ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
30	3 снизу	$T_{вх}=T_{эфф}$ ...	$T_{вх}\simeq T_{эфф}$ ..
46	5 снизу	$T_e=\alpha$ ...	$\overline{T}_e - \alpha$ . .
60	4 сверху	... $\frac{\partial E}{\partial V}-\frac{e}{Mc}$ . .	... $\frac{\partial F}{\partial V}=\frac{e}{Mc}$ . .
76	11 сверху	$H_{\parallel}=\beta_{\parallel}c$	$V_{\parallel}=\beta_{\parallel}c$
77	10 сверху	... $=\beta_T^2$...	... β_T^2 .
78	14 снизу	B_s	B_{js}
84	13 снизу	.. $\left(1-\frac{a^2}{2\mu}\operatorname{tg}\theta\right)+$.	.. $\left(1-\frac{a^2}{2\mu}\right)\operatorname{tg}\theta+$
88	12 сверху	$G=$ .. $\{J_{-1/4}$ ..	$G=$... $\{I_{-1/4}$
97	11 сверху	$\Delta\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}'$; ...	$\Delta\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$; ...
103	17 сверху	$f(\alpha)=$ .. $(\zeta_0)P_2$ . .	$f(\alpha)=$... $(\dot{\zeta}_0)P_2$.
104	14 сверху	$P_2(\alpha\mid\zeta,\dot{\zeta})$	$P_1(\alpha\mid\zeta,\dot{\zeta})$
108	1 снизу	... $\int\limits_a^b$ . . $\int\limits_\infty^\infty$ ...	... $\int\limits_{-a}^{b}$ ... $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ ...
111	16 сверху	...$+t(\alpha,\beta)$ ...	... $f(\alpha,\beta)$ ...
114	7 снизу	$d\boldsymbol{w}=$...$(1/\boldsymbol{k})$...	$d\boldsymbol{w}=$ . . $(1/k)$ ..
119	3 сверху	... $\varphi_k(r')$ ..=	...$\varphi_k=(r')=$
	6 сверху	$G^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=$..	$G^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=$.
120	14 сверху	... $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=$. .	. $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=$...
122	2 снизу	...$(\omega,\boldsymbol{r})E_s$. .	... $(\omega,\boldsymbol{r})E_s$..
150	4 снизу	... $\overline{r}$...	... $\dot{\overline{r}}$ ...
171	16 снизу	$\varphi(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{e}_t)$,	$\varphi(\boldsymbol{a}\wedge\overline{\boldsymbol{e}}_t)$,
172	7 сверху	$\varphi(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{e}_t)\neq$...	$\varphi(\boldsymbol{a}\wedge\overline{\boldsymbol{e}}_t)\neq$
182	9 и 10 сверху	$(2p)^2$	$(2p)^3$

СОДЕРЖАНИЕ

Карлов Н. В., Маненков А. А. Квантовые парамагнитные усилители (Обзор) . 5
Кисляков А. Г., Плечков В. М. Прецизионное измерение радиоизлучения Луны и Солнца в 4-х миллиметровом диапазоне волн 46
Саломонович А. Е. К вопросу об обнаружении воды в атмосфере Венеры . . 51
Бирагов С. Б. О комплексной диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы на низких частотах 59
Железняков В. В. О гирорезонансном излучении и поглощении в равновесной магнитоактивной плазме 67
Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. О прохождении ионных потоков через плазму 83
Данелия И. А., Цинцадзе Н. Л. К теории взаимодействия волн в плазме . . 94
Басс Ф. Г., Фукс И. М. Об учете затенений при рассеянии волн на статистически неровной поверхности 101
Луговой В. Н. О флюктуациях в периодически нестационарных системах 113
Кондратьев И. Г., Миллер М. А. Двухмерные электромагнитные поля, направляемые плазменными слоями. I 124
Дудник Р. А. К теории лампы с поперечным взаимодействием типа «М» . . 135
Нечаев В. Е. К анализу процессов в многорезонаторном магнетроне . . 146
Песков Р. А. Приближенное определение периодических движений в системе фазовой автоподстройки частоты . 160
Закревский А. Д. О сокращении переборов при решении некоторых задач синтеза дискретных автоматов 166

Краткие сообщения и письма в редакцию

Кузовлев В. В., Станкевич К. С. Об эффективной высоте поглощения радиоволн сантиметрового диапазона в атмосферном кислороде и водяном паре . 175
Кондратьев И. Г., Миллер М. А. О структуре поля внутри плазменного слоя с нулевой проницаемостью 176
Левин М. Л. Об излучении продольных волн в средах со слабой пространственной дисперсией 180
Конторович В. М., Черняк Г. Е. О силе линии при магнитодипольном переходе в сверхтонкой структуре атома 181
Золин В. Ф. К вопросу о защитных покрытиях ячеек с парами щелочных элементов 183
Письмо в редакцию 183

Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т III, № 5, 1963 184

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

КВАНТОВЫЕ ПАРАМАГНИТНЫЕ УСИЛИТЕЛИ

И. В. Карлов, А. А. Маненков

(Обзор)

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, чувствительность разного рода радиоприемных систем, в которых используются обычные электронные усилители, ограничивается внутренними шумами таких усилителей. Эти шумы, связанные с флюктуациями движения электронов в элементах усилителей (электронных лампах, полупроводниках), обычно для усилителей дециметрового и сантиметрового диапазонов эквивалентны шумовой температуре около 3000°К. Если сравнить эти шумы с внешними шумами (фон космического радиоизлучения, шумы атмосферы и тепловое излучение земли), температуры которых в этом диапазоне частот не превышают 100°К, а на более коротких волнах не провосходят 10 ÷ 20°К, то становится ясным, что имеется значительный резерв повышения чувствительности приемных систем, реализация которого позволила бы резко увеличить дальность наземной и космической радиосвязи и увеличить чувствительность радиоастрономических станций.

В последние годы в ряде стран были предприняты интенсивные работы по созданию малошумящих усилителей для дециметрового и сантиметрового диапазонов. В этом направлении были достигнуты определенные успехи благодаря созданию параметрических усилителей на полупроводниковых диодах и электронных пучках. Однако радикальное решение проблемы малошумящих усилителей было найдено на пути применения принципиально нового метода усиления электромагнитных колебаний — квантового метода, основанного на использовании свойств индуцированного излучения атомных систем.

Такие квантовые усилители в радиодиапазоне имеют чрезвычайно низкий уровень собственных шумов, температура которых не превышает обычно нескольких градусов Кельвина. Эти усилители нашли в последние годы практическое применение в различных радиоприемных системах. Работы по созданию квантовых усилителей были начаты несколько лет назад вслед за созданием квантовых молекулярных стандартов частоты и малошумящих усилителей в радиодиапазоне, к созданию вой электроники. Бурное развитие квантовой электроники в самое последнее время привело, кроме разработки сверхточных стандартов частоты и малошумящих усилителей в радиодиапазоне, к созданию квантовых оптических генераторов, обладающих весьма привлекательными свойствами направленного когерентного излучения с высокой спектральной плотностью.

Настоящая статья посвящена обзору отечественных и иностранных работ по квантовым усилителям радиодиапазона. Поскольку в последние годы появилось несколько обзорных работ, касающихся этого вопроса [1–4], мы стремились наряду с изложением общих принципов работы и устройства квантовых усилителей отразить самые последние достижения в этой области, обращая более пристальное внимание на техническую сторону вопроса.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

В основе работы квантовых усилителей лежит способность возбужденных атомов вещества отдавать энергию внешнему электромагнитному полю. Эта отдача энергии атомной системой происходит в результате индуцированных внешним полем квантовых переходов атомов из возбужденного состояния, обладающего большей энергией, в состояние с меньшей энергией. Непрерывность процесса усиления достигается путем постоянного возвращения «отработавших» атомов (т. е отдавших энергию внешнему полю) снова в возбужденное состояние.

Квантовое усиление электромагнитных колебаний может быть получено в различных атомных и молекулярных системах; однако практическое применение в качестве активных веществ для квантовых усилителей радиодиапазона получили кристаллы, содержащие примесные парамагнитные ионы. Парамагнитные ионы в кристаллах обладают подходящей системой уровней энергии. Эти уровни, связанные со спиновыми магнитными моментами незаполненных электронных оболочек атомов, легко могут перестраиваться внешним постоянным магнитным полем. Поэтому можно создать перестраиваемые квантовые усилители в различных диапазонах частот (в дециметровом, сантиметровом и миллиметровом диапазонах). Кроме того, спектральные линии парамагнитного резонанса, соответствующие переходам между этими уровнями энергии, обладают значительной шириной (обычно порядка нескольких десятков мегагерц), что позволяет создать достаточно широкополосные усилители. В квантовой системе (атомы, молекулы, ионы), обладающей дискретными энергетическими уровнями, могут происходить переходы трех типов: индуцированные внешним электромагнитным полем, спонтанные переходы и безызлучательные релаксационные переходы.

При *индуцированных переходах* система может переводиться из одного энергетического состояния в другое как с поглощением энергии внешнего электромагнитного поля, что соответствует переходу с нижнего энергетического уровня на верхний, так и с излучением электромагнитной энергии, что соответствует переходу с верхнего уровня на нижний. Эти индуцированные переходы обладают следующими характерными свойствами. Во-первых, вероятность индуцированных переходов, которой пропорциональна энергия поглощения или излучения, отлична от нуля лишь на резонансных частотах внешнего поля, т. е. когда разность энергий двух состояний (или уровней) совпадает с энергией кванта электромагнитного поля $h\nu$ (h — постоянная Планка, ν — частота поля). Следует отметить, что, поскольку уровни энергии имеют конечную ширину, обусловленную различными внутренними взаимодействиями атомов друг с другом или с окружающими атомами другого типа, поглощение или излучение энергии происходит в некоторой конечной полосе частот.

Во-вторых, кванты электромагнитного поля, излученные при индуцированных переходах, тождественны с первичными квантами поля, вызвавшего эти переходы. Это означает, что внешнее электромагнитное поле и поле, созданное при индуцированных переходах атомов, имеют одинаковую частоту, фазу колебаний и направление распространения. Отметим здесь, что это свойство индуцированного излучения чрезвычайно важно в квантовых усилителях, так как оно определяет весьма ценное их свойство — когерентность усиления и связанную с ней фазовую стабильность таких усилителей.

Мощность, излучаемая атомами при индуцированных переходах, равна

$$P_{\text{инд}} = (n_i - n_j)h\nu W_{ij}, \tag{1}$$

где $h\nu = E_i - E_j$, n_i и n_j — числа атомов в двух энергетических состоя-

ниях E_i и E_j, между которыми происходит рассматриваемый переход, так что разность $n_i - n_j$ есть избыток атомов в верхнем состоянии (этот избыток обычно называют числом активных атомов), W_{ij} — вероятность индуцированных переходов (отметим, что $W_{ij} = W_{ji}$, т. е. вероятности индуцированного излучения и поглощения равны).

Эта формула позволяет оценить мощность, которая может быть получена от активных атомов, совершающих индуцированные переходы. Для этой оценки необходимо знать число активных атомов и вероятность перехода W_{ij}. Указанные величины существенно зависят от характеристик атомной системы. Так, для магнитных дипольных переходов

$$W_{ij} = \frac{8\pi^3}{h^2} \rho |\mu_{ij}|^2 g(\nu), \tag{2}$$

где $\rho = H_1^2/8\pi$ — плотность энергии высокочастотного магнитного поля H_1, вызывающего переход, μ_{ij} — матричный элемент перехода, $g(\nu)$ — форма линии.

Спонтанное излучение. Атомы, находящиеся в возбужденном состоянии, могут совершать спонтанные переходы в нижнее энергетическое состояние. Вероятность таких переходов не зависит от внешнего электромагнитного поля; поэтому спонтанное излучение некогерентно по отношению к внешнему полю и в квантовых усилителях играет роль внутренних шумов. Вероятность спонтанных переходов может быть определена известным коэффициентом Эйнштейна A_ν для спонтанного излучения. Для одного возбужденного атома коэффициент спонтанного излучения в свободное пространство

$$A_\nu = N_\nu h\nu \frac{8\pi^3 |\mu_{ij}|^2}{3h^2}, \tag{3}$$

где $N_\nu = 8\pi\nu^2/c^3$ — число осцилляторов (типов колебаний) в единице объема, приходящихся на единичный интервал частоты.

В приложении к квантовым усилителям формула для вероятности спонтанного излучения должна быть изменена с учетом того, что излучение происходит в конечном объеме, ограниченном стенками резонатора или волноводной системы; в таком объеме может возбуждаться лишь небольшое число типов колебаний. Формула для вероятности спонтанного излучения в случае резонатора получена, например, Парселом [5]. Кроме того, существенными в квантовых усилителях и генераторах оказываются эффекты когерентности спонтанного излучения многих возбужденных атомов, рассмотренные Диком [6]. Оба этих фактора (влияние резонатора и когерентности) могут увеличить скорость спонтанных переходов; однако оценки показывают, что в радиодиапазоне мощность спонтанного излучения остается очень малой и приводит к внутренним шумам квантовых усилителей, эффективная температура которых не превышает нескольких градусов Кельвина.

Безызлучательные релаксационные переходы. Релаксационные переходы атомов с одного уровня на другой связаны с взаимодействием атомов друг с другом и с окружением. В квантовых парамагнитных усилителях релаксационные переходы между уровнями парамагнитных ионов обусловлены взаимодействием их с тепловыми колебаниями решетки (спин-решеточные взаимодействия) и между собой (спин-спиновые взаимодействия).

Вероятности релаксационных переходов зависят от механизма спин-решеточного взаимодействия, спектра фононов, возбуждаемых в кристалле, а также от скорости распространения упругих волн в кристалле и его плотности.

В этом обзоре мы не имеем возможности останавливаться на анализе этих факторов. Мы приведем лишь некоторые общие соотношения и закономерности, характеризующие вероятности релаксационных переходов и существенные для описания процессов в квантовых парамагнитных усилителях. Для более детального и глубокого ознакомления с вопросами спин-решеточной релаксации мы отсылаем читателя к работе [7].

Вероятности переходов между какими-либо двумя уровнями энергии спин-системы E_i и E_j под действием колебаний решетки удовлетворяют соотношению

$$w_{ji} = w_{ij} \exp\left(-\frac{E_i - E_j}{kT}\right). \tag{4}$$

Это соотношение вытекает из условия статистического равновесия $n_i w_{ij} = n_j w_{ji}$ при больцмановском распределении частиц по уровням:

$$n_i = n_j \exp\left(-\frac{E_i - E_j}{kT}\right). \tag{5}$$

Здесь n_i и n_j — населенности уровней i и j, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура решетки. Далее, для прямых процессов и процессов комбинационного рассеяния фононов соответственно имеем

$$(w_{ji})_{\text{пр}} = \frac{4\pi^2}{h^2} \rho_\nu |\tilde{H}_{ji}|^2, \qquad E_i - E_j = h\nu; \tag{6}$$

$$(w_{ji})_{\text{комб}} = \frac{4\pi^2}{h^2} \int_0^{\nu_d} |\tilde{H}_{ji}|^2 \rho_{\nu_k} \rho_{\nu_e} d\nu_e, \qquad E_i - E_j = h\nu_k - h\nu_e, \tag{7}$$

где ρ_ν, ρ_{ν_k}, ρ_{ν_e} — спектральные плотности фононов на соответствующих частотах, ν_d — дебаевская частота фононного спектра, $|\tilde{H}_{ji}|$ — матричный элемент оператора спин-решеточного взаимодействия. Для равновесного распределения фононов

$$\rho_\nu = \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \tag{8}$$

Расчеты по формулам (6) и (7) дают (см., например, [7])

$$(w_{ji})_{\text{прям}} \sim T \qquad \text{при } h\nu \ll kT, \tag{9}$$

$$(w_{ji})_{\text{комб}} \sim T^2 \qquad \text{при } h\nu_d \ll kT, \tag{10}$$

$$(w_{ji})_{\text{комб}} \sim T^{\alpha+1} \qquad \text{при } h\nu_d \gg kT \tag{11}$$

(α обычно равно 6 или 8).

Прямые процессы играют главную роль при низких температурах (обычно ниже нескольких десятков градусов Кельвина). Процессы комбинационного рассеяния в силу того, что в них, как это следует из формулы (7), участвуют фононы всех частот спектра колебаний решетки, при более высоких температурах начинают играть доминирующую роль, хотя они и являются процессами второго порядка.

Рассмотрим теперь взаимодействия парамагнитных ионов между собой, спин-спиновые взаимодействия. Они включают магнитные дипольные и обменные взаимодействия. Спин-спиновые взаимодействия играют двоякую роль в парамагнитном резонансе и квантовых усилителях. Во-первых, они определяют ширину линий электронного парамагнитного

резонанса (ЭПР), а во-вторых, — скорость установления равновесия между различными энергетическими уровнями спин-системы.

Если имеется система с многими уровнями энергии, то переходы спинов между какой-либо парой уровней вследствие дипольных спин-спиновых взаимодействий будут сопровождаться обратными переходами между другими уровнями, так что энергия спин-системы в целом сохраняется.

Передачу энергии между различными уровнями в спин-системе называют процессами кросс-релаксации. Эти процессы впервые были теоретически проанализированы Бломбергеном [9].

Вероятности кросс-релаксационных переходов существенно зависят от концентрации парамагнитных ионов (которая определяет степень магнитных дипольных взаимодействий), от взаимных расстояний между энергетическими уровнями и ширины линий соответствующих переходов. Так, для двух пар уровней α и β, для которых частоты переходов близки ($\nu_\alpha \simeq \nu_\beta$), для вероятности кросс-релаксации можно приближенно записать [9]

$$(w_{ij})_{\text{кросс}} = (2\pi)^{-1/2} h^{-2} |\tilde{H}_{ij}|^2 \left[(\Delta\nu_\alpha)^2 + (\Delta\nu_\beta)^2\right]^{-2} \times \times \exp\left\{-\frac{\nu_\alpha - \nu_\beta}{2[(\Delta\nu_\alpha)^2 + (\Delta\nu_\beta)^2]}\right\}, \tag{12}$$

где $\tilde{H}_{ij}$ — матричный элемент оператора дипольного взаимодействия между ионами i и j, $(\Delta\nu_\alpha)^2$ и $(\Delta\nu_\beta)^2$ — вторые моменты линий поглощения, $(w_{ij})_{\text{кросс}}$ есть вероятность того, что под влиянием дипольных взаимодействий ион i поглощает энергию $h\nu_\alpha$, а ион j теряет энергию $h\nu_\beta$. Формула (12) получена в предположении, что линии имеют гауссову форму.

Примеры такого рода кросс-релаксационных переходов изображены на рис. 1. Кроме таких кросс-релаксационных переходов между уровнями с близкими расщеплениями, эффективными могут быть также переходы между уровнями с кратными частотами (рис. 2). В процессах кросс-релаксации такого рода переход n ионов с уровня 2 на уровень 1 сопровождается одновременным переходом m ионов с уровня 3 на уровень 4 (на рис. 2 $n = 1$, $m = 2$). При этом имеет место следующее соотношение между расщеплениями уровней:

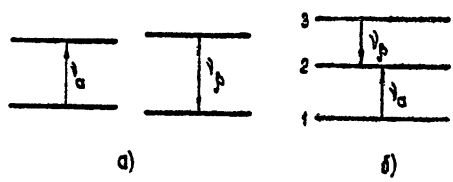


Рис 1 Примеры кросс-релаксационных переходов в системе двух пар уровней с близкими расщеплениями.

$$n(E_2 - E_1) = m(E_4 - E_3). \tag{13}$$

Возможны также и более сложные кросс-релаксационные процессы «комбинационного» типа. Пример таких процессов приведен на рис. 3. В этой схеме энергии уровней таковы, что $2(E_4 - E_2) = 2(E_2 - E_1) + (E_4 - E_3)$ и осуществляются следующие кросс-релаксационные переходы: два спина совершают переход с уровня 1 на уровень 2, два спина — переход с уровня 4 на уровень 2, а один спин переходит с уровня 3 на уровень 4, так что в целом энергия спин-системы сохраняется.

Таким образом, из приведенного краткого описания процессов в квантовых системах следует, что парамагнитные ионы в кристаллах могут совершать переходы с одного уровня на другой под действием электромагнитного поля, спин-решеточных и спин-спиновых кросс-релак-

сационных взаимодействий, а также спонтанно переходить с возбужденных верхних уровней на нижние. Спонтанными переходами, как мы отмечали выше, в радиодиапазоне можно пренебречь при рассмотрении изменения населенностей уровней.

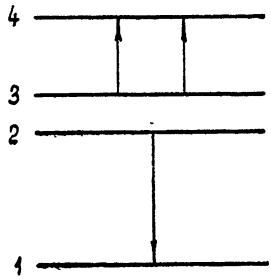


Рис. 2.

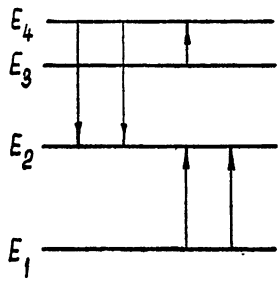


Рис. 3.

Рис. 2. Кросс-релаксационные переходы в системе уровней с двухкратным расщеплением.

Рис. 3. Переходы при кросс-релаксационных процессах „комбинационного" типа.

Рассмотрим сначала систему спинов, обладающую двумя уровнями энергии E_1 и E_2 ($E_2 > E_1$). Изменение населенностей уровней n_1 и n_2 со временем описывается кинетическим уравнением

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 w_{12} + n_2 w_{21} - (n_1 - n_2) W_{12} \tag{14}$$

при условии сохранения числа частиц

$$n_1 + n_2 = N.$$

Здесь w_{12} и w_{21} — вероятности переходов, вызываемых спин-решеточным взаимодействием, $W_{12} = W_{21}$ — вероятность переходов, индуцированных внешним электромагнитным полем резонансной частоты.

Уравнение (14) описывает скорость восстановления равновесного распределения частиц по уровням энергии. Его решение имеет вид

$$\Delta n_{12}(t) - \Delta n_{12}^0 = \left[\Delta n_{12}(t=0) - \Delta n_{12}^0\right] \exp\left(-\frac{t}{T_1'}\right), \tag{15}$$

где $\Delta n_{12}^0 = (n_1 - n_2)_0$ — равновесная разность населенностей, $\Delta n_{12}(t=0)$ — разность населенностей, определяемая начальными условиями, а время

$$T_1' = \frac{1}{w_{12} + w_{21} + 2W_{12}} \tag{16}$$

при $W_{12} = 0$ равно времени спин-решеточной релаксации T_1. При $W_{12} \neq 0$ спиновая система приходит в равновесие за время $T_1' < T_1$; однако достигаемое при этом стационарное состояние не соответствует больцмановскому распределению. В этом случае стационарная разность населенностей

$$(\Delta n_{12})_{\text{стац}} = \frac{\Delta n_{12}^0}{1 + 2T_1 W_{12}}. \tag{17}$$

Отсюда следует, что если вероятности индуцированных и спин-решеточных переходов сравнимы ($W_{12} \sim w_{12}, w_{21}$), то наступает эффект насыще-

ния и при $W_{12} \to \infty$ $(\Delta n_{12})_{стац} \to 0$. Этот эффект играет весьма важную роль в квантовых усилителях.

В силу больцмановского распределения частиц по уровням в условиях теплового равновесия $\Delta n^0_{12} > 0$. Поэтому рассматриваемая система спинов поглощает энергию внешнего электромагнитного поля. Поглощаемая энергия в стационарных условиях равна

$$P_{погл} = (\Delta n_{12})_{стац} h\nu W_{12}. \tag{18}$$

Используя (17), можно записать:

$$P_{погл} = \frac{P^0_{погл}}{1 + 2T_1 W_{12}}, \tag{19}$$

где $P^0_{погл}$ — мощность, поглощаемая в отсутствие эффекта насыщения (т. е. при $2T_1 W_{12} \ll 1$).

Из приведенного рассмотрения следует, что равновесная двухуровневая система поглощает энергию внешнего электромагнитного поля, т. е. является пассивной. Чтобы превратить ее в активную систему, способную усиливать электромагнитные колебания, необходимо нарушить равновесное распределение так, чтобы верхний уровень был более заселен, чем нижний, т. е. инвертировать распределение населенностей уровней относительно равновесного.

Такую инвертированную систему часто принято называть системой с отрицательной температурой. Последний термин является, вообще говоря, формальным следствием применения распределения Больцмана к неравновесным системам с инверсной заселенностью уровней. В нормальном больцмановском факторе для равновесной системы уровней

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left[-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right] \tag{20}$$

T есть температура термостата (например, решетки кристалла), с которым система уровней находится в тепловом равновесии. Поскольку по определению $E_2 > E_1$, то в такой равновесной системе $n_2 < n_1$. Если населенности уровней каким-либо способом инвертированы, т. е. $n_2 > n_1$, то применение (20) к такой неравновесной системе приводит к выводу, что температура системы отрицательна. Было предложено несколько методов получения инверсных состояний (состояний с отрицательной температурой). Для квантовых усилителей радиодиапазона наиболее эффективным оказался метод, в котором используется вспомогательное излучение в системе с многими уровнями энергии [10, 11].

Для начала рассмотрим систему из трех уровней энергии (см. рис. 4). Если между уровнями 1 и 3 приложено сильное вспомогательное излучение* частоты $\nu_{31} = \frac{E_3 - E_1}{h}$, то благодаря эффекту насыщения перехода $1 \to 3$ при определенных условиях, зависящих от соотношения вероятностей релаксационных переходов и расстояния между уровнями, может быть получена инверсия населен-

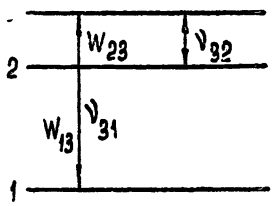


Рис. 4. Система трех уровней энергии.

* Для вспомогательного излучения иногда применяют термины «подсветка» или «накачка»

ностей уровней 2—3 или 1—2. Определим эти условия в отсутствие кросс-релаксации между различными уровнями. Уравнения для населенностей уровней имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{dn_1}{dt} = -(w_{13} + w_{12})n_1 + w_{21}n_2 + w_{31}n_3 - (n_1 - n_3)W_{13},\\ \frac{dn_2}{dt} = -(w_{21} + w_{23})n_2 + w_{12}n_1 + w_{32}n_3 - (n_2 - n_3)W_{23},\\ n_1 + n_2 + n_3 = N,\end{gathered} \tag{21}$$

где N — полное число частиц на уровнях, w_{ik} (i, $k = 1, 2, 3$) — вероятности спин-решеточных переходов между соответствующими уровнями, W_{13} — вероятность переходов под действием вспомогательного излучения. В стационарных условиях (когда $dn_1/dt = dn_2/dt = dn_3/dt = 0$) при большой мощности вспомогательного излучения ($W_{13} \gg w_{ik}$) при $h\nu_{31} \ll kT$ получаем

$$n_1 - n_2 = n_3 - n_2 = \frac{hN}{3kT}\,\frac{w_{21}\nu_{21} - w_{32}\nu_{32}}{w_{21} + w_{32}}. \tag{22}$$

Из этой формулы видно, что для получения инверсии населенностей на уровнях 2 и 3 необходимо, чтобы $w_{21}\nu_{21} > w_{32}\nu_{32}$. Если имеет место обратное неравенство, т. е. $w_{21}\nu_{21} < w_{32}\nu_{32}$, то инвертированными оказываются уровни 1 и 2.

Инверсию населенностей можно характеризовать величиной

$$I_{32} = \frac{n_3 - n_2}{(n_2 - n_3)_0}, \tag{23}$$

где $(n_2 - n_3)_0$ — равновесная разность населенностей в отсутствие вспомогательного излучения. Итак, если населенности уровней 2 и 3 инвертированы, то под действием внешнего электромагнитного поля на частоте ν_{32} система будет излучать энергию, т. е. будет работать как усилитель. Мощность излучения

$$P_{\text{изл}} = \frac{N}{3kT}(h\nu_{32})^2 I_{32} W_{32}, \tag{24}$$

где W_{32} — вероятность индуцированного перехода на частоте сигнала ν_{32}.

Отметим, что такая инвертированная система может работать и как генератор, если индуцированное излучение достаточно велико, чтобы скомпенсировать потери в высокочастотной системе, в которой находится парамагнитный кристалл.

Коэффициент инверсии I_{32} является очень важной величиной, характеризующей эффективность используемой системы уровней в квантовых усилителях. Из формулы (22) видно, что при фиксированной частоте усиливаемого сигнала ν_{32} коэффициент инверсии I_{32} тем больше, чем больше частота вспомогательного излучения $\nu_{31} = \nu_{21} + \nu_{32}$ и вероятность релаксационного перехода w_{21}.

Коэффициент инверсии может быть увеличен, если применить систему из четырех уровней энергии, в которой вспомогательное излучение приложено между двумя парами уровней. Возможны различные варианты четырехуровневых усилителей; три из них изображены на рис. 5. В схеме рис. 5а вспомогательное излучение приложено между уровнями 1—4 и 2—4. В этом случае разность населенностей уровней 3 и 4 равна [12]

$$(n_4 - n_3)_2 = \frac{Nh}{4kT}\,\frac{w_{32}\nu_{32} + w_{31}\nu_{31} - w_{43}\nu_{43}}{w_{34} + w_{23} + w_{13}}. \tag{25}$$

Если вспомогательное излучение приложено только к одной паре уровней, например, 2—4, то в той же схеме для разности населенностей имеем

$$(n_4 - n_3)_1 = \frac{Nh}{4kT}\,\frac{w_{31}(w_{21}\nu_{32} - w_{43}\nu_{41}) + (w_{41} + w_{31} + w_{21})(w_{32}\nu_{32} - w_{43}\nu_{43})}{w_{31}(w_{41} + w_{21}) + (w_{41} + w_{31} + w_{21})(w_{43} + w_{32})}. \quad (26)$$

Сравнение (25) и (26) показывает, что применение вспомогательного излучения на двух переходах дает больший коэффициент инверсии.

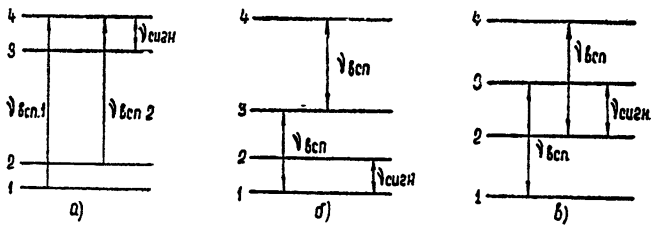


Рис. 5. Система четырех уровней энергии.

На схеме рис. 5б вспомогательное излучение приложено между двумя совпадающими по частоте переходами 1→3 и 3→4. В этом случае для коэффициента инверсии перехода 2 ↔ 1 имеем [13]

$$(I_{21})_2 = \frac{\nu_{32}}{\nu_{21}}\left[\frac{w_{32} + 2w_{24} + \frac{\nu_{21}}{\nu_{32}}(w_{42} - w_{21})}{w_{21} + w_{32} + w_{42}}\right]. \quad (27)$$

Когда же переход 3 → 4 не насыщается,

$$(I_{21})_1 = \frac{w_{42}(w_{43}\nu_{43} + w_{41}\nu_{41} + w_{32}\nu_{32}) - (w_{43} + w_{41})(w_{21}\nu_{21} + w_{42}\nu_{42} - w_{32}\nu_{32})}{\nu_{21}[(w_{32} + w_{21})(w_{13} + w_{41}) + w_{42}(w_{32} + w_{21} + w_{41} + w_{43})]}. \quad (28)$$

Если положить в (27) и (28) все релаксационные вероятности одинаковыми, то

$$(I_{21})_2 \simeq 4(I_{21})_1,$$

т. е. применение вспомогательного излучения на двух переходах приводит к значительному увеличению коэффициента инверсии.

Для системы уровней, изображенной на рис. 5в, вспомогательное излучение одной и той же частоты $\nu_{всп} = \nu_{31} = \nu_{42}$ приводит к увеличению коэффициента инверсии населенностей уровней 2 и 3 [14]. В частности, при одинаковых вероятностях релаксационных переходов между всеми уровнями (симметричный вариант) происходит следующее увеличение коэффициента инверсии перехода 2 ↔ 3 по сравнению с трехуровневой схемой:

$$\frac{I_{симм}}{I_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_{41} + \nu_{43}}{\nu_{21} - \nu_{32}} + 1\right). \quad (29)$$

Из приведенного рассмотрения трехуровневой и четырехуровневых схем видно, что эффективность той или иной схемы в квантовых усилителях существенно определяется соотношением вероятностей релаксационных переходов между различными уровнями. Мы провели это рассмотрение, когда отсутствует кросс-релаксация между уровнями. При

наличии кросс-релаксационных переходов условия получения инверсных состояний могут существенно измениться. Качественно влияние кросс-релаксации можно описать следующим образом. Если имеются кросс-релаксационные взаимодействия между сигнальными уровнями (например, 3—2 в схеме рис. 4) и какими-либо другими уровнями спин-системы, то, как следует из (22), инверсия населенностей на переходе $3 \to 2$ будет уменьшаться, поскольку увеличатся вероятности релаксационных переходов между уровнями 3—2. Если же кросс-релаксация увеличивает вероятность релаксационных переходов между уровнями 1—2, то инверсия перехода $3 \to 2$ возрастет.

В схеме уровней с так называемой гармонической кросс-релаксацией (когда кросс-релаксация осуществляется между уровнями с кратными интервалами) можно получить инверсные состояния между уровнями, частота перехода между которыми превышает частоту вспомогательного излучения [15]. Это позволяет создать квантовые усилители с частотой сигнала, большей частоты вспомогательного излучения, что практически имеет большое значение в коротковолновом диапазоне, где отсутствуют достаточно мощные источники вспомогательного излучения. Приведем один пример такой схемы уровней (см. рис. 6). Вспомогательное излучение непосредственно насыщает переход $2 \to 3$ и через гармоническую кросс-релаксацию между этими уровнями и уровнями 1—4 насыщает переход $1 \to 4$. В результате может быть получена инверсия населенностей уровней 1—3, при которой $\nu_{\text{сигн}} > \nu_{\text{всп}}$. Условия достижения такого состояния можно получить, решив систему линеаризованных кинетических уравнений для населенностей уровней с учетом кросс-релаксации [15]:

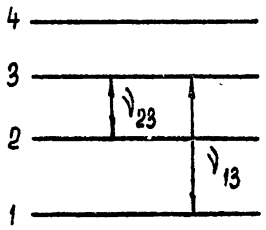


Рис. 6. Схема уровней с частотой сигнала ν_{13}, большей частоты вспомогательного излучения ν_{23}.

$$\frac{dn_1}{dt} = -w_{12}\left[\Delta n_{12} - \frac{Nh}{4kT}\nu_{12}\right] - w_{13}\left[\Delta n_{13} - \frac{Nh}{4kT}\nu_{13}\right] - w_{14}\left[\Delta n_{14} - \frac{Nh}{4kT}\nu_{14}\right] - w_{\text{кросс}}[\Delta n_{14} - n\Delta n_{23}];$$

$$\frac{dn_4}{dt} = w_{14}\left[\Delta n_{14} - \frac{Nh}{4kT}\nu_{14}\right] + w_{24}\left[\Delta n_{24} - \frac{Nh}{4kT}\nu_{24}\right] + w_{34}\left[\Delta n_{34} - \frac{Nh}{4kT}\nu_{34}\right] + w_{\text{кросс}}[\Delta n_{14} - n\Delta n_{23}], \tag{30}$$

где $n = \nu_{14}/\nu_{23}$, $\Delta n_{ij} = n_i - n_j$.

Для случая, когда все вероятности спин-решеточных переходов одинаковы, стационарное решение имеет вид

$$\Delta n_{13} = -\frac{Nh}{4kT}\left[\frac{w_{ij}(\nu_{23} - 2\nu_{13}) + w_{\text{кросс}}\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)\nu_{23} - \nu_{13}\right]}{2w_{ij} + w_{\text{кросс}}}\right]; \tag{31}$$

тогда для коэффициента инверсии получаем

$$I_{13} = \frac{(n + 1 + 2w_{ij}/w_{\text{кросс}})\nu_{23}}{2(1 + 2w_{ij}/w_{\text{кросс}})\nu_{13}} - 1. \tag{32}$$

Из (32) видно, что при $n > 1$ можно получить усиление сигнала на частоте ν_{13}, большей частоты вспомогательного излучения ν_{23}. При $w_{\text{кросс}}/w_{ij} = \infty$ максимальное отношение ν_{31}/ν_{23} равно $(n + 1)/2$. Из (32) ясно также, что при заданном отношении ν_{13}/ν_{23} коэффициент инверсии I_{13} падает при увеличении $w_{ij}/w_{\text{кросс}}$. Это происходит при повышении температуры, поскольку, как мы видели выше, вероятности спин-решеточных переходов увеличиваются при повышении температуры, а вероятности кросс-релаксационных переходов не зависят от температуры.

Уменьшение коэффициента инверсии при повышении температуры может быть скомпенсировано увеличением концентрации парамагнитных ионов, поскольку вероятности кросс-релаксации возрастают при повышении концентрации. Как мы видим, в приведенном примере кросс-релаксация играет положительную роль в квантовом усилителе, поскольку она увеличивает коэффициент инверсии.

В случае же, когда кросс-релаксация «шунтирует» сигнальный переход, она, как отмечалось выше, уменьшает коэффициент инверсии и, следовательно, ухудшает эффективность усилителя. Согласно формуле (24), мощность, излучаемая парамагнитным кристаллом, в котором достигнута инверсия для какой-либо пары уровней, пропорциональна числу парамагнитных ионов и коэффициенту инверсии. Излучаемая мощность будет возрастать при повышении концентрации парамагнитных ионов лишь до определенного предела, при котором возрастание будет скомпенсировано падением коэффициента инверсии (при этом вероятности кросс-релаксационных переходов становятся сравнимыми с вероятностями спин-решеточных переходов). При более высоких температурах оптимальная концентрация, при которой не происходит заметного падения коэффициента инверсии, больше, поскольку вероятности спин-решеточных переходов возрастают при повышении температуры, а вероятности кросс-релаксации не зависят от температуры. По этой причине квантовые усилители на рубине при гелиевых температурах перестают работать при концентрациях парамагнитных ионов Cr^{3+}, превышающих 0,05%, тогда как при более высоких температурах они работают при больших концентрациях Cr^{3+} [16].

2. ВЕЩЕСТВА ДЛЯ КВАНТОВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

В квантовых усилителях, в которых состояния с отрицательной температурой получаются с помощью вспомогательного излучения, в качестве рабочих веществ применяются кристаллы с примесными парамагнитными ионами. Из изложенных выше физических основ квантовых усилителей вытекают основные требования к таким веществам.

1) Парамагнитные ионы в кристалле должны обладать подходящей системой уровней энергии, позволяющей получить усиление в требуемом диапазоне частот с имеющимися источниками вспомогательного излучения. При этом, конечно, индуцированные магнитные дипольные переходы между как сигнальными, так и вспомогательными уровнями должны быть достаточно хорошо разрешены.

2) Времена спин-решеточной релаксации T_1 для парамагнитных ионов в кристалле должны иметь подходящую величину, чтобы, с одной стороны, получить насыщение вспомогательного перехода при не очень больших мощностях источника вспомогательного излучения, а с другой, чтобы усилитель обладал достаточно широким динамическим диапазоном усиления, т. е. насыщался при не очень слабых уровнях сигнала, и соответственно имел не очень длинное время восстановления после насыщения сильным сигналом. Разумные с этой точки зрения величины

T_1 заключены в интервале $10^{-1} \div 10^{-4}$ *сек*. Соотношение вероятностей релаксационных переходов между различными уровнями должно способствовать получению инверсных состояний в системе уровней.

3) Ширина линий ЭПР не должна быть очень большой. В противном случае потребуется слишком большая мощность источника вспомогательного излучения для получения насыщения вспомогательного перехода. Обычно ширина линий при оптимальной концентрации парамагнитных ионов, ограничиваемой эффектами кросс-релаксации, составляет $10 \div 100$ *мгц*.

4) Необходимо, чтобы применяемый в усилителе кристалл обладал хорошими диэлектрическими свойствами, т. е. малыми потерями на СВЧ и не слишком большой величиной диэлектрической постоянной ε. Последнее обстоятельство существенно в коротковолновом диапазоне волн, так как большая величина ε приводит здесь к тому, что кристалл будет представлять собой многомодовый резонатор.

5) Применяемые кристаллы должны быть химически устойчивыми. Указанным требованиям отвечают различные кристаллы, содержащие некоторые ионы переходных групп железа и редких земель. Уровни энергии таких ионов связаны со спинами незаполненных электронных оболочек атомов ($3d$ в случае группы железа и $4f$ в случае группы редких земель). В кристалле эти уровни расщепляются внутренними электрическими полями, создаваемыми около введенных в кристалл парамагнитных ионов основными ионами решетки. Величина расщеплений зависит от силы и симметрии кристаллического поля и спин-орбитальной связи для рассматриваемого парамагнитного иона. Во многих случаях эти расщепления соответствуют частотам переходов в радиодиапазоне.

В качестве примера рассмотрим уровни энергии ионов Cr^{3+} в кристаллах корунда Al_2O_3* и рутила TiO_2, нашедших широкое применение в квантовых усилителях. Ион Cr^{3+} имеет три электрона в незаполненной $3d$- оболочке. Ионы Cr^{3+}, введенные в решетку Al_2O_3, находятся в октаэдрическом окружении ионов O^{2-}. Ионы O^{2-} создают около ионов Cr^{3+} сильное электрическое поле кубической симметрии с наложением более слабой аксиальной компоненты. Кубическое поле расщепляет основной уровень иона Cr^{3+}, имеющий семикратное орбитальное вырождение, на два триплета и синглет, причем синглетный уровень — нижний, а первый триплетный уровень расположен выше на $\sim 10^4$ *см*$^{-1}$. В аксиальном кристаллическом поле благодаря спин-орбитальной связи синглетный уровень, имеющий четырехкратное спиновое вырождение, расщепляется на два крамерсовых дублета. Оставшееся вырождение каждого уровня снимается при наложении постоянного магнитного поля.

Уровни энергии и вероятности переходов между ними могут быть найдены с помощью оператора энергии — спинового гамильтониана. Для Cr^{3+} в рубине спиновый гамильтониан имеет вид.

$$\hat{\tilde{H}} = g_{\parallel}\beta H_z\hat{S}_z + g_{\perp}\beta(H_x\hat{S}_x + H_y\hat{S}_y) + D\left[\hat{S}_z^2 - \frac{1}{3}S(S+1)\right], \qquad (33)$$

где $g_{\parallel}$ и $g_{\perp}$ — компоненты g-тензора в направлениях, параллельном и перпендикулярном тригональной оси кристалла, β — магнетон Бора, $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ — операторы проекций электронного спина ($S = 3/2$) на координатные оси (ось z направлена по тригональной оси), H_x, H_y, H_z — компоненты вектора внешнего магнитного поля, D — константа кристал-

* Кристалл Al_2O_3 Cr обычно называют рубином.

лического поля тригональной симметрии. Определенные из спектра ЭПР константы гамильтониана имеют значения:

$$g_{\parallel} = 1{,}9840 \pm 0{,}0006, \quad g_{\perp} = 1{,}9867 \pm 0{,}0006, \quad 2D = -0{,}3824 \ см^{-1}.$$

Величина $\delta = |2D|$ есть начальное расщепление уровней кристаллическим полем. Собственные значения (уровни энергии E_i) оператора (33) находятся из секулярного уравнения

$$\varepsilon^4 - \varepsilon^2(2 + 2{,}5h^2) + 2\varepsilon h^2(3\cos^2\vartheta - 1) + \frac{9}{16}h^4 - \frac{h^2}{2}(6\cos^2\vartheta - 1) + 1 = 0,$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{E_i}{|D|}, \quad h = \sqrt{h_x^2 + h_z^2}, \quad h_{x,z} = \frac{g\beta H_{x,z}}{|D|} \tag{34}$$

(здесь положено $g_{\parallel} = g_{\perp} = g$), ϑ — угол между внешним магнитным полем и осью кристалла.

Это уравнение можно разрешить относительно h:

$$h^4 - 2ah^2 + b = 0, \tag{35}$$

где

$$a = a_1 + a_2\cos^2\vartheta, \quad a_1 = \frac{4}{9}(5\varepsilon^2 + 4\varepsilon - 1),$$

$$a_2 = \frac{8}{3}(1 - 2\varepsilon), \quad b = \frac{16}{9}(\varepsilon^2 - 1)^2.$$

Решая (35), можно найти h как функции ε при различных углах ϑ. Таким образом, указанная процедура решения уравнения (34) позволяет легко найти уровни энергии Cr^{3+} в зависимости от приложенного магнитного поля при любой ориентации кристалла.

На рис. 7 изображены уровни энергии (в безразмерных единицах) при трех ориентациях кристалла. При $\vartheta = 54°44'$ и $\vartheta = 90°$ указаны переходы, которые обычно используются в квантовых усилителях на рубине.

На рис. 7б показан так называемый симметричный вариант усилителя, в котором сигнальными являются уровни 2 и 3, а вспомогательное излучение приложено между уровнями 1—3 и 2—4. На рис. 7в показаны два возможных варианта — так называемые низкопольный и высокопольный — использования уровней рубина в квантовом усилителе по схеме трех уровней.

Вероятности переходов между уровнями i и j:

$$W_{ij} \sim |\langle i|\boldsymbol{H}_1\hat{\boldsymbol{S}}|j\rangle|^2 = |H_{1x}\langle i|\hat{S}_x|j\rangle + H_{1y}\langle i|\hat{S}_y|j\rangle + H_{1z}\langle i|\hat{S}_z|j\rangle|^2,$$

где $H_{1x,y,z}$ — компоненты высокочастотного магнитного поля, индуцирующего переходы, вычисляются с помощью собственных функций оператора (33):

$$|j\rangle = C_{1j}|3/2\rangle + C_{2j}|1/2\rangle + C_{3j}|-1/2\rangle + C_{4j}|-3/2\rangle. \tag{36}$$

Здесь C_{mj} — коэффициенты разложения состояния $|j\rangle$ по собственным функциям оператора $\hat{S}_z$. Матричные элементы операторов $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ и $\hat{S}_z$, вычисленные по собственным функциям оператора $\hat{S}_z$, хорошо известны,

так что расчет вероятностей переходов сводится к определению коэффициентов C_{mj} для интересующих уровней j ($j = 1, 2, 3, 4$) стандартными квантово-механическими методами. Эти вычисления не сложны, но трудоемки. Подробные таблицы значений энергий уровней и матричных элементов переходов между ними, рассчитанных с помощью вычислительных машин, опубликованы в работах [2, 17]. Знание вероятностей W_{ij} для различных уровней позволяет выяснить степень разрешенности сигнального и вспомогательного переходов и найти оптимальное размещение парамагнитного кристалла в высокочастотных элементах усилителя (резонатор или замедляющая волноводная система).

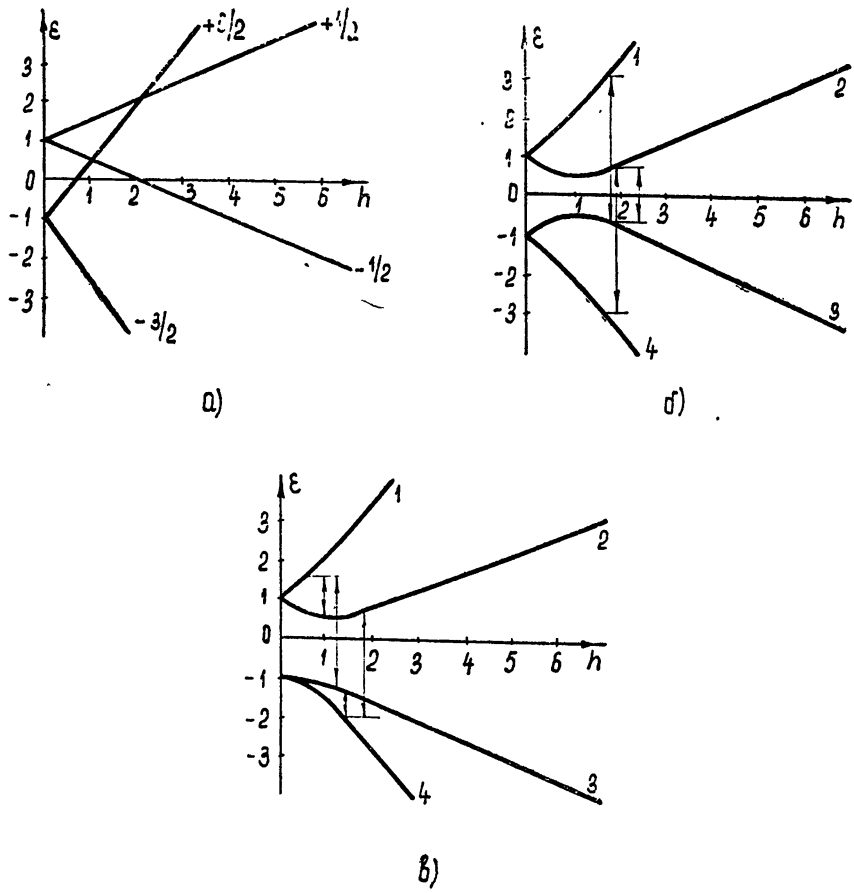


Рис. 7. Уровни энергии иона Cr^{3+} в корунде а) $\theta = 0°$, б) $\theta = 54°44'$, в) $\theta = 90°$.

Релаксационные процессы в рубине изучались во многих работах в широком интервале температур и концентраций Cr^{3+}. Соответствующие ссылки на эти работы можно найти в [4]. Приведем некоторые результаты этих исследований.

При концентрации Cr^{3+} около 0,03% (эта концентрация близка к предельной оптимальной концентрации для квантовых усилителей на рубине) при $T = 4{,}2°K$ в ориентации $\vartheta = 90°$ время спин-решеточной релаксации T_1 варьируется в пределах 20 — 60 *мсек* для разных переходов, тогда как при $\vartheta = 0°$ $T_1 \simeq 100$ *мсек*. В области гелиевых температур

(4,2 ÷ 1,5°K) наблюдается зависимость $T_1 \backsim T^{-1}$. При концентрациях, превышающих 0,03%, наблюдаются сложные процессы кросс-релаксации между различными уровнями. Времена, характеризующие эти процессы, в среднем составляют около 4 *мсек* при концентрации 0,15%. При температуре жидкого азота для образца с концентрацией 0,05% $T_1 \simeq 5 \cdot 10^{-5}$ *сек*.

Исследование ширины линий ЭПР в рубине проведено в работе [18]. При малых концентрациях Cr^{3+} основной вклад в ширину линии вызван взаимодействием ионов Cr^{3+} с ядерными магнитными моментами Al^{27}. Этот вклад составляет около 30 *мгц*. При концентрациях Cr^{3+}, больших 0,01%, становится существенным вклад в ширину от взаимодействий (дипольных или обменных) между ионами Cr^{3+}. При концентрации ~0,05% ширина составляет около 60 *мгц*. Кроме того, наблюдается неоднородное уширение линий, связанное с неоднородностью кристаллического поля [19]. Это уширение может быть уменьшено отжигом кристаллов.

Кристаллы рубина обладают малыми диэлектрическими потерями. Величина диэлектрической постоянной $\varepsilon \simeq 10$. Приведенные данные* показывают, что рубин является одним из лучших кристаллов для квантовых усилителей. На рубине в настоящее время созданы усилители в дециметровом и сантиметровом диапазонах волн. Другим подходящим кристаллом для квантовых усилителей является рутил с примесью ионов Cr^{3+}. Октаэдрическое окружение из ионов O^{2-} создает около ионов Cr^{3+} в рутиле кристаллическое поле ромбической симметрии. В кристаллической решетке рутила имеются два неэквивалентных типа ионов Cr^{3+}, причем один тип переходит в другой при повороте на 90° вокруг тетрагональной оси, которую обычно обозначают как ось *c*.

При определенных ориентациях кристалла относительно направления внешнего магнитного поля *H* уровни энергии для обеих систем ионов совпадают. Это, в частности, имеет место при $H \parallel c$. Энергетические уровни Cr^{3+} в рутиле могут быть найдены с помощью спинового гамильтониана вида

$$\hat{\tilde{H}} = g\beta H\hat{S} + D\left[\hat{S}_z^2 - \frac{1}{3}S(S+1)\right] + E\left(\hat{S}_x^2 - \hat{S}_y^2\right) \qquad (37)$$

со значениями констант [22]

$$g = 1{,}97 \pm 0{,}01;\ D = -0{,}68 \pm 0{,}005\ см^{-1};\ E = -0{,}14 \pm 0{,}005\ см^{-1}.$$

Процедура расчета уровней энергии и вероятностей индуцированных переходов между ними аналогична описанной для рубина.

На рис. 8 изображены уровни энергии для случая, когда магнитное поле направлено по оси *c*.

Благодаря большому начальному расщеплению уровней $\delta = 2\sqrt{(D)^2 + 3E^2} = 43{,}3$ *кмгц* кристаллы рутила с примесью ионов Cr^{3+} пригодны для создания квантовых усилителей в миллиметровом диапазоне волн. Однако разработка таких усилителей затруднена в силу значительной диэлектрической постоянной рутила ($\varepsilon \simeq 150 \div 200$). Времена спин-решеточной релаксации для ионов Cr^{3+} в рутиле в области гелиевых температур при концентрации хрома около 0,1% для разных переходов изменяются в пределах 1 ÷ 4,5 *мсек* [23, 24]. При более высоких температурах времена спин-решеточной релаксации составляют

* Более подробный анализ рубина как материала для квантовых усилителей можно найти в работах [14, 20, 21].

около 2 *мсек* при 10°К, 0,6 *мсек* при 20°К и меньше 10 *мксек* при $T > 56$°К. Ширина линий ЭПР значительно (в ~ 3 раза) меньше, чем в рубине, при одинаковых концентрациях Cr^{3+}. Кристаллы рутила обладают малыми диэлектрическими потерями. Все отмеченные свойства рутила с примесью ионов Cr^{3+} позволяют успешно применять его для квантовых усилителей.

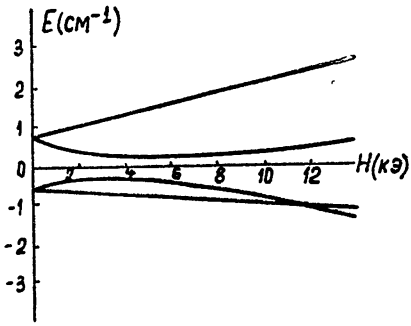


Рис. 8. Уровни энергии иона Cr^{3+} в рутиле. Магнитное поле параллельно оси *c*.

Кроме кристаллов рубина и рутила с примесью ионов Cr^{3+} в квантовых усилителях используют и другие кристаллы: этилсульфат $(LaC_2H_5SO_4)_3 \cdot 9H_2O$ с примесью ионов Gd^{3+}, цианид $K_3Co(CN)_6$ с примесью Cr^{3+}, корунд и рутил с примесью ионов Fe^{3+}. На этих кристаллах были созданы макеты усилителей, однако они не получили широкого практического применения (соответствующие ссылки на работы, посвященные исследованиям этих кристаллов, см. в [4]). На некоторых других кристаллах, которые могут быть применены в квантовых усилителях, мы остановимся в конце обзора.

3. СВОЙСТВА КВАНТОВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ РАДИОДИАПАЗОНА

Пусть активное вещество помещено в волновод. Тогда по мере прохождения по волноводу электромагнитная волна будет экспоненциально нарастать. Однако для получения значительного усиления требуется заполнить веществом волновод большой длины. Практически реализовать такую систему трудно. Поэтому необходимо резко увеличить взаимодействие усиливаемого излучения с веществом. Существуют два способа увеличения степени их взаимодействия. В одном из них применяются высокодобротные объемные резонаторы, в которых излучение взаимодействует с веществом в режиме стоячей волны, многократно проходя через один и тот же образец вещества. При другом способе излучение распространяется в режиме бегущей волны в образце сравнительно большой длины, но вещество помещается в замедляющую систему, за счет чего время взаимодействия излучения и активного вещества при не очень больших размерах последнего становится достаточно большим. Свойства получаемых таким образом резонаторных квантовых усилителей (РКУ) и квантовых усилителей бегущей волны (КУБВ) отличаются рядом существенных моментов. Рассмотрим их более подробно.

1. Резонаторные квантовые усилители. Коэффициент усиления и полоса пропускания. Пусть активное вещество помещено в резонатор. Его отрицательное поглощение удобно учитывать введением в рассмотрение комплексной добротности активного вещества $Q_в$ с отрицательной действительной частью. Тогда, пользуясь обычными методами теории цепей, можно определить коэффициент усиления квантового усилителя и его зависимость от частоты. По определению,

$$\frac{1}{Q_в} = \frac{P_в}{2\pi\nu_0 E}, \tag{38}$$

где ν_0 — собственная частота резонатора, E — запасенная в нем энергия, $P_в$ — мощность, поглощаемая веществом. Учет конечности ширины

линии приводит к появлению дисперсионных свойств, причем величина $P_в$ становится комплексной. В состоянии с отрицательной температурой энергия не поглощается, а излучается. Поэтому действительная часть $P_в$ становится отрицательной.

Вычисление $P_в$ проводится путем интегрирования уравнений движения матрицы плотности. Можно показать [25], что для трехуровневых систем с вспомогательным излучением при лоренцовой форме линий

$$\frac{1}{Q_в} = \frac{1}{1 + Q_л^2 x_л^2}\left(-\frac{1}{Q_в^0} + jx_л \frac{Q_л}{Q_в^0}\right). \tag{39}$$

Здесь $x_л = 2(\nu - \nu_л)/\nu_л$ — относительная расстройка частоты сигнала ν от частоты линии $\nu_л$, $Q_л = \nu_л/\Delta\nu_л$, где $\Delta\nu_л$ — ширина линии поглощения, $Q_в^0 = -Q_в$ (при $x_л = 0$). Величина $Q_в^0$ определяется соотношением

$$Q_в^0 = \frac{2\pi\nu_л E}{P_{изл}(\nu_л)}, \tag{40}$$

где $P_{изл}$ дается формулой (24).

Мы будем интересоваться частотами, не выходящими за пределы ширины линии $\Delta\nu_л$, и поэтому будем считать, что

$$\frac{1}{Q_в} \simeq -\frac{1}{Q_в^0} + j\frac{Q_л}{Q_в^0} x_л. \tag{41}$$

В радиодиапазоне применяются отражательные РКУ, резонаторы которых имеют только одно отверстие связи с подводящим фидером. В этом случае усиленным является сигнал, отраженный от резонатора. При наличии двух отверстий связи (проходной усилитель) усиленный сигнал излучается как в прямом, так и в обратном направлениях. Поэтому в отражательном усилителе при прочих равных условиях более эффективно используется активное вещество.

Рассмотрим отражательный усилитель. На рис. 9 представлена эквивалентная схема такого усилителя, связанного с подводящей линией (волновое сопротивление z_0) петлей связи, характеризуемой добротностью связи $Q_{св}$. Собственные потери резонатора описываются величиной его ненагруженной добротности Q_0, а отрицательные потери, вносимые активным веществом, — добротностью вещества $Q_в$.

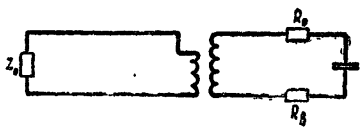


Рис. 9. Эквивалентная схема однорезонаторного отражательного квантового усилителя.

Так как усиленным сигналом является отраженный сигнал, то коэффициент усиления равен коэффициенту отражения. Коэффициент отражения по напряжению Г определяется соотношением

$$Г = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \tag{42}$$

где $\beta = z/z_0$. Величина β легко вычисляется. Можно показать, что для схемы рис. 9 на частотах, не очень далеких от собственной частоты резонатора ν_0,

$$\beta = \frac{1/Q_{св}}{1/Q_0 + \mathrm{Re}(1/Q_в) + j[2(\nu - \nu_0)/\nu + \mathrm{Im}(1/Q_в)]} =$$

$$= \frac{1/Q_{св}}{1/Q_0 - 1/Q_в^0 + j[x + (Q_л/Q_в^0)x_л]}, \tag{43}$$

где

$$x = 2\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \simeq \frac{\nu^2 + \nu_0^2}{\nu_0^2}.$$

Пусть резонатор настроен на центральную частоту линии $\nu_0 = \nu_л$. Из (43) и (42) следует, что коэффициент усиления отражательного РКУ по мощности

$$G = \frac{(1/Q_0 - 1/Q_{св} - 1/Q_в^0)^2 + x^2(1 + Q_л/Q_в^0)^2}{(1/Q_0 + 1/Q_{св} - 1/Q_в^0)^2 + x^2(1 + Q_л/Q_в^0)^2}; \tag{44}$$

в резонансе

$$G_0 = G(0) = \frac{(-1/Q_0 + 1/Q_{св} + 1/Q_в^0)^2}{(1/Q_0 + 1/Q_{св} - 1/Q_в^0)^2}. \tag{45}$$

В отсутствие активного вещества, т. е. при $Q_в^0 = \infty$, $G < 1$. Усиление достигает единицы ($G = 1$) при $Q_в^0 = Q_0$, т. е. тогда, когда мощность индуцированного излучения в точности компенсирует потери энергии в стенках резонатора. Усиление превышает единицу ($G_0 > 1$) при $Q_в^0 < Q_0$, когда мощность индуцированного излучения превышает мощность потерь непосредственно в резонаторе. Усиление велико ($G_0 \gg 1$), когда добротность $Q_в^0$ близка к нагруженной добротности резонатора $Q_н$, хотя несколько и превышает ее: $Q_в^0 \gtrsim Q_н$, где $1/Q_н = 1/Q_0 + 1/Q_{св}$. Наконец, усилитель возбуждается и наступает генерация ($G = \infty$) при $Q_в^0 = Q_н$, т. е. когда мощность индуцированного излучения в точности компенсирует потери энергии в стенках резонатора и на излучение в подводящий фидер.

Таким образом, активное вещество, как среда с отрицательным поглощением, регенерирует резонатор. В силу этого полоса пропускания РКУ должна определяться достигнутым усилением. Из формул (44) и (45) легко получить, что для больших усилений полоса пропускания на уровне $G = G_0/2$ определяется соотношением

$$G_0^{1/2}\Delta\nu = \frac{2\nu_0}{Q_л}\frac{1/Q_в^0 - 1/Q_0}{1/Q_в^0 + 1/Q_л}. \tag{46}$$

Для проходного усилителя эта величина вдвое меньше. Полученное соотношение является приближенным. Для случая, когда спектральная линия много шире полосы пропускания регенерируемого резонатора, можно получить [4] строго:

$$(G_0^{1/2} - 1)\Delta\nu = 2\nu_0(1/Q_в^0 - 1/Q_0). \tag{47}$$

При $G_0 \gg 1$ и $Q_л \ll Q_в^0$ формулы (47) и (46) совпадают.

Рассмотрим более подробно выражения (45) и (46). Коэффициент усиления велик при условии $1/Q_в^0 \lesssim 1/Q_{св} + 1/Q_0 = 1/Q_н$. Следовательно, поправкой на конечность ширины линии поглощения можно пренебречь при $Q_л \ll Q_н$. В противоположном случае, т. е. при $Q_л \gg Q_н \simeq Q_в^0$, значение $G_0^{1/2}\Delta\nu = 2\nu/Q_л = 2\Delta\nu_л$, т. е.

$$\Delta\nu = 2\Delta\nu_л/G_0^{1/2}. \tag{48}$$

В этом случае полоса пропускания усилителя определяется шириной регенерированной линии поглощения. Очевидно также, что при $Q_л \ll Q_н$ ширина полосы пропускания определяется шириной полосы пропускания регенерированного нагруженного резонатора:

$$\Delta\nu = 2\,\Delta\nu_н/G_0^{1/2}. \tag{49}$$

Отметим, что при заданной ширине линии значение $G_0^{1/2}\Delta\nu$ максимально при минимальном $Q_в^0$. Поэтому (48) дает величину максимально допустимого значения произведения $G_0^{1/2}\Delta\nu$ для однорезонаторного квантового усилителя. При этом должно выполняться соотношение $Q_в^0 \ll \nu/\Delta\nu_л$. Так как время спин-спиновой релаксации T_2, определяющее ширину линии поглощения, слабо зависит от частоты, то, очевидно, на высоких частотах при прочих равных условиях легче достичь предельного для данного вещества значения $G_0^{1/2}\Delta\nu$. Практически получается так, что формула (49) соответствует дециметровому диапазону, а формула (48) — миллиметровому.

Дальнейшее расширение полосы пропускания резонаторных усилителей при заданном усилении может быть получено путем применения связанных резонаторов [26, 27] (рис. 10). Для двухконтурного усилителя с входным пассивным резонатором получаем

$$G(x) = \frac{\left[1/Q_в^0 Q_{св} + \varkappa^2 - (1 + Q_л/Q_в^0)x^2\right]^2 + x^2\left[(1 + Q_л/Q_в^0)/Q_{св} + 1/Q_в^0\right]^2}{\left[1/Q_в^0 Q_{св} - \varkappa^2 + (1 + Q_л/Q_в^0)x^2\right]^2 + x^2\left[(1 + Q_л/Q_в^0)/Q_{св} - 1/Q_в^0\right]^2}. \tag{50}$$

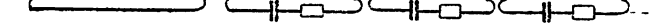


Рис. 10. Эквивалентная схема многорезонаторного отражательного квантового усилителя.

В резонансе, т. е. при $x = 0$

$$G_0 = \left(\frac{1/Q_{св} + \varkappa^2 Q_в^0}{1/Q_{св} - \varkappa^2 Q_в^0}\right)^2. \tag{51}$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент связи между контурами. Усилитель устойчив при $\varkappa^2 Q_в^0 < 1/Q_{св}$. Вид частотной характеристики $G(x)$ сильно зависит от величины коэффициента связи. Не проводя общего анализа и не определяя значения оптимальной связи, оценим полосу пропускания при $\varkappa^2 = 1/Q_в^{02}$. В этом случае в приближении больших G_0 оказывается, что константой является не произведение $G_0^{1/2}\Delta\nu$, а величина $G_0^{1/4}\Delta\nu$, равная

$$G_0^{1/4}\,\Delta\nu \simeq \nu_0/(Q_в^0 + Q_л). \tag{52}$$

Если же в двухконтурном усилителе активное вещество находится в обоих резонаторах, то

$$G(x) = \frac{\left[1/Q_в^0 Q_{св} + \varkappa^2 + 1/Q^{0в2} - (1 + Q_л/Q_в^0)^2 x^2\right] + (1 + Q_л/Q_в^0)^2 x^2 (1/Q_{св} + 2/Q_в^0)^2}{\left[1/Q_в^0 Q_{св} - \varkappa^2 - 1/Q_в^{0\,2} + (1 + Q_л/Q_в^0)^2 x^2\right] + (1 + Q_л/Q_в^0)^2 x^2 (1/Q_{св} - 2/Q_в^0)^2}; \tag{53}$$

в резонансе

$$G_0 = \frac{1/Q_в^0 Q_{св} + \varkappa^2 + 1/Q_в^{0\,2}}{1/Q_в^0 Q_{св} - \varkappa^2 - 1/Q_в^{0\,2}}. \tag{54}$$

Усилитель устойчив при $Q_в^0 > Q_{св}(1 + \varkappa^2 Q_в^{0\,2})$. При значении коэффициента связи $\varkappa = 1/Q_в^0$ и при больших G_0 оказывается, что значение произведения $G_0^{1/4}\Delta\nu$ по-прежнему дается формулой (52).

Остановимся на известной возможности расширения полосы пропускания резонаторных квантовых усилителей путем последовательного включения полностью развязанных друг от друга проходных резонаторных усилителей. При n одинаковых каскадах общее усиление можно записать в виде

$$G(x) = G_0\left[1 + \frac{G_0^{1/n} Q_{св}^2}{4}\left(1 + \frac{Q_л}{Q_в^0}\right)^2 x^2\right]^{-n}. \tag{55}$$

Применяя к этому соотношению методику [10] рассмотрения одноконтурных многокаскадных усилителей промежуточной частоты, находим, что максимальная полоса пропускания усилителя будет при

$$n = \ln G_0. \tag{56}$$

При этом усиление одного каскада $G_0^{1/n} = e$ или 4,34 *дб;* усиление порядка 20 *дб* может быть достигнуто применением 5 каскадов. Связь между полосой пропускания и коэффициентом усиления такого усилителя дается соотношением

$$(\ln G_0)^{1/2}\Delta\nu \simeq \frac{\nu}{Q_л + Q_в^0}, \tag{57}$$

что по сути дела совпадает с аналогичной формулой для рассматриваемого ниже усилителя бегущей волны. Дальнейшее расширение полосы может быть достигнуто расстройкой отдельных каскадов по отношению друг к другу.

Нестабильности усиления резонаторных усилителей. Регенерация резонаторных квантовых усилителей приводит к появлению нестабильностей усиления. Формулы (45), (51) и (54) позволяют связать относительные нестабильности усиления $\delta G_0/G_0$ с флюктуациями добротности активного вещества $\delta Q_в^0/Q_в^0$, которые, в свою очередь, могут быть вызваны флюктуациями магнитного поля, частоты вспомогательного излучения, температуры образца и т. п. Для однорезонаторного усилителя с пассивным входным резонатором

$$\frac{\delta G_0}{G_0} = G_0^{1/2}\frac{\delta Q_в^0}{Q_в^0}. \tag{58}$$

В то же время двухконтурный усилитель с двумя активными резонаторами гораздо более стабилен:

$$\frac{\delta G_0}{G_0} = \frac{1 - \varkappa^2 Q_в^{0\,2}}{1 + \varkappa^2 Q_в^{0\,2}} G_0^{1/2}\frac{\delta Q_в^0}{Q_в^0}. \tag{59}$$

При выводе этого соотношения предполагалось, что добротности двух одинаковых образцов активного вещества меняются одинаково.

Соотношение (59) свидетельствует о целесообразности выбора коэф-

фициента связи $\varkappa = 1/Q_{в}^{0}$. Полная компенсация флюктуаций усиления практически, конечно, не достижима.

Как видно из формулы (41), нерегулярные изменения резонансной частоты инвертированной линии резонансного поглощения приводят к флюктуациям фазы комплексной добротности активного вещества. Легко видеть, что фаза добротности определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi = -Q_{л}x_{л}. \tag{60}$$

Следовательно, малые флюктуации фазы $\delta\varphi$ просто связаны с флюктуацией частоты линии $\delta\nu_{л}$:

$$\delta\varphi = 2\frac{\delta\nu_{л}}{\Delta\nu_{л}}. \tag{61}$$

Однако в силу регенерации резонаторных квантовых усилителей флюктуации фазы усиленного сигнала будут более значительными. Для однорезонаторного усилителя и двухконтурного усилителя с пассивным входным резонатором

$$\operatorname{tg}\varphi = G_{0}^{1/2}\frac{\nu - \nu_{л}}{\Delta\nu_{л}} \tag{62}$$

и соответственно

$$\delta\varphi = G_{0}^{1/2}\frac{\delta\nu_{л}}{\Delta\nu}. \tag{63}$$

Для двухконтурного усилителя с двумя активными резонаторами

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1 - \varkappa^{2}Q_{в}^{0\,2}}{1 + \varkappa^{2}Q_{в}^{0\,2}}G_{0}^{1/2}\frac{\nu - \nu_{л}}{\Delta\nu_{л}} \tag{64}$$

и

$$\delta\varphi = \frac{1 - \varkappa^{2}Q_{в}^{0\,2}}{1 + \varkappa^{2}Q_{в}^{0\,2}}G_{0}^{1/2}\frac{\delta\nu_{л}}{\Delta\nu}. \tag{65}$$

Из полученных соотношений видна необходимость возможно большей стабилизации частоты линии поглощения.

Насыщение резонаторных усилителей. При воздействии на квантовые усилители мощных сигналов величина коэффициента усиления падает из-за эффекта насыщения. Зависимость коэффициента усиления квантового усилителя от мощности входного сигнала легко найти [28], учитывая, что добротность активного вещества обратно пропорциональна достигнутой инверсии, а величина инверсии J через вероятность индуцированного изменения на частоте сигнала $W_{сиг}$ определяется плотностью поля излучения на частоте сигнала, т. е. мощностью сигнала на входе усилителя $P_{вх}$.

Для однорезонаторного усилителя имеем уравнение*

$$G^{1/2} = \frac{G_{н}^{1/2} + (G_{н}^{1/2} - 1)(G^{1/2} + 1)^{2}SP_{вх}}{1 + (G_{н}^{1/2} - 1)(G^{1/2} + 1)^{2}SP_{вх}}, \tag{66}$$

где S — фактор насыщения. Аналогичные соотношения справедливы и

* Уравнение для $G^{1/2}(P_{вх})$, приведенное в [28], содержит ошибку, на которую нам любезно указали Л. Л. Москвитин и Ю. Е. Наумов.

для двухрезонаторных усилителей. Фактор насыщения для однорезонаторного усилителя равен

$$S = 2\frac{|\mu|^2}{\hbar^2}\frac{Q^0_{\text{вн}}\eta}{v\nu}T_2T_1, \tag{67}$$

где v — объем рабочего вещества, η — коэффициент заполнения и $Q^0_{\text{в н}}$ — начальное значение добротности вещества.

Полученное соотношение показывает, что при заданном начальном усилении в усилителе какой-либо определенной конструкции улучшения динамической характеристики можно добиться уменьшением времени релаксации и начальной магнитной добротности $Q^0_{\text{в}}$. При заданных T_1 и $Q^0_{\text{в}}$ увеличение регенерации, т. е. $G_{\text{н}}$, приводит к уменьшению динамического диапазона. На графике рис. 11 сплошной линией показана зависимость усиления резонаторных усилителей от мощности входного сигнала.

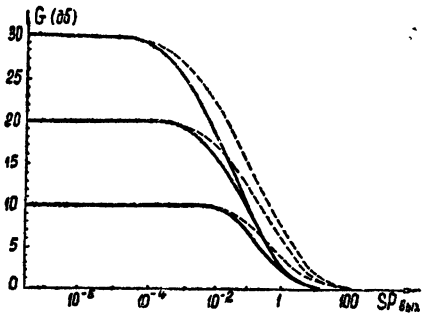


Рис. 11. Зависимость усиления квантовых усилителей от мощности входного сигнала.

Время восстановления усиления после снятия полностью насыщающего сигнала определяется длительностью процессов спин-решеточной релаксации. В силу регенерированности усилителя это время превышает T_1. Время восстановления усиления τ_α от $G^{1/2} = 1$ до $G^{1/2} = \alpha G_{\text{н}}^{1/2}$

$$\tau_\alpha = -T_1 \ln 2\frac{1-\alpha}{\alpha}G_{\text{н}}^{-1/2}. \tag{68}$$

Для усилителей со связанными резонаторами могут быть получены аналогичные соотношения.

2. Квантовые усилители бегущей волны. Коэффициент усиления и полоса пропускания. Основным недостатком резонаторных квантовых усилителей является их относительная узкополосность. В дециметровом и сантиметровом диапазонах, где $Q_{\text{л}}$ мало, полосой пропускания однорезонаторного усилителя является полоса пропускания регенерированного резонатора. Расширения полосы следует добиваться путем уменьшения степени регенерации и увеличения количества активного вещества. Это может быть достигнуто при взаимодействии излучения с активным веществом в режиме бегущей волны. В квантовом усилителе бегущей волны активное вещество помещается в некоторую волноводную систему, по которой усиливаемое излучение распространяется в виде бегущей волны. При этом происходит экспоненциальное увеличение интенсивности этого излучения. Как правило, для уменьшения размеров устройства используются периодические замедляющие системы. Известно, что показатель экспоненциального затухания амплитуды волны, распространяющейся с групповой скоростью $v_{\text{гр}}$ в таком волноводе, определяется добротностью периода замедляющей системы Q:

$$\alpha = \frac{2\pi\nu}{2Qv_{\text{гр}}}. \tag{69}$$

Это соотношение обобщается на случай систем с комплексной добротностью [29], причем в силе остается использованное выше определение добротности.

Более подробный анализ взаимодействия высокочастотного поля замедляющих систем с парамагнитными кристаллами дан в работах [30, 32]. Очевидно, что при длине системы l коэффициент усиления по напряжению равен $K = \exp(2\pi\nu\, l/2Q_в v_{гр})$. Вводя замедление групповой скорости $m = c/v_{гр}$ и число n длин волн λ_0 в свободном пространстве, укладывающихся на длине системы, получим (с учетом добротности Q_0, описывающей омические потери в замедляющей системе)

$$K = \exp\left\{-\frac{mn\pi}{Q_0} + \frac{mn\pi}{Q_в^0}\frac{1}{1+x_л^2Q_л^2} - j\frac{mn\pi}{Q_в^0}\frac{x_л Q_л}{1+x_л^2 Q_л^{0\,2}}\right\}. \qquad (70)$$

Первый сомножитель этого выражения описывает амплитудную характеристику усилителя бегущей волны, второй — фазовую. Коэффициент усиления по мощности

$$G = |K|^2 = \exp\left\{2\pi mn\left(\frac{1}{1-x_л^2Q_л^2}\frac{1}{Q_в^0} - \frac{1}{Q_0}\right)\right\} \qquad (71)$$

или

$$G = \frac{27{,}3}{Q_в^0}\frac{mn}{1+x_л^2Q_л^2} - L_{дб} \quad (дб). \qquad (72)$$

В резонансе $G^{(0)} = \left(27{,}3\,\dfrac{mn}{Q_в^0} - L_{дб}\right)(дб)$, где $L_{дб}$ — омические потери в замедляющей системе, выраженные в децибелах.

Как и в случае резонаторных усилителей, полоса пропускания КУБВ определяется достигнутым усилением. Однако регенерация в режиме бегущей волны оказывается гораздо более слабой. Из (72) легко получить, что ширина полосы пропускания КУБВ на уровне 3 *дб*

$$\Delta\nu = \Delta\nu_л\sqrt{\frac{3}{G_{дб}^{(0)} + L_{дб} - 3}}. \qquad (73)$$

Существенно бóльшая широкополосность усилителей бегущей волны особенно проявляется в дециметровом и сантиметровом диапазонах. В этих диапазонах применение усилителей бегущей волны приводит к гораздо более широким полосам пропускания, чем в случае однорезонаторных усилителей. Вместе с тем усилители бегущей волны могут оказаться конструктивно более простыми, чем цепочки связанных резонаторов. Кроме того, замедляющие системы, как правило, весьма широкополосны, что позволяет легко производить настройку усилителя на любую из частот рабочего диапазона.

На более высоких частотах полосы пропускания резонаторного усилителя и усилителя бегущей волны не сильно отличаются друг от друга. Так, при усилении на 20 *дб* и потерях в замедляющей системе в 10 *дб* формула (73) дает $\Delta\nu \simeq 0{,}3\,\Delta\nu_л$, а формула (48) для однорезонаторного усилителя при $Q_л \gg Q_в^0 \simeq Q_{св}$ дает $\Delta\nu \simeq 0{,}2\,\Delta\nu_л$.

Нестабильность усиления КУБВ. Более слабая регенерация при взаимодействии излучения с веществом в режиме бегущей волны приводит к большей стабильности КУБВ. Величина относительных флюктуа-

ций усиления, обусловленных изменениями добротности активного вещества, равна

$$\frac{\delta G_0}{G_0} = \ln G_0 \frac{\delta Q_{\text{в}}^0}{Q_{\text{в}}^0}. \tag{74}$$

Аналогично для флюктуации фазы в случае КУБВ имеем:

$$\delta\varphi = \ln G_0 \frac{\delta \nu_{\text{л}}}{\Delta \nu_{\text{л}}}. \tag{75}$$

Следует отметить, что отсутствие регенераторной неустойчивости КУБВ возможно только в том случае, если в усилителе действительно осуществляется режим бегущей волны. Для этого усилитель должен обладать невзаимным, однонаправленным усилением, при котором усиливается только прямая волна, идущая от входа к выходу. Кроме того, для подавления неизбежных отражений, КУБВ должен обладать невзаимным поглощением обратной волны, идущей от выхода ко входу. Если считать, что замедляющая система однородна и отражения имеют место только в ее начале и конце, то величина ослабления обратной волны L должна удовлетворять условию

$$L \gg G\Gamma_1^2\Gamma_2^2, \tag{76}$$

где Γ_1 и Γ_2 — коэффициенты отражения от входа и выхода.

Невзаимность усиления и ослабления в КУБВ достигается использованием областей с круговой поляризацией высокочастотного магнитного поля разных знаков для прямой и обратной волны. В качестве невзаимных ослабителей применяются ферриты, помещенные в области с круговой поляризацией соответствующего знака. В некоторых случаях оказывается возможным применять для этой цели такое же парамагнитное вещество, что и для усиления, только более концентрированное. Поглощение на частоте сигнала для концентрированного вещества практически не меняется при воздействии вспомогательного излучения. Поэтому кристаллы с большой концентрацией парамагнитных ионов поглощают обратную волну, а кристаллы с небольшой концентрацией— усиливают прямую волну. Очевидно, что эти кристаллы должны находиться в высокочастотном магнитном поле с круговой поляризацией разных знаков.

Насыщение усилителей бегущей волны. Как и резонаторный усилитель, усилитель бегущей волны при большом выходном сигнале начинает насыщаться. В случае КУБВ для коэффициента усиления имеем [28]

$$G = G_{\text{н}} e^{-SP_{\text{вх}}(G-1)}. \tag{77}$$

Зависимость $G(P_{\text{вх}})$ приведена на рис. 3 пунктиром. Время восстановления усиления до значения $G = \alpha^2 G_{\text{н}}$ дается соотношением·

$$\tau_{\alpha^2} = T_1 \ln \frac{\ln G_0}{\ln \alpha^{-2}}. \tag{78}$$

Рассмотрение амплитудной и временной характеристик резонаторных квантовых усилителей и квантовых усилителей бегущей волны показывает, что время спин-решеточной релаксации T_1 существенно определяет эти характеристики. Таким образом, увеличение T_1 приводит не только к облегчению условий насыщения по вспомогательному излучению и, тем самым, достижения отрицательной температуры, но и

к уменьшению динамического диапазона и увеличению времени восстановления усиления. В некоторых приложениях, например, в радиоастрономии это обстоятельство не является существенным и следует отдавать предпочтение квантовым усилителям, рабочее вещество которых обладает большим T_1, так как более глубокое насыщение вспомогательного перехода приводит к более стабильной работе. В других же применениях, например, в линиях связи, где возможны быстрые фединги, необходимо улучшение амплитудной и временной характеристик парамагнитных усилителей. Это улучшение должно идти по пути уменьшения T_1.

3. Шумы квантовых усилителей. Основным свойством квантовых усилителей радиодиапазона является низкий уровень их собственных шумов. Теоретическому исследованию вопроса о собственных шумах квантовых усилителей посвящено много работ [33–36]. Источниками шумов являются тепловое излучение стенок резонатора или замедляющей системы и спонтанное излучение в используемой системе уровней при наличии инверсии населенностей.

Прежде чем рассматривать шумовые свойства конкретных видов усилителей и приемных устройств, в которых используются квантовые усилители, полезно отметить принципиальный предел чувствительности, всегда существующий при усилении излучений. В процессе квантового усиления принципиально неустранимым источником шумов является спонтанное излучение. Однако при любом процессе когерентного усиления, в котором увеличивается амплитуда усиливаемого излучения и сохраняется его фаза, должно выполняться соотношение неопределенностей, связывающее неопределенность Δn в числе квантов, составляющих усиливаемое излучение, с неопределенностью $\Delta\varphi$ его фазы [36]:

$$\Delta n \Delta\varphi \geqslant 1/2. \tag{79}$$

Это соотношение неопределенностей в конечном счете определяет чувствительность усилителей любых типов. В идеальном квантовом усилителе спонтанный шум приводит именно к этому пределу [37].

В тех случаях, когда происходит не когерентное усиление излучения, а регистрация излучения, т. е. подсчет числа квантов, составляющих излучение, то информация о фазе излучения полностью теряется и чувствительность регистрирующего устройства может быть сколь угодно велика. Так, например, отсутствуют шумы спонтанного излучения в квантовых счетчиках [38].

Рассмотрение шумов в квантовых усилителях удобно проводить с общей точки зрения, вводящей в рассмотрение понятие эффективной температуры для стационарных неравновесных сред [39]. Известно, что шумовые свойства физических систем, находящихся в термодинамическом равновесии, описываются теоремой Каллена—Велтона. Эта теорема связывает спектральную плотность равновесных флюктуаций в системе с ее абсолютной температурой и мнимой частью адмитанса системы, характеризующей потери в системе. Квантовые усилители, относящиеся к классу неравновесных систем, характеризуются отрицательной эффективной температурой. По определению, эта температура

$$T_{\text{эфф}} = \frac{h\nu}{k \ln(n_1/n_2)}, \tag{80}$$

где n_1 — число частиц на нижнем уровне энергии, а n_2 — на верхнем. В случае инверсии населенностей $n_1 < n_2$ и $T_{\text{эфф}} < 0$.

Обобщение теоремы Каллена—Велтона на случай неравновесных стационарных систем, обладающих отрицательной эффективной темпе-

ратурой, приводит к выражению для спектральной плотности мощности шумов

$$P_\nu = h\nu \frac{\exp(h\nu/k|T_{эфф}|)}{\exp(h\nu/k|T_{эфф}| - 1)}. \tag{81}$$

В случае малой инверсии, т. е. когда $n_2 \gg n_1$,

$$P_\nu = k|T_{эфф}|. \tag{82}$$

К шумам спонтанного излучения добавляются шумы теплового излучения стенок квантового усилителя. При гелиевых температурах они очень малы. Зная спектральный состав флюктуационного излучения в квантовом усилителе, можно определить спектральную плотность его входных шумов или их эффективную температуру.

Рассмотрим усилитель бегущей волны. При учете тепловых шумов стенок волновода и спонтанных шумов инвертированной системы частиц уравнение для спектральной плотности потока энергии в усилителе можно записать в виде

$$\frac{dS}{dx} = -(\alpha - \beta)S + \alpha P_{\nu 0} + \beta P_\nu, \tag{83}$$

где α — показатель затухания в стенках волновода, β — показатель усиления, $P_{\nu 0}$ — спектральная плотность тепловых (равновесных) шумов, а P_ν дается формулой (44). Интегрирование дает.

$$P_{\nu\,вх} = \frac{G-1}{G}\frac{\beta P_\nu + \alpha P_{\nu 0}}{\beta - \alpha}, \tag{84}$$

где $G = \exp[(\beta - \alpha)l]$.

Это соотношение удобно записать в несколько ином виде, выразив параметры α и β через усиление и омические потери в замедляющей системе КУБВ, выраженные в децибелах:

$$P_{\nu\,вх} = \frac{G-1}{G}\left[P_\nu + (P_{\nu 0} + P_\nu)\frac{L_{дб}}{G_{дб}}\right] \simeq P_\nu + (P_{\nu 0} + P_\nu)\frac{L_{дб}}{G_{дб}}. \tag{85}$$

Отсюда следует, что в радиодиапазоне эффективная температура входных шумов квантового усилителя бегущей волны

$$T_{вх} = T_{эфф} + (T_{эфф} + T_0)\frac{L_{дб}}{G_{дб}} \simeq T_{эфф} + T_0\frac{L_{дб}}{G_{дб}}, \tag{86}$$

где T_0 — температура стенок волновода. Если усилитель работает при гелиевых температурах, то последним членом можно пренебречь.

Для резонаторных усилителей разных типов следовало бы проводить в каждом конкретном случае строгое вычисление спектральной плотности отнесенных к входу шумов. Однако малость этих шумов позволяет ограничиться оценкой, легко выполняемой для однорезонаторного усилителя. Для частот, близких к резонансной,

$$P_{\nu\,вх} = \frac{(G^{1/2}+1)^2}{(G^{1/2})^2}\left(\frac{Q_{св}}{Q_в^0}P_\nu + \frac{Q_{св}}{Q_0}P_{\nu 0}\right) \simeq \frac{Q_{св}}{Q_в^0}P_\nu + \frac{Q_{св}}{Q_0}P_{\nu 0}. \tag{87}$$

При больших усилениях $Q_{св} \leqslant Q_в^0$. Следовательно, для резонаторных усилителей радиодиапазона эффективная температура входных шумов

$$T_{вх} = T_{эфф} + T_0\frac{Q_{св}}{Q_0}. \tag{88}$$

Если усилитель работает при гелиевых температурах, то последним членом можно пренебречь.

Таким образом, собственные шумы квантовых усилителей чрезвычайно малы. Поэтому применение квантовых усилителей может привести к значительному улучшению чувствительности радиоприемных устройств. Следует, однако, различать чувствительность собственно квантового усилителя и чувствительность радиоприемного устройства с квантовым усилителем. Первая чрезвычайно велика. Для второй важную роль в определении общего порога чувствительности играют шумы космоса, атмосферы и антенно-фидерных трактов, роль которых существенна именно в силу малости собственных шумов усилителей.

При рассмотрении чувствительности радиоприемных устройств с квантовыми усилителями следует различать устройства, предназначаемые для приема регулярных сигналов, и устройства, принимающие шумовые сигналы. Легко определить выигрыш в чувствительности при приеме регулярного сигнала [40]. В этом случае полоса пропускания сравниваемых приемников должна быть одинаковой, так как выбор полосы пропускания определяется спектральным составом сигнала, стабильностью частоты передатчика и местного гетеродина и т. п. Отношение интенсивности P_0 минимально обнаружимого регулярного сигнала в отсутствие квантового усилителя к интенсивности P сигнала, принимаемого с помощью квантового усилителя, равно

$$\frac{P_0}{P}=\left(\frac{T_а}{T_0}+\frac{\alpha_ф+N}{1-\alpha_ф}\right)\left(\frac{T_а}{T_0}+\frac{\alpha+N/G+T_{эфф}/T_0}{1-\alpha}\right)^{-1}. \qquad (89)$$

Здесь $T_а$ — эффективная температура антенны, обусловленная космическим радиоизлучением и излучением атмосферы, T_0 — температура окружающей среды, N — фактор шумов приемника, $\alpha_ф$ — коэффициент поглощения в антенно-фидерном тракте, $\alpha=\alpha_ф-\alpha_1+\alpha_ф\alpha_1$ — коэффициент поглощения в антенном тракте при наличии квантового усилителя. Отличие α от $\alpha_ф$ обусловлено потерями α_1 в дополнительных подводящих фидерах, ферритовом циркуляторе, если он имеется, и т. п. В реальных условиях $N\gg\alpha_ф$ и $\alpha\gg T_{эфф}/T_0$. Тогда

$$\frac{P_0}{P}=\left(\frac{T_а}{T_0}+\frac{N}{1-\alpha_ф}\right)\left(\frac{T_а}{T_0}+\frac{\alpha+N/G}{1-\alpha}\right)^{-1}. \qquad (90)$$

В типичных условиях сантиметрового диапазона при наблюдении под небольшими углами к горизонту соотношение (90) приводит к десятикратному выигрышу в чувствительности. При больших углах величина выигрыша доходит до $50\div80$. Квантовые усилители коротковолновой части радиодиапазона в силу большей величины факторов шумов приемников значительно увеличивают чувствительность всего устройства в целом, несмотря на возможное увеличение поглощения в атмосфере. Действительно, при больших N

$$\frac{P_0}{P}\simeq\frac{1-\alpha}{1-\alpha_ф}G. \qquad (91)$$

Таким образом, применение квантовых усилителей в качестве входных каскадов приемных устройств, предназначаемых для приема регулярных сигналов, приводит к значительному улучшению чувствительности устройств.

Устройства, принимающие шумовые сигналы, например, радиоастрономические приемники, требуют особого рассмотрения. Их чувствительность, как известно, тем выше, чем шире полоса приема. Поэтому применение квантовых усилителей, при котором, кроме снижения эффективной температуры входных шумов, может произойти уменьшение полосы приема, не обязательно приводит к улучшению чувствительности.

При рассмотрении вопроса о чувствительности радиометров с резонаторными квантовыми усилителями следует иметь в виду соотношения, связывающие коэффициент усиления и полосу пропускания. Это позволяет ожидать существования оптимального значения коэффициента усиления, при котором достигается наилучшая чувствительность. Так происходит потому, что с ростом усиления уменьшается эффективная температура шумов, но вместе с тем сужается полоса. Анализ, проведенный для случая однорезонаторных усилителей [40, 41], показывает, что при малых T_a и хорошем циркуляторе оптимальное значение усиления $G \simeq 4{,}5\ N/\alpha_ф$ и выигрыш в чувствительности равен

$$\frac{\delta T_0}{\delta T} = 0{,}7\left(\frac{N}{\alpha_ф}\right)^{3/4}\sqrt{\frac{G^{1/2}\Delta\nu}{\Delta\nu_0}}, \tag{92}$$

где $\Delta\nu_0$ — полоса пропускания приемника, используемого в радиометре без квантового усилителя. В коротковолновой части радиодиапазона, где N велико и оптимум не может быть достигнут.

$$\frac{\delta T_0}{\delta T} \simeq G^{3/4}\sqrt{\frac{G^{1/2}\Delta\nu}{\Delta\nu_0}}. \tag{93}$$

Многорезонаторные усилители и усилители бегущей волны должны рассматриваться отдельно.

Для достаточно широкополосных усилителей бегущей волны, по-видимому, можно считать, что полосы пропускания радиометров с квантовым усилителем и без квантового усилителя примерно одинаковы. Тогда для оценки выигрыша чувствительности пригодны формулы (89), (91). Следует иметь в виду, что для КУБВ не требуется циркулятор и поэтому практически $\alpha \simeq \alpha_ф$. Более подробно применение КУБВ для приема шумовых сигналов рассмотрено в работе [40].

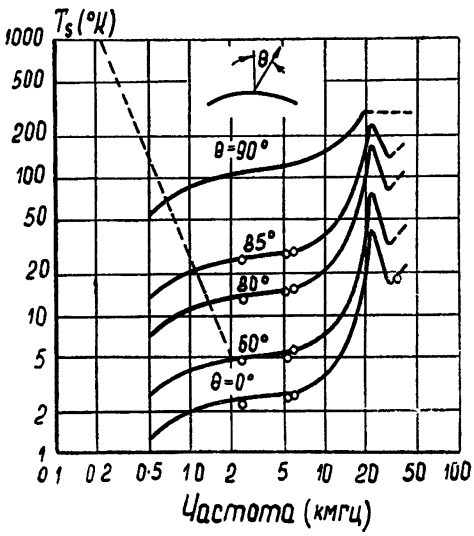


Рис. 12. Зависимость температуры шумов атмосферы от частоты для разных углов места.

На рис. 12 приведены графики, показывающие зависимость температуры шумов атмосферы от частоты для разных углов места [42]. Как следует из приведенного изложения, шумы атмосферы существенно определяют чувствительность радиоприемных устройств с квантовыми усилителями.

4. КОНСТРУКЦИЯ КВАНТОВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ РАДИОДИАПАЗОНА

Блок-схемы квантовых усилителей резонаторного типа и бегущей волны приведены на рис. 13 и 14 соответственно. Рассмотрим отдельные элементы этих схем.

1. Магниты. Конструкция магнита должна обеспечивать магнитное поле достаточной однородности в объеме рабочего вещества и высокой стабильности. Требования к стабильности магнитного поля довольно

высоки. Как следует из проведенного рассмотрения, амплитудная и (в еще большей степени) фазовая стабильность усилителей определяются стабильностью магнитного поля. Так, при усилении 20 *дб* для достижения одноградусной стабильности фазы в случае однорезонаторного усилителя нестабильность поля δH должна удовлетворять неравенству $\delta H \leqslant 1{,}6 \cdot 10^{-3} \Delta H$, где ΔH — ширина линии поглощения ЭПР.

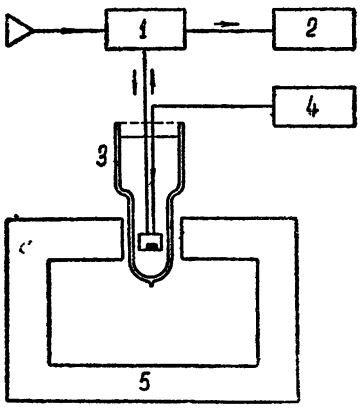


Рис. 13. Блок-схема резонаторного квантового усилителя.

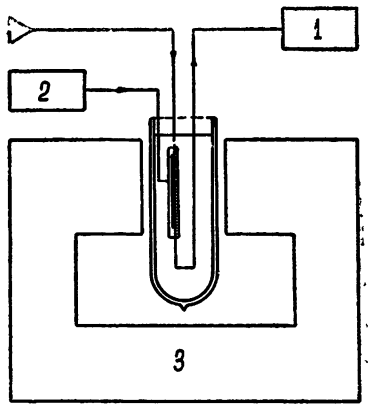


Рис. 14. Блок-схема квантового усилителя бегущей волны.

При лабораторных разработках используются большие электромагниты. Обычно диаметр полюсных наконечников равен 150 ÷ 200 *мм*, зазор 65 ÷ 75 *мм*. Для удобства ориентировки кристаллов в магнитном поле магниты вращаются вокруг вертикальной оси (установка на опорном подшипнике). Стабилизация магнитного поля осуществляется путем стабилизации тока магнита с точностью лучше 10^{-5}. Здесь широкое применение нашли полупроводниковые приборы [43]. Вес электромагнитов достигает 500 *кг*. При переходе от лабораторных разработок к устройствам, предназначаемым для длительной эксплуатации, приходится отказываться от внешних электромагнитов. После того, как выбран режим использования активного вещества, возможно применение постоянных магнитов с небольшими подстроечными катушками. Так был использован [44] постоянный магнит весом порядка 30 *кг* с диаметром полюсных наконечников около 90 *мм* и зазором около 55 *мм*.

При напряженности поля в 2000 *эрстед* путем шиммирования достигнута однородность ±1 *эрстед* в пределах размера образца. При меньших полях, когда требуется меньшая относительная точность установки поля, возможно погружение постоянных магнитов в жидкий гелий без перестройки поля или с небольшой перестройкой магнитным шунтом. Так может быть достигнуто еще большее снижение веса.

Весьма перспективным является применение электромагнитов со сверхпроводящими обмотками. Оказалось, что сверхпроводимость ниобиевых [47] проволок не разрушается вплоть до полей порядка 15 *кгс*. Это позволило разработать конструкции электромагнитов с железным сердечником и соленоидов со сверхпроводящими обмотками. Разработаны конструкции сверхпроводящих соленоидов [46] и магнитов с большим объемом поля [47]. Описана конструкция электромагнита со сверхпроводящими обмотками с поперечным полем большой протяженности (≃ 150 *мм*) для усилителя бегущей волны [48].

Магниты со сверхпроводящими обмотками наряду с малыми размерами и весом приводят к чрезвычайно большой стабильности работы.

усилителей, полностью снимая вопрос о нестабильностях, обусловленных изменениями магнитного поля. Применение сверхпроводящих обмоток естественно сочетается при конструировании квантовых усилителей с использованием жидкого гелия.

В качестве сверхпроводящих материалов могут быть использованы сплавы NbZr [49] и Nb_3Sn [50], позволяющие получить сильные магнитные поля.

2. *Охлаждение.* Необходимость охлаждения рабочих кристаллов до низких температур обусловлена тем, что при низких температурах даже при не очень больших частотах более значительна разность населенностей используемых уровней, и парамагнитые кристаллы имеют достаточно длинные времена спин-решеточной релаксации, позволяющие получать насыщение вспомогательного перехода при небольших (клистронных) мощностях. Хотя известны два успешных эксперимента по запуску квантовых усилителей трехсантиметрового диапазона при температуре жидкого азота [51] и кислорода [52], почти все описанные квантовые парамагнитные усилители работают при температурах жидкого гелия (4,2°К при атмосферном давлении и 1,5 ÷ 2°К при откачке паров гелия до давления 4 ÷ 24 *мм* Hg).

Для применения жидкого гелия необходимы специально разработанные криостаты. В лабораторных условиях наиболее удобными являются двойные стеклянные сосуды Дюара. Внешний сосуд заполняется жидким азотом, создающим тепловой экран. При высоте сосудов порядка 60 *см* и диаметре 6 ÷ 7 *см* и при наличии подводящих волноводов, обычных для трехсантиметрового диапазона, и рассеивании около 10 ÷ 20 *мвт* мощности один литр жидкого гелия испаряется за 5 ÷ 6 часов. Волноводы обычно выполняют из таких материалов, как нержавеющая сталь, нейзильбер, мельхиор и латунь при толщине стенок 0,2 ÷ ÷ 0,3 *мм*. Техника изготовления и работы со стеклянными гелиевыми криостатами хорошо известна (см., например, [53]).

В эксплуатационных условиях более удобны металлические криостаты, которые нашли широкое применение. Особенно привлекательны безазотные металлические криостаты [54]. При емкости в 2 *л* полное испарение жидкости в них происходит за сутки работы.

Отметим, что при применении квантовых усилителей на антеннах, угол места которых должен меняться от горизонта до зенита, используются криостаты с удлиненными горловиной и хвостовым отростком, что позволяет наклонять их на ±45° от вертикали без потери жидкого гелия [44].

Для работы в полевых условиях разработаны малогабаритные гелиевые ожижители непрерывного действия с замкнутым циклом [55]. При теплоподводе, эквивалентном рассеиванию в гелии мощности в 250 *мвт*, температурная нестабильность составляет ±0,06°К.

При работе без откачки паров гелия, т. е. при 4,2°К, приходится принимать меры по устранению микрофонного эффекта, вызываемого пузырьками кипящего гелия. В конструкциях, отработанных для эксплуатации, применяются в этих целях изоляция рабочего вещества и волноводной системы от жидкого гелия, плотное заполнение системы полистироловым пенопластом, усиление конструктивных элементов волноводных систем и плотная посадка образцов рабочего вещества. Каждый из этих способов оказывается достаточно надежным. При работе под откачкой при давлениях, меньших 38 *мм* Hg, гелий переходит в сверхтекучее состояние, бурное кипение прекращается, пузырьки в объеме жидкости не образуются и испарение гелия происходит только с поверхности. При этом микрофонный эффект сразу же прекращается.

Однако работа под откачкой не всегда удобна в эксплуатационных условиях.

Отметим, что при работе с постоянными магнитами может быть удобным применение в качестве хладагента жидкого неона. При атмосферном давлении его температура равна 27,2°К, затвердевает неон под давлением 330 *мм* Hg, имея температуру 24,5°К. Разработаны криостаты для хранения жидкого неона и работы с ним с испаряемостью 0,11% номинальной емкости в час [56].

3 Резонаторы. Наибольшее применение получили отражательные резонаторные квантовые парамагнитные усилители. Необходимо, чтобы ненагруженная добротность резонаторов Q_0 была достаточно велика ($Q_0 \geqslant 3000$). При этом должна быть обеспечена необходимая связь резонатора с сигнальным фидером. При хорошем использовании активного вещества и большой инверсии достигаются значения $Q_{в}^{0} = 100$, в связи с чем необходимы добротности связи $Q_{св} \simeq 100$.

Своеобразие резонаторов квантовых усилителей состоит в том, что они настраиваются не только на частоту сигнала, но и на частоту вспомогательного излучения.

В дециметровом диапазоне и длинноволновой части сантиметрового диапазона двухчастотные резонаторы большей частью являются резонаторами коаксиального типа на частоте сигнала и одновременно объемными резонаторами волноводного типа на частоте вспомогательного излучения. На частоте 300 *мгц* применялся резонатор, состоящий из сверхпроводящей катушки и сосредоточенного конденсатора, помещенных в объемный резонатор вспомогательного излучения [57].

В качестве коаксиальных резонаторов используются либо нагруженные емкостью отрезки коаксиальных линий [58], либо отрезки полосковых линий [59]. Последние предпочтительнее, так как в полосковых резонаторах возможен большой коэффициент заполнения. Возбуждение коаксиальных резонаторов производится большей частью с помощью соответствующим образом расположенных штырей или петель связи, являющихся непосредственным продолжением коаксиальных фидеров. Петли связи располагаются в плоскости полоски у ее закороченного основания. Связь изменяется перемещением петли. Перестройка резонаторов по частоте сигнала производится изменением емкости, нагружающей разомкнутый конец коаксиальной или полосковой линии. Применяется также изменение длины этой линии. На частоте вспомогательного излучения перестройка производится перемещением закорачивающего поршня, связь осуществляется через отверстия в волноводных диафрагмах.

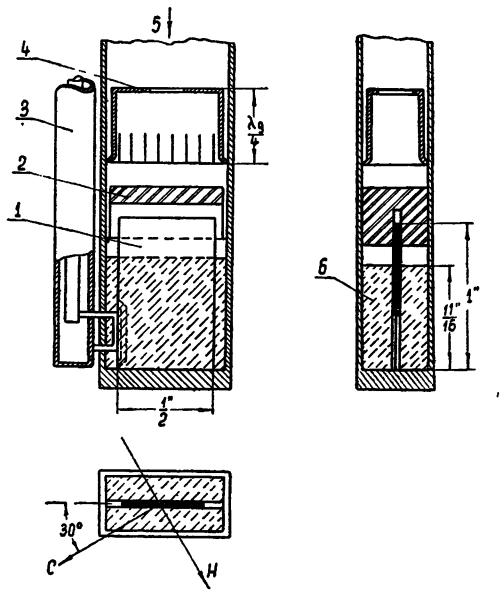


Рис. 15. Полосковый резонатор квантового усилителя:

1 — резонатор, 2 — диэлектрический стержень для настройки резонатора на частоте сигнала, 3 — сигнальная коаксальная линия, 4 — передвижная ирисовая диафрагма, 5 — вспомогательное излучение, 6 — кристалл рубина.

На рис. 15 изображен резонатор усилителя на волну

21 *см* [59]. На более коротких волнах, начиная с $\lambda = 3$ *см* наиболее эффективными оказались целиком заполненные рабочим веществом объемные резонаторы, в которых возбуждаются высшие типы колебаний на частотах сигнала и вспомогательного излучения [60, 61]. Связь с волноводами сигнала и вспомогательного излучения осуществляется отверстиями в металлических стенках резонатора. Изменение связи производится четвертьволновыми диэлектрическими трансформаторами, перемещаемыми перед отверстиями связи. Перестройка таких резонаторов в широких пределах затруднительна. В малых пределах перестройка может осуществляться поршнями, перемещаемыми непосредственно вблизи от рабочего вещества [60]. На рис. 16, 17 изображены резонатор такого типа [61] и макет усилителя. По этому же пути идет освоение более высокочастотного диапазона. На волнах 8 *мм* [62] и 5÷6 *мм* [63] использовались многомодные диэлектрические резонаторы, материалом которых являлось рабочее вещество (рутил), обладающее высокой диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon_\perp = 120$, $\varepsilon_\parallel = 220$ при 4,2°К).

Последнее время стали получать большое распространение связанные резонаторы. На волну $\lambda = 3$ *см* связанные резонаторы изготовляются из рабочего вещества (рубин), покрытого серебром [65] или медью. Связь между резонаторами и входного резонатора с волноводом осуществляется отверстиями, прорезанными в покрытии. В работе [64] пассивный резонатор подобен проходному резонансному волноводному разряднику, в работе [65] пассивный резонатор, будучи полностью подобен активному резонатору, заполнен не рубином, а лейкосапфиром. В дециметровом диапазоне ($\lambda = 21$ *см*) пассивный и активный резонаторы являются полосковыми резонаторами, между которыми осуществляется емкостная связь [66]. Резонаторные квантовые усилители включаются в антенно-фидерный тракт приемного устройства через ферритовые циркуляторы. Применяются как циркуляторы-восьмиполюсники, так и *Y*-образные шестиполюсники.

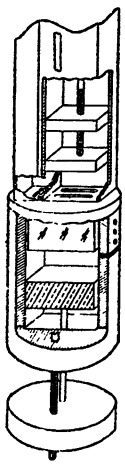


Рис. 16.

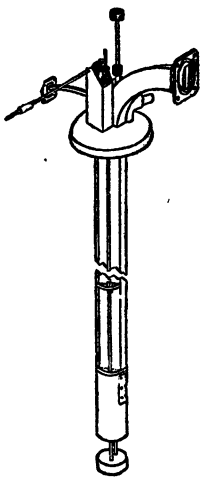


Рис. 17.

Рис. 16. Объемный резонатор квантового усилителя.

Рис. 17. Макет квантового усилителя с объемным резонатором.

4 Замедляющие системы бегущей волны. Замедляющие системы для квантовых усилителей бегущей волны делятся на три типа: диэлектрические, геометрические и резонаторные. Первый из них обычно используется в сочетании с одним из двух последних, так как сами парамагнитные кристаллы обладают значительной диэлектрической проницаемостью. Возможно применение чисто диэлектрической замедляющей системы бегущей волны, когда в качестве рабочего вещества используется рутил [67].

Примером геометрической замедляющей системы может служить проволочная спираль, аналогичная спирали ЛБВ. Однако спирали неудобны тем, что поляризация высокочастотного поля в них не постоянна, а вращается по спирали. Возможно применение плоских спиралей или меандровых линий, особенно в сравнительно длинноволновом диапазоне.

К настоящему времени нашли применение замедляющие системы

резонаторного типа, аналогичные последовательности связанных между собой резонансных контуров. Это периодические структуры типа разомкнутых штыревых гребенок [30, 68, 69] или штырей, замкнутых с двух сторон подобно ступенькам переносной лестницы (система Карпа) [70]. Указанные системы имеют ограниченные, хотя и широкие полосы пропускания. Для периодической структуры с шагом p замедление групповой скорости дается соотношением

$$m \simeq \frac{\lambda}{2p} \frac{\omega}{\Delta\omega},$$

где λ — средняя длина волны, соответствующая частоте ω, а $\Delta\omega$ — полоса пропускания системы. К настоящему времени достигнуты значения $m = 100 \div 250$.

Возбуждение штыревых замедляющих систем по большей части осуществляется штыревыми антеннами, являющимися продолжением коаксиальных фидеров. Применялось также волноводное возбуждение штыревой системы, рассматриваемой как П-образный волновод [68, 69]. Все описанные замедляющие системы помещались в замкнутых отрезках волноводов вспомогательного излучения, которые служили малодобротными резонаторами вспомогательной частоты.

Для эффективного использования замедляющих систем необходимо знать степень замедления групповой скорости, конфигурацию высокочастотных магнитных полей, распределение энергии СВЧ в системе. Определение замедления производится методом снятия дисперсионных характеристик [30, 68], измерения фазовой скорости огибающей [71] или прямым путем — измерением зависимости интенсивности линий ЭПР от ориентации и полярности внешнего постоянного магнитного поля [72]. В последнем случае оказывается возможным провести полный анализ распределения концентрации и поляризации высокочастотных магнитных полей в исследуемой системе. Наличие в замедляющей системе областей с круговой поляризацией высокочастотного магнитного поля разных знаков для прямой и обратной волны позволяет легко создать невзаимное ослабление.

5. ДОСТИГНУТЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В таблице 1 приведена сводка результатов, достигнутых в ряде стран в последнее время при разработке квантовых усилителей радиодиапазона. В диапазоне длин волн $\lambda > 3$ *см* в качестве активного вещества использован рубин. В длинноволновой части диапазона для создания усилителей применяются главным образом уровни энергии иона Cr^{3+} в решетке Al_2O_3 при перпендикулярной ориентации, т. е. когда внешнее магнитное поле перпендикулярно тригональной оси кристалла. Схема уровней была приведена на рис. 7. Здесь могут быть использованы два режима работы. В низких полях для усиления сигнала используются переходы между уровнями 1—2, а вспомогательное излучение прикладывается между уровнями 1—4. Достоинством этого режима работы являются малость магнитного поля (200 $\div$ 700 *гс* для диапазона $\lambda = 10 \div 30$ *см*) и слабая зависимость частоты вспомогательного излучения от частоты сигнала ($\lambda = 2{,}25 \div 2{,}5$ *см* для диапазона $\lambda = 10 \div 30$ *см*). Однако лучшие результаты были получены при более высоких полях, когда для усиления используется переход 3—4, где значения матричных элементов оператора перехода существенно выше, чем в низких полях. В этом режиме используемое вспомогательное излучение большей частью соответствует переходу 2—4 [44, 66, 73].

Еще более хорошие результаты в этом режиме получены при вспомогательном излучении, соответствующем переходу 1—4 [74].

Таблица 1

λ(*см*)	Усиление G(*дб*)	Полоса усилителя $\Delta\nu$(*мгц*)	Тип усилителя	Вещество	Рабочая температура (°К)	Длина волны вспомогательного излучения (*см*)	H (*эрстед*)	Ориентация кристалла θ	Литература
21	20	2	однорезонаторный	рубин	4,2	2,65	2060	90°	44
21	20	4	двухрезонаторный	рубин	4,2	2,65	2060	90°	66
14	30	25	бегущей волны	рубин	1,8	2,38	2450	90°	73
10	20	5,5	однорезонаторный	рубин	1,8	2,15	3000	90°	75
10	47	12	бегущей волны	рубин	1,8	1,13	3000	90°	76
5	20	20	бегущей волны	рубин	4,2	1,3	4000	90°	74
3	20	10	однорезонаторный	рубин	1,6	1,27	4300	54°	61
3	25	20	двухрезонаторный	рубин	4,2	1,27	4300	54°	64
3	20	20	бегущей волны	рубин	1,8	1,27	4300	54°	69
0,88	20	4	однорезонаторный	рутил	4,2	0,42	3300		62
0,53	20	4	однорезонаторный	рутил	4,2	0,38	5500	$\begin{cases}\theta = 73° \\ \varphi = 0\end{cases}$	63

В диапазоне $\lambda < 5$ *см* в случае применения рубина возможно использование так называемого симметричного или пуш-пульного режима работы. Этот режим возможен, когда внешнее магнитное поле направлено под углом $\Theta = 54°44'$ к тригональной оси кристалла. В этом случае уровни энергии располагаются симметрично относительно оси абсцисс (см. рис. 7). Тогда, если сигнал соответствует переходу 2—3, то вспомогательное излучение с частотой $\nu_{13} = \nu_{24}$ одновременно обедняет уровень 2 и обогащает уровень 3. Симметричный режим был осуществлен на волне $\lambda \simeq 3$ *см* в работах [61, 64, 65, 69].

В миллиметровом диапазоне в качестве рабочего вещества применялся рутил, в диапазоне $\lambda = 5 \div 6$ *мм* — в симметричном режиме [63].

Все описанные квантовые усилители радиодиапазона, работающие при гелиевых температурах, обладают эффективной температурой собственных шумов, меньшей 10°К. Усилители, в которых применялся рубин, насыщались при мощностях входного сигнала порядка $10^{-8} \div 10^{-7}$ *вт*. Время восстановления усиления — порядка $0{,}1 \div 0{,}2$ *сек*.

6. ПРИМЕНЕНИЯ КВАНТОВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

Из предыдущего ясно, что при применении квантовых усилителей для достижения наибольшего эффекта необходимо предельно уменьшить потери в антенно-фидерном тракте и интенсивность боковых и заднего лепестков диаграммы направленности антенной системы, которые принимают шумовое излучение земной поверхности, атмосферы, точечных источников космического радиоизлучения и т. п. Кроме того, при применении квантовых усилителей с большим временем восстановления в радиолокационных установках [77] необходимо принимать меры для предотвращения просачивания на вход усилителя мощности зондирующего импульса [78]. Применение квантовых усилителей с ферритовыми или диодными защитными переключателями в радиолокаторах десяти и трехсантиметрового диапазона привело к улучшению чувствительности на $10 \div 10{,}5$ *дб* [79].

Остановимся более подробно на примерах применения квантовых усилителей в трансконтинентальной линии связи через космос [80, 81, 82] и в радиотелескопах [64, 41, 59, 44, 83].

Для наземного радиоприемного устройства линии связи с космическими объектами разработан квантовый усилитель бегущей волны на частотах 5,65 *кмгц* [80, 81]. Анализ температуры шумов атмосферы показывает, что малошумящие приемные системы могут быть реализованы при углах возвышения антенны над горизонтом, превышающих 10°. Применена специально разработанная антенная система, обладающая малыми омическими потерями и очень малыми боковыми и задним лепестками приема (параболический сегмент, непосредственно возбуждаемый прямоугольным рупором). При этом апертуры рупора и сегмента одинаковы. Боковые лепестки сведены на нет тем, что стенки рупора непосредственно переходят в плоскости, ограничивающие сегмент. При вертикально направленной диаграмме приема шириной 2° вклад лепестков в температуру антенны составил 2°К. Температура шумов атмосферы в зените равнялась 2,5°К. Омические потери в антенне давали 1,5°К.

Длина штыревой замедляющей системы усилителя равна 125 *мм*, шаг $\simeq 2$ *мм*, групповая скорость замедлена в 100 раз. Частота вспомогательного излучения равна 18,5 *кмгц*, его мощность 100 *мвт*, магнитное поле 3,9 *кгс*. Применен рубин в перпендикулярной ориентации. При температуре в 1,5°К получено усиление в 35 *дб* при полосе пропускания 25 *мгц*. Для создания невзаимности использован поликристаллический железо-иттриевый гранат. Для предотвращения проникновения мощно-

сти гетеродина в усилитель между усилителем и смесителем включен ферритовый изолятор. Для шумовой калибровки приемника применялась включаемая через направленный ответвитель аргоновая шумовая трубка.

В ясные зимние ночи с антенной, направленной в зенит, полная шумовая температура всего устройства в целом составляла 17,2°К÷18,7°К; температура шумов самого усилителя равнялась 10,5°К.

На рис. 18 приведено схематическое изображение описанной установки, на рис. 19 — фотография всего устройства в целом [42].

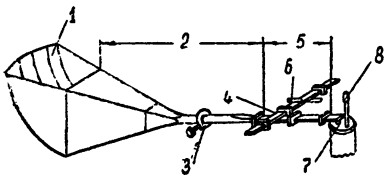


Рис. 18. Схема включения квантового усилителя в малошумящую антенную систему:

1 — параболический рупор (температуры шумов, обусловленных приемом излучения Земли через боковые и задний лепестки и прямым приемом шумов неба, соответственно составляют ≤ 2°К и 2,5°К), 2 — потери в антенном тракте с эквивалентной температурой шумов 1,5°К, 3—вращающееся сочленение, 4—направленный ответвитель с развязкой 26 *дб*, 5 — потери в направленном ответвителе и волноводе с эквивалентной температурой шумов 2°К, 6 — шумовая лампа, 7—вход квантового усилителя бегущей волны с усилением 35 *дб* (эквивалентная температура собственных входных шумов усилителя 10,5°К), 8 - выход усилителя (эквивалентная температура шумов на выходе составляет 58500°К).

Аналогичные усилители разработаны для трансконтинентальных линий связи с пассивной ретрансляцией через искусственный спутник Земли по проекту «Эхо» на частоте 2390 *мгц* [80, 81] и на частоте 4170 *мгц* по проекту «Телестар» [82]. В последнем случае переход от постоянного магнита к электромагниту со сверхпроводящими обмотками дал экономию веса в 125 *кг*.

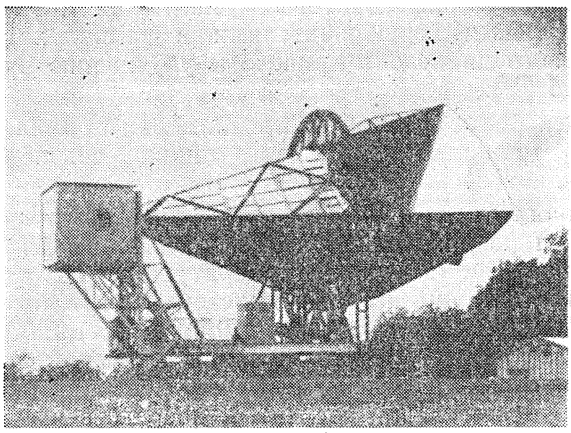


Рис. 19. Фотография приемного устройства наземного пункта линии связи через спутник, в котором использован квантовый усилитель.

Резонаторный квантовый усилитель был применен на волне 21 *см* в радиотелескопе с параболическим зеркалом диаметром около 20 *м* [59, 44, 83]. Использован рубин в перпендикулярной ориентации, постоянный магнит весом около 30 *кг* с диаметром полюсных наконечников около 90 *мм* и зазором 55 *мм*. Однородность поля ±1 *гс* в пределах образца достигнута шиммированием. Напряженность поля 2000 *гс*. Частоте сигнала 1420 *мгц* соответствует вспомогательное излучение 11270 *мгц*. Для лучшего использования высокочастотного магнитного поля тригональная

ось кристалла составляет угол 30° с осью полоски (рис. 15). Произведение $G^{1/2}\Delta\nu$ доведено до 20 *мгц*. Обычно работа проводилась при полосе пропускания в 2 *мгц*. Применен металлический криостат, допускающий отклонение от вертикали на 50°. Усилитель в жесткой раме подвешен в фокусе параболоида.

Использование усилителя в схеме радиометра с автоматической регулировкой усиления [84] привело к заметному увеличению эффективной температуры входных шумов. Поэтому для работы в режиме модуляционного радиометра был разработан антенный переключатель на базе *Y*-образного циркулятора [83]. Частота модуляции равнялась 3,5 *гц;* эквивалентом служило согласованное сопротивление, охлажденное до 4,2°К. Полная шумовая температура всего устройства в целом составила 85°К, из которых 20°К обусловлено излучением, принимаемым боковыми лепестками, и 50°К — двумя циркуляторами. При постоянной времени 50 *сек* и полосе пропускания УПЧ в 1 *мгц*, 150 *кгц* и 80 *кгц* получены чувствительности соответственно 0,014°К, 0,05°К и 0,05°К.

В непрерывном спектре принято излучение от 60 дискретных источников, а на частоте линии водорода — излучение от 23 галактик. Измерены полные массы водорода в пяти галактиках. Впервые на волне 21 *см* измерена поверхностная температура Венеры, оказавшаяся равной 600°К.

Квантовый усилитель на частоту 2388 *мгц* был применен в планетном радиолокаторе для локации Венеры [85]. Использован разомкнутый коаксиальный резонатор фиксированной настройки с емкостной связью,

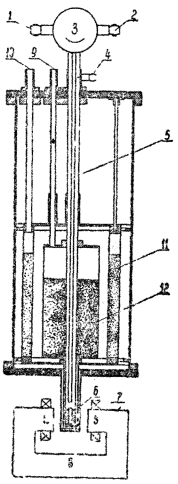


Рис. 20.

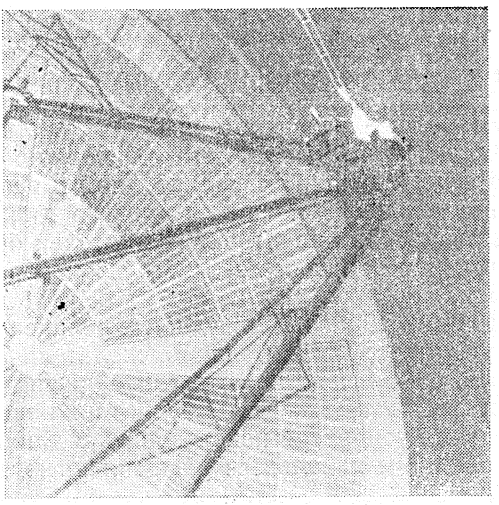


Рис 21.

Рис. 20. Макет квантового усилителя для планетного радиолокатора:

1 — вход сигнала, 2 — выход сигнала, 3 — циркулятор, 4 — вход вспомогательного излучения, 5 — коаксальная линия, 6 — кристалл рубина, 7 — подстроечная катушка, 8 — постоянный магнит, 9 — трубка для заливки жидкого гелия, 10 — трубка для заливки жидкого азота, 11 — сосуд с жидким азотом, 12 — сосуд с жидким гелием.

Рис. 21. Заливка гелия в криостат квантового усилителя, установленного на антенне планетного радиолокатора.

а в качестве рабочего вещества — рубин в перпендикулярной ориентации, вырезанный в виде полого цилиндра; применен постоянный магнит. Резонатор вынесен из криостата на хладопроводе (рис. 20). Обращено большое внимание на жесткость конструкции. Усилитель смонтирован

в фокусе параболической антенны диаметром 26 *м*. Общая температура шумов составляла 63°К. Значение $G^{1/2}\Delta\nu$ равно 25 *мгц*. На рис. 21 показан рабочий момент заливки гелия в криостат, на рис. 22 — общий вид радиолокатора. Измерены коэффициент отражения поверхности Венеры, равный 10 ÷ 15%, и скорость ее вращения (225 земных суток).

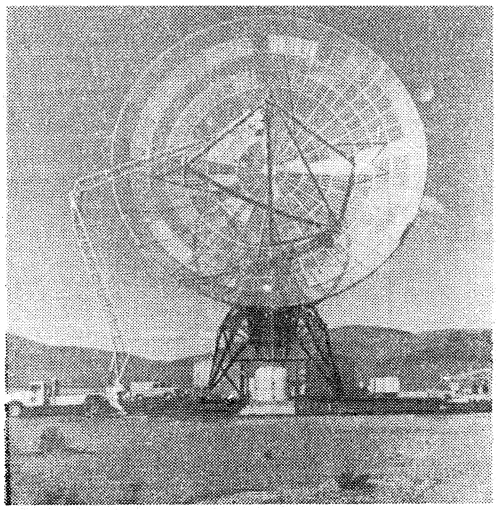


Рис. 22. Общий вид планетного радиолокатора.

7. ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ КВАНТОВЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ РАДИОДИАПАЗОНА

Дальнейшее развитие квантовых усилителей в уже освоенных диапазонах, вероятно, пойдет по пути расширения полос пропускания усилителей и улучшения их амплитудной и релаксационной характеристик. Для дециметрового и сантиметрового диапазонов считается целесообразной разработка квантовых усилителей бегущей волны, усилителей со связанными резонаторами, многорезонаторных систем типа полосовых фильтров.

Для улучшения амплитудной и релаксационной характеристик квантовых усилителей, как правило, желательно изыскивать новые рабочие вещества. Одним из них может быть рутил с ионами хрома или железа. Целесообразно также для увеличения инверсии и, тем самым, полосы пропускания усилителя использовать в длинноволновом диапазоне вещества с большим начальным расщеплением, например, рутил с примесью Cr^{3+}.

Применение квантовых усилителей требует предельного снижения шумов антенно-фидерных трактов; только тогда эти усилители приносят огромный выигрыш [80].

Большой интерес представляют возможности продвижения квантовых усилителей в миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны. Для этой цели прежде всего могут быть использованы парамагнитные кристаллы с большими начальными расщеплениями уровней. В таблице 2 приведен список материалов, которые могут быть использованы в миллиметровом диапазоне.

Надо сказать, что создание квантовых усилителей в миллиметровом диапазоне встречается с рядом трудностей. В этом диапазоне технологически трудно изготовлять добротные объемные резонаторы. Использование самих образцов рабочего вещества в качестве диэлектрических

резонаторов не всегда удобно, так как при больших значениях диэлектрической проницаемости даже очень малые образцы являются многомодными резонаторами. При этом не всегда удается осуществить достаточно сильную связь со всеми типами колебаний, попадающими в ширину инвертированной линии поглощения. Это приводит к тому, что усиление нестабильно, сопровождается генерацией на близких частотах и т. п. [62, 63].

Таблица 2

Вещества с большими начальными расщеплениями

Монокристалл	Ион	Начальное расщепление (*кмгц*)	T_1(*сек*) при 4,2°К для оптимальных концентраций	ε	Литература
Синтетический рутил TiO_2	Cr^{3+}	43,3	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	130÷260	21
	Fe^{3+}	43,3 и 81,3	10^{-3}		21
Синтетический вольфрамат магния $MgWO_4$	Cr^{3+}	48,3	10^{-3}		91
	Fe^{3+}	62 и 75,5			92
Синтетический вольфрамат цинка $ZnWO_4$	Cr^{3+}	52	10^{-3}		93
	Fe^{3+}	62 и 78			92
Природный андалузит Al_2SiO_5	Cr^{3+}	31,97			94
	Fe^{3+}	108 и 324			95
Синтетическая окись иттрия J_2O_3	Gr^{3+}	72,2	10^{-2}	13	21
Природный изумруд $Be_3Al_2Si_6O_{12}$	Cr^{3+}	53,7		7	96
Природный кианит Al_2SiO_5	Fe^{3+}	21 и 60	10^{-3}		97
Синтетический касситерит SnO_2	Fe^{3+}	76 и 92		24	21
Синтетический вольфрамат кадмия $CdWO_4$	Fe^{3+}	62 и 103			92

Гораздо более серьезным при освоении коротковолновой части миллиметрового диапазона и в субмиллиметровом диапазоне является отсутствие достаточно мощных источников еще более коротковолнового вспомогательного излучения. В этой связи представляют большой интерес удачные опыты по созданию состояний с отрицательной температурой в многоуровневых системах для случая $\nu_{сигн} > \nu_{всп}$ при наличии гармонической спин-спиновой кросс-релаксации [15].

В качестве примера отметим, что система из 5 уровней энергий, в которой частоты трех переходов одновременно равны друг другу, использовалась для получения эффекта квантового усиления на волне 3,12 *мм* при вспомогательном излучении с длиною волны 4,62 *мм* [86].

Представляет интерес применение излучения оптических квантовых генераторов для насыщения вспомогательных переходов квантовых усилителей радиодиапазона [87, 88]. Возможно, что в качестве вспомогательного излучения для квантовых усилителей будут использоваться субмиллиметровое или инфракрасное монохроматические излучения, генерируемые в результате смешения на нелинейных элементах мощных монохроматических излучений оптических квантовых генераторов разных частот [89, 90].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Wittke, Proc. IRE, **45**, 291 (1957).
2. J. Weber, Rev Mod. Phys., **31**, 681 (1959).
3. Дж. Зингер, Мазеры, ИЛ, М., 1961.
4. Г. М. Зверев, Н В. Карлов, Л. С. Корниенко, А А. Маненков, А М. Прохоров, УФН, **77**, 61 (1962).
5. E. M. Purcell Phys. Rev., **69**, 681 (1946).
6. R. H. Dicke, Phys. Rev., **93**, 99 (1954).
7. С. А. Альтшулер, Б. М. Козырев, Электронный парамагнитный резонанс, Физматгиз, М., 1961.
8. С. А. Альтшулер, ЖЭТФ, **43**, 2318 (1962).
9. N. Bloembergen, S. Shapiro, P. S. Pershan, J. O. Artman, Phys. Rev., **114**, 445 (1959).
10. Н. Г Басов, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, **28**, 249 (1955).
11. N. Bloembergen, Phys. Rev., **104**, 324 (1956).
12. J. E. King, A. Birko, G. Makhov, Proc. IRE, **47**, 2025 (1959).
13. A. Szabo, Canad. J. Phys., **37**, 1557 (1959).
14. G. Kikuchi, J. Lambe, G. Makhov, R. W. Terhune, J. Appl. Phys, **30**, 1061 (1959).
15. F. R. Arams, IRE Transcet., **MTT-9**, 68 (1961).
16. T. H. Maiman, J. Appl. Phys., **31**, 222 (1960).
17. R. Stahl-Brada, W. Low, Nuovo Cimento Supplemento, **15**, 290 (1959).
18. А. А. Маненков, В. Б. Федоров, ЖЭТФ, **38**, 1042 (1960).
19. А. А. Маненков, А. А. Попова, В. Я Хаимов-Мальков, ФТТ, **5**, 1643 (1963).
20. J. E. Geusic, E. O. Schulz-Du Bois, BSTJ, **38**, 271 (1959).
21. H. J. Gerritsen, Appl. Optics, **1**, 37 (1962).
22. H. J Gerritsen, S. E. Harrison, H. R. Lewis, J Appl. Phys., **31**, 1566 (1960).
23. J. H. Pace, D. F. Sampson, J. S Thorp, Proc. Phys. Soc., **77**, 257 (1961).
24. А А Маненков, В. А Миляев, А. М. Прохоров, ФТТ, **4**, 388 (1962)
25. A. A. Vuylsteke, Elements of Maser Theory, New York, 1960.
26. В Б Штейншлейгер, Радиотехника и электроника, **4**, 1947 (1959)
27. Н В. Карлов, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, **8**, 453 (1963)
28. Н. В Карлов, Ю. П. Пименов, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, **6**, 410 (1961).
29. P. N. Butcher, Proc. IRE, **103B**, 301 (1956).
30. R. W. De Grasse, E. O. Schulz-Du Bois, H. E D. Scovil, BSTJ, **38**, 305 (1959).
31. В М. Конторович, Изв высш уч зав—Радиофизика, **3**, 656 (1960)
32. Г С. Мисежников, В. Б Штейншлейгер, Радиотехника и электроника, **6**, 1546 (1961).
33. R. V. Pound, Ann. Phys., **1**, 21 (1957).
34. M. W. Muller, Phys. Rev., **106**, 8 (1957).
35. M. W. P. Strandberg, Phys. Rev., **107**, 1483 (1957).
36. R. Serber, C H. Townes, Quantum Electronics, New York, 1960
37. H. Heffner, Proc. IRE, **50**, 1604 (1962).
38. Н. В Карлов, А М Прохоров, Радиотехника и электроника, **7**, 328 (1962)
39. Ф. В Бункин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **4**, 496 (1961).
40. Н В. Карлов, Ю. П. Пименов, А. М Прохоров, Радиотехника и электроника, **6**, 416 (1961)
41. J A. Giordmaine, L. E. Alsop, C. H. Mayer, C. H. Townes, Proc. IRE, **47**, 1062 (1959).
42. D. G. Hogg, Solid State Electronics, **4**, 307 (1962).
43. Б. В. Ануфриев, С Б Дохновский, Б. Г. Журкин, Б Д Копыловский, Н А. Пенин, ПТЭ, № 1, 129 (1962).
44. J. V. Jelley, Microwave J., **5**, 77 (1962).
45. S. H. Autler, Rev. Sci. Iustr., **31**, 369 (1960)
46. R. W. Boon, R. S. Livingston, Proc IRE, **50**, 274 (1962).
47. P P. Cioffi, J. Appl. Phys., **33**, 855 (1962).
48. W. G. Nilsen, J. Appl. Phys., **33**, 2522 (1962).
49. В. Р. Карасик, С. Ш. Ахмедов, Вестник АН СССР, № 5, 86 (1962).
50. J. E. Kunzler, E. Buchler, F. S. L. Hsu, J. H. Wernic, Phys. Rev. Lett, **6**, 89 (1961).

51. T. H. Maiman, Quantum Electronics, New York, 1960.
52. C. R. Ditchifield, P. A. Forrester, Phys. Rev. Lett., **1**, 448 (1958).
53. Г. К. Уайт, Экспериментальная техника в физике низких температур, Физматгиз, М., 1961.
54. А. Б. Фрадков, ПТЭ, № 4, 170 (1961)
55. Semiconductor Products, **5**, 65 (1962).
56. А. Б. Фрадков, ПТЭ, № 1, 184 (1963).
57. R. H. Kingston, Proc. IRE, **46**, 916 (1958).
58. S. H. Autler, N. Mc Avoy, Phys. Rev., **110**, 280 (1962)
59. J. V. Jelley, B. F. C. Cooper, Rev. Sci. Instr., **32**, 166 (1961).
60. R. J. Morris, R. L. Kyhl, M. W. P. Strandberg, Proc. IRE, **47**, 80 (1959).
61. P. D. Gianino, F. J. Dominick, Proc. IRE, **48**, 260 (1960).
62. S. Foner, L. R. Momo, J. Appl. Phys., **31**, 742 (1960).
63. D. L. Carter, J. Appl. Phys., **32**, 2541 (1961).
64. J. J Cook, L. G. Cross, Proc. IRE, **49**, 768 (1961).
65. M. E. Bair, R. W. Terhune, R. L. Kyhl, R. A. Mc Farlane, M. W. P Strandberg, Proc. IRE, **50**, 1608 (1962).
66. Р. М Мартиросян, А. М. Прохоров, ПТЭ (в печати).
67. E. S. Sabisky, H. J. Gerritsen, Proc. IRE, **49**, 1329 (1961).
68. Е. Г Соловьев, Е К. Карлова, Радиотехника и электроника, **6**, 406 (1961)
69. Е. К. Карлова, Н. В. Карлов, А. М. Прохоров, Е. Г. Соловьев, ПТЭ, № 2, 107 (1963).
70. G. J. Haddad, J. E. Rowe, Trans. IRE, **MTT-10**, 3 (1962).
71. В Б Штейншлейгер, Г. С Мисежников, ПТЭ, № 6, 133 (1959).
72. Н. В Карлов, Радиотехника и электроника, **6**, 1029 (1961).
73. S. Okwit, J. G. Smith, F. R. Arams, Proc. IRE, **49**, 1078 (1961).
74. В. Б. Штейншлейгер, Г. С. Мисежников, О. А. Афанасьев, Радиотехника и электроника, **7**, 874 (1962).
75. W. S. C. Chang, J. Cromack, A. Siegman, IRE Wescon Convent. Record, **3**, 142 (1959).
76. J. C. Walling, Solid State Electronics, **4**, 225 (1962).
77. R. L. Forward, F. E. Goodwin, J. F. Kiefer, IRE Wescon Convent Record, **3**, 119 (1959).
78. F. E. Goodwin, Proc. IRE, **48**, 113 (1960).
79. J W. Meyer, Solid State Electronics, **4**, 253 (1962).
80. E. A. Ohm, BSTJ, **40**, 1069 (1961).
81. R. W. De Grasse, J. J. Kostelnick, H. E. D. Scovil, BSTJ, **40**, 1117 (1961).
82. J. C. Walling, E. M. Stith, Brit. Commun Electronics, **9**, 596 (1962).
83. B. F. C. Cooper, Rev. Sci. Iustr., **32**, 202 (1961).
84. Н. В. Карлов, Радиотехника и электроника, **3**, 74 (1958).
85. W. H. Higa, Solid State Electronics, **4**, 296 (1962).
86. J. F. Ready, D. Chen, Proc. IRE, **50**, 329 (1962).
87. D. P. Devor, I. J. D'Haenens, C. K. Asawa, Phys. Rev. Lett., **8**, 432 (1962).
88. Г. М. Зверев, А. М. Прохоров, А. К. Шевченко, ЖЭТФ, **44**, 1415 (1963).
89. J. R. Fontana, R. H. Pantell, Proc. IRE, **50**, 1796 (1962).
90. O. P. Gandhi, Proc. IRE, **50**, 1829 (1962).
91. В. А. Ацаркин, Э. А Герасимова, И. Г. Матвеева, А. А. Францессон, ЖЭТФ, **43**, 1272 (1962).
92. M. Peter, L. G. Van Uiter, J. B. Mock, Edvances in Quantum Electronics New York, 1962.
93. Е. Н. Емельянова, Н. В. Карлов, А. А. Маненков, В. А Миляев, А. М. Прохоров, А. В Ширков, ЖЭТФ, **44**, 868 (1963).
94. В. М. Винокуров, М. М. Заринов, В. Г. Степанов, Ю. Е. Польский, Г. К Чиркин, Л. Я. Шекун, ФТТ, **4**, 646 (1962).
95. А. Л. Бильдюкевич, В. М. Винокуров, М. М. Зарипов, В. Г. Степанов, Ю. Е. Польский, Г. К. Чиркин, Л. Я. Шекун, ЖЭТФ, **39**, 1548 (1960).
96. J. E. Geusic, M. Peter, E. O. Schulz-Du Bois, BSTJ, **38**, 281 (1959).
97. W. H. From, Bull-Amer. Phys. Soc., **7**, 307 (1962).

Физический институт им П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
27 июля 1963 г.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

ПРЕЦИЗИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ И СОЛНЦА В 4-х МИЛЛИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН*

А. Г. Кисляков, В. М. Плечков

Измерения проводились в августе—сентябре 1962 г. в высокогорном районе Памира (высота 3860 *м* над уровнем моря). Излучение Луны и Солнца сравнивалось с излучением черного диска с известными угловыми размерами. Оказалось, что яркостная температура Солнца на волне 4 *мм* равна 7300°К ± 200°К, а фазовый ход радиоизлучения Луны на этой волне хорошо описывается законом $\overline{T_e} = [204 + 56 \cos (\Phi - 23°)]$°К, где $\overline{T_e}$ —средняя по диску яркостная температура Луны, а Ф—фаза Луны, отсчитываемая от полнолуния. Точность измерения абсолютного значения $\overline{T_e}$ не хуже 4%. Результаты измерений использованы для оценки излучательной способности почвы Луны и расчета фазового хода радиоизлучения центра лунного диска.

Необходимость прецизионных (с точностью $2 \div 3\%$) измерений радиоизлучения Луны в возможно более широком интервале волн обоснована в работах [1,2]. Наблюдения радиоизлучения Луны на волне 4 *мм*, проведенные в 1960—61 гг. [3,4], были выполнены с недостаточной точностью ($10 \div 15\%$) из-за несовершенства применявшейся в то время методики калибровки радиотелескопа. В августе—сентябре 1962 года были проведены наблюдения радиоизлучения Луны и Солнца в 4-х миллиметровом диапазоне волн, причем использовалась разработанная в НИРФИ при ГГУ им. Н. И. Лобачевского методика прецизионных измерений интенсивности радиоизлучения [5]. С целью реализации возможностей этого метода для наблюдений было выбрано место в высокогорном районе Памира (на высоте 3860 *м* над уровнем моря).

Процедура измерений радиоизлучения Луны (а также и Солнца) заключалась в следующем. Антенна радиотелескопа направлялась поочередно на Луну и на область неба рядом с Луной и таким образом измерялась разность выходных сигналов радиометра $n_л$ для двух положений Луны: на луче антенны и вне его. Величина $n_л$ пропорциональна ослабленному поглощением в атмосфере радиоизлучению Луны. После этого антенна наводилась на «абсолютно» черный диск с угловыми размерами 50′, расположенный во фраунгоферовой зоне антенны (расстояние до диска было около 100 *м*, диаметр антенны 0,5 *м*); затем диск опускался за экран (см. рис. 1). В этом случае разность выходных сигналов радиометра $n_д$ пропорциональна разности яркостных температур диска и неба на уровне диска. Опираясь на результаты работ [3,5], можно показать, что усредненная по диску яркостная температура Луны

$$T_e = \alpha \frac{n_л}{n_д} T_0 e^{-\Delta\gamma} \left[1 + \frac{bH}{T_0} s(\gamma_д) + \frac{\Delta t}{T_0} e^{\gamma_д} \right]. \qquad (1)$$

Здесь α —коэффициент, зависящий при заданной диаграмме направленности антенны от соотношения телесных углов эталонного диска и диска

* Дополненный текст доклада, сделанного на конференции по радиоастрономии (Горький, 27 II 1963).

Луны, T_0—температура в приземном слое воздуха, $\Delta\gamma = \Gamma_0 (\sec\vartheta_д - \sec\vartheta_Л)$, где Γ_0—полное вертикальное поглощение в атмосфере, а $\vartheta_д$ и $\vartheta_Л$ — зенитные расстояния до центров диска и Луны соответственно, b—градиент падения температуры в атмосфере с ростом высоты над поверхностью Земли, H—эффективная высота атмосферы, $\Delta t = T_д - T_0$, где $T_д$—температура материала эталонного диска, функция $s(\gamma_д) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_д^k}{kk!}$.

При обработке экспериментальных данных величина α рассчитывалась по диаграммам направленности антенны, найденным из записей прохождения Солнца через диаграмму. Расчет производился с учетом уширения диаграмм, имеющего место благодаря тому, что угловые размеры солнечного диска сравнимы с шириной диаграммы антенны по уровню 3 *дб*. Величины $\vartheta_Л$, T_0 и Δt измерялись в течение наблюдений почти непрерывно, а Γ_0 — один-два раза (обычно в начале и в конце наблюдений). Зенитное расстояние диска было постоянным и равнялось $\vartheta_д = 75°$. Принималось также, что $b = 6{,}5$ *град·км*$^{-1}$, эффективная высота кислорода в атмосфере равна 5 *км*, а паров воды — 2,2 *км*.

Наблюдения Луны проводились один-два раза в сутки, причем радиоизлучение Луны во время каждого наблюдения фиксировалось 10 ÷ 15 раз. За август и сентябрь проведено более пятидесяти таких наблюдений.

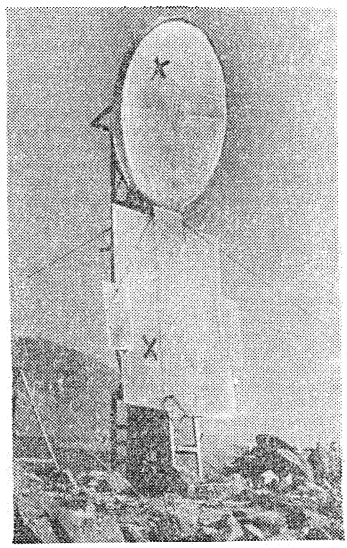


Рис. 1. Внешний вид эталонного диска, применявшегося для калибровки радиотелескопа.

Результаты измерений радиоизлучения Луны суммированы на графике рис. 2. Там же построена кривая

$$\overline{T_e}(\Phi) = [204 + 56\cos(\Phi - 23°)]°\text{К}, \qquad (2)$$

подходящая для аппроксимации эмпирической зависимости $\overline{T_e}(\Phi)$, где Φ — фаза Луны, отсчитываемая от полнолуния. Как видно из графика, кривая (2) заметно расходится с экспериментальными точками в области максимума радиоизлучения. Это можно объяснить влиянием высших гармонических составляющих фазового хода, имеющих в 4-х миллиметровом диапазоне заметную величину [6]. Однако значительный разброс в данных не позволяет с достаточной надежностью определить амплитуду хотя бы второй гармоники.

Точность определения постоянной составляющей яркостной температуры Луны не хуже ±4%. Основная ошибка измерения — флюктуационная—составляет ±2,5%. Кроме того, принимались во внимание возможные неточности в определении расстояния до диска (а следовательно, его угловых размеров) и величины $\vartheta_д$, ширины диаграммы направленности антенны, величины поглощения в атмосфере и параметров b, H, а также температур T_0 и $T_д$.

Рассмотрим теперь полученные результаты измерений радиоизлучения Луны в 4-х миллиметровом диапазоне волн с точки зрения теории

радиоизлучения Луны, развитой в работах [6,7]. Как известно [6], средняя по диску яркостная температура Луны зависит (с точностью до высших гармоник) от фазы следующим образом:

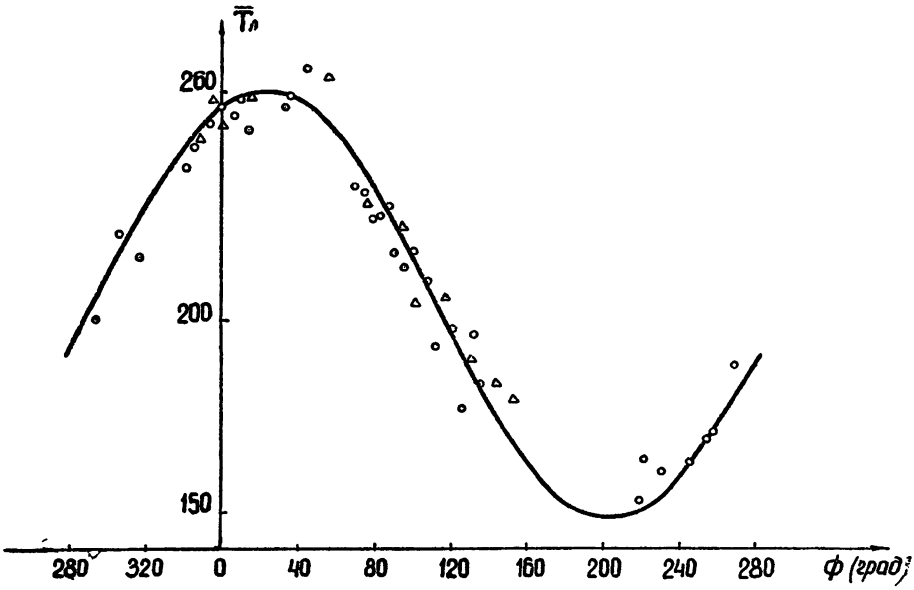


Рис. 2. Фазовый ход интегрального радиоизлучения Луны на волне 4 *мм*: △—экспериментальные значения, полученные в августе, ○—полученные в сентябре.

$$\bar{T}_e = (1 - R_\perp)\,\beta_0 T_= + (1 - R_\perp)\,\frac{T_1\beta_1}{\sqrt{1+2\delta+2\delta^2}}\cos(\Phi - \varphi_1 - \xi_1 - \Delta\xi_1). \quad (3)$$

Здесь $(1 - R_\perp)$ — излучательная способность центра лунного диска, $(1-R_\perp)\,T_=$—постоянная составляющая яркостной температуры центрального элемента поверхности Луны, $(1-R_\perp)\,T_1(1+2\delta+2\delta^2)^{-1/2}$ —амплитуда первой гармоники колебания радиотемпературы центра лунного диска, β_0 и β_1—некоторые коэффициенты, зависящие от ε (диэлектрической проницаемости лунной почвы) и δ (отношения глубин проникновения электрической и тепловой волн в почву Луны). Угол φ_1 дает сдвиг между фазой освещенности и фазой первой гармоники поверхностной температуры Луны, $\xi_1 = \mathrm{arctg}\,[\delta/(1+\delta)]$, а $\Delta\xi_1$ —дополнительный сдвиг по фазе, возникающий вследствие усреднения яркостной температуры по диску Луны. Величина $\Delta\xi_1$ также существенно зависит от ε и δ [6].

Из соотношения (3) можно получить, что

$$\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{M_{экс}T_1}{T_=\sqrt{1+2\delta+2\delta^2}}, \quad (4)$$

где $M_{экс}$—отношение постоянной составляющей яркостной температуры Луны к амплитуде первой гармоники, найденное экспериментально (т. е. из (2)). Величины β_0 и β_1 рассчитаны теоретически в [6], а отношение $T_1/T_=\sqrt{1+2\delta+2\delta^2}$ можно найти, согласно [7], из результатов наблюдений фазового хода радиоизлучения центральной части Луны [4]. Полагая $\delta = 0{,}7$ [4], можно по вычисленному по формуле (4) отношению β_0/β_1 найти соответствующую $\varepsilon_{эфф}$. Опреде-

ленная таким путем величина $\varepsilon_{эфф}$ может быть использована для оценки излучательной способности почвы Луны в 4-х миллиметровом диапазоне волн.

Итак, пользуясь (2), (4) и результатами расчетов в [6], находим, что $\varepsilon_{эфф} \simeq 6$. Однако точность измерения отношений $M_{экс}$ и $T_1/T_= \sqrt{1+2\delta+2\delta^2}$ такова, что величина эффективной диэлектрической проницаемости может заключаться в пределах $1 \leqslant \varepsilon_{эфф} \leqslant 20$. Если же предположить, что $T_=/T_1 = 1{,}5$ [1,2] и основываться только на измерениях $M_{экс}$, полагая $\delta = 0{,}8$ [3,4], то тогда оказывается, что $1{,}4 \leqslant \varepsilon_{эфф} \leqslant 12$ с наиболее вероятным значением $\varepsilon_{эфф} \simeq 3{,}5$.

Наконец, имеется другой способ оценки $\varepsilon_{эфф}$ из полученных результатов—по абсолютной величине постоянной составляющей яркостной температуры $\overline{T}_e(\Phi)$, которая равна 204°К ± 8°К. Полагая, согласно [8], ночную температуру Луны равной $T_н = 125$°К, температуру подсолнечной точки $T_т = 391$°К и предполагая, что широтное распределение поверхностной температуры Луны описывается законом $\sqrt{\cos\psi}$, где ψ—селенографическая широта, можно получить из таблицы 1, имеющейся в [8], что $1{,}2 \leqslant \varepsilon_{эфф} \leqslant 2{,}5$ с наиболее вероятным значением $\varepsilon_{эфф} = 1{,}8$. Отсюда мы можем найти, что средний по диску коэффициент отражения на волне 4 *мм* заключается в пределах $0{,}024 \leqslant \overline{R} \leqslant 0{,}103$, а излучательная способность $0{,}897 \leqslant 1 - \overline{R} < 0{,}976$. В работе [8] таким же путем получено значение $\varepsilon_{эфф}$ для волны 3,2 *см*. Наиболее вероятное значение $\varepsilon_{эфф} = 1{,}4$, причем $1{,}1 \leqslant \varepsilon_{эфф} \leqslant 1{,}7$.

Сравнение значений $(1-\overline{R})$, определенных по результатам прецизионных измерений фазового хода радиоизлучения Луны на волнах 3,2 и 0,4 *см*, указывает, по-видимому, на некоторое уменьшение излучательной способности лунной поверхности с уменьшением длины волны наблюдаемого радиоизлучения. Для более определенного вывода на этот счет необходимы точные измерения интегрального радиоизлучения Луны на волнах короче 0,4 *см*, где ожидаемый эффект должен проявляться более резко.

Аналогично тому, как это делалось в [8], можно по найденным значениям $\varepsilon_{эфф}$ оценить плотность материала, лежащего на поверхности Луны. Формулу Оделевского—Левина можно переписать в виде

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{3\varepsilon_0}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_{эфф}} \, \frac{\varepsilon_{эфф} - 1}{\varepsilon_0 - 1}, \tag{5}$$

где $\varepsilon_0 = 4{,}5$ и $\rho_0 = 2{,}5$ $г \cdot см^{-3}$—диэлектрическая проницаемость и удельный вес лунного вещества в плотном состоянии, а ρ—истинный удельный вес. Из формулы (5) имеем, что для $1{,}2 \leqslant \varepsilon \leqslant 2{,}5$ плотность лунного материала заключается в пределах $0{,}2 \leqslant \rho \leqslant 1{,}2$ $г \cdot см^{-3}$ с наиболее вероятным значением $\rho = 0{,}7$ $г \cdot см^{-3}$.

Воспользуемся теперь проделанной оценкой величины $\varepsilon_{эфф}$ для вычисления величины ξ_1 и фазового хода радиоизлучения центра лунного диска. Известно [9], что $\varphi_1 = 3°$, а $\Delta\xi_1 \simeq -2°$ (для $\varepsilon_{эфф} = 1{,}8$ и $\delta = 0{,}8$) [6]. Поэтому $\xi_1 = 23° + 3° - 2° = 24°$. Очевидно, что фазовый сдвиг для радиоизлучения в центре диска Луны равен $\xi = 24° + 3° = 27°$, что совпадает со значением, полученным в [4].

Теперь мы можем на основании сделанной оценки $\varepsilon_{эфф}$ пересчитать (2) и получить выражение для фазового хода в центре лунного диска:

$$T_e(\Phi) = 221° + 74° \cos(\Phi - 27°), \tag{6}$$

что в пределах точности совпадает с полученным в [4] результатом. Заметим, что (6) представляется более надежным выражением для фазового хода радиоизлучения центра Луны, чем приводимое в [4].

Теперь кратко об измерениях радиоизлучения Солнца на волне 4 *мм*. Эти измерения не были систематическими и проводились всего лишь в течение нескольких дней в конце сентября 1962 г. В результате измерений получилось, что яркостная температура Солнца на волне 4 *мм* равна 7300°К±200°К. Поскольку это первое измерение яркостной температуры Солнца, выполненное с высокой точностью в 4-х миллиметровом диапазоне волн, то какие-либо выводы о медленных вариациях интегрального радиоизлучения Солнца в этом диапазоне пока сделать трудно.

Авторы благодарны В. С. Троицкому за руководство работой, а также В. Д. Кротикову, принимавшему участие в обсуждении ряда вопросов, затронутых в статье. Основную работу по наблюдениям радиоизлучения Луны в Памирской экспедиции выполнили Н. В. Серов, В. Н. Согонов и В. Н. Малафеев. Большую помощь при обработке результатов наблюдений оказал В. А. Порфирьев. Всем этим товарищам авторы глубоко признательны.

ЛИТЕРАТУРА

1 В. С Троицкий, Изв комиссии по физике планет, № 3, 17 (1961).
2 В С Троицкий, Астрон. ж., **39**, 73 (1962).
3 А Г. Кисляков, Изв высш. уч. зав —Радиофизика, **4**, 433 (1961).
4 А. Г. Кисляков, А Е Саломонович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **6**, 431 (1963)
5 В Д. Кротиков, В А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв высш. уч зав.— Радиофизика, **4**, 1004 (1961).
6 В. Д. Кротиков, Изв. высш уч зав —Радиофизика, **6**, 889 (1963).
7 В. С. Троицкий, Астрон. ж, **31**, 51 (1954).
8 В. Д Кротиков и В. С. Троицкий, Астрон ж., **39**, 1089 (1963).
9 В. Д. Кротиков и О Б Щуко, Астрон. ж (в печати)

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 26 апреля 1963 г.

PRECISE MEASUREMENTS OF THE MOON AND SUN RADIATION IN 4 mm RANGE

A. G Kislyakov, V. M. Plechkov

Measurements have been carried out in August—September 1962 in the high-altitude area of the Pamirs (the altitude is 3860 m above the sea-level). The Moon and Sun radiation has been compared with the radiation of black disk of the certain angular dimensions The brightness temperature of the Sun in the 4 mm range has turned out to be equal 7300°K±200°K The phase dependence of the Moon radiation at this wave is well described by the law: $\overline{T_M} = [204 + 56 \cos (\Phi - 23°)]$°K, where $\overline{T_M}$ is the Moon disk average radio temperature; Φ is the Moon phase timing from the full Moon. The measurement accuracy of the absolute value $\overline{T_M}$ is less than 4%. The measurement results have been used for the estimation of the radio emissivity of the Moon soil and the calculation of the phase dependence of radio emission from the centre of lunar disk.

Примечание при корректуре. Поскольку выражение (6) для фазового хода радиоизлучения центра диска Луны представляется более надежным, чем приводимое в [1], то оказывается возможным уточнить значение яркостной температуры Венеры, которое получено в [2] путем сравнения антенных температур, получившихся при наведении антенны на центр диска Луны и на Венеру. Уточненное значение яркостной температуры Венеры равно 370°К ± 90°К.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, Изв высш уч зав.—Радиофизика, **4**, 433 (1961).
2. А. Г. Кисляков, А Д. Кузьмин и А. Е Саломонович, Астрон ж., **39**, 410 (1962).

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1964*

К ВОПРОСУ ОБ ОБНАРУЖЕНИИ ВОДЫ В АТМОСФЕРЕ ВЕНЕРЫ*

А. Е. Саломонович

В свете новых данных о спектре радиоизлучения неосвещенной стороны Венеры рассматривается вопрос о природе облачного слоя планеты и о возможности обнаружения в ее атмосфере водяного пара.

Как известно, вопрос о наличии в атмосфере Венеры воды в газообразном, жидком или кристаллическом состоянии до последнего времени не может считаться решенным. Наблюдения Синтона [1] указывают на наличие в спектре отраженного света линий, характерных для кристаллов льда. С другой стороны, последние наблюдения Мороза [2] не подтверждают эти данные. Поляризационные наблюдения Лио [3] указывают на наличие рассеивающих частиц диаметром порядка 2μ, однако частицы этих размеров не обязательно должны быть кристалликами льда или водяными каплями. Выяснению этого вопроса могли бы способствовать измерения зависимости интенсивности рассеянного света от длины волны; однако такие наблюдения пока не выполнены и состав облачного слоя Венеры остается неопределенным.

Сведения о наличии водяного пара над облачным слоем достаточно неопределенны. Данные измерений поглощения солнечного света на волне 1,13 μ, выполненных на шаре-зонде [4], свидетельствуют о присутствии водяного пара. Его количество оценивается в 0,05 ± 0,04 *мм* осажденной воды; однако точная величина содержания пара также остается неопределенной, так как на результатах измерений, возможно, сказываются остатки водяного пара земной атмосферы.

Наличие водяного пара в подоблачной части атмосферы Венеры тем более не может считаться установленным. Принципиально новую возможность выяснения этого вопроса дают, как известно, радиоспектроскопические исследования излучения Венеры в миллиметровом диапазоне волн вблизи от резонансных линий $\lambda = 1{,}62$ *мм* и $\lambda = 13{,}5$ *мм*, обусловленных взаимодействием поля СВЧ излучения с постоянным дипольным электрическим моментом молекулы H_2O. Для $\lambda \geqslant 5$ *мм* коэффициент поглощения в водяном паре может быть представлен выражением [5].

$$\alpha_{H_2O} = \frac{SN\nu^2 e}{T}\left[\frac{\Delta\nu_1}{(\nu-\nu_{01})^2+\Delta\nu_1^2}+\frac{\Delta\nu_1}{(\nu+\nu_{01})^2+\Delta\nu_1^2}\right]+ \\ +\frac{S'Ne\nu^2\Delta\nu_2}{c^2T}, \tag{1}$$

где первый член обусловлен резонансным поглощением на $\lambda = 13{,}5$ *мм*, а второй—вкладом всех резонансов на более высоких частотах. Постоянные S и S' определяются параметрами молекулы, N—полное значение

---

* Доложено на Всесоюзной конференции по радиоастрономии в г. Горьком 28 февраля 1963 г

числа молекул газа в $см^3$, а e—число молекул H_2O. Температура газа T, скорость света c.

Задаваясь распределением температуры T и давления P с высотой, а также учитывая нерезонансное поглощение в углекислом газе (единственной компоненте, уверенно отождествленной в атмосфере Венеры), Баррет [6] построил спектры усредненной по диску яркостной температуры планеты. При этом значение температуры на поверхности Венеры принималось равным 580°К, т. е. близким к установленным по наблюдениям на волнах $3 \div 10$ *см* яркостным температурам неосвещенной стороны диска. Температура на уровне облачного слоя, ниже которого градиент считался адиабатическим, принималась равной 285°К в соответствии с результатами измерений ширины вибрационно-ротационных полос поглощения CO_2 на волне $\sim 0{,}8\ \mu$ [7]. Следует подчеркнуть, что некоторые спектры яркостной температуры Венеры, построенные Барретом, удовлетворительно согласовались лишь с единственными известными ему данными измерений в миллиметровом диапазоне—на волне 8,6 *мм* [8] и данными на волнах $\lambda \geqslant 3$ *см*.

Позднее Саган [9] пересмотрел расчеты Баррета. При этом основным аргументом критики являлось несоответствие содержания водяного пара ($1 \div 3\%$) и величины атмосферного давления на уровне облачного слоя (до 1 *атм*) в модели Баррета результатам наблюдений [1,4] и некоторых других. Кроме того, принятый Барретом для ночной стороны адиабатический градиент температуры в подоблачной атмосфере отвергался на том основании, что данные ряда радионаблюдений указывали на наличие заметного фазового хода. Последнее приводит к существенно более высокой температуре на освещенной стороне планеты. В свою очередь, это свидетельствует о меньшей величине градиента температуры на неосвещенной стороне по сравнению с адиабатическим. Саган показал, что при этих новых параметрах поглощение в углекислой атмосфере заведомо не может объяснить данные о яркостных температурах радиоизлучения, имевшиеся ко времени создания этой модели [8,10]. Вместе с тем то сравнительно небольшое обилие водяного пара, которое следует из наблюдений Стронга [4], не может, по мнению Сагана, оказать заметного влияния на спектр яркостных температур в миллиметровом диапазоне.

Для объяснения результатов радионаблюдений Саган рассмотрел облачный слой, состоящий в верхней своей части из ледяных кристаллов, а в нижней—из капель воды. Соответствующим подбором водности и глубины облачного слоя ему удалось согласовать имевшиеся ко времени построения этой модели данные, упомянутые выше. В модели Сагана водяной пар ниже облачного слоя присутствует, но играет лишь косвенную роль: он обеспечивает поддержание облачного слоя необходимой мощности. Кроме того, за счет интенсивного поглощения инфракрасного излучения, водяной пар создает условия, необходимые для разогрева поверхности планеты.

Данные наблюдений радиоизлучения Венеры в миллиметровом диапазоне, полученные в 1961 г. [11–13], а также в 1962 г. [14] позволяют продискутировать вопрос о наличии водных облаков и водяного пара в атмосфере Венеры.

Пусть наблюдаемое радиоизлучение Венеры представляет собой тепловое излучение ее поверхности, частично ослабленное в атмосферном углекислом газе и в расположенном выше изотермическом и однородном облачном слое, состоящем из капелек воды. В этом случае яркостная температура, усредненная по видимому диску планеты, определяется следующим выражением [6]:

$$T_{\text{В}} = 2E_1(\tau_{\text{обл}})\,T_{\text{В}_0} + T_{\text{обл}}\,[1 - 2E_1(\tau_{\text{обл}})], \tag{2}$$

где $T_{\text{В}_0}$ — яркостная температура в отсутствие облачного слоя, $\tau_{\text{обл}}$ — оптическая толщина облачного слоя,

$$E_1(\tau) = \int_0^1 \mu e^{-\tau/\mu}\, d\mu \tag{3}$$

— функция, учитывающая эффект усреднения по сферически симметричному однородному слою.

В свою очередь, яркостная температура $T_{\text{В}_0}$ определяется выражением

$$T_{\text{В}_0} = 2\varepsilon T_{\text{пов}} E_1(\tau_{\text{атм}_1}) + 2\int_{\tau_{\text{атм}_1}}^{\tau_{\text{атм}_2}} T(\tau)\, E_2(\tau)\, d\tau, \tag{4}$$

где $T_{\text{пов}}$ — температура поверхности планеты, ε — ее излучательная способность, $\tau_{\text{атм}_1}$ и $\tau_{\text{атм}_2}$ — оптические толщи атмосферы на уровне облачного слоя и на поверхности соответственно, а

$$E_2(\tau) = \int_0^1 e^{-\tau/\mu}\, d\mu \tag{5}$$

— функция, учитывающая усреднение по сферически симметричной атмосфере.

Спектр $T_{\text{В}_0}(\lambda)$ можно построить на основе имеющихся наблюдательных данных, исходя из предположения, что на волнах $\lambda \geqslant 3$ *см* яркостная температура Венеры, равная $T_{\text{В}} \simeq 600°\text{K}$ [14], обусловлена излучением ее поверхности, а излучательная способность, по данным радиолокационных наблюдений, близка к 0,9 (см., например, [15]). Мы можем считать, что $\varepsilon T_{\text{пов}} = 600°\text{K}$, а $T_{\text{пов}} = 670°\text{K}$. Многие данные о фазовом ходе усредненной по видимому диску яркостной температуры Венеры, например, [16], свидетельствуют против утверждения о сильном различии температур освещенной и неосвещенной сторон планеты. Поэтому утверждение Сагана о том, что на неосвещенной стороне планеты температурный градиент существенно отличен от адиабатического, представляется недостаточно обоснованным.

Мы допустим, что этот градиент близок к адиабатическому и одинаков на всех высотах ниже облачного слоя. Согласно данным спектроскопических измерений и наблюдений покрытия Регула примем, что атмосфера на 20% состоит из CO_2 и на 80% из N_2, а атмосферное давление на уровне облачного слоя составляет 90 *мб* [17]. Считая также для простоты, что $\gamma = C_p/C_v$ постоянно на всех высотах вплоть до облачного слоя, определим $\tau_{\text{атм}_1}$ и $\tau_{\text{атм}_2}$ — оптические толщины атмосферы на уровне облачного слоя и на поверхности планеты для интересующего нас диапазона волн. Зная зависимости $T(\tau)$ и $E_2(\tau)$, можно найти затем спектр $T_{\text{В}_0}(\lambda)$. Результаты соответствующих расчетов приведены на рис. 1. Из него следует, что наблюдаемое уменьшение яркостной температуры на волнах $\lambda < 3$ *см* не может быть объяснено одним лишь поглощением в углекислом газе атмосферы.

Как указывалось выше, Саган [9] предложил ввести дополнительное поглощение в водяном облачном слое, обладающем протяженностью и водностью, необходимыми для истолкования известных данных о радиоизлучении Венеры на волнах диапазона 8 *мм* [8,10]. В настоящее время получены более полные данные о яркостных температурах ночной

стороны Венеры на ряде волн в интервале от 0,4 *см* до 3 *см*. Рассмотрим, можно ли, исходя из предположения о наличии водного облачного слоя, с необходимой точностью удовлетворить всем имеющимся наблюдательным данным.

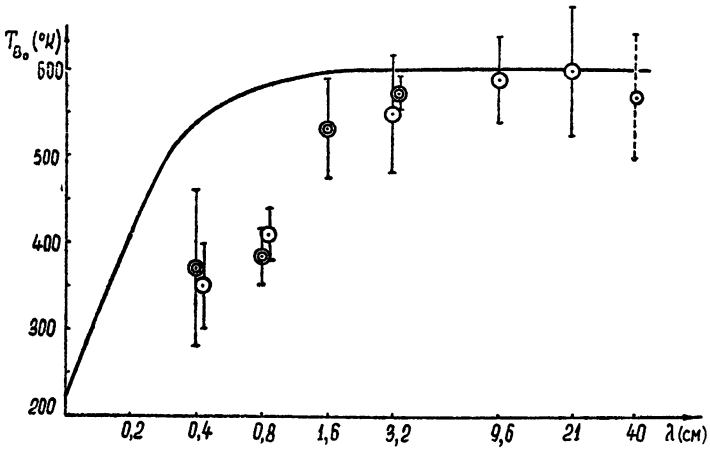


Рис. 1. Зависимость $T_{B_\circ}$ — яркостной температуры Венеры, усредненной по видимому диску, от длины волны (без учета влияния облачного слоя). Состав атмосферы. 20% CO_2 и 80% N_2.

Как известно [18], для оптической толщины однородного облачного, в частности, водного слоя справедливо следующее выражение:

$$\tau_{\text{обл}} \simeq \frac{4\pi^2 a^3}{\lambda} C(\lambda) Nl, \tag{6}$$

где

$$C(\lambda) = \frac{6\varkappa_2}{(\varkappa_1 + 2)^2 + \varkappa_2^2},$$

$$\varkappa_1 = n^2(1 - \chi^2), \qquad \varkappa_2 = 2n^2\chi, \qquad n_c = n(1 - i\chi),$$

или

$$\tau_{\text{обл}} \simeq \frac{3\pi}{\lambda\rho} C(\lambda) w.$$

Здесь λ — длина волны, N — число капель в единице объема, l — протяженность облачного слоя, n и $n\chi$ — действительная и модуль мнимой части комплексного коэффициента преломления воды n_c, a — средний радиус капель ($2\pi a \ll \lambda$), ρ — средняя плотность капель, w — поверхностная плотность облака ($w = 4/3\,\pi a^3 \rho N l$ $г \cdot см^{-2}$). Таким образом,

$$\frac{\tau_{\text{обл}}(\lambda_1)}{\tau_{\text{обл}}(\lambda_2)} = \frac{C(\lambda_1)}{C(\lambda_2)} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \tag{7}$$

Используя данные измерений n и $n\chi$ воды на волнах сантиметрового и миллиметрового диапазонов [19], производя в необходимых случаях интерполяции для промежуточных значений λ, а также экстраполируя данные измерений к более коротким длинам волн, мы можем получить величины коэффициента $C(\lambda)$ для интересующего нас диапазона. Для приближенных оценок с достаточной точностью можно полагать $C(\lambda) \sim 1/\lambda$ (см., например, [18]).

Следуя [17], примем среднюю температуру облачного слоя $T_{обл} = 234°К$*.

Найдем теперь значения $\tau_{обл}(\lambda)$, которые приводят к $T_В$, наблюдаемым в миллиметровом диапазоне волн. Задавшись значением $T_В$ для какой-либо фиксированной волны λ, и воспользовавшись формулой (2), можно найти $\tau_{обл}$ для этой волны. Затем по формуле (7) нетрудно рассчитать $\tau_{обл}(\lambda)$ и $T_В$ для всего интересующего диапазона волн. Наиболее близко согласуется с известными данными кривая 1 на рис. 2, где даны также значения $T_В$, полученные из наблюдений [14].

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что ни одна из экспериментальных точек не укладывается на кривую. Если принять, например, поверхностную плотность водного облачного слоя

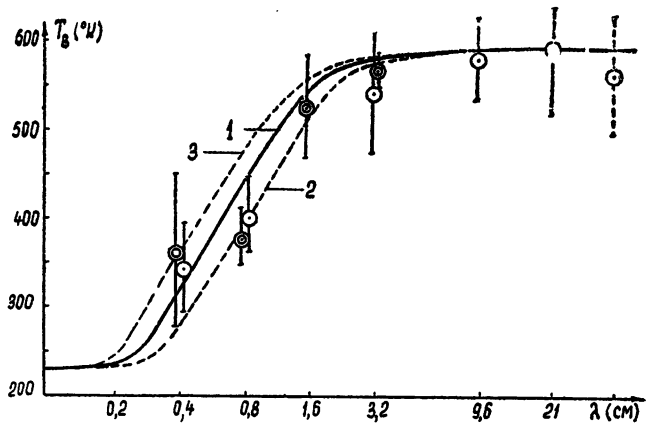


Рис. 2. Зависимость $T_В$ — яркостной температуры Венеры, усредненной по видимому диску, от длины волны (с учетом влияния водного облачного слоя):

1—поверхностная плотность слоя $w=0{,}14$ *г см*$^{-2}$; 2—поверхностная плотность слоя $w=0{,}2$ *г·см*$^{-2}$; 3—поверхностная плотность слоя $w=0{,}05$ *г·см*$^{-2}$. Температура облачного слоя $T_{обл}=234°К$.

($w = 0{,}2$ *г·см*$^{-2}$), необходимую для совпадения $T_В$ на волне $\lambda=0{,}8$ *см* ($T_В = 390°К$, кривая 2), то увеличивается расхождение для волны $\lambda = 0{,}4$ *см*. Если, напротив, принять такой слой, при котором обеспечивается совпадение с $T_В = 360°К$, измеренной на волне $\lambda=0{,}4$ *см* ($w=0{,}05$ *г·см*$^{-2}$, кривая 3), возникает расхождение на волнах $\lambda=0{,}8$ *см* и более длинных. Хотя указанные расхождения не очень велики, они все же находятся на пределе ошибок измерения.

Рассмотрим возможные причины расхождения. Допустим, что результаты измерений на всех волнах, кроме $\lambda = 0{,}4$ *см*, занижены. Это предположение представляется мало вероятным, поскольку измерения на волнах 0,8 *см*, 0,86 *см*, 1,6 *см* и 3,3 *см* проводились в различные циклы наблюдений различными наблюдателями и их результаты все вместе в пределах ошибок измерений укладываются на кривую 2 рис. 2. Более вероятным представляется, что завышены результаты измерений на волнах 4 *мм* диапазона. Однако и это предположение вряд ли обосновано, так как систематические ошибки в циклах наблюдений [11,13, 14]

* Согласно данным Спинрада [24], температура, полученная из анализа ротационных полос CO_2 и использованная Барретом [6], относится, по-видимому, к более глубоким слоям атмосферы Венеры, где давление составляет несколько земных атмосфер (см ниже)

учитывались достаточно тщательно. В частности, в работе [13] коэффициент использования антенны принимался равным $K = 0{,}6$. Чтобы понизить T_B ($\lambda = 0{,}4$), необходимо допустить $K > 0{,}6$, что мало вероятно. Хотя, конечно, нельзя исключить возможность объяснения расхождений ошибками измерений, есть основания считать эти расхождения реальными и попытаться продискутировать их возможные причины.

Здесь можно высказать следующее соображение. При построении кривых $T_B(\lambda)$ мы принимали сравнительно низкую температуру облачного водного слоя ($T_{обл} = 234°K$). Допустим, что на самом деле средняя температура слоя, ответственного за ослабление радиоизлучения, выше и достигает величины $T_{обл} = 350°K$. Легко видеть, что в этом случае при некоторой величине w построенный спектр $T_B(\lambda)$ лучше согласуется с данными всех наблюдений (рис. 3). Однако при давлении на уровне облачного слоя $\sim 0{,}1$ *атм* [17] температура кипения воды падает до 319°K и существование жидкого водного слоя требуемой температуры оказывается невозможным. Максимально допустимая средняя температура водных облаков не превышает, по-видимому, 300°K.

Повышение температуры водного облачного слоя влечет за собою

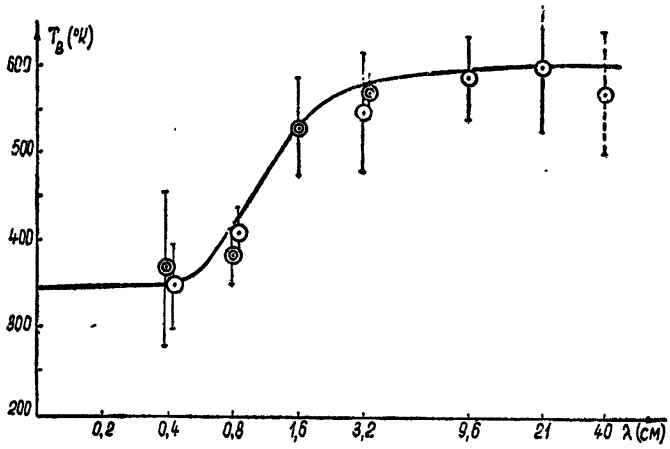


Рис. 3. Зависимость от длины волны T_B с учетом влияния облачного слоя ($T_{обл} = 350°K$, поверхностная плотность слоя $w = 0{,}385$ $г \cdot см^{-2}$).

увеличение давления на уровне этого слоя. Но если давление в облачном водном слое приближается к 1 *атм*, содержание водяного пара над облачным слоем должно быть существенно больше, чем это оценивается по измерениям Стронга [4]. Таким образом, гипотеза горячего водного облачного слоя оказывается плохо обоснованной.

С другой стороны, предложенную Саганом модель с холодным водным облачным слоем с трудом удается согласовать с данными наблюдений во всем диапазоне миллиметровых волн. Прямой ответ на вопрос об эффективной температуре поглощающего слоя могли бы дать измерения яркостной температуры Венеры на волнах $1 \div 2$ *мм*; однако проведение точных измерений в этом диапазоне с поверхности Земли представляет значительные трудности.

Если мы хотим сохранить представление о поглощающем жидком облачном слое*, необходимо повысить его температуру, и, по-видимому,

* Мы не рассматриваем здесь возможность возвращения к первоначальной модели Баррета [6], объясняющей наблюдаемый спектр присутствием очень плотной углекислой атмосферы, хотя эта возможность в свете последних данных Спинрада [24] и некоторых других не исключается

изменить его состав, отказавшись от представления о том, что он образован капельками воды.

Если вернуться к гипотезе более нагретого облачного слоя ($T_{обл}$ = 350°К), то он должен состоять из капель жидкости, температура кипения которой при давлениях ~ 0,1 *атм* превышает 350°К. Если облачный слой не водный, то остается мало оснований для присутствия в атмосфере Венеры водяного пара в заметных количествах, как это предполагал Баррет [6]. Поэтому обнаружение в спектре глубоких провалов, обусловленных резонансной линией водяного пара на волне 13,5 *мм*, представляется мало вероятным*. С другой стороны, если облачный слой состоит из каких-либо других веществ, например, углеводородов, есть основания полагать, что в спектре яркостной температуры могут оказаться линии, обусловленные резонансами в молекулах этих веществ.

Монотонный ход спектра, обусловленный совместным действием углекислой атмосферы и жидкого облачного слоя, может быть нарушен при наличии резонансных линий каких-либо молекул, присутствующих в атмосфере, и, возможно, образующих облачный слой. Рассмотрение спектра $T_B(\lambda)$ указывает на то, что искать эти линии, вероятно, имеет смысл в интервале от 0,4 *см* до ~ 1 *см*, где заметно отклонение от монотонности.

Предполагая, что эффективная температура облачного слоя не превышает в среднем 280 ÷ 300°К, мы можем представить себе наличие «завала» в спектре между 0,4 и 0,8 *см*, обусловленного размытыми линиями каких-либо соединений.

Из изложенного выше следует, что нельзя ожидать значительных перепадов яркостной температуры радиоизлучения Венеры вблизи от резонансной линии водяного пара λ = 13,5 *мм*. Тем не менее, задача обнаружения этой линии не снимается, так как в небольших количествах водяной пар может присутствовать в атмосфере планеты. Вместе с тем можно ожидать наличия ряда линий в миллиметровом диапазоне волн, в частности, линий CH_2O, C_2H_2O, CH_2O_2.

В связи с неясностью природы облачного слоя Венеры особое значение приобретают радиоспектроскопические исследования ее излучения в миллиметровом диапазоне волн. Предлагаемая для подобных исследований методика, заключающаяся в регистрации потоков излучения в дискретных интервалах спектра с помощью различных радиометрических устройств [20], не может быть признана подходящей. Различия в параметрах антенных устройств и методах калибровки, а также требования высокой стабильности и достаточной чувствительности радиометров во время измерений делают результаты таких измерений крайне ненадежными.

Обнаружение линии λ = 13,5 *мм*, а также спектральных линий, обусловленных присутствием в планетной атмосфере других молекул (главным образом углеводородных), относится к числу задач, решаемых спектральной радиоастрономией. Вместо наблюдений с помощью раздельных радиометров, позволяющих лишь весьма грубо оценить изменение спектральной плотности с длиной волны, необходимо использовать современные методы. Одним из них является метод периодического переключения полосы радиометра между двумя или несколькими фиксированными каналами с помощью поочередного включения двух или нескольких гетеродинов с фиксированной настройкой [21]. Другим методом может явиться способ сравнения спектральной плотности

* С этим согласуются результаты наблюдений на волне λ = 13,5 *мм* [23] (T_B = 520 ± 40°К), хотя точность измерений здесь, по-видимому, недостаточна

в узкополосном и широкополосном каналах с применением нулевого метода в широкополосном канале. Этот метод, предложенный Бородзичем и Сороченко [22], в принципе позволяет обнаруживать достаточно слабые спектральные линии на фоне широкополосного излучения источника.

При использовании последнего метода возникает трудность, связанная с относительно большой шириной линий, подлежащих обнаружению. Ввиду значительной плотности атмосферы планеты ширина линии, вероятно, достигает $\sim 10^8$ *гц*, что осложняет применение обычных малошумящих усилителей соответствующего диапазона. Тем не менее, в случаях, когда антенная температура Венеры, регистрируемая радиометром, может быть сделана достаточно большой, возможно использование весьма широкополосных приемников прямого усиления, в которых может быть реализована полоса, превышающая в 4-5 раз ширину обнаруживаемой линии, что необходимо для эффективного использования упомянутого метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. M. Sinton, Comp. on Planetary Atmospheres, New York, Acad. Press, 1962.
2. В. И. Мороз, Астрон ж., **40**, 144 (1963).
3. B. Lyot, Ann. Obs. Mendon, **8**, 66 (1927).
4. J. Strong, J. Geophys. Res., **65**, 2526 (1960).
5. Таунс и Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1955.
6. A. H. Barrett, Astrophys. J., **133**, 281 (1961).
7. J. W. Chamberlain, G. P. Kuiper, Astrophys. J., **124**, 399 (1956).
8. Дж. Е. Гибсон, Р Мак Ивен, Радиоастрономия, ИЛ, М., 1961, стр 56
9. C. Sagan, L. Giver, Microwave Radiative Transfere in the Atmosphere and Clouds of Venus., Rep. Am. Geophys Union Symp., 1961.
10. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., **37**, 297 (1960).
11. А Г. Кисляков, А Д Кузьмин, А Е. Саломонович, Астрон. ж, **39**, 410 (1962).
12. А. Д. Кузьмин, А Е. Саломонович, Астрон ж., **39**, 660 (1962).
13. C. R. Grant, H. H. Corbett, Astron. J., **67**, 115 (1962)
14. Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, Б. Г. Кутуза, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч зав — Радиофизика, **6**, 1054 (1963)
15. В. А Котельников, В. М. Дубровин, В. А. Морозов, Г. М. Петров, О. Н Ржига, З Г. Трунова, А. М Шаховской, Радиотехника и электроника, **7**, 1860 (1962).
16. C. H. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, Proc. of the Symp on Planet. Phys. Liege, 1962
17. L. D. Kaplan, Planet and Space Sci., **8**, 23 (1961).
18. Распространение УКВ, пер под ред Шиллерова, изд Сов Радио, М., 1954.
19. K. L. S. Gunn, T W. R. East, Quart. J. Roy. Met. Soc., **80**, 522 (1954).
20. A E. Lilley, Sattelite Measurements of Cosmic and Planetary Radio Noise, Harv. Coll. Obs. Agassiz Radio Astron , Preprints, 1962.
21. А. Ф Дравских, Диссертация, ГАО, Л, 1962
22. Э. В Бородзич, Р. Л Сороченко, Доклад на конференции по радиоастрономии, Горький, 1963.
23. Sky and Telescope, **25**, 143 (1963)
24. H. Spinrad, Publ Astron. Soc. Pacif., **74**, 187 (1962).

Физический институт им П Н Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
3 мая 1963 г.

ON THE DETECTION OF WATER IN THE VENUS ATMOSPHERE

A. E. Salomonovich

In the light of new data on the radio emission spectrum of nonilluminated sight of the Venus the nature of the cboud layer of the planet is discussed and the possibility of water vapour detection in its atmosphere is considered.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

О КОМПЛЕКСНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ НА НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

С. Б. Бирагов

В линейном приближении решены кинетические уравнения для функций распределения электронов и ионов. Функции распределения представлены в виде разложения по полиномам Сонина. Произведена оценка влияния ион-ионных соударений на комплексную диэлектрическую проницаемость плазмы. Показано, что ион-ионные соударения несущественны в полностью ионизированной плазме (при $T_e = T_i$, $N_e = N$.), а также в слабо ионизированной плазме—для определенного закона взаимодействия с молекулами.

В настоящей статье рассматривается вопрос о комплексной диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы на низких частотах. Ранее аналогичные вопросы обсуждались в целом ряде работ. Например, в работах [1–3] найдена электропроводность полностью ионизированного газа в постоянном электрическом поле и, в частности, показана важная роль электрон-электронных соударений. Для газов с любой степенью ионизации подобные расчеты были проведены в [4,5]. Вопрос о проводимости плазмы в переменном поле рассматривался рядом авторов. В работе [6] было показано, что влиянием электрон-электронных соударений можно пренебречь, если $\omega^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$, где ω—частота поля, а $\nu_{\text{эфф}}$—эффективная частота соударений электронов с молекулами и ионами. В случае магнитоактивной плазмы электрон-электронные соударения несущественны при $(\omega - \omega_H)^2 \gg \nu^2_{\text{эфф}}$, где ω_H—гирочастота электронов (см. [7]).

Для магнитоактивной плазмы представляет большой интерес область низких частот $\omega \lesssim \Omega_H$*, когда необходим учет движения ионов [8]. В монографии [8] комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы на низких частотах определяется из квазигидродинамических уравнений. Однако, как хорошо известно, квазигидродинамический метод носит приближенный характер и не позволяет, в частности, учесть столкновения одноименных частиц. Кроме того, входящие в уравнение коэффициенты не могут быть определены в рамках квазигидродинамического метода. Поэтому имеет смысл провести кинетический расчет комплексной диэлектрической проницаемости плазмы на низких частотах с учетом всех видов соударений. Ниже получены кинетические уравнения для электронной и ионной функций распределения, которые решаются методом, аналогичным изложенному в [9]. Исследование системы уравнений для различных частных случаев приводится в разделе 2.

1. Рассмотрим однородную магнитоактивную плазму, на которую наложено переменное электрическое поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$. Будем искать полный ток, возбуждаемый приложенным электрическим полем. Кине-

---

* Достаточно сказать, что условие $\omega \ll \Omega_H$ является основным для перехода в область магнитной гидродинамики

тические уравнения для электронной и ионной функций распределения можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{e}{mc}[vH]\frac{\partial f}{\partial v}+I_{ei}+I_{em}+I_{ee}=0; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{eE}{m}\frac{\partial E}{\partial V}-\frac{e}{Mc}[VH]\frac{\partial F}{\partial V}+I_{ie}+I_{ii}+I_{im}=0. \tag{1.2}$$

Здесь f — функция распределения электронов, F — функция распределения ионов, e и m — заряд и масса электрона, M — масса иона*, а I — интеграл соударений (например, I_{ei} описывает столкновения электронов с ионами, а I_{im} ионов с молекулами и т. п.).

Пусть постоянное магнитное поле $\boldsymbol{H}$ направлено по оси z, а электрическое поле $\boldsymbol{E}$ имеет компоненты E_x и E_y, т. е. $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$**. Решение будем искать в виде

$$f=f_0[1+h_x(v)v_x+h_y(v)v_y];$$

$$F=F_0[1+\varphi_x(V)V_x+\varphi_y(V)V_y],$$

где f_0—максвелловская функция распределения электронов, $h_x(v)$, $h_y(v)$, $\varphi_x(V)$, $\varphi_y(V)$—неизвестные функции, которые должны быть найдены. Электрическое поле предполагается слабым, так что $h_x(v)v_x$, $h_y(v)v_y$, $\varphi_x(V)V_x$, $\varphi_y(V)V_y$ малы по сравнению с единицей.

Уравнения (1.1) и (1.2) в выбранной системе координат принимают следующий вид:

$$\begin{gathered} i\omega[v_xh_x(v)+v_yh_y(v)]f_0-\frac{e}{kT}(E_xv_x+E_yv_y)f_0+\\ +\frac{eH}{mc}(v_y-v_x)f_0+I_{ee}+I_{ei}+I_{em}=0; \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} i\omega[V_x\varphi_x(V)+V_y\varphi_y(V)]F_0+\frac{e}{kT}(E_xV_x+E_yV_y)F_0-\\ -\frac{eH}{Mc}(V_y-V_x)F_0+I_{ii}+I_{ie}+I_{im}=0. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Интегралы соударений в уравнениях (1.3) — (1.4) после линеаризации записываются следующим образом (см. [1]):

$$I_{ee}=I_{ee}(h_x(v))+I_{ee}(h_y(v)),$$

где

$$I_{ee}(h_x(v))=\iint w\sigma_{ee}(w,v)\,[v_xh_x(v)+v_{sx}h_x(v_s)-$$

$$-v'_xh_x(v')-v'_{sx}h_x(v'_s)]\,f_0(v)f_0(v_s)\,dv_s\,d\Omega,$$

$$I_{ee}(h_y(v))=\iint w\sigma_{ee}(w,v)\,[(v_yh_y(v)+v_{sy}h_y(v_s)-$$

$$-v'_yh_y(v')-v'_{sy}h_y(v'_s)]\,f_0(v)f_0(v_s)\,dv_s\,d\Omega.$$

* Считаем, что присутствуют однозарядные ионы одного сорта, хотя, разумеется, можно рассмотреть и более общий случай наличия нескольких сортов ионов. Функция распределения молекул предполагается максвелловской, что, по-видимому, разумно в целом ряде случаев при $N_m\gg N$. Если $N_m\approx N$, то в первом приближении наличием молекул можно пренебречь из-за малости их сечения по сравнению с сечением кулоновского взаимодействия

** Выбор $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$ обусловлен тем, что мы интересуемся учетом движения ионов. Для $\boldsymbol{E}\parallel\boldsymbol{H}$ движением ионов можно пренебречь В последнем случае будут справедливы полученные ранее результаты [1, 4].

Здесь и ниже индекс s означает ударяемые частицы, а штрих — скорость после соударения; w — относительная скорость, σ — сечение взаимодействия. Остальные интегралы соударений мы приводить не будем, так как запись их совершенно аналогична.

Система уравнений (1.3)—(1.4) без труда может быть преобразована к более удобной форме:

$$i(\omega \mp \omega_H) h^{\pm}(v) f_0(v) + a^{\pm} + I_{ee}(h^{\pm}(v)) + I_{ei}(h^{\pm}(v)) + \\ + I_{em}(h^{\pm}(v)) + I_{ei}(\varphi^{\pm}(V)) = 0; \tag{1.5}$$

$$i(\omega \pm \Omega_H) \varphi^{\pm} F_0(V) - a^{\pm} + I_{ii}(\varphi^{\pm}(V)) + I_{ie}(\varphi^{\pm}(V)) + \\ + I_{im}(\varphi^{\pm}(V)) + I_{ie}(h^{\pm}(v)) = 0, \tag{1.6}$$

где введены обозначения:

$$h^{\pm}(v) = h_x(v) \pm i h_y(v); \tag{1.7}$$

$$\varphi^{\pm}(V) = \varphi_x(V) \pm i \varphi_y(V); \tag{1.8}$$

$$a^{\pm} = -\left(\frac{eE_x}{kT} \pm i \frac{eE_y}{kT}\right). \tag{1.9}$$

Интегралы $I_{ee}(h^{\pm}(v))$, $I_{ei}(h^{\pm}(v))$ и т. п. получены при помощи замены (1.7)—(1.8) из линеаризованных интегралов столкновений, входящих в уравнения (1.3)—(1.4)*. Например,

$$I_{ee}(h^{\pm}(v)) = \frac{f_0(v)}{v^2} \int \sigma_{ee}(w, \vartheta)\, w \left[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} h^{\pm}(v) + \right. \\ \left. + \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_s h_x(v_s) - \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}' h_x(v') - \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}'_s h_x(v'_s)\right] f_0(v_s)\, d\boldsymbol{v}_s\, d\Omega. \tag{1.10}$$

Далее, как это обычно делается, представляем неизвестные функции $h^{\pm}(v)$ и $\varphi^{\pm}(V)$ в виде разложения по полиномам Сонина*** степени 3/2, полагая

$$h^{\pm}(v) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r^{\pm} S_r^{3/2}(\beta_e^2 v^2);$$

$$\varphi^{\pm}(V) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r^{\pm} S_r^{3/2}(\beta_i^2 V^2),$$

где

$$\beta_e^2 = m/2kT, \quad \beta_i^2 = M/2kT.$$

Умножив (1.5) на $\frac{1}{N} \frac{\beta_e^2 v^2 \pi^{3/2}}{2\pi\Gamma(5/2)} S_m(\beta_e^2 v^2)$, а (1.6) на $\frac{1}{N} \frac{\beta_i^2 V^2 \pi^{3/2}}{2\pi\Gamma(5/2)} \times S_n(\beta_i^2 V^2)$, проинтегрируем затем по скоростям. Значок 3/2 у поли-

* При получении выражений типа (1.10) использовано преобразование интегралов соударений, которое заключается в том, что компоненты всех векторов скорости, входящих в интегралы, выражаются через их проекции на вектор скорости сталкивающейся частицы (подробнее см [1, 5]).

** Полином Сонина $S_m^{3/2}(z^2)$ определяется как коэффициент при x^m в разложении $(1-x)^{-5/2} \exp\left(-\frac{x}{x-1} z^2\right)$. Имеет место тождество

$$\sum_p \sum_q S_p^{3/2}(u^2)\, S_q^{3/2}(v^2)\, x^p y^q = (1-x)^{-5/2} (1-y)^{-5/2} \exp\left\{-\left(\frac{x}{1-x} u^2 + \frac{y}{1-y} v^2\right)\right\}.$$

номов Сонина опускаем. Из уравнений (1.5)—(1.6), учитывая ортогональность полиномов, получим бесконечную систему алгебраических уравнений, где неизвестными являются коэффициенты $p_r^{\pm}$ и $P_r^{\pm}$:

$$i(\omega \mp \omega_H)\frac{\Gamma(s+5/2)}{\Gamma(s+1)\Gamma(5/2)}p_s^{\pm} + a^{\pm}\delta_{0s} + \sum_{r=0}^{\infty}\left(p_r^{\pm}h_{rs} + P_r^{\pm}\varphi_{rs}\right) = 0; \quad (1.11)$$

$$i(\omega \pm \Omega_H)\frac{\Gamma(s+5/2)}{\Gamma(s+1)\Gamma(5/2)}P_s^{\pm} - a^{\pm}\delta_{0s} + \sum_{r=0}^{\infty}\left(P_r^{\pm}\Phi_{rs} + p_r^{\pm}H_{rs}\right) = 0. \quad (1.12)$$

Здесь δ_{0s}—символ Кронекера, Г—гамма-функция, а коэффициенты h_{rs}, φ_{rs}, Φ_{rs} и H_{rs} приводятся ниже. Решение системы (1.11)—(1.12) позволяет, определив $p_r^{\pm}$ и $P_r^{\pm}$, найти тем самым $h^{\pm}(v)$ и $\varphi^{+}(V)$, т. е. найти функцию распределения электронов и ионов.

Комплексная диэлектрическая проницаемость может быть определена, если известен полный ток. Как известно, существует следующая связь между током и электрическим полем:

$$\begin{aligned} j_{tx} &= \frac{i\omega}{4\pi}\left(\varepsilon'_{xx} - 1\right)E_x + \frac{i\omega}{4\pi}\varepsilon'_{xy}E_y; \\ j_{ty} &= \frac{i\omega}{4\pi}\left(\varepsilon'_{yy} - 1\right)E_y + \frac{i\omega}{4\pi}\varepsilon'_{yx}E_x, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $j_t = j_e + j_i$. Электронный и ионный токи определяются из соотношений [1]

$$\begin{aligned} j_{ex} &= \frac{eNkT}{m}\frac{1}{2}\left(p_0^{+} + p_0^{-}\right); \quad j_{ey} = \frac{eNkT}{2m}\left[\frac{1}{i}\left(p_0^{+} - p_0^{-}\right)\right]; \\ j_{ix} &= -\frac{eNkT}{2M}\left(P_0^{+} + P_0^{-}\right); \quad j_{iy} = -\frac{eNkT}{2M}\left[\frac{1}{i}\left(P_0^{+} - P_0^{-}\right)\right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Решение системы уравнений (1.11)—(1.12) возможно лишь при конечном числе неизвестных. Мы ограничимся $p_2^{\pm}$ и $P_2^{\pm}$, что соответствует второму приближению. Коэффициенты h_{rs}^{ee}, h_{rs}^{em}, h_{rs}^{ei}, φ_{rs}^{ii}, Φ_{rs}^{ii}, Φ_{rs}^{im}, Φ_{rs}^{ie} и H_{rs} могут быть найдены по методу, изложенному в [9] (некоторые из этих коэффициентов вычислялись ранее в работах [1,10]). Мы их представим, подобно [1], в виде матриц:

$$h_{rs}^{ee} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}N\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\ln\left(0{,}37\frac{kT}{e^2N^{1/3}}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{45}{16} \end{bmatrix};$$

$$h_{rs}^{ei} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}N\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\ln\left(0{,}37\frac{kT}{e^2N^{1/3}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{15}{8} \\ \frac{3}{2} & \frac{13}{4} & \frac{69}{16} \\ \frac{15}{8} & \frac{69}{16} & \frac{433}{64} \end{bmatrix};$$

$$\varphi_{rs} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,N\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\ln\left(0{,}37\frac{kT}{e^2N^{1/3}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m}{M}\begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{15}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(здесь и ниже значок r указывает номер строки, а s — номер столбца).

При вычислении h_{rs}^{em} и Φ_{rs}^{im} используем для столкновения электронов и ионов с молекулами модель упругих шаров. В этом случае сечение не будет зависеть от скорости и h_{rs}^{em} примет вид

$$h_{rs}^{em} = \frac{8\sqrt{\pi}}{3}N_m\sqrt{\frac{2kT}{m}}\,a^2\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{4} & -\frac{23}{16} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{23}{16} & \frac{433}{64} \end{bmatrix};$$

$$\Phi_{rs}^{il} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\ln\left(0{,}37\frac{kT}{e^2N^{1/3}}\right)\sqrt{\frac{m}{M}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{45}{16} \end{bmatrix};$$

$$\Phi_{rs}^{im} = \sqrt{\frac{2kT}{M}}\,\sqrt{2}\,\pi^{1/2}N_m a^2\frac{16}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{32} \\ -\frac{1}{4} & \frac{59}{16} & -\frac{139}{128} \\ -\frac{1}{32} & -\frac{139}{128} & 6{,}4 \end{bmatrix}$$

(a — некоторый эффективный радиус молекулы);

$$\Phi_{rs}^{ie} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,N\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\ln\left(0{,}37\frac{kT}{e^2N^{1/3}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m}{M}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{115}{8} \end{bmatrix};$$

$$H_{rs} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,N\left(\frac{e^2}{m}\right)^2\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\ln\left(0{,}37\frac{kT}{e^2N^{1/3}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{15}{8} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При вычислении Φ_{rs}^{im} мы предполагали, что масса молекулы равна массе иона, а равновесная температура молекул совпадает с равновесной

температурой электронов и ионов. В матрицах φ_{rs}, Φ_{rs}^{ie} и H_{rs} нули появились при отбрасывании членов порядка $\sqrt{\frac{m}{M}}$ и $\frac{m}{M}$ по сравнению с единицей.

2. Исследование системы уравнений (1.11)—(1.12) удобно провести для некоторых частных случаев. Рассмотрим сначала случай полностью ионизированной плазмы, для чего будем считать h_{rs}^{em} и φ_{rs}^{im} равными нулю. Для полностью ионизированной плазмы в нулевом приближении получим для коэффициентов $p_0^{\pm\,(0)}$ и $P_0^{\pm\,(0)}$ выражения:

$$p_0^{\pm\,(0)} = -\frac{a^{\pm}\left[i\left(\omega \pm \Omega_H\right)\right]}{i\left(\omega \mp \omega_H\right)\frac{m}{M}\nu_{ei} + i\nu_{ei}\left(\omega \pm \Omega_H\right) - \left(\omega \mp \omega_H\right)\left(\omega \pm \Omega_H\right)};$$

$$P_0^{\pm\,(0)} = \frac{a^{\pm}\left[i\left(\omega \mp \omega_H\right)\right]}{i\left(\omega \mp \omega_H\right)\frac{m}{M}\nu_{ei} + i\left(\omega \pm \Omega_H\right)\nu_{ei} - \left(\omega \mp \omega_H\right)\left(\omega \pm \Omega_H\right)},$$

где

$$\nu_{ei} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} N \left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} \ln\left(0{,}37\,\frac{kT}{e^2 N^{1/3}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Принимая во внимание (1.13) и (1.14), а также учитывая, что $\varepsilon'_{xy} = -\varepsilon'_{yx}$, $\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy}$, получим в этом приближении

$$j_{tx}^{(0)} \pm i j_{ty}^{(0)} = \frac{i\omega}{4\pi}\left(\varepsilon'^{(0)}_{xx} - 1 \mp i\varepsilon'^{(0)}_{xy}\right)\left(E_x \pm iE_y\right) = \frac{eNkT}{m}\, p_0^{\pm\,(0)} -$$

$$-\frac{eNkT}{M} P_0^{\pm\,(0)} = \frac{e^2 N\left[i\omega M + i\omega m\right]\left(E_x \pm iE_y\right)}{Mm\left[-\left(\omega \mp \omega_H\right)\left(\omega \pm \Omega_H\right) + i\nu_{ei}\frac{m}{M}\left(\omega \mp \omega_H\right) + i\nu_{ei}\left(\omega \pm \Omega_H\right)\right]}.$$

Из этого выражения после пренебрежения малыми членами следует соотношение для компонент комплексной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon'_{xx} \mp i\varepsilon'_{xy} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\left(\omega \mp \omega_H\right)\left(\omega \pm \Omega_H\right) - i\omega\nu_{ei}} \qquad \left(\omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m\right). \tag{2.1}$$

Формула (2.1) совпадает с выражением (10.44) из [8], в котором ν_{ei} нужно считать совпадающим с эффективным числом соударений в высокочастотном случае.

Для определения поправок к нулевому приближению необходимо решать систему уравнений (1.11)—(1.12), подставив туда соответствующие коэффициенты. Если проделать вычисления, которые ниже не приводятся из-за некоторой громоздкости системы уравнений, то оказывается, что поправки к нулевому приближению обусловлены лишь электрон-электронными соударениями. Если гирочастота электронов $\omega_H \gg \nu_{ei}$, тогда нулевое приближение является достаточно точным (точность $\sim \nu_{ei}/\omega_H$). Несущественность ион-ионных соударений в полностью ионизированной плазме связана с большой разницей между массами электронов и ионов, в результате чего изменение импульса иона при

его соударении с электроном мало, а поэтому мал вклад от ион-ионных столкновений в проводимость плазмы.

Рассмотрим случай слабо ионизированной плазмы. Можно ожидать, что при наличии молекул влияние ион-ионных соударений на комплексную диэлектрическую проницаемость плазмы будет существенным, поскольку масса молекул сравнима с массой ионов, и изменение импульса ионов при соударении их с молекулами будет большим. Нулевые приближения для $p_0^{\pm\,(0)}$ и $P_0^{\pm\,(0)}$ в слабо ионизированной плазме задаются выражениями

$$\begin{aligned} p_0^{\pm\,(0)} = &- a^{\pm}\left[i(\omega \pm \Omega_H) + 2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em}\right]\Big\{-(\omega \mp \omega_H)(\omega \pm \Omega_H) + \\ &+ i(\omega \mp \omega_H)\,2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em} + (m/M)\,\nu_{ei}\nu_{em} + i(\omega \mp \omega_H)(m/M)\,\nu_{el} + \\ &+ i\nu_{el}(\omega \pm \Omega_H) + 2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{el}\nu_{em} + i(\omega \pm \Omega_H)\,\nu_{em} + 2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em}^2\Big\}^{-1}; \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} P_0^{\mp\,(0)} = a^{\pm}&\left[i(\omega \mp \omega_H) + \nu_{em}\right]\Big\{-(\omega \mp \omega_H)(\omega \pm \Omega_H) + i(\omega \mp \omega_H) \times \\ &\times 2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em} + (m/M)\,\nu_{ei}\nu_{em} + i(\omega \mp \omega_H)(m/M)\,\nu_{el} + \\ &+ i\nu_{el}(\omega \pm \Omega_H) + 2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{el}\nu_{em} + i(\omega \pm \Omega_H)\,\nu_{em} + \\ &+ 2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em}^2\Big\}^{-1}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\nu_{em} = \frac{8\sqrt{\pi}}{3} N_m a^2 \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Из (2.2) и (2.3) получим в нулевом приближении для компонент диэлектрической проницаемости плазмы

$$\begin{aligned} \varepsilon'^{(0)}_{yx} \mp i\varepsilon'^{(0)}_{xy} = 1 + \omega_0^2&\left[i\omega + 2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em}\right]\Big\{i\omega\Big[-(\omega \mp \omega_H)(\omega \pm \Omega_H) + \\ &+ i(\omega \mp \omega_H)\,2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em} + i\nu_{el}\omega + 2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{el}\nu_{em} + \\ &+ i(\omega \pm \Omega_H)\,\nu_{em} + 2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em}^2\Big]\Big\}^{-1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Выражение (2.4) совпадает с (10.44) из [8], в котором ν_{el} и ν_{em} нужно считать определенными так же, как и в высокочастотном случае.

Рассмотрим степень точности выражения (2.4). Поскольку представляют интерес поправки, связанные с соударениями ионов с ионами и молекулами, сразу предположим, что $\omega_H \gg \nu_{el}$ и $\omega_H \gg \nu_{em}$. При таком предположении электрон-электронные столкновения несущественны, и $p_0^{\mp\,(0)}$ имеет точность $\sim \nu_{el}/\omega_H \cong \nu_{em}/\omega_H$. Для отыскания поправок к $P_0^{\pm\,(0)}$ нужно решить систему уравнений (1.11)—(1.12). Подставляя необходимые коэффициенты, получим во втором приближении следующую систему уравнений:

$$i(\omega \mp \omega_H)\,p_0^{\mp} + a^{\pm} + p_0^{\mp}(\nu_{el} + \nu_{em}) - P_0^{\pm}\nu_{el}\frac{m}{M} = 0;$$

$$\begin{aligned} i(\omega \pm \Omega_H)\,P_0^{\mp} - a^{\pm} + P_0^{\mp}\,2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em} - P_1^{\pm}\nu_{em}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{m}{M}} - \\ - \frac{\sqrt{2}}{16}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\nu_{em}P_2^{\pm} - p_0^{\pm}\nu_{el} = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{5}{2}(\omega \pm \Omega_H) P_1^{\pm} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\nu_{em} P_0^{\pm} + P_1^{\pm}\left(\frac{59\sqrt{2}}{8}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\nu_{em} + \right. \tag{2.5}$$

$$\left. + \sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{ei}\right) + P_2^{\pm}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\nu_{ei}\sqrt{\frac{m}{M}} - \frac{139\sqrt{2}}{64}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\nu_{em}\right) = 0;$$

$$\frac{35}{8}(\omega \pm \Omega_H) P_2^{\pm} - \frac{\sqrt{2}}{16}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\nu_{em} P^{\pm} - \frac{139\sqrt{2}}{64}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\nu_{em} P_1^{\pm} +$$

$$+ P_2^{\pm}\left(\frac{45}{16}\sqrt{2}\,\nu_{ei}\sqrt{\frac{m}{M}} + 3{,}2\sqrt{2}\sqrt{m/M}\,\nu_{em}\right) = 0.$$

Если найти из (2.5) $P_0^{\pm\,(2)}$, то оказывается, что поправка к приближению $P_0^{\pm\,(0)}$ мала. Причина этого — в медленном росте элементов матрицы Φ_{rs}^{im}, что связано с выбранной моделью упругих шаров для взаимодействия электронов и ионов с молекулами.

Интересно рассмотреть несколько других моделей для соударений с молекулами. Расчет проводился для так называемых максвелловских молекул (сила взаимодействия $\sim 1/r^5$), для модели Сюзерленда (подробнее см. [9]) и для закона взаимодействия $\sim r^{-3}$. В первом случае нулевое приближение является точным, и поэтому столкновения одноименных частиц не влияют на проводимость. Для модели Сюзерленда расчеты проводились в предположении, что молекулы притягиваются слабо. В этом случае поправки из-за ион-ионных столкновений малы для любого закона изменения силы притяжения с расстоянием. Если сила взаимодействия $\sim r^{-3}$, то коэффициенты матриц h_{rs}^{em} и Φ_{rs}^{im}, как показывает расчет, растут достаточно быстро, так что нужен учет ион-ионных соударений. Однако эта модель представляется нам нереальной, и можно, по-видимому, утверждать, что в однотемпературной плазме при $N_e \simeq N_i$ при нахождении комплексной диэлектрической проницаемости ион-ионные соударения учитывать не нужно.

В заключение выражаю глубокую благодарность Б. Н. Гершману за предложенную тему, интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Landshoff, Phys. Rev., **76**, 904 (1949); **82**, 442 (1951).
2. S. Cohen, L. Spitzer, P. Routly, Phys. Rev., **80**, 230 (1950).
3. L. Spitzer, R. Härm, Phys. Rev., **89**, 977 (1953).
4. H. Schirmer, J. Friedrich, Z. Physik, **151**, 174 (1958).
5. H. Schirmer, J. Friedrich, Z. Physik, **151**, 375 (1958).
6. В. Л Гинзбург, ЖТФ, **21**, 943 (1951).
7. R. C. Hwa, Phys. Rev., **110**, 307 (1958).
8. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960
9. С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1960
10. Е. С Фрадкин, ЖЭТФ, **32**, 1176 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 26 апреля 1963 г

ON THE COMPLEX PERMITTIVITY OF MAGNETOACTIVE PLASMA AT LOW FREQUENCIES

S. B. Biragov

Kinetic equations have been solved in a linear approximation for distribution functions of electrons and ions. Distribution functions have been represented in the form of Sonin's polynomial expansion. The influence has been estimated of ion-ion collisions upon the plasma permittivity. Ion-ion collisions are shown to be unessential in a fully ionized plasma (at $T_e = T_i$, $N_e = N_i$) as well as in weakly ionized plasma for the definite model of interaction with molecules.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

О ГИРОРЕЗОНАНСНОМ ИЗЛУЧЕНИИ И ПОГЛОЩЕНИИ В РАВНОВЕСНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ*

В. В. Железняков

Рассмотрено излучение слаборелятивистского электрона при его движении по винтовой линии в магнитоактивной плазме. С помощью закона Кирхгофа найден коэффициент поглощения электромагнитных волн в равновесной плазме на частотах $\omega \simeq s\omega_H$ ($s=1, 2, 3, ...$; ω_H —электронная гирочастота); это поглощение связано с магнитотормозным излучением слаборелятивистских электронов, входящих в состав плазмы Полученные выражения сопоставлены с соответствующими коэффициентами поглощения, найденными в [1—3] методом кинетического уравнения с самосогласованным полем.

Как известно, спонтанное излучение заряженных частиц в высокотемпературной магнитоактивной плазме представляет собой совокупность следующих элементарных процессов: тормозного излучения в процессе «соударений» с кулоновскими центрами, эффекта Вавилова—Черенкова и магнитотормозного излучения при ускоренном движении в магнитном поле. С каждой компонентой спонтанного излучения связано соответствующее поглощение.

Поглощение вследствие соударений исследуется уже в рамках элементарной теории распространения электромагнитных волн в плазме путем введения эффективного числа соударений $\nu_{эфф}$ в уравнения движения заряженных частиц (см., например, [4], § 3). Последняя операция учитывает (до известной степени) наличие теплового движения в плазме. Напротив, черенковское и магнитотормозное поглощение может быть получено только при более последовательном рассмотрении движения частиц в плазме методом кинетического уравнения с самосогласованным полем. При этом черенковское и магнитотормозное затухание выступает как затухание Ландау, существующее в равновесной плазме и в отсутствие соударений.

Черенковская часть затухания Ландау в магнитоактивной плазме была подробно рассмотрена в [5] на базе кинетического уравнения. Найденные там условия сильного затухания ($\gamma \gg \omega$, где γ — коэффициент затухания во времени, ω — частота), однако, могут быть получены элементарно, без привлечения метода кинетического уравнения [6].

Магнитотормозное поглощение на резонансных частотах $\omega \simeq s\omega_H$ ($s = 1, 2, 3, ...$; ω_H—гирочастота) рассматривалось кинетически в работах [1—3, 7,8] (см. также [9]). Однако для расчета поглощения в плазме наряду с методом кинетического уравнения возможен также другой, более простой и наглядный метод коэффициентов Эйнштейна (см. в этой связи [10, 11]). В равновесной системе схема коэффициентов Эйнштейна фактически сводится к уравнению Кирхгофа, связывающему коэффициент поглощения электромагнитных волн с излучательной способностью среды. Последняя может быть найдена по известной

* Содержание настоящей статьи вошло в состав диссертации [16] (1959) и до сих пор не было опубликовано.

интенсивности магнитотормозного излучения электрона в магнитоактивной плазме.

Указанный подход к решению задачи о резонансном поглощении в слаборелятивистской магнитоактивной плазме был применен (наряду с методом кинетического уравнения) для случая распространения вдоль магнитного поля в работе [11] и использован здесь для расчета поглощения под произвольным углом. В первом разделе статьи исследованы соотношения для интенсивности магнитотормозного излучения слаборелятивистского электрона в плазме. Во втором разделе найден коэффициент резонансного поглощения электромагнитных волн на частотах $\omega \simeq s\omega_H$. Значения этого коэффициента использованы в работах [6,12,13] для расчета оптической толщины τ_j слоев $\omega \simeq s\omega_H$ в неоднородном магнитном поле. Там же сделаны оценки величины τ_j в условиях, представляющих интерес для теории спорадического радиоизлучения Солнца (см. в этой связи также [14]).

1. ИНТЕНСИВНОСТЬ МАГНИТОТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СЛАБОРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В ПЛАЗМЕ

При движении электрона в магнитном поле $\boldsymbol{H}_0$ спектр излучаемых частот определяется уравнением

$$\omega\,(1 - n_j\beta_\parallel \cos\alpha) = s\omega\,, \tag{1.1}$$

в котором $\omega^* = \omega_H\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = V/c$, $\beta_\parallel = V_\parallel/c$ (V—скорость электрона, $V_\parallel$—проекция скорости V на направление $\boldsymbol{H}_0$, c — скорость света), α—угол между $\boldsymbol{H}_0$ и волновым вектором $\boldsymbol{k}$, n_j—показатель преломления j-ой нормальной волны в плазме, $\omega_H = eH/mc$ — гирочастота (e—заряд электрона с массой покоя m). Индекс s в (1.1), принимающий значения ± 1, ± 2,..., указывает номер излучаемой гармоники *. Соотношение (1.1) следует из классического рассмотрения задачи об излучении электрона в магнитном поле [17]; вместе с тем его нетрудно получить из законов сохранения энергии и импульса при испускании фотонов заряженной частицей в поле $\boldsymbol{H}_0$ [11].

Общая формула для энергии магнитотормозного излучения электрона в единицу времени и телесного угла на гармониках $s \neq 0$ в плазме имеет следующий вид [17]:

$$P_{js} = \frac{n_j e^2\omega^2\gamma_j^2\,\{\beta_\perp J_s'(l) - [\alpha_j s\beta_\perp l^{-1} + \beta_j\beta_\parallel]\,J_s(l)\}^2}{2\pi c\,|\,1 - \beta_\parallel\cos\alpha\,(n_j + \omega dn_j/d\omega)\,|}\,. \tag{1.2}$$

Здесь J_s и J_s'—бесселева функция s-го порядка и ее производная по аргументу $l = k_j r_H \cos\alpha = sn_j\beta_\perp \sin\alpha/(1-\beta_\parallel n_j\cos\alpha)$; $k_j = \omega n_j/c$—волно-

---

* Следует отметить, что в [15] уже шла речь о резонансном поглощении радиоволн в магнитоактивной плазме (на частотах, для которых показатель преломления $n_j(\omega) \to \infty$). Резонансный характер поглощения на этих частотах связан с коллективными эффектами при движении электронов в поле волны, имеющими место и в пренебрежении тепловым движением частиц в плазме (при фиксированном числе соударений). Напротив, рассматриваемое ниже гирочастотное поглощение связано с резонансом отдельных электронов на частотах $\omega \simeq s\omega_H$, возникающим лишь при достаточно полном учете теплового движения. Указанные типы поглощения обусловлены физически различными явлениями: первое связано с тормозным излучением электронов при соударениях и пропорционально $T^{-3/2}$ (T—температура в плазме), второе связано с магнитотормозным излучением электронов и, как следует из дальнейшего, пропорционально $T^{s-3/2}$ ($s \geqslant 2$) и $T^{1/2}$ ($s = 1$).

* Кроме частот (1.1) с $s = \pm 1, \pm 2, \ldots$ в спектре излучения электрона имеются также частоты, отвечающие значению $s = 0$ и определяемые условием $1 - n_j(\omega)\,\beta_\parallel\cos\alpha = 0$ (черенковское излучение). Ниже рассматриваются только магнитотормозное излучение и поглощение ($s \neq 0$).

вое число, $r_H = V/\omega_H \sqrt{1-\beta^2}$ — радиус вращения электрона в магнитном поле, $V_\perp = \beta_\perp c$ — поперечная к полю $\boldsymbol{H}_0$ составляющая скорости $\boldsymbol{V}$.

Параметры n_j, γ_j, α_j и β_j определены соотношениями

$$n_j^2 = 1 - \frac{2v(1-v)}{2(1-v) - u\sin^2\alpha \mp \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u(1-v)^2\cos^2\alpha}}; \quad (1.3)$$

$$\gamma_j^2 = \frac{n_j^2(1-u)}{(1-u-v)(1+\alpha_j^2) + (1-v)(1-u)\beta_j^2 - 2v\sqrt{u}\,\alpha_j}; \quad (1.4)$$

$$\alpha_j = K_j\cos\alpha + \Gamma_j\sin\alpha; \qquad \beta_j = \Gamma_j\cos\alpha - K_j\sin\alpha; \quad (1.5)$$

$$K_j = \frac{2\sqrt{u}\,(1-v)\cos\alpha}{u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u(1-v)^2\cos^2\alpha}}; \quad (1.6)$$

$$\Gamma_j = \frac{v\sqrt{u}\,\sin\alpha + K_j uv\sin\alpha\cos\alpha}{1-u-v+uv\cos^2\alpha}, \quad (1.7)$$

где $v = \omega_0^2/\omega^2 = 4\pi e^2 N/m\omega^2$; $u = \omega_H^2/\omega^2 \equiv e^2H_0^2/m^2c^2\omega^2$ (N — концентрация электронов в плазме). Верхний знак в выражениях для n_j^2 и K_j относится к необыкновенной волне ($j=1$), нижний — к обыкновенной ($j=2$). Значения K_j и Γ_j характеризуют поляризацию излучаемых нормальных волн: $i\Gamma_j$ представляет собою отношение продольной (вдоль $\boldsymbol{K}_j$) компоненты электрического поля $\boldsymbol{E}$ к компоненте этого поля, ортогональной $\boldsymbol{H}_0$ и $\boldsymbol{k}$; величина iK_j, в свою очередь, равна отношению поперечной компоненты поля $\boldsymbol{E}$, ортогональной $\boldsymbol{k}_j$ и лежащей в плоскости $\boldsymbol{k}_j$, $\boldsymbol{H}_0$, к компоненте этого поля, ортогональной $\boldsymbol{H}_0$ и $\boldsymbol{k}_j$*.

Остановимся теперь более подробно на вопросе об интенсивности излучения слаборелятивистского электрона. При этом будем считать $\beta = V/c$ достаточно малым и, в частности, предполагать справедливость неравенств

$$\beta^2 \ll 1; \quad |n_j\beta_\parallel| \ll 1; \quad |sn_j\beta_\perp\sin\alpha| \ll 1;$$
$$|\beta_\parallel\omega\partial n_j/\partial\omega| \ll 1. \quad (1.8)$$

Согласно (1.1), в приближении малых скоростей (1.8) частота излучения не зависит от $V_\perp$ и равна

$$\omega \simeq \frac{s\omega_H}{1 - n_j\beta_\parallel\cos\alpha} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots), \quad (1.9)$$

что в свою очередь близко к $s\omega_H$. Последнее следует из второго неравенства (1.8), которое вместе с тем означает, что рассматривается только излучение в области нормального эффекта Допплера $s > 0$ (см. (1.1)).

---

* Здесь формулы приведены для случая, когда зависимость от времени описывается фактором $e^{-i\omega t}$. Подчеркнем также, что выражения (1.2)—(1.7) относятся к случаю магнитоактивной плазмы без учета в ней теплового движения. Поэтому они характеризуют только излучение необыкновенных ($j=1$) и обыкновенных ($j=2$) волн, для волн плазменного типа они непригодны.

Далее примем во внимание, что для слаборелятивистского электрона $|l| = |sn_j\beta_\perp \sin\alpha| \ll 1$. Это позволяет ограничиться в (1.2) лишь первыми членами разложения J_s, J'_s по степеням l.

В результате получим, что интенсивность дипольного излучения электрона равна

$$P_{js}^{\text{дип}} = \frac{n_j e^2\omega^2\gamma_j^2 \{s\beta_\perp (1+\alpha_j) + l\beta_j\beta_\parallel\}^2}{2\pi c\,|1-\beta_\parallel\cos\alpha\,(n_j + \omega\partial n_j/\partial\omega)|} \frac{l^{2s-2}}{2^{2s}(s!)^2}. \tag{1.10}$$

Это выражение с учетом второго и последнего неравенств (1.8), а также вида l можно представить в форме

$$P_{js}^{\text{дип}} \simeq \frac{n_j e^2\omega^2\beta_\perp}{4\pi c}\gamma_j^2 (1+\alpha_j + n_j\beta_j\beta_\parallel \sin\alpha)^2 \times \cdot$$
$$\times\, 2^{-2s+1} s^4 (s!)^{-2} (sn_j\beta_\perp \sin\alpha)^{2s-2}. \tag{1.11}$$

Поскольку $\omega \simeq s\omega_H$, в (1.11) полагаем $n_j(\omega) \simeq n_j(s\omega_H)$, $\gamma_j(\omega) \simeq \gamma_j(s\omega_H)$ и т. д., так что

$$P_{js}^{\text{дип}} \simeq \frac{e^2\omega_H^2\beta_\perp^2}{4\pi c}\cdot[n_j\gamma_j^2 (1+\alpha_j)^2 (sn_j\beta_\perp \sin\alpha)^{2s-2}]_{\omega=s\omega_H} \times$$
$$\times\, 2^{-2s+1} s^6 (s!)^{-2}. \tag{1.12}$$

При переходе от (1.11) к (1.12) принято также, что

$$(1+\alpha_j + n_j\beta_j\beta_\parallel \sin\alpha) \simeq (1+\alpha_j)_{\omega=\omega_H}.$$

Однако последнее соотношение даже как приближенное будет неверно при $s = 1$, так как для основной гармоники при любых значениях параметра $v = \omega_0^2/\omega^2$ и угла α (за исключением $\alpha = 0$ и $v = 0$*) величина $(1+\alpha_j)_{\omega=\omega_H} = 0$. Поэтому для $s = 1$ фактор

$$A_j \equiv 1 + \alpha_j + n_j\beta_j\beta_\parallel \sin\alpha = (1 - \omega_H/\omega)\frac{1+\alpha_j}{1-\omega_H/\omega} +$$
$$+ (1 - s\omega_H/\omega)\beta_j \operatorname{tg}\alpha$$

следует принять равным

$$\left(1-\sqrt{u}\right)\left[\frac{1+\alpha_j}{1-\sqrt{u}} + \beta_j \operatorname{tg}\alpha\right]_{\omega=\omega_H},$$

где $(1+\alpha_j)\left(1-\sqrt{u}\right)^{-1}$ остается конечным при стремлении $1-\sqrt{u}$ к нулю. Следовательно, интенсивность излучения на основной гармонике

$$P_{j,s=1}^{\text{дип}} \simeq \frac{e^2\omega_H^2\beta_\perp^2}{8\pi c}\left(1-\sqrt{u}\right)^2\left[n_j\gamma_j^2\left(\frac{1+\alpha_j}{1-\sqrt{u}} + \beta_j \operatorname{tg}\alpha\right)^2\right]_{\omega=\omega_H}, \tag{1.13}$$

* Это справедливо только без учета теплового движения. Фактически же близ $\sigma = 0$ и $v = 0$ существуют конечные интервалы, за пределами которых $(1+\alpha_j)_{\omega=\omega_H} = 0$. Величина указанных интервалов может быть найдена при кинетическом рассмотрении задачи (см замечания, сделанные ниже)

где в согласии с (1.9) фактор $\left(1-\sqrt{u}\right)^2$ можно записать в виде

$$\left(1-\sqrt{u}\right)^2 = n_j^2(\omega_H)\,\beta_\parallel^2\cos^2\alpha.$$

Применимость формулы (1.13) в окрестности $\alpha=\pi/2$ ограничена тем обстоятельством, что при переходе к (1.13) было использовано уравнение Допплера в форме (1.9) вместо (1.1). Нетрудно видеть, что при малых β^2 и $n_j\beta_\parallel\cos\alpha$ это допустимо в случае $2\,|\,n_j\beta_\parallel\cos\alpha\,|\gg\beta^2$ нарушающемся при $\alpha=\pi/2$, а также в областях, где n_j близко к нулю

В то же время для $s\geqslant 2$ фактор $(1+\alpha_j)^2_{\omega=s\omega_H}$ не обращается в нуль и соотношение (1.12) будет справедливо при условии

$$|\,1+\alpha_j\,|\gg|\,n_j\beta_j\beta_\parallel\sin\alpha\,|. \tag{1.14}$$

Соблюдению этого условия помогает второе неравенство (1.8); однако (1.14) заведомо нарушается в окрестности значений параметров, где β_j обращается в бесконечность. Как нетрудно убедиться, последнее имеет место для обыкновенных волн при $\alpha=\pi/2$.

Выше при обсуждении условий применимости выражений для интенсивности слаборелятивистского электрона не учитывалось влияние теплового движения в плазме на величину n_j, γ_j, α_j и β_j, которое в некоторых случаях становится весьма существенным. Так, в окрестности значений $u=\omega_H^2/\omega^2$, $v=\omega_0^2/\omega^2$ и α, где n_j^2, записанное в форме (1.3), обращается в бесконечность*, учет теплового движения становится необходимым и формулы (1.2)—(1.7) вместе со следствиями из них—несправедливыми. В интересующем нас случае слаборелятивистского электрона выражение для интенсивности излучения необыкновенной волны в форме (1.13) становится неверным при малых углах α, так как при $\alpha\to 0$ и $\omega\to\omega_H$ показатель преломления $n_j\to\infty$. Аналогичное положение возникает при малых значениях v (и произвольных α), когда частота ω, отвечающая обращению n_j^2 в бесконечность, приближается к гирочастоте ω_H, а также при некоторых избранных значениях v и α, для которых $n_j^2=\infty$ на частотах $\omega\simeq s\omega_H$ $(s\geqslant 2)$.

Однако за исключением указанных специальных случаев учет теплового движения при распространении необыкновенных и обыкновенных волн дает лишь поправки к n_j^2, γ_j^2, α_j и β_j порядка β_T или β_T^2 $\left(\beta_T=V_T/c,\ V_T=\sqrt{\varkappa T/m}\right.$ — тепловая скорость электрона$\left.\right)$. Такие поправки по большей части не сказываются сколько-нибудь существенным образом на магнитотормозном излучении электрона в нерелятивистской плазме, где $\beta_T\ll 1$. Единственным исключением в этом смысле служит излучение на основной гармонике: формула (1.13) становится неприменимой в области частот, где**

$$\left(\frac{1-\sqrt{u}}{n_j\,\beta_T\cos\alpha}\right)^2\lesssim 2. \tag{1.15}$$

Дело в том, что здесь тепловое движение дает поправки в дисперсионном уравнении для n_j^2 — порядка β_T, в отличие от области

---

* Эти значения определяются из уравнения $1-u-v+uv\cos^2\alpha=0$.

** Т. е на частотах, где, как следует из допплеровского соотношения (1 9), становится существенным вклад в магнитотормозное излучение от тепловых электронов, движущихся со скоростью $V_T=\beta_T c$.

$[(1-\sqrt{u})/n_j\beta_T\cos\alpha]^2 \gg 2$, где поправки—порядка β_T^2. Ясно, что поправки к n_j^2 и γ_j^2, а также к параметрам α_j, β_j (т. е. K_j и Γ_j), определяющим характер поляризации нормальных волн, будут такого же порядка малости по β_T, как и те члены дисперсионного уравнения для n_j^2, которые обусловлены учетом теплового движения плазменных электронов.

Отсюда (и из вида формул (1.11), (1.12)) следует, что для $\beta_T \ll 1$ при переходе от (1.11) к (1.12) (в тех указанных выше случаях, когда подобный переход возможен) заведомо можно пренебречь тепловыми поправками к величинам n_j, γ_j, α_j и β_j. Особого обсуждения требует переход от (1.11) к формуле (1.13), определяющей интенсивность излучения электрона на основной гармонике ($s=1$). При $s=1$ фактор

$$A_j \equiv 1+\alpha_j+n_j\beta_j\beta_\parallel\sin\alpha$$

пропорционален $\beta_\parallel$, и на частотах, где имеет место условие (1.15) (т. е. с учетом уравнения Допплера — в области $\beta_\parallel^2 \lesssim 2\beta_T^2$), тепловые поправки к α_j ($\sim\beta_T$) могут оказаться сравнимыми и даже превзойти по величине фактор A_j, найденный без учета теплового движения. В этом случае, очевидно, нахождение интенсивности излучения на частотах (1.15) становится невозможным без дальнейшего уточнения вида A_j с учетом теплового движения плазменных электронов. Напротив, вне области (1.15) выражение для $P^{\text{дип}}_{j,\,s=1}$ (1.13) остается справедливым, так как здесь тепловые поправки к α_j — более высокого порядка малости ($\sim\beta_T^2$), нежели величина $A_j(\beta_T=0)\sim\beta_\parallel$*.

Таким образом, на частотах (1.15) с помощью формулы (1.13) можно дать лишь оценку интенсивности излучения по порядку величины, экстраполируя $P^{\text{дип}}_{j,\,s=1}$ в область, где $(1-\sqrt{u})^2 \sim 2n_j^2\beta_T^2\cos^2\alpha$ (т. е. $\beta_\parallel^2\sim 2\beta_T^2$):

$$P^{\text{дип}}_{j,\,s=1}(\beta_\parallel^2\sim 2\beta_T^2)\sim\frac{e^2\omega_H^2\beta_\perp^2}{4\pi c}\beta_T^2\cos^2\alpha\left[n_j^3\gamma_j^2\left(\frac{1+\alpha_j}{1-\sqrt{u}}+\beta_j\operatorname{tg}\alpha\right)^2\cos^2\alpha\right]_{\omega=\omega_H}. \tag{1.16}$$

Наконец, сопоставим интенсивность излучения в изотропной и магнитоактивной плазме при заданном винтовом движении слаборелятивистского электрона. Если среда изотропна, то интенсивность излучения в обе нормальные волны можно определить из (1.11) путем предельного перехода $u\to 0$ (т. е. $H_0\to 0$). В результате получим, что для магнитотормозного излучения слаборелятивистского электрона в изотропной среде с показателем преломления $n_j=1-v$

$$P^{\text{дип}}_s=\sum_{j=1,2}P^{\text{дип}}_{js}\simeq\frac{n_je^2\omega^2\beta_\perp^2}{4\pi c}(1+\cos^2\alpha)\times 2^{-2s+1}s^4(s!)^{-2}(sn_j\beta_\perp\sin\alpha)^{2s-2}. \tag{1.17}$$

---

* Заметим, что в области частот, на которых $(1-\sqrt{u})^2 \gtrsim 2(n_j\beta_T\cos\alpha)^2$, выражение для $P^{\text{дип}}_{j,\,s=1}$ (1.13) остается справедливым и при $\alpha=0$; надо лишь считать величину, стоящую в квадратных скобках, функцией ω, не полагая $\omega=\omega_H$.

Сравнивая формулы (1.12), (1.13) с (1.17), убеждаемся, что в магнитоактивной плазме интенсивность излучения электрона на гирочастоте $\omega \simeq \omega_H$ резко уменьшается по сравнению со случаем изотропной среды (грубо говоря, в $\beta_\parallel^{-2}$ раз при $\beta_\parallel > \beta_T$ и в β_T^{-2} раз при $\beta_\parallel \lesssim \beta_T$, если не учитывать множителей, содержащих γ_j, α_j, β_j и т. д.). В то же время интенсивность излучения на высших гармониках $\omega \simeq s\omega_H$ ($s \geqslant 2$) радикальным образом не меняется. Поэтому, если в изотропной среде величина гармоник в спектре излучения слаборелятивистского электрона убывает с ростом номера s как $\beta_\perp^{2s}$, начиная с $s = 1$, то в магнитоактивной плазме указанное уменьшение фактически происходит лишь при $s \geqslant 2$. Действительно, благодаря появлению множителя $\left(1 - \sqrt{u}\right)^2 \backsim \beta_\parallel^2$ в выражении для интенсивности на основной гармонике (см. (1.13)) отношение (по скоростям) $P_{j,\,s=2}^{\text{дип}} / P_{j,\,s=1}^{\text{дип}} \sim \beta_\perp^2 / \beta_\parallel^2$ и при $\beta_\parallel \sim \beta_\perp$ становится, вообще говоря, одного порядка. На это весьма важное обстоятельство было обращено внимание еще в работе [15].

Выше отмечалось, что магнитоактивная плазма резко меняет характер излучения на основной гармонике лишь при условии, что электронная концентрация N в плазме (а вместе с ней — параметр v) не слишком малы. Конкретное условие, налагаемое при этом на величину v, можно получить из кинетического рассмотрения. Согласно [7], вывод о сильном уменьшении эффективности излучения слаборелятивистского электрона в магнитоактивной плазме на основной гармонике справедлив, если

$$v \gg \beta_\perp n_j \cos\alpha \,|\, w(z_{j1}) \,| \,. \tag{1.18}$$

Функция $w(z_{j1})$ здесь имеет вид

$$w(z_{j1}) = e^{-z_{j1}^2/2} \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{z_{j1}/\sqrt{2}} e^{\xi^2} d\xi\right),$$
$$z_{j1} \equiv \frac{1 - \omega_H/\omega}{\beta_T n_j \cos\alpha} \,. \tag{1.19}$$

Напротив, в достаточно разреженной плазме, когда

$$v \ll \beta_T \cos\alpha \,|\, w(z_{j1}) \,|, \tag{1.20}$$

излучение на основной гармонике практически ничем не отличается от излучения в вакууме.

В заключение отметим, что в работе Твисса и Робертса [18] расчет магнитотормозного излучения электрона в плазме на гирочастоте выполнен неверно. Последнее следует хотя бы из того, что в [18] интенсивность излучения на $\omega \simeq \omega_H$ пропорциональна β^2 для необыкновенной волны и β^6 — для обыкновенной. Это отличается от приведенных выше выражений, согласно которым $P_{j,\,s-1}^{\text{дип}}$ пропорциональна β^4 для обеих компонент, излучаемых под углом $\alpha \neq 0$ к магнитному полю $\boldsymbol{H}_0$.

Забегая несколько вперед, подчеркнем, что зависимость $P_{j,\,s=1}^{\text{дип}} \backsim \beta^2$ противоречит также хорошо известному факту, согласно которому поглощение на частоте $\omega \simeq \omega_H$ в плазме без соударений и теплового движения отсутствует. В самом деле, в случае $P_{j,\,s=1}^{\text{дип}} \backsim \beta^2$ излучательная способность равновесной плазмы в интервале частот $\Delta\omega$ равна $a_j \Delta\omega \backsim \beta^2 \sim \beta_T^2$, причем $\Delta\omega \backsim \beta \sim \beta_T$ благодаря эффекту Допплера.

Тогда в соответствии с законом Кирхгофа коэффициент резонансного поглощения в области первой гармоники $\mu_j^{\text{рез}} \backsim a_j/T$, что, в свою очередь, пропорционально $1/\beta_T$. Поэтому $\mu_j^{\text{рез}} \to \infty$ при $\beta_T \to 0$ в противоречии с элементарной теорией распространения волн в плазме. Аналогичная ошибка допущена также при вычислении интенсивности электрона в статье Остера [19]. Напротив, при корректном рассмотрении задачи, когда, в согласии со сказанным выше, $P_{j,s=1}^{\text{дип}} \backsim \beta_\perp^2 \beta_\parallel^2 \sim \beta^4$, величина $\mu_j^{\text{рез}} \backsim \beta_T$ и стремится к нулю при $\beta_T \to 0$*.

2. КОЭФФИЦИЕНТ ГИРОРЕЗОНАНСНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Как уже указывалось, для расчета коэффициента поглощения в почти прозрачной равновесной плазме удобно использовать закон Кирхгофа:

$$a_{j\omega} = \mu_j I_{j\omega}^{(0)}, \tag{2.1}$$

где $\mu_j(\omega)$ — коэффициент поглощения по интенсивности, $a_{j\omega}$ — излучательная способность на волне j-го типа и $I_{j\omega}^{(0)}$ — равновесная интенсивность на этой волне в плазме**:

$$I_{j\omega}^{(0)} = \frac{n_j^2 \omega^2 \varkappa T}{8\pi^3 c^2 |\cos\vartheta|}. \tag{2.2}$$

В последнем соотношении ϑ — угол между $\boldsymbol{k}_j$ и $d\omega/d\boldsymbol{k}_j$, T — температура плазмы. Формулу (2.2) легко получить из закона Рэлея—Джинса для плотности энергии в плазме:

$$\rho_{j\lambda}^{(0)} d\lambda d\Omega = \frac{\varkappa T}{\lambda^4} d\lambda d\Omega; \quad \rho_{j\omega}^{(0)} d\omega d\Omega = \frac{n_j^2 \omega^2 \varkappa T}{(2\pi c)^3} \left| \frac{d(\omega n_j)}{d\omega} \right| d\omega d\Omega, \tag{2.3}$$

если учесть, что в среде, слабо поглощающей на длине волны λ, интенсивность излучения связана с плотностью энергии $\rho_{j\omega}$ соотношением:

$$I_{j\omega} = \rho_{j\omega} |d\omega/d\boldsymbol{k}_j| = \rho_{j\omega} \frac{c}{|\cos\vartheta\, d(\omega n_j)/d\omega|}. \tag{2.4}$$

Найдем сначала излучательную способность a_i, усреднив соответствующим образом интенсивность магнитотормозного излучения на s-ой гармонике по максвелловской функции распределения электронов по скоростям:

---

* В этом разделе речь шла о дипольном излучении электрона. Вклад мультиполей в интенсивность излучения можно оценить, учитывая следующие члены разложения функции Бесселя и ее производной по степеням $l = sn_j\beta_\perp \sin\alpha$ в формуле (1.2). Легко видеть, что при $|l| \ll 1$ поправки к $P_{j,s\geqslant 2}^{\text{дип}}$ будут малы ($\sim l^2$). Для основной гармоники ($s=1$) относительный вклад мультиполей—порядка $l^2/\beta_\parallel^2$ при $\beta_\parallel^2 \gg \beta_T^2$ и порядка l^2/β_T^2 при $\beta_\parallel^2 \lesssim \beta_T^2$. В этом случае влиянием мультиполей на интенсивность излучения можно пренебречь, если (ориентировочно) $l^2 \ll \max\{\beta_\parallel, \beta_T\}$.

** В (2.1) безразлично, к единице какого телесного угла—в направлении волнового вектора $\boldsymbol{k}_j$ или групповой скорости $d\omega/d\boldsymbol{k}_j$—относить величины $a_{j\omega}$ и $I_{j\omega}^{(0)}$. Ниже мы используем телесный угол Ω вдоль $\boldsymbol{k}_j$, так как в этом случае выражения для $a_{j\omega}$, $I_{j\omega}^{(0)}$ имеют более простой вид.

$$f(V) = N\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2} e^{-mV^2/2\varkappa T}; \quad V^2 = V_\parallel^2 + V_\perp^2 \tag{2.5}$$

($V_\parallel$ — проекция скорости V на направление H_0, $V_\perp$ — составляющая, ортогональная H_0). Воспользовавшись цилиндрической системой координат ($V_\parallel$, $V_\perp$, φ), запишем энергию электромагнитных волн, излучаемых единицей объема плазмы в единицу времени и телесного угла, следующим образом*:

$$a_j = \int_0^\infty \int_{V_\parallel} \int_0^{2\pi} P_{js}^{\text{дип}} f V_\perp dV_\parallel d\varphi. \tag{2.6}$$

Поскольку $P_{js}^{\text{дип}}$ (1.11) и f (2.5) не зависят от полярного угла φ в плоскости, ортогональной H_0, здесь сразу же можно выполнить интегрирование по φ:

$$a_j = 2\pi \int_0^\infty \int_{V_\parallel} P_{js}^{\text{дип}} f V_\perp dV_\perp dV_\parallel. \tag{2.7}$$

Замечая далее, что частота магнитотормозного излучения (1.9) в направлении α есть функция только $V_\parallel$, проведем в (2.7) замену $V_\parallel \to \omega$:

$$a_j = 2\pi \int_0^\infty \int_\omega P_{js}^{\text{дип}} f V_\perp \left|\frac{\partial V_\parallel}{\partial \omega}\right| dV_\perp d\omega. \tag{2.8}$$

Отсюда ясно, что излучательная способность $a_{j\omega}$ в единичном интервале частот имеет вид

$$a_{j\omega} = 2\pi \int_0^\infty P_{js}^{\text{дип}} f \,|dV_\parallel/d\omega|\, V_\perp dV_\perp, \tag{2.9}$$

где, согласно (1.9)**,

$$\partial V_\parallel/d\omega \simeq c/\omega\, n_j \cos\alpha. \tag{2.10}$$

Подставляя выражения для P_{js} (1.11), f (2.5) и $dV_\parallel/d\omega$ в (2.9) и интегрируя по $V_\perp$, получим***

$$a_{j\omega} \simeq \frac{s^{2s}}{2^s (2\pi)^{3/2} s!} \frac{e^2 N\omega}{c^{2s}} \left(\frac{\varkappa T}{m}\right)^{s-1/2} \frac{\sin^{2s-2}\alpha}{|\cos\alpha|} \times$$
$$\times\, n_j^{2s-2} \gamma_j^2 (1 + \alpha_j + n_j \beta_j \beta_\parallel \sin\alpha)^2 \exp(mV_\parallel^2/2\varkappa T). \tag{2.11}$$

---

* В слаборелятивистском случае, строго говоря, в качестве верхнего предела интегрирования по $V_\perp$ следовало бы взять значение $V_{\perp\,\text{макс}}$, такое, что $V_T \ll V_{\perp\,\text{макс}} \ll c$. Однако f быстро спадает при $V_\perp \gg V_T$ и замена верхнего предела на бесконечность существенно не отразится на результатах

** Соотношение (2.10) справедливо, если наряду с условием (1.8) имеет место неравенство $|n_j \cos\alpha| \gg |\beta_\parallel|$; при $\beta_\parallel \neq 0$ оно может быть выполнено только для углов α, не слишком близких к $\pi/2$.

*** Использование формулы (1.11) для $P_{js}^{\text{дип}}$ означает, что следующее ниже рассмотрение относится только к области нормального эффекта Допплера ($s > 0$), где только и справедлива эта формула. В области аномального эффекта Допплера ($s < 0$, т. е. $n_j\beta_\parallel \cos\alpha > 1$), эффективное поглощение имеет место на частотах, излучаемых электронами с $\beta_\parallel \sim \beta_T$, т. е. на частотах, где $n_j\beta_T \cos\alpha > 1$. Однако в последнем случае наряду с магнитотормозным существует и резкое черенковское затухание; учет первого эффекта делает лишь более веским заключение о невозможности распространения волн при $n_j\beta_T \cos\alpha \gtrsim 1$.

По известной излучательной способности $a_{j\omega}$ из закона Кирхгофа находим энергетический коэффициент гирорезонансного поглощения:

$$\mu_{js}(\omega) \simeq B_{js} \frac{s^{2s}}{2^s s!} \frac{\omega}{c} \beta_T^{2s-3} \exp(-z_{js}^2/2) \, |\cos\vartheta|, \tag{2.12}$$

где

$$B_{js} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, v n_j^{2s-4} \gamma_j^2 \left[1 + \alpha_j + \beta_j \left(1 - s\sqrt{u}\right) \operatorname{tg}\alpha\right]^2 \frac{\sin^{2s-2}\alpha}{|\cos\alpha|},$$

$$z_{js} = \frac{\beta_\parallel}{\beta_T} = \frac{1 - s\sqrt{u}}{n_j \beta_T \cos\alpha}, \tag{2.13}$$

$$\beta_T = \sqrt{\varkappa T/m}, \qquad v = \omega_0^2/\omega^2, \qquad u = \omega_H^2/\omega^2,$$

α — угол между $\boldsymbol{k}_j$ и $\boldsymbol{H}_0$, ϑ — угол между $\boldsymbol{k}_j$ и $d\omega/d\boldsymbol{k}_j$. Параметры α_j, β_j, γ_j заданы формулами (1.4)—(1.7), показатель преломления n_j — формулой (1.3). При переходе от (2.11) к (2.12) компонента скорости $\boldsymbol{H}_\parallel = \beta_\parallel c$ исключена с помощью уравнения Допплера в форме (1.9).

Благодаря экспоненциальному фактору в (2.12) величина $\mu_{js}(\omega)$ становится весьма малой на частотах, не слишком близких к $s\omega_H$ (т. е. при $z_{js}^2 \gg 2$). Поэтому спектр эффективно поглощаемых частот образует ряд дискретных «линий» с центрами на $\omega = s\omega_H$ и полушириной, определяемой условием $z_{js}^2 = 2$.

Легко видеть (см. (1.8) и сноску на стр. 75), что полученное выражение для μ_{js} справедливо в случае, когда выполнены следующие неравенства*:

$$\begin{gathered} \beta_T^2 \ll 1, \qquad \beta_\parallel^2 \ll 1, \qquad |n_j \beta_\parallel| \ll 1, \\ |s n_j \beta_T \sin\alpha| \ll 1, \qquad |\beta_\parallel \omega \partial n_j / \partial\omega| \ll 1, \\ |n_j \cos\alpha| \ll |\beta_\parallel|, \end{gathered} \tag{2.14}$$

где $\beta_\parallel = \left(1 - s\sqrt{u}\right) / n_j \cos\alpha$. Кроме того, на основной гармонике $s = 1$ (т. е. на частотах $\omega \simeq \omega_H$) выражение для μ_{js} сохраняет силу только в крыльях линии поглощения (при условии $z_{j1}^2 \gg 2$), так как в области $z_{j1}^2 \leqslant 2$ выражение (1.11) для интенсивности излучения электрона становится неприменимым. Поэтому при $z_{j1}^2 \sim 2$ формулы (2.12), (2.13) могут быть использованы лишь для оценок μ_{j1} по порядку величины; точное выражение для μ_{j1} в области $z_{j1}^2 \leqslant 2$ можно найти лишь в результате исследования задачи на базе кинетического уравнения. На более высоких гармониках s, начиная со второй, указанные ограничения спадают и полученные выше выражения для коэффициента поглощения применимы как в крыльях линии, так и внутри ее.

Выражение для коэффициента гирорезонансного поглощения имеет смысл упростить так же, как это было сделано для интенсивности дипольного излучения отдельного слаборелятивистского электрона. Именно, для всех гармоник $s \geqslant 2$ положим в (2.13) частоту ω равной $s\omega_H$:

* Первое и четвертое неравенства получены из соответствующих условий (1.8) заменой $\beta_\perp$ на β_T. Подобная замена учитывает, что для максвелловского распределения вкладом электронов с $\beta_\perp \gg \beta_T$ можно пренебречь по сравнению с электронами, у которых $\beta_\perp \leqslant \beta_T$

$$B_{js} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \{v n_j^{2s-4} \gamma_j^2 (1+\alpha_j)^2\}_{\omega=s\omega_H} \frac{\sin^{2s-2}\alpha}{|\cos\alpha|}. \qquad (2.13а)$$

На первой гармонике $s=1$ этого делать нельзя*, так как $(1+\alpha_j)^2_{\omega=\omega_H}=0$; поскольку, однако, $(1+\alpha_j)\left(1-\sqrt{u}\right)^{-1}$ остается конечным при $\sqrt{u}\to 1$ (т. е. при $\omega\to\omega_H$), фактор B_{j1} можно представить при $z_{j1}^2 \gg 2$ следующим образом:

$$B_{j1} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sqrt{u}\right)^2 \left\{v n_j^{-2}\gamma_j^2\left(\frac{1+\alpha_j}{1-\sqrt{u}} + \beta_j \operatorname{tg}\alpha\right)^2\right\}_{\omega=\omega_H} |\cos\alpha|^{-1}. \qquad (2.13б)$$

Оценку B_{j1} в области $z_{j1}^2 \sim 2$ можно получить путем экстраполяции (2.13б):

$$B_{j1} \sim \sqrt{2\pi}\left\{v\gamma_j^2\left(\frac{1+\alpha_j}{1-\sqrt{u}} + \beta_j \operatorname{tg}\alpha\right)^2\right\}_{\omega=\omega_H} = \beta_j^2 |\cos\alpha|. \qquad (2.14)$$

В квазипродольном приближении, которое может быть выполнено в достаточно широком интервале углов α лишь при $s \geqslant 2$ (т. е. при $u \leqslant 1/4$; см. [4]) [*]

$$B_{js} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{8}}\left\{v n_j^{2s-2}\left[1-\frac{v\left(1\pm\sqrt{u}\cos\alpha\right)}{1-u}\right]^{-1}\right\}_{\omega=s\omega_H} \times \frac{(1\pm\cos\alpha)^2 \sin^{2s-2}\alpha}{|\cos\alpha|}, \qquad (2.15)$$

где $n_j^2 = 1 - v\left(1\mp\sqrt{u}\cos\alpha\right)^{-1}$. При получении этой формулы учтено, что в квазипродольном приближении

$$\gamma_j^2 = \frac{n_j^2}{2}\left[1-\frac{v\left(1\pm\sqrt{u}\cos\alpha\right)}{1-u}\right]^{-1}; \qquad \alpha_j \simeq \pm\cos\alpha$$

(верхний знак здесь относится к необыкновенной, нижний — к обыкновенной волнам). Если $v \ll 1$, то можно считать $n_j^2 \simeq 1$, $\gamma_j^2 \simeq 1/2$ и $\cos\vartheta \simeq 1$, при этом энергетический коэффициент гирорезонансного поглощения приобретает особенно простой вид*:

---

* Отбрасывание члена $\beta_j\left(1-s\sqrt{u}\right)\operatorname{tg}\alpha$ недопустимо также и на более высоких гармониках, если он становится больше $1+\alpha_j$. Благодаря малости $1-s\sqrt{u}$ в окрестности линий поглощения это обстоятельство существенно лишь при $\alpha \simeq \pi/2$.

[*] Заметим, что в области значений $1-v \sim 1$ для $s=2$ квазипродольное приближение будет нарушено при углах $\alpha \gtrsim 75°$; для $s=3$ это произойдет, если $\alpha \gtrsim 80°$ и т. д. Указанное обстоятельство дает возможность широко использовать формулы (26.116), (26.117) при конкретных расчетах гирорезонансного поглощения в солнечной короне на гармониках с номером $s \geqslant 2$.

$$\mu_{js} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{s^{2s}}{2^s s!}\,\frac{\omega}{c}\,v\beta_T^{2s-3}\,\frac{(1 \pm \cos\alpha)^2 \sin^{2s-2}\alpha}{|\cos\alpha|} \times$$
$$\times \exp\{-z_{js}^2/2\}, \quad z_{js} = \frac{1 - s\sqrt{u}}{\beta_T \cos\alpha}. \tag{2.16}$$

На основной гармонике $s = 1$ ($\omega \simeq \omega_H$) в крыльях линии поглощения для обыкновенной волны при $v \ll 1$

$$n_2^2 \simeq 1; \quad \cos\vartheta \simeq 1;$$

$$\left\{\gamma_2\left[\frac{1+\sigma_2}{1-\sqrt{u}} + \beta_2 \operatorname{tg}\alpha\right]\right\}^2_{\omega=\omega_H} \simeq \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}\,\frac{(1+2\cos^2\sigma)^2}{(1+\cos^2\alpha)^3}$$

и, следовательно,

$$\mu_{21} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\omega}{c}\,\frac{(1-\sqrt{u})^2}{\beta_T}\,v\,\frac{\sin^4\alpha\,(1+2\cos^2\alpha)}{|\cos^3\sigma|\,(1+\cos^2\alpha)^3}\exp(-z_{21}^2/2);$$
$$z_{21} \simeq \frac{1-\sqrt{u}}{\beta_T\cos\alpha}. \tag{2.17}$$

Конечно, коэффициент поглощения в форме (2.17), равно как и выражение (1.13) для интенсивности излучения электрона на основной гармонике, имеют место лишь для не слишком малых значений v (1.18). Если же v очень мало (см. критерий (1.20)), то поглощение на основной гармонике—такое же, как в вакууме. В последнем случае для расчета μ_{j1} можно использовать, скажем, формулу (1.16), положив в ней $s = 1$.

Выражениям для B_s можно придать иную форму, более удобную при сопоставлении полученных значений коэффициентов гирорезонансного поглощения с соответствующими результатами кинетических расчетов. С этой целью подставим в (2.13а), (2.13б) явные выражения для γ_j, α_j, β_j через u, v, α, n_j; тогда после довольно громоздких преобразований, выполненных Е. Я. Злотник, найдем, что на всех гармониках, начиная со второй,

$$B_{js} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\sin^{2s-2}\alpha}{|\cos\alpha|}\Bigg\langle vn_j^{2s-2}(1-u)\Bigg\{n_j^4\sin^2\alpha - (1-v)\times$$
$$\times(1+\cos^2\sigma)\,n_j^2 + 2\left(1 - \frac{v}{1-u} + \frac{v\sqrt{u}}{1-u}\right)(1 - v - n_j^2\sin^2\alpha)\Bigg\}\times \tag{2.18}$$
$$\times\{2(1-v)[(1-v)^2 - u] + [(2-v)u - 2(1-v)^2 -$$
$$- uv\cos^2\alpha]\}^{-1}\Bigg\rangle_{\omega = s\omega_H},$$

а на первой гармонике в крыльях линии поглощения

$$B_{j1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(1-u)^2}{\cos\alpha|}\Bigg\langle\frac{1}{v}\Bigg\{[v\cos(2\alpha) - 1]\,n_j^4 +$$
$$+\left(2 - 2v\cos^2\sigma - v^2\sin^2\alpha - \frac{v^2}{4}\operatorname{tg}^2\alpha\right)n_j^2 + (v-1)\left(1 - \frac{v^2}{4}\right) +$$

$$+\frac{v^2}{4}(2-v)\operatorname{tg}\alpha\Big\}\{2(1-v)(2-v)+(2v-2-\sin^2\alpha)\times \tag{2.19}$$

$$\times n_j^2\}^{-1}\Big\rangle_{\omega=\omega_H}.$$

На графиках $s \geqslant 2$ коэффициент поглощения μ_{js} (2.12) (с B_{js} в форме (2.13а), (2.18)) совпадает с полученным Степановым [2] на базе кинетического уравнения, отличаясь на упущенный в [3] фактор 2 от результатов Гершмана [3] (см. также [4] § 12). Однако μ_{js} с B_{js} в форме (2.13б), (2.19) для крыльев линии поглощения на гирочастоте существенно отличается от соответствующих выражений в работах [1–3, 8]; в частности, результат [2] совпадает с (2.12), (2.13б), (2.19) лишь при условии, если в (2.13б) отбросить $\beta_j \operatorname{tg}\sigma$ (см. [9]), что на первой гармонике, как мы убедились, делать нельзя*.

Из приведенных выражений для B_{js} ясно, что в общем случае этот фактор (а вместе с ним коэффициент гирорезонансного поглощения) сложным образом зависит от параметров v, u и угла α. Характер этой зависимости можно представить, обратившись к рис. 1, на котором построены графики $B_{js}(v)/\beta_T^2 z_{js}^2$ для обыкновенных волн на основной гар-

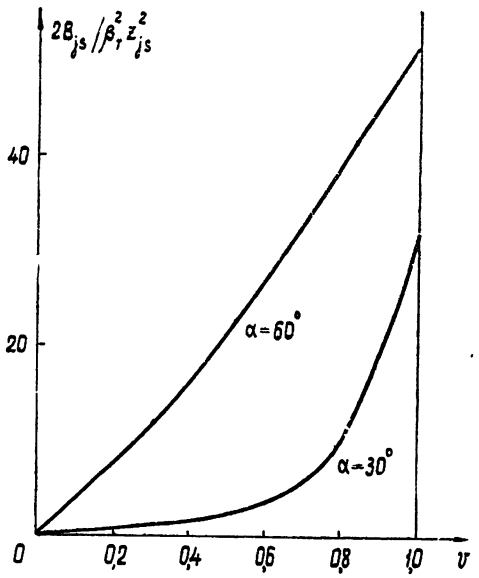


Рис. 1. Зависимость параметра $2B_{js}/\beta_T^2 z_{js}^2$ от v для обыкновенной волны на первой гармонике ($s = 1$, $\omega = \omega_H$) при $\alpha = 30°$ и $\alpha = 60°$.

монике ($j = 2$, $s = 1$), а также к рис. 2, где помещены графики значений $B_{js}(v)$ для необыкновенных и обыкновенных волн на второй и третьей гармониках. Интервалы значений v на рисунках ($0 < v < 1 - \sqrt{u}$ для

* При сопоставлении приведенных формул с результатами [1–3] следует учитывать, что там речь идет или об амплитудном коэффициенте затухания, или об амплитудном коэффициенте поглощения в направлении $\boldsymbol{k}_j$, тогда как здесь найден энергетический коэффициент поглощения в направлении групповой скорости $d\omega/d\boldsymbol{k}_j$.

необыкновенной и $0 < v < 1$ обыкновенной волн) выбраны с учетом того обстоятельства, что в этих интервалах значения $n_j^2 > 0$*.

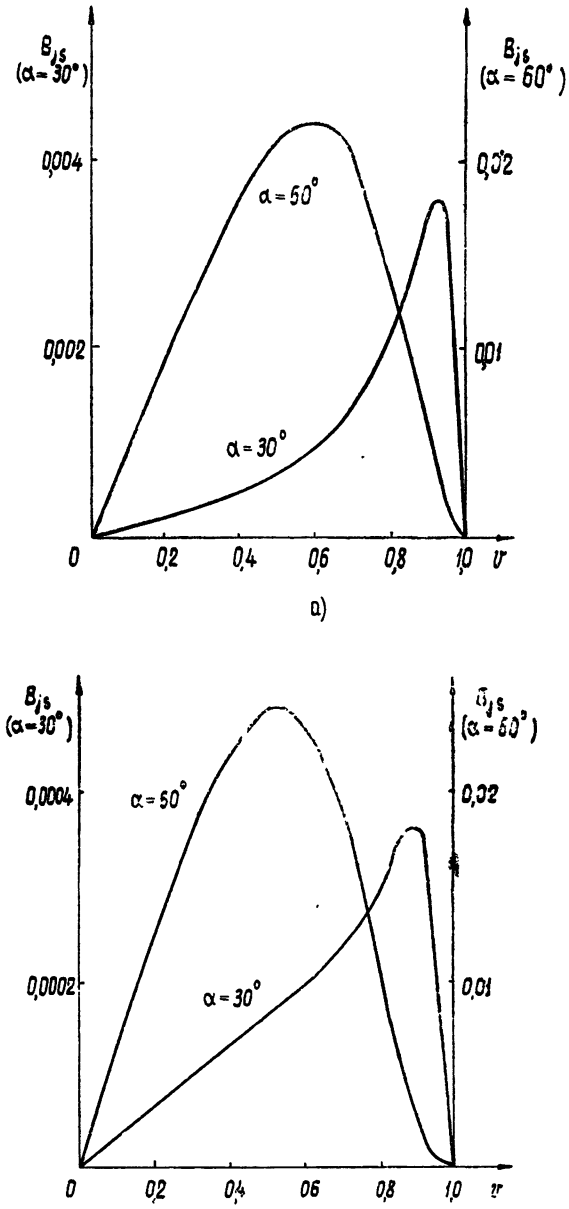
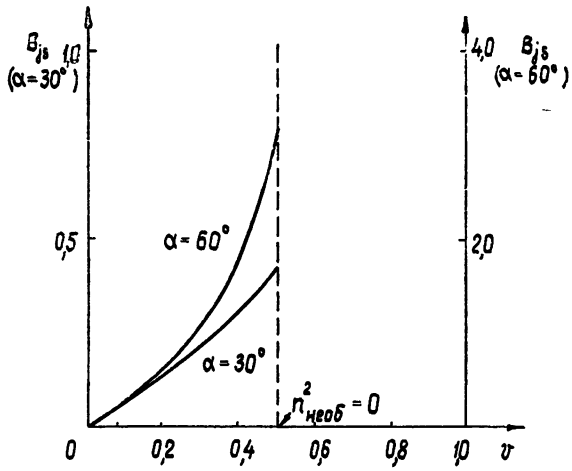
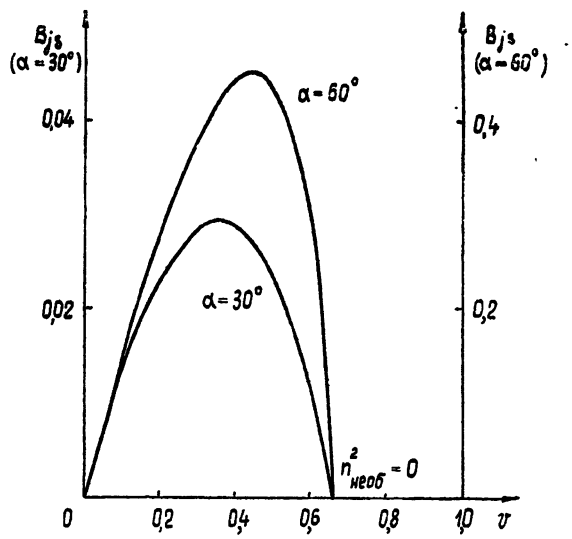


Рис. 2. Зависимость B_{js} от v при $\sigma = 30°$ и $\alpha = 60°$:
а) обыкновенная волна, $s = 2$, б) обыкновенная волна, $s = 3$.

При $s \geqslant 1$, т. е. при $u \leqslant 1$ для необыкновенных волн есть еще одна область с положительными значениями n_1^2 (в слоях $v > 1 - \sqrt{u}$). Однако для практических случаев распространения электромагнитных волн в стационарной солнечной короне и планетных ионосферах эта область не представляет интереса, поскольку непосредственный выход за пределы плазмы из нее невозможен.



в)



г)

Рис. 2. Зависимость B_{js} от v при $\alpha=30°$ и $\alpha=60°$:
в) необыкновенная волна, $s=2$, г) необыкновенная волна, $s=3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ситенко, К Н Степанов, ЖЭТФ, **31**, 642 (1956).
2. К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **35**, 283 (1958)
3. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **38**, 912 (1960).
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960
5. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **24**, 659 (1953).
6. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, Астрон. ж, **36**, 233 (1959).
7. К. Н. Степанов, В Н Пахомов, ЖЭТФ, **38**, 1964 (1960).
8. T. Kakinuma and G. Swarup, Sci. Report № 1, Radioscience Laboratory, Standford Univ., California, March 1962.
9. А. А. Андронов, В. В. Железняков, М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика (в печати).

10. В. Л Гинзбург и В. В Железняков, Астрон ж., **35**, 694 (1958).
11. В. В Железняков, Изв высш уч зав.—Радиофизика, **2**, 14 (1959)
12 В В. Железняков, Астрон ж., **34**, 5 (1962).
13. В. В. Железняков, Астрон. ж, **40**, 829 (1963)
14. В В Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, Физматгиз, М, 1964
15. В. Л. Гинзбург и В В Железняков, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **1**, № 2, 59 (1958).
16 В В. Железняков, Диссертация, Горький, 1959
17 В Я Эйдман, ЖЭТФ, **34**, 131 (1958); **36**, 1335 (1959).
18. R. Q. Twiss and J. A. Robert, Austral. J. Phys, **2**, 424 (1958).
19. L. Oster, Phys. Rev., **116**, 474 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 мая 1963 г

ON GYRORESONANCE RADIATION AND ABSORPTION IN AN EQUILIBRIUM MAGNETO-ACTIVE PLASMA

V. V. Zheleznyakov

The radiation has been considered of a weakly relativistic electron moving along the helix in a magneto-active plasma.

Using Kirchoff's law the absorption coefficient has been found of electro-magnetic waves in an equilibrium plasma at frequencies $\omega \simeq s\omega_H$ ($s=1, 2, 3, \ldots$; ω_H is the electron gyrofrequency); the absorption is connected with the synchrotron radiation of weakly relativistic plasma electrons.

The expressions obtained have been compared with the corresponding absorption coefficients; the latter being found in [1–3] by means of the kinetic equation method with a self-consistent field.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

О ПРОХОЖДЕНИИ ИОННЫХ ПОТОКОВ ЧЕРЕЗ ПЛАЗМУ

В. Б. Красовицкий, К. Н. Степанов

Исследуется возбуждение электромагнитных волн в плазме потоком ионов с малой плотностью и большим тепловым разбросом по скоростям в области частот $\omega_H \gg \omega \gg \omega_i$ (ω_H — гирочастота электронов, ω_i — гирочастота ионов). Предполагается, что ионный пучок инжектирован в плазму под большим углом к внешнему магнитному полю $\boldsymbol{H}_0$, так что $v_{0\parallel} \sim v_{0\perp} \gg v_T$ ($v_{0\parallel}$ и $v_{0\perp}$ — параллельная и перпендикулярная $\boldsymbol{H}_0$ составляющие скорости потока, v_T — средняя тепловая скорость частиц потока). Показано, что инкремент нарастания значительно увеличивается по сравнению со случаем потока, параллельного H_0.

В работе [1] исследовано возбуждение электромагнитных волн в плазме потоком ионов с малой плотностью и большим тепловым разбросом по скоростям в области частот $\omega_H \gg \omega \gg \frac{m}{M}\omega_H$ (ω_H — гирочастота электронов, $\frac{m}{M}\omega_H$ — гирочастота ионов плазмы); при этом найдены инкременты нарастания волн в случае, когда поток ионов движется параллельно магнитному полю. В настоящей работе рассматривается возбуждение электромагнитных волн в плазме в области частот $\omega_H \gg \omega \gg \frac{m}{M}\omega_H$ потоком ионов, инжектированных в плазму под углом к внешнему магнитному полю. Показано, что инкремент нарастания волн в этом случае сильно возрастает по сравнению со случаем потока, параллельного внешнему магнитному полю.

Будем считать, что равновесная функция распределения ионов потока по скоростям имеет вид

$$f_0(v_\perp, v_\parallel) = A \exp\left[-\frac{(v_\perp - v_{0\perp})^2 + (v_\parallel - v_{0\parallel})^2}{2v_T^2}\right], \tag{1}$$

где $v_{0\parallel}$ и $v_{0\perp}$ — параллельная и перпендикулярная магнитному полю $\boldsymbol{H}_0$ составляющие скорости ионов потока; $v_T = \sqrt{T/M'}$ — средняя тепловая скорость, а M' — масса ионов потока; $A = (2\pi)^{-3/2} v_T^{-3}$ — нормировочная постоянная.

Рассмотрим случай, когда направленная скорость потока вдоль магнитного поля $v_{0\parallel}$ порядка $v_{0\perp}$ (инжекция ионов потока под углом, не близким к нулю) и, кроме того, $v_{0\parallel} \gg v_T$; $v_{0\perp} \gg v_T$ *.

---

* В настоящей работе не рассматривается вопрос о создании в плазме потоков с функцией распределения (1) или (2). Устойчивость плазмы при наличии потоков с функцией распределения (1) исследовалась в работах Железнякова [5, 6]. Потоки ионов с функцией распределения, подобной (1), реализуются в адиабатических ловушках при инжекции молекулярных ионов перпендикулярно к магнитному полю (Головин и др [7]), инжекции плазменных сгустков через «магнитный клапан» в стелларатор (Синельников и Толок [8]).

1. ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Если $v_{0\perp}/v_T \to \infty$, то функция распределения (1) переходит в

$$f_0(v_\perp, v_\parallel) = A'\delta(v_\perp - v_{0\perp}) \exp\left[-\frac{(v_\parallel - v_{0\parallel})^2}{2v_T^2}\right]. \tag{2}$$

Функция распределения (2) описывает поток осцилляторов, движущихся вдоль магнитного поля. Вклад потока осцилляторов в тензор диэлектрической проницаемости системы плазма — поток равен [2]

$$\varepsilon'_{11} = -\frac{\Omega'^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{a^2}{2\mu}\right) + \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\sum_n i\sqrt{\pi}w(z_n)\left[\frac{z_n}{\mu}n^2J_n^2 + 2n^3J_nJ'_n\frac{\sqrt{u}y_0}{a}\right];$$

$$\varepsilon'_{22} = -\frac{\Omega'^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{a^2}{2\mu}\right) + \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\sum_n i\sqrt{\pi}w(z_n)\left[\frac{a^2z_n}{\mu}J_n'^2 + \frac{n\sqrt{u}y_0}{a}\frac{d}{da}(a^2J_n'^2)\right];$$

$$\varepsilon'_{33} = \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\left(2y_0^2 + \frac{a^2}{2\mu}\operatorname{tg}^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta\right) + 2\frac{\Omega'^2}{\omega^2}\sum_n i\sqrt{\pi}w(z_n)y_n^2 \times$$

$$\times\left[z_nJ_n^2 + \frac{2\mu y_0\sqrt{u}}{a}nJ_nJ'_n\right]; \tag{3}$$

$$\varepsilon'_{12} = -\frac{\Omega'^2}{\omega^2}\sum_n \sqrt{\pi}w(z_n)\left[\frac{n^2\sqrt{u}y_0}{a}\frac{d}{da}(aJ_nJ'_n) + \frac{naz_n}{\mu}J_nJ'_n\right];$$

$$\varepsilon'_{13} = \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{a^2}{2\mu}\operatorname{tg}\theta\right) + \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\operatorname{tg}\theta\sum_n i\sqrt{\pi}w(z_n)\frac{y_n}{\sqrt{u}} \times$$

$$\times\left[\frac{2\sqrt{u}n^2}{a}J_nJ'_n + \frac{nz_n}{y_0\mu}J_n^2\right];$$

$$\varepsilon'_{23} = \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\operatorname{tg}\theta\sum_n \sqrt{\pi}w(z_n)y_n\left[\frac{n}{a}\frac{d}{da}(aJ_nJ'_n) + \frac{az_n}{\sqrt{u}\mu y_0}J_nJ'_n\right],$$

где $J_n = J_n(a)$ — функция Бесселя, дифференцирование по a обозначено штрихом, $a = k_\perp v_{0\perp}/\omega_i$, ω_i — гирочастота ионов пучка, $\Omega' = \sqrt{4\pi e^2 n'_0/M'}$ — ленгмюровская частота и n'_0 — плотность пучка,

$$z_n = \frac{\omega - k_\parallel v_{0\parallel} - n\omega_i}{\sqrt{2}k_\parallel v_T}; \quad y_n = \frac{\omega - k_\parallel v_{0\parallel}}{\sqrt{2}k_\parallel v_T}; \quad \sqrt{u} = \frac{\omega_i}{\omega}; \quad \sqrt{\mu} = \frac{k_\perp v_T}{\omega_i},$$

$k_\parallel$ и $k_\perp$ — соответственно параллельная и перпендикулярная магнитному полю проекции волнового вектора $\boldsymbol{k}$, $w(z_n)$ — интеграл вероятности:

$$w(z_n) = \exp(-z_n^2)\left(1 + \frac{2i}{\pi}\int_0^{z_n} e^{t^2}dt\right).$$

Бесконечные суммы выражений (3) удобно представить, используя соотношение (см. Приложение 1)

$$\sum_n \frac{J_n^2(a)}{p - n} = -i\int_0^\infty J_0\left(2a\sin\frac{\varphi}{2}\right)e^{ip\varphi}d\varphi, \tag{4}$$

где $\operatorname{Im} p > 0$, в виде однократных интегралов:

$$\varepsilon'_{11} = -\frac{\Omega'^2}{\omega^2}\int_0^\infty \left[-\left(is - \frac{\varkappa^2\varphi}{2}\right)(\sin\varphi J_0)' + \operatorname{ctg}^2\theta\varphi J_0''\right] e^{q(\varphi)} d\varphi;$$

$$\varepsilon'_{22} = -\varepsilon'_{11} + \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\int_0^\infty \left[a^2\operatorname{ctg}^2\theta\varphi J_0 + \frac{1}{a}\frac{d}{da}(a^2 J_0)\left(is - \frac{\varkappa^2\varphi}{2}\right)\right] e^{q(\varphi)} d\varphi;$$

$$\varepsilon'_{33} = 2\frac{\Omega'^2}{\omega^2}\left\{(z_0-y_0)^2 + \int_0^\infty \left[\left(z_0-y_0+\frac{i\varkappa\varphi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right](J_0'+isJ_0+\mu\sin\varphi J_0) e^{q(\varphi)} d\varphi;\right.$$

$$\varepsilon'_{12} = -\frac{\Omega'^2}{\omega^2}\int_0^\infty \left\{\left(is - \frac{\varkappa^2\varphi}{2}\right)[(\cos\varphi - 1)J_0]' + \operatorname{ctg}^2\theta\varphi\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} J_0'\right]'\right\} e^{q(\varphi)} d\varphi;$$

$$\varepsilon'_{13} = -\frac{\Omega'^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\left\{s(z_0-y_0) + \int_0^\infty \left\{\left[s(z_0-y_0) + i\frac{\varkappa^2\varphi}{2}(2z_0-y_0) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{\varkappa^3\varphi^2}{4} + \frac{\varkappa}{2}\right](J_0' + isJ_0) - \operatorname{tg}\theta\left[i\varkappa(z_0-y_0) - \frac{\varkappa^2\varphi}{2}\right](\sin\varphi J_0)'\right\} e^{q(\varphi)} d\varphi\right\}; \tag{5}$$

$$\varepsilon'_{23} = \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\int_0^\infty \left\{\operatorname{tg}\theta\left[i\varkappa(z_0-y_0) - \frac{\varkappa^2\varphi}{2}\right][(1-\cos\varphi)J_0]' + \right.$$

$$\left. + \operatorname{ctg}\theta\left[1 + i\varkappa(z_0-y_0)\varphi - \frac{\varkappa^2\varphi^2}{2}\right]\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} J_0'\right\} e^{q(\varphi)} d\varphi.$$

В соотношениях (5) введены обозначения

$$s = \frac{\omega - k_\parallel v_{0\parallel}}{\omega_i}; \quad \varkappa = \frac{\sqrt{2}k_\parallel v_T}{\omega_i}; \quad q(\varphi) = is\varphi - \frac{\varkappa^2\varphi^2}{4}; \quad J_0 = J_0\left(2a\sin\frac{\varphi}{2}\right);$$

штрих обозначает дифференцирование по φ.

Выражениями (5) можно пользоваться при вычислении инкремента, если $kv_T \ll \omega_i$ (допплеровское уширение при черенковском и магнитотормозном излучении значительно меньше гирочастоты ионов потока). Если имеет место неравенство $kv_T \gg \omega_i$, то соотношения (5) применимы только в области малых углов θ ($\theta \lesssim v_T/v_{0\perp}$). Для углов $\theta \sim 1$ нужно учесть тепловое движение частиц потока в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, т. е. от функции распределения (2) перейти к функции (1). Для этого умножим (5) на $\frac{v_\perp}{v_T^2}\exp\left[-\frac{(v_\perp - v_{\perp 0})^2}{2v_T^2}\right]$, проинтегрируем от нуля до бесконечности и, пренебрегая членами порядка $v_T/v_{0\perp}$ по сравнению с единицей, найдем, что

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\int_0^\infty [s^2 J_0(a\varphi) - ias\operatorname{ctg}^2\theta J_1(a\varphi)]\varphi\exp\left(is\varphi - \frac{\sigma^2\varphi^2}{2}\right) d\varphi;$$

$$\varepsilon'_{22} = -\varepsilon'_{11} + \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\int_0^\infty [a^2 \operatorname{ctg}^2\theta J_0(a\varphi) - iasJ_1(a\varphi)]\,\varphi \exp\left(is\varphi - \frac{\sigma^2\varphi^2}{2}\right) d\varphi;$$

$$\varepsilon'_{33} = 2\frac{\Omega'^2}{\omega^2}(z_0 - y_0)^2 \int_0^\infty [isJ_0(a\varphi) - aJ_1(a\varphi)] \exp\left(is\varphi - \frac{\sigma^2\varphi^2}{2}\right) d\varphi;$$

$$\varepsilon'_{12} = -\frac{\Omega'^2}{2\omega^2}\int_0^\infty [s^2 J_0(a\varphi) + ias \operatorname{ctg}^2\theta J_1(a\varphi)]\,\varphi^2 \exp\left(is\varphi - \frac{\sigma^2\varphi^2}{2}\right) d\varphi; \tag{6}$$

$$\varepsilon'_{13} = \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\, s(y_0 - z_0)\int_0^\infty [isJ_0(a\varphi) - aJ_1(a\varphi)] \exp\left(is\varphi - \frac{\sigma^2\varphi^2}{2}\right) d\varphi;$$

$$\varepsilon'_{23} = \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\sqrt{2\mu}\,(z_0 - y_0)\int_0^\infty [isJ_0(a\varphi) - aJ_1(a\varphi)] \exp\left(is\varphi - \frac{\sigma^2\varphi^2}{2}\right) d\varphi,$$

где $\sigma \equiv kv_T/\omega_i$. Так как $\sigma \gg 1$, то главный вклад в интегралы (6) дают значения $\varphi \lesssim 1/\sigma \ll 1$. Поэтому при выводе (6) считалось, что $\sin\varphi \simeq \varphi$ и $\cos\varphi \simeq 1 - \varphi^2/2$.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН ПРИ КВАЗИПРОДОЛЬНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ

В случае, когда имеют место неравенства

$$\Omega \gtrsim \omega_H \gg \omega \gg \frac{m}{M}\omega_H \tag{7}$$

($\Omega = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}$ — ленгмюровская частота плазмы), решение дисперсионного уравнения при θ, не близких к $\pi/2$, в отсутствие потока имеет вид

$$\omega = \frac{\omega_H \cos\theta}{r}; \qquad r = \frac{\Omega^2}{c^2k^2} \gg 1. \tag{8}$$

Выражение (8) определяет частоту электромагнитных волн в условиях квазипродольного распространения. Так как фазовая скорость волн с частотой (8) значительно меньше скорости света, то нерелятивистский поток ионов может эффективно взаимодействовать с этими волнами.

Инкремент нарастания, обусловленный наличием потока с малой плотностью, определяется соотношением

$$\frac{\gamma}{\omega} = -\frac{\omega^2}{2c^2k^2}\left(\varepsilon''_{11}\sec^2\theta - 2\varepsilon''_{12}\sec\theta + \varepsilon''_{22}\right), \tag{9}$$

где $i\varepsilon''_{ij}$ — антиэрмитовская часть тензора ε_{ij}, определяется формулами (5) или (6). Величина ω, входящая в (5) или (6), определяется выражением (8); правая часть выражения (9) не зависит от γ, если $\gamma \ll kv_T$, т. е. тепловой разброс в пучке должен быть достаточно большим, а плотность пучка малой. Следует отметить, что при выполнении неравенства $kv_T \gg \omega_i$ в выражении (9) можно пренебречь ε''_{12} по сравнению с ε''_{11} и ε''_{22}.

Будем считать, что $\sigma \gg 1$, и рассмотрим сначала случай θ, не близ-

ких к нулю. С точностью до членов порядка $v_T/v_{0\perp}$ и $kv_T/(\omega - k_\parallel v_{0\parallel})$ имеем для антиэрмитовских частей тензора ε'_{ij} следующие выражения.

$$\varepsilon''_{11} = -\frac{\Omega'^2}{2\omega^2}\left(s^2 \operatorname{Im} i\frac{dG}{ds} - as \operatorname{ctg}^2\theta \operatorname{Re}\frac{dG}{da}\right);$$
$$\varepsilon''_{22} = -\varepsilon''_{11} - \frac{\Omega'^2}{2\omega^2}\left(a^2\operatorname{ctg}^2\theta \operatorname{Im} i\frac{dG}{ds} - as \operatorname{Re}\frac{dG}{da}\right), \tag{10}$$

где

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(a\varphi)\exp\left(is\varphi - \frac{\sigma^2\varphi^2}{2}\right)d\varphi. \tag{11}$$

Используя интегральное представление для функции Бесселя

$$J_0(a\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(a\varphi\cos x)\,dx$$

и меняя порядок интегрирования, представим (11) в виде $G = G_+ + G_-$, где

$$G_\pm = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\int_0^{\pi}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(s \pm a\cos x)^2\right]dx. \tag{12}$$

Так как $s/\sigma \gg 1$ и $a/\sigma \gg 1$, то подынтегральное выражение в (12) экспоненциально мало для всех x, за исключением точек $|s \pm a\cos x| \sim \sigma$, (если $|s \pm a\cos x| \gg \sigma$ при всех x из промежутка $0 < x < \pi$, то интеграл (12), и, следовательно, инкремент экспоненциально малы).

Рассмотрим сначала случай, когда $a > s > 0$. Тогда можно считать, что $G = G_-$ (величина G_+ экспоненциально мала). Положим $\cos x_0 = s/a < 1$. Очевидно, что главный вклад в интеграл (12) дает область интегрирования вблизи x_0. Разлагая $\cos x$ в ряд вблизи $x = x_0$ и удерживая первые члены разложения, получим

$$G = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\int_{-x_0}^{\pi - x_0}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\xi\sqrt{a^2 - s^2} + \frac{s\xi^2}{2}\right)^2\right]d\xi. \tag{13}$$

Если x_0 не близко к нулю, то в экспоненте в (13) можно отбросить слагаемые порядка ξ^2, а пределы интегрирования распространить от $-\infty$ до ∞. В этом случае

$$G = 2/\sqrt{a^2 - s^2}. \tag{14}$$

Для инкремента тогда получаем следующее выражение:

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\Omega'^2}{2c^2k^2}\,\frac{s}{(a^2 - s^2)^{3/2}}\left[s^2\operatorname{tg}^2\theta + a^2(2 + \operatorname{ctg}^2\theta)\right]. \tag{15}$$

Возбуждение имеет место при $s > 0$. При $a^2 - s^2 \sim s^2$ и $v_{0\perp} \sim v_{0\parallel}$ инкремент

$$\gamma \sim \frac{n'_0}{n_0}\,\omega_i. \tag{16}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае коэффициент нарастания по порядку равен соответствующей величине в случае потока ионов, движущегося параллельно $\boldsymbol{H}_0$ (см. [1]).

Инкремент нарастания увеличивается при $s^2 \to a^2$. Однако выражениями (14) и (15) можно пользоваться лишь при $a^2 - s^2 \gg \sigma^2$ (так как только в этом случае можно пренебречь членами порядка ξ^2 в экспоненте в (13)). Если же $|s| \to a$, то члены порядка ξ^2 следует учитывать. При выполнении неравенства $s > a > 0$ $\cos x$ нужно разлагать в точке $x_0 = 0$.

В том случае, когда $s < 0$, имеем $G = G_+$ и нужно отдельно рассмотреть случаи $|s| > a$ и $|s| < a$. Распространяя пределы интегрирования от нуля до бесконечности и используя соотношения [3]

$$\int_0^\infty K_\nu(\alpha t) \exp(-\beta^2 t^2)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta} \sec\frac{\pi\nu}{2} \exp\left(\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right) K_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right), \quad |\mathrm{Re}\,\nu| < 1;$$

$$\int_0^\infty I_\nu(\alpha t) \exp(-\beta^2 t^2)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \exp\left(\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right) I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right), \quad \mathrm{Re}\,\nu > -1,$$

получаем для функции G следующее выражение:

$$G = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}\left[\frac{|a-|s||}{a}\right]^{1/2}\left\{J_{-1/4}\left[\frac{(a-|s|)^2}{4\sigma^2}\right] + \frac{a-|s|}{|a-|s||} I_{1/4}\left[\frac{(a-|s|)^2}{4\sigma^2}\right]\right\} \times \\ \times \exp\left[-\frac{(a-|s|)^2}{4\sigma^2}\right]. \tag{17}$$

Если $|a - |s|| \gg \sigma$, то можно воспользоваться асимптотическими выражениями для модифицированных функций Бесселя $I_{1/4}$ и $I_{-1/4}$. Тогда выражение для G при $|s| < a$ переходит в выражение (14)* (что соответствует случаю $a^2 - s^2 \gg \sigma^2$), а выражение (17) при $|s| > a$ становится экспоненциально малым ($|s \pm a\cos x| \gg \sigma$ для любых x из промежутка интегрирования).

Инкремент нарастания в этом случае имеет вид

$$\frac{\gamma^{(1)}}{\omega} = \frac{\Omega'^2}{8c^2k^2}\sqrt[4]{\frac{2\pi^2}{\sin^2\theta}}\left(\frac{v_{0\perp}}{v_T}\right)^{3/2} G_1'\left(\frac{s+a}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\sec^2\theta \qquad (s<0);$$

$$\frac{\gamma^{(2)}}{\omega} = \frac{\Omega'^2}{8c^2k^2}\sqrt[4]{\frac{2\pi^2}{\sin^2\theta}}\left(\frac{v_{0\perp}}{v_T}\right)^{3/2} G_2'\left(\frac{s-a}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\sec^2\theta \qquad (s>0). \tag{18}$$

В выражении (18) мы обозначили через G_1 и G_2 следующие функции:

$$G_1 = \sqrt{\frac{|z|}{2}}\left[I_{-1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right) + \frac{z}{|z|} I_{1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right)\right] e^{-z^2/2};$$

$$G_2 = \sqrt{\frac{|z|}{2}}\left[I_{-1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right) - \frac{z}{|z|} I_{1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right)\right] e^{-z^2/2}.$$

Графики производных от функций G_1 и G_2 приведены на рис. 1. Из него видно, что возбуждение волн потоком ионов возможно при $\omega < k_\parallel v_{0\parallel} - k_\perp v_{0\perp} + kv_T$. При $s + a < 0$ и $|s + a| \gg \sigma$ инкремент $\gamma^{(1)}$ становится экспоненциально малым. Из рис. 1 следует также, что $\gamma^{(2)} > 0$ при $\omega < k_\parallel v_{0\parallel} + k_\perp v_{0\perp} - kv_T$. Инкремент $\gamma^{(2)}$ убывает как $\left[\frac{\sqrt{2}\,\sigma}{|s-a|}\right]^{3/2}$

* При переходе к асимптотике нужно заменить $a - |s|$ на $(a^2 - s^2)/2s$.

при $\frac{|s-a|}{\sqrt{2}\sigma} \to \infty$. В области $\omega = k_\parallel v_{0\parallel} + k_\perp v_{0\perp}$ инкремент максимален при $\omega = k_\parallel v_{0\parallel} - k_\perp v_{0\perp} - kv_T/2$. В области $\omega = k_\parallel v_{0\parallel} - k_\perp v_{0\perp}$ инкремент достигает максимального значения при $\omega = k_\parallel v_{0\parallel} + k_\perp v_{0\perp} - 2kv_T$. Эти равенства определяют максимально усиливаемую частоту и инкремент как функцию угла θ, или же угол $\theta_{\text{макс}}$ как функцию частоты.

Если $|a \pm s| \sim \sigma$, то инкремент (18)

$$\gamma \sim \frac{n_0'}{n_0} \omega_i \left(\frac{v_{0\perp}}{v_i} \right)^{3/2}. \tag{19}$$

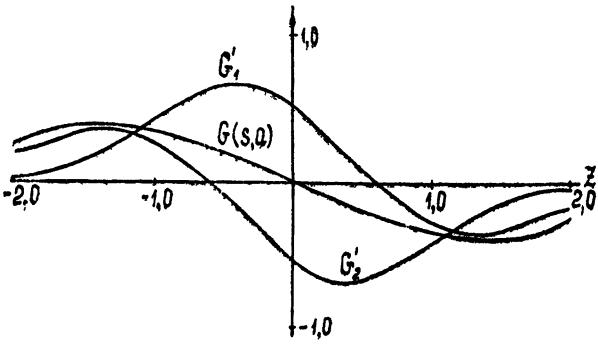


Рис. 1.

Таким образом, ионы, входящие в плазму под углом к внешнему магнитному полю, возбуждают электромагнитные волны значительно сильнее, чем ионы, входящие в плазму вдоль магнитных силовых линий.

3. ПРОДОЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ

Как видно из (18), инкремент увеличивается при $\theta \to 0$. Однако выражениями (18) можно пользоваться только при $\theta \gg v_T/v_{0\perp}$.

Предполагая по-прежнему выполнение неравенства $kv_T \gg \omega_i$, находим из (5) и (9) для инкремента нарастания при $\theta \sim v_T/v_{0\perp}$ следующее выражение (см. Приложение 2):

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\Omega'^2}{c^2k^2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{v_{0\perp}}{v_T} \right)^2 G(s, a), \tag{20}$$

где

$$G(s, a) = \exp\left[-\frac{1}{4\sigma^2} (2s^2 + a^2) \right] \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon_{2k} I_k \left(\frac{a^2}{4\sigma^2} \right) \times$$
$$\times \left[\sigma \frac{d}{ds} I_{2k}\left(\frac{as}{\sigma^2} \right) - \frac{s}{\sigma} I_{2k}\left(\frac{as}{\sigma^2} \right) \right]. \tag{21}$$

График функции $G(s, a)$ при $\theta = v_T/v_{0\perp}$ приведен на рис. 1.

Если в формуле (20) положить $\theta = 0$, то выражение для инкремента принимает вид

$$\frac{\gamma}{\omega} = -\frac{\Omega'^2}{c^2k^2} \sqrt{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{v_{0\perp}}{v_T} \right)^2 z_0 e^{-z_0^2}; \quad z_0 = \frac{\omega - kv_{0\parallel}}{\sqrt{2}\, kv_T} \tag{22}$$

Выражения, подобные (22), были получены Железняковым в работах [5, 6].

Возбуждение имеет место при $\omega < kv_{0\parallel}$.

Рассмотрим теперь случай, когда выполняется неравенство $\omega_i \gg kv_T$. Для нахождения инкремента нарастания в этом случае воспользуемся выражениями для компонент тензора ε'_{ij}, в которых не учитывается тепловое движение ионов потока в плоскости, перпендикулярной магнитному полю (выражения (5)). В выражения для антиэрмитовских частей тензора ε'_{ij} входят интегралы вида

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} J_0(2a \sin\varphi) \exp(2is\varphi - \varkappa^2\varphi^2)\, d\varphi. \tag{23}$$

Представляя интеграл (23) в виде суммы интегралов

$$Q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\pi k}^{\pi(k+1)} J_0(2a \sin\varphi) \exp(2is\varphi - \varkappa^2\varphi^2)\, d\varphi$$

и производя замену переменного $\varphi \to \varphi + \pi k$, получим

$$Q = \int_0^{\pi} J_0(2a \sin\varphi) \exp(2is\varphi - \varkappa^2\varphi^2)\, d\varphi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(2\pi isk - 2\pi\varkappa^2\varphi k - \varkappa^2\pi^2k^2). \tag{24}$$

Предположим, что $s \simeq q$, где $q=0$; ± 1; ± 2, ..., и сделаем замену $s \to s-q$ в сумме (24). Так как $\varkappa \ll 1$ и $|s-q| \ll 1$, то в сумме (24) существенны (в рассматриваемом приближении) только значения $k \gg 1$, т. е. суммирование можно заменить интегрированием по dk от $-\infty$ до ∞:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi i(s-q)k - 2\pi\varkappa^2\varphi k - \varkappa^2\pi^2k^2)\, dk = \frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa^2}} \exp\left(\varkappa\varphi - i\,\frac{s-q}{\varkappa}\right)^2. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24) и используя соотношение [3]

$$\int_0^{\pi} J_0(2a \sin\varphi)\, e^{2i\mu\varphi}\, d\varphi = \pi e^{i\pi\mu} J_{-\mu}(a) J_{\mu}(a),$$

получаем для Q выражение

$$Q = \sqrt{\frac{\pi}{\varkappa^2}}\, J_q^2(a) \exp\left[-\frac{(s-q)^2}{\varkappa^2}\right]. \tag{26}$$

Используя соотношение (26), найдем, что

$$\begin{aligned} \varepsilon''_{12} &= \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{v_{0\perp}}{v_T}\right)^2 J_q^2(a)\left(z_{q-1}e^{-z_{q-1}^2} - z_{q-1}e^{-z_{q-1}^2}\right); \\ \varepsilon''_{22} &= -\varepsilon''_{11} + \frac{\Omega'^2}{\omega^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{v_{0\perp}}{v_T}\right)^2 J_q^2(a)\left(z_{q+1}e^{-z_{q+1}^2} + z_{q-1}e^{-z_{q-1}^2}\right), \end{aligned} \tag{27}$$

где $z_{q\pm1} = (s - q \pm 1)/\varkappa$. Выражения (27) становятся экспоненциально малыми, если s не близко к целому числу.

Как функции от a, выражения (27) быстро убывают с ростом a. Мы рассмотрим случай $a \lesssim 1$, когда выражения (27) и, следовательно, инкремент, максимальны по порядку величины. Так как $kv_{0\perp}/\omega_i \gg 1$, то

это соответствует случаю малых углов θ ($\theta \lesssim \omega_i/\omega \ll 1$). Из (9) и (27) находим, считая $\cos\theta \simeq 1$, выражение для инкремента:

$$\frac{\gamma}{\omega} = -\frac{\Omega'^2}{c^2k^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{v_{0\perp}}{v_T}\right)^2 J_q^2(a)\, z_{q-1}\, e^{-z_{q-1}^2}. \tag{28}$$

По порядку величины инкременты (20), (22) и (28) равны

$$\gamma \sim \frac{n_0'}{n_0}\,\omega_i\left(\frac{v_{0\perp}}{v_T}\right)^2. \tag{29}$$

4. КВАЗИПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ

Из формулы (9) следует, что инкремент нарастания увеличивается при $\theta \to \pi/2$. Но выражениями (9) и (8) для инкремента и частоты можно пользоваться только при $\cos^2\theta \gg m/M$. Если $\cos^2\theta \lesssim m/M$, то при выполнении неравенств (7) частота колебаний плазмы в отсутствие ионов

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2|(1+r)\,m/M + \cos^2\theta|}{(1+r)[1+(\Omega^2/\omega_H^2)(1+r)]}. \tag{30}$$

Инкремент в этом случае определяется формулой

$$\frac{\gamma}{\omega} = -\frac{\omega^2}{2c^2k^2 r}\,\frac{1+r}{\left[(1+r)\dfrac{m}{M}+\cos^2\theta\right]}\,\varepsilon_{11}''. \tag{31}$$

При $|a^2-s^2| \gg \sigma^2$ из (31) имеем:

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\Omega'^2}{2c^2k^2}\,\frac{s^3}{(a^2-s^2)^{3/2}}\,\frac{1+r}{r[(1+r)m/M+\cos^2\theta]}. \tag{32}$$

Если $|a^2-s^2| \sim \sigma^2$, то

$$\frac{\gamma^{(1,2)}}{\omega} = \frac{\Omega'^2}{8c^2k^2}\sqrt[4]{2\pi^2}\left(\frac{v_{0\perp}}{v_T}\right)^{3/2}\frac{1+r}{r[(1+r)m/M+\cos^2\theta]}\,G_{1,2}'. \tag{33}$$

По порядку величины инкремент, определяемый формулой (33), равен

$$\gamma \sim \frac{n_0'}{n_0}\,\omega_H\left(\frac{v_{0\perp}}{v_T}\right)^{3/2}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим числовой пример. В случае прохождения потока плотностью $n_0' \sim 10^{-6}$ *см*$^{-3}$ со скоростью $v_{0\parallel} \sim v_{0\perp} \sim 7\cdot 10^8$ *см·сек*$^{-1}$ и $v_T \sim 10^6$ *см·сек*$^{-1}$ через верхнюю атмосферу на высоте $2{,}8\cdot 10^4$ *км* ($n_0 \sim 10^2$ *см*$^{-3}$, $H_0 \sim 3\cdot 10^{-3}$ *э*) при $\theta \ll 1$ $\gamma \sim 0{,}2$ *сек*$^{-1}$. За время порядка $1/\gamma$ поток ионов пройдет расстояние $\sim 3{,}5\ 10^4$ *км*. При этом излучаются частоты $\omega = v_{0\parallel}^2\,\Omega^2/c^2\omega_H \sim 3\cdot 10^3$ *сек*$^{-1}$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. И. Ахиезеру и В. Ф. Алексину за обсуждение работы и полезные советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рассмотрим сумму вида

$$R = \sum_n \frac{J_n^2(a)}{p-n}, \tag{П1}$$

где a — вещественное, а p — комплексное числа. Остальные суммы типа (П1), входящие в выражения (3), можно получить из (П1) дифференцированием по a и применением рекуррентных формул для функций Бесселя.

Замечая, что при $\operatorname{Im} p > 0$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{p-n} = -i \int_0^\infty \exp\left[i(p-n)\xi\right] d\xi,$$

а также используя формулу

$$J_n^2(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_{2n}(2a\cos\chi)\, d\chi,$$

преобразуем (П1) к виду

$$R = -\frac{i}{\pi} \int_0^\pi d\chi \int_0^\infty d\xi\, e^{ip\xi} \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_{2n} J_{2n}(2a\cos\chi) \cos n\xi. \qquad (\text{П2})$$

Бесконечную сумму можно исключить из первой части равенства (П2), если воспользоваться следующим соотношением [4]:

$$\cos\left(a \sin\frac{\xi}{2}\right) = \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_{2n} J_{2n}(a) \cos n\xi; \qquad \varepsilon_{2n} = \begin{cases} 1\,(n=0) \\ 2\,(n \neq 0) \end{cases};$$

тогда правая часть равенства (П2) принимает вид

$$R = -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty e^{ip\xi} d\xi \int_0^\pi \cos\left(2a \sin\frac{\xi}{2} \cos\chi\right) d\chi.$$

Используя интегральное представление для функции Бесселя $J_0\left(2a\sin\frac{\xi}{2}\right)$, окончательно получаем

$$R = -i \int_0^\infty J_0\left(2a \sin\frac{\xi}{2}\right) e^{ip\xi}\, d\xi.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вычислим интеграл

$$U = \int_{-\infty}^\infty J_0(\alpha t_0) \exp\left[-\beta^2(t-t_0)^2\right] dt. \qquad (\text{П3})$$

Сделав замену переменного и применив теорему сложения для бесселевых функций [4], преобразуем (П3) к виду

$$U = \sum_{n=-\infty}^\infty J_n(\alpha t_0) \int_{-\infty}^\infty J_n(\alpha z)\, e^{-\beta^2 z^2}\, dz. \qquad (\text{П4})$$

В выражение (П4) дают вклад только функции Бесселя с четным индексом $n = 2k$. Поэтому можно воспользоваться соотношением

$$\int_0^\infty J_{2k}(\alpha z)\, e^{-\beta^2 z^2}\, dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta}\, e^{-\alpha^2/8\beta^2}\, I_k\left(\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right)$$

(второй экспоненциальный интеграл Вебера [4]) и представить (П4) в следующем виде:

$$U = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{2k}(\alpha t_0)\, I_k\left(\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right). \qquad (\text{П5})$$

Если $\mathrm{Re}\,\alpha t_0 = 0$, то выражение (П5) переходит в

$$U = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon_{2k}\, J_{2k}(\mathrm{Im}\,\alpha t_0) I_k\left(\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right).$$

Найдем асимптотику выражения (П5) при $\alpha t_0 \gg 1$. Для этого воспользуемся асимптотическим выражением для функции $J_{2k}(\alpha t_0)$:

$$J_{2k}(\alpha t_0) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi|\alpha| t_0}} \cos\left(\alpha t_0 - k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \simeq (-1)^k J_0(\alpha t_0).$$

Вынося функцию Бесселя из под знака суммы и замечая, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_k\left(\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right) = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\beta^2}\right),$$

получаем с точностью до членов порядка $1/\alpha t_0 \ll 1$ следующее выражение:

$$U = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}\right) J_0(\alpha t_0) + O\left(\frac{1}{\alpha t_0}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Красовицкий, К Н Степанов, Изв высш уч зав — Радиофизика, **6**, 1056 (1963).
2. К. Н Степанов, А Б Киценко, Украинский физич ж., **6**, 297 (1961).
3. И С Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М, 1962.
4. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, Перев. с англ, ИЛ, М., 1949.
5. В В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 619 (1961).
6. В. В Железняков, Изв высш. уч зав—Радиофизика, **2**, 14 (1959).
7. И. Н. Головин и др., УФН, **73**, 685 (1961)
8. К. Д. Синельников и В Т Толок, ЖТФ, **32**, 248 (1962).

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
14 января 1963 г.

ON THE PASSAGE OF ION BEAMS THROUGH PLASMA

V. B. Krasovitsky, K. N. Stepanov

The exitation of electromagnetic waves in plasma by low density ion beam with wide thermal velocity dispersion is investigated in the frequency band $\omega_H \gg \omega \gg \omega_i$ (where ω_H is the electron gyrofrequency and ω_i is that of ions). The ion beam is assumed to be injected into the plasma at the large angle to the external magnetic field H_0, so that $v_{0\parallel} \sim v_{0\perp} \gg v_T$ ($v_{0\parallel}$ and $v_{0\perp}$ are the parallel and perpendicular to H_0 components of the beam velocity and v_T is the mean thermal velocity of the beam particles). The increment is shown to exceed considerably than in the case of beam parallel to H_0.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

И. А. Данелия, Н. Л. Цинцадзе

Рассмотрено возникновение нелинейных электромагнитных и продольных волн за счет взаимодействия продольных колебаний. Показано, что излучение электромагнитного поля происходит в холодной плазме только в том случае, если направление распространения волн не совпадает с осью анизотропии, роль которой играет направление движения потока частиц. Получены выражения для среднего значения потоков переносимого вещества

Исследованию нелинейного взаимодействия волн посвящена обширная литература. В ряде работ обсуждались и вопросы о трансформации волн. Так, в [1-3] было показано, что если в плазме имеется некая ось анизотропии, то взаимодействие продольных волн, распространяющихся под углом α к этой оси, отличным от нуля, приводит к появлению поперечных волн. Вопросы рассеяния продольных плазменных волн на продольных флюктуациях теплового происхождения с выходом в поперечные исследовались в работе [4]. Рассеянию и трансформации волн в неравновесной плазме посвящена работа [5].

В настоящей работе рассматривается взаимодействие продольных волн друг с другом в электронно-ионной плазме, на которую наложено электрическое поле $\boldsymbol{E}_0$. Показано, что нелинейное взаимодействие продольных волн приводит к их трансформации в поперечные, когда продольные волны распространяются под углом α к оси анизотропии, роль которой играет направление пучка $\boldsymbol{u}$. Найдено выражение для поля продольной волны, из которого как частный случай получен результат работы [6], а также выражение для потока переносимого вещества.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как отмечалось выше, при наложении электрического поля на плазму возникают взаимопроникающие пучки электронов и ионов. Направленная скорость пучков электронов и ионов под действием электрического поля определяется следующим образом:

$$\boldsymbol{u}_{e,i} = -\frac{e}{m_{e,i}} \int_0^t \boldsymbol{E}_0 \, dt .$$

В рамках условия адиабатичности

$$\left| \frac{1}{\omega \boldsymbol{u}} \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \right| \ll 1,$$

где ω — частота ленгмюровских колебаний, скорости пучков можно считать постоянными. Система уравнений, описывающая плазму, имеет вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1,2} e_\alpha n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha ;$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_\alpha}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_\alpha \nabla)\, \boldsymbol{v}_\alpha = \mp \frac{e}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_\alpha \boldsymbol{H}]\right); \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla(n_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha) = 0,$$

где $\boldsymbol{v}_\alpha$—скорость электронов ($\alpha=1$) и ионов ($\alpha=2$), m_α — соответственно массы, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$—поля волны, n_α—плотность электронов и ионов, e_α—их заряды. Нелинейная система уравнений решается методом возмущений. Все величины, описывающие состояние плазмы, представляются в виде следующих рядов:

$$\boldsymbol{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \boldsymbol{E}^{(n)}; \quad \boldsymbol{H} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \boldsymbol{H}^{(n)};$$

$$\boldsymbol{v}_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \boldsymbol{v}_\alpha^{(n)}; \quad n_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n n_\alpha^{(n)},$$

где λ— формальный параметр малости, который в конечных результатах следует положить равным единице.

В линейном приближении предполагается существование только продольных колебаний, т. е. $\boldsymbol{H}^{(1)}=0$, $\boldsymbol{E}^{(1)}=-\nabla\varphi$. Решение линейного приближения ищем в виде фурье-интегралов:

$$\boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{r}, t) = \int \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{k}, \omega)\, e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\, d\boldsymbol{k}\, d\omega;$$

$$n_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{r}, t) = \int n_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{k}, \omega)\, e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}\, d\boldsymbol{k}\, d\omega,$$

где

$$\boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{\boldsymbol{k}\varphi(\boldsymbol{k}, \omega)}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha)}; \tag{2}$$

$$n_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{k}, \omega) = n_0 \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{k^2\varphi(\boldsymbol{k}, \omega)}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha)^2}. \tag{3}$$

Дисперсионное соотношение для продольных колебаний в линейном приближении имеет вид

$$\frac{1}{\Omega_e^2} = \frac{1}{(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_e)^2} + \frac{\mu}{(\omega + \mu\, \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_e)^2}, \tag{4}$$

где μ—отношение масс электронной к ионной, $\Omega_e = 4\pi n_0 e^2/m_e$. Переходя к следующему приближению, получаем систему уравнений второго приближения:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}^{(2)} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}^{(2)}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sum_\alpha e_\alpha\left(n_\alpha^{(2)}\boldsymbol{u}_\alpha + n_0 \boldsymbol{v}_\alpha^{(2)} + n_\alpha^{(1)}\boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}\right);$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}^{(2)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}^{(2)}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}^{(2)} = 0;$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_\alpha^{(2)}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_\alpha \nabla)\, \boldsymbol{v}_\alpha^{(2)} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\boldsymbol{E}^{(2)} + \frac{1}{c}\, [\boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{H}^{(2)}] \right) - (\boldsymbol{v}_\alpha^{(1)} \nabla)\, \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}\ ; \tag{5}$$

$$\frac{\partial n_\alpha^{(2)}}{\partial t} + \nabla(n_\alpha^{(2)}\, \boldsymbol{u}_\alpha) + \nabla(n_0 \boldsymbol{v}_\alpha^{(2)}) = -\nabla(n_\alpha^{(1)}\, \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}).$$

Для фурье-компонент получаем систему алгебраических уравнений:

$$[\boldsymbol{k}\boldsymbol{H}^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega)] = -\frac{\omega}{c} \boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega) - \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha [n_\alpha^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega)\, \boldsymbol{u}_\alpha +$$

$$+ n_0 \boldsymbol{v}_\alpha^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega)] - \frac{4\pi i}{c} \sum_\alpha e_\alpha \langle n_\alpha^{(1)} \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)} \rangle\ ; \tag{6}$$

$$[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega)] = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{H}^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega);$$

$$((\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha) - \omega)\, \boldsymbol{v}_\alpha^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\frac{ie_\alpha}{m_\alpha} \left(\boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega) + \frac{1}{c}\, [\boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{H}^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega)]\right) -$$

$$- \langle (\boldsymbol{v}_\alpha^{(1)} \nabla)\, \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)} \rangle\ ;$$

$$((\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha) - \omega)\, n_\alpha^{(2)} + n_0(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_\alpha^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega)) = -\frac{1}{i} \langle \nabla(n_\alpha^{(1)} \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}) \rangle\ , \tag{7}$$

где

$$\langle n_\alpha^{(1)} \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)} \rangle = \int d\boldsymbol{k}' \int d\omega' n_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{k}'\omega') \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}(\nabla \boldsymbol{k}, \nabla \omega);$$

$$\langle (\boldsymbol{v}_\alpha^{(1)} \nabla)\, \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)} \rangle = i \int d\boldsymbol{k}' \int d\omega' (\boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{k}'\omega')\, \Delta\boldsymbol{k}) \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}(\Delta\boldsymbol{k}, \Delta\omega)\ ;$$

$$\langle \nabla(n_\alpha^{(1)} \boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}) \rangle = i \int d\boldsymbol{k}' \int d\omega' n_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{k}'\omega')(\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}_\alpha^{(1)}(\Delta\boldsymbol{k}, \Delta\omega));$$

$$\Delta\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'; \quad \Delta\omega = \omega - \omega'.$$

После несложных преобразований получим уравнение для вектора электрического поля:

$$\left[\omega^2 - \boldsymbol{k}^2 c^2 - \sum_\alpha \Omega_\alpha^2\right] \boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\left(\boldsymbol{k}c^2 + \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2\, \boldsymbol{u}_\alpha}{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha) - \omega}\right) \times$$

$$\times (\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega)) + \left\{ \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2\, \boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{k}^2}{((\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha) - \omega)^2} - \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2\, \boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha) - \omega} \right\} (\boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{k}, \omega)) + \boldsymbol{P}, \tag{8}$$

где

$$\boldsymbol{P} = 4\pi i n_0 \omega \sum_\alpha \frac{\boldsymbol{u}_\alpha e_\alpha^3}{((\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha) - \omega) m_\alpha^2} \left[\int d\boldsymbol{k}' \int d\omega' \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\boldsymbol{k}'^2 (\boldsymbol{k}\Delta\boldsymbol{k})\, \varphi(\boldsymbol{k}'\omega')\, \varphi(\Delta\boldsymbol{k}, \Delta\omega)}{(\omega' - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{u}_\alpha))^2 (\Delta\omega - \Delta\boldsymbol{k}\, \boldsymbol{u}_\alpha)} - \frac{1}{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha) - \omega} \times \right. \tag{9}$$

$$\times \int d\boldsymbol{k}' \int d\omega' \frac{(\boldsymbol{k}'\Delta\boldsymbol{k})(\boldsymbol{k}\Delta\boldsymbol{k})\,\varphi(\boldsymbol{k}'\omega')\,\varphi(\Delta\boldsymbol{k},\Delta\omega)}{(\omega'-(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{u}_\alpha))\,(\Delta\omega-\Delta\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\sigma)} +$$
$$+ 4\pi i n_0 \sum_\alpha \frac{e_\alpha^3}{m_\alpha} \int d\boldsymbol{k}' \int d\omega' \frac{\Delta\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}'\Delta\boldsymbol{k})\,\varphi(\boldsymbol{k}'\omega')\,\varphi(\Delta\boldsymbol{k},\Delta\omega)}{(\omega'-\boldsymbol{k}'\boldsymbol{u}_\alpha)\,(\Delta\omega-(\Delta\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha))}\,. \tag{9}$$

Выберем направление постоянной скорости $\boldsymbol{u}_\alpha$ вдоль оси z, т. е. $u_\alpha = u_{\alpha z}$. После несложных преобразований получим выражение, определяющее продольные нелинейные колебания:

$$\left(\omega^2 + \sum_\alpha \frac{\omega\Omega_\alpha^2}{\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha - \omega}\right)\left(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(2)}\right) = \boldsymbol{k}^2\omega \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2\,(\boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{E}^{(2)})}{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha - \omega)^2} + (\boldsymbol{k}\boldsymbol{P}). \tag{10}$$

Как было показано Суми [10], во втором приближении взаимодействие продольных колебаний порождает нелинейные волны с частотами 2Ω. Наше выражение переходит в выражение Суми, если учесть условие «когерентности»:

$$\Delta\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}'; \quad \Delta\omega = \omega'; \quad \omega' = \frac{\omega}{2}; \quad \boldsymbol{k}' = \frac{\boldsymbol{k}}{2}; \quad \boldsymbol{u}_\alpha = 0;$$
$$(\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(2)}(\boldsymbol{k},\omega)) = -i \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2 e_\sigma}{m_\alpha} \frac{\boldsymbol{k}^4\varphi^2(\boldsymbol{k},\omega)}{\omega^4}. \tag{11}$$

2. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Умножив (8) на $\boldsymbol{k}$ векторно, получим

$$\left(\omega^2 - \boldsymbol{k}^2c^2 - \sum_\alpha \Omega_\alpha^2\right)\left[\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(2)}\right] = \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2\,[\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha]}{(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha - \omega)} \times$$
$$\times \left\{\frac{\boldsymbol{k}^2\,(\boldsymbol{u}_\alpha \boldsymbol{E}^{(2)})}{\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_\alpha - \omega} - (\boldsymbol{k}\boldsymbol{E}^{(2)})\right\} + [\boldsymbol{k}\boldsymbol{P}]. \tag{12}$$

Это уравнение вместе с уравнением (9) определяет поле излучения. Выражение (12) показывает, что если направление распространения волны совпадает с направлением движения пучка, то амплитуды поперечных полей во втором приближении равны нулю, что хорошо согласуется с работой [7].

Для упрощения математических выкладок рассмотрим частный случай распространения волн поперек пучка, т. е. $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_x \neq 0$; $\boldsymbol{k}_y = \boldsymbol{k}_z = 0$. В этом случае имеются поперечные поля E_z и H_y. Для фурье-компоненты $E_z^{(2)}(\boldsymbol{k},\omega)$ получено следующее выражение:

$$E_z^{(2)}(\boldsymbol{k},\omega) = \left\{\omega^2 - k^2c^2 - \sum_\alpha \Omega_\alpha^2\left(1 - \frac{k^2u_\alpha^2}{\omega^2}\right) - \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2 u_\alpha}{\omega} \times\right.$$
$$\left.\times \frac{k^2}{\omega^2 - \sum_\alpha \Omega_\alpha^2} \sum_\sigma \frac{\Omega_\alpha^2 u_\alpha}{\omega}\right\}^{-1} i \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2 e_\alpha}{m_\alpha} \int d\omega' \int d\boldsymbol{k}' \frac{k\Delta k}{\omega'\Delta\omega} \times$$
$$\times \left[\frac{k'^2 u_\alpha}{\omega'} + \frac{k'\Delta k}{\omega}\left(u_\alpha - \frac{\sum_\alpha \Omega_\alpha^2 u_\alpha}{\omega^2 - \sum_\alpha \Omega_\alpha^2}\right)\right] \varphi(k'\omega')\,\varphi(\Delta k,\Delta\omega)\,. \tag{13}$$

Это выражение показывает, что даже в холодной плазме взаимодействие ленгмюровских волн приводит к излучению.

Очевидно, что вектор Пойнтинга направлен вдоль оси x, т. е. энергия излучения переносится вдоль ленгмюровских колебаний. Так как в этом частном случае $\boldsymbol{k}u_\alpha = 0$, то из дисперсионного соотношения линейного приближения (4) получаем

$$\omega^2 = \Omega_e^2 + \Omega_i^2 = \Omega^2 .$$

Отсюда видно, что $\omega \neq f(k)$ и амплитуда ленгмюровских колебаний $\varphi(k, \omega)$ отлична от нуля, когда $\omega = \Omega$. Тогда $\varphi(k, \omega) = \varphi(k, \Omega)\,\delta(\omega - \Omega)$. Это дает возможность провести интегрирование по ω' в правой части. Совершая фурье-переход от $E_z^{(2)}(k, \omega)$ к $E_z^{(2)}(x, t)$, в результате интегрирования получаем

$$\left(3\Omega^2 + c^2\frac{d^2}{dx^2}\right) E_z^{(2)}(x, t) = i\sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2 e_\alpha}{m_\alpha \Omega^3}\, e^{-2i\Omega t} \int dk k e^{ikx} \times \tag{14}$$

$$\times \int d\boldsymbol{k}'\, \Delta k \left[k'^2 u_\alpha + \frac{k'\Delta k}{2}\left(u_\alpha - \frac{\sum_\alpha \Omega_\alpha^2 u_\alpha}{3\Omega^2}\right)\right] \varphi(k'\Omega)\, \varphi(\Delta k, \Omega).$$

Уравнение (14) определяет поле излучения во втором приближении при явно заданной правой части, которую обозначим через $f(x, t)$. Эта формула показывает также, что слияние (взаимодействие) двух продольных волн приводит к созданию поперечной волны.

Выражение (14) можно трактовать и иначе. Нелинейная поперечная волна может распасться на продольные волны. Для нахождения поля в явном виде рассмотрим два частных случая.

1) Рассмотрим монохроматическую волну с определенным волновым вектором $\boldsymbol{k}_0$. В этом случае задача сводится к решению уравнения с вынуждающей силой, которая является простой периодической функцией времени и координат. В этом случае выражение для потенциала принимает вид

$$\varphi(k') = \varphi(k_0)\,\delta(k' - k_0); \quad \varphi(\Delta k) = \varphi(k_0)\,\delta(\Delta k - k_0).$$

Подставляя эти выражения в $f(x, t)$, получаем

$$f(x, t) = i\varphi_0^2(k_0) k_0^4 \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2 e_\alpha}{m_\alpha \Omega}\left(3u_\alpha - \frac{\sum_\alpha u_\alpha \Omega_\alpha^2}{3\Omega^2}\right) e^{2i(k_0 x - \Omega t)} .$$

Затем, подставляя $\mathrm{Re}(f\ x, t)$ в уравнение (14), приходим к выражению для электрического поля:

$$E_z^{(2)}(x, t) = \varphi_0^2(k_0)\, \frac{k_0^4}{4c^2} \sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2 e_\alpha}{m_\alpha \Omega^3}\left(3u_\alpha - \frac{\sum_\alpha \Omega_\alpha^2 u_\alpha}{3\Omega^2}\right) \times$$

$$\times \frac{\sin 2(k_0 x - \Omega t)}{k^2 - k_0^2},$$

в котором $k^2 = 3\Omega^2/4c^2$. Если $k \to k_0$, то решение имеет вид

$$E_z^{(2)}(x, t) = \varphi_0^2\left(\frac{\Omega}{c}\right) \frac{3\sqrt{3}}{32c^5} \sum_\alpha \left(3u_\alpha - \frac{\sum_\alpha u_\alpha \Omega_\alpha^2}{3\Omega^2}\right) \frac{\Omega_\alpha^2 e_\alpha}{m_\alpha} \times$$

$$\times x\cos\left[2\Omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2c}x-t\right)\right].$$

Энергия продольных волн перекачивается в поперечные. Эта формула показывает, что при распространении продольных волн по x, поле излучения усиливается по мере их взаимодействия.

Разумеется этот результат справедлив для малых расстояний, так как по мере перекачки энергии от продольных волн к поперечным амплитудам продольных колебаний уменьшается, что приводит к ослаблению взаимодействия волн.

2) Допустим, что потенциал волны имеет вид гауссовой функции

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 \exp\left[-(x-x_0)^2/e^2-i\Omega t\right].$$

Тогда $f(x, t)$ принимает вид

$$f(x,t)=i\sum_\alpha \frac{\Omega_\alpha^2 e_\alpha u_\alpha}{m_\alpha \Omega^2}\frac{2\pi}{3l^6}\varphi_0^2\left(\frac{33}{2}-\frac{108(x-x_0)^2}{l^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{56(x-x_0)^4}{l^4}\right)\exp\left[-2(x-x_0)^2/l^2-2i\Omega t\right]. \tag{15}$$

Выражение (15) получено с точностью до членов u^2/c^2.

Как видно из (14), поперечные волны имеют удвоенную ленгмюровскую частоту 2Ω. Умножая уравнение (14) на e^{ikx} и интегрируя по $\boldsymbol{k}$, получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка для:

$$(3\Omega^2+c^2\Delta x)\,E_z^{(2)}(x, t)=\frac{2\pi i\varphi_0^2}{3e^6}\sum_\alpha\frac{\Omega_\alpha^2 e_\alpha u_\alpha}{m_\alpha\Omega^2}\times$$
$$\times\left(\frac{33}{2}-\frac{108(x-x_0)^2}{l^2}+\frac{56(x-x_0)^4}{l^4}\right)\times$$
$$\times\exp\left[-2(x-x_0)^2/l^2-2i\Omega t\right].$$

Рассмотрим продольную волну, занимающую в каждый данный момент времени некоторую конечную область пространства (волновой пакет), и определим поток переносимого вещества. Во втором приближении среднее значение $\overline{I^2}$ плотности тока отлично от нуля:

$$\overline{I^{(2)}}=\sum_\alpha\overline{e_\alpha n_\alpha^{(1)}\,v_\alpha^{(1)}}=\sum_\alpha\frac{e_\alpha^3 n_0}{m_\alpha^2}\int dk\,\frac{|\varphi(\boldsymbol{k},\,\omega_k)|^2}{(\omega_k-ku_\alpha)(\omega_k+ku_\alpha)^2}. \tag{16}$$

В (16) использовано дисперсионное соотношение (4), что приводит, как следует из уравнений Максвелла, к возникновению постоянного неоднородного магнитного поля $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$. Появление такого магнитного поля вызовет дрейф электронов и ионов.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Tidman, G. H Weiss, Physics of Fluids, 4, 866 (1961).
2. Н. Л Цинцадзе, ЖТФ (в печати).
3. Н. П Гиоргадзе, ЖТФ. (в печати)
4. В. Л Гинзбург, В В Железняков, Астрон. ж 36, 694 (1958)
5. И. А. Ахиезер, И. А. Данелия, Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ (в печати).
6 M. Sumi, J. Phys. Soc. Japan, 15, 1086 (1960)

Поступила в редакцию
11 марта 1963 г

TO THE THEORY OF WAVE INTERACTION IN PLASMA

I. A. Daneliya, N. L. Tsintsadze

The exitation of electromagnetic and longitudinal waves has been considered as a result of nonlinear interaction of longitudinal oscillations. The electromagnetic field radiation is shown to arise in a cold plasma only in the case when the direction of wave propagation does not coinside with the axis of anisotropyc the latter being the direction of movement of particles. Expressions have been obtained for average transfered particle flux.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1964*

ОБ УЧЕТЕ ЗАТЕНЕНИЙ ПРИ РАССЕЯНИИ ВОЛН НА СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ф. Г. Басс, И. М. Фукс

В приближении Кирхгофа рассмотрено отражение звуковых волн от статистически неровной поверхности при наличии затенений Получены формулы для коэффициента отражения и средней интенсивности рассеянного поля. Результаты справедливы и в случае рассеяния электромагнитных волн

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одним из основных методов рассмотрения рассеяния электромагнитных и звуковых волн на неровной поверхности является метод Кирхгофа, развитый в работах Антокольского, Бреховских, Исаковича и др. [1-4]. На принципиальную возможность учета затенений в рамках этого метода было указано еще в работах [1,2] · однако окончательные результаты были получены в предположении об отсутствии затенений. В настоящей статье рассматривается рассеяние волн на статистически неровной поверхности в приближении Кирхгофа без этого ограничения.

Если на поверхность, уравнение которой $z = \zeta(x, y)$, падает плоская монохроматическая звуковая волна $\varphi_0 = e^{ikr}$, то поле, рассеянное участком S этой поверхности, удовлетворяет интегральному уравнению [5]

$$\varphi(\boldsymbol{R}_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \left\{ \varphi(\boldsymbol{r}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial}{\partial n} \varphi(\boldsymbol{r}) \right\} ds. \tag{1.1}$$

Здесь $\boldsymbol{R}_0$ — радиус-вектор точки наблюдения, R — расстояние между точкой наблюдения и точкой на поверхности с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ (рис. 1). Ограничиваясь рассмотрением поверхностей, для которых мож-

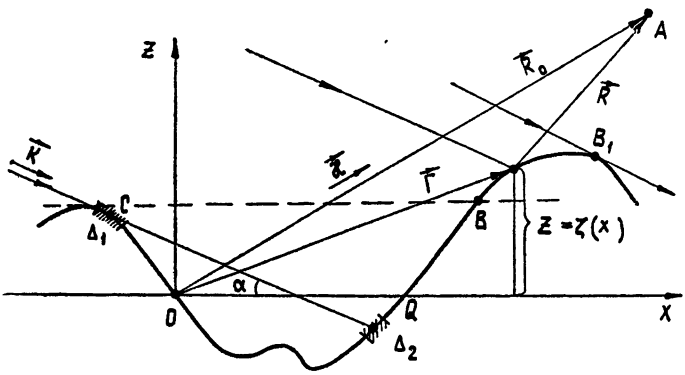


Рис. 1.

но пользоваться приближением Кирхгофа, зададим поле на поверхности в виде

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = (1+V)\, e^{i\boldsymbol{kr}}\, \eta(\alpha, \boldsymbol{r});$$
$$\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial n} = i(1-V)\, \boldsymbol{kn} e^{i\boldsymbol{kr}}\, \eta(\alpha, \boldsymbol{r}). \tag{1.2}$$

Здесь V — коэффициент отражения поверхности, $\eta(\alpha, \boldsymbol{r})=1$, если точка $\boldsymbol{r}$ поверхности освещена, и $\eta(\alpha, \boldsymbol{r}) = 0$, если луч, выходящий из точки $\boldsymbol{r}$ под углом α (рис. 1), где-нибудь пересекает поверхность.

Подставляя (1.2) в (1.1) и ограничиваясь только идеально отражающими поверхностями и точками наблюдения в зоне Фраунгофера, получаем

$$\varphi(\boldsymbol{R}_0) = \frac{e^{ikR_0}}{4\pi R_0} \int ds\, (\boldsymbol{qn})\, e^{i\boldsymbol{qr}}\, \eta(\alpha, \boldsymbol{r}). \tag{1.3}$$

В (1.3) введен вектор $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{\varkappa}$ и учтено, что в зоне Фраунгофера $kR \simeq kR_0 - \boldsymbol{\varkappa r}$ и $R^{-1} \simeq R_0^{-1}$.

Очевидно, что оставаясь в рамках приближения (1.2), интегрирование в (1.3) нужно вести только по тем участкам поверхности S, которые видны и из точки наблюдения, т. е. $ds \to \eta(\beta, \boldsymbol{r})\, ds$ (β — угол места точки наблюдения). Кроме того, удобно от интегрирования на поверхности $z = \zeta(x, y)$ перейти к интегрированию по плоскости $z = 0$ с помощью соотношения $n_z ds = dxdy$. Окончательно формула (1.3) принимает вид

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikR_0}}{4\pi R_0} \iint\limits_S (q_z - \boldsymbol{q}_\perp \nabla_\perp \zeta) \exp\{i[q_x x + q_y y + q_z \zeta(x, y)]\}\, \eta(\alpha, \beta; x, y)\, dxdy. \tag{1.4}$$

Здесь $\eta(\alpha, \beta; x, y) \equiv \eta(\alpha; x, y)\, \eta(\beta; x, y)$ учитывает затенение точки на поверхности как по отношению к источнику, так и по отношению к точке наблюдения. В формуле (1.4) функция $z = \zeta(x, y)$ может быть как регулярной (детерминированной) функцией, так и реализацией какой-либо случайной функции.

2. СРЕДНЕЕ ПОЛЕ

В этом параграфе вычисляется среднее значение потенциала рассеянного поля, в предположении, что поверхность с одномерными неровностями описывается некоторой случайной функцией $z(x)$*, для которой известны совместные плотности распределений значений функции и ее первой производной.

Среднее значение потенциала получается усреднением (1.4) по всем возможным реализациям случайной функции $z(x)$. Так как функция $\eta(\alpha, \beta; x, y)$ зависит от высоты и углов наклона поверхности не только в точке (x, y), но и от их значений в соседних точках области интегрирования, то усреднение целесообразно провести в два этапа. Сначала усредним (1.4) по всем тем реализациям $\zeta(x)$ случайной функции, которые в точке (x, y) имеют заданную высоту ζ_0 и производную $\dot{\zeta}_0$. Очевидно, что это усреднение затрагивает только множитель $\eta(\alpha, \beta; x, y)$ в (1.4), в результате чего он приобретает вид

$$\overline{\eta(\alpha, \beta; x, y)}^{(1)} \equiv P_2(\alpha, \beta \mid \zeta_0, \dot{\zeta}_0);$$

* Окончательные результаты этого раздела справедливы и для двухмерных неровностей, если под функцией $z(x)$ понимать сечение поверхности $z(x, y)$ плоскостью падения $y = 0$.

P_2 — условная вероятность того, что точка поверхности, имеющая высоту ζ_0 и угол наклона $\dot{\zeta}_0$, не затеняется (как по отношению к источнику, так и по отношению к точке наблюдения) другими точками этой же поверхности. Теперь проведем окончательное усреднение в (1.4) по всем возможным значениям высот ζ_0 и углов наклона $\dot{\zeta}_0$ в данной точке x, y:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{e^{ikR_0}}{4\pi R_0} q_z \iint\limits_S \exp\left[i(q_x x + q_y y)\right] dxdy \times$$
$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta_0 w(\zeta_0) e^{iq_z \zeta_0} \int\limits_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\beta} d\dot{\zeta}_0 \left(1 - \frac{q_x}{q_z}\dot{\zeta}_0\right) w'(\dot{\zeta}_0) P_2(\alpha, \beta \mid \zeta_0, \dot{\zeta}_0). \tag{21}$$

В (2.1) мы предположили, что поверхность в статистическом смысле является однородной, т. е. плотности распределений высот $w(\zeta)$ и тангенсов углов наклона $w'(\dot{\zeta})$ не зависят от координат. Интегрирование в (2.1) по $\dot{\zeta}_0$ в пределах $-\operatorname{tg}\alpha \leqslant \dot{\zeta}_0 \leqslant \operatorname{tg}\beta$ обеспечивает учет только тех участков поверхности, которые сами себя не затеняют.

Выделяя в (2.1) потенциал $\overline{\varphi_0(\alpha)}$ поля, отраженного от плоскости, и вводя коэффициент отражения $f(\alpha)$, перепишем (2.1) в виде

$$\overline{\varphi(\alpha, \beta)} = \overline{\varphi(\alpha, \alpha)} = \overline{\varphi_0(\alpha)} f(\alpha),$$

где

$$f(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta_0 w(\zeta_0) e^{iq_z \zeta_0} \int\limits_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\alpha} d\dot{\zeta}_0 w'(\dot{\zeta}_0) P_2(\alpha, \alpha \mid \zeta_0, \dot{\zeta}_0). \tag{2.2}$$

Рассмотрим теперь величину $P_1(\beta \mid \zeta_0, \dot{\zeta}_0)$ — вероятность того, что луч, выходящий под углом β к оси абсцисс из точки поверхности с высотой ζ_0 и производной $\dot{\zeta}_0$, нигде не пересечет поверхность, уравнение которой $z = \zeta(x)$. Входящая в (2.2) вероятность $P_2(\alpha, \beta \mid \zeta, \dot{\zeta})$ в некоторых предельных случаях (см. ниже) распадается на произведение $P_1(\alpha \mid \zeta, \dot{\zeta}) P_1(\beta \mid \zeta, \dot{\zeta})$. На языке теории выбросов случайных функций задачу о вычислении $P_1(\beta \mid \zeta_0, \dot{\zeta}_0)$ можно сформулировать следующим образом: найти вероятность отрицательного выброса бесконечной длительности у стационарной случайной функции $\zeta(x)$ через прямую, наклоненную под углом β к оси абсцисс, при условии, что выброс начался на высоте ζ_0 и функция имела в начале выброса производную $\dot{\zeta}_0$. Эта задача является частным случаем более общей задачи о распределении выбросов случайных функций через заданные детерминированные функции, решение которой найдено в общем виде в работе [6]. Подставив условия нашей задачи в окончательные формулы работы [6], для $P_1(\beta \mid \zeta_0, \dot{\zeta}_0)$ получим

$$P_1(\beta \mid \zeta, \dot{\zeta}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \underbrace{\int\limits_0^{\infty} \cdots \int\limits_0^{\infty}}_{s} d_s(t_1, \ldots, t_s)\, dt_1 \ldots dt_s. \tag{2.3}$$

Здесь

$$d_s(t_1, \ldots, t_s) = w^{-1}(\zeta, \dot{\zeta}) \underbrace{\int\limits_{\operatorname{tg}\beta}^{\infty} \cdots \int\limits_{\operatorname{tg}\beta}^{\infty}}_{s} (\dot{\zeta}_1 - \operatorname{tg}\beta) \ldots (\dot{\zeta}_s - \operatorname{tg}\beta) \times$$
$$\times w_{2s+2}(\zeta, \zeta + t_1 \operatorname{tg}\beta, \ldots, \zeta + t_s \operatorname{tg}\beta; \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1, \ldots; \dot{\zeta}_s)\, d\dot{\zeta}_1 \ldots d\dot{\zeta}_s. \tag{2.4}$$

В формуле (2.4) $w_{2n}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n; \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \ldots, \dot{\zeta}_n)$ — $2n$-мерная плотность распределения вероятностей для значений функции и ее производных в точках 1, 2,..., n. Ввиду очевидной сложности выражения (2.3), мы ограничимся в дальнейшем некоторыми предельными случаями, когда для величины $P_1(\beta|\zeta, \dot{\zeta})$ справедливы приближенные компактные формулы

а) Рассмотрим слабые затенения поверхности, когда вероятность $P_1(\beta|\zeta, \dot{\zeta})$ близка к единице и в бесконечном ряде (2.3) можно ограничиться только первыми двумя членами, т. е. считать, что имеет место приближенная формула

$$P_1(\beta \mid \zeta, \dot{\zeta}) = 1 - w^{-1}(\zeta, \dot{\zeta}) \int_0^\infty d\tau \int_{\operatorname{tg}\beta}^\infty (\dot{\zeta}_1 - \operatorname{tg}\beta)\, w_4(\zeta, \zeta + \tau \operatorname{tg}\beta; \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1)\, d\dot{\zeta}_1. \quad (2.5)$$

Легко убедиться с помощью методов, развитых в работе [6], что входящая в (2.2) величина $P_2(\alpha, \alpha|\zeta, \dot{\zeta})$, не равная, вообще говоря, произведению $P_1(\alpha|\zeta, \dot{\zeta})\, P_1(\alpha\ \zeta, \dot{\zeta})$, в случае слабых затенений, когда интегрирование в формуле для $P_2(\alpha \mid \zeta, \dot{\zeta})$ происходит по координатам только одной точки, распадается на произведение вероятностей:

$$P_2(\alpha, \alpha\ \zeta, \dot{\zeta}) = P_1(\alpha|\zeta, \dot{\zeta})\, P_1(\alpha|\zeta, \zeta). \quad (2.6)$$

Пользуясь (2.6) и (2.5), для коэффициента отражения в случае слабых затенений получаем

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta\, w(\zeta)\, e^{iq_z\zeta} \int_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\alpha} w'(\dot{\zeta})\, d\zeta - 2\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta\, e^{iq_z\zeta} \int_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\alpha} d\dot{\zeta} \int_0^\infty d\tau \int_{\operatorname{tg}\alpha}^\infty (\dot{\zeta}_1 - \operatorname{tg}\alpha) \times$$
$$\times\, w_4(\zeta, \zeta + \tau \operatorname{tg}\alpha; \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1)\, d\dot{\zeta}_1. \quad (2.7)$$

Количественным критерием роли затенений в процессе рассеяния является отношение $a = \operatorname{tg}\alpha/\sigma_2$, где σ_2 — характерное значение тангенсов углов наклона поверхности (в частности, это может быть дисперсия производной $\sigma_2^2 = \overline{\dot{\zeta}^2}$). Очевидно, что по порядку величины $\sigma_2 \sim \sigma/\tau_0$, где σ — характерная высота поверхности (причем в качестве σ^2 можно взять $\overline{\zeta^2}$), а τ_0 — радиус корреляции, совпадающий по порядку величины с характерным линейным размером неровностей. Далее, из геометрических соображений очевидно, что $\tau = \sigma/\operatorname{tg}\alpha$ есть расстояние, на котором, в основном, и происходят затенения луча, если они происходят вообще. В случае слабых затенений, очевидно, $a = \operatorname{tg}\alpha/\sigma_2 \gg 1$, что в свою очередь означает $\tau \ll \tau_0$. Иными словами, область, существенная при интегрировании по τ во втором члене справа в (2.7), значительно меньше радиуса корреляции неровностей. Поэтому в подынтегральном выражении можно заменить $w_4(\zeta, \zeta_1; \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1)$ ее приближенным значением при $\tau \ll \tau_0$.

В этой связи заметим, что, во-первых, значения функции и ее производной в одной и той же или двух очень близких ($\tau \ll \tau_0$) точках не скоррелированы; во-вторых, двухмерная плотность двух сильно скоррелированных величин $\zeta(t)$ и $\zeta(t+\tau)$ при $\tau \to 0$ ведет себя следующим образом:

$$\lim_{\tau \to 0} w_2(\zeta, \zeta_1; \tau) = \delta(\zeta - \zeta_1)\, w_1(\zeta).$$

Поэтому четырехмерную функцию w_4 представим в виде

$$w_4(\zeta, \zeta_1; \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1; \tau)_{\tau \ll \tau_0} \simeq \Delta_\tau(\zeta - \zeta_1)\, w_1(\zeta)\, w_2'(\dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1; \tau), \quad (2.8)$$

где $\Delta_\tau(\zeta - \zeta_1)$ — функция разности, имеющая острый максимум в нуле аргумента $\zeta - \zeta_1$.

Конкретный вид этой острой функции, которая в пределе $\tau \to 0$ переходит в δ-функцию, различен для различных распределений и функций корреляции. Например, для нормального двухмерного распределения

$$\Delta_\tau(\zeta - \zeta_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(1-R^2)}} \exp\left[-\frac{(\zeta-\zeta_1)^2}{2(1-R^2)\sigma^2}\right], \tag{2.9}$$

где $R(\tau)$ — функция корреляции. Учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha \gg \sigma_2$, можно считать, что

$$\int_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\alpha} d\dot{\zeta}\, w_2^1(\dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1; \tau) \simeq w_1'(\dot{\zeta}_1) \int_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\alpha} w_1'(\dot{\zeta})\, d\dot{\zeta} \tag{2.10}$$

и, наконец, пользуясь изложенными выше свойствами $\Delta_\tau(\zeta_1 - \zeta)$, записать:

$$\int_0^\infty \Delta_\tau(\tau \operatorname{tg}\alpha)\, d\tau \simeq \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}. \tag{2.11}$$

Подставляя формулы (2.8)—(2.9) в (2.7), получаем окончательное выражение для коэффициента отражения:

$$f(\alpha) = \Phi(a, a) \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, e^{iq_z \sigma x}\, dx \left(1 - \frac{\psi(a)}{a}\right). \tag{2.12}$$

В формуле (2.12) мы перешли к безразмерным переменным $x = \sigma^{-1}\zeta$, $\dot{x} = \sigma_2^{-1}\dot{\zeta}$ и ввели функции

$$\Phi(a, b) \equiv \int_{-a}^{b} w'(\dot{x})\, d\dot{x}; \quad \psi(a) = \int_a^\infty (\dot{x} - a)\, w'(\dot{x})\, d\dot{x}. \tag{2.12a}$$

Общая формула (2.12) для нормального распределения

$$w(\zeta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\zeta^2/2\sigma^2}; \quad w(\dot{\zeta}) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\dot{\zeta}^2/2\sigma_2^2}$$

дает

$$f(\alpha) = \Phi_N(a, a)\left(1 - \frac{\psi_N(a)}{a}\right) e^{-2k^2\sigma^2\sin^2\alpha}; \tag{2.13}$$

$$\Phi_N(a, b) = \operatorname{erf} a + \operatorname{erf} b - 1;$$

$$\psi_N(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} - a(1 - \operatorname{erf} a); \tag{2.13a}$$

$$\operatorname{erf} a \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-t^2/2}\, dt; \quad a = \operatorname{tg}\alpha/\sigma_2.$$

В рассматриваемом случае можно воспользоваться асимптотикой этих функций:

$$\Phi(a \gg 1;\ b \gg 1) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-a^2/2}}{a} + \frac{e^{-b^2/2}}{b}\right);$$
$$\psi_N(a \gg 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a^2}\,e^{-a^2/2}. \tag{2.13б}$$

Для случая, когда высоты и производные распределены так, как в синусоидальной волне:

$$w(\zeta) = \frac{1}{\pi\sqrt{\sigma^2_{\text{макс}} - \zeta^2}};\quad w'(\dot\zeta) = \frac{1}{\pi\sqrt{\sigma^2_{2\text{макс}} - \dot\zeta^2}} \tag{2.14}$$

формула (2.12) приобретает вид

$$f(\alpha) = \Phi_s(a, a)\left(1 - \frac{\psi_s(a)}{a}\right)J_0(q_z\sigma); \tag{2.15}$$

$$\Phi_s(a, a) = \frac{2}{\pi}\arcsin a;\quad a = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sigma_{2\,\text{макс}}};$$
$$\psi_s(a) = \frac{1}{\pi^2}\left[\sqrt{1 - a^2} - a\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin a\right)\right]. \tag{2.15а}$$

Легко видеть, что формулы (2.13) и (2.15) при больших углах скольжения ($a \gg 1$ в случае нормального распределения и $a \geqslant 1$ в случае (2.14)) переходят в известные формулы, полученные без учета затенений [5]. В той же степени это относится и к общей формуле (2.12).

б) В случае сильных затенений, когда $a \ll 1$, в формуле (2.3) уже нельзя ограничиться первыми членами ряда хотя бы потому, что, как показывают оценки, отношение n-члена ряда к n—1-му имеет в этом случае порядка $1/na$, т. е. отнюдь не мало (поскольку $a \ll 1$). Поэтому мы обратимся к другому представлению величины $P_1(\beta\,|\,\zeta, \dot\zeta)$ (см. [6]):

$$P_1(\beta\,|\,\zeta, \dot\zeta) = \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\underbrace{\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty}_{s} g_s(t_1, t_2, \ldots, t_s)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_s.\right. \tag{2.16}$$

Сравнение (2.16) с (2.3) позволяет выразить g_s через d_s:

$$g_1(t_1) = d_1(t_1);$$
$$g_2(t_1, t_2) = d_2(t_1, t_2) - d_1(t_1)\,d_1(t_2) \tag{2.17}$$

и т. д.

Очевидно, что $g_2(t_1, t_2)$ обращается в нуль, если $d_2(t_1, t_2)$ можно представить в виде произведения $d_1(t_1)\,d_1(t_2)$, т. е. когда поведение функции в точке t_1 мало сказывается на ее поведение в точке t_2. Следовательно, можно считать, что $g_2(t_1, t_2) = 0$, если $|\,t_1 - t_2\,| > \tau_0$. Но область, существенная при интегрировании по τ в (2.16), имеет порядок $\tau \sim \sigma/\operatorname{tg}\alpha \gg \tau_0$ (в силу $a \ll 1$); поэтому второй член в показателе экспоненты имеет порядок $\tau_0/\tau \ll 1$ и им можно пренебречь. Аналогичные оценки, примененные к g_s, приводят к следующей приближенной формуле для вероятности $P_1(\beta\,|\,\zeta, \dot\zeta)$ в случае сильных затенений:

$$P_1(\beta\,|\,\zeta, \dot\zeta) = \exp\left[-\int_0^\infty d_1(\tau)\,d\tau\right]. \tag{2.18}$$

Так как снова, как и в случае слабых затенений, интегрирование в (2.18) идет по координатам только одной точки, величина $P_2(\alpha, \alpha \mid \zeta, \dot{\zeta})$ распадается на произведение $P_1(\alpha \mid \zeta, \dot{\zeta})\, P_1(\alpha \mid \zeta, \dot{\zeta})$. Поэтому для коэффициента отражения получаем

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta\, w_1(\zeta)\, e^{iq_z\zeta} \int_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\alpha} w_1'(\dot{\zeta})\, d\dot{\zeta} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{2}{w_2(\zeta, \dot{\zeta})} \int_0^{\infty} d\tau \int_{\operatorname{tg}\alpha}^{\infty} d\dot{\zeta}_1\, (\dot{\zeta}_1 - \operatorname{tg}\alpha)\, w_4(\zeta, \zeta + \tau \operatorname{tg}\alpha;\ \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1)\, d\dot{\zeta}_1\right\}. \tag{2.19}$$

С учетом проведенного выше рассмотрения, давшего формулу (2.18), функцию $w_4(\zeta, \zeta_1;\ \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1;\ \tau)$ можно с той же точностью $(\tau_0/\tau \ll 1)$ представить в виде произведения одномерных функций $w_1(\zeta) w_1(\zeta_1) w_1'(\dot{\zeta}) w_1'(\dot{\zeta}_1)$. С геометрической точки зрения это означает, что характерное расстояние (на протяжении которого луч, вышедший из точки поверхности с высотой ζ и производной $\dot{\zeta}$ под малым углом α к оси, пересекает многократно поверхность) значительно больше радиуса корреляции поверхности, и, следовательно, корреляцию точек пересечения между собой можно не учитывать. Переходя в формуле (2.19) к безразмерным переменным $x = \sigma^{-1}\zeta$, $\dot{x} = \sigma_2^{-1}\dot{\zeta}$ и к безразмерным функциям плотности $w(x)$ и $w'(x)$, получим окончательно

$$f(\alpha) = \Phi(a, a) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, w(x) \exp\left[iq_z\sigma x - 2\frac{\psi(a)}{a} \int_x^{\infty} w(\xi)\, d\xi\right]. \tag{2.20}$$

Причем функции $\Phi(a, a)$ и $\psi(a)$ определяются формулами (2.12а). В случае нормального распределения высот и производных (2.20) принимает вид

$$f_N(\alpha) = \Phi_N(a, a) \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{x^2}{2} + iq_z\sigma x - 2\frac{\psi_N(a)}{a}(1 - \operatorname{erf} x)\right]. \tag{2.21}$$

Для поверхности с функциями распределения (2.14):

$$f_s(\alpha) = \Phi_s(a, a)\, e^{-\frac{\psi_s(a)}{a}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp\left[2\frac{\psi_s(a)}{a}\vartheta + iq_z\sigma \sin\vartheta\right] d\vartheta. \tag{2.22}$$

В последней формуле интегрирование приводит к функции Бесселя с мнимым индексом $2i\,\psi_s(a)/a$. Интересно отметить, что формулы (2.21) и (2.22), полученные для случая сильных затенений $(a \ll 1)$, в обратном предельном случае слабых затенений (т. е. $a \gg 1$ в формуле (2.21) и $a \sim 1$ в (2.22)) переходят в соответствующие формулы пункта а.

3. СРЕДНЯЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ

При вычислении средних значений величин, квадратичных по полю, воспользуемся формулой (1.4) для неусредненного потенциала $\varphi(\alpha, \beta)$. Мы проведем выкладки только для случая поверхности с одномерными неровностями. Полученные таким путем результаты, вообще говоря, несправедливы для двухмерных неровностей (в отличие от предыдущего

раздела). Итак, усредним величину $J(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)\,\varphi^*(\alpha, \beta)$, которая, с точностью до постоянного множителя, совпадает с интенсивностью рассеянного звука. Из (1.4) для $J(\alpha, \beta)$ имеем выражение

$$J(\alpha, \beta) = \frac{L_y q_z^2}{8\pi R_0^2} \iint\limits_0^{L_x} dx dx' \exp\left\{ i\left[q_x(x - x') + \right.\right.$$
$$\left.\left. + q_z(\zeta(x) - \zeta(x'))\right]\right\} \left(1 - \frac{q_x}{q_z}\dot{\zeta}(x)\right)\left(1 - \frac{q_x}{q_z}\dot{\zeta}(x')\right) \times \tag{3.1}$$
$$\times\, \eta(\alpha, \beta \mid x)\, \eta(\alpha, \beta \mid x');$$

L_x и L_y — размеры прямоугольной рассеивающей площадки вдоль координатных осей.

Усреднение, как и раньше, проведем в два этапа. Сначала усредним формулу (3.1) по тем реализациям $\zeta(x)$ случайной функции $z(x)$, которые в точках x и x' имеют заданные значения высот ζ и производных $\dot{\zeta}$. Очевидно, эта операция преобразует только множители $\eta(\alpha, \beta \mid x)$, $\eta(\alpha, \beta \mid x')$, которые после усреднения запишем в виде

$$\overline{\eta(\alpha, \beta \mid x)\, \eta(\alpha, \beta \mid x')}^{(1)} = P_2'(\alpha, \beta \mid \zeta(x), \zeta(x'); \dot{\zeta}(x), \dot{\zeta}(x')). \tag{3.2}$$

Усредняя теперь (3.1) по всем возможным значениям ζ и $\dot{\zeta}$ в двух заданных точках и считая все величины зависящими только от разности координат $\tau = x' - x$ (статистически однородная поверхность), получим

$$\overline{J(\alpha, \beta)} = \frac{S q_z^2}{8\pi R_0^2} \int\limits_{-L_x}^{L_x} d\tau\, e^{i q_x \tau} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta\, d\zeta_1\, e^{i q_z(\zeta - \zeta_1)} \times$$
$$\times \iint\limits_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\beta} d\dot{\zeta}\, d\dot{\zeta}_1 \left(1 - \frac{q_x}{q_z}\dot{\zeta}\right)\left(1 - \frac{q_x}{q_z}\dot{\zeta}_1\right) w_1(\zeta, \zeta_1; \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1; \tau)\, P_2'(\alpha, \beta \mid \zeta, \zeta_1; \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1; \tau). \tag{3.3}$$

Все полученные до сих пор результаты, включая и формулу (3.3), справедливы при любых значениях параметра $q_z\sigma$, о величине которого до сих пор никаких предположений не делалось. Вычисление интегралов в (3.3) оказывается возможным провести до конца в предельном случае $q_z\sigma \gg 1$. При этом, как указано в [5], на поверхности появляются локализованные зеркально отражающие участки с размерами $\tau \ll \tau_0$ и с мало отличающимися высотами и наклонами в пределах одного участка. Это позволяет заменить подынтегральные функции в (3.3) их приближенными выражениями:

$$P_2'(\alpha, \beta \mid \zeta, \zeta_1; \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1; \tau) \to P_2(\alpha, \beta \mid \zeta, \dot{\zeta});$$
$$w_4(\zeta, \zeta_1; \dot{\zeta}, \dot{\zeta}_1; \tau) \to \Delta_\tau(\zeta - \zeta_1)\, \delta(\dot{\zeta} - \dot{\zeta}_1)\, w(\zeta)\, w'(\dot{\zeta}). \tag{3.4}$$

Переходя в (3.3) к безразмерным переменным и пользуясь для P_2 и w_4 приближенными соотношениями (3.4), получаем

$$\overline{J(\alpha, \beta)} = \overline{J_0(\alpha, \beta)} \int\limits_a^b w'(\dot{x}) \left(1 - \sigma_2 \frac{q_x}{q_z}\dot{x}\right)^2 d\dot{x} \int\limits_{\infty}^{\infty} dx\, w(x)\, P_2(\alpha, \beta \mid x, \dot{x}). \tag{3.5}$$

Здесь $a = \operatorname{tg}\alpha/\sigma_2$, $b = \operatorname{tg}\beta/\sigma_2$ и введена интенсивность $\overline{J_0(\alpha, \beta)}$, при вычислении которой затенения не учитываются:

$$\overline{J_0(\alpha, \beta)} = \frac{Sq_z^2}{8\pi R_0^2} \int_{-L_x}^{L_x} d\tau e^{iq_x\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iq_z z} \Delta_\tau(z), \tag{3.6}$$

где $z = \zeta_1 - \zeta$ — новая переменная интегрирования.

Грубость приближения (3.4), а также учет неравенств, полученных в разделе 4, приводит к тому, что в (3.6) мы должны ограничиться членами, не зависящими от длины волны. Это соответствует учету только главного перевального члена по $q_z\sigma$ (см. [3, 5]). Легко убедиться, что вычисление интегралов в (3.6) с $\Delta_\tau(z)$ в виде (2.9) приводит к результатам работы [3] (причем $\lambda \to 0$). Из формулы (3.5) видно, что учет затенений приводит к появлению зависящего от углов множителя, вычисление которого при произвольных углах скольжения и наблюдения представляет значительные трудности. Вычисления удается довести до конца только в предельных случаях сильных и слабых затенений.

При этом оказывается достаточным рассмотреть только сильные затенения, так как результаты в случае слабых затенений получаются простым разложением в ряд полученных формул. В случае сильных затенений $P_2(\alpha, \beta \mid \zeta, \dot{\zeta})$ распадается* на произведение вероятностей $P_1(\alpha \mid \zeta, \dot{\zeta}) P_1(\beta \mid \zeta, \dot{\zeta})$, для которых справедливо выражение (2.18) с последующей заменой четырехмерной функции w_4 на произведение одномерных. Формула (3.5) приобретает вид

$$\overline{J(\alpha, \beta)} = \overline{J_0(\alpha, \beta)}\, \Phi_i(a, b) \int_{-\infty}^{\infty} dx w(x) \exp\left\{-\left(\frac{\psi(a)}{a} + \frac{\psi(b)}{b}\right) \int_x^{\infty} w(\xi)\, d\xi\right\}; \tag{3.7}$$

здесь

$$\Phi_i(a, b) = \int_{-\operatorname{tg}\alpha}^{\operatorname{tg}\beta} d\dot{x} w'(\dot{x}) \left(1 - \frac{q_x}{q_z}\sigma_2 \dot{x}\right)^2,$$

а $\psi(a)$ определяется формулами (2.12а), (2.13а) и (2.15а). Интегрирование по x в (3.7) можно выполнить, сделав замену переменных $y = \int_x^{\infty} w(\xi)\, d\xi$ ($y(x)$ — монотонная функция, так как $w(\xi) \geqslant 0$) и воспользовавшись условием нормировки для $w(\xi)$. Таким образом, получаем окончательное выражение для интенсивности:

$$\overline{J(\alpha, \beta)} = \overline{J_0(\alpha, \beta)}\, \Phi_i(a, b) \frac{1 - \exp\{-[\psi(a)/a + \psi(b)/b]\}}{\psi(a)/a + \psi(b)/b}. \tag{3.8}$$

Так как множитель, учитывающий затенения, имеет чисто геометрическое происхождение, то формула (3.8) справедлива и для случая рассеяния электромагнитных волн.

---

* Это верно только в том случае, когда лучи α и β находятся по разные стороны от нормали к плоскости xy (напомним, что неровности одномерные). В противном случае имеет место формула

$$P_2(\alpha, \beta \mid \zeta, \dot{\zeta}) = P_1(\min(\alpha, \beta) \mid \zeta, \dot{\zeta}).$$

4. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ

Формулы (3.8) и (2.20) дают среднюю интенсивность и коэффициент отражения для поля, найденного в приближении Кирхгофа без учета переизлученного поля и в пренебрежении областями полутеней. Кроме того, в (3.8) не учитываются диффракционные эффекты (так как $\lambda = 0$), поэтому в тех направлениях, для которых нет зеркально отражающих площадок (или их очень мало), эта формула дает заведомо неправильный результат, так как диффрагированное поле в этих направлениях может значительно превышать поле (3.8).

Линейные размеры областей полутени Δ_1 и Δ_2 вблизи точек C и Q (см. рис. 1) имеют порядок [2, 7].

$$\Delta_1 \sim (\lambda\rho^2)^{1/3}; \quad \Delta_2 \sim (QC\lambda)^{1/2}, \tag{4.1}$$

где ρ — радиус кривизны поверхности в точке C, CQ — расстояние между затеняющей точкой и освещенной стороной поверхности.

В случае сильных затенений размер освещенной области легко оценить (рис. 1):

$$QB_1 \sim QB \sim CQ\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \tag{4.2}$$

(γ — угол наклона поверхности в точке Q).

Влиянием областей полутени можно пренебречь, если они малы по сравнению с размерами освещенной области (в случае сильных затенений) и с размерами области тени (в случае слабых затенений). Мы потребуем выполнения неравенств

$$\overline{QB} \gg \bar{\Delta}_1;\ \bar{\Delta}_2. \tag{4.3}$$

Для средних значений величины, входящих в (4.2) и (4.3), справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\overline{CQ} \sim \tau_0; \quad \rho \sim \frac{\tau_0^2}{\sigma}\left[1 + \sigma_2^2\right]^{3/2}; \\ \overline{(\sin^2\gamma)^{-1}} \sim \frac{\sigma_2^2 + 1}{\sigma_2^2}.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Здесь τ_0 — радиус корреляции, а σ и σ_2 — характерные значения высот и тангенсов углов наклона. В случае сильных затенений, когда $\operatorname{tg}\alpha/\sigma_2 \sim \sin\alpha/\sigma_2 < 1$, неравенства (4.3) с учетом (4.4) принимают вид

$$\begin{gathered}1 > \frac{\sin\alpha}{\sigma_2} \gg \left(\frac{\lambda}{\tau_0}\right)^{1/3}\frac{(\sigma_2^2 + 1)^{1/2}}{\sigma_2^{2/3}}; \\ 1 > \frac{\sin\alpha}{\sigma_2} \gg \left(\frac{\lambda}{\tau_0}\right)^{1/2}\frac{1}{(\sigma_2^2 + 1)^{1/2}}.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Кроме того, всегда предполагается, что $(k\rho)^{1/3} \gg 1$, т. е.

$$1 \gg \left(\frac{\lambda}{\tau_0}\right)^{1/3}\frac{\sigma_2^{1/3}}{(1 + \sigma_2^2)^{1/2}}. \tag{4.5a}$$

Из (4.5) видно, что полутенями можно пренебречь в случае коротких волн и крупных крутых неровностей.

Что касается переизлученного поля, то его можно себе представить как результат многократных отражений от поверхности. В этом смысле поле, определенное в приближении Кирхгофа, есть результат однократных отражений. Покажем, что даже при скользящем падении лучей (сильные затенения) есть области углов, в которых интенсивность переизлученного поля мала по сравнению с интенсивностью, рассчитанной в приближении Кирхгофа. Интенсивность однократно рассеянного поля в направлении β можно считать пропорционально вероятности соответствующей ориентации площадки в точке A_1 (рис. 2):

$$J_0(\alpha, \beta) \sim w\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right). \qquad (4.6)$$

Интенсивность однократно переизлученного поля в направлении β, очевидно, можно записать в виде

$$J_1(\alpha, \beta) \sim \iint w(\gamma)\, w(\gamma_1) \times \times P(\gamma)\, \delta(\gamma - \gamma_1 + t(\alpha, \beta))\, d\gamma\, d\gamma_1. \qquad (4.7)$$

Здесь $w(\gamma)$ — плотность распределения углов наклона поверхности, $0 \leqslant P(\gamma) \leqslant 1$ — вероятность того, что луч, вышедший из A_1 под углом $2\gamma + \alpha$, встретит на своем пути поверхность, которая еще раз его отразит; δ-функция в (4.7) устанавливает такую связь между γ и γ_1, что в результате двухкратного отражения излучение распространяется в направлении β.

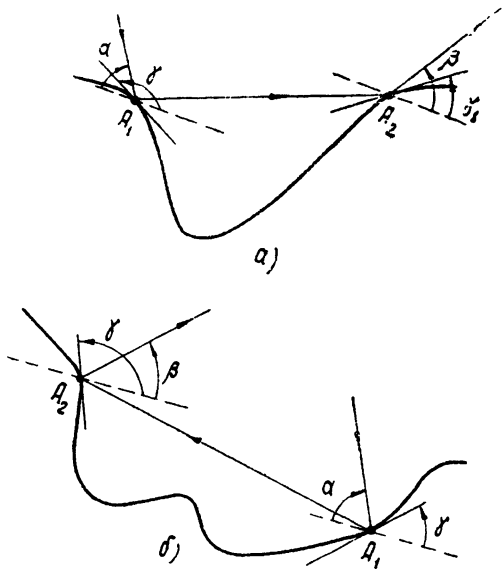


Рис 2.

Заменяя в (4.7) $P(\gamma)$ максимальным значением, мы получим оценку сверху для отношения интенсивностей:

$$K = \frac{J_1}{J_0} < w^{-1}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \iint w(\gamma)\, w(\gamma_1)\, \delta(\gamma - \gamma_1 + f(\alpha, \beta))\, d\gamma\, d\gamma_1. \qquad (4.8)$$

Простой геометрический расчет для двух возможных случаев рассеяния вперед (рис. 2а) и назад (рис. 2б) дает следующую оценку:

$$K < w^{-1}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \int_{\gamma_{\text{мин}}}^{\gamma_{\text{макс}}} w(\gamma)\, w\left(\gamma + \frac{\beta+\alpha}{2}\right) d\gamma. \qquad (4.9)$$

Интегрирование в (4.9) происходит в следующих пределах:

а) в случае, изображенном на рис. 2а,

$$\gamma_{\text{мин}} = -\alpha; \quad \gamma_{\text{макс}} = \begin{cases} \dfrac{\pi-\alpha-\beta}{2} & \text{при } \beta > \pi/2 \\ \dfrac{\beta-\alpha}{2} & \text{при } \beta < \pi/2 \end{cases}; \qquad (4.10)$$

б) в случае, изображенном на рис. 2б,

$$\gamma_{\text{макс}} = \frac{\pi}{2}; \quad \gamma_{\text{мин}} = \begin{cases} \dfrac{\pi - \alpha - \beta}{2} & \text{при } \beta < \pi/2 \\ \dfrac{\beta - \alpha}{2} & \text{при } \beta > \pi/2 \end{cases}. \tag{4.10б}$$

В частности, в радиолокационном случае и для зеркального отражения формулы (4.9) и (4.10) приводят к неравенству

$$K < \int_0^{\alpha} w(\gamma)\, d\gamma. \tag{4.11}$$

Таким образом, при достаточно малых углах скольжения и наблюдения переизлученным полем можно пренебречь.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность И. Л. Вербицкому за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1 М. А. Антокольский, ДАН СССР, **62**, 203 (1948)
2 Л М Бреховских, ЖЭТФ, **23**, 289 (1952).
3 М А Исакович, ЖЭТФ, **23**, 305 (1952).
4. C. Eckart, J. Acoust. Soc. America, **25**, 566 (1953).
5 Е. Л Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М, 1961.
6 П Н Кузнецов, Р Л Стратонович, В И Тихонов, ЖЭТФ, 24, 103 (1954).
7 В. А. Фок, ЖЭТФ, **15**, 693 (1945)

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
6 апреля 1963 г.

ON TNE SHADING ACCOUNT IN THE PROBLEM OF THE WAVE SCATTERING BY STATISTICALLY ROUGH SURFACE

F. G. Bass, I. M. Fuks

In the Kirchoff's approximation the sound wave reflection has been considered from a statistically rough surface in the presence of shadings. Formulas have been obtained for the reflection factor and the mean intensity of the scattered field. The results are applicable to the scattering of the electromagnetic waves.

Примечание при корректуре. Как стало известно авторам, после отправки настоящего сообщения в печать была опубликована работа Р Г Баранцева (Аэродинамика разреженных газов, сб. 1, стр. 107), где используется математический аппарат, аналогичный примененному в настоящей статье, для решения задачи об отражении бесструктурных молекул газа от статистически неровной поверхности

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

О ФЛЮКТУАЦИЯХ В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

В. Н. Луговой

Дается обобщение флюктуационно-диссипационной теоремы на случай классических периодически нестационарных «равновесных» систем. Устанавливается связь спектральных характеристик дискретных флюктуирующих величин с матрицей импеданса системы. Соответствующие результаты распространяются на распределенные системы и применяются к электромагнитным флюктуациям в периодически нестационарных равновесных средах. В качестве конкретного примера рассмотрены электромагнитные флюктуации, обусловленные разреженной электронной плазмой, находящейся в сильном стороннем периодическом магнитном поле и заключенной внутри объемного резонатора с идеально проводящими стенками

В настоящей работе дается обобщение флюктуационно-диссипационной теоремы на случай классических периодически нестационарных систем следующего типа. Предполагается, что нестационарность обусловлена некоторым периодическим воздействием, не совершающим работы над системой. Примером является немагнитная среда в сильном переменном стороннем магнитном поле (или система частиц в переменном стороннем поле сил, перпендикулярных к скоростям этих частиц). Ясно, что во всякой реальной системе переменное во времени стороннее воздействие должно совершать работу. Мы будем предполагать также, что механическая модель системы (среды) в присутствии переменного стороннего воздействия описывается уравнениями Гамильтона (с зависящим явно от времени гамильтонианом).

Так как стороннее воздействие не совершает работы, то механическая модель имеет энергию $E(p, q)$, являющуюся интегралом движения (p, q — совокупность импульсов и координат, составляющих среду частиц). При этом энергия $E(p, q)$ не отличается от энергии системы без стороннего воздействия (или с фиксированным в произвольный момент t_0 его значением). С другой стороны, поскольку механическая модель — гамильтонова, то, согласно теореме Лиувилля, соответствующая ей функция распределения $\rho(p, q)$ также является интегралом движения. Используя далее квазинезависимость подсистем в установившемся режиме, можно обычным образом [1] установить, что функция распределения $\rho(p, q)$ (в отсутствие макроскопических перемещений системы) является функцией от энергии $E(p, q)$. Иными словами, в установившемся режиме функция распределения $\rho(p, q)$ рассматриваемой нестационарной системы совпадает с функцией распределения соответствующей равновесной системы без всякого стороннего воздействия (или с фиксированным в произвольный момент t_0 его значением). Нестационарность системы будет проявляться только по отношению к функции распределения величин, относящихся к различным моментам времени. Системы такого типа мы будем называть равновесными нестационарными.

1. ФЛЮКТУАЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Как известно, в корреляционной теории флюктуаций для равновесных стационарных систем может быть использован либо статистико-механический (см., например, [2,3]), либо термодинамический подход [4,5]. При этом в рамках термодинамического подхода необходимы определенные постулаты (принцип Больцмана и постулат Онзагера). В настоящей работе используется термодинамический подход.

Задача состоит в вычислении функции корреляции $\psi_{ij}(t, \tau)$ и связанных с ней спектральных характеристик для дискретных флюктуирующих величин ξ_i и ξ_j, характеризующих рассматриваемую систему:

$$\psi_{ij}(t,\tau)=\psi_{ij}\left(t+\frac{2\pi}{p},\ \tau\right)=\langle \xi_i(t)\,\xi_j(t+\tau)\rangle, \quad \langle \xi_k\rangle=0. \tag{1}$$

Здесь p—частота изменения стороннего воздействия. Скобки означают среднее по ансамблю. Как обычно, функция $\psi_{ij}(t, \tau)$ может быть представлена в виде

$$\langle \xi_i(t)\,\xi_j(t+\tau)\rangle=\langle \xi_i(t)\,\langle \xi_j(t+\tau)\,|\,\xi_k(t)\rangle\rangle, \tag{2}$$

где $\langle \xi_j(t+\tau)|\xi_k(t)\rangle$ означает среднее для величины ξ_j в момент времени $t+\tau$ при условии, что в момент t заданы значения ξ_k ($k=1,2,\ldots, n$). Пусть величины X_i (флюктуации которых обозначены через ξ_i) связаны макроскопическими уравнениями (которые в линейном приближении могут быть записаны, например, через импеданс системы по отношению к некоторым внешним силам F_i). Согласно постулату Онзагера, условное среднее $\langle \xi_j(t+\tau)|\xi_k(t)\rangle$ (при $\tau>0$) есть решение линейных макроскопических уравнений X_j в момент $t+\tau$ при условии, что в момент t положено $X_k=\xi_k$ ($k=1,2,\ldots,n$). (Мы предполагаем, что в установившемся режиме $X_j=0$; $j=1,2,\ldots, n$). Ниже данное утверждение используется и в рассматриваемом случае нестационарных систем (см. [6]). Отсюда функция корреляции (2) приобретает вид линейной комбинации средних значений $\langle \xi_i(t)\xi_k(t)\rangle$ величин, взятых в один и тот же момент времени t (коэффициенты этой комбинации определяются импедансом системы).

Для равновесных стационарных систем значения $\langle \xi_i\,\xi_j\rangle$ могут быть вычислены с помощью принципа Больцмана, согласно которому функция распределения для малых флюктуаций ξ_j определяется выражением

$$dw=A\exp\left\{(1/k)\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\bigg|_{\xi_k=0}\xi_i\xi_j\right\}d\xi_1\ldots d\xi_n. \tag{3}$$

Здесь S—энтропия системы. Флюктуационно-диссипационная теорема получается при этом [4,5], если учесть также соотношение

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X_i\partial X_j}\bigg|_{X_k=0}=\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\bigg|_{\xi_k=0}, \tag{4}$$

которое следует рассматривать как вторую часть постулата Онзагера. Формула (3) остается в силе и в рассматриваемом нестационарном случае, если в качестве S взять $S|_{t_0}$ (индексом t_0 здесь и

всюду ниже снабжается любая величина, относящаяся к равновесной системе с фиксированным в момент t_0 значением стороннего воздействия). Величина $\left.\frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right|_{t_0,\, \xi_k=0}$ не зависит от t_0. Обе части равенства (4) теперь также надо снабдить индексом t_0.

Будем считать, что система замкнута и обладает определенной энергией E (микроканоническое распределение). Энтропия $S|_{t_0}$ является функцией внутренних параметров X_k ($k=1, 2,..., n$). Величинам X_k соответствуют силы $F_k = \left.\frac{\partial S}{\partial X_k}\right|_{t_0}$ (внешние параметры).

Положим теперь

$$F_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \beta_l(\omega)\, e^{-i\omega t}. \tag{5}$$

Тогда в силу макроскопических уравнений

$$X_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \gamma_j(\omega, t)\, e^{-i\omega t}, \tag{6}$$

$$\gamma_j(\omega, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}(\omega, t)\, \beta_i(\omega). \tag{7}$$

Здесь $\alpha_{ji}(\omega, t) = \alpha_{ji}(\omega, t + 2\pi/p)$—матрица импеданса системы *. Полагая далее $F_i = \Delta F_i \equiv \text{const}$, находим $X_j = \Delta X_j = \sum_i \alpha_{ji}(0, t)\, \Delta F_i$. В рассматриваемом случае величина $\alpha_{ji}(0, t) = \Delta X_j / \Delta F_i$ не зависит от t вследствие того, что величина $\partial^2 S / \partial X_i \partial X_j|_{t_0} = \partial F_i / \partial X_j|_{t_0} = \Delta F_i / \Delta X_j|_{t_0}$ не зависит от t_0 (см. (4)) **. Таким образом,

$$\alpha_{ji}(\omega, t) = \left.\frac{\partial X_j}{\partial F_i}\right|_{t_0} + O(\omega). \tag{8}$$

Чтобы найти выражение для условного среднего $\langle \xi_j(t_2) | \xi_i(t_1) \rangle$ при $t_2 > t_1$, будем считать, что до момента t_1 система находилась в установившемся режиме с отличными от нуля силами F_i, так что значения X_i были равны ξ_i. Затем при $t > t_1$ силы F_i сразу стали равны нулю ***. Релаксация системы в установившийся режим с новыми значениями сил F_i описывается равенствами (5)—(7):

$$F_i(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\partial F_i}{\partial X_k}\right|_{t_0} \xi_k & (t \leqslant t_1) \\ 0 & (t > t_1) \end{cases} \tag{9}$$

---

* В общем случае периодически нестационарной системы соотношения (5)—(7) могут оказаться неверными, поскольку матрица $\alpha_{ij}(\omega, t)$ как функция комплексного ω может иметь полюсы в верхней полуплоскости (см. [7]). Однако в рассматриваемом случае матрица $\alpha_{ji}(\omega, t)$ является аналитической функцией ω в верхней полуплоскости

** В этом легко убедиться на примере уравнения $a_1(t)\frac{dX}{dt} + a_0(t)\, X = F$. Имеем $\left.\frac{\Delta F}{\Delta X}\right|_{t_0} = a_0(t_0) \equiv \text{const} = a_0$; но тогда, очевидно, $\frac{\Delta F}{\Delta X}(t) \equiv a_0$

*** В этом пункте мы следуем методу, изложенному в работах Каллена и Грина [4,5].

или

$$F_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial X_k}\bigg|_{t_0} \xi_k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{1}{2}\delta(\omega) - \frac{i}{2\pi\omega}\right] e^{i\omega(t_1-t)}. \tag{10}$$

Согласно постулату Онзагера (а также учитывая (8)), получаем

$$\langle \xi_j(t_2) \mid \xi_i(t_1) \rangle = X_j(t_2) = \frac{1}{2}\xi_j - \frac{i}{2\pi}\sum_{k,\,l=1}^{n} \xi_k \frac{\partial F_l}{\partial X_k}\bigg|_{t_0} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \alpha_{jl}(\omega, t_2)\, \omega^{-1} e^{i\omega(t_1-t_2)} \quad (t_2 > t_1). \tag{11}$$

Чтобы с помощью (2) и (11) вычислить функцию корреляции $\psi_{ij}(t, \tau)$, надо учесть также соотношение [1]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_l}{\partial X_k}\bigg|_{t_0} \langle \xi_l \xi_k \rangle = -k\delta_{il}, \tag{12}$$

вытекающее из (3) и (4) (среднее значение $\langle \xi_i \xi_k \rangle = \langle \xi_i(t_1)\, \xi_k(t_1) \rangle$ не зависит от t_1 и совпадает с равновесным значением). В результате получаем при $\tau > 0$ [1]

$$\psi_{ij}(t, \tau) = \frac{1}{2}\langle \xi_i \xi_j \rangle + \frac{ik}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \alpha_{ji}(\omega, t+\tau)\, \omega^{-1} e^{-i\omega\tau}. \tag{13}$$

Учитывая далее равенство (8), а также аналитические свойства функции $\alpha_{ji}(\omega, t)$, находим

$$\psi_{ij}(t, \tau) = \frac{ik}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\alpha_{ij}(\omega, t+\tau) - \alpha^*_{ij}(\omega, t+\tau)]\, \omega^{-1} e^{-i\omega\tau}$$
$$(\tau > 0). \tag{14}$$

Выражение для функции корреляции $\psi_{ij}(t, \tau)$ при $\tau < 0$ может быть получено с помощью ее очевидного свойства $\psi_{ij}(t, \tau) = \psi_{ji}(t+\tau, -\tau)$. Имеем

$$\psi_{ij}(t, \tau) = \frac{ik}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\alpha_{ji}(\omega, t) - \alpha^*_{ij}(\omega, t)]\, \omega^{-1} e^{-i\omega\tau} \quad (\tau < 0). \tag{15}$$

Полученные результаты принципиально решают поставленную задачу. Однако более удобны спектральные характеристики флюктуаций. Положим

$$\xi_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{j\omega}\, e^{-i\omega t}\, d\omega;$$

$$\psi_{ij}(t, \tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \psi_{ij}^{(l)}(\tau)\, e^{-ilpt}.$$

---

[1] Отметим, что из равенства (13) при $\tau \to 0$ вытекает следующее свойство матрицы импеданса равновесных периодически нестационарных систем величина $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \alpha_{ji}(\omega, t)\, \omega^{-1}$ не зависит от t.

Тогда

$$\langle \xi_{j\omega} \xi_{k\omega'} \rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} G_{jk}^{(l)}(\omega)\,\delta(\omega'-\omega-lp)\ ; \tag{16}$$

$$G_{jk}^{(l)}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}^{(l)}(\tau)\, e^{i(\omega+lp)\tau}\, d\tau. \tag{17}$$

Величина $2G_{jk}^{(0)}(\omega)$ имеет смысл спектральной интенсивности. Представим $\alpha_{jk}(\omega, t)$ в виде:

$$\alpha_{jk}(\omega, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \alpha_{jk}^{(l)}(\omega)\, e^{-ilpt}\,. \tag{18}$$

Используя (8), (14), (15), (17), находим

$$G_{jk}^{(l)}(\omega) = -\frac{ik}{2\pi}\left\{\frac{\alpha_{jk}^{(-l)*}(\omega+lp)}{\omega+lp} - \frac{\sigma_{kj}^{(l)}(\omega)}{\omega}\right\}. \tag{19}$$

При выводе формулы (19) мы считали заданной энергию замкнутой системы. Аналогичные соотношения имеют место для теплоизолированной системы с определенной температурой T (каноническое распределение). В этом можно убедиться непосредственно, следуя работам Каллена и Грина [4,5] с учетом введенных выше видоизменений. Однако соответствующие результаты можно получить, если правую часть равенства (19) (зависящую, в сущности, от энергии системы) выразить через температуру T.

Как обычно, изменение внутренней энергии E при постоянной энтропии может быть записано в виде (см., например, [8])

$$dE|_{t_0} = -\sum_{i=1}^{n} X_i\, df_i\,, \tag{20}$$

причем $f_i = -TF_i$. Ниже всегда под матрицей $\alpha_{jk}(\omega, t)$ будем иметь в виду матрицу импеданса по отношению к обобщенным силам f_i. При этом равенство (19), очевидно, приобретает вид

$$G_{jk}^{(l)}(\omega) = \frac{ikT}{2\pi}\left\{\frac{\alpha_{jk}^{(-l)*}(\omega+lp)}{\omega+lp} - \frac{\alpha_{kj}^{(l)}(\omega)}{\omega}\right\}. \tag{21}$$

Данное выражение обобщает флюктуационно-диссипационную теорему на периодически нестационарные равновесные системы (описываемые дискретными переменными X_k) *.

2. ФЛЮКТУАЦИИ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

Ниже результаты предыдущего пункта распространяются на распределенные системы. Пусть распределенная в пространстве система занимает объем V и флюктуации некоторой ее величины $X(t, \boldsymbol{r})$ описываются случайной функцией $\xi(t, \boldsymbol{r})$. Пусть также $f(t, \boldsymbol{r})$ — объемная

* Как известно, флюктуационно-диссипационная теорема для равновесных стационарных систем может быть сформулирована также в терминах флюктуирующих сторонних сил f_i. В рассматриваемом случае нестационарных систем этого сделать не удается.

плотность обобщенной силы (соответствующей величине $X(t, \boldsymbol{r})$). Положим

$$f(t, \boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f_{\omega}(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega t} . \tag{22}$$

Тогда в силу макроскопических уравнений

$$X(t, \boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega X_{\omega}(\boldsymbol{r}, t) e^{-i\omega t} ; \tag{23}$$

$$X_{\omega}(\boldsymbol{r}, t) = \hat{A}(\omega, \boldsymbol{r}, t) f_{\omega}(\boldsymbol{r}), \tag{24}$$

$\hat{A}(\omega, \boldsymbol{r}, t)$—линейный оператор, зависящий от ω и t и действующий на функцию от $\boldsymbol{r}$. Функция $X_{\omega}(\boldsymbol{r}, t)$ является периодической по t и может быть разложена в ряд Фурье:

$$X_{\omega}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} X_{\omega}^{(l)}(\boldsymbol{r}) e^{-ilpt} . \tag{25}$$

Введем линейные операторы $\hat{A}^{(l)}(\omega, \boldsymbol{r})$ согласно соотношениям

$$X_{\omega}^{(l)}(\boldsymbol{r}) = \hat{A}^{(i)}(\omega, \boldsymbol{r}) f_{\omega}(\boldsymbol{r}). \tag{26}$$

Результаты предыдущего пункта можно использовать, если свести рассматриваемую систему к дискретной путем разложения величин X, ξ, f в объеме V по некоторой полной ортонормированной системе функций $\varphi_k(\boldsymbol{r})$ $\left(\int_V \varphi_j(\boldsymbol{r}) \varphi_k^*(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \delta_{jk}\right)$*. Имеем:

$$\begin{gathered} X(t, \boldsymbol{r}) = \sum_j X_j(t) \varphi_j(\boldsymbol{r}); \quad \xi(t, \boldsymbol{r}) = \sum_j \xi_j(t) \varphi_j(\boldsymbol{r}) ; \\ f(t, \boldsymbol{r}) = \sum_j f_j(t) \varphi_j(\boldsymbol{r}). \end{gathered} \tag{27}$$

Величины $\xi_j(t)$, $X_j(t)$, $f_j(t)$ можно принять за дискретные переменные, фигурирующие в разделе 1. Действительно,

$$dE|_{t_0} = -\int_V X \delta f dV = -\sum_j X_j df_j. \tag{28}$$

Кроме того, как нетрудно убедиться, соотношения (22)—(24) принимают вид равенств (5) — (7), если матрицу $\alpha_{jk}(\omega, t)$ определить следующим образом:

$$\hat{A}(\omega, \boldsymbol{r}, t) \varphi_k(\boldsymbol{r}) = \sum_j \alpha_{jk}(\omega, t) \varphi_j(\boldsymbol{r}) \tag{29}$$

или

$$\hat{A}^{(l)}(\omega, \boldsymbol{r}) \varphi_k(\boldsymbol{r}) = \sum_j \alpha_{jk}^{(l)}(\omega) \varphi_j(\boldsymbol{r}). \tag{30}$$

* Этот прием был использован Рытовым [9] при обобщении на распределенные системы флюктуационно-диссипационной теоремы для равновесных стационарных систем

Используя теперь формулы (16) и (21) для спектральных амплитуд $\xi_{j\omega}$ и учитывая также (30), получаем:

$$\langle \xi_\omega(\boldsymbol{r})\,\xi_{\omega'}(\boldsymbol{r}')\rangle = \sum_{j,k} \langle \xi^*_{j\omega}\,\xi_{k\omega''}\rangle\,\varphi_j(\boldsymbol{r})\,\varphi_k(\boldsymbol{r}') = \sum_{l=-\infty}^{\infty} G^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\,\delta(\omega'-\omega-lp), \tag{31}$$

где

$$G^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega) = \frac{ikT}{2\pi}\left\{\left[\frac{\hat{A}^{(-l)}(\omega+lp,\boldsymbol{r})}{\omega+lp} - \frac{\hat{A}^{(l)}(\omega,\boldsymbol{r})'}{\omega}\right]\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right\}. \tag{32}$$

Приведем также обобщение на систему случайных функций $\xi^{(\alpha)}(t,\boldsymbol{r})$ ($\alpha=1,2,\ldots,m$). Вместо (26) имеем:

$$X^{(\alpha)(l)}_\omega(\boldsymbol{r}) = \sum_{\beta=1}^{m} \hat{A}^{(l)}_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{r})\,f^{(\beta)}_\omega(\boldsymbol{r}). \tag{33}$$

Вместо (31) и (32) получим:

$$\langle \xi^{(\alpha)*}_\omega(\boldsymbol{r})\,\xi^{(\beta)}_{\omega'}(\boldsymbol{r}')\rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} G^{(l)}_{\xi^{(\alpha)}\xi^{(\beta)}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\,\delta(\omega'-\omega-lp);$$

$$G^{(l)}_{\xi^{(\alpha)}\xi^{(\beta)}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega) = \frac{ikT}{2\pi}\left\{\left[\frac{\hat{A}^{(-l)}_{\alpha\beta}(\omega+lp,\boldsymbol{r})}{\omega+lp} - \frac{\hat{A}^{(l)}_{\beta\alpha}(\omega,\boldsymbol{r}')}{\omega}\right]\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right\}. \tag{34}$$

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФЛЮКТУАЦИИ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ СРЕДАХ

Применим теперь полученные выше результаты к электромагнитным флюктуациям в периодически нестационарных равновесных средах. Макроскопическими уравнениями являются уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\boldsymbol{P}_a}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\boldsymbol{M}_a}{\partial t}, \tag{35}$$

дополненные линейными материальными уравнениями (связывающими $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$). Величины $\boldsymbol{P}_a$ и $\boldsymbol{M}_a$ являются обобщенными внешними силами. Как обычно, приращение электромагнитной энергии, обусловленное действие этих сил, дается выражением (см., например, [8]):

$$dE|_{t_0} = -\int_V (\boldsymbol{E}\,\delta\boldsymbol{P}_a + \boldsymbol{H}\,\delta\boldsymbol{M}_a)\,dV, \tag{36}$$

т. е. результаты предыдущего пункта могут быть применены к флюктуациям полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Положим $\boldsymbol{P}_a=\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{r})\,e^{-i\omega t}$, $\boldsymbol{M}_a=\boldsymbol{M}_a(\boldsymbol{r})\,e^{-i\omega t}$. В силу уравнений Максвелла (35) и материальных уравнений имеем*:

$$E_\alpha(\boldsymbol{r},\omega,t)\,e^{i\omega t}=\sum_\beta\int_V d\boldsymbol{r}'\{Q_{E_\alpha E_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega,t)\,P_{a\beta}(\boldsymbol{r}')+$$
$$+Q_{E_\alpha H_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega,t)\,M_{a\beta}(\boldsymbol{r}')\};$$
$$H_\alpha(\boldsymbol{r},\omega,t)\,e^{i\omega t}=\sum_\beta\int_V d\boldsymbol{r}'\{Q_{H_\alpha E_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega,t)\,P_{a\beta}(\boldsymbol{r}')+ \tag{37}$$
$$+Q_{H_\alpha H_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega,t)\,M_{a\beta}(\boldsymbol{r}')\}.$$

Вследствие нестационарности среды входящие в эти выражения функции Грина Q, являются периодическими функциями t и могут быть разложены в ряд Фурье:

$$Q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega,t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}Q^{(l)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)\,e^{-ilpt}. \tag{38}$$

Равенства (37) с учетом (38) имеют вид (33). Используя (34), находим.

$$G^{(l)}_{E_\alpha E_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=\frac{ikT}{2\pi}\left\{\frac{Q^{(-l)}_{E_\alpha E_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega+lp)}{\omega+lp}-\frac{Q^{(l)}_{E_\beta E_\alpha}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\omega)}{\omega}\right\};$$
$$G^{(l)}_{E_\alpha H_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega)=\frac{ikT}{2\pi}\left\{\frac{Q^{(-l)*}_{E_\alpha H_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega+lp)}{\omega+lp}-\frac{Q^{(l)}_{H_\beta E_\alpha}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\omega)}{\omega}\right\}; \tag{39}$$
$$G^{(l)}_{H_\alpha H_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\,\omega)=\frac{ikT}{2\pi}\left\{\frac{Q^{(-l)}_{H_\alpha H_\beta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',\omega+lp)}{\omega+lp}-\frac{Q^{(l)}_{H_\beta H_\alpha}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r},\omega)}{\omega}\right\}.$$

Эти формулы и представляют искомые выражения. Мы видим, что спектральные характеристики флюктуаций G, как и в стационарном случае, определяются функциями Грина соответствующей динамической задачи**.

Уточним теперь пределы применимости выражений (39). В сущности, мы предполагали, что при наличии переменного сильного стороннего воздействия (приводящего к нестационарности) функция распределения ρ в установившемся режиме не отличается от функции распределения для равновесной системы без этого воздействия. Рассмотрим немагнитную среду в сильном переменном стороннем магнитном поле. Это магнитное поле индуцирует переменное электрическое поле, которое также является сторонним и вообще совершает работу над системой. Это приводит к изменению функции распределения ρ. Величина индуцируемого стороннего электрического поля зависит от условий опыта. При этом функция распределения ρ будет близка к равновесной, если электрическое поле не приводит к нелинейным эффектам в среде, т. е. для применимости выражений (39) стороннее электрическое поле должно быть слабым. Отметим, что при наличии сильного электрического поля в каждом отдельном случае необходим особый подход к задаче (см. [10]).

Рассмотрим в качестве примера электромагнитные флюктуации,

---

* Вообще говоря, рассматриваются и среды с пространственной дисперсией

** Как известно, электромагнитные флюктуации в равновесных стационарных средах могут быть описаны также в терминах флюктуационных сторонних моментов $\boldsymbol{P}_a$ и $\boldsymbol{M}_a$ (или в терминах флюктуационных сторонних токов) В рассматриваемом случае нестационарных сред этого сделать не удается

обусловленные электронной плазмой, находящейся в сильном стороннем периодическом магнитном поле и заключенной внутри объемного резонатора с идеально проводящими стенками*. При этом предположим, что концентрация плазмы достаточно мала, чтобы выполнялось условие

$$\{\mathrm{Sp}\,\hat{\sigma}\,\hat{\sigma}^{+}\}^{1/2}/\omega \ll 1. \tag{40}$$

Здесь $\hat{\sigma}=\hat{\sigma}(\boldsymbol{r}, \omega, t)$—тензор электропроводности среды, вычисленный ранее [12–14] (знак „+" означает эрмитовски сопряженную матрицу).

При условии (40) спектральная плотность флюктуаций имеет резкие максимумы в окрестностях собственных частот ω_s полого резонатора. Поэтому указанные окрестности представляют наибольший интерес. Будем считать, что частота ω близка к одной из собственных частот ω_s. Кроме того, будем сначала предполагать, что ни одна из комбинационных частот $\omega+np$ (с заметным коэффициентом Фурье $\hat{\sigma}^{(n)}(\omega, \boldsymbol{r})$ тензора электропроводности) не попадает в окрестность какой-либо другой собственной частоты $\omega_{s'}$. Формулы (44), определяющие для этого случая функции Грина (37), приведены в Дополнении. На основании (39) и (44) получаем выражение для спектральной интенсивности U_ω полной электромагнитной энергии в резонаторе (в окрестности частоты ω_s):

$$\begin{aligned} U_\omega &= \frac{1}{8\pi}\int\limits_V d\boldsymbol{r}\; 2\sum_\alpha \{G^{(0)}_{E_\alpha E_\alpha}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \omega)+G^{(0)}_{H_\alpha H_\alpha}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \omega)\} = \\ &= \frac{kT}{\pi}\,\frac{\mathrm{Re}\,K_{ss}}{(\omega-\omega_s-\mathrm{Im}\,K_{ss})^2+(\mathrm{Re}\,K_{ss})^2}. \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь $K_{ss}=K_{ss}(\omega)=2\pi\int\limits_V (\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}), \hat{\sigma}^{(0)}(\omega, \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}))\,d\boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r})$—соответствующий тип колебаний полого резонатора). В силу (40) плотность U_ω имеет пик при $\omega\simeq\omega_s$. Если $K_{ss}(\omega)$—достаточно плавная функция ω, то этот пик имеет лоренцовскую форму с шириной $\mathrm{Re}\,K_{ss}(\omega_s)$.

Пусть теперь частота $\omega+p$ также попадает в окрестность другой собственной частоты $\omega_{s'}$. Используя формулы (45) можно убедиться, что в этом случае величина U_ω в окрестности ω_s определяется выражением

$$U_\omega = \frac{ikT}{2\pi}\,[D^*(\omega)-D(\omega)], \tag{42}$$

где величина $D(\omega)$ определена в (45)**.

С помощью (39), а также формул, приведенных в Дополнении, легко определяется и ряд других спектральных характеристик флюктуаций. Для краткости мы не приводим соответствующих выражений.

В заключение выражаю благодарность Ф. В. Бункину за предложенную тему и полезные обсуждения.

---

* Некоторые другие вопросы электромагнитных флюктуаций в нестационарной плазме и на другой основе рассмотрены Бункиным [11].

** Вычисляя полное поглощение в резонаторе для поля, определяемого формулами (45), а также основываясь на доказанной в [12] положительности полного локального поглощения в рассматриваемой плазме, можно непосредственно убедиться в положительности выражения (42).

ДОПОЛНЕНИЕ

Согласно (37), необходимо определить поле внутри резонатора с плазмой при заданных внешних силах $\boldsymbol{P}_a=\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{r})\,e^{-i\omega t}$, $\boldsymbol{M}_a=\boldsymbol{M}_a(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$. Будем исходить из теории возбуждения объемных резонаторов, приведенной в [15, 16]. Пусть ω_s, $\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r})$ — собственные частоты и типы колебаний соответствующего полого резонатора, причем $\int\limits_V \boldsymbol{E}_s^2(\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{r}=1$ ($\boldsymbol{E}_s$ — вещественная величина, $\boldsymbol{H}_s$ — мнимая величина). Согласно [15], имеем

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega,t)\,e^{i\omega t}\simeq\sum_s A_s\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r});\quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega,t)\,e^{i\omega t}\simeq\sum_s A_s\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r});$$
$$A_s=-\frac{2\pi\omega}{\omega-\omega_s}\int\limits_V[\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')-\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')]\,d\boldsymbol{r}'. \tag{43}$$

Чтобы учесть наличие плазмы в резонаторе, надо считать $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_a+\boldsymbol{P}_l$, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_a$, где $\boldsymbol{P}_l$ — поляризация плазмы под действием электрического поля $\boldsymbol{E}$ в резонаторе.

Если $\omega\simeq\omega_s$ и ни одна из комбинационных частот $\omega+np$ (с заметным тензором $\hat{\sigma}^{(n)}(\omega,\boldsymbol{r})$) не попадает в окрестность какой-либо другой собственной частоты $\omega_{s'}$, то при условии (40) получаем:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega,t)\,e^{i\omega t}\simeq A_s\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r});\quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega,t)\,e^{i\omega t}\simeq A_s\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r});$$
$$A_s=-\frac{2\pi\omega}{\omega-\omega_s+iK_{ss}}\int\limits_V[\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{r}')-\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{M}_a(\boldsymbol{r}')]\,d\boldsymbol{r}'. \tag{44}$$

Если же частота $\omega+p$ также лежит в окрестности другой собственной частоты $\omega_{s'}$, то

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega,t)\,e^{i\omega t}\simeq A_s\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r})+A_{s'}\,e^{-ipt}\boldsymbol{E}_{s'}(\boldsymbol{r});$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega,t)\,e^{i\omega t}\simeq A_s\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r})+A_{s'}\,e^{-ipt}\boldsymbol{H}_{s'}(\boldsymbol{r});$$
$$\left.\begin{matrix}A_s\\A_{s'}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}D(\omega)\\F(\omega)\end{matrix}\right\}2\pi\omega\int\limits_V[\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{P}_a(\boldsymbol{r}')-\boldsymbol{H}_s(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{M}_a(\boldsymbol{r}')]\,d\boldsymbol{r}';$$
$$D(\omega)=-\frac{\omega+p-\omega_{s'}+iK_{s's'}}{(\omega-\omega_s+iK_{ss})(\omega+p-\omega_{s'}+iK_{s's'})+K_{ss'}K_{s's}}; \tag{45}$$
$$F(\omega)=\frac{iK_{s's}}{(\omega-\omega_s+iK_{ss})(\omega+p-\omega_{s'}+iK_{s's'})+K_{ss'}K_{s's}};$$
$$K_{ss}=2\pi\int\limits_V(\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}),\hat{\sigma}^{(0)}(\omega,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}))\,d\boldsymbol{r},$$
$$K_{ss'}=2\pi\int\limits_V(\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}),\hat{\sigma}^{(-1)}(\omega+p,\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_{s'}(\boldsymbol{r}))\,d\boldsymbol{r};$$
$$K_{s's}=2\pi\int\limits_V(\boldsymbol{E}_{s'}(\boldsymbol{r}),\hat{\sigma}^{(1)}(\omega,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_s(\boldsymbol{r}))\,d\boldsymbol{r},$$
$$K_{s's'}=2\pi\int\limits_V(\boldsymbol{E}_{s'}(\boldsymbol{r}),\hat{\sigma}^{(0)}(\omega+p,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_{s'}(\boldsymbol{r}))\,d\boldsymbol{r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Л. Д Ландау и Е М Лифшиц, Статистическая физика, Гостехиздат, М, 1951.
2. R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan, **12**, 570 (1957).
3. W. Bernard, H. B. Callen, Rev. Mod. Phys, **31**, 1017 (1959).
4. H. B. Callen, R. F. Greene, Phys. Rev., **86**, 702 (1952).
5. R. F. Greene, H. B. Callen, Phys. Rev., **88**, 1387 (1952).
6 Ф В. Бункин, ЖЭТФ, **44**, 1567 (1963).
7 В. Н Луговой, Радиотехника и электроника, **8**, 1849 (1963).
8. Л Д. Ландау и Е М Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИФМЛ, М., 1959
9. С. М. Рытов, ДАН СССР, **110**, 371 (1956)
10 В Л Гуревич, ЖЭТФ, **43**, 1771 (1962).
11. В Ф. Бункин, Докторская диссертация, ФИАН, 1963.
12 В Н. Луговой, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, **6**, 695 (1963).
13. В. Н. Луговой, ЖЭТФ, **41**, 1562 (1961).
14. Ф В Бункин, ЖЭТФ, **41**, 1859 (1961)
15 Л. А Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов радио, М., 1957
16 Дж Слэтер, Электроника сверхвысоких частот, изд. Сов радио, М., 1948.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
30 марта 1963 г.

ON THE FLUCTUATIONS IN PERIODICALLY NON-STATIONARY SYSTEMS

V. N. Lugovoy

Generalization is given of fluctuation-dissipation theorem for the classical periodically non-stationary „equilibrium" systems. The relashionship is found between the spectral characteristics of discrete fluctuating parameters and the impedance matrix of the systes. The results were generalized for continuous systems and were applied to the electromagnetic fluctuations in periodically non-stationary equilibrium media. As an example electromagnetic fluctuations has been considered in an lossless resonator filled with a rarefied strongly magnetized electron plasma, external magnetic field varying periodically.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

ДВУХМЕРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ ПЛАЗМЕННЫМИ СЛОЯМИ. I

И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер

Рассматриваются двухмерные электромагнитные волны, направляемые кусочно-однородными изотропными плазменными слоями В трех случаях коэффициент отражения электромагнитной волны от одиночного плазменного слоя близок к единице: а) при достаточно большой электронной концентрации внутри слоя, б) для скользящих лучей при любой концентрации, в) для волн типа ТМ, падающих на так называемый нулевой слой $\varepsilon = 0$. К ним примыкает также случай комплексных углов падения, соответствующий поверхностным волнам Все эти возможности могут быть использованы для построения волноводных систем с плазменными стенками Обсуждаются характеристики таких систем· потери на излучение, роль соударений и пространственной дисперсии, оценка влияния фокусирующих магнитных полей

Цель настоящей статьи состоит в изучении электромагнитных волн, направляемых неоднородными плазменными слоями. Нельзя сказать, чтобы этот круг вопросов был нов. Существует целый ряд работ, в которых изучаются свойства электромагнитных волн, направляемых однородными, в том числе и гиротропными, кусочно-однородными и кусочно неоднородными плазменными слоями [1–9], и все же некоторые стороны задачи, связанные с возможностью формирования и улучшением характеристик плазменных волноводов с неоднородным заполнением, остаются невыясненными вплоть до настоящего времени. Как обычно, почти все принципиальные особенности могут быть разобраны на простейшем примере плоскопараллельных слоев.

Работа состоит из нескольких частей. В настоящей, первой, части рассмотрены плазменные волноводы, образованные кусочно-однородными изотропными слоями; последующие разделы будут посвящены изучению волн, направляемых неоднородными и анизотропными слоями, а также обобщению соответствующих результатов на слои более сложной конфигурации, например, с конечным радиусом кривизны.

1. ОТРАЖАТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ПЛАСТИНКИ

При изучении возможностей построения многослойного плазменного волновода проще всего опираться на отражательные характеристики однородного плазменного слоя. С этой целью приведем здесь выражения для коэффициента отражения (Г) и входного импеданса ($Z_{вх}$), относящиеся к слою — $x_0 < x < x_0$ с относительной диэлектрической проницаемостью ε, меньшей единицы*. По поляризационным характеристикам следует различать поля поперечно-магнитного (ТМ) и поперечно-электрического (ТЕ) типов**; всюду далее индекс 1 будет относиться к ТМ-волнам; индекс 2 — к ТЕ-волнам:

* Мы пользуемся практической рационализированной системой единиц и обозначаем через ε_0 и μ_0 проницаемости вакуума.

** В двухмерном случае термин «поперечная» относится одновременно и к направлению распространения волны и к направлению локализации поля, но при образовании трехмерных волн, как отмечалось еще в [10], самостоятельно существуют лишь поля типа ТМ и ТЕ по отношению к направлению локализации

$$\Gamma^{\binom{1}{2}} = e^{i\alpha_0 2k_0 x_0} \eta^{\binom{1}{2}} \frac{1 - e^{-4\alpha k_0 x_0}}{1 - \left(\eta^{\binom{1}{2}}\right)^2 e^{-4\sigma k_0 x_0}}; \tag{1}$$

$$Z_{\text{вх}}^{\binom{1}{2}} = \mp i Z_0 q^{\binom{1}{2}} \frac{1 \pm \eta^{\binom{1}{2}} e^{-4\sigma k_0 x_0}}{1 \mp \eta^{\binom{1}{2}} e^{-4\sigma k_0 x_0}}. \tag{2}$$

Здесь обозначено

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}; \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0};$$

$$q^{(1)} = \frac{\alpha}{\varepsilon}; \quad q^{(2)} = \frac{1}{\alpha}; \quad \eta^{(1)} = \frac{\varepsilon\sigma_0 + i\alpha}{\varepsilon\sigma_0 - i\alpha}; \quad \eta^{(2)} = \frac{\sigma_0 + i\alpha}{\sigma_0 - i\alpha},$$

причем $\sigma_0 = \sqrt{1 - \gamma^2}$, $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon}$, $\gamma = h/k_0$, h — постоянная распространения волны вдоль слоя.

На рис. 1, 2 приведены графики зависимости модуля коэффициента отражения, модуля и фазы входного импеданса ($Z_{\text{вх}} = |Z_{\text{вх}}| e^{i\varphi}$), норми-

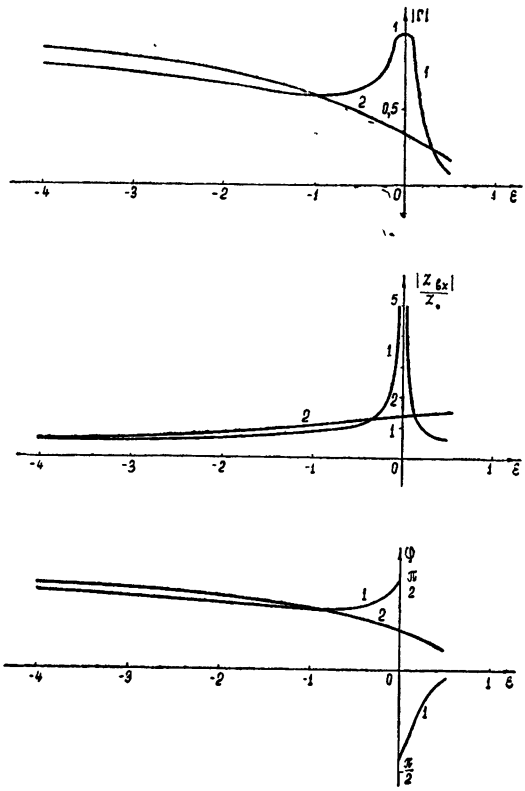


Рис. 1.

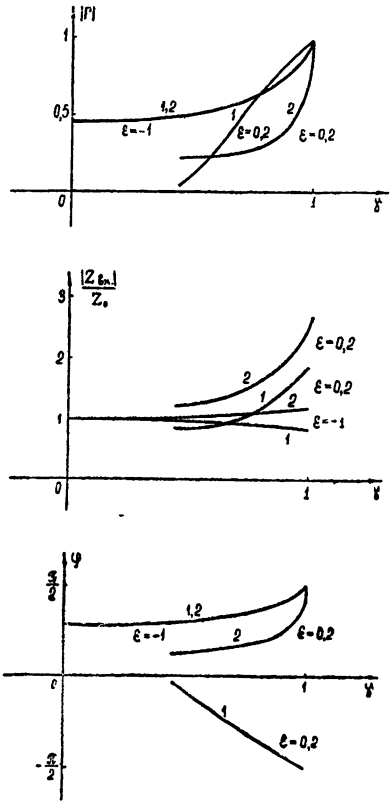


Рис. 2.

рованного на импеданс свободного пространства (Z_0) от ε при фиксированном значении $\gamma(\gamma^2=0{,}5)$ и от γ при фиксированных значениях ε ($\varepsilon=0{,}2$; -1). Во всех случаях толщина слоя, измеренная в длинах волн падающего излучения, оставалась неизменной ($2k_0x_0=0{,}5$). В трех случаях коэффициент Γ приближается по модулю к 1 (полное отражение): а) при $h\approx k_0$— скользящее падение (с последующим переходом в область комплексных углов падения); б) при $|\varepsilon|\gg 1$ (поле внутри слоя спадает столь быстро, что практически не успевает достигнуть выходной грани) и, наконец, в) при $\varepsilon\to 0$ для волн типа ТМ, когда имеет место своеобразное резонансное отражение (такие слои мы будем в дальнейшем называть нулевыми).

В принципе все эти возможности обеспечения высоких значений Γ могут быть использованы для построения систем с квазилокализованными электромагнитными полями. Речь идет о так называемых утекающих или волноводных волнах, фазовые скорости которых превышают скорость света в окружающей среде. Разумеется, наряду с ними имеется еще целый класс систем с поверхностными полями, в которых осуществляется точная локализация поля за счет экспоненциального убывания амплитуд при удалении от слоя.

2. СЛУЧАЙ СКОЛЬЗЯЩЕГО ПАДЕНИЯ

Будем рассматривать электромагнитные волны ($e^{i\omega t-ihz}$), направляемые слоем с диэлектрической проницаемостью, зависящей от одной декартовой координаты x; при этом без ограничения общности можно иметь дело только с двухмерными волнами $\left(\frac{\partial}{\partial y}=0\right)$, так как любая трехмерная волна представляется их суперпозицией. В качестве первого примера такой системы возьмем трехслойный плазменный волновод:

$$\varepsilon=1 \qquad (-l<x<l);$$

$$\varepsilon=\varepsilon \qquad (-l-2x_0<x<-l; \qquad l<x<l+2x_0);$$

$$\varepsilon=1 \qquad (x<-l-2x_0; \qquad x>l+2x_0).$$

Внутреннюю область $(-l<x<+l)$ мы считали для простоты не заполненной плазмой ($\varepsilon=1$).

Обсудим кратко особенности каждого из перечисленных в первом разделе случаев экранирования. Как видно из (1), (2), при близких к скользящему углах падения волны $\left(\gamma\sim 1,\ \alpha_0=\sqrt{1-\gamma^2}\ll 1,\ \alpha\simeq\sqrt{1-\varepsilon}\right)$ на слой не слишком малой толщины ($2k_0x_0$) с не слишком большим значением $|\varepsilon|$ коэффициент отражения и входной импеданс могут быть записаны в виде

$$\Gamma^{\binom{1}{2}} = e^{i\alpha_0 2k_0 x_0}\left\{-1 + \alpha_0 i \frac{2}{\alpha}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ 1\end{pmatrix}\operatorname{cth}(\alpha 2k_0 x_0)\right\}, \tag{3}$$

$$Z_{\text{вх}}^{\binom{1}{2}} = \mp iZ_0 q^{\binom{1}{2}}\left\{\begin{matrix}\operatorname{th}(\alpha 2k_0 x_0)\\ \operatorname{cth}(\alpha 2k_0 x_0)\end{matrix} + \alpha_0 \frac{i}{\alpha}\begin{pmatrix}\varepsilon \operatorname{ch}^{-2}(\alpha 2k_0 x_0)\\ -\operatorname{sh}^{-2}(\alpha 2k_0 x_0)\end{pmatrix}\right\}. \tag{4}$$

Ясно, что такая граница может быть использована в качестве хорошо отражающей стенки волновода, причем при любой конечной толщине плазменного слоя поверхностный импеданс комплексный даже для плазмы без потерь — за счет ухода энергии в поле излучения.

Другая особенность импеданса (4) заключается в его зависимости от структуры поля (угла падения волны или γ, поляризационного различия TE, TM), т. е. согласно терминологии, принятой в работе [11], всегда имеет место пространственная дисперсия поверхностного импеданса. Зависимость от угла падения скрадывается, строго говоря, только при $h = k_0$ ($\gamma = 1$), но тогда уже трудно применять обычные френелевские формулы для отражающих объектов конечной протяженности.

Это обстоятельство является важным и для углов падения, близких к скользящему, так как для удовлетворения граничным условиям на обеих стенках волновода $x = \pm l$ необходимо, чтобы поперечные размеры были порядка $l \sim 1/\alpha_0 k_0$. Поскольку по смыслу любой линии передачи ее длина превышает поперечные размеры, должно выполняться неравенство: $L \gg 1/\alpha_0 k_0$.

Используя формулы (4), легко получить характеристические уравнения для соответствующих волноводных волн. Очевидно, что «скользящие» волны, к которым и относятся формулы (3), (4), являются не единственными распространяющимися волнами в плазменном волноводе широкого сечения ($l \sim 1/\alpha_0 k_0 \gg \lambda$). Однако степень локализации последующих мод постепенно уменьшается с увеличением угла падения*.

3. ЭКРАНИРОВАНИЕ СЛОЕМ СИЛЬНО КОНЦЕНТРИРОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

При очень больших отрицательных ε (и не слишком малых $k_0 x_0$) поверхностные импедансы (2) приближенно представляются в виде

$$Z_{\text{вх}}^{\binom{1}{2}} = Z_0\left\{i\frac{1}{\sqrt{-\varepsilon}}\frac{1}{\operatorname{th}(\sqrt{-\varepsilon}\,2k_0 x_0)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{-\varepsilon}\begin{pmatrix}\alpha_0^{-1}\\ \alpha_0\end{pmatrix}\frac{1}{\operatorname{sh}^2(\sqrt{-\varepsilon}\,2k_0 x_0)}\right\}. \tag{5}$$

Ниже приведены выражения для коэффициентов затухания (h_M) соответствующих мод в трехслойном волноводе:

$$h_M^{\binom{1}{2}} = \frac{\operatorname{Re} Z_{\text{вх}}^{\binom{1}{2}}}{Z_0}\begin{pmatrix}(\gamma_0^{(1)})^{-1}\\ \gamma_0^{(2)}\,[\alpha_0^{(2)}]^2\end{pmatrix}\frac{1}{l},$$

где величины $\gamma_0^{(1)}$, $\gamma_0^{(2)}$, (а следовательно, и $\alpha_0^{(1)}$, $\alpha_0^{(2)}$) отвечают решению задачи для случая бесконечной диэлектрической проницаемости ($\varepsilon = -\infty$).

* Эта задача примыкает к известным оптическим задачам формирования параксиального пучка с помощью слабо неоднородного распределения показателя преломления в поперечном сечении.

Поскольку в данном случае импедансы обладают лишь слабой пространственной дисперсией (т. е. слабой зависимостью от структуры определяемого ими поля), то, очевидно, формулы (5) могут быть применены для описания свойств волновода с плазменными стенками любой формы*.

4. ЭКРАНИРОВАНИЕ НУЛЕВЫМ СЛОЕМ

По мере увеличения толщины скин-слоя описанный выше эффект экранировки, вообще говоря, ослабляется до тех пор, пока не становится заметным влияние другого фактора — резонансного запирания слоя. Последнее имеет место только для волн типа ТМ и отсутствует для ТЕ-волн. Интересно проследить за структурой поля ТМ-типа внутри нулевого слоя; при точном равенстве $\varepsilon=0$ (допустимом только в случае отсутствия потерь) распределение векторов поля вдоль слоя имеет вид**:

$$H_y = 0;$$

$$E_z = -E_0 2\sigma_0 e^{i\alpha_0 k_0 x_0} \frac{e^{-\gamma k_0 x} - e^{-2\gamma k_0 x_0} e^{\gamma k_0 x}}{e^{\gamma k_0 x_0} - e^{-3\gamma k_0 x_0}}; \tag{6}$$

$$E_x = E_0 i 2\sigma_0 e^{i\alpha_0 k_0 x_0} \frac{e^{-\gamma k_0 x} + e^{-2\gamma k_0 x_0} e^{\gamma k_0 x}}{e^{\gamma k_0 x_0} - e^{-3\gamma k_0 x_0}},$$

где E_0 — амплитуда падающего поля.

Отсюда видно, что тангенциальные составляющие поля на удаленной границе слоя ($x = \pm (l + 2x_0)$) всегда обращаются в нуль; а поверхностный (входной) импеданс передней грани (см. также (2)) равен бесконечности***. Этот эффект не зависит от толщины и формы слоя (однако, лишь в тех пределах, в которых с помощью ТМ-поля можно удовлетворить краевым условиям), и поэтому нулевые слои (плоские, цилиндрические, сферические) могут быть использованы для обеспечения частотной и поляризационной фильтрации поля. В частности, если толщину нулевого слоя устремить к нулю, эффект экранировки, как следует из (6), не исчезает, а граничное условие $H_\tau = 0$, $E_\tau \neq 0$ может быть интерпретировано как условие на идеальной магнитной стенке, по которой протекает поверхностный магнитный ток с плотностью $i^m = E_0 2\alpha_0$, что эквивалентно отличной от нуля циркуляции $\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l}$ по соответствующему контуру, охватывающему нулевой слой. Таким образом, E_τ- ком-

---

* В ряде случаев для создания таких сильно концентрированных плазменных отражателей, естественно, необходимо применять локализующее плазму магнитное поле; в практически важном случае небольшого фокусирующего магнитного поля ($\omega_H \ll \omega$) соответствующие поправки малы и потому с достаточной степенью точности можно применять формулы (5)

** Легко усмотреть, что электрическое поле, определяемое формулами (6), удовлетворяет уравнению div $\boldsymbol{E} = 0$, тогда как для безмагнитного поля в однородной нулевой среде должно соблюдаться менее жесткое ограничение $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ (φ—произвольная скалярная функция). Условие div $\boldsymbol{E} = 0$, однако, восстанавливается при введении любого конечного однородного затухания в среду

*** Эти результаты в принятой идеализации имеют место для всех углов падения, кроме нормального При нормальном падении (случай ТЕМ-волны) коэффициент отражения определяется выражением

$$\Gamma = e^{i2k_0 x_0} \frac{-k_0 x_0}{k_0 x_0 - i}.$$

Интересно отметить, что эта формула может быть получена из общей формулы (1) только при определенном порядке предельного перехода сначала нужно устремить к нулю γ, а затем ε.

понента электрического поля внутри слоя при стремлении толщины слоя к нулю растет пропорционально $1/x_0$, как это непосредственно и видно из формул (6) для поля внутри слоя.

Очевидно, что очень тонкие нулевые слои обладают большой частотной избирательностью. В этом легко убедиться, построив график зависимости $|T|$ ω при двух различных значениях толщины слоя — кривая I на рис. 3 отвечает значению толщины слоя, при которой $\omega_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,x_0=0{,}25$ (ω_0 — плазменная частота), а кривая II — $\omega_0\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,x_0=0{,}1$; в обоих случаях γ^2 выбиралось равным 0,5.

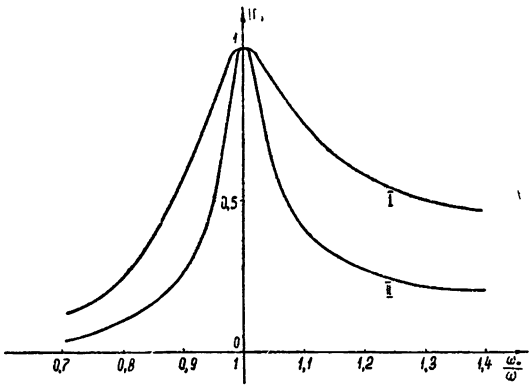


Рис. 3.

Естественно, что учет поглощения внутри слоя и пространственной дисперсии приводит к ослаблению экранирующего действия, точно так же как для металлических экранов при учете конечной (в том числе и аномальной) проводимости.

Так, если считать что $\varepsilon = -i\varepsilon_м$, где $\varepsilon_м$ — достаточно малая положительная величина, то для коэффициента прохождения будем иметь

$$T^{(c)} = e^{i\alpha_0 2k_0 x_0}\,\varepsilon_м \frac{2\alpha_0}{\varepsilon_м\alpha_0+\alpha}\,\frac{(1-\eta^{(1)})\,e^{-2\alpha k_0 x_0}}{1-(\eta^{(1)})^2 e^{-4\alpha k_0 x_0}}.$$

Учет же пространственной дисперсии в квазигидродинамическом приближении [12] при условии зеркального отражения частиц на границах нулевого слоя* ($v_n=0$, v_n — нормальная к границе составляющая скорости) приводит к следующему выражению для T:

$$T^{(пр.\,л)} = e^{i\alpha_0 2k_0 x_0}\beta_T^2\,\frac{2\alpha_0\gamma}{\zeta^-}\,\frac{1-(\zeta^+/\zeta^-)\,e^{-4\gamma k_0 x_0}}{1-(\zeta^+/\zeta^-)^2 e^{-4\gamma k_0 x_0}},$$

где

$$\zeta^{\pm} = \beta_T^2\alpha_0\gamma e^{-2\gamma k_0 x_0} \pm i\,\{[1/2\,(1+\beta_T^2)-\beta_T^2\gamma^2]\,e^{-2\gamma k_0 x_0} +$$
$$+(1-\beta_T^2)\,\gamma k_0 x_0\,\mathrm{sh}^{-1}(2\gamma k_0 x_0)\};\quad \beta_T^2 = \chi T_0/mc^2$$

(χ — постоянная Больцмана, T_0 — температура плазмы, m — масса электрона, c — скорость света).

В частном случае достаточно малых значений $\varepsilon_м$ и β_T^2 ($\varepsilon_м$, $\beta_T^2 \ll \gamma 2k_0x_0$) и не слишком большой толщины слоя ($\gamma 2k_0x_0 \ll 1$) отношение модулей $T^{(c)}$ и $T^{(пр.\,л)}$ представляется в виде:

$$\frac{|T^{(пр.\,л)}|}{|T^{(c)}|} = \frac{\beta_T^2}{\varepsilon_м}\,2\gamma^2.$$

* При учете пространственной дисперсии (так же, как при наличии постоянного фокусирующего магнитного поля, см. далее) нулевым слоем по-прежнему называется слой, для которого $\omega=\omega_0$

Опираясь на приведенные выше результаты, нетрудно подсчитать основные характеристики волноводной линии с «нулевыми» стенками. Так, например, при достаточно малом ε (без учета соударений и пространственной дисперсии) для коэффициента затухания волны будем иметь

$$h_{\text{м}} = \varepsilon^2 \frac{\varepsilon_0 \sigma_0 \, | E_z (x = l) |^2}{\mu_0 \gamma \alpha^2 \operatorname{sh}^2 (\alpha 2 k_0 x_0) \int\limits_{-l}^{l} | H_y |^2 \, dx} .$$

Пользуясь далее методом возмущений, в первом приближении получим

$$h_{\text{м}} = \varepsilon^2 \frac{\sigma_0^3}{l \gamma \alpha^2 \operatorname{sh}^2 (\alpha 2 k_0 x_0)} ,$$

причем входящие в это выражение величины k_0 и γ (а, следовательно, α_0 и α) относятся к волноводу с идеально «нулевыми» стенками. Таким образом, коэффициент затухания возрастает с изменением частоты (вблизи ω_0) пропорционально квадрату ε.

Очевидно, что интерес к количественным оценкам может заметно повыситься только после установления простых способов реализации экранирующих резонансных слоев. В этой связи целесообразно оценить возможности применения для локализации плазмы магнитного поля. В данном случае, в отличие от сильно концентрированного плазменного слоя, наличие магнитного поля может существенно изменить ситуацию. В качестве иллюстрации приведем результаты, относящиеся к случаю, когда фокусирующее магнитное поле направлено вдоль оси z. При наличии $\boldsymbol{H}^{(0)}$, параллельного оси z, поля ТМ и ТЕ типов внутри слоя не существуют независимо, так что падающая ТМ-волна частично трансформируется в ТЕ-волну и наоборот. В интересующем нас случае падения ТМ-волны на нулевой слой полный коэффициент прохождения определяется коэффициентами прохождения непосредственно ТМ-волны (T_{11}) и возникающей ТЕ-волны (T_{12})*, для которых будем иметь:

$$T_{11} = u \alpha_0^4 e^{i \alpha_0 2 k_0 x_0} \{ [u \alpha_0^4 + \gamma^2 \sin^2 (\alpha_0 k_0 x_0)] - i \, [\alpha_0 k_0 x_0 (\gamma^4 - u \sigma_0^4) - \gamma^2 (1/2) \sin (\alpha_0 2 k_0 x_0)] \}^{-1} ;$$

$$T_{12} = - \sqrt{u} \sin (\alpha_0 k_0 x_0) \, \gamma \sigma_0^2 e^{i \alpha_0 k_0 x_0} \{ [u \alpha_0^4 + \gamma^2 \sin^2 (\alpha_0 k_0 x_0)] - i \, [\sigma_0 k_0 x_0 (\gamma^4 - u \alpha_0^4) - \gamma^2 (1/2) \sin (\alpha_0 2 k_0 x_0)] \}^{-1} ,$$

где $u = \omega_H^2 / \omega^2$, ω_H — гирочастота.

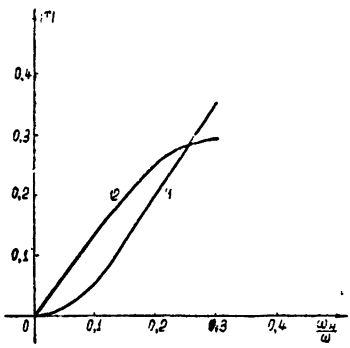


Рис. 4.

Графики зависимости модулей коэффициентов прохождения от отношения ω_H / ω приведены на рис. 4, где попрежнему $2 k_0 x_0 = 0{,}5$; $\gamma^2 = 0{,}5$.

Таким образом, при наличии фокусирующего магнитного поля, параллельного оси z, экранирующие свойства нулевого слоя ухудшаются. Это связано, во-первых, с появлением y-составляющей высокочастотного магнитного поля внутри слоя (причем для $\omega_H \ll \omega$ H_y пропорционально квадрату этого отношения,

* Коэффициент прохождения возникающей ТЕ-волны (T_{12}) есть отношение амплитуды ТЕ-волны за слоем к амплитуде падающей волны.

т. е. u), во-вторых, с трансформацией в ТЕ-волну (при $\omega_H \ll \omega$ коэффициент трансформации пропорционален $\sqrt{u}$), для которой резонансное отражение не имеет места (см. рис. 1)*.

5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ОДНОРОДНОГО ПЛАЗМЕННОГО СЛОЯ

Перейдем теперь к поверхностным волнам, направляемым одиночным однородным плазменным слоем. Как нетрудно убедиться, к ним могут быть отнесены из числа двухмерных только волны типа ТМ. Соответствующие составляющие поля в различных областях запишутся в виде:

область 1 $(x > x_0)$

$$H_y = b_0 e^{-px}, \quad E_z = -\frac{p}{i\omega\varepsilon_0} b_0 e^{-px}, \quad E_x = \frac{h}{\omega\varepsilon_0} b_0 e^{-px};$$

область 2 $(x_0 > x > -x_0)$

$$H_y = a_0 \begin{matrix} \operatorname{sh} \varkappa x \\ \operatorname{ch} \varkappa x \end{matrix}, \quad E_z = \frac{\varkappa}{i\omega\varepsilon\varepsilon_0} a_0 \begin{matrix} \operatorname{ch} \varkappa x \\ \operatorname{sh} \varkappa x \end{matrix}, \quad E_x = \frac{h}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} a_0 \begin{matrix} \operatorname{sh} \varkappa x \\ \operatorname{ch} \varkappa x \end{matrix}; \tag{7}$$

область 3 $(x < -x_0)$

$$H_y = \mp b_0 e^{px}, \quad E_z = \frac{\mp p}{i\omega\varepsilon_0} b_0 e^{px}, \quad E_x = \frac{\mp h}{\omega\varepsilon_0} b_0 e^{px}.$$

Здесь величины p и $\varkappa$ связаны с h соотношениями $p^2 = h^2 - k_0^2$, $\varkappa^2 = h^2 - k_0^2\varepsilon$; зависимость от z всюду определяется множителем e^{-ihz}. Для обеспечения локализации поля достаточно потребовать выполнения условия $\operatorname{Re} p > 0$.

В зависимости от выбора вида функций в среде II могут быть получены два набора волн — четные или симметричные волны, для которых $E_z(x) = E_z(-x)$, и нечетные или несимметричные волны $(E_z(x) = -E_z(-x))$. В случае плазменной пластинки в свободном пространстве реализуются оба набора волн; для пластинки, расположенной над нулевым слоем, допустимым оказывается только набор четных волн и, наконец, для плазменной пластинки над идеально проводящей металлической плоскостью — только набор нечетных волн.

Соответствующие характеристические уравнения для волновых чисел имеют вид**:

$$px_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \varkappa x_0 \begin{cases} \operatorname{cth} \varkappa x_0 & \text{для четных волн} \\ \operatorname{th} \varkappa x_0 & \text{для нечетных волн} \end{cases}$$

причем

$$(\varkappa x_0)^2 - (px_0)^2 = (k_0 x_0)^2 (1 - \varepsilon).$$

---

* При переходе от анизотропного слоя к нулевому изотропному имеет место та же ситуация, что и при уменьшении угла падения волны для нулевого слоя (см. сноску на стр. 128), а именно, правильные выражения для полей получаются только при определенном порядке предельного перехода—сначала $u \to 0$, а потом $\varepsilon \to 0$. Заметим, что учет диссипации энергии в слое автоматически устраняет все неоднозначности, возникающие при предельных переходах

** Анализу решений этих уравнений посвящены работы [1,2]; некоторые обобщения на системы с продольным и поперечным (по отношению к направлению распространения) фокусирующим магнитным полем приведены в [7–9]. Во время написания этой статьи нам стала известна весьма содержательная заметка Олинера и Тамира [2], в значительной степени перекрывающая наши результаты в части нечетных поверхностных волн. Поэтому мы существенно сократили этот раздел, сохранив лишь несколько общих замечаний.

В случае неограниченной толщины слоя в системе могут существовать две независимых поверхностных волны с полями, локализованными около каждой из границ раздела; это так называемые истинные поверхностные волны [13]. При сближении поверхностей, т. е. при уменьшении толщины слоя, из этих волн могут быть скомбинированы два независимых решения, отвечающих в соответствии с использованной выше терминологией четной и нечетной волнам. При условии слабой связи ($k_0x_0 \gg 1$) между двумя соответствующими «линиями передачи» (вырождение снимается) поправки к постоянным распространения могут быть получены с помощью метода возмущений. В результате будем иметь

$$h^2 = k_0^2\left\{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \mp \frac{1}{1+\varepsilon}\,\frac{4\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}\exp\left(\frac{2\varepsilon}{\sqrt{-1-\varepsilon}}\,k_0x_0\right)\right\}.$$

Другой предельный случай достаточно тонкого слоя также может быть рассчитан аналитически; пренебрегая членами высшего порядка в разложении гиперболического котангенса и тангенса по степеням аргумента $\varkappa x_0$, для четной и нечетной волн соответственно получим

$$px_0 = -\frac{1}{\varepsilon}\,; \tag{8}$$

$$(px_0)_{1,2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - (k_0x_0)^2(1-\varepsilon)}\,. \tag{9}$$

(Очевидно, что первое из написанных соотношений справедливо при достаточно больших значениях диэлектрической проницаемости слоя, а второе, напротив, при достаточно малых значениях проницаемости и параметра k_0x_0, достаточных для выполнения условия $\varkappa x_0 \ll 1$.)*

Если $\varepsilon^2/4 > (k_0x_0)^2(1-\varepsilon)$, то оба значения ($(px_0)_1$, $(px_0)_2$) в (9) действительны, так что допустимо одновременное существование двух нечетных поверхностных волн; при этом волна, отвечающая первому корню ($(px_0)_1$), является обратной, т. е. ее групповая скорость противоположна фазовой.

Если $\varepsilon^2/4 < (k_0x_0)^2(1-\varepsilon)$, то уравнение (9) не имеет действительных корней, а имеет два комплексных корня с положительными реальными частями при $\varepsilon < 0$ и отрицательными при $\varepsilon > 0$ [14]. Наличие комплексных корней характеристического уравнения является типичным для

---

* Для поверхностных волн, направляемых слоем с $|\varepsilon| \ll 1$, может оказаться весьма существенным учет пространственной дисперсии. При условии зеркального отражения частиц на границах и достаточно малых значениях температуры $\left(\sqrt{-\varepsilon}\,/\,\beta_T \gg \gamma\right)$ в квазигидродинамическом приближении вместо (9) будем иметь

$$(px_0)_{1,2} = \left\{-\varepsilon \pm \left\langle \varepsilon^2 - 4\left[k_0x_0 - \frac{\beta_T}{\sqrt{-\varepsilon}}\,\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon}}{\beta_T}\,k_0x_0\right)\right]\left[k_0x_0 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{\beta_T}{\sqrt{-\varepsilon}}\,\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon}}{\beta_T}\,k_0x_0\right)\right]\right\rangle^{1/2}\right\}\left[2 - \frac{\beta_T}{\sqrt{-\varepsilon}}\,\frac{2}{k_0x_0}\,\mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{-\varepsilon}}{\beta_T}\,k_0x_0\right)\right]^{-1}.$$

Отсюда в частном случае $\left(\sqrt{-\varepsilon}\,/\,\beta_T\right)k_0x_0 \ll 1$ формально получим

$$(px_0)_1 = -\left[1 - (k_0x_0)^2/3\beta_T^2\right]^{-1}, \quad (px_0)_2 = (k_0x_0)^4/3\beta_T^2,$$

т. е. учет пространственной дисперсии действительно приводит к резкому изменению характера поля, вплоть до исчезновения некоторых типов волн.

линий передачи, допускающих существование прямых и обратных волн [11].

Обратим внимание еще на одну особенность, свойственную плазменному слою ($\varepsilon < 1$) и не имеющую места для обычного диэлектрика. С уменьшением толщины слоя (вплоть до нулевого значения) степень локализации поля в четной волне и обратной нечетной волне, согласно (8), (9), бесконечно возрастает; одновременно возрастает и величина поля (см. формулы (7)), так что поток, переносимый волной, остается конечным.

Промежуточная область значений параметров слоя анализируется только численно [2].

Важно отметить, что в случае изотропной плазменной пластинки наряду с волнами, которые получаются в результате возмущения истинных поверхностных волн (и поэтому имеют место только при значениях $\varepsilon < -1$), могут существовать еще две нечетные поверхностные волны либо две нечетные волны с комплексными постоянными распространения; как видно из (9), эти волны существуют и при $\varepsilon > -1$.

Последнее замечание относится к энергетическим характеристикам поверхностных волн. Очевидно, что при отрицательных значениях диэлектрической проницаемости плазмы поток энергии внутри плазмы противоположен по направлению потоку в вакууме; поэтому направление суммарного потока, а следовательно, и характер волны (прямая, обратная) определяется соотношением величин этих потоков. Нетрудно убедиться в том, что в истинной поверхностной волне суммарный поток энергии всегда совпадает с направлением фазовой скорости:

$$S_{\text{вак}} = |b_0|^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{h}{4k_0^2} \sqrt{-1-\varepsilon} > |S_\varepsilon| = |b_0|^2 \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{h}{4k_0^2} \left| \frac{\sqrt{-1-\varepsilon}}{-\varepsilon^2} \right|.$$

Отсюда и волны, возникающие в результате возмущения истинных поверхностных волн, являются прямыми волнами.

Из двух других поверхностных волн, как уже отмечалось, одна является обратной. Убедимся в этом на примере тонкой пластинки с достаточно малым (по модулю) значением ε. Используя формулы (7), (9), нетрудно получить

$$S_z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{hx_0}{2k_0} \frac{\mp 2\sqrt{\varepsilon^2/4 - (k_0x_0)^2(1-\varepsilon)}}{\varepsilon\left(-\varepsilon/2 \mp \sqrt{\varepsilon^2/4 - (k_0x_0)^2(1-\varepsilon)}\right)}.$$

Таким образом, вторая волна ($(px_0)_2$) действительно переносит поток энергии в направлении своего распространения, а первая ($(px_0)_1$) — в обратном направлении. С волной, отвечающей совпадающим корням ($(px_0)_{1,2} = -\varepsilon/2$), так же как и с волнами, имеющими комплексные постоянные распространения, вообще не связан перенос энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. O. Schumann, Sud-Bayer. Akad d Wiss, Math-naturwiss. Abt 225, 255 (1948).
2. A. A Oliner and T. Tamir, J. Appl Phys., **33**, 231 (1962).
3. A J. Lichtenberg and J. R Woodyard, J Appl. Phys, **33**, 1976 (1962).
4. W O. Schumann, Z. Naturforch., **5a**, 613 (1950).
5. W Oehrl, Z. angew. Phys., **9**, 164 (1957).

6. W. O. Schumann, Z. angew. Phys., **12**, 145 (1960).
7. W. O. Schumann, Z. angew. Phys., **10**, 26 (1958).
8. W. O. Schumann, Z. angew. Phys, **11**, 333 (1959).
9. J. R. Wait, Canad. J. Phys., **38**, 1586 (1960).
10. В. И. Беспалов, М А. Миллер, Уч зап ГГУ, сер. физ., **30**, 61 (1956).
11. М. А. Миллер, В. И Таланов, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, **4**, 795 (1961).
12. В Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
13. Л Д. Ландау, Е М Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957, стр. 364
14. T. Tamir and A. A. Oliver, IRE Trans., **AP—10** 55 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 15 апреля 1963 г.

TWO-DIMENTIONAL ELECTROMAGNETIC FIELDS GUIDED BY PLASMA LAYERS. I

I. G. Kondrat'ev, M. A. Miller

Two-dimensional electromagnetic waves guided by layered isotropic plasma are considered. The reflection coefficients of an electromagnetic wave incident upon a single plasma layer is near to unit in the following three cases: a) when the plasma layer is dense enough, b) for grazing incidence and density being arbitrarily, c) for TM modes incident upon the so-called zero layer ($\varepsilon=0$). Herein the case of complex incidence angles can bé included.

All the possibilities may be used in waveguide systems with plasma walls. The following characteristics concerning such systems are discussed: radiation losses, the effect of collisions and spatial dispersion as well as the estimation of the effect of the ocusing magnetic fields.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

К ТЕОРИИ ЛАМПЫ С ПОПЕРЕЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ТИПА «М»

Р. А. Дудник

Получено дисперсионное уравнение для плоской модели ЛПВ типа «М» в режиме малых амплитуд Проведено исследование корней дисперсионного уравнения в случае достаточно узких замедляющих систем при слабом токе пучка.

Применение двухмерных замедляющих систем в лучевых электронных приборах СВЧ открывает возможности для построения наряду с приборами типа «О», использующих фокусировку электронного потока продольным магнитным полем, приборов типа «М», в которых поток сфокусирован скрещенными электрическим и магнитным полями. При этой системе фокусировки наиболее удобен прибор типа цилиндрического магнетрона, использующий двухмерную замедляющую систему. В настоящей работе излагаются некоторые результаты теоретического исследования плоской модели лампы с поперечным взаимодействием (ЛПВ) типа «М».

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛПВ ТИПА «М»

Рассмотрим простейшую плоскую модель ЛПВ «М», изображенную на рис. 1. В качестве холодной системы используется волновод с импедансной стенкой. Над импедансной стенкой, лежащей в плоскости $z=0$, на расстоянии $a \ll \lambda_м$, где $\lambda_м$ — длина замедленной волны системы, расположена идеально проводящая крышка волновода. Ширина волновода по оси y равна d $(d \gg a)$, длина вдоль оси x не ограничена. Предполагаем, что волновод согласован на концах. Условимся называть волновод, имеющий идеально проводящие боковые стенки при $y=0$ и $y=d$, прямоугольным волноводом; если же боковые стенки отсутствуют — полосковым волноводом.

Ограничимся рассмотрением лампы с чисто поперечным током. Будем считать, что боковые стенки волновода прозрачны для электронов, бесконечно широкий электронный поток равномерно вводится в пространство взаимодействия по всей длине волновода и движется вдоль оси y. Поток сфокусирован скрещенными электрическими ($\boldsymbol{E}_0$) и магнитным ($\boldsymbol{B}_0$) полями так, что постоянная составляющая скорости электронов вдоль оси y $v_0 = E_0/B_0$ и электроны движутся прямолинейно.

Ниже рассматривается эта модель ЛПВ типа «М» на основе двухмерных телеграфных уравнений [1]. Приближенный характер телеграфных уравнений является недостатком такого подхода к исследованию работы прибора. Заметим, однако, что элементарная теория обычного магнетронного усилителя, использующая телеграфные уравнения, дает качественно верные результаты, находящиеся в хорошем соответствии с выводами более точной теории [2].

Предполагаем зависимость от времени t в виде $e^{i\omega t}$. Согласно [1], телеграфные уравнения, описывающие распространение волн в системе, состоящей из волновода с импедансной стенкой и электронного потока, можно записать в виде

$$\hat{Y}\,\mathrm{grad}\,V = -\boldsymbol{I};$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{I} = -BV + j\omega\left[\int_z \rho\Psi\,dz\right]_\omega. \qquad (1)$$

Здесь V — высокочастотное напряжение между замедляющей системой и крышкой волновода, $\boldsymbol{I}$ — поверхностный ток, $\hat{Y} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$ — анизотропная проводимость импедансной стенки волновода, $B = j\omega\varepsilon/a$ — проводимость зазора между импедансной стенкой и крышкой волновода, $\Psi(z)$ — структурный коэффициент, определяющий амплитуду поля замедленной волны в пространстве взаимодействия ($\Psi \sim 1$), ρ — плотность пространственного заряда электронного пучка; производные берутся по координатам x и y, интегрирование проводится по толщине пучка. Первое уравнение системы (1) является следствием закона Ома, второе — уравнение непрерывности.

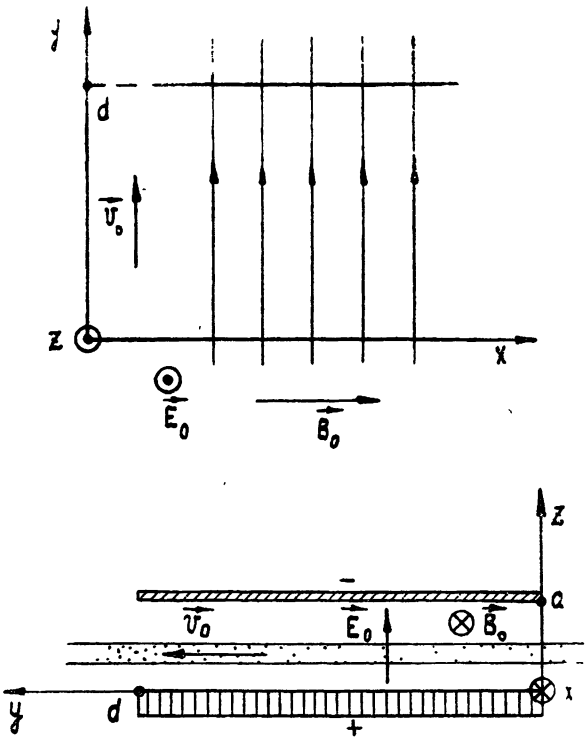


Рис. 1

Характер движения электронов в таком приборе по сравнению с прибором типа «0» [3] имеет две особенности: во-первых, под действием x-компоненты поля замедленной волны электроны дрейфуют вдоль магнитного поля B_0, во-вторых, электроны совершают колебательное движение вдоль оси z, т. е. $z_{эл} = z_0 + z$, где z — малые отклонения положения электронов от состояния равновесия. С учетом этих особенностей последний член во втором уравнении системы (1) наиболее просто может быть записан для электронного потока достаточно малой толщины, когда $\rho = \rho_{пов}(xy)\,\delta(z - z_{эл})$. Учитывая, что $\rho_{пов} = \rho_0 + \rho_1$, где ρ_0 и

ρ — постоянная и переменная составляющие плотности пространственного заряда пучка, получаем

$$\left[\int_z \rho\Psi dz\right]_\omega = \rho\Psi + \rho_0\Psi' z. \tag{2}$$

Поля (напряжение и ток) в волне, распространяющейся в безграничной двухмерной системе, пропорциональны

$$\exp\left[j\omega t(-jhx)(-j\varkappa y)\right]. \tag{3}$$

Как известно, уравнение движения пленочного электронного потока, сфокусированного скрещенными $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{B}_0$ полями, записывается в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{u} = -\eta\boldsymbol{E} - \eta[\boldsymbol{u}\boldsymbol{B}_0],$$

где $\eta = e/m$ — удельный заряд электрона. Для режима малых амплитуд $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{v}| \ll |\boldsymbol{v}_0|$; $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_\sim$, $|\boldsymbol{E}_\sim| \ll |\boldsymbol{E}_0|$ и $\boldsymbol{E}_\sim = -\operatorname{grad}(\Psi V)$. Линеаризуя уравнение движения и учитывая (3), при $v_0 = E_0/B_0$ выразим переменные составляющие скорости электронов v_x, v_y и v_z через напряжение V. С помощью этих соотношений и уравнения непрерывности запишем ρ и z в (2) через напряжение V. Отсюда нетрудно получить следующее дисперсионное уравнение для рассматриваемой модели ЛПВ типа «М»:

$$\begin{gathered}[\varkappa^2 + 2\tilde{Y}_{12}h\varkappa + \tilde{Y}_{11}h^2 + \tilde{B}]\,[(h_e - \varkappa)^2 - h_H](h_e - \varkappa) = \\ = -\chi h_e^2\left\{(h_e - \varkappa)\left[\varkappa^2 + h^2 + \left(\frac{\Psi'}{\Psi}\right)^2\right] - 2\varkappa h_H\frac{\Psi'}{\Psi}\right\},\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}\chi = \frac{I_0}{2V_0}\,\frac{j\Psi^2}{-Y_{22}h_e}, \quad h_e = \frac{\omega}{v_0}, \quad h_H = \frac{\omega_H}{v_0}, \\ \tilde{Y}_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{22}}, \quad \tilde{Y}_{11} = \frac{Y_{11}}{Y_{22}}, \quad \tilde{B} = \frac{B}{Y_{22}},\end{gathered} \tag{4a}$$

$\omega_H = \eta B_0$ — циклотронная частота, I_0 и v_0 — постоянные составляющие конвекционного тока пучка и скорости электронов, V_0 — потенциал пучка. Для системы без потерь компоненты тензора поверхностной проводимости Y_{ik} имеют чисто индуктивный характер, так что параметр χ — действительная положительная величина. В предположении, что возмущения, вносимые электронным потоком, малы (слабый ток), параметр $\chi \ll 1$.

Левая часть уравнения (4) состоит из трех сомножителей, первый из которых связан с замедляющей системой, а два других — с электронным потоком. Замечаем, что из (4) при переходе к одномерному случаю, когда $h = 0$, получается дисперсионное уравнение обычного магнетронного усилителя [2]. Дисперсионное уравнение (4) можно рассматривать как алгебраическое уравнение пятого порядка относительно $\varkappa$; оно определяет поперечные волновые числа $\varkappa$ через другую неизвестную величину — продольное волновое число h. В силу того, что рассматриваемая система имеет конечные размеры по оси y, распространяющиеся в ней волны типа (3) должны удовлетворять соответствующим граничным условиям Это накладывает на корни уравнения (5) дополнительные требования, позволяющие определить как h, так и $\varkappa$:

На примере холодной системы без электронного потока покажем, как определяются продольные и поперечные волновые числа. Согласно [1], при $\chi = 0$ имеем:

$$\varkappa_0^2 + 2\tilde{Y}_{12} h_0 \varkappa_0 + \tilde{Y}_{11} h_0^2 + \tilde{B} = 0$$

— алгебраическое уравнение второго порядка относительно $\varkappa$. Его решение

$$\varkappa_{0_{1,2}} = \pm \sqrt{(\tilde{Y}_{12}^2 - \tilde{Y}_{11}) h_0^2 - \tilde{B}} - \tilde{Y}_{12} h_0. \tag{5}$$

Волну напряжения, распространяющуюся в положительном направлении оси x, согласно [1], можно записать в виде

$$V = e^{-jh_0 x}\left(e^{-j\varkappa_{0_1} y} + Ae^{-j\varkappa_{0_2} y}\right). \tag{6}$$

В случае прямоугольного волновода эта волна напряжения должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\text{при } y = 0 \quad V = 0, \quad \text{при } y = d \quad V = 0.$$

Из первого условия получаем, что $A = -1$; из второго $e^{-j\varkappa_{0_1} d}, e^{-j\varkappa_{0_2} d}$ 0 или $(\varkappa_{0_1} - \varkappa_{0_2})d = 2\pi n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Отсюда, учитывая (5), находим продольное волновое число

$$h_0^2 = -\frac{\tilde{B} + n^2\pi^2/d^2}{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), находим поперечные волновые числа

$$\varkappa_{0_{1,2}} = \pm \frac{n\pi}{d} - \tilde{Y}_{12} h_0. \tag{8}$$

Распространяющаяся в волноводе волна напряжения, согласно (6) и (8), записывается так:

$$V = e^{-jh_0(x - \tilde{Y}_{12} y)} \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right).$$

Видно, что амплитуда волны меняется по синусоидальному закону по ширине системы, а фазовый фронт волны движется под некоторым углом к продольной оси волновода, определяемым анизотропией замедляющей системы $\tilde{Y}_{12}$.

Итак, фазовая скорость волны имеет продольную и поперечную составляющие. Следовательно, возможен синхронизм электронного потока, движущегося вдоль оси y с постоянной скоростью v_0, с поперечной составляющей фазовой скорости замедленной волны системы. Лампа, работающая на таком принципе, может быть использована в качестве СВЧ усилителя или генератора.

Ниже приводится исследование дисперсионного уравнения (4) в случае достаточно узких замедляющих систем при слабом токе пучка для различных синхронизаций электронного потока с y-компонентой фазовой скорости замедленной волны.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

В рассматриваемой модели ЛПВ типа «М» пленочному электронному потоку в приближении слабого тока соответствуют волны со следующими постоянными распространения: h_e, $h_e + h_H$ и $h_e - h_H$. Вол-

не, распространяющейся в волноводе без электронного потока в направлении положительной оси x, соответствуют два поперечных волновых числа $\varkappa_{0_1}$ и $\varkappa_{0_2}$ (8). Таким образом, для приборов «М» типа возможно несколько режимов работы при различных синхронизациях электронного потока с медленной волной холодной системы: $h_e=\varkappa_{0_1}$, $h_e=\varkappa_{0_2}$, $h_e \pm h_H = \varkappa_{0_1}$, $h_e \pm h_H = \varkappa_{0_2}$. Рассмотрим эти режимы работы.

1) Синхронизация

$$h_e = \varkappa_{0_1}. \tag{9}$$

Заметим, что в принятых предположениях постоянные распространения волн в системе с электронным потоком слабо отличаются от h_0 (7) и $\varkappa_{0_{1,2}}$ (8). Решение дисперсионного уравнения (4) будем искать в виде

$$h = h_0(1+\Delta), \quad \varkappa = \varkappa_{0_1}(1+\delta). \tag{10}$$

Учитывая (9) и (10), дисперсионное уравнение (5) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\delta^5 - p\delta^4 + q\delta^3 + r\delta^2 + t\delta + \tau = 0;\\
p = (g_1+g_2)\Delta - \frac{2\pi n}{N}; \qquad q = \chi - \frac{2\pi n}{N} g_1\Delta - f^2;\\
r = 2\chi + f^2\left[(g_1+g_2)\Delta - \frac{2\pi n}{N}\right];\\
t = \chi[1+\Theta+\xi^2+2f\xi] + f^2\frac{2\pi n}{N} g_1\Delta;\\
\tau = \chi 2f\xi,
\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered}
f = h_H/\varkappa_{0_1}, \quad \Theta = h_0^2/\varkappa_{0_1}^2, \quad N = \varkappa_{0_1} d,\\
g_{1,2} = \frac{h_0}{\varkappa_{0_1}} k'_{1,2}(h_0); \quad k'_{1,2}(h_0) = -\tilde{Y}_{12} \mp \frac{h_0 d}{n\pi}\left(\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2\right), \quad \xi = \frac{1}{\varkappa_{0_1}}\frac{\Psi'}{\Psi}.
\end{gathered} \tag{11a}$$

Уравнение (11) получено с точностью до членов, содержащих Δ и χ только в первой степени. Предполагаем, что $|\Delta| \ll 1$. Член Θ в коэффициенте уравнения t связан с наличием дрейфа электронов вдоль магнитного поля.

Уравнение (11) имеет три удаленных корня, первый из которых лежит в окрестности $\varkappa_3 \sim \varkappa_{0_2}$, два других появляются при достаточно сильных магнитных полях и лежат в окрестности $\varkappa_{4,5} \sim h_e \pm h_H$. Поправки к постоянным распространения этих удаленных корней будем искать в виде

$$\begin{gathered}
\varkappa_3 \sim \varkappa_{0_2}; \quad \delta_3 = -\frac{2\pi n}{N} + \nu_1;\\
\varkappa_{4,5} \sim h_e \pm h_H; \quad \delta_{4,5} = \pm f + \nu_{2,3}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Отсюда, используя формулу Ньютона, получаем:

$$\delta_3 \simeq -\frac{2\pi n}{N} - \frac{F(-2\pi n/N)}{F'(-2\pi n/N)} \simeq -\frac{2\pi n}{N} + g_2\Delta + \chi a_1; \tag{13}$$

$$a_1 = \frac{N(N-2\pi n)^2/(2\pi n)^3 + (N/2\pi n)^3(\Theta + \xi^2 + 2f\xi) - 2Nf\xi/2\pi n}{1 - f^2(N/2\pi n)^2},$$

где F — левая часть уравнения (11), а F' — ее производная по δ, взятые при $\delta = -2\pi n/N$. Нетрудно убедиться, что

$$\delta_{4,5} = \pm f + \chi a_{2,3};$$
$$a_{2,3} = \frac{f^2 \pm 2f + 2f\xi + (1 \pm \xi)^2 + \Theta}{2f^2(-2\pi n/N \mp f)}. \tag{14}$$

Считаем, что $fN/2\pi n \neq 1$. Использовав (12)—(14), с помощью формул Виета для корней уравнения (11) можно получить квадратное уравнение для двух близких корней δ_1 и δ_2:

$$\delta^2 - \lambda\delta + \mu = 0, \tag{15}$$

где

$$\lambda = g_1\Delta - \chi(a_1 + a_2 + a_3), \quad \mu = -\chi\frac{N}{2\pi n}\frac{2\xi}{f}.$$

Соотношения (12)—(15) найдены с точностью до членов, содержащих Δ и χ только в первой степени. Из (12)—(14) следует, что волны с постоянными распространения $\nu_{4,5} \sim h_z \pm h_H$ являются волнами постоянной амплитуды. В принятых предположениях вклад этих волн в граничные условия можно не учитывать. Следовательно, остается только три волны, поправки к постоянным распространения которых δ_1, δ_2 и δ_3 содержат неизвестную величину Δ — поправку к продольному волновому числу h. Граничные условия накладывают на δ_1, δ_2 и δ_3 дополнительное требование, которое позволяет определить Δ.

Наиболее просто граничные условия могут быть сформулированы, если предположить, что электронный поток входит в пространство взаимодействия невозмущенным. Тогда для прямоугольного волновода имеем:

$$\text{при } y = 0 \quad V = 0, \quad I_{эл} = 0, \text{ при } y = d \quad V = 0 \tag{16}$$

и для полоскового волновода:

$$\text{при } y = 0 \quad I_y = 0, \quad I_{эл} = 0, \text{ при } y = d \quad I_y = 0, \tag{17}$$

где $I_{эл}$ — переменная составляющая конвекционного тока пучка, которую известным способом можно выразить через напряжение V, I_y — y-компонента поверхностного тока системы.

Система (16) или (17) однородных уравнений имеет нетривиальные решения, когда определитель ее равен нулю: $\mathrm{Det} = 0$. Это уравнение должно решаться совместно с (13) и (15) для определения δ_i и Δ.

Нетрудно показать, что в случае ЛПВ, использующей прямоугольный волновод, определитель системы (16) равен

$$\mathrm{Det} = \begin{vmatrix} e^{-jN\delta_1} & e^{-jN\delta_2} & e^{-jN\nu_1} \\ 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\delta_1^2 + \delta_1 A + B}{\delta_1(\delta_1^2 - f^2)} & \dfrac{\delta_2^2 + \delta_2 A + B}{\delta_2(\delta_2^2 - f^2)} & \alpha \end{vmatrix} = 0; \tag{18}$$

$$\alpha = \frac{(-2\pi n/N + \nu_1)^2 + (-2\pi n/N + \nu_1)A + B}{(-2\pi n/N + \nu_1)[(-2\pi n/N + \nu_1)^2 - f^2]}; \quad A = 1 + \Theta, \; B = f\xi.$$

Система уравнений (13), (15) и (18) полностью определяет δ_i и Δ. Нахождение совместного решения уравнений в аналитической форме

практически невозможно. В качестве предварительного этапа рассмотрим приближенное решение уравнений в случае достаточно узких замедляющих систем. Из принятых выше предположений о слабом возмущающем действии пучка следует, что $\chi \ll 1$, $|\Delta| \ll 1$ и $|\delta_{1,2}| \ll 1$. Дополнительное предположение о малой длине пространства взаимодействия позволяет считать $|N\delta_{1,2}| < 1$ и $|N\nu_1| < 1$, так что экспоненты верхней строки детерминанта можно разложить в быстросходящиеся степенные ряды. В результате трансцендентное уравнение (18) можно представить в виде ряда. Оказывается, что в коэффициенты этого ряда входят такие комбинации корней уравнения (15) δ_i, которые удается выразить с помощью рекуррентных соотношений и формул Виета в довольно простом виде. Отсюда получаем следующую запись уравнения (18):

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-jN)^s}{s!} \left\{ \mu(\alpha f^2 + A) D_s + B\left(D_{s+1} - \nu_1^s\right) \right\} = 0, \tag{19}$$

где D_s определяется из рекуррентного соотношения

$$\begin{gathered} \delta_1^s - \delta_2^s = (\delta_1 - \delta_2) D_s; \\ D_0 = 0, \quad D_1 = 1, \quad D_s = \lambda D_{s-1} - \mu D_{s-2}. \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь μ и λ — коэффициенты уравнения (15). Как следует из (13), (15) и (20), уравнение (19) содержит только одну неизвестную величину Δ.

Уравнение (19) получено в приближении слабого усиления в пространстве взаимодействия прибора с точностью до членов, содержащих Δ и χ только в первой степени. В этом приближении решение уравнения (19) имеет вид

$$\operatorname{Im} \Delta = \frac{1}{g_1 - g_2} \chi \frac{N^2}{2\pi n} \frac{\xi}{f}; \tag{21}$$

$$\operatorname{Re} \Delta = \frac{1}{g_1 - g_2} \chi \left[2a_1 + a_2 + a_3 + \frac{N}{\pi n} \frac{1 + \alpha f^2 + \Theta}{f^2} \right], \tag{22}$$

где величины g_1, g_2, a_1, a_2 и a_3 определяются из соотношений (11а), (13) и (14) Отсюда, учитывая (12)—(15), нетрудно получить все поправки к поперечным волновым числам δ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Из (10) и (21) видно, что волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x в ЛПВ типа «М», может возрастать по амплитуде, т. е. $\operatorname{Im} \Delta > 0$ при условии, что $\xi = \frac{1}{\varkappa_{0_1}} \frac{\Psi'}{\Psi} < 0$, так как $(g_1 - g_2) < 0$ (11а). Условие $\xi < 0$ означает, что замедляющая система находится под более высоким постоянным потенциалом, чем крышка волновода (см. рис. 1). Аналогичное положение имеет место в обычном магнетронном усилителе, работающем на синхронизации $h_e = \varkappa_{0_1}$ [2]. Следовательно, ЛПВ может работать как усилитель, причем направление возрастания мощности в системе составляет прямой угол с направлением движения электронного потока. Поэтому в дальнейшем основное внимание мы будем уделять определению $\operatorname{Im} h_0 \Delta$ — постоянной нарастания амплитуды волны прибора вдоль оси x.

Учитывая (10) и (11а), запишем $\operatorname{Im} h_0 \Delta$ более подробно:

$$\operatorname{Im} h_0 \Delta = \chi \frac{1}{d} \frac{1}{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2} \frac{N^2}{4} \frac{\varkappa_{0_1}}{h_0} \frac{-\xi}{f}. \tag{23}$$

Таким образом, в случае достаточно узких замедляющих систем постоянная нарастания вдоль оси x ЛПВ типа «М», как и прибора типа «0»

[3], пропорциональна первой степени плотности конвекционного тока пучка $I_0 \sim \chi$ (4а) и зависит от параметров $1/d$, $(\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2)^{-1}$, $\varkappa_{0_1}/h_0$, Величину $\varkappa_{0_1}/h_0$, используя известное соотношение $v_g^2 = v_{\text{гр}_x} v_{\text{ф}_x}$, где $v_{\text{гр}_x}$ и $v_{\text{ф}_x}$ — групповая и фазовая скорости в направлении оси x, можно представить в виде:

$$\frac{\varkappa_{0_1}}{h_0} = \left(\frac{v_g}{c}\right)^2 \left(\frac{c}{v_{\text{гр}_x}}\right)\left(\frac{c}{v_{\text{ф}_y}}\right),$$

где c — скорость света в вакууме, т. е. $\operatorname{Im} h_0\Delta$ пропорционально замедлению по групповой скорости в направлении оси x и замедлению по фазовой скорости в направлении электронного потока. По-видимому, зависимость $\operatorname{Im} h_0\Delta$ от параметров замедляющей системы в такой форме является общей для приборов с поперечным взаимодействием [3,4]. Усиление прибора уменьшается с увеличением магнитного поля B_0.

В случае ЛПВ типа «М», использующей в качестве холодной системы полосковый волновод, когда граничные условия надо брать в форме (17), для $\operatorname{Im} h_0\Delta$ получается выражение, аналогичное (23).

2) Синхронизация

$$h_e = \varkappa_{0_2}$$

возможна при сильной анизотропии системы, когда $-\tilde{Y}_{12} h_0 > \frac{n\pi}{d}$ (см. (8)). Этот режим работы незначительно отличается от рассмотренного в предыдущем разделе. Для $\operatorname{Im} h_0\Delta$ получается выражение типа (23), в котором всюду надо заменить $\varkappa_{0_1}$ на $\varkappa_{0_2}$. По-прежнему нарастающая волна вдоль оси x возможна при $\xi = \frac{1}{\varkappa_{0_2}} \frac{\Psi'}{\Psi} < 0$. Выражение для $\operatorname{Im} h_0\Delta$ остается неизменным как для прямоугольного, так и полоскового волноводов.

3) Синхронизация

$$h_e + h_H = \varkappa_{0_1}.$$

Способом, аналогичным описанному в первом разделе, нетрудно получить следующее выражение для постоянной нарастания волны вдоль оси x:

$$\operatorname{Im} h_0\Delta = \chi \frac{1}{d} \frac{1}{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2} \frac{N^2}{16} \frac{(1+\xi)^2 + \Theta}{f(1+f)^2} \left(\frac{v_g}{c}\right)^2 \left(\frac{c}{v_{\text{гр}_x}}\right)\left(\frac{c}{v_{\text{ф}_y}}\right), \tag{24}$$

где

$$\xi = \frac{1}{\varkappa_{0_1}} \frac{\Psi'}{\Psi}, \quad \Theta = \frac{h_0^2}{\varkappa_{0_1}^2}, \quad f = \frac{h_H}{\varkappa_{0_1}}.$$

Видно, что при этой синхронизации в ЛПВ волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x, будут возрастать по амплитуде.

4) При синхронизации

$$h_e - h_H = \varkappa_{0_1}$$

для $\operatorname{Im} h_0\Delta$ получается выражение типа (24), в котором надо изменить знак на противоположный перед f и ξ. Следовательно, $\operatorname{Im} h_0\Delta < 0$ и волны, нарастающие по амплитуде вдоль оси x, отсутствуют. Условие $\operatorname{Im} h_0\Delta < 0$ остается неизменным как для прямоугольного, так и полоскового волноводов.

5) Режим работы при синхронизации

$$h_e \pm h_H = \varkappa_{0_2}$$

незначительно отличается от рассмотренного в разделах 3 и 4. Для постоянной нарастания волны вдоль оси x получается выражение типа (24), в котором всюду надо заменить $\varkappa_{0_1}$ на $\varkappa_{0_2}$. Условие $\mathrm{Im} h_0 \Delta > 0$ выполняется только при синхронизации $h_e + h_H = \varkappa_{0_2}$.

Итак, в ЛПВ типа «М» нарастающие по амплитуде волны вдоль оси x появляются только при синхронизации $h_e + h_H = \varkappa_{0_{1,2}}$. Аналогичное положение имеет место в обычном магнетронном усилителе [2].

В заключение рассмотрим один частный случай ЛПВ, в которой в качестве холодной системы используется полосковый волновод.

3. СЛУЧАЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ВОЛНЫ

В полосковом волноводе, согласно [1], возможен особый, вырожденный тип волны, когда $n = 0$, $\varkappa_{0_{1,2}} = \varkappa_0 = -\tilde{Y}_{12} h_0$ (8) и амплитуда поля не меняется по ширине системы. Если электронный поток движется вдоль оси y, то существуют следующие режимы работы прибора при синхронизациях.

1) Синхронизация

$$h_e = \varkappa_0. \tag{25}$$

Решение дисперсионного уравнения (4) будем искать в виде

$$h = h_0(1 + \Delta); \qquad \varkappa = \varkappa_0(1 + \delta). \tag{26}$$

В рассматриваемом случае уравнение (4) имеет при достаточно сильном магнитном поле два удаленных корня, уточненные значения которых находим по методу Ньютона:

$$\begin{gathered} \varkappa_{1,5} \sim h_e \pm h_H; \qquad \delta_{4,5} \simeq \pm f + \chi c_{1,2}; \\ c_{1,2} = -\frac{\pm f^3 + 2f \pm (1 + \Theta + \xi^2 + 2f\xi) + 2\xi}{2f^3}; \end{gathered} \tag{27}$$

здесь

$$\xi = \frac{1}{\varkappa_0}\frac{\Psi'}{\Psi}, \quad \Theta = \frac{h_0^2}{\varkappa_0^2}, \quad f = \frac{h_H}{\varkappa_0}.$$

Видно, что эти волны являются волнами постоянной амплитуды. Используя выражения (27), можно понизить порядок уравнения (4). В результате получим кубичное уравнение для трех близких корней δ_1, δ_2 и δ_3:

$$\begin{gathered} \delta^3 - \gamma\delta^2 + \lambda\delta + \mu = 0; \\ \gamma = 2\Delta - \chi(c_1 + c_2); \quad \lambda = 2\beta\Delta + \chi[1 + f(c_1 + c_2)]; \\ \mu = -\chi\frac{2\xi}{f}; \quad \beta = \frac{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2}{\tilde{Y}_{12}^2}. \end{gathered} \tag{28}$$

Выражения (27), (28) найдены с точностью до членов, пропорциональных Δ и χ. По-прежнему считаем $\chi \ll 1$ и $|\Delta| \ll 1$.

В коэффициенты уравнения (28) входит неизвестная величина Δ — поправка к продольному волновому числу. Корни уравнения (28) должны удовлетворять дополнительным требованиям, вытекающим из гранич-

ных условий типа (17). Определитель системы (17) можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{Det} = \begin{vmatrix} e^{-jN\delta_1} & e^{-jN\delta_2} & e^{-jN\delta_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{1+\delta_1 A+\delta_1^2 B}{(\delta_1-\Delta)(\delta_1^3-f^2\delta_1)} & \dfrac{1+\delta_2 A+\delta_2^2 B}{(\delta_2-\Delta)(\delta_2^3-f^2\delta_2)} & \dfrac{1+\delta_3 A+\delta_3^2 B}{(\delta_3-\Delta)(\delta_3^3-f^2\delta_3)} \end{vmatrix}; \qquad (29)$$

$$A = \frac{1+\Theta}{f\xi}, \quad B = \frac{1}{f\xi}, \quad N = \varkappa_0 d.$$

Уравнения (28) и (29) должны решаться совместно. Будем искать решение этих уравнений в случае достаточно узких замедляющих систем, когда $|N\delta_i| < 1$ $i = 1, 2, 3$) и экспоненты верхней строки определителя можно разложить в быстросходящиеся ряды. В этом приближении способом, аналогичным описанному выше, нетрудно показать, что поправка Δ к продольному волноводу h числу равна

$$\mathrm{Im}\,\Delta = -\frac{1}{\beta}\chi\frac{N}{2}\frac{\xi}{f};$$
$$\mathrm{Re}\,\Delta = -\frac{1}{\beta}\chi\frac{1+\Theta-2f\xi-\xi^2}{2f^2}. \qquad (30)$$

Отсюда в принципе можно определить поправки δ_i к поперечным волновым числам $\varkappa$. Как и в более общем случае (ср. с (21)) нарастающие по амплитуде волны вдоль оси x (т. е. $\mathrm{Im}\Delta > 0$) появляются при $\xi < 0$. Запишем $\mathrm{Im}\Delta$ более подробно:

$$\mathrm{Im}\,\Delta = \frac{\tilde{Y}_{12}^2}{\tilde{Y}_{11}-\tilde{Y}_{12}^2}\chi\frac{N}{2}\frac{-\xi}{f}. \qquad (31)$$

Видно, что в случае вырожденной моды замедленной волны усиление определяется анизотропией системы $\tilde{Y}_{12}$. Аналогичное положение было и в ЛПВ типа «0» [3].

Когда амплитуда поля замедленной волны остается постоянной по ширине системы, рассматриваемый прибор можно интерпретировать при $\tilde{Y}_{12} \neq 0$ как обычный магнетронный усилитель малой длины, в котором электронный поток движется под острым углом к продольной оси замедляющей системы. В этой связи интересно сравнить выражение (30) для $\mathrm{Im}\Delta$ с оценкой усиления обычного магнетронного усилителя малой длины.

В одномерной модели при синхронизации $h_e = \varkappa_0$ будем искать решение дисперсионного уравнения $F(\varkappa) = 0$ в виде $\varkappa = \varkappa_0(1+\delta)$. Оценив по методу Ньютона удаленные корни, лежащие в окрестности $\varkappa_3 \sim -\varkappa_0$, $\varkappa_4 \sim h_e + h_H$ и $\varkappa_5 \sim h_e - h_H$, понизим порядок уравнения $F(\varkappa) = 0$, поделив его на $(\varkappa-\varkappa_3)(\varkappa-\varkappa_4)(\varkappa-\varkappa_5)$. Волны с постоянными распространениями $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ и $\varkappa_5$ являются волнами постоянной амплитуды. Нетрудно показать, что квадратное уравнение для двух близких корней δ_1 и δ_2 имеет вид

$$\delta^2 - \lambda\delta - \chi\frac{\xi}{f} = 0, \qquad (32)$$

где λ — некоторый коэффициент, пропорциональный χ, $\xi = 1\,\Psi'/\varkappa_0\Psi$ $f = h_H/h_e$. При малой длине пространства взаимодействия усиление

прибора определяется совместным действием двух прямых волн $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Волна напряжения вдоль лампы записывается в виде

$$V(y) = \frac{V_0}{2} e^{-j\varkappa_0 y} \sum_{i=1}^{2} e^{-j\varkappa_0 y \delta_i},$$

где δ_i — корни уравнения (32), V_0 — амплитуда поля на входе прибора. При малой длине пространства взаимодействия и слабом токе пучка $|N\delta_i| < 1$, $N = \varkappa_0 y$ и $e^{-jN\delta_i}$ можно разложить в быстросходящийся степенной ряд. Используя формулы Виета для корней уравнения (32), нетрудно показать, что усиление прибора

$$G = \left| \frac{V(y)}{V_0} \right| \simeq 1 - \chi \frac{N^2}{2} \frac{\xi}{f} + o(\chi^2), \tag{33}$$

где $o(\chi^2)$ — малые члены, содержащие χ^2. Видно, что усиление становится больше единицы $G > 1$ при $\xi < 0$. Учитывая $\varkappa = \varkappa_0(1 + \delta)$, можно сказать, что выражение (30) для $\mathrm{Im}\Delta$ в ЛПВ соответствует выражению (33). Естественно, что член, связанный с анизотропией системы $\tilde{Y}_{12}^2(\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2)^{-1}$, в (33) отсутствует.

2) При синхронизации

$$h_e \pm h_H = \varkappa_0$$

способом, аналогичным (25)—(31), нетрудно показать, что

$$\mathrm{Im}\,\Delta = \frac{1}{\beta} \chi \frac{N}{8} \frac{(1 \pm \xi)^2 + \Theta}{\pm f(1 \pm f)^2}.$$

Как и в более общем случае, условие существования возрастающих по амплитуде волн $\mathrm{Im}\Delta > 0$ выполняется только для синхронизации $h_e + h_H = \varkappa_0$.

Итак, в рассматриваемом приближении усиление ЛПВ пропорционально первой степени плотности тока пучка, что находится в соответствии с оценкой усиления обычного магнетронного усилителя малой длины. Получение предельного перехода от ЛПВ к обычному магнетронному усилителю подтверждает, по-видимому, возможность применения телеграфных уравнений к расчету взаимодействия электронных потоков с полями двухмерных замедляющих систем.

Автор глубоко признателен А. В. Гапонову за предложенную тему и ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Доклад на сессии Научно-технического общества радиотехники и электроники им. А. С. Попова, М., 1961.
2. Д. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
3. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 764 (1963).
4. Л. Н. Лошаков, Радиотехника и электроника, 5, 1448 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 26 апреля 1963 г.

TO THE THEORY OF „M“ TYRE TUBE WITH TRANSVERSE INTERACTION

R. A. Doudnik

The dispersion equation has been obtained for a plane model of the „M“ type tube in the small amplitudes regime.

The investigation of dispersion equation roots has been made in the case of sufficiently narrow delay systems with small beam current.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII. № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ В МНОГОРЕЗОНАТОРНОМ МАГНЕТРОНЕ

В. Е. Нечаев

Исследуются вопросы, связанные с движением отдельного электрона в заданных полях междуэлектродного пространства магнетрона. Асимптотическим методом получены выражения для скоростей и траекторий до второго приближения включительно. Рассмотрено взаимодействие сгруппированного потока электронов с основной (синхронной) гармоникой поля и выведена формула для электронного КПД.

Для написания замкнутой системы уравнений, описывающей свойства магнетрона как автоколебательной системы, нужно определить зависимость мощности взаимодействия электронного потока с высокочастотным полем (или наведенного тока) от величины напряжения на эквивалентном контуре [1] при фиксированных значениях других электрических параметров. Задача о наведенном токе рассмотрена в монографии [2], где характер движения электронов и форма облака пространственного заряда были приближенно заданы. Последовательное рассмотрение энергообмена электронов с полем должно опираться на результаты исследования движения электронов в заданных полях системы, как это сделано в [3, 4] применительно к плоской модели магнетрона.

Задача о движении электронов в магнетроне с учетом полей пространственного заряда весьма сложна и решалась численными методами [5, 6]. Но, как следует из [6], на этом пути еще не получено надежной информации. В последнее время широкое применение приближенных аналитических методов позволило рассмотреть ряд важных вопросов. Например, в работах [7, 8], развивающих идеи еще сороковых годов [9–11], было получено удовлетворительное объяснение динамических характеристик магнетронов. Однако некоторые исходные идеализации в отмеченных работах, в частности, предположение о квадратичном распределении постоянного во времени потенциала между катодом и анодом, представляются сомнительными.

Излагаемый в настоящей статье материал содержит приближенное исследование движения электронов и их энергообмена с высокочастотным полем в предположении, что полями пространственного заряда можно пренебречь (это справедливо для большей части пространства взаимодействия, если мощности достаточно велики). Метод расчета, уже применявшийся автором при изучении плоской модели магнетрона [4, 12], здесь будет распространен на случай цилиндрической модели.

Когда статья подготавливалась к печати, вышла в свет монография [13], где среди других вопросов рассмотрены (также без учета полей пространственного заряда) некоторые вопросы динамики электронов в магнетроне. В силу близких исходных предпосылок результаты, относящиеся к первому приближению, в [13] и в настоящей работе оказались сходными (необходимые сопоставления с указанием причин расхождения будут проводиться по мере изложения). Однако, в отличие от соответствующего раздела [13], примененный ниже метод расчета дал возможность получить улучшенное первое приближение [14], позволяющее

оценить вибрационные члены, и усредненное решение во втором приближении. Кроме того, в статье приводятся качественный анализ средних траекторий и расчет взаимодействия сгруппированного потока с высокочастотным полем.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ

В нерелятивистском и квазистатическом приближениях, выполняющихся в моделях, соответствующих большинству реальных конструкций [5], уравнения движения электронов в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) имеют вид:

$$\frac{m}{|e|}\left\{\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}=\frac{\partial V}{\partial\rho}-\rho B\frac{d\varphi}{dt}; \tag{1}$$

$$\frac{m}{|e|}\frac{d}{dt}\left\{\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right\}=\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\rho B\frac{d\rho}{dt}. \tag{1a}$$

Здесь $|e|/m$ — удельный заряд электрона, B — магнитная индукция, V — скалярный электрический потенциал.

Перейдем к системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω_c, равной фазовой скорости основной пространственной гармоники поля и близкой к средней угловой скорости электронов. Если ввести следующие безразмерные параметры и переменные*:

$$s=\rho/\rho_к;\quad \theta=\varphi-\omega_c t;\quad T=\omega_H t;\quad \Phi=V/\rho_к^2\,\omega_H B;$$
$$\varkappa=\omega_c/\omega_H, \tag{2}$$

где $\omega_H=\frac{|e|}{m}B$ — циклотронная частота, то уравнения движения запишутся так:

$$s-s\dot\theta^2=\partial\Phi/\partial s-\varkappa(1-\varkappa)\,s-\dot s\dot\theta(1-2\varkappa); \tag{3}$$

$$s\ddot\theta+2\dot s\dot\theta=\frac{1}{s}\,\partial\Phi/\partial\theta+\dot s\,(1-2\varkappa). \tag{3a}$$

Дифференцирование по T обозначено точками над переменными.

Для колебаний с номером n, без учета полей пространственного заряда, потенциал V может быть представлен в виде [5]:

$$V=V_0\frac{\ln\rho/\rho_к}{\ln\rho_а/\rho_к}-\frac{N_\rho V_1}{\pi\rho_а}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\gamma\beta)}{\gamma^2\beta}\frac{Z'_\gamma(k\rho)}{Z'_\gamma(k\rho_а)}\sin\gamma\varphi\cos\omega t. \tag{4}$$

Здесь $\gamma=mN+n$, N — число резонаторов анодного блока, ω — круговая частота колебаний, V_1 — амплитуда высокочастотного напряжения между соседними сегментами блока, V_0 — постоянное напряжение между анодом и катодом,

$$Z'_\gamma(k\rho)=J'_\gamma(k\rho)-N'_\gamma(k\rho)\frac{J'_\gamma(k\rho_к)}{J'_\gamma(k\rho_к)},$$

где $J'_\gamma(k\rho)$ и $N'_\gamma(k\rho)$ — производные по аргументу от функций Бесселя и Неймана; смысл геометрических параметров β, $\rho_к$ и $\rho_а$ ясен из рис. 1.

---

* Все индексы при V соответственно будут переноситься на Φ.

Если далее принимать во внимание действие на электроны только со стороны основной (синхронной) гармоники поля, то правые части уравнений движения (3), (3а) не будут явно зависеть от времени, и задача сводится к рассмотрению движения электрона в неоднородных статических полях. Когда $\gamma \gg k\rho_a$, что всегда выполняется в реальных системах, потенциал Φ с учетом только основной гармоники π-вида ($m = 0$, $n = \gamma = \pi/2$), можно представить в форме

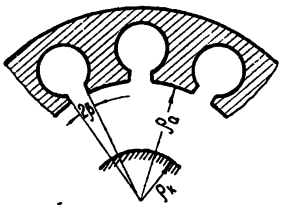


Рис. 1. Геометрические параметры пространства взаимодействия.

$$\Phi = \Phi_0 \frac{\ln s}{\ln s_a} - \frac{\Phi_1}{\pi} \frac{\sin \beta\gamma}{\beta\gamma} f(s) \sin(\gamma\theta), \tag{5}$$

где

$$f(s) = (s^\gamma - s^{-\gamma})(s_a^\gamma - s_a^{-\gamma})^{-1}.$$

Введем комплексную координату $\xi = se^{-j\theta}$. Тогда уравнения (3), (3а) с учетом (5) сведутся к следующему:

$$\ddot{\xi} + j(1-\varkappa)\dot{\xi} = \varepsilon \tilde{F}(\xi^{\cdot}) + \left\{ \frac{\Phi_0}{\ln s_a \xi^{\cdot}} - \varkappa(1-\varkappa)\xi + j\varkappa\dot{\xi} \right\}. \tag{6}$$

Здесь

$$\varepsilon \tilde{F}(\xi^{\cdot}) = e^{-j\theta} \left\{ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s} - j \frac{1}{s} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \right\} = j \frac{\Phi_1}{\pi} \frac{\sin \beta\gamma}{\beta\gamma} \frac{\gamma}{\xi^{\cdot}} \frac{(\xi^{\cdot})^\gamma - (\xi^{\cdot})^{-\gamma}}{s_a^\gamma - s_a^{-\gamma}}, \tag{7}$$

где $\tilde{\Phi}$ — часть потенциала, соответствующая высокочастотному полю.

Уравнение (6) описывает движение электронов в цилиндрической модели магнетрона в системе отсчета, связанной с вращающейся волной поля. Это уравнение по форме отлично от того, которое исследуется в [13], что связано как с другим выбором системы отсчета (в [13] — лабораторная), так и с выделением малых членов, соответствующих силам, возмущающим движение.

Будем полагать правую часть (6) малой по сравнению с любым из членов левой части. Тогда приближенное решение (6) можно искать асимптотическим методом, по аналогии с развитым в [14] для случая колебательных систем с одной степенью свободы и малой нелинейностью. Условия, позволяющие считать правую часть (6) малой, удобно установить после нахождения невозмущенного решения.

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Приравняв правую часть (6) нулю, получим невозмущенное решение

$$\xi = r + Re^{-j(1-\varkappa)T}, \tag{8}$$

которое в лабораторной системе отсчета имеет вид:

$$\xi_1 = \xi e^{j\varkappa T} = re^{-j\omega_c t} + Re^{-j\omega_H t}. \tag{8a}$$

Здесь r, R — постоянные комплексные коэффициенты, передающие положение центра, радиуса и фазы вращения. Видно, что решение нулевого приближения соответствует сумме вращательного движения с циклотронной частотой и радиусом $|R|$ и относительно медленной, синхронной с волной, циркуляции (обычно $\omega_c/\omega_H = \varkappa < 0{,}2$). Если электрон покидает катод с нулевой скоростью, то $\dot{\xi}$ и $\ddot{\xi}$ имеют величину порядка

$R| \simeq \varkappa$. Тогда, принимая во внимание (8), можно видеть, что малость правой части (6) обеспечивается одновременным выполнением двух условий. Во-первых, амплитуда переменного напряжения должна быть относительно мала (малый параметр ε):

$$\frac{V_1}{\pi}\frac{\sin\beta\gamma}{\beta\gamma} \ll \frac{\omega_c \rho_к \rho_a B}{\gamma}; \tag{9}$$

во-вторых, должно выполняться соотношение

$$\left| \frac{\Phi_0}{\ln s_a(r^2 + R^* e^{j(1-\varkappa)T})} - \varkappa(1-\varkappa)r \right| \ll \varkappa. \tag{10}$$

Можно видеть, что величина в левой части (10) отклоняется от нуля вблизи некоторого значения

$$s = s_c = [\Phi_0/\ln s_a \varkappa(1-\varkappa)]^{1/2} \tag{11}$$

вдвое меньше, чем величина

$$\left| \frac{\Phi_0}{\ln s_a \xi^*} - \varkappa(1-\varkappa)\xi \right|.$$

Этим объясняется отнесение в правую (малую) часть (6) члена $j\varkappa\dot{\xi}$. Соотношение (11) определяет некоторый радиус, на котором средняя азимутальная скорость электрона совпадает с угловой фазовой скоростью волны. Радиус $s = s_c$ назовем синхронным. Как видно из (10) и (11), величина в фигурной скобке (6) никогда не обращается в нуль, но вблизи $s=s_c$ она отклоняется от нуля на величину порядка $\varkappa^2$; поэтому $\varkappa$ — второй независимый малый параметр задачи.

По существу, запись уравнения движения в виде (6) соответствует несколько иному, чем в [13], выбору нулевого приближения*. Сопоставление исходных уравнений обнаруживает, что члены, относящиеся к возмущению, разнятся на величину порядка $\varkappa^2$ в наших обозначениях. Это приводит к незначительному отличию решений первого приближения. Однако решение второго приближения, как будет видно, искать легче, исходя из принятой выше формулировки. Приступим к решению уравнения (6).

Введением новой переменной перейдем к системе двух уравнений первого порядка:

$$\dot{\xi} = \eta; \quad \dot{\eta} + j(1-\varkappa)\eta = \varepsilon\tilde{F}(\xi^*) + \left\{ \frac{\Phi_0}{\ln s_a \xi^*} - \varkappa(1-\varkappa)\xi + j\varkappa\eta \right\}. \tag{12}$$

Решение (12) удобно искать в виде, близком к невозмущенному:

$$\xi = r + Re^{-j(1-\varkappa)T}; \quad \eta = -j(1-\varkappa)Re^{-j(1-\varkappa)T}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12) и считая теперь r, R зависящими от времени, можно получить следующие точные соотношения:

$$(1-\varkappa)\dot{R} = j\left\{ \varepsilon\tilde{F}(\xi^*) + \frac{\Phi_0}{\ln s_a \xi^*} - \varkappa(1-\varkappa)r \right\} e^{i\tau}, \tag{14}$$

---

* Представляется ненужным выбирать нулевое приближение, жестко связывая коэффициенты с величиной анодного напряжения, как это сделано в [13] Соотношение (6.45) в указанной работе устанавливает прямую пропорциональность величин анодного напряжения и генерируемой частоты. На самом деле магнетроны не обладают такими возможностями электронной перестройки. Поэтому фиксация синхронного радиуса (6.30) выглядит искусственной.

$$(1-\varkappa)\dot{r} = -j\left\{\varepsilon\tilde{F}(\xi^*) + \frac{\Phi_0}{\ln s_a \xi^*} - \varkappa(1-\varkappa)\, r\right\}, \tag{14a}$$

где $\tau = (1-\varkappa)\, T$.

В силу малости правых частей (14), (14а) r и R могут быть представлены в виде суперпозиции плавно изменяющихся $\bar{r}$, $\bar{R}$ и малых вибраций с медленно меняющимися амплитудами:

$$r = \bar{r} + \sum_{n\neq 0} r_n e^{jn\tau}; \quad R = \bar{R} + \sum_{n\neq 0} R_n e^{jn\tau}. \tag{15}$$

Для ξ тогда, учитывая (13), имеем:

$$\xi = \bar{\xi} + \sum_{n\neq 0} \xi_n e^{jn\tau}, \tag{15a}$$

где $\bar{\xi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi d\tau = \bar{r} + R_1$ — средняя за период вращения координата частицы или центр тяжести орбиты. Из (14), (14а), (15), (16) нетрудно установить следующие соотношения между коэффициентами рядов:

$$r_n = -\frac{n+1}{n} R_{n+1}; \quad \xi_n = r_n + R_{n+1} = -\frac{1}{n} R_{n+1}. \tag{16}$$

Подставляя (15) и (16) в (14) и (14а), определим закон, по которому перемещаются центры тяжести орбиты, а также найдем амплитуды малых осцилляций R_n. В первом приближении, разлагая правые части (14) и (14а) в ряды и сохраняя члены порядка $\varepsilon\varkappa$ и $\varkappa^2$, можно получить:

$$(1-2\varkappa)\,\dot{\bar{r}} = -j\left\{\varepsilon\tilde{F}(\bar{\xi}^*) + \frac{\Phi_0}{\ln s_a \bar{\xi}^*} - \varkappa(1-\varkappa)\,\bar{\xi}^*\right\}; \tag{17}$$

$$\dot{\bar{R}} = 0; \tag{17a}$$

$$(1-\varkappa)(1-2\varkappa)\, R_1 = \left\{\varepsilon\tilde{F}(\bar{\xi}^*) + \frac{\Phi_0}{\ln s_a \bar{\xi}^*} - \varkappa(1-\varkappa)\,\bar{\xi}\right\}; \tag{17б}$$

$$(1-\varkappa)(1-2\varkappa)\, R_n = \frac{1}{n}\,\text{Выч}\left\{\frac{\varepsilon F(\bar{\xi}^* + \bar{R}^* z)}{z^n}\right\}_{z=0} \quad \text{для } n>2, \tag{17в}$$

$$R_n = 0 \text{ для } n < 0,$$

где

$$F(\bar{\xi}^*) = \varepsilon\tilde{F}(\bar{\xi}^*) + \Phi_0/\ln s_a \bar{\xi}^*.$$

При выводе этих соотношений необязательно прибегать к конкретному виду функций $\varepsilon\tilde{F}(\xi^*)$ (7), достаточно, чтобы $\varepsilon F(\xi^*)$ была регулярной в круге радиуса $|R|$.

Из (17) можно определить, как движется центр тяжести орбиты $\bar{\xi} = \bar{r} + R_1$. Ясно, что в первом приближении $\dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{r}}$, поскольку $\dot{R}_1$ имеет более высокий порядок малости, чем $\dot{\bar{r}}$. Тогда для координат $\bar{s}$, $\bar{\theta}$ центра тяжести орбиты, учитывая (7), получим из (17):

$$(1-2\varkappa)\,\dot{\bar{s}} = -\frac{\partial\Phi'}{\bar{s}\,\partial\bar{\theta}}; \quad (1-2\varkappa)\,\bar{s}\,\dot{\bar{\theta}} = \frac{\partial\Phi'}{\partial\bar{s}}. \tag{18}$$

Здесь Φ' соответствует приведенному потенциалу

$$V' = V - \frac{\omega_c B}{2}(\rho^2 - \rho_к^2) + \frac{\omega_c^2 \rho^2}{2|e|/m}, \tag{19}$$

с помощью которого, как известно [5], удобно описывать движение электронов во вращающейся системе отсчета. Тогда для траектории центра тяжести орбиты (назовем ее для простоты средней траекторией) имеем:

$$\frac{d\bar{s}}{d\bar{\theta}} = -\frac{\partial \Phi'/\partial \bar{\theta}}{\partial \Phi'/\partial \bar{s}}. \tag{20}$$

Интегрируя теперь (19) в квадратурах, найдем, что средняя траектория определяется равенством $\Phi' = \text{const}$, т. е. она совпадает с приведенной эквипотенциалью.

Из (17а) следует, что средние величины радиуса и фазы вращения в первом приближении не изменяются. Это расходится с соответствующим результатом (6.28) работы [13]. Если устранить допущенную там при усреднении ошибку вычислительного характера, то расхождение станет весьма незначительным: частота вращения в [13] имеет относительное смещение от циклотронной частоты на величину порядка $\varkappa^2$ в наших обозначениях, что несущественно в пределах первого приближения. Подчеркнем, что только при таком выборе нулевого приближения, который осуществлен выше, можно получить, что $\bar{R} = \text{const}$ и в первом приближении. Именно это обстоятельство существенно облегчает процедуру отыскания решения во втором приближении.

Если при подстановке (15) и (16) в (14) и (14а) сохранить члены следующего порядка малости (до $\varepsilon^2\varkappa^2$, $\varepsilon\varkappa^3$, $\varkappa^4$), то можно установить основные характеристики движения электронов во втором приближении. В этом случае движение центра тяжести орбиты $\bar{\xi}$ уже не совпадает с движением усредненного центра вращения $\bar{r}$. Это связано с тем, что осцилляция с периодом 2π и радиусом R_1, очевидно, смещает центр тяжести относительно центра вращения как раз на величину R_1, что необходимо учитывать во втором приближении. Для $\bar{\xi}$ тогда можно получить:

$$(1-2\varkappa)\dot{\bar{\xi}} = -j\left\{F(\bar{\xi}^*) - (1-\varkappa)\varkappa\bar{\xi} + \sum_1^\infty F'_n \xi_n^* - \right.$$

$$\left. - \frac{F'(\bar{\xi}^*)\,[F(\bar{\xi}) - \varkappa(1+\varkappa)\bar{\xi}^*] + \varkappa(1-\varkappa)[F(\bar{\xi}^*) - \varkappa(1-\varkappa)\bar{\xi}]}{(1-2\varkappa)^2}\right\}. \tag{21}$$

Здесь F'_n — коэффициент ряда Фурье для функции $F'(\bar{\xi}^* + \bar{R}^* e^{i\tau})$, являющейся производной по полному аргументу от аналитической функции $F(\xi^*)$. Отсюда нетрудно установить, что во втором приближении, как и в первом, имеет место соотношение

$$\dot{\bar{\xi}} = -j(1-\varkappa)R_1 = \dot{\xi}, \tag{22}$$

т. е. средняя величина скорости равна скорости центра тяжести орбиты.

Вычисления показывают, что суммой $\sum_1^\infty F'_n \xi_n$ в (21) можно пренебречь; тогда для составляющих скорости центра тяжести орбиты

уравнения получаются путем замены в (18) величины Φ' на $\Phi'-\Psi$, где

$$2(1-2\varkappa)^2\Psi=\left(\frac{\partial\Phi'}{\partial\bar{s}}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi'}{\bar{s}\partial\bar{\theta}}\right)^2+4\varkappa(1-\varkappa)\Phi'. \tag{23}$$

Поэтому уравнение средней траектории во втором приближении есть

$$\Phi'-\Psi=G, \tag{24}$$

где G — постоянная величина вдоль каждой траектории. Из (18), (23) и (24) ясно, что поправка к первому приближению складывается из членов, отражающих изменение «кинетической энергии усредненного движения» (два первых слагаемых) и члена $4\varkappa(1-\varkappa)\Phi'$, появление которого связано с тем, что во вращающейся системе отсчета* $\Delta V'\neq 0$, как это следует из (19).

Отметим еще, что кинетическая энергия электрона во вращающейся системе отсчета пропорциональна величине

$$\xi\xi^*\sim(\bar{R}+\sum_1^\infty R_n e^{jn\tau})(\bar{R}^*+\sum_1^\infty R_n^* e^{-jn\tau}).$$

Видно, что энергия сохраняется с точностью до малых осцилляционных членов. Это позволяет считать первое приближение адиабатическим.

3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим теперь характер движения электронов в пространстве взаимодействия. Из (20), (24) видно, что средняя траектория определяется заданием приведенного потенциала Φ' и начального положения центра тяжести орбиты. В качестве начальной s-координаты можно выбрать координату центра первого витка траектории. Так как на первой петле влияние высокочастотного поля мало, то пренебрегая им, получим для вершины первой петли траектории $s=s_e$ соотношение:

$$\frac{8\Phi_0\ln s_e}{\ln s_a}=(s_e-s_e^{-1})^2. \tag{25}$$

Начальное положение центра тяжести орбиты определяется величиной $s_1=\frac{1}{2}(s_e+1)$, в то время как угловая начальная координата может быть любой.

На рис. 2 и 3 приведены рассчитанные средние траектории, отвечающие параметрам магнетрона 4J50 и различным типовым режимам при колебаниях π-вида. Заштрихованные области недоступны для электронов, покинувших катод с нулевой скоростью (если не учитывать соударений и полей других гармоник). Из (3), (3а) и (19) можно найти, что границей такой области является линия $\Phi'=0$.

Определим характер усредненного движения электронов. Из (18), (5) следует:

$$(1-2\varkappa)\dot{\bar{s}}=\frac{\Phi_1}{\pi}\frac{\sin\beta\gamma}{\beta\gamma}\frac{\gamma}{\bar{s}}f(\bar{s})\cos\gamma\bar{\theta}; \tag{26}$$

$$(1-2\varkappa)\,\bar{s}\,\dot{\bar{\theta}}=-\frac{\Phi_1}{\pi}\frac{\sin\beta\gamma}{\beta\gamma}f'(\bar{s})\sin\gamma\bar{\theta}+\frac{\Phi_0}{\ln s_a\bar{s}}-\varkappa(1-\varkappa)\bar{s}, \tag{26a}$$

* Можно показать, что в плоской модели магнетрона, где $\Delta V'=0$, поправка к первому приближению не содержит соответствующего члена

где $f'(s) = \frac{\gamma}{s} \frac{s^{\gamma} + s^{-\gamma}}{s_a^{\gamma} - s_a^{-\gamma}}$.

Из (26) видно, что электрон в среднем дрейфует к аноду, если центр тяжести орбиты имеет такую угловую координату, что $2\pi(n+1/4) \geqslant \gamma\bar{\theta} \geqslant 2\pi(n - 1/4)$, где n — целое число. Эти области принято называть областями благоприятной фазы. Дрейф электронов относительно волны поля описывается соотношением (26а). Изоклина $\dot{\bar{\theta}} = 0$ является линией синхронизма. Средние траектории могут пересекать ее только в радиальном направлении, так что эта линия разделяет пространство взаимодействия на области, в которых электроны обгоняют волну поля или отстают. Если $\Phi_1 = 0$, то линия синхронизма, очевидно, есть окружность радиуса s_c (11). С увеличением Φ_1 она начнет деформироваться, а при очень больших s (за анодом) появится ее вторая ветвь.

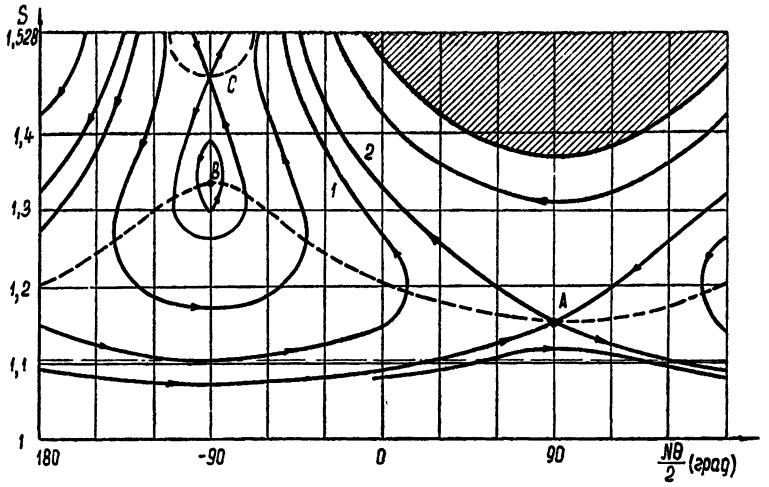


Рис. 2. Расчетные средние траектории электронов в магнетроне 4J50. Режим: B=0,69 *вб·м*$^{-2}$, I_0=10 *а*, V_0=20,7 *кв*, P=115 *квт*; V_1=14,4 *кв*. Пунктиром показана линия синхронизма.

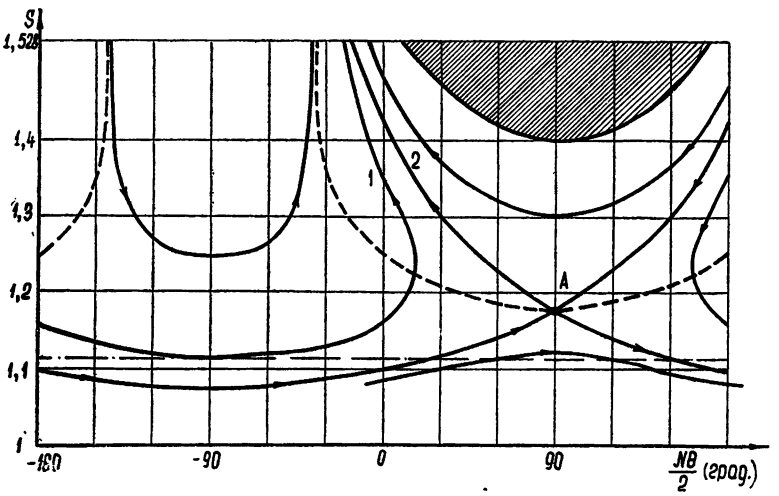


Рис. 3. Расчетные средние траектории электронов в магнетроне 4J50. Режим: B=0,69 *в·бм*$^{-2}$; I_0=28 *а*; V_0=22,4 *квт*; P=300 *квт*, V_1=23,2 *кв*. Пунктиром показана линия синхронизма.

В местах пересечения нулевых изоклин имеют место особые точки дифференциального уравнения (20). Так как верхняя ветвь линии синхронизма разомкнута, что можно видеть из (26а), то сначала имеется три особых точки *A, B, C* (рис. 2). Точки *A* и *C* — седла. Асимптота точки *C* охватывает область замкнутых средних траекторий, окружающих особую точку *B* типа центра. С увеличением Φ_1 точки *B* и *C* сближаются и при некотором бифуркационном значении Φ_1 сливаются; при этом область замкнутых траекторий исчезает и обе линии синхронизма сходятся в точку *BC*. При дальнейшем увеличении Φ_1 остается только одна особая точка *A* и вся картина траекторий упрощается (рис. 3).

Образование и исчезновение особых точек *B* и *C* иллюстрируется на рис. 4, где показано, как изменяется в зависимости от величины Φ_1 средняя угловая скорость электрона при $\gamma\bar{\theta} = -\pi/2$. Кривая а соответствует $\Phi_1 = 0$, кривая в соответствует значению Φ_1, отвечающему тому режиму, для которого имеет место картина траекторий на рис. 2. Кривые б и г построены для таких Φ_1, что от одной кривой к другой Φ_1 возрастает на одну и ту же величину. Пересечения кривых с осью дают координаты особых точек. В случае б особая точка *C* лежит за анодом, а в случае г особых точек *B* и *C* нет.

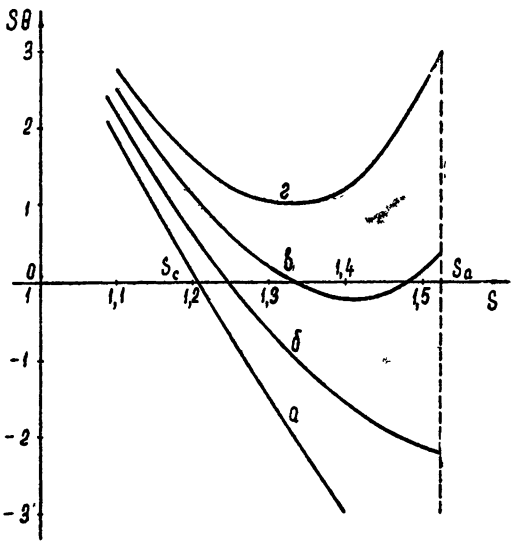


Рис. 4. Зависимость средней угловой скорости электронов от радиальной координаты *s* при $\gamma\theta = -\pi/2$ для различных значений Φ_1.

Средние траектории электронов, покинувших катод с нулевой скоростью, ограничены крайними траекториями 1 и 2 (рис. 2 и 3). Эти траектории вблизи анода сближаются настолько, что ширина спицы пространственного заряда определяется в основном радиусом вращательного движения электронов.

Заметим, что если левая крайняя траектория спицы исходит из точки с координатой s_1, то правая траектория, как правило, совпадает с асимптотой особой точки *A*, потому что s_A может быть меньше, чем s_1, только при таких больших значениях Φ_1, которые не реализуются на практике. Все электроны, имеющие средние траектории между траекториями 1 и 2, т. е. проходящие от катода до анода, естественно называть захваченными полем, в отличие от тех электронов, которые имеют средние траектории под особой точкой A, переходят в область неблагоприятных фаз и движутся там к катоду, рассеивая на нем дополнительную энергию.

Область начальных значений $\bar{\theta}_1$, соответствующих захваченным электронов, которые имеют средние траектории под особой точкой *A*, ния. При Φ_1 меньше некоторого критического, асимптота точки *A* перестанет пересекать линию $s = s_1$ и электроны не будут попадать на анод. Следует, однако, отметить, что при малых Φ_1 рассматриваемая модель может недостаточно хорошо отражать реальные процессы, поскольку тогда существенную роль начинает играть поле пространственного заряда. Поэтому развиваемые ниже положения не могут объяснить началь-

ных областей динамических характеристик магнетронов (при малых I_0 и V_1).

На рис. 5 сопоставлены рассчитанные средние траектории электрона в первом и втором приближениях для типового режима магнетрона 4J50. Видно, что средняя траектория, рассчитанная во втором приближении (б), несущественно отличается от средней траектории, полученной в первом приближении (а), хотя правая часть (6) в этом случае не является малой вблизи анода. Дело, вероятно, в том, что из-за значительной вертикальной скорости дрейфа у анода электроны не успевают заметно уклониться от траектории, полученной в адиабатическом приближении. Хотя вопросы сходимости последовательных приближений к точному решению специально не исследовались, все же близость решений в первых двух приближениях позволяет надеяться, что они оба достаточно точно отражают истинное движение электронов.

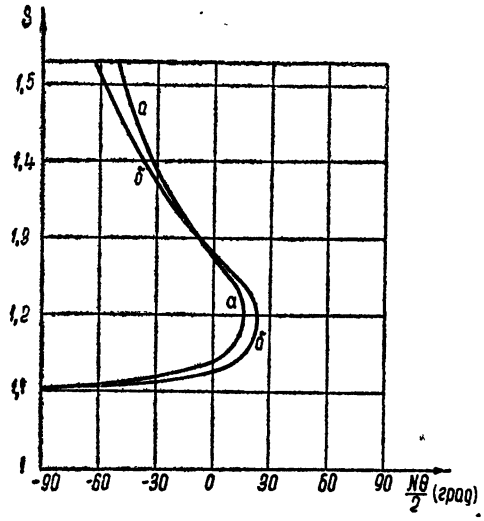


Рис. 5. Средние траектории электронов, рассчитанные в первом (а) и втором (б) приближениях для режима, соответствующего рис. 2

4. РАСЧЕТ МОЩНОСТИ И ЭЛЕКТРОННОГО КПД МАГНЕТРОНА

На основании полученных выше результатов рассчитаем мощность взаимодействия сгруппированного потока электронов с полем основной пространственной гармоники. Для одного электрона мгновенная мощность взаимодействия составляет

$$P_e = |e|(\boldsymbol{v}\nabla V) = |e|\,\rho_к^2\,\omega_H^2 B\,\mathrm{Re}\,\{(\dot{\xi} - j\varkappa\xi)\,\varepsilon\,\tilde{F}(\xi)\}. \qquad (27)$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ — скорость электрона в лабораторной системе отсчета. Среднюю за период вращения мощность найдем, усредняя (27) за интервал 2π:

$$\overline{P}_e = -|e|\,\rho_к^2\,\omega_H^2 B\,\mathrm{Re}\,j\left\{[(1-\varkappa)R_1 + \varkappa\overline{\xi}]\,\varepsilon\tilde{F}(\overline{\xi}) + \sum_1^{\infty} R_{n+1}\varepsilon\tilde{F}_n\left(1 - \frac{n+1}{n}\varkappa\right)\right\}, \qquad (28)$$

где $\tilde{F}_n$ — коэффициент ряда Фурье для функции $\tilde{F}_n(\overline{\xi} + \overline{R}e^{-j\tau})$. Вклад в мощность в основном определяется первым слагаемым в (28), а суммой можно пренебречь с относительной точностью $\varkappa$. Из (28) и (17б) можно получить тогда

$$\overline{P}_e = -|e|\,\rho_к^2\omega_H^2 B\,\mathrm{Re}\,j\,\frac{\Phi_0/\ln s_a\overline{\xi}^* - \varkappa^2\overline{\xi}}{(1-2\varkappa)}\,\varepsilon\tilde{F}(\overline{\xi}). \qquad (29)$$

Теперь учтем, что, согласно (18), центры тяжести орбит движутся, не пересекаясь, как частицы жидкости, плотность которой может меняться только в направлении, перпендикулярном движению. Если далее рассматривать движение некоторого элемента объемного заряда, обра-

зованного электронами, орбиты которых имеют близко расположенные центры тяжести, то средняя энергия взаимодействия этих электронов с полем

$$\overline{P}_{\bar{s}\,d\bar{s}\,d\bar{\theta}} = \frac{|\sigma|\,\rho_{\text{к}}^4\,\omega_H^2 B}{1-2\varkappa}\left\{\frac{\Phi_0}{\ln s_a\,\bar{s}} - \varkappa^2\bar{s}\right\}\frac{1}{\bar{s}}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}}\,(\bar{s}d\bar{s}d\bar{\theta}). \tag{30}$$

Здесь σ — средняя плотность центров электронных орбит на единицу длины системы по z, а $\bar{s}d\bar{s}d\bar{\theta}$ — элементарная площадка, занимаемая центрами орбит. Так как σ сохраняется вдоль любой трубки тока, то можно сосчитать мощность, отдаваемую всеми электронами, средние траектории которых укладываются в трубку тока, доходящую до анода:

$$\Delta P = \frac{\Delta\Phi'\,|\sigma|\,\rho_{\text{к}}^4\,\omega_H^2 B}{1-2\varkappa}\Bigg/\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\Phi_0 \ln\bar{s}}{\ln s_a} - \frac{\varkappa^2\bar{s}^2}{2}\right). \tag{31}$$

Здесь $\Delta\Phi'$ — разность значений приведенного потенциала, соответствующих границам трубки тока. Постоянный анодный ток, составленный такими электронами, может быть вычислен как наведенный или как средний конвекционный; он равен

$$\Delta I_0 = |\sigma|\,\Delta\Phi'\,\frac{\rho_{\text{к}}^2\,\omega_H}{1-2\varkappa}. \tag{32}$$

Электроны, не захваченные полем, все вместе дают нулевой вклад и в мощность, и в постоянный ток. Тогда, очевидно, электронный КПД системы составит

$$\frac{\Delta P}{\Delta I_0 V_0} = \Bigg/\int_{s_1}^{s_2}\left(\frac{\ln\bar{s}}{\ln s_a} - \frac{\varkappa^2\bar{s}^2}{2\Phi_0}\right), \tag{33}$$

поскольку соотношение (33) справедливо для любой трубки тока и для всей спицы. Верхний предел (33) можно определить только с точностью до $\varkappa$, поскольку все усреднения были произведены выше за полный период обращения, а фазы попадания электронов на анод могут быть различными из-за значительных дрейфовых скоростей у поверхности анода. Кроме того, вблизи анода некоторое влияние могут оказать другие гармоники поля, хотя, как показано в [15], они не уменьшают КПД.

Из (33) видно, что вклад в мощность от потока электронов по мере приближения к аноду не возрастает, а даже убывает. По-видимому, не будет сделано существенной ошибки, если положить $s_2 = s_a$. Тогда для электронного КПД имеем

$$\eta_e = 1 - \frac{\ln s_1}{\ln s_a} - \frac{\varkappa^2}{2\Phi_0}(s_a^2 - s_1^2). \tag{34}$$

Последний член в (34) равен $(V_c/V_0)(1 - s_1^2 / s_a^2)$, где V_c — потенциал синхронизации, так что этот член отражает изменение кинетической энергии электронов в лабораторной системе отсчета (возрастание с приближением к аноду).

Результаты расчетов КПД для различных электрических режимов магнетрона 4J50 по формуле (34) приведены в таблице 1. Из таблицы видно, что формула (34) достаточно точно передает изменения КПД с изменением режима.

В таблице 2 сопоставлены результаты расчета КПД по формуле

(34) для различных магнетронов с экспериментальными данными и с результатами расчетов по другим известным формулам.

Таблица 1

B(*вб м*$^{-2}$)	I_0(*а*)	V_0(*кв*)	$\eta_e^{эксп}$(%)	$\eta_e^{теор}$ (%)	V_0 (*кв*)	$\eta_e^{эксп}$(%)	$\eta_e^{теор}$ (%)
		со стр. 384 [5]			со стр. 32 [5]		
0,69	20	21,7	70	73,1	22,2	74	73,0
0,634	20	20	66	70,8	20,6	72	70,0
0,52	20	16,3	61	64,7	16,6	66	64,4
0,445	20	13,9	57	59,1	13,8	59,5	59,2

Таблица 2

Тип лампы	λ (*см*)	s_a	B(*вб м*$^{-2}$)	V_0(*кв*)	I_0(*а*)	$\varkappa$	$\eta_e^{эксп}$	η_e	$\eta_e^{(k)}$	$\eta_e^{(Б)}$	$\eta_e^{(p)}$
4J50	3,2	1,528	0,69	21,6	20	0,0608	72	73,1	67,6	65	51,5
LCW	33,5	1,657	0,05	3,03	0,6	0,0805	68	67,7	62	60	51
CM16B	10	1,693	0,216	1,48	0,125	0,062	60	72,2	78,3	65	44,4
2J42	3,2	1,867	0,485	5,66	5	0,115	51	56,3	49	48	51
725A	3,2	2,00	0,55	12,9	10	0,1016	56,5	60,0	56,5	57	48
3J31	1,25	1,664	0,76	13,6	10	0,125	38,5	50,0	46,7	38	50
2J32	10,7	2,702	0,14	13,3	20	0,179	50	38,4	27,5	41	59
2J39	9,1	2,616	0,287	11,1	10	0,103	53	55,8	в [2] данных нет		43,5

Все данные взяты из [2,5]. При этом необходимо отметить, что данные о магнетронах в [5] не всегда обладают достаточной надежностью*.

В таблице 2 величины электронного КПД η_e вычислены по (34), $\eta_e^{(k)}$ — по формуле (3.47) из [16], $\eta_e^{(Б)}$ — по формуле (3.45) из [2]. В последней колонке таблицы приводятся результаты расчетов КПД, выполненных по формуле (2.59) [2] для отдаваемой электронами мощности. Эти значения КПД, отвечающие предложенному способу расчета наведенного тока в [2], не всегда близки к наблюдаемым. Результаты, полученные в настоящей работе, лучше согласуются с данными экспериментов и не уступают по точности соотношениям для КПД, полученным из соображений энергетического баланса для отдельного электрона в известной литературе [2, 16]. Это говорит о том, что развитый выше способ расчета мощности, отдаваемой электронами в колебательную систему магнетрона, точнее, чем способ [2], построенный на предположе-

* Например, для магнетрона 725А характеристики противоречивы, так как в типовом режиме КПД не совпадает с отношением полной мощности, отдаваемой нагрузку, к величине I_0V_0 Поэтому пришлось пользоваться приведенными характеристиками на стр. 30, для которых указанного противоречия нет В ряде случаев приведенные характеристики не сходятся с рабочими (к примеру, для магнетрона 4J50 на стр 32 и стр. 384). Кроме того, на некоторых приведенных характеристиках величина P относится к мощности в нагрузке, а на некоторых—ко всей отдаваемой потоком мощности

нии строгого синхронизма волны с электронами и на задании определенной формы спицы.

Однако расчетные КПД не всегда хорошо соответствуют наблюдаемым. Различные причины такого отклонения иллюстрируются на примере магнетронов СМ16В (маломощный), 3J31 (разноконтурный), 2J32 (большие $\rho_a/\rho_к$ и $\varkappa$). Рабочая точка для СМ16В в типовом режиме находится в области малых токов, где КПД быстро падает по мере уменьшения I_0 и V_1. Как отмечалось выше, в этом случае существенную роль играют поля пространственного заряда; поэтому формула (34) не пригодна для расчета КПД в указанной области. Расхождение экспериментальных и расчетных данных для магнетрона 3J31 носит типичный характер для всех разноконтурных магнетронов. Расчет показывает, что наблюдаемые КПД и для других таких магнетронов заметно меньше рассчитанных по (34). Совпадение расчетного КПД с опытным в [2] для магнетрона 3J31 имеет место только в одной точке; исходя из развитых там представлений, также не удается объяснить весьма своеобразные особенности динамических характеристик разноконтурных магнетронов, в частности, уменьшения КПД при переходе к бо́льшим значениям магнитной индукции. Как отмечалось еще в [5], для анализа процессов в разноконтурных магнетронах необходимо учитывать специфический характер колебаний поля в таких системах. Для магнетрона 2J32 расхождение теории с экспериментом можно отнести к неточностям расчета, которые, как отмечалось, возрастают при больших s_a и $\varkappa$ (впрочем, как видно из таблицы, в указанном случае ни одна из известных расчетных формул не приводит к удовлетворительному согласию с экспериментом).

Исследовать особенности магнетронного автогенератора можно, написав замкнутую систему уравнений, в которой мощность, отдаваемая электронами высокочастотному полю, или наведенный ток явно выражаются через величину высокочастотного напряжения при заданной магнитной индукции B и постоянном анодном напряжении V_0. Как можно видеть из (31), для этого надо определить, каков характер соответствующих зависимостей величин $\Delta\Phi_1$ и σ от V_1. Первую из них найти просто: это есть разность двух значений приведенного потенциала во вращающейся системе отсчета, которые соответствуют крайним усредненным траекториям. Что касается величины σ, то для ее определения, по-видимому, придется стать на путь гипотез или эвристических соображений. Дело в том, что сколько-нибудь строгий анализ процессов в прикатодной области неизбежно наталкивается на очень большие трудности. Поэтому любая возможная информация, в особенности экспериментального характера, о поведении пространственного заряда вблизи катода в динамическом режиме может оказаться чрезвычайно полезной. Пока надо лишь отметить, что поскольку σ представляет собой плотность фиктивных зарядов, помещенных в центры тяжести орбит, то можно установить связь этой величины с плотностью катодного тока, состоящего из электронов, преодолевших минимум потенциала. Однако еще не ясно, каким образом на катодный ток влияют величины магнитного поля и напряжений на резонансной системе.

Автор признателен Р. А. Дуднику и Л. В. Родыгину за обсуждение и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1 В. Н. Никонов, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, 5, 260 (1962)

2 С. И. Бычков, Вопросы теории и практического применения многорезонаторных магнетронов, ЛКВВИА им А. Ф. Можайского, Л, 1958

3 Дж. Фейнштейн, Сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1962, стр. 473.
4 В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 5, 534 (1962).
5 Магнетроны сантиметрового диапазона, изд. Сов. радио, М, 1, 1950; 2, 1951
6. C. G. Lehr, I. Silverman, I. W. Lotus, Mikrowellenröhren, Munchen, 1960, p. 195.
7 Т. Симидзу, Сб Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1962, стр. 500
8. М. Нисимаки, Сб Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1962, стр. 506.
9. S. Tomonaga, J. Phys. Soc. Japan, 3, 58, 62 (1948).
10. M. Kotani, J. Phys. Soc. Japan, 3, 86 (1948).
11. Y. Haginara, J. Phys. Soc. Japan, 3, 70 (1948).
12. В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1035 (1962).
13. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, изд. АН СССР, М, 1962.
14. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1955.
15 Новик, Хелл, Сб Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1962, стр. 492.
16 В. Ф. Коваленко, Введение в электронику сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1955.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 апреля 1963 г.

TO THE ANALYSIS OF PROCESSES IN A MULTICAVITY MAGNETRON

V. E. Nechayev

Problems are investigated pertaining to the motion of a single electron in the given fields of interelectrode space of the magnetron. Fxpressions for velocities and trajectories up to the second approximation have been obtained by asymptotic method. Interaction of the bunched electron flux with the basic (synchronous) harmonic of the field has been considered. The formula for electronic efficiency of the magnetron has been derived.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1964*

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В СИСТЕМЕ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ*

Р. А Песков

Для системы фазовой автоподстройки частоты, рассмотренной в [2], методом гармонического баланса определяются количественные характеристики автоколебаний 1 рода (относительно нулевой разности частот) Приближенно найдена область значений параметров системы, в которой допустимо применение метода гармонического баланса

Дифференциальное уравнение системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) с нелинейной характеристикой фазового детектора при приближенном учете запаздывания в резонансных контурах получено в [1]. Качественное исследование этого уравнения при синусоидальной характеристике фазового детектора [2] показывает, что с увеличением запаздывания имеет место появление автоколебаний относительно нулевой разности частот (автоколебаний 1 рода).

Режим автоколебаний в системах ФАП является нежелательным. Представляет интерес найти изменение автоколебаний в зависимости от параметров с тем, чтобы оценить, насколько неблагоприятен этот режим. Такой расчет может быть использован для определения области допустимых значений параметров.

В настоящей работе методом гармонического баланса рассчитаны автоколебания 1 рода в системе ФАП (с учетом установленных в [1] условий и характера смены устойчивости). Приближенно найдены границы области, в которой допустимо применение метода гармонического баланса.

1. Дифференциальное уравнение системы ФАП с интегрирующим фильтром при синусоидальной характеристике фазового детектора и приближенном учете запаздывания имеет вид [2]

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\lambda(1-\boldsymbol{d}\cos\varphi)\frac{d\varphi}{dt}+\sin\varphi=\gamma. \tag{1}$$

Здесь φ—разность фаз подстраиваемого и эталонного генераторов; γ, $\boldsymbol{d}$, λ—безразмерные параметры, пропорциональные соответственно расстройке, запаздыванию и затуханию ($\lambda>0$, $\boldsymbol{d}>0$, $|\gamma|<1$).

Следуя методу гармонического баланса, будем искать решение уравнения (1), близкое к синусоидальному: $\varphi\simeq\varphi_0+a\sin(\Omega t)$. Представим (1) в виде системы:

$$x=\sin\varphi_1; \tag{2}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}+\lambda\frac{d\varphi_2}{dt}=\gamma-x+\lambda\frac{dx}{dt}; \tag{2a}$$

* В статье изложены результаты дипломной работы, выполненной под руководством Л Н Белюстиной

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi. \tag{2б}$$

Соотношения (2) и (2а) являются соответственно уравнениями нелинейного и линейного элементов (рис. 1), уравнение (2б) выражает условие замкнутости.

Разорвем систему на входе нелинейного элемента. Разомкнутая система описывается уравнениями (2) и (2а). Предположим, что

$$\varphi_1 = \varphi_0 + a\sin(\Omega t), \tag{3}$$

и будем искать φ_2.

Для этого подставим (3) в (2) и представим x в виде ряда Фурье:

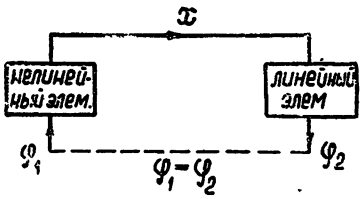


Рис 1.

$$x = \sin[\varphi_0 + a\sin(\Omega t)] = J_0(a)\sin\varphi_0 + 2J_1(a)\cos\varphi_0\sin(\Omega t) + \\ + 2\sum_{n=1}^{\infty}\{J_{2n}(a)\sin\varphi_0\cos(2n\Omega t) + J_{2n+1}(a)\cos\varphi_0\sin[(2n+1)\Omega t]\}. \tag{4}$$

Здесь $J_m(a)$—функция Бесселя первого рода порядка $m(m=0, 1, 2, \ldots)$. Уравнение (2а) с учетом (4) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \lambda\frac{d\varphi_2}{dt} = \gamma - J_0(a)\sin\varphi_0 - A_1\sin(\Omega t - \psi_1) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\{A_{2n}\sin(2n\Omega t + \psi_{2n}) + A_{2n+1}\sin[(2n+1)\Omega t - \psi_{2n+1}]\}, \tag{5}$$

где

$$A_{2n} = 2J_{2n}(a)\sin\varphi_0\sqrt{1 + (2n\lambda d\Omega)^2}, \quad \operatorname{tg}\psi_{2n} = \frac{1}{2n\lambda d\Omega} \quad (n=1, 2, \ldots); \tag{6}$$

$$A_{2n+1} = 2J_{2n+1}(a)\cos\varphi_0\sqrt{1 + [(2n+1)\lambda d\Omega]^2}, \\ \operatorname{tg}\psi_{2n+1} = (2n+1)\lambda d\Omega \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6а}$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\varphi_2 = C + De^{-\lambda t} + \frac{t}{\lambda}[\gamma - J_0(a)\sin\varphi_0] + B_1\sin(\Omega t - \psi_1 + \alpha_1) + S, \tag{7}$$

где

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\{B_{2n}\sin(2n\Omega t + \psi_{2n} + \alpha_{2n}) + B_{2n+1}\sin[(2n+1)\Omega t - \psi_{2n+1} + \alpha_{2n+1}]\} \tag{8}$$

$$B_m = \frac{A_m}{m\Omega\sqrt{\lambda^2 + (m\Omega)^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_m = \frac{\lambda}{m\Omega} \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Произвольные постоянные C и D определяются начальными условиями.

В замкнутой системе должно выполняться условие (2б). Поскольку D (и C тоже) всегда ограничено и $\lambda > 0$, собственное решение $De^{-\lambda t}$ по истечении достаточно большого времени „затухает". Установившееся решение φ_2, как видно из (7), не совпадает с φ_1 (3). Следует ожидать, что установившееся решение φ_2 в разомкнутой системе будет близко к $\varphi_1 = \varphi_0 + a\sin(\Omega t)$, когда в замкнутой системе колебание φ достаточно близко к синусоидальному.

Потребуем, исходя из вышеизложенных соображений, чтобы установившееся решение φ_2 было близко к φ_1 (3). Это приводит к следующим соотношениям:

$$\gamma - J_0(a)\sin\varphi_0 = 0;$$
$$B_1 \sin(\Omega t - \psi_1 + \alpha_1) = a\sin(\Omega t); \tag{10}$$
$$C = \varphi_0, \quad S \simeq 0.$$

Из (10), используя (6а) и (9), найдем:

$$\Omega = 1/\sqrt{d} \tag{11}$$

и

$$\gamma = J_0(a)\sin\varphi_0; \qquad 1/d = \frac{2J_1(a)}{a}\cos\varphi_0. \tag{12}$$

Система (12) является приближенной. Ее решение определяет неизвестные φ_0, a в зависимости от параметров γ, d. При $a=0$ система (12) дает границу устойчивости:

$$d^2 + \frac{1}{\gamma^2} = 1,$$

что согласуется с результатом, полученным строго в [2]*. Поскольку система (12) правильно определяет границу устойчивости и ее характер, предположим, что и в некоторой области, прилежащей к границе, решение системы (12) будет приближенно определять периодическое решение уравнения (1), близкое к синусоидальному. Границу этой области найдем из требования малости высших гармоник**.

При условиях (10) решение (7) для достаточно больших t имеет вид

$$\varphi_2 = \varphi_0 + a\sin(\Omega t) + S;$$

где

$$S = 2d\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{J_{2n}}{2n}\beta_{2n}\sin\varphi_0\sin(2n\Omega t + \psi_{2n} + \alpha_{2n}) + \right.$$
$$\left. + \frac{J_{2n+1}}{2n+1}\beta_{2n+1}\cos\varphi_0\sin[(2n+1)\Omega t - \psi_{2n+1} + \alpha_{2n+1}]\right\},$$

и

$$\beta_m = \sqrt{\frac{1 + m^2\lambda^2 d}{m^2 + \lambda^2 d}} \qquad (m = 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Здесь были использованы соотношения (6), (6а), (8), (9).

Найдем среднеквадратичное значение колебания φ_2:

$$\overline{\varphi_2^2} = \frac{1}{2\pi\Omega}\int_0^{2\pi\Omega}\varphi_2^2(t)\,dt = \varphi_0^2 + \frac{a^2}{2} + \overline{S^2}, \tag{14}$$

где

$$\overline{S^2} = 2d^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{J_{2n}}{2n}\beta_{2n}\sin\varphi_0\right]^2 + \left[\frac{J_{2n+1}}{2n+1}\beta_{2n+1}\cos\varphi_0\right]^2\right\}. \tag{15}$$

---

* Там же доказана устойчивость автоколебаний, возникающих в системе ФАП при $d > 1/\sqrt{1-\gamma^2}$.

** Это условие является необходимым для применения метода гармонического баланса.

Потребуем, чтобы „мощность“ гармоник $\overline{S^2}$ в (14) была в определенное число раз ($k>1$) меньше φ_0^2 и $a^2/2$. Эти требования приводят к неравенствам:

$$\overline{S^2} \leqslant \varphi_0^2/k, \quad \overline{S^2} \leqslant a^2/2k. \tag{16}$$

Число k приближенно характеризует точность метода гармонического баланса*.

Произведем оценку $\overline{S^2}$. Из (13) найдем, что $0 < \beta_m^2 \leqslant 1$ в области

$$0 < \lambda^2 d \leqslant 1. \tag{17}$$

При условии (17) из (15) следует:

$$\overline{S^2} \leqslant 2d^2 \left[f_1^2(a) \sin^2 \varphi_0 + f_2^2(a) \cos^2 \varphi_0 \right], \tag{18}$$

где

$$f_1^2(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_{2n}(a)}{2n} \right]^2, \quad f_2^2(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{J_{2n+1}(a)}{2n+1} \right]^2. \tag{19}$$

Используя соотношения (12) и (18), приведем (16) к виду:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}^2 \varphi_0 \frac{f_1^2(a)}{J_1^2(a)} + \frac{f_2^2(a)}{J_1^2(a)} \leqslant \frac{1}{k}; \quad a^2 \leqslant 2\varphi_0^2; \\ &\operatorname{tg}^2 \varphi_0 \frac{f_1^2(a)}{J_1^2(a)} + \frac{f_2^2(a)}{J_1^2(a)} \leqslant \frac{2\varphi_0^2}{ka^2}; \quad a^2 \geqslant 2\varphi_0^2. \end{aligned} \tag{20}$$

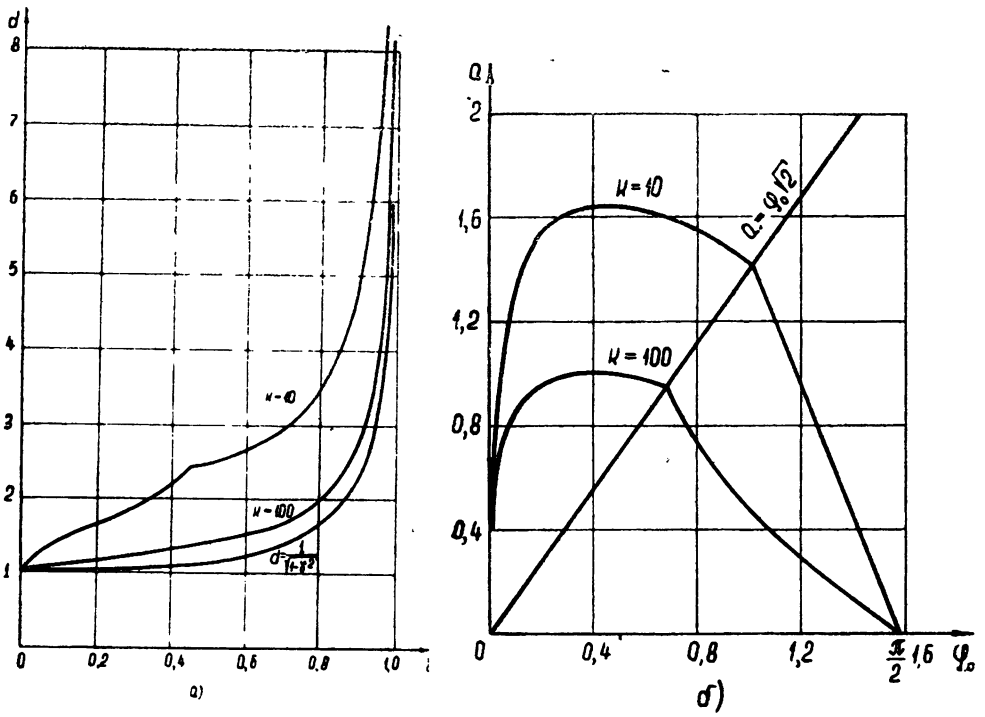


Рис. 2.

* Второе условие в соотношениях (16) представляет собой требование малости клирфактора [5].

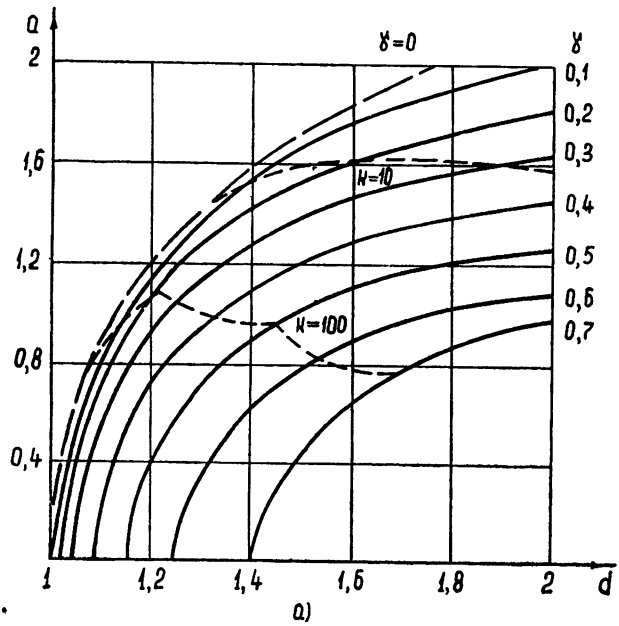


Рис. 3а.

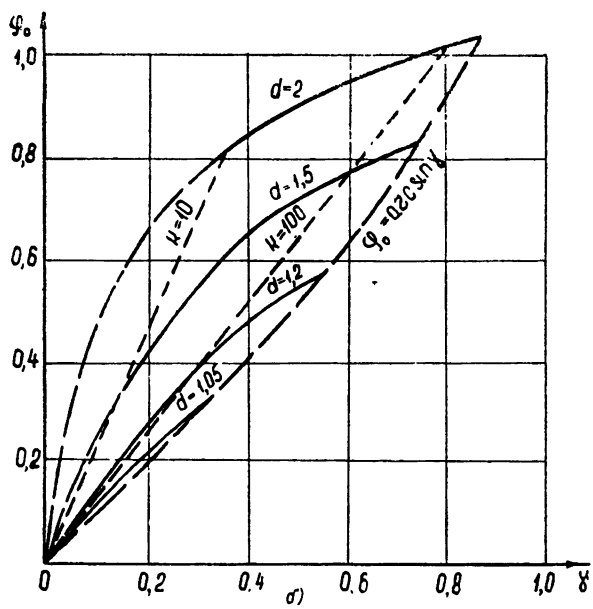


Рис. 3б.

Неравенства (20) определяют на плоскости (φ_0, a) область, в которой допустимо применение метода гармонического баланса с точностью до $1/k$*. Соответствующая область на плоскости (γ, d) опре-

* В этой области приближенно выполняются необходимые условия применения метода гармонического баланса.

деляется соотношениями (20) и (12). Область допустимых значений параметра λ дается условием (17).

Таким образом, при выполнении условий (17) и (20) соотношения (11), (12) определяют зависимость количественных характеристик автоколебаний Ω, φ_0, a от параметров системы $\boldsymbol{d}$, γ.

На рис. 2а и 2б для случаев $k=10$ и $k=100$ представлены области, отвечающие неравенствам (20). При их построении были использованы верхние оценки функций $f_1^2(a)$ и $f_2^2(a)$ (19):

$$f_1^2(a) \leqslant \frac{J_2^2(a)}{4} + \frac{a}{32}\left(\operatorname{sh}\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right), \quad f_2^2(a) \leqslant \frac{J_3^2(a)}{9} + \frac{a}{50}\left(\operatorname{ch}\frac{a}{2} - 1 - \frac{a^2}{4}\right).$$

На рис. 3а и 3б представлены соответственно графики $a(\boldsymbol{d})$ при нескольких значениях γ и $\varphi_0(\gamma)$ при нескольких значениях $\boldsymbol{d}$. Эти графики представляют результат графоаналитического решения системы (12). Пунктирными линиями на этих рисунках нанесены границы области, определяемой неравенствами (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. М В. Капранов, Радиотехника, 12, 37 (1956).
2. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 277 (1959).
3. А. А. Андронов, А. А. Витт и С Э. Хайкин, Теория колебаний, 2-ое изд Физматгиз, М.—Л., 1959.
4. Е. Янке, Ф Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, М, 1959.

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 13 марта 1963 г.

AN APPROXIMATE DETERMINATION OF PERIODICAL MOVEMENTS IN THE PHASE AUTOCONTROL SYSTEM

R. A Peskov

For the automatic phase control system, considered in [2], by a harmonic balance method quantitative characteristics are determined of the I-st type auto-oscillation (relative to the frequency zero difference). The system parameters'region has been found approximetely in which it is possible to apply the harmonic balance method.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 РАДИОФИЗИКА 1964

О СОКРАЩЕНИИ ПЕРЕБОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СИНТЕЗА ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ

А. Д. Закревский

Рассматривается проблема сокращения переборов при решении некоторых задач из области синтеза дискретных автоматов и излагается методика программирования этих переборов на универсальных вычислительных машинах. Предлагается основанный на одном из рассмотренных способов перебора алгоритм преобразования $R(C)$ булевой матрицы C, наиболее известной интерпретацией этого преобразования служит переход от множества простых импликантов булевой функции к множеству ее тупиковых дизъюнктивных нормальных форм.

1. Решение многих задач логического характера (да и не только таких задач) связано с необходимостью реализации более или менее сложных переборов. В связи с этим оптимизация процессов решения данных задач, преследующая, например, цель сокращения времени, затрачиваемого на получение решения, в значительной степени сводится к минимизации соответствующих переборов. Разумеется, алгоритм минимального перебора при решении какой-либо конкретной задачи может быть построен лишь на основе информации о специфике этой задачи, получаемой при анализе последней. Тем не менее, можно выделить некоторые типы переборов, обладающие довольно универсальным характером,— каждый из этих типов оказывается достаточно эффективным при решении целого ряда задач.

Рассмотрение некоторых из этих переборов и способов реализации их на универсальных вычислительных машинах составляет содержание данной статьи. Решаемые с помощью этих переборов задачи, приводимые в статье, взяты из области синтеза дискретных автоматов (задача анализа порогового элемента и задача преобразования таблицы Квайна).

2. Многие задачи целесообразно формулировать в терминах некоторых двоичных переменных, а процесс решения этих задач сводить к нахождению тех комбинаций значений переменных, которые удовлетворяют условиям, составляющим содержание сформулированной задачи. Иногда требуется найти все такие комбинации, называемые решениями, иногда следует искать лишь некоторые из них, лучшие в определенном смысле. При этом зачастую приходится сталкиваться с ситуациями, в которых основным способом проверки какой-либо конкретной комбинации на принадлежность ее множеству решений является индивидуальное испытание данной комбинации.

Совокупность двоичных переменных можно представить одним n-мерным вектором с двоичными компонентами, что особенно удобно при решении задач на машинах, оперирующих именно с такими векторами. Эти векторы мы будем обозначать через

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &\equiv (a^1, a^2, \ldots, a^n) \equiv a^1 a^2 \ldots a^n, \\ \boldsymbol{b} &\equiv b^1 b^2 \ldots b^n, \\ \boldsymbol{c} &\equiv c^1 c^2 \ldots c^n, \\ &\ldots\ldots, \end{aligned}$$

где

$$a^i, b^i, c^i, \ldots \in \{0,1\}, \text{ а } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Каждой из решаемых задач можно поставить в соответствие некоторую двоичную функцию $\varphi(\boldsymbol{a})$, такую, что если $\varphi(\boldsymbol{a}) = 1$, то $\boldsymbol{a}$ есть решение данной задачи, и если $\varphi(\boldsymbol{a}) = 0$, то $\boldsymbol{a}$ не является решением. Совокупность всех решений находится во взаимно-однозначном соответствии с некоторым множеством Q подмножеств P_i множества $P \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, таких, что если $P_i \in Q$ и $a^j = 1 \longleftrightarrow \alpha_j \in P_i$ для всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то $\varphi(\boldsymbol{a}) = 1$, и наоборот, если $\varphi(\boldsymbol{a}) = 1$ и $a^j = 1 \longleftrightarrow \alpha_j \in P_i$ для всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то $P_i \in Q$.

Учитывая данное взаимно-однозначное соответствие, множества P_i, удовлетворяющие условию $P_i \in Q$, будем также называть решениями, а множество Q — множеством решений.

Процесс выделения множества Q из множества $\tilde{P}$ всех подмножеств множества P сводится в вырожденном случае к полному перебору всех элементов множества $\tilde{P}$ с целью определения значения функции $\varphi(\boldsymbol{a})$ для каждого значения вектора $\boldsymbol{a}$. Однако в большинстве ситуаций полного перебора можно избежать, если учесть, например, некоторые заранее известные особенности структуры множества Q.

3. Прежде чем приступить к рассмотрению способов программирования некоторых переборов, введем удобную для этого систему операций, входящих, как правило, в набор элементарных операций любой универсальной вычислительной машины. При этом положим, что n не превышает числа разрядов одной ячейки запоминающего устройства машины, отводимых для представления мантиссы числа (практически $n = 30 \div 40$).

Пусть $\wedge$, $\vee$, $\oplus$ и $^-$ — булевы операторы конъюнкции, дизъюнкции, сложения по модулю два и инверсии соответственно; «+» и «—» — операторы арифметического сложения и вычитания натуральных чисел. Выразим через них следующие операции над векторами с n двоичными компонентами:

а) $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \longleftrightarrow a^i \wedge b^i = c^i, \; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

б) $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \longleftrightarrow a^i \vee b^i = c^i, \; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

в) $\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \longleftrightarrow a^i \oplus b^i = c^i, \; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

г) $\overline{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{c} \longleftrightarrow \overline{a^i} = c^i, \; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

д) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \longleftrightarrow [\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{c}] \bmod 2^n$,

где через $[\boldsymbol{a}]$, $[\boldsymbol{b}]$ и $[\boldsymbol{c}]$ обозначаются натуральные числа, двоичные позиционные коды которых совпадают со значениями векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ соответственно (например, $[01101] = 13$),

е) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \longleftrightarrow [\boldsymbol{a}] - [\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{c}] \bmod 2^n$.

Введем также операцию сдвига

ж) $D^k \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \longleftrightarrow a^{i+k} = c^i, \; i \in \{1, 2, \ldots, n-k\}$

$(c^i = 0, \text{ если } i + k \notin \{1, 2, \ldots, n\})$

и операцию присвоения значения, имеющую динамический характер:

з) $\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{b}$ означает, что вектору $\boldsymbol{b}$ присваивается значение вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{a}$ означает, что вектору $\boldsymbol{a}$ присваивается значение, представляющее результат операции $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$, и т. п.

Приведем несколько простейших программ с использованием введенных операций (через 1 обозначается константа 0...001):

1) $(a+1) \wedge a => a$ — в коде a все единицы, правее которых нет нулей, заменяются нулями (например, 11001011 преобразуется в 11001000);

2) $(a-1) \vee a => a$ — производится замена единицами всех нулей, правее которых нет единиц (например, 11001000 превращается в 11001111);

3) $(a-1) \wedge a => a$ — нулем заменяется лишь одна крайняя справа единица (например, 11001000 преобразуется в 11000000);

4) $(a+1) \vee a => a$ — аналогично устраняется правый нуль (например, 11001011 переходит в 11001111);

5) $(a-1) \oplus a => a$ — получается код, в котором единицы стоят лишь на месте правой единицы в исходном значении вектора a и во всех разрядах, расположенных правее (например, из 11001000 получается 00001111);

6) $(a+1) \oplus a => a$ — преобразование аналогично предыдущему, за исключением того, что теперь учитывается местоположение не правой единицы, а правого нуля (например, 10110011 преобразуется в 00000111);

7) $(\bar{a}+1) \wedge a => a$ — выделяется крайняя справа единица (например, 01001010 переходит в 00000010);

8) $(a+1) \wedge \bar{a} => a$ — получается код с одной единицей на месте правого нуля (например, из 10110011 получается 00000100).

4. Реализация полного перебора всех значений вектора a наиболее просто осуществляется с помощью многократного выполнения операции $a+1 => a$ или $a-1 => a$. В том же случае, если значения некоторых компонент вектора a фиксированы (пусть вектор-константа c содержит единицы в соответствующих разрядах), полный перебор комбинаций значений остальных компонент можно произвести по следующей программе:

$$((a \vee c) + b) \wedge \bar{c} \vee (a \wedge c) => a,$$

где константа $b = (c+1) \wedge \bar{c}$.

В том же случае, если полный перебор нужно проводить так, чтобы следующие друг за другом комбинации двоичных символов отличались друг от друга значением лишь одной компоненты, целесообразно пользоваться модифицированным кодом Грея — известным симметричным кодом Грея с одним дополнительным разрядом справа, обеспечивающим четность числа единиц в коде и используемым только для этого. В этом случае применима программа

$$a \oplus 1 => a,$$

$$D^1((\bar{a}+1) \wedge a) \oplus a => a,$$

если же фиксированы компоненты вектора a, которым соответствуют единицы в коде вектора-константы c, может быть использована программа

$$(a \wedge \bar{c}) \oplus 1 => b,$$

$$((D^1((\bar{b}+1) \wedge b) + c) \wedge \bar{c}) \oplus a \oplus 1 => a.$$

Иногда возникает задача перебора значений вектора a с фиксированным числом единиц. Такой перебор можно реализовать, начав со значения, при котором все единицы будут расположены слева, и переходя от предыдущего значения к последующему по правилу: крайняя справа комбинация 10 заменяется на 01, а все единицы, расположенные правее, сдвигаются вплотную к ней (например, из 01101100 получаем

01101010. а из 01000111 получаем 00111100). Перебор заканчивается, когда все единицы будут расположены справа.

5. Довольно типичной является следующая ситуация, в которой возникает задача перебора: если $P_i \in Q$ и $P_i \leqslant P_j$, то $P_j \in Q$. Множество решений Q, соответствующее в данном случае монотонно положительной булевой функции, назовем монотонно положительным и заметим, что нижеследующие построения легко можно перенести на случай, когда Q является монотонно отрицательным множеством, определяемым аналогичным образом. В обоих случаях Q является выпуклым множеством [6].

Сформулированное условие содержит информацию, позволяющую значительно сократить перебор: очевидно, что достаточно найти лишь граничное множество решений Q^*, чтобы полностью определить все множество Q. При построении алгоритма сокращенного перебора в данном случае оказывается полезным следующий оператор $\hat{\Delta}_\sigma$, который мы назовем оператором элементарного приращения при согласованном переборе (переборе с обратной связью, реализуемой посредством двоичного параметра $\sigma \in \{0, 1\}$). Определим этот оператор через действие на переменную $\boldsymbol{a}$, т. е. на вектор с двоичными компонентами, представляющий, как это было показано, подмножества из $\boldsymbol{P}$:

а) из кода $\boldsymbol{a}$ удаляется группа единиц, занимающая крайнее справа положение — $(\boldsymbol{a}+1) \wedge \boldsymbol{a} => \boldsymbol{a}$; если $\boldsymbol{a}^n = 1$. параметру σ присваивается значение 0 (в остальных случаях значения соответствующих компонент и параметра σ сохраняются): пусть после этой операции выполняется условие $a^j = 1$ и $a^k = 0$ для всех $k \in \{j+1, \ldots, n\}$;

б) затем компоненте a^{j+1} присваивается значение 1;

в) если $\sigma = 0$, то компоненте a^j присваивается значение 0.

Например,

$$\hat{\Delta}_0\ 0110011000 = 0110010100,$$

$$\hat{\Delta}_1\ 0110011000 = 0110011100,$$

$$\hat{\Delta}_0\ 0100101011 = 0100100100,$$

$$\hat{\Delta}_1\ 0100101011 = 0100100100.$$

Покажем, как оператор $\hat{\Delta}_\sigma$ применяется при некоторых конкретизациях рассматриваемой ситуации. Пусть существует некоторая функция $\varphi(P_i)$, определенная на множестве $\tilde{P}$ всех подмножеств множества P и такая, что если $P_i \subset P_j$, то $\varphi(P_i) < \varphi(P_j)$; $\varphi(P_i) \geqslant T$, только если $P_i \in Q$, где T — некоторая константа; если $\alpha_p, \alpha_q \notin P_i$ и $q > p$, то $\varphi(P_i \cup \{\alpha_p\}) \geqslant \varphi(P_i \cup \{\alpha_q\})$. Тогда граничное множество решений Q^* можно получить, реализовав следующий алгоритм:

а) переменной $\boldsymbol{a}$ присваивается значение 1000...0;

б) если $\varphi(\boldsymbol{a}) < T$, параметру σ присваивается значение 1; если $\varphi(\boldsymbol{a}) \geqslant T$, значение $\boldsymbol{a}$ выдается как одно из решений, входящих в Q^*, а параметру σ присваивается значение 0;

в) выполняется операция $\hat{\Delta}_\sigma\, \boldsymbol{a}$; если после этого $\boldsymbol{a} = 00...0$, то процесс поиска решений прекращается — множество Q полностью определено; если $\boldsymbol{a} \neq 00...0$, то реализуется этап б, и т. д.

6. Рассмотрим в качестве примера задачу анализа порогового элемента — определения булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, реализуемой поро

говым элементом с заданными весами входов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и порогом T. Как известно [1], она определяется следующим образом:

$$f(\boldsymbol{a}) = 1, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} a^i \alpha_i \geqslant T,$$

$$f(\boldsymbol{a}) = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} a^i \alpha_i < T,$$

где $\boldsymbol{a}$ — радиус-вектор булева пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Очевидно, что в сформулированном выше алгоритме достаточно положить

$$\varphi(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} a^i \alpha_i.$$

Например, при $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 8$, $\alpha_3 = 5$, $\alpha_4 = 4$, $\alpha_5 = 2$, $\alpha_6 = 1$ и $T = 11$ в процессе реализации данного алгоритма значения функции $f(\boldsymbol{a})$ будут непосредственно определяться лишь для тех значений $\boldsymbol{a}$, которые представлены в следующей последовательности (звездочками отмечены значения $\boldsymbol{a}$, при которых $f(\boldsymbol{a}) = 1$):

i	1	2	3	4	5	6
α_i	10	8	5	4	2	1
	1	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	0	0*
	1	0	1	0	0	0*
	1	0	0	1	0	0*
	1	0	0	0	1	0*
	1	0	0	0	0	1*
	0	1	0	0	0	0
	0	1	1	0	0	0*
	0	1	0	1	0	0*
	0	1	0	0	1	0
	0	1	0	0	1	1*
	0	0	1	0	0	0
	0	0	1	1	0	0
	0	0	1	1	1	0*
	0	0	1	1	0	1
	0	0	1	0	1	0
	0	0	1	0	1	1
	0	0	0	1	0	0
	0	0	0	1	1	0
	0	0	0	1	1	1

От полученной таким образом последовательности значений вектора $\boldsymbol{a}$, представляющих решения, нетрудно перейти к дизъюнктивной нормальной форме искомой функции:

$$f(x_1 x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_1 x_5 \vee$$
$$\vee x_1 x_6 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_2 x_5 x_6 \vee x_3 x_4 x_5.$$

Перебор можно сократить еще более, несколько усложнив алгоритм: достаточно ввести функцию

$$\psi(i) = \sum_{j=i}^{n} \alpha_j$$

и обрывать вычисления, как только будет выполняться условие $\psi(i) < T$, $a^j = 0$ для всех $j < i$. Например, из рассмотренной таблицы при данной модификации алгоритма выпадут три последние строки.

7. Другим примером использования оператора $\hat{\Delta}_\sigma$ может служить ставшая классической задача нахождения минимальных покрытий множества P элементами некоторого множества S, где $S \subseteq \tilde{P}$ и $\tilde{P}$ — множество всех подмножеств множества P. Образующие множество решений Q минимальные покрытия должны обладать следующими свойствами: $Q_i \in Q$, если и только если $Q_i \subseteq S$,

$$\bigcup_{P_j \in Q_i} P_j = P,$$

$$\bigcup_{P_j \in (Q_i / \{P_k\})} P_j \neq P,$$

для любого $P_k \in Q_i$.

Представим элементы множества S векторами-константами

$$c_1 \equiv c_1^1\, c_1^2 \ldots c_1^m,$$

$$c_2 \equiv c_2^1\, c_2^2 \ldots c_2^m,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$c_n \equiv c_n^1\, c_n^2 \ldots c_n^m,$$

совокупность двоичных компонент которых образует матрицу C. Допустим, что вектор

$$f \equiv \bigvee_{i=1}^{n} c_i$$

своими единичными компонентами представляет все элементы множества P; тогда рассматриваемая задача сводится к нахождению таких значений вектора

$$\boldsymbol{a} \equiv a^1\, a^2 \ldots a^n,\ a^j \in \{0, 1\},$$

для которых

$$\varphi(\boldsymbol{a}) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} a^i\, c_i = f,$$

причем эти значения должны быть минимальными в том смысле, что данное равенство должно нарушаться при смене с единичного на нулевое значения любой из компонент вектора $\boldsymbol{a}$.

С целью проверки решений, представляемых значениями вектора $\boldsymbol{a}$, на минимальность, введем функции

$$\varphi\,(\boldsymbol{a} \wedge e_t),$$

где $e_t^t = 1$ и $e_t^i = 0$ при $i \neq t$. Введем также вспомогательный вектор $\boldsymbol{a}^+$, отличающийся от $\boldsymbol{a}$ только тем, что правая единица в $\boldsymbol{a}$ заменяется нулем, а все нули, расположенные правее этой единицы, заменяются единицами ($\boldsymbol{a}^+ = \boldsymbol{a} - 1$). Например, если $\boldsymbol{a} = 100110100$, то $\boldsymbol{a}^+ = 100110011$.

Если для какого-либо значения $\boldsymbol{a}$ выполняется условие $\varphi\,(\boldsymbol{a}^+) \neq f$, то перебор значений $\boldsymbol{a}$ с помощью оператора $\hat{\Delta}_\sigma$ можно в какой-то степени сократить, присвоив вектору $\boldsymbol{a}$ значение вектора $\boldsymbol{a}^-$, где через $\boldsymbol{a}^-$ обозначим вектор, отличающийся от $\boldsymbol{a}$ заменой в его значении правой единицы на нуль ($(\boldsymbol{a} - 1) \wedge \boldsymbol{a} => \boldsymbol{a}$). Например, для $\boldsymbol{a} = 100110100$ имеем $\boldsymbol{a}^- = 100110000$. В частности, если для какого-либо значения $\boldsymbol{a}$ выполняется условие

$$\varphi\,(\boldsymbol{a}) = \varphi\,(\boldsymbol{a}^-),$$

то при рассматриваемом переборе правую единицу в значении $\boldsymbol{a}$ следует заменить нулем — это сократит перебор.

Во введенных обозначениях алгоритм поиска всех решений можно сформулировать следующим образом:

а) вектору $\boldsymbol{a}$ присваивается значение 100...0; затем

б) если $\varphi(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{f}$, то параметру σ присваивается значение 1 и совершается переход к реализации этапа (д); если же $\varphi(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}$, то параметру σ придается значение 0, и

в) если $\varphi(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{e}_t) \neq \varphi(\boldsymbol{a})$ для всех $\boldsymbol{e}_t$, $\boldsymbol{e}_t \wedge \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, то значение $\boldsymbol{a}$ выдается как решение; далее

г) если $\varphi(\boldsymbol{a}^+) \neq \boldsymbol{f}$, вектору $\boldsymbol{a}$ присваивается значение $\boldsymbol{a}^-$ и вновь реализуется этап (г); если при этом $\boldsymbol{a}$ получает значение 00...0, процесс заканчивается, если же $\boldsymbol{a} \neq 00...0$ и $\varphi(\boldsymbol{a}^+) = \boldsymbol{f}$, то

д) реализуется операция $\hat{\Delta}_\sigma \boldsymbol{a}$, после чего

е) если $\varphi(\boldsymbol{a}) = \varphi(\boldsymbol{a}^-)$, параметру σ присваивается значение 0 и реализуется этап (д), если же $\varphi(\boldsymbol{a}) \neq \varphi(\boldsymbol{a}^-)$, то реализуется этап (б).

Пусть D — матрица, строки которой представляют все решения и только решения, получаемые данным алгоритмом при обработке матрицы C. Тогда $D = R(C)$, где R — реализуемый алгоритмом оператор нахождения минимальных покрытий. Некоторые этапы этого алгоритма можно в определенном смысле упростить; например, можно ускорить подсчет значений функции $\varphi(\boldsymbol{a}^+)$, заготовив заранее значения вспомогательной функции

$$\psi(i) = \bigvee_{j=i}^{n} c_j.$$

8. Можно указать на несколько различных интерпретаций данной задачи. Остановимся на наиболее известной из них [2–4].

Элементами множества S служат простые импликанты некоторой булевой функции, элементами множества P — элементы булева пространства аргументов данной функции, на которых функция принимает значение 1; задача состоит в получении всех тупиковых дизъюнктивных нормальных форм булевой функции (или некоторых из них, лучших в определенном смысле). Исходная информация представляется матрицей Квайна C, строки которой соответствуют простым импликантам, а столбцы — элементам булева пространства; в этой матрице $c_i^j = 1$, если j-ый элемент булева пространства входит в интервал, соответствующий i-му импликанту, и $c_i^j = 0$, в противном случае.

После относительно несложных упрощений задачи, состоящих в удалении из матрицы столбцов, поглощающих другие (одиночные) столбцы, и строк, поглощаемых другими (также одиночными) строками (правда, такое удаление строк может привести к потере некоторых решений), матрица становится циклической [3]. Ни одна пара строк или столбцов уже не находится в отношении импликации, и перебор становится необходимым. Его можно провести, реализовав операцию $R(C)$ и повысив эффективность применения описанного алгоритма предварительным упорядочением элементов множества S—расположением строк матрицы C в порядке уменьшения их весов, выражаемых числом единиц в строке.

Продемонстрируем этот процесс на примере [3], которому соответствует следующая матрица C, прошедшая через этап предварительного упорядочивания строк:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и где через $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ выражаются строки, обозначаемые в [3] через d, a, b, c, e, f соответственно.

В ходе реализации алгоритма вектор $\boldsymbol{a}$ примет на этапе (д) следующую последовательность значений:

1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0*
1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1*
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0*
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1*
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1*

в которой отмечены звездочками те из них, которые являются решениями. Отсюда следует, что

$$D = R(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. искомыми в данной задаче тупиковыми дизъюнктивными нормальными формами служат дизъюнкции конъюнкций, представляемых символами a, b, c, d, e, f и берущихся в следующих комбинациях:

$$d, a, b;\ d, a, f;\ d, b, e;\ d, c, e, f;\ a, b, c, e;\ b, c, e, f.$$

9. Оператор R оказывается достаточно универсальным и может интерпретироваться по-разному. Так, например, кроме рассмотренной, в работе [3] была замечена следующая интерпретация: если столбцы матрицы C представляют сомножители в конъюнктивной нормальной форме положительной булевой функции ($c_i^j = 1$, если переменная x_i входит в элементарную дизъюнкцию, являющуюся j-ым сомножителем), то строки матрицы $D = R(C)$ будут представлять члены дизъюнктивной нормальной формы этой функции ($d_i^j = 1$, если x_j входит в элементарную конъюнкцию, являющуюся i-ым членом дизъюнкции).

Можно предложить еще следующие интерпретации.

Если столбцами матрицы C служат радиусы-векторы некоторых элементов булева пространства $\tilde{X}$, образующих множество S, то строки матрицы $D = R(C)$ будут представлять максимальные интервалы множества $M \setminus S$, содержащие элемент с кодом 00...0: $d_i^j = 1$, если в элементарную конъюнкцию, соответствующую представляемому строкой d_i интервалу, входит символ $\bar{x}_i$ и $d_i^j = 0$ в противном случае.

Если C является матрицей смежности некоторого симметрического графа $G = (X, U)$ [5] ($c_i^j = 1$, если ребро $(i, j) \in U$, и $c_i^j = 0$, если $(i, j) \notin U$), то $D = R(C)$ представляет совокупность минимальных мно-

жеств Y контролирующих вершин, удовлетворяющих следующим условиям:

а) для любого $x \in X$ найдется такое $y \in Y$, что $(x, y) \in U$,

б) для любого $y \in Y$ найдется такое $x \in X$, что не существует $z \in (Y \setminus \{y\})$, для которого $(x, z) \in U$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R C. Minnick, IRE Trans., **EC-10**, 6 (1961).
2. W. V. Quine, Am Mathematical Monthly, **59**, 521 (1952).
3. I. B. Pyne, E. J. McCluskey, IRE Trans., **EC-11**, 473 (1962).
4 S. Waligorski, Calculation of the Quine's table for truth functions, Prace ZAM PAN, **2**, A 15.
5. К. Берж, Теория графов и ее применение, ИЛ, М, 1962
6 А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Физматгиз, М, 1962

Сибирский физико-технический
научно-исследовательский институт

Поступила в редакцию
7 мая 1963 г

ON THE TESTS ABBREVIATION WHEN SOLVING SOME PROBLEMS OF DISCRETE AUTOMATON SYNTHESIS

A. D. Zakrevskiy

The problem of tests abbreviation is considered when solving some problems of discrete automatons synthesis and there is given the method of digital computers programing of these tests

The algorhythm transformation $R(C)$ of Boolean matrix C is proposed, based upon one of the considered methods. The well-known interpretation of this transformation is the conversion from the of simple implicants of an arbitrary Boolean function to that of its impassible disjunctive normal forms.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VII, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1964*

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ВЫСОТЕ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН САНТИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА В АТМОСФЕРНОМ КИСЛОРОДЕ И ВОДЯНОМ ПАРЕ

В. В. Кузовлев, К. С. Станкевич

При исследовании поглощения радиоволн в атмосфере радиоастрономическими методами измеряется полное поглощение на луче зрения:

$$\gamma = \int_0^\infty \varkappa(h)\, dl. \tag{1}$$

Как известно [1], для углов места $\varphi > 5°$ можно рассматривать распространение радиоволн как в случае плоской Земли. Тогда $dl = \operatorname{cosec}\varphi dh$ и величину поглощения можно характеризовать произведением коэффициента поглощения на уровне земной поверхности $\varkappa_0$ на эффективную длину пути в атмосфере $H_{\text{эфф}} \operatorname{cosec}\varphi$, где $H_{\text{эфф}}$ представляет собой эффективную высоту в направлении зенита,

$$\gamma = \varkappa_0 H_{\text{эфф}} \operatorname{cosec}\varphi. \tag{2}$$

Зависимость коэффициента поглощения от высоты определяется изменениями температуры и давления В сантиметровом диапазоне ($\lambda > 1{,}5$ *см*) коэффициент поглощения в кислороде равен [1]

$$\varkappa = \varkappa_0 \frac{(P/P_0)^2}{(T/T_0)^{5/2}}; \tag{3}$$

отсюда следует, что эффективная высота поглощения в кислороде определяется выражением

$$\int_0^\infty \frac{(P/P_0)^2}{(T/T_0)^{5/2}}\, dh = H_{1\,\text{эфф}}. \tag{4}$$

До настоящего времени не было прямых измерений эффективных высот $H_{1\,\text{эфф}}$ в атмосфере, и для определения величины и формы линии поглощения в кислороде пользовались вычисляемыми значениями $H_{1\,\text{эфф}}$ на основании какой-либо модели атмосферы. Для стандартной атмосферы $H_{1\,\text{эфф}}$ вычислено в [1] и равно 5,3 *км*. Однако распределения с высотой реальных метеорологических полей температуры и давления отличаются от стандартного распределения; связанные с этим ошибки определения $H_{1\,\text{эфф}}$ могут достигать 30—35%.

Для реальных распределений давления и температуры было выяснено, что величина $H_{1\,\text{эфф}}$ испытывает сильные сезонные изменения от значений $H_{1\,\text{эфф}} = 5 \pm 0{,}2$ *км* в летнее время до значений $H_{1\,\text{эфф}} = 3{,}9 \pm 0{,}4$ *км* зимой, $H_{1\,\text{эфф}} = (4{,}6 \pm 0{,}2)$ *км* весной и осенью.

На графике рис. 1 приведена эффективная высота $H_{1\,\text{эфф}}$, как функция температуры на поверхности земли. Из графика видна линейная зависимость между этими величинами, вследствие которой получаются сезонные изменения $H_{1\,\text{эфф}}$. Отклонение от среднего значения отдельных точек при данной температуре происходит из-за различия в давлениях; среднее отклонение $|\overline{\Delta H_{1\,\text{эфф}}}| = 0{,}12$ *км*. На высотах до 1 *км* возможны инверсии температурной зависимости, которые при положительных температурах на поверхности земли могут приводить к уменьшению $H_{1\,\text{эфф}}$ на $(0{,}2 \div 0.3)$ *км*.

В выражении (3) предполагалось, что полуширина линии поглощения кислорода определяется, согласно кинетической теории, как $\Delta v \sim P/\sqrt{T}$. Однако существуют

экспериментальные данные [2], указывающие на зависимость Δv от температуры в виде $\Delta v \sim P/T^{0,75}$. Учет последнего обстоятельства может привести к уменьшению эффективной высоты на величины порядка 0,1 *км*.

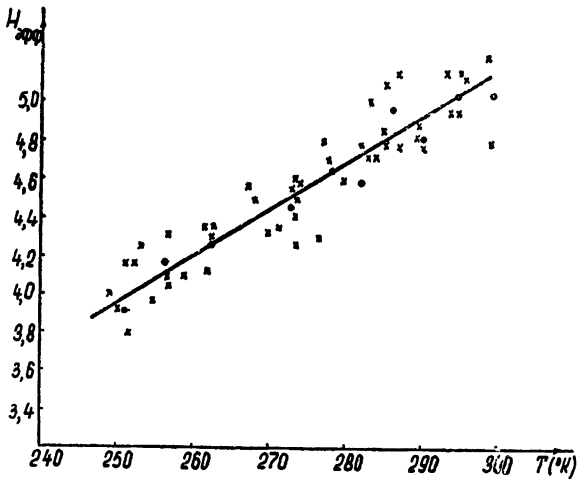


Рис. 1.

Для этих же дней была вычислена эффективная высота поглощения в водяном паре В сантиметровом диапазоне коэффициент поглощения в водяном паре $\varkappa \sim \rho P/T^{3/2}$, где ρ—абсолютная влажность, эффективная высота $H_{2\,эфф}$ определяется выражением

$$H_{2\,эфф} = \int_0^\infty \frac{\rho}{\rho_0} \frac{P/P_0}{(T/T_0)^{3/2}} dh. \qquad (5)$$

Вычисленные на основании (5) $H_{2\,эфф}$ не обнаруживают каких-либо закономерностей и имеют нерегулярный характер; среднее значение равно $H_{2\,эфф} = 1,8$ *км*, что согласуется с [1], и среднее отклонение составляет $|\overline{\Delta H_{2\,эфф}}| = 0,3$ *км* При этом $(\Delta H_{2\,эфф})_{макс}$ могут достигать значений порядка $\pm$ 0,7 *км*.

Во время инверсий на высотах около 500 метров распределение абсолютной влажности имеет максимум, в котором абсолютная влажность может превышать свое значение на поверхности земли в несколько раз При таком распределении нецелесообразно пользоваться эффективными высотами. Если их определить согласно (5), то $H_{2\,эфф} \sim 4$ *км*.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959)
2. M. Tinkham, M W. P. Strandberg, Phys. Rev., 99, 537 (1955)

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 10 июня 1963 г

О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ ВНУТРИ ПЛАЗМЕННОГО СЛОЯ С НУЛЕВОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер

1. Как показано в работе [1], плоскопараллельный слой изотропной плазмы $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$ при точном равенстве $\varepsilon = 0$ („нулевая" среда без потерь) является идеальным отражателем для волн поперечно-магнитного типа (ТМ по отношениюк

x-направлению). Внутри такого слоя возбуждается безмагнитное поле ($H = 0$, $E \neq 0$), с помощью которого, разумеется, нельзя осуществить передачи энергии, так что на второй (удаленной) границе слоя всегда автоматически выполняется условие $E_{\tan}=0$. Учет поглощения ($\varepsilon = \varepsilon_д - i\,\varepsilon_м = -i\,\varepsilon_м \neq 0$) или пространственной дисперсии, обусловленной тепловым движением частиц, приводит к просачиванию части энергии сквозь слой. При этом, если отправляться от случая поглощающей плазмы с каким-то распределением концентрации, то правильные предельные формулы для поля внутри нулевого слоя получаются только при определенном порядке обращения в нуль параметров среды: сначала $\varepsilon_д \to 0$, затем $\varepsilon_м \to 0$*. Представляется интересным проследить за характером изменения поля в аналогичных условиях при наличии пространственной дисперсии, чему и посвящена настоящая заметка**.

2. Пусть на плазменный слой ($-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$) падает из пустоты плоская электромагнитная волна типа ТМ***:

$$H_y = 1\, e^{-i\alpha_0 k_0 x - i\gamma k_0 z},$$

$$E_z = -Z_0 \alpha_0 e^{-i\alpha_0 k_0 x - i\gamma k_0 z}, \quad E_x = Z_0 \gamma\, e^{-i\alpha_0 k_0 x - i\gamma k_0 z},$$

где $\alpha_0 = \sqrt{1-\gamma^2}$, $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$.

В квазигидродинамическом приближении поле внутри слоя следует искать в виде суперпозиции обычных электромагнитных волн ($H \neq 0$) и безмагнитных плазменных волн ($H = 0$), существующих независимо:

$$H_y = g_1 e^{-\alpha k_0 x} + g_2 e^{\alpha k_0 x},$$

$$E_z = iZ_0\left[\frac{\alpha}{\varepsilon}\left(g_1 e^{-\alpha k_0 x} - g_2 e^{\alpha k_0 x}\right) + \frac{\gamma}{\alpha_T}\left(g_1^{(T)} e^{-\alpha_T k_0 x} - g_2^{(T)} e^{\alpha_T k_0 x}\right)\right],$$

$$E_x = Z_0\left[\frac{\gamma}{\varepsilon}\left(g_1 e^{-\alpha k_0 x} + g_2 e^{\alpha k_0 x}\right) + g_1^{(T)} e^{-\alpha_T k_0 x} + g_2^{(T)} e^{\alpha_T k_0 x}\right]. \tag{1}$$

Здесь обозначено: $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon}$, $\alpha_T = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon/\beta_T^2}$, $\beta_T^2 = \chi T_0/mc^2$ (χ—постоянная Больцмана, T_0—температура плазмы, m—масса электрона). Зависимость от z определяется множителем $e^{-i\gamma k_0 z}$.

Удовлетворяя на границах $x = \pm x_0$ условиям непрерывности тангенциальных составляющих E и H и нормальных составляющих E (в предположении зеркального отражения частиц от границы плазмы [2]) получим следующую систему уравнений, определяющую амплитуды полей в (1) и коэффициенты отражения (Г) и прохождения (T):

$$1\, e^{i\alpha_0 k_0 x_0} + \Gamma e^{-i\alpha_0 k_0 x_0} = g_1 e^{\alpha k_0 x_0} + g_2 e^{-\alpha k_0 x_0},$$

$$-\alpha_0\left(e^{i\alpha_0 k_0 x_0} - \Gamma e^{-i\alpha_0 k_0 x_0}\right) = i\frac{\alpha}{\varepsilon}\left(g_1 e^{\alpha k_0 x_0} - g_2 e^{-\alpha k_0 x_0}\right) +$$

$$+ i\frac{\gamma}{\alpha_T}\left(g_1^{(T)} e^{\alpha_T k_0 x_0} - g_2^{(T)} e^{-\alpha_T k_0 x_0}\right), \tag{2}$$

$$\gamma\left(e^{i\alpha_0 k_0 x_0} + \Gamma e^{-i\alpha_0 k_0 x_0}\right) = \frac{\gamma}{\varepsilon}\left(g_1 e^{\alpha k_0 x_0} + g_2 e^{-\alpha k_0 x_0}\right) +$$

$$+ \left(g_1^{(T)} e^{\alpha_T k_0 x_0} + g_2^{(T)} e^{-\alpha_T k_0 x_0}\right),$$

$$g_1 e^{-\alpha k_0 x_0} + g_2 e^{\alpha k_0 x_0} = Te^{-i\alpha_0 k_0 x_0},$$

$$i\frac{\alpha}{\varepsilon}\left(g_1 e^{-\alpha k_0 x_0} - g_2 e^{\alpha k_0 x_0}\right) + i\frac{\gamma}{\alpha_T}\left(g_1^{(T)} e^{-\alpha_T k_0 x_0} - g_2^{(T)} e^{\alpha_T k_0 x_0}\right) = -\alpha_0 Te^{-i\alpha_0 k_0 x_0},$$

---

* Действительно, если считать, что в уравнении $\operatorname{div}(\varepsilon E) = 0$ $\varepsilon = \delta x - i\varepsilon_м$, то в предельном случае $\delta \to 0$ только при $\varepsilon_м \neq 0$ получается правильное уравнение $\operatorname{div} E = 0$ [1].

** Одна из частных результирующих формул данной работы уже была приведена в [1] без обсуждения подробностей.

*** Используется практическая рационализированная система единиц; ε_0, μ_0— проницаемости вакуума, ε —относительная диэлектрическая проницаемость плазмы.

$$\frac{\gamma}{\varepsilon}\left(g_1 e^{-\alpha k_0 x_0} + g_2 e^{\alpha k_0 x_0}\right) + \left(g_1^{(T)} e^{-\alpha_T k_0 x_0} + g_2^{(T)} e^{\alpha_T k_0 x_0}\right) = \gamma T e^{-i\alpha_0 k_0 x_0}.$$

3. Оставляя в стороне исследование зависимости Γ и T от параметров среды, в общем случае мы остановимся лишь на некоторых особенностях, представляющих известный интерес. Прежде всего, при $\varepsilon = 0$ (нулевой слой) для коэффициента имеем [1]:

$$T = e^{i\alpha_0 2 k_0 x_0} \beta_T^2 \frac{2\alpha_0 \gamma}{\zeta^-} \frac{1 - (\zeta^+/\zeta^-) e^{-4\gamma k_0 x_0}}{1 - (\zeta^+/\zeta^-)^2 e^{-4\gamma k_0 x_0}}, \tag{3}$$

где

$$\zeta^{\pm} = \beta_T^2 \alpha_0 \gamma e^{\pm 2\gamma k_0 x_0} \pm i \left\{\left[\frac{1}{2}\left(1 + \beta_T^2\right) - \beta_T^2 \gamma^2\right] \times \right.$$

$$\left. \times e^{\pm 2\gamma k_0 x_0} + \left(1 - \beta_T^2\right) \gamma k_0 x_0 \operatorname{sh}^{-1}(2\gamma k_0 x_0)\right\}.$$

Таким образом, как уже отмечалось, нулевой слой утрачивает свойство идеального экрана даже при отсутствии потерь внутри него «Механизм» просачивания энергии сквозь такой слой мы поясним несколько позднее, а сейчас обратим внимание на то, что речь идет не о снятии резонанса, а лишь о небольшом смещении резонансной частоты. Действительно, попытаемся найти условия полного отражения, положив в (2) $T = 0$; считая $\varepsilon \neq 0$, приходим к уравнению

$$(1 - \varepsilon)\gamma^2 \alpha^{-1} 2k_0 x_0 \operatorname{sh}(\alpha 2k_0 x_0) = \alpha_T 2 k_0 x_0 \operatorname{sh}(\alpha_T 2 k_0 x_0), \tag{4}$$

разрешимость которого относительно действительных значений ε дает ответ на поставленный вопрос. Для не слишком малых углов падения ($\gamma^2 \gg |\varepsilon|$, $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon} \simeq \gamma$, $1 - \varepsilon \simeq 1$) уравнение (4) переписывается в виде

$$\gamma 2 k_0 x_0 \operatorname{sh}(\gamma 2 k_0 x_0) = \alpha_T 2 k_0 x_0 \operatorname{sh}(\alpha_T 2 k_0 x_0). \tag{5}$$

Правая часть (5) как функция ε монотонно спадает в области значений $\varepsilon < \beta_T^2 \gamma^2$ и осциллирует в области $\varepsilon > \beta_T^2 \gamma^2$. Очевидно, что эта функция имеет несколько пересечений с прямой $f(\varepsilon) = \text{const}$ (левая часть (5)). Соответствующие корни (в пределах принятого приближения), кроме первого $\varepsilon = 0$, являются корректными и отвечают условиям полного экранирования. Что касается первого корня, то он противоречит предположению, при котором уравнение (4) было получено из (2); правильное значение коэффициента прохождения через нулевой слой дается формулой (3). Таким образом, наличие пространственной дисперсии приводит не только к смещению резонансной частоты, но и к ее расщеплению* Как видно непосредственно из (5), резонансные значения ε ($T(\varepsilon_p) = 0$) прямо пропорциональны β_T^2; график соответствующей зависимости для нескольких первых ε_p представлен на рис. 1.

4. Обсудим теперь подробно характер распределения поля в слое с $\varepsilon = 0$. Чтобы не усложнять вычисления второстепенными деталями, перейдем в (2) от слоя к полупространству, устремив толщину слоя к бесконечности и опуская отраженные от удаленной границы волны. Используя полученные в результате уравнения для поля в плазме, будем иметь:

$$H_y = \frac{2\alpha_0 \alpha_T \varepsilon}{\alpha_0 \alpha_T \varepsilon - i\left[\alpha\alpha_T + \gamma^2(\varepsilon - 1)\right]} e^{-\alpha k_0 x};$$

$$E_z = iZ_0 \frac{2\alpha_0}{\alpha_0 \alpha_T \varepsilon - i\left[\alpha\alpha_T + \gamma^2(\varepsilon - 1)\right]} \left\{\alpha_0 \alpha_T e^{-\alpha k_0 x} + \gamma^2(\varepsilon - 1) e^{-\alpha_T k_0 x}\right\};$$

$$E_x = Z_0 \frac{2\gamma\alpha_0 \alpha_T}{\alpha_0 \alpha_T \varepsilon - i\left[\alpha\alpha_T + \gamma^2(\varepsilon - 1)\right]} \left\{e^{-\alpha k_0 x} + (\varepsilon - 1) e^{-\alpha_T k_0 x}\right\}. \tag{6}$$

Характерной особенностью (6) является наличие магнитного поля $\boldsymbol{H} \neq 0$ при любых значениях ε, включая и $\varepsilon = 0$. Напомним, что в пространственно недиспергирующей плазме внутри нулевого слоя реализуется только безмагнитное решение, так

* Это вполне согласуется с результатами рассмотрения собственных колебаний соответствующего плазменного слоя (см., например, [3]).

как случаю $H \neq 0$ соответствуют неограниченно большие значения электрического поля E. В рассматриваемом случае из (6) при $\varepsilon = 0$ имеем*:

$$H_y = \frac{2\alpha_0 \gamma^2 \beta_T^2}{\alpha_0 \gamma^2 \beta_T^2 + i\gamma\left[2^{-1}\left(1+\beta_T^2\right) - \gamma^2 \beta_T^2\right]} e^{-\gamma k_0 x},$$

$$E_z = iZ_0 \frac{\alpha_0 \gamma\left[\beta_T^2 (2\gamma^2 - 1) - 1 + \left(\beta_T^2 - 1\right)\gamma k_0 x\right]}{\alpha_0 \gamma^2 \beta_T^2 + i\gamma\left[2^{-1}\left(1+\beta_T^2\right) - \gamma^2 \beta_T^2\right]} e^{-\gamma k_0 x},$$

$$E_x = Z_0 \frac{\alpha_0 \gamma\left[2\beta_T^2 \gamma^2 + \left(\beta_T^2 - 1\right)\gamma k_0 x\right]}{\alpha_0 \gamma^2 \beta_T^2 + i\gamma\left[2^{-1}\left(1+\beta_T^2\right) - \gamma^2 \beta_T^2\right]} e^{-\gamma k_0 x}.$$

Интересно, что электромагнитная и плазменная компоненты поля (если под ними подразумевать первый и второй члены в фигурных скобках (6)) порознь неограниченно растут при $\varepsilon \to 0$, тогда как суммарное поле остается конечным. Таким образом, роль плазменного поля состоит в компенсации неограниченно растущей компоненты E у электромагнитной части поля, без чего, в свою очередь, невозможно образование конечного значения $H \neq 0$ и, следовательно, появление конечного потока энергии через нулевой слой**.

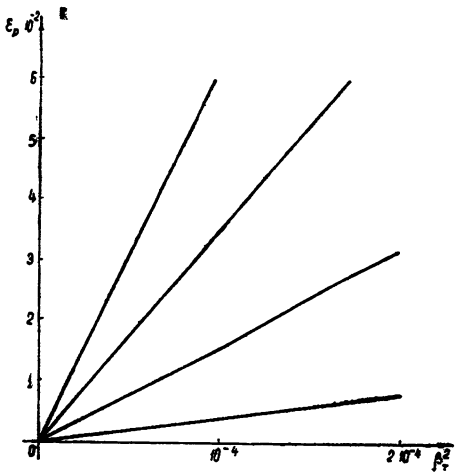


Рис. 1.

5. Резюмируя, можно утверждать следующее. Учет пространственной дисперсии не устраняет эффекта полного экранирования, а приводит только к смещению резонансного значения ε в сторону от нулевого. Нулевой слой ($\varepsilon = 0$) становится слегка прозрачным для волн типа ТМ; просачивание энергии через слой происходит, естественно, за счет конечного значения вектора Пойнтинга, а следовательно, отличного от нуля не только электрического (E), но и магнитного (H) поля внутри слоя.

Переход к нулевому пространственно недиспергирующему слою дает правильные результаты только при определенном порядке устремления к нулю параметров: сначала $\beta_T^2 \to 0$, а затем $\varepsilon \to 0$, т. е. в этом смысле картина сходна с той, которая возникает при переходе к случаю нормально падающей волны (сначала $\gamma \to 0$, затем $\varepsilon \to 0$) [1]. Как обычно, внесение небольшого затухания позволяет устранить все неопределенности, возникающие при соответствующем переходе, и проанализировать его исчерпывающим образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
2. G. B. Field, Astrophys. J., 124, 3, 555 (1956).
3. P. E. M. Vandenplas, R. W. Gould, Physica, 28, 357 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 19 сентября 1963 г.

* Этот результат получается также и при устремлении ε к нулю непосредственно в исходных уравнениях.

** Разумеется, в случае нулевого полупространства поток энергии по-прежнему равен нулю и только учет отраженных волн приводит к отличному от нуля значению.

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ СО СЛАБОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

М. Л. Левин

В задачах о распространении электромагнитных волн в среде со слабой пространственной дисперсией обычно пользуются [1, 2] оборванным на квадратичных членах разложением тензора диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(\omega, \boldsymbol{k})$ по степеням волнового вектора $\boldsymbol{k}$ или же аналогичным разложением обратного тензора $\hat{\varepsilon}^{-1}(\omega, \boldsymbol{k})$. Здесь мы покажем, что при рассмотрении продольного поля (плазменных волн) источников, находящихся в самой диспергирующей среде, второе разложение является более корректным.

Для простоты ограничимся изотропным случаем и пренебрежем дисперсией поперечных волн. Тогда разложению тензора $\hat{\varepsilon}(\omega, \boldsymbol{k})$ соответствует [1] дифференциальная связь

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + \delta \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{E} \tag{1}$$

или эквивалентное ей соотношение

$$\boldsymbol{j} = \frac{i\omega}{4\pi}[(\varepsilon - 1)\boldsymbol{E} + \delta \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{E}], \tag{2}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\delta = \delta(\omega)$ — функции частоты, $\boldsymbol{j} = \frac{i\omega}{4\pi}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E})$ — плотность индуцируемого тока; зависимость от времени дается фактором $e^{i\omega t}$. Из (1) сразу следует (см. [3]), что скалярный потенциал φ продольного поля удовлетворяет уравнению

$$\Delta(\varepsilon\varphi + \delta\Delta\varphi) = -4\pi\rho_{\text{ст}} \tag{3}$$

и для единичного точечного источника $\rho_{\text{ст}} = \delta(\boldsymbol{r})$ равен

$$G(r) = \frac{1 - e^{-i\varkappa r}}{\varepsilon r}, \tag{4}$$

где $\varkappa = \sqrt{\varepsilon/\delta}$. Таким образом, уравнение связи (1) приводит к функции Грина, не имеющей особенности в источнике.

Если же исходить из разложения обратного тензора диэлектрической проницаемости (или обратного тензора проводимости), то вместо (2) мы будем иметь соотношение вида

$$\boldsymbol{j} + \delta \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{j} = \frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon - 1)\boldsymbol{E}, \tag{5}$$

которое вместе с уравнениями Максвелла приводит к следующему уравнению скалярного потенциала:

$$\Delta(\varepsilon\varphi + \delta\Delta\varphi) = -4\pi(\rho_{\text{ст}} + \delta\Delta\rho_{\text{ст}}). \tag{6}$$

Решение уравнения (6) для точечного источника дает функцию Грина

$$\bar{G}(r) = \frac{1 - (1 - \varepsilon)e^{-i\varkappa r}}{\varepsilon r}, \tag{7}$$

переходящую при $r \to 0$ в вакуумную функцию Грина $1/r$

Такое различие в поведении функций G и $\bar{G}$ обусловлено тем, что связь вида (2) является приближенной для любой модели среды и теряет смысл при $r \sim L = \sqrt{\delta}$. Уравнение же (5) является точным для ряда моделей среды (например, при квазигидродинамическом описании плазмы) и поэтому, подобно дебаевской теории сильных электролитов, приводит к правильному результату и при $r \ll L$.

При рассмотрении продольных волн в прозрачной плазме мы имеем дело с интервалом частот, в котором $\varepsilon(\omega) \ll 1$. Поэтому волновые продольные поля источников в дальней зоне, вычисленные с помощью функций Грина G и $\bar{G}$, практически совпадают, так что результаты работы [3] остаются в силе и для связи (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 34, 1593 (1958).
2. В. П. Силин и А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
3. А. А. Андронов и Г. В. Городинский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 234 (1962).

Поступила в редакцию
7 июня 1963 г

О СИЛЕ ЛИНИИ ПРИ МАГНИТО-ДИПОЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В СВЕРХТОНКОЙ СТРУКТУРЕ АТОМА

В. М. Конторович, Г. Е Черняк

В связи с развитием радиоастрономии появилась возможность наблюдать магнито-дипольное излучение, связанное со спонтанными переходами между компонентами сверхтонкой структуры атомов межзвездной среды (Ван де Хулст [1], Шкловский [2]). В ряду H^1, He^4, O^{16}, C^{12}, N^{14}, D элементы расположены по убыванию распространенности в космическом пространстве. Известно, что спины ядер наиболее распространенных изотопов гелия, кислорода и углерода равны нулю, так что сверхтонкое расщепление у них отсутствует. Линия водорода сейчас широко исследуется; обсуждалась возможность наблюдения радиоизлучения дейтерия, азота [2, 3]. При этом в [3] используется ошибочное выражение для силы линии, которое для азота приводит к довольно значительному расхождению с правильным результатом (для водорода результат остается прежним). В данной заметке проводится вычисление силы линии

По определению сила линии [4] для магнито-дипольного перехода между двумя уровнями сверхтонкой структуры

$$S(n, F; n, F-1) = \sum_{m, m'} |(n, F, m \,|\, \hat{\boldsymbol{M}} \,|\, n, F-1, m')|^2, \tag{1}$$

где F, m—квантовые числа полного момента атома и его проекции на ось квантования, n—совокупность квантовых чисел L, S, J, I—орбитального, спинового, полного моментов электронной оболочки и момента ядра соответственно, $\hat{\boldsymbol{M}} = \hat{\boldsymbol{L}} + 2\hat{\boldsymbol{S}}$—оператор магнитного момента атома в единицах магнетона Бора (вкладом ядерного магнитного момента пренебрегаем [5]). Используя правило сумм [4], получаем в обозначениях Кондона и Шортли:

$$S(n, F; n, F-1) = F(4F^2-1)\,|(n, F \;\hat{M}\; n, F-1)|^2.$$

Рассматривая нашу систему как состоящую из двух слабо взаимодействующих электронной и ядерной подсистем, по известным правилам [4] найдем зависимость матричных элементов вектора $\hat{\boldsymbol{M}}$, относящегося к электронной подсистеме, от квантового числа F полного момента атома:

$$(n, F \vdots \hat{M} \;\; n, F-1) = -(n \;\; \hat{M} \;\; n)\,\frac{\sqrt{[F^2-(I-J)^2]\,[(I+J+1)^2-F^2]}}{2F\sqrt{4F^2-1}}.$$

Для вычисления $(n \;\; \hat{M} : n)$ заметим, что $\hat{\boldsymbol{M}} = \hat{\boldsymbol{J}} + \hat{\boldsymbol{S}}$ и $(n \;\; \hat{M} \;\; n) = (LSJI \;\; \hat{J} \;\; LSJI) + (LSJI \cdot \hat{S} \;\; LSJI)$. Первое слагаемое, очевидно, равно единице; чтобы вычислить второе, разобьем электронную систему на спиновую и орбитальную подсистемы и вновь воспользуемся формулами для матричных элементов вектора $\hat{\boldsymbol{S}}$, относящегося к спиновой подсистеме. Таким образом получим:

$$(n \vdots \hat{M} : n) = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}.$$

Окончательно выражение для силы линии представляется в виде:

$$S(n, F; n, F-1) = \frac{[3J(J+1)-L(L+1)+S(S+1)]^2 [F^2-(I-J)^2] [(I+J+1)^2-F^2]}{16FJ^2(J+1)^2}. \quad (2)$$

В частности, для S-состояния

$$S(n, F; n, F-1) = \frac{1}{F}[F^2-(I-J)^2][(I+J+1)^2-F^2]. \quad (3)$$

Сверхтонкая структура атомов водорода и дейтерия хорошо описывается рассельсаундеровским приближением. Для азота же в представлении чистой LS-связи сверхтонкое расщепление основного состояния отсутствует, что противоречит эксперименту [6]. Однако, это наблюдаемое сверхтонкое расщепление можно вполне удовлетворительно объяснить взаимодействием $(1s)^2(2s)^2(2p)^2(^4S_{3/2})$, $(1s)^2(2s)(2p)^2(ms)(^4S_{3/2})$ $(1s)(2s)^2(2p)^2(ms)(^4S_{3/2})$ конфигураций [7]. При этом уровни, между которыми происходит переход, соответствуют состояниям с определенными наборам и квантовых чисел (L, S, J, I); в случае азота также можно пользоваться представлением (1) для силы линии.

Приведем значение сил линий для водорода, дейтерия и азота, вычисленные по формуле (3), и сравним со значениями, приведенными в [3] (см таблицу 1).

Таблица 1

Элемент	Переходы $F \to F-1$	Длина волны λ	Сила линии	
			по формуле (3)	по [3]
Водород	$1 \to 0$	21 *см*	3	3
Дейтерий	$3/2 \to 1/2$	91,6 *см*	5,3	6
Азот N^{14}	$5/2 \to 3/2$ $3/2 \to 1/2$	11,47 *м* 19,14 *м*	14,4 13,3	60 30

Условие наблюдения радиолинии азота можно записать в виде неравенства $t > t_{мин} = 1/(\Delta\nu\tau^2)$ [3], где $t_{мин}$ — минимальное «время накопления» регистрирующего прибора, $\Delta\nu$ — ширина полосы пропускания приемника, определяемая допплеровской шириной линии, τ — оптическая толщина Галактики в направлении наблюдения. Так как τ пропорциональна вероятности перехода, то минимальное время накопления обратно пропорционально квадрату силы линии. Оценка $t_{мин}$ для азота при переходе $5/2 \to 3/2$ дает округленно 27 часов, т. е. время накопления оказывается на порядок большим, чем указано в [3]. Этот результат, однако, может измениться в сторону уменьшения, если реальная концентрация азота больше, чем предполагается в настоящее время ($3 \cdot 10^{-4}$ от концентрации водорода в космосе).

Авторы благодарны С. Я. Брауде и И. С. Шкловскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. de Hulst, Neederlands, Tydsreift Natuurkunde, 11, 201, 219 (1945).
2. И. С. Шкловский, Астрон. ж., 26, 10 (1949).
3. И. С. Шкловский, Космическое радиоизлучение, ГИТТЛ, М., 1956, гл. 4
4. Е. Кондон, Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, М., 1949.
5. J. P. Wild, Astrophys. J., 115, 206 (1952).
6. M. A. Heald, R. Beringer, Phys. Rev., 96, 645 (1954); W. W. Holloway-Jr. E. Lüscher, R. Novick, Phys. Rev., 126, 2109 (1962).
7. A. Abragam, J. Horowitz, M. N. L. Pryce, Proc. Roy. Soc., A230, 169 (1955); N. Bessis, H. Lefebvre-Brion, C. M. Moser, Phys. Rev., 124, 1124 (1961).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
22 апреля 1963 г.

К ВОПРОСУ О ЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЯХ ЯЧЕЕК С ПАРАМИ ЩЕЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. Ф. Золин

В недавно опубликованной работе по оптической накачке паров натрия [1] были приведены (без объяснения) наблюдения затрудненной диффузии паров натрия в ячейках с полисилоксановым защитным покрытием.

С нашей точки зрения, эти наблюдения могут свидетельствовать о наличии в ячейках постороннего газа, выделившегося в результате реакции натрия с защитным покрытием. Конечно, эти соображения нуждаются в прямой проверке; однако объединенные с наблюдениями поведения рубидиевых ячеек с полисилоксановым покрытием [2] и наблюдениями цезиевых ячеек с таким же покрытием [3], эти соображения дают основание считать, что полисилоксановое защитное покрытие ячеек с парами щелочных элементов нельзя считать пригодным для использования в стандартах частоты с оптической индикацией вследствие химической реакции с выделением газов, имеющей место при контакте покрытия с парами щелочных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Насонов, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 518 (1963).
2. C. O. Alley, Advances in Quantum Electronics, p. 120, ed. Singer, New York, 1961.
3. Е. Н. Базаров, В. Ф. Золин, М. А Самохина, Радиотехника и электроника, 8, 1483 (1963).

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
2 сентября 1963 г.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В статье [2] Городинского и Эйдмана, в отличие от нашей работы [1], сделан вывод о невозможности отделения импульса «подходного» излучения от «аннигиляционного» в задаче о налетании нерелятивистского заряда на шар [1]. Мы не можем согласиться с этим утверждением. Действительно, поле излучения в рассматриваемом случае состоит из двух различных по форме радиационных всплесков, следующих один за другим. Всплеск подходного излучения опережает аннигиляционный всплеск и имеет плавный характер, так как он соответствует плавному ускорению и усилению изображения за время порядка отношения радиуса шара к скорости заряда. В момент налетания на шар возникает аннигиляционный импульс, имеющий гораздо большую напряженность поля и малую длительность, поскольку он соответствует мгновенному торможению заряда. Резкий излом напряженности поля и разделяет два импульса излучения.

Это видно непосредственно из выражения для определяющей поле излучения производной дипольного момента системы : $\dot{P}_z = e\left\{v^2\frac{6a^3}{z^4} + \dot{v}\left(1 - \frac{2a^3}{z^3}\right)\right\} = P_{\text{подх}} + \ddot{P}_{\text{анниг}}$, где $z = vt - a$, v—скорость частицы, a—радиус шара, $t = 0$—момент налетания на шар. Поскольку $v = \text{const}$ при $t < 0$, то $\ddot{P}_{\text{анниг}}$ отлично от нуля лишь при $t = 0$, в то время как $\ddot{P}_{\text{подх}}$ вызывает излучение при $t < 0$. Вывод [2] о невозможности отделения импульса „подходного" излучения от „аннигиляционного" основывался на виде фурье-компоненты поля. Ясно, однако, что компонента Фурье $\ddot{P}_\omega = -\frac{ev}{2\pi}\left\{1 + ix + x^2 + ix^3 e^{ix}\int\limits_{-\infty}^{-x}\frac{e^{iy}}{y}\,dy\right\}$, где $x = \omega a/v$, не носит явных следов этапов процесса, так как в нем уже просуммированы подобные члены от импульсов разных знаков Поэтому вывод авторов [2] представляется нам некорректным

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 29, 388 (1955).
2. Г. В. Городинский В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав —Радиофизика, 6, 405 (1963).

Г. А. Аскарьян

Поступило в редакцию
12 июля 1963 г.