 0,8$. Потоки на длинах волн 32,6 см [13] и 31,4 см [7] также соответствуют спектральному индексу $\alpha = 0,8$. Весьма большой интерес представляет результат измерений на 25,2 см. Как видно из графика рис. 1, поток ложится на продолжение сантиметровой ветви со спектральным индексом $\alpha = 0,87$ и не согласуется с индексом $\alpha = 0,8$ дециметрового диапазона. Подобная ситуация имеет место также для результа-

тов измерений потока на длине волны 21 см [8, 9, 12]. Отсюда следует, что спектральный индекс $\alpha = 0,87$ соответствует более широкому диапазону длин волн от 3,2 см до 25,2 см.

В таблице 1 приведены потоки для источника Кассиопея-А, имеющие погрешности определения потоков меньше 10%.

Таблица 1

Длина волны (см)	Поток $S \cdot 10^{24} (\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ди-}^{-1})$	Точность (%)	Наблюдатели
3,2	5,2	± 3	[4]
3,2	5,14	± 5	[5]
9,4	13,40	± 5	[11]
9,8	14,60	± 3,5	[4]
10,26	15,26	± 2	[6]
21	26,68	± 10	[8]
21	26,60	± 15 ± 20	[12]
25,2	30,5	± 4	[10]
31,4	31,20	± 5	[7]
32,6	32,95	± 2,5	[13]
34,9	33,65	± 2,5	[10]
42,4	41,7	± 2,5	[10]
53,4	49,6	± 3	[10]

В интервале от 25,2 см до 31,4 см, как видно из графика рис. 1, спектральный индекс $\alpha \approx 0$, и этот интервал является переходным от дециметровой к сантиметровой ветвям спектра.

Этот результат является новым и не очевидным для существующей теории радиоизлучения источника Кассиопея. Уменьшение спектрально-

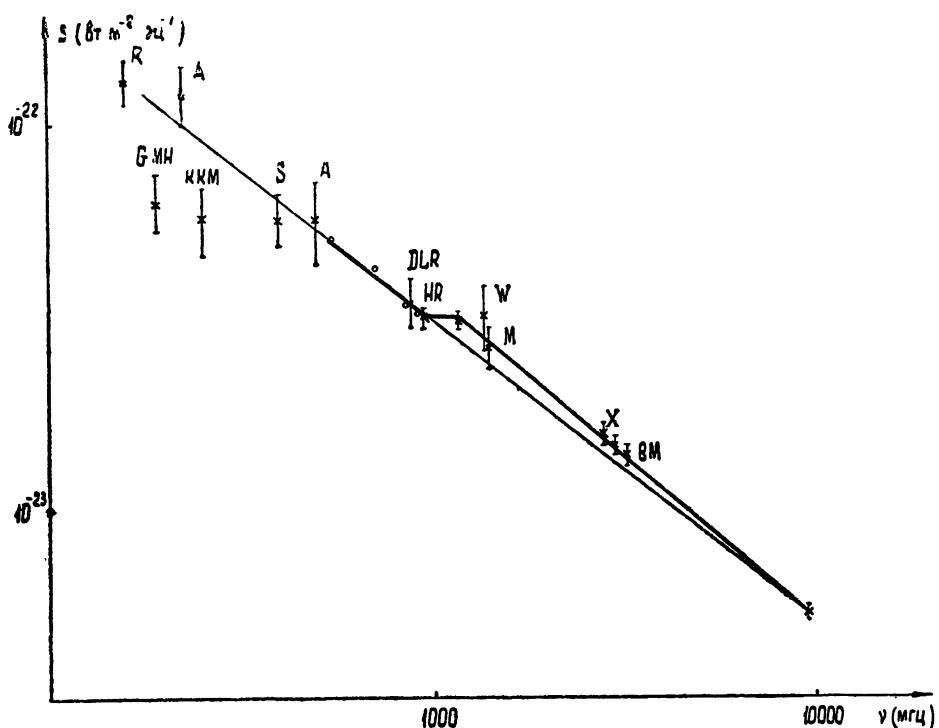


Рис. 1. Спектр дискретного источника Кассиопея-А в сантиметровом и дециметровом диапазонах.

го индекса в некотором интервале частот не может быть следствием нестационарных процессов, поскольку они либо сохраняют спектральный индекс, либо увеличивают его [14]. Возникающий вследствие адиабатического расширения туманности при учете потерь на синхротронное излучение релятивистских электронов излом в спектре Кассиопеи может иметь место на частотах $5 \cdot 10^{12} \text{ гц}$ [14]. Поэтому наблюдаемое увеличение спектрального индекса на частотах, больших 1200 мгц , также не объясняется предлагаемым механизмом.

В настоящее время трудно дать исчерпывающее объяснение этой особенности, поскольку отсутствуют данные о спектре в диапазоне $21 \text{ см} \div 10 \text{ см}$ и особенно на волнах меньше 3 см . Однако можно высказать некоторые соображения, позволяющие дать качественную интерпретацию наблюдаемого спектра Кассиопеи-А.

Предполагая энергетический спектр релятивистских электронов и напряженность магнитного поля одинаковыми во всех точках источника, примем, что спектр радиоизлучения описывается одним спектральным индексом $\alpha = 0,8$ во всем диапазоне. На графике рис. 1 он изображен тонкой линией. Тогда в интервале от 30 см до 3 см превышение интенсивности по отношению к спектру с индексом $\alpha = 0,8$ можно рассматривать как дополнительное излучение, накладывающееся на этот спектр. Для определения спектрального индекса дополнительного излучения возьмем на двух частотах отношение потоков $F_1 = A_1 v^{-\alpha_1}$ с $\alpha_1 = 0,8$ и $F_2 = A_2 v^{-\alpha_2}$ (α_2 — спектральный индекс дополнительного излучения) и получим

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\lg(F_2^{(1)}F_1^{(2)}/F_1^{(1)}F_2^{(2)})}{\lg(v_1/v_2)} \approx 1 + \alpha_1 = 1,8.$$

Если радиоизлучение с индексом $\alpha_2 = 1,8$ генерируется в неоднородностях источника с повышенной электронной плотностью, то на частотах, где оптическая толщина $\tau_e \sim 1$, наступает поглощение, и спектр имеет вид $F \sim v^{2-\alpha_2} = \text{const}$ [15]. Для частот порядка 1000 мгц $\tau_e \sim 1$ будет при $N \sim 10^4 \text{ см}^{-3}$, $T_e = 10^4 \text{ К}$ и размерах неоднородностей $L \sim 10^{17} \text{ см}$. Такие условия могут реализоваться в диффузных конденсациях, которых в оболочке Кассиопеи насчитывается около 200 [16].

Для обеспечения наблюдаемой интенсивности дополнительного радиоизлучения необходимо, чтобы каждая диффузная конденсация в диапазоне $10^9 \text{ гц} \div 10^{10} \text{ гц}$ излучала 10^{-4} часть энергии, излучаемой всей туманностью на этих волнах. Можно оценить требуемую плотность релятивистских электронов в конденсации. В наивыгоднейших условиях для излучения данной частоты релятивистскими электронами имеем [17]:

$$S_{v \text{ макс}} = 1,7 \cdot 10^{-23} H_\perp N_e \frac{v}{R^3} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1}.$$

Так на длине волны 25 см дополнительный поток равен $S_{25} = 4 \cdot 10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ и для каждой конденсации $H_\perp N_e \sim 10^{-7}$. Если поле в конденсации имеет такую же величину, как в туманности: $H_\perp \sim 10^3 \text{ эрстед}$, то $N_e \sim 10^{-4} \text{ см}^{-3}$, что в 10^2 раз превышает среднюю плотность релятивистских электронов в самой туманности. Поэтому, чтобы удержать внутри конденсации избыточную плотность релятивистских электронов, силовые линии магнитного поля оболочки должны обтекать конденсацию, а магнитное поле внутри конденсации должно быть замкнуто.

Рассмотрим возможность существования магнитного поля за счет внутреннего турбулентного движения в конденсации. Длина свободного пробега l в конденсации с плотностью $N \sim 10^4 \text{ см}^{-3}$

$$l = 1/q_i N \sim 2 \cdot 10^8 \text{ см},$$

где q_i — сечение для соударений в ионизированном газе, и примем внутренний размер турбулентности $L_0 \sim 10 l = 2 \cdot 10^9 \text{ см}$. Пользуясь соотношениями теории турбулентности, можно определить скорость движения неоднородностей u внутри конденсации, учитывая, что $u^3/L \sim \epsilon$, где ϵ — скорость диссипации энергии. Для плотности среды $\rho \sim 10^{-20} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и размерах вихрей $L \sim 10^{14} \text{ см}$ получим $u \sim 2 \cdot 10^6 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$. Верхнюю границу напряженности магнитного поля оценим из равенства

$$\frac{\rho u^2}{2} \sim \frac{H_k^2}{8\pi}.$$

При принятых выше значениях величин $H_k \sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ эрстед}$. Для обеспечения равновесного состояния конденсации необходимо иметь, по крайней мере, равенство давлений магнитного поля, космических лучей и газокинетического внутри конденсаций и вне их. Выполнение этого условия обеспечивается лишь при соблюдении неравенства $H \geq H_k$. Из приведенных выше оценок видно, что оно справедливо даже для размеров вихрей $L \sim 10^{16} \text{ см}$.

Оценим время жизни релятивистских электронов в конденсации, которое определяется дрейфом частиц в неоднородных полях. Согласно [18], скорость дрейфа, происходящего в направлении, перпендикулярном \mathbf{H} и вдоль градиента ∇H , по порядку величины равна

$$v_d \sim \frac{r}{L} v_{\perp},$$

где $r = E \sin \theta / 300 H$ и $v_{\perp} = c \cos \theta$. Для частиц, ответственных за излучение на сантиметровых волнах, $E \sim 10^9 \text{ эв}$ при $H \sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ эрстед}$ и $v_d = 10^6 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$. Отсюда следует, что время жизни туманности $T_{\infty} \sim 10^{10} \text{ сек} < t_d = 10^{11} \text{ сек}$ — времени дрейфа релятивистских электронов. Заметим, что эта оценка допускает возможность брать $t_d \sim T_{\infty}$, если неоднородности турбулентных вихрей имеют меньший масштаб. При этом получается, что более энергичные электроны будут быстрее диффундировать из конденсации; этим, возможно, объясняется большой спектральный индекс дополнительного излучения $\alpha_2 = 1,8$.

2. ЛЕБЕДЬ-А

В настоящее время измерения радиоизлучения Лебедя-А с калибровкой по методу искусственной Луны произведены лишь на волнах 53,4 см; 42,4 см; 34,25 см [10] и на 10,26 см [6]. Результаты этих измерений приведены в таблице 2. По этим данным нельзя представить полностью поведение спектра Лебедя-А, но некоторое уточнение спектра, построенного в [2], можно получить, особенно в дециметровом диапазоне. Как можно видеть из рис. 2, эти результаты хорошо согласуются с данными на длинах волн 31,4 см [7] и 21 см [8].

Таблица 2

Длина волны (см)	Поток $S \cdot 10^{24} (\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1})$	Погрешность (%)	Наблюдатели
53,4	37,3	± 8	[10]
42,4	29,6	± 6	[10]
34,25	25,1	± 5	[10]
32,6	22,6	± 4	[13]
31,4	21,9	± 5	[7]
21	16,36	± 15	[8]
10,26	7,5	± 6	[6]

Вычисленный спектральный индекс на длинах волн $54,3 \div 21 \text{ см}$ равен $\alpha = 0,85$ (вместо $\alpha = 0,75$, полученного в [2]). Имеющихся в сантиметровом диапазоне данных совершенно недостаточно, чтобы сделать вывод о поведении спектра источника Лебедь-А. На приведенном графике были взяты последние наиболее достоверные результаты измерений на длинах волн $10,26 \text{ см}$ и $3,2 \text{ см}$. Вычисленный для интервала $3,2 \div 21 \text{ см}$ спектральный индекс заключен в пределах $1,08 \leq \alpha \leq 1,18$. Величина $\alpha = 1,25$ [2] противоречит результатам на $10,26 \text{ см}$ [6]. Вполне возможно, что в интервале $3,2 \div 10 \text{ см}$ спектральный индекс может принимать большее значение. Используя на длине волны $3,2 \text{ см}$ данные об интегральном потоке Лебедя-А, приведенные в [19], получим спектральный индекс порядка $\alpha = 1,5$. Если такой вариант подтвердится, то вообще нельзя говорить об изломе спектра Лебедя-А на одной частоте, поскольку увеличение спектрального индекса происходит плавно с увеличением частоты от $\alpha = 0,75$ в метровом диапазоне до $\alpha = 1,5$ на сантиметровых волнах. В этом случае интерпретация спектра радиоизлучения Лебедя-А будет отличаться от предложенной в [9].

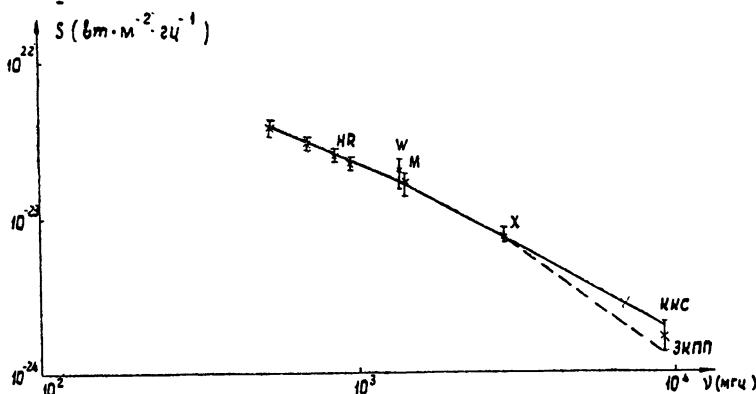


Рис. 2. Спектр дискретного источника Лебедь-А в сантиметровом и дециметровом диапазонах.

В [20] были развиты представления о спектре нетеплового космического радиоизлучения в Галактике, согласно которым источником радиоизлучения в галактической короне являются реликтовые электроны в совокупности со стационарной электронной компонентой. Аналогичная ситуация могла бы иметь место и для источника Лебедь-А. Тогда плавное изменение спектрального индекса в 2 раза легко объяснимо.

Автор весьма признателен В. А. Разину за дискуссию и ценные замечания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1 Д. Р. Уитфилд, Радиоастрономия, Парижский симпозиум, ИЛ, М., 1961.
- 2 А. М. Каракун, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 38, 83 (1961).
- 3 В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1004 (1961).
- 4 К. С. Станкевич, Астрофиз. ж., 39, 609 (1962).
- 5 В. П. Ласточкин, Э. С. Планкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 631 (1963).
- 6 В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 398 (1963).
- 7 D. E. Naggis, J. A. Roberts, PASP, 72, 237 (1960).
- 8 P. G. Mezger, L. Astrophys., 46, 234 (1958).
- 9 Н. С. Кардашев, А. Д. Кузьмин, С. И. Сыроватский, Астрон. ж., 39, 216 (1962).

- 10 В. П. Ласточкин, В. А. Порфириев, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Н. Н. Холодилов, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 629 (1963).
- 11 M. W. Broten, M. J. Medd, *Astrophys. J.*, 132, 279 (1960).
- 12 G. Westerhout, *BAN*, 14, 215 (1958).
- 13 В. А. Разин, В. Т. Федоров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1052 (1963).
- 14 Н. С. Кардашев, *Астрон. ж.*, 39, 393 (1962).
- 15 В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 583 (1960).
- 16 Р. М. Минковский, *Радиоастрономия. Парижский симпозиум*, ИЛ, М., 1961.
- 17 В. Л. Гинзбург, УФН, 62, 37 (1957).
- 18 В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, УФН, 71, 412 (1960).
- 19 В. Ф. Захаренко, Н. Л. Каидановский, Ю. Н. Парийский, В. А. Прозоров, *Астрон. ж.*, 40, 216 (1963).
- 20 Г. Г. Гетманцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1051 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 июня 1963 г.

ON THE RADIATION SPECTRUM OF DISCRETE SOURCES CASSIOPEIA-A, CUGNUS-A IN CENTIMETER AND DECIMETER BANDS

K. S. Stankovich

As a result of precise measurements of Cassiopeia-A fluxes in centimeter and decimeter bands the essential deflections of the spectrum from the simple law $A\nu^{-\alpha}$ have been detected. A possible theoretical interpretation of these non-coincidence is considered. It is shown that radiation spectrum of the source Cugnus A has a spectral index which increases continuously with a frequency without fracture.

К ТЕОРИИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ВЕНЕРЫ И МАРСА

B. C. Троицкий

Рассмотрена фазовая зависимость радиоизлучения поверхностей Венеры и Марса в предположении о существовании заданного периодического температурного режима поверхности. По экспериментальным данным о фазовой зависимости радиоизлучения Венеры и локационным данным о коэффициенте отражения оценен период собственного вращения Венеры, оказавшийся около $2 \div 10$ дней при обратном вращении.

В настоящее время получен большой экспериментальный материал о радиоизлучении ближних планет, в особенности Венеры, для которой предложен ряд моделей, объясняющих наблюдаемый спектр радиоизлучения (см., например, [1]). Однако в этих моделях рассматривается в основном радиоизлучение среды, находящейся над поверхностью Венеры. Как известно [2], спектр радиоизлучения Венеры отличается ростом эффективной температуры с 300°K на $\lambda = 4 \text{ м}$ до 600°K для $\lambda = 3 \text{ см}$; далее до 60 см температура остается неизменной. Согласно «парниковой» модели, излучение на $\lambda \leq 1,5 \div 2 \text{ см}$ обусловлено атмосферой Венеры, а на $\lambda \geq 3 \text{ см}$ — твердой поверхностью. По ионосферной модели длинноволновая часть спектра ($\lambda \geq 3 \text{ см}$) обусловлена радиоизлучением ионосферы, а коротковолновая ($\lambda < 3 \text{ см}$) — твердой поверхностью. Очевидно, что независимо от справедливости той или иной из указанных моделей, в случае, если существует твердая поверхность Венеры, для какого-то диапазона волн радиоизлучение планеты будет определяться излучением этой поверхности. Между тем теоретическое рассмотрение этой части радиоизлучения Венеры, насколько нам известно, отсутствует. Настоящая работа восполняет этот пробел; ниже проводится феноменологическое рассмотрение этого вопроса, не связанное с конкретной моделью атмосферы, а потому пригодное и для Марса.

1. ТЕОРИЯ

Для определенности рассмотрим сначала радиоизлучение Венеры. С достаточной точностью можно положить, что плоскости орбит Венеры и Земли совпадают. Предположим также, что ось вращения Венеры перпендикулярна плоскости ее орбиты. Выберем сферическую систему координат, связанную с Венерой, в которой полярная ось совпадает с осью вращения. В соответствии с этим координаты светил и точек поверхности будут определяться широтой ϕ и долготой φ , отсчитываемой от условного меридиана, связанного с планетой. Северный полюс Венеры считается направленным в северное полушарие неба.

Рассмотрим движение планет и Солнца, каким оно представляется при наблюдении с северного полюса Венеры. Вследствие собственного вращения Венеры вращение звездного неба будет происходить с угловой скоростью $\Omega_* = 2\pi/t^*$, где t^* — звездные сутки Венеры. Благодаря движению Венеры по орбите Солнце будет двигаться среди звезд против часовой стрелки. Если направление собственного вращения планеты совпадает с направлением движения Солнца среди звезд, то, как известно, оно называется прямым, если противоположно — обратным. Соот-

ветственно сказанному на рис. 1 изображены оба случая для момента, близкого к верхнему соединению Венеры. Двойными стрелками обозначены угловые скорости истинных вращений, пунктирными — угловая скорость видимых движений звезд, тонкими стрелками — суммарное видимое движение Солнца и Земли на небе Венеры.

Условимся считать положительными видимые движения, происходящие по часовой стрелке. Обозначим угловую скорость движения Солнца в принятых координатах через $\Omega_C = 2\pi/t_C$, где t_C — продолжительность солнечных суток. Пусть угловая скорость движения Солнца среди звезд равна $\Omega_C^* = 2\pi/t$, где t — продолжительность венерианского года (≈ 225 суток). Обозначим далее угловую скорость движения Земли среди звезд при наблюдении с Венеры через Ω_3^* . Величина Ω_3^* квазипериодически зависит от времени и может менять знак. Так, при нижнем соединении Земля с Венера будет наблюдаваться в обратном движении среди звезд по сравнению с движением при верхнем соединении.

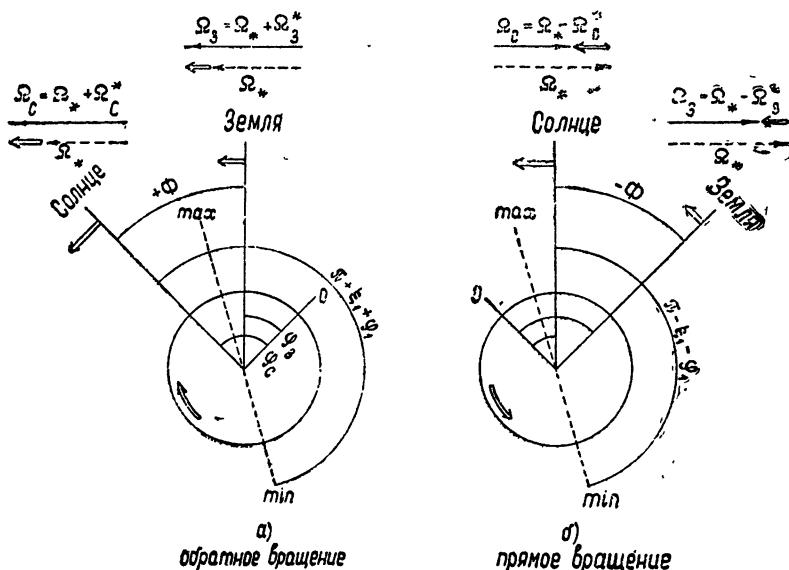


Рис. 1.

Координаты подсолнечной и «подземной» точек равны соответственно

$$\psi_C = 0, \quad \varphi_C = \Omega_C t, \quad \psi_3 = 0, \quad \varphi_3 = \int \Omega_3 dt = \Omega_* t \pm \int \Omega_3^* dt,$$

где знак «+» берется для обратного, а «—» для прямого вращения Венеры. Абсолютная величина разности долгот Солнца и наблюдателя $|\varphi_C - \varphi_3| = \Phi$ определяет величину фазового угла планеты. При $\Phi = \pi$ имеем нижнее соединение, при $\Phi = 0$ — верхнее. Характерным отличием обоих случаев является то, что после верхнего соединения для наблюдателя на Венере при прямом вращении Солнце в суточном движении следует за Землей, а при обратном наоборот — Земля следует за Солнцем. Это, как увидим ниже, приводит к существенному отличию в фазовом ходе радиоизлучения, наблюдаемом с Земли.

Теория радиоизлучения поверхности планеты будет практически полностью совпадать с теорией радиоизлучения Луны [3]. Поэтому мы будем останавливаться лишь на специфических моментах расчета. Рас-

пределение поверхности температуры $T(\varphi, \psi, t)$ по планете, как и для Луны, можно задать в виде ряда

$$T(\varphi, \psi, t) = T_0(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\psi) \cos(n\varphi_C - n\varphi - \varphi_n), \quad (1)$$

где T_0 — постоянная составляющая, а T_n — гармоники температуры поверхности, φ_n — некоторый сдвиг фазы гармоник температурной волны по отношению к фазе инсоляции.

Мы предполагаем, что вещество на поверхности планеты является диэлектриком, в который температурные колебания и радиоволны проникают на некоторую глубину. Решая уравнение теплопроводности с граничными условиями (1) для однородного слоя пород, получим, как и для Луны,

$$\begin{aligned} T(\varphi, \psi, y, t) = & T_0(\psi) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\psi) e^{-y} \sqrt{n\Omega_C/2a} \cos [n\varphi_C - n\varphi - \varphi_n - y \sqrt{n\Omega_C/2a} t], \end{aligned} \quad (2)$$

где $a = k/\rho c$ — температуропроводность, k — теплопроводность, ρ — плотность, c — теплоемкость вещества поверхности, y — текущая глубина под поверхностью.

Эффективная температура радиоизлучения элемента поверхности (яркостная температура) в направлении, составляющем угол, r с нормалью к поверхности,

$$T_e(\varphi, \psi, t) = [T - R(r)] \int_0^{\infty} T(\varphi, \psi, t, y) \times \sec r' e^{-y \times \sec r'} dy. \quad (3)$$

Здесь \times — коэффициент затухания электромагнитных волн в веществе планеты, $R(r)$ — коэффициент отражения от поверхности, зависящий от диэлектрической постоянной ϵ вещества, r' — угол, связанный с r законом преломления на поверхности: $\cos r' = (1/\sqrt{\epsilon}) \sqrt{\epsilon} - \sin^2 r$.

Подставляя (2) в (3) и интегрируя, получим соотношение

$$T_e(\varphi, \psi, t) = [1 - R(r)] \left\{ T_0(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(\psi) \cos [n(\varphi_C - \varphi) - \varphi_n - \xi_n(\varphi, \psi)]}{\sqrt{1 + 2\delta_n \cos r' + 2\delta_n^2 \cos^2 r'}} \right\}, \quad (4)$$

где $\delta_n = \beta/\times = l_s/l_{Tn}$, $l_s = 1/\times$ — глубина проникания электромагнитной волны, а $l_{Tn} = 1/\beta = \sqrt{2k/n\rho c \Omega_C}$ — глубина проникания n -ой гармоники температурной волны, $\xi_n = \arctg \frac{\delta_n \cos r'}{1 + \delta_n \cos r'}$ определяет запаздывание интенсивности радиоизлучения относительно максимума температуры на поверхности за счет тепловой инерции прогрева почвы в глубину.

До настоящего места весь вывод, включая и выражение (4), совпадает с расчетом для радиоизлучения Луны. Однако в применении к радиоизлучению Венеры существенным является то, что наблюдение радиоизлучения элемента поверхности с наперед заданной долготой φ не всегда возможно. Для Луны в любой момент наблюдения с Земли можно видеть одни и те же участки (если пренебречь либрациями). Это связано с тем, что наблюдатель относительно Луны неподвижен, а в слу-

чае Венеры — движется вокруг нее по определенному закону. При этом с Земли наблюдается полусфера планеты в пределах долгот $\varphi_3 + \pi/2$ и $\varphi_3 - \pi/2$.

В силу сказанного выразим φ в виде $\varphi = \varphi_3 + \tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi}$ — текущие долготы, отсчитываемые от долгот подземной точки φ_3 . Подставляя это в (4), для косинуса при амплитуде первой гармоники ($n = 1$) получим: $\cos(\varphi_C - \varphi_3 - \tilde{\varphi} - \varphi_1 - \xi_1)$. В случае обратного вращения (см. рис. 1а) Солнце опережает Землю по часовому углу, т. е. $\varphi_C > \varphi_3$, и при наблюдении подземной точки определяется радиоизлучение участка, следующего за подсолнечной точкой. В результате получим: $\cos(\Phi - \tilde{\varphi} - \varphi_1 - \xi_1)$. В случае прямого вращения (рис. 1б) $\varphi_C < \varphi_3$; считая Φ положительной величиной, получим: $\cos(\Phi + \tilde{\varphi} + \varphi_1 + \xi_1)$. Отбрасывая в (4) высшие гармоники, в результате будем иметь

$$T_e(\tilde{\varphi}, \psi, \Phi) = [1 - R(r)] \left\{ T_0(\psi) + T_1(\psi) \frac{\cos[\Phi \pm (\tilde{\varphi} + \varphi_1 + \xi_1)]}{\sqrt{1 + 2\delta_1 \cos r' + 2\delta_1^2 \cos^2 r'}} \right\} \quad (5)$$

$$(-\pi/2 \leq \tilde{\varphi} \leq \pi/2),$$

где знак «+» нужно брать для прямого, а «—» для обратного вращения Венеры*. Здесь $\delta_1 = l_s/l_T$, причем $l_T = \sqrt{2k_B c \Omega_C}$, $\cos r = \cos \psi \cos \tilde{\varphi}$. На рис. 1 пунктирной линией показаны положения максимума и минимума радиотемпературы, отстающих на некоторый угол $\xi_1 + \varphi_1$ от угла φ_C Солнца. Как видно из рис 1а, при обратном вращении минимум радиоизлучения будет наблюдаться при фазе $\Phi = \pi + \xi_1 + \varphi_1$, а для прямого вращения — при $\Phi = \pi - \xi_1 - \varphi_1$, что соответствует формуле (5). Выражение (5) справедливо при наблюдении Венеры, Луны или Марса с Земли, также с их спутников (искусственных или естественных). При этом Φ — фазовый угол планеты при наблюдении с соответствующего спутника. Фазовый угол планеты, если наблюдатель находится на Земле, обычно дается в таблицах.

С Земли в настоящее время принимается только интегральное радиоизлучение, поэтому для сопоставления с экспериментом необходимо найти среднюю по диску радиотемпературу. Она будет равна

$$\bar{T}_e = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} T_e(\tilde{\varphi}, \psi, \Phi) \cos^2 \psi \cos \tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} d\psi. \quad (6)$$

Для вычисления интеграла необходимо принять определенное распределение свойств вещества по поверхности планеты. Мы предположим, что водные поверхности значительных размеров отсутствуют и свойства вещества суши примерно однородны. Принимая, как и для Луны, идею выражения интегрального излучения через яркостную температуру центра диска, можем написать, согласно [4],

$$\bar{T}_e = (1 - R_\perp) \left\{ \beta_0 T_0(0) + \frac{T(0)\beta_1}{\sqrt{1 + 2\delta_1 + 2\delta_1^2}} \cos(\Phi \pm \xi_1 \pm \varphi_1 - \beta) \right\}; \quad (7)$$

* Связь направления вращения Венеры и знака сдвига фазы радиоизлучения указывалась Саломоновичем и Кузьминым [12].

здесь β_0 и β_1 — некоторые меньшие, но близкие к единице коэффициенты усреднения, β — дополнительный сдвиг фазы интегрального излучения и $R_\perp = \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right)^2$ — коэффициент отражения для перпендикулярного падения излучения. Величина β_0 зависит только от ϵ и для $2 \leq \epsilon \leq 6$ равна $\beta_0 = 0,92$. Коэффициент β_1 зависит, кроме ϵ , еще от δ . Для указанного выше интервала ϵ при любых δ $0,71 \leq \beta_1 \leq 0,8$. Поскольку, как увидим ниже, для Венеры $\epsilon \approx 4$, то с ошибкой порядка процента можно положить для всех δ $\beta_1 = 0,73$. Максимальное значение β для $\epsilon \geq 3$ при всех δ не превосходит 1° .

В заключение этого раздела заметим, что если ось вращения Венеры лежит в плоскости орбиты, то, как нетрудно убедиться, никакого сдвига максимума или минимума радиоизлучения относительно оптической фазы не будет, а интенсивность интегрального излучения будет зависеть не только от фазы Φ , но еще и от угла, составленного осью вращения с направлением на Солнце, который изменяется со временем.

Заметим, что формула (7) также описывает изменение со временем радиоизлучения Марса; однако для наблюдателя с Земли фазовый угол Φ будет меняться в ограниченных пределах. При наблюдении со спутника Марса этих ограничений, естественно, не существует.

2. СРАВНЕНИЕ С ОПЫТОМ ДЛЯ ВЕНЕРЫ. НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ

Обратимся сначала к локационным данным, которые показали, что на дециметровых волнах [5] коэффициент отражения от поверхности Венеры при перпендикулярном падении $R \approx 0,1$. Эта величина весьма близка к значению R для Земли и указывает, что вещество Венеры на поверхности находится в достаточно плотном состоянии. Если поверхность достаточно гладкая, то из соотношения $R_\perp = \left(\frac{\sqrt{\epsilon} - 1}{\sqrt{\epsilon} + 1} \right)^2$ получаем диэлектрическую постоянную вещества Венеры

$$\epsilon \approx 4.$$

Если теперь предположить, что поверхностное вещество Венеры состоит, как и на Земле, из силикатных пород, то, согласно работе [6], значению $\epsilon \approx 4$ соответствует плотность пород

$$\rho = (\sqrt{\epsilon} - 1)/0,5 \approx 2 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Экспериментальные результаты исследования радиоизлучения Венеры свидетельствуют о том, что уже на волне 3,2 см излучение определяется, по-видимому, твердой поверхностью планеты. В настоящее время измерен фазовый ход радиоизлучения на волнах 3,15 см и 10 см. По данным, приведенным в работе [7], фазовый ход аппроксимируется выражениями

$$T_e = 621^\circ + 73^\circ \cos(\Phi - 11,7^\circ) \quad (\lambda = 3,15 \text{ см}); \quad (8)$$

$$T_e = 622^\circ + 39^\circ \cos(\Phi - 17^\circ) \quad (\lambda = 10 \text{ см}).$$

Наличие фазовой зависимости указывает на то, что ось вращения Венеры достаточно удалена от плоскости ее орбиты. Последнее делает возможным сравнение (8) с изложенной выше теорией. При этом необходимо определить величину δ , характеризующую породу, физическое состояние вещества планеты и длительность солнечных суток. Как и для Луны, величина δ может быть определена по значениям амплитуд или по сдвигу фаз. Поскольку точность измерения относительных величин амплитуд

(относительно постоянной составляющей) больше, чем абсолютных значений фаз отставания, то целесообразно для таких целей использовать величину $M(\lambda)$, равную отношению постоянной составляющей к переменной.

Мы предположим, что для вещества Венеры, как и для всех силикатных диэлектриков, $\delta = \alpha\lambda$ [9]. Для Венеры, согласно (8), $M(3) = 621/73 = 8,5$ и $M(10) = 622/39 = 16$. Приравнивая отношение этих величин теоретическому значению отношения, определяемому из выражения (7), получим

$$\frac{16}{8,5} = \frac{\sqrt{1 + 2a\lambda_2 + 2a^2\lambda_2^2}}{\sqrt{1 + 2a\lambda_1 + 2a^2\lambda_1^2}},$$

где $\lambda_1 = 3,2 \text{ см}$, $\lambda_2 = 10 \text{ см}$. Отсюда находим, что $a = 0,14$ и для Венеры

$$\delta = 0,14\lambda. \quad (9)$$

Сопоставляя теоретическое значение для эффективной температуры радиоизлучения с экспериментальными, например, для волны 3,15 см, получим соотношение

$$\frac{(1 - R)T_1\beta_1}{\sqrt{1 + 2\delta_1 + 2\delta_1^2}} = 73.$$

Отсюда при $\delta_1 = 0,14 \times 3,15 = 0,45$; $1 - R = 0,9$ и $\beta_1 = 0,73$ получим

$$T_1 \approx 160^\circ\text{K}.$$

Тот же результат можно получить, построив прямую $M(\lambda)$. Экстраполяция к $\lambda \rightarrow 0$ дает, как известно [9], значение величины $M(0) = T_0\beta_0/T_1\beta_1$, которая оказывается равной 5,2, и $T_1 \approx 621 \times 1,25/5,2 = 150^\circ$. Столь высокая амплитуда колебаний температуры поверхности Венеры от дня к ночи может указывать на достаточную медленность ее вращения относительно Солнца.

Для найденной величины δ отставание по фазе должно быть соответственно $\xi_{3,15} = 18^\circ$ для волны 3,15 см и $\xi_{10} = 35^\circ$ для волны 10 см. Поскольку экспериментальное значение отставания включает в себя фазу φ_1 , которая на основании расчетов теплового режима Луны [8] зависит от величины $\gamma = (k\rho c)^{-1/2}$ и неизвестна, сравнение фазовых углов с теорией затруднено. Можно, однако, сказать с уверенностью, что отставание максимума радиоизлучения по фазе, найденное на двух волнах, однозначно указывает, что собственное вращение Венеры обратное.

Заметим, что δ для Венеры почти в 15 раз меньше, чем для Луны. Это хорошо согласуется с оценкой плотности из локационных данных. В самом деле, так как плотность вещества Венеры в 4 раза больше плотности вещества Луны, то глубина проникания электромагнитной волны будет в $7 \div 8$ раз меньше, чем у Луны. Между тем глубина проникания тепловой волны может изменяться незначительно. Их отношение будет соответственно уменьшено, что и наблюдается. Величина δ определяется отношением величин l_s/l_T , которые соответственно равны

$$l_s = \frac{\lambda}{2\pi(\operatorname{tg}\Delta/\rho)\rho V_\varepsilon}, \quad l_T = \sqrt{\frac{2k}{\rho c \Omega_C}}. \quad (10)$$

Их отношение, найденное выше экспериментально, содержит, вообще говоря, три неизвестных величины: удельный угол потерь $\operatorname{tg}\Delta/\rho$, k и Ω_C . Однако неизвестна лишь Ω_C ; первые две величины и теплоемкость c могут быть оценены для силикатных пород в довольно узких пределах.

Значение $\operatorname{tg} \Delta/\rho$ для различных пород испытывает большие вариации, среднее значение для земных поверхностных пород, близких к глинам, граниту, равно $0,01 \pm 0,005$ [6]. Принимая это значение, а также и то, что для силикатных пород $c = 0,2$, получим для волны $\lambda = 3,15 \text{ см}$ $l_s = 12 \pm 6 \text{ см}$ (для Луны, как известно [9], $\operatorname{tg} \Delta/\rho = 0,005$, $\rho = 0,5$ и на этой же волне $l_s \simeq 150 \text{ см}$). Отсюда и из найденного значения $\delta = 0,45$ получается $l_T = l_s/\delta \simeq 27 \text{ см}$ (для Луны $l_T = 25 \text{ см}$ [10]). Зная эту величину, нетрудно найти из соотношения (9) длительность солнечных суток, если известно k . Так, согласно [11], при наличии атмосферы величина $k = \alpha \rho$, причем $\alpha = 0,5610^{-3}$ и $k \simeq 1,1 \cdot 10^{-3}$ CGS. Заметим, что среднее значение k для плотных слоев земной коры равняется $4 \cdot 10^{-3}$ CGS. Учитывая высокую плотность атмосферы Венеры, для теплопроводности верхнего покрова, по-видимому, нужно принять $k \simeq 3,10^{-3}$ CGS. Из этих данных и (9) получаем, что солнечные сутки Венеры $t_C \sim 3$ земным суткам. С учетом интервала неточности длительность суток Венеры заключена, по-видимому, в пределах $t_C = 2 \div 10$ земных суток. Локационные данные также говорят о медленном вращении Венеры. Более точные выводы о природе поверхности Венеры и периоде вращения могут быть получены при измерении фазового хода ее радиоизлучения в достаточно широком диапазоне волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Келлог и К. Саган, Атмосфера Марса и Венеры, ИЛ, М., 1962.
2. Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, В. Г. Кутузов, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1054 (1963).
3. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 511 (1954).
4. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 6, 1087 (1963).
5. W. K. Vistorg, Publ. Astr. Soc. Pacific, 73, 434 (1961).
6. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 5, 1057 (1962).
7. F. D. Drake, Publ. Nat. Radio Astron. Obs., 1, № 11, 165 (1962).
8. В. Д. Кротиков, О. Б. Щуко, Астрон. ж., 40, 297 (1963).
9. В. С. Троицкий, Новое о Луне, изд. АН СССР, 1963; Изв. Комиссии по физ. планет, № 3, 1961; Астрон. ж., 39, 73 (1962).
10. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, 81, 588 (1963).
11. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 5, 885 (1962).
12. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 37, 297 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 июля 1963 г.

TO THE THEORY OF RADIOEMISSION OF VENUS AND MARS

V. S. Troitskii

Phase variation of Venus and Mars surface radiation has been considered assuming the existence of the periodical temperature surface regime. Using the experimental data of the phase variation of Venus radiation and location data of reflection coefficient the Venus rotation period is evaluated to be about 2–10 days at the reversal rotation.

ШИРОКОПОЛОСНЫЙ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТР С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ УПРАВЛЕНИЕМ ДИАГРАММОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ*

*Л. Л. Базелян, Ю. М. Брук, И. Н. Жук, А. В. Мень,
Л. Г. Софин, Н. К. Шарыкин*

Описывается широкополосный (20 ± 40 мгц) радиоинтерферометр с базой 470 м, ориентированной вдоль линии восток—запад. Интерферометр состоит из двух 128-вibratorных плоских решеток с дистанционным дискретным электрическим управлением диаграммами направленности в междиаграммальной плоскости (в секторе $\pm 90^\circ$). Приводится электрическая схема установки и данные измерений.

Для решения ряда астрономических задач, таких как определение спектрального состава радиоизлучения дискретных источников, фона и их тонкой структуры, нужны радиотелескопы, обладающие значительной эффективной площадью и высокой разрешающей способностью в широком диапазоне частот и с управляемой в большом секторе обзора диаграммой направленности. Описываемый ниже интерферометр позволяет исследовать радиоизлучение дискретных источников и космического фона в северном полушарии небесной сферы путем сканирования диаграммой направленности в секторе $\pm 90^\circ$ по углу места и с использованием вращения Земли. Его блок-схема с указанием всех геометрических размеров приведена на рис. 1. В основу выполнения обеих антенн были положены идентичные принципы; однако далее подробно рассматривается западная антenna, так как она существенно отличается от восточной значительно более сложной системой управления диаграммой направленности.

На рис. 2 приведен общий вид западной антенны.

1. ПРИНЦИПЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛУЧОМ И СУММИРОВАНИЯ СИГНАЛОВ

Основным при разработке электрически управляемой многоэлементной антенны является выбор способа изменения положения луча и суммирования сигналов от элементарных антенн. Для ориентации луча под углом θ с нормалью к оси антенны необходимо перед суммированием ввести в каждый элемент временную задержку

$$\tau_n = d \frac{n-1}{c} \sin \theta \quad (1)$$

* Результаты этой работы доложены на Всесоюзной конференции по радиоастрономии (Горький, 28 Н 1963)

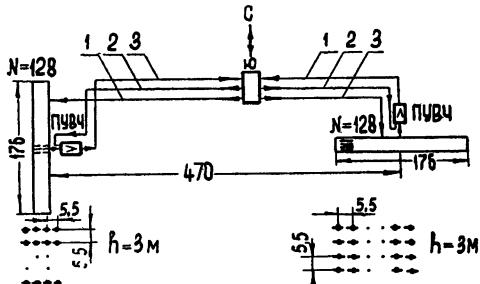


Рис. 1. Блок-схема интерферометра:
1 - сигнал, 2 - калибровка, 3 - управление диаграммой.

или фазовый сдвиг

$$\varphi_n = \frac{2\pi d}{\lambda} (n - 1) \sin \theta, \quad (1a)$$

где n — номер элемента, d — расстояние между элементами. Из (1) и (1a) видно, что в первом способе отсутствует зависимость θ от частоты, благодаря чему он предпочтительнее в диапазонных системах.

Существенным для многоэлементных антенн является также метод

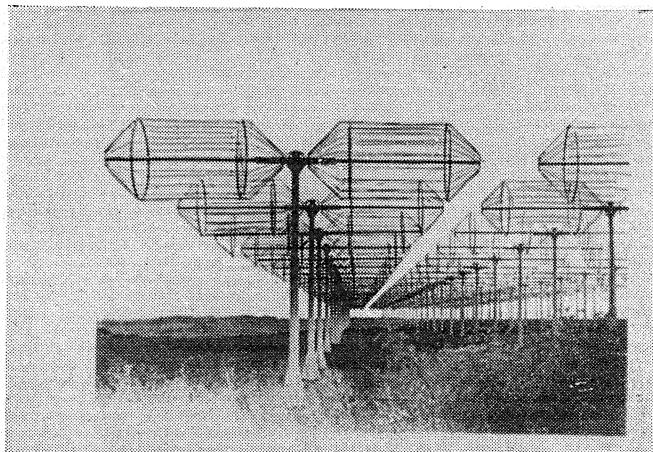


Рис. 2.

дика суммирования сигналов. Известны три основных способа суммирования сигналов: 1) последовательный (рис. 3а), 2) параллельный (рис. 3б), 3) этажно-параллельный (рис. 3в).

Первый способ весьма неудобен, так как приводит к затруднениям

с согласованием периодически нагружаемого коммуникационного фидера и требует для каждого излучателя неидентичных фазовращателей. Второй способ требует больших длин коммуникационных фидеров. Третий способ в значительной степени лишен недостатков предыдущих двух и поэтому был использован в разработанных антенах. Можно показать, что наиболее

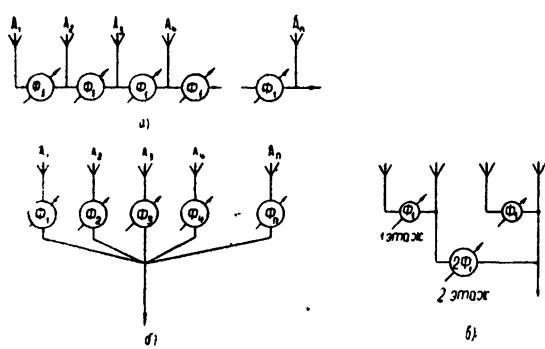


Рис. 3.

экономичным является случай суммирования сигналов от двух соседних элементов в первом этаже, от двух соседних пар во втором этаже и т. д. (двоичное суммирование).

Изменение положения луча, как показано в [1], можно производить дискретно через интервалы, равные полуширине главного лепестка диаграммы направленности (по нулям). Однако, при изучении радиоизлучения дискретного источника это потребовало бы записи его сигнала, по меньшей мере, при двух положениях диаграммы направленности

ности. Если заранее известны координаты источника, удобнее сразу же ориентировать диаграмму антенн в его направлении. Ошибка ориентации при этом должна определяться допустимой ошибкой измерения плотности потока источника. В соответствии с этой ошибкой может быть выбрано минимально допустимое число положений луча.

Как следует из рис. 3в, при двоичном суммировании сигналов множитель решетки может быть записан в виде произведения парциальных диаграмм фазируемых пар:

$$F(U) = \prod_{k=1}^M (1 - e^{i2^{k-1}aU_k})^2, \quad (2)$$

где $a = 2\pi d/\lambda$, $U_k = U - U_{0k} = \cos \varepsilon - \cos \varepsilon_{0k} = \cos \varepsilon - \cos \varepsilon_0 + \Delta U_{0k}$ (ε —угол с плоскостью решетки, ε_0 —угол места главного максимума луча, ε_{0k} —угол фазирования каждой парциальной диаграммы), k —номер этажа, M —число этажей, $2^{k-1}a$ —расстояние в радианах между фазовыми центрами суммируемых элементов в k -ом этаже. Если в каждом этаже менять задержку через такие интервалы, чтобы $2^{k-1}\Delta U_{0k} = \text{const}$, где ΔU_{0k} —разность между направлениями фазирования k -го и M -го этажей (предполагается, что для малых ΔU_{0k} направление фазирования M -го этажа совпадает с направлением главного максимума диаграммы), ошибки из-за неточной фазировки во всех этажах будут одинаковыми.

Иначе говоря, число положений линий временной задержки, используемых для электрического управления диаграммой, должно быть максимальным в последнем этаже суммирования и может уменьшаться по мере приближения от выхода антенны к решетке. Число положений в каждом этапе может быть определено по формуле

$$\frac{\Delta D}{D_0} \simeq \sum_{k=1}^{M-1} \sin^2 2^{k-2}a\Delta U_{0k}. \quad (3)$$

Формула (3) учитывает снижение КНД в направлении главного максимума (2) из-за роста бокового излучения. Дополнительное падение КНД в направлениях, не совпадающих с направлением главного максимума и, в частности, максимальная потеря посередине между двумя соседними дискретными положениями луча легко определяется из (2):

$$\frac{\Delta D}{D_0} = \sin^2 2^{M-3}a\Delta U_{0M},$$

где $\Delta D/D_0$ —относительное уменьшение КНД, ΔU_{0k} —шаг дискретности k -го этажа.

Если $2^{k-1}\Delta U_{0k} = \text{const}$ для всех этажей, максимальное число дискретных положений n_k временной задержки (фазовых сдвигов) каждого этажа определяется по формуле

$$n_k = \frac{\cos \varepsilon_{\min} - \cos \varepsilon_{\max}}{2\Delta U_{0k}}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$ —сектор обзора.

Рассмотрим наиболее рациональный способ изменения величины временной задержки. Известно, что оптимальной с точки зрения количества требуемых элементов системой дискретного набора какой-либо величины является двоичная система. В соответствии с этим величина максимальной задержки разбивается на m отрезков (длины которых

изменяются по геометрической прогрессии со знаменателем 2), что дает возможность путем включения и выключения соответствующих отрезков получить $n_k = 2^{m_k}$ фиксированных положений множителя диаграммы k -го этажа в заданном секторе качания*.

Следует подчеркнуть, что с целью сведения до минимума числа управляющих элементов и длины коммуникаций вся антenna строится по единому двоичному принципу. Это относится и к способу суммирования сигналов, и к прогрессивному поэтажному изменению максимального числа положений временной задержки, и к способу изменения самой величины этой задержки. Есть основания полагать, что такой принцип построения однолучевых многоэлементных антенн является оптимальным.

2. СХЕМА АНТЕННЫ

Западная антenna интерферометра (рис. 4) построена в соответствии с изложенными выше соображениями. Поскольку качание производится только в меридиональной плоскости, в каждом из 32 рядов все 4 вибратора суммируются синфазно.

Система суммирования и управления диаграммой—трехэтажная. Первый этаж состоит из 16 идентичных фазовращателей, каждый из

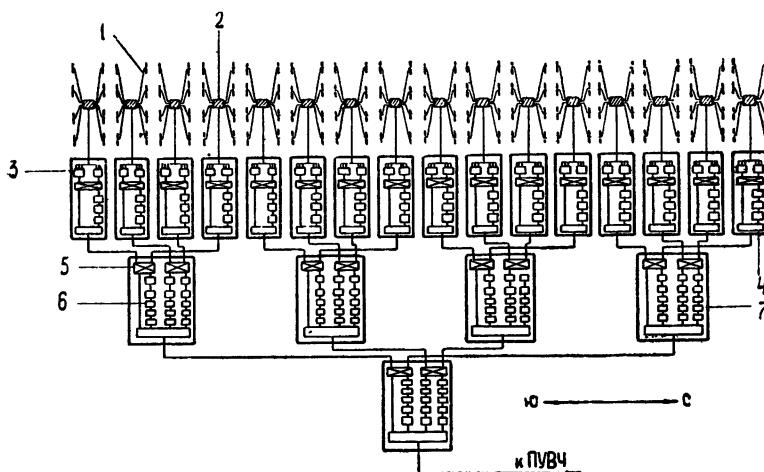


Рис. 4. Схема западной антенны интерферометра:

1—излучатель, 2—подземный коллектор, 3—сумматор на 4 элемента, 4—сумматор на 2 элемента, 5—квадрантный переключатель, 6—двоичная ячейка переключателя, 7—фазовращатель.

которых объединяет по два излучающих элемента** и имеет 16 положений в секторе $\pm 90^\circ$. Три ячейки дискретно-двоичной линии задержки обеспечивают по 8 положений диаграммы в каждом квадранте; четвертая меняет местами входы фазовращателя, что дает изменение квадранта, в котором происходит сканирование. Фазовращатели второго и третьего этажей объединяют по четыре выхода предыдущего этажа и имеют соответственно 32 и 128 положений в каждой из трех линий временной задержки, что в комбинации с переключающими ячейками обеспечивает 64 и 256 положений луча в секторе $\pm 90^\circ$. Максимальная

* В последнее время появились сообщения [2] о том, что аналогичный принцип был использован при построении многоэлементных антенн.

** Здесь под излучающим элементом подразумевается четырехэлементный ряд синфазно включенных излучателей.

потеря усиления антенны из-за дискретности движения луча на самой высокой частоте диапазона не превышает 7%.

Восточная антenna управляется одним фазовращателем на 32 положения, изменяющим временную задержку между четырьмя рядами антенн.

Согласованное суммирование сигналов в обеих антннах производится широкополосными ферритовыми автотрансформаторами. Отметим, что в некоторых этажах системы суммирование и фазирование проводится не для двух, а для четырех элементов. Это вызвано желанием уменьшить число сумматоров и фазовращателей, несмотря на некоторый проигрыш в длине коммуникаций и числе управляющих элементов.

В соответствии с двоичным принципом построения фазирующих элементов выполнена и схема управления ими. Все управляющие элементы (обмотки реле) одноименных разрядов фазовращателей во всех этажах антнна включены последовательно и управляются одним тумблером. По принятой в счетнорешающей технике терминологии, такая система называется системой параллельного действия, когда положение всех разрядов может изменяться одновременно, обеспечивая минимально возможное время управления, определяемое быстродействием одного переключающего элемента.

Максимальное число двоичных разрядов—8 в западной и 5 в восточной антннах. Антнны могут управляться синхронно или каждая отдельно. Выбор нужного положения луча производится путем набора на панели управления в двоичном коде величины $2^e \cos \epsilon_0$, где 2^e —полное число положений диаграммы в одном квадранте.

3. УПРАВЛЯЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В антнне используются фазовращатели двух видов: на два и четыре входа (см. рис. 5, 6). Отличие между ними заключается только в разном числе линий задержки и их электрической длине. В качестве линий задержки применяется коаксиальный кабель РК-6, обладающий существенными преимуществами перед искусственными линиями по всем показателям, за исключением габаритов (практически неограниченная полоса пропускания, эталонность свойств по длине, температуре и времени, малые потери). Переключение отрезков кабеля производится электромагнитными реле. Поскольку высокочастотный кабель можно считать идеальным в используемом диапазоне частот, качество фазовращателя определяется высокочастотными параметрами контактной системы реле.

Распределенные индуктивности и емкости контактной системы реле образуют отрезок линии с волновым сопротивлением порядка 80 ом. Понижение волнового сопротивления этой линии для согласования ее с кабелем РК-6 (52 ома) достигается за счет повышения распределенной емкости элементов, соединяющих ячейки реле в искусственную линию. При этом несколько понижается граничная частота искусственной линии. Для иллюстрации приведем основные данные такой линии, образованной 7 ячейками, при отключенных отрезках кабе-

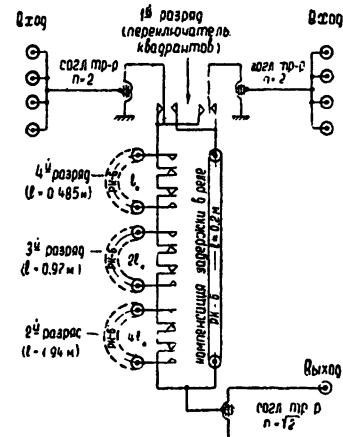


Рис. 5. Функциональная схема фазовращателя для двух элементов (1 ступень) на 16 положений в секторе $\pm 90^\circ$.

лей задержки. Максимальное отклонение фазовой характеристики от линейности в диапазоне 10—60 мгц менее $\pm 1^\circ$ при общем фазовом сдвиге порядка 180° (на частоте 60 мгц). Внутренний коэффициент отражения с учетом концевых эффектов—не более 0,025. Потери в полосе от 10 до 60 мгц равны $0,03 \div 0,13$ дБ.

Основной характеристикой двоичного фазовращателя является зависимость фазового сдвига коэффициента передачи от частоты и длины при согласованной нагрузке. Отклонение фазовой характеристики от расчетной линейной при изменении длины и частоты имеет, в основном, случайный характер, причем во всех фазовращателях ошибка слабо зависит от длины, числа разрядов и частоты, а ее величина в $6 \div 10$ раз меньше величины дискретности.

В таблице 1 приведены основные данные системы фазирования.

Таблица 1

Параметр	Этажи фазирования		
	I	II	III
Количество положений в секторе $\pm 90^\circ$	16	64	256
Дискретность по фазе на частоте 30 мгц	12,5	12,4	26,5
Диапазон частот	37,5; 25	37,2	24,8
Средний по частоте и длине КСВН	15—60	15—60	15—60
Среднеквадратичная ошибка одного фазовращателя	1,07	1,0	1,05
Дополнительная среднеквадратичная ошибка между фазовращателями данного этажа	1,7°	1,7°	2°
Полная среднеквадратичная ошибка системы фазирования	1,5°	1,5°	—
		3°	

Следует подчеркнуть, что в решетке фазовые ошибки могут быть значительно больше из-за рассогласования системы фазирования с излучателями; однако в данной работе этот вопрос не рассматривается.

4. ХАРАКТЕРИСТИКИ АНТЕННЫ

Основными параметрами, характеризующими антенну в целом, являются диаграмма направленности, КПД и КНД.

Диаграмма направленности. Диаграммы направленности обеих ан-

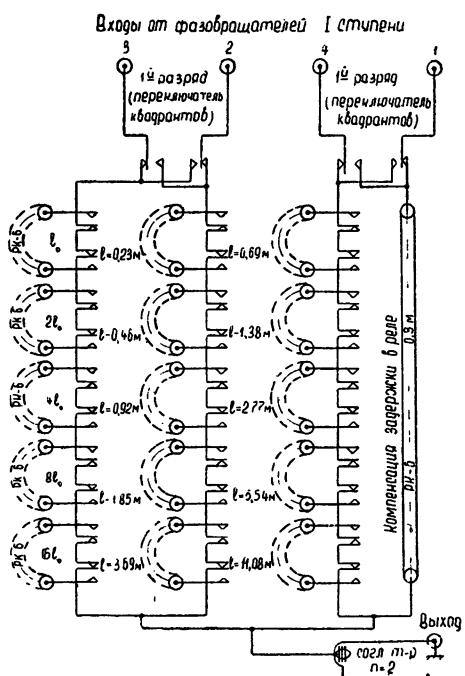


Рис. 6. Функциональная схема фазовращателя для четырех элементов (фазовращатель II ступени) на 64 положения.

тенн и радиоинтерферометра в целом определялись экспериментально на нескольких частотах путем обработки записей сигналов космических источников Кассиопея-А (98°), Лебедь-А (81°), Дева-А (53°) и Телец-А (62°). Сравнение расчетных диаграмм с экспериментальными показывает хорошее совпадение данных по ширине диаграммы, ориентировку ее максимума и уровню первого бокового лепестка. На рис. 7 проведено сопоставление расчетной диаграммы западной антенны с эксперимен-

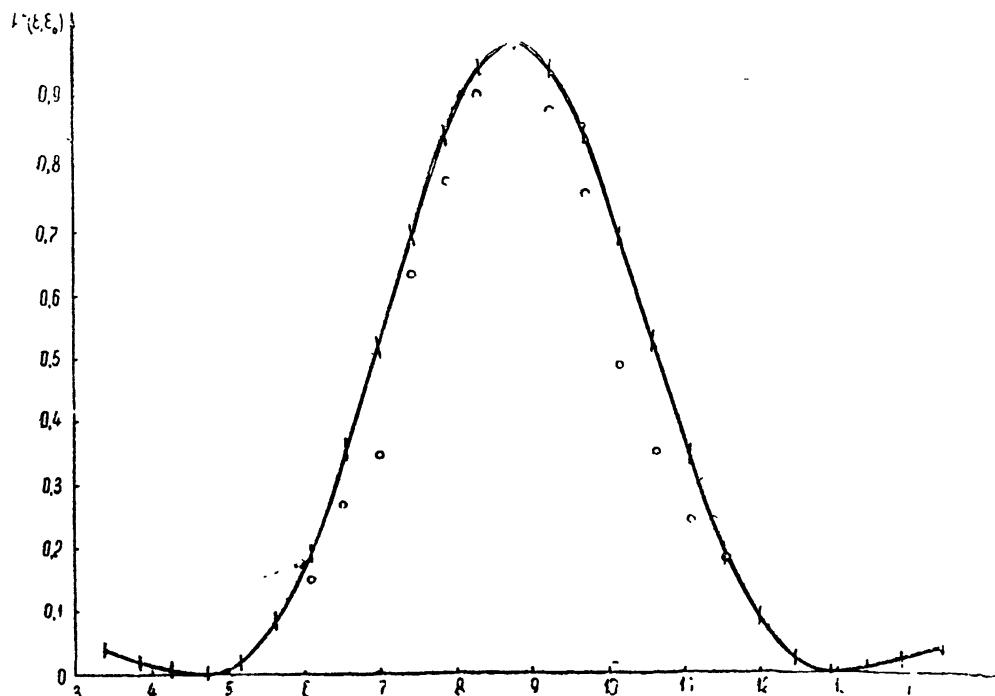


Рис. 7. Сравнение расчетной и экспериментальной диаграмм антенны С.-Ю. в меридиональной плоскости ($\epsilon_0 = 81^\circ 12'$ ($8^\circ 48'$), $f = 24$ мгц):
— расчетная диаграмма, $\circ\circ$ — эксперимент.

тальными значениями, полученными путем записи сигнала источника Кассиопея-А при отвороте диаграммы от направления на источник.

Эффективная площадь и КНД. В многоэлементных антенах точное определение КНД с учетом разброса фаз и амплитуд токов расчетным путем затруднительно. Вследствие этого было проведено его измерение путем сравнения сигналов на выходе исследуемой и эталонной антенн. В качестве последней использовался узкополосный двухвibratorный интерферометр; точность измерений при этом оценивается в $\pm 15\%$. Таким образом, можно прокалибровать усиление антенн для фиксированных значений углов наклона. КНД обеих антенн определен также и расчетным путем без учета разброса амплитуд и фаз токов (см. рис. 8).

Из измеренных описанным способом значений $A_e \eta$ (где η — КПД антennы) определялась A_e . При этом расхождение величины апертуры с расчетной достигает 1,5 раза при точности измерения КПД порядка 10%. Это связано с пренебрежением при расчете разброса фаз и амплитуд токов, вызванного как рассогласованиями, так и неидентичностью излучающих элементов.

В таблице 2 приведены данные о величине $A_e \eta$, измеренные с помощью Кассиопеи-А и рассчитанные, исходя из экспериментальных значений η и расчетных значений A_e .

Таблица 2

f мгц	20	25	32	38
$A_{e\eta}$ по Кассиопея-А M^2	1330	970	720	473
A_e расп. Эксп. M_2	1390	1060	880	720

КПД. Потери в антенне складываются из потерь в канализирующей системе (и системе фазирования), вибраторе и потерь в земле. Первая (основная составляющая потеря измерялась экспериментально по методике, описанной в [4], в секторе $\pm 90^\circ$ и в диапазоне частот $20 \div 40$ мгц. Некоторые данные о величине КПД обеих антенн показаны на рис. 9.

5. ВОЗМОЖНОСТИ АНТЕННОЙ СИСТЕМЫ

Описанный интерферометр предназначен, в основном, для измерения радиоизлучения дискретных источников. При этом большая величина базы позволяет легко отделить в интерференционных записях радиоизлучение источника от космического фона. Кроме того, антенны интерферометра могут быть использованы раздельно: восточная — как проходной инструмент, западная — с искусственным качанием луча по склонению. Используя западную antennу с искусственным качанием, можно получать за время прохождения источника через азимутальную диаграмму по 2 — 3 записи его с интервалами около $10 \div 20$ мин.

Интерференционная диаграмма обеспечивает разрешающую способность $1,6^\circ \div 0,8^\circ$ по прямому восхождению и $4^\circ \div 2^\circ$ по склонению на частотах $20 \div 40$ мгц.

Для исследования радиоизлучения космического фона целесообразно использовать антенны раздельно. При этом разрешающая способность составит для восточной антены $4^\circ \div 2^\circ$ по α и $34^\circ \div 17^\circ$ по δ , для западной антены $34^\circ \div 17^\circ$ по α и $4^\circ \div 2^\circ$ по δ на частотах $20 \div 40$ мгц.

Некоторым недостатком описанных антенн является большое расстояние между излучателями вдоль направления север—юг. Из-за этого на частотах выше 32 мгц при отклонении основного луча от зенита возможно появление побочного максимума диаграммы направленности. Интенсивность этого максимума сравнима с интенсивностью основного, что приводит к падению КНД при отклонении от зенита (см. кривую для $f = 39$ мгц на рис. 8) и затрудняет измерения космического фона на частотах выше 32 мгц при малых склонениях.

Весьма полезным свойством описанного интерферометра является его широколосность. Это позволяет вести одновременный прием сигналов на нескольких частотах и, кроме того, при появлении помех, вызванных радиостанциями, изменять частоту, не опасаясь уйти за пределы полосы пропускания.

Большие длины коммуникационных линий и некоторая неопределенность токов излучателей из-за рассогласования требует тщательной калибровки антенны при абсолютных измерениях радиоизлучения. Если при записях дискретных источников этого можно избежать, проводя измерения относительно некоторого известного источника, то при записях фона необходимо точно знать КПД антенны. Все это приводит к необходимости длительных и довольно сложных калибровочных измерений с антенной при пуске ее в эксплуатацию. Однако большие возможности описанного интерферометра, пригодность его для различных измерений в широком диапазоне частот с большим количеством одновременно работающих радиометров вполне оправдывают затраты времени и труда на калибровку.

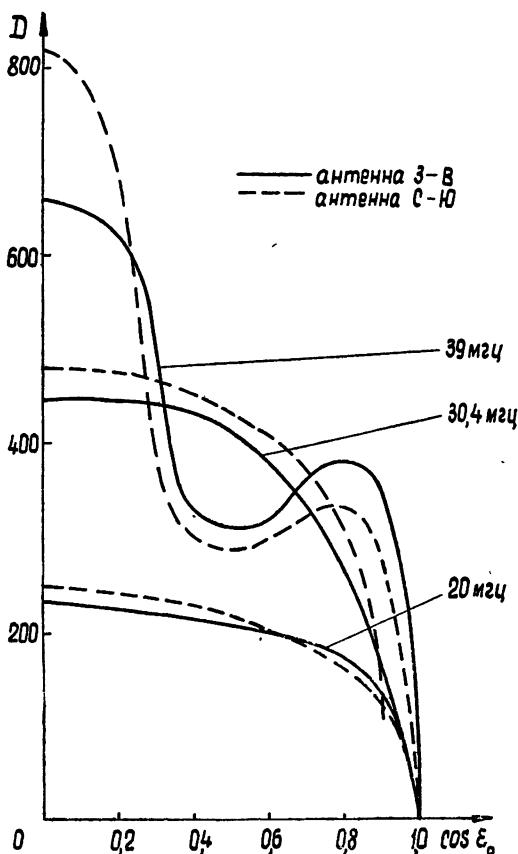


Рис. 8.

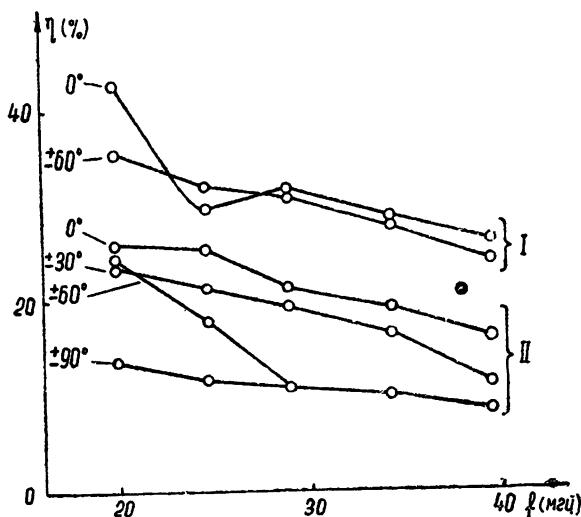


Рис. 9. Зависимость η от f , кривые I—антенны В.-З.;
кривые II—антенны С.-Ю.:
—○—○—○— эксперимент для антенны В.-З., ●—предварительные
данные по температуре космического фона [3] при $\theta = \pm 10^\circ$ для антенн В.-З.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. N. Bracewell and J. A. Roberts, *Austr. J. Phys.*, **7**, 615 (1954).
2. W. G. Abel, I. H. Chimsholm, P. L. Fleck and I. C. James, *IRE Int. Conv. Record*, **5**, 58 (1962).
3. A. J. Turtle, J. F. Pugh, S. Kenderdine and I. I. K. Pauliny-Toth, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, **124**, 1962.
4. Ю. М. Брук, А. В. Мень, Л. Л. Базелян, ПТЭ (в печати).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 апреля 1963 г.

WIDE-BAND RADIOINTERFEROMETER WITH ELECTRIC CONTROL
OF ANTENNA PATTERN.

*L. L. Baselyan, Yu. M. Brouk, I. N. Zhuk, A. V. Men', L. G. Sodin,
N. K. Sharykin*

Wide-band (20—40 mpc) interferometer with 470 m spacing in the east-west direction is described. The interferometer consists of two plane arrays each of 128 vibrators with the distance discrete electric control of antenna pattern in a meridional plane (in the sector $\pm 90^\circ$). The electric circuit of the system and measurements data are given.

ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ТУРБУЛЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕТОДОМ РАДИОЛОКАЦИИ МЕТЕОРНЫХ СЛЕДОВ

И. А. Делов, М. Ф. Лагутин, И. А. Лысенко

Приводятся результаты экспериментальных исследований турбулентных движений в метеорной зоне методом радиолокации метеорных следов. Оценены величины основных статистических параметров, характеризующих турбулентное движение. Исследованы суточные вариации некоторых параметров.

В настоящее время считается, что нерегулярные движения в верхней атмосфере на высотах порядка 85–110 км возникают вследствие турбулизации ламинарных воздушных потоков, порождаемых действием сил гидродинамического происхождения. Наиболее полные, систематические данные о характере турбулентного движения в метеорной зоне даёт метод радиолокации метеорных следов. Он применён для исследований турбулентного движения в 1959 г. в Англии [1–3]; аналогичные исследования выполнены в Харьковском политехническом институте (1959–60 гг.) [4].

В наших опытах для изучения как турбулентных, так и регулярных движений был использован импульсно-когерентный метод радиолокации метеорных следов. Применявшаяся аппаратура описана подробно в работе [5]. Основные параметры этой аппаратуры таковы: рабочая длина волны 8,13 м, импульсная мощность передатчика 75 квт, частота следования импульсов 500 гц, длительность импульса 10 мксек, чувствительность приемника $1 \cdot 10^{-13}$ вт.

Как будет ясно из дальнейшего, для определения некоторых параметров турбулентного движения методом радиолокации метеорных следов необходимы одновременные измерения скоростей дрейфа двух близких участков одного и того же метеорного следа. Кроме того, нужно знать разность высот Δh этих участков и расстояние γ между ними вдоль следа. Величины Δh и γ могут быть рассчитаны, если известны радиант и скорость метеора. Радианты метеоров определялись по фотографиям импульсно-дифракционных картин, фиксируемых в трех разнесенных пунктах. Образцы фотозаписи, по которым определялись данные, требуемые для расчетов радиантов метеоров, а также для исследований регулярных и нерегулярных движений, приведены на рис. 1.

На приемно-ретранслирующую аппаратуру одного из вынесенных пунктов, находящегося на расстоянии около 4,5 км от основного пункта (пункт «сбора информации»), было распространено условие когерентности, что обеспечило получение данных для исследований турбулентных движений. Когерентность аппаратуры выносного пункта достигалась за счет передачи в этот пункт опорного сигнала частоты 2 мгц (с помощью УКВ передатчика с амплитудной модуляцией). Сигналы этого передатчика принимались в выносном пункте специальным приемником супергетеродинного типа. Колебания частоты 2 мгц, снимаемые с выхода приемника, умножались до 16 мгц и в таком виде исполь-

зовались в качестве гетеродинного напряжения приемно-ретранслирующей аппаратуры выносного пункта.

В основном пункте из сигналов частоты 2 мгц формировались напряжения гетеродинов приемников, служащих для приема ретранслированных из вынесенных пунктов метеорных эхо, а также приемника, непосредственно принимающего отраженные сигналы.

Основное достоинство предлагаемой системы привязки фазы аппа-

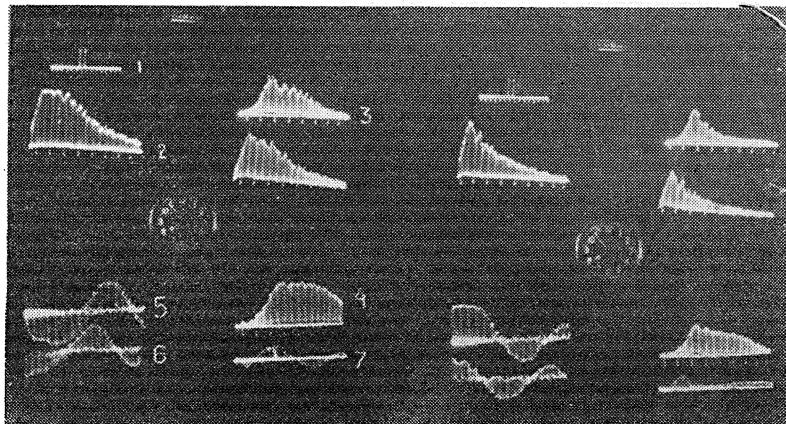


Рис. 1. Образцы фотозаписей метеорных эхо:

1—записи, по которым определяется дальность до метеора; 2, 3, 4—записи дифракционных картин, используемых для расчетов радиантов и скоростей метеоров; 5, 6, 7—записи дрейфовых картин, с помощью которых исследуются регулярные и нерегулярные движения; 7—запись дрейфовой картины, зарегистрированной в выносном пункте.

ратуры вынесенного пункта состоит в том, что канал передачи опорного напряжения и ретранслирующая аппаратура работает в УКВ диапазоне, свободном от помех, присущих коротковолновому диапазону, который был использован для подобных целей авторами работ [2,3]. Кроме того, рассмотренный метод выгодно отличается от описанного в [2,3] еще и тем, что позволяет распространить условия когерентности одновременно на несколько приемно-ретранслирующих станций. Последнее особенно важно при изучении тонкой структуры ветрового поля в метеорной зоне.

Как показывают данные радиолокационных исследований дрейфов метеорных следов [3], турбулентные движения в метеорной зоне крайне анизотропны. Так как теория анизотропной турбулентности в настоящее время еще окончательно не разработана, в работе для анализа нерегулярных движений применяются выводы теории однородной изотропной турбулентности.

Статистические параметры однородного турбулентного движения, согласно Колмогорову и Обухову [6,7], могут быть оценены, исходя из соображений размерности. Одними из основных параметров, характеризующих турбулентное движение, являются, как известно, скорость поступления энергии ε со стороны внешних источников, пульсационная скорость U крупномасштабных вихрей, их характерный размер L , время распада крупномасштабных вихрей T , пульсационная скорость вихрей интервала диссипации энергии U_l , характерный размер этих вихрей l и время их жизни t_l , градиент скорости турбулентных движений.

Порядки величин параметров U , L , T были оценены путем соответствующей обработки большого статистического материала, полученного

нами при исследованиях дрейфов метеорных следов в одном пункте [8]. Для этой цели применялась методика, описанная в работах [2,3].

Значения пульсационной скорости определялись в течение нескольких месяцев наблюдений для различного времени суток. Получены значения $U \simeq 18 \div 28 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ в ночное время и $U \simeq 30 \div 36 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ в дневное время. Среднесуточная величина $U \simeq 28 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$. Характерное время распада крупных вихрей определялось как интервал времени, в течение которого автокорреляционная функция

$$f(\tau) = \frac{\sum U_t \sum U_{t+\tau}}{(\sum U_t^2 \sum U_{t+\tau}^2)^{1/2}},$$

вычисленная для фиксированной точки ветрового поля, убывает до нуля. (В выражении для $f(\tau)$ U_t и $U_{t+\tau}$ — горизонтальные составляющие пульсационной скорости, измеренные в моменты времени t и $t + \tau$.) Так как диаграмма направленности антенн освещает участок метеорной зоны, соизмеримый с масштабом крупных вихрей (ширина диаграммы направленности в нашем случае составила 35° на уровне 3 дБ), для корреляционного анализа были отобраны данные о скоростях ветра, относящиеся к области, существенно меньшей размера крупномасштабных вихрей. В качестве предварительного был 'выбран' размер $L \simeq 150 \div 200 \text{ км}$ [3]. Для анализа использовались записи метеорных эхо, принятых с расстояний $R = 135 \div 170 \text{ км}$. Автокорреляционная функция рассчитывалась по усредненным за 20-минутные интервалы значениям пульсационных скоростей для выбранного диапазона величин R .

Необходимый для расчета порядка величины T статистический материал был получен 18—20 апреля 1960 г. За двое суток наблюдений было зарегистрировано 6500 единичных значений скоростей дрейфа метеорных следов. Автокорреляционная функция вычислялась для двух 24-часовых и одного 48-часового интервалов. Найденное значение величины T составляет около 110 минут. По определенным значениям U и T был подсчитан порядок величины горизонтального размера крупных вихрей $L \sim 180 \text{ км}$.

Значение T , определяемое по рассматриваемой методике, может быть найдено более уверенно в случае применения остронаправленных антенн и более жестких требований к селекции наблюдательных данных по наклонным дальностям. Кроме того, желательно селектировать данные о дрейфах по высотам отражающих областей метеорных следов.

В ряде работ (см., например, [9]) высказывается мнение о том, что в метеорной зоне существует инерционная подобласть масштабов турбулентного движения. Поскольку, как отмечалось выше, турбулентность в метеорной зоне анизотропна, порядок величины ϵ целесообразно искать, исходя из особенностей движения в инерционной подобласти масштабов. Движение в этой подобласти подчиняется закону Колмогорова—Обухова [6,7], устанавливающего корреляцию между продольными компонентами пульсационных скоростей U_η двух точек ветрового поля, отстоящих друг от друга на некотором расстоянии η :

$$U_\eta = (\epsilon \eta)^{1/3}. \quad (1)$$

При этом числа Рейнольдса должны быть настолько большими, чтобы удовлетворялось неравенство $L \gg \eta \gg l$.

Метод радиолокации метеорных следов дает возможность получать сведения о поперечных компонентах пульсационных скоростей, так как при этом измеряются радиальные составляющие скоростей дрейфа.

Связь между поперечными и продольными компонентами пульсационных скоростей может быть установлена с помощью структурных функций [10, 11]. Применяя структурные функции, из равенства (1) можно получить выражение для ϵ следующего вида:

$$\epsilon = 0,65 U_r^3 / \eta \quad (2)$$

с точностью до коэффициента, который, согласно [11], близок к единице. В последнем уравнении U_r — среднеквадратичное значение радиальной составляющей пульсационной скорости. Наша аппаратура позволяет получать данные, необходимые для расчета величины ϵ в соответствии с выражением (2). Значения η находились по определяемым из фотографий метеорных эхо величинам скоростей метеоров V и временам запаздывания дифракционных картин Δt , фиксируемых в обоих когерентных пунктах:

$$\eta = V \Delta t \quad (3)$$

(см. рис. 2).

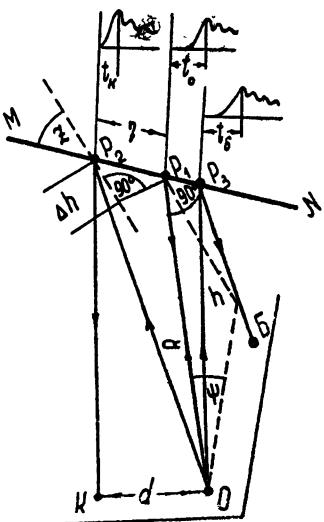
Справедливость выражения (2) для случая турбулентного движения в метеорной зоне была проверена с помощью экспериментальных данных, полученных в августе 1959 г. [4]. В этот период было зарегистрировано свыше 300 метеорных эхо, для которых удалось измерить одновременно скорости дрейфа двух участков метеорных следов и величины η . Эти данные были разделены на 4 группы по значениям η . Для каждой группы вычислялись средние значения величины $\bar{\eta}$ и \bar{U}_r . Построенная по этим данным зависимость $\bar{U}_r = f(\bar{\eta})$ удовлетворительно описывается соотношением (2).

При вычислениях ϵ были отобраны такие отражения от метеорных следов, для которых величины η удовлетворяли неравенствам $L \gg \eta \gg l$. Выбор нижнего предела значений η обусловлен особенностями отражений радиоволн от метеорных следов. Известно, что основной вклад в образование метеорного эха вносит область следа, имеющая размеры порядка зоны Френеля. При нахождении требуемого для вычисления ϵ отличия в скоростях движения двух различных точек метеорного следа необходимо, очевидно, чтобы зоны Френеля, формирующиеся около этих точек, не перекрывались. Отсюда следует, что величины η должны быть не меньше зоны Френеля, размеры которой в нашем случае со-

Рис. 2. Схема расположения основного и выносных пунктов и геометрия отражения радиоволн от метеорного следа MN . Когерентной является аппаратура, находящаяся в пунктах "О" и "К" (расстояние между ними 4,5 км); P_1 , P_2 , P_3 — точки на метеорном следе, в которых выполняются условия "зеркальности" для пунктов наблюдения О, К, Б соответственно.

ставляют примерно 1 км. Таким образом, принимая в качестве предварительного значения $l \sim 10$ м [2, 3], можно считать, что условие $\eta \gg l$ всегда выполняется. Неравенство $L \gg \eta$ также выполняется, поскольку при расстоянии в 4,5 км между когерентными пунктами $\eta_{\max} \approx 2$ км, а $L \sim 180$ км.

Порядок величины энергии турбулентного движения был определен



отдельно для ночных и дневного времени суток: $\varepsilon \approx 1200 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$ для ночи и $\varepsilon \approx 3200 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$ для дневного времени.

Были также рассчитаны величины l , U_l , t_l , которые определялись из выражений $l \sim \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{1/4}$; $U_l \sim (\delta\varepsilon)^{1/4}$; $t_l \sim \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{1/2}$.

Для расчетов принималось среднее между дневным и ночных значение $\varepsilon \approx 2200 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-3}$; величина δ для средней высоты метеорной зоны $h = 95 \text{ км}$, найденной на основании полученных нами экспериментальных данных [8], была взята из [12]: $\delta = 1 \cdot 10^5 \text{ см}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$.

Расчеты дали следующие результаты: $l \sim 9 \text{ м}$, $U_l \sim 1,2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$, $t_l \sim 9 \text{ сек}$.

Опыт показывает, что скорости ветра в метеорной зоне, измеренные в областях, разнесенных по высоте на несколько км, иногда отличаются на десятки $\text{м} \cdot \text{сек}^{-1}$. Последнее обстоятельство обусловлено наличием градиентов турбулентного ветра. Для их вычислений определялись величины ΔU_l , равные разности горизонтальных составляющих пульсационных скоростей, измеренных в обоих когерентных пунктах, и расстояния по вертикали Δh между двумя отражающими областями метеорных следов. Величины Δh находились из выражения

$$\Delta h = \eta \cos z, \quad (4)$$

где z — зенитный угол радианта метеора (см. рис. 2).

На рис. 3. приведена гистограмма распределения величин $\Delta U_l / \Delta h$. Найденная в соответствии с этим распределением средняя величина градиента турбулентного ветра равна $8,5 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{км}^{-1}$. Как видно из рис. 3, величины $\Delta U_l / \Delta h > 36 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{км}^{-1}$ встречаются редко (примерно в $5 \div 7\%$ случаев).

Были исследованы суточные вариации величин $\Delta U_l / \Delta h$. Требуемые для этого статистические данные были получены в сентябре—октябре 1960 г. В эти месяцы было зарегистрировано свыше 4000 отражений, для которых удалось измерить скорости дрейфа одновременно двух участков метеорных следов. По этим данным находились среднечасовые значения разностей пульсационных скоростей $\bar{\Delta}U_l$, которые относились к средним величинам $\bar{\Delta}h$. Среднее значение $\bar{\Delta}h = 0,7 \text{ км}$ было найдено по результатам измерений, проведенных в августе 1959 г. Результаты этих измерений иллюстрируются рис. 4. О суточных вариациях величин $\Delta U_l / \Delta h$ можно судить по данным, приведенным на рис. 5. Для ночных часов $\Delta U_l / \Delta h = 7,5 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{км}^{-1}$; для дневного времени $\Delta U_l / \Delta h = 9,5 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{км}^{-1}$.

Следует отметить, что величины Δh и η в наших опытах измерялись с высокой точностью: зенитные углы радиантов вычислялись с погреш-

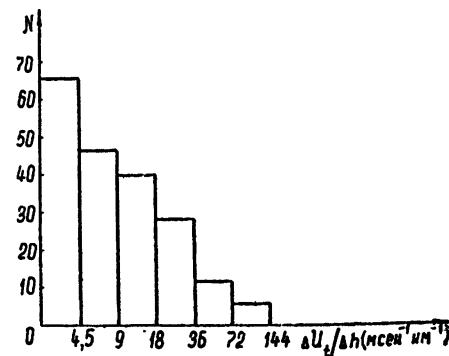


Рис. 3. Распределение единичных значений градиентов турбулентного ветра ($N_{\text{общ}} = 200$)

ностьюю 2° — 3° , а ошибка в определении скорости метеора не превосходила 3% [13, 14].

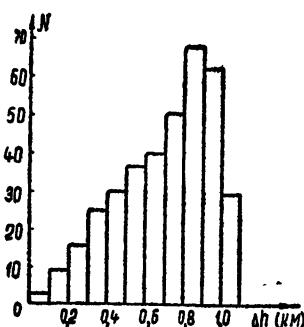


Рис. 4. Распределение величины Δh ($N_{\text{общ}} = 370$).

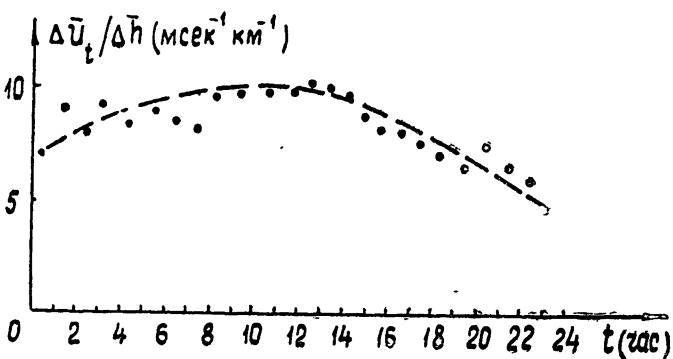


Рис. 5. Суточные вариации градиента турбулентного ветра.
По оси абсцисс—местное время.

Найденные в настоящей работе параметры турбулентного движения близки по порядкам величин к значениям аналогичных параметров, полученных в [2, 3]. Отметим, однако, что примененная нами методика обработки радиолокационных данных, основанная на локальных свойствах турбулентности, дает, на наш взгляд, более корректные оценки величин ϵ , чем полученные в работах [2, 3].

Экспериментальные исследования нерегулярных движений показали, что ряд статистических параметров турбулентности (энергия турбулентного движения, пульсационная скорость крупномасштабных вихрей, градиент скорости турбулентного движения) подвержен суточным вариациям. Присутствие последних дает основание предполагать, что «интенсивность» турбулентности в метеорной зоне контролируется Солнцем.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, J. Geoph. Res., 64, 2129 (1959).
2. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, Proc. Phys. Soc., 75, 228 (1960).
3. J. S. Greenhow, E. L. Neufeld, Proc. Phys. Soc., 1, 475 (1959).
4. В. Н. Лебединец, М. Ф. Лагутин, И. А. Лысенко, Метеоры, № 1, Сб. статей, изд. ХГУ, 1960.

5. Б. Л. Кащеев, Б. С. Дудник, М. Ф. Лагутин, И. А. Лысенко, Метеоры, № 1, Сб. статей, изд. ХГУ, 1960.
6. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, 30, 299 (1941).
7. А. М. Обухов, ДАН СССР, 32, 22 (1941).
8. И. А. Лысенко, Астрон. ж., 40, 165 (1963).
9. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 3 (1960).
10. Д. Бетчелор, Теория однородной турбулентности, ИЛ, М., 1955.
11. А. М. Обухов, А. М. Яглом, Прикладная математика и механика, 15, 3 (1951).
12. Таблица временной стандартной атмосферы (ВСА-60), изд. АН СССР, М., 1960.
13. М. Ф. Лагутин, Метеоры, № 2—3, Сб. статей, изд. ХГУ, 1963.
14. Б. Л. Кащеев, М. Ф. Лагутин, И. А. Лысенко, ДАН УССР, 11, 153 (1961).

Харьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
9 мая 1963 г.

INVESTIGATION OF PARAMETERS OF SOME TURBULENT FLOWS BY RADIOLOCATION OF METEOR TRAILS

E. A. Delov, M. F. Lagutin, E. A. Lysenko

The results of the experimental investigation are given of turbulent motions in the meteor zone using radio location of meteor trails. Magnitudes of the basic statistical parameters of the turbulent motion have been estimated. Diurnal variations of some parameters have been examined.

О ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ПРОВОДИМОСТИ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Ю. Б. Иванов, А. А. Рухадзе

Получено выражение для высокочастотной проводимости полностью ионизированной магнитоактивной плазмы в области длин волн, меньших гирорадиуса электронов ω_H . Исследовано поглощение таких коротковолновых колебаний на частотах, кратных ω_H .

1. ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Поглощение электромагнитных волн в плазме определяется проводимостью или формально антиэрмитовской частью тензора диэлектрической проницаемости плазмы. При полном пренебрежении столкновениями частиц проводимость плазмы обусловлена эффектами магнитотормозного и черенковского поглощения электромагнитных волн в плазме. Во многих интересных случаях, однако, эти эффекты пренебрежимо малы и проводимость плазмы полностью определяется столкновениями частиц.

В настоящей работе мы рассматриваем высокочастотную проводимость полностью ионизированной магнитоактивной плазмы в условиях, когда частота поля ω , а также гирочастоты частиц $\Omega = eB_0/mc$ значительно больше эффективной частоты столкновений $\nu_{\text{эфф}}$. При полном пренебрежении пространственной дисперсией высокочастотная проводимость плазмы, обусловленная столкновениями частиц, дается выражением [1]

$$\delta\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \delta\sigma_{11} & \delta\sigma_{12} & 0 \\ \delta\sigma_{21} & \delta\sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta\sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{11} = \delta\sigma_{22} &= \frac{\omega_L^2 e}{4\pi} \frac{\omega^2 + \Omega_e^2}{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2} \nu_{\text{эфф}}, \\ \delta\sigma_{12} = -\delta\sigma_{21} &= i \frac{\omega_L^2 e}{4\pi} \frac{\omega \Omega_e}{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2} \nu_{\text{эфф}}, \\ \delta\sigma_{33} &= \frac{\omega_L^2 e}{4\pi} \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\omega_L = (4\pi e^2 N/m)^{1/2}$ — ленгмюровская, Ω_e — гирочастота электронов, а $\nu_{\text{эфф}}$ — эффективная частота соударений электронов с ионами:

$$\nu_{\text{эфф}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 N_i L}{T_e^{3/2}},$$

где $L = \ln(r_D/r_{\min})$ — кулоновский логарифм.

Приведенное выражение справедливо при следующих условиях:

$$\omega - \Omega_e \gg \nu_{\text{эфф}}, \quad k_{\parallel} v_{Te}, \quad (1.3)$$

$$k_{\perp} v_{Te}/\Omega_e \ll 1, \quad (1.4)$$

где k_{\parallel} и k_{\perp} — величины составляющих волнового вектора вдоль и поперек внешнего магнитного поля, а $v_{Te} = \sqrt{T_e/m}$ — тепловая скорость электронов.

Следует отметить, что в указанных условиях ток в плазме является чисто электронным (ионный ток в m/M раз меньше электронного), причем в проводимость плазмы дают вклад лишь электроионные соударения.

Согласно условиям (1.3) и (1.4), выражения (1.1) пригодны лишь для описания поглощения длинноволновых (с длиной волны больше гирорадиуса электронов) колебаний поля в плазме. С другой стороны известно [2], что в магнитоактивной плазме в области частот, близких к циклотронным частотам электронов, могут распространяться электромагнитные волны с длиной волны меньше гирорадиуса электронов. Такие волны существуют лишь в узком интервале углов поперек магнитного поля и поэтому бесстолкновительное поглощение таких волн в плазме экспоненциально мало. Для описания обусловленного столкновениями поглощения волн нельзя при этом пользоваться выражением (1.1).

Представляет интерес получить выражение для высокочастотной проводимости плазмы при выполнении условий (1.3) и неравенства, обратного (1.4). Именно в таких условиях существуют коротковолновые колебания в плазме [2].

Как было показано недавно в работе Питаевского [3], эффективная частота столкновений частиц в пределе коротких волн возрастает на величину порядка $k_{\perp} v_{Te}/\Omega_e$. Это должно привести к увеличению высокочастотной проводимости плазмы, обусловленной столкновениями частиц, и возрастанию поглощения коротковолновых колебаний. Исследованию этих вопросов и посвящена настоящая работа.

Ниже будут получены выражения для компонент тензора проводимости и вычислены показатели преломления и коэффициенты поглощения коротковолновых колебаний в плазме при условии, когда $k_{\perp} v_{Te} \gg \Omega_e$. Существенно отметить, что в этой области длин волн электрон-электронные соударения дают в проводимость плазмы вклад того же порядка, что и электрон-ионные (в отличие от формул (1.1) и (1.2)).

2. УПРОЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛА СТОЛКНОВЕНИЙ

Рассмотрим полностью ионизированную магнитоактивную плазму в поле плоской монохроматической волны $E = E e^{-i(\omega t - kr)}$. Линеаризованное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st}, \quad (2.1)$$

где f_0 — равновесная максвелловская функция распределения частиц, будем решать методом последовательных приближений, разлагая решение по степеням интеграла столкновений

$$f = f_1 + f_2 + \dots \quad (2.2)$$

Законность такого разложения обеспечивается условиями (1.3). Функции f_1 и f_2 удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} -i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})f_1 + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} &= -\frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \\ -i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})f_2 + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ограничимся этими двумя приближениями. Функция f_1 характеризует отклонение распределения частиц от максвелловского при пренебрежении столкновениями, а f_2 — поправка, обусловленная столкновениями.

Дифференциальные уравнения (2.2) и (2.3) одного типа; они отличаются только неоднородностью. Решение этих уравнений в цилиндрической системе координат в пространстве скоростей можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_\nu &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_{\nu n} \frac{i}{\omega - \mathbf{k}_\parallel \mathbf{v}_\parallel - n\Omega_e} \times \\ &\quad \times \exp \{-in\varphi + i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp / \Omega_e) \sin \varphi\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\nu = 1, 2$, а

$$\Phi_{\nu n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m \left(\frac{\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp}{\Omega_e} \right) \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_\nu(\varphi') e^{-i(m+n)\varphi'} d\varphi', \quad (2.5)$$

$$\Phi_\nu = \begin{cases} \frac{-eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} & \text{при } \nu = 1 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} & \text{при } \nu = 2 \end{cases}.$$

Решение (2.4) при $\nu = 1$ приводит к известному выражению для тензора диэлектрической проницаемости однородной магнитоактивной плазмы при пренебрежении столкновениями частиц [1]. Если частота поля ω близка к циклотронной частоте ($\omega \approx n\Omega_e$), то при условии (1.3) в сумме (2.4) можно ограничиться учетом лишь одного резонансного члена.

Функция f_1 при этом запишется в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 F = \frac{ief_0 \exp [-in\varphi + i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_\perp / \Omega_e) \sin \varphi]}{2(\omega - \mathbf{k}_\parallel \mathbf{v}_\parallel - n\Omega_e) m v_{Te}^2} \times \\ &\quad \times \{ \mathbf{v}_\perp (J_{n+1} + J_{n-1}) E_x + i \mathbf{v}_\perp (J_{n-1} - J_{n+1}) E_y + 2 \mathbf{v}_\parallel J_n E_z \}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для вычисления функции f_2 , учитывающей столкновения частиц, мы должны подставить выражение (2.6) в интеграл столкновений $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st}$, который запишем в форме Ландау [4]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} &= \sum_{\beta} 2\pi e^2 e_{\beta}^2 \frac{\partial}{\partial p_i} \int dp' \left\{ f_{\beta}(p') \frac{\partial f(p)}{\partial p_j} - \right. \\ &\quad \left. - f(p) \frac{\partial f_{\beta}(p')}{\partial p'_i} \right\} \frac{w^2 \delta_{ij} - w_i w_j}{w^3}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$, а суммирование распространяется по электронам и ионам плазмы.

В интересующих нас условиях ионный ток, связанный со столкновениями частиц, вследствие большой массы иона мал по сравнению с электронным током. Поэтому достаточно вычислить лишь электронную функцию f_2 , которая определяется электрон-электронными и электрон-ионными столкновениями, т. е.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} = I_{ee} + I_{ei}. \quad (2.8)$$

Рассматривая электрон-ионные столкновения с точностью до членов порядка m/M , функцию распределения ионов можно считать равновесной, а относительную скорость—совпадающей со скоростью электронов. Линеаризуя (2.7), получаем для электронно-ионных столкновений

$$I_{ei} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 N_i f_0}{m^2 v} L \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ \delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial v_j} - \frac{v_i v_j}{v^2} \frac{\partial F}{\partial v_i} \right\}. \quad (2.9)$$

Дальнейшее упрощение этого выражения связано с предположением $k_\perp v_{Te} \gg \Omega_e$. Из формулы (2.6) видно, что при этом в выражении (2.9) основной вклад дают члены, содержащие вторые производные от функции F по φ и v_\perp . Учитывая это, имеем в цилиндрической системе

$$I_{ei} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 N_i f_0}{m^2} \frac{L}{v^3} \left[v_\parallel^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v_\perp^2} + \frac{v_\perp^2}{v_\perp^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (2.10)$$

Интеграл электрон-электронных столкновений в том же пределе можно записать в виде

$$I_{ee} = \frac{2\pi e^4 L f_0}{m^2} \frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j} \int d\mathbf{v}' f_0(\mathbf{v}') \frac{w^2 \delta_{ij} - w_i w_j}{w^3}. \quad (2.11)$$

После несложных, но несколько громоздких вычислений получим

$$\int d\mathbf{v}' f_0(\mathbf{v}') \frac{w^2 \delta_{ij} - w_i w_j}{w^3} = \frac{N_e}{v} \left[A(t) \delta_{ij} - B(t) \frac{v_i v_j}{v^2} \right], \quad (2.12)$$

где $t = v / \sqrt{-2} v_{Te}$, а

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\pi} \Phi(t) \left[1 - \frac{1}{2t^2} \right] + \frac{e^{-t^2}}{t} \right\},$$

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\pi} \Phi(t) \left[1 - \frac{3}{2t^2} \right] + \frac{3e^{-t^2}}{t} \right\}, \quad (2.13)$$

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx.$$

В аналогичном виде интеграл ион-ионных столкновений был получен в работе [3]. (В формулах для $A(t)$ и $B(t)$ в этой работе допущены опечатки.)

Учитывая, что $k_\perp v_{Te} \gg \Omega_e$, в выражении (2.11) оставим лишь члены со старшими производными по φ и v_\perp . В результате получим

$$I_{ee} = \frac{2\pi e^4 L N_e f_0}{m^2} \frac{f_0}{v} \left\{ \left(A - B \frac{v_\perp^2}{v^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial v_\perp^2} + \frac{A}{v_\perp^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right\}; \quad (2.14)$$

Складывая выражения (2.10) и (2.14) и, для простоты, ограничиваясь случаем однозарядных ионов, получим следующее выражение для интеграла столкновений электронов:

$$\begin{aligned} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} &= \frac{2\pi e^4 L N_e f_0}{m^2} \frac{f_0}{v} \left\{ \left[\frac{(A - B) v_\perp^2 + (A + 1) v_\parallel^2}{v^2} \right] \times \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\partial^2 F}{\partial v_\perp^2} + \frac{A + 1}{v_\perp^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Заметим, что функция F в этом выражении определена соотношением (2.6). В таком виде интеграл столкновений весьма удобен для исследования коротковолновых колебаний электронной плазмы.

3. ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

Воспользуемся теперь выражением (2.15) для вычисления интересующей нас поправки к электронной функции распределения за счет столкновений. Подставляя это выражение в формулы (2.4) и (2.5) и ограничиваясь в сумме лишь одним резонансным членом, получим

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{\pi e^3 L N f_0 k_\perp^2 / \Omega_e^2}{(\omega - k_\parallel v_\parallel - n\Omega_e)^2 m^3 v v_{Te}^2} \exp \left[i \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_e} \sin \varphi - i n \varphi \right] \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{3}{2} \frac{(A - B) v_\perp^2 + (A + 1) v_\parallel^2}{v^2} + \frac{1}{2} (A + 1) \right\} \times \\ &\quad \times [v_\perp (J_{n+1} + J_{n-1}) E_x + i v_\perp (J_{n-1} - J_{n+1}) E_y + 2 v_\parallel J_n E_z]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При получении этой формулы учитывалось, что $k_\perp v_\perp \gg \Omega_e$, а потому $J_n \approx -J_n''$.

Подставляя выражение (3.1) в формулу для плотности электронного тока и учитывая условия (1.3), после довольно громоздкого интегрирования по φ (см. Приложение) получим в пределе $k_\parallel v_\parallel \rightarrow 0$ следующее выражение для тензора высокочастотной проводимости, обусловленной столкновениями электронов с электронами и с ионами плазмы:

$$\delta\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \delta\sigma_{11} & \delta\sigma_{12} & 0 \\ \delta\sigma_{21} & \delta\sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta\sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{11} &= \frac{\omega_e^2 \gamma_{\text{эфф}}}{4\pi (\omega - n\Omega_e)^2} \frac{n^2}{(k_\perp v_{Te}/\Omega_e)^2} c_{11}, \\ \delta\sigma_{22} &= \frac{\omega_e^2 \gamma_{\text{эфф}}}{4\pi (\omega - n\Omega_e)^2} \frac{k_\perp v_{Te}}{\Omega_e} c_{22}, \\ \delta\sigma_{33} &= \frac{\omega_e^2 \gamma_{\text{эфф}}}{4\pi (\omega - n\Omega_e)^2} \frac{k_\perp v_{Te}}{\Omega_e} c_{33}, \\ \delta\sigma_{12} &= -\delta\sigma_{21} = i \delta\sigma_{11} \varphi(n)/n^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Численные коэффициенты c_{11} , c_{22} , c_{33} — порядка единицы (их значения $c_{11} \approx 1,06$, $c_{22} \approx 0,87$, $c_{33} \approx 1,32$); функция $4\varphi(n) = \frac{\Gamma(n+7/2)}{\Gamma(n-1/2)} - \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n-5/2)}$ при $n \neq 0$ и стремится к нулю при $n \rightarrow 0$.

Из сравнения формул (1.2) и (3.3) следует, что с уменьшением длины волны колебаний компоненты $\delta\sigma_{11}$ и $\delta\sigma_{12}$ тензора проводимости плазмы уменьшаются, а компоненты $\delta\sigma_{22}$ и $\delta\sigma_{33}$ увеличиваются. Особенно сильно возрастает компонента $\delta\sigma_{33}$, которая в коротковолновой области содержит также резонансный знаменатель. Такое возрастание высокочастотной проводимости и приводит к увеличению поглощения коротковолновых колебаний в плазме. Заметим, что для получения тензора проводимости в области частот $\omega \ll \Omega_e$ (например, в случае, ионного циклотронного резонанса) в формулах (3.3) нужно положить $n = 0$.

4. ПОГЛОЩЕНИЕ КОРОТКОВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ НА ЦИКЛОТРОННЫХ ЧАСТОТАХ ЭЛЕКТРОНОВ

Как уже отмечалось выше, колебания с длиной волны меньше гиперрадиуса электронов существуют в магнитоактивной плазме в области частот электронного циклотронного резонанса, когда $\omega \approx n\Omega_e$. Дисперсионные уравнения обычновенной, необыкновенной и плазменной волн в этой области частот и длин волн соответственно имеют вид [2]

$$k^2 \sin^2 \vartheta = \epsilon_{33} \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (4.1)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{22}, \quad (4.1a)$$

$$\epsilon_{11} = 0. \quad (4.1b)$$

Входящие в эти уравнения компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы с учетом высокочастотной проводимости (3.3) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= 1 - \frac{n^2 \omega_{Le}^2}{V 2\pi \omega (\omega - n\Omega_e)} \left(\frac{\Omega_e}{k_\perp v_{Te}} \right)^3 \times \\ &\times \left\{ 1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - n\Omega_e}{|k_\parallel| v_{Te}} \exp [-(\omega - n\Omega_e)^2 / 2k_\parallel^2 v_{Te}^2] - i \frac{\gamma_{\text{ЭФФ}}}{\omega - n\Omega_e} \times \right. \\ &\times \left. \frac{k_\perp^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \sqrt{2\pi} c_{11} \right\}; \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{22} &= 1 - \frac{1}{V 2\pi} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega (\omega - n\Omega_e)} \frac{\Omega_e}{k_\perp v_{Te}} \left\{ 1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - n\Omega_e}{|k_\parallel| v_{Te}} \times \right. \\ &\times \exp [-(\omega - n\Omega_e)^2 / 2k_\parallel^2 v_{Te}^2] - i \frac{\gamma_{\text{ЭФФ}}}{\omega - n\Omega_e} \frac{k_\perp^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \sqrt{2\pi} c_{22} \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\epsilon_{33} = 1 - \frac{1}{V2\pi} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega - n\Omega_e)} - \frac{\Omega_e}{k_\perp v_{Te}} \left\{ 1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\omega - n\Omega_e)^3}{k_\perp^3 v_{Te}^3} \times \right.$$

$$\left. \times \exp[-(\omega - n\Omega_e)^2/2k_\perp^2 v_{Te}^2] - i \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega - n\Omega_e} \frac{k_\perp^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} c_{33} \sqrt{2\pi} \right\}.$$

Из этих выражений видно, что роль эффективной частоты соударений играет не величина $\nu_{\text{эфф}}$, а значительно большая: $\nu_{\text{эфф}} k_\perp^2 v_{Te}^2 / \Omega_e^2$. Поэтому и условия применимости полученных формул, основанных на разложении решения кинетического уравнения по степеням интеграла столкновений, следует записать в виде, несколько отличном от (1.3), а именно:

$$|\omega - n\Omega_e| \gg \nu_{\text{эфф}} \frac{k_\perp^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2}. \quad (4.3)$$

Вследствие малости антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости при решении уравнений (4.1) в первом приближении ею можно пренебречь. В результате для показателей преломления обыкновенной, необыкновенной и плазменной волны получаем выражения, совпадающие с приведенными в работе [2] ($k = (\omega/c)n$):

$$n_1 = \left(\frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e c}{V2\pi \sin^3 \vartheta v_{Te} \omega^2 (n\Omega_e - \omega)} \right)^{1/3}, \quad (4.4)$$

$$n_2 = \left(\frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e c}{V2\pi \sin \vartheta v_{Te} \omega^2 (n\Omega_e - \omega)} \right)^{1/3}, \quad (4.4a)$$

$$n_3 = \left(\frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e^3 c^3 n^2}{V2\pi \sin^3 \vartheta v_{Te}^3 \omega^4 (\omega - n\Omega_e)} \right)^{1/3}, \quad (4.4b)$$

где $\vartheta \approx \pi/2$ — угол между волновым вектором и направлением внешнего магнитного поля. Из этих формул следует, что для обыкновенной и необыкновенной волн плазма прозрачна при $\omega < n\Omega_e$, а для плазменной — при $\omega > n\Omega_e$.

Учет малой антиэрмитовской части диэлектрической проницаемости в уравнениях (4.1) приводит к следующим выражениям для коэффициентов поглощения электромагнитных волн ($n \rightarrow n + ix$):

$$x_1 = -\frac{1}{3} n_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{(\omega - n\Omega_e)^3}{|k_\perp|^3 v_{Te}^3} e^{-\frac{-(\omega - n\Omega_e)^2}{2k_\perp^2 v_{Te}^2}} + \right.$$

$$\left. + 2c_{33} \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega - n\Omega_e} \frac{k_\perp^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right\}, \quad (4.5)$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{3} n_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\omega - n\Omega_e}{|k_{\parallel}| v_{Te}} e^{\frac{-(\omega - n\Omega_e)^2}{2k_{\parallel}^2 v_{Te}^2}} + \right. \\ \left. + 2c_{22} \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega - n\Omega_e} \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right\}, \quad (4.5a)$$

$$\chi_3 = \frac{1}{3} n_3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\omega - n\Omega_e}{|k_{\parallel}| v_{Te}} e^{\frac{-(\omega - n\Omega_e)^2}{2k_{\parallel}^2 v_{Te}^2}} + \right. \\ \left. + 2c_{11} \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\omega - n\Omega_e} \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2} \right\}. \quad (4.5b)$$

При пренебрежении столкновениями частиц эти формулы переходят в соотношения работы [2]. (В работе [2] имеются опечатки: в формулах для χ_1 и χ_2 опущен множитель $1/3$.) Такое пренебрежение для обыкновенной волны возможно при условии

$$\frac{(\omega - n\Omega_e)^4}{k_{\parallel}^4 v_{Te}^4} e^{\frac{-(\omega - n\Omega_e)^2}{2k_{\parallel}^2 v_{Te}^2}} \gg \frac{\nu_{\text{эфф}}}{|k_{\parallel}| v_{Te}} \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2}, \quad (4.6)$$

а для необыкновенной и плазменной волны — при условии

$$\frac{(\omega - n\Omega_e)^2}{k_{\parallel}^2 v_{Te}^2} e^{\frac{-(\omega - n\Omega_e)^2}{2k_{\parallel}^2 v_{Te}^2}} \gg \frac{\nu_{\text{эфф}}}{|k_{\parallel}| v_{Te}} \frac{k_{\perp}^2 v_{Te}^2}{\Omega_e^2}. \quad (4.7)$$

В обратном пределе преобладающую роль в поглощении коротковолновых колебаний в плазме играют столкновения частиц. В частности, поглощение электромагнитных волн, распространяющихся строго попереек магнитного поля ($k_{\perp} = 0$), полностью обусловлено столкновениями.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В. П. Силину за обсуждение работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Подставляя выражение (3.1) в формулу для плотности электронного тока

$$\mathbf{j}_i = e \int f_2 \mathbf{v}_i d\mathbf{v} = \delta\sigma_{ij} E_i, \quad (\text{П.1})$$

получаем для тензора проводимости, обусловленного столкновениями частиц,

$$\delta\sigma_{ij} = \frac{\pi e^6 N L (k_{\perp}/\Omega_e)^2}{(\omega - n\Omega_e)^2 m^3 v_{Te}^2} \int \exp \left[i \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_e} \sin \varphi - i n \varphi \right] \times \\ \times \left[\frac{3}{2} \frac{(A - B) v_{\perp}^2 + (A + 1) v_{\parallel}^2}{v^3} + \frac{1}{2} \frac{A + 1}{v} \right] f_0 D_{ij} d\mathbf{v}, \quad (\text{П.2})$$

где

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} v_{\perp}^2 \cos \varphi (J_{n+1} + J_{n-1}); & v_{\perp}^2 \sin \varphi (J_{n+1} + J_{n-1}); \\ v_{\parallel} v_{\perp} (J_{n+1} + J_{n-1}) \\ i v_{\perp}^2 \cos \varphi (J_{n-1} - J_{n+1}); & i v_{\perp}^2 \sin \varphi (J_{n-1} - J_{n+1}); \\ i v_{\parallel} v_{\perp} (J_{n-1} - J_{n+1}) \\ 2v_{\parallel} v_{\perp} \cos \varphi J_n; & 2v_{\parallel} v_{\perp} \sin \varphi J_n; \\ 2v_{\perp} v_{\parallel} J_n \end{bmatrix}. \quad (\Pi.3)$$

Введем сферическую систему координат, где

$$v_{\perp} = v \sin \theta; \quad v_{\parallel} = v \cos \theta; \quad dv = v^2 dv \sin \theta d\theta d\varphi.$$

После интегрирования по $d\varphi$ имеем

$$\delta\sigma_{ij} = \frac{e^6 NL (k_{\perp}/\Omega_e)^2 \pi^2}{(\omega - n\Omega_e)^2 m^3 v_{Te}^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \left[\frac{3}{2} \frac{(A - B) \sin^2 \theta + (A + 1) \cos^2 \theta}{v} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{A + 1}{v} \right] v^2 dv \sin \theta d\theta f_0 T_{ij}; \quad (\Pi.4)$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} v_{\perp}^2 (J_{n+1} + J_{n-1})^2; & i v_{\perp}^2 (J_{n+1}^2 - J_{n-1}^2); \\ 2v_{\parallel} v_{\perp} J_n (J_{n+1} + J_{n-1}) \\ i v_{\perp}^2 (J_{n-1}^2 - J_{n+1}^2); & v_{\perp}^2 (J_{n-1} - J_{n+1})^2; \\ 2i v_{\parallel} v_{\perp} J_n (J_{n-1} - J_{n+1}) \\ 2v_{\parallel} v_{\perp} J_n (J_{n+1} + J_{n-1}); & -2i v_{\parallel} v_{\perp} J_n (J_{n-1} - J_{n+1}); \\ 4v_{\parallel}^2 J_n^2 \end{bmatrix}. \quad (\Pi.5)$$

Компоненты $\delta\sigma_{13}$, $\delta\sigma_{31}$, $\delta\sigma_{23}$, $\delta\sigma_{32}$ обращаются в нуль при интегрировании по θ .

Вычислим, например, компоненту $\delta\sigma_{22}$. Введем $t = v / \sqrt{2} v_{Te}$ и воспользуемся соотношением

$$J_{n-1} - J_{n+1} = 2J'_n (\sqrt{2} \alpha_T t \sin \theta), \quad \alpha_T = k_{\perp} v_{Te} / \Omega_e. \quad (\Pi.6)$$

Как показывают численные оценки, интегралы, содержащиеся в $\delta\sigma_{ij}$, могут быть при $\alpha_T \gg 1$ с достаточной точностью взяты, если содержащиеся в подынтегральном выражении функции Бесселя заменить их асимптотикой. При этом

$$\int_0^\infty e^{-t^2} A(t) t^2 dt \approx 0,5\pi^{-1/2}, \quad \int_0^\infty e^{-t^2} B(t) t^2 dt \approx 0,22\pi^{-1/2}. \quad (\Pi.7)$$

В результате интегрирования получим

$$\delta\sigma_{22} \approx \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{\text{эф}}}{4\pi (\omega - n\Omega_e)^2} \left(\frac{k_T v_{Te}}{\Omega_e} \right) 0,87, \quad (\Pi.8)$$

откуда

$$c_{22} \simeq 0,87.$$

Коэффициенты c_{11} и c_{33} в формулах (3.3) вычисляются аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
2. Р. Р. Рамазашвили, А. А. Рухадзе, ЖТФ, 32, 644 (1962).
3. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ, 44, 969 (1963).
4. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1936).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
25 июня 1963 г.

ON HIGH-FREQUENCY CONDUCTIVITY OF MAGNETOACTIVE PLASMA

Yu. B. Ivanov, A. A. Rukhadze

An expression is obtained for high-frequency conductivity of the fully ionized magnetoactive plasma the wavelengths being less than electron ω_H gyroradius. The absorption of such short-wave oscillations is investigated at the frequencies multiple to ω_H .

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Ю. А. Романов

Методом кинетического уравнения исследован плазменный энергетический спектр полуограниченной плазмы в предположении о зеркальном отражении электронов от границы раздела. Рассмотрен вопрос о возбуждении поверхностных плазменных волн медленными электронами

В связи с изучением так называемых характеристических потерь и переходного излучения при прохождении заряда через плазму большой интерес представляет задача об исследовании энергетического спектра плазмы, т. е. тех возбуждений или тех квазичастиц, которые могут возбуждаться и распространяться в рассматриваемой системе. Впервые задача о плазменном энергетическом спектре для неограниченной плазмы была рассмотрена в [1]. В дальнейшем она неоднократно рассматривалась как классически, так и квантово. Цель этих работ заключалась в получении дисперсионных соотношений для плазменных волн, которые мы будем называть объемными плазмонами.

Изучая характеристические потери при прохождении быстрых электронов через металлическую пластинку, Ритчи [2] пришел к выводу, что в полуограниченной плазме существуют не только объемные плазмоны с лэнгмюровской частотой $\omega_0^2 = 4\pi ne^2/m$, но и поверхностные плазменные волны с частотой $\omega_0/\sqrt{2}$, представляющие собой распространяющиеся вдоль границы плазмы волны, поверхности заряда. Затем Стерн и Феррел [3], используя макроскопическую теорию без учета пространственной дисперсии, решили аналогичную задачу для плазмы, граничащей с диэлектрической средой. Они получили дисперсионное соотношение в виде

$$\omega = \omega_0 / \sqrt{1 + \epsilon_0}, \quad (1)$$

где ϵ_0 — проницаемость диэлектрической среды. Тем же методом в [3] рассмотрены плазменные колебания в пленке конечной толщины (см. также [4]). В работе [5] квантовомеханическим путем найден энергетический спектр плазменных колебаний, в том числе и поверхностных плазмонов в металлических пленках.

Результаты последней работы, на наш взгляд, являются ошибочными, поскольку найденные решения для электромагнитных полей не удовлетворяют необходимым граничным условиям (решения в пленке не имеют вида бегущих плоских волн, как это неявно считается в [5]). Кроме того, при рассмотрении плазменных колебаний в пленке необходимо учитывать запаздывание взаимодействия, так как в ограниченной системе, кроме чисто продольных волн, существуют смешанные типы волн, приводящие, в частности, к выходу продольных плазменных колебаний в вакуум в виде электромагнитного излучения (см., например, работы по переходному излучению с учетом пространственной дисперсии [6] или статью [7] о возбуждении поперечной волной продольных плазменных волн). В цитируемых работах эффект запаздывания не учи-

тывался. В [4] приводится без вывода дисперсионное соотношение поверхности плазмонов для случая $\epsilon_0 = 1$ с учетом запаздывания, но без учета пространственной дисперсии. (Вывод дисперсионного соотношения для поверхностных плазмонов с учетом запаздывания, но без учета пространственной дисперсии дан в [8].)

В настоящей работе найден плазменный спектр полуограниченной плазмы в предположении зеркального отражения электронов от границы плазмы. При этом учитывается как пространственная дисперсия, так и запаздывание взаимодействия. Полученные результаты впренебрежении пространственной дисперсией и запаздыванием взаимодействия переходят в соответствующие выражения работ [2, 3, 8]. Вычислена вероятность возбуждения поверхностных плазменных волн медленными электронами. Электромагнитные волны в плазменной пластинке будут рассмотрены отдельно.

1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Рассмотрим полуограниченную электронную плазму (область $z > 0$), граничащую с полуограниченной непоглощающей средой ϵ_0 (область $z < 0$). Электромагнитные поля этой системы описываются уравнениями Максвелла совместно с кинетическим уравнением и соответствующими граничными условиями. В качестве последних будем предполагать абсолютно упругое отражение электронов от поверхности плазмы и, как обычно, требовать непрерывности тангенциальных составляющих полей E и H .

Для нахождения энергетического спектра данной системы необходимо решить задачу с начальными условиями, как это делается в [1]. Однако мы можем опустить соответствующие выкладки и воспользоваться основным результатом этой работы, а также метода функций Грина при нахождении энергии квазичастиц (см., например, [9]). Согласно этим работам, рассмотрим указанные уравнения для фурье-компонент $e^{-i\omega t}$ с $\text{Im } \omega > 0$, а затем аналитически продолжим соответствующие выражения в нижнюю полуплоскость ω (поскольку полюса функций Грина, дающие энергию и затухание квазичастицы, лежат в нижней полуплоскости, эти уравнения совместно с граничными условиями должны удовлетворяться для ω с $\text{Im } \omega < 0$).

Найдение электромагнитных полей в области $z < 0$ не представляет труда, для нахождения же их в области $z > 0$ поступим аналогично тому, как это делалось в [7]. Опуская промежуточные вычисления, заметим, что эти поля однозначно определяются заданием тангенциальных составляющих магнитного поля $H_{x,y}(z=0)$.

Не снижая общности, для простоты положим компоненту волнового вектора рассматриваемой волны $k_y = 0$ и рассмотрим три случая.

1) Пусть $H_x(0) = 0$, $H_y(0) \neq 0$. Тогда для фурье-компонент электрического поля будем иметь

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{k}, \omega) &= 2i \frac{c}{\omega} \frac{\epsilon_{zz} - c^2 k_x^2 / \omega^2}{\epsilon_{\perp} (\epsilon_{\perp} - c^2 k^2 / \omega^2)} H_y(0); \\ E_z(\mathbf{k}, \omega) &= -2i \frac{c}{\omega} \frac{\epsilon_{zx} + c^2 k_x k_z / \omega^2}{\epsilon_{\perp} (\epsilon_{\perp} - c^2 k^2 / \omega^2)} H_y(0). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ — тензор диэлектрической проницаемости, связанный обычным образом с поперечной $\epsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega)$ и продольной $\epsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)$ диэлек-

трическими проницаемостями; выражения для последних можно найти, например, в [10].

Переходя в координатное представление и сшивая эти решения с соответствующими решениями при $z < 0$, получим следующее дисперсионное соотношение:

$$\frac{i}{\pi} \left\{ \int \frac{k_x^2 dk_z}{k^2 \epsilon_{||}(\mathbf{k}, \omega)} + \int \frac{k_z^2}{k^2} \frac{dk_z}{\epsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) - k^2/\omega^2} \right\} = \frac{k_z^0}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

где

$$k_z^0 = -\sqrt{\epsilon_0 \omega^2/c^2 - k_x^2}. \quad (4)$$

Это решение соответствует бегущей вдоль оси x и затухающей по обе стороны от $z = 0$ электромагнитной «поверхностной» волне.

В пренебрежении пространственной дисперсией (3) переходит в

$$\frac{k_z}{\epsilon(\omega)} = \frac{k_z^0}{\epsilon_0}, \quad (5)$$

где

$$k_z = \sqrt{\epsilon(\omega) \omega^2/c^2 - k_x^2},$$

$\epsilon(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы без учета пространственной дисперсии. Дисперсионное соотношение (5) соответствует E -волне в волноводной системе и легко получается при рассмотрении феноменологических уравнений Максвелла [8].

Рассмотрим волны с волновым вектором k_x , удовлетворяющим условию

$$\frac{|\epsilon(\omega)|^2 \omega^2}{c^2} \ll k_x^2 \ll \frac{\omega^2}{v_T^2}. \quad (6)$$

Этот тип волн наиболее эффективен при возбуждении плазменных колебаний электронами [3]. Полагая в (3) $c \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{k_x}{\pi} \int \frac{dk_z}{k^2 \epsilon_{||}(\mathbf{k}, \omega)} = -\frac{1}{\epsilon_0}. \quad (7)$$

Интеграл в (7) при условии (6) легко вычисляется (см. Приложение):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int \frac{dk_z}{k^2 \epsilon_{||}(\mathbf{k}, \omega)} &\simeq \frac{1}{k_x \epsilon(\omega)} - \frac{2}{\epsilon(\omega)} \frac{v_T}{\omega_1} a\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) - \\ &- i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \frac{v_T}{\omega_1 |\epsilon_{||}|_{z=1}^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$a\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) \sim 1, \quad v_T = \sqrt{2 \times T/m}.$$

Подставляя (8) в (7) и разрешая относительно ω , получим для свободного электронного газа

$$\omega \simeq \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \epsilon_0/\epsilon}} + \frac{ak_x v_T}{1 + \epsilon/\epsilon_0} - \frac{i\omega_0^2}{\sqrt{\pi} |\epsilon_{||}|_{z=1}^2} k_x v_T. \quad (9)$$

Здесь ϵ — диэлектрическая проницаемость ионного остатка плазмы.

В пренебрежении пространственной дисперсией (9) переходит в выражение

$$\omega \approx \omega_0 / \sqrt{1 + \epsilon_0 / \epsilon} \quad (10)$$

(ср. с [3]).

Тот факт, что затухание при малых k_x , в отличие от случая объемных плазмонов, не является экспоненциально малым, обусловлен тем, что рассматриваемые поверхностные волны, экспоненциально убывая в глубь плазмы, содержат гармоники со сколь угодно большими k_z , затухание которых не мало. Скорость распространения этой волны

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \approx \frac{av_T}{1 + \epsilon_0/\epsilon} \quad (11)$$

в отличие от объемных плазмонов практически не зависит от волнового вектора.

Рассмотрим теперь волны с предельно малым волновым вектором, так что

$$\frac{c^2 k_x^2}{\epsilon(\omega)} \ll \omega_0^2. \quad (12)$$

В этом случае мы не можем пренебречь вторым интегралом в (3), так как соответствующее подынтегральное выражение имеет полюс вблизи вещественной оси:

$$k_z^2 \approx \frac{\epsilon(\omega) \omega^2}{c^2} - k_x^2. \quad (13)$$

Более того, оказывается, что в данном случае именно это слагаемое дает основной вклад в дисперсионное соотношение. Разрешая (3) относительно ω , получим для свободного электронного газа

$$\omega = \frac{ck_x}{\sqrt{\epsilon_0}} \left\{ 1 - \frac{c^2 k_x^2}{2\epsilon_0 \omega_0^2} - \frac{i}{\epsilon^{3/2} \sqrt{\epsilon_0 \pi}} \frac{c}{v_T} \left(\frac{ck_x}{\omega_0} \right)^3 \ln \epsilon \epsilon_0 \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \left(\frac{\omega_0}{ck_x} \right)^2 \right\}; \quad (14)$$

$$\frac{c}{v_T} \frac{ck_x}{\omega_0} \ll 1.$$

(При выводе (14) пространственная дисперсия учитывалась лишь при получении мнимой части ω .) Эта волна, не являясь ни чисто поперечной, ни чисто продольной, носит смешанный характер. Действительная часть частоты этой волны в основном определяется поведением $\epsilon_{\perp}(\mathbf{k}', \omega)$, а мнимая часть — $\epsilon_{\parallel}(\mathbf{k}', \omega)$. Это, по-видимому, связано с тем фактом, что продольные волны затухают сильнее поперечных.

Дисперсионные соотношения (9) и (14) дают зависимость частоты от волнового вектора для одной и той же плазменной ветви. Поскольку в этой волне $v_{\phi} < c / \sqrt{\epsilon_0}$, то она не может излучаться в вакуум в виде электромагнитной волны (ср. с [4]). Отражением этого факта является наличие затухания, обусловленного только взаимодействием между частицами так называемого внутреннего затухания.

2) Рассмотрим теперь случай

$$H_x(0) \neq 0, \quad H_y(0) = 0. \quad (15)$$

При этом, как легко видеть,

$$E_x = E_z = 0; \quad E_y \neq 0. \quad (15a)$$

Поступая так же, как при выводе (3), получим следующее дисперсионное соотношение для этого типа волн:

$$\frac{i}{\pi} \int_{\perp} \frac{dk_z}{\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) \omega^2/c^2 - k_z^2} = \frac{1}{k_z^0} \quad (16)$$

с тем же k_z^0 , что и в (3). Легко убедиться, что (16) не имеет решений, исчезающих на бесконечности. (Это утверждение аналогично утверждению об отсутствии поверхностной H -волны [8].)

3) Рассмотрим, наконец, третий особый случай

$$H_x(0) = H_y(0) = 0. \quad (17)$$

В силу теоремы единственности отсюда сразу следует, что в области $z < 0$ поля E и H тождественно равны нулю (мы считаем, что поля на бесконечности исчезают). Для полей при $z > 0$ будем иметь в данном случае

$$\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) [\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) - c^2 k_z^2/\omega^2] = 0;$$

$$E_z(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\varepsilon_{zr} + c^2 k_r k_z/\omega^2}{\varepsilon_{zz} - c^2 k_z^2/\omega^2} E_x(\mathbf{k}, \omega); \quad (18)$$

$$[\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) - c^2 k_z^2/\omega^2] E_y(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (19)$$

В дополнение к уравнениям (18), (19) необходимо потребовать обращения в нуль тангенциальных компонент электромагнитного поля при $z = 0$. Для выбранных граничных условий

$$j_n(z=0) = 0 \quad (20)$$

из первого уравнения Максвелла следует

$$E_z(z=0) = 0. \quad (20a)$$

Таким образом, в данном случае на границе плазмы должны обращаться в нуль все компоненты электромагнитного поля.

Если электромагнитные поля трансформируются вдали от поверхности $z = 0$ (решение представляет волновой пакет с исчезающими полями при $z = 0$), то граничные условия не приводят к дополнительным требованиям и возможные типы решений полностью определяются уравнениями (18), (19), которые приводят к хорошо известным дисперсионным соотношениям для продольных и поперечных объемных плазмонов.

Если же электромагнитные поля трансформируются вблизи поверхности, то, как легко показать, уравнения (18), (19) и требование обращения в нуль всех компонент поля несовместимы. В самом деле, обращая, например, $E_x(z = 0)$ в нуль путем выбора решения в виде

$$E_x(r, t) \sim e^{i(k_x x - \omega t)} \sin(k_z z) \quad (21)$$

(это единственный способ, так как каждой частоте принадлежат две фурье-компоненты с $\pm k_z$), из (18) мы получим

$$E_z(r, t) \sim \cos(k_z z), \quad (21a)$$

что не удовлетворяет нашим граничным условиям. Аналогично нельзя одновременно обратить в нуль $E_y(z=0)$ и $H_z(z=0)$. Такие рассуждения не проходят для случая $k_x = 0$, поскольку дробь в (18) имеет при этом неопределенность типа 0/0. Полагая $k_x = 0$ в исходных уравнениях, получим для данного случая

$$\epsilon_{\parallel}(k_z \omega) E_z(k_z \omega) = 0 \quad (22)$$

(два других уравнения мы не выписываем, так как они совпадают с (19) и, как уже указывалось, не имеют решений).

Уравнению (22) соответствует дисперсионное соотношение для объемных продольных плазмонов. Выбирая решение в виде стоячей вдоль z волны

$$E_z(z, t) \sim e^{-i\omega t} \sin(k_z z), \quad (23)$$

мы удовлетворим необходимым граничным условиям.

Приведенные рассуждения показывают, что этот тип плазменных волн не выходит из плазмы в вакуум и не может возбуждаться светом. Кроме того, при прохождении заряженной частицы через плазму частица теряет энергию на возбуждение этой волны, в отличие от других волн, лишь в пределах плазмы.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

До последнего времени как экспериментально, так и теоретически изучались потери быстрых электронов при прохождении через плазму. По-видимому, не меньший интерес могут представлять характеристические потери электронов с энергиями порядка энергий плазмона (для Ag, например, порядка 3,75 эв). Эти процессы могут играть существенную роль, например, в проводимости проводников, а также могут явиться причиной существования отрицательного участка в вольтамперных характеристиках систем металл—диэлектрик—металл [1] и систем диэлектрик—металл—диэлектрик. При этом возможно, что основную роль играют поверхностные плазмоны. Поэтому представляет интерес рассмотреть вопрос о возбуждении этих плазмонов медленными электронами, в частности, электронами проводимости.

Пусть, как и раньше, область $z > 0$ заполняет плазма, а область $z < 0$ — диэлектрическая среда. Гамильтониан взаимодействия падающего электрона с плазменными колебаниями в представлении вторичного квантования при калибровке $\varphi = 0$ запишем в виде

$$\hat{H}_{int}(t) = - \int \hat{\mathbf{j}}(x, t) \hat{\mathbf{A}}(x, t) d^3x, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{j}}(x) = & \frac{e}{2mc} [\hat{\Psi}^+(x) \hat{\mathbf{p}} \hat{\Psi}(x) - (\hat{\mathbf{p}} \hat{\Psi}^+(x)) \hat{\Psi}(x)] - \\ & - \frac{e^2}{2mc^2} \hat{\Psi}^+(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\mathbf{A}}(x), \end{aligned} \quad (25)$$

$\hat{\Psi}(x)$ — оператор свободного электрона, $\hat{\mathbf{A}}(x)$ — оператор свободного плазмона, нормированного так, что

$$\frac{1}{8\pi} \int \left[\frac{\partial(\epsilon(\omega))}{\partial\omega} \hat{E}^2(x) + \hat{H}^2(x) \right] dv = \sum_k \left(\hat{n}_k + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k. \quad (26)$$

Мы здесь ради простоты не будем учитывать пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости. Кроме того, как будет видно из конечного результата, можно пренебречь и запаздыванием взаимодействия, поскольку для рассеяния электронов наиболее существенны плазмоны с $k_x \gg \omega/c$ (рассеяние в основном происходит на большие углы).

Поступая обычным образом, получим вероятность возбуждения плазмона $\hbar\omega$ электроном с энергией E , рассеивающимся в телесный угол $d\Omega$, в первом порядке теории возмущений:

$$dw = \frac{e^2(\hbar\omega/E)\sqrt{1-\hbar\omega/E}|\Delta p_{||}|d\Omega}{2\pi\hbar p v_z(3\varepsilon+\varepsilon_0)(1-\hbar\omega/2E-\sqrt{1-\hbar\omega/E}\cos\theta)^2}, \quad (27)$$

где $\Delta p_{||}$ — изменение импульса электрона в направлении, параллельном пленке, p — импульс, v_z — нормальная составляющая скорости падающего электрона. Ограничимся случаем нормального падения электрона на границу плазмы. Тогда вместо (27) будем иметь

$$dw = \frac{e^2(\hbar\omega/E)(1-\hbar\omega/E)\sin^2\theta d\theta}{\hbar v(3\varepsilon+\varepsilon_0)(1-\hbar\omega/2E-\sqrt{1-\hbar\omega/E}\cos\theta)^2}, \quad (28)$$

где θ — угол рассеяния электрона. Угол, под которым рассеивается максимальное число частиц, определяется соотношением

$$\cos\theta_m = \sqrt{\frac{(1-\hbar\omega/2E)^2}{4(1-\hbar\omega/E)} + 2} - \frac{1-\hbar\omega/2E}{2\sqrt{1-\hbar\omega/E}}; \quad (29)$$

при $E \gg \hbar\omega$

$$\theta_m \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\hbar\omega}{2E}; \quad (30)$$

при $(1-\hbar\omega/E) \ll 1$

$$\theta_m \approx \frac{\pi}{2} - 4\sqrt{1-\hbar\omega/E}. \quad (31)$$

Формула (28) при $E \gg \hbar\omega$ и $\varepsilon = \varepsilon_0 = 1$ переходит в соответствующее выражение работы [3] и показывает, что рассеяние в основном происходит на малые углы $\theta \sim \hbar\omega/E$. Для нас представляет интерес случай $E \gtrsim \hbar\omega$. Из (28) и (29) мы видим, что в этом случае рассеяние в основном происходит на большие углы, в частности, рассеяние назад — того же порядка, что и вперед. По-видимому, рассеяние назад может быть изучено экспериментально без особого труда и может явиться поэтому удобным средством для определения энергии плазмона.

Интегрируя (28) по всем углам, получим полную вероятность возбуждения плазмона падающим электроном:

$$W = \frac{2\pi e^2}{\hbar v(3\varepsilon+\varepsilon_0)} \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E}\right); \quad (32)$$

$$\max W = 4\pi e^2 / 3(3\varepsilon+\varepsilon_0) \hbar \sqrt{6\hbar\omega/m} \quad (33)$$

при $E = 3\hbar\omega$.

Для Ag с $\hbar\omega \approx 3,75$ эв/ $\sqrt{2}$ имеем $\max W > 1$. Этот результат не нужно понимать буквально, поскольку мы пользовались теорией возмущений, но он указывает, что вероятность возбужде-

ния плазмона практически становится равной 1. На наш взгляд, столь большая вероятность возбуждения поверхностных плазмонов является важным результатом; поверхностные плазмоны играют, по-видимому, существенную роль при рассмотрении вопросов, связанных с прохождением электронов через границу плазмы. Конкретные примеры такого характера мы надеемся рассмотреть отдельно.

В заключение выражают благодарность В. Л. Гинзбургу за интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{k^2 \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (I)$$

Разделяя $\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)$ на вещественную и мнимую части $\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) + i\varepsilon''_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)$ перепишем (I) в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) dk_z}{k^2 |\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)|^2} - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) dk_z}{k^2 |\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)|^2}. \quad (II)$$

Во второй интеграл в силу экспоненциальной зависимости $\varepsilon''_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)$ главный вклад дают $k_z \sim \omega/v_T \gg k_x$, где $|\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)|^2$ — плавная функция; поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Кроме того, в первом приближении можно положить $k_x=0$; тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int \frac{\varepsilon''_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) dk_z}{k^2 |\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)|^2} &\approx \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{v_T}{\omega_1 |\varepsilon_{\parallel}|^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-1/z^2}}{z^5} dz = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \frac{v_T}{\omega_1 |\varepsilon_{\parallel}|^2 |_{k \sim \omega/v_T}}, \end{aligned} \quad (III)$$

где ω_1 соответствует ω при $k_x=0$. (Здесь мы использовали явное выражение $\varepsilon''_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)$, полученное для свободного электронного газа.)

Первый интеграл в (II) перепишем в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) dk_z}{k^2 |\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)|^2} \equiv \frac{1}{k_x \varepsilon(\omega)} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(\omega) \varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) - |\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)|^2}{k^2 \varepsilon(\omega) |\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)|^2} dk_z. \quad (IV)$$

В интеграле, стоящем справа, в первом приближении можно положить $k_x=0$; тогда, вводя безразмерную переменную интегрирования $z=k_z v_T / \omega$, можно записать

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) dk_z}{k^2 |\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega)|^2} \approx \frac{1}{k_x \varepsilon(\omega)} - \frac{2}{\varepsilon(\omega)} \frac{v_T}{\omega_1} a\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right), \quad (V)$$

где

$$a\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{|\varepsilon_{\parallel}(z)|^2 - \varepsilon(\omega) \varepsilon'_{\parallel}(z)}{z^2 |\varepsilon_{\parallel}(z)|^2}. \quad (VI)$$

Собирая отдельные слагаемые, получим окончательно

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{k_z^2 \epsilon_{||}(k, \omega)} \simeq \frac{1}{k_x \epsilon(\omega)} - \frac{2}{\epsilon(\omega)} \frac{v_T}{\omega_1} a \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right) -$$

$$- i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \frac{v_T}{\omega_1 |\epsilon_{||}|_{z \sim 1}^2}$$
(VII)

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Власов, Уч. зап. МГУ, вып. 75, кн. 1, 1945; Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, **16**, 574 (1946).
2. R. H. Ritchie, Phys. Rev., **106**, 874 (1957).
3. E. A. Stern, R. A. Ferrell, Phys. Rev., **120**, 139 (1960).
4. R. A. Ferrell, Phys. Rev., **111**, 1214 (1958).
5. Н. Каназава, Progr. Theor. Phys., **26**, 851 (1961).
6. Б. Л. Желнов, ЖЭТФ, **40**, 170 (1961); Э. А. Канер, В. М. Яковенко, ЖЭТФ, **42**, 471 (1962); В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 478 (1962).
7. В. П. Силин, С. П. Фетисов, ЖЭТФ, **41**, 159 (1961).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
9. В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал, ЖЭТФ, **34**, 139 (1958); А. А. Абрикосов, П. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, М., 1962.
10. В. П. Силин, А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Атомиздат, М., 1961.
11. Г. С. Крейнин, Радиотехника и электроника, **7**, 182, 209б (1962).
12. С. Кипп, Zeit. Phys., **167**, 53 (1962).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 июня 1963 г.

ELECTROMAGNETIC WAVES IN A HALF SPACE PLASMA

Yu. A. Romanov

By the kinetic equation method plasma energy spectrum of half space plasma has been considered assuming a mirror reflection of electrons from the boundary. The problem is considered of the excitation of the surface plasma waves by slow electrons.

Примечание при корректуре. 1. В качестве интерпретации дисперсионного соотношения поверхностных плазмонов интересно отметить следующее. Как известно, условием существования объемных продольных плазменных колебаний является равенство $\epsilon(\omega) = 0$. В случае поверхностного плазмона без учета пространственной дисперсии флюктуаций заряда, образующие его, локализованы точно на границе раздела плазма—диэлектрик. Эти заряды взаимодействуют между собой как расположенные в однородной эффективной среде с $\epsilon_{\text{эфф}}(\omega) = \frac{1}{2} [\epsilon(\omega) + \epsilon_0]$ (см. раздел «Электростатика» любо-

бого курса макроскопической электродинамики). И, следовательно, условием существования плазменных колебаний в данном случае будет $\epsilon_{\text{эфф}}(\omega) = 0$, что сразу дает (1).

2. Линейная зависимость энергии поверхностных плазмонов от $k_{||}$ (формула (9)) приводит к линейной зависимости энергии потерь на их возбуждение от угла рассеяния падающего заряда, в противоположность квадратичной зависимости для потерь на возбуждение объемных плазмонов. Эта зависимость обусловлена пространственной дисперсией и имеет, согласно (9), вид

$$\Delta E \simeq \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \epsilon_0}} + \epsilon_0 v v_T 0. \quad (34)$$

Существующие экспериментальные данные [12], по-видимому, довольно хорошо согласуются с (34).

О КИНЕТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

А. А. Андронов, В. В. Железняков, М. И. Петелин

Рассматривается кинетическая неустойчивость однородной магнитоактивной плазмы, функция распределения которой по импульсам вдоль (p_{\parallel}) и поперек (p_{\perp}) статического магнитного поля H_0 равна $f = G \exp[-(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2 a_{\parallel}^{-2} - (p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2 a_{\perp}^{-2}]$. Электромагнитные возмущения представляют собой плоскую волну, распространяющуюся под произвольным углом к магнитному полю H_0 . Полученные критерии неустойчивости допускают простую квантową интерпретацию. Приведено выражение для коэффициента поглощения электромагнитных волн вблизи первой гармоники гирочастоты в равновесной плазме.

В работе [1] было рассмотрено распространение плоских электромагнитных волн вдоль однородного магнитного поля $H_0 = H_0 z_0$ в однородной плазме, функция распределения электронов которой по продольным ($p_{\parallel} = p z_0$) и поперечным ($p_{\perp} = ||p z_0||$) импульсам $f(p_{\parallel}, p_{\perp})$ имеет максимум, смещенный с осью p_{\parallel} *. Плазма описанного типа является неравновесной: при определенных условиях электромагнитное возмущение в виде однородной волны $E = E_0 e^{ikr - i\omega t}$ с действительным волновым вектором k экспоненциально нарастает во времени ($\text{Im } \omega > 0$). Механизмом, обеспечивающим рост высокочастотных возмущений, является группировка и перераспределение электронов по энергиям под действием электромагнитного поля, что аналогично механизму рассмотренного Ландау [2] затухания плазменных волн в максвелловской плазме.

В настоящей статье проведенное в [1] рассмотрение обобщается на случай распространения электромагнитных волн под произвольным углом Θ к магнитному полю $H_0 (k = k_x x_0 + k_z z_0 = k(x_0 \sin \Theta + z_0 \cos \Theta))$. Характерной особенностью этого случая является то, что при $\Theta \neq 0$, в отличие от продольного распространения ($\Theta = 0$) в слаборелятивистской плазме наиболее быстрое нарастание электромагнитных волн имеет место не только для частот, близких к электронной гирочастоте, но также и для частот, близких к ее гармоникам.

В статье используются метод кинетического уравнения и полуквантовый метод, которые для слаборелятивистской плазмы приводят к одинаковым выражениям для инкремента электромагнитной волны.

1. ИНКРЕМЕНТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Метод кинетического уравнения. Исследование распространения плоских электромагнитных волн в однородной магнитоактивной плазме может быть сведено к отысканию решений дисперсионного уравнения [3]

$$\det [c^2(k^2 \delta \alpha \beta - k_{\alpha} k_{\beta}) - \omega^2 \epsilon_{\alpha \beta}(\omega, k)] = 0, \quad (1)$$

* Подобного рода распределения электронов могут, по-видимому, реализоваться в магнитных ловушках, в некоторых областях короны Солнца, а также в радиационных поясах Земли.

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, c — скорость света, $\epsilon_{\alpha\beta}$ — тензор диэлектрической проницаемости плазмы, определяемый выражениями [4]

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - i^{\alpha+\beta} L_{\alpha\beta}; \quad (2)$$

$$L_{\alpha\beta} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{D_{\alpha\beta}^s(\omega, \mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp})}{\omega - \omega_s(p_{\parallel}, p_{\perp})}. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega_s = \frac{1}{m} (s m_0 \Omega_H + k_z p_{\parallel}),$$

$$D_{\alpha\beta}^s = \frac{\pi}{2} \frac{m_0 \Omega_0^2}{m^2 \omega^2} p_{\perp} S_{\alpha}^s R_{\beta}^s,$$

$$S_x^s = p_{\perp} (J_{s-1} + J_{s+1}), \quad R_x^s = A (J_{s-1} + J_{s+1}),$$

$$S_y^s = p_{\perp} (J_{s-1} - J_{s+1}), \quad R_y^s = A (J_{s+1} - J_{s-1}),$$

$$S_z^s = -2p_{\parallel} J_s, \quad R_z^s = C (J_{s-1} + J_{s+1}) - 2B J_s,$$

$$A = (m \omega - k_z p_{\parallel}) \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} + k_z p_{\perp} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}},$$

$$B = m \omega \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}}, \quad C = k_x \left(p_{\perp} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right),$$

где e , m_0 и $m = \sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}$ — заряд, масса покоя и релятивистская масса электрона, $\Omega_H = |e|H_0/m_0c$ — нерелятивистская гирочастота электронов, $\Omega_0 = (4\pi e^2 N/m_0)^{1/2}$ — плазменная частота, N — концентрация электронов, $J_q(\chi)$ — функция Бесселя порядка q с аргументом $\chi = k_x p_{\perp}/m_0 \Omega_H$.

Выражение для тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ выведено в предположении о том, что амплитуда высокочастотного поля, действующего на каждый электрон, монотонно нарастает во времени [4]. Так, например, для волн с действительным волновым вектором это условие выполняется при $\text{Im } \omega > 0$. В случае нарушения указанного условия в качестве тензора диэлектрической проницаемости следует использовать аналитическое продолжение функции (2): при непрерывном изменении ω и \mathbf{k} контур интегрирования в плоскости комплексных значений p_{\parallel} должен деформироваться так, чтобы, оставаясь на том листе римановой поверхности, где на действительной оси $m(p_{\parallel}, p_{\perp}) > 0$, не пересекать особых точек подынтегрального выражения. В частности, для волн с малыми величинами $\text{Im } \omega$ и $\text{Im } k_x$

$$|\text{Im } \omega| \ll |\omega|, \quad |\text{Im } k_x| \ll |k|$$

описанным выше способом (аналогичные преобразования проводились в работе [1]) могут быть получены выражения для $L_{\alpha\beta}$:

$$\text{Re } L_{\alpha\beta} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{D_{\alpha\beta}^s(\omega, \mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp})}{\omega - \omega_s(p_{\parallel}, p_{\perp})}, \quad (4)$$

$$\operatorname{Im} L_{\alpha\beta} = -\pi \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \times \\ \times D_{\alpha\beta}^s(\omega, \mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp}) \delta(\omega - \omega_s(p_{\parallel}, p_{\perp})), \quad (5)$$

справедливые при любом знаке $\operatorname{Im} \omega$ и $\operatorname{Im} k_{\alpha}$. В формулах (4) и (5) под ω и \mathbf{k} подразумеваются их действительные части, причем в дальнейшем без ограничения общности будем считать $\operatorname{Re} \omega > 0$. В выражении для $\operatorname{Re} L_{\alpha\beta}$ интегралы имеют смысл главных значений. Мнимые части $L_{\alpha\beta}$ (и, как будет выяснено в дальнейшем, обусловленный ими инкремент волны) определяются, согласно (5), распределением электронов по импульсам в окрестности кривых

$$\omega_s(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \omega. \quad (6)$$

Соотношение (6) имеет место для тех электронов, релятивистская гирочастота которых в системе координат, движущейся относительно наблюдателя со скоростью $V_{\parallel} = p_{\parallel}/m$, совпадает с частотой электромагнитной волны. В зависимости от величины отношения $k_z^2 c^2/\omega^2$ кривые (6) представляют собой или гиперболы (при $\omega^2 < k_z^2 c^2$; см. рис. 1) или эллипсы (при $\omega^2 > k_z^2 c^2$; см. рис. 2). В последнем случае

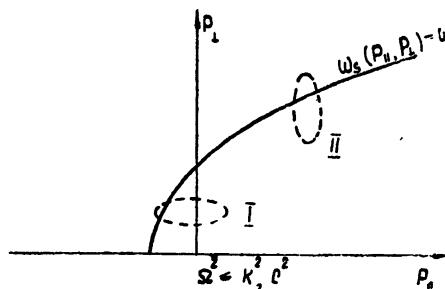


Рис. 1.

условие (6) может быть выполнено при $m > 0$ только для положительных s , превышающих

$$s = (\omega^2 - k_z^2 c^2 / \Omega_H^2)^{1/2}.$$

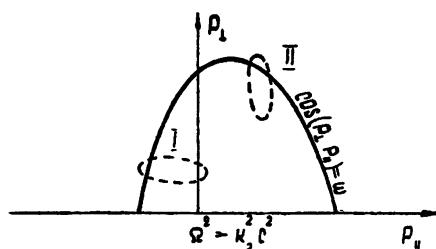


Рис. 2.

В дальнейшем рассмотрение будет ограничено случаем достаточно малой дисперсии распределения электронов по импульсам, когда тензор $\epsilon_{\alpha\beta}$, рассчитанный по формулам (2)–(5), мало отличается от тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы [5]:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2 - \Omega_H^2}, \quad \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = \frac{i \Omega_0^2 \Omega_H}{\omega (\omega^2 - \Omega_H^2)},$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \frac{\Omega_0^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0.$$

При этом дисперсионное уравнение (1) может быть преобразовано к виду

$$Q(\omega, \mathbf{k}) - \beta(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (1a)$$

где

$$Q = (1 - u - v + uv \cos^2 \Theta) n^4 - (2(1 - v)^2 + uv(1 + \cos^2 \Theta) - 2u) n^2 - (1 - v)[u - (1 - v)^2],$$

$$u = \Omega_H^2 / \omega^2, \quad v = \Omega_0^2 / \omega^2, \quad n_a = k_a c / \omega,$$

а малая поправка β обусловлена дисперсией распределения электронов по импульсам.

Будем искать частоты плоских электромагнитных волн с заданным действительным волновым вектором \mathbf{k} , близких к нормальным (обыкновенной и необыкновенной) волнам холодной плазмы, приняв в качестве нулевого приближения корни уравнения

$$Q(\Omega, \mathbf{k}) = 0.$$

Более точные значения частот при условиях

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial \omega} \right| \gg \left| \frac{\beta}{\omega} \right|, \quad \left| \frac{\partial Q}{\partial \omega} \right| \gg \left| \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|, \quad (7)$$

могут быть получены на основании соотношения (1a) методом возмущений:

$$\omega = \Omega + \frac{\beta}{\partial Q / \partial \Omega}.$$

Инкремент электромагнитного поля в соответствии с последней формулой равен

$$\text{Im } \omega = \frac{\text{Im } \beta}{\partial Q / \partial \Omega}. \quad (8)$$

Входящая сюда величина $\text{Im } \beta$, согласно (5), определяется выражениями

$$\text{Im } \beta = \pi(u-1) \sum_s \int_0^\infty dp_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel M^s(\omega, \mathbf{k}, p_\parallel, p_\perp) \delta[\omega - \omega_s(p_\parallel, p_\perp)];$$

$$M^s = (n^2 - 1) [D_{xx}^s (1 - n_x^2) + D_{zz}^s (1 - n_z^2) - D_{yy}^s + (D_{xz}^s + D_{zx}^s) n_x n_z] + v [D_{xx}^s (1 - n^2) + D_{yy}^s (n_z^2 - 1) + (1 - u)^{-1} [(2 -$$

$$-n^2 - n_z^2) D_{zz}^s + n_x n_z (D_{xz}^s + D_{zx}^s) + (1 - n_x^2) (D_{xx}^s - D_{yy}^s + 2\sqrt{u} D_{xy}^s) + \\ + n_x n_z \sqrt{u} (D_{zy}^s - D_{yz}^s)]\} + v^2 (1 - u)^{-1} (D_{yy}^s - D_{xx}^s - D_{zz}^s - 2\sqrt{u} D_{xy}^s). \quad (9)$$

2. КВАНТОВЫЙ МЕТОД

С квантовой точки зрения коэффициент нарастания электромагнитной волны определяется соотношением между процессами истинного поглощения и индуцированного испускания (см., например, [6–8]). Пусть

$$W_s(\mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp}) \delta(\varepsilon - \varepsilon' + \hbar\omega) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (10)$$

представляет собой вероятность в единицу времени того, что электрон при переходе из состояния $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ в состояние $(p_{\parallel} + \Delta p_{\parallel}, p_{\perp} + \Delta p_{\perp})$ излучит на s -ой гармонике гирочастоты фотон, соответствующий нормальному волне с волновым вектором в интервале $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})$. В выражении (10) ε и ε' — соответственно энергия электрона в состояниях $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ и $(p_{\parallel} + \Delta p_{\parallel}, p_{\perp} + \Delta p_{\perp})$, \hbar — постоянная Планка. Из закона сохранения суммарного импульса электрона и фотона следует

$$\Delta p_{\parallel} = -\hbar k_z, \quad \Delta p_{\perp} = -s\hbar\omega_H m_0 / p_{\perp}. \quad (11)$$

Тогда выражение для инкремента электромагнитной волны имеет вид (см. [9])

$$\text{Im } \omega = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \int W_s(\mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp}) \delta(\varepsilon - \varepsilon' + \hbar\omega) \times \\ \times N \{ f(p_{\perp} + \Delta p_{\perp}, p_{\parallel} + \Delta p_{\parallel}) - f(p_{\perp}, p_{\parallel}) \} d^3 p,$$

которое в классическом пределе (при $\hbar \rightarrow 0$) может быть преобразовано к форме

$$\text{Im } \omega = -\frac{(2\pi)^4}{2} N \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} P_s(\mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp}) \times \\ \times \delta(\omega - \omega_s(p_{\parallel}, p_{\perp})) \left[\frac{s m_0 \Omega_H}{\omega} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} + \frac{k_z p_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} \right]. \quad (12)$$

Здесь $P_s(\mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp}) \delta(\omega - \omega_s)$ — классическая интенсивность излучения электрона нормальной волны на s -ой гармонике гирочастоты в интервале волновых векторов $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + d\mathbf{k})$.

Величины $P_s(\mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp})$ для холодной плазмы вычислены Эйдманом [10]:

$$P_s(\mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp}) = \frac{e^2 \gamma^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\text{grp}})}{2\pi n^2 m \omega} \{ p_{\perp} J'_s(\chi) + [\alpha s p_{\perp} \chi^{-1} + \beta p_{\parallel}] J_s(\chi) \}, \quad (13)$$

где \mathbf{v}_{grp} — групповая скорость волны, а параметры α , β и γ определяются поляризацией нормальных волн и условием нормировки:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1+K^2}; \quad \alpha = K \cos \Theta + \Gamma \sin \Theta; \quad \beta = \Gamma \cos \Theta - K \sin \Theta;$$

$$K = \frac{2\sqrt{u} (1-v) \cos \Theta}{u \sin^2 \Theta \pm \sqrt{u^2 \sin^2 \Theta + 4u (1-v)^2 \cos^2 \Theta}} ;$$

$$\Gamma = \frac{v \sqrt{u} \sin \Theta + K u v \sin \Theta \cos \Theta}{1 - u - v + u v \cos^2 \Theta} ; \quad (14)$$

знак (+) в выражении для K относится к обычновенной волне, знак (-) — к необыкновенной.

Сопоставление квантового и классического методов. Доказательство тождественности выражений (12) и (8) для инкремента волн в общем виде не производилось (ввиду его сложности). Однако было доказано, что формулы (12) и (8) совпадают для волн, распространяющихся вдоль магнитного поля ($k_x = 0$), а также для волн, распространяющихся под произвольным углом к магнитному полю, в случае, когда их частота близка к одной из гармоник гирочастоты электронов*.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ПЛАЗМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим два простейших примера функций распределения электронов по импульсам, имеющей максимум при $p_{\perp} = p_{\perp}^0$ и $p_{\parallel} = p_{\parallel}^0$, в общем случае отличных от нуля:

$$f = G \exp [-(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2/a_{\parallel}^2 - (p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2/a_{\perp}^2] \quad (15)$$

и

$$f = (1 - \varepsilon) \delta(p) + \varepsilon G \exp [-(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2/a_{\parallel}^2 - (p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2/a_{\perp}^2] \quad (16)$$

$$(\varepsilon \ll 1).$$

Здесь

$$G = \left\{ 2\pi^{3/2} a_{\parallel} a_{\perp}^2 \int_0^{\infty} \xi \exp [-(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2/a_{\parallel}^2 - (p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2/a_{\perp}^2] d\xi \right\}^{-1}$$

— нормировочный множитель. Функция распределения в форме (15) при $p_{\perp}^0 = p_{\parallel}^0 = 0$, $a_{\parallel} = a_{\perp} \ll m_0 c$ переходит в максвелловскую. Функция (16) описывает холодную плазму, пронизываемую разреженным электронным потоком.

Введем следующие ограничения: 1) плазма является слаборелятивистской:

$$\max \{p_{\perp}^0, p_{\parallel}^0, a_{\parallel}, a_{\perp}\} \ll m_0 c, \quad |k_x|(p_{\perp}^0 + a_{\perp}) \ll m_0 \Omega_H;$$

2) максимум функции распределения расположен достаточно далеко от кривых $\omega_s(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \omega$, так что для электронов с импульсами, удовлетворяющими условию $(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2/a_{\parallel}^2 + (p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2/a_{\perp}^2 \sim 1$, выполняются неравенства

$$(|\omega - \omega_s(p_{\parallel}, p_{\perp})|/\omega_H)^2 \gg n^2 (p/mc)^2 J_{|s|-1}^2 \frac{\omega_0^2}{\Omega_0^2} \quad (s=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

* Соответствующее доказательство для волн на высоких ($s \geq 2$) гармониках гирочастоты электронов было проведено Е. Я. Злотник.

где $\omega_0^2 = \Omega_0^2$ для плазмы с функцией распределения (15) и $\omega_0^2 = \varepsilon\Omega_0^2$ для плазмы с функцией распределения (16). Приведенные ограничения представляют собой достаточные условия, обеспечивающие выполнение неравенств (7)*.

Как показывают оценки, для слаборелятивистской плазмы наибольшую величину имеют инкременты тех волн, частоты которых близки к гармоникам гирочастоты электронов:

$$|\omega - q\omega_H| \ll \Omega_H \quad (q=1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

в случае, когда в плазме имеются электроны, для которых частота $\omega_q(p_{\parallel}, p_{\perp})$ совпадает с частотой ω :

$$q^2 > s^2. \quad (18)$$

Предполагая условия (17) и (18) выполненными, можно преобразовать выражения (8) и (12) для инкремента электромагнитной волны к виду

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega = \int_0^\infty dp_{\perp} p_{\perp}^2 J_{q-1}^2 \exp [-(p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2/a_{\perp}^2] \int_{-\infty}^\infty dp_{\parallel} \delta[\omega - \\ - \omega_q(p_{\parallel}, p_{\perp})] \frac{W_q(p_{\parallel})}{m} \left(k_z p_{\perp} \frac{p_{\parallel} - p_{\parallel}^0}{a_{\parallel}^2} + \right. \\ \left. + qm_0\Omega_H \frac{p_{\perp} - p_{\perp}^0}{a_{\perp}^2} \right) \exp \left[- \frac{(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2}{a_{\parallel}^2} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} W_q = -\frac{\pi^2}{2} G \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (\mathbf{k} V_{rp}) \frac{\gamma^2}{n^2} \left(1 + \alpha + \beta \frac{k_x p_{\parallel}}{m_0 \omega} \right)^2 = \\ = -\pi^2 G \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{u-1}{\partial Q/\partial \Omega} k_q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_q = (n^2 - 1)(2 - n_x^2) + v(2 - n^2 - n_z^2) + 2v \frac{1 - n_x^2 - v}{1 + \sqrt{u}} - \frac{2p_{\parallel}}{mc} n_x^2 n_z \times \\ \times \left(n^2 - 1 + \frac{v}{1 + \sqrt{u}} \right) + \left(\frac{p_{\parallel}}{mc} \right)^2 n_x^2 \left[(n^2 - 1)(1 - n_z^2) + v \frac{2 - n^2 - n_z^2 - v}{1 - u} \right]. \end{aligned}$$

При анализе выражения (19) ограничимся двумя предельными случаями.

1) Пусть дисперсия распределения электронов по поперечным импульсам настолько мала, что в формуле (19) можно пренебречь определяемой резонансным условием Допплера

$$\omega_q(p_{\parallel}, p_{\perp}) = \omega \quad (6a)$$

зависимостью продольного импульса p_{\parallel} и функции

$$L(p_{\parallel}) = \left[\frac{\exp [-(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2/a_{\parallel}^2]}{|k_z - \omega p_{\parallel}/mc^2|} \right]_{p_{\parallel} = p_{\parallel}(p_{\perp})}$$

* Следует заметить, однако, что неравенства (7) могут выполняться и при нарушении указанных ограничений. В частности, для максвелловской функции распределения последнее из указанных ограничений не является необходимым.

от поперечного импульса p_{\perp} :

$$\left| a_{\perp} \frac{\partial L}{\partial p_{\perp}} \right| \ll |L|, \quad \left| a_{\perp} \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial p_{\perp}} \right| \ll |p_{\parallel}|. \quad (20)$$

Тогда инкремент поля может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega = & \frac{a_{\perp}^{2q+1}}{[(q-1)!]^2} \left(\frac{k_x}{2m_0 \Omega_H} \right)^{2q-2} W[p_{\parallel}(p_{\perp}^0)] L(p_{\perp}^0) \times \\ & \times \left\{ \frac{k_z a_{\perp}}{a_{\parallel}^2} u_{2q+1} \left(\frac{p_{\perp}^0}{a_{\perp}} \right) [p_{\parallel}(p_{\perp}^0) - p_{\parallel}^0] + \frac{q m_0 \Omega_H}{a_{\perp}^2} \left[a_{\perp} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times u_{2q+1} \left(\frac{p_{\perp}^0}{a_{\perp}} \right) - p_{\perp}^0 u_{2q} \left(\frac{p_{\perp}^0}{a_{\perp}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$u_m(\xi) = \int_0^\infty dx x^m e^{-(x-\xi)^2}.$$

Соотношение параметров плазмы и плоской волны, соответствующее этому случаю, условно изображено на рис. 1 и 2, где цифрой I обозначен эллипс $(p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2/a_{\perp}^2 + (p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2/a_{\parallel}^2 = 1$.

Для плоской волны, распространяющейся в максвелловской плазме ($p_{\parallel}^0 = p_{\perp}^0 = 0$, $a_{\parallel} = a_{\perp} = \beta m_0 c \sqrt{2}$, $\beta^2 = \varepsilon T / m_e c^2$, T — температура электронов, ε — постоянная Больцмана) под углом к магнитному полю, не слишком близком к $\pi/2$ (первое из ограничений (20)), при резонансном взаимодействии электромагнитного поля с плазмой на высоких ($q \gg 2$) гармониках гирочастоты выражение для $\text{Im } \omega$ переходит в соответствующее выражение, полученное в работе [13] и (с точностью до множителя $1/2$) в работе [14]. Однако величина $\text{Im } \omega$ для волны, удовлетворяющей резонансному условию (17) при $q = 1$,

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega = & \sqrt{2\pi} \frac{(1 - \sqrt{u})^2}{\beta n |\cos \Theta|} \frac{L}{Q'_{\omega}} \exp \left[- \frac{(1 - \sqrt{u})^2}{2n^2 \beta^2 \cos^2 \Theta} \right]; \\ L = & (v \cos 2\Theta - 1) n^4 + (2 - 2v \cos^2 \Theta - v^2 \sin^2 \Theta - \\ & - \frac{v^2}{4} \operatorname{tg}^2 \Theta) n^2 + (v - 1) \left(1 - \frac{v^2}{4} \right) + \frac{v^2}{4} \operatorname{tg}^2 \Theta (2 - v) \end{aligned} \quad (21a)$$

отличается от выведенной в работе [14], что связано, по-видимому, с некорректным учетом в указанной статье членов дисперсионного уравнения, соответствующих члену $\beta_i k_x p_{\parallel} / m_0 \omega$ в выражении W_q . Для частных значений параметров, в частности, при $v \rightarrow 0$, приведенное выражение для $\text{Im } \omega$ совпадает с соответствующим выражением работы [16]. Более детальное сопоставление выражения (21) с формулой [16] не проводилось.

Если максимум функции распределения расположен на оси p_{\parallel} ($p_{\perp}^0 = 0$), условие неустойчивости плазмы относительно электромагнитного возмущения в виде плоской волны может быть записано следующим образом (см. (21)):

$$a_{\perp}^2 k_z [p_{\parallel}(p_{\perp}^0) - p_{\parallel}^0] + a_{\parallel}^2 q m_0 \Omega_H < 0. \quad (22)$$

Отсюда, в частности, следуют выведенные в работах [7] и [17] критерии кинетической неустойчивости плазмы, обусловленные соответственно «анизотропией» поперечных и продольных температур электронов и наличием в неподвижной плазме разреженного электронного потока с изотропной дисперсией распределения электронов по импульсам.

Выражение (21) для инкремента поля электромагнитной волны позволяет рассмотреть и другой тип кинетической неустойчивости плазмы, связанный с тем, что максимум функции распределения смещен с осью $p_{\parallel}(p_{\perp}^0 \neq 0)$. В частности, если отношение a_{\perp}/p_{\perp}^0 достаточно мало ($a_{\perp}/p_{\perp}^0 \ll 1$), условие $\text{Im } \omega > 0$ может быть записано следующими двумя эквивалентными способами:

$$\begin{aligned} k_z [p_{\parallel}(p_{\perp}^0) - p_{\parallel}^0] + q^2 m_0 \Omega_H (a_{\parallel}/p_{\perp}^0)^2 &< 0 ; \\ \omega m + q^2 m_0 \Omega_H (a_{\parallel}/p_{\perp}^0)^2 - q m_0 \Omega_H - k_z p_{\parallel}^0 &< 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Условия (22) и (23) могут быть легко получены из простых квантовых соображений. Действительно, для нарастания электромагнитной волны необходимо, чтобы при излучении фотонов электроны переходили из состояния с большей «населенностью уровней» в состояние с меньшей «населенностью уровней». Это имеет место, если производная

$$\delta_1 = \frac{\Delta p_{\perp}}{\Delta p_{\parallel}} = \frac{q m_0 \Omega_H}{p_{\perp} k_z},$$

определенная изменением p_{\perp} и p_{\parallel} при квантовых переходах (11), была меньше при $p_{\perp} > p_{\perp}^0$ (больше при $p_{\perp} < p_{\perp}^0$) производной

$$\delta_2 = \frac{dp_{\perp}}{dp_{\parallel}} = - \frac{(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0) a_{\perp}^2}{(p_{\perp} - p_{\perp}^0) a_{\parallel}^2}$$

вдоль линии постоянной функции распределения. Если $p_{\perp}^0 = 0$, то из условия $\delta_1 < \delta_2$ получаем неравенство (22); если $p_{\perp}^0 = 0$, $a_{\parallel} = a_{\perp} \ll p_{\perp}^0$, то неравенство $\delta < \delta_2$ для $p_{\perp} = p_{\perp}^0 + a_{\perp}$ запишется в виде

$$q \frac{a}{p_{\perp}^0} < \frac{q \Omega_H - \omega}{\Omega}, \quad (24)$$

тогда как условие (23) при этом имеет вид

$$\left(q \frac{a}{p_{\perp}^0} \right)^2 < \frac{q \Omega_H - \omega}{\Omega_H}. \quad (23a)$$

Отличие критериев неустойчивости (23) и (24) связано с тем, что неравенство (24) требует нарастания электромагнитного поля при переходах всех резонансных частиц, тогда как условие (23a) представляет собой интегральный критерий неустойчивости.

2) При достаточно малой дисперсии распределения электронов по продольным импульсам*

* Заметим, что неравенства (25) могут быть выполнены и при $a_{\parallel} \sim a_{\perp}$, если угол Θ между волновым вектором \mathbf{k} и магнитным полем \mathbf{H}_0 близок к $\pi/2$ (квазиперечное распространение).

$$|a_{\parallel} dp_{\perp}(p_{\parallel}^0)/dp_{\parallel}^0| < \min \{p_{\perp}(p_{\parallel}^0)/q, a_{\perp}^2/|p_{\perp}(p_{\parallel}^0) - p_{\perp}^0|, |p_{\perp}(p_{\parallel}^0) - p_{\perp}^0|\} \quad (25)$$

(на рис. 1 и 2 цифрой II обозначен соответствующий этому случаю эллипс $(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2 a_{\parallel}^{-2} + (p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2 a_{\perp}^{-2} = 1$) в интеграле, входящем в выражение (19) для $\text{Im } \omega$, можно пренебречь зависимостью p_{\perp} от p_{\parallel} , определяемой резонансным условием Допплера (6а). В результате инкремент электромагнитной волны может быть преобразован к виду

$$\text{Im } \omega = \sqrt{\pi} (a_{\parallel}/a_{\perp}^2) m_0^2 c^2 H [p_{\perp} J_{q-1}^2 \exp [-(p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2/a_{\perp}^2]]|_{p_{\perp}=p_{\perp}(p_{\parallel}^0)}.$$

Здесь $H = W_q(0) [p_{\perp}(p_{\parallel}^0) - p_{\perp}^0]$ для волн с $q \geq 2$ и $H = V[p_{\perp}(p_{\parallel}^0) - p_{\perp}^0] + U p_{\perp}(p_{\parallel}^0)$ для волн с $q = 1$, $U = \omega_1 n_2 a_{\perp}^2 / 2m_0^2 c^2$, $V = \omega_0 + \omega_2 a_{\parallel}^2 / 2m_0^2 c^2$. Величины ω_{λ} представляют собой коэффициенты разложения функции W_1 по степеням $(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)/mc$:

$$W_1 = \sum_{\lambda=0}^2 \omega_{\lambda} [(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)/mc]^{\lambda}.$$

Согласно приведенному выражению для $\text{Im } \omega$ состояние плазмы является неустойчивым при

$$H > 0.$$

Для электромагнитных волн, взаимодействующих с плазмой на высоких ($q \geq 2$) гармониках гирочастоты электронов, а также для электромагнитных волн с $q = 1$ в случае, когда отношение $a_{\perp}^2 p_{\perp}(p_{\parallel}^0)/m_0^2 c^2 [p_{\perp}(p_{\parallel}^0) - p_{\perp}^0]$ достаточно мало:

$$|V[p_{\perp}(p_{\parallel}^0) - p_{\perp}^0]| \gg |U p_{\perp}(p_{\parallel}^0)|,$$

неравенство $H > 0$ выполняется, если

$$p_1(p_{\parallel}^0) < p_{\perp}^0.$$

Это неравенство имеет простой физический смысл: в условиях, когда зависимостью поперечного импульса и интенсивности излучения электрона от продольного импульса можно пренебречь и условие большей «населенности верхних уровней» по сравнению с «населенностью нижних уровней» сводится к требованию

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \right)_{p_{\perp}=p_{\perp}(p_{\parallel}^0)} < 0,$$

эквивалентному неравенству (26).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 619 (1961).
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 576 (1946).
3. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
4. В. Д. Шафранов, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 416.
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960, стр. 112.
6. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, Астрон. ж., 35, 694 (1958).
7. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 14 (1959).

8. Б А Трубников, ДАН СССР, 118, 913 (1958), Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М, 1958, стр 305.
9. А И Ахиезер, В. Ф Алексин, В Г Барьяхтар, С. В Пелетминский, ЖЭТФ, 42, 552 (1962).
10. В Я Эйдман, ЖЭТФ, 34, 131 (1958); 36, 1335 (1959).
11. В. В. Железняков, Изв высш. уч. зав—Радиофизика, 7, 67 (1964).
12. В. И Пистунович, В Д Шафранов, Ядерный синтез, 1, 189 (1961)
13. В. И Пахомов, Диссертация, ГГУ, 1963, В. И Пахомов, К Н Степанов, ЖЭТФ, 38, 1564 (1960).
14. Б. Н Гершман, ЖЭТФ, 38, 912 (1960).
15. Р. З Сагдеев и В Д Шафранов, ЖЭТФ, 39, 181 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 апреля 1963 г.

ON THE KINETIC INSTABILITY OF UNIFORM MAGNETOACTIVE PLASMA

A. A. Andronov, V. V. Zheleznyakov, M. I. Petelin

Kinetic instability of uniform magnetoactive plasma is considered the momentum distribution function of which is $f = G \exp [-(p_{\parallel} - p_{\parallel}^0)^2 a_{\parallel}^{-2} - (p_{\perp} - p_{\perp}^0)^2 a_{\perp}^{-2}]$ where (p_{\parallel}) and (p_{\perp}) are the longitudinal and transverse components of momentum correspondingly. The electromagnetic perturbations are plane waves propagating at arbitrary angles to the magnetic field H_0 .

Instability criteria obtained admit a simple quantum interpretation. The expression is given of the absorption coefficient for electromagnetic waves near the first gyrofrequency harmonic in the equilibrium plasma.

О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

Н. П. Гиоргадзе, Н. Л. Цинцадзе

Рассматривается распространение волн вдоль постоянного магнитного поля в плазме. В приближении малых нелинейностей найдены амплитуды и частоты обертонаов, возникающих в результате взаимодействия волн линейного приближения.

Динамика полностью ионизованной плазмы без столкновений относительно проста до тех пор, пока отклонения физических величин, характеризующих ее состояние, от некоторых стационарных значений могут считаться малыми. Волновые процессы в такой «линеаризованной» среде сводятся к некоторому набору независимых волн, каждой из которых асимптотически соответствует свой закон дисперсии. Так, например, в двухкомпонентной плазме вдоль магнитного поля могут распространяться обыкновенная и необыкновенная электромагнитные волны, а также продольные возмущения, разделяющиеся (при определенных условиях) на высокочастотную и низкочастотную ветви [1]. Возмущение стационарного фона коллективными эффектами столь мало, что изменением во времени как начального распределения, так и спектра коллективных возбуждений можно пренебречь.

Линейная теория хорошо описывает плазму, находящуюся вблизи термодинамического равновесия. На практике часто, однако, приходится иметь дело с такими состояниями, в которых либо за счет неустойчивостей, либо за счет внешних воздействий отклонения физических величин от стационарных значений могут оказаться значительными. Два существенно новых момента являются следствием этого обстоятельства. С одной стороны, резко возрастает взаимодействие коллективных движений с движением отдельных, в особенности «резонансных» частиц. Это приводит к медленному изменению стационарного фона и спектра коллективных возбуждений, что исследуется в рамках квазилинейной теории [2].

С другой стороны, увеличение амплитуд колебаний приводит к хорошо известному взаимодействию волн, независимых в рамках линейной теории; следствием такого взаимодействия является генерация нелинейных обертонаов и комбинированных частот, усиление одних волн другими, а также трансформация волн [3–5].

Эти эффекты наблюдались экспериментально [6], что дает основание думать об использовании плазмы в качестве генератора, либо усилителя [5]. Вместе с тем они представляют интерес с точки зрения изучения перераспределения энергии между различными типами волн.

К сожалению, рассмотрение нелинейных эффектов наталкивается на серьезные математические трудности, сильно сужающие класс задач, допускающих точные решения. Поэтому в ряде случаев прибегают к приближенному решению, используя при этом метод малых нелинейностей [3,4]. В настоящей работе этот метод применяется для исследования волновых процессов, развивающихся вдоль внешнего магнитного поля.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Направим постоянное и однородное магнитное поле \mathbf{H}_0 вдоль оси z и будем считать, что двухкомпонентная плазма настолько разрежена, что эффектом близких соударений можно пренебречь. Тогда поведение плазмы удовлетворительно описывается системой уравнений для одночастичной функции распределения с самосогласованным полем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right\} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}} &= 0; \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где α — сорт частиц, e — заряд частицы, m — масса, F_α — функция распределения, \mathbf{E} и \mathbf{H} — переменные электрическое и магнитное поля соответственно. Кроме того,

$$\rho = \sum_\alpha e_\alpha \int d\mathbf{v} F_\alpha, \quad \mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha \int d\mathbf{v} \mathbf{v} F_\alpha. \quad (2)$$

Функцию распределения представим в виде двух слагаемых:

$$F_\alpha = f_{0\alpha} + f_\alpha,$$

первое из которых описывает стационарный фон, а второе — не малые, вообще говоря, отклонения. Всюду в дальнейшем будем считать стационарный фон заданным и неизменным во времени. Заметим, что сделанное допущение не оказывает влияния на получаемые ниже конкретные результаты.

Ограничивааясь малыми нелинейностями, введем параметр малости ε (который в конечных результатах следует положить равным единице) и все величины представим в виде рядов:

$$\begin{aligned} f_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_\alpha^{(n)}; \\ \mathbf{E} &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{E}^{(n)}; \\ \mathbf{H} &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{H}^{(n)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), можем получить систему уравнений, определяющих величины n -го приближения через предыдущие. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha^{(n)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha^{(n)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}^{(n)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \frac{\partial f_\alpha^{(n)}}{\partial \mathbf{v}} &= . \\ = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \sum_{l=1}^{n-1} \left\{ \mathbf{E}^{(l)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}^{(l)}] \right\} \frac{\partial f_\alpha^{(n-l)}}{\partial \mathbf{v}}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(n)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{(n)}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(n)}; \quad \operatorname{div} \mathbf{H}^{(n)} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(n)} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(n)}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{E}^{(n)} = 4\pi \rho^{(n)},$$

где

$$\rho^{(n)} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{v} f_{\alpha}^{(n)}, \quad \mathbf{j}^{(n)} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f_{\alpha}^{(n)}.$$

При $n = 1$ из (4) получаем обычные уравнения линейного приближения. Решая их методом Фурье, приходим к линейной функции распределения

$$\begin{aligned} f_{\alpha}^{(1)}(k\omega) = & -i \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ \frac{1}{2} E_1^{(1)}(k\omega) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_p} \frac{e^{i\theta}}{\omega - kv_z + \omega_{H\alpha}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} E_2^{(1)}(k\omega) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_p} \frac{e^{-i\theta}}{\omega - kv_z - \omega_{H\alpha}} + E_2^{(1)} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_z} \frac{1}{\omega - kv_z} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

и дисперсионным соотношениям

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega}{V \sqrt{2\pi} k v_{T\alpha}} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{k^2 c^2 - \omega^2} W \left(\frac{\omega + \omega_{H\alpha}}{V \sqrt{2} k v_{T\alpha}} \right) = 0 \quad (6)$$

(необыкновенная волна);

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega}{V \sqrt{2\pi} k v_{T\alpha}} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{k^2 c^2 - \omega^2} W \left(\frac{\omega - \omega_{H\alpha}}{V \sqrt{2} k v_{T\alpha}} \right) = 0 \quad (6a)$$

(обыкновенная волна);

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{V \sqrt{2\pi} k v_{T\alpha}} \frac{\partial}{\partial \omega} W \left(\frac{\omega}{V \sqrt{2} k v_{T\alpha}} \right) = 0, \quad (6b)$$

где

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x - t} dt;$$

$$\Omega_{\alpha}^2 = (4\pi e_{\alpha}^2 n_0)/m_{\alpha}; \quad \omega_{H\alpha} = (e_{\alpha} H_0)/m_{\alpha} c; \quad v_{T\alpha}^2 = \theta_{\alpha}/m_{\alpha};$$

$$E_{1,2}^{(1)}(k\omega) = E_x^{(1)}(k\omega) \mp i E_y^{(1)}(k\omega),$$

θ — азимутальный угол в пространстве скоростей, $k = k_z$ (продольное распространение), θ — температура в энергетических единицах.

Заметим, что фазовый множитель выбран в виде $kz - \omega t$, а в качестве стационарного распределения взято максвелловское с изотропной температурой:

$$f_{0\alpha} = \left(\frac{m_{\alpha}}{2\pi\theta_{\alpha}} \right)^{3/2} e^{-m_{\alpha} v^2/2\theta_{\alpha}}. \quad (7)$$

Наконец, в силу реальности физических величин имеет, например, место соотношение

$$\mathbf{E}^{(1)*} (\operatorname{Re} \omega + i \operatorname{Im} \omega, k) = \mathbf{E}^{(1)} (-\operatorname{Re} \omega + i \operatorname{Im} \omega, -k). \quad (8)$$

2. ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ

Продолжая итерационную процедуру, получаем уравнения второго приближения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}^{(2)}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha}^{(2)}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E}^{(2)} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \frac{\partial f_{\alpha}^{(2)}}{\partial \mathbf{v}} = \\ = - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E}^{(1)} \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} c} [\mathbf{v} \mathbf{H}^{(1)}] \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}}{\partial \mathbf{v}}; \\ \Delta \mathbf{E}^{(2)} - \nabla (\nabla \mathbf{E}^{(2)}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(2)}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}^{(1)}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(2)} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для преобразованных по Фурье переменных в этой системе получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha}^{(2)}(k, \omega)}{\partial \theta} + i \frac{\omega - kv_z}{\omega_{H\alpha}} f_{\alpha}^{(2)}(k\omega) = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{H\alpha}} \mathbf{E}^{(2)}(k\omega) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial \mathbf{v}} + \\ + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{H\alpha}} \int \left\{ \left(1 - \frac{k'v_z}{\omega'} \right) \mathbf{E}^{(1)}(k'\omega') + \frac{k'}{\omega'} \xi(\mathbf{v} \mathbf{E}^{(1)}(k'\omega')) \right\} \times \\ \times \frac{\partial f_{\alpha}^{(1)}(k - k', \omega - \omega')}{\partial \mathbf{v}} dk' d\omega'; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{E}^{(2)}(k\omega) = \frac{4\pi i c^2}{k^2 c^2 - \omega^2} \sum_{\alpha} \delta_{\alpha}^2 \left\{ \frac{\omega}{c^2} \int \mathbf{v} f_{\alpha}^{(2)}(k\omega) d\mathbf{v} - \xi k \int f_{\alpha}^{(2)}(k\omega) d\mathbf{v} \right\},$$

где ξ — орт z -направления. Решение этих уравнений дает

$$\begin{aligned} E_{1,2}^{(2)}(k\omega) = - \frac{2i\pi\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} \frac{1}{D_{1,2}} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \int dk' d\omega' \int \frac{d\mathbf{v} v_{\rho}}{\omega - kv_z \pm \omega_{H\alpha}} \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{k'v_z}{\omega'} \right) \frac{\partial^2 f_{0\alpha}/\partial v_{\rho} \partial v_z}{\Delta\omega - v_z \Delta k} + \frac{k'v_{\rho}}{\omega'} \frac{\partial^2 f_{0\alpha}/\partial v_z^2}{\Delta\omega - v_z \Delta k} + \right. \\ \left. + \frac{k'v_{\rho}}{\omega'} \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{1}{\Delta\omega - v_z \Delta k} + \frac{\partial}{\partial v_z} \left(\frac{\partial f_{0\alpha}/\partial v_{\rho}}{\omega' - k'v_z \pm \omega_{H\alpha}} \right) \right] \times \\ \times E_{1,2}^{(1)}(k'\omega') E_z^{(1)}(\Delta k \Delta \omega); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E_z^{(2)}(k\omega) = - \frac{4\pi i c^2}{k^2 c^2 - \omega^2} \frac{1}{D_L} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^3}{m_{\alpha}^2} \int \frac{(\omega v_z/c - k)}{\omega - kv_z} d\mathbf{v} \int dk' d\omega' \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial v_z} \frac{\partial f_{0\alpha}/\partial v_z}{\Delta\omega - v_z \Delta k} E_z^{(1)}(k'\omega') E_z^{(1)}(\Delta k \Delta \omega) + \left(\frac{k'v_{\rho}}{4\omega'} \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{\partial f_{0\alpha}/\partial v_{\rho}}{\Delta\omega - v_z \Delta k - \omega_{H\alpha}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k'v_{\rho}}{\omega'} \frac{\partial f_{0\alpha}/\partial v_z}{\Delta\omega - v_z \Delta k} \right) E_z^{(1)}(k'\omega') E_z^{(1)}(\Delta k \Delta \omega) \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$+ \frac{\Delta k v_p}{4\Delta\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} \frac{\partial f_{0\omega}/\partial v_p}{\omega' - v_z k' + \omega_{H\alpha}} \Big) E_1^{(1)}(k'\omega') E_2^{(1)}(\Delta k \Delta\omega) \Big],$$

где

$$\begin{aligned} D_{1,2} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{2\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} \int v_p \frac{\partial f_{0\omega}/\partial v_p}{\omega - kv_z \pm \omega_{H\alpha}} dv; \\ D_L &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \frac{c^2}{k^2 c^2 - \omega^2} \int \frac{(\omega v_z/c^2 - k)}{\omega - kv_z} \frac{\partial f_{0\omega}}{\partial v_z} dv; \\ \Delta k &= k - k'; \quad \Delta\omega = \omega - \omega'. \end{aligned} \quad (13)$$

Для распределения Максвелла

$$v_p (\partial f_{0\omega}/\partial v_z) = v_z (\partial f_{0\omega}/\partial v_p). \quad (14)$$

Учитывая это обстоятельство и интегрируя по поперечным скоростям, получаем после несложных преобразований

$$\begin{aligned} E_{1,2}^{(2)}(k\omega) &= i \frac{\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} \frac{1}{\tilde{D}_{1,2}} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \Omega_{\alpha}^2 \int dk' d\omega' \times \\ &\times \left[\left(1 - \frac{v_{T\alpha}^2 k'}{\omega'} \Delta k \frac{\partial}{\partial \omega'} \right) I_1^{(1,2)} + I_2 \right] E_1^{(1)}(k'\omega') E_2^{(1)}(\Delta k \Delta\omega); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} E_z^{(2)}(k\omega) &= i \frac{1}{\tilde{D}_L} \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \Omega_{\alpha}^2 \int dk' d\omega' \left[I_3 E_z^{(1)}(k'\omega') E_z^{(1)}(\Delta k \Delta\omega) - \right. \\ &\left. - \frac{\Delta k}{2\Delta\omega} I_4 E_1^{(1)}(\Delta k \Delta\omega) E_2^{(1)}(k'\omega') - \frac{\Delta k}{2\Delta\omega} I_5 E_1^{(1)}(k'\omega') E_2^{(1)}(\Delta k \Delta\omega) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{1,2} &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega}{V \sqrt{2\pi} k v_{T\alpha}} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{k^2 c^2 - \omega^2} W \left(\frac{\omega \pm \omega_{H\alpha}}{V \sqrt{2} k v_{T\alpha}} \right); \\ \tilde{D}_L &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{V \sqrt{2\pi} k v_{T\alpha}} \frac{\partial}{\partial \omega} W \left(\frac{\omega}{V \sqrt{2} k v_{T\alpha}} \right); \\ I_1^{(1,2)} &= \frac{1}{V \sqrt{2\pi} v_{T\alpha}^3 k \Delta k [k \Delta \omega - (\omega \pm \omega_{H\alpha}) \Delta k]} \left[k \Delta \omega W \left(\frac{\Delta \omega}{V \sqrt{2} v_{T\alpha} \Delta k} \right) - \right. \\ &\left. - \Delta k (\omega \pm \omega_{H\alpha}) W \left(\frac{\omega \pm \omega_{H\alpha}}{V \sqrt{2} k v_{T\alpha}} \right) \right]; \\ I_2^{(1,2)} &= \frac{k}{v_{T\alpha}} \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{1}{V \sqrt{2\pi} [(\omega + \omega_{H\alpha}) k' - (\omega' + \omega_{H\alpha}) k]} \left[W \left(\frac{\omega' \pm \omega_{H\alpha}}{V \sqrt{2} k' v_{T\alpha}} \right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - W \left(\frac{\omega \pm \omega_{H\alpha}}{V \sqrt{2} k v_{T\alpha}} \right) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{T_a}^3} \frac{\partial}{\partial k} \frac{W(\omega'/\sqrt{2} k' v_{T_a}) - W(\omega/\sqrt{2} k v_{T_a})}{\omega k' - k \omega'} ;$$

$$I_{4,5} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{v_{T_a}} \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{W[(\omega' \mp \omega_{H_a})/\sqrt{2} k' v_{T_a}] - W(\omega/\sqrt{2} k v_{T_a})}{\omega k' - (\omega' \mp \omega_{H_a}) k} .$$

В пределе $\theta_a \rightarrow 0$ из (15) и (16), с использованием асимптотического соотношения

$$W(x) \simeq \sqrt{2\pi} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \dots \right) \quad (|x| \gg 1),$$

получаем амплитуды второго приближения для холодной плазмы

$$E_{1,2}^{(2)}(\omega, k) = -i \frac{\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} \frac{1}{\bar{D}_{1,2}} \sum_a \frac{(e_a/m_a) \Omega_a^2}{\omega \pm \omega_{H_a}} \int dk' d\omega' \times \quad (17)$$

$$\times \left[\frac{k \Delta \omega + (\omega \pm \omega_{H_a}) \Delta k}{(\Delta \omega)^2} + \frac{k}{\omega' \pm \omega_{H_a}} \right] E_{1,2}^{(1)}(k', \omega') E_z^{(1)}(\Delta k, \Delta \omega);$$

$$E_z^{(2)}(k, \omega) = i \frac{1}{\bar{D}_L} \frac{1}{\omega^2} \sum_a (e_a/m_a) \Omega_a^2 \int dk' d\omega' \times \quad (18)$$

$$\times \left[\frac{\omega \Delta k + 2k \Delta \omega}{\omega (\Delta k)^2} E_z^{(1)}(k', \omega') E_z^{(1)}(\Delta k, \Delta \omega) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{k'}{2\omega'} \frac{1}{\Delta \omega + \omega_{H_a}} + \frac{1}{\omega' + \omega_{H_a}} \frac{\Delta k}{2\Delta \omega} \right) E_1^{(1)}(k', \omega') E_2^{(1)}(\Delta k, \Delta \omega) \right] ,$$

где

$$\bar{D}_{1,2} = 1 + \sum_a \frac{\Omega_a^2}{k^2 c^2 - \omega^2} \frac{\omega}{\omega \pm \omega_{H_a}} ;$$

$$\bar{D}_L = 1 - \sum_a \frac{\Omega_a^2}{\omega^2} .$$

Полученные результаты дают возможность сделать следующие выводы.

Взаимодействие поперечных и плазменных волн приводит к возникновению поперечного излучения, сохраняющего характер поляризации линейных поперечных волн. В отсутствие плазменных волн электромагнитное поле в первом приближении линейно.

Продольные колебания второго приближения возбуждаются как за счет взаимодействия ленгмюровских волн, так и за счет взаимодействия поперечных волн первого приближения, что и предопределяет поглощение внешнего электромагнитного поля.

Наличие внешнего магнитного поля оказывается лишь на количественных результатах, не меняя качественной картины.

3. МОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Физическую картину взаимодействия волн проще всего изучить на примере монохроматических волн в «холодной» плазме.

Предположим, например, что в силу каких-то причин в плазме возникла и распространяется продольная монохроматическая волна с $k_0 > 0$ и $\omega_0 \approx \Omega_e > 0$. Из соотношения (18) следует тогда, что самодействие этой волны приводит к возникновению обертона с удвоенной частотой

$$E_z^{(2)}(z, t) \simeq -\frac{2k_0(e/m)}{\Omega_e^2} \operatorname{Re} \{ i [E_z^{(1)}(k_0\Omega_e)]^2 \exp[2i(k_0 z - \Omega_e t)] \}. \quad (19)$$

Структура нелинейного обертона показывает, что тепловое движение не может оказать сколь-либо существенного влияния на взаимодействие ленгмюровских волн.⁴

Пусть теперь в плазме вдоль магнитного поля распространяются поперечные волны $E_1^{(1)}(k_1, \omega_1)$ и $E_2^{(1)}(k_2, \omega_2)$. Если амплитуды этих волн достаточно велики, то их взаимодействие приводит, как это следует из (18), к возникновению продольной волны

$$\begin{aligned} E_z^{(2)}(z, t) \simeq & \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2)^2 - \Omega_e^2} \sum_a (e_a/m_a) \Omega_a^2 \left[\frac{k_1}{\omega_1(\omega_2 - \omega_{H_a})} + \right. \\ & \left. + \frac{k_2}{\omega_2(\omega_1 + \omega_{H_a})} \right] \operatorname{Re} \langle i E_1^{(1)}(k_1 \omega_1) E_2^{(1)}(k_2 \omega_2) \exp \{i[(k_1 + k_2)z - \right. \\ & \left. - (\omega_1 + \omega_2)t]\} \rangle, \end{aligned} \quad (20)$$

амплитуда которой резко возрастает в резонансных точках $\omega_2 = \omega_{H_i}$ и $\omega_1 = |\omega_{H_e}|$. Как видим, сильная перекачка энергии от поля к колективным движениям в плазме происходит при циклотронном резонансе между «необыкновенной» волной и электронами и «обыкновенной» волной и ионами. Существенно, что при одновременном выполнении резонансных условий как для «обыкновенной», так и для «необыкновенной» волны резонансное поглощение усиливается за счет дисперсионной связи между ω и k . Амплитуда нелинейной продольной волны в этом случае определяется выражением

$$\begin{aligned} E_z^{(2)}(z, t) \simeq & \frac{1}{|\omega_{H_e}|^2 - \Omega_e^2} \left[\frac{(e/Mc) \Omega_i^2 \Omega_e}{\sqrt{|\omega_{H_e}|(\omega_2 - \omega_{H_i})(|\omega_{H_e}| - \omega_1)^{1/2}}} - \right. \\ & \left. - \frac{(e/mc) \Omega_e^2 \Omega_i}{\sqrt{\omega_{H_i}(\omega_1 - |\omega_{H_e}|)(\omega_{H_i} - \omega_2)^{1/2}}} \right] \operatorname{Re} \langle i E_1^{(1)}(k_1 |\omega_{H_e}|) \times \\ & \times E_2^{(1)}(k_2 |\omega_{H_i}|) \exp \{i[(k_1 + k_2)z - |\omega_{H_e}|t]\} \rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Соотношения (20) и (21), очевидно, теряют смысл вблизи резонансных частот.

Завершая рассмотрение взаимодействия поперечных волн, заметим, что для частот, удовлетворяющих условию

$$\omega_1 + \omega_2 \simeq \Omega_e,$$

сдвиг частоты возникает уже в первом по нелинейности приближении, что связано с наличием в (20) и (21) секулярных знаменателей. В настоящей работе, однако, эти явления, относящиеся к распадным, рассматриваться не будут [7].

Если «необыкновенная» волна $k_1 > 0$, $\omega_1 > 0$ распространяется в плазме, в которой возбуждены ленгмюровские колебания $k_0 > 0$, $\omega_0 \simeq \Omega_e > 0$, их взаимодействие приводит, вследствие (17), к возникновению нелинейной «необыкновенной» волны

$$E_1^{(2)}(k, \omega) = -i \frac{\omega}{k^2 c^2 - \omega^2} \frac{1}{D_1} \sum_{\alpha} \frac{(e_\alpha/m_\alpha) \Omega_\alpha^2}{\omega_0^2 (\omega_1 + \omega_{H\alpha}) (\omega_1 + \omega_0 + \omega_{H\alpha})} \times \\ \times [(k_0 + k_1) \omega_0 + k_0 (\omega_1 + \omega_{H\alpha})] E_1^{(1)}(k_1, \omega_1) E_z^{(1)}(k_0, \omega_0) \times \\ \times \delta(k - k_0 - k_1) \delta(\omega - \omega_0 - \omega_1). \quad (22)$$

Исследование соотношения (22) в окрестности частоты $\omega_1 \approx |\omega_{He}|$ указывает на резонансный характер взаимодействия, причем

$$E_1^{(2)}(k, \omega) \approx -i \frac{(\omega_0 + |\omega_{He}|) (e/m)}{c \sqrt{|\omega_{He}| \Omega_e (|\omega_{He}| - \omega_1)^{1/2}}} \times \\ \times E_z^{(1)}(k_0, \omega_0) E_1^{(1)}(k_1 | \omega_{He}|) \delta(k - k_1 - k_0) \delta(\omega - \omega_0 - |\omega_{He}|). \quad (23)$$

Существенно, что рост амплитуды при циклотронном резонансе происходит по закону $(|\omega_{He}| - \omega_1)^{-1/2}$.

Наконец, заметим, что рассеяние «обыкновенной» волны на ленгмюровских колебаниях также носит резонансный характер, причем резонанс наступает на циклотронной частоте ионов. Амплитуда генерируемой гармоники вблизи резонанса имеет вид

$$E_2^{(2)}(k, \omega) \approx i \frac{(e/M) \sqrt{m/M}}{\sqrt{\omega_{Hi}} c (\omega_{Hi} - \omega_1)^{1/2}} E_1^{(1)}(k_1 \omega_{Hi}) E_z^{(1)}(k_0 \Omega_e) \times \\ \times \delta(k - k_1 - k_0) \delta(\omega - \omega_{Hi} - \Omega_e). \quad (24)$$

В условиях отличной от нуля температуры характер волновых процессов в плазме усложняется. В частности, при $\theta_e \gg \theta_i$, возможно распространение так называемого ионного звука, т. е. низкочастотной ветви продольных колебаний. Рассмотрим самодействие распространяющегося вдоль магнитного поля монохроматического ионного звука с $k > 0$ и $\omega \approx k_1 \sqrt{\theta_e/M} > 0$.

Прежде всего заметим, что из (16) для взаимодействия произвольных двух продольных волн $k_1 \omega_1$ и $k_2 \omega_2$ нетрудно получить

$$E_z^{(2)}(k, \omega) = i \frac{1}{D_L} \sum_{\alpha} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \Omega_\alpha^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{T_\alpha}^3 (\omega k_1 - k \omega_1)^2} \left[\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} \frac{(\omega k_1 - k \omega_1)}{k^2 v_{T_\alpha}} + \right. \\ \left. + \omega_1 W\left(\frac{\omega_1}{\sqrt{2} k_1 v_{T_\alpha}}\right) - \left(\omega_1 + \frac{\omega^2 (\omega k_1 - k \omega_1)}{k^3 v_{T_\alpha}^2}\right) W\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} k v_{T_\alpha}}\right) \right] \times \\ \times E_z^{(1)}(k_1, \omega_1) E_z^{(1)}(k_2, \omega_2) \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2), \quad (25)$$

откуда после несложных вычислений и использования асимптотического представления

$$W(z) \approx 2 \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} z^2 + \frac{4}{15} z^4 + \dots\right) - i\pi \operatorname{sgn} \operatorname{Im} z (1 - z^2 + \dots) \quad (26)$$

$(|z| \ll 1)$.

для нелинейного обертона, возникающего вследствие самодействия ионного звука, найдем

$$E_z^{(2)}(k, \omega) \simeq i \frac{2}{3} \left(\frac{e}{m} \right) \frac{k_1}{\Omega_e^2} [E_z^{(1)}(k_1, \sqrt{\theta_e/M} k_1)]^2 \times \\ \times \delta(k - 2k_1) \delta(\omega - 2\sqrt{\theta_e/M} k_1) (\Omega_e / kv_{Te})^4 \quad (27)$$

в полном согласии с результатом гидродинамического рассмотрения [8].

Аналогичным образом из (15) для нелинейного обертона, возникающего в результате взаимодействия поперечной волны с ионным звуком, будем иметь

$$E_{1,2}^{(2)}(k, \omega) \simeq -i \frac{\omega(e/m) \Omega_e^2}{(k^2 c^2 - \omega^2) \bar{D}_{1,2}(k\omega)} \left\{ \frac{\omega_2 + i\sqrt{\pi/2} k_2 v_{Te}}{k_1 \omega_2 v_{Te}^2 (\omega \pm \omega_{He})} - \right. \\ \left. - \frac{k}{(\omega_2 \pm \omega_{He}) (\omega \pm \omega_{He})^2} + \frac{\mu}{k_1 v_{Te}^2 (\omega_2 \pm \omega_{Hi})} \right\} E_{1,2}^{(1)}(k_2 \omega_2) E_z^{(1)}(k_1 \omega_1) \times \\ \times \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2), \quad (28)$$

причем предполагается, что

$$\left| \frac{\omega_2 \pm \omega_{He}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} k_2 v_{Te}} \right| \gg 1, \quad \left| \frac{\omega \pm \omega_{He}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} k v_{Te}} \right| \gg 1, \quad \left| \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} k_1 v_{Ti}} \right| \gg 1, \\ \left| \frac{\omega_1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} k_1 v_{Te}} \right| \ll 1.$$

В области низких частот $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_{Hi}$ отсюда получим

$$E_{1,2}^{(2)}(k\omega) \simeq i \frac{(\omega_1 + \omega_2)(\omega_2 + \mu\omega_1)}{\omega_1^2 c^2 [1 + 2(\omega_2/\omega_1)(v_{Te}/v_{Ae})] k_1 \omega_{He}^2} \frac{e}{m} \frac{\Omega_e^2}{\omega_{He}^2} \times \\ \times E_{1,2}^{(1)}(k_2 \omega_2) E_z^{(1)}(k_1 \omega_1) \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2), \quad (29)$$

если

$$1 \gg \sqrt{\frac{\mu}{\omega_{Hi}}} \frac{\omega_2 + \mu\omega_1}{\omega_{Hi}} \gg \frac{v_{Te}}{v_{Ae}},$$

и

$$E_{1,2}^{(2)}(k\omega) \simeq \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\omega_{He}}} (\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1^2 c^2} \frac{v_{Te}}{v_{Ae}} \frac{1}{\omega_{He} k_1} \frac{e}{m} \frac{\Omega_e^2}{\omega_{He}^2} \frac{(\pi/2)^{1/2}}{(1+2\omega_2 v_{Te}/\omega_1 v_{Ae})} \times \\ \times E_{1,2}^{(1)}(k_2 \omega_2) E_z^{(1)}(k_1 \omega_1) \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2), \quad (30)$$

если

$$1 \gg \frac{v_{Te}}{v_{Ae}} \gg \sqrt{\frac{\mu}{\omega_{Hi}}} \frac{\omega_2 + \mu\omega_1}{\omega_{Hi}} \quad \left(\mu = \frac{m}{M} \right), \\ v_{Ae}^2 = (H_0^2 / 4\pi m n_0) \ll c^2.$$

Заметим, что в последнем случае рассеяние обусловлено мнимой частью в разложении функции $W(x)$.

Рассмотрим теперь поведение «обыкновенной» волны второго при-

ближения в окрестности циклотронного резонанса ионов. Из (28) следует, что если

$$\omega_2 = \omega_{Hi} - \Delta \quad (\Delta > 0), \quad \omega_{Hi} \gg \Delta \gg k_2 v_{Ti}, \quad \omega_{Hi} \gg \omega_1$$

и

$$v_{Ae} \ll \min \left[\left(\frac{\omega_{Hi}}{\Delta} \right)^{3/2} v_{Te}, \frac{c}{\mu} \frac{\omega_1 \omega_{Hi}}{\Delta^2} \right],$$

то

$$E_2^{(2)}(k\omega) \simeq -i \frac{e/m}{k_1 v_{Te}^2} \frac{\Delta}{\omega_1} \left(1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k_2 v_{Te}}{\omega_{Hi}} \frac{\Delta}{\omega_{Hi}} \right) \times \\ \times E_2^{(1)}(k_2 \omega_2) E_z^{(1)}(k_1 \omega_1) \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2), \quad (31)$$

где второе слагаемое в скобке, содержащее чисто кинетический эффект, при разумном выборе параметров мало.

Наконец заметим, что в окрестности циклотронного резонанса электронов амплитуда «необыкновенной» волны второго приближения имеет вид

$$E_1^{(2)}(k\omega) \simeq -i \frac{\Delta_1}{\omega_1} \frac{e}{m} \frac{1}{k_1 v_{Te}^2} E_1^{(1)}(k_2 \omega_2) E_z^{(1)}(k_1 \omega_1) \times \\ \times \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \quad (32)$$

в предположении

$$\omega_2 = |\omega_{He}| - \Delta_1 \quad (\Delta_1 > 0), \quad |\omega_{He}| \gg \Delta_1 \gg k_2 v_{Te} \gg \omega_1, \\ \omega_1 \ll \omega_2, \quad (v_{Ae}/v_{Te}) \ll \sqrt{\mu} (|\omega_{He}|/\Delta_1)^{3/2}.$$

В рассмотренных нами случаях роль температуры, главным образом, сводилась к возникновению низкочастотной ветви продольных колебаний в плазме. В этом смысле рассмотренные выше эффекты можно отнести к гидродинамическим. Что касается «кинетических» эффектов, связанных с мнимой частью разложения функции $W(x)$, то их роль сильно повышается во внутрирезонансных областях. Соответствующие вопросы требуют, однако, специального рассмотрения и не затрагиваются в настоящей работе.

Авторы искренне благодарны В. П. Силину, любезно ознакомившемуся с работой и сделавшему ряд ценных замечаний, и Н. М. Полиевкоту-Николадзе за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, УФН, 23, 701 (1961); Ядерный синтез, 1, 82 (1961); А. А. Веденов, Атомная энергия, 13, 5 (1962).
3. M. Sumi, J. Phys. Soc. Japan, 15, 1086 (1960).
4. D. A. Tidman, G. H. Weiss, Phys. Fluids, 4, 866 (1961).
5. Р. Ф. Уйтмер, Сб. Колебания сверхвысоких частот в плазме, ИЛ, М., 1961, стр. 231.
6. W. P. Auger, R. H. Vartanian and J. Z. Melchior, J. Appl. Phys., 27, 188 (1956).
7. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ, 32, 1291 (1962).
8. Н. П. Гиоргадзе, ЖТФ (в печати).

ON THE NONLINEAR OSCILLATIONS OF TWO-COMPONENT PLASMA

N. P. Giorgadze, N. L. Tsintsadze

The propagation of waves in plasma along the constant magnetic field is considered. In approximation of small nonlinearities the amplitudes of overtones owing to interaction of the linear waves are found.

О ПОЛЯРИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

И. А. Бирюлин

Рассмотрено распространение электромагнитных волн в изотропной среде со случайными неоднородностями. Показано, что в случае анизометрических неоднородностей среда является анизотропной для регулярной составляющей поля; эта анизотропия существенно влияет на характер поляризации электромагнитных волн.

Как показано в ряде работ [1-3] при распространении электромагнитных волн в среде со случайными неоднородностями поведение регулярной составляющей волны определяется не локальным тензором ϵ_{ik} , дающим связь между напряженностью электрического поля и индукцией в данной точке среды, а некоторым другим эффективным тензором $\epsilon_{ik}^{\text{эфф}}$, который определяется интегральными свойствами среды. При этом эффективный тензор диэлектрической проницаемости, определяя такие характеристики волны, как дисперсионная зависимость и коэффициент поглощения, дает для слабо неоднородных сред небольшую поправку к этим величинам по сравнению с однородной средой. Гораздо более сильно это отличие проявляется для поляризации волны, так как тензор диэлектрической проницаемости для однородной среды и эффективный тензор имеют разные направления главных осей. При этом даже в изотропной среде эффективное значение диэлектрической проницаемости может быть и тензором и скаляром в зависимости от формы неоднородных образований.

Такая особенность неоднородной среды объясняется тем, что при наличии преимущественной ориентации анизометрических* неоднородностей имеется зависимость изменения показателя преломления от направления, что и обуславливает некоторую среднюю анизотропию; выражением этой анизотропии является тензорный характер эффективной диэлектрической проницаемости. Тензорный характер эффективной диэлектрической проницаемости указывает на то, что в такой среде могут распространяться две волны с различной фазовой скоростью и различным затуханием. Учет интерференции этих волн может быть использован для выяснения вопроса о поляризации электромагнитных волн в неоднородной среде.

1. ЭФФЕКТИВНЫЙ ТЕНЗОР В СРЕДЕ С АНИЗОМЕТРИЧНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Выражение для $\epsilon_{ik}^{\text{эфф}}$ приведено в [1]:

$$\epsilon_{ik}^{\text{эфф}} = \bar{\epsilon} \delta_{ik} + \frac{x^2 \bar{\delta} \epsilon^2}{4 \pi \epsilon} \int d\boldsymbol{\rho} \frac{e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}}}{\rho} \left(\delta_{ik} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho_i \partial \rho_k} \right) W(\boldsymbol{\rho}) e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\rho}}. \quad (1)$$

Здесь $\bar{\epsilon}$ — среднее значение диэлектрической проницаемости; не зависящее в данном случае от координат, $\bar{\delta} \epsilon^2$ — дисперсия флюктуаций диэлек-

* Анизометрическими неоднородностями называются неоднородные образования, не имеющие форму шара.

трической проницаемости, $\chi = (\omega / c) \sqrt{\varepsilon_{\infty}}$ — постоянная распространения, $W(\rho)$ — функция корреляции флюктуации электронной плотности; интегрирование ведется по объему. Компоненты $\varepsilon_{ik}^{\text{эфф}}$ не зависят, таким образом, от координат.

Представляет интерес рассмотреть случай анизометричных неоднородностей, т. е. таких, для которых функция корреляции $W(\rho)$ не является сферически симметричной. В качестве примера среды с такими неоднородностями может служить ионосфера на достаточно высоких частотах, когда влиянием магнитного поля можно пренебречь. Согласно [4, 5], неоднородности, существующие в ионосфере, имеют вид эллипсоидов, вытянутых по направлению магнитного поля Земли. Размеры полуосей этих эллипсоидов — десятки километров [5].

Без учета влияния магнитного поля локальное значение диэлектрической проницаемости — скалярная величина, причем будем считать, что она не зависит от координат (для реальной ионосферы это, вообще говоря, не так). Согласно [4, 5], функция корреляции $W(\rho)$ имеет вид

$$W(\rho) = e^{-(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)}.$$

Здесь $W(\rho)$ записана в системе координат с осью z по направлению оси наибольшей вытянутости, a, b, c — полуоси эллипсоидальной неоднородности,

$a : b : c = 1 : 2 : 4$, ось наибольшей вытянутости составляет с вертикалью угол $\alpha = 75^\circ$ [5].

Для нахождения $\varepsilon_{ik}^{\text{эфф}}$ необходимо вычислить соответствующие интегралы, входящие в (1). В замкнутой форме эти интегралы не выражаются; поэтому вычислим их приближенно. Для этого выберем систему координат с осью z , направленной по волновому вектору (вертикально); ось y возьмем так, чтобы оси наибольшей и наименьшей вытянутости неоднородности лежали в плоскости x, y (рис. 1).

Выделяя из $W(\rho)$ сомножитель $\exp\{-(x^2 + y^2 + z^2)/a^2\}$ и разлагая оставшуюся экспоненту в ряд, получим, ограничиваясь первым членом, $W(\rho)$ в этой системе координат:

$$W(\rho) = e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/a^2} (1 + m^2y^2 + n^2z^2 + l^2zy).$$

Здесь обозначено:

$$m^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} - \frac{\sin^2 \alpha}{c^2};$$

$$n^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} - \frac{\cos^2 \alpha}{c^2};$$

$$l^2 = \sin 2\alpha \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right).$$

Для интегрирования перейдем к сферической системе координат. Интегралы по углам вычисляются в (1) элементарно; для вычисления интегралов по радиусу воспользуемся следующим интегралом ([9], стр. 351):

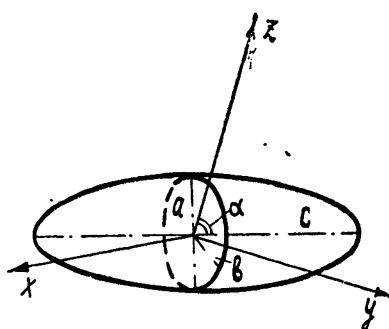


Рис. 1.

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x^2 - \gamma x} dx = (2\beta)^{-\nu/2} \Gamma(\nu) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \quad (2)$$

(Re $\beta > 0$, Re $\nu > 0$).

В (2) $I'(\nu)$ — гамма-функция, $D_{-\nu}$ — функция параболического цилиндра. В нашем случае крупномасштабных неоднородностей расчет ведется для высокочастотного приближения, когда $a\chi \gg 1$. Поэтому для $D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) = D_{-\nu}(-i\sqrt{2}a\chi)$ можно воспользоваться следующим асимптотическим разложением ([9], стр. 1079):

$$D_p(z) \sim e^{-z^{p/2}} z^p \left(1 - \frac{p(p-1)}{2z^2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2 \cdot 4 z^4} - \dots \right),$$

$|z| \gg 1, |z| \gg p, |\arg z| < (3/4)\pi$

Эта формула пригодна в данном случае, так как $a\chi \sim 10^3$, $|\nu| \leq 5$, поэтому можно пренебречь членами порядка $1/z^2$ по сравнению с единицей. Результаты дальнейших вычислений получены именно в этом приближении.

После вычислений для компонент тензора $\epsilon_{ik}^{\text{эфф}}$ получим

$$\epsilon_{11}^{\text{эфф}} = \epsilon_{22}^{\text{эфф}} = \bar{\epsilon} + \frac{\overline{\delta\epsilon^2}}{4\bar{\epsilon}} J;$$

$$\epsilon_{33}^{\text{эфф}} = \bar{\epsilon} - \frac{\overline{\delta\epsilon^2}}{\bar{\epsilon}};$$

$$\epsilon_{32}^{\text{эфф}} = \epsilon_{23}^{\text{эфф}} = \frac{\overline{\delta\epsilon^2}}{4\bar{\epsilon}} l^2 a^2,$$

где

$$J = (1 + 2n^2 a^2 - m^2 a^2) + i\sqrt{\pi} a\chi (1 + n^2 a^2 / 2).$$

Остальные элементы тензора равны нулю тождественно. Появление вещественного элемента $\epsilon_{23}^{\text{эфф}}$ означает поворот главных осей вещественного тензора вокруг оси x . Поворота осей мнимого тензора не происходит (в указанном выше приближении). Для рассматриваемого случая крупномасштабных неоднородностей угол между главными осями вещественного и мнимого тензора равен $\sim 2^\circ$. Заметим, что приведенный выше расчет компонент эффективного тензора остается справедливым и для случая мелкомасштабных неоднородностей, существующих в ионосфере. Эти неоднородности имеют размеры порядка $0,5 \div 1$ км и поэтому для тех же частот $a\chi \sim 10^2$, т. е. условие $a\chi \gg 1$ тоже удовлетворено.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПОЛЯ

Регулярная составляющая поля удовлетворяет уравнениям Максвелла, причем связь регулярной составляющей электрической напряженности \bar{E}_k и регулярной составляющей индукции \bar{D}_l дается уравнением $\bar{D}_i = \epsilon_{ik}^{\text{эфф}} \bar{E}_k$.

Для решения вопроса о распространении регулярной составляющей поля весьма большое значение имеет возможность представления общего симметрического комплексного тензора в «канонической» инвариантной

диадной форме [6, 7]. Наиболее удобно представить в этой форме обратный тензор $(\varepsilon_{ik}^{\text{эф}})^{-1}$. Обращая тензор $\varepsilon_{ik}^{\text{эф}}$, получим

$$(\varepsilon_{ik}^{\text{эф}})^{-1} = \begin{vmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix},$$

где $T_{ik} = P_{ki}/|\varepsilon_{ik}^{\text{эф}}|^{-1}$, P_{ki} — алгебраическое дополнение, $|\varepsilon_{ik}^{\text{эф}}|$ — определитель тензора $\varepsilon_{ik}^{\text{эф}}$. Из вида тензора $(\varepsilon_{ik}^{\text{эф}})^{-1}$ заключаем, что его собственное значение T_{11} , а соответствующее собственное направление — ось x , т. е. собственный вектор $d = \{1, 0, 0\}$. Тогда тензор $\gamma = (\varepsilon_{ik}^{\text{эф}})^{-1} - T_{11}$ обладает свойством $\gamma d = d\gamma = 0$; следовательно, он будет планарным [8] и может быть представлен в виде следующей суммы диад:

$$\gamma = Aa \cdot a + B(a \cdot b + b \cdot a) + Cb \cdot b. \quad (3)$$

В (3) $a \cdot a$ означает диаду. Векторы a и b должны быть перпендикулярны к d . Как нетрудно убедиться, в качестве этих векторов могут быть взяты $a = \{0, 1, 0\}$; $b = \{0, 0, 1\}$.

Согласно общим теоремам, (3) может быть записано в виде

$$\gamma = (A/2)[(a + k_1 b) \cdot (a + k_2 b) + (a + k_2 b) \cdot (a + k_1 b)]. \quad (4)$$

Коэффициенты k_1 , k_2 являются корнями квадратного уравнения $Ak^2 - 2Bk + C = 0$, коэффициенты A , B , C находятся из сравнения:

$$A = T_{22} - T_{11}; \quad B = T_{23}; \quad C = T_{33} - T_{11}.$$

Таким образом, из (4) следует инвариантное диадное представление тензора $(\varepsilon_{ik}^{\text{эф}})^{-1}$:

$$(\varepsilon_{ik}^{\text{эф}})^{-1} = \alpha + \beta(c' \cdot c'' + c'' \cdot c'). \quad (5)$$

В (5) $\alpha = T_{11}$; $2\beta = T_{22} - T_{11}$; векторы диад $c' = \{0, 1, k_1\}$; $c'' = \{0, 1, k_2\}$. Таким образом, α является одним из собственных значений $(\varepsilon_{ik}^{\text{эф}})^{-1}$; при заданном α в представлении (5) векторы c' и c'' определяются с точностью до скалярных множителей.

Итак, мы имеем уравнения Максвелла для однородной плоской волны, являющейся регулярной составляющей (нулевым приближением) реально существующего поля:

$$\bar{D} = \varepsilon_{ik}^{\text{эф}} \bar{E} = -n[N\bar{H}], \quad \bar{H} = n[N\bar{E}]. \quad (6)$$

Здесь n — комплексный показатель преломления, N — единичный вектор волновой нормали. Вводя вместо вектора N дуальный ему антисимметричный тензор N^x и исключая из (6) \bar{E} , получим:

$$[1 + N^x(\varepsilon_{ik}^{\text{эф}})^{-1}N^x]\bar{H} = 0.$$

Подставляя сюда (5), найдем

$$\{\alpha n^2 N^2 - 1 + \beta n^2([Nc'] \cdot [Nc''] + [Nc''] \cdot [Nc'])\}\bar{H} = 0.$$

Обозначив $\alpha n^2 N^2 - 1 = \varphi$; $n[Nc'] = C'$; $n[Nc''] = C''$, видим, что \bar{H} должен быть собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению тензора $\varphi + \beta(C' \cdot C'' + C'' \cdot C')$, аналогичного по своей структуре тензору (5).

В (7) показано, что собственными значениями тензора (5) будут

$\alpha, \alpha + \beta(c'c'' \pm \sqrt{c'^2 c''^2})$ ($c'c''$ — скалярное произведение c' и c''), а собственными векторами — $[c'c'']$, $\sqrt{c''^2}c' \pm \sqrt{c'^2}c''$. Случай собственного вектора $[c'c'']$ следует исключить, так как в этом случае для \bar{D} , \bar{E} и \bar{H} получается нулевое решение. Два других собственных вектора дают направление колебаний вектора \bar{H} :

$$\bar{H} \parallel V[\bar{N}c'']^2 [Nc'] \pm V[Nc']^2 [\bar{N}c''].$$

Это соотношение может быть записано в виде

$$\bar{H} \parallel \frac{[Nc']}{V[\bar{N}c']^2} \pm \frac{[Nc'']}{V[\bar{N}c'']^2}, \quad (7)$$

т. е. \bar{H} пропорционален сумме (разности) двух единичных комплексных векторов. Согласно общим теоремам [6], всякий единичный комплексный вектор имеет каноническую форму, причем вектор вещественной части дает большую ось эллипса поляризации. В (7) $c_i = \{0, 1, k_i\}$, а выражения для $k_{1,2}$ имеют вид

$$k_{1,2} = - \left(\frac{4 \varepsilon^{-2}}{\delta \varepsilon^2 l^2 a^2} + \frac{J}{l^2 a^2} \right) \pm \sqrt{\frac{16 \varepsilon^{-1}}{(\delta \varepsilon^2)^2 l^4 a^4} + \frac{4 \varepsilon^{-2} J}{\delta \varepsilon^2 l^4 a^4} - \frac{16 \varepsilon^{-2}}{\delta \varepsilon^2 l^4 a^4} - \frac{4 J}{l^4 a^4} - 1}.$$

Из вида векторов c' и c'' заключаем, что (7) дает линейную поляризацию вектора \bar{H} вдоль осей x и y .

Приравнивая нулю соответствующие собственные значения, находим два значения комплексного показателя преломления, соответствующих двум волнам с общей волновой нормалью N :

$$1/n_{\pm}^2 = \alpha + \beta ([Nc'][Nc''] \pm V[Nc']^2 [\bar{N}c'']), \quad (8)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\bar{\varepsilon} + (\delta \bar{\varepsilon}^2 / 4 \bar{\varepsilon}) J};$$

$$\beta = [(\delta \bar{\varepsilon}^2 / 4 \bar{\varepsilon}) l^2 a^2]^2 \{ 2[\bar{\varepsilon} + (\delta \bar{\varepsilon}^2 / 4 \bar{\varepsilon}) J] [(\bar{\varepsilon} + (\delta \bar{\varepsilon}^2 / 4 \bar{\varepsilon}) J) \times \\ \times (\bar{\varepsilon} - \delta \bar{\varepsilon}^2 / \bar{\varepsilon}) - ((\delta \bar{\varepsilon}^2 / 4 \bar{\varepsilon}) l^2 a^2)^2] \}^{-1}.$$

Соотношения (7) и (8) позволяют, таким образом, определить комплексные показатели преломления и поляризацию двух волн, имеющих общую волновую нормаль. Применительно к данному случаю соотношение (8) показывает, что различие в коэффициентах преломления двух волн весьма сильно зависит от $\bar{\varepsilon}$. Так, при $\bar{\varepsilon} \sim 1$ указанное различие обнаруживается в девятом знаке после запятой, а при $\bar{\varepsilon} \sim 0,1$ — уже в четвертом знаке. Развличие в коэффициентах поглощения — несколько большая величина того же порядка.

Для сравнения заметим, что магнито-ионное расщепление, существующее в гиротропной ионосфере, дает различие между коэффициентами преломления двух магнито-ионных компонент уже в первом знаке после запятой (при тех же численных значениях всех величин).

Исходя из величины расщепления в четвертом знаке после запятой, можно сказать, что эффект интерференции двух расщепленных компонент будет ощущим на больших расстояниях. Действительно, разность фаз двух компонент $\Delta\varphi = (\omega/c)\Delta nL$ (Δn — разность показателей преломления, L — проходимый волной путь). При $\omega/c \sim 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ $\Delta\varphi = 10^{-7}L$ и $\Delta\varphi = 1$ при $L = 100 \text{ км}$.

Выражение для разности комплексных показателей преломления имеет вид

$$n_+ - n_- = \sqrt{\frac{1}{T_{22}}} - \sqrt{\frac{1}{T_{11}}} = \\ = \sqrt{\left[\left(\bar{\varepsilon} + \frac{\delta\bar{\varepsilon}^2}{4\bar{\varepsilon}} J \right) \left(\bar{\varepsilon} - \frac{\delta\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\varepsilon}} \right) - \left(\frac{\delta\bar{\varepsilon}^2}{4\bar{\varepsilon}} l^2 a^2 \right)^2 \right]} \left(\bar{\varepsilon} - \frac{\delta\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\varepsilon}} \right)^{-1} - \sqrt{\bar{\varepsilon} + \frac{\delta\bar{\varepsilon}^2}{4\bar{\varepsilon}} J},$$

откуда непосредственно видно, что расщепление имеет место только в том случае, когда неоднородности анизометричны и направление волновой нормали составляет с осью максимальной вытянутости эллипсоидальной неоднородности угол, отличный от 0 и $\pi/2$. При интерференции двух компонент результирующее колебание будет в общем случае эллиптическим, причем параметры эллипса поляризации (отношение полуосей, угол наклона большей полуоси) будут изменяться в пространстве. Ввиду того, что разница в коэффициентах поглощения двух компонент в несколько раз больше разницы в показателях преломления, изменение отношения полуосей эллипса поляризации будет происходить гораздо медленнее, чем изменение угла наклона его большей полуоси. Например, линейно поляризованная волна, пройдя слой среды со случайными анизометричными неоднородностями, становится в общем случае эллиптически поляризованной.

В заключение заметим, что развитие вышеизложенных соображений на случай гиротропной среды позволит объяснить экспериментальные данные о поляризации радиоволн, прошедших через слой неоднородной гиротропной ионосфера.

Автор пользуется случаем принести глубокую благодарность В. Д. Гусеву за ценные дискуссии и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, М. И. Каганов, В. М. Цукерник, Уч. зап. ХГУ, труды физ. мат. ф-та, 2, 41 (1950).
2. Э. А. Канеर, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 827 (1959).
3. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 1015 (1959).
4. В. Д. Гусев, Л. А. Драчев, С. Ф. Миркотан, Ю. В. Березин, М. П. Кияновский, М. Б. Виноградова, Т. А. Гайлита, ДАН СССР, 123, 817 (1958).
5. С. Ф. Миркотан, сб. Исследование неоднородностей в ионосфере, № 4, 20 (1960).
6. Ф. И. Федоров, Оптика анизотропных сред, изд. АН БССР, Минск, 1958.
7. Ф. И. Федоров, Тр. института физики и математики, изд. АН БССР, Минск, 1957, стр. 230.
8. Н. Е. Коchin, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, ОНТИ, ГГТИ, М.—Л., 1934.
9. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, М.—Л., 1962.
10. А. В. Шубников, Основы оптической кристаллографии, изд. АН СССР, М., 1958.
11. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.

ON THE ELECTROMAGNETIC WAVES POLARIZATION IN ISOTROPIC
NONUNIFORM MEDIUM*I. A. Biryulin*

Electromagnetic waves propagation in an isotropic medium with random irregularities has been considered. It is shown that in the case of anisometric irregularities the medium is anisotropic for a regular field component. This anisotropy considerably influences upon the electromagnetic wave polarization.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

О. П. Погуце

Рассмотрено рассеяние электромагнитных волн в плазме на основе кинетического уравнения для «микроскопической» функции распределения.

Рассеяние электромагнитных волн в плазме рассматривалось в ряде работ [1-4]. В этих работах, несмотря на несколько различный подход, предполагалась локальная связь поля падающей волны с возбуждаемым им флюктуационным током, что справедливо лишь при малых (по сравнению с фазовой скоростью волны в среде) скоростях зарядов. В этом случае рассеяние определяется флюктуациями плотности (см. [1-3]) и (как показано в [4]) флюктуациями магнитного поля в плазме.

В работе [5] применен метод, который годится при произвольных скоростях зарядов, но в [5] не рассматривалось рассеяние поперечных волн в плазме. Целью данной работы было выяснить, как влияет учет флюктуаций электромагнитных полей и нелокальной связи поля падающей волны с флюктуационным током (при больших скоростях зарядов) на рассеяние поперечных волн. Для решения этой задачи в работе предложен метод, основанный на использовании кинетического уравнения для точной «микроскопической» функции распределения [6, 7]. Наряду с учетом пространственной дисперсии, этот метод позволяет более последовательно, чем в [4], учесть влияние флюктуаций электромагнитного поля.

С помощью полученных формул рассматривается вклад флюктуаций электромагнитных полей в сечение рассеяния в изотропной плазме и модельная задача о рассеянии света отдельными зарядами, движущимися в диэлектрике с $n > 1$ (n — показатель преломления).

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Вывод уравнения для рассеянных волн. Для описания рассеяния необходимо знать флюктуационную часть тока, связанную с полем распространяющейся волны. Так как нас интересует флюктуационная (т. е. не усредненная по движению частиц) часть тока, то мы должны с самого начала обратиться к уравнению для точной, микроскопической функции распределения:

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k(t)) (\mathbf{p} - \mathbf{p}_k(t)).$$

Это уравнение имеет вид

$$LN + \mathbf{F} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} N = 0;$$
(1)

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}] \right); L = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}^{(0)}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}},$$

где $H^{(0)}$ — внешнее поле, E, H — точные («микроскопические») поля. Введем, следуя работе [6], усредненные величины: $\langle F \rangle = F_1$ — среднее поле в среде (поле распространяющейся волны); $\langle N \rangle = f$ — обычная функция распределения, а также отклонения $\Delta F = F - \langle F \rangle$; $\Delta N = N - \langle N \rangle$.

Усредненная уравнение (1), получим

$$L \langle N \rangle + \frac{\partial}{\partial p} \langle FN \rangle = 0, \quad (2)$$

что можно переписать в виде

$$Lf + \frac{\partial}{\partial p} [F_1 f + \langle \Delta F \Delta N \rangle] = 0. \quad (3)$$

Вычтя (3) из (1), получим уравнение для отклонения точной функции распределения от средней:

$$L \Delta N + \frac{\partial}{\partial p} [F_1 \Delta N + \Delta F f + (\Delta F \Delta N - \langle \Delta F \Delta N \rangle)] = 0. \quad (4)$$

Положив в (4) $F_1 = 0$, получим уравнение, описывающее равновесные флюктуации. Все величины в равновесном состоянии отметим индексом «0»:

$$L \Delta N^{(0)} + \frac{\partial}{\partial p} [\Delta F^{(0)} f^{(0)} + (\Delta F^{(0)} \Delta N^{(0)} - \langle \Delta F^{(0)} \Delta N^{(0)} \rangle)] = 0. \quad (5)$$

Введем отклонения от равновесных значений:

$$\Delta N^{(1)} = \Delta N - \Delta N^{(0)}; \quad \Delta F^{(1)} = \Delta F - \Delta F^{(0)}; \quad f^{(1)} = f - f^{(0)}.$$

Эти отклонения вызваны падающей волной F_1 .

Считаем поле падающей волны достаточно слабым, линеаризуем (4) по этим отклонениям и из полученного уравнения вычтем (5), тогда получим

$$L \Delta N^{(1)} + \frac{\partial}{\partial p} \{ F_1 \Delta N^{(0)} + \Delta F^{(1)} f^{(0)} + \Delta F^{(0)} f^{(1)} + [\Delta F^{(1)} \Delta N^{(0)} + \Delta F^{(0)} \Delta N^{(1)} - \langle \Delta F' \Delta N^{(0)} + \Delta F^{(0)} \Delta N' \rangle] \} = 0. \quad (6)$$

В уравнении (6) члены в квадратных скобках учитывают взаимодействие между частицами (т. е. соответствуют учету столкновений) (см. [9]). Считая столкновения достаточно редкими, мы можем опустить эти члены. Пренебрегая аналогичными членами в уравнениях (3), (5), получим следующую систему уравнений, описывающих процесс рассеяния:

$$L \Delta N^{(1)} + \frac{\partial}{\partial p} [F_1 \Delta N^{(0)} + \Delta F^{(1)} f^{(0)} + \Delta F^{(0)} f^{(1)}] = 0; \quad (7)$$

$$L \Delta N^{(0)} + \frac{\partial}{\partial p} \Delta F^{(0)} f^{(0)} = 0; \quad (8)$$

$$Lf^{(1)} + \frac{\partial}{\partial p} F_1 f^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) — обычное кинетическое уравнение с самосогласованным полем; (8) понадобится нам для вычисления флюктуаций, а (7) совместно с уравнениями Максвелла описывает сам процесс рассеяния.

Системой (7)–(9) нужно пользоваться в общем случае следующим образом. Из уравнения (9) и уравнений Максвелла получаем решение для F_1 (обычная задача о распространении волны в плазме), затем с помощью (7), подставляя F_1 , находим $\Delta N^{(1)}$, а с ним ток $\Delta j^{(1)}$, который выражается через F_1 , $\Delta F^{(0)}$ и $\Delta N^{(0)}$. С помощью тока $\Delta j^{(1)}$ из уравнений Максвелла находим рассеянное поле $\Delta E^{(1)}$. Обычно решение для F_1 хорошо известно, поэтому остается решить уравнения (7) и (8).

Решение (7) можно формально написать в виде

$$\Delta N^{(1)} = L^{-1} \frac{\partial}{\partial p} [F_1 \Delta N^{(0)} + \Delta F^{(0)} f^{(1)}] - L^{-1} \frac{\partial}{\partial p} \Delta F^{(1)} f^{(0)}, \quad (10)$$

флюктуационная часть тока выражается через $\Delta N^{(1)}$:

$$\Delta j_\alpha = \sum_i e_i \int v_\alpha \Delta N_i^{(1)} d\bar{p}. \quad (11)$$

Суммирование происходит по электронам и ионам. Умножим (10) на $e v_\alpha$ и проинтегрируем по $d\bar{p}$:

$$\begin{aligned} \Delta j_\alpha = & - \sum_i e_i \int v_\alpha L^{-1} \frac{\partial}{\partial p} \Delta F^{(1)} f^{(0)} d\bar{p} - e_i \int v_\alpha L^{-1} \frac{\partial}{\partial p} [F_1 \Delta N_i^{(0)} + \\ & + \Delta F^{(0)} f_i^1] d\bar{p}. \end{aligned} \quad (12)$$

Первый член в этом выражении можно записать в виде $\sigma_{\alpha\beta} \Delta E_\beta^{(1)}$, где $\sigma_{\alpha\beta}$ — проводимость среды, т. е. этот член учитывает поляризацию среды при распространении рассеянных волн. Второй член мы обозначим через ΔI_α :

$$\Delta I_\alpha = - \sum_i e_i \int v_\alpha L^{-1} \frac{\partial}{\partial p} [F_1 \Delta N_i^{(0)} + \Delta F^{(0)} f_i^{(1)}] d\bar{p} = \Delta I_\alpha^{(1)} + \Delta I_\alpha^{(2)}, \quad (13)$$

тогда

$$\Delta j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} \Delta E_\beta^{(1)} + \Delta I_\alpha. \quad (14)$$

Подставляя ток (14) в уравнения Максвелла (разложив их в интеграл Фурье), получим

$$\begin{aligned} \left[k^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \delta_{\alpha\beta} \right] \Delta E_\beta^{(1)} &= \frac{4\pi i \omega}{c^2} \Delta j_\alpha = \\ &= \frac{4\pi i \omega}{c^2} [\sigma_{\alpha\beta} \Delta E_\beta^{(1)} + \Delta I_\alpha]. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем тензор электрической проницаемости $\epsilon_{\alpha\beta}$:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\alpha\beta}; \quad (16)$$

тогда уравнение (15) перепишется в виде

$$\left[k^2 \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_{\alpha\beta} \right] \Delta E_\beta^{(1)} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \Delta I_\alpha. \quad (17)$$

Таким образом мы получим уравнение (17), которому удовлетворяет поле рассеянных волн $\Delta E_\beta^{(1)}$. Роль стороннего тока играет флюктуационный ток ΔI_α . Он представляет сумму двух слагаемых, относящих-

ся соответственно к ионам и электронам. Ионным слагаемым можно пренебречь, так как оно содержит малый множитель $1/M$ ($1/M$ — масса иона).

Рассмотрим смысл отдельных частей тока ΔI_a . Ток $\Delta I_a^{(1)}$ описывает рассеяние, происходящее от флюктуации равновесной функции распределения $\Delta N^{(0)}$, и в предельном случае малых скоростей частиц (по сравнению с фазовой скоростью волны), т. е. малых температур дает обычное рассеяние на флюктуациях плотности. Ток $\Delta I_a^{(2)}$ описывает влияние на рассеяние флюктуаций полей в плазме, причем в него входит как флюктуация магнитного, так и электрического поля (в [4] была учтена только флюктуация магнитного поля). Полученное выражение для ΔI_a позволяет рассматривать случай произвольных температур в отличие от работ [1—4], где соответствующие выражения пригодны только в предельном случае низких T .

С помощью уравнений (17) по току ΔI_a можно найти поле рассеянной волны $\Delta E^{(1)}$; оно оказывается выраженным через F_1 и $\Delta N^{(0)}$, $\Delta E^{(0)}$, $\Delta H^{(0)}$. Нас интересуют билинейные комбинации по $\Delta E'$, а следовательно, и по ΔI_a (средние от линейных величин равны нулю). Средние значения от этих билинейных комбинаций выражаются через средние от $\langle \Delta N^{(0)} \Delta^* N^{(0)} \rangle$, $\langle \Delta E_a^{(0)} \Delta^* N^{(0)} \rangle$ и т. д. Уравнение (8) понадобится нам для вычисления таких средних.

Приведем здесь сводку некоторых соотношений, которые будут часто использоваться в дальнейшем. Пусть A и B — величины, зависящие от координат и импульсов всех частиц; тогда средние величины от A и B можно записать в виде

$$\langle A(r, t) B(r', t') \rangle = \int d\mathbf{k} d\omega (AB^*)_{k\omega} \exp\{i\mathbf{k}(r-r') - i\omega(t-t')\}, \quad (18)$$

где $(AB^*)_{k\omega}$ — спектральная плотность. Среднее от величины

$$\langle A(\mathbf{k}\omega) B^*(\mathbf{k}'\omega') \rangle,$$

где

$$A(\mathbf{k}\omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}} A(r, t) dr dt,$$

выражается через спектральную плотность следующим образом:

$$\langle A(\mathbf{k}\omega) B^*(\mathbf{k}'\omega') \rangle = (AB^*)_{k\omega} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (19)$$

В дальнейшем нам еще понадобится среднее по объему и по времени $\langle A(rt) B(r, t) \rangle$. Используя формулу (18), получаем

$$\frac{1}{VT} \int_{V, T \rightarrow \infty} dr dt \langle A(rt) B(rt) \rangle = \int d\mathbf{k} d\omega (AB^*)_{k\omega}. \quad (20)$$

Вывод формулы для коэффициента экстинкции. Для характеристики рассеянного света введем коэффициент экстинкции Σ , который определим следующим образом:

$$\Sigma = - \frac{1}{VT} \int \langle \Delta I \Delta E \rangle dr dt \Big| \frac{1}{|s|}, \quad (21)$$

т. е. как отношение количества энергии, рассеиваемой из единицы объема в единицу времени, к средней плотности потока энергии падающей волны.

Размерность $[\Sigma] = \text{см}^{-1}$. Если разделить Σ на число частиц в единице объема, то получим сечение рассеяния. В формуле (2.16) ΔE — поле

рассеянной волны, т. е. поле, возбуждаемое током ΔI . Если разложить ΔI и ΔE в интеграл Фурье, то связь между ними в изотропном случае может быть записана в виде

$$\Delta E_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = L_{\alpha\beta}(\mathbf{k}\omega) \Delta I_\beta(\mathbf{k}\omega).$$

Выражение для $L_{\alpha\beta}$ получается из (17):

$$L_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi i}{\omega} \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \frac{4\pi i}{\omega} \frac{1}{(kc/\omega)^2 - \varepsilon_{\perp}} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right). \quad (21a)$$

В области частот, где мнимые части ε_{\parallel} и ε_{\perp} малы, $L_{\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$L_{\alpha\beta} = -\frac{(2\pi)^2}{\omega} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \delta(\varepsilon_{\parallel}) - \frac{(2\pi)^2}{\omega} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \delta \left[\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 - \varepsilon_{\perp} \right]. \quad (22)$$

Используя формулы (20), (2.17) и $|s| = \frac{c}{8\pi} \sqrt{(E_1 E_1^*)} \sqrt{\varepsilon(\Omega)}$, получаем из (2.16):

$$\Sigma = \Sigma_e + \Sigma_{tr},$$

$$\Sigma_e = \int d\mathbf{k} d\omega \frac{(2\pi)^2}{\omega} \delta(\varepsilon_{\parallel}) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} (\Delta I_\alpha \Delta I_\beta^*) \left/ \frac{c}{8\pi} (E_1 E_1^*) \sqrt{\varepsilon(\Omega)} \right.; \quad (23)$$

$$\Sigma'_{tr} = \int d\mathbf{k} d\omega \frac{(2\pi)^2}{\omega} \delta \left[\left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 - \varepsilon_{\perp} \right] \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) (\Delta I_\alpha \Delta I_\beta^*) \left/ \frac{c}{8\pi} \times (E_1 E_1^*) \sqrt{\varepsilon(\Omega)} \right. \quad (24)$$

Член Σ_e описывает вклад в рассеяние продольных (плазменных) волн (см. [2]), а Σ_{tr} — поперечных. В дальнейшем мы не будем рассматривать часть Σ_e , связанную с возбуждением плазменных волн. Вычисление Σ сводится, как это следует из (23), (24), к вычислению корреляционной функции для токов. Аналогичным способом можно найти Σ для плазмы во внешнем магнитном поле.

2. ПЛАЗМА БЕЗ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Функция корреляции микротоков, возбуждаемых падающей волной
Рассмотрим выражение для тока (13):

$$\Delta I_\alpha^{(1)} = -e \int v_\alpha L^{-1} \frac{\partial}{\partial p} F_1 \Delta N^{(0)} dp; \quad \Delta I_\alpha^{(2)} = -e \int v_\alpha L^{-1} \frac{\partial}{\partial p} \Delta F^0 f^{(1)} dp. \quad (2.1)$$

Оператор L^{-1} действует следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta I_\alpha(\mathbf{r}, t) = & -e \int_0^\infty \int v_\alpha \frac{\partial}{\partial p'} [F_1(t-s)\mathbf{r} - \mathbf{v}s, \mathbf{v}] \Delta N^{(0)}(t-s, \mathbf{r} - \mathbf{v}s, p') + \\ & + \Delta F^{(0)}(t-s, \mathbf{r} - \mathbf{v}s, \mathbf{v}) f^{(1)}(t-s, \mathbf{r} - \mathbf{v}s, p')] dp e^{-vs} ds |_{p=p'}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Как обычно, в этих формулах введено v ; в конечных результатах $v \rightarrow 0$.

Для фурье-компоненты $\Delta I_\alpha(\mathbf{k}\omega)$ получаем выражение

$$\begin{aligned} \Delta I_\alpha^{(1)}(\mathbf{k}\omega) = & -e \int_0^\infty \int v_\alpha e^{-vs} ds F_1(k'\omega' \mathbf{v}) e^{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})s} \frac{\partial}{\partial p} \Delta N^{(0)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega', \mathbf{p}) \times \\ & \times dp dk' d\omega'; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Delta I_{\alpha}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = -e \int_0^{\infty} v_{\alpha} e^{-v s} ds \frac{\partial f^{(1)}(\mathbf{k}' \omega' p)}{\partial p} e^{i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) s} \Delta F^{(0)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega', p) \times \\ \times dp dk' d \omega'. \quad (2.4)$$

Рассмотрим $\Delta I_{\alpha}^{(1)}$. Поле падающей волны выберем в виде

$$\mathbf{E}_1 = E_1^{(0)} \cos(\Omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2} E_1^{(0)} [e^{i(\Omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + e^{-i(\Omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}]; \quad (2.5)$$

тогда из (2.3) имеем

$$\Delta I_{\alpha}^{(2)} = -i \frac{e^2}{2} \int v_{\alpha} \frac{[\beta \gamma] E_{1\gamma}}{(\omega - kv + i\nu)} \frac{\partial}{\partial p_{\beta}} [\Delta N_0^- + \Delta N_0^+], \quad (2.6)$$

где мы ввели для сокращения записи следующие обозначения:

$$[\beta \gamma] = \left[\left(1 - \frac{v \cdot \mathbf{k}}{\Omega} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{\kappa_{\beta} v_{\gamma}}{\Omega} \right]; \quad \Delta N_0^{\pm} = \Delta N^{(0)}(\mathbf{k} \pm \mathbf{x}, \omega \pm \Omega). \quad (2.7)$$

Если воспользоваться условием $\frac{\partial}{\partial p_{\beta}} [\beta \gamma] = 0$, соотношением $v = pc^2/\epsilon$ и проинтегрировать (2.7) по частям по \bar{p} , то $\Delta I_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$ можно записать в следующем виде:

$$\Delta I_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = B_{\alpha\gamma} E_{1\gamma}^{(0)}, \quad (2.8)$$

где

$$B_{\alpha\gamma} = i \frac{e^2}{2} \int dp [\Delta N_0^+ + \Delta N_0^-] [\beta \gamma] \frac{c^2}{\epsilon} \frac{\left[\delta_{\rho\rho} - p_{\rho} p_{\beta} \frac{c^2}{\epsilon^2} \right]}{(\omega - kv + i\nu)} \times \\ \times \left[\delta_{\alpha\rho} + v_{\alpha} k_{\rho} \frac{1}{\omega - kv + i\nu} \right]. \quad (2.9)$$

В дальнейшем нам понадобится функция корреляции токов $\langle \Delta I_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega) \Delta I_{\beta}^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle$. Используя формулы (1.9), (2.9), (2.10), можно записать для спектральной функции токов соотношение

$$(\Delta I_{\alpha} \Delta I_{\beta}^*)_{\mathbf{k}, \omega} = (B_{\alpha\gamma} B_{\beta\delta}^*)_{\mathbf{k}, \omega} (E_{1\gamma}^{(0)} E_{1\delta}^{(0)*}), \quad (2.10)$$

где

$$(B_{\alpha\gamma} B_{\beta\delta}^*)_{\mathbf{k}, \omega} = \left(\frac{e^2}{2} \right)^2 \int dp dp' [(\Delta N_0 \Delta^* N_0')_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}]_{\omega-\omega'} + (\Delta N_0 \Delta^* N_0')_{\mathbf{k}+\mathbf{x}}]_{\omega+\omega'} \times \\ \times [\sigma \gamma] [\nu \delta]' \frac{c^4}{\epsilon \epsilon'} \frac{[\delta_{\rho\sigma} - p_{\rho} p_{\sigma} c^2/\epsilon^2]}{(\omega - kv + i\nu)} \frac{[\delta_{\pi\lambda} - p'_{\pi} p'_{\lambda} c^2/\epsilon'^2]}{(\omega - kv' + i\nu)} \times \\ \times \left[\delta_{\alpha\rho} + \frac{v_{\alpha} k_{\rho}}{\omega - kv + i\nu} \right] \left[\delta_{\beta\pi} + \frac{v'_{\beta} k_{\pi}}{\omega - kv' + i\nu} \right]. \quad (2.11)$$

Величины со штрихом зависят от p' .

Переход к нерелятивистскому случаю совершается следующим образом:

$$[\sigma \gamma] \rightarrow \delta_{\gamma i}; \quad [\nu \delta] \rightarrow \delta_{\nu \delta}; \quad \epsilon \rightarrow mc^2; \quad \frac{1}{\omega - kv} \rightarrow \frac{1}{\omega},$$

так что

$$\Delta I_{\alpha}^{(1) \text{ нер}} = i \frac{e^2}{2m\omega} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' [(\Delta N^{(0)} \Delta^* N_0^{(1)})_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} + (\Delta N_0^{(0)} \Delta^* N_0^{(1)})_{\mathbf{k}+\mathbf{x}}] E_{\alpha}^{(1)}. \quad (2.12)$$

Подставляя эти величины в (2.12) и пренебрегая членами порядка v/c , получим

$$(B_{\alpha\beta} B_{\beta\alpha}^*)_{\mathbf{k}\omega}^{\text{неп}} = \left(\frac{e^2}{2}\right)^2 \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' [(\Delta N_0 \Delta^* N_0^{(1)})_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} + (\Delta N_0 \Delta^* N_0^{(1)})_{\mathbf{k}+\mathbf{x}}] \frac{1}{\omega^2}.$$

Этой формуле можно придать более наглядный вид. Для этого рассмотрим интеграл по импульсам в (2.13):

$$\int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' [(\Delta N_0 \Delta^* N_0^{(1)})_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} + (\Delta N_0 \Delta^* N_0^{(1)})_{\mathbf{k}+\mathbf{x}}] = (|\Delta n|^2)_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} + (|\Delta n|^2)_{\mathbf{k}+\mathbf{x}}, \quad (2.13)$$

где $(|\Delta n|^2)_{\mathbf{k}\omega}$ — спектральная плотность для функций корреляции плотности частиц $\Delta n(\mathbf{r}, t)$ (см. формулу (18)). Учитывая это, окончательно получаем для функции корреляции в нерелятивистском приближении

$$(\Delta I_{\alpha}^{(1)} \Delta^* I_{\beta}^{(1)})_{\mathbf{k}\omega}^{\text{неп}} = \left(\frac{e^2}{2m}\right)^2 \frac{E_{\alpha}^{(0)} E_{\beta}^{(0)*}}{\omega^2} [(|\Delta n_e|^2)_{\mathbf{k}-\mathbf{x}} + (|\Delta n_e|^2)_{\mathbf{k}+\mathbf{x}}]. \quad (2.14)$$

Рассмотрим теперь $\Delta I_{\alpha}^{(2)}$ (формула (2.4)). Функция $f^{(1)}$ — решение уравнения (9):

$$f^{(1)}(\mathbf{k}, \omega, p) = \frac{e \Delta E^{(0)} \partial f_0 / \partial p}{i(\omega - \mathbf{k}v + i\nu)}.$$

Выражение для $\Delta I_{\alpha}^{(2)}$ особенно упрощается в нерелятивистском случае (сохраняя члены, не обращающиеся в нуль при $T \rightarrow 0$, T — температура):

$$\Delta I_{\alpha}^{(2) \text{ нер}} = in \frac{e^3}{m^2} \frac{1}{\omega\omega'} \left\{ \Delta E_{\beta}^{(0)} \left[\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{k_{\gamma}}{\omega} + \frac{k'_{\gamma}}{\omega'} \right) + \delta_{\alpha\gamma} \frac{k_{\beta}}{\omega} \right] + \frac{1}{c} \epsilon_{\alpha\gamma\beta} \Delta H_{\beta}^{(0)} \right\} E_{1\gamma}. \quad (2.15)$$

Сечение рассеяния Направим $E_1^{(0)}$ по оси x , \mathbf{x} (волновой вектор падающей волны) по z . Введем углы: θ — угол между \mathbf{x} и \mathbf{k} (\mathbf{k} — волновой вектор рассеянной волны), φ — угол между проекцией \mathbf{k} на плоскость, ортогональную \mathbf{x} и $E_1^{(0)}$. Если в формулу (24) подставить выражение (2.13), то получим результат работы [3]:

$$\sum_{\text{тр}}^{\text{неп}} = (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \int d\Omega d\omega (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) (|\Delta n_e|^2)_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}. \quad (2.16)$$

Выражение для $(|\Delta n_e^2|)_{\mathbf{k}\omega}$ приведено в приложении.

Посмотрим, к чему приводит учет тока $\Delta I^{(2)}$. Используя выражение (2.12) и (2.15), получим следующее выражение вместо (2.16):

$$\begin{aligned} \sum_{\text{тр}}^{\text{неп}} = & (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \int d\Omega d\omega \left\langle (|\Delta n_e|^2)_{\mathbf{k}-\mathbf{x}}^2 + \frac{k^2}{e^2 (\omega - \Omega)^2} \times \right. \\ & \times \left[\left(\frac{\omega_0 e}{\Omega} \right)^2 \frac{a^e \operatorname{Re} \epsilon_{||}^e - a^l \operatorname{Re} (\epsilon_{||}^e - 1)}{|\epsilon_{||}|^2} + \left(\frac{\omega_0 e}{\Omega} \right)^4 \left\{ \frac{a^e + a^l}{|\epsilon_{||}|^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{b^e + b^l}{\left| \left(\frac{\omega}{\omega - \Omega} \right)^2 - \epsilon_{\perp} \right|^2} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega - \Omega} \right)^2 \right] \right\} \right\rangle; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$a = \frac{T}{(2\pi)^5} \omega \varepsilon_{\parallel}; \quad b = \frac{T}{(2\pi)^5} \omega \varepsilon_{\perp}.$$

В этом выражении \mathbf{k} (волновой вектор рассеянной волны) направлен по оси γ .

Первый член в (2.17) — флюктуация плотности, второй возникает за счет корреляций вида $(\Delta n \Delta E_{\parallel}^*)$, т. е. плотности и продольного поля, а последний — за счет $(\Delta E_{\parallel} \Delta E_{\parallel}^*)$ и $(\Delta E_{\perp} \Delta E_{\perp}^*)$, т. е. корреляций продольных и поперечных полей (корреляции магнитного поля можно выразить через корреляции ΔE_{\perp}). Чтобы получить полное сечение, проинтегрируем (2.17) по частотам. В случае $T_e = T_i$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} \left(0 = \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2} \right) = & \tilde{\sigma} \left\{ 1 + \left(\frac{\omega_0 e}{\Omega} \right)^2 \frac{(kd)^2}{1+(kd)^2} + \left(\frac{\omega_0 e}{\Omega} \right)^4 \left[\frac{k^2 d^2}{1+(kd)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4} \frac{\Omega^2}{k^2 c^2} k^2 d^2 \left(\frac{2+k^2 d^2}{1+k^2 d^2} \right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (2.18)$$

$\tilde{\sigma}$ — сечение без учета тока $\Delta I^{(2)}$.

Из выражения (2.18) видно, что поправки к полному сечению весьма малы ($\sim \beta^2$).

Из формул (2.17), (2.18) можно сделать следующие заключения. Вклад в сечение продольного электрического поля больше, чем поперечного электрического и магнитного. Поэтому, если учитываются флюктуации магнитного поля (как это сделано в [8]), то тем более необходимо учитывать флюктуации и электрического поля. При частотах $\Omega > \omega_0$ вкладом в сечение от флюктуаций полей (т. е. током $\Delta I^{(2)}$) можно пренебречь. Этот вывод сделан для нерелятивистской плазмы, но он справедлив и в релятивистском случае. В случае частот $\Omega \gg \omega_0$ функция корреляции токов дается формулой (2.11), которая переходит в (2.14) только в случае малых скоростей ($\beta = v/c \ll 1$). Поэтому формулами для рассеяния, полученными в работах [1, 3, 4] и соответствующими рассеянию на флюктуациях плотности, можно пользоваться только в нерелятивистской плазме. В общем случае нужно использовать формулу (2.11). Формула (2.11) отличается от (2.14) учетом влияния пространственной дисперсии, происходящей от движения частиц, на процесс рассеяния.

Роль пространственной дисперсии возрастает в релятивистской плазме, но она может стать существенной и в нерелятивистском случае в области частот, где $n \beta \sim 1$, n — показатель преломления. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим с помощью формулы (2.11) простейшую задачу: пучок частиц с одинаковыми скоростями v движется вдоль оси z в среде с $n \neq 1$. Предполагается, что частицы релятивистские; тогда, как показано ниже, взаимодействием между ними можно пренебречь. Направим \mathbf{x} — волновой вектор падающей волны — по оси z , E_1^0 — по x . Нам необходимо найти $B_{\alpha x} B_{\beta x}^*$, а для этого, согласно (2.11), надо знать $\Delta n_0 \Delta n_0^*$. Для свободно движущихся невзаимодействующих частиц, как показано в приложении,

$$(\Delta N^{(0)} \Delta N^{(0)})_{k\omega} = \frac{N}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}v) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_0(\mathbf{p}),$$

N — число частиц в единице объема. Так как мы выбрали v по z , то $f(\mathbf{p}) = \delta(p_x) \delta(p_y) \delta(p_z - p^*)$. Тогда из (2.12) получаем

$$(B_{\alpha x} B_{\beta x}^*) = \left(\frac{e^2}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{v_x}{\Omega}\right)^2 \left(\frac{c^2}{\epsilon}\right)^2 \frac{1}{(\omega - kv)^2} \left[\delta_{\alpha x} + \frac{\delta_{\alpha z} k_x v}{\omega - kv} \right] \times \\ \times \left[\delta_{\beta x} + \frac{\delta_{\beta z} k_x v}{\omega - kv} \right] \frac{N}{(2\pi)^3} [\delta(\omega - \Omega - (k - \mathbf{x})v) + \delta(\omega + \Omega - (k + \mathbf{x})v)]. \quad (2.19)$$

Подставляя это выражение в (24) и интегрируя по dp , получаем

$$\sum_{tr} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 N \int d\Omega \frac{(1-vx/\Omega)^2(1-v^2/c^2)[(1-kv/\omega)^2 - k_x^2/k^2(1-k^2v^2/\omega^2)]}{|(d/d\omega)[\omega(1-kv/\omega)]|(1-kv/\omega)^4}.$$

Введем $k_z = k \cos \theta$, $k_y = k \sin \theta \cos \varphi$, $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, $N = kc/\omega$, $\beta = v/c$; тогда

$$\sum_{tr} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 N \int d\Omega \frac{[1-n(\Omega)\beta]^2(1-\beta^2)[1-n(\omega)\beta \cos \theta]^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi [1-n^2(\omega)\beta^2]}{|(d/d\omega)\omega[1-n(\omega)\beta \cos \theta]|(1-n(\omega)\beta \cos \theta)^4}, \quad (2.20)$$

где ω определяется из соотношения

$$\omega [1 - n(\omega)\beta \cos \theta] = \Omega [1 - n(\Omega)\beta]. \quad (2.21)$$

Формула (2.20) является обобщением на случай $n \neq 1$ формулы для преобразования частот при рассеянии (см. формулу из задачи 6 к § 78 в [8]).

Из формул (2.20), (2.21) следует, что при $n\beta \rightarrow 1$ сечение возрастает и при $n\beta = 1$ обращается в бесконечность. Это происходит от того, что мы не учли торможения зарядов.

Полученные результаты можно суммировать следующим образом.

1) Если учитываются флюктуации магнитного поля [4], то обязательно должны учитываться флюктуации и электрического поля.

2) При частотах $\Omega \gg \omega_0$ током $\Delta I^{(2)}$ можно пренебречь (т. е. можно пренебречь вкладом флюктуаций электромагнитных полей в сечение). Этот результат получен в нерелятивистском случае, но он сохраняется и в релятивистском.

3) В случае частот $\Omega \gg \omega_0$ функция корреляции токов дается формулой (2.11), которая переходит в (2.14) только в предельном случае малых скоростей ($\beta = v/c \ll 1$). Поэтому формулами для рассеяния, полученными в работах [1, 3, 4] и соответствующих рассеянию на флюктуациях плотности, можно пользоваться только в нерелятивистской плазме. В общем случае нужно использовать (2.11).

В релятивистской плазме (т. е. где $v/c \sim 1$) в случае $\Omega \gg \omega_0$ можно не только пренебречь $\Delta I^{(2)}$, но и коллективными эффектами (т. е. рассматривать рассеивающие частицы как невзаимодействующие). Действительно, из условия $\Omega \gg \omega_0$ в релятивистском случае следует $\lambda \ll d$ (дебаевский радиус), но в этом случае коллективные эффекты не важны. В нерелятивистском случае из условия $\Omega \gg \omega_0$ следует только $\lambda \ll d/\beta$.

В заключение хотелось бы выразить глубокую благодарность В. Д. Шафранову за предложенную тему и помочь в работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В приложении рассмотрен способ вычисления величин $\langle \Delta N_0 \Delta^* N'_0 \rangle$ с помощью уравнения (8); к нему близко примыкает приближение «одетых частиц» в [3, 9]. Для простоты ограничимся случаем без магнитного поля. Уравнение для ΔN_0 имеет вид (см. (8)).

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta N_0^{(i)} + (\mathbf{v} \nabla) \Delta N_0^{(i)} + \Delta \mathbf{F}^{(0)} \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \mathbf{p}} = 0; \quad \Delta \mathbf{F}^{(0)} = e \left(\Delta \mathbf{E}^{(0)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \Delta \mathbf{H}^{(0)}] \right), \quad (1)$$

где (i) — ионы и электроны. Это уравнение приближенное, так как при его выводе были отброшены малые члены. С его помощью можно получать корреляции, которые соответствуют учету бинарной функции. В случае кулоновских сил это было подтверждено прямыми вычислениями. Для решения (1) применим метод последовательных приближений, рассматривая правую часть (1) как малую поправку. Это эквивалентно процедуре «одетых частиц» (см. [3, 9]) с тем небольшим обобщением, что в [3, 9] рассматриваются кулоновские поля, а здесь приняты во внимание и поперечные (см. также [5]).

Решение уравнения (1) запишем в виде $\Delta N_0 = \Delta N_0^{(0)} + \Delta N_0^{(1)}$, где $\Delta N_0^{(0)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta N_0^{(0)} + (\mathbf{v} \nabla) \Delta N_0^{(0)} = 0. \quad (2)$$

Решением последнего, в свою очередь, является

$$\Delta N_0^{(0)} = \sum_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{(0)} - \mathbf{v}_k t) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_k) - f_0 V; \quad (3)$$

V — объем системы. Для $\Delta N_0^{(1)}$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta N_0^{(1)} + (\mathbf{v} \nabla) \Delta N_0^{(1)} + \Delta \mathbf{F}^{(0)} (\Delta N_0^{(1)} + \Delta N_0^{(0)}) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (4)$$

где поля $\Delta \mathbf{F}$ зависят как от $\Delta N_0^{(1)}$, так и $\Delta N_0^{(0)}$, причем движение частиц, связанное с $\Delta N_0^{(0)}$, считается заданным. Эти частицы создают ток

$$j_{\gamma}^0 = \sum_i e_i \int v_{\gamma} \Delta N_0^{(0)} d\bar{\mathbf{p}} = \sum_k j_{\gamma}^{0k}$$

(j_{γ}^{0k} — ток от k -ых зарядов), который играет роль стороннего тока в уравнениях Максвелла.

Решение для $\Delta N_0^{(1)}$ получается из (4) и уравнений Максвелла. Оно имеет вид

$$\Delta N_0^{(1)}(\mathbf{k}, \omega, p) = \frac{\Delta \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{v}) \partial f_0 / \partial \mathbf{p}}{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu)} = \sum_k \Delta N_0^{(1)k}, \quad (5)$$

где

$$\Delta F_{\alpha}^{(0)} = e [\alpha\beta] \Delta E_{\beta}^{(0)} = e [\alpha\beta] L_{\beta\gamma} j_{\gamma}^{(0)}, \quad (6)$$

$[\alpha\beta]$ определяется формулой (2.7), $L_{\alpha\beta}$ определяется формулой (21а). Используя (3) и (5), получаем

$$\begin{aligned} \Delta N_0 &= \Delta N_0^{(0)} + \Delta N_0^{(1)} = \\ &= \sum_k \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_k^0} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_k) + \Delta N_0^{(1)k} \right] - \mathbf{v} \delta(\omega) \delta(\mathbf{k}) f_0; \\ \Delta N_0^{(1)k} &= e \frac{[\alpha\beta] (\partial f / \partial p_{\alpha}) L_{\beta\gamma} j_{\gamma}^{0k}}{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu)}. \end{aligned} \quad (8)$$

С помощью (7) можно получить выражения для средних величин вида $\langle AB^{*} \rangle$, что сводится к нахождению корреляций для невзаимодей-

ствующих частиц типа $\langle j_1^{0k} j_{\beta}^{0*} \rangle$. Учет коллективных эффектов в (7) заключен в $\Delta N_0^{(1)}$. Поэтому для того, чтобы получить функции корреляции для невзаимодействующих частиц, достаточно считать $\Delta N = \Delta N_0^{(0)}$; тогда сразу получаем

$$\langle \Delta N^{(0)}(\mathbf{k}\omega p) \Delta^* N^{(0)}(\mathbf{k}'\omega' p') \rangle_{\text{невз}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') f_0(\bar{\mathbf{p}}). \quad (9)$$

С помощью (7) можно найти выражение для электронного тока $\Delta I_{\alpha}^{\text{эл}}$. Для этого умножим (7) на $e\mathbf{v}$ и проинтегрируем по $d\mathbf{p}$.

Получается выражение, которое можно записать в виде

$$\Delta I_{\alpha}^{\text{эл}} = j_{\alpha}^{0 \text{ эл}} + \sigma_{\alpha\beta}^{\text{эл}} E_{\beta}, \quad (10)$$

где E_{β} — флюктуационное поле в среде, связанное с токами соотношением

$$E_{\alpha} = L_{\alpha\beta} (j_{\beta}^{0 \text{ эл}} + j_{\beta}^{0 \text{ ион}}). \quad (11)$$

Выражение для $L_{\alpha\beta}$ приводилось ранее. Используя уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \Delta \mathbf{j} = 0, \quad (12)$$

можно записать:

$$\Delta \rho^{\text{эл}} = \frac{k_{\alpha}}{\omega} \Delta I_{\alpha}^{\text{эл}}; \Delta n^{\text{эл}} = \frac{\Delta \rho^{\text{эл}}}{e}. \quad (13)$$

Используя (10) и (11), получаем из (13)

$$(\Delta n \Delta n^*)_{\text{эл}} = \frac{1}{e^2} \frac{\omega}{(2\pi)^5} \frac{k^2}{\omega^2} \left\{ \frac{T^e \varepsilon''_e |\varepsilon''_e|^2 + T^i |\varepsilon''_e - 1|^2 \varepsilon''_i}{|\varepsilon''_e|^2} \right\}, \quad (14)$$

где ε'' — мнимая часть ε . При получении (14) была еще использована формула

$$(j_{\alpha}^0 j_{\beta}^{0*}) = \left(\frac{T_e}{(2\pi)^5} \omega \varepsilon''_e + \frac{T_i}{(2\pi)^5} \omega \varepsilon''_i \right) \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Dougherty, D. F. Farley, Proc. Roy. Soc., A259, 79 (1960).
2. А. И Ахиезер, И. Г. Прихода, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 33, 750 (1957).
3. M. N. Rosenbluth, N. Rostoker, Phys. Fluids, 5, 776 (1962).
4. А. И Ахиезер, И. А Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 41, 644 (1961).
5. Ф. Г Басс, А. Я. Бланк, ЖЭТФ, 43, 1479 (1962).
6. Ю. Л Климонтович, ЖЭТФ, 34, 173 (1958).
7. Ю. Л Климонтович, В. П Силин, ЖЭТФ, 42, 287 (1963).
8. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, М., 1960.
9. N. Rostoker, Ядерный синтез, 1, 101 (1961).
10. Б. Б. Кадомцев, ЖЭТФ, 41, 151 (1957).

Поступила в редакцию
11 мая 1963 г

KINETIC THEORY OF ELECTROMAGNETIC WAVES SCATTERING IN PLASMA

O. P. Pogutse

The electromagnetic waves scattering in plasma has been considered on the basis of a kinetic equation for "microscopic" distribution function.

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский

Рассматривается излучение заряженной частицы, движущейся в среде, параметры которой зависят от координат и времени по закону бегущей волны. Найден спектр и энергия излучения частицы.

Излучению заряженных частиц в стационарных неоднородных средах посвящено большое количество работ [1-3]. Для понимания процессов излучения в таких средах существенно, что стационарно неоднородная среда в процессе излучения может принимать на себя импульс отдачи; и при этом изменяется закон сохранения импульса при излучении, хотя закон сохранения энергии остается прежним. Поэтому законы сохранения при излучении в периодически неоднородной стационарной среде приводят к соотношению [3]

$$\omega = \frac{n(\mathbf{k}_0 \mathbf{v})}{1 - (v/c) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cos \Theta}, \quad (1)$$

где n — целое число, ϵ_0 и μ_0 — средние значения диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости, \mathbf{k}_0 — «вектор обратной решетки», характеризующий неоднородность ($k_0 = 2\pi/l$, где l — период пространственной неоднородности), Θ — угол между скоростью частицы и волновым вектором излучения, \mathbf{v} — скорость частицы.

В настоящей работе мы рассмотрим вопрос об излучении заряженной частицы в нестационарной среде. Интерес к нестационарным (неравновесным) средам возрос главным образом потому, что такие среды могут быть использованы для генерации электромагнитного излучения [4], для умножения частоты [5], для параметрического усиления [6] и т. п. Интерес этот вызван также тем, что мощная электромагнитная волна, проходя через среду, меняет ее свойства; поэтому среда становится периодически нестационарной и неоднородной.

1. СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим, к каким изменениям может привести учет периодической нестационарности среды. Пусть среда периодична в пространстве с периодом l и во времени с периодом T . Это означает, что в процессе излучения среде может передаваться импульс, равный целому кратному от величины

$$\hbar \mathbf{k}_0 = \hbar \frac{2\pi}{l} \frac{l}{T}, \quad (2)$$

и энергия, равная целому кратному от величины

$$\hbar \omega_0 = 2\pi \hbar / T \quad (3)$$

(с тем же значением кратности, что и для $\hbar \mathbf{k}_0$). Законы сохранения энергии и импульса при излучении частицей кванта записываются в виде

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \hbar\omega + nh\omega_0; \quad \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\hbar\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \frac{\mathbf{k}}{k} + nh\mathbf{k}_0. \quad (4)$$

Умножая второе равенство на скорость частицы \mathbf{v} и используя соотношение $\mathbf{v}\Delta p = \Delta E^*$, получаем

$$\omega = \frac{n[(\mathbf{k}_0\mathbf{v}) - \omega_0]}{1 - (v/c) \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cos \Theta}. \quad (5)$$

Это соотношение дает спектр излучения частицы, движущейся в периодически неоднородной и периодически нестационарной среде; ϵ_0 и μ_0 в этом случае следует понимать как средние значения ϵ и μ по пространству и времени.

Если среда является пространственно однородной, но периодически нестационарной, то в формуле (5) следует положить $\mathbf{k}_0 = 0$. В этом случае наличие среды влияет на закон сохранения энергии, но не влияет на закон сохранения импульса [7].

Отметим, что при выводе (5) мы пренебрегли влиянием неоднородности и нестационарности среды на свойства излучаемого кванта. Если свойства среды заданы диэлектрической постоянной в виде

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(\mathbf{k}_0\mathbf{x} - \omega_0 t) \quad (\mu = 1), \quad (6)$$

то, как будет показано ниже, формулу (5) можно считать справедливой при выполнении неравенства

$$\left| \frac{\epsilon_1 \omega^2 (\mathbf{k}_0 \mathbf{v})}{2c^2 (\mathbf{k}_0 \mathbf{k}) n (\mathbf{k}_0 \mathbf{v} - \omega_0)} \right| \ll 1. \quad (7)$$

Нетрудно написать аналогичное неравенство для магнитной неоднородной и нестационарной среды.

Число n в формуле (5) означает число квантов отдачи (\mathbf{k}_0, ω_0) , которые принимает на себя среда в процессе излучения.

Разберем несколько подробнее формулу (5), определяющую спектр излучения заряженной частицы в периодически неоднородной и периодически нестационарной среде. Предположим сначала, что среда принимает на себя импульс и энергию отдачи ($n > 0$). Если в этом случае скорость частицы меньше, чем фазовая скорость света:

$$v < c/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}, \quad (8)$$

то знаменатель в формуле (5) всегда положителен. Легко видеть, что в этом случае знак частоты ω определяется знаком величины $(\mathbf{k}_0 \mathbf{v}) - \omega_0$. При

$$\mathbf{k}_0 \mathbf{v} > \omega_0 \quad (9)$$

частица излучает квант ω (в этом случае формула (5) дает $\omega > 0$), а при

$$\mathbf{k}_0 \mathbf{v} < \omega_0 \quad (10)$$

частица поглощает квант ω ($\omega < 0$).

Неравенства (9) и (10) имеют простой физический смысл. Именно, если выполняется неравенство (9), то проекция скорости заряженной частицы на направление фазовой скорости волны неоднородности, бегущей в среде, больше, чем величина этой фазовой скорости. В этом случае частица обгоняет волну неоднородности. В случае (10) частица от-

* Это соотношение справедливо, если в процессе излучения скорость частицы мало меняется.

стает от волны неоднородности. Если n отрицательно (среда передает импульс и энергию отдачи частице), то в случае (9) частица поглощает квант $\hbar\omega$, а в случае (10) излучает.

Рассмотрим теперь формулу (5) в случае, когда скорость заряженной частицы превышает фазовую скорость света в среде:

$$v > c/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}. \quad (11)$$

В этом случае знаменатель формулы (5) положителен в области углов больше черенковского и отрицателен в области углов меньше черенковского, где черенковский угол определяется из условия обращения знаменателя в нуль:

$$\cos\Theta_c = v/c\sqrt{\epsilon_0\mu_0}. \quad (12)$$

Если $n > 0$ (среда принимает на себя кванты отдачи), то характер излучения (знак ω) зависит теперь от величины угла Θ . Пусть выполнено неравенство (9). Тогда при $\Theta < \Theta_c$ имеет место поглощение заряженной частицей кванта ω , а при $\Theta > \Theta_c$ — излучение. Если выполнено неравенство (10), то при $\Theta < \Theta_c$ происходит излучение, а при $\Theta > \Theta_c$ — поглощение. Характер излучения в случае (11) оказывается таким же, как в случае аномального эффекта Допплера [9].

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Перейдем теперь к расчету интенсивности излучения движущейся частицы. Этот расчет мы проведем в приближении геометрической оптики, когда можно предполагать, что свойства среды меняются сравнительно медленно во времени и пространстве. Как будет показано ниже, это условие эквивалентно требованию, чтобы частота излученной волны ω , определяемая из (5), была достаточно велика. Такое требование задома выполнено для релятивистских частиц в случае излучения вперед. Кроме того, оказывается возможным провести расчет также в случае периодически модулированных свойств среды в пространстве и времени, когда глубина модуляции является малой. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Пусть диэлектрическая постоянная ϵ и магнитная проницаемость μ зависят от координат и времени по произвольному закону типа бегущей волны:

$$\epsilon = \epsilon(z - ut), \quad \mu = \mu(z - ut), \quad (13)$$

где u — скорость перемещения фронта этой волны. Для простоты будем считать, что частица с зарядом q движется по направлению оси z .

Поле движущейся частицы так же, как в [8], будем описывать с помощью вектора Герца $\Pi(0, 0, \Pi)$, который имеет единственную отличную от нуля компоненту. Векторы поля частицы определяются тогда формулами

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) - \nabla \left(\frac{1}{\epsilon} \operatorname{div} \Pi \right); \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{c\mu} \operatorname{rot} \left(\mu \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right), \quad (14)$$

а скалярная функция Π удовлетворяет уравнению

$$\Delta_2 \Pi + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{\epsilon} (1 - \beta_u^2 \epsilon \mu) \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \right] - \frac{\epsilon \mu}{c^2 (1 - \beta_u^2 \epsilon \mu)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \eta^2} = -4\pi p_z, \quad (15)$$

где

$$\xi = z - ut; \quad \eta = \frac{z}{u} - \frac{1}{u} \int_0^{z-ut} \frac{d\xi}{1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu}; \quad (16)$$

$$\beta_u = \frac{u}{c}; \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

p_z — продольная составляющая вектора поляризации, создаваемой движущимся зарядом; ε, μ зависят лишь от одной переменной ξ .

Решение уравнения (15) будем искать в виде

$$\Pi = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}_\perp, \gamma, \xi) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + i\gamma\eta} d\mathbf{k}_\perp d\gamma, \quad (17)$$

где \mathbf{k}_\perp и \mathbf{r}_\perp — волновой вектор и радиус-вектор, перпендикулярные Oz . Аналогичное представление можно написать и для правой части уравнения (15), которая, как нетрудно показать, имеет вид

$$p_z = \frac{q \operatorname{sgn}(u-v)}{(2\pi)^3 i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma(\eta - \eta_0) + i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} \frac{d\gamma d\mathbf{k}_\perp}{\gamma}, \quad (18)$$

где

$$\eta_0 = \frac{v\xi}{u(v-u)} - \frac{1}{u} \int_0^\xi \frac{d\xi}{1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu}. \quad (19)$$

Подстановка (17) и (18) в (15) дает следующее уравнение для неизвестной функции $A(\mathbf{k}_\perp, \gamma, \xi)$:

$$\varepsilon \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu \right) \frac{dA}{d\xi} \right] - \frac{x^2}{1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu} A = - \frac{q \operatorname{sgn}(u-v)}{2\pi^2} e^{-i\gamma\eta_0}, \quad (20)$$

где

$$x^2 = (\gamma^2/c^2) \varepsilon \mu - k_\perp^2 (1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu).$$

Уравнение (20) является точным уравнением для функции $A(\mathbf{k}_\perp, \gamma, \xi)$; однако его решение при произвольном характере зависимости ε и μ от ξ является очень трудной математической задачей.

Мы будем решать уравнение (20) в приближении геометрической оптики. Как показано в [8], решение уравнения (20) без правой части имеет вид

$$A^0(\mathbf{k}_\perp, \gamma, \xi) = C \sqrt{\frac{\varepsilon}{x}} \exp \left(\pm \int_0^\xi \frac{x d\xi}{1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu} \right), \quad (21)$$

где C — постоянная интегрирования. Формула (21) имеет место при условиях

$$\left| \frac{1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{d}{d\xi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{x}} \right| \ll 1; \quad (22)$$

$$\left| \frac{1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu}{4\varepsilon} \left[\frac{d}{d\xi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{x}} \right]^2 (\xi - \xi_0) \right| \ll 1, \quad (23)$$

где $\xi - \xi_0$ — «путь», проходимый волной. Неоднородное уравнение (15) будем решать методом вариации постоянных, используя в качестве решения однородного уравнения приближенное решение (21). Проводя обычные для этого метода преобразования, получим

$$A(\mathbf{k}_\perp, \gamma, \xi) = \frac{q \operatorname{sgn}(u - v)}{2\pi^3} \sqrt{\frac{\varepsilon}{x}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp \left\{ i \int_{\xi}^{\xi'} \frac{x}{1 - \beta^2 \varepsilon \mu} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sgn}(\xi - \xi') - i \gamma \gamma_0(\xi') \right\} \frac{d\xi'}{\sqrt{\varepsilon(\xi')\mu(\xi')}}, \quad (24)$$

где ξ_1 и ξ_2 определяются из начальных условий задачи. Потери энергии заряженной частицы на единице пути нетрудно подсчитать по величине тормозящей силы, действующей на заряд. С помощью (17) и (14) имеем

$$\frac{dW}{dz} = 2\pi q \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}_\perp, \gamma, \tilde{\xi}) e^{i\gamma \tilde{\lambda}^3} d\lambda d\gamma, \quad (25)$$

где

$$\tilde{\eta} = \eta|_{z=vt}; \quad \tilde{\xi} = \xi|_{z=vt}; \quad \lambda = |\mathbf{k}_\perp|.$$

3. ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНАЯ СРЕДА

Применим полученные формулы к случаю, когда постоянные среды меняются во времени и пространстве гармонически:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos k_0 \xi; \quad \mu = 1, \quad (26)$$

причем для простоты будем считать

$$\left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right| \ll 1; \quad \left| \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0(1 - \beta_u^2 \varepsilon \mu)} \right| \ll 1. \quad (27)$$

Разлагая подынтегральную функцию в (24) по малым параметрам (27) и используя известную формулу

$$e^{i\Delta \sin k_0 \xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Delta) e^{ik_0 n \xi}, \quad (28)$$

получим после интегрирования в (24) ($\xi_1 = -\infty$; $\xi_2 = \infty$):

$$\frac{dW}{dz} = \frac{q^2 \operatorname{sgn}(u - v)}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{J_n(\Delta^+) e^{i\Delta^+ \sin k_0 \xi + ik_0 n \xi}}{x_0 + \alpha_n} + \right. \\ \left. + \frac{J_n(\Delta^-) e^{-i\Delta^- \sin k_0 \xi - ik_0 n \xi}}{x_0 - \alpha_n} \right\} \frac{\lambda^3 (1 - \beta_u^2 \varepsilon_0)}{x_0 \gamma} d\gamma d\lambda, \quad (29)$$

где

$$x_0 = \left(\frac{\gamma^2}{c^2} \varepsilon_0 - \lambda^2 (1 - \beta_u^2 \varepsilon_0) \right)^{1/2};$$

$$\alpha_n = \frac{\gamma}{u} - \frac{1}{u} \left(k_0 n u - \frac{v\gamma}{v-u} \right) (1 - \beta_u^2 \varepsilon_0); \quad \Delta^\pm = \frac{\varepsilon_1 (u x_0 \pm \gamma)^2}{2 c^2 \varepsilon_0 k_0 x_0 (1 - \beta_u^2 \varepsilon_0)}.$$

В (29) проведем интегрирование по λ , используя особенность типа полюса в выражениях, стоящих в фигурных скобках. Условие равенства нулю знаменателя этих выражений приводит к соотношению

$$\lambda^2 + \left[\frac{k_0 n(v-u) - \gamma}{u-v} \right]^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0, \quad (30)$$

где положено

$$\omega = \frac{v\gamma - u k_0 n(v-u)}{|u-v|}. \quad (31)$$

Следовательно,

$$\left[\frac{k_0 n(v-u) - \gamma}{u-v} \right]^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \cos^2 \Theta, \quad (32)$$

где Θ — угол между волновым вектором частоты ω и скоростью частицы. Из (30) и (31), исключая γ , придем к уравнению (5), которое определяет спектр излучения движущейся частицы.

Интегрирование в (29) с учетом особенности в точках, определяемых соотношением (30), дает

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{q^2 \operatorname{sgn}(v-u)}{c^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \left[1 - \frac{(\omega + n\Omega)^2}{\beta_v^2 \epsilon_0 \omega^2} \right] J_n^2(\Delta) \omega \, d\omega, \quad (32a)$$

где

$$\beta_v = \frac{v}{c}; \quad \Omega = k_0(v-u) = k_0 v - \omega_0; \quad \Delta = \epsilon_1 \omega^2 / 2c^2 k_0 x_0.$$

Интеграл в (32a) распространяется на ту область частот, в которой выполняется соотношение

$$\sin^2 \Theta = 1 - \frac{(\omega + n\Omega)^2}{\beta_v^2 \epsilon_0 \omega^2} \geq 0. \quad (33)$$

При $n=0$ и $u=0$ с точностью до величин Δ^2 (32a) переходит в обычную формулу черенковских потерь заряда, движущегося в среде с постоянной ϵ_0 . Любопытно отметить, что при $u > v$ тормозящая сила оказывается положительной, т. е. в этом случае волна модуляции свойств среды увлекает частицу.

Область, в которой справедлива формула (32), ограничена, естественно, условиями применимости приближения геометрической оптики (22) и (23). Условие (22) будет заведомо выполнено при

$$\omega \gg k_0 v; \quad \omega \gg \omega_0, \quad (34)$$

что всегда может быть выполнено для быстрых частиц. Условие (23) сводится к следующему физически ясному требованию: набег фазы излученного кванта из-за наличия неоднородности на расстоянии порядка зоны образования этого кванта должен быть мал. Длина зоны образования кванта с частотой ω , как известно, есть $l_\omega = v/\omega(1 - \beta_v \sqrt{\epsilon_0} \cos \Theta)$; следовательно, приведенное требование можно записать в виде неравенства $\Delta k_0 l_\omega \ll 1$ или

$$\left| \frac{\epsilon_1 \omega v}{2c n \Omega \sqrt{\epsilon_0} \cos \Theta} \right| \ll 1. \quad (35)$$

В общем случае, когда векторы k_0 и v составляют произвольный угол, неравенство (35) допускает очевидное обобщение в виде условия (7).

4. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В случае, когда периодическая часть ε мала по сравнению с постоянной частью ($|\varepsilon_1| \ll |\varepsilon_0|$), можно искать поле излучения в виде ряда по степеням ε_1 . Действительно, пусть ε определяется формулой (6), где ε_0 и ε_1 не зависят явно от x и t . Тогда материальное уравнение $D = \varepsilon E$ в фурье-представлении записывается следующим образом:

$$D_{k,\omega} = \varepsilon_0 E_{k,\omega} + \frac{\varepsilon_1}{2} (E_{k+k_0, \omega+\omega_0} + E_{k-k_0, \omega-\omega_0}), \quad (36)$$

где $E_{k,\omega}$ и $D_{k,\omega}$ — фурье-компоненты электрического поля E и электрической индукции D .

Равенство (36) можно переписать в виде

$$D_{k,\omega} = \varepsilon_0 E_{k,\omega} + \overset{\wedge}{\varepsilon_1} E_{k,\omega}, \quad (37)$$

где оператор $\overset{\wedge}{\varepsilon_1}$ определяется из сравнения равенств (36) и (37).

Из уравнений Максвелла следует следующее уравнение для фурье-компоненты магнитного поля $H_{k,\omega}$:

$$\left(k^2 - \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \right) H_{k,\omega} = \frac{4\pi i}{c} [\mathbf{k} j_{k,\omega}] + \frac{\omega}{c} [\mathbf{k}, \overset{\wedge}{\varepsilon_1} E_{k,\omega}]. \quad (38)$$

В координатном представлении это уравнение может быть записано в виде

$$\left(\Delta - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot} \mathbf{j} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}). \quad (39)$$

Из (6) следует, что

$$\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_1 \cos(\mathbf{k}_0 \mathbf{x} - \omega_0 t) \mathbf{E}. \quad (40)$$

Введем ток \mathbf{j}' , определив его следующим образом:

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (41)$$

где

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}). \quad (42)$$

Тогда уравнение (39) можно переписать в виде

$$\left(\Delta - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot} \mathbf{j}'. \quad (43)$$

В рассматриваемой нами задаче \mathbf{j} — ток, создаваемый движущейся частицей, $\partial \mathbf{P} / \partial t$ — ток, вызванный меняющейся во времени и пространстве поляризацией среды.

Проведенные преобразования имеют простой физический смысл. Действительно, уравнение (43) показывает, что поле заряженной частицы, равномерно движущейся в среде с диэлектрической постоянной (6), меняющейся во времени и пространстве, совпадает с полем в однородной среде, диэлектрическая постоянная которой равна ε_0 и в которой источником поля наряду с заряженной частицей является движущийся, переменный во времени распределенный дипольный момент \mathbf{P} , определяемый равенством (42). Так как скорость заряженной частицы равна v , то с такой же скоростью перемещается и переменная поляризация, создан-

ная в окружающей частицу среде. Если движение частицы задается уравнением $\mathbf{x} = \mathbf{v}t$, то, как видно из (40), поляризумость среды на пути частицы меняется с частотой $\Omega = \mathbf{k}_0\mathbf{v} - \omega_0$. Таким образом, в среде появляется дополнительный источник излучения — распределенный в пространстве дипольный момент, скорость которого равна \mathbf{v} , а частота колебаний кратна $\Omega = \mathbf{k}_0\mathbf{v} - \omega_0$. Изложенная физическая интерпретация поясняет, почему спектр излучения определяется той же формулой, что и в эффекте Допплера.

Уравнение (39) или эквивалентное ему уравнение (38) может быть решено в предположении малости ϵ_1 следующим методом. Положим

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \dots + \mathbf{H}_n + \dots; \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \dots + \mathbf{E}_n + \dots, \quad (44)$$

где

$$\mathbf{E}_n = -\frac{\omega}{ck} \left[\frac{\mathbf{k}}{k} \mathbf{H}_n \right] \quad (45)$$

и члены рядов для \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{H}_0 &= \frac{4\pi i}{c} [\mathbf{k} \mathbf{j}]; \quad \left(k^2 - \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{H}_1 = \frac{\omega}{c} [\mathbf{k}, \overset{\wedge}{\epsilon}_1 \mathbf{E}_0]; \dots \\ \dots; \quad \left(k^2 - \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{H}_n &= \frac{\omega}{c} [\mathbf{k}, \overset{\wedge}{\epsilon}_1 \mathbf{E}_{n-1}]; \dots \end{aligned} \quad (46)$$

Уравнение (46) позволяет определить только поперечную часть \mathbf{E} , удовлетворяющую условию $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$.

Найдем первые несколько приближений. Пусть источником поля является точечная заряженная частица, движущаяся равномерно и прямолинейно. Тогда

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t), \quad (47)$$

где q и \mathbf{v} — заряд и скорость частицы. Фурье-компоненты плотности тока $\mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}$ имеют вид

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (48)$$

Нулевое приближение системы (44) — (46) мы получим, подставив это выражение для \mathbf{j} в формулу (46):

$$\mathbf{H}_0 = \frac{qvi}{2\pi^2 c} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]}{k^2 - \epsilon_0 \omega^2 / c^2} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (49)$$

Выражение (49) дает магнитное поле точечной заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью \mathbf{v} через однородную стационарную среду с диэлектрической постоянной ϵ_0 . Это приближение описывает потери энергии заряженной частицы только на излучение Бавилова—Черенкова, поскольку это единственный вид потерь энергии на излучение поперечного поля равномерно движущейся частицей в однородной стационарной среде.

Второе приближение дает

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\epsilon_1 \omega}{2c} \frac{1}{k^2 - \epsilon_0 \omega^2 / c^2} \left[\frac{\omega + \omega_0}{c} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}_+] \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + \omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v})}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2 - \epsilon_0(\omega + \omega_0) \left(\frac{\omega + \omega_0}{c} \right)^2} + \right.$$

$$+ \frac{\omega - \omega_0}{c} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}_-] \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \omega_0 + \mathbf{k}_0\mathbf{v})}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - \epsilon_0(\omega - \omega_0) \left(\frac{\omega - \omega_0}{c} \right)^2}, \quad (50)$$

где

$$\mathbf{v}_+ = \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)(\mathbf{k}\mathbf{v} + \mathbf{k}_0\mathbf{v})}{(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})^2},$$

а \mathbf{v}_- получается из \mathbf{v}_+ переменой знаков у \mathbf{k} .

Как было уже сказано, формула (50) дает поле излучения распределенного диполя, величина которого определяется формулой $\mathbf{P}_1 = \frac{1}{4\pi} \hat{\epsilon}_1 \mathbf{E}_0$.

Не вычисляя потерю энергии на излучение в этом приближении, покажем, что спектр излучения определяется общей формулой (5) при $n = \pm 1$. Действительно, первое слагаемое в квадратных скобках (50) содержит δ -функцию от аргумента $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}$. Это означает, что частота и волновой вектор излучения, описываемого первым членом в (50), должны удовлетворять соотношению

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{v} + \omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v} = \mathbf{k}\mathbf{v} \cos \Theta + \omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}; \quad (51)$$

с другой стороны, частота и волновой вектор излучения удовлетворяют условию

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0}. \quad (52)$$

Подставив это значение k в (51) и решив полученное равенство относительно ω , получим формулу (5) с $n = +1$. Аналогично можно убедиться в том, что второе слагаемое в квадратных скобках (50) описывает излучение, спектр которого определяется формулой (5) с $n = -1$.

Нетрудно убедиться в том, что $m - e$ -приближение в рассматриваемом методе будет содержать наряду с другими также члены, описывающие излучение, частота которого определяется формулой (5) с $n = \pm m$.

Продольное поле быстрой частицы можно определить аналогичным методом из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$.

В заключение авторы благодарят В. Л. Гинзбурга за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Я. Б. Файнберг, Н. А. Ниженяк, ЖЭТФ, 32, 883 (1957).
- 2 Г. М. Гарбяп, ЖЭТФ, 35, 1435 (1958).
- 3 М. Л. Тер-Микаэлян, ДАН СССР, 134, 318 (1960).
- 4 С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 43, 351 (1962).
- 5 Ф. В. Бункин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 714 (1962).
- 6 С. И. Авэрков, Л. А. Острогский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 4, 46 (1958).
- 7 М. И. Рязанов, ЖЭТФ, 43, 1559 (1962).
- 8 К. А. Барсуков, Радиотехника и электроника (в печати).
- 9 В. Л. Гинзбург, И. И. Франк, ДАН СССР, 56, 583 (1947).

Физический институт им П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
25 мая 1963 г.

ON THE RADIATION OF CHARGED PARTICLE MOVING IN A NONSTATIONARY NONUNIFORM MEDIUM

K. A. Barsukov, B. M. Bolotovsky

Radiation is considered of a charged particle moving in a medium which parameters varies according to the travelling wave's law. The spectrum and the radiated energy have been found.

ИЗМЕРЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СПЕКТРА ФЛЮКТУАЦИЙ КОЭФФИЦИЕНТА ПРЕЛОМЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЗЫ

Ф. А. Маркус, А. М. Черемухин

Приводятся результаты исследования пространственного спектра флюктуаций коэффициента преломления для видимого света. Даны оценка наименьших размеров неоднородностей коэффициента преломления, обнаруженных в среде.

Известно, что пространственный спектр флюктуаций коэффициента преломления случайной неоднородной среды может быть получен при наблюдении излучения, рассеянного объемом V , содержащим неоднородности коэффициента преломления [1]. Интенсивность рассеянного излучения S_m в направлении m определяется некоторым участком пространственного спектра $\Phi_n(x)$:

$$S_m \sim \tilde{\Phi}_n(x). \quad (1)$$

Здесь $x = R - |R|m$, а \sim означает усреднение по области значений x , величина которой зависит от размеров объема V . Пропорциональность (1) справедлива, если случайное поле флюктуаций коэффициента преломлений либо однородно и изотропно в объеме V , либо локально однородно и изотропно. Кроме того, изменения коэффициента преломления внутри объема V должны быть достаточно малы, так как для получения (1) используется первое приближение метода малых возмущений. Наблюдение ведется в зоне дифракции Фраунгофера относительно объема V .

Определение пространственного спектра представляет значительный интерес. В тропосфере пространственный спектр определялся из опытов по рассеянию радиоволн [2] и звуковых волн [3]. Для видимого света пространственный спектр трудно измерить таким же способом, так как рассеянное излучение в области дифракции Фраунгофера будет очень слабым. Однако, рассеянное излучение, а значит, и пространственный спектр можно наблюдать и вблизи объема рассеяния с помощью линзы. Этот опыт рассматривался в предыдущей работе [4] и состоит в следующем. Плоская волна, прошедшая через тонкий слой неоднородной среды, попадает на линзу. Средняя освещенность фокальной плоскости линзы в первом приближении представляется в виде суммы двух слагаемых:

$$I_p = AF_{u_0v_0} + B \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(u, v, w=0) F_{u-u_0, v-v_0} du dv. \quad (2)$$

Первое слагаемое пропорционально освещенности фокальной плоскости в случае однородной среды, F_{uv} — функция, определяемая формой отверстия линзы, $\Phi_n(u, v, w)$ — пространственный спектр флюктуаций коэффициента преломления. Если линза настолько велика, что F_{uv} меняется быстро и обращается в нуль в пределах области, где Φ_n изменяется мало, то второе слагаемое пропорционально рассеянному полю. Тогда, проводя измерения освещенности фокальной плоскости, получим

значения пространственного спектра флюктуаций коэффициента преломления.

Приближенное выражение (2) может быть получено несколькими способами; при этом требования к малости флюктуаций и толщине слоя получаются несколько различными. Этому требованию можно придать форму, наиболее удобную для экспериментальной проверки,

$$R \int_0^L [\mu(x_1, y_1, z) - \mu(x_2, y_2, z)] dz < 1. \quad (3)$$

Здесь L — толщина слоя неоднородностей, а μ — флюктуации коэффициента преломления.

В настоящей работе приводятся характеристики аппаратуры для измерения пространственного спектра и результаты количественных измерений пространственного спектра в лабораторных условиях.

1. АППАРАТУРА

Для проведения эксперимента собиралась установка, состоящая из двух коллиматоров, линзы которых обращены друг к другу. Источником света служила щель, расположенная в фокальной плоскости первого коллиматора. Световой пучок между линзами коллиматоров ограничивался квадратной диафрагмой. Наблюдения велись в фокальной плоскости второго коллиматора, где каждый элемент щели создает дифракционную картину Фраунгофера от квадратного отверстия. Освещенность точки фокальной плоскости давна сумме освещенностей от всех элементов щели. Рис. 1 представляет фотографию окрестности фокуса второго коллиматора. На ней видно, что вдоль линий, параллельных щели, освещенность постоянна.

В направлении, перпендикулярном щели, закон изменения освещенности остается таким же, как для точечного источника, если выполнено условие

$$h/F_1 < \lambda/D,$$

где h — ширина щели, F_1 — фокусное расстояние первого коллиматора, D — сторона диафрагмы. Характер освещенности фокальной плоскости позволяет при измерениях использовать щель и проводить измерения для достаточно больших углов, не применяя мощных источников света.

Использование щели в качестве источника света приводит, однако, к тому, что рассеянное излучение можно измерять только в направлении, перпендикулярном щели. В каждой точке освещенность, созданная рассеянным излучением, является суммой освещенностей от рассеяния под различными углами. Поэтому закон убывания рассеянного излучения в общем случае не остается таким же, как для плоской волны (точечного источника). В самом деле, для однородной и изотропной среды пространственный спектр — функция только одного переменного

$$z = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

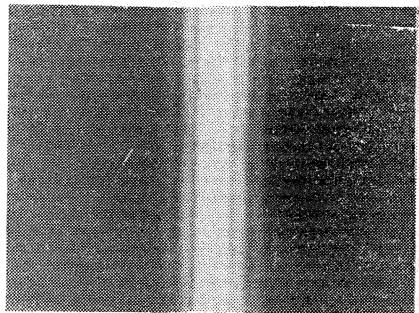


Рис. 1.

Освещенность точек фокальной плоскости определяется величиной

$$\Phi_n(u, v, w=0)$$

и, следовательно,

$$x = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Пусть измерительная щель проходит через линию фокальной плоскости, для которой $u = \text{const}$. Тогда результат измерения пропорционален величине

$$\tilde{\Phi}_n(x) = \int_{-v_0}^{v_0} \Phi_n(\sqrt{u^2 + v^2}) dv,$$

которая, конечно, может отличаться от $\Phi_n(x)$.

Измерение освещенности фокальной плоскости второго коллиматора вблизи фокуса производилось двумя способами.

1) С помощью фотоумножителя измерялся световой поток, проходящий через щель, расположенную в фокальной плоскости.

2) Участок фокальной плоскости фотографировался и полученная пленка фотометрировалась.

Для проверки методики была измерена освещенность фокальной плоскости в отсутствие флюктуаций коэффициента преломления. Результаты сравнивались с расчетом; совпадение получалось вполне удовлетворительным.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Неоднородности, на которых рассеивался свет, получались путем создания постоянных температурных градиентов в воздухе. Наблюдая за картиной в фокальной плоскости, можно отметить следующие характерные явления.

1) Линии теряют четкость («размываются») вплоть до полного исчезновения вторичных максимумов.

2) Вся картина как целое беспорядочно смещается («дрожит»). В наших экспериментах «дрожание» было слабое и главным эффектом служило «размывание». Следовательно, влияние неоднородностей, размеры которых превосходили сечение пучка, было незначительным.

3) Если поворачивать осветительную щель относительно оси установки, то картина поворачивается вместе со щелью, не изменяясь. Это позволяет думать, что в среде все направления равноправны, т. е. турбулентность среды изотропна.

На рис. 2 приведены две фотографии, полученные при разных градиентах температуры в среде и одной и той же экспозиции. На рис. 2а

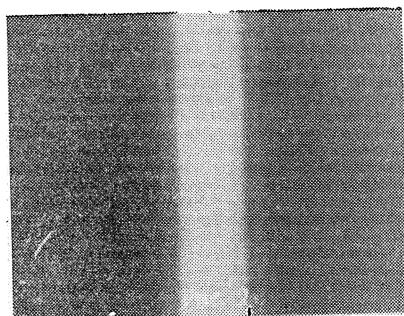


Рис. 2а.

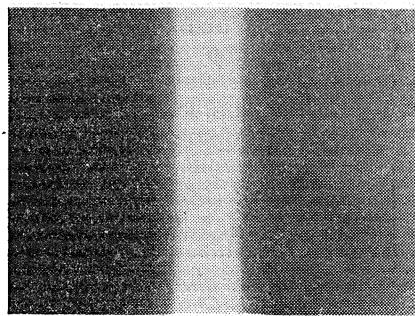


Рис. 2б.

можно еще различить следы дифракционных полос. На рис. 2б имеет место полное размытие. Для количественных измерений нужно выбирать такую картину, при образовании которой были бы выполнены условия (3) малости флюктуаций фазы. Выбор производился следующим образом. Перед линзой второго коллиматора помещался экран с двумя небольшими отверстиями. При этом в фокальной плоскости наблюдалась система интерференционных полос. Если среда содержит флюктуации коэффициента преломления, то система полос хаотически смещается, как целое. Условие (3) выполнено, если смещение интерференционной картины меньше ширины одной полосы этой картины.

Для того, чтобы получить значения пространственного спектра, измерялась разность освещенностей, наблюдающихся в одном и том же месте, при наличии флюктуаций коэффициента преломления и без флюктуаций. Такой способ дает некоторую погрешность за счет того, что освещенность в данном месте, созданная прямым излучением, всегда несколько уменьшается, если есть рассеяние на неоднородностях. Чтобы эта погрешность была незначительной, измерения проводились для тех направлений, где прямое излучение достаточно мало, а именно — в окрестности «нулей» дифракционной картины от диафрагмы, т. е. при значениях $\sin \Theta = n\lambda/D$, где D — размер диафрагмы. При измерениях освещенности путем фотометрирования пленки необходимо также, чтобы все почернения попадали на линейный участок характеристической кривой пленки.

Как уже было сказано раньше, использование в качестве источника света щели приводит к тому, что в эксперименте определяется $\Phi_n(x)$, усредненное по всем тем направлениям, по которым приходит в точку наблюдения рассеянный свет от различных элементов щели. Результат усреднения существенно зависит от вида функции $\Phi_n(x)$. Например, если

$$\Phi_n(x) = C e^{-x^2/x_0^2},$$

то в направлении, перпендикулярном щели, сохранится тот же закон. Часто используемая схема возникновения флюктуаций коэффициента преломления за счет турбулентного перемешивания приводит к следующему виду пространственного спектра:

$$\Phi_n(x) = C x^{-p}.$$

Тогда для направления, перпендикулярного щели,

$$\tilde{\Phi}_n(x) = C_1 x^{-p+1}.$$

Результаты измерения представлены на рис. 3, где по оси ординат откладываются значения $\lg [\tilde{\Phi}_n(x)/\Phi_n(x^*)]$, а по оси абсцисс $\lg x$ — соответствующее ему значение $\sin \Theta$ (x^* — произвольно выбранное значение x). Из графика следует, что в области значений $2 \leq x \leq 4$ функция $\Phi_n(x)$ может быть представлена в виде

$$\Phi_n(x) = C x^{-p}; p = 3,5 \pm 0,5.$$

Вид $\Phi_n(x)$ в этой области совпадает с тем, какой дает теория локальной однородной и изотропной турбулентности. Согласно последней,

$$\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-11/3}, x_0 \leq x \leq x_m.$$

Наши измерений позволяют оценить величину C_n — постоянную, характеризующую турбулентность среды, а также другую постоянную C_T —

характеристику температурных пульсаций, связанную с C_n соотношением

$$C_n = 69 \cdot 10^{-6} p C_T / T^2.$$

Здесь T выражено в $^{\circ}\text{К}$, p в мб . По нашей оценке

$$C_n = 10^{-5} \text{ см}^{-1/3}, C_T = 14 \text{ град} \cdot \text{см}^{-1/3}.$$

Для $x \geq 4$ спектр не обнаруживается при достигнутой в эксперименте

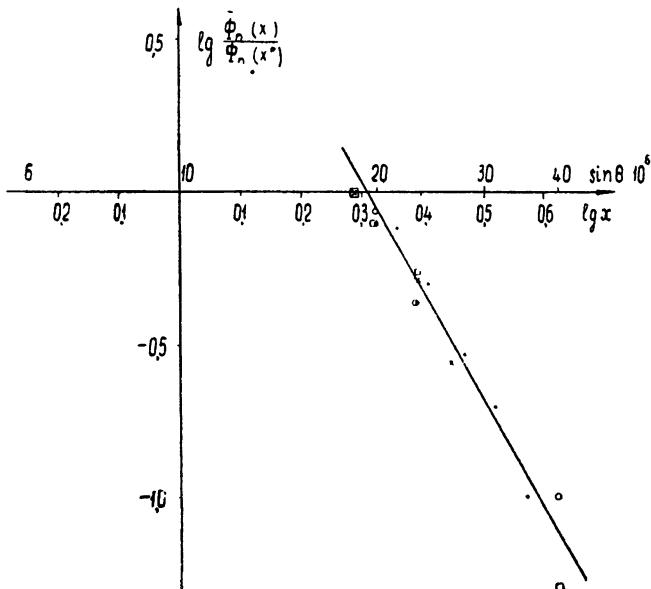


Рис. 3. Зависимость $\lg [\tilde{\Phi}_n(x)/\Phi_n(x^*)]$ от $\sin \theta$ и $\lg x$:
 ●●● — измерения с помощью ФЭУ; ××× — фото, экспозиция 10 сек;
 ○○○ — фото, экспозиция 30 сек; □□□ — фото, экспозиция 1 мин.

менте чувствительности. По величине $x_{\max} = 4$ можно оценить минимальный размер неоднородностей, обнаруженных в среде. Согласно теории, в рассеянии на определенный угол Θ принимает участие лишь та группа спектральных компонент турбулентности, которая образует пространственные решетки с периодом $l = 2\pi/x$. В наших опытах

$$l_{\min} = 2\pi/4 \approx 1,5 \text{ см.}$$

С той же аппаратурой было проведено наблюдение рассеянного излучения, вызванного флюктуациями воздуха в естественных условиях приземного слоя атмосферы. Сравнивалась освещенность фокальной плоскости при вплотную сдвинутых линзах коллиматоров и при раздвинутых на некоторое расстояние. Уже при расстояниях между линзами порядка метра заметно влияние неоднородностей коэффициента преломления. Кроме рассеяния, вызываемого мелкими неоднородностями, наблюдается сильное смещение картины как целого, вызванное, очевидно, влиянием крупных неоднородностей (больших, чем размер линз). Смещения происходят за время порядка 1 сек. Благодаря этому открывается возможность измерения пространственного спектра путем фотографирования картины с малыми экспозициями порядка 0,1–0,05 сек.

Метод и аппаратура, которые использовались в настоящей работе, очевидно, пригодны для изучения любых мелких случайных неоднородностей, прозрачных для видимого света.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. J. H. Chisholm, P. A. Pertmann, J. T. de Bettencourt, J. F. Roche, Proc. IRE, **43**, 1317 (1955).
3. М. А. Каллистратова, ДАН СССР, **125**, 69 (1959).
4. Ф. А. Маркус, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 425 (1960).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
11 июня 1963 г.

MEASUREMENTS OF SPATIAL SPECTRUM OF REFRACTION COEFFICIENT FLUCTUATIONS BY MEANS OF LENS

F. A. Marcus, A. M. Cheryomukhin

Experimental results are given of the investigation of a spatial spectrum of refraction coefficient fluctuations for visible light. The estimation is given of the smallest irregularities dimensions of the refraction coefficient of a medium.

МЕРЦАНИЕ ИСТОЧНИКОВ КОНЕЧНЫХ УГЛОВЫХ РАЗМЕРОВ

А. И. Кон, В. И. Татарский

Рассматривается задача о флюктуациях интенсивности света удаленного источника конечных угловых размеров, расположенного вне преломляющей атмосферы. Расчет производится с учетом дифракционных эффектов, так как при толще преломляющей среды $L \gg l_0^2/\lambda$ (l_0 — внутренний масштаб турбулентности, λ — длина волны) применение геометрической оптики не может дать удовлетворительных результатов.

При решении задачи о флюктуациях интенсивности света от источника, расположенного вне атмосферы, волны полагаются монохроматическими, а источник столь удаленным, что волны, падающие на границу преломляющей среды, можно считать плоскими. Как известно, для плоской волны радиус корреляции флюктуаций амплитуды имеет порядок зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$, откуда следует, что угол корреляции имеет порядок $\sqrt{\lambda L}/L = \sqrt{\lambda/L}$, что качественно находится в согласии с полученным в работе углом корреляции $\phi_0 = \sqrt{2\lambda/\pi L}$.

При угловом размере источника $\gamma > \phi_0$ флюктуации интенсивности в точке наблюдения значительно ослабляются из-за некоррелированности амплитудных флюктуаций света от различных точек диска планеты, которые в связи с этим могут частично компенсировать друг друга.

1. Найдем корреляцию флюктуаций логарифма амплитуды плоских волн, распространяющихся под некоторым углом ψ друг к другу от точек источника O_1 и A_1 (например, от двух точек планеты; рис. 1).

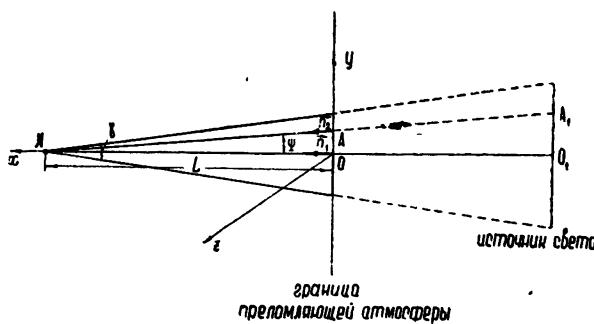


Рис. 1. Система координат

Решая волновое уравнение методом плавных возмущений для волны, распространяющейся по направлению n_1 , в точке наблюдения $N(L, 0, 0)$ имеем (считая $\lambda \ll l_0$) [1]:

$$\chi_1(L, 0, 0) = \ln \frac{A}{A_0} = \frac{k^2}{4\pi} \int_v n_1(r') (e^{ik \frac{y'^2 + z'^2}{2(L-x')}} + e^{-ik \frac{y'^2 + z'^2}{2(L-x')}})/(L-x') dv' \quad (1)$$

(L — толщина преломляющей атмосферы, A — амплитуда, k — волновое число, $n_1(r') = n(r')$ — 1 — флюктуации коэффициента преломления).

Чтобы найти $\chi_1(L, 0, 0)$ для волны, распространяющейся по направлению \mathbf{n}_2 , сделаем замену переменных — начало координат перенесем в точку A и осуществим поворот против часовой стрелки на угол ψ :

$$x_n = x_c \cos \psi - y_c \sin \psi + \frac{L \sin^2 \psi}{\cos \psi}; \quad (2)$$

$$y_n = x_c \sin \psi + y_c \cos \psi - L \sin \psi; \quad (2a)$$

$$z_n = z_c \quad (2b)$$

(n — новое, c — старое).

В преобразовании продольной координаты (2) можно отбросить второй и третий члены правой части. В самом деле, после подстановки (2) в (1) показатели экспоненты примут вид

$$U = \frac{k(y_n^2 + z_n^2)}{2(L-x_n)} = \frac{k(y_n^2 + z_n^2)}{2(L-x_c)} \frac{1}{1 + (y_c \psi - L \psi^2)/(L-x_c)}$$

(здесь и ниже ввиду малости ψ полагается $\sin \psi \approx \psi$, $\cos \psi \approx 1$). Разложим $\left[1 + \frac{y_c \psi - L \psi^2}{L-x_c}\right]^{-1}$ в ряд и ограничимся двумя членами:

$$U = \frac{k(y_n^2 + z_n^2)}{2(L-x_c)} \left(1 - \frac{y_c \psi - L \psi^2}{L-x_c}\right). \quad (3)$$

Первое слагаемое в (3) — это показатель экспоненты, который получится, если в преобразовании (2a) отбросить члены с ψ . Последнее можно сделать, если второй член в (3) мал:

$$\frac{k(y_n^2 + z_n^2)(y_c \psi - L \psi^2)}{2(L-x_c)^2} \ll 1. \quad (4)$$

Так как $y_n^2 + z_n^2 = \rho^2 \sim \left(\frac{\lambda L}{l_0}\right)^2$, $(L-x_c) \sim L$, то для (4) получаем оценку

$$\psi^2 \lambda L / l_0^2 \ll 1.$$

Это налагает условие на угол

$$\psi \ll l_0 / \sqrt{\lambda L}, \quad (5)$$

которое, однако, не является в оптическом диапазоне длин волн существенным ограничением, так как в этом случае $\sqrt{\lambda L} \sim 10 \text{ см}$, $l_0 \sim 1 \text{ см}$ и $l_0 / \sqrt{\lambda L} \sim 5^\circ$, что значительно больше размеров планет. Окончательно преобразование (2) будет иметь вид

$$x_h = x_c,$$

$$y_h = y_c + x_c \psi - L\psi, \quad (6)$$

$$z_h = z_c.$$

В этой системе координат для волны n_2 имеем

$$\begin{aligned} \chi_2 = & \frac{k^2}{4\pi} \int_v \frac{n_1(r_2)}{L-x_2} \left[\exp \left\{ ik \frac{y_2^2 + z_2^2}{2(L-x_2)} \right\} + \right. \\ & \left. + \exp \left\{ -ik \frac{y_2^2 + z_2^2}{2(L-x_2)} \right\} \right] dv_2, \end{aligned} \quad (7)$$

а для волны, распространяющейся по направлению n_1 , (1) нужно переписать в виде

$$\begin{aligned} \chi_1 = & \frac{k^2}{4\pi} \int_v n_1(r_1)/(L-x_1) \left[\exp \left\{ ik \frac{(y_1+x_1\psi-L\psi)^2 + z_1^2}{2(L-x_1)} \right\} + \right. \\ & \left. + \exp \left\{ -ik \frac{(y_1+x_1\psi-L\psi)^2 + z_1^2}{2(L-x_1)} \right\} \right] dv_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Перемножим (7) и (8) и проведем усреднение:

$$\begin{aligned} B_A(\psi) = \overline{\chi_1 \chi_2} = & \frac{k^4}{16\pi^2} \int_v \int_v \overline{\frac{n_1(r_1) n_1(r_2)}{(L-x_1)(L-x_2)}} \left\{ \exp \left(\frac{ik(y_2^2 + z_2^2)}{2(L-x_2)} \right) + \right. \\ & \left. + \exp \left(\frac{-ik(y_2^2 + z_2^2)}{2(L-x_2)} \right) \right\} \left\{ \exp \left(ik \frac{(y_1+x_1\psi-L\psi)^2 + z_1^2}{2(L-x_1)} \right) + \right. \\ & \left. + \exp \left(-ik \frac{(y_1+x_1\psi-L\psi)^2 + z_1^2}{2(L-x_1)} \right) \right\} dv_1 dv_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Затем воспользуемся двухмерным спектральным разложением

$$\begin{aligned} \overline{n_1(r_1) n_1(r_2)} = & B_n(r_1 - r_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x_2, x_3, x_1 - x_2) \times \\ & \times \exp \{ i [x_2(y_1 - y_2) + x_3(z_1 - z_2)] \} d^2 x. \end{aligned} \quad (10)$$

После подстановки (10) в (9) интегралы по переменным x_1 , x_2 , y_1 , y_2 легко вычисляются сведением к интегралу Пуассона, а по x_1 и x_2 —приближенно с помощью замены переменных*

$$\xi = x_1 - x_2; \quad 2\eta = x_1 + x_2. \quad (11)$$

Для корреляционной функции $B_A(\psi)$ имеем

* Интеграл по ξ вычисляется с учетом того обстоятельства, что $F_n(x_2, x_3, \xi)$ очень быстро стремится к 0 при $\xi \gtrsim 1/x$, и с использованием равенства $\int_v^\infty F_n(x_2, x_3, \xi) d\xi = \pi \Phi_n(x_2, x_3, 0)$ (см. аналогичное вычисление в [1]).

$$B_A(\psi) = \frac{\pi k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x_2, x_3) \left[\frac{e^{-i\left(\frac{x^2 L}{k} - \psi L x_2\right)}}{i\left(\frac{x^2}{k} + \psi x_2\right)} - 1 + i \frac{2(1-e^{iL\psi x_2})}{\psi x_2} - \frac{e^{i\left(\frac{x^2 L}{k} + \psi L x_2\right)}}{i\left(\frac{x^2}{k} + \psi x_2\right)} - 1 \right] dx_2 dx_3. \quad (12)$$

Здесь $x^2 = x_2^2 + x_3^2$; $\Phi_n(x_2, x_3) = \Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-11/3}$ — трехмерная спектральная плотность коэффициента преломления, соответствующая „закону 2/3“.

Переходя к полярным координатам

$$x_2 = x \cos \varphi, \quad x_3 = x \sin \varphi,$$

используя для второго слагаемого (11) представление

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{iL\psi x \cos \varphi} - 1}{iL\psi x \cos \varphi} d\varphi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{i(L\psi x \cos \varphi) t} dt = \\ &= \int_0^1 dt \int_0^{2\pi} e^{i(L\psi x \cos \varphi) t} d\varphi \end{aligned}$$

и аналогичные формулы для первого и третьего слагаемых (12), получаем для корреляционной функции

$$B_A(\psi) = 0,033 C_n^2 \pi^2 k^2 L \int_0^1 dt \int_0^\infty \left(1 - \cos \frac{Lt}{k} x^2\right) J_0(L\psi t x) x^{-8/3} dx$$

(J_0 — функция Бесселя). Разлагая функцию Бесселя в ряд и вычисляя интеграл, получим

$$\begin{aligned} B_A(\psi) &= \frac{3C_1 \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right)}{8 \cdot 2^{8/3} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} k^2 L^{8/3} \psi^{5/3} - \frac{1}{2} C_1 k^{7/6} L^{11/6} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left\{ i^{5/6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k - \frac{5}{6}\right)}{(k!)^2 \left(k + \frac{11}{6}\right)} z^k \right\} \\ &\left(C_1 = 0,033 \pi^2 C_n^2, \quad z = \frac{1}{4} i L \psi^2 k \right). \end{aligned}$$

Полагая $\psi = 0$, получим следующее выражение для нормированного коэффициента корреляции.

$$\begin{aligned}
 b_A \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right) &= \frac{B_A(\psi)}{B_A(0)} = \frac{11}{6\Gamma(-5/6)\cos(5\pi/12)} \times \\
 &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k - \frac{5}{6}\right) \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(k + \frac{5}{6}\right)\right]}{(k!)^2 (k+11/6)} \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{2k} - \\
 &- \frac{11}{16\Gamma(11/6)\cos(5\pi/12)} \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{5/3}, \tag{13}
 \end{aligned}$$

где ψ_0 — характерный угол, равный $\sqrt{2\lambda/\pi L}$.

На рис. 2 представлена функция $b_A(\psi/\psi_0)$, вычисленная по формуле (13) с учетом пяти первых членов ряда.

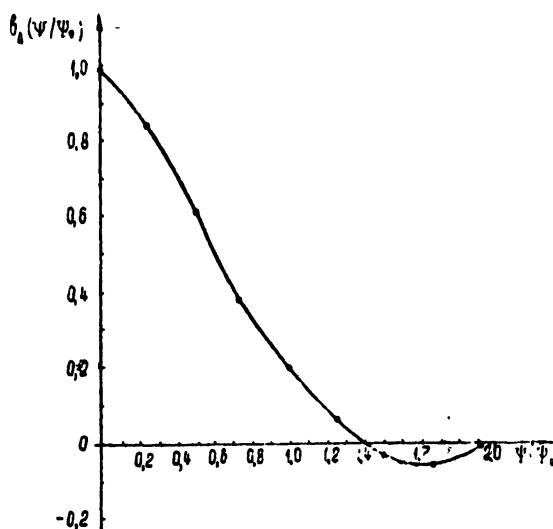


Рис. 2. Корреляционная функция.

Функцию $b_A(\psi/\psi_0)$ можно использовать для расчета мерцания кратных звезд.

2. Используя коэффициент корреляции (13), можно решить задачу о мерцании планет. Действительно, различные точки поверхности планеты являются некогерентными источниками света. Интенсивность суммарного поля некогерентных источников равна сумме интенсивностей отдельных источников.

Обозначим через $i(x, y)$ интенсивность, создаваемую в точке наблюдения источником в точке (x, y) . Интенсивность суммарного поля

$$I = \int_{\Sigma} i(x, y) d\Sigma,$$

причем интегрирование распространено на поверхность планеты Σ . Усредняя, получим

$$\bar{I} = \int_{\Sigma} \bar{i} d\Sigma = \bar{i} \Sigma;$$

$$\begin{aligned}
 I - \bar{I} &= \int_{\Sigma} [i(x, y) - \bar{i}] d\Sigma; \\
 \left(\frac{I - \bar{I}}{\bar{I}} \right)^2 = \sigma_{\gamma}^2 &= \frac{1}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{i'(x_1, y_1) i'(x_2, y_2)}{(\bar{i})^2} d\Sigma_1 d\Sigma_2 = \\
 &= \frac{1}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{B_i(\psi)}{(\bar{i})^2} d\Sigma_1 d\Sigma_2,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где $i' = i - \bar{i}$, $B_i(\psi)$ — корреляция флюктуаций интенсивности.

Как известно, величина $\chi = \ln(A/A_0)$ распределена по нормальному закону и $B_i(\psi)$ связана с $B_A(\psi)$ формулой (см. [1])

$$B_i(\psi) = (\bar{i})^2 [e^{4\bar{i}^2 b_A(\psi)} - 1]. \tag{15}$$

Учитывая (15), получаем

$$\sigma_{\gamma}^2 = \frac{1}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} e^{4\bar{i}^2 b_A(\psi)} d\Sigma_1 d\Sigma_2 - 1. \tag{16}$$

Интеграл $\frac{1}{\Sigma^2} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} e^{4\bar{i}^2 b_A(\psi)} d\Sigma_1 d\Sigma_2$, как это делается в [1], мож-

но свести к однократному:

$$\sigma_{\gamma}^2 = \frac{16}{\pi} \int_0^1 e^{4\bar{i}^2 b_A(\gamma x)} (\arccos x - x \sqrt{1-x^2}) x dx - 1. \tag{17}$$

Положив $\gamma = 0$ и взяв отношение (17) к $\sigma_{\gamma=0}$, получим безразмерную характеристику мерцания планеты

$$\left(\frac{\sigma_{\gamma}}{\sigma_0} \right)^2 = \frac{\frac{16}{\pi} \int_0^1 e^{4\bar{i}^2 b_A(\gamma x)} (\arccos x - x \sqrt{1-x^2}) x dx - 1}{e^{4\bar{i}^2} - 1}, \tag{18}$$

равную отношению средних квадратов мерцания планеты и звезды.

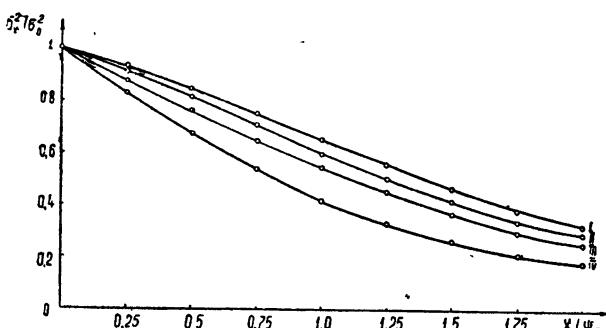


Рис. 3. Отношение средних квадратов мерцания планеты и звезды в зависимости от углового размера планеты при различных значениях $4\chi^2$:

I. $4\chi^2=0$; II. $4\chi^2=0,5$; III. $4\chi^2=1$; IV. $4\chi^2=2,5$.

На рис. 3 представлена величина $\sigma_{\gamma}^2 / \sigma_0^2$, полученная численным интегрированием выражения (18) с использованием корреляционной функции (13) при значениях $4\bar{\chi}^2 \rightarrow 0$, $4\bar{\chi}^2 = 0,5; 1; 2,5$. Понижение кривых $(\sigma_{\gamma}/\sigma_0)^2 = f(\gamma/\psi_0)$ с увеличением $\bar{\chi}^2$ объясняется тем, что радиус корреляции для i уменьшается с ростом $\bar{\chi}^2$, как это следует из (15).

3. Сравнение интенсивности мерцания звезд и планет производилось в работе [2], где одновременно было измерено мерцание Юпитера III (угловой размер 1,5'') и близкой к нему звезды Tauris. В работе приведены записи мерцания этих источников, которые были обработаны нами. Отношение $\sigma_{\gamma}^2 / \sigma_0^2$ оказалось равным 0,75. В [2] на основании сравнения мерцания звезд и планет производится оценка угловых размеров неоднородностей атмосферы, для которых получена величина 3''. Как следует из проведенного выше рассмотрения, величина $\sigma_{\gamma}^2 / \sigma_0^2$ в действительности определяется не угловыми размерами неоднородностей (в атмосфере всегда имеются неоднородности с различными размерами), а отношением $(\lambda/L)^{1/2}$.

Если на основании данных рис. 3 произвести оценку величины $\sigma_{\gamma}^2 / \sigma_0^2$ при $L = 10$ км и $\lambda = 0,5 \mu$, то для $\gamma = 1,5''$ найдем, что $\sigma_{\gamma}^2 / \sigma_0^2 = 0,5$. Это значение согласуется по порядку величины с оценкой $\sigma_{\gamma}^2 / \sigma_0^2 = 0,75$ в [2]. Однако для получения надежных сведений о величине L и детальном сравнении расчетов с наблюдениями необходим более обширный экспериментальный материал.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. M. A. Ellison, H. Seddon, Mon. Not. R. Astr. Soc., 112, 73 (1952).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
11 мая 1963 г.

SCINTILLATION OF SOURCES WITH FINITE ANGULAR SIZES

A. I. Kon, V. I. Tatarsky

The problem is considered pertaining to the light intensity fluctuations of a distant source with finite angular sizes located outside the refractive atmosphere.

The diffraction effects are taken into account when calculating since the use of geometrical optics cannot lead to the satisfactory results when thickness of a refractive layer L is much greater than l_0^2/λ (l_0 is the inner scale of turbulence, λ is the wavelength).

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ КВАЗИОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов

На основе диффузионного подхода к описанию волновых пучков в квазиоптических системах найдены законы преобразования волновых пучков бесконечными плоскими трансформаторами поля. Рассмотрена задача об отыскании конфигураций волновых пучков, обеспечивающих передачу энергии между двумя заданными апертурами преобразователей с минимальными потерями; изучена связь таких оптимальных конфигураций с распределениями поля в лучевых волноводах и резонаторах; дан метод описания наклонных пучков в лучевых зеркальных волноводах и исследованы некоторые характеристики таких волноводов.

Одним из перспективных направлений в развитии техники миллиметрового, субмиллиметрового и оптического диапазонов является направление, связанное с разработкой квазиоптических систем и, в частности, так называемых лучевых (правильнее было бы сказать — пучковых) волноводов и резонаторов. Лучевые резонаторы уже нашли широкое применение в квантовых генераторах оптического диапазона; изучение лучевых волноводов практически тоже выходит за рамки лабораторных исследований.

Вопросы теории квазиоптических систем разрабатывались многими авторами. Открытые резонаторы типа интерферометра Фабри—Перо изучались в работах Фокса и Ли [1], Вайнштейна [2], Танга [3]; резонаторы, образованные сферическими зеркалами,—в работах Бойда и Гордона [4], Бойда и Когельника [5], лучевые волноводы — в работе Губо и Шверинга [6].

У разных авторов отправные моменты исследований различны: принцип Гюйгенса—Кирхгофа в работах [1, 4, 5], метод Фурье в теории элементарных волновых пучков — в [6], асимптотические формулы строгой теории дифракции на открытом конце широкого волновода — в [2]. Однако эти подходы объединяются общей теорией, основанной на применении уравнения поперечной диффузии, записанного в лучевых координатах [7]. Единый подход к рассмотрению квазиоптических систем, развивающий диффузионной теорией, позволяет достаточно просто и наглядно выявить ряд общих закономерностей распространения волновых пучков и, в частности, изучить вопрос об оптимальных конфигурациях пучков в системах с фазовыми преобразователями конечных размеров. Он не только дает универсальные рецепты составления интегральных уравнений для полей в системах с квазиплоскими волновыми пучками, но и допускает обобщения на более сложные конфигурации квазиоптических систем.

Изучению возможностей такого подхода и посвящена настоящая работа.

1. ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕОРИИ КВАЗИПЛОСКИХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

В связи с тем, что электромагнитные поля в лучевых системах представляют собой широкие (в масштабе длины волны λ) волновые пучки,

* Настоящая работа является развернутым изложением сообщения, сделанного авторами на Втором Всесоюзном симпозиуме по дифракции волн, Горький, июнь, 1962.

рассмотрим сначала некоторые общие вопросы теории таких пучков.

Поле в волновом пучке, распространяющемся в направлении $\mathbf{k}_0 = k\mathbf{n}_0$ ($k = 2\pi/\lambda$), представим в виде*

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{r})e^{-ik_0 z}, \quad \mathbf{H} = H_0(\mathbf{r})e^{-ik_0 z}, \quad (1)$$

где $E_0(\mathbf{r})$, $H_0(\mathbf{r})$ — медленно меняющиеся функции координат. Для определенности будем рассматривать только напряженность электрического поля в пучке \mathbf{E} , уравнения для которой

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

после подстановки (1) переходят в уравнения для амплитуды E_0 :

$$(1/2ik)\Delta E_0 = (n_0 \nabla) E_0; \quad (2)$$

$$(1/ik) \operatorname{div} E_0 = (n_0 E_0). \quad (3)$$

Возьмем произвольную цилиндрическую систему координат с осью z , направленной по \mathbf{n}_0 . Учитывая, что, по предположению, E_0 — медленно меняющаяся функция координат, и пренебрегая в уравнении (2) членом $(1/2ik)\partial^2 E_0 / \partial z^2$, а в (3) — членом $(1/ik)\partial E_{0z} / \partial z$, получим приближенные уравнения:

$$(1/2ik)\Delta_{\perp} E_0 = \partial E_0 / \partial z; \quad (4)$$

$$(1/ik) \operatorname{div}_{\perp} E_0 = E_{0z}, \quad (5)$$

где значок \perp означает дифференцирование по поперечным по отношению к z координатам.

Первое из этих уравнений (4) представляет собой частный случай хорошо известного в теории дифракции так называемого параболического уравнения или уравнения поперечной диффузии [7-9]. Оно описывает процесс распространения волнового пучка как диффузию его амплитуды поперек лучей (в данном случае — параллельных оси z).

Второе уравнение (5) может быть использовано для определения продольной компоненты поля в пучке E_{0z} , если известны поперечные компоненты. Заметим, что, согласно (5), составляющая E_{0z} имеет по сравнению с поперечными компонентами поля порядок величины λ/Λ , где Λ — характерный размер области существенного изменения поля в поперечном сечении пучка, и при условии $\lambda \ll \Lambda$, которое предполагается выполненным, пренебрежимо мала.

Пусть в сечении $z = 0$ пучка известно распределение поля $E_S(\mathbf{r})$ или его угловой спектр $E_S(\mathbf{k}_{\perp})$, где $\mathbf{k}_{\perp}(k_x, k_y)$ — проекция волнового вектора \mathbf{k} (k_x, k_y, k_z) на плоскость $z = 0$ **. Тогда решение уравнения (4), описывающее поле в произвольном сечении $z > 0$ волнового пучка, бегущего в $+z$ -направлении, может быть записано в следующих двух эквивалентных формах:

$$E_0(\mathbf{r}) = (ik/2\pi z) \iint_S E_S(x', y') \exp\{-ik/2z[(x-x')^2 + (y-y')^2]\} dx' dy'; \quad (6)$$

$$E_0(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_S(k_x, k_y) \exp\{-ik_{\perp} r + i(k_{\perp}^2/2k) z\} dk_x dk_y. \quad (7)$$

Здесь S — площадь, занятая пучком в сечении $z = 0$.

* Зависимость от времени $\exp(i\omega t)$ опускается

** В силу теоремы единственности решения уравнений электродинамики фактически достаточно задать лишь поперечные компоненты поля в пучке $E_{S\perp}(\mathbf{r})$ или $E_{S\perp}(\mathbf{k}_{\perp})$.

Соотношения (6), (7) являются приближенной формулировкой принципа Гюйгенса—Кирхгофа. Чтобы оценить более детально область их применимости при описании волновых пучков, проще всего обратиться к решению строгого уравнения (2), представив его в виде интеграла Фурье по плоским волнам:

$$E_0(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_S(k_x, k_y) \exp\{-i(k - k_0)r\} dk_x dk_y. \quad (8)$$

Угловой спектр $E_S(k_x, k_y)$ достаточно широкого ($\Lambda \gg \lambda$) волнового пучка существенно отличен от нуля лишь в небольшой окрестности $|k_\perp| \sim 2\pi/\Lambda \ll k$ начала координат в пространстве k_x, k_y . Поэтому, разложив разность $k - k_0$ по степеням k_\perp/k :

$$k - k_0 = k_\perp + k_0 \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{k_\perp}{k} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{k_\perp}{k} \right)^4 + \dots \right\}, \quad (9)$$

учтем в (8) только первые два члена этого разложения. Полученное в результате соотношение, как нетрудно видеть, совпадает с (7). Границы применимости выражений (6), (7) можно оценить, потребовав, чтобы первый отброшенный в показателе экспоненты в (8) член был мал по сравнению с π :

$$\lambda/\Lambda \ll 1, \quad p = \sqrt{\lambda z}/\Lambda \ll 2(\Lambda/\lambda). \quad (10)$$

Из условий (10) вытекает, что соотношениями (6), (7) можно пользоваться даже при параметрах p , заметно превышающих единицу, если только вариации поля в пучке в сечении $z = 0$ достаточно медленны.

2. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

Изучим, основываясь на (6), некоторые общие свойства волновых пучков. Так как соотношение (6) может быть применено независимо к каждой из ортогональных составляющих напряженности поля E_x или E_y , то в дальнейшем будем рассматривать только одну из них, обозначив ее медленно меняющийся амплитудно-фазовый множитель функцией $\psi(x, y, z)$. Тем самым задача полностью сводится к скалярной. Заметим также, что соотношение (6) дает решение диффузационного уравнения не только в области $z > 0$, где оно относится к уходящему волновому пучку, но и в области $z < 0$, если там рассматривать приходящий пучок. Оба решения ($\psi_+(z > 0)$ и $\psi_-(z < 0)$) образуют единое решение $\psi(r)$, непрерывное на границе $z = 0$ ($\psi_+ = \psi_- = \psi_s$) вместе с нормальной производной ($\partial\psi_+/\partial z = \partial\psi_-/\partial z = (1/2ik)\Delta_\perp \psi_s$) и описывающее непрерывный волновой пучок через его поле $\psi_s(x, y)$ в сечении $z = 0$.

Из соотношения (6) следует, что, если функция $\psi_s(x, y)$ — чисто действительная, то распределения поля в пучке в симметричных относительно $z = 0$ плоскостях $z = \pm z_0$ совпадают по амплитуде и отличаются знаком по фазе:

$$\psi(x, y, z_0) = \psi^*(x, y, -z_0). \quad (11)$$

Это обстоятельство, уже отмечавшееся в [6], составляет, как известно, основной принцип работы лучевых волноводов: трансформация фазы пучка в плоскости $z = z_0$ на величину $\Delta\phi = 2\arg\psi(x, y, -z_0)$ восстанавливает в этом сечении распределение поля, совпадающее с распределением поля в плоскости $z = -z_0$.

Пусть в сечении $z = 0$ волнового пучка помещен плоский преобразователь, осуществляющий трансформацию пучка с коэффициентом передачи по полю $K(x, y)$:

$$\psi(x, y, +0) = K(x, y) \psi(x, y, -0). \quad (12)$$

Найдем связь между $K(x, y)$ и распределениями поля в пучке $\psi(x, y, z = -D_1) \equiv \psi_1(x, y)$ и $\psi(x, y, z = D_2) \equiv \psi_2(x, y)$ в плоскостях, удаленных от преобразователя на произвольные расстояния D_1 и D_2 . Определим, используя (6), распределения поля в пучке на обеих сторонах преобразователя:

$$\psi(x, y, -0) = \frac{ik}{2\pi D_1} \iint_{S_1} \psi_1(x', y') \exp \left\{ -\frac{ik}{2D_1} [(x-x')^2 + (y-y')^2] \right\} dx' dy'; \quad (13)$$

$$\psi(x, y, +0) = -\frac{ik}{2\pi D_2} \iint_{S_2} \psi_2(x', y') \exp \left\{ \frac{ik}{2D_2} [(x-x')^2 + (y-y')^2] \right\} dx' dy', \quad (14)$$

где S_1, S_2 — сечения пучка в плоскостях $z = -D_1$ и $z = D_2$.

Для удобства введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\psi}_{1,2}(x, y) = \psi_{1,2}(x, y) e^{\mp ik\rho^2/2D_{1,2}}; \quad (15)$$

$$F_{1,2}(x_x, x_y) = \iint_{S_{1,2}} \tilde{\psi}_{1,2}(x', y') e^{i(x_x x' + x_y y')} dx' dy', \quad (16)$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Подставляя (13) и (14) в (12) и учитывая обозначения (16), получим требуемое соотношение

$$K(x, y) = -\frac{D_1}{D_2} \frac{F_2(-kx/D_2, -ky/D_2)}{F_1(kx/D_1, ky/D_1)} \exp \left\{ i \frac{kp^2}{2} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} \right) \right\}. \quad (17)$$

Это соотношение решает как прямую задачу — определение связи между распределениями поля в пучке $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ при заданном коэффициенте преобразования $K(x, y)$, так и обратную — определение $K(x, y)$ по заданным распределениям поля в сечениях пучка, находящихся на расстояниях D_1 и D_2 от преобразователя.

Практически интересен случай, когда преобразователь осуществляет только трансформацию распределения фазы в пучке:

$$K(x, y) = e^{i\Delta\phi(x, y)}; \quad |K(x, y)| = 1. \quad (18)$$

Обратная задача при дополнительном условии (18) имеет решение не при любых распределениях $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$, а только таких, которые удовлетворяют соотношению

$$|F_1(x_x, x_y)|^2 = (D_1^2/D_2^2) |F_2((-D_1/D_2)x_x, (-D_1/D_2)x_y)|^2. \quad (19)$$

Основываясь на (19), нетрудно показать, что преобразование $\psi_1(x, y)$ в $\psi_2(x, y)$ пучком, проходящим в общем случае через несколько фазовых трансформаторов, может быть достигнуто, если выполнено условие

$$|F_1(x_x, x_y)|^2 = \gamma^2 |F_2(\pm\gamma x_x, \pm\gamma x_y)|^2, \quad (20)$$

где γ — постоянный действительный коэффициент.

Обращаясь к прямой задаче, рассмотрим пример, когда фазовый преобразователь реализует коэффициент передачи

$$K(x, y) = e^{ik\rho^2/2F}, \quad (21)$$

причем $1/F = 1/D_1 + 1/D_2$. Такое преобразование осуществляется вблизи оптической оси тонкой согласованной линзы с фокусным расстоянием F . Из (17) имеем

$$F_1(x_x, x_y) = (-D_1/D_2) F_2((-D_1/D_2)x_x, (-D_1/D_2)x_y) \quad (22)$$

или, возвращаясь к исходным распределениям $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$,

$$\psi_2(x, y) = -\frac{D_1}{D_2} \psi_1\left(-\frac{D_1}{D_2}x, -\frac{D_1}{D_2}y\right) \exp\left\{-\frac{ik\rho^2}{2D_2}\left(1 + \frac{D_1}{D_2}\right)\right\}. \quad (23)$$

Последнее соотношение показывает, что амплитудное распределение поля в плоскости $z = D_2$ представляет собой перевернутое и увеличенное в D_1/D_2 раз изображение амплитудного распределения поля в плоскости $z = -D_1$. Результат (23) обобщает на волновые пучки известный в геометрической оптике параксиальных лучей закон построения изображения в тонкой линзе. Полного подобия амплитудно-фазовых распределений поля в сечениях $z = -D_1$ и $z = D_2$ можно добиться, если в плоскости $z = D_2$ поставить дополнительный преобразователь типа (21) с фокусным расстоянием

$$F_1 = \frac{D_2}{1 + D_1/D_2}. \quad (24)$$

Легко проверить, что $F_1 + F = D_2$, т. е. оба преобразователя образуют конфокальную систему*. Если теперь на расстоянии D_2 от второго преобразователя поставить третий с фокусным расстоянием F , а на расстоянии D_1 от последнего — четвертый с фокусным расстоянием $F_2 = D_1 - F$, то на его выходе будет полностью повторено исходное распределение поля $\psi_1(x, y)$. Дальнейшее продолжение системы преобразователей приводит к построению лучевого волновода, осуществляющего неискаженную передачу волнового пучка. При $D_1 = D_2 = D$ этот волновод превращается в конфокальную систему одинаковых преобразователей с $F = D/2$, детально изученную в работах [4, 6].

Из тождественности законов построения изображения амплитудных распределений с помощью волновых пучков (6) и с помощью лучей следует, что вопрос о существовании устойчивых (периодических) конфигураций волновых пучков в заданной последовательности преобразователей может быть решен на основе чисто геометрического анализа прохождения светового луча через систему, как это сделано, например, в работе [5].

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПУЧКОВ В СИСТЕМАХ ФАЗОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

В системе согласованных фазовых преобразователей бесконечных размеров передача высокочастотной энергии волновым пучком осуществляется без потерь. На практике фазовые преобразователи всегда имеют

* Вместо одной линзы в сечении $z = D_2$ можно поставить в сечениях $z = -D_1$ и $z = D_2$ две линзы с фокусными расстояниями $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$, удовлетворяющими соотношению $\frac{1}{F^{(1)}} + \frac{1}{F^{(2)}} = \frac{1}{F_1}$. Возможность переноса изображения в такой трехлинзовой системе при $F^{(1)} = F^{(2)} = F_1/2$ была доказана в работе [10] на основе теории элементарных волновых пучков.

конечные размеры, и, следовательно, прохождение волнового пучка через них сопровождается дифракционными потерями энергии. Эти потери будут минимальны в том случае, если волновой пучок обеспечивает максимальную концентрацию поля на апертуре преобразователя. В связи с этим рассмотрим задачу об отыскании таких оптимальных конфигураций волнового пучка и установим их связь с собственными функциями лучевых волноводов и резонаторов.

Пусть в плоскости $z = 0$ на некоторой апертуре S_1 конечных размеров задано распределение поля в волновом пучке $\psi^{(1)}$. Нам требуется найти такую функцию $\psi^{(1)}(x, y)$, при которой энергия пучка, проходящего через апертуру S_2 второго преобразователя, удаленного от первого на заданное расстояние L , была бы максимальна*. Иными словами, мы должны максимизировать отношение**

$$T = \frac{\int_{S_2} |\psi_{12}^{(2)}(x, y)|^2 dx dy}{\int_{S_1} |\psi_{12}^{(1)}(x, y)|^2 dx dy} = \frac{\int \int_{\tilde{S}_1 \tilde{S}_2} \tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma') \tilde{\psi}_{12}^{(1)*}(\sigma'') K^{(1)}(\sigma' - \sigma'') d\sigma' d\sigma''}{\int_{\tilde{S}_1} |\tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma')|^2 d\sigma'}, \quad (25)$$

где

$$K^{(1)}(\sigma' - \sigma'') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\tilde{S}_2} e^{i\sigma(\sigma' - \sigma'')} d\sigma. \quad (26)$$

Здесь сделан переход к безразмерным переменным

$$u = \sqrt{k/L} x, \quad v = \sqrt{k/L} y, \quad \sigma = (u, v) \quad (27)$$

с соответствующей заменой областей интегрирования $S_{1,2} \rightarrow \tilde{S}_{1,2}$ и введена новая функция

$$\tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma) = \psi_{12}^{(1)}(\sigma) e^{-i\sigma^2/2}. \quad (28)$$

Варьирование соотношения (25) при условии

$$\int_{\tilde{S}_1} |\tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma)|^2 d\sigma = \text{const}$$

дает следующее интегральное уравнение для определения функции $\tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma)$:

$$T \tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma) = \int_{\tilde{S}_1} \tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma') K^{(1)}(\sigma' - \sigma) d\sigma' \quad (\sigma \in \tilde{S}_1). \quad (29)$$

Так как ядро $K^{(1)}(\sigma' - \sigma)$ этого уравнения эрмитово, т. е. $K^{(1)}(\sigma' - \sigma) = [K^{(1)}(\sigma - \sigma')]^*$, то его характеристические числа T , действительны. Функция (28), отвечающая наибольшему собственному значению T_0 , является искомой, обеспечивающей максимум коэффициента передачи T .

* Подобная задача рассматривалась в работе [11], где было получено и основное интегральное уравнение (29). Однако там не была установлена связь полученных распределений с собственными типами колебаний в соответствующих лучевых резонаторах и волноводах.

** В (25) учтено, что поле в пучке квазиперечно.

Если распределение поля на первой апертуре отличается от оптимального, коэффициент передачи может быть рассчитан по формуле

$$T = \sum_v |a_v|^2 T_v / \sum_v |a_v|^2, \quad (30)$$

где a_v — коэффициенты разложения заданного распределения $\tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma)$ по собственным функциям уравнения (29) $[\tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma)]_v$. Найдем поле в пучке в плоскости второй апертуры $z = L$, подставляя решения уравнения (29) в (6):

$$[\tilde{\psi}_{12}^{(2)}(\sigma)]_v = \frac{i}{2\pi} \int_{\tilde{S}_1} [\tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma')]_v e^{i\sigma\sigma'} d\sigma'. \quad (31)$$

Здесь

$$[\tilde{\psi}_{12}^{(2)}(\sigma)]_v = [\psi_{12}^{(2)}(\sigma)]_v e^{i\sigma^2/2}. \quad (32)$$

Учитывая (31), перепишем уравнение (29) в виде

$$T_v [\tilde{\psi}_{12}^{(1)}(\sigma)]_v = - \frac{i}{2\pi} \int_{\tilde{S}_2} [\tilde{\psi}_{12}^{(2)}(\sigma')]_v e^{-i\sigma\sigma'} d\sigma'. \quad (32a)$$

Из (31) и (32) следует, что функции $[\tilde{\psi}_{12}^{(2)}(\sigma)]_v$ удовлетворяют уравнению, аналогичному (29):

$$T_v [\tilde{\psi}_{12}^{(2)}(\sigma)]_v = \int_{\tilde{S}_2} [\tilde{\psi}_{12}^{(2)}(\sigma')]_v K^{(2)}(\sigma' - \sigma) d\sigma' \quad (\sigma \in \tilde{S}_2), \quad (33)$$

где

$$K^{(2)}(\sigma' - \sigma) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\tilde{S}_1} \exp \{-i\sigma''(\sigma' - \sigma)\} d\sigma'', \quad (34)$$

при тех же собственных значениях T_v .

Сравним полученные распределения с теми, которые являются решениями задачи об оптимальной передаче энергии от второй апертуры S_2 к первой апертуре S_1 . Меняя в приведенных формулах местами индексы 1 и 2, получим для функций

$$\tilde{\psi}_{21}^{(2,1)}(\sigma) = \psi_{21}^{(2,1)}(\sigma) e^{\mp i\sigma^2/2} \quad (35)$$

соответственно уравнения (33) и (29), но с ядрами, комплексно сопряженными (34) и (26). Следовательно, их решения будут связаны с решениями уравнений (33) и (29) соотношениями

$$[\tilde{\psi}_{21}^{(2,1)}(\sigma)]_v = [\tilde{\psi}_{12}^{(2,1)}(\sigma)]_v^* = \tilde{\psi}_{12}^{(2,1)}(\sigma) \quad (\sigma \in S_1, S_2) \quad (36)$$

и относиться к тем же собственным значениям T_v , что и решения этих уравнений. Из (36) вытекает, что система чередующихся апертур S_1 и S_2 (или открытый резонатор с такими отражателями) с фазовыми трансформаторами, осуществляющими в пределах этих апертур преобразование

$$\psi_v^{(1,2)} \rightarrow [\psi_v^{(1,2)}]^*,$$

обеспечивает распространение пучка, распределение поля в котором на одинаковых апертурах повторяется с точностью до постоянного множителя. Наименьший уровень дифракционных потерь достигается в системе преобразователей, «настроенных» на пучок, отвечающий наибольшему собственному значению T_0 .

Рассмотрим особо такие формы апертур S_1 и S_2 , при которых трансформация $\psi_{\nu}^{(1,2)} \rightarrow [\psi_{\nu}^{(1,2)}]$ * для всех функций $\psi_{\nu}^{(1,2)}$ осуществляется одним и тем же фазовым преобразователем. Для этого необходимо, чтобы все возможные решения уравнений (29) и (33) могли быть представлены в виде

$$\tilde{\psi}_{\nu}(\sigma) = \tilde{\psi}_{\nu}^0(\sigma) e^{i\varphi(\sigma)}, \quad (37)$$

где $\tilde{\psi}_{\nu}^0(\sigma)$ — действительные функции, а $\varphi(\sigma)$ — универсальная при данной форме апертур S_1 и S_2 функция, не зависящая от ν . Подстановка (37) в уравнения (29) или (33) переводит их в интегральные уравнения относительно действительных функций $\tilde{\psi}_{\nu}^0(\sigma)$, но с новыми ядрами

$$K_{\text{II}}^{(1,2)}(\sigma', \sigma) = K^{(1,2)}(\sigma' - \sigma) \exp \{ i [\varphi^{(1,2)}(\sigma') - \varphi^{(1,2)}(\sigma)] \}. \quad (38)$$

Если возможен подбор таких функций $\varphi^{(1,2)}(\sigma)$, при которых ядра $K_{\text{II}}^{(1,2)}(\sigma', \sigma)$ станут действительными, то собственные функции уравнений (29) и (33) будут обладать свойством (37)*. Поскольку фазы ядер $K^{(1,2)}(\sigma' - \sigma)$ являются нечетными функциями разности координат $\sigma' - \sigma$, то соотношение (38) будет определять действительные функции $K_{\text{II}}^{(1,2)}(\sigma', \sigma)$ лишь при условии

$$K^{(1,2)}(\sigma' - \sigma) = K_0^{(1,2)}(\sigma' - \sigma) \exp \{ \pm i C_{1,2}(\sigma' - \sigma) \}, \quad (39)$$

где $C_{1,2}$ — постоянные вектора, а $K_0^{(1,2)}(\sigma' - \sigma)$ — действительная функция. Функции $\varphi^{(1,2)}(\sigma)$ при этом определяются выражениями

$$\varphi^{(1,2)}(\sigma) = \mp C_{1,2}\sigma. \quad (40)$$

Условие (39) при подстановке (26) и (34) может быть переписано в виде

$$\int\limits_{S_{2,1}} \sin [(\sigma - C_{1,2})w] d\sigma \equiv 0, \quad (41)$$

где $w = \sigma' - \sigma$. При произвольных векторах w тождество (41) выполняется для апертур, обладающих центральной симметрией. Постоянные векторы C_1 и C_2 определяются положением центров симметрии соответственно апертур S_2 и S_1 . Распределения поля в пучках на таких апертурах в соответствии с (28), (32), (37) и (40) будут описываться функциями

$$[\psi_{1,2}^{(1,2)}(\sigma)]_{\nu} = [\psi^{(1,2)}(\sigma)]_{\nu}^0 \exp \{ \pm i[(\sigma^2/2) - C_{1,2}\sigma] \} \quad (42)$$

при передаче от S_1 к S_2 и функциями

* Известно [12], что собственные функции действительного симметричного ядра всегда могут быть выбраны действительными. Обратно, если все собственные функции $\tilde{\psi}_{\nu}^{(0)}$ некоторого эрмитового ядра действительны, то из представления

$$K(\sigma, \sigma') = \sum T_{\nu} \tilde{\psi}_{\nu}^{(0)}(\sigma) \tilde{\psi}_{\nu}^{(0)}(\sigma')$$

вытекает, что ядро действительно.

$$[\psi_{21}^{(1,2)}(\sigma)]_v = [\psi^{(1,2)}(\sigma)]^0 \exp\{\mp i[(\sigma^2/2) - C_{1,2}\sigma]\} \quad (43)$$

при передаче от S_2 к S_1 .

Центрально-симметричные преобразователи, осуществляющие сдвиг фазы на величину

$$\Delta\varphi_{1,2} = \sigma^2 - 2C_{1,2}\sigma, \quad (44)$$

обеспечивают распространение всех волновых пучков с распределениями (42), (43). Наименьшими потерями будет обладать пучок, соответствующий наибольшему собственному значению T_0 .

Изменения фазы в пучках (42), (43) имеют простой физический смысл: на каждом из преобразователей они соответствуют сферической волне, сходящейся к центру симметрии другого преобразователя или расходящейся из него. В частном случае, когда центры симметрии апертур лежат на оси z , мы приходим к системе соосных конфокальных линз или сферических зеркал. Отдельные варианты таких преобразователей изучались в работах [4-6].

Таким образом, из проведенного анализа можно сделать следующее заключение: при центрально-симметричных апертурах S_1 и S_2 система конфокальных преобразователей* является оптимальной в том смысле, что на основном типе волны она обладает минимальными дифракционными потерями по сравнению со всеми другими фазовыми преобразователями; при произвольной форме апертур оптимальной является система преобразователей, построенная в соответствии с изменением фазы в пучке, максимизирующем коэффициент передачи T (25) между апертурами. Этот вывод является обобщением результата работы [1], где было показано, что резонатор, образованный одинаковыми круговыми сферическими зеркалами, обладает наибольшей радиационной добротностью при конфокальном размещении зеркал.

В качестве примера передачи энергии между двумя апертурами рассмотрим излучатель с прямоугольной апертурой, имеющей размеры $2a_1 \times 2b_1$, который фокусирует пучок на прямоугольное отверстие с размерами $2a_2 \times 2b_2$. Центры симметрии обеих апертур лежат на оси z .

Разделяя переменные в (29): $\tilde{\psi}_{12}^{(1)}(u, v) = f_x(u)f_y(v)$ и выполняя необходимое интегрирование, для $f_x(u)$ и $f_y(v)$ получим два однотипных интегральных уравнения вида

$$T' f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-n_1}^{n_1} f(t') \frac{\sin[(t-t')n_2]}{t-t'} dt', \quad (45)$$

где

$$T' = T_x, T_y; \quad T_x T_y = T; \quad f(t) = f_x(t), f_y(t);$$

$$n_{1,2} = l_{1,2}, m_{1,2}; \quad l_{1,2} = \sqrt{k/L} a_{1,2}; \quad m_{1,2} = \sqrt{k/L} b_{1,2}.$$

Решениями уравнения (45) являются угловые функции S_{0m} ($n_1 n_2, t/n_1$) в вытянутой сфероидальной системе координат, и собственными значениями — величины

$$T_m' = \frac{2n_1 n_2}{\pi} [R_{0m}^{(1)}(n_1 n_2, 1)]^2, \quad (46)$$

где $R_{0m}^{(1)}$ — радиальные функции в той же координатной системе [11-13].

* Заметим, что фазовый сдвиг (44) тоже реализуется конфокальными преобразователями, но дополненными фазовым клином (призмой), осуществляющим линейное изменение фазы на величину $-2C_{1,2}\sigma$.

На рис. 1 приведены зависимости коэффициентов T'_m от $n_1 n_2$ для первых четных распределений $m = 0, 2, 4$, рассчитанные по таблицам [16]. Наибольший коэффициент передачи T'_0 соответствует распределению $S_{00}(n_1 n_2, t/n_1)$ *. Для сравнения на рис. 1 пунктиром показан график зависимости $T'_p(n_1 n_2)$ для равномерно освещенной апертуры, рассчитан-

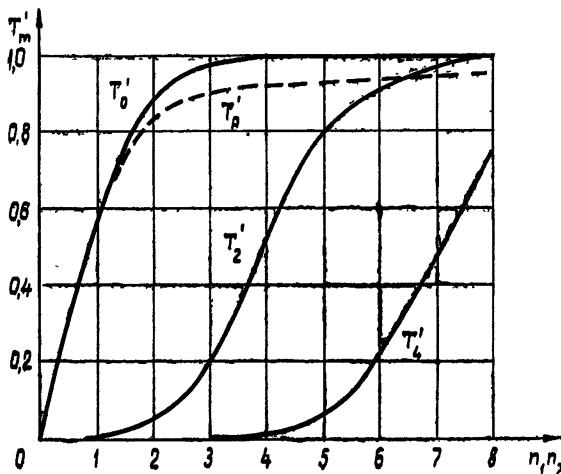


Рис. 1.

ный по формуле (30). Видно, что с увеличением параметра $n_1 n_2$ (большие раскрывы при фиксированных L и λ) потери энергии в случае оптимально освещенного раскрыва заметно меньше, чем при равномерном освещении.

Интересна также задача на отыскание оптимальных значений тех или иных параметров, определяющих геометрию апертур преобразователей. Мы приведем здесь лишь результаты численного расчета максимального коэффициента передачи между одинаковыми прямоугольными апертурами с размерами $2a \times 2b$ при постоянной их площади (точнее, постоянном произведении $q = n_1 n_2 = (k/L)S$), но разном отношении сторон a/b (рис. 2). Из рис. 2 видно,

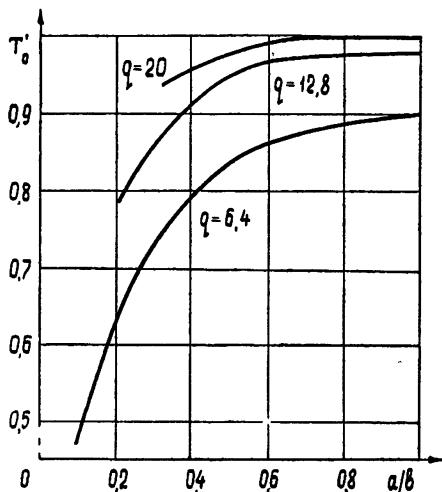


Рис. 2.

что наибольший коэффициент передачи обеспечивает квадратная апертура ($a/b = 1$). Из всех апертур заданной площади наиболее оптимальными являются, вероятно, круговые апертуры, как имеющие наименьший периметр, однако строгого доказательства этого утверждения, насколько нам известно, в литературе не приводилось.

* Графики распределения $S_{00}(c, x)$ при разных значениях параметра c имеются в работе [4].

4. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ К ОТЫСКАНИЮ ПОЛЕЙ В ЗЕРКАЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Наряду с линзовыми фазовыми преобразователями в лучевых волноводах можно использовать и зеркальные преобразователи соответствующего профиля (рис. 3). При этом приходится иметь дело с пучками,

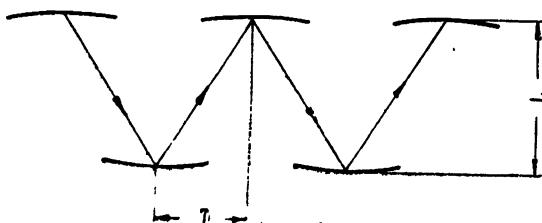


Рис. 3.

распространяющимися наклонно к плоскостям, в которых расположены преобразователи. Мы сейчас покажем, что описание таких пучков путем замены координат сводится к описанию прямых волновых пучков, распространяющихся перпендикулярно к плоскостям преобразователей. Поэтому все результаты, относящиеся к последнему случаю, легко могут быть перенесены и на наклонные пучки в зеркальных волноводах.

Рассмотрим волновой пучок, распространяющийся в некотором произвольном направлении s_0 (рис. 4). Без ограничения общности можно считать, что вектор s_0 лежит в плоскости xz . Уравнение попечерной диффузии для медленно меняющегося множителя любой из компонент поля, ортогональной к направлению распространения пучка, имеет в рассматриваемом случае вид.

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{2ik} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} \right), \quad (47)$$

где x' и y — координаты в плоскости, перпендикулярной к s_0 .

Предположим, что преобразователи, осуществляющие трансформацию пучка, расположены в сечениях $z = \text{const}$. В этом случае целесообразно ввести в рассмотрение вместо x' , y , s косоугольные координаты ξ , y , ζ (рис. 4):

$$\xi = x - z \operatorname{ctg} \theta = x' / \sin \theta; \quad \zeta = z / \sin \theta = s - x' \operatorname{ctg} \theta, \quad (48)$$

переписав в них диффузационное уравнение (47):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \frac{1}{2ik} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right). \quad (49)$$

При переходе от (47) к (49) мы пренебрегли членом $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \operatorname{ctg}^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$, малым при $\Delta \operatorname{tg} \theta / \lambda \gg 1$ по сравнению с $k \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}$.

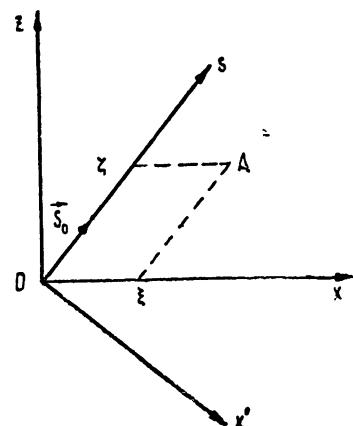


Рис. 4.

Координаты ξ , y , ζ имеют простой геометрический смысл: координаты ξ и y образуют ортогональную систему в плоскости $z = \text{const}$ с центром на оси пучка s , а координата ζ дает расстояние между плоскостями $z=0$ и $z = \text{const} = \zeta \sin \theta$ в направлении пучка s_0 . В координатах $\xi \sin \theta$, y , ζ уравнение (49) имеет тот же вид, что и в ортогональных декартовых координатах x , y , z при распространении пучка вдоль оси z . Поэтому все результаты, относящиеся к прямым пучкам, легко переносятся на наклонный пучок

$$\Psi(\xi, y, \zeta) = \psi(\xi \sin \theta, y, \zeta) \exp\{-ik(s_0 r)\} \quad (50)$$

с помощью замены $x \rightarrow \xi \sin \theta$, $y \rightarrow y$, $z \rightarrow \zeta \equiv z/\sin \theta$.

Проиллюстрируем это на некоторых примерах.

Закон изменения фазы в оптимальном прямом пучке, максимизирующем коэффициент передачи между двумя апертурами, имеющими центры симметрии на оси z , дается формулами (42), (43) при $C_{1.2} = 0$. Для наклонного пучка (50) он должен быть переписан в виде

$$\arg \psi(\xi \sin \theta; y; \zeta = 0, L/\sin \theta) = \pm (k/2L) [(\xi \sin \theta)^2 + y^2] \sin \theta, \quad (51)$$

где L — расстояние между плоскостями апертур.

Полный закон распределения фазы на апертурах в соответствии с (50) будет следующим:

$$\varphi(\xi; y; \zeta = 0, L/\sin \theta) = \pm (k/2L) [(\xi \sin \theta)^2 + y^2] \sin \theta - k \xi \cos \theta. \quad (52)$$

Такой закон изменения фазы можно получить, если в качестве преобразователей использовать участки поверхностей эллипсоидов вращения, причем центр каждого преобразователя должен находиться в совпадающих геометрических фокусах предыдущего и последующего преобразователей. В предельном случае $\theta = \pi/2$ эллипсоиды вырождаются в сферы, а сам зеркальный волновод переходит в конфокальный резонатор

Нетрудно оценить и величину дифракционных потерь в зеркальном волноводе, исходя из результатов для прямого пучка. Рассмотрим, к примеру, преобразователи прямоугольной формы $2a_1 \times 2b_1$ и $2a_2 \times 2b_2$. При перпендикулярном отражении пучка параметрами, определяющими потери, являются

$$l_{1.2} = \sqrt{k/L} a_{1.2}, \quad m_{1.2} = \sqrt{k/L} b_{1.2}. \quad (53)$$

При наклонном отражении пучка, распространяющегося в плоскости xz , между отражателями, расположенными в плоскостях $z = 0$, L , соответствующими параметрами будут

$$l_{1.2} = \sqrt{k/L} a_{1.2} \sin^{3/2} \theta, \quad m_{1.2} = \sqrt{k/L} b_{1.2} \sin^{1/2} \theta. \quad (54)$$

Для преобразователей с эллиптическим контуром площади S и отношением осей, равным $\sin \theta$, параметром, определяющим потери, является

$$r = \sqrt{kS/\pi} L \sin \theta \quad (55)$$

вместо $r = \sqrt{kS/\pi} L$ для круговых преобразователей при перпендикулярном прохождении пучка [1, 4].

На примере преобразователей с эллиптическим контуром рассмотрим зависимость потерь на единицу длины лучевого зеркального волновода от его параметров при фиксированном расстоянии между преобразователями D (рис. 3). Подставляя в (55) $L = D \operatorname{tg} \theta$, будем иметь

$$r = \sqrt{kS/2\pi D} \sqrt{\sin 2\theta}. \quad (56)$$

Как функция θ при фиксированных прочих параметрах, величина r до-

стигнет максимума, когда $\theta = 45^\circ$; при этом же значении будет, очевидно, и минимум дифракционных потерь. На рис. 5 приведена зависимость потерь для основного типа волны на единицу длины волновода от параметра $S/\lambda D$ в этом случае, рассчитанная на основе численных результатов работы [1]. Дифракционные потери на единицу длины волновода могут быть уменьшены в системе, показанной на рис. 6а, с одновременным уменьшением поперечного размера волновода, правда, за счет увеличения общего числа преобразователей, а следовательно, и омических потерь в них в два раза. Впрочем, половина преобразователей может быть заменена плоскими отражающими поверхностями (рис. 6б).

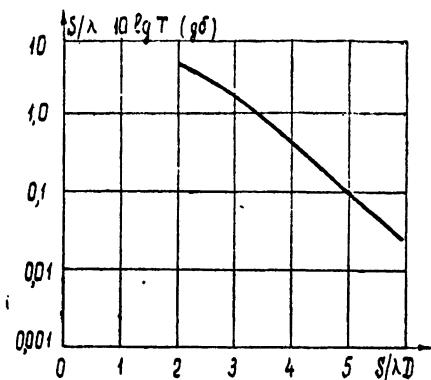


Рис. 5.

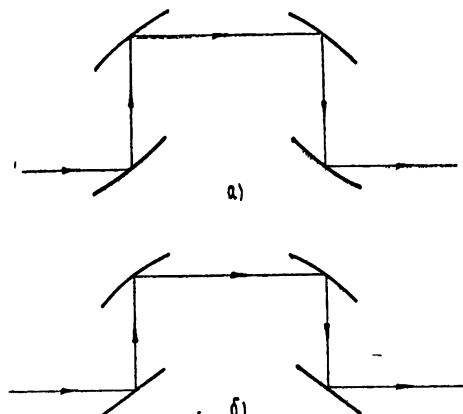


Рис. 6.

Возможности, связанные с применением уравнения поперечной диффузии и его решений для отыскания полей в квазиоптических системах, далеко не исчерпываются приведенными выше примерами. Остановимся кратко еще на некоторых задачах, рассмотрение которых может быть проведено указанным методом.

Одной из таких задач является расчет коэффициента связи между двумя большими антennами, не слишком удаленными друг от друга, когда обычное фраунгоферовское приближение оказывается неприемлемым. Такой расчет для заданных распределений поля на антенных в режиме передачи может быть выполнен на основе приведенных выше соотношений. В частности, из результатов раздела 3 вытекает, что максимум коэффициента передачи между антennами с апертурами S_1 и S_2 достигается, если каждая из антenn в режиме передачи обеспечивает на своем раскрыве распределение поля, являющееся решением соответствующих уравнений (29) и (33) для наибольшего собственного значения T_0 .

Решения диффузионного уравнения (6) позволяют легко составлять уравнения для распределения поля на фазовых преобразователях в лучевых волноводах или резонаторах. Например, условие повторяемости волнового пучка (с точностью до постоянного комплексного множителя q) в системе преобразователей, размещенных на расстоянии L друг от друга и осуществляющих трансформацию фазы на величину $\Delta\phi(x, y)$; вместе с (6) сразу же приводит к интегральному уравнению для распределения поля на преобразователях:

$$\frac{ik}{2\pi L} \int_S \psi_s(x', y') \exp \left\{ -\frac{ik}{2L} [(x - x')^2 + (y - y')] + i\Delta\phi(x, y) \right\} dx' dy' = \\ = q \psi_s(x, y). \quad (57)$$

Интегральные уравнения для лучевых резонаторов и волноводов, изученные в работах [1–6], являются частным случаем этого уравнения.

Уравнение (57) оказывается полезным при исследовании влияния отклонений профиля зеркал от правильной геометрической формы на собственные частоты и величину радиационных потерь для разных типов колебаний лучевых систем. В этом случае задача сводится к исследованию решений уравнения (57) при $\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \delta\varphi$, где $\Delta\varphi_0$ — заданная функция, а $\delta\varphi$ — добавок, определяемый отклонением реального профиля от заданного. При малых по сравнению с π значениях $\delta\varphi$ задача может анализироваться методом возмущений.

Полезным примером применения уравнения поперечной диффузии может служить задача о дифракции волн на открытом конце плоского волновода на частотах, близких к критической частоте данного типа волны. Представляя поле в таком волноводе в виде

$$\Psi = \psi_+ e^{-ikz} + \psi_- e^{ikz}, \quad (58)$$

где функции ψ_{\pm} удовлетворяют уравнениям

$$\pm \frac{1}{2ik} \Delta_z \psi_{\pm} = \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial z}, \quad (59)$$

и требуя, чтобы на стенках волновода выполнялись граничные условия $\Psi = 0$ или $\partial\Psi/\partial z = 0$, а на их продолжении $\psi_+ = 0$ — на верхней границе и $\psi_- = 0$ — на нижней, нетрудно показать, что фурье-представления функций ψ_+ или ψ_- будут удовлетворять тем же самым приближенным интегральным уравнениям типа Винера—Хопфа, которые изучены Вайнштейном [2]. Отсюда ясно, что точность формул работы [2] не выходит за рамки диффузионного приближения*.

В заключение отметим еще, что рассмотренный здесь способ описания, основанный на решении уравнения поперечной диффузии, применим не только к системам с квазиплоскими волновыми пучками, но также и к системам, в которых волновые фронты в приближении геометрической оптики существенно отличаются от квазиплоских. В частности, такое описание оказывается полезным при изучении сильно расходящихся пучков, когда кривизна фронтов столь велика, что диффузия волновой амплитуды происходит по цилиндрическим или сферическим поверхностям.

Авторы признательны Б. З. Каценеленбауму за полезные дискуссии и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. G. Fox, T. Li, Proc. IRE, 48, 1904 (1960); BSTJ, 40, 453 (1961).
2. Л. А. Вайнштейн, ЖЭТФ, 44, 1050 (1963).
3. C. L. Tang, J. Appl. Optics, 1, 768 (1962).
4. G. D. Boyd, J. P. Gordon, BSTJ, 40, 489 (1961).
5. G. D. Boyd, H. Kogelnik, BSTJ, 41, 1347 (1962).
6. G. Goubaud, F. Schwerling, IRE Trans., AP-9, 248 (1961).
7. Г. Д. Малюжинец, УФН, 69, 321 (1959).
8. Г. Д. Малюжинец, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 6, 1247 (1961); 5, 1489 (1961).
9. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 8, 363 (1963).
10. G. Goubaud, Symposium on electromagnetic theory and antennas, Copenhagen, June 1962, 332.

* Это, впрочем, видно и из неравенств (6) работы [2], которые совпадают с условиями (10) применимости диффузионного приближения.

- 11 A. Kay, Trans. IRE, AP-8, 536 (1960).
- 12 У. В. Ловитт, Линейные интегральные уравнения, ГИТГЛ, М., 1957, стр. 130.
- 13 D. Slepian, H. O. Pollak, I, BSTJ, 40, 43 (1961).
14. H. J. Landau, H. O. Pollak, II, BSTJ, 40, 65 (1961).
15. H. J. Landau, H. O. Pollak, III, BSTJ, 41, 1295 (1962)
- 16 J. A. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu, J. D. C. Little, F. J. Corbató, Spheroidal wave functions, Technology Press of M. I. T. and John Wiley and Sons, Inc., New York, 1956.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 июля 1963 г.

SOME ASPECTS OF THE THEORY OF QUASI-OPTICAL SYSTEMS

N. G. Bondarenko, V. I. Talanov

Using the diffusion approximation of wave beams in quasi-optical systems the laws have been found out of transformation of wave beams by means of infinite plane field transformators. The problem has been considered of determination of wave beams configurations providing the energy transmission between two given apertures with minimum losses, the connection of the optimal configurations with distributions of a field in beam waveguides and resonators have been studied. The method is given describing the oblique beams in beam mirror waveguides and some properties of these waveguides have been investigated.

ФЛЮКТУАЦИИ ЧАСТОТЫ ГЕНЕРАТОРА ПРИ ПРИМЕНЕНИИ СХЕМ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЧАСТОТЫ

И. Л. Берштейн

Изучается спектр флюктуаций частоты генератора при применении схем автоматической стабилизации его частоты (метод ЧАП и метод ФАП). Рассматривается влияние параметров схем на величину уменьшения спектральной плотности флюктуаций частоты.

ВВЕДЕНИЕ

Проблеме стабилизации частоты генераторов посвящена обширная литература. Эта проблема имеет много аспектов: для одних задач важна так называемая долговременная стабильность частоты, и при этом интерес представляет лишь среднее значение частоты, его изменения на протяжении часов, суток, месяцев. В других случаях речь идет о так называемой кратковременной стабильности частоты; эту величину часто характеризуют значением возможного ухода частоты генератора за время 1 сек.

Имеется ряд практических задач, для которых указанные критерии стабильности частоты малополезны, — они не позволяют оценить тот мешающий эффект, который будет на выходе той или иной аппаратуры. Типичным примером может быть установка, использующая эффект Доплера. Положим, что полезный эффект заключается в наблюдении на выходе аппаратуры допплеровских частот в диапазоне от F_1 до F_2 . Вредным эффектом в этом случае будут являться флюктуации частоты излучаемого колебания, происходящие с частотами в диапазоне от F_1 до F_2^* . Иными словами, для подобных систем существенно значение спектральной плотности флюктуаций частоты f генератора $W_f(F)$ для определенного интервала значений частоты F . Разумеется, если помимо хаотических изменений имеет место и динамическое изменение частоты f (под влиянием фона, механической тряски и т. п.), происходящее с частотой, попадающей в интересующий нас интервал значений F , то соответствующее значение девиации частоты также должно быть принято во внимание**.

В работах, посвященных проблеме автоматической стабилизации частоты, речь в основном идет о стабилизации среднего значения частоты. Вопрос же флюктуаций частоты, их уменьшения при помощи схем автоматики, хотя косвенно и затрагивался в некоторых работах (см., например, [1]), не получил, насколько нам известно, достаточного освещения. В настоящей работе делается попытка восполнить этот пробел путем рассмотрения значений спектральной плотности флюктуаций частоты, которые получаются при различных схемах автоматики, предельных

* Если флюктуационный набег фазы колебания за время задержки отраженного сигнала достигает величины порядка радиана и более (что может иметь место при большом значении времени задержки), то диапазон мешающих флюктуаций будет от 0 до F_2 .

** Полученные ниже значения уменьшения величин $W_f(F)$ пригодны и для определения уменьшения интенсивности этих девиаций частоты.

возможностей по уменьшению этих флюктуаций и т. п. Возможные методы уменьшения флюктуаций частоты в самом генераторе в данной работе не рассматриваются.

Флюктуации частоты генератора принято делить на естественные и технические. Теория естественных флюктуаций для разных типов генераторов развита в работах [2-5]. Расчет технических флюктуаций затруднителен; это связано с тем, что такие флюктуации вызваны малоизученными и трудно контролируемыми флюктуациями параметров схемы генератора. Спектральная плотность технических флюктуаций возрастает по мере уменьшения частоты наблюдения F ; она существенно превышает уровень естественных флюктуаций при значениях F от самых малых до десятков кГц для генераторов СВЧ. Судя по имеющимся в литературе отдельным опытным данным [6-8], для спектральной плотности технических флюктуаций частоты $W_f(F)^*$ имеет место зависимость A/F^α , где A — некоторый коэффициент, а $\alpha \approx 1$.

Из сказанного следует, что в первом приближении можно принять, что величина $W_f(F)$ меняется по закону A/F до значения F , при котором величина A/F становится равной величине спектральной плотности естественных флюктуаций (которая от частоты практически не зависит), далее она сохраняется неизменной. Закономерность A/F , типичная для низкочастотных флюктуаций во многих физических объектах, приводит к трудностям, связанным с тем, что описываемый случайный процесс по существу является нестационарным; в результате этого расчет некоторых величин (например, ширины линии генератора) приводит к расходящимся интегралам. Круг вопросов, связанных с этими трудностями, рассмотрен в работе [9].

1. ФЛЮКТУАЦИИ ПРИ СИСТЕМЕ ЧАП

Методы автоматической стабилизации частоты базируются на использовании либо «опорного сигнала», имеющего достаточно стабильную частоту колебания (мощность этого сигнала обычно много меньше мощности стабилизируемого генератора), либо на применении высокодобротного резонатора, частота настройки которого достаточно стабильна**. В первом случае имеет место фазовая автоподстройка (ФАП); в этой системе средняя частота генератора совпадает со средней частотой опорного сигнала, а сигнал ошибки в схеме автоматики зависит от фазы колебания***. Во втором случае имеет место частотная автоподстройка (ЧАП); в этой системе, вообще говоря, средняя частота генератора несколько отклоняется от частоты настройки резонатора, что и является сигналом ошибки схемы автоматики.

Рассмотрим вначале систему ЧАП: Конкретных схем ЧАП описано в литературе много. Отвлекаясь от технических деталей, можно отметить наличие трех основных вариантов.

1) Тем или иным способом получают так называемую дискриминаторную характеристику, отмечающую как знак, так и величину отклонения частоты колебания от частоты настройки резонатора (если это отклонение не слишком велико). При этом обычно применяется два детектора, разность выходных напряжений которых дает дискриминатор-

* В литературе помимо $W_f(F)$ встречаются также величины $W_\omega(F)$ и $W_\omega(\Omega)$, где $\omega = 2\pi f$, $\Omega = 2\pi F$. Эти величины связаны соотношениями

$$W_\omega(F) = 4\pi^2 W_f(F); \quad W_\omega(\Omega) = 2\pi W_f(F).$$

** В некоторых схемах применяется два резонатора, имеющих близкие частоты настройки

*** Впрочем, в работе [10] показано, что при большом уровне помех возможно нарушение указанного равенства.

ную зависимость, и усилитель сигнала ошибки. Недостатками этого варианта является то, что усилитель должен усиливать низкие частоты, вплоть до нулевой частоты, а также то, что большие низкочастотные флюктуации, типичные для детекторов (и усилителя), будут воздействовать на частоту генератора. Поэтому затруднительно по этому варианту получить достаточное ослабление значений $W_f(F)$, по крайней мере при небольших значениях F .

2) Колебание генератора модулируется по частоте (с малым индексом модуляции) с некоторой вспомогательной частотой ν , существенно превышающей интересующий нас интервал значений F . Такое колебание, будучи пропущено через резонатор (или после отражения от него), окажется амплитудно-модулированным с частотой ν в том случае, если несущая частота генератора несколько отличается от частоты настройки резонатора. Это отметит детектор, на выходе которого будет напряжение с частотой ν , причем фаза этого напряжения меняется на π при изменении знака указанной расстройки. Применение усилителя на частоту ν^* , а затем фазового детектора обеспечивает получение дискриминаторной зависимости, позволяющей управлять частотой генератора в нужном направлении. Этот вариант ЧАП сравнительно прост, допускает легкую перестройку рабочей частоты, исключает непосредственное воздействие низкочастотных флюктуаций детектора. Недостатком варианта является то, что колебание генератора, помимо несущей, содержит боковые частоты, отстоящие на величину ν от несущей. Хотя уровень этих боковых обычно мал, тем не менее для некоторых практических задач он неприменим.

Разновидностью варианта является модуляция не колебания генератора, а частоты настройки резонатора. Для этой цели обычно механически изменяют (в малых пределах) тот или иной размер резонатора. Недостатком системы является то, что модуляция резонатора ухудшает стабильность его средней частоты настройки, а также то, что практически невозможно применить достаточно высокую частоту модуляции ν (которая должна быть много больше F_2).

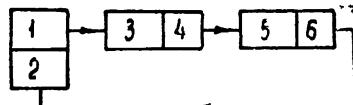
3) Наилучший результат по системе ЧАП получен, по-видимому, при помощи схемы генератора Паунда (см., например, [11], где описана схема и полученные результаты). В этой схеме имеется модулирующий детектор, на который подается вспомогательное напряжение частоты ν (порядка десятков мгц) и приемный детектор, на выходе которого возникает напряжение частоты ν в случае отклонения частоты генератора от частоты настройки резонатора; фаза этого напряжения меняется на π при изменении знака расстройки. Применение усилителя на частоту ν и фазового детектора дает нужную дискриминаторную зависимость. Недостатком варианта является сложность схемы, необходимость тщательного подбора и регулировки элементов установки; в связи с этим весьма затруднительна перестройка рабочей частоты в разумных пределах. Кроме того, результаты работы схемы существенно ухудшаются из-за нестабильности модулирующего детектора.

Несмотря на отмеченное выше различие вариантов ЧАП, основные закономерности работы схем являются общими. Проведем сначала анализ для первого варианта, а затем отметим изменения, которые будут иметь место для других вариантов. Соответствующая блок-схема приведена на рис. 1. Управляющим элементом назван механизм, воздействующий (практически безынерционно) на частоту генератора. В случае кристаллического генератора это осуществляется подачей напряжения на отражатель, в других случаях — применением реактивной лампы и т. п.

* Его полоса, разумеется, должна превышать величину $2F_2$.

Под резонансной цепью будем понимать не только сам резонатор как таковой, но и всю высокочастотную часть схемы (она может включать, например, направленный ответвитель, двойной тройник и т. д.), обеспечивающую получение на выходе последующих детекторов необходимую дискриминаторную характеристику. Назначение RC -ячейки, которая выделена на блок-схеме, будет ясно из дальнейшего. Параметры элементов схемы будем характеризовать их передаточными частотными характеристиками.

Рис. 1. 1—генератор; 2—управляющий элемент; 3—резонансная цепь; 4—детекторы; 5—усилитель; 6— RC -ячейка.



Обозначим частоту настройки резонатора через f_0 , а закон изменения частоты генератора, при отсутствии схемы автоматики, запишем в виде ряда Фурье:

$$f = f_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n e^{j 2 \pi n t / T}, \quad (1)$$

где T — достаточно большой промежуток времени. Задачей является определение закона изменения частоты генератора f при работе схемы автоматики:

$$f = f_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{b}_n e^{j 2 \pi n t / T}. \quad (2)$$

Расчет может быть просто проведен в предположении линейности всех элементов тракта, что будет иметь место при достаточно малых значениях $f - f_0$ (этот случай и представляет наибольший практический интерес).

Введем передаточную функцию, характеризующую преобразование в резонансной цепи и детекторах спектральной компоненты флюктуаций частоты $\bar{b}_F e^{j 2 \pi F t}$ в напряжение на входе усилителя, и обозначим ее через $-\bar{K}_1(F) = -K_1(F) e^{-j \varphi_1(F)}$. Эта величина для каждой конкретной схемы должна быть рассчитана отдельно; она существенно зависит от добротности резонатора и от мощности, поступающей в схему. На входе усилителя, помимо напряжения $-\bar{K}_1(F) \bar{b}_F$, вызванного указанной компонентой флюктуаций частоты генератора, будет напряжение собственных шумов, амплитуду спектральной компоненты которых на той же частоте F обозначим через c_F . Введя теперь коэффициент усиления напряжения частоты F усилителя $\bar{K}_2(F) = K_2(F) e^{-j \varphi_2(F)}$, коэффициент передачи RC -ячейки $\bar{K}_3(F) = K_3(F) e^{-j \varphi_3(F)}$ и S — крутизну управления управляющего элемента генератора, можем написать равенство

$$\bar{b}_F = \bar{a}_F + S \bar{K}_2(F) \bar{K}_3(F) [-\bar{K}_1(F) \bar{b}_F + \bar{c}_F], \quad (3)$$

из которого находим

$$\bar{b}_F = \frac{\bar{a}_F + S \bar{K}_2(F) \bar{K}_3(F) \bar{c}_F}{1 + S \bar{K}_1(F) \bar{K}_2(F) \bar{K}_3(F)}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что если перейти к спектральной плотности флюктуаций частоты без системы ЧАП $W_f^0(F)$, то же при работе системы ЧАП $W_f(F)$, то

$$W_f(F) = \frac{W_f^0(F) + S^2 K_2^2(F) K_3^2(F) W_y(F)}{1 + S^2 K_1^2(F) K_2^2(F) K_3^2(F) + 2SK_1(F)K_2(F)K_3(F)\cos\varphi(F)}, \quad (5)$$

где

$$\varphi(F) = \varphi_1(F) + \varphi_2(F) + \varphi_3(F),$$

$W_y(F)$ — спектральная плотность шумов на входе усилителя.

Значение знаменателя определяет величину уменьшения начальной спектральной плотности $W_f^0(F)$; наличие второго члена в числителе показывает рост спектральной плотности из-за шумов самой цепи автоматики. Разумеется, применение ЧАП целесообразно лишь при условии $W_f(F) \ll W_f^0(F)$ в интересующем нас интервале значений F^* .

Наличие фазовых набегов $\varphi(F)$ в цепи автоматики (иначе говоря — инерции элементов тракта) ухудшает работу схемы. При некотором значении $F = F_{kp}$ будет иметь место $\varphi(F_{kp}) = \pi$ и знаменатель выражения (5) примет вид

$$[1 - SK_1(F_{kp})K_2(F_{kp})K_3(F_{kp})]^2. \quad (6)$$

Для устойчивости работы системы необходимо соблюдение неравенства

$$SK_1(F_{kp})K_2(F_{kp})K_3(F_{kp}) < 1. \quad (7)$$

Для обеспечения этого и применяется RC -ячейка (фазовый набег в которой не превышает $\pi/2$), обеспечивающая необходимую малость величины

$$K_3(F_{kp}) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 F_{kp}^2 R^2 C^2}} \approx \frac{1}{2\pi F_{kp} RC}. \quad (8)$$

На частотах, близких к F_{kp} , имеет место неравенство $W_f(F) > W_f^0(F)$ (даже без учета шумов схемы); следовательно, параметры схемы должны быть выбраны так, чтобы $F_{kp} \gg F_2$. Значение F_{kp} можно определить из следующих соображений: $\varphi_3(F_{kp}) \approx \pi/2$ и, следовательно, $\varphi_1(F_{kp}) + \varphi_2(F_{kp}) \approx \pi/2$, т. е. F_{kp} — это частота, на которой резонатор и усилитель дадут общий набег фазы $\pi/2$. Отсюда следует, что усилитель должен содержать минимальное количество инерционных звеньев и что полосы пропускания резонатора и усилителя должны существенно превышать F_2 .

Для частот, существенно меньших F_{kp} (скажем, $F < F_{kp}/3$), формулу (5) можно упростить:

$$W_f(F) \approx \frac{W_f^0(F) + S^2 K_2^2(F) K_3^2(F) W_y(F)}{S^2 K_1^2(F) K_2^2(F) K_3^2(F)}. \quad (9)$$

Можно также при этом принять приближенно (ср. с (7))

$$SK_1(F)K_2(F) \approx SK_1(0)K_2(0) \approx \frac{\alpha}{K_3(F_{kp})} \approx 2\pi F_{kp} RC \alpha, \quad (10)$$

где $\alpha \ll 1$. Определив отсюда RC , можно (9) переписать так:

* Из практических соображений нижней границей F следует часто считать не F_1 , а 0; большие низкочастотные флюктуации могут увести частоту генератора за пределы рабочего участка дискриминаторной характеристики резонансной цепи

$$W_f(F) \simeq W_f^0(F) \left[\frac{1}{S^2 K_1^2(0) K_2^2(0)} + \left(\frac{F}{\alpha F_{kp}} \right)^2 \right] + \frac{W_y(F)}{K_1^2(0)}. \quad (11)$$

Рассматривая первый член справа, видим, что желательно увеличение значений S , $K_1(0)$ и $K_2(0)$ *; предельное уменьшение начальной спектральной плотности $W_f^0(F)$ возможно лишь в $(\alpha F_{kp}/F)^2 \simeq (F_{kp}/F)^2$ раз. Неограниченный рост $W_f^0(F)$ при $F \rightarrow 0$ уменьшается в $S^2 K_1^2(0) K_2^2(0)$ раз.

Второй член в правой части (11) отмечает влияние собственных шумов схемы ЧАП. Он зависит лишь от «шумливости» входа усилителя (с учетом, разумеется, шумов детекторов, следующих за резонансной цепью) и от значения $K_1(0)$. Рост значения $W_y(F)$ по мере уменьшения F , типичный для шумов детекторов и ламп, может определить существенный вклад второго члена в выражении (11) для $W_f(F)$.

Приведенные выкладки относились к первому варианту ЧАП. Нетрудно видеть, что они имеют силу (в общем виде) и для второго и третьего вариантов: в этих случаях изменение частоты генератора с частотой F вызывает появление на выходе детектора, следующего за резонансной цепью, напряжения вспомогательной частоты ν , модулированного по амплитуде с частотой F . Расчет величины $K_1(0)$ существенно изменяется**. Набег фазы, определяемый добротностью резонатора, $\varphi_1(F)$ остается практически тем же. Величина $K_2(F)$ определяется теперь не только усилением по частоте ν , но и эффективностью работы фазового детектора, на выходе которого мы получаем колебание с частотой F (сигнал ошибки!). Величина $\varphi_2(F)$ теперь будет набегом фазы огибающей колебания ν , имеющей частоту F ; как известно, он определяется наклоном фазовой характеристики усилителя вблизи частоты ν . Если после фазового детектора применяется усилитель частот F , то необходим учет и его параметров; будем считать их включенными в функцию $\bar{K}_2(F)$.

На выходе фазового детектора применяется RC -цепь. Во избежание дополнительных фазовых набегов целесообразно в схеме иметь лишь одно RC -звено, т. е. на выходе фазового детектора применить ту RC -ячейку, постоянная времени которой была определена выше из соображений устойчивости работы системы.

В рассматриваемом случае усилитель схемы пропускает лишь частоты, примыкающие к ν ; поэтому он не пропустит низкочастотные шумы входного детектора. Шумы схемы (величину $W_y(F)$) теперь удобнее определить, пользуясь общепринятым понятием коэффициента шума усилителя N . Наличие на входе детектора, следующего за резонансной цепью, высокочастотного колебания, модулированного колебанием частоты ν , создает условия, которые имеют место в обычном супергетеродинном приемнике (где частота ν является разностью частот сигнала и гетеродина). Спектральная плотность шумов на входе определяется выражением kTN (k — постоянная Больцмана, $T \simeq 300^\circ$). Для пересчета на флюктуации напряжения на входе усилителя эту величину надо умножить на сопротивление детектора r и разделить на коэффициент потерь преобразования детекторной цепи L . Кроме того, следует учсть наличие двух каналов: колебания частоты F на выходе фазового детектора получаются от наличия на входе колебаний с частотами $\nu \pm F$. Учтя все это, можем написать:

$$W_y(F) = 2kTNr/L. \quad (12)$$

* Особенно полезно увеличение $K_1(0)$, ибо эта величина входит и во второй член выражения (11).

** Эта величина зависит теперь, в частности, от степени модуляции с частотой ν исходного высокочастотного колебания.

Отметим, что отношение r/L войдет также и при расчете $K_1^2(0)$, а при определении величины $W_y(F)/K_1^2(0)$ (второй член в (11)) оно исключится.

Вышеизложенный анализ был проделан без учета флюктуаций амплитуды колебания генератора и флюктуаций параметров схемы. Рассмотрим кратко их воздействие: сигнал ошибки в системе ЧАП имеет постоянную составляющую, пропорциональную величине члена a_0 ряда в формуле (1) (т. е. начальной расстройке генератора); флюктуации амплитуды генератора и флюктуации коэффициента передачи элементов цепи автоматики, происходящие с частотой F , приведут к тому, что указанная величина будет не строго постоянной, а несколько изменяться (с той же частотой). Положим, что она флюкутирует с некоторой относительной глубиной модуляции $m(t)$; спектральную плотность $m(t)$ обозначим $W_m(F)$. Расчет показывает, что учет этого эффекта приводит к тому, что в формуле (11) для $W_f(F)$ следует добавить еще одно слагаемое, равное $[a_0/SK_1(0)K_2(0)]^2 W_m(F)$. Впрочем, в первом варианте ЧАП некоторый эффект может иметь место и при $a_0 = 0$: вследствие неполной идентичности двух детекторов положение нуля дискриминаторной характеристики несколько изменяется при изменении амплитуды колебания генератора.

В случае второго или третьего варианта ЧАП дополнительный шум будет вызван также флюктуациями амплитуды, происходящими с частотами $\nu \pm F$. Аналогичная ситуация имеет место и в обычных супергетеродинных приемниках: флюктуации амплитуды колебания первого гетеродина, происходящие с частотами, примыкающими к промежуточной частоте, вызывают дополнительный шум на выходе. Эффект можно характеризовать некоторым увеличением коэффициента шума N : это увеличение существенно падает с ростом величины ν .

В заключение данного раздела заметим следующее. При проведении анализа предполагалось, что частота настройки резонатора строго постоянна. Обычно такая аппроксимация вполне допустима. Возможны, однако, случаи, когда флюктуации этой частоты (вызванные какими-нибудь причинами, например, механической тряской) могут стать существенными. Эти флюктуации, однако, являются низкочастотными, и поэтому их учет может бытьведен к добавлению к определенному выше значению $W_f(F)$ спектральной плотности флюктуаций частоты настройки резонатора.

2. ФЛЮКТУАЦИИ ПРИ СИСТЕМЕ ФАП

Перейдем к рассмотрению флюктуаций частоты генератора при стабилизации его частоты с помощью системы ФАП. В этом случае требуется наличие опорного сигнала, под частоту которого подстраивается частота генератора. Колебания опорного сигнала получают обычно путем умножения частоты исходного, достаточно стабильного, генератора (например, кварцевого). Схема (см. рис. 2) содержит детектор, на вход

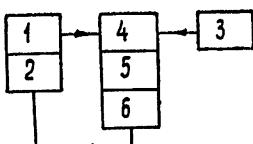


Рис. 2. 1—генератор; 2—управляющий элемент; 3—источник опорного сигнала; 4—детектор; 5—фильтр; 6—усилитель.

которого поступают колебания стабилизируемого генератора и опорного сигнала; выход детектора поступает на фильтр, отсекающий высокоча-

стотные компоненты, и усилитель, выходное напряжение которого подается на управляющий элемент генератора.

Рассмотрим основные источники флюктуаций частоты генератора, определяющие величину $W_f(F)$ для исследуемого случая.

1) Обозначим спектральную плотность флюктуаций частоты исходного генератора $W_f^k(F)$. Если умножение частоты (для получения опорного сигнала) происходит в n раз, то вклад в искомую величину получится равным $n^2 W_f^k(F)$.

2) Обозначим спектральную плотность флюктуаций фазы умножителя частоты $W_\phi(F)$. Это дает вклад $F^2 W_\phi(F)$.

3) Наличие у генератора, при отсутствии ФАП, флюктуаций частоты со спектральной плотностью $W_f^0(F)$, а также шумы схемы приводят к тому, что при работе ФАП будут иметь место флюктуации фазы колебания генератора. Обозначив их спектральную плотность $W_\psi(F)$, получим вклад, равный $F^2 W_\psi(F)$.

Учитя указанные источники флюктуаций, найдем, что

$$W_f(F) = n^2 W_f^k(F) + F^2 [W_\phi(F) + W_\psi(F)]. \quad (13)$$

Значения величины $W_\phi(F)$ для разных конкретных случаев, насколько нам известно, в литературе отсутствуют. Известно лишь, что эта величина растет с уменьшением F ; по-видимому, в первом приближении она может быть аппроксимирована функцией B/F^α при $\alpha \approx 1$ и B , пропорциональном n^2 *

Флюктуации фазы генератора, определяющие $W_\psi(F)$, были рассмотрены в работе [12]**. Анализ показал (см. там формулу (7)), что величина $W_\psi(F)$ в принятых здесь обозначениях может быть записана в виде

$$W_\psi(F) = \frac{W_f^0(F) + S^2 K^2(F) W_y(F)}{F^2 + [SK(F) \sqrt{P_c r / L} \sin \theta_0]^2 - 2FSK(F) \sqrt{P_c r / L} \sin \theta_0 \sin \varphi(F)}. \quad (14)$$

Здесь S — по-прежнему крутизна управления частотой генератора, $K(F)$ и $\varphi(F)$ — коэффициент передачи и фазовый набег в схеме, содержащей фильтр и усилитель, $W_y(F)$ — спектральная плотность шумов на входе этой же схемы, P_c — мощность опорного сигнала, поступающая на детектор, r и L — сопротивление и коэффициент потерь преобразования детектора и, наконец, $\sin \theta_0 = \sqrt{1 - (\Delta f / \Delta f_y)^2}$, где Δf — начальная расстройка между средними частотами генератора и опорного сигнала, а $\Delta f_y = SK(0) \sqrt{P_c r / L}$ — так называемая полоса удержания системы ФАП.

Прежде всего заметим, что и здесь набег фазы $\varphi(F)$ в схеме приводит к увеличению флюктуаций. При некоторой частоте $F = F_{kp}$ будет иметь место равенство $\varphi(F_{kp}) = \pi/2$. Система будет устойчиво работать при любом значении $\Delta f < \Delta f_y$ лишь при выполнении неравенства

$$SK(F_{kp}) \sqrt{P_c r / L} = \frac{K(F_{kp})}{K(0)} \Delta f_y < F_{kp}. \quad (15)$$

* Из единичного измерения, проведенного Ю. И. Зайцевым, было получено $W_\phi(F)/n^2 \approx 10^{-8}/F^{1.6}$. Частота на входе умножителя была примерно 15 мгц.

** Анализ был проведен в предположении отсутствия других источников флюктуаций (т. е. без учета первых двух членов формулы (13)). Легко показать, что полученный результат остается практически в силе и в рассматриваемом более общем случае.

Легко видеть, что для частот, близких к F_{kp} , имеет место $W_f(F) > W_f^0(F)$ даже без учета шумов схемы и других источников флюктуаций. Поэтому значение F_{kp} должно существенно превышать наибольшее интересующее нас значение F , равное F_2 . Напомним, что при рассмотрении системы ЧАП условием для определения F_{kp} служило $\varphi(F_{kp}) = \pi$, а сейчас имеем условие $\varphi(F_{kp}) = \pi/2$. Следовательно, требование малости набега фаз, т. е. малонерционности элементов схемы для системы ФАП существенно строже, чем для случая ЧАП.

Для частот F , существенно меньших F_{kp} (скажем, $F < F_{kp}/3$) выражение (14) можно упростить:

$$W_\Phi(F) \simeq \frac{W_f^0(F) + S^2 K^2(F) W_y(F)}{F^2 + S^2 K^2(F) P_c r/L [1 - (\Delta f/\Delta f_y)^2]}. \quad (16)$$

Приближение значения Δf к Δf_y повышает уровень флюктуаций. Считая, что Δf существенно меньше Δf_y *, можно произвести дальнейшее упрощение:

$$W_\Phi(F) \simeq \frac{W_f^0(F) + S^2 K^2(F) W_y(F)}{S^2 K^2(F) P_c r/L} \simeq \frac{W_f^0(F)}{(\Delta f_y)^2} + \frac{W_y(F)}{P_c r/L}. \quad (17)$$

В рассмотренной схеме ФАП усилитель должен пропускать частоты вплоть до $F = 0$. Кроме того, $W_y(F)$ может быть при малых F большим, что особенно нежелательно при малости величины P_c . Поэтому на практике может оказаться целесообразным применение более сложной схемы (см. [13]), когда частота генератора отличается от частоты опорного сигнала на вспомогательную частоту v . Имея второй опорный сигнал на этой частоте (им, в частности, может быть унтертон первого опорного сигнала), можно осуществить систему ФАП. При таком варианте усилитель пропускает частоты, близкие к v , а за ним следует фазовый детектор. Соображения, аналогичные приведенным в предыдущем разделе, показывают, что расчет флюктуаций для этого случая может быть проведен также по полученным выше формулам (строго говоря, следует добавить флюктуации второго опорного сигнала, но ими обычно можно пренебречь по сравнению с флюктуациями первого опорного сигнала). Кроме того, для величины $W_y(F)$ можно теперь применить соотношение (12). Учтя все это и пользуясь (17), можем формулу (13) для этого случая переписать в виде

$$W_f(F) \simeq n^2 W_f^k(F) + F^2 \left\{ W_\Phi(F) + \frac{W_f^0(F)}{(\Delta f_y)^2} + \frac{2 k T N}{P_c} \right\}. \quad (18)$$

Вышеизложенный анализ был проведен без учета флюктуаций амплитуд опорного сигнала и стабилизируемого генератора и флюктуаций параметров схемы. Можно показать следующее. Положим, что эти причины вызывают флюктуации величины выходного сигнала ошибки схемы с некоторой относительной глубиной модуляции $m(t)$; спектральную плотность $m(t)$ обозначим $W_m(F)$. Расчет показывает, что в этом случае к полученному выше выражению (17) для $W_\Phi(F)$ следует добавить величину, равную (приближенно) $(\Delta f/\Delta f_y)^2 W_m(F)$.

Существенным моментом работы схемы ФАП является то, что при $F \rightarrow 0$ имеет место $W_f(F) \rightarrow n^2 W_f^k(F)$, т. е. очень низкочастотные из-

* Обычно желательно, чтобы $\Delta f < \Delta f_c$, где Δf_c — так называемая полоса схватывания системы ФАП. На практике величина Δf_c меньше Δf_y в 2–5 раз.

менения частоты генератора определяются лишь соответствующими изменениями частоты опорного сигнала.

После проведения анализа флюктуаций частоты генераторов, стабилизованных по системе ЧАП и по системе ФАП, естественно возникает желание определить, какая из систем может обеспечить меньшее значение $W_f(F)$ в необходимом интервале значений F . Однако такое сравнение провести в общем виде крайне затруднительно: в результаты анализа входят ряд величин, разных для разных систем. Так, например, в системе ЧАП существенна мощность, отдаваемая в цепь автоматики, в системе ФАП — мощность опорного сигнала и, разумеется, стабильность его частоты. Надо также иметь в виду, что на практике приходится порой принимать во внимание ряд побочных обстоятельств (например, легкость перестройки частоты и компактность системы). Поэтому ограничимся лишь качественным выводом: при наличии высокостабильного опорного сигнала и для малых значений F преимущество, по-видимому, за системой ФАП; при больших значениях F (скажем, порядка десятков кгц) необходим учет конкретных значений параметров для определения преимущественной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Горбань, Научн. докл. высш. школы—Радиотехника и электроника, 1, № 1, 280 (1958).
2. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 145 (1950).
3. И. Л. Берштейн, ДАН СССР, 106, 453 (1956).
4. В. Н. Никонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 915 (1959).
5. В. Н. Никонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 270 (1962).
6. Ю. А. Дрягин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 93 (1958).
7. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, Т. Д. Разина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 1052 (1961).
8. А. Н. Малахов, В. С. Серебряников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика 6, 1062 (1963).
9. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 54 ((1959)).
10. В. И. Тихонов, А. Г. Журавлев, Радиотехника, 17, № 9, 40 (1962).
11. L. Essel, Proc. IEE, р. 3, 100, 19 (1953).
12. И. Л. Берштейн, Радиотехника и электроника, 3, 288 (1958).
13. И. Л. Берштейн, В. Л. Сибиряков, Радиотехника и электроника, 3, 290 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 июля 1963 г.

AUTOOSCILLATOR FREQUENCY FLUCTUATIONS IN THE SYSTEM WITH AUTOMATIC FREQUENCY CONTROL CIRCUITS

I. L. Bershtein

The spectrum of autooscillator frequency fluctuations is studied in the systems with automatic frequency control circuits (the phase control method and frequency control method). The circuit parameters influence is considered upon the decrease of frequency fluctuations spectral density.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЛОИСТЫЕ ПОКРЫТИЯ С БОЛЬШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОТРАЖЕНИЯ

*А. А. Воробьев, Л. Н. Безматерных, А. Н. Диденко, А. И. Лисицын,
А. П. Ольшанский*

На основе расчета коэффициента отражения от полубесконечной периодической среды рассматриваются отражающие свойства многослойных диэлектрических покрытий. Показано, что в пределах полосы непропускания существует частота, при которой тангенциальное электрическое поле на поверхности слоистой среды обращается в нуль. Это позволяет в ряде случаев заменять металлические стенки резонаторов многослойными диэлектрическими без искажения структуры поля в резонансном объеме. Приводятся результаты экспериментального исследования, подтверждающие возможность создания таких резонаторов в диапазоне СВЧ.

Многослойные диэлектрические покрытия с большим коэффициентом отражения могут иметь ряд интересных применений. Так, в [1²] описан миллиметровый интерферометр Фабри-Перо с многослойными диэлектрическими рефлекторами, набранными из четвертьволновых пластин полистирола. Коэффициент отражения восьмислойного рефлектора равен 0,9954. Разрешающая способность таких интерферометров при малых диэлектрических потерях выше, чем у интерферометров с тонкослойными металлическими рефлекторами. В [3] сообщается о разработке и применении для оптических мазеров на твердом теле многослойных диэлектрических покрытий, дающих отражение 99,6%. Поглощение энергии в таких покрытиях мало, а поэтому они не нагреваются и не выгорают. Это позволяет получить большие мощности в импульсе и большую частоту повторения импульсов по сравнению с лазерами, имеющими металлические отражающие поверхности. Преимуществами таких покрытий является и то, что они избирательны по частоте и стабильны к изменениям внешних условий.

Кроме того, многослойные диэлектрические покрытия могут представлять большой интерес для приборов СВЧ резонаторного и волноводного типа с изменяющимися во времени управляющими магнитными полями. Например, ускоряющая система волноводного циклического ускорителя представляет собой волновод, размещаемый непосредственно в межполюсном пространстве магнита [4]. При большой скорости изменения управляющего магнитного поля в стенах волновода наводятся вихревые токи, магнитные поля которых искажают управляющее магнитное поле внутри камеры. Основной вклад в искажение магнитного поля дают торцевые стенки волновода. Если последние изготовить из многослойного диэлектрика с большим коэффициентом отражения на рабочей частоте и малым — на частоте управляющего магнитного поля, то магнитное поле не будет искажаться таким волноводом и поэтому скорость его изменения может быть сильно увеличена.

При использовании многослойных диэлектрических покрытий в качестве стенок волноводных систем существенными оказываются следующие особенности.

1) Границные условия на поверхности многослойной диэлектрической стенки на частоте ускоряющего поля не должны существенно отличаться от граничных условий на границе раздела сред с различными диэлектрическими постоянными.

чаться от граничных условий на металлической поверхности. В противном случае перераспределение поля, вызванное изменением граничных условий, приведет к снижению эффективности ускоряющей системы.

2) Волноводная ускоряющая система имеет рабочую длину волны порядка 10 см. Так как коэффициент отражения металлов растет с увеличением длины волны ($1 - |R|^2 \sim 1/\sqrt{\lambda}$), то использование многослойных диэлектрических стенок с коэффициентом отражения $|R|^2 = 0,996$ приведет в этом диапазоне к значительному снижению добротности системы по сравнению с металлическими.

3) Толщина стенок волноводной системы должна быть такой, чтобы ее можно было разместить в межполюсном пространстве магнита. Для этого необходимо использовать диэлектрики с большой диэлектрической проницаемостью.

Изучению этих вопросов и посвящена данная работа. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 1. Она представляет собой бесконечный волновод произвольного поперечного сечения, правая часть которого периодически заполнена диэлектрическими слоями. По отношению к реальному слоистому покрытию, состоящему из конечного числа слоев,

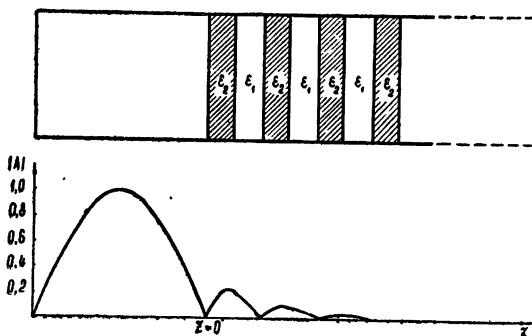


Рис. 1. Распределение электрического поля в слоистой среде при $R = -1$, $\lambda = 10$ см, $\epsilon_2 = 10$, $\epsilon_1 = 1$, $L_2 = 1$ см, $L_1 = 1,2$ см (волна H_{01}).

такой подход эквивалентен пренебрежению обратной волной, возникающей в результате отражения от второй границы. Такое допущение является вполне обоснованным, поскольку при частотах, представляющих интерес для нашей задачи, волны в периодической слоистой среде носят «затухающий» характер (см. рис. 1) и, следовательно, при достаточно большом числе слоев можно пренебречь отраженной волной и рассматривать вблизи передней границы слоистой среды только прямую волну. С учетом сказанного поле слева от границы раздела $z = 0$ будет описываться суммой падающей и отраженной волн:

$$\Pi_1 = \Pi(x, y) e^{j\gamma_1 z} + R\Pi(x, y) e^{-j\gamma_1 z}, \quad (1)$$

и справа от границы раздела — волной, бегущей в положительном направлении оси z :

$$\Pi_{II} = \Pi(x, y) Z(z) e^{jk_{II} z}. \quad (2)$$

Здесь $Z(z)$ — периодическая функция с периодом $L = L_1 + L_2$ (ее вид см., например, в [5]);

$$\gamma_1 = \sqrt{k^2 \epsilon_1 - \Gamma^2}; \quad \gamma_2 = \sqrt{k^2 \epsilon_2 - \Gamma^2}; \quad \gamma = \sqrt{k^2 \epsilon - \Gamma^2},$$

а Γ — поперечное собственное число рассматриваемого волновода. Пусть Π_I и Π_{II} являются z -составляющими магнитных векторов Герца. Тогда постоянная распространения k_1 в периодической структуре определяется уравнением

$$\cos(k_1 L) = \cos(\gamma_1 L_1) \cos(\gamma_2 L_2) - \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2\gamma_1 \gamma_2} \sin(\gamma_1 L_1) \sin(\gamma_2 L_2). \quad (3)$$

Из условий непрерывности вектора Герца и его нормальной производной при переходе через границу раздела $z = 0$ находим коэффициент отражения

$$R = \frac{\gamma_1(1+r) - \gamma_2(1-r)}{\gamma_1(1+r) + \gamma_2(1-r)}. \quad (4)$$

Через r обозначено выражение

$$r = \frac{[j(\gamma_2/\gamma_1) \sin(\gamma_1 L_1) + \cos(\gamma_1 L_1)] e^{j\gamma_2 L_2} - e^{jk_1 L}}{[j(\gamma_2/\gamma_1) \sin(\gamma_1 L_1) - \cos(\gamma_1 L_1)] e^{-j\gamma_2 L_2} + e^{jk_1 L}}. \quad (5)$$

Из (4) видно, что коэффициент отражения R , являющийся коэффициентом отражения по электрическому полю, обращается в -1 (рис. 2) при условии

$$1 + r = 0 \quad (6)$$

или, учитывая (5), если

$$\frac{(\gamma_2/\gamma_1) \sin(\gamma_1 L_1) \cos(\gamma_2 L_2) + \cos(\gamma_1 L_1) \sin(\gamma_2 L_2)}{[j(\gamma_2/\gamma_1) \sin(\gamma_1 L_1) - \cos(\gamma_1 L_1)] e^{-j\gamma_2 L_2} + e^{jk_1 L}} = 0. \quad (7)$$

Отсюда следует, что при частоте, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\operatorname{tg}(\gamma_1 L_1)}{\gamma_1} = -\frac{\operatorname{tg}(\gamma_2 L_2)}{\gamma_2}, \quad (8)$$

тангенциальное электрическое поле на поверхности слоистой среды обращается в нуль, т. е. граничное условие на этой частоте эквивалентно граничному условию на металлической поверхности.

Распределение электрического поля в первом периоде структуры на этой частоте имеет вид

$$\Pi_{II} = \begin{cases} 2j\Pi(x, y) \frac{\gamma}{\gamma_2} \sin(\gamma_2 z) & (0 < z < L_2) \\ 2j\Pi(x, y) \frac{\gamma}{\gamma_1} \frac{\cos(\gamma_2 L_2)}{\cos(\gamma_1 L_1)} \sin[\gamma_1(z - L)] & (L_2 < z < L) \end{cases}. \quad (9)$$

Поле в соседних ячейках получим, умножив (9) на $e^{jk_1(n-1)L}$, где n — номер ячейки.

Из совместного рассмотрения (8) и (3) можно установить, что

$$e^{jk_1 L} = \frac{\cos(\gamma_2 L_2)}{\cos(\gamma_1 L_1)}. \quad (10)$$

При вещественных значениях γ_1 и γ_2 $e^{jk_1 L}$ вещественно. Согласно (3), это может выполняться только в пределах полос непропускания, где $k_1 L = m\pi + jk_1 L$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Следовательно, частота, определяе-

мая (8), всегда находится в полосе непропускания. Необходимо отметить тот факт, что коэффициент отражения обращается в -1 при частоте, несколько отличающейся от частоты, соответствующей максимальному затуханию поля в периодической структуре, для которой справедливо уравнение

$$\left(L_1 + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2\gamma_2^2} L_2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \operatorname{ctg}(\gamma_2 L_2) + \left(L_2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2\gamma_1\gamma_2} L_1 \right) \times \\ \times \operatorname{ctg}(\gamma_1 L_1) + \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(\gamma_2^2 - \gamma_1^2\varepsilon_2/\varepsilon_1)}{2\gamma_1^2\gamma_2^3} = 0. \quad (11)$$

Полученные соотношения (8), (9) и (10) позволяют быстро и просто найти частоту, при которой коэффициент отражения $R = -1$, построить распределение поля в структуре и оценить глубину его проникания в многослойное покрытие. Из этих же соотношений следует, что увеличение диэлектрической проницаемости прослоек при заданной частоте сопровождается одновременным уменьшением размеров периода структуры (8) и амплитуды поля в первой ячейке (9), а также увеличением скорости спадания поля в периодической структуре (10).

Таким образом, размеры многослойного покрытия при заданном коэффициенте отражения резко снижаются с увеличением диэлектрической проницаемости прослоек и, следовательно, при большом ее значении ($\varepsilon = 10^2 \div 10^3$) могут оказаться практически приемлемыми не только в световом, но и в сантиметровом диапазоне волн. Для этой цели, вероятно, являются подходящими материалами на основе титанатов бария [6].

С целью подтверждения полученных результатов было проведено экспериментальное исследование отражающих свойств слоистого диэлектрика. Слоистый диэлектрик состоял из 20 брусков парафина ($\varepsilon_2 = 1,9 \div 2$; $L_2 = 28$ мм), разделенных между собой прокладками из пенопласта ($\varepsilon_1 = 1$; $L_1 = 20$ мм) и помещенных в прямоугольный волновод размером 72×34 мм. Парафин был выбран потому, что он легко обрабатывается и имеет малые потери в СВЧ-диапазоне.

Отражающие свойства слоистого диэлектрика оценивались по характеристикам резонатора, образованного из отрезка стандартного волновода, закрытого с одного торца металлической стенкой, а с другого — слоистым диэлектриком. Результаты измерений резонансной частоты, добротности и структуры поля в резонаторе сравнивались с соответствующими характеристиками резонатора, закороченного с обоих концов металлическими стенками и работающего на колебании H_{014} . Эксперимент проводился на измерительной установке, описанной в [7]. Источником СВЧ-колебаний служил частотно-модулированный кристаллический генератор 10 см диапазона. Структура поля исследовалась методом

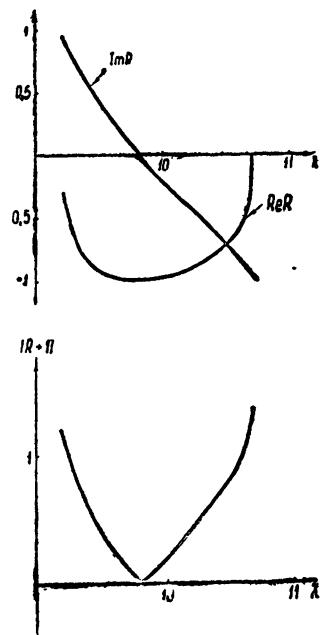


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения от длины волн в пределах полосы непропускания при $\varepsilon_2=2$, $\varepsilon_1=1$, $L_2=-2,8$ см, $L_1=2$ см, $a=7,2$ см (волна H_{014}).

возмущений с помощью металлического зонда, ориентированного параллельно электрическому полю. Распределение поля в резонаторе наблюдалось по смещению частотной метки на резонансной кривой, просматриваемой на экране осциллографа.

Эксперимент показал, что резонатор, образованный при закорачивании волновода слоистым диэлектриком на частоте $\lambda_s = 9,6 \text{ см}$, имеет добротность того же порядка, что и резонатор с металлическими стенками. Отметим, что значение длины волны, при которой добротность резонатора со слоистой торцовой стенкой наибольшая, немного отличается от теоретической длины волны, для которой в системе с заданными параметрами $R = 1$ ($\lambda_p = 9,8 \text{ см}$). Кроме того, на границе раздела $z = 0$ из-за наличия потерь в диэлектрике и из-за конечности структуры тангенциальное электрическое поле полностью не обращается в нуль. Этим же можно объяснить небольшое расхождение между λ_p и λ_s .

Из изложенного следует, что эксперимент полностью подтверждает возможность создания слоистых пленок с большим коэффициентом отражения в СВЧ-диапазоне. Если использовать диэлектрики с большими значениями ϵ (порядка $10^2 \div 10^3$), то размеры слоистых диэлектриков могут быть уменьшены до $1 \div 2 \text{ см}$ в десятисантиметровом диапазоне и до нескольких десятых миллиметра в миллиметровом диапазоне, т. е. до значений, приемлемых с практической точки зрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. F. Harvey, Proc. IEE, **106**, 141 (1959).
2. W. Culshaw, Proc. Soc., **66**, 597 (1953).
3. High-reflectance dielectric coatings Franklin Inst., **273**, 177 (1962).
4. А. А. Воробьев, А. Н. Диденко, Е. С. Коваленко, Атомная энергия, **8**, 459 (1960).
5. М. Л. Левин, ЖТФ, **18**, 1399 (1948).
6. А. Р. Хиппель, Диэлектрики и волны, ИЛ, М., 1960.
7. Л. А. Ковригин, А. П. Ольшанский, Е. В. Падусова, Изв. ТПИ, **100**, 170 (1962).

Поступила в редакцию
20 мая 1963 г.

DIELECTRIC STRATIFIED COATINGS WITH LARGE REFLECTION COEFFICIENT

A. A. Vorob'ev, L. N. Bezmaternykh, A. N. Didenko, A. I. Lisitsin,
A. P. Ol'shansky

The reflection properties of stratified dielectric coatings are considered on the base of the calculation of the coefficient of reflection from the semi-infinite periodic medium. It is shown that in the frequency attenuation band there exists the frequency at which the tangential electric field on the surface of the stratified medium vanishes. In some cases it is available to replace metallic walls of resonators by stratified dielectric ones without distortion on the field structure in the cavity. Experimental results confirm the possibility of constructing such resonators in the microwave range.

ВНЕШНИЕ ЧАСТИЧНЫЕ ПРОВОДИМОСТИ УЗКОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ОТВЕРСТИЯ В ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

Б. А. Панченко

Получены формулы для расчета внешних проводимостей узких отверстий в проводящем экране. В качестве координатных функций изменения поля вдоль отверстия выбраны синусы с периодом, кратным π/a (a —длина отверстия). Изменение поля поперек отверстия предлагается учитывать путем введения эквивалентной ширины отверстия. Приводятся графики частичных проводимостей для различных размеров отверстия; эти графики могут быть использованы для расчета импедансных характеристик щелевых антенн.

Вариационные методы нашли широкое применение при решении внутренних задач электродинамики [1,2]. Эти методы могут быть весьма плодотворно использованы и при решении внешних задач. Применение вариационных методов к задачам излучения через отверстия, прорезанные в плоском проводящем экране, сводится, в частности, к вычислению билинейных функционалов, представляющих собой внешние частичные собственные и взаимные проводимости отверстия. Эти проводимости можно в общем случае представить в виде

$$Y_{nm} = \iint_{ss'} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n} \times \mathbf{E}_m(\mathbf{r}') ds ds', \quad (1)$$

где \mathbf{n} — внешняя по отношению к рассматриваемому полупространству нормаль, $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_m(\mathbf{r}')$ — координатные функции отверстия s ,

$$\bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j\omega\epsilon}{2\pi} \left(\epsilon + \frac{\nabla\nabla}{k^2} \right) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

— тензорная функция Грина полупространства над проводящим экраном [3], ϵ — единичный тензор, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число свободного пространства, ω — круговая частота, ϵ — диэлектрическая проницаемость. Оператор $\nabla\nabla$ здесь следует понимать как аффинорный оператор.

Рассмотрим узкое прямоугольное отверстие (рис. 1) с симметричным возбуждением. Координатные функции такого отверстия можно представить в виде

$$\mathbf{E}_n(x, y) = \mathbf{x} N e(x) e_n(y), \quad (2)$$

где \mathbf{x} — единичный вектор, N — нормирующий множитель, который удобно выбирать из условия

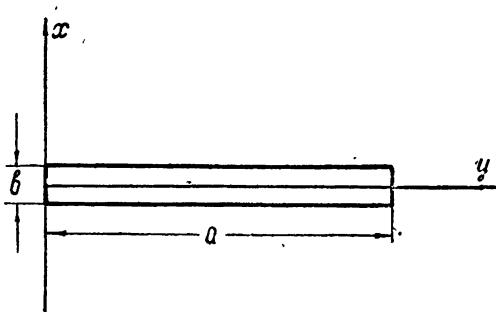


Рис. 1.

$$\int_{-b/2}^{b/2} Ne(x) dx = 1.$$

Такая нормировка позволяет сравнивать частичные проводимости с различными законами распределения поля поперек отверстия.

Выражение (1) с учетом (2) можно переписать так:

$$Y_{nm} = \frac{jN^2}{2\pi\omega\mu} \int_s \int_s e(x)e_n(y) \left[k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{e^{-jk\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \times \\ \times e(x')e_m(y') dsds'. \quad (3)$$

Проведем вычисление проводимостей для следующих функций распределения поля вдоль и поперек отверстия:

$$e(x) \equiv 1, \quad e_n(y) = \sin(\pi ny/a) \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

После двойного интегрирования по частям подынтегрального выражения в (3) получим

$$Y_{nm} = \frac{j}{2\pi\omega\mu b^2} \left\{ \frac{\pi n}{a} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi m}{a} y\right) \left[\frac{e^{-jk\sqrt{(x-x')^2 + (y-a)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-a)^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^{-jk\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \right] dx dx' dy + \left[k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right] \times \right. \\ \times \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \int_0^a \sin\left(\frac{\pi m}{a} y\right) \frac{e^{-jk\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \times \\ \times \left. \left. \sin\left(\frac{\pi n}{a} y'\right) dx dx' dy dy' \right\}. \quad (4) \right.$$

Выражение (4) естественно разделить на мнимую и действительную части, соответствующие реактивной и активной составляющей проводимости $Y_{nm} = G_{nm} + jB_{nm}$, где

$$G_{nm} = \frac{1}{2\pi\omega\mu b^2} \left\{ 2 \frac{\pi n}{a} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi m}{a} y\right) \frac{\cos k\sqrt{(x-x')^2 + y^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx dx' dy + \right. \\ \left. + \left[k^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 \right] \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \int_0^a \sin\left(\frac{\pi m}{a} y\right) \frac{\cos k\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \times \right. \\ \times \left. \left. \sin\left(\frac{\pi n}{a} y'\right) dx dx' dy dy' \right\}; \quad (5) \right.$$

$$\begin{aligned}
 G_{nm} = & \frac{1}{2\pi\omega\mu b^2} \left\{ 2 \frac{\pi m}{a} \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \sin \left(\frac{\pi m}{a} y \right) \frac{\sin k \sqrt{(x-x')^2 + y^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} dx dx' dy + \right. \\
 & + \left[k^2 - \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \right] \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^a \int_0^a \sin \left(\frac{\pi m}{a} y \right) \frac{\sin k \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \times \quad (6) \\
 & \left. \times \sin \left(\frac{\pi n}{a} y' \right) dx dx' dy dy' \right\}.
 \end{aligned}$$

При интегрировании (5) и (6), учитывая узость отверстия, можно положить $(x-x')=0$ везде, где интегралы не расходятся при $r \rightarrow r'$. При вычислении собственных проводимостей ($n=m$) подынтегральные выражения удобно представить в виде произведения двух функций $f(y-y')$ $\Phi(y+y')$ и пользоваться формулами сведения двойных интегралов к однократным:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(y-y') \Phi(y+y') dy dy' = \begin{cases} \int_0^{\beta-\alpha} f(v) \int_{2\alpha+v}^{2\beta-v} \Phi(u) du dv, & \text{если } f(v)=f(-v) \\ 0, & \text{если } f(v)=-f(-v) \end{cases},$$

а при $\Phi(y+y') \equiv 1$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(y-y') dy dy' = \begin{cases} 2 \int_0^{\beta-\alpha} f(v) [\beta - \alpha - v] dv, & \text{если } f(v)=f(-v) \\ 0, & \text{если } f(v)=-f(-v) \end{cases}.$$

При вычислении взаимных проводимостей ($n \neq m$) приходится пользоваться непосредственным интегрированием.

Проделав необходимые выкладки, получим для собственных частичных проводимостей отверстия

$$\begin{aligned}
 B_{nn} = & \frac{ka}{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left\{ \left[1 - \left(\frac{n\lambda}{2a} \right)^2 \right] \left[\frac{\text{ci}(ka+n\pi) + \text{ci}|ka-n\pi|}{2} + \frac{3}{2} - \right. \right. \\
 & - \ln \frac{\gamma b \sqrt{|(ka)^2 - (n\pi)^2|}}{2a} \left. \right] + \frac{\text{si}(ka+n\pi) - \text{si}(ka-n\pi)}{2n\pi} \times \quad (7) \\
 & \left. \times \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{2a} \right)^2 \right] + \frac{\sin(ka)}{ka} \right\};
 \end{aligned}$$

здесь

$$\text{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad \text{ci}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt, \quad \gamma = 1,781,$$

$$G_{nn} = \frac{ka}{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left\{ \left[1 - \left(\frac{n\lambda}{2a} \right)^2 \right] \frac{\sin(ka - n\pi) + \sin(ka + n\pi)}{2} - \frac{1 + \cos ka}{ka} + \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{2a} \right)^2 \right] \frac{\sin(ka + n\pi) - \sin(ka - n\pi)}{2n\pi} \right\}; \quad (8)$$

$\sin x = \ln x + C - \text{ci}(x)$; C — постоянная Эйлера. При $n = m = 1$ получим известное в литературе выражение для внешней проводимости отверстия с синусоидальным распределением поля [4]:

$$B_{11} = \frac{ka}{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] \left[\frac{\text{ci}(ka + \pi) + \text{ci}|ka - \pi|}{2} + \frac{3}{2} - \ln \frac{\gamma b \sqrt{|(ka)^2 - \pi^2|}}{2a} \right] + \frac{\sin(ka + \pi) - \sin(ka - \pi)}{2\pi} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right] + \frac{\sin(ka)}{ka} \right\}. \quad (9)$$

На рис. 2 показаны графики зависимости реактивной составляющей B_{11} от ka для нескольких значений b/a . При $ka = \pi$ (полуволновая щель) все кривые проходят через точку $B_{11} = 5,98 \cdot 10^{-4}$ мо. Воспользовавшись принципом двойственности, можно показать, что это значение B_{11} соответствует реактивной части входного сопротивления полуволнового вибратора. На рис. 3 сплошной линией показана зависимость $G_{11} = f(ka)$

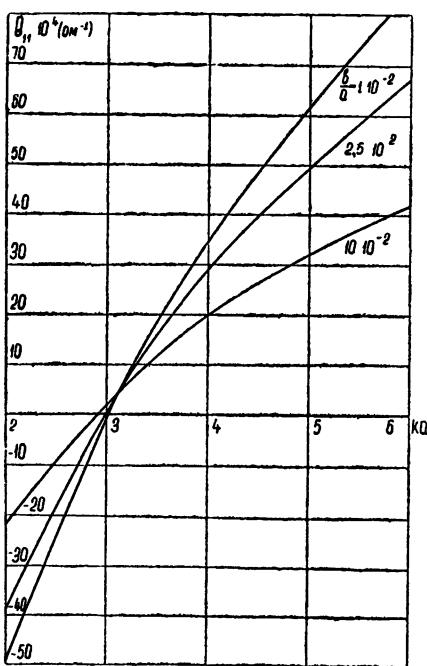


Рис. 2.

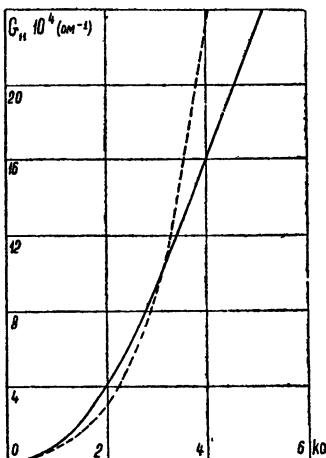


Рис. 3.

Для малых значений ka активная составляющая проводимости меняется по квадратичному закону, для больших ka — по линейному. Для сравнения пунктирной линией показана зависимость $G_{11} = \varphi(ka)$ для

закона распределения, принятого в теории проволочных антенн $\sin[k(a - |y|)]$. Обе кривые совпадают при $ka = \pi$, но значительно расходятся при других значениях ka .

Выражения для взаимных частичных проводимостей имеют вид

$$B_{nm} = \frac{ka}{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left\{ \frac{1 - (\pi n/ka)^2}{1 - (n/m)^2} \frac{\sin(ka + n\pi) - \sin(ka - n\pi)}{m\pi} + \right. \\ \left. + \frac{(\pi m/ka)^2 - 1}{(m/n)^2 - 1} \frac{\sin(ka + m\pi) - \sin(ka - m\pi)}{n\pi} \right\}; \quad (10)$$

$$G_{nm} = \frac{ka}{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left\{ \frac{1 - (\pi n/ka)^2}{1 - (n/m)^2} \frac{\cos|ka + n\pi| - \cos|ka - n\pi|}{m\pi} + \right. \\ \left. + \frac{(\pi m/ka)^2 - 1}{(m/n)^2 - 1} \frac{\cos(ka + m\pi) - \cos(ka - m\pi)}{n\pi} \right\}. \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что при замене индексов m на n , а n на m получим $B_{nm} = B_{mn}$, $G_{nm} = G_{mn}$, что находится в соответствии с выводами теоремы взаимности. Следует отметить еще, что B_{nn} в отличие от B_{mm} не содержит логарифмического члена, определяющего зависимость проводимости от ширины отверстия. Из рис. 4 и 5 видно, что активные составляющие внешних проводимостей уменьшаются с ростом номеров

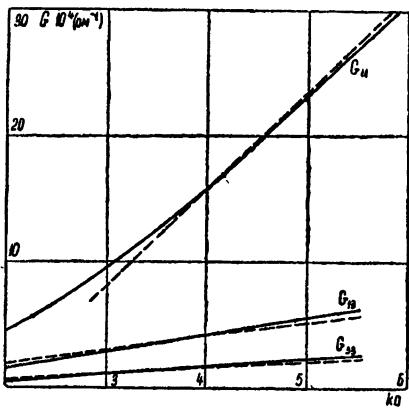


Рис. 4.

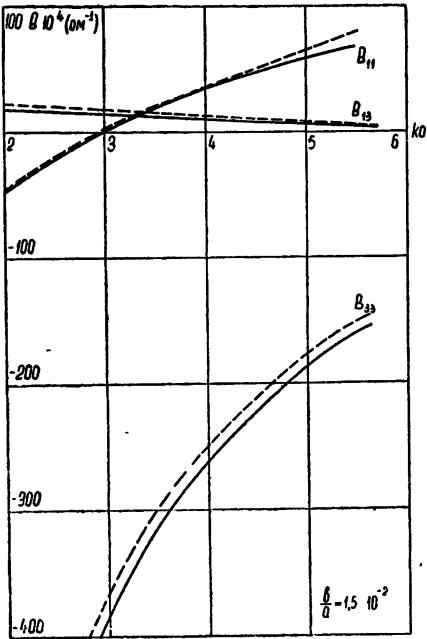


Рис. 5

координатных функций. Собственные же реактивные проводимости при этом увеличиваются, что как бы соответствует возрастанию запасенной реактивной мощности вблизи антенны с быстро меняющейся функцией распределения (сверхнаправленные антенны).

Полученные выражения для составляющих внешней проводимости незначительно меняются при выборе другой функциональной зависи-

мости напряженности электрического поля поперек отверстия — $e(x)$. Для узких отверстий в тонком плоском экране часто используется функция вида $e(x) = [1 - (2x/b)^2]^{-1/2}$. Новое выражение для собственной реактивной проводимости при таком законе распределения отличается от (7) тем, что вместо $3/2 - \ln(\gamma b \sqrt{(ka)^2 - (n\pi)^2}/2a)$ появится член $-\ln(\gamma b \sqrt{(ka)^2 - (n\pi)^2}/8a)$. Выражения (8), (10), (11) останутся при этом без изменения.

Интересен с практической точки зрения случай, когда отверстие прорезано в «толстом» экране. В [5] показано, что распределение напряженности электрического поля вблизи прямых углов описывается законом $e(x) = [1 - (2x/b)^2]^{-1/3}$. Вычислим дополнительно интегралы

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} [1 - (2x/b)^2]^{-1/3} [1 - (2x'/b)^2]^{-1/3} dx dx' = b^2 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)} \right]^2; \quad (12)$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\ln |x - x'|}{\sqrt[3]{1 - (2x/b)^2} \sqrt[3]{1 - (2x'/b)^2}} dx dx' \simeq b^2 \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)} \right]^2 \ln \frac{b}{8,24}; \quad (13)$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция.

При вычислении (13) после замены переменных использовалось разложение логарифма от разности двух аргументов в ряд:

$$\ln 2 |\cos \theta - \cos \theta'| = -2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos(p\theta) \cos(p\theta')}{p}.$$

Для рассматриваемого закона распределения поля поперек отверстия с учетом (12), (13) в (7) вместо $3/2 - \ln(\gamma b \sqrt{(ka)^2 - (n\pi)^2}/2a)$ появится член $-\ln(\gamma b \sqrt{(ka)^2 - (n\pi)^2}/8,24 a)$. Выражения (8), (10), (11) останутся без изменения.

На рис. 6 показана зависимость $B_{11} = f(ka)$ для двух законов распределения поля поперек отверстия. Видно, что реактивная проводимость слабо зависит от вида функции $e(x)$, особенно вблизи $ka = \pi$. При расчетах учитывать изменение поля поперек отверстия можно, введя эквивалентную ширину отверстия, которую легко определить, приравнивая логарифмические члены B_{nn} при различных $e(x)$.

Можно получить другие выражения для внешних частичных проводимостей отверстия, если в исходной формуле (3) использовать интегральное представление скалярной функции Грина:

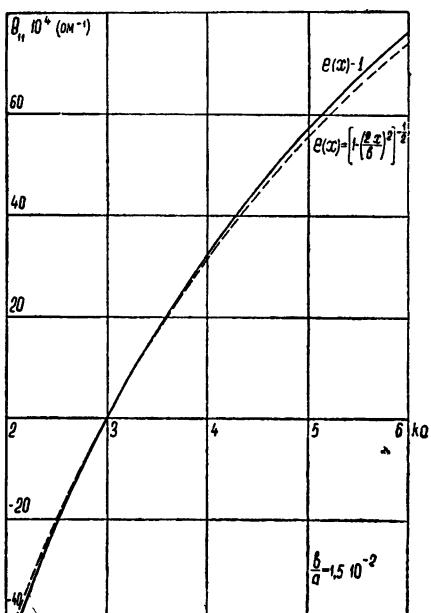


Рис. 6.

$$\frac{e^{-jk\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\alpha(y-y')} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2} |x-x'|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}} d\alpha d\beta.$$

В работе [6] это выражение используется для приближенного представления функции $e^{-jk\alpha}/r$ в виде ряда, члены которого являются произведением функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Интегрируя выражения (3) с использованием полученного в [6] представления функции $e^{-jk\alpha}/r$ и учитывая, что $\ln(y) = \sin\left(\frac{\pi n}{a} y\right)$, $e(x) \equiv 1$ и $\pi b/\lambda \ll 1$, получим следующее выражение для внешней частичной проводимости:

$$Y_{nm} = j \frac{ka}{\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left\{ \frac{1}{2} B_0 A_{0 nm} + \sum_{p=1}^{\infty} \left[1 - \left(p \frac{\pi}{ka} \right)^2 \right] B_p A_{p nm} \right\}, \quad (14)$$

где

$$B_p = \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{\gamma(ka)(b/a) \sqrt{1-(p\pi/ka)^2}} + \delta_p \left\{ -j \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} (ka) \left(\frac{b}{a} \right) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{1 - \left(p \frac{\pi}{ka} \right)^2} + j \frac{\pi}{48} (ka)^2 \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left[1 - \left(p \frac{\pi}{ka} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\delta_p = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 - \left(p \frac{\pi}{ka} \right)^2 > 0 \\ 0, & \text{если } 1 - \left(p \frac{\pi}{ka} \right)^2 < 0 \end{cases},$$

$$A_{p nm} = \frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} y'\right) \cos\left[\frac{p\pi}{a} (y-y')\right] dy dy',$$

$$\gamma = 1,781.$$

Например, для случая $n = m = 1$ получим

$$A_{0 11} = \frac{4}{\pi^2}; \quad A_{1 11} = \frac{1}{4}; \quad A_{p 11} = \frac{4}{\pi^2(p^2 - 1)^2} \quad (p = 2, 4, 6, \dots);$$

$$A_{p 11} = 0 \quad (n = 3, 5, 7, \dots).$$

Были произведены численные расчеты по формуле (14) для $n = m = 1$, $n = m = 3$; $n = 1$; $m = 3$.

Результаты расчета представлены в виде графиков на рис. 5, 6 (пунктирные кривые). Оценить точность выражений для внешних проводимостей, полученных различными методами, затруднительно, так как оба метода являются приближенными. В первом методе ошибка связана с приближенным вычислением интегралов, а во втором — с приближенным представлением функции Грина и учетом конечного числа членов в ряду разложения. Сравнение активной и реактивной частей проводимости отверстия при $ka = \pi$ с соответствующими величинами полуволнового диполя показывает, что точность расчетов по полученным формулам вполне пригодна для инженерных расчетов. Анализируя

выражения для частичных проводимостей, полученные различными методами, следует отдать предпочтение выражениям (7), (8), (10), (11), так как расчеты по этим формулам при наличии таблиц интегральных функций менее трудоемки. Второй же метод имеет то преимущество: что он может быть использован для вычисления проводимостей широких отверстий.

Полученные здесь формулы для внешних частичных проводимостей отверстий были использованы для расчета полных входных сопротивлений резонаторов, излучающих через щели. Экспериментальная проверка показала пригодность этих формул для инженерных расчетов импедансных характеристик щелевых антенн.

ПРИЛОЖЕНИЕ

С точки зрения практических приложений к технике щелевых антенн представляет интерес рассмотреть проводимость узких отверстий, излучающих в проводящую среду с потерями, которая характеризуется комплексным волновым числом

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu} \sqrt{\epsilon_r} = k_0 q - ik_0 h. \quad (15)$$

Пользоваться полученными выше выражениями для проводимостей в случае проводящей среды нельзя из-за отсутствия опубликованных таблиц интегральных функций $\text{si } z$, $\text{ci } z$ и $\text{cinc } z$ от комплексного аргумента. Однако можно получить довольно простые выражения для активной и реактивной частей внешней проводимости отверстия, излучающего в сильно проводящую среду с большими потерями. В этом случае модуль аргумента z становится большим и можно использовать асимптотическое представление интегральных функций.

Используя эти представления в виде

$$\text{si } z \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\cos z}{z}, \quad \text{ci } z \approx \frac{\sin z}{z}, \quad \text{cinc } z \approx \ln z + c - \frac{\sin z}{z}$$

и вводя обозначения

$$ka = Ae^{-i\varphi}, \quad ka + \pi = Be^{-i\theta}, \quad ka - \pi = Ce^{-i\psi},$$

получим вместо (7) и (8) при $n = 1$ новые выражения для G_{11} и B_{11} , которые будут в этом случае комплексными. Проведя преобразования и объединив действительные и, мнимые части G_{11} и B_{11} , получим

$$\begin{aligned} G'_{11} = & \frac{1}{240\pi^2} \left\{ \ln \frac{B}{C} - 1 + \frac{BC}{A} \left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta + \psi - \varphi) + \left(\frac{3}{2} - \ln \frac{\gamma b}{2a} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \frac{1}{2} \ln BC \right) \sin(\theta + \psi - \varphi) - \frac{1}{2} (\theta + \psi) \cos(\theta + \psi - \varphi) \right] + \frac{C^2}{2\pi A} \times \right. \\ & \times \left[\ln \frac{B}{C} \cos(2\psi - \varphi) - (\theta - \psi) \sin(2\psi - \varphi) \right] - [\text{ch}(A \sin \varphi) - \\ & - \text{sh}(A \sin \varphi)] \left[\frac{C}{AB} \sin(A \cos \varphi + \psi - \theta - \varphi) + \frac{2\pi}{BC} \sin(A \cos \varphi - \theta - \psi) \right] \right\}; \\ B'_{11} = & \frac{1}{240\pi^2} \left\{ (\psi - \theta) + \frac{BC}{A} \left[\left(\frac{3}{2} - \ln \frac{\gamma b}{2a} - \frac{1}{2} \ln BC \right) \cos(\theta + \psi - \varphi) + \right. \right. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} (\theta + \psi) \sin(\theta + \psi - \varphi) - \frac{\pi}{2} \sin(\theta + \psi - \varphi) \Big] - \frac{C^2}{2\pi A} \times \\
 & \times \left[\ln \frac{B}{C} \sin(2\psi - \varphi) + (\theta - \psi) \cos(2\psi - \varphi) \right] - [\operatorname{ch}(A \sin \varphi) - \\
 & - \operatorname{sh}(A \sin \varphi)] \left[\frac{C}{AB} \cos(A \cos \varphi + \psi - \theta - \varphi) + \frac{2\pi}{BC} \cos(A \cos \varphi - \theta - \psi) \right].
 \end{aligned} \tag{17}$$

Аналогичным образом можно получить асимптотические формулы для произвольных частичных собственных и взаимных проводимостей отверстия.

Была произведена оценка погрешности асимптотических формул (16) и (17) по отношению к более точным формулам (7) и (8). Сравнение производилось для действительного волнового числа. Погрешность в определении G'_{11} и B'_{11} составляет меньше 1,3% для значения $ka = 6$ и меньше 0,5% для $ka = 10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.
2. Н. Л. Коган, Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов, Сложные волноводные системы, Судпромгиз, Л., 1963.
3. H. Levin, J. Schwing er, Communication on Pure and Applied Mathematics, 3, 355 (1950).
4. A. Oliner, Trans. IRE, AP-5, 3 (1957).
5. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 2, ИЛ, М., 1960.
6. M. Suzuki, Trans. IRE, AP-4, 149 (1956).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
10 мая 1963 г.

THE EXTERNAL PARTIAL CONDUCTIVITIES OF NARROW RECTILINEAR SLOT IN A PLANE SCREEN

B. A. Panchenko

Formulae are obtained for calculation of the external conductivities of narrow slots in a conductive screen. The sines with period multiple to π/a (a is a length of the slot) have been chosen as coordinate functions of a field variation along the slot. The transverse field variation across the slot is supposed to be taken into account by means of the equivalent slot width. Diagrams of partial conductivities are given for different dimensions of the slot. These diagrams may be used for the calculation of slot antenna characteristics.

ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ БЕЗДИОДНОЙ ЯЧЕЙКИ С МОСТОВОЙ СВЯЗЬЮ

Ф. А. Гареев, В. А. Попов

Рассмотрено построение основных логических схем на основе двухтактной бездиодной ячейки с мостовой связью. Приводятся данные об устойчивости схем.

Возможность исключения полупроводников из схем дискретных вычислительных устройств представляется весьма заманчивой в свете резкого повышения надежности последних при большом числе элементов. В литературе уже описывались элементарные схемы на ферритах с прямоугольной петлей гистерезиса (ППГ), не содержащие в цепях связи полупроводников [1-3]. Подавление ложных потоков информации в таких схемах осуществляется за счет использования нелинейной зависимости $\Delta F(F_m)$ магнитных сердечников с ППГ.

Известны две классические бездиодные схемы на ферритах с ППГ: схема Расела [1] и схема Иохельсона [2]. Принципиальное различие между этими схемами состоит в способе восстановления коммутирующих свойств вспомогательных сердечников, служащих для подавления ложных потоков информации. Основная сложность реализации бездиодных схем заключается в том, что после проявления своих нелинейных свойств вспомогательный сердечник должен быть возвращен в исходное состояние без влияния на состояния соседних сердечников. В схеме Расела это достигается за счет медленного переключения вспомогательных сердечников полями, близкими к полю старта. При этом на ключевых обмотках вспомогательных сердечников наводятся импульсы ЭДС сравнительно малой амплитуды, и протекающие в цепях связи токи создают в основных сердечниках поля, меньшие коэрцитивной силы. Естественно, что требование медленного переключения вспомогательных сердечников резко снижает быстродействие подобных схем. В схеме Иохельсона требование медленного переключения сердечников отсутствует, что достигается за счет увеличения числа рабочих тактов до четырех, введения запрещающих смещений и оригинального построения ячейки. Однако эта схема кажется весьма критичной к параметрам сердечников и импульсного питания.

В данной работе рассматривается еще один возможный способ построения бездиодных схем на ферритах с ППГ. Предлагаемые схемы, так же как и схема Расела, требуют медленного переключения вспомогательных сердечников; однако, в отличие от последней, они строятся не по трансформаторной схеме, а по дроссельной. Как показали проведенные исследования, это дает возможность получить большее быстродействие при прочих равных условиях. Кроме того, выбранная схема элементарной ячейки позволяет просто строить все логические схемы и осуществлять разветвление информации.

Принципиальная схема элементарной мостовой бездиодной ячейки приведена на рис. 1а. Как видно, схема построена по аналогии с известной феррит-диодной ячейкой «с расщепленной обмоткой». Подавление обратного потока информации осуществляется за счет включения сер-

дечника КФ1; нежелательное размагничивание сердечника Ф1 при записи предотвращается сердечником КФ2.

Рассмотрим построение основных логических схем на базе мостовой ячейки.

Как следует из анализа работы элементарной схемы рис. 1а, переключение сердечника Ф3 является логической функцией состояний сердечников Ф1 и Ф2 к моменту прихода тактового импульса $J(t_2)$. Если обозначить состояния сердечников-аргументов Ф1 и Ф2 как « a » и « b » соответственно, а состояние сердечника-функции Ф3 как « c », то переключательная функция ячейки запишется так:

$$c = ab.$$

В самом деле, если к моменту прихода тактового импульса $J(t_2)$ сердечник Ф1 (a) находится в состоянии «1», а сердечник Ф2 (b) — в состоянии «0», противоэдс на обмотке W_1 сердечника Ф1 нарушает баланс

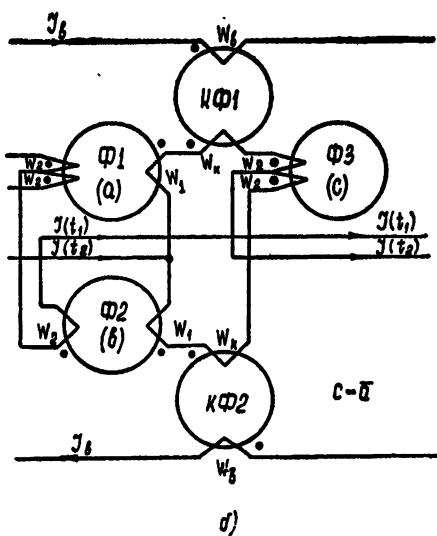
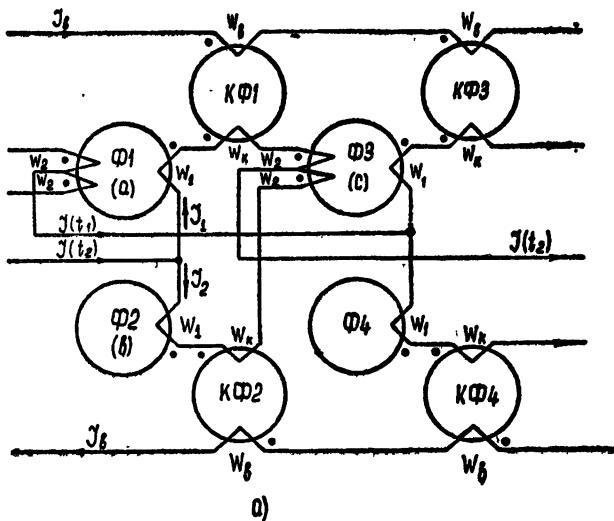


Рис. 1. а) Мостовая бездиодная ячейка; б) схема логического отрицания.

моста, так что $J_2 > J_1$. При правильном подборе витков обмоток W_1 и W_2 сердечник Φ_3 (с) переводится в состояние «1». Если же « a » = 1 и « b » = 1, составляющие токового тока J_1 и J_2 равны, и состояние сердечника Φ_3 не изменится ($c = 0$). При « a » = 0 и « b » = 1 мост разбалансирован в противоположном направлении, так что $J_2 < J_1$ и « c » = 0. Таким образом, уже элементарная ячейка дает возможность осуществить операцию запрета. Отсюда совершенно естественно вытекает построение схемы логического отрицания « c » = « a » (рис. 1б). В схеме рис. 1б сердечник Φ_2 (в) каждым нечетным токовым импульсом переводится в состояние «1». Разбаланс нужного знака может быть получен лишь при « a » = 0. Если же « a » = 1, мост сбалансирован и « c » = 0.

На рис. 2а изображена схема, позволяющая реализовать операцию логического сложения двух переменных. В этой схеме сердечники Φ_3 и Φ_4 являются компенсирующими и уравновешивают мост при « a » = 0 и « b » = 0. Если же хотя бы один из логических аргументов равен единице

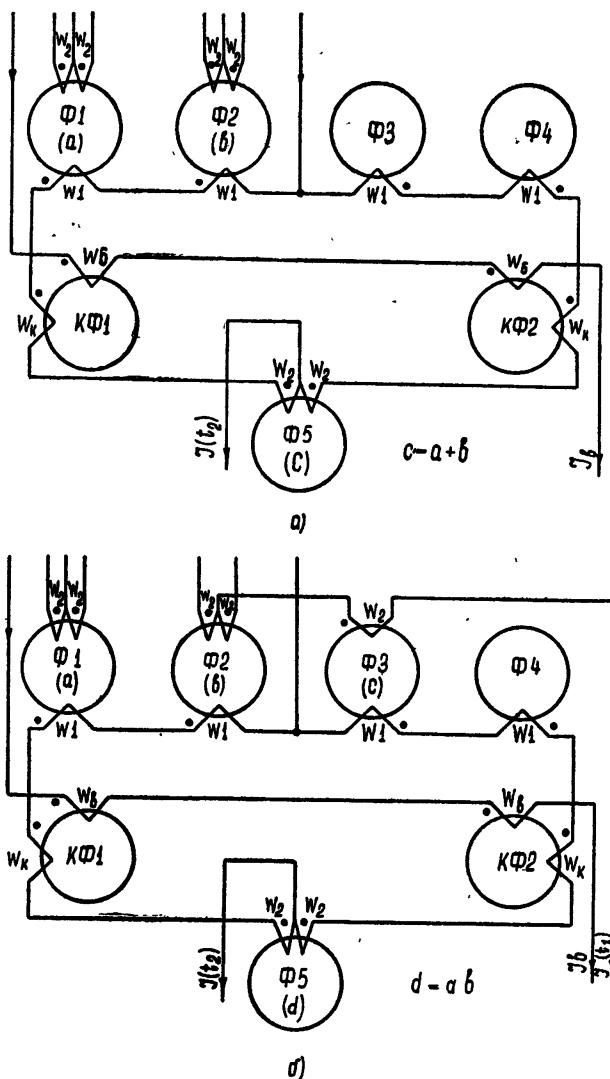


Рис. 2. а) Схема логического сложения; б) схема логического умножения.

це, мост разбалансируется за счет импульса противоэдс на обмотке соответствующего сердечника и сердечник-функция Φ_5 (c) переводится полем разностного тока в состояние «1».

На рис. 2б изображена схема логического умножения двух переменных. Эта схема отличается от предыдущей тем, что здесь один из компенсирующих сердечников (Φ_3) каждым нечетным тактовым импульсом переводится в состояние «1», «нейтрализуя» один из логических аргументов. Лишь при $a = 1$ и $b = 1$ возникает разбаланс токов такого знака, что сердечник Φ_5 переводится в состояние «1».

На рис. 3 приведена схема логического несовпадения, реализующая переключательную функцию

$$c = \bar{a}b + ab.$$

Эта схема состоит из двух совмещенных схем запрета и схемы логического сложения. Сердечник Φ_2 (b) «запрещает» перенос «1» с сердечника Φ_1 (a) на сердечник Φ_3 и, наоборот, сердечник Φ_1 (a) «запрещает» перенос «1» с сердечника Φ_2 на сердечника Φ_4 . В свою очередь, сердечники Φ_3 , Φ_4 и Φ_7 , объединены в схему логического сложения, причем сердечник Φ_7 выполняет роль функции.

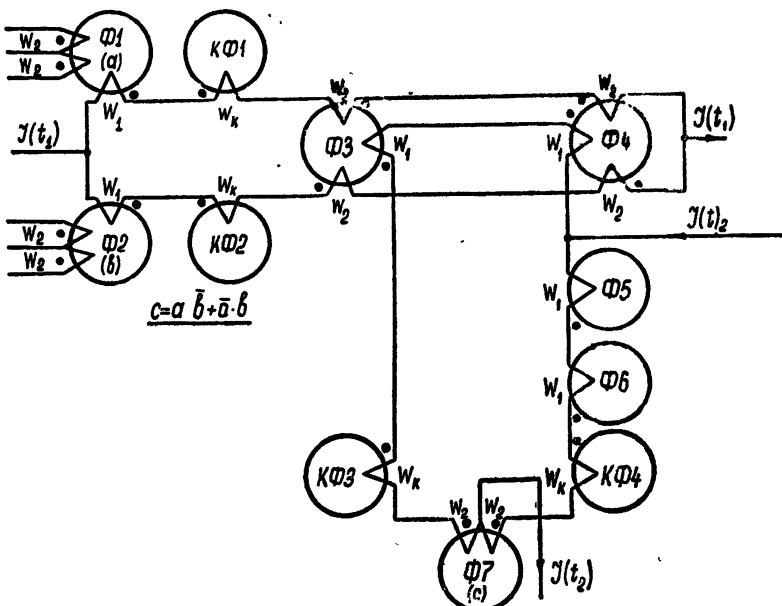


Рис. 3. Схема несовпадения.

Применение обратной связи в схеме несовпадения позволяет реализовать ячейку динамического триггера со счетным входом рис. 4а, работа которой поясняется временной диаграммой рис. 4б. Импульсы, подлежащие запоминанию или пересчету, поступают на сердечник Φ_1 . Первый поступивший импульс вызывает регенерацию по цепи $\Phi_1 \rightarrow \Phi_4 \rightarrow \Phi_2 \rightarrow \Phi_3 \rightarrow \Phi_2$ и т. д. Появление второго входного импульса балансирует мост, и регенерация прекращается. Частота выходных импульсов на контрольной обмотке сердечника Φ_4 оказывается в два раза меньше входной частоты. Каскадное включение схем рис. 4а позволяет построить двоичный счетчик.

Таким образом, на основе мостовой двухтактной бездиодной ячейки могут быть достаточно просто построены все логические схемы. Прове-

денные исследования показали достаточную устойчивость описанных схем. Так, для ячейки таблицы 1 диапазон изменения амплитуды тактового питания составляет $0,8 \div 4,5$ а при температуре окружающей среды $+20^{\circ}\text{C}$ и изменении ампервитков поля возврата в пределах $0,4 \div 1,5$ ав. При повышении температуры среды до $+100^{\circ}\text{C}$ диапазон изменения тактовых токов $0,4 \div 2,5$ а при допустимых колебаниях поля возврата $0,2 \div 0,75$ ав. При температуре среды -60°C диапазон тактовых токов составляет $1 \div 4,5$ а при колебании амплитуды поля возврата $0,9 \div 2,1$ ав. Предельная частота тактовых импульсов 10000 гц.

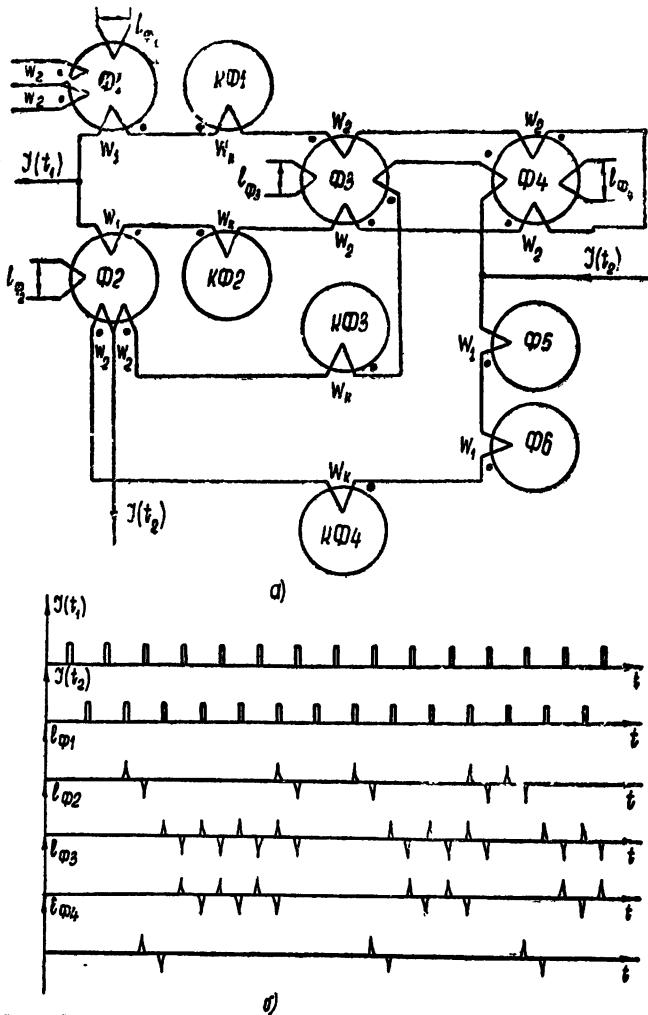


Рис. 4. а) Динамический триггер со счетным входом;
б) временная диаграмма работы динамического триггера.

Применение бездиодных схем значительно повышает надежность устройств дискретного действия, что, несомненно, является их основным достоинством.

Таблица 1

Обозначение сердечника	Число витков				Примечание
	W_1	W_2	W_b	W_k	
Ф	11	3	—	—	ВТ — 2 Ø 3 × Ø 2,2 × 1
КФ	—	—	20	10	К — 272 Ø 3 × Ø 2 × 1,4

ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Russell, IRE Conv. Rec., 5, 106 (1957).
2. S. B. Jochelson, IRE Wescon Conv. Rec., 4, 82 (1960).
3. Э. А. Демин, Л. А. Чиненков, Регистры сдвига на ферритовых сердечниках в радиотехнике, Госэнергоиздат, М., 1960.

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию
24 мая 1963 г.

LOGICAL CIRCUITS BASED ON DIODELESS CELL WITH
BRIDGE COUPLING

F. A. Gareev, V. A. Popov

The construction of the principal logical circuits have been considered based on a push-pull diodeless cell with a bridge coupling. Data of circuits stability are given.

ОБ ОДНОМ ТИПЕ БИФУРКАЦИЙ РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ

Ю. И. Неймарк, М. И. Фейгин

Выяснены возможные взаиморасположения в пространстве параметров областей различных периодических движений релейной системы в предположении, что единственными бифуркациями рассматриваемого периодического движения являются бифуркации, вызываемые приходом фазовой траектории на край пластиинки скользящих движений, и что при каждом значении параметров имеется единственное периодическое движение. Целесообразность такого рассмотрения иллюстрируется на примере исследования периодических движений демпфера с сухим трением.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как было выяснено в работе [1], всякому периодическому движению соответствует неподвижная точка некоторой последовательности преобразований, составляемой по определенным правилам из шести преобразований $T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{23}, T_{31}, T_{32}$. Напомним, что преобразование T_{ij} переводит точки Π_i в точки Π_j и что Π_2 — пластиинка скользящих движений, а Π_1 и Π_3 — части плоскости переключений реле, расположенные по обе стороны от нее (рис. 1).

Если обозначить через τ_{ij} времена движений фазовой точки, соответствующие преобразованию T_{ij} , то всякому периодическому движению будет отвечать некоторая последовательность времен τ_{ij} .

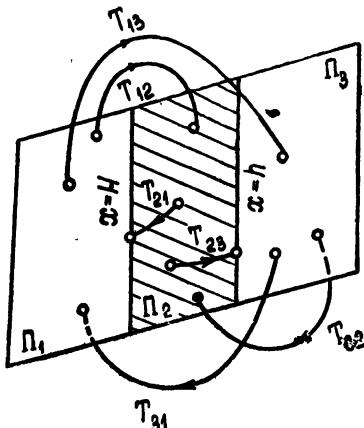


Рис. 1.

При бифуркациях периодического движения происходят некоторые изменения этой последовательности. Согласно работе [1], возможны четыре типа бифуркаций, каждому из которых соответствует вполне определенное изменение последовательности времен. Эти бифуркации и соответствующие им случаи изменения последовательностей времен обозначим через $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta$ (рис. 2) при бифуркации периодического движения на крае $x = H$ и соответственно через $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma, h_\delta$ на крае $x = h$. Указанным бифуркациям соответствуют следующие замены времен:

$$\begin{aligned} H_\alpha : \tau_{32}\tau_{21} - \tau_{31} &\text{ и } h_\alpha : \tau_{12}\tau_{23} - \tau_{13}; \\ H_\beta : \tau_{31}\tau_{12} - \tau_{32} &\text{ и } h_\beta : \tau_{13}\tau_{32} - \tau_{12}; \\ H_\gamma : \tau_{12}\tau_{21} - \tau_{11} &\text{ и } h_\gamma : \tau_{32}\tau_{23} - \tau_{33}; \\ H_\delta : \tau_{21}\tau_{12} - \tau_{22} &\text{ и } h_\delta : \tau_{23}\tau_{32} - \tau_{22}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Времена $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ введены ради единообразия записи и обозначают пустое место между любыми соседними временами при естественном условии согласования следования индексов, которое состоит

в том, что после τ_{ij} может следовать только τ_{js} . Бифуркационные поверхности в пространстве параметров, соответствующие заменам (1.1), будем соответственно обозначать теми же символами. Ту сторону бифуркационной поверхности, которая обращена в сторону области бо-

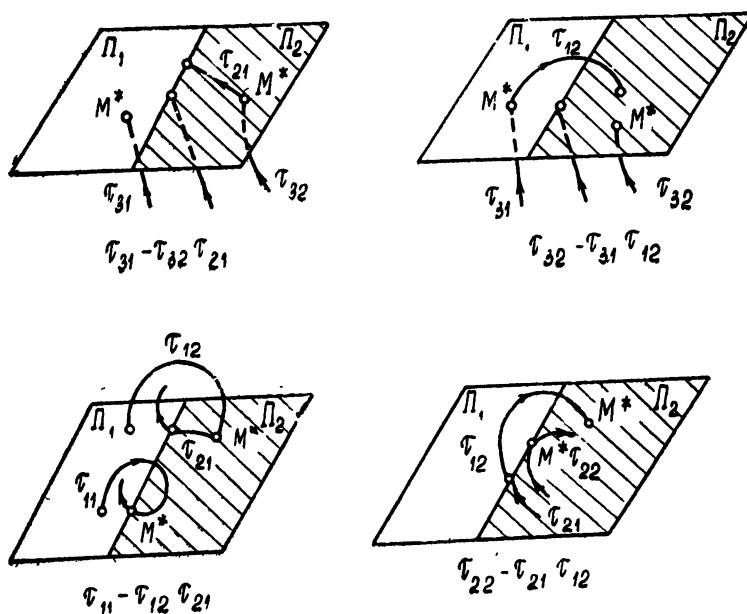


Рис. 2.

лее сложного периодического режима, будем выделять одинарной или двойной штриховкой в зависимости от того, скольким изменениям времени τ_{ij} соответствует бифуркация (рис. 3).

Уравнения бифуркационных поверхностей включают в себя: 1) уравнения соответствующего периодического движения [2] и 2) дополнительные условия принадлежности к краю пластинки P_2 одной из точек M^* фазовой траектории периодического движения. Возможны два различных подхода к написанию этих дополнительных условий. При первом подходе бифуркационная фазовая траектория рассматривается как граничный случай перехода от более сложного периодического движения к менее сложному. Дополнительные уравнения в этом случае сводятся к обращению в нуль одного из интервалов τ_{12} , τ_{21} , τ_{32} или τ_{23} времени движения фазовой точки по исчезающему участку траектории более сложного периодического движения [1]. При втором подходе бифуркационную фазовую траекторию следует рассматривать как граничный случай перехода от менее сложного периодического режима к более сложному. Дополнительные условия в этом случае отражают факт прихода в момент τ^* одной из точек фазовой траектории менее сложного периодического движения на край пластинки скользящих движений и имеют следующий вид (в обозначениях работы [1]):

в случаях H_α и H_β

$$\dot{y}^* = \sum \lambda_i y_i^* + H \sum c_i + f(\tau^*) = 0,$$

$$\ddot{y}^* = \sum \lambda_i^2 y_i^* + H \sum \lambda_i c_i + \ddot{f}(\tau^*) \begin{cases} > \operatorname{sgn}(H - h) \text{ для } H_\alpha \\ < \operatorname{sgn}(H - h) \text{ для } H_\beta \end{cases}; \quad (1.2)$$

в случае H_γ

$$y(\tau^*) = \dot{y}(\tau^*) = 0, \quad \ddot{y}(\tau^*) > \operatorname{sgn}(H - h); \quad (1.3)$$

в случае H_δ

$$x(\tau^*) = H, \quad \ddot{y}(\tau^*) = \dot{x}(\tau^*) = 0, \quad \ddot{y}(\tau^*) = -\dot{x}(\tau^*) \sum c_i < \operatorname{sgn}(H - h). \quad (1.4)$$

Для случаев h_α , h_β , h_γ , h_δ следует в выражениях (1.2)–(1.4) заменить H на h и наоборот.

Границами продолжения указанных бифуркационных поверхностей в пространстве параметров могут быть лишь линии, на которых обращается в нуль соответствующая каждой бифуркационной поверхности первая отличная от нуля производная.

2. ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Нашей ближайшей задачей является рассмотрение возможных пересечений двух бифуркационных поверхностей. Такие пересечения делятся на две группы [1] в соответствии с тем, будут ли при обеих бифуркациях обращающиеся в нуль τ_{ij} соседними или нет. Второй случай не представляет самостоятельного интереса, поскольку он соответствует независимым бифуркациям периодического движения, и каждая из пересекающихся бифуркационных поверхностей может быть продолжена за линию их пересечения (рис. 8в, 9в).

Изучим подробно первый тип пересечения, когда бифуркационные поверхности заканчиваются на линии их пересечения. Для этой цели рассмотрим все возможные пересечения двух бифуркационных поверхностей, которые, ограничивая область более сложного периодического режима (штриховка в сторону этой области), соответствовали бы обращению в нуль соседних времен τ_{ij} этого режима. Таких пересечений оказывается двенадцать. В четырех случаях пересекающиеся бифуркационные поверхности соответствуют левому столбцу (1.1):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } H_\alpha \text{ и } H_\delta (\dots \tau_{32}\tau_{21}\tau_{12} \dots); & \text{б) } H_\beta \text{ и } H_\gamma (\dots \tau_{31}\tau_{12}\tau_{21} \dots); \\ \text{в) } H_\gamma \text{ и } H_\delta (\dots \tau_{12}\tau_{21}\tau_{12} \dots); & \text{г) } H_\gamma \text{ и } H_\delta (\dots \tau_{21}\tau_{12}\tau_{21} \dots); \end{array} \quad (2.1)$$

в четырех случаях — правому столбцу (1.1):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } h_x \text{ и } h_\delta (\dots \tau_{12}\tau_{23}\tau_{32} \dots); & \text{б) } h_\beta \text{ и } h_\gamma (\dots \tau_{13}\tau_{32}\tau_{23} \dots); \\ \text{в) } h_\gamma \text{ и } h_\delta (\dots \tau_{32}\tau_{23}\tau_{32} \dots); & \text{г) } h_\gamma \text{ и } h_3 (\dots \tau_{23}\tau_{32}\tau_{23} \dots); \end{array} \quad (2.2)$$

и в четырех случаях — разным столбцам (1.1):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } H_\beta \text{ и } h_x (\dots \tau_{31}\tau_{12}\tau_{23} \dots); & \text{б) } h_\beta \text{ и } H_\alpha (\dots \tau_{13}\tau_{32}\tau_{21} \dots); \\ \text{в) } H_\delta \text{ и } h_x (\dots \tau_{21}\tau_{12}\tau_{23} \dots); & \text{г) } h_\delta \text{ и } H_\alpha (\dots \tau_{23}\tau_{32}\tau_{21} \dots). \end{array} \quad (2.3)$$

В скобках указан тип периодического движения, область которого заключена между пересекающимися поверхностями.

Предположение о единственности периодических движений приводит к тому, что из некоторых линий пересечения бифуркационных поверхностей (2.1)–(2.3) должны выходить еще другие бифуркационные поверхности. В качестве примера рассмотрим случай пересечения бифуркационных поверхностей H_α и H_δ периодического режима

$$\dots \tau_{32}\tau_{21}\tau_{12} \dots \quad (2.4)$$

Поверхность H_α отделяет область режима (2.4) от области режима

$$\dots \tau_{31} \tau_{12} \dots, \quad (2.5)$$

а поверхность H_δ — от области режима

$$\dots \tau_{32} \dots \quad (2.6)$$

Так как режимы (2.5) и (2.6) не совпадают, соответствующие им области пространства параметров в самом простейшем случае разделяются бифуркационной поверхностью H_β (рис. 3а).

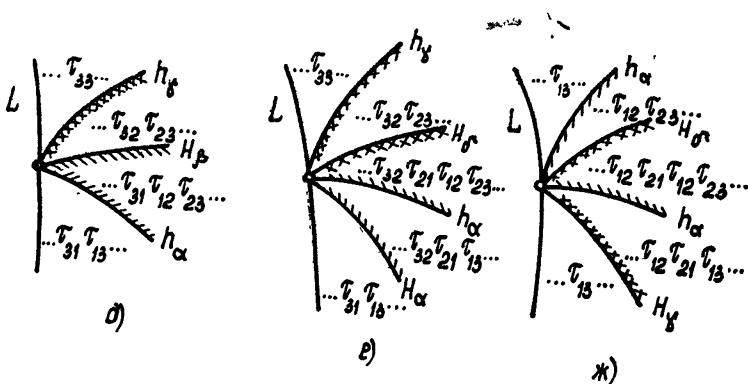
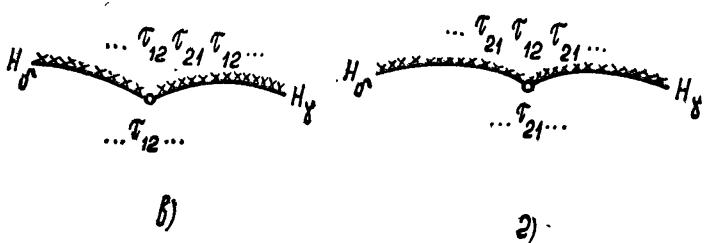
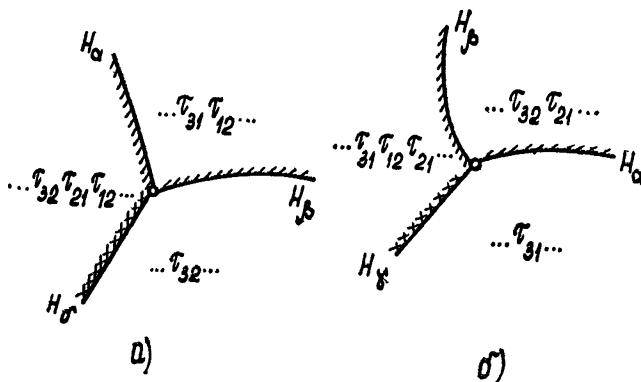


Рис. 3.

Совершенно аналогично выясняется структура пространства параметров в окрестности других пересечений (2.1) (рис. 3б, в, г). Случаи (2.2) отличаются от (2.1) лишь заменой H на h . Случаи пересечения бифуркационных поверхностей (2.3) соответствуют попаданию точек

M^* фазовой траектории периодического движения как на край $x = H$, так и на край $x = h$ пластиинки скользящих движений. Это возможно, когда линия пересечения этих бифуркационных поверхностей расположена на поверхности L

$$(H - h) \sum c_i = 0, \quad (2.7)$$

соответствующей вырождению пластиинки.

Для выяснения структуры пространства параметров в окрестности пересечений (2.3) воспользуемся тем очевидным условием, что к поверхности L (2.7) могут примыкать лишь области периодических режимов без скользящих движений. Такие области могут быть ограничены, кроме поверхности (2.7), только поверхностями H_α , h_α , H_γ и h_γ , а соответствующие периодические режимы могут включать лишь времена τ_{13} и τ_{31} . Выясним, например, простейшую структуру пересечения поверхностей H_β и h_α (2.3а) периодического режима

$$\dots \tau_{31} \tau_{12} \tau_{23} \dots \quad (2.8)$$

Поверхность H_β разделяет область режима (2.8) от области режима

$$\dots \tau_{32} \tau_{23} \dots, \quad (2.9)$$

а поверхность h_α — от области режима

$$\dots \tau_{31} \tau_{13} \dots \quad (2.10)$$

Область режима (2.10) может примыкать к поверхности L , а между областью режима (2.9) и поверхностью L должна быть по крайней мере область режима $\dots \tau_{33} \dots$, отделяемая от области режима (2.9) бифуркационной поверхностью h_γ (рис. 3д).

Случай (2.3б) отличается от рассмотренного взаимной заменой H и h в обозначении бифуркационных поверхностей. Для случая пересечений (2.3в) приходится добавлять к тройке заменяемых времен спереди еще τ_{12} или τ_{32} , чтобы удовлетворить условию о составе граничных с L периодических режимов лишь из τ_{13} и τ_{31} (рис. 3е, ж).

Уравнения пересечения бифуркационных поверхностей включают в себя либо несколько условий типа

$$\tau_{12} = 0; \quad \tau_{21} = 0; \quad \tau_{32} = 0; \quad \tau_{23} = 0,$$

накладываемых на уравнения самого сложного из существующих в окрестности особой точки, периодических движений, либо условия типа (1.2) — (1.4), накладываемые на те точки фазовых траекторий менее сложных периодических движений, которые ответственны за бифуркацию. Очевидно, что все существующие в окрестности особой бифуркационной точки периодические движения при значениях параметров, равных координатам особой точки, совпадают друг с другом. Исследование же пространства параметров конкретных релейных систем удобнее проводить, начиная с областей наиболее простых периодических движений, так как уравнения этих движений сравнительно просты. Поэтому получим уравнения бифуркационных пересечений в форме дополнительных условий, накладываемых на «ответственные» за кратные бифуркации точки фазовой траектории наиболее простого периодического движения среди движений, существующих в окрестности пересечения.

Перейдем к установлению необходимых свойств указанных точек фазовых траекторий для всех рассмотренных случаев. При этом будем иметь в виду, что в точках края пластиинки скользящих движений выполняются соотношения [1]

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{d^k y}{dt^k} = -\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} \sum c_i \quad (k \geq 2). \quad (2.11)$$

Случаю (2.1а) соответствует пересечение бифуркационных поверхностей H_a и H_δ . Согласно (1.2), бифуркация H_a требует, чтобы в точке M^* фазовой траектории движения (2.5) $\dot{y}^* = 0$, $\ddot{y}^* > 0$, а бифуркация H_δ , в соответствии с (1.4), требует выполнения в точке M^* движения (2.6) соотношений $\dot{y}^* = \ddot{y}^* = 0$, $\dddot{y}^* < 0$. Так как выходящий из точки M^* участок траектории τ_{2j} расположен на пластинке скользящих движений, необходимо, чтобы первая отличная от нуля производная $y^*(t)$ была отрицательна. Чтобы удовлетворить всем указанным требованиям, в точке M^* фазовой траектории, соответствующей рассматриваемому пересечению, должны выполняться по крайней мере следующие условия:

$$\dot{y}^* = \ddot{y}^* = 0, \quad \ddot{y}^* < 0. \quad (2.12)$$

Рассматривая подобным образом другие пересечения, приходим в каждом случае к необходимости выполнения условий, аналогичных (2.12). Если при этом выходящий из точки M^* участок траектории периодического движения уходит в полупространство G_+ , то первая отличная от нуля производная $y(t)$ в точке M^* должна быть положительной. Результаты такого рассмотрения сведены в таблицу 1; там же указан вид периодических движений при значениях параметров, равных координатам соответствующего пересечения. Значения производных функций $y(t)$ находятся из выражения [1]

$$\frac{d^k y}{dt^k} = \sum \lambda_i^k y_i + \Omega(y) \sum \lambda_i^{k-1} c_i + \frac{d^k f(t)}{dt^k}. \quad (2.13)$$

Таблица 1

Пересекающиеся бифуркационные поверхности		Значения производных $y(t)$ в точке M^*				Вид периодических движений, проходящих через край пластинки скользящих движений
типа		$\frac{dy}{dt}$	$\frac{d^2y}{dt^2}$	$\frac{d^3y}{dt^3}$	$\frac{d^4y}{dt^4}$	
(2.1а)	H_a, H_δ, H_β	0	0	<0	—	... $\tau_{32}\tau_{2j} \dots$
(2.1б)	H_β, H_γ, H_a	0	0	>0	—	... $\tau_{31}\tau_{1j} \dots$
(2.1в)	H_γ, H_δ	0	0	<0	—	... $\tau_{12}\tau_{2j} \dots$
(2.1г)	H_γ, H_δ	0	0	0	>0	... $\tau_{21}\tau_{1j} \dots$
(2.3а)	h_a, H_β, h_γ	0	<0	—	—	... $\tau_{31} \dots$
(2.3б)	$h_\gamma, H_\delta, h_a, H_a$	0	<0	—	—	... $\tau_{31} \dots$
(2.3в)	$h_a, H_\delta, h_a, H_\gamma$	<0	—	—	—	... $\tau_{13}\tau_{31} \dots$

Для пересечений (2.2), которые не приведены в таблице, первая отличная от нуля производная должна иметь обратный знак, в отличие от аналогичных случаев (2.1). Соответствующие фазовые траектории симметричны (в смысле замены индексов 1 и 3 на 3 и 1) соответственно фазовым траекториям в случаях (2.1). Это связано с тем, что точка M^* расположена на другом краю пластинки скользящих движений.

Каждое из уравнений типа $d^k y(\tau^*)/dt^k = 0$, добавленное к уравне-

ниям более простого из окрестности пересечения периодического движения, определяет в пространстве параметров некоторую поверхность. Указанные в таблице нулевые значения нескольких производных $u(t)$ определяют, вообще говоря, пересечения бифуркационных поверхностей, однако не являются достаточными для их однозначного отыскания в пространстве параметров. В каждом конкретном случае следует еще убедиться, что бифуркационные поверхности действительно заканчиваются на линии их пересечения.

3. О ЗАВИСИМОСТИ ВИДА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ БИФУРКАЦИОННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ

При исследовании пространства параметров конкретных динамических систем обычно рассматривают бифуркации периодических режимов в плоскости каких-либо двух параметров, полагая остальные параметры фиксированными. При таком рассмотрении с изменением значений фиксированных параметров точки пересечения бифуркационных поверхностей могут не только перемещаться, но и сливаться друг с другом. Последнее имеет место при пересечении плоскостью параметров бифуркационных пересечений более высокой кратности. На основании проведенного в предыдущем параграфе исследования простейших бифуркационных пересечений можно установить все возможные случаи слияния двух таких пересечений.

На рис. 4—9 в качестве примеров представлены шесть возможных вариантов слияния с исчезновением двух бифуркационных пересечений, соответствующих попаданию фазовой траектории на край пластиинки $x = H$. В первом случае (рис. 4а, б, в) с изменением параметров слива-

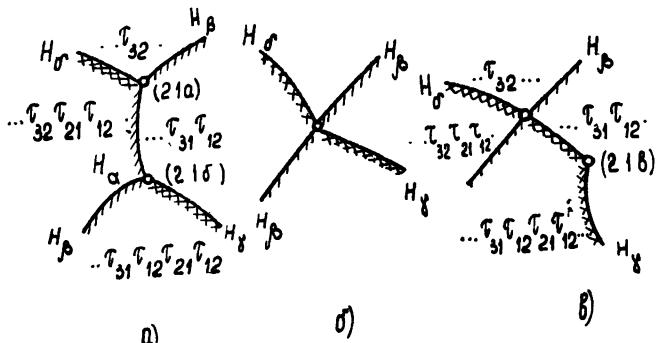


Рис. 4.

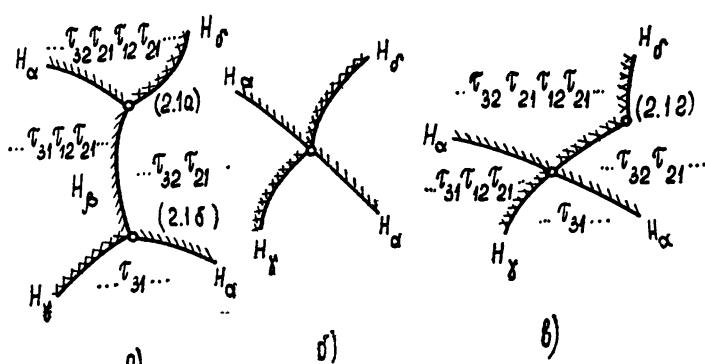


Рис. 5.

ются пересечения (2.1а) и (2.1б) при исчезновении H_α . В момент слияния из линии пересечения выходят поверхности H_δ и H_γ , а поверхность H_β пересекает эту линию. При дальнейшем изменении параметров поверхность H_β будет пересекать поверхность H_δ (рис. 4в), а не H_γ , так как периодический режим $\dots \tau_{32}\tau_{21}\tau_{12} \dots$ не допускает замен-

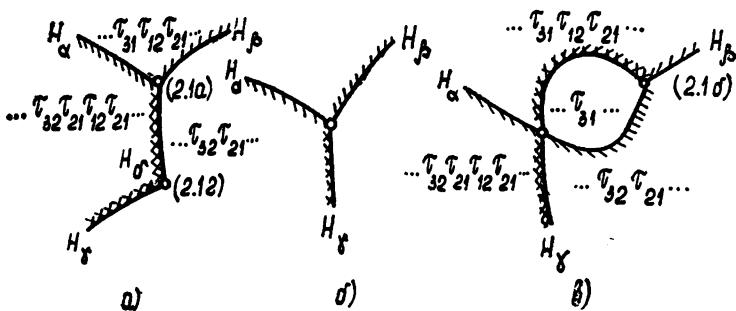


Рис. 6.

ны $H_\gamma : \tau_{12}\tau_{21} - \tau_{11}$. Таким образом, слияние и исчезновение пересечений (2.1а) и (2.1б) порождает пересечение (2.1в) и независимое пересечение поверхностей H_β и H_δ .

Слияние пересечений (2.1а) и (2.1б) при исчезновении H_β (рис. 5) порождает пересечение (2.1г) и независимое пересечение поверхностей H_α и H_γ .

При слиянии пересечений (2.1а) — (2.1г) в момент слияния

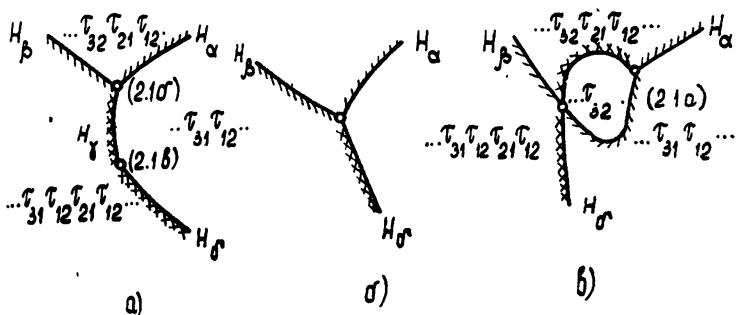


Рис. 7.

(рис. 6б) из линий пересечения выходят три бифуркационные поверхности: H_α , H_γ и H_β . Однако бифуркации H_α и H_γ периодического режима $\dots \tau_{32}\tau_{21}\tau_{12}\tau_{21} \dots$ оказываются независимыми, так как соответствуют заменам непересекающихся пар τ_{ij} . Поэтому при дальнейшем изменении параметров поверхности H_α и H_γ продолжаются за линию их пересечения (рис. 6в), что ведет к появлению пересечения (2.1б).

Аналогичная картина имеет место и в остальных трех случаях слияния пересечений (рис. 7—9). При этом в двух последних случаях в момент слияния пересечения поверхностей H_δ и H_γ и соответственно H_γ и H_β оказываются независимыми, что ведет к появлению области еще одного периодического движения.

Рассмотренные случаи показывают, что слияние двух простейших

пересечений происходит в «точках» пересечений бифуркационных поверхностей более высокой кратности, причем такие «точки» характеризуются определенными свойствами. Так нетрудно видеть, что второй и третий случаи относятся к одному типу пересечений более высокой кратности, в котором заканчиваются простейшие пересечения (2.1a), (2.1б), (2.1г) и независимое пересечение поверхностей H_α и H_γ (тип I).

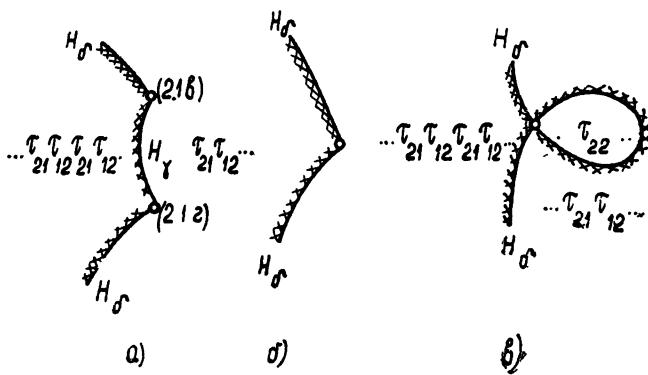


Рис. 8.

Аналогично первый и четвертый случаи слияния выделяют второй тип пересечений, в котором заканчиваются более простые пересечения (2.1a), (2.1б), (2.1в) и независимое пересечение поверхностей H_β и H_δ . Пятый случай слияния выделяет третий тип пересечений второй кратности, в котором заканчиваются (2.1в), (2.1г) и независимое

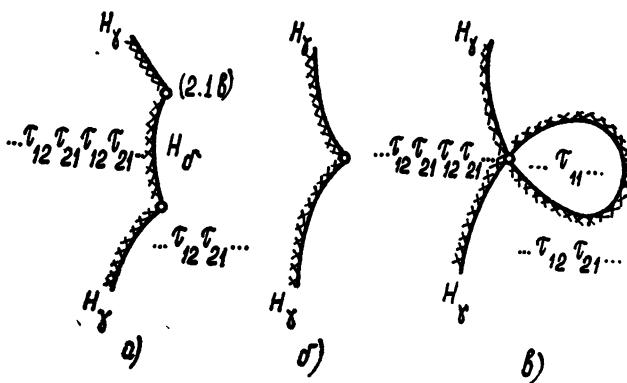


Рис. 9.

пересечение двух поверхностей H_δ ; шестой случай выделяет тип IV. в котором заканчиваются (2.1в), (2.1г) и независимое пересечение поверхностей H_γ .

Что касается аналитических условий, которые накладываются на точку M^* фазовой траектории периодического движения, соответствующую рассмотренным типам слияния простейших пересечений, то они устанавливаются так же, как и для простейших пересечений (2.1) — (2.3). Эти условия сведены в таблицу 2, где указан также вид периодических движений при соответствующем значении параметров.

Таблица 2

Тип пересечений	Пересекающиеся бифуркационные поверхности	Значения производных $y(t)$ в точке M^*					Вид периодических движений, проходящих через край пластинки скользящих движений
		$\frac{dy}{dt}$	$\frac{d^2y}{dt^2}$	$\frac{d^3y}{dt^3}$	$\frac{d^4y}{dt^4}$	$\frac{d^5y}{dt^5}$	
I	$H_\alpha, H_\gamma, H_\delta, H_\alpha, H_\beta, H_\gamma$	0	0	0	>0	—	... $\tau_{31}\tau_{1j} \dots$
II	$H_\beta, H_\gamma, H_\delta, H_\alpha, H_\beta, H_\delta$	0	0	0	<0	—	... $\tau_{32}\tau_{2j} \dots$
III	$H_\delta, H_\gamma, H_\delta$	0	0	0	0	<0	... $\tau_{2j} \dots$
IV	$H_\gamma, H_\delta, H_\gamma$	0	0	0	>0	—	... $\tau_{1j} \dots$

4. О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ДЕМПФЕРА СУХОГО ТРЕНИЯ

Уравнения движения. Вынужденные колебания системы, имеющей одну степень свободы и снабженной демпфером сухого трения, описываются уравнениями [3]

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \sin \tau + \beta \varphi (\dot{\eta} - \dot{\xi}); \quad (4.1)$$

$$\mu \ddot{\eta} = -\beta \varphi (\dot{\eta} - \dot{\xi}),$$

где ξ и η — координаты демпфируемой системы и демпфера, β — безмерное максимальное значение силы трения, μ — относительная масса демпфера, а $\varphi(\dot{\eta} - \dot{\xi})$ — релейная функция (в нашем примере $H = \beta$, $h = -\beta$).

Представим коэффициент передачи линейной части релейной системы (4.1)

$$K(p) = -\frac{p^2}{p^2 + \omega^2} - \frac{1}{\mu p}$$

в виде суммы

$$K(p) = \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{p - \lambda_i},$$

в которой

$$\lambda_1 = j\omega, \quad \lambda_2 = -j\omega, \quad \lambda_3 = 0, \quad (4.2)$$

$$c_1 = -1/2, \quad c_2 = -1/2, \quad c_3 = -1/\mu.$$

Внешнее воздействие, пересчитанное для входа реле, равно

$$f(\tau) = \frac{\cos \tau}{\omega^2 - 1} = \alpha \cos \tau. \quad (4.3)$$

Единственность периодического решения. Определим в фазовом пространстве $\xi, \dot{\xi}, \eta, \tau$ системы (4.1) точечное преобразование $T_{2\pi}$, отображающее точки M^0 поверхности $\tau = \tau^0$ в точки M' поверхности $\tau = \tau^0 + 2\pi$, и введем в рассмотрение неотрицательную функцию

$$\Phi(\tau) = \omega^2 (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2)^2 + \mu (\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2)^2. \quad (4.4)$$

Производная этой функции по времени, как это следует из (4.4) и (4.1), равна

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = 2\beta [(\dot{\eta}_2 - \dot{\xi}_2) - (\dot{\eta}_1 - \dot{\xi}_1)] [\varphi(\dot{\eta}_1 - \dot{\xi}_1) - \varphi(\dot{\eta}_2 - \dot{\xi}_2)] < 0. \quad (4.5)$$

Так как функция $\Phi(\tau)$ — невозрастающая и в интервале $\tau^0 \leq \tau \leq \tau^0 + 2\pi$ производная $\frac{d\Phi}{d\tau} \neq 0$, выполняется следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \omega^2 [\xi_1(\tau^0 + 2\pi) - \xi_2(\tau^0 + 2\pi)]^2 + [\dot{\xi}_1(\tau^0 + 2\pi) - \dot{\xi}_2(\tau^0 + 2\pi)]^2 + \\ & + \mu [\eta_1(\tau^0 + 2\pi) - \eta_2(\tau^0 + 2\pi)]^2 < \omega^2 [\xi_1(\tau^0) - \xi_2(\tau^0)]^2 + [\dot{\xi}_1(\tau^0) - \\ & - \dot{\xi}_2(\tau^0)]^2 + \mu [\eta_1(\tau^0) - \eta_2(\tau^0)]^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В силу принципа сжатых отображений [4] существует одна и только одна точка отображения $T_{2\pi}$, такая, что $M^* = T_{2\pi}M^*$, и, следовательно, единственное периодическое решение уравнений (4.1).

Бифуркации периодического движения $\tau_{13}\tau_{31}$. Координаты неподвижной точки преобразования, соответствующей симметричному периодическому движению $\tau_{13}\tau_{31}$, определяются из уравнений [2,3]

$$y_1^0 = y_2^0 = \frac{\beta}{2\omega} \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2}, \quad y_3^0 = \frac{\pi\beta}{2\mu}; \quad (4.7)$$

$$\beta \left(\frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} + \frac{\pi}{2\mu} \right) - \alpha \cos \tau^0 = 0. \quad (4.8)$$

К простейшему периодическому движению $\tau_{13}\tau_{31}$ применимы четыре замены $H_\alpha, h_\alpha, H_\gamma, h_\gamma$. Так как периодическое движение симметрично, достаточно рассмотреть бифуркации H_α и H_γ . Дополнительные к (4.8) уравнения бифуркационных поверхностей H_α и H_γ , согласно (1.2) и (1.3), имеют вид

$$\begin{aligned} & -\beta(1 + \mu) + \mu\alpha \sin \tau^0 = 0; \\ & \frac{d^2y(\tau^0)}{d\tau^2} > 0; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} \cos [\omega(\tau' - \tau^0)] - \frac{\beta}{\omega} \sin [\omega(\tau' - \tau^0)] + \frac{\beta}{\mu} \left(\frac{\pi}{2} - \tau' + \tau^0 \right) - \\ & - \alpha \cos \tau' = 0; \\ & -\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} \sin [\omega(\tau' - \tau^0)] - \beta \cos [\omega(\tau' - \tau^0)] - \frac{\beta}{\mu} + \alpha \sin \tau' = 0; \\ & \frac{d^2y(\tau^0)}{d\tau^2} > 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где момент касания τ' заключен в интервале $\tau^0 \leq \tau' \leq \tau^0 + \pi$.

При особой бифуркации рассматриваемого режима в неподвижной точке M^0 должны обращаться в нуль первые две производные функции $y(\tau)$, а третья производная должна быть положительной. Подставив в соответствующие выражения (2.13) значения c_i, λ_i и y_i^0 из (4.2) и (4.7), получим уравнение (4.9), уравнение

$$\frac{d^2y(\tau^0)}{d\tau^2} = -\omega\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} + \alpha \cos \tau^0 = 0 \quad (4.11)$$

и условие

$$\frac{d^3y(\tau^0)}{d\tau^3} = \beta\omega^2 - \alpha \sin \tau^0 > 0. \quad (4.12)$$

Уравнения (4.8), (4.9), (4.11) и (4.12) выделяют в пространстве параметров линию γ , являющуюся претендентом на пересечение бифуркационных поверхностей типа (2.1б). Однако из (4.11) следует, что линия γ делит поверхность (4.8), (4.9) на две части, в одной из которых вторая производная $y(\tau)$ отрицательна. Следовательно, эта линия есть край бифуркационной поверхности H_α и действительно является особой бифуркационной кривой типа (2.1б).

После исключения из уравнений (4.8), (4.9), (4.11) и (4.12) координаты τ^0 получим следующие уравнения γ в трехмерном пространстве параметров:

$$\mu = \frac{\pi\omega}{2(\omega^2 - 1)} \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi\omega/2)}; \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{\beta^2} = (\omega^2 - 1)^2 \left\{ \omega^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega\pi}{2} + \left[1 + \frac{2(\omega^2 - 1)}{\pi\omega} \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} \right]^2 \right\};$$

$$\omega^2 - 1 > 1/\mu. \quad (4.14)$$

Из этих уравнений следует, что линии γ расположены в каждом из интервалов $2n < \omega < 2n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$). В каждой из кривых γ оканчиваются три бифуркационные поверхности: H_α , H_β и H_γ . Кривые γ идут из бесконечности (при $\mu \gg 1$ условие (4.14) всегда выполняется) и оканчиваются в бифуркационных точках, в которых

$$\mu = \frac{1}{\omega^2 - 1} \quad (4.15)$$

и меняет знак третья производная $y(\tau)$. Благодаря последнему обстоятельству уравнения (4.13), (4.15) выделяют на кривых γ точки пересечения второй кратности типа I.

Координаты этих точек ω^* , μ^* , β^* после ряда упрощений уравнений (4.13), (4.15) выражаются следующим образом:

$$\frac{\pi\omega^*}{2} - \operatorname{tg} \frac{\pi\omega^*}{2} = 0, \quad \mu^* = \frac{1}{\omega^{*2} - 1}, \quad \beta^* = \frac{1}{\omega^{*2}(\omega^{*2} - 1)\sqrt{1 + \pi^2/4}}. \quad (4.16)$$

В частности, в интервале $2 < \omega < 3$

$$\omega^* = 2,8606, \quad \mu^* = 0,1392, \quad \beta^* = 0,00913.$$

Из таблицы 2 следует, что пересечению типа I должен соответствовать положительный знак четвертой производной $y^0(\tau)$. В последнем легко убедиться, ибо

$$\frac{d^4y^0}{d\tau^4} = \omega^3 \beta \operatorname{tg} \frac{\pi\omega}{2} - \alpha \cos \tau^0 = \frac{\pi\beta\omega^2}{2\mu}.$$

Таким образом, с уменьшением μ при $\mu = \mu^*$ пересечение (2.1б) исчезает, слившись с тремя другими пересечениями (2.1а), (2.1г) и независимым пересечением H_α и H_γ . При этом появляется область периодического движения $\tau_{12}\tau_{21}\tau_{12}\tau_{23}\tau_{32}\tau_{23}\tau_{32}\tau_{21}$.

Попаданию неподвижной точки преобразования (4.7) на край

выродившейся пластинки скользящих движений соответствуют особые бифуркационные линии пространства параметров*

$$\beta = 0, \quad \omega = 3, 5, 7, \dots \quad (4.17)$$

При значении параметров (4.17) система (4.1) становится линейной, а симметричным периодическим решением ее будет $y(\tau) = \xi(\tau) = \alpha \cos t$. Поэтому в точках фазовой траектории, расположенных на краю выродившейся пластинки скользящих движений, не обращается в нуль даже первая производная $y'(\tau)$. Но и в этом случае возможны несколько вариантов структуры пространства параметров в окрестности особых линий (4.17). Исследование уравнений бифуркационных поверхностей H_α и H_γ (4.9) и (4.10) при $\mu \gg 1$ показывает, что в интервалах $3 < \omega < 4$, $5 < \omega < 6, \dots$ эти поверхности независимо пересекаются. Таким образом, область режима $\tau_{13}\tau_{31}$ в окрестности линий (4.17) ограничена поверхностями типа H_γ , что оставляет лишь два варианта структуры окрестности точек (4.17): в одном из особых бифуркационных линий выходят поверхности H_γ , H_δ , H_α , H_β , H_γ , в другом — поверхности H_γ , H_α , H_β , H_α , H_β , H_γ . Решение вопроса о том, какой из вариантов структуры имеет место в действительности, зависит от типа пересечения поверхностей H_β , выходящих из точек (2.1б). Как показало дополнительное рассмотрение при $\mu \gg 1$, имеет место пересечение поверхностей H_β и H_α , что соответствует первому варианту.

На рис. 10 приведена качественная картина структуры плоскости

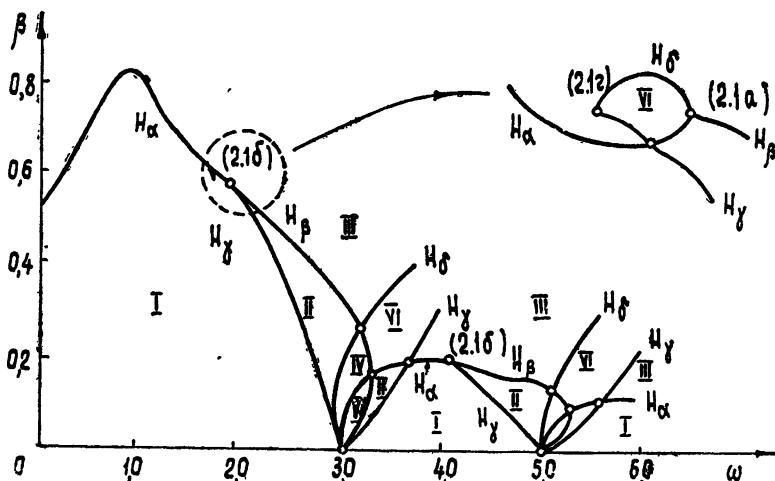


Рис. 10.

параметров ω , β при $\mu \gg 1$. Римскими цифрами обозначены области следующих периодических режимов:

$$\begin{array}{ll} \text{I} - \tau_{43}\tau_{31} & ; \quad \text{IV} - \tau_{42}\tau_{23}\tau_{32}\tau_{21}\tau_{13}\tau_{32}\tau_{21}\tau_{12}\tau_{23}\tau_{31}; \\ \text{II} - \tau_{12}\tau_{21}\tau_{13}\tau_{32}\tau_{23}\tau_{31}; & \text{V} - \tau_{12}\tau_{23}\tau_{31}\tau_{13}\tau_{32}\tau_{21}\tau_{13}\tau_{31}; \\ \text{III} - \tau_{12}\tau_{23}\tau_{32}\tau_{21}; & \text{VI} - \tau_{32}\tau_{23}\tau_{32}\tau_{21}\tau_{12}\tau_{21}\tau_{12}\tau_{23}. \end{array}$$

* Заметим, что в рассматриваемом примере условие вырождения пластинки ($H = h$) Σc_l связано с обращением в нуль силы сухого трения.

При $\mu = \mu^*$ изменяется окрестность пересечения (2.16), начиная с левой точки (см. верхний правый угол рис. 10). Следует отметить, что, вообще говоря, не исключено наличие особых бифуркационных точек внутри областей периодических движений, соседних с областью I; однако их отыскание не входило в план настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Брусин, Ю. И. Неймарк, М. И. Фейгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 785 (1963).
2. Ю. И. Неймарк, Уч. записки ГГУ, сер. физ., 30, 159 (1956).
3. М. И. Фейгин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 607 (1959).
4. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 95 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 июля 1963 г.

ON ONE TYPE OF RELAY SYSTEM BIFURCATIONS

Yu. I. Neimark, M. I. Feigin

Possible bifurcation have been cleared up in the space of parameters of various periodical motions ranges of a relay system assuming that the single bifurcations of periodical motions considered are those caused by phase trajectory arrival at the plate edge of slide motions and that there is a single periodical motion for each value of parameters. The expediency of such consideration is illustrated by an example of periodical damper motions with dry friction.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О МАТЕРИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ПЕРИОДИЧЕСКИ- НЕСТАЦИОНАРНЫХ СРЕД

P. B. Карапетян

Возросший в последнее время интерес к периодически-нестационарным средам обусловлен возможностью их использования для усиления и генерации электромагнитных волн [1, 2]. В настоящей заметке мы рассмотрим материальные уравнения в таких средах. Некоторые общие свойства материальных уравнений для сред с периодическими по времени свойствами обсуждались в работах [3, 4].

Рассматривается проводимость* кристаллической периодически-нестационарной среды. Естественно ожидать, что свойства симметрии различных кристаллических классов наложат какие-то ограничения на тензор проводимости такой среды.

Периодическая нестационарность среды осуществляется воздействием на стационарную среду внешнего (по отношению к рассматриваемому полю $E(r, t)$, $H(r, t)$) сильного периодического поля $E_{\text{стор}}(r, t)$, $H_{\text{стор}}(r, t)$ (в дальнейшем зависимость полей от координат не рассматривается). При достаточно больших напряженостях поля $E_{\text{стор}}(t)$, такие, например, реализуются в пространстве, куда сфокусирован луч от рубинового лазера, становятся существенными нелинейные эффекты: связь между действующим на среду электрическим полем $E_{\text{стор}}(t)$ и плотностью возникающего в ней тока $I(t)$ перестает быть линейной и может быть представлена в виде (см. [5, 6])

$$I(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I^{(n)}(t), \quad (1)$$

где

$$[I^{(n)}(t)]_{\alpha} = \int_0^{\infty} d\tau_1 \dots \int_0^{\infty} d\tau_n K_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) E_{\text{стор}\beta_1}(t - \tau_1) E_{\text{стор}\beta_2}(t - \tau_2) \dots E_{\text{стор}\beta_n}(t - \tau_n). \quad (2)$$

Здесь по повторяющим индексам осуществляется суммирование.

Аналогичная связь для слабого электрического поля $E(t)$, действием которого мы интересуемся в линейном приближении, может быть представлена в виде (см. [3])

$$j_{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} \chi_{\alpha\beta}(t, \tau) E_{\beta}(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

Нас интересует зависимость тензора $\gamma_{\alpha\beta}(t, \tau)$ от сильного электрического поля $E_{\text{стор}}(t)$, а также его свойства симметрии для различных кристаллических классов. С этой целью в формулу (1), где мы ограничиваемся только первыми тремя членами ряда, так как, вообще говоря, отклонение от линейности мало, подставим суммарное действующее на среду электрическое поле $E_{\text{стор}}(t) + E(t)$ и выделим линейную по полю $E(t)$ часть. Сравнивая полученное выражение с соотношением (3), мы получим интересующую нас зависимость тензора $\chi_{\alpha\beta}(t, \tau)$ от сильного поля $E_{\text{стор}}(t)$. Окончательный результат таков.

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta}(t, \tau) = & K_{\alpha\beta}^{(1)}(\tau) + 2 \int_0^{\infty} K_{\alpha\beta\beta_1}^{(2)}(\tau, \tau_1) E_{\text{стор}\beta_1}(t - \tau_1) d\tau_1 + \\ & + 3 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{\alpha\beta\beta_1\beta_2}^{(3)}(\tau, \tau_1, \tau_2) E_{\text{стор}\beta_1}(t - \tau_1) E_{\text{стор}\beta_2}(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (4)$$

* Здесь подразумевается проводимость среды по отношению к полному току.

Это же соотношение можно написать на спектральном языке. Полагая сильное электрическое поле $E_{\text{стор}}(t)$ периодическим по времени с периодом $T = 2\pi/\Omega$ и проведя несложные преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega) &= \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega)\delta_{n,0} + 2\sigma_{\alpha\beta\beta_1}^{(2)}(\omega, n\Omega)\dot{E}_{\text{стор}}^{(\pi)}_{\beta_1} + \\ &+ 3 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sigma_{\alpha\beta\beta_1\beta_2}^{(3)}(\omega, m\Omega, (n-m)\Omega) E_{\text{стор}}^{(m)}_{\beta_1} E_{\text{стор}}^{(n-m)}_{\beta_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь использовались следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega) &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{+\pi/\Omega} e^{in\Omega t} dt \int_0^\infty \chi_{\alpha\beta}(t, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau; \\ \sigma_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) &= \int_0^\infty d\tau_1 \dots \int_0^\infty d\tau_n \times \\ &\times K_{\alpha\beta_1 \dots \beta_n}^{(n)}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \exp[i(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2 + \dots + \omega_n\tau_n)] \quad (n = 1, 2, 3); \\ E_{\text{стор}}^{(n)} &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{+\pi/\Omega} E_{\text{стор}}(\tau) e^{in\Omega\tau} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Для частного, практически наиболее важного случая, когда внешнее сильное поле имеет вид плоской монохроматической волны: $E_{\text{стор}}(r, t) = E_{\text{стор}0} \cos(kr - \Omega t + \varphi)$, имеем

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega) &= \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega)\delta_{n,0} + \sigma_{\alpha\beta\beta_1}^{(2)}(\omega, n\Omega)(\delta_{n,1} e^{i(kr + \varphi)} + \delta_{n,-1} e^{-i(kr + \varphi)}) \times \\ &\times E_{\text{стор}0\beta_1} + \frac{3}{4} \left\{ \sigma_{\alpha\beta\beta_1\beta_2}^{(3)}(\omega, \Omega, (n-1)\Omega) [e^{i2(kr + \varphi)} \delta_{n-1,1} + \delta_{n-1,-1}] + \right. \\ &\left. + \sigma_{\alpha\beta\beta_1\beta_2}^{(3)}(\omega, -\Omega, (n+1)\Omega) [e^{-i2(kr + \varphi)} \delta_{n+1,-1} + \delta_{n+1,+1}] \right\} E_{\text{стор}^+\beta_1} E_{\text{стор}^0\beta_2}, \end{aligned}$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронеккера.

Перейдем теперь к описанию свойств тензора $\chi_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega)$ в различных кристаллических классах, используя данные, приведенные в работе [6].

В каждой из следующих одиннадцати групп, в которые объединены кристаллические классы:

триклинический класс	$\frac{1}{1}$	моноклинический класс	2	орторомбический класс	$2 2 2$
			m		mm
			$2/m$		mmm
тетрагональный класс	$\frac{4}{4}$	и	$4 2 2$	тетрагональный класс	3
			$4mm$		32
	$4/m$		$4/mmm$		$\bar{3}m$
			$\bar{4}2m$		
гексагональный класс	$\frac{6}{6}$	и	$6 2 2$	кубический класс	$2 3$
			$6mm$		$4 3 2$
	$6/m$		$6/mmm$		$\bar{4}3m$
			$\bar{6}m 2$		$m\bar{3}m$

тензор $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ имеет один и тот же вид. Это справедливо также для тензора $\sigma_{\alpha\beta\beta_1\beta_2}^{(3)}$, и вообще для любого тензора четного ранга. Следовательно, число различных форм тензора $\chi_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega)$, обусловленных только тензорами $\sigma_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $\sigma_{\alpha\beta\beta_1\beta_2}^{(3)}$, равно одиннадцати.

Тензор же $\sigma_{\alpha\beta\beta_1}^{(2)}$, а также любой тензор нечетного ранга в одиннадцати кристаллических классах

$\bar{1}, \quad 2/m, \quad mmm, \quad 4/m, \quad 4/mmm, \quad \bar{3},$

$\bar{3}m, \quad 6/m, \quad 6/mmm, \quad m\bar{3} \quad \text{и} \quad m\bar{3}m,$

чны точечные группы содержат операцию инверсии, тождественно равен нулю, так что для тензора $\chi_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega)$ можем написать:

$$\chi_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega) = \sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega) \delta_{n,0} + 3 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sigma_{\alpha\beta\beta_1\beta_2}^{(3)}(\omega, m\Omega, (n-m)\Omega) E_{\text{стор } \beta_1}^{(m)} E_{\text{стор } \beta_2}^{(n-m)}. \quad (7)$$

В оставшихся двадцати одном из тридцати двух существующих кристаллических классов тензор $\sigma_{\alpha\beta\beta_1}^{(2)}$, а следовательно, и тензор $\chi_{\alpha\beta}^{(n)}(\omega)$ имеет двадцать одну различную форму.

Автор глубоко благодарен Ф. В. Бункину за полезные замечания и дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 43, 351 (1962).
2. Н. М. Кголи, Phys. Rev., 127, 1207 (1962).
3. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 41, 1859 (1961).
4. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 44, 1567 (1963).
5. Ф. В. Бункин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 687 (1962).
6. Р. Н. Butcher, T. P. McLean, Proc. Phys. Soc., 81, 219 (1963).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
29 июля 1963 г.

О ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Ц. Д. Лоладзе, Н. Л. Цинцадзе

Вопросу трансформации волн на границе раздела двух сред в равновесной плазме посвящен ряд работ [1–3]. В данной работе изучается трансформация продольных волн в поперечные на границе раздела плазма—вакуум при прохождении через плазму пучка заряженных частиц с направленной скоростью движения u_0 , параллельной поверхности раздела. Показано, что амплитуда поперечной волны, излученной в вакуум, резко увеличивается благодаря эффекту, подобному явлению «критической опалесценции» [4, 5].

Для решения поставленной задачи используются граничные условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей и нормальной составляющей электрического поля:

$$\begin{aligned} (E_L^i - E_L^r) \cos \varphi - E_s^r \sin \theta + E_s^t \sin \theta_0 &= 0; \\ (E_L^i + E_L^r) \sin \varphi - E_s^r \cos \theta - E_s^t \cos \theta_0 &= 0; \\ -k_s^r E_s^r + k_s^t E_s^t &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $E_L^i, E_L^r, E_s^r, E_s^t$ — амплитуды падающей продольной, отраженных продольной и поперечной и преломленной поперечной волн соответственно, углы $\varphi, \theta, \theta_0$ — соответственно углы падения продольной, отражения и преломления поперечных волн. Эти углы связаны посредством соотношений Снеллиуса

$$k_L^i \sin \varphi = k_s^r \sin \theta = k_s^t \sin \theta_0, \quad (2)$$

где

$$k_s^t = \omega/c, \quad k_L^i = \sqrt{\omega^2 - \Omega^2}/u_T.$$

Согласно соотношениям (2), для того чтобы преломленная волна не обращалась в поверхностную, необходимо наложение на угол φ условия

$$\sin \varphi < u_T / c. \quad (3)$$

В этом приближении, воспользовавшись граничными условиями (1), для коррелятора преломленной волны получим выражение

$$|E_s^t|^2 = 4(u_T^2/c^2)|E_L^i|^2. \quad (4)$$

В качестве выражения $|E_L^i|^2$ применим коррелятор флюктуаций поля, полученный в работе [5] для неравновесной плазмы; в результате найдем

$$|E_s^t|^2 = \frac{u_T^2}{c^2} \frac{32\pi^2 T}{|\Omega_{k_L^i} - k_L^i u_0 u_T / c|}, \quad (5)$$

где

$$\Omega_{k_L^i}^2 = \Omega^2 + k_L^{i2} u_T^2.$$

В пределе $\Omega_{k_L^i} \sim k_L^i u_0 u_T / c$ имеет место явление аномально большой трансформации продольной волны в поперечную волну, излучаемую в вакуум.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. H. Kritz, D. Mintzger, Phys. Rev., 117, 382 (1960).
2. B. M. Конторович, А. М. Глуцюк, ЖЭТФ, 41, 1196 (1961).
3. D. A. Tidman, Phys. Rev., 117, 366 (1960).
4. S. Ichimaru, D. Pines, N. Rostoker, Phys. Rev. Letters, 8, 231 (1962).
5. Л. С. Богданкович, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1093 (1962).

Поступила в редакцию
26 сентября 1963 г.

О РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ФЛЮКТУАЦИЯХ В ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

И. П. Якименко

Целью настоящей работы является нахождение функций корреляции флюктуационного электрического поля в плазменном волноводе конечного радиуса и дифференциального коэффициента рассеяния электромагнитных волн на флюктуациях плотности заряда. Задача решена для случая симметричных E -волн. Такое выделение определенного класса волн возможно при определении функций корреляции, тогда как при решении более полной задачи (например, о тепловом излучении плазменного цилиндра) необходимо, вообще говоря, рассматривать всю сумму несимметричных волн, на что указано в работе [3]. Ограничиться только симметричной функцией корреляции можно при решении задачи с симметричным возбуждением при малых коэффициентах трансформации в несимметричные типы волн.

1. Соотношения, характеризующие флюктуации и рассеяние электромагнитных волн на флюктуациях (спектральные распределения флюктуирующих величин, дифференциальный коэффициент рассеяния), можно получить, пользуясь общей теорией электромагнитных флюктуаций, развитой в работах Каллена и Велтона [1], Леонтovichа и Рытова [2,3], Ландау и Лифшица [4]. Предполагая, что равновесная свободная плазма с диэлектрической проницаемостью

$$\epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2, \quad (1)$$

где

$$\omega_0^2 = 4\pi n_0 e^2/m \quad (2)$$

(e и m — заряд и масса электрона, n_0 — плотность плазмы), ограничена цилиндрической поверхностью радиуса R , найдем поля в плазме ($\rho < R$) путем решения уравнений Максвелла с учетом спонтанных электрических индукций K [4]:

$$\begin{aligned} E_z(\rho) &= AI_0(\gamma\rho) + \Phi(\rho); \\ E_\rho(\rho) &= -\frac{i\beta}{\gamma} AI_1(\gamma\rho) - \frac{i\beta}{\gamma^2} \frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} + \frac{k^2}{\gamma^2} K_\rho(\rho); \\ H_\varphi(\rho) &= -\frac{ik\epsilon}{\gamma} AI_1(\gamma\rho) - \frac{ik\epsilon}{\gamma^2} \frac{d\Phi(\rho)}{d\rho} + \frac{\beta k}{\gamma^2} K_\rho(\rho), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\rho) &= \int_0^\infty d\rho' \rho' F(\rho') G(\rho - \rho'); \\ F(\rho') &= -\frac{i\beta}{\epsilon} \frac{1}{\rho'} \frac{d}{d\rho'} (\rho' K_\rho) + \frac{\gamma^2}{\epsilon} K_z; \quad \gamma^2 = \beta^2 - k^2 \epsilon; \\ G(\rho - \rho') &= -\int dk k \frac{J_0(k\rho) J_0(k\rho')}{\gamma^2 + k^2} \end{aligned} \quad (4)$$

— функция Грина для рассматриваемой задачи, A — постоянная, подлежащая определению из граничных условий.

При выводе (3) электромагнитное поле было представлено в виде совокупности монохроматических колебаний с частотой ω и продольным волновым числом γ ($E, H \sim e^{-i(\omega t - \beta z)}$) для E -волн (поверхностные H -волны в плазменном стержне, как известно, не существуют). В области, не занятой плазмой, поле имеет обычный вид:

$$E_z(\rho) = \gamma_0^2 E_0 K_0(\gamma_0 \rho), \quad E_\rho(\rho) = i\beta \gamma_0 E_0 K_1(\gamma_0 \rho), \quad H_\varphi(\rho) = ik \gamma_0 E_0 K_1(\gamma_0 \rho) \quad (5)$$

$$(\gamma_0^2 = \beta^2 - k^2, \quad E_0 — постоянная).$$

2. Выражая A и E_0 с помощью граничных условий, состоящих в равенстве тангенциальных составляющих электромагнитного поля на поверхности цилиндра $\rho = R$ в виде линейных функционалов от K и усреднения квадратичные величины при известных функциях корреляции для K [4]:

$$\langle K_i(\rho_1) K_k^*(\rho_2) \rangle_{\omega\beta} = \frac{\hbar}{2\pi^2} \frac{\epsilon''}{\epsilon} \delta_{ik} \frac{\delta(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \quad (6)$$

(⟨ ⟩ означает усреднение по равновесному распределению состояний, \hbar — постоянная Планка, T — температура плазмы), получим функцию корреляции, например, для $E_z(\rho)$:

$$\begin{aligned} \langle E_z(\rho_1) E_z^*(\rho_2) \rangle_{\omega\beta} &= -\frac{\hbar \operatorname{cth}(\hbar\omega/2T)}{2\pi^2 |\epsilon|^2} \left\{ \frac{I_0(\gamma\rho_1) I_0^*(\gamma\rho_2)}{|I_0 \Delta|^2} \left[\frac{K_{10}^2}{K_{00}^2} \operatorname{Im} \gamma^2 \epsilon^* K_0 I_0 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma_0^2 |\epsilon|^2 \operatorname{Im} \epsilon K_1 I_1 - 2\gamma_0 |\epsilon|^2 \frac{K_{10}}{K_{00}} \operatorname{Im} \gamma K_1 I_0 \right] + \operatorname{Im} \gamma^2 \epsilon^* K_0(\gamma\rho_2) I_0(\gamma\rho_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_0(\gamma\rho_1)}{I_0 \Delta} \left[-\frac{K_{10}}{K_{00}} \operatorname{Im} \gamma^2 \epsilon^* K_0 I_0(\gamma\rho_2) + \gamma_0 |\epsilon|^2 \operatorname{Im} \gamma K_1 I_0(\gamma\rho_2) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{I_0^*(\gamma\rho_2)}{I_0^* \Delta^*} \left[-\frac{K_{10}}{K_{00}} \operatorname{Im} \gamma^2 \epsilon^* K_0 I_0(\gamma\rho_1) + \gamma_0 |\epsilon|^2 \operatorname{Im} \gamma K_1 I_0(\gamma\rho_1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\Delta = \frac{K_1(\gamma_0 R)}{K_0(\gamma_0 R)} + \frac{\epsilon \gamma_0}{\gamma} \frac{I_1(\gamma R)}{I_0(\gamma R)}, \quad (8)$$

функции K и I имеют аргумент γR , функции K_{n0} — аргумент $\gamma_0 R$.

Заметим, что равенство $\Delta = 0$ является дисперсионным уравнением для E -волн в плазменном стержне.

При $R \rightarrow \infty$ из (7) имеем (в классическом случае $\hbar\omega \ll T$)

$$\langle E_z(\rho_1) E_z^*(\rho_2) \rangle_{\omega\beta} = - \frac{T}{\pi^2 \omega |\epsilon|^2} \operatorname{Im} \gamma^2 \epsilon^* K_0(\gamma\rho_2) I_0(\gamma\rho_1). \quad (9)$$

Вычисляя аналогичным образом функцию корреляции для $E_\rho(\rho)$, получим для спектральной плотности среднего квадрата флюктуационного электрического поля

$$|E_{z\beta}|_\omega^2 = \frac{4T\epsilon''}{\omega} \frac{|\gamma^2| + 2\beta^2 \chi^2 + |\chi^2 - k^2\epsilon|^2}{|\epsilon|^2 |\gamma^2 + \chi^2|^2} \quad (10)$$

$$(E_x = \int d\rho \rho E(\rho) J_0(\chi\rho)),$$

что легко преобразуется к известной формуле (9) работы [5] (в отсутствие пространственной дисперсии $\epsilon^l = \epsilon^t = \epsilon$ и $k^2 = \chi^2 + \beta^2$).

Существенной особенностью корреляционной функции (7) по сравнению с этой функцией для свободного пространства (9) является наличие слагаемых, принимающих резонансное значение при $\Delta' = 0$, т. е. при частотах и волновых числах, удовлетворяющих дисперсионному уравнению для рассматриваемой системы.

3. При наличии флюктуаций плотность заряда испытывает отклонения от равновесного значения

$$n = n_0 + \delta n, \quad (11)$$

причем

$$\langle \delta n^{(1)} \delta n^{(2)} \rangle_{\omega\beta} = \frac{T\epsilon''}{(4\pi^2 e)^2 \omega |\epsilon|^2} \left\{ \beta^2 \frac{\delta(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{d^2}{d\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{d}{d\rho_1} \right) \delta(\rho_1 - \rho_2) \right\}. \quad (12)$$

В результате этих отклонений возникает добавочный ток

$$j' = e \delta n \mathbf{v}, \quad (13)$$

где \mathbf{v} — скорость электронов, вызванная падающей волной.

Подставляя ток j' в уравнения поля, для продольной компоненты рассеянной волны E'_z придем к уравнению

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dE'_z}{d\rho} \right) - \gamma^2 E'_z = F'(\rho), \quad (14)$$

где

$$F'(\rho) = -4\pi \left\{ \frac{e^2}{m\omega_0} \left(\frac{k_0^2}{\omega_0} - \frac{\beta^2}{\omega\epsilon} \right) E_z \delta n + \frac{i\beta e^2}{m\omega_0\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho E_\rho \delta n) \right\} \quad (15)$$

($\gamma^2 = \beta^2 - k^2\epsilon$, E_z и E_ρ — компоненты поля падающей волны).

Решая (14) с помощью функции Грина, можно определить поле рассеянной волны в плазме. Вычисляя приращение энергии электромагнитного поля рассеянных волн в единицу времени

$$I = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int dr j'^*(r, t) E'(r, t), \quad (16)$$

производя усреднение (16) с помощью (12) и разделив интенсивность рассеяния на плотность потока энергии падающей волны, после преобразований для дифференциального коэффициента рассеяния получим окончательно

$$d \sum = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{e^2}{m\omega_0} \right)^2 \frac{\hbar\epsilon''(\Delta\omega) \operatorname{ctgh}(\hbar\Delta\omega/2T)}{|\epsilon(\Delta\omega)|^2} \left[(\Delta\beta)^2 \varphi(\rho) - \right. \\ \left. - (\gamma_0^2 - \gamma^2) \psi(\rho) \right] \frac{I_0(\gamma_0\rho) J_0(\gamma\rho) + (\beta\theta_0/\gamma\gamma_0) I_1(\gamma_0\rho) I_1(\gamma\rho)}{I_1^2(\gamma_0\rho) I_0(\gamma R)} F(R, \rho) d\omega, \quad (17)$$

где

$$\varphi(\rho) = \left(\frac{k_0^2}{\omega_0} - \frac{\beta^2}{\omega \epsilon} \right) I_0(\gamma_0 \rho) + \frac{\beta \beta_0}{\omega \epsilon} I'_1(\gamma_0 \rho), \quad \psi(\rho) = \frac{\beta \beta_0}{\omega \epsilon \gamma_0} I_1(\gamma_0 \rho), \\ F(R, \rho) = - \frac{K_1}{K_0} G(R - \rho) - \frac{\epsilon \gamma'}{\gamma'^2} \frac{dG(R - \rho)}{dR}, \quad \gamma'^2 = \beta^2 - k^2, \\ \epsilon_0 = \epsilon(\omega_0), \quad \epsilon = \epsilon(\omega)$$
(18)

($\Delta\omega$ и $\Delta\beta$ — изменение частоты и волнового числа при рассеянии волн)

4. Задача для случая магнитоактивной плазмы решается аналогично, но полученные результаты являются чрезвычайно громоздкими. В дальнейшем необходим учет пространственной дисперсии, играющей существенную роль вблизи резонансов в плазме и при рассмотрении вопроса о флюктуациях и рассеянии продольных волн. Этот вопрос особенно интересен, так как при рассеянии продольных волн на флюктуациях происходит их трансформация в поперечные волны, энергия которых отлична от нуля и в области, не занятой плазмой.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. Г. Ситенко за руководство и помощь в работе и Я. Б. Файнбергу за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Callen, T. A. Welton, Phys. Rev., 83, 34 (1951).
2. М. А. Леонович, С. М. Рытов, ЖЭТФ, 23, 246 (1952).
3. С. М. Рытов, Теория электрических флюктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
5. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ, 41, 644 (1961).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
27 мая 1963 г.

О РАССЕЯНИИ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ПОЛНОГО ОТРАЖЕНИЯ

Н. Г. Денисов

В задаче о рассеянии волн на хаотических неоднородностях среды обычно рассматривают тот случай, когда невозмущенное поле представляет собой бегущую волну. Часто, однако, рассеяние волн происходит в условиях полного отражения; при этом возникают стоячие волны, амплитудная и фазовая структура которых существенно отличается от структуры бегущей волны. В работе [1], где рассматривалось рассеяние волн на цилиндрических неоднородностях в линейном слое в условиях полного отражения, было показано, что наличие уровня отражения существенно изменяет характер рассеяния.

Для того, чтобы выяснить, каков характер рассеяния стоячих волн на объемных неоднородностях, целесообразно рассмотреть простейший случай этой задачи: рассеяния плоских волн при нормальном падении на отражающую поверхность, определяющую границу плоского слоя, заполненного случайными неоднородностями.

Пусть отражающая поверхность находится на уровне $z = 0$ и неоднородный слой расположен между плоскостями $z = 0$, $z = L$. Плоская волна частоты ω падает со стороны положительных z . Уравнение для поля рассеяния можно записать в виде

$$\Delta E_1 + k_0^2 E_1 = -k_0^2 \epsilon_1(x, y, z) E_0(z) \quad (k_0 = \omega/c), \quad (2)$$

где ϵ_1 — случайные отклонения диэлектрической проницаемости неоднородного слоя от среднего значения, равного единице.

Разлагая случайные функции $E_1(x, y, z)$ и $\epsilon_1(x, y, z)$ в интеграл Фурье по переменным x , y , легко получить уравнение для спектра рассеянного поля:

$$\frac{d^2 a}{dz^2} + k_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{k_0^2} \right) a = -k_0^2 f(x_1, x_2, z) E_0(z) \quad (x^2 = x_1^2 + x_2^2). \quad (2)$$

Здесь $a(x_1, x_2, z)$ и $f(x_1, x_2, z)$ — спектры поля рассеяния и флюктуаций диэлектрической проницаемости:

$$\frac{a(x_1, x_2, z)}{f(x_1, x_2, z)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(x, y, z) e^{-i(x_1 x + x_2 y)} dx dy. \quad (3)$$

Если выбрать невозмущенное решение $E_0(z)$ в виде стоячей волны, образующейся при полном отражении от поверхности $z = 0$:

$$E_0(z) = 2A_0 \sin(k_0 z) \quad (4)$$

(A_0 — амплитуда падающей волны), то решение уравнения (2), определяющее спектр рассеянной волны, определится формулой

$$a(x_1, x_2, L) = \frac{2k_0 A_0 e^{ik_0 \sqrt{1-x^2/k_0^2} L}}{\sqrt{1-x^2/k_0^2}} \int_0^L f(x_1, x_2, z) \sin(k_0 z) \sin\left(k_0 \sqrt{1-x^2/k_0^2} z\right) dz. \quad (5)$$

Предполагается, что зависимость от времени определяется множителем $e^{i\omega t}$. При наклонном падении в поле (4) появляется множитель $e^{ik_x x}$ и, следовательно, в решении (5) вместо $f(x_1, x_2, z)$ будет стоять $f(x_1 - k_x x, x_2, z)$.

Далее мы ограничимся рассмотрением рассеяния на крупномасштабных неоднородностях, масштаб которых велик по сравнению с длиной волны ($l \gg \lambda$). Представляя произведение синусов в (5) в виде разности

$$\frac{1}{2} \left\{ \cos \left[k_0 z \left(1 - \sqrt{1-x^2/k_0^2} \right) \right] - \cos \left[k_0 z \left(1 + \sqrt{1-x^2/k_0^2} \right) \right] \right\}$$

и учитывая, что спектр рассеяния ограничен малыми углами ($x^2/k_0^2 \ll 1$), мы можем приближенно записать

$$\sqrt{1-x^2/k_0^2} \simeq 1 - x^2/2k_0^2.$$

В таком случае подынтегральное выражение в (4) будет содержать сумму осциллирующих функций. Первая функция будет медленно меняющейся по сравнению с $f(x_1, x_2, z)$, а вторая — быстро осциллирующая с периодом $\lambda \ll l$. С точностью до членов порядка $\lambda/L \ll 1$ можно приближенно записать

$$a(x_1, x_2, L) = \frac{k_0 A_0 e^{ik_0 \sqrt{1-x^2/k_0^2} L}}{\sqrt{1-x^2/k_0^2}} \int_0^L f(x_1, x_2, z) \cos\left(\frac{x^2}{2k_0^2} z\right) dz. \quad (5a)$$

Отсюда легко найти угловой спектр мощности поля рассеяния

$$a_0^2(x_1, x_2, L) = \frac{k_0^2 A_0^2}{1-x^2/k_0^2} \int_0^L \int_0^L \overline{f(x_1, x_2, z_1) f(x_1, x_2, z_2)} \cos\left(\frac{x^2}{2k_0^2} z_1\right) \times \cdot \\ \times \cos\left(\frac{x^2}{2k_0^2} z_2\right) dz_1 dz_2. \quad (6)$$

Для однородного случайного поля $\epsilon_1(x, y, z)$ корреляционная функция спектра $f(z)$ зависит только от разности $z_1 - z_2$. Вычисление интеграла (6) при условии $L \gg l \gg \lambda$ приводит к следующему выражению для углового спектра мощности:

$$a_0^2(x_1, x_2, L) = k_0^2 A_0^2 L \left[1 + \frac{k_0}{x^2 L} \sin \frac{x^2 L}{k_0} \right] \int_0^{\infty} F_{\epsilon}(x_1, x_2, \zeta) d\zeta, \quad (7)$$

где введен спектр корреляционной функции $\epsilon_1(x, y, z)$

$$F_{\epsilon}(x_1, x_2, \zeta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{\epsilon}(\xi, \eta, \zeta) e^{-i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta. \quad (8)$$

Угловой спектр (7) отличается от углового спектра рассеяния бегущей волны в слое двойной толщины [2] фактором $\left(1 + \frac{k_0}{x^2 L} \sin \frac{x^2 L}{k_0}\right)$. Интересно отметить, что для слоя, толщина которого такова, что $L\lambda \ll l^2$ (радиус первой зоны Френеля мал по сравнению с масштабом неоднородностей), спектр рассеяния отличается от спектра для слоя двойной толщины лишь множителем 2. В дальней зоне $\lambda L \gg l^2$, где l — максимальный размер неоднородностей, результат совпадает с угловым спектром для слоя двойной толщины.

Этими замечаниями можно ограничиться, так как формула (7) для углового спектра мощности с точностью до постоянного множителя совпадает со спектром флюктуаций фазы волны, проходящей неоднородный слой. Таким образом, известные результаты исследования корреляционных свойств флюктуаций фазы [3,4] можно использовать в рассмотренной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

- Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 3, 208 (1960).
- Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 3, 393 (1960).
- Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
- В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении радиоволн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 июня 1963 г

О РАССЕЯНИИ СВЕТОВОГО ПУЧКА В СЛОЕ МУТНОЙ СРЕДЫ

Л. С. Долин

Как известно, задача о многократном рассеянии светового пучка в мутной среде в ряде случаев может быть рассмотрена чисто энергетически и приближенно сведена к решению уравнения переноса лучистой энергии [1,2]. Это уравнение вытекает как следствие из условия энергетического баланса, если рассматривать частицы как некогерентные источники и пренебречь дифракционными эффектами. Для неполяризованного монохроматического излучения оно имеет вид

$$\mathbf{n} \nabla_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = -\alpha I(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + \sigma \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \mathbf{m}) G(|\mathbf{n} - \mathbf{m}|) \frac{d\omega_{\mathbf{m}}}{4\pi}, \quad (1)$$

где $I(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ — интенсивность излучения — функция координат точки и направления, определяемого единичным вектором \mathbf{n} , σ и α — показатели рассеяния и полного ослабления, $(\alpha - \sigma)$ — показатель истинного поглощения, $G(|\mathbf{n} - \mathbf{m}|)$ — индикаторисса рассеяния (функция, характеризующая рассеивающие свойства среды), $G(|\mathbf{n} - \mathbf{m}|) \frac{d\omega_{\mathbf{m}}}{4\pi}$

есть вероятность того, что излучение, падающее на элементарный объем по направлению вектора \mathbf{n} , рассеется внутрь телесного угла $d\omega_{\mathbf{m}}$ в направлении вектора

$$\mathbf{m}; \int_{4\pi} G(|\mathbf{n} - \mathbf{m}|) \frac{d\omega_{\mathbf{m}}}{4\pi} = 1.$$

Решению уравнения переноса посвящено большое число работ в астрофизике и геофизике [1,2], а также в близкой по методам нейтронной физике [4]; однако полученные здесь результаты относятся, в основном, к случаю, когда плотность энергии поля зависит лишь от одной пространственной координаты. Исследования же ограниченных световых пучков, проводившиеся, в частности, в связи с проблемой прожекторного зондирования атмосферы [5], выполнены с учетом лишь однократного и двухкратного рассеяния.

В настоящей заметке мы рассмотрим расплывание ограниченного светового пучка в слое мутной среды в предположении, что индикаторисса $G(|\mathbf{n} - \mathbf{m}|)$ сильно вытянута в направлении падающего луча (что соответствует крупным частицам с показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды), а интенсивность излучения $I(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ во всем слое $0 < z < d$ удовлетворяет условию

$$I(r, n)=0 \quad (\text{при } |n_{tr}| > \text{const} \ll 1), \quad (2)$$

где n_{tr} — проекция вектора n на плоскость (x, y) , параллельную границе слоя.

При этих ограничениях интегро-дифференциальное уравнение (1) может быть сведено к дифференциальному уравнению первого порядка и легко решено. В самом деле, в силу (2) мы можем в (1) приближенно считать $n_z \approx 1$, $|n - m| \approx |n_{tr} - m_{tr}| = \gamma$ и заменить пределы интегрирования на бесконечные. В итоге вместо (1) получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + (n_{tr} \nabla_{tr}) \right] I(r, n_{tr}) = -\alpha I(r, n_{tr}) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(r, m_{tr}) G(\gamma) d^2 m_{tr}, \\ d^2 m_{tr} = dm_x dm_y. \quad (3)$$

Введем фурье-трансформанту искомого распределения интенсивности

$$F(k, z, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(r, n_{tr}) e^{i(kr_{tr} + pn_{tr})} d^2 r_{tr} d^2 n_{tr}, \quad (4)$$

где r_{tr} — проекция r на плоскость (x, y) . Фурье-преобразованием по r_{tr} и n_{tr} уравнение (3) сводится к следующему уравнению для функции F :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} - (k \nabla_p) \right] F(k, z, p) = \left[-\alpha + \gamma \frac{Q(p)}{Q(0)} \right] F(k, z, p), \quad (5)$$

где

$$Q(p) = \int_0^{\infty} G(\gamma) J_0(p\gamma) \gamma d\gamma, \quad p = |\mathbf{p}|.$$

Если на входе слоя $F(k, 0, p) = F_0(k, p)$, где F_0 есть фурье-образ исходного распространения интенсивности $I_0(r_{tr}, n_{tr})$, то решение уравнения (5) записывается в виде

$$F(k, z, p) = F_0(k, p + kz) \exp \left[-\alpha z + \frac{\sigma}{Q(0)} \int_0^z Q(|p + k\xi|) d\xi \right], \quad (6)$$

после чего задачу в принципе можно считать решенной, хотя сами по себе характеристики рассеяния могут оказаться достаточно сложными.

Существуют, однако, практические важные интегральные характеристики пучка, которые рассчитываются сравнительно просто. К их числу относится, в частности, эффективное сечение $S(z)$, которое мы определим как отношение полного потока энергии в пучке к плотности потока энергии на его оси. Эффективное сечение нетрудно выразить через $F(k, z, p)$. Действительно, для плотности потока энергии в направлении оси z можно написать

$$H(r) = \int_{4\pi} I(r, n) (n, \hat{z}_0) d\omega_n \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(r, n) d^2 n_{tr} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k, z, 0) e^{-ikr_{tr}} d^2 k;$$

полный поток энергии в этом направлении равен

$$P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} H(r) d^2 r_{tr} = 4\pi^2 F(0, z, 0) = 4\pi^2 F_0(0, 0) e^{-(\alpha - \sigma) z},$$

так что эффективное сечение представляется в виде

$$S(z) = \frac{P(z)}{[H(r)]_{r_{tr}=0}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k, z, 0)}{4\pi^2 F(0, z, 0)} d^2 k \right]^{-1}. \quad (7)$$

Рассмотрим в качестве примера расплывание пучка параллельных (в отсутствие слоя) лучей, интенсивность которых спадает к краю пучка по гауссову закону:

$$I_0(\mathbf{r}_{\text{tr}}, \mathbf{n}_{\text{tr}}) = \delta(n_{\text{tr}}) e^{-r^2/r_0^2}, \quad r = |\mathbf{r}_{\text{tr}}|. \quad (8)$$

Индикаториссу рассеяния среды зададим в виде

$$G(\gamma) = \frac{2}{\delta^2} \exp\left(-\frac{\gamma}{\delta}\right) \quad (\delta \ll 1). \quad (9)$$

Тогда из соотношений (7) — (9) имеем

$$\frac{S(\tau)}{S(0)} = \left[1 - \int_0^\tau \exp[f(t) - f(\tau)] dt \right]^{-1}, \quad (10)$$

где

$$\tau = \alpha z, \quad f(t) = t - C/2t^2, \quad C = \alpha^2 S(0)/2\pi\delta^2, \quad S(0) = \pi r_0^2.$$

Как и следовало ожидать, сечение пучка на заданной глубине определяется только показателем рассеяния α и не зависит от показателя истинного поглощения ($\alpha - \sigma$), тогда как полный поток энергии $P(z)$ зависит лишь от $(\alpha - \sigma)$. Скорость расплывания пучка зависит от единственного параметра C , представляющего собой отношение эффективного сечения пучка на нижней границе слоя (в масштабе $1/\alpha$) к эффективной величине телесного угла, в который рассеивается энергия от одной неоднородности. Как следует из (10), на начальном участке ($\tau \ll \sqrt{C/2}$) сечение пучка изменяется по закону $\frac{S(\tau)}{S(0)} = 1 + \frac{\tau^3}{C}$. Затем начинается

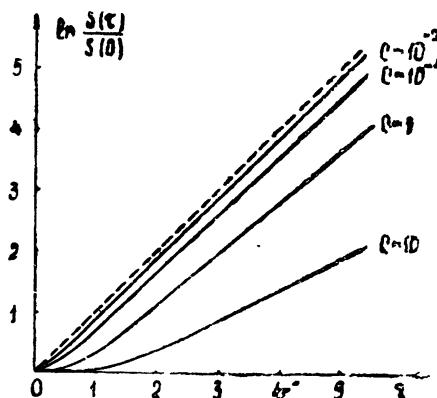


Рис. 1.

экспоненциальный рост $S(\tau)$ (см. рис. 1). Наконец, на больших оптических толщах $\left(\tau^{-3} \exp(0,2 \tau) > \frac{1}{C}\right)$ процесс диффузии замедляется и происходит по тому же закону, что и при малых τ .

Выражаю благодарность М. А. Миллеру и Ю. М. Жидко за полезные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, ГИТТЛ, М., 1956.
2. С. Чандraseкар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
3. Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.
4. Г. И. Марчук, Методы расчета ядерных реакторов, Госатомиздат, М., 1961.
5. Прожекторный луч в атмосфере; под ред. Г. В. Розенберга, изд. АН СССР, М., 1960.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ РАБОТЫ ЦИКЛИЧЕСКОЙ АВТОМАТИКИ

• В. И. Захаров

Циклическая автоматика представляет собой автоколебательную систему с жестким возбуждением. Динамика такой автоматики рассматривалась в [1]. В данной заметке рассматривается вопрос определения вероятности безотказной работы автоматики, основное звено которой совершает возвратно-поступательное движение между двумя неподвижными упорами, отстоящими друг от друга на расстоянии x_0 .

Движение основного звена автоматики от левого упора до правого и обратно составляет цикл работы автоматики. В начале каждого цикла вслед за ударом о левый упор основное звено в результате действия мгновенного импульса получает случайное по величине приращение скорости v_{0j} (j —номер цикла).

При рассмотрении вопроса определения вероятности безотказной работы автоматики применим метод припасовывания и точечных преобразований. При этом предположим, что

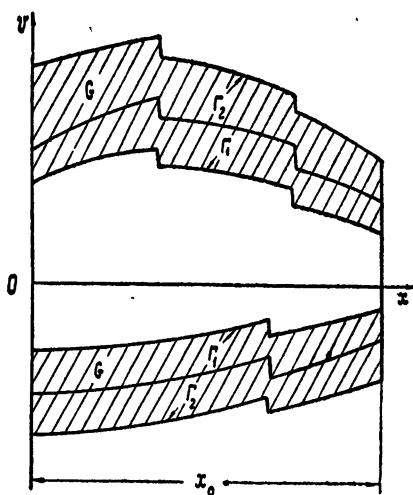
а) автоматика представляет собой кусочно-линейную систему с одной степенью свободы;

б) фазовое пространство рассматриваемой системы, представляющее собой часть плоскости x, v (рис. 1), состоит из r областей;

в) движение изображающей точки через границу двух смежных областей фазовой плоскости происходит со случайными по величине скачками (мгновенные изменения величины скорости при у daraх);

г) каждая траектория из всего множества (речь идет о траекториях точек, отображающих состояние всего множества однотипных автоматик) может пересекать границу Γ_1 или Γ_2 (рис. 1) не более одного раза;

д) статистика параметров автоматики и v_{0j} не зависит от скорости основного звена автоматики.



[Рис. 1.]

Уравнение движения основного звена автоматики для каждой v -ой области любого j -го цикла имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_{v,j} x = P_{v,j} \quad (v=1, 2, \dots, r; \quad j=1, 2, \dots), \quad (1)$$

где $\omega_{v,j}$, $P_{v,j}$ — независимые случайные величины, законы распределения которых известны. Решая (1), получаем

$$\begin{aligned} v_{v,j} = \pm \sqrt{v_{vh,j}^2 + 2P_{v,j}(x - x_{v-1}) - \omega_{v,j}(x^2 - x_{v-1}^2)} \\ (x_{v-1} \leq x \leq x_v), \end{aligned} \quad (2)$$

где «н» означает начало области, x_{v-1} и x_v — соответственно координата для начала и конца v -ой области фазовой плоскости, знак «минус» относится к движению звена справа налево (рис. 1).

При переходе изображающей точки через границу смежных областей справедливо уравнение

$$v_{(v+1)Hj} = k_{vj} v_{vkj}, \quad (3)$$

а слева ($x = 0$) при переходе из нижней полуплоскости в верхнюю — уравнение

$$v_{1H(j+1)} = k_{rj} v_{rkj} + v_{0(j+1)}. \quad (4)$$

Здесь «к» означает конец области; коэффициенты k_{vj} при у daraх об упоры условно приняты отрицательными.

Автоматика работает безотказно, если изображающая точка находится в области G (рис. 1). Момент перехода изображающей точкой границы Γ_1 или Γ_2 (рис. 1) соответствует моменту появления отказа. Граница Γ_1 находится из условий возбуждения колебаний и других физических соображений, граница Γ_2 — из физических свойств деталей автоматики и транспортируемых изделий. Эти границы составлены из участков фазовых траекторий.

За характеристику надежности работы автоматики, эксплуатируемой в фиксированных внешних условиях, принимаем относительный путь* $N = S/2x_0$, отсчитываемый от момента начала эксплуатации автоматики до момента появления отказа. Путь N — случайная величина, и наша задача сводится к определению $P(n) = P(n < N)$, где $P(n < N)$ — вероятность того, что $n < N$.

Предположение г) позволяет нам $P(n)$ определять в дискретных точках n^* , как вероятность того, что каждая случайная величина системы $v_{1H1}, v_{1k1}, \dots, v_{qk\theta}$ ($1 \leq q \leq r$ (θ — номер цикла, для которого определяется $P(n)$)) будет находиться в заданных пределах:

$$P(n^*) = \int dv_{1H1} \int dv_{1k1} \dots \int f(v_{1H1}, v_{1k1}, \dots, v_{qk\theta}) dv_{qk\theta},$$

где

$$f(v_{1H1}, v_{1k1}, \dots, v_{qk\theta}) = f_{1H1}(v_{1H1}) f_{1k1}\left(\frac{v_{1k1}}{v_{1H1}}\right) f_{2H1} \times \\ \times \left(\frac{v_{2H1}}{v_{1H1} v_{1k1}}\right) \dots f_{qk\theta}\left(\frac{v_{qk\theta}}{v_{1H1} \dots v_{qk\theta}}\right),$$

$f_{1H1}(v_{1H1})$ — безусловный закон распределения, $f_{1k1}, \dots, f_{qk\theta}$ — условные законы распределения.

Представим

$$v_{vh} = \bar{v}_{vh} + \Delta v_{vh}; \quad v_{vk} = \bar{v}_{vk} + \Delta v_{vk};$$

$$P_v = \bar{P}_v + \Delta P_v; \quad \omega_v = \bar{\omega}_v + \Delta \omega_v; \quad k_v = \bar{k}_v + \Delta k_v; \quad v_0 = \bar{v}_0 + \Delta v_0,$$

где чертой сверху обозначены математические ожидания; индекс « j » опущен для краткости. Линеаризуем правые части (2), (3) и (4) относительно отклонений $\Delta v_{vh}, \Delta p_v, \dots, \Delta v_0$, полагая, что эта операция не внесет большой ошибки в определение $P(n^*)$. После линеаризации получаем

$$\Delta v_{vk} = \bar{l}_v \Delta v_{vh} + B_{vh}; \quad (5)$$

$$\Delta v_{vh} = k_{(v-1)} \Delta v_{(v-1)k} + B_{(v-1)k}, \quad (6)$$

где

$$\bar{l}_v = v_{vh}/v_{vk};$$

$$B_{vh} = \frac{(x_v - x_{v-1}) \Delta P_v}{\bar{v}_{vk}} - \frac{(x_v^2 - x_{v-1}^2) \Delta \omega_v}{2\bar{v}_{vk}};$$

* Обычно за характеристику надежности принимается время исправной работы [2,3].

$$B_{vk} = \bar{v}_{vk} \Delta k_v \quad (\nu \text{ не кратное } r);$$

$$B_{1kj} = \bar{v}_{r(k-1)} \Delta k_{r(j-1)} + \Delta v_0.$$

Решая (5) и (6), получаем

$$\Delta v_{mh} = \prod_{\nu=p}^{m-1} \bar{k}_\nu \bar{l}_\nu \left(\Delta v_{ph} + \sum_{\nu=p}^{m-1} \frac{\bar{k}_\nu B_{vh} + B_{vk}}{\prod_{\lambda=p}^{\nu} \bar{k}_\lambda \bar{l}_\lambda} \right) \quad (7)$$

$$(m=1, 2, \dots; \quad p < m);$$

$$\Delta v_{mk} = \bar{l}_m \prod_{\nu=p}^{m-1} \bar{k}_\nu \bar{l}_\nu \left((\Delta v_{ph} + \sum_{\nu=p}^{m-1} \frac{\bar{k}_\nu B_{vh} + B_{vk}}{\prod_{\lambda=p}^{\nu} \bar{k}_\lambda \bar{l}_\lambda}) + B_{mh} \right) \quad (8)$$

$$(m=1, 2, \dots; \quad p < m),$$

где ν распространяется на любое число циклов.

Уравнения (7) и (8) позволяют (учитывая предположение д) легко определить безусловные (вида $f_{1nh}(v_{1nh})$) и условные (вида $f_{1k1}(v_{1k1}/v_{1nh})$) законы распределения. Для определения условных законов вида $f_{qk\theta}$ сложим соответственно левые и правые части (5) и (6):

$$\Delta v_{mh} = \bar{l}_p \Delta v_{ph} + \sum_{\nu=p+1}^{m-1} (l_\nu - 1) \Delta v_{vh} + \sum_{\nu=p}^{m-1} (\bar{k}_\nu - 1) \Delta v_{vk} + \sum_{\nu=p}^{m-1} (B_{vk} + B_{vh}) \quad (9)$$

$$(m=1, 2, \dots; \quad p < m);$$

$$\Delta v_{mk} = \bar{l}_p \Delta v_{ph} + \sum_{\nu=p+1}^m (\bar{l}_\nu - 1) \Delta v_{vh} + \sum_{\nu=p}^{m-1} (\bar{k}_\nu - 1) \Delta v_{vk} +$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{m-1} (B_{vk} + B_{vh}) + B_{vh}$$

$$(m=1, 2, \dots; \quad p < m),$$

где ν распространяется на любое число циклов; в правых частях все отклонения скорости условно принимаются не случайными величинами. Полученные уравнения (7)–(10) позволяют определить многомерный закон распределения $f(v_{1nh}, v_{1k1}, \dots, v_{qk\theta})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Подчуфаров, Изв. высш. уч. зав — Машиностроение, 8, 42 (1962).
2. И. М. Маликов, А. М. Полевко, Н. А. Романов, П. А. Чукреев, Основы теории и расчета надежности, Судпромгиз, Л., 1960.
3. Я. Б. Шор, Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, изд. Сов. радио, М., 1962.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В работе [1] рассматривалась трехуровневая система, на которую действует сильное поле частоты $\Omega_{31} \approx \omega_{31}$ (ω_{31} — разность термов 3 и 1) и которая помещена в резонатор, имеющий собственные частоты ω_{21} и ω_{32} . В такой системе, как показано в работе [1], происходит преобразование одного из полей ($\Omega_{21} \approx \omega_{21}$) в другое ($\Omega_{32} \approx \omega_{32}$) с одновременным усилением в результате мазерного эффекта.

Очевидно, что в такой системе должен быть эффект параметрической регенерации на частотах Ω_{32} и Ω_{21} ($\Omega_{31} = \Omega_{32} + \Omega_{21}$). Однако при определении знаков эффективных разностей населенностей D_e в работе [1] была допущена ошибка. Последнюю строкочку таблицы 1 следует читать так:

$$\frac{\gamma_{13}^2 \ll (\tau_2 \tau_1)^{-1}}{\tilde{D}_e} \left| \begin{array}{c} (\tau_2 \tau_1)^{-1} \ll \gamma_{13}^2 \ll \tau_2^{-2} \\ -\frac{1}{2} (2D_{12}^0 - D_{13}^0) \end{array} \right| \frac{\gamma_{13}^2 \gg \tau_2^{-2}}{-2 (2D_{12}^0 - D_{13}^0) / \gamma_{13}^2 \tau_2^2} .$$

Это приводит к тому, что коэффициенты β и $\tilde{\beta}$ при насыщающем поле имеют одинаковый знак и формулы (39) и (39a) приобретают вид

$$Q_{S21}^{-1} = Q_{21}^{-1} - \frac{(2\xi_{21}\xi_{32}\gamma_{13}V_0\hbar^{-1})^2}{\omega_{32}^2 \omega_{21}^2 Q_{32}^{-1}} \beta \tilde{\beta} ; \quad (39)$$

$$Q_{S32}^{-1} = Q_{32}^{-1} - \frac{(2\xi_{21}\xi_{32}\gamma_{13}V_0\hbar^{-1})^2}{\omega_{32}^2 \omega_{21}^2 Q_{21}^{-1}} \beta \tilde{\beta} . \quad (39a)$$

Из исправленных формул (39) и (39a) следует, что на частотах Ω_{32} и Ω_{21} , как и должно быть, возникает параметрическая регенерация.

Воспользуемся случаем отметить, что в формулы (25), (25б) и (25в) вкрайлись опечатки. В первых членах правых частей (25), (25б) и (25в) необходимо знаки заменить на обратные.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Э. Г. Яшин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 697 (1962).

В. М. Файн,
Я. И. Ханин,
Э. Г. Яшин

Поступило в редакцию
30 декабря 1963 г.