

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|------|
| Кротиков В. Д. Измерение радиоизлучения Луны на волне 50 см | 1087 |
| Кузьмин А. Д. Об ионосферной модели Венеры | 1090 |
| Ласточкин В. П., Станкевич К. С. Измерение коэффициента поглощения в атмосфере в дециметровом диапазоне радиоволн | 1098 |
| Гайлитис А. К. и Цытович В. Н. О влиянии среды на магнитотормозное ускорение релятивистских частиц | 1103 |
| Барыахтар В. Г., Пелетминский С. В. Кинетические уравнения для электронов плазмы и излучаемых ими фотонов в сильном магнитном поле | 1115 |
| Конторович В. М., Кутин И. Н. Преобразование волны на границе плазмы в магнитном поле | 1129 |
| Эйдман В. Я. Уравнение тонкой цилиндрической антенны в плазме при учете пространственной дисперсии | 1140 |
| Гулин Э. П. О некоторых корреляционных соотношениях при отражении звуковой волны от статистически шероховатой поверхности | 1144 |
| Иванов Е. А. Дифракция поля излучающей поверхностной антенны, возбуждаемой элементарным диполем, на некоторых телах вращения | 1155 |
| Бородзич Э. В., Сороченко Р. Л. К вопросу о применении малошумящих усилителей в спектральных радиометрах | 1167 |
| Иванов В. Н. О дисперсионных свойствах косой спиралей прямоугольного попечного сечения | 1173 |
| Голубенцев А. Ф. О решении уравнений ЛБВ с помощью тригонометрических рядов | 1179 |
| Рошаль А. С. Шумящий электронный поток в системе возбуждаемых резонаторов | 1184 |
| Ковалевский М. М., Рошаль А. С. Расширение полосы удаления шума в квадрупольном усилителе с помощью системы несвязанных резонаторов на входе | 1195 |
| Богачев В. М., Кравцов Ю. А. О гармоническом воздействии на систему двух контуров, связанных нелинейной емкостью | 1202 |
| Ашель Н. И. и Постников Л. В. К теории LR-генератора на транзисторе | 1216 |
| Шильман С. В. Определение оптимальных характеристик систем регулирования с модуляцией | 1227 |
| Савельев В. П. Об одной задаче оптимального управления | 1240 |
| Арефьев Б. А. Об устойчивости систем экстремального регулирования с постоянной скоростью поиска | 1249 |
| Анишин Н. С. Некоторые способы совмещения устройств оперативной и постоянной памяти | 1258 |
| Краткие сообщения и письма в редакцию | |
| Цейтлин Н. М. К методике прецизионных измерений с помощью «искусственной Луны» | 1265 |
| Столяров С. Н. Некоторые особенности поля излучения заряженной частицы в движущейся среде | 1268 |
| Дмитренко Д. А., Чикин А. И. Широта спектральной линии некоторых низкочастотных и радиочастотных генераторов | 1271 |
| Страховский Г. М., Татаренков В. М. Простой термостат для резонатора молекулярного генератора | 1273 |
| Щеглов В. А. О молекулярном генераторе с двумя типами собственных колебаний резонатора | 1275 |
| Страховский Г. М., Татаренков В. М., Туманов О. А. Молекулярный генератор с двумя последовательными резонаторами на аммиаке NH_3^{14} (линия 3,2) | 1279 |
| Информация | |
| Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. III, № 4, 1963 | 1281 |
| Содержание т. VI журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1963 г. | 1283 |
| Именной указатель т. VI журнала «Известия высших учебных заведений МВ и ССО СССР» по разделу «Радиофизика» за 1963 г | 1288 |

ИЗМЕРЕНИЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНЕ 50 см

В. Д. Кротиков

По методу „искусственной Луны“ проведены весьма точные измерения радиоизлучения Луны на волне 50 см. Средняя по диску эффективная температура на этой волне оказалась равной $240^{\circ}\text{K} \pm 14^{\circ}\text{K}$. Полученные результаты подтверждают сделанный ранее вывод о росте температуры вглубь Луны.

В сентябре 1962 г. методом „искусственной Луны“, разработанным в [1], были проведены точные измерения средней по диску эффективной температуры Луны на волне 50 см.

Наблюдения осуществлялись с помощью радиотелескопа, состоящего из параболического рефлектора диаметром 8 м, облучаемого логарифмической антенной, и модуляционного радиометра с порогом чувствительности $0,3^{\circ}\text{K}$ при постоянной времени 16 сек. Ширина диаграммы направленности антенны на половинном уровне по мощности составляла $4^{\circ}20'$. Ордината диаграммы на лимбе Луны была равна 0,99; поэтому измеряемая температура совпадала с усредненной по диску яркостной температурой.*

В соответствии с [1], излучение Луны сравнивалось с тепловым излучением диска диаметром 380 см, покрытого поглощающим материалом. Диск имел угловые размеры $56',57$ и располагался в фраунгоферовой зоне антенны под углом места 26° .

Поскольку на волне 50 см существует заметный фон космического излучения, для уменьшения его влияния наблюдения Луны производились, когда Луна находилась в высоких галактических широтах и за диском проходили области с высокими галактическими широтами. В этих областях фон космического излучения мал по величине и достаточно однороден, поэтому его легко учесть, пользуясь известными изофотами [3,4].

Процесс измерений был аналогичен описанному в [2] и заключался в следующем. Вначале антенна наводилась на опорную область, расположенную на высоте Луны и отстоящую по азимуту к востоку от ее центра на расстояние, равное $9^{\circ}/\cos h$ (h —угол места Луны). Эта область сопровождалась в течение 2–3 минут по азимуту и высоте со скоростями движения Луны. Затем антенна наводилась на Луну, которая сопровождалась также в течение 2–3 минут, после чего антенна отводилась по азимуту в опорную область, расположенную к западу от Луны на расстояние $9^{\circ}/\cos h$; эта область также сопровождалась с соответствующей скоростью.

После трех записей Луны записывалось приращение сигнала от диска. При этом отведение антенны в опорную область не производилось. Нулевой уровень записывался при опущенном диске, а сигнал—при его установке в зону диаграммы антенны. Было обращено особое внимание на то, чтобы при подъеме и опускании эталона никаких дополнительных местных предметов или опорных сооружений в зоне диаграммы направленности антенны не появлялось. В результате одного дня измерений получалась серия чередующихся записей

(Луна—диск), состоявшая из 20÷25 записей Луны и 8÷10 записей диска, которая подвергалась обработке и последующему усреднению.

Обработка измерений производилась по формуле, учитывающей поправки на космическое радиоизлучение в областях за Луной, за диском и в обеих опорных областях *:

$$\bar{T}_L = \frac{n_L}{n_d} \alpha T_0 e^{-\Delta\gamma} (1 + \xi - \eta) - \frac{n_L}{n_d} \alpha \bar{T}_{\phi L}^{(S_L)} e^{-\Delta\gamma} + \\ + \bar{T}_{\phi L}^{(S_{RL})} - k [\bar{T}_{\phi L}^{(S_{RL})} - \frac{1}{2} (\bar{T}_{10\pi}^{(S_{RL})} + \bar{T}_{20\pi}^{(S_{RL})})],$$

где $\bar{T}_L = \int_{S_L} T_L F d\Omega / \int_{S_L} F d\Omega$ —средняя по диску эффективная температура

Луны при наблюдении вне атмосферы Земли, n_L —отклонение выходного прибора при наведении антенны на Луну, n_d —отклонение выходного прибора при наведении на эталонный диск, T_0 —температура эталона, выраженная в градусах Кельвина, $\alpha = \int_{S_L} F d\Omega / \int_{S_L} F d\Omega$ —коэффи-

циент, учитывающий разницу в угловых размерах Луны и диска (при определении α вершина диаграммы аппроксимировалась параболой), $e^{-\Delta\gamma}$ —коэффициент, учитывающий поглощение в атмосфере, ξ —поправка, обусловленная дифракцией радиоизлучения Земли на эталоне, η —поправка на „нечерноту“ поглощающего материала, определяемая по излучению и в лаборатории, $\bar{T}_{\phi L}^{(S_L)} = \int_{S_L} T_{\phi L} F d\Omega / \int_{S_L} F d\Omega$ —

яркостная температура фона космического излучения за диском, усредненная в пределах телесного угла, занимаемого диском, $\bar{T}_{\phi L}^{(S_{RL})} = \int_{S_{RL}} T_{\phi L} F d\Omega / \int_{S_{RL}} F d\Omega$ и $\bar{T}_{\phi L}^{(S_{RL})} = \int_{S_{RL}} T_{\phi L} F d\Omega / \int_{S_{RL}} F d\Omega$ —соответственно

яркостные температуры фона космического излучения за Луной, усредненные в пределах телесного угла, занимаемого Луной, и в пределах главного лепестка диаграммы, $\bar{T}_{10\pi}^{(S_{RL})} = \int_{S_{RL}} T_{10\pi} F d\Omega / \int_{S_{RL}} F d\Omega$,

$\bar{T}_{20\pi}^{(S_{RL})} = \int_{S_{RL}} T_{20\pi} F d\Omega / \int_{S_{RL}} F d\Omega$ —яркостные температуры фона космического излучения в первой и второй опорных областях, усредненные в пределах телесного угла, занимаемого главным лепестком диаграммы, $k = \alpha \int_{S_{RL}} F d\Omega / \int_{S_{RL}} F d\Omega$ —коэффициент, учитывающий ширину диаграммы.

Средняя по диску эффективная температура Луны на волне 50 см получилась равной

$$\bar{T}_L = 240^{\circ}\text{K} \pm 14^{\circ}.$$

Оценим ошибки измерений. Случайная ошибка измерений определяется в основном шумами аппаратуры и уходами нуля и не пре-
восходит $\pm 3\%$ (всего было сделано около 200 записей Луны). Наи-

* Способ учета влияния фона космического радиоизлучения предложен Цейтлинным [5].

большая систематическая ошибка возникает за счет неопределенности отсчета расстояния от радиотелескопа до диска ($\pm 1,5\%$). Неточность определения величины α также может привести к систематической ошибке $\pm 1,5\%$. Дифракционная поправка $\beta = +4\%$, поэтому неточность ее учета может изменить результат на $\pm 1\%$.

Поправки на нечерноту материала не делалось ($\eta=0$), так как измерения показали, что поглощающий материал является достаточно черным. На волне 50 см поглощение в атмосфере мало и поэтому ошибка, возникающая за счет неточности учета метеоусловий, не превосходит $\pm 0,5\%$. Поскольку наблюдения Луны производились в высоких галактических широтах, влияние фона космического излучения на результат мало. Как показал анализ, даже полный неучет, фона космического излучения при данных условиях измерений не может привести к ошибке больше $\pm 2\%$. Полная ошибка измерений, полученная при среднеквадратичном суммировании, равна $\pm 6\%$.

Полученное значение средней по диску эффективной температуры подтверждает сделанный в [2] вывод о росте средней по диску эффективной температуры с длиной волны и свидетельствует, согласно [6], о росте температуры вглубь Луны.

В заключение приношу благодарность В. С. Троицкому за руководство работой, Э. С. Планкину и Ю. П. Разумовскому за участие в наблюдениях и А. Н. Иванниковой за помощь в обработке экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1004 (1961).
2. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 242 (1963).
3. C. L. Seeger, J. L. H. M. Stumpers, N. wan Hugck, Philips Techn. Rev., 21, 317 (1959).
4. F. Dröge, W. Priester, Z. Astrophys., 40, 236 (1956).
5. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
6. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж. (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 апреля 1963 года

THE MEASUREMENT OF THE LUNAR INTEGRAL RADIO EMISSION AT 50 cm WAVELENGTH

V. D. Krotikov

Highly precise measurements have been carried out of the Moon integral radio emission at 50 cm wavelength according to the method of an „artificial Moon“. The disk average effective temperature has turned out to be equal to $240^{\circ}\text{K} \pm 14^{\circ}\text{K}$ at the 50 cm wavelength. The results obtained confirm the conclusion made previously about the temperature increase into the Moon's interior.

ОБ ИОНОСФЕРНОЙ МОДЕЛИ ВЕНЕРЫ

А. Д. Кузьмин

Рассмотрена модель Венеры с дырчатым или полупрозрачным ионизированным слоем, ответственным за повышенное радиоизлучение планеты в диапазоне сантиметровых и дециметровых волн. Определены обобщенные параметры слоя и поверхности планеты, при которых расчетный спектр радиоизлучения соответствует экспериментальному. Обсуждается также вариант ионосферной модели, в котором излучающий слой находится в нижних плотных слоях атмосферы планеты. В качестве возможных источников ионизации указываются космические лучи и радиоактивность атмосферы.

В последние годы проведены измерения спектра собственного радиоизлучения Венеры в диапазоне волн от 4 *мм* до 40 *см* [1–10]. Полученные данные дают основание полагать, что яркостная температура Венеры (ночной ее стороны) составляет около 600°К на волнах от 2 до 40 *см* и уменьшается до 350–400°К на более коротких волнах. Произведены также радиолокационные исследования Венеры [11–15], показавшие, что в диапазоне от 12 до 68 *см* эффективное сечение отражения составляет 0,1 площади видимого диска планеты.

В настоящей статье рассматривается возможность удовлетворения указанным экспериментальным данным ионосферной моделью Венеры; оцениваются необходимые для справедливости этой модели параметры атмосферы и поверхности планеты.

1. Модель Джонса [16] со сплошной оптически толстой на $\lambda > 2 \text{ см}$ ионосферой не удовлетворяет радиолокационным данным. Эта трудность может быть преодолена, если ионосфера не сплошная, а дырчатая или полупрозрачная.

Яркостная температура радиоизлучения планеты, окруженнной дырчатым ионизированным слоем с оптической толщиной τ и кинетической температурой электронов T_e , равна

$$T_s = T_p(1 - R) + b[T_e - T_p(1 - R)](1 - e^{-\tau}). \quad (1)$$

Здесь T_p —температура поверхности планеты, R —ее коэффициент отражения, b —отношение площади диска, покрытого ионосферой, к полной площади диска планеты.

Согласно [17], коэффициент поглощения

$$\kappa = \frac{1}{2c\mu\epsilon_0} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{Nv}{(\omega + \omega_H)^2 + v^2}. \quad (2)$$

В отсутствие магнитного поля ($\omega_H = 0$) для однородного слоя в неотклоняющей области

$$\tau(\omega) = 5,3 \cdot 10^{-2} \frac{z N v}{\omega^2 + v^2}, \quad (3)$$

где z —толщина слоя.

Подставляя (3) в (1), получим аналитическую зависимость яркостной температуры от частоты $T_{sB}(\omega)$, т. е. расчетный спектр для

данной модели. Этот спектр определяется тремя параметрами $zN\nu$; $T_n(1-R)$; $b[T_e - T_n(1-R)]$. Подберем эти параметры таким образом, чтобы расчетный спектр удовлетворял экспериментальным данным [8]. При $zN\nu = 2 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$, $T_n(1-R) = 350^\circ\text{K}$, $b[T_e - T_n(1-R)] = 230^\circ\text{K}$ получим расчетный спектр, приведенный на рис. 1. Видно хорошее соответствие результатам измерений [1-10], также нанесенным на этот рисунок.

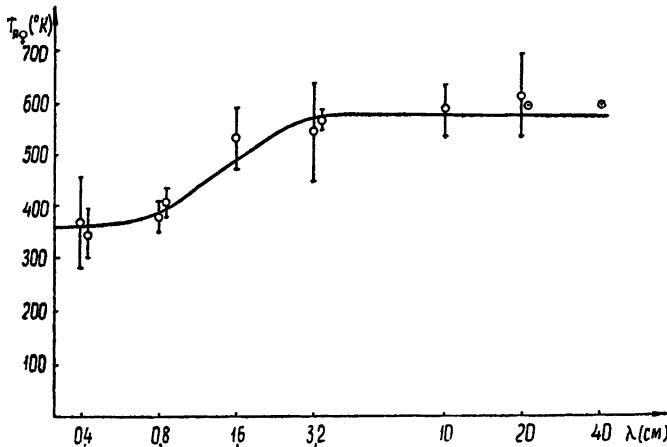


Рис. 1. Расчетный спектр радиоизлучения Венеры, окруженной дырячай ионосферой. Параметры $zN\nu = 2 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$, $T_n(1-R) = 350^\circ\text{K}$, $b[T_e - T_n(1-R)] = 230^\circ\text{K}$.

В случае сплошной полупрозрачной ионосферы ($b = 1$) для удовлетворения экспериментальным данным необходимо, чтобы оптическая толщина τ была мала и не зависела от длины волн. Последнее имеет место при достаточно высоких частотах соударений, когда $\nu^2 \gg \omega^2$. В этом случае

$$\tau \approx 5,3 \cdot 10^{-2} zN\nu. \quad (4)$$

Такая модель удовлетворяет экспериментальным данным при $\nu = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$, $T_n(1-R) = 350^\circ\text{K}$, $[T_e - T_n(1-R)](1 - e^{-\tau_{\omega=0}}) = 250^\circ\text{K}$. Рассчитанная для этих параметров зависимость яркостной температуры Венеры от длины волны приведена на рис. 2. Как видно, и для этой модели имеет место хорошее соответствие результатам измерений [1-10].

Таким образом, поставленный вопрос о возможности удовлетворения экспериментальным данным ионосферной моделью Венеры решается положительно как для дырячай, так и для полупрозрачной ионосферы.

2. Попытаемся теперь ответить на второй вопрос: каковы должны быть физические условия в атмосфере и на поверхности планеты, при которых реализуются указанные выше значения параметров ионосферной модели.

Из этих значений следует, что температура поверхности и кинетическая температура электронов равны соответственно

$$T_n = \frac{350}{1-R};$$

$$T_e = \frac{230}{b} + T_n(1-R) \quad (\text{дырячая ионосфера}) \quad (5)$$

или

$$T_e = \frac{250}{1 - e^{-\tau_{\omega=0}}} + T_n(1 - R) \quad (\text{полупрозрачная ионосфера}).$$

Следовательно, для определения T_n и T_e необходимо знать коэффициент отражения от поверхности R .

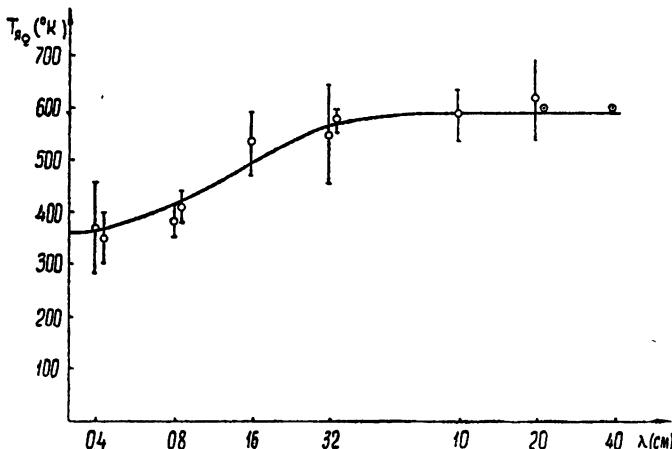


Рис. 2. Расчетный спектр радиоизлучения Венеры, окруженной полупрозрачной ионосферой. Параметры $v = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$, $T_n(1-R) = 350^\circ\text{K}$; $[T_e - T_n(1-R)](1 - e^{-\tau_{\omega=0}}) = 250^\circ\text{K}$.

Определенный по радиолокационным измерениям [11-15] $R_{изм} = 0,1$ равен истинному коэффициенту отражения только в отсутствие поглощающей атмосферы (ионосферы). При наличии ионосферы

$$R = \frac{R_{изм}}{1 - b} \quad (\text{дырчатая ионосфера}); \quad (6)$$

$$R = R_{изм} e^{2\tau} \quad (\text{полупрозрачная ионосфера}).$$

Если, кроме того, поверхность отражает не зеркально, а как матовый шар, то

$$R = \frac{3}{8} \frac{R_{изм}}{1 - b} \quad (\text{дырчатая ионосфера}); \quad (7)$$

$$R = \frac{3}{8} R_{изм} e^{2\tau} \quad (\text{полупрозрачная ионосфера}).$$

Следовательно, T_n и T_e не могут быть определены однозначно из указанных параметров модели и имеющихся данных радиолокационных измерений. На рис. 3, 4 построены графики T_n и T_e , удовлетворяющие рассматриваемым моделям при различных значениях b и τ . Там же приведены диэлектрические постоянные материала поверхности, вычисленные из соотношения

$$\epsilon = \left(\frac{1 + \sqrt{R}}{1 - \sqrt{R}} \right)^2. \quad (8)$$

Следует обратить внимание, что, согласно графикам рис. 3, 4, относительно низкие температуры поверхности ($\sim 400^\circ\text{K}$) не являются обязательными для ионосферной модели. При больших ϵ материала

поверхности ионосферная модель удовлетворяет экспериментальному спектру при $T_n \approx T_e$ и даже при $T_n > T_e$.

Для численных оценок T_n и T_e необходимо привлечь дополнительные данные, позволяющие разрешить указанную неоднозначность. Решающим экспериментом здесь послужило бы радиолокационное из-

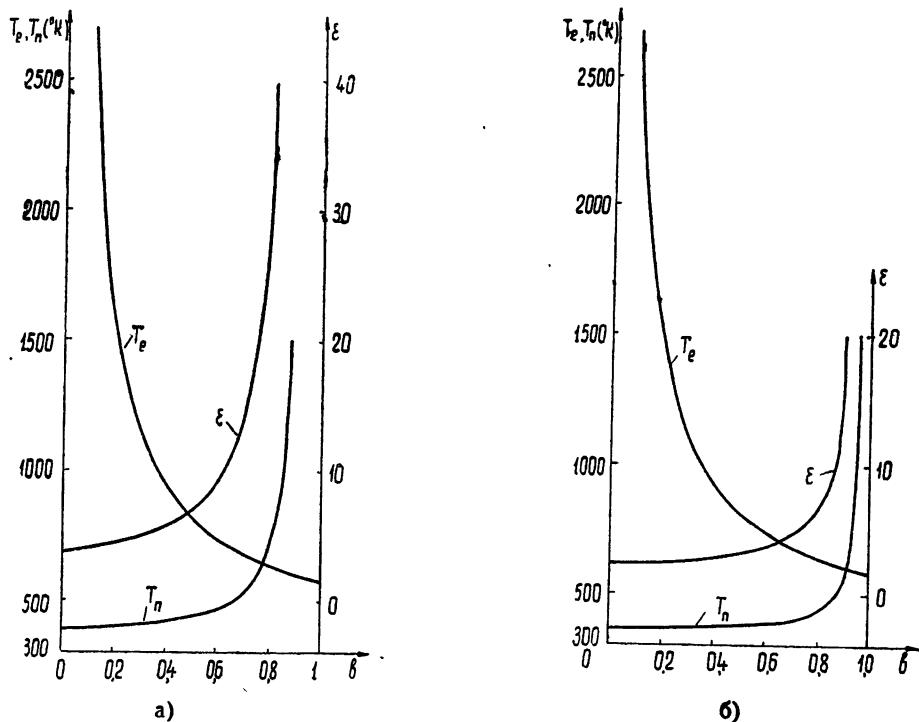


Рис. 3. Зависимость кинетической температуры электронов в слое T_e , температуры поверхности T_n и диэлектрической постоянной материала поверхности ϵ для модели с дырячтой ионосферой от относительной площади покрытия диска планеты ионосферой b а) для зеркального отражения от поверхности, б) для матового отражения от поверхности.

мерение коэффициента отражения на волнах $\lambda \sim 1 \text{ см}$, где влияние ионосферы должно быть заведомо мало. Такой эксперимент позволил бы также решить вопрос о выборе между ионосферной моделью и другими моделями Венеры, поскольку для ионосферной модели следует ожидать, что $R_{\lambda < 1 \text{ см}} > R_{\lambda 12-68 \text{ см}} \approx 0,1$ в то время как для модели с холдной поглощающей атмосферой [1, 18-21] $R_{\lambda < 1 \text{ см}} < R_{\lambda 12-68 \text{ см}} \approx 0,1$.

Другим экспериментом, накладывающим ограничения на выбор параметров ионосферной модели, является исследование распределения радиояркости по диску планеты. Действительно, при $T_e \gg T_n$ следует ожидать сильного уярчения края диска. Отсутствие такого уярчения, полученное Корольковым, Парийским, Тимофеевой и Хайкиным [22], а также в американском эксперименте на „Маринер-2“ [23], свидетельствует в пользу того, что T_e не превышает существенно 600°К .

Таким образом, для ионосферной модели наиболее вероятным является, по-видимому, такой температурный режим, при котором кинетическая температура электронов близка к температуре поверхности и приповерхностного слоя атмосферы. На графиках рис. 3 и 4 это соответствует области, близкой к пересечению кривых T_e (b или τ) и T_n (b или τ). В этом случае даже в ионосферной модели Венеры

для согласования ее с экспериментальными данными необходимы весьма высокие ($\sim 600^{\circ}\text{K}$) температуры ночной стороны поверхности планеты. Указанная оценка является, конечно, весьма грубой и требует дальнейшего уточнения.

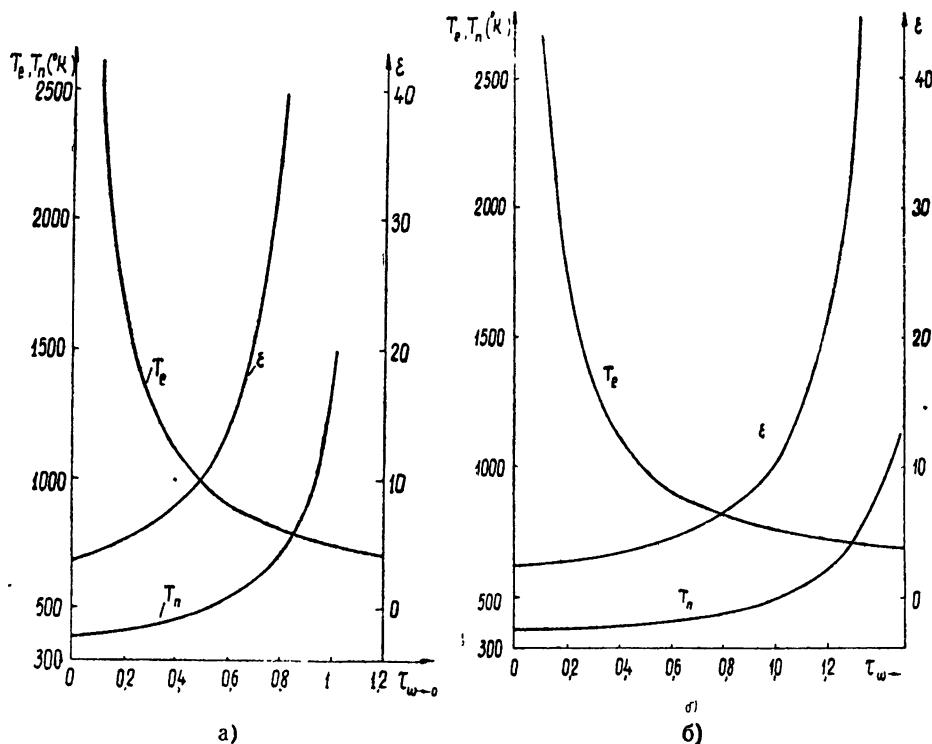


Рис. 4. Зависимости T_e , T_n и ϵ для модели с полупрозрачной ионосферой от оптической толщины ионосферы τ а) для зеркального отражения от поверхности, б) для матового отражения от поверхности.

3. Для оценки электронных концентраций в слое рассмотрим вопрос о возможных высотах и толщинах излучающего слоя.

Согласно измерениям [22], высота излучающей области на Венере $h_2 < 0,07 R_{\text{в}} \approx 450 \text{ км}$. Принимая высоту нижней границы слоя $h_1 = 100 \text{ км}$, получим $z < 350 \text{ км}$, откуда требуемая для $zNv = 2 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$ электронная концентрация в изотропном слое $N > 1,7 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$.

Верхний предел N может быть оценен по данным радиолокационных измерений. В связи с этим заметим, что на частотах, близких к критической частоте ионосферы, следует ожидать быстрого изменения эффективного сечения отражения планеты от $R \approx 0,1$ на частотах $f > f_{\text{кр}}$ до значительно большей величины на $f < f_{\text{кр}}$ за счет дополнительного зеркального отражения ионосферы*. Отсутствие такого скачка коэффициента отражения Венеры в диапазоне частот $2400 > f > 440 \text{ мгц}$ дает основания полагать, что $f_{\text{кр}} < 440 \text{ мгц}$ и, следовательно, $N_{\text{макс}} < 2,4 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$. Таким образом, если излучающий слой находится в верхней атмосфере Венеры, электронная концентрация в нем должна быть $N \approx 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$, т. е. на 3 порядка больше

* Указанное обстоятельство дает возможность экспериментального определения $f_{\text{кр}}$ ионосферы Венеры и, следовательно, максимальной электронной концентрации $N_{\text{макс}}$ с помощью спектральных радиолокационных измерений. В связи с этим целесообразно проведение радиолокационных исследований Венеры в диапазоне метровых волн.

максимальной электронной концентрации в земной атмосфере. Создание и поддержание столь больших электронных концентраций весьма затруднительно.

В земной атмосфере имеется значительное поглощение в нижних слоях, где велика плотность нейтральных частиц. Поэтому нам представляется перспективным для ионосферной модели Венеры искать поглощающий слой также в нижних слоях ее атмосферы.

Как известно [24], на Земле главными ионизирующими агентами в нижних слоях атмосферы являются космические лучи и радиоактивность атмосферы. В связи с этим представляет интерес рассмотреть возможность образования на Венере поглощающего ионизированного слоя, обусловленного также действием этих факторов.

4. На Земле ионизирующее действие космической радиации максимально на высотах $12 \div 16 \text{ км}$, для которых плотность нейтральных частиц и частота соударений электронов с ними составляют $n = 3 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ и $\nu = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ соответственно. Толщина слоя, в пределах которого ионизация уменьшается до 0,5 от максимальной, составляет около 15 км .

Предположим, что на Венере ионизированный слой, образуемый космической радиацией, имеет такие же параметры. Тогда для получения $zN\nu = 2 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^{-1}$ необходима электронная концентрация в слое $N = 8 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$.

В нижних слоях атмосферы равновесная электронная концентрация N пропорциональна ионизирующей способности и определяется соотношением

$$N \simeq \frac{J}{\beta n}, \quad (9)$$

где β — коэффициент прилипания.

К сожалению, нам неизвестны данные об электронной концентрации в нижней атмосфере Земли. Для грубой оценки примем эту величину равной $10 \div 100 \text{ см}^{-3}$. Тогда для получения на Венере $N = 8 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$ отношение J/β должно быть на 5 порядков больше, чем на Земле.

В связи с тем, что магнитное поле Венеры, по данным измерений, проведенных с „Маринер-2“ [25], значительно слабее земного, можно ожидать увеличения космической радиации, хотя маловероятно, чтобы это увеличение достигало 5 порядков. Поэтому целесообразно рассмотреть другую возможность увеличения отношения J/β за счет уменьшения коэффициента прилипания β . Напомним, что реакция прилипания электрона к молекуле с образованием отрицательного иона возможна лишь для электро-отрицательных молекул, средство которых к электрону положительно. Большим положительным средством к электрону обладает молекула O_2 . Реакция прилипания к этой молекуле является определяющей для скорости этого процесса и, следовательно, коэффициента β в земной атмосфере. По современным представлениям, кислород в нижней атмосфере Земли имеет биогенное происхождение. Не исключено, что в нижней атмосфере Венеры кислорода нет. Имеющийся на Венере углекислый газ и, возможно, азот не образуют отрицательных ионов. В этом случае скорость реакции прилипания, т. е. величина β , будет определяться возможным содержанием в атмосфере Венеры водяного пара.

По оценкам Опика [26], проведенным на основе данных измерений Стронга, содержание водяного пара у поверхности Венеры составляет $\sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$, т. е. $\sim 2 \cdot 10^{-4}$ от содержания кислорода в

приповерхностном слое земной атмосферы. Поэтому можно ожидать, что в атмосфере Венеры величина β будет на $3\frac{1}{2}$ порядка меньше, чем в земной атмосфере. В этом случае интенсивность ионизирующего агента, т. е. космической радиации на Венере должна быть выше, чем на Земле, лишь на $1\frac{1}{2}$ порядка. В случае слабого магнитного поля увеличение космической радиации на 1 порядок не представляется противовесственным.

5. Как уже упоминалось выше, на Земле существенный вклад в ионизацию нижних слоев атмосферы вносит радиоактивность, обусловленная, главным образом, радиоактивными эманациями (в основном радоном), образующимися в почве и выделяющимися в атмосферу. Поэтому ионизированный слой будет в этом случае находиться непосредственно у поверхности планеты.

На Земле в приповерхностном слое атмосферы плотность нейтральных частиц $n=10^{19} \text{ см}^{-3}$, что соответствует $v=10^{11} \text{ сек}^{-1}$. Напомним, что именно при таком значении v расчетный спектр полупрозрачной ионосферы без дырок удовлетворяет экспериментальным данным.

Ограничиваюсь электронными температурами $T_e < 700^\circ\text{K}$, по графикам рис. 4 а, б получим, что $\zeta_{w \rightarrow 0} \approx 1$, откуда полное число электронов в столбе $zN \approx 2 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$. Высота ионизированного слоя определяется высотой подъема радиоактивных эманаций восходящими атмосферными течениями. В земной атмосфере основное количество радона находится в слое толщиной $\sim 2\text{--}3 \text{ км}$. Можно ожидать, что на Венере турбулентность атмосферы больше и высота слоя может составлять $\sim 5 \text{ км}$. При этом требуемая электронная концентрация составит $N \approx 4 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$.

Электронная концентрация в атмосфере Земли на этих высотах нам также неизвестна. Принимая ее для грубой оценки равной $1\frac{1}{2} \cdot 10 \text{ см}^{-3}$, получим, что радиоактивность на Венере должна быть примерно на 6 порядков больше имеющейся на Земле. С учетом вышеизложенных соображений о возможном отличии химического состава атмосфер Венеры и Земли, по-видимому, можно уменьшить радиоактивность атмосферы Венеры, необходимую для реализации этой модели, до величины, превышающей земную уже на $2\frac{1}{2}$ порядка, т. е. до величины $10^{-13}\text{--}10^{-14} \text{ кюри} \cdot \text{см}^{-3}$.

Если источником радиоактивности атмосферы являются, как и на Земле, радиоактивные эманации, повышенная радиоактивность атмосферы будет свидетельствовать о повышенной радиоактивности самой планеты. В этом случае не исключено, что радиоактивный разогрев поверхности может оказаться непренебрежимо малым по сравнению с солнечной радиацией, а дляочной стороны Венеры может оказаться одним из главных источников тепла.

Другой возможной причиной повышенной радиоактивности атмосферы Венеры может оказаться радиоактивная пыль. Возможно, что Венера находится в настоящее время на стадии своего геологического развития, соответствующей интенсивной вулканической деятельности. Как известно, источником вулканической деятельности является внутреннее тепло планеты, выделяющееся главным образом за счет процессов радиоактивного распада, происходящих в коре планеты. Поэтому можно ожидать, что вместе с продуктами извержений будет выбрасываться радиоактивный пепел и продукты его распада.

6. Резюмируя вышеизложенное, можно сделать следующие выводы.

Ионосферная модель Венеры с дырячным или полупрозрачным излучающим слоем удовлетворяет имеющимся экспериментальным данным об этой планете.

Относительно низкие температуры поверхности ($\sim 400^{\circ}\text{K}$) не являются обязательными для ионосферной модели. При больших диэлектрических постоянных материала поверхности в ионосферной модели возможны температуры поверхности $\sim 600^{\circ}\text{K}$.

Для численного определения температуры поверхности и кинетической температуры электронов необходимы дополнительные измерения. Решающим экспериментом могло бы явиться радиолокационное измерение коэффициента отражения на волнах короче 1 см. Такой эксперимент позволит также сделать выбор между ионосферной моделью Венеры и моделями с „холодной“ поглощающей атмосферой.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность И. С. Шкловскому, А. И. Лебединскому и В. М. Вахнину за полезную дискуссию и критические замечания. Автор весьма признателен также всем товарищам, принимавшим участие в обсуждении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астроном. ж., 37, 297 (1960), 38, 1115 (1961); 39, 660 (1962).
- 2 А. Г. Кисляков, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астроном. ж., 39, 410 (1962).
- 3 С. Н. Мауг, Т. Р. McCullough, R. M. Sloanaker, Astrophys. J., 127, 1 (1958); Report to the XII Assembly URSI, 1960; Proceedings of the Physic Planets Symposium, Liege, 1962.
- 4 Д. Е. Гибсон, Р. Мак-Ивен, Радиоастрономия, Парижский симпозиум, ИЛ, М., 1961, стр. 66.
- 5 F. D. Drake, Publication NRAO, 1, № 11, 165 (1962).
- 6 C. R. Grant, H. H. Corbett, Astron. J., 67, 115 (1962).
- 7 A. E. Lilleley, Astron. J., 66, 290 (1961).
- 8 Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, Б. Г. Кутузов, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 1054 (1963).
- 9 J. W. Findlay, Sky and Telescope, 25, 73 (1963).
- 10 Sky and Telescope, 25, 1483 (1963).
- 11 В. А. Котельников, В. М. Дубровин, М. Д. Кислик, Е. Б. Коренберг, В. П. Минашин, В. А. Морозов, Н. И. Никитский, Г. М. Петров, О. Н. Ржига и А. М. Шаховской, ДАН СССР, 145, 1035 (1962).
- 12 G. H. Pettengill, H. W. Briscoe, J. V. Evans, E. Géhrels, G. M. Hyde, L. G. Kraft, R. Price, W. B. Smith, Astron. J., 67, 181 (1962).
- 13 L. R. Mallings, S. W. Golomb, J. Brit. IRE, 22, 297 (1961).
- 14 D. O. Muhleman, Astron. J., 66, 292 (1961).
- 15 W. K. Victor, R. Stevens, Science, 134, 46 (1961).
- 16 D. E. Jones, Planetary Space Sci., 5, 166 (1961).
- 17 Дж. Ратклиф, Магнито-ионная теория и ее приложение ИЛ, М., к ионосфере 1962
- 18 А. Н. Ваггетт, Astrophys. J., 133, 281 (1961).
- 19 С. Саган, Science, 133, 849 (1960).
- 20 Е. Opik, J. Geophys. Res., 66, 2807 (1961).
- 21 C. W. Tolbert, B. W. Straiton, J. Geophys. Res., 67, 1741 (1962).
- 22 Д. В. Корольков, Ю. Н. Парайский, Ю. Н. Тимофеева, С. Э. Хайкин, ДАН СССР, 149, 65 (1963).
- 23 F. T. Barath, A. H. Garrett, J. Gopeland, D. E. Jones, A. E. Lilleley, Science, 139, 908 (1963).
- 24 П. Н. Тверской, Атмосферное электричество, Гидрометеоиздат, 1949.
- 25 Sci. News Letters, 83, № 1, 4 (1963).
- 26 Е. Opik, Progress in the Astronautical Sci, North-Holland Publishing Co., 1, № 6 (1962).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
1 апреля 1963 г.

ON THE IONOSPHERIC MODEL OF VENUS

A. D. Kuzmin

The model of Venus with hole-lake semitransparent ionized layer has been examined. This layer is responsible for the enhanced radio emission of the planet in centimeter and decimeter bands. The layer and the planet's surface parameters have been derived which provide coincidence of calculated spectrum with the experimental one. The ionospheric model is also discussed where the emission layer is located in the lower dense layers of the planet's atmosphere. The cosmic rays and the radioactivity of atmosphere are pointed out as possible sources of ionization.

ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ В ДЕЦИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ РАДИОВОЛН

B. P. Ласточкин, K. C. Станкевич

Сообщаются результаты и методика измерений поглощения радиоволн в атмосфере на волнах 25 см, 32,5 см, 44,3 см и 56,5 см, выполненных радиоастрономическими методами. Поглощение в зените на всех волнах равно 0,05 дБ. Проведенное сравнение полученных результатов с поглощением, вычисленным на основании теории Ван-Флека, показывает, что теоретическая величина поглощения в 1,8 раза меньше экспериментального для этого диапазона волн.

Для определения коэффициента поглощения радиоволны в атмосфере в ясные дни принималось радиоизлучение Солнца на различных высотах над горизонтом. Измерения проводились с параболической антенной диаметром 8 метров на длинах волн 25 см; 32,5 см; 44,3 см; 56,5 см. Температура антенны от Солнца на этих волнах была 2500°К. Чтобы не учитывать ослабление сигнала из-за дифференциальной рефракции, которая существенна при углах, меньших 10°^[1], измерения проводились на высотах от 10° до 30°.

Температура антенны от Солнца на высоте φ

$$T_{\odot}(\varphi) = \frac{\int_{\Omega_0} T_{\odot} F d\Omega}{\int_{4\pi} F d\Omega} \eta e^{-\gamma(\varphi)}, \quad (1)$$

где η — коэффициент полезного действия антенны, $\gamma(\varphi)$ — оптический путь в атмосфере на высоте φ , F — диаграмма направленности антенны по мощности. Измерив $T_{\odot}(\varphi)$ на различных высотах, можно определить коэффициент поглощения в атмосфере.

Для исключения ошибок, связанных с изменением параметров аппаратуры и антенной системы, температура радиоизлучения Солнца после каждого измерения калибровалась по собственному радиоизлучению горы, находившейся во фраунгоферовой зоне антенны и закрывавшей весь главный лепесток. Приращение температуры антенны при приеме радиоизлучения горы в близкий момент времени к измерению T_{\odot}

$$\Delta T_r = \frac{\int_{\Omega_0} (T_r - T_a(\varphi_0)) F d\Omega}{\int_{4\pi} F d\Omega} \eta, \quad (2)$$

где T_r — температура радиоизлучения горы, $T_a(\varphi_0)$ — температура радиоизлучения атмосферы на высоте нулевого отсчета. Взяв отношение $T_{\odot}(\varphi)/\Delta T_r$ для двух высот, получим выражение для определения коэффициента поглощения в атмосфере:

$$\frac{T_{\odot}(\varphi_1)/\Delta T_r}{T_{\odot}(\varphi_2)/\Delta T_r} \simeq 1 + \gamma(\varphi_2) - \gamma(\varphi_1), \quad (3)$$

которое справедливо в случае $\gamma(\varphi) \ll 1$.

В предположении, что распространение происходит над плоской землей и коэффициент поглощения зависит от высоты как $\chi = \chi_0 e^{-h/H}$, будем иметь: $\gamma(\varphi) = \chi H \operatorname{cosec} \varphi$; тогда выражение (3) перепишется в виде

$$\frac{T_{\odot}(\varphi_1)/\Delta T_r}{T_{\odot}(\varphi_2)/\Delta T_r} \simeq 1 + \chi H [\operatorname{cosec} \varphi_2 - \operatorname{cosec} \varphi_1]. \quad (4)$$

Результаты измерений приведены в таблице 1, точность в определении χH составляет $\pm 15\%$.

Таблица 1

| λ (см) | $H(\lambda)$ (км) | $\chi_0 H(\text{дб})$ | $\chi_0 H_{\text{теор}}$ (дб) | χ_0 ($\text{дб} \cdot \text{км}^{-1}$) | χ_0 теор (дб) | χ_0/χ_0 теор |
|----------------|-------------------|-----------------------|-------------------------------|---|--------------------|----------------------|
| 25 | 6 | 0,058 | 0,032 | 0,0098 | 0,0054 | 1,8 |
| 32,5 | 6,5 | 0,051 | 0,031 | 0,0080 | 0,0048 | 1,65 |
| 44,3 | 7 | 0,049 | 0,028 | 0,007 | 0,0039 | 1,75 |
| 56,3 | 8,1 | 0,058 | 0,024 | 0,007 | 0,0030 | 2,40 |

Для сравнения в таблице 1 приведены значения χ_0 теор, вычисленные на основании теории Ван-Флека.

На волнах 32,5 см и 44,3 см были проведены изменения коэффициента поглощения радиоволн по собственному тепловому излучению атмосферы. Для этого ночью в ясную погоду было снято вертикальное распределение температуры радиоизлучения атмосферы в интервале высот от 5° до 70°. Время наблюдений выбиралось таким образом, чтобы через диаграмму направленности антенны радиотелескопа проходили высокие галактические широты (больше 30°). Тогда приращением температуры антенны из-за градиентов интенсивности космического радиоизлучения можно пренебречь. Принимая температуру радиоизлучения атмосферы одинаковой в пределах главного луча антенны, получим, что изменение температуры антенны на разных высотах будет определяться в этом случае выражением

$$\Delta T_a = [T_a(\varphi_1) - T_a(\varphi_2)] \frac{\int F d\Omega}{\int_{4\pi}^{\Omega_0} F d\Omega} \eta + \frac{\int T F d\Omega - \int T' F' d\Omega}{\int_{4\pi}^{\Omega_{\text{бок}}} F d\Omega} \eta. \quad (5)$$

Здесь Ω_0 — телесный угол, включающий главный лепесток и часть боковых лепестков антенны, которые принимают радиоизлучение с этой же высоты φ , что и главный луч. Первый член пропорционален разности температуры радиоизлучения атмосферы на высотах φ_1 и φ_2 , второй характеризует изменение температуры антенны из-за неизотропности бокового рассеяния, величина которого из прямых измерений неизвестна.

Антенна также калибровалась по собственному излучению горы.

Температура антенны для радиоизлучения горы при калибровке по зениту одинакова для всех длин волн и обеих поляризаций. Отсюда следует, что с точностью порядка нескольких процентов можно считать гору абсолютно черной и $T_0 = T_r$. Из (2) и (5) можно найти разность температур радиоизлучения атмосферы для высот φ_1 и φ_2 :

$$T_a(\varphi_1) - T_a(\varphi_2) = \frac{\Delta T_a}{\Delta T_r} [T_0 - T(\varphi_0)] - \frac{\int_{\Omega_{\text{бок}}} T F d\Omega - \int_{\Omega_{\text{бок}}} T' F' d\Omega}{\int_{\Omega_0} F d\Omega}. \quad (6)$$

Температура радиоизлучения атмосферы в данном направлении в случае плоской земли [2]

$$T_a(\varphi) = \int_0^{l(h)} x(h) T(h) e^{-\int_0^l x(h) dl} dl \quad (l = h \operatorname{cosec} \varphi). \quad (7)$$

Принимая зависимость коэффициента поглощения от высоты в виде $x = x_0 e^{-h/H}$ и $T = T_0 - 6,5 h$, можно вычислить $T_a(\varphi)$.

При $x_0 H / \sin \varphi \ll 1$ имеем:

$$T_a(\varphi) = (T_0 - 6,5H) x_0 H \operatorname{cosec} \varphi [1 - x_0 H \operatorname{cosec} \varphi]. \quad (8)$$

Последний член в (8) дает поправку порядка 10% для $\varphi < 10^\circ$. В интервале высот от 10° до 90° $T_a(\varphi)$ линейно зависит от $\operatorname{cosec} \varphi$.

На графике рис. 1 отложена величина

$\frac{\Delta T_a}{\Delta T_r} [T_0 - T_a(\varphi_0)]$ в зависимости от $\operatorname{cosec} \varphi$, из которого видно, что в интервале высот $30^\circ \div 10^\circ$ эта величина также имеет линейную зависимость. Для высот, больших 30° , изменение температуры антенны имеет более крутой ход и определяется уже вторым членом в выражении (5), характеризуя увеличение бокового излучения антенны в направлении, перпендикулярном главному лучу.

В области линейной зависимости функции, отложенной на графике, можно считать, что изменение бокового излучения антенны мало. Тогда разность функций, взятых при двух значениях высот, будет равна разности температур радиоизлучения атмосферы на этих высотах.

Для волн $\lambda = 32,2 \text{ см}$ и $\lambda = 44,3 \text{ см}$ получились следующие значения температур радиоизлучения на одну атмосферу: $T_a = 3,8^\circ\text{K}$ и $T_a = 3^\circ\text{K}$. Вычисленные отсюда значения затухания равны $(x_0 H)_{32} = 0,063 \text{ дБ}$ и $(x_0 H)_{44} = 0,052 \text{ дБ}$, что в пределах ошибок согласуется с приведенными выше результатами.

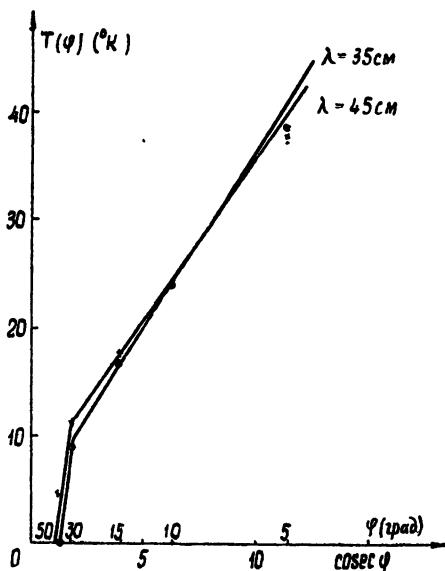


Рис. 1.

Заметим, что коэффициент поглощения χ_0 можно определить другим методом из графика. Из выражения (8) можно видеть, что при высоте $\varphi=5^\circ$ отклонение экспериментальной точки от продолжения прямой равно

$$\delta T_a = (T_0 - 6,5H)(\chi_0 H \operatorname{cosec} \varphi)^2.$$

Полученное отсюда значение χ_0 совпадает с приведенным выше. Совпадение результатов может служить дополнительным критерием правильности учета неизотропности бокового рассеяния антенны.

В дециметровом диапазоне ослабление радиоволн в атмосфере происходит за счет нерезонансного поглощения в молекулярном кислороде. Согласно теории Ван-Флека [3], нерезонансный член в коэффициенте поглощения равен

$$\chi_0 = 0,34 \frac{\tilde{\Delta v}}{1 + \left(\frac{\tilde{\Delta v}}{v}\right)^2} \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}, \quad (9)$$

где $\tilde{v}=1/\lambda$ и $\tilde{\Delta v}$ —половирина линии поглощения (в см^{-1}).

Для значений χ_0 , вычисленных из (9) и приведенных в таблице 1, использовалась величина $\tilde{\Delta v}=0,02 \text{ см}^{-1}$. Поскольку из эксперимента определяется $\chi_0 H$, то для сравнения с теорией Ван-Флека необходимо знать эффективную высоту H . Непосредственное измерение этой величины не проводилось. Однако на основании модели стандартной атмосферы можно вычислить эффективные высоты для волн дециметрового диапазона. Полученные с помощью (9) величины $\chi_0 H$ приведены также в таблице 1. Из сопоставления их с экспериментальными значениями $\chi_0 H$ можно видеть серьезное расхождение с теорией, поскольку на всех волнах теоретическое значение примерно в 1,8 раза меньше. Использование других значений $\tilde{\Delta v}$ не может уменьшить расхождение, особенно в дециметровом диапазоне (на $\lambda=44,3 \text{ см}$ и $\lambda=56,5 \text{ см}$).

В таблице 1 приведены значения χ_0 , полученные из экспериментальных данных для полного поглощения с привлечением расчетных значений H . К сожалению, недостаточная точность вычисления χ_0 из экспериментальных данных не позволяет сделать определенного вывода о форме линии нерезонансного поглощения, но весьма вероятно, что она не описывается функциональной зависимостью вида (9). К этому выводу приводят также некоторые теоретические соображения.

Дело в том, что в теории Ван-Флека выражение для нерезонансного поглощения получается формально из-за отличия от нуля диагонального элемента магнитно-дипольного момента молекул кислорода при равенстве нулю собственной резонансной частоты перехода и имеет вид, аналогичный известному дебаевскому поглощению дипольных молекул. Однако для того, чтобы нерезонансное поглощение действительно имело место, необходим непрерывный энергетический спектр (или бесконечное число близко расположенных уровней). Молекула кислорода не имеет такой энергетической структуры, поскольку вращательные переходы запрещены правилами отбора и на данном вращательном уровне спектр ограничен тонкой структурой.

Отсюда следует, что формальное введение нерезонансного члена вида (9) Ван-Флеком не оправдано, и механизм нерезонансного поглощения имеет другую природу.

Авторы выражают искреннюю благодарность В. С. Троицкому за внимание к работе и ценные консультации.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 693 (1959).
2. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электропитка, 4, 21 (1959).
3. I. H. Van Vleck, Phys. Rev., 71, 413 (1947).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 января 1963 г.

THE MEASUREMENTS OF THE ABSORPTION COEFFICIENT OF THE ATMOSPHERE IN THE DECIMETER BAND

V. P. Lastochkin, K. S. Stankevich

The results and methods are described of measurements of radio waves absorption in the atmosphere at the 25; 32,5; 44,3, 56,5 cm wavelengths carried out using the radioastronomical methods. The zenith absorption at all the frequencies is proved to be 0,05 db. The comparison of the results with the absorption calculated on the basis of the Van Vleck's theory shows that the theoretical magnitude of absorption is 1,8 times less than the experimental one for the mentioned band.

О ВЛИЯНИИ СРЕДЫ НА МАГНИТОПРОМЗНОЕ УСКОРЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

A. K. Гайлитис и B. N. Цытович

Анализируется вопрос об ускорении в среде под действием поперечных электромагнитных волн релятивистских электронов, движущихся в магнитном поле. Рассматривается случай малых частот $\omega \ll \omega_0 \epsilon/m$ (ω_0 —плазменная частота, ϵ —энергия частицы, m —ее масса, $\hbar = c = 1$), когда отличие диэлектрической проницаемости от единицы может быть существенным. Обсуждаются возможные приложения к проблеме ускорения релятивистских электронов в некоторых дискретных источниках радиоизлучения.

1. При достаточно большой эффективной температуре излучения электромагнитные волны способны ускорять электроны [1, 2]. Для релятивистских частиц в магнитном поле эффективность ускорения возрастает из-за того, что во взаимодействии участвуют высокие обертоны гирочастоты [3]. Ускорение происходит в результате последовательных актов магнитопротомзного индуцированного излучения и поглощения электромагнитных волн. Этот вопрос представляет интерес в связи с проблемой ускорения электронов космических лучей, ответственных за космическое радиоизлучение. Ускорение возрастает с ростом эффективной температуры излучения, которая может достигать больших значений для больших длин волн. Однако в области низких частот и больших энергий диэлектрическую проницаемость плазмы нельзя считать равной единице, так как условие

$$\omega \gg \omega_0 \epsilon/m \quad (1)^*$$

оказывается нарушенным. Кроме того, в оболочках сверхновых, излучение которых связывают с синхротронным излучением релятивистских электронов, в области низких частот излучение может быть запретным [2] и его интенсивность благодаря этому может оказаться относительно большой. В этом случае также нарушено условие (1). С релятивистскими электронами взаимодействуют высокие обертоны гирочастоты $\omega \sim v\omega_H$ ($v = 1, 2, \dots$), для которых $v \gg 1$, т. е. $\omega \gg \omega_H$. Поэтому в тензоре диэлектрической проницаемости плазмы можно пренебречь ω_H и считать плазму изотропной:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = n^2(\omega) < 1. \quad (2)$$

Мы рассмотрим здесь общий случай взаимодействия движущегося по винтовой линии электрона с излучением в произвольной изотропной среде при $n^2(\omega) < 1$. Рассматриваемые здесь эффекты касаются индуцированного излучения и поглощения. Задача о спонтанном излучении при наличии среды рассматривалась в [4]. В работе Разина

* Условие (1) достаточно для того, чтобы пренебречь влиянием среды. Необходимое условие для быстрых частиц не совпадает с (1) и выписано ниже (см. (14)).

[⁵] было показано, что отличие диэлектрической проницаемости от единицы [⁴] необходимо учитывать при интерпретации синхротронного излучения релятивистских электронов дискретных радиоисточников в области больших длин волн. Настоящая работа посвящена исследованию возможной роли ускорения электронов в радиоисточниках излучением с этими и большими длинами волн. Последние могут даже не выходить за пределы источников и быть запертыми в пределах оболочки. Кроме того, полученные результаты могут иметь приложение к вопросу об ускорении электронов радиационных поясов Земли радиоизлучением хромосферных вспышек [⁶].

2. Следуя методике расчета работы [³] (см. также [⁷]), получим выражение для увеличения в единицу времени энергии ε частицы, движущейся по винтовой линии в магнитном поле (p_z —проекция импульса на направление магнитного поля, p_{\perp} —перпендикулярно полю),

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \int_0^{\infty} \omega d\omega \int d^3 k \sum_{v=1}^{\infty} \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{\omega_H v}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} \right) w_{v, p_z, p_{\perp}} (\omega, \mathbf{k}) N_{\omega, \mathbf{k}}, \quad (3)$$

где $N_{\omega, \mathbf{k}}$ —число волн частоты ω и волнового вектора \mathbf{k} , $w_{v, p_z, p_{\perp}} (\omega, \mathbf{k})$ —вероятность магнитотормозного спонтанного излучения при наличии среды. Она может быть найдена несложным обобщением результата [⁴]:

$$w_{v, p_z, p_{\perp}} (\omega, \mathbf{k}) = \frac{e^2}{\pi n^2} \delta(k^2 - \omega^2 n^2) \delta(\omega - \omega_H v - k_z v_z) \times \\ \times \left\{ \frac{(x - nv_z)^2}{1 - x^2} J_v^2(z) + v_{\perp}^2 n^2 J_v'^2(z) \right\}, \quad (4)$$

где $x = \cos \Theta$, Θ —угол между \mathbf{k} и магнитным полем, J_v —функция Бесселя,

$$z = \frac{nv_{\perp} \sqrt{1 - x^2}}{1 - nv_z x}; \quad \omega_H = \frac{eH}{\varepsilon}; \quad nv_z < 1. \quad (5)$$

Рассмотрим наиболее интересный случай малых продольных скоростей и высоких гармоник гирочастоты, предполагая, что скорость электрона в основном направлена перпендикулярно магнитному полю. Будем считать также излучение изотропным, предполагая $N_{\omega, \mathbf{k}}$ не зависящим от угла между \mathbf{k} и \mathbf{H} . Для высоких гармоник можно воспользоваться асимптотическими выражениями для функций Бесселя [⁴]. Результат расчета, приведенного в Приложении, таков:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{e^2 \omega_H^3}{\pi \varepsilon \sqrt{3}} \int_0^{\infty} v^2 dv \left\{ 2(\xi + \eta) \zeta K_{5/3}(\zeta) - 3\eta \zeta K_{1/3}(\zeta) - \right. \\ \left. - 2\eta \int_{\zeta}^{\infty} K_{1/3}(\zeta') d\zeta' \right\} N(v), \quad (6)$$

где

$$\xi = 1 - v_{\perp}^2 = \frac{m^2}{\varepsilon^2}; \quad (7)$$

$$\eta = 1 - n^2(\omega_H v) = \frac{\omega_0^2}{v^2 \omega_H^2} = \frac{\omega_0^2 m^2}{v^2 e^2 H^2 \xi}; \quad (8)$$

$$\zeta = \frac{2v}{3} (\xi + \eta)^{3/2} = \frac{2v}{3} \left(\xi + \frac{\omega_0^2 m^2}{v^2 e^2 H^2 \xi} \right)^{3/2}. \quad (9)$$

Зависимость $\zeta(v)$ схематически изображена на рис. 1.

Рассмотрим три области v .

a) $v \gg \frac{\omega_0 m}{eH} \left(\frac{\epsilon}{m} \right)$ или, что то же самое, $\xi \gg \eta$. При этом $\zeta_a = \frac{2v}{3} \xi^{3/2}$, среда никакого влияния на ускорение не оказывает и (6) принимает вид [3]*

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = & \frac{9\sqrt{3}e^2}{4\pi m} \left(\frac{eH}{m} \right)^3 \left(\frac{\epsilon}{m} \right)^3 \times \\ & \times \int_0^\infty \zeta^3 K_{5/3}(\zeta) N(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

b) $v \ll \frac{\omega_0 m}{eH} \left(\frac{\epsilon}{m} \right)^2$ или $\xi \ll \eta$.

Теперь

$$\zeta_b = \frac{2}{3v^2} \left(\frac{\omega_0 \epsilon}{eH} \right)^3;$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} = & \frac{e^2 \omega_0^{7/2}}{3\pi \sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{eH}} \left(\frac{\epsilon}{m} \right)^{7/2} \int_0^\infty \frac{d\zeta N(\zeta)}{\zeta^{3/2}} \times \\ & \times \left\{ 2 \int_\zeta^\infty K_{5/3}(\zeta') d\zeta' - \zeta K_{5/3}(\zeta) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для получения этих формул из (6) необходимо v выразить через ζ_a или ζ_b , а N с измененным аргументом обозначить через $N(\zeta)$; тогда, разумеется, функциональные зависимости $N(\zeta)$ в (10), (11) будут различны.

$$v \sim \frac{\omega_0 m}{eH} \left(\frac{\epsilon}{m} \right)^2 \text{ или } \xi \sim \eta.$$

Это—область минимума на кривой $\zeta(v)$ (рис. 1), достигающей наименьшего значения

$$\zeta_m = \frac{\omega_0 m^2}{eH \epsilon} \sqrt{3}$$

в точке

$$v_m = \sqrt{2} \frac{\omega_0 m}{eH} \left(\frac{\epsilon}{m} \right)^2.$$

* В последнем выражении интегрирование распространено на все значения ζ так как предполагается, что условие $\xi \gg \eta$ означает, что N не равно нулю лишь в этой области.

При достаточно большой энергии

$$\frac{\varepsilon}{m} \gg \frac{\omega_0 m}{eH}; \quad \zeta_m \ll 1 \quad (12)$$

и для упрощения (6) можно воспользоваться формулами Приложения (П.24)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2e^2\omega_H^3}{\pi\varepsilon} \sqrt[6]{3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \int v^{4/3} d\nu N(v). \quad (13)$$

Область применимости ее ограничена лишь требованием $\zeta \ll 1$ и при наличии (12) перекрывается с областью применимости (10) и (11). Более того, подынтегральные функции (с учетом замечания, сделанного после формулы (11)) этих трех формул при $\zeta \ll 1$ совпадают, поэтому фактические области применимости (10), (11) тоже перекрываются и наряду с областью „а“ для (10) и „б“ для (11) включают всю остальную область $\zeta \ll 1$. Итак, (10) применима при

$$v \gg \left(\frac{\omega_0 \varepsilon}{eH} \right)^{3/2} \quad \text{или} \quad \omega \gg \left(\frac{\omega_0^3 \varepsilon}{eH} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

а (11)—при

$$v \ll \left(\frac{\varepsilon}{m} \right)^{3/2}.$$

Это относится не только к изучаемому механизму ускорения, но равно и к спонтанному синхротронному излучению, т. е. условие (1) отсутствия влияния среды на синхротронное излучение может при (12) быть заменено менее жестким условием (14).

Если излучение имеется в области $\zeta \gg 1$, то как в случае (10), так и в случае (11) воздействие излучения становится экспоненциально малым. При этом для $\xi \ll \eta$ ускорение заменяется торможением; однако это происходит в области, где эффекты воздействия излучения малы. В наиболее существенной области $\zeta \sim 1$ и $\zeta \ll 1$ формула (11) описывает ускорение. График подынтегральной функции

$\Phi(\zeta) = 2 \int_{\zeta} K_{5/3}(\zeta') d\zeta' - \zeta K_{5/3}(\zeta)$ изображен на рис. 2. Из этого рисунка следует, что Φ равно нулю при $\zeta \sim 1,2$.

Эффект воздействия излучения на частицу носит статистический характер. Частица при магнитотормозном излучении теряет энергию и при магнитотормозном поглощении ее приобретает. Если вероятность поглощения больше вероятности излучения (что имеет место при $\zeta \sim 1$, $\zeta \ll 1$), то частица ускоряется. В обратном случае частица тормозится излучением. В случае, когда $N(\zeta)$ имеет достаточно широкий спектр, очевидно, что эффект торможения экспоненциально мал в сравнении с ускорением. Нужно учитывать, кроме того, что полученный результат верен

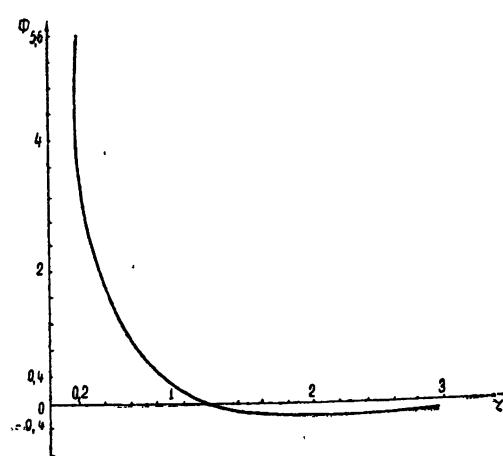


Рис. 2.

при $\omega \gg \omega_0$.

В случаях, интересных с точки зрения практических приложений (в условиях, когда $\zeta \gg 1$), воздействие излучения мало в сравнении с другими механизмами ускорения.

Область $\zeta \leq 1$ ограничена по частотам как сверху, так и снизу. Обозначим частоты, для которых $\zeta = 1$, через ω_* и ω_{**} ($\omega_* < \omega_{**}$):

$$\omega_* = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\omega_0 mc}{eH} \right) \left(\frac{\varepsilon}{m} \right)^{1/2}}; \quad (15)$$

$$\omega_{**} = \frac{3}{2} \frac{eH}{mc} \left(\frac{\varepsilon}{m} \right)^2. \quad (15a)$$

Эти выражения верны при $\omega_{**} \gg \omega_*$, когда при $\omega \sim \omega_* \gamma \gg \xi$, а при $\omega \sim \omega_{**} \xi \gg \gamma$.

Очевидно, что $\omega_{**} > \omega_*$ лишь при достаточно больших энергиях. Оценка ε_* , ниже которых пропадает область частот, где ускорение является существенным (не экспоненциально малым), может быть получена приравниванием (15) и (15a):

$$\frac{\varepsilon_*}{m} \sim \frac{\omega_0 mc}{eH} \quad (16)$$

(ср. (12)).

В условиях, интересных для астрофизических приложений [9], $\varepsilon_* \gg m$. Действительно, обычно выполняется равенство магнитного давления $H^2/8\pi$ и давления плазмы (или энергии гидродинамического движения) $nMv_s^2/2$, где $v_s = v_t$ (v_t — тепловая скорость) или $v_s = v_{\text{гидр}}$ ($v_{\text{гидр}}$ — скорость гидродинамических движений), M — масса иона. Обычно $v_{\text{гидр}}$ порядка $v_t \sim 10^6 - 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$. При выполнении равенства $H^2/8\pi = nMv_s^2/2$

$$\frac{\varepsilon_*}{m} \sim \sqrt{\frac{m}{M} \frac{c^2}{v_s^2}} \quad (17)$$

для $v_s \sim 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$; $\varepsilon_*/m \sim 10$. Таким образом, ускорение поперечными волнами низких частот обладает той особенностью, что ускоряться могут уже достаточно энергичные частицы. Весьма существенно, что для ионов величина ε/m превышает 40 (протоны); абсолютное значение $\varepsilon_{\text{иона}}$ в $(M/m)^{3/2}$ раз больше, нежели для электрона. С ростом энергии область частот, в которой излучение создает заметное ускорение, расширяется и одновременно смещается в область больших частот. Если излучение имеется также лишь в ограниченном интервале частот, то для ускорения необходимо перекрытие этой области с интервалом $\omega_* < \omega < \omega_{**}$. Для качественных оценок эффекта ускорения при $\omega_* < \omega < \omega_{**}$ можно считать, что в указанной области ускорение определяется выражением, соответствующим $\zeta \ll 1$, и отсутствует вне этой области. При этом

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{\pi} \sqrt[6]{3} \frac{e^2 m^{2/3}}{\varepsilon} \Gamma \left(\frac{5}{3} \right) \int_{\omega_*}^{\omega_{**}} \omega^{4/3} d\omega N(\omega). \quad (18)$$

Пусть область частот, в которой имеется излучение, есть

$$\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}, \quad (19)$$

причем в этой области эффективная температура $T_{\text{эфф}} = \omega N(\omega)$ зависит от частоты по степенному закону

$$T_{\text{эфф}} = \bar{T}_{\text{эфф}} \left(\frac{\omega}{\omega_*} \right)^\gamma. \quad (20)$$

При разных соотношениях интервалов $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$ и $\omega_* < \omega < \omega_{**}$ получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2\sqrt[6]{3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \frac{e^2 \omega_H^{2/3} \bar{T}_{\text{эфф}}}{\varepsilon (4/3 - \gamma)} \begin{cases} (\omega_{\max}/\omega)^{4/3-\gamma}; \omega_{\max} < \omega_{**}, \\ (\omega_{**}/\omega)^{4/3-\gamma}; \omega_{\max} > \omega_{**} \end{cases}, \quad (21)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2\sqrt[6]{3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \frac{e^2 \omega_H^{2/3} \bar{T}_{\text{эфф}}}{\varepsilon (4/3 - \gamma)} \begin{cases} (\omega_{\max}/\omega)^{4/3-\gamma}; \omega_{\max} < \omega_{**}, \\ (\omega_{**}/\omega)^{4/3-\gamma}; \omega_{\max} > \omega_{**} \end{cases}, \quad (22)$$

причем $\gamma < 4/3$, $\omega_{\max} \gg \omega_{\min}$ или $\omega_{\max} \gg \omega_*$ в зависимости от $\omega_* \gtrless \omega_{\min}$. Нижний предел ω_* или ω_{\min} несуществен в случае, если он значительно меньше ω_{\max} . Если для (21) эффект ускорения $d\varepsilon/dt$ пропорционален $\varepsilon^{-5/3}$, то для (22) $d\varepsilon/dt$ пропорционально $\varepsilon^{1-2\gamma}$. В случае „температурного“ излучения, когда $T_{\text{эфф}} = \text{const} = \bar{T}$, $\gamma = 0$, ускорение $\frac{d\varepsilon}{dt} \sim \varepsilon$. В случае, когда эффективная температура растет с частотой (в интервале (19)) и, следовательно, $\gamma < 0$, ускорение может быть пропорционально достаточно высокой степени ε . Однако при этом нужно учесть, что интервал частот должен быть достаточно широким (чтобы условие $\omega_{\max} > \omega_{**}$ не было нарушено). В другом предельном случае $\gamma > 4/3$ получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2\sqrt[6]{3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \frac{e^2 \omega_H^{2/3} \bar{T}_{\text{эфф}}}{\varepsilon (\gamma - 4/3)} \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_{\min}}\right)^{\gamma-4/3}; \omega_{\min} > \omega_* \\ \left(\frac{\omega}{\omega_*}\right)^{\gamma-4/3}; \omega_* > \omega_{\min} \end{cases}. \quad (23)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2\sqrt[6]{3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \frac{e^2 \omega_H^{2/3} \bar{T}_{\text{эфф}}}{\varepsilon (\gamma - 4/3)} \begin{cases} \left(\frac{\omega}{\omega_{\min}}\right)^{\gamma-4/3}; \omega_{\min} > \omega_* \\ \left(\frac{\omega}{\omega_*}\right)^{\gamma-4/3}; \omega_* > \omega_{\min} \end{cases}. \quad (24)$$

Для (23) вновь $d\varepsilon/dt \sim 1/\varepsilon^{5/3}$, а для (24) $d\varepsilon/dt \sim (\varepsilon^{1/2+1})^{-1}$. Отсюда следует, что сильного роста ускорения с ростом энергии можно ожидать лишь в случае $\omega_{\max} > \omega_{**}$. В случае $\omega_{\max} = C\omega_0$, где C —некоторая константа, это условие дает

$$\varepsilon < \varepsilon^{**} = \sqrt{C} \sqrt{\frac{2mc\omega_0}{eH}} m. \quad (25)$$

Из $\varepsilon^{**} > \varepsilon_*$ следует: $C > \sqrt{\frac{m}{M} \frac{c^2}{v_s^2}}$, т. е. $C > 10$ для $v_s \sim 10^8 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$.

Обратим внимание на возможность осуществления весьма разнообразных зависимостей эффекта ускорения от энергии частиц.

3. Произведем оценку возможной роли рассмотренного механизма ускорения в некоторых дискретных источниках радиоизлучения. Энергетическая зависимость эффекта ускорения при этом существенна для предсказаний о характере временного изменения их интенсивности излучения, которая обязана наличию релятивистских электронов в остатках оболочек сверхновых [9]. Согласно [2], в остатке оболочки возможно существование запертого излучения с частотами, существенно боль-

* Мы при этом не рассматриваем случай γ , достаточно близких к $4/3$.

шими ω_0 . Так, в Крабовидной туманности в настоящее время $\omega_0 \sim 3 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$ ($\lambda = 2\pi c/\omega_0 \sim 100 \text{ км}$). По-видимому, частоты $\omega_0 < \omega < 10^2 \omega_0$ можно считать запертыми; тогда $C \sim 10^2$, $\varepsilon^{**} \sim (10^2 \div 10^3) m$. Последнее значение $\varepsilon^{**} \sim 10^3 m$ соответствует равенству $H^2/8\pi = n M v_s^2$ и $v_s \sim 10^7 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$. Поэтому область энергий $\varepsilon_* < \varepsilon < \varepsilon^{**}$ может соответствовать наблюдаемому радиодиапазону частот излучения электронов дискретных источников.

Очевидно также, что в начальной стадии расширения оболочки константа C может быть существенно большей, т. е. большими будут ε^{**} . Поэтому роль запертого излучения на ранней стадии расширения может быть более существенной. Это относится как к сверхновым I типа, так и к сверхновым II типа. Характер временного изменения блеска сверхновой вблизи максимума блеска может быть связан с изменением закона ускорения и переходом через те критические частоты, о которых говорилось выше. Поскольку, однако, имеющиеся сведения о физических условиях в период максимума блеска весьма скучны, мы не будем сколько-нибудь подробно развивать это предположение, ограничившись лишь замечанием об имеющихся в этом отношении возможностях*.

Согласно [2], эффект трансформации продольных волн в поперечные в Крабовидной туманности может в настоящее время дать плотность энергии запертого излучения порядка $10^3 \div 10^4 \text{ эв} \cdot \text{см}^{-3}$.

В случае (20) плотность энергии W излучения описывается формулой

$$W = \frac{\bar{T}_{\text{эфф}}}{\pi^2} \frac{\omega^3}{(3-\gamma)} \left(\frac{\omega_{\text{макс}}}{\omega} \right)^{3-\gamma} \quad (\gamma < 3). \quad (26)$$

Например, в случае (22) выражение для $d\varepsilon/dt$ через плотность энергии W имеет вид

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2\pi\sqrt[6]{3}(3-\gamma)}{\varepsilon \left(\frac{4}{3} - \gamma \right) \omega_{\text{макс}}} \left(\frac{\omega_H}{\omega_{\text{макс}}} \right)^{2/3} \left(\frac{\omega_{**}}{\omega_{\text{макс}}} \right)^{\frac{4}{3}-\gamma} W. \quad (27)$$

Целесообразно сравнить величину эффекта ускорения (27) с ускорением, создаваемым плазменными волнами, поскольку, согласно [2], последний эффект больше фермиевского ускорения, а также ионизационных и магнитотормозных потерь

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{\text{пл}} \approx \frac{e^2 V_\Phi^3 W_{\text{пл}} \pi^2}{\omega_0 \varepsilon} \quad (28)$$

(V_Φ — фазовая скорость плазменных волн). Считая численные коэффициенты (27), (28) порядка единицы и $\omega_{\text{макс}} \sim \omega_{**}$, получим оценку отношения (28) и (27):

$$\frac{(d\varepsilon/dt)_{\text{макс}}}{(d\varepsilon/dt)_{\text{пл}}} \sim \frac{W}{W_{\text{пл}}} \left(\frac{\omega_H}{\omega_{\text{макс}}} \right)^{2/3} \frac{\omega_0}{\omega_{\text{макс}}} \frac{1}{V_\Phi^3} \sim \frac{W}{W_{\text{пл}}} \left(\frac{c}{V_\Phi} \right)^2 \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{v_s}{V_\Phi}. \quad (29)$$

Так как тепловая скорость $v_s \sim v_T$ отличается от V_Φ не слишком сильно: $v_s/V_\Phi \sim 1/4$, причем, $c/V_\Phi \sim 10^2$, $m/M \sim 10^{-3}$, мы получаем, что $(d\varepsilon/dt)_{\text{макс}}/(d\varepsilon/dt)_{\text{пл}} \sim 10^5 W/W_{\text{пл}}$. При $W/W_{\text{пл}} \sim 10^{-5} \div 10^{-4}$ эффекты ускорения сравниваются.

* Нужно учитывать также, что на ранних стадиях плотность вещества большая и поглощение излучения может быть существенным. С поглощением излучения, возможно, связана экспоненциальная фаза падения блеска сверхновой (см. [2]).

Следует подчеркнуть следующие моменты. Во-первых, ускорение поперечными волнами обладает избирательностью по отношению к электронам ультраквантитативистских энергий, что важно, так как синхротронные потери должны сказываться при больших энергиях и, следовательно, рассматриваемое ускорение представляет собой механизм, который может приводить к эффектам, компенсирующим потери. Известно, что изменения оптического синхротронного излучения Крабовидной туманности не наблюдается, хотя синхротронные потери электронов в этой области энергии должны быть существенны. Плазменные волны, наоборот, вызывают ускорение низкоэнергетических частиц и могут обеспечивать как инжекцию, так и ускорение до максимально наблюдаемых энергий, если плотность их энергии достаточно велика. Во-вторых, ускорение поперечными волнами начальной стадии расширения снимает трудности, связанные с обратным эффектом Комптона.

Рассмотрим теперь вопрос о возможном ускорении электронов радиационных поясов Земли излучением хромосферных вспышек. Согласно (16), ускорение электронов до энергий $\varepsilon \sim 2 \div 10$ мэВ возможно в областях, где ω_0 не слишком велико по сравнению с eH/mc . Это имеет место во внутренних областях внешнего радиационного пояса. Во внешней зоне, где $\varepsilon_{\text{кр}}$ существенно больше 10 мэВ, по-видимому, мало электронов, которые могли бы ускоряться. Поэтому следует ожидать возникновения быстрых электронов в момент прихода радиоизлучения хромосферной вспышки во внутренней зоне радиационного пояса (см. [6]).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем вывод формул (6)–(8). Интегрируя (3) при помощи δ -функций, содержащихся в (4), получим

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \sum_{v=1}^{\infty} e^2 \int_{-1}^{+1} dx \left(\frac{\partial}{\partial p_z} \omega_v n_v x + \frac{\varepsilon \omega_H v}{p_\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp} \right) \frac{\omega_v^2}{n_v} \frac{N_{\omega_v, \omega_v n_v x}}{|1 - xv_z d(\omega n)/d\omega|} \times \\ \times \left\{ \frac{(x - n_v v_z)^2 J_v^2(z_v) + v_\perp^2 n_v^2 J_v'^2(z_v)}{1 - x^2} \right\}; \quad (\text{П. 1})$$

$$z_v = \frac{\omega_v n_v}{|eH|} p_\perp \sqrt{1 - x^2}; \quad n_v = n(\omega_v); \quad \omega_v = \frac{\omega_H v}{1 - n_v v_z x}; \quad (\text{П. 2})$$

$$z = y \sqrt{1 - x^2}. \quad (\text{П. 3})$$

Для того, чтобы избавиться от сложных выражений, получающихся при дифференцировании (П. 1), а также привести результат к виду, не содержащему производных от показателя преломления, воспользуемся следующим приемом. Учтем, что для высоких гармоник $v \gg 1$ (которые только и представляют интерес) суммирование можно заменить интегрированием по v и воспользоваться интегрированием по частям по переменной v . При $v_z \rightarrow 0$

$$\frac{\partial}{\partial p_z} \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial v_z} + n \omega_v x \frac{\partial}{\partial \omega_v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial p_\perp} \rightarrow \frac{\partial}{\partial p_\perp} - v_\perp \frac{\omega_v}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \omega_v}; \quad (\text{П. 4})$$

если считать, что подынтегральная функция зависит от v_z , p_{\perp} , ω , и v , то

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{e^2}{\varepsilon} \int_0^\infty d\nu W_v(v_z, p_{\perp}, \omega_v) N; \quad (\text{П. 5})$$

$$W_v = \int_{-1}^{+1} dx \left\{ \left[\omega_v^3 x^2 \left(\frac{d}{d\omega_v} \omega_v n_v \right) + n_v \omega_v \frac{\partial}{\partial \omega_v} \omega_v^3 x^2 \right] \times \right. \\ \times \left[\frac{x^2}{1-x^2} J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) + v_{\perp}^2 n_v^2 J_v'^2(y \sqrt{1-x^2}) \right] - 2 \omega_v^3 n_v \times \\ \times \frac{x^2}{1-x^2} J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{v_{\perp}^2} \frac{\omega_v^3}{n_v} y \frac{d}{dy} \left[\frac{x^2}{1-x^2} J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) + \right. \\ \left. + v_{\perp}^2 n_v^2 J_v'^2(y \sqrt{1-x^2}) \right] + 2 (1-v_{\perp}^2) \omega_v^3 n_v J_v'^2(y \sqrt{1-x^2}) - \\ \left. - \omega_v^2 \frac{\partial}{\partial \omega_v} \frac{\omega_v^2}{n_v} \left[\frac{x^2}{1-x^2} J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) + v_{\perp}^2 n_v^2 J_v'^2(y \sqrt{1-x^2}) \right] \right\}. \quad (\text{П. 6})$$

При этом $\frac{\partial}{\partial \omega_v}$ действует на все последующие выражения, содержащие ω_v . Для того, чтобы можно было воспользоваться интегрированием по частям, учтем, что от v зависит еще индекс функций Бесселя. Обозначив через $\frac{\partial}{\partial v}$ дифференцирование по индексу, имеем

$$\omega_v \frac{\partial}{\partial \omega_v} = \omega_v \frac{d}{d\omega_v} - v \frac{\partial}{\partial v}. \quad (\text{П. 7})$$

В члене $\frac{d}{d\omega_v}$ интегрируем по частям, $\frac{\partial}{\partial v}$ проносим до выражений, стоящих в квадратных скобках. Поскольку дифференцирование по индексу неудобно при использовании асимптотических выражений, целесообразно ввести полную производную по v . В результате получаем (с учетом соотношения $v \frac{\partial}{\partial v} = v \frac{d}{dv} - y \frac{d}{dy}$)

$$W_v = 2 \omega_v^3 n_v \int_{-1}^{+1} J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) dx + \frac{2 \omega_v^3}{n_v} (1-n_v^2) \int_{-1}^{+1} \frac{x^2}{1-x^2} \times \\ \times J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) dx + \left[\frac{\omega_v^3}{v_{\perp}^2 n_v} (1+n_v^2 v_{\perp}^2 - v_{\perp}^2) y \frac{d}{dy} + \right. \\ + \frac{\omega_v^3}{n_v} (1-n_v^2) v \frac{d}{dv} \left. \right] \int_{-1}^{+1} dx \left[\frac{x^2}{1-x^2} J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) + v_{\perp}^2 n_v^2 J_v'^2 \times \right. \\ \times (y \sqrt{1-x^2}) \left. \right] - \omega_v^3 n_v \left(y \frac{d}{dy} - v \frac{d}{dv} \right) \int_{-1}^{+1} dx [x^2 J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) + \\ + v_{\perp}^2 n_v^2 (1-x^2) J_v'^2(y \sqrt{1-x^2})]. \quad (\text{П. 8})$$

Получившиеся интегралы могут быть вычислены, если воспользоваться подстановкой

$$J_v^2(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{J_{2v}(2vz)}{\sqrt{1-v^2}} dv_z \quad (\text{П. 9})$$

и изменить порядок интегрирования, а также использовать соотношение

$$J_v'^2(z) = \left(\frac{1}{2z} \frac{d}{dz} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \right) J_v^2(z) + \left(1 - \frac{v^2}{z^2} \right) J_v^2(z). \quad (\text{П. 10})$$

Они будут равны:

$$\int_{-1}^{+1} dx J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) x^2 = \frac{1}{2y} \int_0^{2y} \left(1 - \frac{t^2}{4y^2} \right) J_{2v}(t) dt; \quad (\text{П. 11})$$

$$\int_{-1}^{+1} dx J_v^2(y \sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{y} \int_0^{2y} J_{2v}(t) dt; \quad (\text{П. 12})$$

$$\int_{-1}^{+1} dx \frac{J_v^2(y \sqrt{1-x^2})}{1-x^2} = 2 \int_0^{2y} \frac{J_{2v}(t) dt}{t}; \quad (\text{П. 13})$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} dx J_v'^2(y \sqrt{1-x^2}) &= \frac{2}{y} J_{2v}'(2y) + \frac{1}{y} \int_0^{2y} J_{2v}(t) dt - \\ &\quad - \frac{2v^2}{y^2} \int_0^{2y} \frac{J_{2v}(t) dt}{t}; \end{aligned} \quad (\text{П. 14})$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1-x^2) J_v'^2(y \sqrt{1-x^2}) dx &= \frac{3}{8y^3} \int_0^{2y} t \frac{d}{dt} t J_{2v}'(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2y} \left(1 - \frac{v^2}{y^2} \right) \int_0^{2y} J_{2v}(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{П. 15})$$

Подставляя значения интегралов в (П. 8) и выполняя операцию $\frac{d}{dy}$, получаем

$$\begin{aligned} W_v &= w_v^3 n_v \left\{ \left[4v_\perp^2 + 2 - \frac{1}{2} (1 - n_v^2 v_\perp^2) \right] \frac{J_{2v}'(2y)}{y} - \right. \\ &\quad - \left[2(1-n_v^2) + \frac{1-n_v^2 v_\perp^2}{2n_v^2 v_\perp^2} (1 - n_v^2 v_\perp^2 + 2v_\perp^2) - \frac{3}{8y^2} (1 + 3v_\perp^2 n_v^2) \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{y} \int_0^{2y} J_{2v}(t) dt + \left[\frac{2}{n_v^2 v_\perp^2} (1 - n_v^2 v_\perp^2) (1 - v_\perp^2) - \right. \end{aligned} \quad (\text{П. 16})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{4y^2} (1 + 3v_\perp^2 n_y^2) \left[J_{2y}(2y) + \frac{1}{n_y^2} (1 - n_y^2) \nu \frac{d}{dy} \frac{v_\perp^2 n_y^2}{y} \right] [2J'_{2y}(2y) + \\
 & + \left(1 - \frac{1}{n_y^2 v_\perp^2} \right) \int_0^{2y} J_{2y}(t) dt] + \nu \frac{d}{dy} \left[\frac{(1 + n_y^2 v_\perp^2)}{2y} \times \right. \\
 & \times \left. \left(1 - \frac{1}{n_y^2 v_\perp^2} \right) \int_0^{2y} J_{2y}(t) dt + \frac{1 + 3v_\perp^2 n_y^2}{8y^3} \int_0^{2y} t \frac{d}{dt} t J'_{2y}(t) dt \right].
 \end{aligned}$$

Дальнейшие упрощения получатся, если учесть, что высокие гармоники эффективно взаимодействуют с излучением в случае $\xi \ll 1$, $\eta \ll 1$, где

$$\xi = 1 - v_\perp^2; \quad \eta = 1 - n_y^2. \quad (\text{П. 17})$$

При этом в (П. 16) можно оставить лишь первые члены по ξ и η и воспользоваться известной асимптотикой [3] функций Бесселя:

$$J_{2y}(2\nu n_y v_\perp) = \frac{\sqrt{\xi + \eta}}{\pi \sqrt{3}} K_{1/3}(\zeta), \quad (\text{П. 18})$$

где

$$\zeta = \frac{2\nu}{3} (\xi + \eta)^{3/2} \quad (\text{П. 19})$$

с необходимой точностью

$$1 - n_y^2 v_\perp^2 = \xi + \eta. \quad (\text{П. 20})$$

С той же точностью $1/y^2 \sim (\xi + \eta)^3/\zeta^2 \ll \xi, \eta$ и

$$\int_0^{2y} t \frac{d}{dt} t J'_{2y}(t) dt \simeq 4y^2 J'_{2y}(2y). \quad (\text{П. 21})$$

В результате (П. 16) принимает вид

$$\begin{aligned}
 W_y = \frac{\omega^3}{\nu \pi \sqrt{3}} & \left\{ 4(\xi + \eta) K_{2/3}(\zeta) - 2\eta \int_{\zeta}^{\infty} K_{1/3}(\zeta') d\zeta' + 3\xi \zeta K_{1/3}(\zeta) - \right. \\
 & \left. - (\xi + \eta) \zeta K_{5/3}(\zeta) \right\}.
 \end{aligned} \quad (\text{П. 22})$$

Воспользовавшись рекуррентной формулой

$$\zeta K_{1/3}(\zeta) = \zeta K_{5/3}(\zeta) - \frac{4}{3} K_{2/3}(\zeta), \quad (\text{П. 23})$$

получим результат (6), приведенный в тексте.

Приведем также асимптотические выражения, использованные в (18). При $\zeta \ll 1$

$$K_{5/3}(\zeta) \simeq \frac{2^{2/3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\zeta^{5/3}}; \quad \int_{\zeta}^{\infty} K_{5/3}(\zeta') d\zeta' = \frac{2^{2/3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\zeta^{2/3}} \frac{3}{2}. \quad (\text{П. 24})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Цытович, ДАН СССР, **142**, 319 (1962).
2. В. Н. Цытович, Астроном. ж., **40**, 612 (1963).
3. В. Н. Цытович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 918 (1963).
4. В. Н. Цытович, Вестник МГУ, № 11, 27 (1951).
5. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 584 (1962).
6. В. Н. Цытович, Геомагнетизм и аэрономия, **3**, 616 (1963).
7. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Г. Барьяттар, С. В. Пелетминский. ЖЭТФ, **42**, 552 (1962).
8. В. Л. Гинзбург, УФН, **62**, 37 (1957).
9. В. Л. Гинзбург, С. Н. Сыроватский, УФН, **71**, 410 (1960).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
1 апреля 1963 г.

ON THE INFLUENCE OF MEDIUM UPON SYNCHROTRON ACCELERATION
OF RELATIVISTIC PARTICLES

A. K. Gailitis, V. H. Tsytovich

The acceleration of relativistic electrons moving in medium in the presence of a magnetic field under the transverse electromagnetic waves action is considered. The case of small frequencies is analysed, i. e. $\omega \ll \omega_0 \epsilon/m$ (where ω_0 is a plasma frequency, ϵ is the particle energy, m is its mass, $\hbar = c = 1$), when the influence of medium can be essential. Possible applications are discussed concerning the problem of relativistic electrons acceleration in some discrete radio sources.

КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ ПЛАЗМЫ И ИЗЛУЧАЕМЫХ ИМИ ФОТОНОВ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

B. Г. Баръяхтар, С. В. Пелетминский

Дан вывод кинетических уравнений для электронов и фотонов (с учетом процесса поглощения и излучения последних) в плазме, находящейся в сильном магнитном поле.

В работах [1, 2] было показано, что процессы излучения и поглощения электромагнитных волн электронами плазмы в сильном магнитном поле могут оказывать существенное влияние на релаксацию электронов плазмы. Приведенные в [1] выражения для радиационных интегралов столкновений относятся к случаю однородной плазмы. Для исследования явлений переноса необходимо знать вид радиационных интегралов столкновений в случае неоднородной плазмы. Выводу этих интегралов и нахождению токов в неоднородной плазме и посвящена настоящая работа.

Чтобы получить кинетические уравнения для электронов плазмы и излучаемых ими фотонов, мы будем исходить из системы уравнений для корреляционных функций электронов и фotonов, пренебрегая в них корреляцией электронов и фотонов во втором приближении теории возмущений [3]. Ниже не учитываются также эффекты, связанные с поляризацией плазмы, т. е. предполагается, что $|\epsilon| \ll 1$.

1. Гамильтониан свободных электронов и фотонов имеет следующий вид:

$$T = \sum_x \epsilon_x a_x^+ a_x + \sum_{k\lambda} \hbar\omega_{k\lambda} b_{k\lambda}^+ b_{k\lambda}, \quad (1)$$

где ϵ_x , a_x , a_x^+ — энергия и операторы уничтожения и рождения электрона в состоянии с квантовыми числами x ; $\hbar\omega_{k\lambda}$, $b_{k\lambda}$, $b_{k\lambda}^+$ — энергия и операторы уничтожения и рождения фотона в состоянии с волновым вектором k и поляризацией λ .

Взаимодействие между электронами и фотонами будем описывать гамильтонианом

$$V = \sum_{12,3} \{ \Phi(13,2) a_1^+ a_2 b_3^+ + \Phi^*(13,2) a_2^+ a_1 b_3 \}, \quad (2)$$

где индексы 1, 2 служат для обозначения квантовых чисел, относящихся к электрону, а индекс 3 — для обозначения волнового вектора и поляризации фотона.

Одночастичные матрицы плотности электронов $f_{11'}$ и фотонов $N_{33'}$ определяются равенствами

$$f_{11'} = \text{Sp } \rho a_1^+ a_{1'}, \quad N_{33'} = \text{Sp } \rho b_3^+ b_{3'}, \quad (3)$$

где ρ — полная матрица плотности системы. Используя уравнение для матрицы плотности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\rho, T + V], \quad (4)$$

найдем изменение со временем величин $f_{11'}$ и $N_{33'}$:

$$\frac{\partial f_{11'}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \text{Sp } \rho [T + V, a_1^+ a_{1'}^-];$$

$$\frac{\partial N_{33'}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \text{Sp } \rho [T + V, b_3^+ b_{3'}^-].$$

Учитывая далее условия коммутации между операторами a_1 , a_1^+ и b_3 , b_3^+ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{11'}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1) f_{11'} &= -\frac{i}{\hbar} \sum_{1''2,3} \{ \Phi(1''3, 2)[g(12, 3)\Delta(1' - 1'') - \\ &- g(1''1', 3)\Delta(2 - 1)] + \Phi^*(1''3, 2)[g^*(1''1, 3)\Delta(1' - 2) - \\ &- g^*(1''2, 3)\Delta(1'' - 1)] \}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial N_{33'}}{\partial t} + i(\omega_{3'} - \omega_3)N_{33'} = -\frac{i}{\hbar} \sum_{12} \{ \Phi(13', 2)g(12, 3) - \Phi^*(13, 2)g^*(12, 3') \},$$

где $g(12, 3) = \text{Sp } \rho a_1^+ a_2^- b_3^+$.

Составим теперь уравнение для изменения со временем функции g . Используя уравнения (4) и выражения для гамильтонианов (1), (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(12, 3)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \hbar\omega_3)g(12, 3) &= \frac{i}{\hbar} \sum_{1'2'3'} \Phi^*(1'3', 2') \times \\ &\times \{ \Delta(3 - 3')\text{Sp } \rho a_1^+ a_2^- a_2^+ a_{1'}^- - \Delta(2 - 2')\text{Sp } \rho a_1^+ a_1^- b_3^- b_{3'}^+ + \\ &+ \Delta(1 - 1')\text{Sp } \rho a_2^+ a_2^- b_3^- b_{3'}^+ \}. \end{aligned} \quad (6)$$

В правую часть этого уравнения входят, как мы видим, средние значения четырех операторов. Для изменения со временем этих величин можно получить уравнения, аналогичные уравнению (6), в правую часть которых будут входить средние значения произведения шести операторов a , b .

В дальнейшем мы не будем интересоваться эффектами, связанными с самосогласованным полем, и поэтому будем считать, что $\text{Sp } \rho b = 0$. Так, как взаимодействие между электронами и фотонами является слабым, то цепочку уравнений можно оборвать на уравнении (6), сделав в нем следующую замену:

$$\text{Sp } \rho a_1^+ a_2^- a_2^+ a_{1'}^- = f_{12} f_{2'1'} + f_{11'} [\Delta(2 - 2') - f_{2'2'}];$$

$$\text{Sp } \rho a_1^+ a_{1'}^- b_3^- b_{3'}^+ = f_{11'} [\Delta(3 - 3') + N_{3'3}];$$

$$\text{Sp } \rho a_1^+ a_1^- b_3^- b_{3'}^+ = 0.$$

При этом

$$\frac{\partial g(12,3)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \hbar\omega_3)g(12,3) = \frac{i}{\hbar} \sum_{1'2'3'} \Phi^*(1'3', 2') \{ f_{12}f_{2'1'} \Delta(3-3') + \\ + f_{11'} [\Delta(2-2') - f_{2'2}] \Delta(3-3') - \\ - [\Delta(3-3') + N_{3'3}] [f_{11'} \Delta(2-2') - f_{2'2} \Delta(1-1')]\}. \quad (7)$$

Считая, что функции $f_{11'}$, $N_{3'3}$ меняются медленно за времена порядка \hbar/ε , $1/\omega$, получим

$$g(12,3) = A(12,3)\delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2), \quad (8)$$

где

$$A(12,3) = \frac{\pi i}{\hbar} \sum_{1'2'3'} \Phi^*(1'3', 2') \{ f_{12}f_{2'1'} \Delta(3-3') + f_{11'} [\Delta(2-2') - \\ - f_{2'2}] \Delta(3-3') - [\Delta(3-3') + N_{3'3}] [f_{11'} \Delta(2-2') - f_{2'2} \Delta(1-1')]\}, \\ \delta_+(x) = \delta(x) + \frac{i}{\pi} P \frac{1}{x}.$$

Подставляя найденное выражение для функции g в (5), получим следующие уравнения для изменения со временем одночастичных матриц плотности электронов f и фотонов N :

$$\frac{\partial f_{11'}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} (\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1) f_{11'} = L_{11'}^{(e)} \{ f, N \}; \\ \frac{\partial N_{33'}}{\partial t} + i (\omega_{3'} - \omega_3) N_{33'} = L_{33'}^{(p)} \{ N, f \}, \quad (9)$$

где операторы столкновений $L_{11'}^{(e)}$ и $L_{33'}^{(p)}$ имеют вид

$$L_{11'}^{(e)} \{ f, N \} = - \frac{i}{\hbar} \sum_{1''23} \{ \Phi(1''3, 2) [A(12, 3)\delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2) \Delta(1' - 1'')] - \\ - A(1''1', 3)\delta_+(\varepsilon_{1''} + \hbar\omega_3 - \varepsilon_1) \Delta(2 - 1)] + \Phi^*(1''3, 2) [A^*(1''1, 3) \times \\ \times \delta_-(\varepsilon_{1''} + \hbar\omega_3 - \varepsilon_1) \Delta(1' - 2) - A^*(1''2, 3)\delta_-(\varepsilon_{1''} + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2) \Delta(1'' - 1)] \}; \\ L_{33'}^{(p)} \{ N, f \} = - \frac{i}{\hbar} \sum_{12} \{ \Phi(13', 2) A(12, 3)\delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2) - \\ - \Phi^*(13, 2) A^*(12, 3') \delta_-(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3, - \varepsilon_2) \}.$$
(10)

2. Состояние электрона в перпендикулярных магнитном H и электрическом E полях ($E \ll H$) характеризуется, как известно, совокупностью квантовых чисел $\mathbf{z} \equiv n, p_z, \xi$, где n — квантовое число, определяющее поперечную энергию электрона, p_z — составляющая импульса электрона вдоль магнитного поля и $\xi = cp_y/eH + mc^2E/eH^2$, — координата центра ларморовой окружности.

Энергия электронов в состоянии \mathbf{z} равна

$$\varepsilon_{\mathbf{z}} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_H + \frac{p_z^2}{2m} - eE\xi,$$

а волновая функция имеет вид

$$\psi_n = \frac{1}{V l_y l_z} e^{\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)} \left(\frac{eH}{\hbar c} \right)^{1/4} \varphi_n(\eta), \quad (11)$$

где

$$\varphi_n(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\eta) e^{-\frac{1}{2}\eta^2}, \quad \eta = (x - \xi) \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}},$$

$H_n(\eta)$ — полиномы Эрмита и l_x, l_y, l_z — размеры нормировочного объема вдоль осей x, y, z .

При излучении и поглощении фотонов в магнитном поле имеют место законы сохранения

$$p_z - p'_z \pm \hbar k_z = 0, \quad p_y - p'_y \pm \hbar k_y = 0.$$

Рассмотрим прежде всего решения уравнений (9)

$$N_{3'3} = N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Delta(k_y - k'_y);$$

$$f_{nn'} = f_{n p_z, n' p'_z}(\xi) \Delta(\xi - \xi'),$$

которым соответствуют однородные распределения электронов и фотонов вдоль оси y . Введем функцию $f_{nn'}(p_z; \xi, z)$, связанную с $f_{n p_z, n' p'_z}(\xi)$ соотношением

$$f_{nn'}(p_z; \xi, z) = \sum_{p'_z} f_{n p_z, n' p'_z}(\xi) e^{\frac{i}{\hbar}(p'_z - p_z)z}. \quad (12)$$

Эта функция является матрицей плотности относительно квантовых чисел n, n' и функцией распределения электронов по координатам ξ, z и по продольной составляющей импульса электрона p_z . Согласно (9), функция $f_{nn'}(p_z; \xi, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f_{nn'}}{\partial t} - i\hbar\omega_H(n' - n)f_{nn'} + \frac{p_z}{m} \frac{\partial f_{nn'}}{\partial z} = \sum_{p'_z} e^{\frac{i}{\hbar}(p'_z - p_z)z};$$

$$L_{xx'}^{(e)} \{ f, N \}|_{\xi=\xi'} \equiv L_{nn'}^{(e)} \{ f, N \}. \quad (13)$$

В общем случае матрица плотности электронов $f_{nn'}$ недиагональна по квантовым числам n и n' . Однако если внешнее магнитное поле достаточно велико, так что гирочастота велика по сравнению с частотой соударений τ^{-1} ($\omega_H \tau \gg 1$) и гирорадиус мал по сравнению с характерными размерами неоднородностей, то величину $f_{nn'}$ можно искать в виде разложения по степеням малого параметра $1/\omega_H \tau$:

$$f_{nn'} = f_{nn'}^0 + f_{nn'}^1 + \dots \quad (14)$$

и соответственно

$$L_{nn'}^{(e)} \{ f, N \} = L_{nn'}^{(e)0} \{ f^0, N \} + L_{nn'}^{(e)1} \{ f^0, f^1; N \} + \dots,$$

* Это разложение соответствует хорошо известному приближению Чепмена и Каулинга для кинетического уравнения в пространстве скоростей [4].

где функции $f_{nn'}^0$, $f_{nn'}^1$, ... определяются из уравнений

$$\begin{aligned} f_{nn'}^0(n - n') &= 0; \\ \frac{\partial f_{nn'}^0}{\partial t} + i\hbar\omega_H(n - n')f_{nn'}^1 + \frac{p_z}{m}\frac{\partial f_{nn'}^0}{\partial z} &= L_{nn'}^{(e)0}\{f^0, N\}; \\ \frac{\partial f_{nn'}^1}{\partial t} + i\hbar\omega_H(n - n')f_{nn'}^2 + \frac{p_z}{m}\frac{\partial f_{nn'}^1}{\partial z} &= L_{nn'}^{(e)1}\{f^0, f^1; N\}; \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad (14a)$$

Отсюда видно, что в нулевом приближении функция $f_{nn'}$ диагональна по квантовым числам n, n'

$$f_{nn'}^0 = f_n \Delta(n - n') \quad (15)$$

и определяется уравнением

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{p_z}{m}\frac{\partial f_n}{\partial z} = L_{nn}^{(e)0}\{f_n, N\}.$$

Недиагональные элементы электронной матрицы плотности появляются только в первом приближении по $1/\omega_H^\tau$ и равны

$$f_{nn'}^1 = \frac{i}{\hbar\omega_H(n' - n)} L_{nn'}^{(e)0}\{f_n, N\} \quad (n \neq n').$$

Диагональные элементы первого приближения удовлетворяют, согласно (14a), уравнению

$$\frac{\partial f_{nn}^1}{\partial t} + \frac{p_z}{m}\frac{\partial f_{nn}^1}{\partial z} = L_{nn}^{(e)1}\{f_n, f_{nn}^1; N\}. \quad (16)$$

3. Рассмотрим теперь интеграл столкновений $L_{xx}^{(e)}\{f, N\}$. Входящая в $L_{xx}^{(e)}$ величина Φ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(1k, 2) &= e^{-ik_x\xi} \Psi_\lambda(1k; 2); \\ \Psi_\lambda(1k; 2) &= \psi_\lambda(n_1 p_{1z} k; n_2 p_{2z}) \Delta(p_{1y} - p_{2y} + \hbar k_y) \times \\ &\times \Delta(p_{1z} - p_{2z} + \hbar k_z). \end{aligned} \quad (17)$$

Однородному распределению фотонов соответствует, очевидно, матрица плотности $N_{33'}$, диагональная по k, k' . В случае слабо неоднородного распределения, которым мы дальше будем интересоваться, $N_{33'}$ отлична от нуля только при $|k - k'| \leq 1/l$ ($1/l \ll k$), где l — характерные размеры неоднородностей. В этом случае можно пренебречь различием между k и k' в функциях $\Psi_\lambda(1k, 2)$ и $\Psi_{\lambda'}(1k'; 2)$ (но не в функциях $e^{-ik_x\xi}$ и $e^{-ik'_x\xi}$). В уравнение (13), определяющее функцию распределения электронов $f_{nn'}(p_z; \xi, z)$, входит величина $L_{nn'}^{(e)} = \sum L_{xx'}^{(e)}|_{\xi=\xi'} e^{\frac{i}{\hbar}z(p'_z - p_z)}$, для которой, согласно (10), (12), (17), легко получить следующее выражение:

$$\begin{aligned}
L_{nn}^{(e)0} \{ f_n, N \} = & \frac{\pi}{\hbar} \sum_{23\lambda'} \psi_{\lambda'}^*(n_1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 p_{2z}) \psi_{\lambda'}(n'_1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 p_{2z}) \times \\
& \times \Delta(p_{1y} + \hbar k_y - p_{2y}) \Delta(p_{1z} + \hbar k_z - p_{2z}) \delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) \{ f_2(1 - f_1) \delta_{\lambda\lambda'} + \\
& + (f_2 - f_1) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z) \}_{\xi_1 = \xi'_1 = x} + \frac{\pi}{\hbar} \sum_{23\lambda'} \psi_{\lambda'}(n'_1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 p_{2z}) \times \\
& \times \psi_{\lambda}^*(n_1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 p_{2z}) \Delta(p_{1y} + \hbar k_y - p_{2y}) \Delta(p_{1z} + \hbar k_z - p_{2z}) \times \\
& \times \delta_-(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) \{ f_2(1 - f_1) \delta_{\lambda\lambda'} + (f_2 - f_1) N_{\lambda'\lambda}(\mathbf{k}; \xi_1, z) \}_{\xi_1 = \xi'_1 = x} - \\
& - \frac{\pi}{\hbar} \sum_{23\lambda'} \psi_{\lambda'}^*(n_2 p_{2z} \mathbf{k}; n'_1 p_{1z}) \psi_{\lambda'}(n_2 p_{2z} \mathbf{k}; n_1 p_{1z}) \Delta(p_{2y} + \hbar k_y - p_{1y}) \times \\
& \times \Delta(p_{2z} + \hbar k_z - p_{1z}) \delta_+(\varepsilon_2 + \hbar\omega - \varepsilon_1) \{ f_1(1 - f_2) \delta_{\lambda\lambda'} + \\
& + (f_1 - f_2) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_2, z) \}_{\xi_1 = \xi'_1 = x} - \frac{\pi}{\hbar} \sum_{23\lambda'} \psi_{\lambda'}(n_2 p_{2z} \mathbf{k}; n_1 p_{1z}) \times \\
& \times \psi_{\lambda}^*(n_2 p_{2z} \mathbf{k}; n'_1 p_{1z}) \Delta(p_{2y} + \hbar k_y - p_{1y}) \Delta(p_{2z} + \hbar k_z - p_{1z}) \times \\
& \times \delta_-(\varepsilon_2 + \hbar\omega - \varepsilon_1) \{ f_1(1 - f_2) \delta_{\lambda\lambda'} + (f_1 - f_2) N_{\lambda\lambda'}^*(\mathbf{k}; \xi_2, z) \}_{\xi_1 = \xi'_1 = x}, \tag{18}
\end{aligned}$$

где

$$N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; x, z) = \sum_{k'_x k'_z} N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') e^{ix(k'_x - k_x) + iz(k'_z - k_z)}. \tag{19}$$

При $n = n'$ формула (18) значительно упрощается:

$$\begin{aligned}
L_{nn}^{(e)0} \{ f_n, N \} = & \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{23\lambda'} \Psi_{\lambda'}^*(1\mathbf{k}; 2) \Psi_{\lambda'}(1\mathbf{k}; 2) \{ f_2(1 - f_1) \delta_{\lambda\lambda'} + \\
& + (f_2 - f_1) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z) \} \delta(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) - \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{23\lambda'} \Psi_{\lambda'}^*(2\mathbf{k}; 1) \times \\
& \times \Psi_{\lambda'}(2\mathbf{k}; 1) \{ f_1(1 - f_2) \delta_{\lambda\lambda'} + (f_1 - f_2) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_2, z) \}. \tag{18a}
\end{aligned}$$

Величина $N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; x, z)$, являющаяся матрицей плотности относительно поляризаций, определяет распределение фотонов в координатном пространстве и пространстве волновых векторов.

4. Переидем к выводу кинетического уравнения для величины $N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; x, z)$. Умножим для этого уравнение (9) на $e^{ix(k'_x - k_x) + iz(k'_z - k_z)}$ и просуммируем по k'_x, k'_z :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; x, z)}{\partial t} + \sum_{k'_x k'_z} i(\omega - \omega') N_{\lambda\lambda'} e^{ix(k' - k)} = \\
& = \sum_{\mathbf{k}} e^{ix(k' - k)} L_{\lambda\lambda'}^{(p)} \equiv L_{\lambda\lambda'}^{(p)} \{ N, f \}. \tag{20}
\end{aligned}$$

Учитывая, что величина $N_{33'}$ диагональна по \mathbf{k}_y и отлична от нуля при $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \leq 1/l$, можно представить левую часть уравнения (20) в обычном виде:

$$\frac{\partial N_{\lambda\lambda'}}{\partial t} + \frac{ck_x}{k} \frac{\partial N_{\lambda\lambda'}}{\partial x} + \frac{ck_z}{k} \frac{\partial N_{\lambda\lambda'}}{\partial z}.$$

Используя формулу (10), можно представить правую часть уравнения (20) в форме

$$\begin{aligned} L_{\lambda\lambda'}^{(p)} \{N, f\} = & \sum_{12\lambda'} \Psi_{\lambda''}^*(1\mathbf{k}; 2) \Psi_{\lambda'}(1\mathbf{k}'; 2) e^{i(\xi_1 - x)(k_x - k'_x)} \times \\ & \times f_2(1 - f_1) \{\delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2) + \delta_-(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3' - \varepsilon_2)\} + \\ & + \sum_{123''\lambda'} \{\Psi_{\lambda''}^*(1\mathbf{k}''; 2) \Psi_{\lambda'}(1\mathbf{k}'; 2) e^{i\xi_1(k''_x - k'_x) + ix(k'_x - k_x)} N_{33'} \times \\ & \times \delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2) + \Psi_{\lambda''}^*(1\mathbf{k}; 2) \Psi_{\lambda'}(1\mathbf{k}''; 2) e^{i\xi_1(k_x - k''_x) + ix(k'_x - k_x)} \times \\ & \times N_{3''3'} \delta_-(\varepsilon_1 + \hbar\omega_3' - \varepsilon_2)\} (f_2 - f_1). \end{aligned}$$

Так как $N_{33''}$ отлична от нуля только при \mathbf{k}_3 , близких к \mathbf{k}_3'' , и Ψ медленно меняется с изменением величин \mathbf{k} , то при суммировании по \mathbf{k}' под знаком суммы появляется $\delta(\xi - x)$ и в результате $L_{\lambda\lambda'}^{(p)} \{N, f\}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} L_{\lambda\lambda'}^{(p)} \{N, f\} = & \frac{\pi}{\hbar} \sum_{12\lambda'} \Psi_{\lambda''}^*(1\mathbf{k}; 2) \Psi_{\lambda'}(1\mathbf{k}; 2) \times \\ & \times \delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) \{(f_2 - f_1) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; x, z) + f_2(1 - f_1) \delta_{\lambda\lambda'}\}_{\xi_1=x} + \\ & + \frac{\pi}{\hbar} \sum_{12\lambda''} \Psi_{\lambda''}^*(1\mathbf{k}; 2) \Psi_{\lambda'}(1\mathbf{k}; 2) \delta_-(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) \times \\ & \times \{(f_2 - f_1) N_{\lambda''\lambda'}(\mathbf{k}; x, z) + f_2(1 - f_1) \delta_{\lambda''\lambda'}\}_{\xi_1=x}. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, окончательно мы получаем следующую систему кинетических уравнений для величин $f_n(p_z; \xi, z)$, $N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; x, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{p_z}{m} \frac{\partial f_n}{\partial z} &= L_{nn}^{(e)0} \{f, N\}; \\ f_{nn'} &= \frac{i}{\hbar\omega_H(n' - n)} L_{nn'}^{(e)0} \{f, N\} \quad (n \neq n'); \\ \frac{\partial N_{\lambda\lambda'}}{\partial t} + \frac{ck_x}{k} \frac{\partial N_{\lambda\lambda'}}{\partial x} + \frac{ck_z}{k} \frac{\partial N_{\lambda\lambda'}}{\partial z} &= L_{\lambda\lambda'}^{(p)} \{N, f\}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $L_{\lambda\lambda'}^{(p)}$, $L_{nn'}^{(e)0}$ задаются формулами (18), (21).

Эта система уравнений определяет функцию распределения электронов и фотонов в пространственно-неоднородной плазме, находящейся в сильном магнитном поле. Система кинетических уравнений (9), (10) справедлива, как уже указывалось выше, если можно не учитывать эффектов, обусловленных самосогласованным полем (учет этих эффектов производится обычным образом). В частности, этой системой

можно пользоваться для исследования процессов радиационной релаксации, а также для вычисления коэффициентов переноса в плазме в стационарном случае.

В уравнениях (22) не учитываются кулоновские столкновения, так как нас интересует тот случай, когда среднее время между радиационными столкновениями $\tau_e^{(r)}$ значительно меньше среднего времени между кулоновскими столкновениями $\tau_e^{(s)}$. Уравнения справедливы, если магнитное поле достаточно велико, так что выполняется неравенство $\omega_H \tau_e^{(r)} \gg 1$, а неоднородности настолько малы, что $l \gg \lambda$, $a \ll l$ (l — характерные размеры неоднородностей, a — гирорадиус, λ — длина волны излучаемых фотонов).

5. Выразим теперь плотность тока электронов через функцию распределения $f_{xx'}$.

Оператор тока при наличии электромагнитного поля имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2; \\ \mathbf{j}_1 &= -\frac{ie\hbar}{2m} \{ \psi^+ \nabla \psi - (\nabla \psi^+) \psi \} - \frac{e^2}{mc} \psi^+ \psi \mathbf{A}; \\ \mathbf{j}_2 &= -\frac{e^2}{mc} \psi^+ \psi \mathbf{G}, \end{aligned} \quad (23)$$

где ψ — оператор электронного поля:

$$\psi = \sum_x a_x \psi_x,$$

и \mathbf{G} — вектор-потенциал квантового поля излучения:

$$\mathbf{G} = \sum_{k\lambda} \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega V}} \mathbf{e}_{k\lambda} \{ b_{k\lambda} e^{ikx} + b_{k\lambda}^+ e^{-ikx} \} \quad (24)$$

($\mathbf{e}_{k\lambda}$ — единичный вектор поляризации фотона).

Используя формулы (3), (11), (23), получим следующее выражение для среднего значения оператора j_1 :

$$\begin{aligned} j_{1x} &= -\frac{ie\hbar}{2m} \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}} \frac{1}{l_y l_z} \sum_{n'} \sum_x f_{n'n}(p_z; \xi, z) \left\{ \varphi_{n'} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - \varphi_n \frac{\partial \varphi_{n'}}{\partial x} \right\}; \\ j_{1y} &= -\frac{ecE}{H} \sum_{n'} \sum_x f_{n'n}(p_z; \xi, z) \varphi_{n'} \varphi_n \frac{1}{l_y l_z} \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}} - \\ &\quad - \frac{e^2 H}{mc} \frac{1}{l_y l_z} \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}} \sum_{n'} \sum_x f_{n'n}(p_z; \xi, z) (x - \xi) \varphi_{n'} \varphi_n; \\ j_{1z} &= \frac{e}{m} \frac{1}{l_y l_z} \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}} \sum_{n'} \sum_x f_{n'n}(p_z; \xi, z) p_z \varphi_{n'} \varphi_n. \end{aligned} \quad (25)$$

Функция $\varphi_n(x - \xi)$ при больших n отлична от нуля только при $|x - \xi| \lesssim a$; функция же распределения электронов $f_{nn'}(p_z; \xi, z)$ мало меняется при изменении ξ на величину порядка a . Поэтому в форму-

лах (25) функцию $f_{nn'}(p_z; \xi, z)$ можно разложить в ряд по степеням $\xi - x$ и ограничиться в нем первыми двумя членами:

$$f_{n'n}(p_z; \xi, z) = f_{n'n}(p_z; x, z) + (x - \xi) \frac{\partial f_{n'n}}{\partial x}.$$

После этого суммирование по p_y или, что то же самое, интегрирование по переменной ξ в формулах (25) легко выполняется, если воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} 2\varphi'_n &= \sqrt{2n}\varphi_{n-1} - \sqrt{2(n+1)}\varphi_{n+1}; \\ 2\eta\varphi_n(\eta) &= \sqrt{2(n+1)}\varphi_{n+1} + \sqrt{2n}\varphi_{n-1}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\eta)\varphi_{n'}(\eta) d\eta &= \delta_{nn'}. \end{aligned} \quad (26)$$

Мы приведем окончательные выражения не для декартовых компонент вектора \mathbf{j}_1 , а для циркулярных компонент этого вектора $j_1^\pm = j_{1x} \pm ij_{1y}$, j_{1z} :

$$\begin{aligned} j_1^+ &= -iec \frac{E}{H} \rho + i \frac{c}{H} \nabla_x \rho T - i \frac{e\hbar}{m} \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}} \frac{1}{V} \sum_n \sqrt{2n} f_{n-1,n}(p_z; x, z); \\ j_1^- &= (j_1^+)^*; \\ j_z &= \frac{e}{m} \frac{1}{V} \sum_n p_z f_{nn}(p_z; x, z), \end{aligned} \quad (26a)$$

где ρ — плотность электронов и ρT — средняя энергия поперечного движения электронов:

$$\rho = \frac{1}{V} \sum_n f_{nn}, \quad \rho T = \frac{1}{V} \sum_n \hbar\omega_H \left(n + \frac{1}{2} \right) f_{nn}.$$

Среднее значение оператора j_2 , согласно формулам (3), (11), (23), равно

$$\begin{aligned} j_2 &= -\frac{e^2}{mc} \left(\frac{eH}{\hbar c} \right)^{1/2} \frac{1}{l_y l_z} \sum_{123} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega V}} \varphi_{n_1}(\eta) \varphi_{n_2}(\eta') e^{-ik_x r} \times \\ &\quad \times g(12, 3) \mathbf{e}_{k\lambda} + \text{к. с.}; \\ \eta' &= \eta - \beta; \quad \beta = k_y \sqrt{\hbar c/eH}. \end{aligned}$$

Используя выражение (7) для $g(1, 2, 3)$ и определение (12), (19) для $N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; x, z)$, $f_{nn'}(p_z; \xi, z)$, можно представить величину j_2 в виде

$$\begin{aligned} j_2 &= -\frac{\pi ie^2}{mc} \frac{1}{l_y l_z} \left(\frac{eH}{\hbar c} \right)^{1/2} \sum_{123\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2\hbar}{\omega V}} \varphi_{n_1}(\eta) \varphi_{n_2}(\eta') e^{ik_x(\xi_1 - x)} \times \\ &\quad \times \mathbf{e}_{k\lambda} \Psi_{\lambda}^*(1\mathbf{k}; 2) \{ f_1(1 - f_2) \delta_{\lambda\lambda'} + (f_2 - f_1) [\delta_{\lambda\lambda'} + \\ &\quad + N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z)] \} \delta_{\xi_1=x} (\varepsilon_1 + \hbar\omega_3 - \varepsilon_2) + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (27)$$

В этом выражении можно явно выполнить суммирование по ξ . Вводя функцию

$$J_{n_1 n_2}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\eta} \varphi_{n_1}(\eta) \varphi_{n_2}(\eta') d\eta' \quad (28)$$

$$(\alpha = k_x \sqrt{\hbar c/eH}),$$

получим

$$j_2^+ = j_{2x} + ij_{2y} = -\frac{e^2}{mc} \frac{\pi i}{V} \sum_{123\lambda'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega V}} \{ f_2(1-f_1) \delta_{\lambda\lambda'} +$$

$$+ (f_2-f_1) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z) \}_{\xi_1=x} \{ e_{\lambda}^+ J_{n_1 n_2} \Psi_{\lambda'}^*(1\mathbf{k}; 2) \times$$

$$\times \delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) - e_{\lambda}^+ J_{n_1 n_2}^* \Psi_{\lambda'}(1\mathbf{k}; 2) \delta_-(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) \}. \quad (29)$$

Выразим теперь j_1 через диагональные элементы матрицы плотности. Для этого воспользуемся формулой (22), связывающей недиагональные элементы матрицы плотности с диагональными в случае сильных магнитных полей, а также определением электронного интеграла столкновений (8), (10). В результате простых преобразований получим

$$\sum_1 \sqrt{2n_1} L_{n_1=1, n_1}^{(e)} = \sum_{123\lambda'} \{ f_2(1-f_1) \delta_{\lambda\lambda'} + (f_2-f_1) \times$$

$$\times N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z) \}_{\xi_1=x} \{ \Psi_{\lambda}(1\mathbf{k}; 2) [\sqrt{2n_1} \psi_{\lambda}^*(n_1-1 p_{1z}\mathbf{k}; n_2 p_{2z}) -$$

$$- \sqrt{2(n_2+1)} \psi_{\lambda}^*(n_1 p_{1z}\mathbf{k}; n_2+1 p_{2z})] \delta_-(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) +$$

$$+ \Psi_{\lambda}^*(1\mathbf{k}; 2) [\sqrt{2(n_1+1)} \psi_{\lambda}(n_1+1 p_{1z}\mathbf{k}; n_2 p_{2z}) -$$

$$- \sqrt{2n_2} \psi_{\lambda}(n_1 p_{1z}\mathbf{k}; n_2-1 p_{2z})] \delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) \}.$$

Складывая формулы (26а), (29), найдем следующее выражение для среднего значения электрического тока:

$$j^+ = j_x + ij_y = -iec \frac{E}{H} \rho + i \frac{c}{H} \nabla_x \rho T - \frac{\pi c}{H} \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}} \frac{1}{V} \times$$

$$\times \sum_{123\lambda'} \{ f_2(1-f_1) \delta_{\lambda\lambda'} + (f_2-f_1) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z) \}_{\xi_1=x} \times$$

$$\times \left\{ \Psi_{\lambda'}^*(1\mathbf{k}; 2) \left[\sqrt{2(n_1+1)} \psi_{\lambda}(n_1+1 p_{1z}\mathbf{k}; n_2 p_{2z}) - \right. \right. \quad (30)$$

$$- \sqrt{2n_2} \psi_{\lambda}(n_1 p_{1z}\mathbf{k}; n_2-1 p_{2z}) + i \frac{e^2 H}{mc^2} \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega V}} e_{\lambda}^+ J_{n_1 n_2} \left. \right]$$

$$\times \delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) + \Psi_{\lambda}(1\mathbf{k}; 2) \left[\sqrt{2n_1} \psi_{\lambda'}^*(n_1-1 p_{1z}\mathbf{k}; n_2 p_{2z}) - \right.$$

$$- \sqrt{2(n_2+1)} \psi_{\lambda'}^*(n_1 p_{1z}\mathbf{k}; n_2+1 p_{2z}) -$$

$$\left. \left. - i \frac{e^2 H}{mc^2} \sqrt{\frac{\hbar c}{eH}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega V}} e_{\lambda}^+ J_{n_1 n_2}^+ \right] \delta_-(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) \right\}.$$

6. Выражение для поперечных компонент электронного тока можно значительно упростить, если воспользоваться конкретным видом гамильтониана взаимодействия фотонов с электронами, находящимися в магнитном поле:

$$V = -\frac{1}{c} \int \mathbf{G} \mathbf{j}_1 dx.$$

Подставляя сюда выражения (23), (24) для \mathbf{G} и \mathbf{j}_1 , получим, согласно (2), (17),

$$\Psi_\lambda(x\mathbf{k}; x') = -\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega V}} \Delta(p_y - p'_y + \hbar k_y) \Delta(p_z - p'_z + \hbar k_z) e_{k\lambda} \mathbf{B}, \quad (31)$$

где

$$B^+ = -\frac{ie\hbar}{2m} \left(\frac{eH}{\hbar c}\right)^{1/2} \{ \sqrt{2(n+1)} J_{n+1, n'} + \sqrt{2n'} J_{n, n'-1} \} - iec \frac{E}{H} J_{n, n'};$$

$$B^- = \frac{ie\hbar}{2m} \left(\frac{eH}{\hbar c}\right)^{1/2} \{ \sqrt{2n} J_{n-1, n'} + \sqrt{2(n'+1)} J_{n, n'+1} \} + iec \frac{E}{H} J_{n, n'};$$

$$B_z = \frac{e}{2m} (p_z + p'_z) J_{n, n'}.$$

Используя это выражение для Ψ , а также учитывая соотношения

$$(\beta + i\alpha) J_{n_1, n_2} = \sqrt{2n_1} J_{n_1-1, n_2} - \sqrt{2(n_2+1)} J_{n_1, n_2+1},$$

$$(\beta - i\alpha) J_{n_1, n_2} = \sqrt{2(n_1+1)} J_{n_1+1, n_2} - \sqrt{2n_2} J_{n_1, n_2-1},$$

которые легко получить из определения (28) функции J_{n_1, n_2} и формул (26), найдем:

$$\sqrt{2(n_1+1)} \psi_\lambda(n_1 + 1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 p_{2z}) - \sqrt{2n_2} \psi_\lambda(n_1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 - 1 p_{2z}) + \\ + i \frac{e\hbar}{m} \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega V}} e_{k\lambda}^+ J_{n_1, n_2} = (\beta - i\alpha) \psi_\lambda(n_1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 p_{2z});$$

$$\sqrt{2n_1} \psi_{\lambda'}(n_1 - 1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 p_{2z}) - \sqrt{2(n_2+1)} \psi_{\lambda'}(n_1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 + 1 p_{2z}) + \\ + i \frac{e\hbar}{m} \sqrt{\frac{eH}{\hbar c}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega V}} e_{k\lambda}^+ J_{n_1, n_2} = (\beta + i\alpha) \psi_{\lambda'}(n_1 p_{1z} \mathbf{k}; n_2 p_{2z}).$$

Подставляя эти выражения в формулу (30), получим окончательно следующую формулу для величины j^+ :

$$j^+ = -iec \frac{E}{H} \rho + i \frac{c}{H} \nabla_x \rho T - \frac{2\pi c}{H} \frac{1}{V} \sum_{123} \sum_{\lambda'} \Psi_{\lambda'}^*(1 \mathbf{k}; 2) \Psi_\lambda(1 \mathbf{k}; 2) \times \quad (32)$$

$$\times \delta(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2)(k_y - ik_x) \{ f_2(1 - f_1) \delta_{\lambda\lambda'} + (f_2 - f_1) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z) \}_{\xi_1=x}.$$

Если функция распределения фотонов является диагональной по поляризации фотонов, то эта формула приобретает вид, аналогичный выражению для тока, полученного Титейкой [5] в случае взаимодействия фотонов с электронами металла в сильном магнитном поле.

Из формул (25), (27) получаем следующее выражение для тока j_z :

$$j_z = \frac{e}{2m} \frac{1}{V} \sum_x p_z f_n(p_z; x, z) - \frac{e^2 \pi i}{mc V} \sum_{123} \sum_{\lambda'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega V}} (e_{k\lambda})_z J_{n_1, n_2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \Psi_{\lambda'}^*(1\mathbf{k}; 2) \{ f_1(1 - f^2) \delta_{\lambda\lambda'} + (f_2 - f_1) [\delta_{\lambda\lambda'} + \\ & + N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z)] \}_{\xi_1=x} \delta_+(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) + \text{к.с.} \end{aligned} \quad (32a)$$

Заметим, что второе слагаемое в этой формуле мало по сравнению с первым в отношении $1/\omega_H^\tau$.

7. Так как энергия и импульс излучаемого фотона малы по сравнению с энергией и импульсом электрона, то в уравнениях радиационные интегралы столкновений можно преобразовать, используя метод Фоккера-Планка [1]. Для этого представим $\Psi_{\lambda'}^*(1\mathbf{k}; 2) \Psi_{\lambda}(1\mathbf{k}; 2)$ в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda'}^*(1\mathbf{k}; 2) \Psi_{\lambda}(1\mathbf{k}; 2) = w_s^{\lambda\lambda'}(n_1 p_{1z}; \mathbf{k}) \Delta(p_{1y} - p_{2y} + \hbar k_y) \times \\ \times \Delta(p_{1z} - p_{2z} + \hbar k_z), \end{aligned} \quad (33)$$

где $s = n_2 - n_1$. Вводя далее обозначение

$$\begin{aligned} \varphi_s^{\lambda\lambda'}(\mathbf{p}_1; \mathbf{k}) = w_s^{\lambda\lambda'}(n_1 p_{1z}; \mathbf{k}) \{ f_2(1 - f_1) \delta_{\lambda\lambda'} + \\ + (f_2 - f_1) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z) \}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \hbar \mathbf{k}$, перепишем электронный интеграл столкновений в виде

$$\begin{aligned} L^{(e)}\{f, N\} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\lambda\lambda'} \int d\mathbf{k} \{ \varphi_s^{\lambda\lambda'}(\mathbf{p}_1, \mathbf{k}) \times \\ \times \delta(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) - \varphi_s^{\lambda\lambda'}(\mathbf{p}'_2, \mathbf{k}) \delta(\varepsilon_2 + \hbar\omega - \varepsilon_1) \}; \\ \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_1 - \hbar \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Разлагая δ -функции по постоянной Планка \hbar и учитывая, что

$$\begin{aligned} \varphi_s^{\lambda\lambda'}(\mathbf{p}'_2, \mathbf{k}) = \varphi_s^{\lambda\lambda'}(\mathbf{p}_1, \mathbf{k}) - \hbar k_z \frac{\partial \varphi_s^{\lambda\lambda'}}{\partial p_{1z}} + (p'_{2\perp} - p_{1\perp}) \frac{\partial \varphi_s^{\lambda\lambda'}}{\partial p_{1\perp}}; \\ p'_{2\perp} - p_{1\perp} = - \frac{\hbar\omega}{v_{1\perp}} \left(1 - \frac{cp_{1z}}{\varepsilon_1} \cos\vartheta \right); \quad \cos\vartheta = \frac{k_z}{k}, \end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned} L^{(e)}\{f, N\} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\lambda\lambda'} \int d\mathbf{k} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_{1z}} k_z \varphi_s^{\lambda\lambda'} \delta(z) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial p_{1y}} k_y \varphi_s^{\lambda\lambda'} \delta(z) + \frac{1}{p_{1\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{1\perp}} \frac{\omega}{c} \left(\frac{\varepsilon_1}{c} - p_{1z} \cos\vartheta \right) \varphi_s^{\lambda\lambda'} \delta(z) + U_s^{\lambda\lambda'} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U = - \left[\frac{c^2 k_z^2}{\varepsilon_1} - \frac{(c^2 p_{1z} k_z + sceH)^2}{\varepsilon_1^3} \right] \delta'(z) - k_z \frac{\partial z}{\partial p_{1z}} \delta'(z) - \\ - \frac{\omega}{c p_{1\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{1\perp}} \left(\frac{\varepsilon_1}{c} - p_{1z} \cos\vartheta \right) \delta(z); \\ z = \omega - \frac{c^2 p_{1z} k_z + sceH}{\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Величина U легко может быть преобразована к виду

$$U = -\frac{\omega}{\epsilon_1} (z \delta(z))' + \frac{1}{\epsilon_1} z^2 \delta'(z),$$

откуда следует, что $U = 0$. Поэтому окончательно имеем:

$$L^{(r)}\{f, N\} = \frac{1}{p_{\perp}} \frac{\partial}{\partial p_{\perp}} p_{\perp} J_{\perp}^{(r)} + \frac{\partial}{\partial p_z} J_z^{(r)} - \frac{\partial}{\partial \xi} J_{\xi}^{(r)}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} J_{\perp}^{(r)} &= \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{h} \sum_{\lambda\lambda'} \int d\mathbf{k} \frac{\omega}{c p_{\perp}} \left(\frac{\epsilon}{c} - p_z \cos \vartheta \right) \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s^{\lambda\lambda'} \delta(z); \\ J_z^{(r)} &= \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{h} \sum_{\lambda\lambda'} \int d\mathbf{k} k_z \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s^{\lambda\lambda'} \delta(z); \\ J_{\xi}^{(r)} &= -\frac{c}{eH} \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda\lambda'} \int d\mathbf{k} k_y \frac{2\pi}{h} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s^{\lambda\lambda'} \delta(z). \end{aligned} \quad (35a)$$

8. Определим теперь плотность тока электронов. Для этого заметим, что величина

$$\rho(\xi) = \frac{eH}{2\pi\hbar cl_z} \sum_{p_z} \sum_n f_x$$

представляет собою плотность электронов и, согласно кинетическому уравнению (22), (35), удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

где

$$j_x = \frac{eH}{2\pi\hbar cl_z} \sum_{p_z} \sum_n J_{\xi}^{(r)}, \quad j_z = \frac{e}{m} \frac{1}{V} \sum_x p_z f_x \quad (36)$$

представляют собою, очевидно, проекции плотности тока электронов на оси x , z .

Используя формулы (34), (35), представим величину j_x в виде

$$\begin{aligned} j_x &= -\frac{2\pi c}{HV} \sum_{123\lambda'} \Psi_{\lambda'}^*(1\mathbf{k}; 2) \Psi_{\lambda}(1\mathbf{k}; 2) \delta(\epsilon_1 + \hbar\omega - \epsilon_2) k_y \times \\ &\quad \times \{ f_2(1 - f_1) \delta_{\lambda\lambda'} + (f_2 - f_1) N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z) \}_{\xi_1=x}. \end{aligned}$$

Эта формула совпадает с формулой (32) для x -составляющей электронного тока, найденной в разделе 6. Формулу для j_y таким способом получить нельзя, так как мы предполагаем, что плазма однородна в направлении y .

Формула (36) определяет главный член в токе j_z . Чтобы найти слагаемое в j_z порядка $1/\omega_H \tau$ (аналогичное второму слагаемому в формуле (32a)) использованным выше способом, уже недостаточно исходить из кинетического уравнения (22), а надо воспользоваться уравнением (16).

Аналогичным образом, вводя плотность энергии электронов и фотонов

$$Q = \frac{eH}{2\pi\hbar cl_z} \sum_{p_z} \sum_n \varepsilon_z f_z + \sum_{\hbar\lambda} \hbar\omega N_{\lambda\lambda}(\mathbf{k}; x, z)$$

и используя уравнения (22), (35), получим

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0,$$

где величина \mathbf{q} представляет собой сумму плотности потока энергии электронов $\mathbf{q}^{(e)}$ и плотности потока энергии фотонов $\mathbf{q}^{(p)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}^{(e)} + \mathbf{q}^{(p)}; \\ q_x^{(e)} &= \frac{H}{2\pi\hbar cl_z} \sum_{p_z} \sum_n \varepsilon_z J_\xi^{(r)}; \quad q_z^{(e)} = \frac{1}{m} \frac{1}{V} \sum_z \varepsilon_z p_z f_z; \\ \mathbf{q}^{(p)} &= \sum_{\hbar\lambda} \frac{\mathbf{k}}{k} c \hbar\omega N_{\lambda\lambda}. \end{aligned}$$

Используя формулы (34), (35а), можно показать, что

$$\begin{aligned} q_x^{(e)} &= -\frac{2\pi c}{eHV} \sum_{123\lambda'} \Psi_{\lambda'}^*(1\mathbf{k}; 2) \Psi_\lambda(1\mathbf{k}; 2) \delta(\varepsilon_1 + \hbar\omega - \varepsilon_2) k_y \varepsilon_1 \times \\ &\quad \times \{f_2(1-f_1)\delta_{\lambda\lambda'} + (f_2-f_1)N_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \xi_1, z)\}_{\xi_1=x}. \end{aligned} \quad (37)$$

Авторы выражают глубокую благодарность А. И. Ахиезеру за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Г. Баръяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ, 42, 552 (1962).
2. А. И. Ахиезер, В. Г. Баръяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ, 43, 1743 (1962).
3. Н. Н. Боголюбов, К. П. Гуро, ЖЭТФ, 17, 614 (1947).
4. С. Чепмент, Т. Кауллинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1960.
5. S. Titeica, Ann. Phys., 22, 129 (1935).

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
1 февраля 1963 г

KINETIC EQUATIONS FOR PLASMA ELECTRONS AND RADIATED PHOTONS IN A STRONG MAGNETIC FIELD

V. G. Bar'yakhtar, S. V. Peletminsky

The derivation is performed of kinetic equations for electrons and photons in plasma placed in a strong magnetic field, the absorption processes and the photons radiation being taken into account

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ*

В. М. Конторович, И. Н. Кутик

Рассматривается преобразование продольных и поперечных волн друг в друга на границе плазмы в слабом, а при поперечном распространении—в произвольном магнитном поле. Коэффициенты преобразования в слабом поле имеют характерный максимум в угловой зависимости, положение, высота и ширина которого зависят от частоты

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в плазме наряду с поперечными электромагнитными волнами вблизи областей $\epsilon_{\text{эфф}} \rightarrow 0$ существуют продольные плазменные волны. На границе плазма—вакуум возможно взаимное преобразование продольных и поперечных волн друг в друга. В связи с проблемой солнечного радиоизлучения и диагностики плазмы преобразование волн рассматривалось в ряде работ как для плавной [1—5], так и для резкой границы плазмы [6—8].

Ниже также рассматривается преобразование волн на резкой границе плазмы в связи со следующим вопросом. В работе [10] было показано, что при преобразовании звука в электромагнитные волны (на границе проводника в магнитном поле) коэффициент преобразования имеет резкий и узкий максимум, соответствующий согласованию электрических импедансов звуковой и электромагнитной волны (при угле падения звука, равном отношению скорости звука к скорости света). Аналогичное явление можно ожидать и при преобразовании плазменных волн; так как в плазме как скорости, так и поляризации волн существенно зависят от частоты, положение, высота и ширина углового резонанса должны меняться с частотой. Ширина резонансного максимума может быть больше, чем неизбежное размытие по углам падения (в противоположность тому, что имеет место в обычной гидродинамике [10]).

Преобразование волн рассматривалось Филдом [6] в предположении, что плазма ограничена твердой стенкой (т. е. нормальная компонента скорости $v_n=0$). Отсюда следует (наряду с обычными условиями непрерывности тангенциальных компонент магнитного и электрического полей) также и дополнительное условие непрерывности нормальной компоненты электрического поля.

Другой предельный случай граничных условий исследовали Критц и Минцер [7], которые рассмотрели (в отсутствие магнитного поля) преобразование волн на границе между двумя плазмами с плотностями n_1 , n_2 и температурами T_1 , T_2 , уравновешивающими друг друга благодаря одинаковому давлению $p_1=n_1kT_1=n_2kT_2=p_2$. Границу при этом

* Работа доложена на третьем совещании по магнитной гидродинамике (Рига, июль 1962 г.).

можно считать стационарной в течение времени, значительно меньшего времени диффузионного размытия*.

В качестве дополнительных граничных условий в [7] используются гидродинамические условия непрерывности нормальной компоненты скорости и давления. В силу интересующей нас аналогии с обычной гидродинамикой мы также принимаем эти граничные условия.

Однако, так как гидродинамическое рассмотрение, соответствующее слабой пространственной дисперсии, применимо лишь при $\epsilon_{\text{эфф}} \rightarrow 0$ или в отсутствие магнитного поля при $|\omega - \omega_p|/\omega_p \ll 1$ (ω — частота падающей волны, ω_p — плазменная частота), то рассмотрение Критца и Минтцера пригодно лишь для достаточно малых скачков плотности, когда частота ω достаточно близка к обеим плазменным частотам. Если перейти к „горячему вакууму“ (т. е. к плазме или газу малой плотности $n_2 \ll n_1$ при $n_1 T_1 = n_2 T_2$), удерживающему плотную плазму, то из-за малости относительного „акустического“ импеданса (пропорционального $n_2 \sqrt{T_2}/n_1 \sqrt{T_1} = V \sqrt{n_2/n_1} \ll 1$) можно не учитывать плазменную волну в „вакууме“ и пользоваться гидродинамическим приближением, считая частоту близкой к плазменной частоте плотной плазмы. Дополнительным граничным условием при этом является условие непрерывности избыточного давления, возникающего на поверхности раздела за счет падающих и расходящихся волн. Таким образом, ниже в качестве граничных условий будем использовать

$$[H_t] = [E_t] = [p] = 0, \quad (1)$$

где $[A]$ — скачок величины A на поверхности раздела **.

Уравнения (1) соответствуют свободной электронной границе плазмы (ионы неподвижны), удерживаемой разреженным горячим газом, компенсирующим равновесное давление плазмы. Как отметили Критц и Минтцер, в силу того, что электроны колеблются около неподвижной ионной границы, на поверхности возникает эффективная плотность заряда, и нормальная компонента электрического поля претерпевает скачок (в отличие от условия Филда).

Переход к вакууму (в отсутствие магнитного поля) обращает все коэффициенты преобразования в нуль; однако включение даже слабого магнитного поля делает преобразование волн возможным за счет появления поперечных компонент поля в плазменной волне.

Ниже рассматривается преобразование продольных и поперечных волн друг в друга в слабом магнитном поле, произвольно ориентированном относительно границы. Исследуются угловые зависимости коэффициентов преобразования, в частности, угловой резонанс

* Заметим, что резкие (по сравнению с длиной волны) поверхности разрыва могут возникать в плазме и существовать в ней достаточно долгое (относительно периода колебаний $2\pi/\omega$) время в результате различных нестационарных или взрывных процессов. В связи с этим представляет интерес преобразование электромагнитных и плазменных волн на ударных волнах, которое в принципе может приводить к усилению волн за счет энергии ударной волны, как это происходит в обычной гидродинамике [9].

** Равенство $[v_x] = 0$ есть условие несмешиваемости двух сред, при переходе в вакуум оно теряет смысл. Это равенство следует из обращения в нуль потока частиц через возмущенную границу раздела $j_x^{(1)} \equiv n_1(v_x^{(1)} - D_x) = 0$, $j_x^{(2)} \equiv n_2(v_x^{(2)} - D_x) = 0$ (D — скорость движения границы), откуда и получаем (ввиду $n_1 \neq 0$, $n_2 \neq 0$) $v_x^{(1)} = -D_x = v_x^{(2)}$. Если же $n_2 = 0$, то имеем лишь $v_x^{(1)} = D_x$. Переход к уравнениям (1) от полной системы, включающей $[v_x] = 0$, может быть проделан при $n_2 \rightarrow 0$ ($n_1 T_1 = n_2 T_2$), если записать уравнение в виде, аналогичном (11)–(13), и воспользоваться выражениями для полей и законами преломления. Эти выкладки мы опускаем.

в них [10]. Рассмотрено также преобразование волн в немалом по величине поле в условиях поперечного распространения при частотах, близких к частоте плазменного резонанса.

1. СЛАБОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЗАКОН СНЕЛЛИУСА

Система линеаризованных уравнений, описывающих в гидродинамическом приближении высокочастотные колебания плазмы с температурой T и плотностью n в магнитном поле H_0 , приводит к известному дисперсионному уравнению [5], связывающему частоту ω и волновой вектор k :

$$(XS + \Omega_p - A) [(X-1)A + \Omega_p]^2 = \Omega_c^2 (X-1) \{ \cos^2 \theta (X-1) \times \\ (XS + \Omega_p - A) - \sin^2 \theta [(X-1)A + \Omega_p] \}. \quad (2)$$

Здесь и дальше мы будем пользоваться обозначениями

$$X = \left(\frac{kc}{\omega} \right)^2, \quad S = \left(\frac{s}{c} \right)^2, \quad s = \sqrt{\frac{kT}{m}}, \quad \Omega_p = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2, \\ A = 1 + i/\omega\tau, \quad \Omega_c = \frac{\omega_c}{\omega}, \quad \omega_c = \frac{eH_0}{mc}, \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \\ h = \frac{H_0}{H_0}, \quad \cos \theta = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{h}), \quad \xi = -i \frac{\omega m}{e}, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_p.$$

Поля E , H и давление p выражаются через скорость v следующим образом:

$$E = \xi \{ v - XSv_x \mathbf{x} - i\Omega_c [v, h] \}, \quad (3) \\ H = \sqrt{X} [\mathbf{x}, E], \quad p = mcnS\sqrt{X} v_x.$$

Столкновениями будем пренебрегать всюду, кроме областей резонанса ($\omega\tau \gg 1$).

Дисперсионное уравнение громоздко; поэтому в нашей задаче мы ограничимся несколькими случаями. Рассмотрим слабое магнитное поле $\Omega_c \ll |A - \Omega_p|$, причем предположим сначала, что магнитное поле не ортогонально волновым векторам ($\cos \theta \neq 0$) для всех волн одновременно. Корни дисперсионного уравнения в этом приближении равны

$$X_{1,2} = A - \Omega_p \mp \Omega_c \Omega_p \cos \theta_{1,2}; \quad X_3 = \frac{A - \Omega_p}{S} - \frac{\Omega_c^2 \sin^2 \theta_3}{S}. \quad (4)$$

Применение гидродинамического рассмотрения означает, что фазовая скорость v_{ϕ} во всяком случае должна быть много больше тепловой скорости v_T , т. е. $X_1 S = (v_T/v_{\phi})^2 \ll 1$. Из (4) следует, что это условие приводит к неравенству $|A - \Omega_p| \ll 1$, которое, в свою очередь,

* Гидродинамический подход не является вполне адекватным при изучении плазменных волн [5]. В достаточно сильном магнитном поле результаты кинетической теории могут существенно отличаться от гидродинамических даже при слабой дисперсии. С другой стороны, результаты кинетического рассмотрения могут существенно зависеть от условий, которым должна удовлетворять электронная функция распределения на границе плазмы, формулировка последних в свою очередь весьма модельна. Мы не будем в настоящей работе обсуждать характер возможных отклонений гидродинамического расчета от кинетического, хотя этот вопрос и представляет интерес. Заметим лишь, что при наших ограничениях можно пренебречь следующим из кинетического рассмотрения затуханием Ландау.

ведет к условию $\lambda_{1,2} \gg r_D$ (λ —длина волны, r_D —радиус Дебая), подтверждающему возможность существования резкого разрыва в плазме. (Модуль $|A - \Omega_p|$, очевидно, порядка $|\Delta\omega|/\omega$, если $|\Delta\omega|/\omega \gg 1/\omega\tau$, и порядка $1/\omega_p\tau$, если $|\Delta\omega|/\omega \ll 1/\omega\tau$.) Заметим, что ограничения на магнитное поле имеют вид $\omega_c\tau \cos \theta_{1,2} \ll 1$, $\Omega_c^2 \sin^2 \theta_3 \ll 1/\omega_p\tau$ (если $|\Delta\omega|\tau \gg 1$, в этих неравенствах τ следует заменить на $1/|\Delta\omega|$).

Зная корни дисперсионного уравнения, нетрудно получить „поляризацию“ волн в системе ортов

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad \eta = \frac{[[\mathbf{x}, \mathbf{h}] \mathbf{x}]}{\sin \theta}, \quad \varsigma = \frac{[\mathbf{x}, \mathbf{h}]}{\sin \theta},$$

связанных с волной. Для поперечных волн, приобретающих в магнитном поле малую продольную компоненту электрического поля и давление, получаем (опуская индексы 1,2)

$$\begin{aligned} E &= \bar{E} v_\gamma, \quad \bar{E} = \xi \left(\mp \frac{\Omega_c \Omega_p}{A - \Omega_p} \sin \theta \mathbf{x} + \eta \mp i \varsigma \right), \\ H &= \bar{H} v_\eta, \quad \bar{H} = \xi \sqrt{A - \Omega_p} (\varsigma \pm i \eta), \\ p &= Pv_\eta, \quad P = \mp mcn_0 S \frac{\Omega_c \sin \theta}{\sqrt{A - \Omega_p}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для продольной волны, в которой появляются малые поперечные компоненты,

$$\begin{aligned} E_3 &= \bar{E}_3 v_{x3}, \quad \bar{E}_3 = \xi \left\{ \Omega_p \mathbf{x} - \frac{\Omega_c^2}{2} \sin(2\theta_3) \left(\frac{\Omega_p S}{A - \Omega_p} \eta_3 + i \Omega_c \cos \theta_3 \varsigma_3 \right) \right\}, \\ H_3 &= \bar{H}_3 v_{z3}, \quad \bar{H}_3 = -\xi \left\{ \sqrt{\frac{A - \Omega_p}{S}} \frac{\Omega_c^2}{2} \sin(2\theta_3) \left(\frac{\Omega_p S}{A - \Omega_p} \varsigma_3 - i \Omega_c \cos \theta_3 \eta_3 \right) \right\}, \\ p_3 &= P_3 v_{z3}, \quad P_3 = mcn_0 S \sqrt{\frac{A - \Omega_p}{S}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Наша задача заключается в нахождении коэффициентов трансформации через границу раздела плазма—вакуум. Введем орты e_i , связанные с границей раздела и внешним магнитным полем, и орты m и n для описания электромагнитных волн в вакууме. Орт e_x направлен по нормали из плазмы в вакуум, q —параллельная границе составляющая волнового вектора, φ —угол падения, γ —угол, образуемый q с плоскостью $z=0$, в которой лежит магнитное поле H_0 , ε —угол склонения магнитного поля (рис. 1),

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= e_x c_\varphi + \frac{q}{q} s_\varphi, \quad \frac{q}{q} = e_y c_\gamma + e_z s_\gamma, \quad \mathbf{h} = -e_x s_\varepsilon + e_y c_\varepsilon, \\ \cos \theta &= c_\varphi s_\varepsilon + s_\varphi c_\gamma c_\varepsilon, \quad \mathbf{n} = \left[\frac{q}{q}, e_x \right], \quad \mathbf{m} = [n, \mathbf{x}]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь мы для удобства вводим обозначения: $\cos \varphi \equiv c_\varphi$, $\sin \varphi \equiv s_\varphi$,

$\cos \gamma \equiv c_\gamma$, $\sin \gamma \equiv s_\gamma$, $\cos \epsilon \equiv c_\epsilon$, $\sin \epsilon \equiv s_\epsilon$. Чтобы не пользоваться двойными индексами, будем писать $\cos \varphi_i = c_i$, $\sin \varphi_{\text{зл}} = s_{\text{зл}}$, $\sin(2\epsilon) = s_{2\epsilon}$ и т. д.

Пусть для определенности на границу раздела падает электромагнитная волна Закон Снеллиуса запишется тогда в виде $s_{\text{зл}} = \sqrt{X_i} s_i$, где штрих означает падающую волну. Подставляя значения корней, согласно (4), получим

$$\begin{aligned} s'_{\text{зл}} &= s_{\text{зл}} = \sqrt{A - \Omega_p}, \quad s_{1,2} = \\ &= \sqrt{\frac{A - \Omega_p}{S}} s_3. \end{aligned} \quad (8)$$

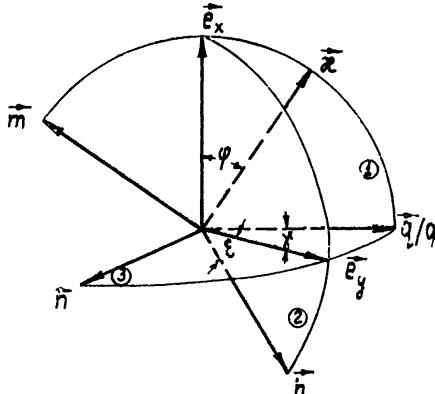


Рис. 1. Система ортов, связанная с плоскостью раздела:

1—плоскость падения; 2—плоскость, в которой лежит нормаль к поверхности раздела и постоянное магнитное поле; 3—плоскость раздела.

Как видно из (8), $|c_1|$ везде больше $|c_{\text{зл}}|$, кроме области углов $s'_{\text{зл}} = \sqrt{\Delta \omega / \omega}$, где $|c_1|$ обращается в нуль. При падающей плазменной волне это соответствует области углов $s_3 = \sqrt{S}$.

2. СЛАБОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Выберем в качестве двух независимых электромагнитных волн в вакууме TE- и TM-волны, у которых соответственно электрическое или магнитное поле направлено по орту n (см. (7)).

Разложив величины, входящие в (1), по собственным волнам (электромагнитным волнам в вакууме и волнам в плазме), можно записать граничные условия на поверхности раздела в виде пяти уравнений для амплитуд $v_{z1}, v_{z2}, v_{z3}, E_n, H_n$ расходящихся волн:

$$T_{11}v_{z1} + T_{12}v_{z2} + T_{13}v_{z3} + T_{14}(-E_n) + T_{15}(-H_n) = U_i. \quad (9)$$

Здесь U_i определяется падающей волной:

$$U'_3 = - \begin{pmatrix} \bar{H}'_3 \\ \bar{E}'_3 \\ P_3 \end{pmatrix} v'_{z3}, \quad U'_{\text{TE}} = \begin{pmatrix} -m' \\ n \\ 0 \end{pmatrix} E'_n, \quad U'_{\text{TM}} = \begin{pmatrix} n \\ m' \\ 0 \end{pmatrix} H'_n, \quad (10)$$

а T_{ik} имеет вид

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2 & \bar{H}_3 & -m & n \\ \bar{E}_1 & \bar{E}_2 & \bar{E}_3 & n & m \\ P_1 & P_2 & P_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Вектор a , стоящий в матрице (11), заменяет столбец $\begin{pmatrix} a_y \\ a_z \end{pmatrix}$. Такая запись удобна для использования при вычислениях векторной формы теоремы Лапласа [10]. Главный член детерминанта системы (11) в слабом магнитном поле равен $\text{Det } T_{ik} = P_3 d_1$, где

$$d_1 = \begin{vmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2 & -m & n \\ \bar{E}_1 & \bar{E}_2 & n & m \end{vmatrix} = -i \xi^2 (c_{\text{зл}} - \sqrt{A - \Omega_p} c_1) (\sqrt{A - \Omega_p} c_{\text{зл}} - c_1).$$

Преобразование электромагнитных волн в плазменную. При падении TE- и TM-электромагнитных волн коэффициенты трансформации равны

$$\frac{E_3}{E'_n} = -2\xi \Omega_p \frac{P_1}{P_3} \frac{d_2}{d_1}, \quad \frac{E_3}{H'_n} = 2\xi \Omega_p \frac{P_1}{P_3} \frac{d_3}{d_1}$$

(здесь E'_n , H'_n — амплитуды полей падающих TE- и TM-волн, $E_3 = \xi \Omega_p v_{\omega_3}$ — амплитуда плазменной волны),

$$d_2 = \xi \begin{vmatrix} \sqrt{A - \Omega_p} & \epsilon_1 & m & -m & n \\ \eta_1 & 0 & n & m & m \end{vmatrix} = \xi \frac{\gamma_{1x} c_{\text{ел}}}{s_1} (\sqrt{A - \Omega_p} c_{\text{ел}} - c_1),$$

$$d_3 = \xi \begin{vmatrix} \sqrt{A - \Omega_p} & \epsilon_1 & 0 & -m & n \\ \eta_1 & -m & n & m & m \end{vmatrix} = -\xi \frac{\epsilon_{1x} c_{\text{ел}}}{s_1} (c_{\text{ел}} - \sqrt{A - \Omega_p} c_1).$$

Детерминанты d легко вычисляются с помощью соотношения [10]

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i < k \\ l < m}} \epsilon_{iklm} [a_i a_k]_x [b_l b_m]_v.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{E_3}{E'_n} &= 2\Omega_p \Omega_c \sqrt{S} \frac{\tilde{i} \eta_{1x}}{A - \Omega_p} \frac{c'_{\text{ел}}}{c'_{\text{ел}} + \sqrt{A - \Omega_p} c_1}, \\ \frac{E_3}{H'_n} &= 2\Omega_p \Omega_c \sqrt{S} \frac{\tilde{i} \epsilon_{1x}}{A - \Omega_p} \frac{c'_{\text{ел}}}{\sqrt{A - \Omega_p} c'_{\text{ел}} + c_1}, \\ \tilde{\epsilon}_{1x} &= -s_1 c_e, \quad \tilde{\eta}_{1x} = -c_e c_1 c_1 - s_e s_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Из этих формул видно, что коэффициенты преобразования пропорциональны первой степени магнитного поля и корню из электронной температуры: при малых углах падения справедлива оценка

$$\left| \frac{E_3}{E'_n} \right| \sim \left| \frac{E_3}{H'_n} \right| \sim \frac{\omega_c}{|\Delta\omega|} \frac{v_T}{c}$$

во всей области углов, кроме $s'_{\text{ел}} \approx \sqrt{\Delta\omega/\omega}$ ($\tau\Delta\omega \gg 1$). При $s'_{\text{ел}} = \sqrt{\Delta\omega/\omega}$ модуль c_1 , а вместе с ним главный член в знаменателе E_3/H'_n обращается в нуль (см. (8)) и начинает играть роль слагаемое $\sqrt{A - \Omega_p} c_{\text{ел}}$; поэтому в этой области углов коэффициент преобразования TM-волн в плазменную имеет резкий максимум с полушириной $(\Delta\omega/\omega)^{3/2}$:

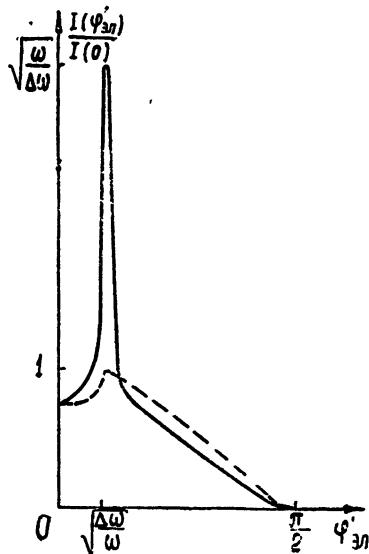
$$\left| \frac{E_3}{H'_n} \right| \left| \frac{E_3}{E'_n} \right|^{-1} = \sqrt{\frac{\omega}{\Delta\omega}} \quad \left(\sin \varphi'_{\text{ел}} = \sqrt{\frac{\Delta\omega}{\omega}} \right). \quad (13)$$

Зависимость коэффициентов преобразования от угла падения схематически показана на рис. 2. Зависимость от частоты носит резонансный характер, причем при $\Omega_p = 1$ ($\omega = \omega_p$) коэффициент преобразования возрастает в ω^2 раз по сравнению с нерезонансным значением. Однако в непосредственной близости к частотному резонансу ($\tau\Delta\omega \ll 1$) угловой „резонанс“ отсутствует. Физическая природа углового „резонанса“ та

же, что и при преобразовании звуковых волн в электромагнитные на границе проводника [10], и связана с согласованием эффективных импедансов падающей и преобразованной волн, т. е. с равенством отношения тангенциальных компонент электрического и магнитного полей в этих волнах.

Рис. 2. Угловые зависимости коэффициентов преобразования электромагнитных волн в плазменную волну в слабом магнитном поле ($\cos \theta \neq 0$):

$I(\varphi'_{\text{пл}})$ — модуль коэффициента преобразования при падении ТМ-волны (сплошная кривая) и ТЕ-волны (пунктирная кривая). Графики построены при $\Delta\omega/\omega = 0.1$. Некоторое возрастание коэффициента преобразования ТЕ-волны при $s_{\text{пл}} = \sqrt{\Delta\omega/\omega}$, связанное с относительно большим значением $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_p'$, исчезает при $\Delta\omega \rightarrow 0$.



Преобразование плазменных волн в электромагнитные. При падении плазменной волны коэффициент преобразования

$$\frac{H_n}{E'_3} = \frac{1}{\xi \Omega_p P_3 d_1} \left\{ P_3 \begin{vmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2 & \bar{H}'_3 & -\bar{H}_3 & -m \\ \bar{E}_1 & \bar{E}_2 & E'_3 & -\bar{E}_3 & n \end{vmatrix} + \right. \\ \left. + P_1 \begin{vmatrix} \bar{H}_1 + \bar{H}_2 & \bar{H}_3 & \bar{H}'_3 & -m \\ \bar{E}_1 + \bar{E}_2 & \bar{E}_3 & E'_3 & n \end{vmatrix} \right\};$$

E_n/E'_3 получается отсюда заменой $m \rightarrow n$, $n \rightarrow -m$. Проведя вычисления, приведем коэффициенты к виду

$$\frac{H_n}{E'_3} = 2 \frac{\Omega_c^2 \sqrt{A - \Omega_p}}{c_1 - \sqrt{A - \Omega_p}} \frac{c'_3}{c_{\text{пл}}} \left\{ i \frac{\Omega_c}{\Omega_p} \left(a_1 + \frac{s'_3}{\sqrt{S}} a_2 \right) + \frac{S}{A - \Omega_p} \left(b_1 + \frac{s'_3}{\sqrt{S}} b_2 \right) \right\}; \\ \frac{E_n}{E'_3} = 2 \frac{\Omega_c^2 \sqrt{A - \Omega_p}}{c_{\text{пл}} - \sqrt{A - \Omega_p}} \frac{c'_3}{c_1} \left\{ i \frac{\Omega_c}{\Omega_p} \left(f_1 + \frac{s'_3}{\sqrt{S}} f_2 \right) + \frac{S}{A - \Omega_p} \left(g_1 + \frac{s'_3}{\sqrt{S}} g_2 \right) \right\}, \quad (14)$$

где a , b , f , g — функции углов порядка единицы:

$$a_1 = s_{\gamma} c_{\epsilon} (c'^2_3 s^2_{\epsilon} - s'^2_3 c^2_{\gamma} c^2_{\epsilon}), \quad a_2 = \frac{1}{2} s_{2\epsilon} s_{2\gamma} c_{\epsilon} c_{\gamma},$$

$$b_1 = -\frac{1}{2} s_{2\epsilon} c'_{23} c_{\gamma}, \quad b_2 = c_1 (s^2_{\epsilon} - c^2_{\epsilon} c^2_{\gamma}),$$

$$f_1 = c_1 c_{\gamma} c_{\epsilon} \{ s^2_{\epsilon} + s'^2_3 (c^2_{\gamma} c^2_{\epsilon} - 3s^2_{\epsilon}) \},$$

$$f_2 = -s_{\epsilon} \{ s_{\epsilon}^2 - 2c_{\gamma}^2 c_{\epsilon}^2 - s_3'^2 (s_{\epsilon}^2 - 3c_{\gamma}^2 c_{\epsilon}^2) \},$$

$$g_1 = \frac{1}{2} s_{\gamma} s_{2\epsilon} c_1, \quad g_2 = \frac{1}{2} c_{\epsilon}^2 s_{2\gamma}.$$

В зависимости от соотношения между малыми параметрами Ω_c и $S/(A-\Omega_p)$ имеют место различные угловые зависимости и анизотропия коэффициентов преобразования. В частности, при $s_3'=\sqrt{S}$ имеет место угловой „резонанс“ для преобразования в ТМ-волну. Угловые зависимости качественно такие же, как и на рис. 2.

Высота, полуширина и положение резонанса при преобразовании волн в слабом поле зависят от величины $\Delta\omega$. Нетрудно видеть, что при $\Delta\omega \ll 1/\tau$ „угловой резонанс“ отсутствует. С другой стороны, если $\Delta\omega \gg 1/\tau$, значение коэффициента преобразования в резонансе растет с уменьшением $\Delta\omega$ и, следовательно, достигает наибольшего значения при $\Delta\omega \sim 1/\tau$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если постоянное магнитное поле H_0 ортогонально плоскости падения и, следовательно, для всех расходящихся волн $\cos\theta=0$, задача о преобразовании волн существенно упрощается. Как будет видно ниже, при этом на границе возникают одновременно три расходящиеся волны (а не пять, как в общем случае). Любопытно, что задачу о преобразовании продольных и поперечных волн друг в друга можно при этом сформулировать и не в малом поле H_0 . Как видно из приведенных ниже выражений, в поперечном поле вблизи частот $\omega = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}$ эффективная диэлектрическая постоянная $\epsilon_{\text{эфф}} \rightarrow 0$ (особый случай плазменного резонанса в магнитном поле, обсуждавшийся Гинзбургом и Железняковым [11]). Можно ожидать, что вблизи резонанса имеется область, где по крайней мере качественно применима гидродинамика *. В связи с этим мы рассмотрим как случай слабого, так и произвольного по величине поля ($\Omega_c \sim 1$) вблизи резонансной частоты.

Дисперсионное уравнение (2) при $\cos\theta$ принимает вид

$$(X - A + \Omega_p) \{ S X^2 + \delta X + (\Omega_p - A)^2 - \Omega_c^2 \} \quad (15)$$

(мы по-прежнему удерживаем слагаемое $i/\omega\tau$, которым A отличается от единицы, только в резонансных множителях; $S \ll 1$). Через δ обозначена величина

$$\Omega_c^2 + A(\Omega_p - A) = -\frac{\Delta\omega_*}{\omega} + \frac{i}{\omega\tau} (\Omega_p - 1) \equiv \delta,$$

характеризующая отклонение $\Delta\omega_*$ частоты ω от частоты $\omega_* = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_c^2}$, соответствующей плазменному резонансу: $\Delta\omega_* = \omega - \omega_*$. Вблизи резонанса δ является малой величиной; однако наименьшим параметром служит, как правило, S . Поэтому мы будем считать в дальнейшем $S \ll |\delta|^2$, т. е. $|\Delta\omega_*|/\omega \gg \sqrt{S}$. Это ограничение не является, конечно, принципиальным, но оно существенно упрощает формулы.

Корню дисперсионного уравнения $X_1 = A - \Omega_p$ соответствует чисто поперечная обыкновенная волна в плазме. Что касается двух других

* Ввиду того, что плазма описывается гидродинамически (с изотропным давлением), выводы этого раздела, относящиеся к сильному полю H_0 , также имеют лишь качественный характер.

корней, то вблизи резонанса им соответствуют почти продольные волны. Выпишем приближенные значения корней вблизи резонанса:

$$X_1 = A - \Omega_p, \quad X_2 = \frac{\delta + \Omega_p(1 - \Omega_p)}{\delta}, \quad X_3 = -\frac{\delta}{S} - \frac{\Omega_c^2 \Omega_p}{\delta}. \quad (16)$$

Закон Снеллиуса примет вид

$$s_{\text{зл}}' = \sqrt{A - \Omega_p} s_1 = \sqrt{\frac{\delta + \Omega_p(1 - \Omega_p)}{\delta}} s_2 = -\sqrt{-\frac{\delta}{S}} s_3. \quad (17)$$

Условие $(v_{\phi l}/v_r)^2 \gg 1$ (или $X_1 S \ll 1$) приводит к неравенствам $|A - \Omega_p| S \ll 1$, $|\delta + \Omega_p(1 - \Omega_p)| S \ll |\delta| \ll 1$, которые ввиду малости S могут быть выполнены вблизи частоты ω_* . Заметим, что при $\Omega_c \sim 1$ отсюда следует $|1 - \Omega_p| \sim 1$, а при $\Omega_c^2 \ll |1 - \Omega_p|$ следует неравенство $|1 - \Omega_p| \ll 1$.

В рассматриваемом приближении поляризация волн в плазме следующая. В чисто поперечной обыкновенной волне, соответствующей X_1 , электрическое поле направлено по внешнему магнитному:

$$E_1 = \xi \eta v_{\tau 1}, \quad H_1 = \xi \sqrt{A - \Omega_p} \zeta_1 v_{\tau 1}, \quad p_1 = 0. \quad (18)$$

Корню X_2 дисперсионного уравнения соответствует волна, близкая к продольной при $\Omega_c \sim 1$ и к поперечной, если $\Omega_c^2 \ll 1 - \Omega_p$. Будем в дальнейшем называть ее необыкновенной волной:

$$\begin{aligned} E_2 &= \bar{E}_2 v_{\zeta 2}, \quad \bar{E}_2 = \frac{\xi}{\Omega_p - A} \left(i \Omega_c \Omega_p \zeta_2 + \delta \zeta_2 \right), \\ H_2 &= -\frac{\xi \delta}{\Omega_p - A} \sqrt{\bar{X}_2} \mathbf{n} v_{\zeta 2}, \\ p_2 &= P_2 v_{\zeta 2}, \quad P_2 = m c n_0 S \sqrt{\bar{X}_2} \frac{i \Omega_c}{\Omega_p - A}. \end{aligned} \quad (19)$$

Вблизи резонанса ($\delta \rightarrow 0$) поперечные компоненты в необыкновенной волне также убывают. Третья волна в слабом магнитном поле переходит в плазменную волну:

$$\begin{aligned} E_3 &= \bar{E}_3 v_{\zeta 3}, \quad \bar{E}_3 = \xi \Omega_p \left\{ \zeta_3 + i \frac{S \Omega_c}{\delta} \zeta_3 \right\}, \\ H_3 &= \bar{H}_3 v_{\zeta 3}, \quad \bar{H}_3 = -\xi \Omega_p \frac{i S \Omega_c}{\delta} \sqrt{\bar{X}_3} \mathbf{n}, \\ p_3 &= P_3 v_{\zeta 3}, \quad P_3 = m c n_0 S \sqrt{\bar{X}_3} \end{aligned} \quad (20)$$

(у этой волны поперечная компонента растет вблизи резонанса, оставаясь, тем не менее, малой в силу условия $S \ll |\delta|^2$). Говоря о продольных волнах, мы в дальнейшем будем иметь в виду плазменную и необыкновенную волны.

В обыкновенной волне, как и в ТЕ-волне в вакууме, электрическое поле ортогонально плоскости падения, а в продольных волнах в плазме и ТМ-волне в вакууме электрическое поле лежит в плоскости падения. Отсюда следует, что

$$\frac{E_n}{E'_{2,3}} = \frac{E_1}{E'_{2,3}} = \frac{E_{2,3}}{E'_n} = \frac{E_1}{H'_n} = \frac{H_n}{E'_n} = \frac{E_n}{H'_n} = 0, \quad (21)$$

т. е. достаточно рассматривать не более трех расходящихся от границы раздела волн. В разных случаях, однако, эти волны различны. Поэтому нам удобнее по-прежнему исходить из общих уравнений, которые по аналогии с (11) запишем так:

$$T_{11}v_{\eta_1} + T_{12}v_{\zeta_2} + T_{13}v_{\zeta_3} + T_{14}(-E_n) + T_{15}(-H_n) = U_i, \quad (22)$$

где матрица T_{ik} имеет вид

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \xi \sqrt{A - \Omega_p} \zeta_1 & \bar{H}_2 & \bar{H}_3 & -m & n \\ \xi n & \bar{E}_2 & \bar{E}_3 & n & m \\ 0 & P_2 & P_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Главный член детерминанта системы

$$\text{Det } |T_{ik}| = \frac{\xi^2 P_3}{\Omega_p - A} (c_{\eta_1} - \sqrt{A - \Omega_p} c_1) \{ \delta (\sqrt{X_2} c_{\eta_1} - c_2) - i \Omega_c \Omega_p s_2 \}. \quad (24)$$

Приведем значения коэффициентов преобразования продольных волн в ТМ-волну и обратно.

Если $\Omega_c^2 \ll 1 - \Omega_p$, то коэффициент преобразования ТМ-волны в плазменную совпадает с (12). Коэффициент преобразования плазменной волны в электромагнитную

$$\frac{H_n}{E_3^2} = \frac{2S\Omega_c}{\sqrt{A - \Omega_p}} \frac{c'_3}{\sqrt{A - \Omega_p} c_{\eta_1} - c_1}. \quad (25)$$

При $s'_3 = \sqrt{S}$ коэффициент возрастает в $\sqrt{\omega/\Delta\omega}$ раз.

Если $\Omega_c \sim 1$, коэффициенты преобразования продольных волн в ТМ-волну и обратно равны:

$$\begin{aligned} \frac{H_n}{v'_{\zeta_3}} &= 2 \xi \Omega_p \Omega_c \frac{iS}{\delta} c'_3 \left[c_{\eta_1} - \sqrt{\frac{|\delta|}{\Omega_p(1-\Omega_p)}} c_2 + i \frac{\Omega_c}{1-\Omega_p} \sqrt{\frac{|\delta|}{S}} s'_3 \right]^{-1}; \\ \frac{H_n}{v'_{\zeta_2}} &= 2 \frac{\xi \delta}{A - \Omega_p} c'_2 \left[c_{\eta_1} + \sqrt{\frac{|\delta|}{\Omega_p(1-\Omega_p)}} c'_2 - i \Omega_c \sqrt{\frac{\Omega_p}{(1-\Omega_p)\delta}} s'_2 \right]^{-1}; \\ \frac{v'_{\zeta_3}}{H'_n} &= 2 \frac{\Omega_c}{\xi} \sqrt{\frac{S}{\delta^3}} c'_{\eta_1} \left[c'_{\eta_1} + \frac{i \Omega_c}{1-\Omega_p} s'_{\eta_1} \right]^{-1}; \\ \frac{v'_{\zeta_2}}{H'_n} &= 2 \frac{\sqrt{A - \Omega_p}}{\xi \sqrt{\Omega_p \delta}} c'_{\eta_1} \left[c'_{\eta_1} + \frac{i \Omega_c}{1-\Omega_p} s'_{\eta_1} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Как следует из (26), из-за большой величины третьего слагаемого в знаменателе угловой резонанс в сильном поле не должен наблюдаться.

Авторы благодарят В. М. Яковенко за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж., 35, 644 (1958)
2. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж., 36, 223 (1959)

- 3 В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 5—6, 9 (1958).
4. В. В. Железняков, Е. Я. Злотник, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 644 (1962).
5. В. Л. Гинзбург, Электромагнитные волны в плазме, Физматгиз, М., 1960.
6. G. B. Field, Astrophys. J., 124, 555 (1956).
7. A. H. Krätz, D. Mintzer, Phys. Rev., 117, 382 (1960).
8. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
9. Д. И. Блохинцев, ДАН СССР, 47, 22 (1945); В. М. Конторович, Акуст. ж., 5, 315 (1959).
10. В. М. Конторович, А. М. Глуцюк, ЖЭТФ, 41, 1195 (1961).
11. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 59 (1958).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
18 декабря 1962 г.

WAVES TRANSFORMATION AT THE PLASMA BOUNDARY IN MAGNETIC FIELD

V. M. Kontorovitch, I. N. Kutik

The mutual transformation is considered of longitudinal and transverse waves at the plasma boundary both in a weak and (at the transverse propagation) in an arbitrary magnetic field. In a weak field the transformation coefficients have typical maximum for certain angle of incidence; the position and magnitude of the peak as well as its width are dependent on frequency.

УРАВНЕНИЕ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ В ПЛАЗМЕ ПРИ УЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

B. Я. Эйдман

Рассмотрена задача о возбуждении помещенной в плазму тонкой цилиндрической антенны при учете пространственной дисперсии, т. е. с учетом излучения плазменных волн.

При учёте пространственной дисперсии в среде появляется возможность излучения новых типов нормальных волн (например, плазменных волн в магнитоактивной или изотропной плазме).

В ряде работ была вычислена энергия излучения плазменной волны для некоторых конкретных видов излучателей [1,2]. При этом оказалось, что иногда интенсивность плазменной (продольной) волны может быть весьма значительна и даже превосходить интенсивность обычных волн, существующих в холодной плазме, т. е. без учета пространственной дисперсии. Совершенно очевидно, что для целей эксперимента (например, для антенн, помещенных на искусственных спутниках Земли) наряду с излучаемой энергией, которая отвечает сопротивлению излучения антенны, необходимо также учитывать изменение, вносимое в полный импеданс вибратора, благодаря излучению плазменной волны. В настоящей статье рассматривается излучение тонкой цилиндрической антенны, помещенной в изотропную плазму при учете пространственной дисперсии. Получено уравнение, используя которое, можно вычислить полный импеданс вибратора с учетом излучения им продольной волны.

Хорошо известно (см., например, [3]), что для фурье-компонент напряженности электрического поля в изотропной среде при учете пространственной дисперсии имеет место следующее уравнение:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp} \right) E_{\perp k} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel} E_{\parallel k} = - \frac{4\pi i \omega}{c^2} J_k \quad (1)$$

$$(E = \int E_k e^{-ikr} dk),$$

где $E_{\perp k}$, $E_{\parallel k}$ — перпендикулярная и параллельная волновому вектору k компоненты E_k электрического поля ($E_k = E_{\perp k} + E_{\parallel k}$), $\epsilon_{\perp}(\omega, k)$, $\epsilon_{\parallel}(\omega, k)$ — диэлектрические проницаемости для поперечных и продольных волн.

Для большинства практически интересных случаев достаточно рассмотреть лишь излучение слабо затухающей продольной волны, т. е. случай слабой пространственной дисперсии, когда [3,4]

$$\epsilon_{\perp}(\omega, k) \equiv \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_{\parallel}(\omega, k) = \epsilon - \beta k^2. \quad (2)$$

Здесь $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m$, $\beta = 3v_T^2/\omega^2$, N — концентрация, а $v_T^2 = T/m$ — средняя тепловая скорость электронов плазмы, причем $v_T^2/c^2 \ll 1$, $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$. Как обычно в теории тонких цилиндрических антенн, плотность тока задаем в виде

$$j_z = \frac{\delta(\rho - a)}{2\pi\rho} j_0(z), \quad (3)$$

где координатная ось Oz направлена по оси антенны; r в цилиндрической системе координат имеет компоненты ρ , φ , z ; a —радиус провода.

Из (3) следует, что фурье-компоненты тока

$$j_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-L}^L j_0(\zeta) e^{+ikz} J_0(za) d\zeta \quad (4)$$

(J_0 —функция Бесселя; k в цилиндрической системе координат имеет компоненты x , Φ , k_z ; $\pm L$ —координаты концов провода).

Из уравнения (1) вытекает, что

$$E_{\perp k} = \frac{4\pi i}{\omega \varepsilon_{\parallel}} j_k \frac{k_z}{k}; \quad E_{\perp k} = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} \frac{j_k}{(k^2 - \omega^2 c^{-2} \varepsilon_{\perp})}, \quad (5)$$

откуда для электрического поля в координатной плоскости yz будем иметь* (см. (1))

$$E_z(0, y, z) = \frac{-i}{2\pi\omega} \int_{x=0}^{\infty} \int_{k_z=-\infty}^{\infty} \int_{\zeta=-L}^L \frac{x}{k_z^2 + x^2} \left\{ \frac{\omega^2 x^2 / c^2}{x^2 + k_z^2 - \omega^2 \varepsilon_{\perp} / c^2} - \right. \\ \left. - \frac{k_z^2}{\varepsilon_{\parallel}(\omega, k)} \right\} H_0^{(1)}(xy) J_0(za) j_0(\zeta) e^{-ik_z(-\zeta+z)} dx dk_z d\zeta. \quad (6)$$

При выводе последнего выражения были использованы формулы

$$e^{ixy \sin \Phi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(xy) e^{i\Phi s}; \\ \int_0^{\infty} J_0(xy) J_0(za) f(x) x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(xy) J_0(za) f(x) x dx,$$

где $f(x)$ —произвольная четная функция, $H_0^{(1)}(xy)$ —функция Ханкеля.

Теперь интегрирование по x в (6) осуществляется элементарно. Для этого замыкаем путь интегрирования в верхней полуплоскости ($y > a$) комплексного переменного x полуокружностью бесконечно большого радиуса.

Тогда, используя полюсы подынтегрального выражения, определяемые уравнениями**

$$x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon = 0; \\ \varepsilon_{\parallel}(\omega, k) = \varepsilon - \beta(x^2 + k_z^2) = 0, \quad (7)$$

получаем ***

* Благодаря симметрии задачи достаточно рассмотреть поле лишь в указанной плоскости.

** Легко видеть, что полюсы $x = \pm k_z i$ не дают вклада в величину $E_z(0, y, z)$.

*** При этом, как обычно, считаем, что ε имеет исчезающую мнимую часть, отвечающую затуханию электромагнитных волн ($\omega \operatorname{Im} \varepsilon > 0$, $\operatorname{Im} \varepsilon \rightarrow 0$).

$$\begin{aligned}
 E_z(0, y, z) = & \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_{-L}^L \left\{ \frac{\omega^2 c^{-2} \epsilon - k_z^2}{\epsilon} H_0^{(1)} \left(y \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k_z^2} \right) \times \right. \\
 & \times J_0 \left(a \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - k_z^2} \right) + \frac{k_z^2}{\epsilon} H_0^{(1)} \left(y \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta} - k_z^2} \right) \times \\
 & \left. \times J_0 \left(a \sqrt{\frac{\epsilon}{\beta} - k_z^2} \right) \right\} e^{-ik_z(-\zeta+z)} j_0(\zeta) d\zeta. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Предполагая, что радиус антенны $a \rightarrow 0$, заменим в (8) бесселеву функцию J_0 единицей.

Интегрирование по переменной k_z можно осуществить при помощи соотношения (см., например, [6])

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} H_0^{(1)} \left(\rho \sqrt{\alpha^2 - t^2} \right) dt = -2i \frac{e^{i\alpha} V_{\rho^2 + z^2}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \tag{9}$$

Чтобы применить формулу (9) для слагаемых (8), содержащих k_z^2 , необходимо дважды проинтегрировать соответствующее выражение по z . После этого, поступая таким же образом, как это сделано в работе Леоновича и Левина [6], получаем искомое интегро-дифференциальное уравнение, связывающее ток, наведенный в антенне $j_0(z)$, с внешней электродвижущей силой $K_0(z)$ (при $k_{\perp}a \ll 1$, $k_{\parallel}a \ll 1$, $a \ll L$):

$$\begin{aligned}
 2j_0''(z) [-\ln p_{\parallel} a + \ln p_{\perp} a] + 2 \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon j_0(z) \ln p_{\perp} a = & \\
 = i\omega \epsilon K_0(z) + V^{\perp} - V^{\parallel} & \\
 (j_0(\pm L) = 0), & \tag{10}
 \end{aligned}$$

где p_{\parallel} , p_{\perp} — произвольные постоянные интегрирования, имеющие размерность обратной длины и аналогичные постоянной p в работе [6];

$$\begin{aligned}
 V^{\perp} = & e^{-ik_{\perp}(L+z)} \left[\frac{j_0'(-L)}{L+z} + j_0''(-L) \ln 2p_{\perp}(L+z) \right] + \\
 & + e^{-ik_{\perp}(L-z)} \left[-\frac{j_0(L)}{L-z} + j_0''(L) \ln 2p_{\perp}(L-z) \right] + \tag{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{-L}^L \ln 2p_{\perp} |z-\zeta| e^{-ik_{\perp}|z-\zeta|} \{ ik_{\perp} [j_0''(\zeta) + k_{\perp}^2 j_0(\zeta)] + \\
 & + \operatorname{sgn}(z-\zeta) [j_0'''(\zeta) + k_{\perp}^2 j_0'(\zeta)] \} d\zeta;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V^{\parallel} = & e^{-ik_{\parallel}(L+z)} \left[\frac{j_0'(-L)}{L+z} + j_0''(-L) \ln 2p_{\parallel}(L+z) \right] + \\
 & + e^{-ik_{\parallel}(L-z)} \left[-\frac{j_0'(L)}{L-z} + j_0''(L) \ln 2p_{\parallel}(L-z) \right] + \tag{11a}
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{-L}^L \ln 2p_{\perp} |z - \zeta| e^{-ik_{\parallel}|z-\zeta|} \{ ik_{\parallel} j_0''(\zeta) + \operatorname{sgn}(z-\zeta) \times \\ \times j_0''(\zeta) \} d\zeta;$$

$$k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon; \quad k_{\parallel}^2 = \frac{\varepsilon}{\beta}; \quad j_0' = \frac{d j}{d z}; \quad j_0'' = \frac{d^2 j_0}{d z^2}$$

и т. д.

Таким образом, функционал $V^{\perp} \equiv V^{\perp}(j_0, z)$ отвечает излучению поперечной волны, а $V^{\parallel} \equiv V^{\parallel}(j_0, z)$ — излучению продольной (плазменной) волны. В силу того, что поля в продольной и поперечной волне удовлетворяют разным уравнениям (см. (1), (5)), функционалы V^{\perp} , V^{\parallel} несколько отличаются друг от друга.

Следует заметить, что при $\beta \rightarrow 0$ уравнение (10) становится несправедливым. Это связано с тем, что в рассматриваемом случае при $\omega = \text{const}$ величина $k_{\parallel} \rightarrow \infty$, что приводит к нарушению условия $k_{\parallel} a \ll 1$ (более подробно об особенностях, имеющих место при $\beta \rightarrow 0$, см. [1]). Параметрами p_{\perp} , p_{\parallel} в зависимости от конкретной задачи можно распорядиться таким образом, чтобы максимально упростить решение задачи. Так, если, аналогично [7], положить $p_{\perp} = p_{\parallel} = 1/a$, то левая часть уравнения (10) обратится в нуль. Если считать, что $2p_{\perp} = k_{\perp}$, $2p_{\parallel} = k_{\parallel}$, то, следуя работе [6], можно воспользоваться методом возмущений ($k_{\parallel} a \ll 1$, $k_{\perp} a \ll 1$). Применение уравнения (10) для рассмотрения некоторых конкретных случаев и, в частности, определение импеданса антенны, помещенной в плазму, в условиях, реализующихся в земной ионосфере, будет рассмотрено в другой работе.

Автор признателен В. О. Рапопорту за предложенную тему и дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андronов и Г. В. Городинский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, 234 (1962).
2. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 41, 1971 (1961).
3. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
5. И. М. Рыжики и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных, ГИТТЛ, М—Л., 1951.
6. М. А. Леонович и М. Л. Левин, ЖТФ, 14, 481 (1944).
7. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 29, 673, 689 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 февраля 1963 г.

EQUATION OF THIN WIRE ANTENNA IN SPATIALLY DISPERSIVE PLASMA

V. Ya. Eidman

The problem of excitation of a thin cylindrical (wire) antenna placed in plasma is considered taking into account spatial dispersion, i. e. plasma wave generation.

О НЕКОТОРЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ ПРИ ОТРАЖЕНИИ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ОТ СТАТИСТИЧЕСКИ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Э. П. Гулин

Получены выражения для коэффициентов пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы звуковой волны, отраженной от абсолютно мягкой статистически шероховатой поверхности, в случае, когда пространственный интервал автокорреляции шероховатостей значительно меньше размеров зоны Френеля. Рассмотрен также случай взаимной корреляции флюктуаций амплитуды и фазы.

Вопрос о пространственной корреляции флюктуаций амплитуды и фазы звуковой волны, отраженной от статистически шероховатой поверхности, рассматривался в работе [1] методом малых возмущений. С помощью метода стационарной фазы удалось выделить участки на неровной поверхности, ответственные за формирование рассеянного поля в точке наблюдения. Однако пределы применимости полученных результатов ограничены геометрическим приближением (пространственный интервал автокорреляции шероховатостей должен превосходить размеры зоны Френеля). В случае квазигармонической шероховатости добавляется дополнительное условие, накладывающее ограничение на период осцилляций коэффициента пространственной автокорреляции шероховатостей. В настоящей заметке полученные ранее результаты будут распространены на случай, когда пространственный интервал автокорреляции шероховатостей значительно меньше размеров зоны Френеля. При этом расчеты проведены для рассеивающей площадки достаточно малых размеров, превосходящих, однако, размеры области, существенной для рассеяния. Кроме того, получены выражения для коэффициента взаимной корреляции флюктуаций амплитуды и фазы сигналов в точке наблюдения.

1. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛЮКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

В работе [1] с помощью метода малых возмущений показано, что выражения для флюктуаций амплитуды и фазы сферической звуковой волны, отраженной от абсолютно мягкой, статистически неровной поверхности, можно представить в виде следующих интегралов:

$$\frac{\delta A}{A_0} = \frac{k^2 z_1 z_2}{\pi A_0} \iint \frac{1}{R_1^2 R_2^2} \cos [k(R_1 + R_2) - \Phi_0] F(x, y) dx dy;$$

$$\delta\varphi = \frac{k^2 z_1 z_2}{\pi A_0} \iint \frac{1}{R_1^2 R_2^2} \sin [k(R_1 + R_2) - \Phi_0] F(x, y) dx dy,$$
(1)

где k — волновое число звуковой волны, A_0 и Φ_0 — амплитуда и фаза

нефлюктуирующей части поля, $F(x, y)$ — однородная случайная функция координат x и y , задающая форму неровной поверхности, $R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}$, $R_2 = \sqrt{(L-x)^2 + y^2 + z_2^2}$, а источник и приемник звука расположены в точках с координатами $(0, 0, z_1)$ и $(L, 0, z_2)$.

Предположим, что размеры рассеивающей площадки на поверхности малы по сравнению с R_1 и R_2 . Разлагая в ряд выражения для R_1 и R_2 и ограничиваясь квадратичными членами разложения, получаем

$$R_1 \approx R_{10} + \frac{y^2}{2R_{10}} - x_1 \cos \psi + \frac{x_1^2 \sin^2 \psi}{2R_{10}}, \quad (2)$$

$$R_2 \approx R_{20} + \frac{y^2}{2R_{20}} + x_1 \cos \psi + \frac{x_1^2 \sin^2 \psi}{2R_{20}},$$

где

$$R_{10} = \frac{z_1}{z_1 + z_2} \sqrt{L^2 + (z_1 + z_2)^2}, \quad R_{20} = \frac{z_2}{z_1 + z_2} \sqrt{L^2 + (z_1 + z_2)^2},$$

$$x_1 = x - \frac{Lz_1}{z_1 + z_2},$$

а ψ — угол скольжения в точке зеркального отражения. При этом выражения (1) будут иметь такой вид:

$$\frac{\delta A}{A_0} = \frac{k^2 z_1 z_2}{\pi A_0 R_{10}^2 R_{20}^2} \iint_S \cos \left[\frac{kx_1^2 \sin^2 \psi}{R} + \frac{ky^2}{R} - \Phi'_0 \right] F \left(x_1 + \frac{Lz_1}{z_1 + z_2} \right) dx_1 dy, \quad (3)$$

$$\delta \varphi = \frac{k^2 z_1 z_2}{\pi A_0 R_{10}^2 R_{20}^2} \iint_S \sin \left[\frac{kx_1^2 \sin^2 \psi}{R} + \frac{ky^2}{R} - \Phi'_0 \right] F \left(x_1 + \frac{Lz_1}{z_1 + z_2} \right) dx_1 dy,$$

где $R = \frac{2R_{10}R_{20}}{R_{10} + R_{20}}$, $\Phi'_0 = -k(R_{10} + R_{20}) + \Phi_0$, а интегрирование ведется по некоторой площадке S на неровной поверхности. В дальнейших расчетах фаза нефлюктуирующей части поля Φ_0 будет выбрана так, чтобы $\Phi'_0 = 0$; поэтому в выражениях (3) не будем учитывать постоянный сдвиг фазы Φ'_0 .

Рассмотрим случай двухмерной шероховатости, зависящей лишь от координаты u , при этом будем считать, что ось u составляет угол α с осью x , т. е. $F(x, y) = F(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$. Перейдем к новым координатам u и v , которые связаны с x_1 и y формулами

$$x_1 = u \cos \alpha - v \sin \alpha, \quad y = u \sin \alpha + v \cos \alpha.$$

В новых координатах выражения (3) примут следующий вид:

$$\frac{\delta A}{A_0} = \frac{k^2 z_1 z_2}{\pi A_0 R_{10}^2 R_{20}^2} \iint_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \iint_{-l_1}^{l_2} \cos [\beta u^2 + \gamma^2 v^2 + 2uvz] F \left(u + \frac{Lz_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha \right) du dv;$$

$$\delta \varphi = \frac{k^2 z_1 z_2}{\pi A_0 R_{10}^2 R_{20}^2} \iint_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \iint_{-l_1}^{l_2} \sin [\beta u^2 + \gamma^2 v^2 + 2uvz] F \left(u + \frac{Lz_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha \right) du dv,$$

где введены такие обозначения:

$$\beta = \frac{k}{R} (\cos^2 \alpha \sin^2 \psi + \sin^2 \alpha), \quad \gamma^2 = \frac{k}{R} (\sin^2 \alpha \sin^2 \psi + \cos^2 \alpha),$$

$$\chi = \frac{k}{R} \cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \psi.$$

Интегрирование будем проводить по прямоугольной площадке со сторонами $\Delta_1 + \Delta_2$ и $l_1 + l_2$.

Выполним интегрирование по v при условии $\gamma l - \chi \Delta' / \gamma \gg 1$, где $l = \min(l_1, l_2)$, $\Delta' = \max(\Delta_1, \Delta_2)$. Это условие задает соотношение между размерами рассеивающей площадки по осям координат v и u в зависимости от углов α и ψ . Отметим, что в наиболее интересном случае, когда размеры области, существенной для рассеяния, меньше размеров рассеивающей площадки, это неравенство смягчается (так как вместо Δ' следует подставить размер по оси u области, существенной для рассеяния). После интегрирования по v будем иметь

$$\frac{\delta A}{A_0} = M \int_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \cos \left(p u^2 + \frac{\pi}{4} \right) F \left(u + \frac{L z_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha \right) du;$$

$$\delta \varphi = M \int_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \sin \left(p u^2 + \frac{\pi}{4} \right) F \left(u + \frac{L z_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha \right) du,$$
(5)

где через p и M обозначены следующие комбинации параметров:

$$p = \beta - \frac{\chi^2}{\gamma^2} = \frac{k \sin^2 \psi}{R} \frac{1}{\sin^2 \alpha \sin^2 \psi + \cos^2 \alpha}, \quad M = \frac{2k \sin \psi \sqrt{p}}{\sqrt{\pi} A_0 (R_{10} + R_{20})}. \quad (6)$$

Перейдем к составлению выражений для функций пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы. Предположим, что приемники расположены в точках с координатами $(L_1, 0, z'_2)$ и $(L_2, \Delta y, z'_2)$. Тогда выражения для флюктуаций амплитуды и фазы в этих точках наблюдения можно записать в виде

$$\frac{\delta A_1}{A_1} = M_1 \int_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \sin \left(p_1 u^2 + \frac{\pi}{4} \right) F \left(u + \frac{L_1 z_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha_1 \right) du;$$

$$\frac{\delta \varphi_1}{\delta \varphi_2} = M_2 \int_{-\Delta'_1}^{\Delta'_2} \cos \left(p_2 u'^2 + \frac{\pi}{4} \right) F \left(u' + \frac{L_2 z_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha_2 \right) du',$$
(7)

где индексы параметров M и p соответствуют номерам приемников, α_1 и α_2 — углы, которые составляет ось u с осями x и x' , имеющими общее начало отсчета и проходящими соответственно через точки с координатами $(L_1, 0, 0)$ и $(L_2, \Delta y, 0)$. Введем новые переменные

$$u_1 = u + \frac{\Delta u}{2}, \quad u_2 = u' - \frac{\Delta u}{2},$$

где $\Delta u = \frac{L_1 z_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha_1 - \frac{L_2 z_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha_2$ имеет смысл проекции на ось u смещения точки зеркального отражения при разнесении приемников.

После проведения известных операций перемножения и усреднения по ансамблю статистических поверхностей для функций пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы получаем такие выражения:

$$F_{AA} = \frac{\overline{\delta A_1 \delta A_2}}{A_1 A_2} = J_1 - J_2; \quad F_{\varphi\varphi} = \overline{\delta \varphi_1 \delta \varphi_2} = J_1 + J_2,$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{M_1 M_2}{2} \int_{-\Delta_1 + \Delta u/2}^{\Delta_2 + \Delta u/2} \int_{-\Delta'_1 - \Delta u/2}^{\Delta'_2 - \Delta u/2} \cos \left[p_1 \left(u_1 - \frac{\Delta u}{2} \right)^2 - p_2 \left(u_2 + \frac{\Delta u}{2} \right)^2 \right] \times \\ &\quad \times \overline{F(u_1 + \rho) F(u_2 + \rho)} du_1 du_2, \\ J_2 &= \frac{M_1 M_2}{2} \int_{-\Delta_1 + \Delta u/2}^{\Delta_2 + \Delta u/2} \int_{-\Delta'_1 - \Delta u/2}^{\Delta'_2 - \Delta u/2} \sin \left[p_1 \left(u_1 - \frac{\Delta u}{2} \right)^2 + p_2 \left(u_2 + \frac{\Delta u}{2} \right)^2 \right] \times \\ &\quad \times \overline{F(u_1 + \rho) F(u_2 + \rho)} du_1 du_2; \end{aligned} \quad (8)$$

здесь

$$2\rho = \frac{L_1 z_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha_1 + \frac{L_2 z_1}{z_1 + z_2} \cos \alpha_2.$$

В дальнейшем будем считать, что разнесение приемников достаточно мало, так что справедливы неравенства

$$|\Delta L| \ll \Delta, \quad |\Delta y| \ll \Delta, \quad \frac{|\Delta z|}{z} \ll 1, \quad (9)$$

где

$$\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2, \Delta'_1, \Delta'_2), \quad z = \min(z_1, z_2), \quad \Delta L = L_1 - L_2, \quad \Delta z = z'_2 - z'_1.$$

Кроме того, будем считать, что $\Delta_1 \approx \Delta'_1$, $\Delta_2 \approx \Delta'_2$, т. е. размеры рассеивающих площадок примерно одинаковы для обоих приемников.

Зададим коэффициент пространственной автокорреляции смещений неровной границы в виде осцилляторно затухающей функции

$$R(u_1 - u_2) = \frac{\overline{F(u_1) F(u_2)}}{\overline{F^2}} = e^{-\frac{(u_1 - u_2)^2}{a^2}} \cos q(u_1 - u_2), \quad (10)$$

где $\overline{F^2}$ — средний квадрат смещений поверхности, a — интервал пространственной автокорреляции шероховатостей, $q = 2\pi/\Lambda$ — величина, обратная пространственному периоду осцилляций Λ коэффициента корреляции шероховатостей. Введем новые переменные u , ξ согласно формул $u_1 + u_2 = 2u$ и $u_1 - u_2 = \xi$. Считая, что размеры области, существенной для интегрирования по ξ , значительно меньше размеров рассеивающей площадки, можно интегрировать по ξ в бесконечных пределах. При этом, как можно показать тем же способом, что и в работе [2], достаточно потребовать выполнения условий

$$\frac{ka^2}{R} \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \alpha \sin^2 \psi + \cos^2 \alpha} = pa^2 \ll 1, \quad \frac{qa}{2} \ll \frac{\Delta}{a}, \quad (11)$$

если $(pa\Delta - qa/2) > 1$, и

$$a \ll \Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2),$$

если $(pa\Delta - qa/2) \ll 1$. Первое из неравенств (11) будет выполнено при любых a , если $ka^2/R \ll 1$, т. е. интервал пространственной корреляции шероховатостей значительно меньше поперечного размера зоны Френеля.

С учетом (9), (10), (11) интегралы J_1 и J_2 примут вид:

$$\begin{aligned} J_1 \simeq & \frac{M_1 M_2}{2} \int_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[\Delta p u^2 - 2p \Delta u u + \xi \left(2pu + \frac{\Delta p \Delta u}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta p (\Delta u)^2}{4} \right] e^{-\xi^2/a^2} \cos q \xi du d\xi ; \\ J_2 \simeq & \frac{M_1 M_2}{2} \int_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left[2pu^2 - \Delta p \Delta u u + \frac{p \xi^2}{2} + \xi (\Delta pu - p \Delta u) + \right. \\ & \left. + \frac{p (\Delta u)^2}{2} \right] e^{-\xi^2/a^2} \cos q \xi du d\xi , \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Delta p = p_1 - p_2$, $2p = p_1 + p_2$. При достаточно малом разнесении приемников величины Δu и Δp приближенно равны

$$\begin{aligned} \Delta u \simeq & \left[\left(\Delta L - \frac{\Delta z}{\operatorname{tg} \psi} \right) \cos \alpha + \Delta y \sin \alpha \right] \frac{z_1}{z_1 + z_2}; \\ \Delta p \simeq & -p \left[\left(\frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta z}{z_1 + z_2} \right) \cos^2 \psi \left(1 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \sin^2 \psi + \cos^2 \alpha} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{(\Delta y)^2}{2L^2} \cos^2 \psi \left(1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \sin^2 \psi + \cos^2 \alpha} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta y}{L} \cos^2 \psi \frac{\sin 2 \alpha}{\sin^2 \alpha \sin^2 \psi + \cos^2 \alpha} + \frac{\Delta z}{z_2} \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Результат интегрирования можно представить в виде комбинации интегралов вероятностей комплексного аргумента:

$$\begin{aligned} J = & \frac{M_1 M_2}{8} \bar{F}^2 \sqrt{\pi} a \left\{ e^{-Q_+^2 a_1^2/4} \left[\frac{1}{V\bar{B}} e^{C_+^2/4B+iD_+} \times \right. \right. \\ & \times \int_{-\sqrt{B} \Delta_1 + C_+/2 \sqrt{B}}^{\sqrt{B} \Delta_2 + C_+/2 \sqrt{B}} e^{-t^2} dt + \frac{1}{V\bar{B}^*} e^{(C_+)^2/4B^*-iD_+} \int_{-\sqrt{B^*} \Delta_1 + C'_+/2 \sqrt{B^*}}^{\sqrt{B^*} \Delta_2 + C'_+/2 \sqrt{B^*}} e^{-t^2} dt \left. \right] + \\ & + e^{-Q_-^2 a_1^2/4} \left[\frac{1}{V\bar{B}} e^{C_-^2/4B+iD_-} \int_{\sqrt{B} \Delta_1 + C_-/2 \sqrt{B}}^{\sqrt{B} \Delta_2 + C_-/2 \sqrt{B}} e^{-t^2} dt + \right. \end{aligned} \quad (14)$$

$$+ \frac{1}{V\bar{B}^*} e^{(C_-^*)^2/4B - iD_-} \int_{-\sqrt{B^*}\Delta_1 + C_-^*/2\sqrt{B}}^{\sqrt{B^*}\Delta_2 + C_-^*/2\sqrt{B}} e^{-t^2} dt \Big] \Big\}.$$

Здесь введены следующие обозначения: для интеграла J_1

$$\begin{aligned} Q_{\pm} &= \Delta p \Delta u / 2 \pm q, \quad B = p^2 a^2 - i \Delta p, \\ C_{\pm} &= p a^2 Q_{\pm} + i 2 p \Delta u, \quad D_{\pm} = \Delta p (\Delta u)^2 / 4, \quad a_1 = a, \end{aligned} \quad (15)$$

для интеграла J_2

$$Q_{\pm} = -p \Delta u \pm q, \quad B = (\Delta p)^2 a_1^2 / 4 - i 2 p + i (\Delta p)^2 p a^2 a_1^2 / 8, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a / \sqrt{1 + p^2 a^4 / 4}, \quad C_{\pm} = \Delta p Q_{\pm} a_1^2 / 2 + i \Delta p \Delta u + i \Delta p (p a^2 / 4) Q_{\pm} a_1^2, \\ D_{\pm} &= p (\Delta u)^2 / 2 - \pi / 2 - (Q_{\pm}^2 a_1^2 / 4) (p a^2 / 2), \end{aligned}$$

а B^* , C_{\pm}^* — величины, комплексно сопряженные с B и C_{\pm} .

Если рассеивающая площадка охватывает область, существенную для рассеяния, конечный результат не должен зависеть от размеров рассеивающей площадки. Для этого при вычислении интеграла J_1 достаточно потребовать выполнения условий

$$2p \frac{\Delta}{|Q_{\pm}|} \gg 1, \quad p a \Delta \gg 1; \quad (17)$$

кроме того, смещение точки зеркального отражения Δu должно быть не слишком велико по сравнению с интервалом корреляции неровностей, т. е.

$$\frac{|\Delta u|}{a} \frac{1}{p a \Delta} \ll 1,$$

где $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$.

Сделаем несколько замечаний относительно физического смысла неравенств (17). В задаче о рассеянии плоской волны достаточно малой площадкой с синусоидальными неровностями первое неравенство в (17) (если заменить $|Q_{\pm}|$ на q , что верно при достаточно малых Δu) означает, что точка наблюдения расположена в области наложения спектров рассеяния [3]. При рассеянии сферической волны достаточно малым участком неровной поверхности с квазигармоническими неровностями будет иметь место аналогичная картина. Второе неравенство дает дополнительное условие того, что при наложении спектров рассеяния область, существенная для рассеяния, охватывается площадкой. Поэтому в конечных формулах отсутствует зависимость от размеров площадки. С учетом приведенных выше условий получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= k^2 \bar{F}^2 \sin \psi_1 \sin \psi_2 \frac{\sqrt{1 - (\Delta p / 2p)^2}}{\sqrt[4]{1 + b^2}} \left\{ \exp \left[-\frac{(Q_+ ab / 2 + \Delta u / a)^2}{1 + b^2} \right] \times \right. \\ &\times \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} b + \frac{Q_+ \Delta u + Q_+^2 a^2 b / 4}{1 + b^2} - \frac{b(\Delta u / a)^2}{1 + b^2} + \frac{\Delta p (\Delta u)^2}{4} \right] + \end{aligned} \quad (18)$$

$$+ \exp \left[- \frac{(Q_- ab/2 + \Delta u/a)^2}{1+b^2} \right] \cos \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} b + \right. \\ \left. + \frac{Q_- \Delta u + Q_-^2 a^2 b/4 - b(\Delta u/a)^2}{1+b^2} + \frac{\Delta p(\Delta u)^2}{4} \right],$$

где $b = \Delta p/p^2 a^2$, а в качестве A_0 взята амплитуда сферической волны на расстоянии $R_{10} + R_{20}$ от источника звука $A_0 = (R_{10} + R_{20})^{-1}$.

При вычислении интеграла J_2 результат не будет зависеть от пределов интегрирования, если $p\Delta^2 \gg 1$, что заведомо выполняется при соблюдении условий (17). Выражение для J_2 выписывать не будем из-за его громоздкости. Нетрудно показать, что в принятых приближениях (особенно важно соблюдение условия $pa^2 \ll 1$) $|J_2| \ll |J_1|$ при всех значениях Δp и Δu , за исключением окрестностей точек, в которых J_1 обращается в нуль. В случае $\Delta p \approx 0$ и $\Delta u \approx 0$, когда приемники расположены весьма близко друг к другу, получаем:

$$J_1 \simeq 2k^2 \sin^2 \psi \bar{F}^2, \quad J_2 \simeq 2k^2 \sin^2 \psi \bar{F}^2 \sqrt{pa^2} \times \\ \times \exp \left[- \frac{q^2 a^2}{4(1+p^2 a^4/4)} \right] \cos \left(\frac{q^2 a^2}{4} \frac{pa^2}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (19)$$

Отсюда видно, что $J_2 \ll J_1$, поскольку у нас $\sqrt{pa^2} e^{-q^2 a^2/4} \ll 1$. Коэффициенты пространственной автокорреляции флюктуаций амплитуды и фазы в данном случае совпадают и приближенно равны

$$R_{AA} \simeq R_{\varphi\varphi} \simeq \frac{J_1}{J_1(0)}, \quad (20)$$

где $J_1(0)$ —значение интеграла в отсутствие разнесения приемников.

2. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛЮКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ (ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ)

Выражение (18) дает решение поставленной задачи при любом, но достаточно малом разнесении приемников в пространстве и для произвольных углов α .

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) Предположим, что приемники расположены в точках с координатами $(L, 0, z_1)$ и $(L+\Delta L, 0, z_2)$ (случай продольной корреляции). Тогда при $\alpha=0$ (поверхность, шероховатая вдоль оси x) для коэффициентов корреляции R_{AA} и $R_{\varphi\varphi}$ приближенно будем иметь

$$R_{AA} = R_{\varphi\varphi} = \exp \left[- \left(\frac{\Delta L}{a} \frac{z_1}{z_1+z_2} \right)^2 \right] \cos \left(q \Delta L \frac{z_1}{z_1+z_2} \right). \quad (21)$$

Интервал пространственной корреляции ΔL_0 (определенный по уровню спада огибающей коэффициента корреляции в e раз) и пространственный период осцилляций коэффициентов корреляции флюктуаций амплитуды и фазы Λ_0 , согласно (21), равны

$$\Delta L_0 = a \frac{z_1 + z_2}{z_1}, \quad \Lambda_0 = \frac{2\pi}{q} \frac{z_1 + z_2}{z_1}. \quad (22)$$

При $\sigma=\pi/2$ (поверхность, шероховатая вдоль оси y) получаем

$$R_{AA} = R_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \exp \left[- \frac{q^2 a^2}{4} \frac{b^2}{1+b^2} \right] \cos \left[\frac{q^2 a^2 b}{4(1+b^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} b \right]. \quad (23)$$

В этом случае интервал корреляции при $qa \gg 1$ определяется из соотношения $b \approx 2/qa$ или

$$\frac{\Delta L_0}{L} \approx \frac{2}{\cos^2 \psi} \frac{ka^2}{R qa}. \quad (24)$$

Если же $qa \ll 1$, то $R_{AA} = R_{\varphi\varphi} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1+b^2}}{1+b^2}}$ и спад коэффициентов корреляции в 2 раза произойдет при $b \approx 3$, т. е. при

$$\frac{\Delta L_0}{L} \approx \frac{3}{\cos^2 \psi} \frac{ka^2}{R}. \quad (25)$$

Для промежуточных значений α следует пользоваться выражением (18).

На рис. 1 приведены кривые коэффициентов корреляции R_{AA} и $R_{\varphi\varphi}$, построенные для различных углов α . Для остальных параметров в формуле (18) взяты следующие значения: $z_1 = 50$ м, $z_2 = 100$ м, $L = 600$ м, $k = 16$ м⁻¹ ($f = 4$ кГц), $a = 4$ м, $q = \frac{2\pi}{\Lambda} =$

$= 0,63$ м⁻¹. С увеличением α от 0 до $\pi/2$ интервал пространственной корреляции флюктуаций амплитуды и фазы растет.

2) Предположим, что приемники расположены в точках с координатами $(L, 0, z_2)$ и $(L, 0, z_2 + \Delta z)$ (случай корреляции по вертикали). При $\alpha = 0$ получаем

$$R_{AA} = R_{\varphi\varphi} = \exp \left[- \left(\frac{\Delta z}{\operatorname{tg} \psi} \frac{z_1}{a z_1 + z_2} \right)^2 \right] \cos \left(q \frac{\Delta z}{\operatorname{tg} \psi} \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right), \quad (26)$$

откуда видно, что пространственный интервал корреляции Δz_0 при разнесении приемников по вертикали для малых углов скольжения значительно меньше продольного интервала корреляции ΔL_0 и равен

$$\Delta z_0 = a \frac{z_1 + z_2}{z_1} \operatorname{tg} \psi. \quad (27)$$

При $\alpha = \pi/2$ получаем выражение, совпадающее по виду с (23). В случае $qa \gg 1$ интервал корреляции определяется формулой

$$\frac{\Delta z_0}{z_1 + z_2} \approx \frac{2}{qa} \frac{ka^2}{R} \frac{1}{\left| \frac{z_1}{z_2} - \cos^2 \psi \right|}; \quad (28)$$

если же $qa \ll 1$, то спад коэффициентов корреляции в два раза произойдет при

$$\frac{\Delta z_0}{z_1 + z_2} \approx \frac{3ka^2}{R} \frac{1}{|z_1/z_2 - \cos^2 \psi|}. \quad (29)$$

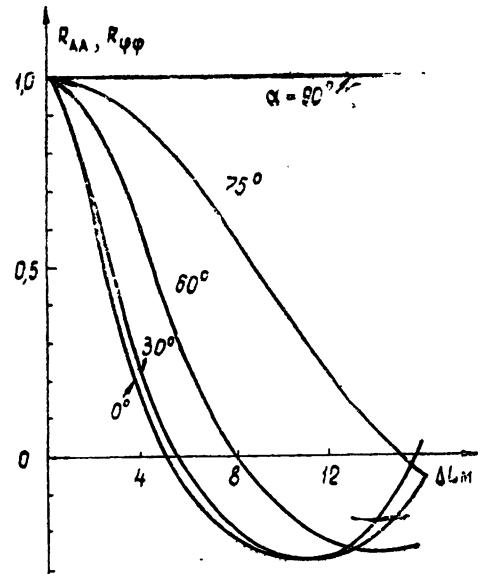


Рис. 1.

3) Предположим, что приемники расположены в точках с координатами $(L, 0, z_2)$ и $(L, \Delta y, z_2)$ (случай поперечной корреляции в горизонтальной плоскости). При $\alpha = \pi/2$ будем иметь

$$R_{AA} = R_{\varphi\varphi} = \exp \left[- \left(\frac{\Delta y}{a} \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right)^2 \right] \cos \left(q \Delta y \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) \quad (30)$$

и интервал корреляции

$$\Delta y_0 = a \frac{z_1 + z_2}{z_1}. \quad (31)$$

При $\alpha = 0$ получаем выражение, совпадающее по виду с (23). В случае $qa \gg 1$ интервал корреляции

$$\frac{\Delta y_0}{L} \approx \sqrt{\frac{4}{qa} \frac{ka^2}{R} \frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi}}, \quad (32)$$

если же $qa \ll 1$, то по уровню спада в два раза

$$\frac{\Delta y_0}{L} \approx \sqrt{\frac{6ka^2 \sin^2 \psi}{R \cos^2 \psi}}. \quad (33)$$

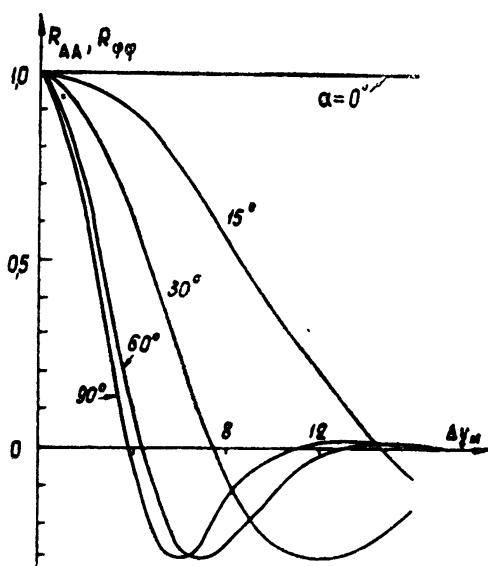


Рис. 2.

Выражения (32) и (33) отличаются от аналогичных выражений (24) и (25), полученных для случая продольной корреляции, поскольку величина Δp при $\alpha = 0$ зависит от Δy квадратично, а от ΔL — линейно.

На рис. 2 представлены корреляционные кривые, построенные с помощью формулы (17) для различных α от 0 до $\pi/2$ при разнесении приемников в горизонтальной плоскости перпендикулярно трассе распространения звука. Значения параметров взяты такими же, как и в случае продольной корреляции. Из рис. 2 видно, что интервал пространственной корреляции постепенно увеличивается при уменьшении угла α от $\pi/2$ до 0.

4) Предположим, что приемники расположены вдоль зеркально отраженного луча в точках с координатами $(L, 0, z_2)$ и $(L + \Delta L, 0, z_2 + \Delta z)$; при этом величины ΔL и Δz должны быть связаны так, чтобы $\Delta L = \Delta z / \operatorname{tg} \psi$ или $\Delta u = 0$. В этом случае для коэффициентов корреляции флюктуаций амплитуды и фазы получаем

$$R_{AA} = R_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \exp \left[- \frac{q^2 a^2}{4} \frac{b^2}{1+b^2} \right] \cos \left[\frac{q^2 a^2 b}{4(1+b^2)} + \frac{1}{2} \arctg b \right], \quad (34)$$

где

$$b = \frac{\Delta R}{R} \frac{z_1}{z_1 + z_2} \frac{1}{pa^2} = \frac{\Delta R_{20}}{R_{10} + R_{20}} \frac{z_1}{z_2} \frac{1}{pa^2}. \quad (35)$$

Отсюда при $\alpha=0$, $z_1=z_2$ и $qa \ll 1$ для интервала пространственной корреляции (по уровню спада в 2 раза) получаем

$$\Delta R \approx 6ka^2 \sin^2 \psi. \quad (36)$$

Формула (36) аналогична полученному Черновым [4] выражению для интервала продольной корреляции флюктуаций амплитуды и фазы звуковой волны при распространении в среде со случайными неоднородностями показателя преломления.

3. ВЗАИМНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛЮКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ

Проведем теперь оценку функции взаимной корреляции флюктуаций амплитуды и фазы звуковой волны в точке приема. Используя выражения (5), (10) и переходя к относительной координате ξ и координате центра тяжести u , для функции взаимной корреляции можем написать

$$\frac{\delta A}{A_0} \delta \varphi = J_1 + J_2, \quad (37)$$

где

$$J_1 = \frac{M^2 \bar{F}^2}{2} \left[\int_0^{\Delta_1 + \Delta_2} e^{-\xi^2/a^2} \cos q\xi d\xi \int_{-\Delta_1 + \xi/2}^{\Delta_2 - \xi/2} \sin(2pu\xi) du + \right. \\ \left. + \int_{-(\Delta_1 + \Delta_2)}^0 e^{-\xi^2/a^2} \cos q\xi d\xi \int_{-\Delta_1 - \xi/2}^{\Delta_2 + \xi/2} \sin(2pu\xi) du \right], \\ J_2 = M^2 \bar{F}^2 \int_0^{\Delta_1 + \Delta_2} e^{-\xi^2/a^2} \cos q\xi d\xi \int_{-\Delta_1 + \xi/2}^{\Delta_2 - \xi/2} \cos[2p(u^2 + \xi^2/4)] du.$$

Нетрудно видеть, что $J_1=0$. При вычислении интеграла J_2 примем, что размеры области, существенной для интегрирования по ξ , значительно меньше размеров рассеивающей площадки. Для этого достаточно потребовать выполнения условия $\Delta/a \gg qa/2$, где $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$. После интегрирования получаем

$$J_2 = k^2 \sin^2 \psi \bar{F}^2 \frac{\sqrt{2D}}{\sqrt[4]{1+D^2/4}} \exp \left[-\frac{q^2 a^2}{4(1+D^2/4)} \right] \cos \left[\frac{q^2 a^2}{4} \frac{D}{2(1+D^2/4)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{D}{2} - \frac{\pi}{4} \right], \quad (38)$$

где

$$D = pa^2 = \frac{ka^2}{R} \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 \alpha \sin^2 \psi + \cos^2 \alpha}.$$

Переходя к коэффициенту взаимной корреляции в случае $D \ll 1$ и принимая во внимание формулы (19), получаем

$$R_{A\varphi} = \frac{\sqrt{2D}}{2\sqrt[4]{1+D^2/4}} \exp \left[-\frac{q^2 a^2}{4(1+D^2/4)} \right] \cos \left[\frac{q^2 a^2}{4} \frac{D}{2(1+D^2/4)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{D}{2} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (39)$$

Отсюда видно, что при $D \ll 1$ (пространственный интервал корреляции шероховатостей значительно меньше размеров зоны Френеля) флюктуации амплитуды и фазы в точке приема оказываются слабо коррелированными. При этом корреляция уменьшается с увеличением расстояния между излучателем и приемником. В случае $D \gg 1$, воспользовавшись выражениями для $(\overline{\delta A/A_0})^2$ и $(\overline{\delta\varphi})^2$ из работы [2], будем иметь:

$$R_{A\varphi} = \frac{e^{-q^2 a^2 / D^2} \sin(q^2 a^2 / 2D + 1/D)}{\sqrt{1 - (1 - 3/2D^2)^2 e^{-2q^2 a^2 / D^2} \cos^2(q^2 a^2 / 2D)}}. \quad (40)$$

Если $qa/D \gg 1$, то

$$R_{A\varphi} \approx e^{-q^2 a^2 / D^2} \sin(q^2 a^2 / 2D)$$

и коэффициент взаимной корреляции флюктуаций амплитуды и фазы по модулю значительно меньше единицы. При условиях $q^2 a^2 / 2D \ll 1$, $qa \gg 1$

$$R_{A\varphi} \approx 1.$$

Наконец, для $q=0$ получаем

$$R_{A\varphi} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58.$$

Таким образом, в случае, когда пространственный интервал корреляции шероховатостей значительно больше размеров зоны Френеля, флюктуации амплитуды и фазы в точке приема могут быть в значительной степени коррелированы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. П. Гулин, Акуст. ж., 8, 426 (1962).
2. Э. П. Гулин, Акуст. ж., 8, 175 (1962).
3. А. Н. Лепорский, Диссертация, Акустич. ин-т АН СССР, М., 1955
4. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. изд. АН СССР, М., 1958.

Акустический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
10 января 1963 г.

ON SOME CORRELATION RELATIONS IN THE SOUND WAVE REFLECTED FROM STATISTICALLY ROUGH SURFACE

E. P. Goulin

The expressions have been obtained for the spatial auto-correlation coefficient of amplitude and phase fluctuations in the sound wave reflected from a perfectly soft statistically rough surface, the auto-correlation interval of surface nonuniformities being small compared with Fresnel's zone. The case of a mutual correlation of the amplitude and phase fluctuations has been also considered.

ДИФФРАКЦИЯ ПОЛЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ АНТЕННЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ДИПОЛЕМ, НА НЕКОТОРЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

E. A. Иванов

Приводится решение задачи о дифракции поля излучающей поверхности антенны, возбуждаемой элементарным электрическим диполем, находящимся на ее идеально проводящей поверхности, на сфериоде, сфере или на бесконечно тонком диске в случае, когда электрический момент диполя направлен вдоль общей для тел оси вращения. Поверхности тел также предполагаются идеально проводящими.

В работе [1] приводится решение задачи о возбуждении двух вытянутых конгруэнтных сфероидов электрическим элементарным диполем, находящимся в зазоре между ними, когда момент \mathbf{p} диполя направлен вдоль общей для сфероидов оси вращения. Однако записанные там формулы оказываются непригодными для случая, когда сфероиды имеют различные эксцентриситеты эллипсов их осевого сечения, а также и для случая, когда диполь находится на поверхности одного из сфероидов*.

В настоящей статье рассматривается задача теории дифракции, решение которой дает возможность исследовать влияние таких тел вращения, как шар, сфериод или бесконечно тонкий диск (пассивные поверхностьные антенны) на поле излучения сферической, сфериодальной или дисковой поверхности антенны, возбуждаемой находящимся на ее поверхности элементарным электрическим диполем. Задача решается в предположении, что пассивная и активная поверхностьные антенны имеют общую ось вращения, с которой совпадает направление вектора \mathbf{p} , определяющего электрический момент диполя. При решении задачи считаем сначала, как и в [1], что диполь находится между поверхностями тел, в качестве которых взяты два сфероида с произвольными и в общем случае не равными между собою эксцентриситетами. С каждым из сфероидов связана своя местная сфериодальная координатная система. Это дает возможность, сохраняя форму одного тела неизменной, менять форму другого переходом в полученных формулах от сфериодальных координат к сферическим и от координат вытянутого сфероида к координатам сплюснутого сфероида и, тем самым, решать задачу о дифракции электромагнитных волн на системе двух тел (сфериод—шар, сфериод—бесконечно тонкий диск, диск—диск и т. д.).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть два вытянутых идеально проводящих сфероида с различными фокусными расстояниями и с общей осью вращения расположены в вакууме так, как показано на рис. 1. Предположим, что элементарный электрический диполь с моментом \mathbf{p} (в дальнейшем всюду

* Для случая, когда диполь находится на поверхности одного из сфероидов, в [1] для (27) нельзя использовать какой-либо из известных нам приемов решения бесконечных систем уравнений.

предполагается, что зависимость от времени задается множителем $\exp(-i\omega t)$) находится в некоторой точке O на оси вращения между сфериодами. Центры сфериодов приняты за начала местных декартовых координат $x_{\pm 1}$, $y_{\pm 1}$, $z_{\pm 1}$, связанных с соответствующими сфероидальными координатами $\xi_{\pm 1}$, $\eta_{\pm 1}$, $\varphi_{\pm 1}$ формулами преобразования:

$$\begin{aligned}x_{\pm 1} &= \frac{d_{\pm 1}}{2} [(\xi_{\pm 1}^2 - 1)(1 - \eta_{\pm 1}^2)]^{1/2} \cos \varphi; \\y_{\pm 1} &= \frac{d_{\pm 1}}{2} [(\xi_{\pm 1}^2 - 1)(1 - \eta_{\pm 1}^2)]^{1/2} \sin \varphi; \\z_{\pm 1} &= \frac{d_{\pm 1}}{2} \xi_{\pm 1} \eta_{\pm 1},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\varphi = \varphi_{+1} = \varphi_{-1}$, а $d_s/2$ —фокусное расстояние s -го сфериода ($s = \pm 1$). Благодаря симметрии первичного поля $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ диполя относительно оси Oz , вторичное поле $E^{(2)}$, $H^{(2)}$, обусловленное наличием сфериодов в пространстве, также не будет зависеть от азимутального угла φ . Полное поле определится векторами [2]

$$\mathbf{E} = \{E_\xi, E_\eta, 0\}, \quad \mathbf{H} = \{0, 0, H_\varphi\}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}E_\xi &= E_\xi^{(1)} + E_\xi^{(2)}, \quad E_\eta = E_\eta^{(1)} + E_\eta^{(2)}, \\H_\varphi &= H_\varphi^{(1)} + H_\varphi^{(2)}.\end{aligned}$$

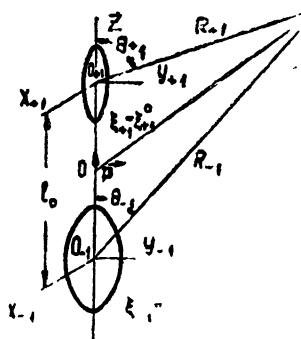


Рис. 1.

Из первого уравнения Максвелла $\mathbf{E} = (i/k) \operatorname{rot} \mathbf{H}$ последует, что обе отличные от нуля компоненты E_ξ , E_η электрического поля \mathbf{E} полностью определяются через единственную отличную от нуля компоненту H_φ поля \mathbf{H} по формулам

$$E_\xi = \frac{-1}{ic (\xi^2 - \eta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \eta} [(1 - \eta^2)^{1/2} H_\varphi]; \quad (3)$$

$$E_\eta = \frac{1}{ic (\xi^2 - \eta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} [(\xi^2 - 1)^{1/2} H_\varphi], \quad (4)$$

где $c = kd/2$, а $k = 2\pi/\lambda$.

Декартова компонента $H_x^{(2)}$ вектора $\mathbf{H}^{(2)}$ удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца. Следовательно, тому же уравнению, записанному в сфероидальных координатах, будет удовлетворять и функция $H_\varphi^{(2)} \sin \varphi$ (поскольку $H_x^{(2)} = -H_\varphi^{(2)} \sin \varphi$). Компонента $H_\varphi^{(2)}$ должна удовлетворять также условиям излучения на бесконечности и некоторым граничным условиям на поверхности сфероидов, в частности, на поверхности каждого из сфероидов, для которой $\xi_s = \xi_s^0$, должны обращаться в нуль тангенциальные составляющие E_η и E_φ вектора \mathbf{E} . В результате наша задача сводится к задаче отыскания функции $H_\varphi^{(2)}$, однозначно определенной во всем пространстве и удовлетворяющей там

1) уравнению

$$\Delta_{\xi, \eta, \varphi} (H_{\varphi}^{(2)} \sin \varphi) + k^2 (H_{\varphi}^{(2)} \sin \varphi) = 0; \quad (5)$$

2) условиям

$$\frac{\partial}{\partial \xi_s} [(\xi_s^2 - 1)^{1/2} (H_{\varphi}^{(1)} + H_{\varphi}^{(2)})]_{\xi_s = \xi_s^0} = 0 \quad (s = \pm 1); \quad (6)$$

3) условиям излучения на бесконечности.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Как и в [1], поставленная выше задача решается методом разделения переменных в сфероидальных координатах, в которых, как известно [1-3], компонента $H_{\varphi}^{(1)}$ поля $\mathbf{H}^{(1)}$ диполя может быть представлена в виде следующего разложения по элементарным функциям сфероидальных волн (в координатах s -го сфероида):

$$H_{\varphi}^{(1)} = \frac{8k^2 |\mathbf{p}|}{d_s (\xi_{0s}^2 - 1)^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-s)^{n+1} \frac{\sigma_{1n}(c_s)}{N_{1n}(c_s)} \times \\ \times S_{1n}(c_s, \eta_s) \begin{cases} R_{1n}^{(1)}(c_s, \xi_s) R_{1n}^{(3)}(c_s, \xi_{0s}) & (\xi_{0s} > \xi_s) \\ R_{1n}^{(1)}(c_s, \xi_{0s}) R_{1n}^{(3)}(c_s, \xi_s) & (\xi_{0s} < \xi_s) \end{cases} \quad (7)$$

Здесь ξ_{0s} — радиальная координата диполя в системе координат s -го сфероида ($s = \pm 1$), $c_s = kd_s/2$, $R_{1n}(c, \xi)$ — радиальные, а $S_{1n}(c, \eta)$ — угловые сфероидальные волновые функции, записанные в обозначениях, принятых в [4]. Через $\sigma_{1n}(c)$ обозначено выражение $\frac{1}{2} \sum_{r=0,1}^{\infty} \frac{(2+r)!}{r!} d_r^{1n}(c)$, где $d_r^{1n}(c)$ — коэффициенты разложения функций $S_{1n}(c, \eta)$ по присоединенным функциям Лежандра $P_{r+1}^1(\eta)$; штрих у знака суммы здесь и в дальнейшем означает, что суммирование должно производиться по четным номерам r , когда разность $n-1$ четная, и по нечетным номерам r , когда разность $n-1$ — нечетная. $N_{1n}(c)$ определяет норму угловых функций $S_{1n}(c, \eta)$, образующих полную ортогональную систему функций на $[-1, 1]$ [4].

Отметим здесь, что функции $R_{1n}^{(1)}(c, \xi)$ аналогичны сферическим бесселевым функциям $j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$, где $J_n(x)$ — обычная функция Бесселя первого рода; функции $R_{1n}^{(3)}(c, \xi)$ аналогичны сферическим бесселевым функциям $h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\pi/2x} H_{n+1/2}^{(1)}(x)$, где $H_n^{(1)}(x)$ — функция Ханкеля, и что при $c \rightarrow 0$, $c\xi \rightarrow kR$, $R_{1n}^{(1)}(c, \xi) \rightarrow j_n(kR)$, $R_{1n}^{(3)}(c, \xi) \rightarrow h_n^{(1)}(kR)$, а $S_{1n}(c, \eta) \rightarrow P_n^1(\cos \theta)$ [4].

Функция $H_{\varphi}^{(2)}$ ищется в виде суммы

$$H_{\varphi}^{(2)} = \sum_{s=\pm 1} H_{\varphi}^{(s)}, \quad (8)$$

где

$$H_{\varphi}^{(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(s)} R_{1n}^{(3)}(c_s, \xi_s) S_{1n}(c_s, \eta_s) \quad (9)$$

приписывается полю, обусловленному s -ым сфероидом. Коэффициенты $x_n^{(s)}$ определяются из граничных условий (6) при помощи теоремы сложения для элементарных функций сфероидальных волн, которую мы запишем в виде

$$R_{1n}^{(3)}(c_{-s}, \xi_{-s}) S_{1n}(c_{-s}, \eta_{-s}) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_{1m1n}(c_s, c_{-s}; l_0, \theta_{-s, s}) \times \\ \times R_{1m}^{(1)}(c_s, \xi_s) S_{1m}(c_s, \eta_s), \quad (10)$$

где

$$Q_{1m1n}(c_s, c_{-s}; l_0, \theta_{-s, s}) = \frac{2l^{m-n}}{N_{1m}(c_s)} \sum_{l=0,1}^{\infty} \sum_{t=0,1}^{\infty} d_t^{1n}(c_s) \times \\ \times d_t^{1n}(c_{-s}) \sum_{\sigma=|l-t|}^{l+t+2} i^{\sigma} b_{\sigma}^{(l+1, 1, t+1, 1)} h_{\sigma}^{(1)}(kl_0) P_{\sigma}(\cos \theta_{-s, s}). \quad (11)$$

Здесь l_0 — расстояние между центрами сфероидов, $\theta_{-1, +1} = 0$, $\theta_{+1, -1} = \pi$, $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, $h_n^{(1)}(x)$, $d_t^{1n}(c)$ и $N_{1m}(c)$ определяются как и раньше, а b_{σ} являются коэффициентами разложения произведения присоединенных функций Лежандра по тем же функциям [5]*:

$$P_{j_1}^{m_1}(\cos \theta) P_{j_2}^{m_2}(\cos \theta) = \sum_{\sigma=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} b_{\sigma}^{(j_1, m_1, j_2, m_2)} P_{\sigma}^{m_2-m_1}(\cos \theta). \quad (12)$$

Формула (10) может быть получена так же, как и в [5], или же из [2] после проведения некоторых дополнительных рассуждений. На основании (6), (8) — (10) и свойства ортогональности угловых функций $S_{1n}(c_s, \eta_s)$ на поверхности s -го сфероида мы получаем для $x_n^{(s)}$ бесконечную систему линейных уравнений

$$x_n^{(s)} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm}^{(-s, s)} x_m^{(-s)} = f_n^{(s)} \quad (n = 1, 2, \dots; s = \pm 1), \quad (13)$$

коэффициенты при неизвестных $x_n^{(s)}$ и свободные члены которой будут выписаны ниже. Если положить

$$x_n^{(s)} = n [z_n^{(1)}(c_s, \xi_s)]' X_n^{(s)} \quad (s = \pm 1) \quad (14)$$

(здесь и дальше через $[z_n^{(1), (3)}(c_s, \xi_s)]'$ обозначаются выражения $\frac{d}{d\xi_s} [(\xi_s^2 - 1)^{1/2} R_{1n}^{(1), (3)}(c_s, \xi_s)]_{\xi_s=\xi_s^0}$, которые при $c_s = 0$ переходят в $\frac{d}{dR_s} [R_s j_n(kR_s)]_{R_s=R_s^0}$ и $\frac{d}{dR_s} [R_s h_n^{(1)}(kR_s)]_{R_s=R_s^0}$ соответственно для верхних индексов 1 и 3), то мы получим новую систему уже для неизвестных $X_n^{(s)}$:

$$X_n^{(s)} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{nm}^{(-s, s)} X_m^{(-s)} = F_n^{(s)} \quad (n = 1, 2, \dots; s = \pm 1), \quad (15)$$

* В [5] в формуле (7) в выражении для коэффициентов b_j следует вместо множителя i^{-m_2} брать $(-1)^{m_2}$.

где

$$\beta_{nm}^{(-s, s)} = \frac{m [z_m^{(1)}(c_{-s}, \xi_{-s}^0)]'}{n [z_n^{(3)}(c_s, \xi_s^0)]'} Q_{1n1m}(c_s, c_{-s}; l_0, \theta_{-s, s}); \quad (16)$$

$$F_n^{(s)} = -(-s)^{n+1} \frac{8k^2 |\mathbf{p}| \sigma_{1n}(c_s) R_{1n}^{(3)}(c_s, \xi_{0s})}{d_s (\xi_{0s}^2 - 1)^{1/2} n N_{1n}(c_s) [z_n^{(3)}(c_s, \xi_s^0)]'} . \quad (17)$$

Система (15) представляет совокупность двух бесконечных систем для $s = +1$ и для $s = -1$, на которые переносятся все результаты § 2, гл. I из [6]. Можно показать, что полученная в результате замены (14) матрица $\|\beta_{nm}^{(-s, s)}\|$ коэффициентов системы (15) образует вполне непрерывную форму [6] в гильбертовом пространстве L^2 , а ее правые части принадлежат L^2 , и что тогда к системе (15) применима известная альтернатива Гильберта о разрешимости бесконечных систем [6]. Единственность решения системы (15) вытекает из единственности решения краевой задачи (5)–(6). Можно показать также, что (15) является квазирегулярной системой, решение которой находится методом усечения [6]. Так, например, для случая двух сфер (тогда $c_s = 0, s = \pm 1$) сфероидальные волновые функции, как это уже отмечалось, переходят в сферические волновые функции. Кроме того, тогда все коэффициенты d_r^{1n} обращаются в нуль, за исключением коэффициента $d_{r=n-1}^{1n}=1$;

$\sigma_{1n}(0) = \frac{n(n+1)}{2}$, $N_{1n}(0) = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$. В системе (15)

$$\beta_{nm}^{(-s, s)} = \frac{m \frac{d}{dR_{-s}} [R_{-s} j_m(kR_{-s})]_{R_{-s}=R_s^0}}{n \frac{d}{dR_s} [R_s h_n^{(1)}(kR_s)]_{R_s=R_s^0}} Q_{1n1m}(0, 0; l_0, \theta_{-s, s}), \quad (18)$$

где

$$Q_{1n1m}(0, 0; l_0, \theta_{-s, s}) = \frac{2l^{n-m}}{N_{1n}(0)} \sum_{\sigma=|n-m|}^{n+m} i^\sigma b_\sigma^{(n, 1, m, 1)} \times \\ \times h_\sigma^{(1)}(kl_0) P_\sigma(\cos \theta_{-s, s}), \quad (19)$$

а

$$F_n^{(s)} = -(-s)^{n+1} \frac{k^2 |\mathbf{p}| (2n+1) h_n^{(1)}(kR_{0s})}{R_{0s} n \frac{d}{dR_s} [R_s h_n^{(1)}(kR_s)]_{R_s=R_s^0}} . \quad (20)$$

Так как $\theta_{-s, s} = 0$ или π , то $|P_\sigma(\cos \theta_{-s, s})| = 1$ и из (19) находим, что

$$|Q| \leq \frac{2n+1}{n(n+1)} \sum_{\sigma=|n-m|}^{n+m} |b_\sigma^{(n, 1, m, 1)} h_\sigma^{(1)}(kl_0)|,$$

где $|b_\sigma^{(n, 1, m, 1)}| < C \sqrt{\sigma nm}$ (C – некоторая постоянная). Действительно, из того, что [5] $P_n^1(\cos \theta) P_m^1(\cos \theta) = \sum_{\sigma=|n-m|}^{n+m} b_\sigma^{(n, 1, m, 1)} P_\sigma(\cos \theta)$, следует:

$$b_{\sigma}^{(n, 1, m, 1)} = \frac{2\sigma + 1}{2} \int_0^{\pi} P_n^1(\cos \theta) P_m^1(\cos \theta) P_{\sigma}(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Здесь подынтегральная функция непрерывна всюду на сегменте $[0, \pi]$; на концах сегмента она равна нулю, так как $P_n^1(\cos \theta) = 0$, если $\theta = 0; \pi$. Применив к интегралу теорему о среднем и воспользовавшись затем неравенством $P_{\sigma}(\cos \theta^*) < \text{const}/V_{\sigma}$, имеющем место для всех σ и $0 < \theta^* < \pi$ [7], получим, что

$$|b_{\sigma}^{(n, 1, m, 1)}| < \text{const}_1 V_{\sigma} |P_n^1(\cos \theta^*) P_m^1(\cos \theta^*)|.$$

Учитывая теперь поведение функции $P_n^1(\cos \theta)$ при больших значениях n ($0 < \theta < \pi$) [7], найдем, что неравенство $|b_{\sigma}^{(n, 1, m, 1)}| < C V_{\sigma n m}$ при соответствующем выборе постоянной C будет иметь место для всех n, m и σ . Тогда

$$|Q| < \text{const}_2 \sqrt{\frac{m}{n}} \sum_{\sigma=|n-m|}^{n+m} V_{\sigma} |h_{\sigma}^{(1)}(kl_0)|.$$

Так как

$$\sum_{\sigma=|n-m|}^{n+m} V_{\sigma} |h_{\sigma}^{(1)}(kl_0)| < \text{const}_3 V_{n+m} |h_{n+m}^{(1)}(kl_0)|,$$

в чем можно убедиться, вынеся в сумме по σ за скобку $V_{n+m} \times \times |h_{n+m}^{(1)}(kl_0)|$ и оценив оставшееся в скобке выражение, то

$$|Q| < \text{const}_4 \sqrt{\frac{m}{n}(n+m)} |h_{n+m}^{(1)}(kl_0)|$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |\beta_{nm}^{(-s, s)}| &< \text{const}_5 \sqrt{\frac{m}{n}(n+m)} \frac{m}{n} \times \\ &\times \left| \frac{\frac{d}{dR_{-s}} [R_{-s} j_m(kR_{-s})]_{R_{-s}=R_{-s}^0}}{\frac{d}{dR_s} [R_s h_n^{(1)}(kR_s)]_{R_s=R_s^0}} h_{n+m}^{(1)}(kl_0) \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначим через z_{nm} выражение, записанное в правой части (21) без const_5 , и рассмотрим двойную последовательность $\{z_{nm}\}$. На основании асимптотических относительно n формул для сферических бессвязевых функций

$$j_n(x) \sim \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^n, \quad h_n^{(1)}(x) \sim -i \frac{2n!}{2^n n! x^{n+1}} \quad (22)$$

и формулы Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ найдем, что для конечного числа значений m , для которых неприменимы формулы (22), и для достаточно больших n

$$z_{nm} \sim \frac{m V_m}{n^2} \left| \frac{\frac{d}{dR_{-s}} [R_{-s} j_m(kR_{-s})]_{R_{-s}=R_{-s}^0} m! (n+m)!}{(kR_{-s}^0)^m 2^m m! n! l_0^{n+m+1}} \times \right. \\ \left. \times (R_{-s}^0)^m (R_s^0)^{n+1} \right| < \text{const}_5 \frac{(n+m+2)!}{(n+2)! m!} \left(\frac{R_{-s}^0}{l_0} \right)^m \left(\frac{R_s^0}{l_0} \right)^{n+2}. \quad (23)$$

Подобным же образом устанавливаем, что для конечного числа значений n , для которых неприменимы формулы (22), и для достаточно больших m вновь

$$z_{nm} < \text{const}_6 \frac{(n+m+2)!}{(n+2)! m!} \left(\frac{R_{-s}^0}{l_0} \right)^m \left(\frac{R_s^0}{l_0} \right)^{n+2}. \quad (24)$$

Аналогичный результат получится и для больших значений n и m . Так как нами при этом исключено из рассмотрения лишь конечное число членов последовательности $\{z_{nm}\}$, то при соответствующем выборе постоянной C уже для всех n и m получим, что

$$|\beta_{nm}^{(-s, s)}| < \text{const}_4 z_{nm} < C \frac{(n+m+2)!}{(n+2)! m!} \left(\frac{R_{-s}^0}{l_0} \right)^m \left(\frac{R_s^0}{l_0} \right)^{n+2}. \quad (25)$$

Гочно так же, рассматривая поведение $|F_n^{(s)}|$ сначала при больших значениях n , найдем, что для всех n

$$|F_n^{(s)}| < \text{const} \frac{q^{n+1}}{n}, \quad q = \frac{R_s^0}{R_{0s}} \leqslant 1. \quad (26)$$

Таким образом, система (15) для двух сфер может быть мажорирована некоторой новой системой, коэффициентами которой служит правая часть (25), а свободными членами—правая часть (26). Нетрудно видеть, что матрица коэффициентов такой мажорантной системы является вполне непрерывной формой, так как для нее

$$\sum_{n, m}^{\infty} \left[C \frac{(n+m+2)!}{(n+2)! m!} \left(\frac{R_{-s}^0}{l_0} \right)^m \left(\frac{R_s^0}{l_0} \right)^{n+2} \right]^2 < \infty,$$

если $(R_{-s}^0 + R_s^0)/l_0 < 1$. Здесь нужно лишь воспользоваться формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k! n!} q_1^k q_2^n = \frac{q_1^k}{(1-q_2)^{k+1}},$$

где $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ и $q_1 + q_2 < 1$ [8]. Правая часть ее принадлежит l^2 , так как $\sum_{n=1}^{\infty} |F_n^{(s)}|^2 < \infty$, в том числе и для $R_{0s} = R_s^0$. Следовательно,

к мажорантной системе применима альтернатива Гильберта о разрешимости бесконечных систем. На основании теорем о сравнении систем [6] система (15) также разрешима. Так как мажорантная система квазирегулярная, в чем нетрудно убедиться, если воспользоваться только что отмеченной выше формулой из [8], то и система (15) также является мажорантной. Ее решение может быть найдено методом усечения. Доказательство разрешимости системы (15) предполагает, что сферы не касаются. В общем случае доказательство разрешимости

системы (15) проводится по такой же схеме (сфериоиды не касаются), однако оно становится слишком громоздким, и мы его опускаем.

Полагая в (7) и (17) либо $\xi_{0,-1} = \xi_{-1}^0$, либо $\xi_{0,+1} = \xi_{+1}^0$, получим решение задачи о дифракции поля излучающей поверхностью сфероидальной антенны (возбуждаемой находящимся на ее поверхности элементарным электрическим диполем) на другом сфероиде, с общей осью вращения, когда момент диполя направлен вдоль оси. Так как при замене

$$\xi \rightarrow i\xi; \quad \eta \rightarrow \eta; \quad c \rightarrow -ic \quad (27)$$

любое решение волнового уравнения в вытянутых сфероидальных координатах и любая формула, справедливая в этих координатах, переходит в соответствующее решение или формулу, справедливую в координатах сплюснутого сфероида [2,4], то, осуществляя в нужных местах переход от (1) к (7), мы получим из (7), (8), (14)–(17) решение задачи для сплюснутых сфероидов, в частности, для бесконечно тонких дисков, если положить везде либо $\xi_{-1}^0 = 0$, либо $\xi_{+1}^0 = 0$, или же $\xi_s^0 = 0$ для $s = \pm 1$. Когда, например, $c_s = 0$ и s -ый сфероид ($s = +1$ либо $s = -1$) вырождается в сферу радиуса R_s^0 , из (9) получаем

$$H_{\varphi}^{(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{d}{dR_s} [R_s j_n(kR_s)]_{R_s=R_s^0} X_n^{(s)} h_n^{(1)}(kR_s) P_n^1(\cos \theta_s); \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \beta_{nm}^{(-s, s)} = & \frac{2i^{n-m} m [z_m^{(1)}(c_{-s}, \xi_{-s}^0)]'}{n \frac{d}{dR_s} [R_s h_n^{(1)}(kR_s)]_{R_s=R_s^0} N_{1n}(c_s)} \sum_{t=0,1}^{\infty} d_t^{1m}(c_{-s}) \times \\ & \times \sum_{\sigma=|n-t-1|}^{n+t+1} i^\sigma b_\sigma^{(n, 1, t+1, 1)} h_\sigma^{(1)}(kl_0) P_\sigma(\cos \theta_{-s, s}); \end{aligned} \quad (29)$$

$$F_n^{(s)} = -(-s)^{n+1} \frac{k^2 |p| (2n+1) h_n^{(1)}(kR_{0s})}{R_{0s} h \frac{d}{dR_s} [R_s h_n^{(1)}(kR_s)]_{R_s=R_s^0}}. \quad (30)$$

Для $-s$ -го сфероида ($s = +1$ либо $s = -1$) $H_{\varphi}^{(-s)}$ определяются по формуле (9), а

$$\begin{aligned} \beta_{nm}^{(s, -s)} = & \frac{2i^{n-m} m \frac{d}{dR_s} [R_s j_m(kR_s)]_{R_s=R_s^0}}{n N_{1n}(c_{-s}) [z_n^{(3)}(c_{-s}, \xi_{-s}^0)]'} \sum_{l=0,1}^{\infty} d_l^{1n}(c_{-s}) \times \\ & \times \sum_{\sigma=|l+1-m|}^{l+1+m} i^\sigma b_\sigma^{(l+1, 1, m, 1)} h_\sigma^{(1)}(kl_0) P_\sigma(\cos \theta_{-s, s}); \end{aligned} \quad (31)$$

$$F_n^{(s)} = -\frac{8k^2 |p| \sigma_{1n}(c_{-s}) R_{1n}^{(3)}(c_{-s}, \xi_{0, -s})}{d_{-s} (\xi_{0, -s}^2 - 1)^{1/2} N_{1n}(c_{-s}) n [z_n^{(3)}(c_{-s}, \xi_{-s}^0)]'}. \quad (32)$$

В результате из (8), (14), (15), (28)–(32) получается решение для сфероида и сферы. Перейдя в этих формулах к замене (27), мы получим решение для сплюснутого сфероида и шара или же для бесконечно тонкого диска и сферы, если положить там $\xi_s^0 = 0$. Если же $c_s = 0$ одновременно для $s = \pm 1$, то, как это уже отмечалось выше,

мы придем к задаче для двух сфер. В этом случае $H_{\varphi}^{(s)}$ ($s = \pm 1$) определяются по формуле (28), в которой $X_n^{(s)}$ являются решениями системы (15), где $\beta_{nm}^{(-s, s)}$ и $F_n^{(s)}$ соответственно имеют вид (18) и (20)

3. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Ниже мы приводим примеры численного решения задачи при некоторых значениях параметров, от которых зависит поле в волновой зоне. Результаты численного решения представлены в виде диаграмм направленности, построенных для $|H_{\varphi}|^2$ (где H_{φ} — компонента вектора \mathbf{H} полного поля), для $|H_{\varphi}^{(1)} + H_{\varphi}^{(-1)}|^2$, а также для квадрата модуля $H_{\varphi}^{(1)}$ вектора $\mathbf{H}^{(1)}$ поля, излучаемого поверхностью антенной соответствующей формы, возбуждаемой диполем (при отсутствии в пространстве другого тела). Компоненты H_{φ} всех полей рассматриваются как функции угла θ , отсчитываемого от положительного направления оси Oz , совпадающей с осью вращения тел. При этом везде предполагается, что диполь находится на поверхности 1-го тела, в координатах которого производится расчет. В качестве масштабной единицы при построении диаграмм всюду бралось значение $|H_{\varphi}^{(1)}(90^\circ)|^2 = 1$. По сравнению со всеми остальными рисунками, масштаб диаграмм на рисунках 3 а, б, в уменьшен вдвое. Всюди диаграмма, отвечающая $|H_{\varphi}|^2$, помечена цифрой 2, диаграмма, отвечающая $|H_{\varphi}^{(1)} + H_{\varphi}^{(-1)}|^2$, помечена цифрой 3. Цифрой 1 обозначена диаграмма направленности, отвечающая полю излучения поверхностью антенны соответствующей формы, возбуждаемой находящимся на ее поверхности диполем, в свободном пространстве; она приведена для сравнения. На каждом рисунке изображены также тела (сфера, диск), дифракция на которых исследуется (с сохранением их относительных размеров и расстояния между ними).

Диаграммы дают наглядное представление о характере изменения дифракционных полей в зависимости от размеров, формы тел и расстояния между ними. В этом отношении выделяются случаи, отвеча-

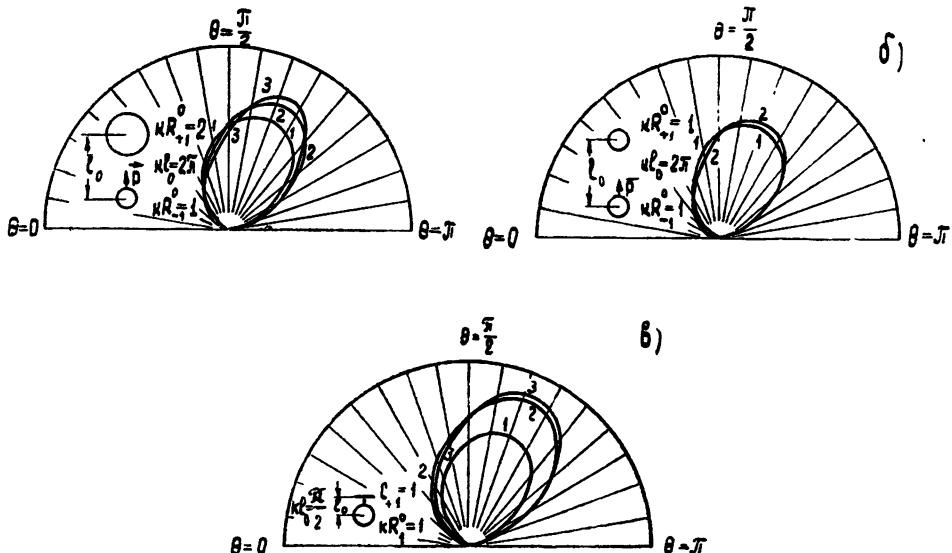


Рис. 2.

ющие рисункам 2в и 4. При одних и тех же размерах диска и шара, но с переменой их ролей (на рис. 2 в в качестве активной антенны выступает сфера, а на рис. 4—диск) резко меняется направленность излучения. Кроме того, если в первом случае ($kR_{-1}^0 = 1$, $c_{+1} = 1$) различие между $|H_\varphi|^2$ и $|H_\varphi^{(1)} + H_\varphi^{(-1)}|^2$ незначительное, во втором случае

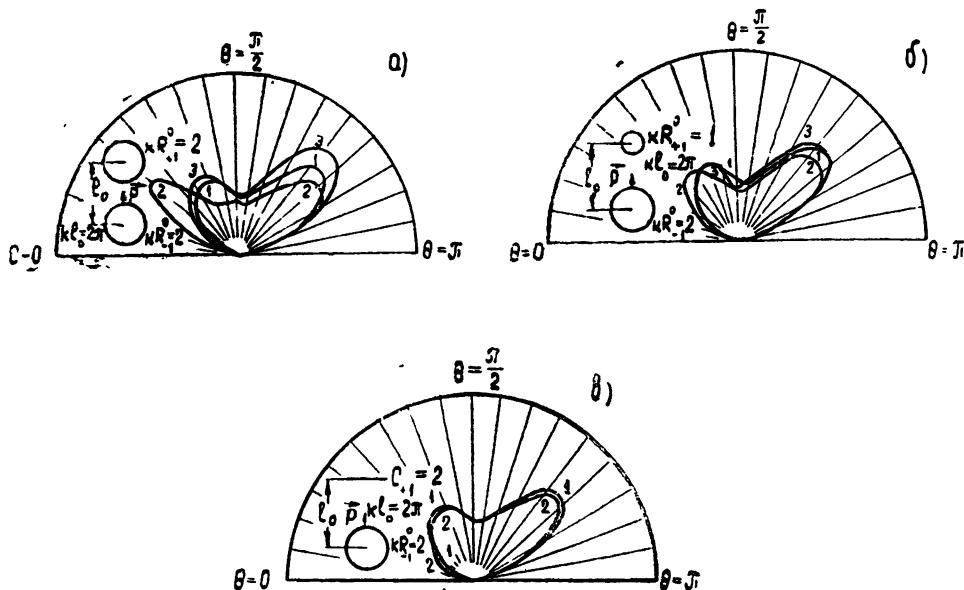


Рис. 3.

($kR_{+1}^0 = 1$, $c_{-1} = 1$) это различие очень существенно: $|H_\varphi^{(1)} + H_\varphi^{(-1)}|^2$ практически не отличается от $|H_\varphi^{(1)}|^2$ (на рис. 4 обе диаграммы для $|H_\varphi^{(1)}|^2$ и $|H_\varphi^{(1)} + H_\varphi^{(-1)}|^2$ помечены цифрой 1), и резко сказывается влияние сферы R_{+1}^0 вблизи диска на величину полного поля—здесь преобладающую роль начинает играть вторичное поле сферы, для которой диаграмма направленности $|H_\varphi^{(+1)}|^2$ помечена цифрой 4*. Приведенные примеры иллюстрируют возможность практического использования всех

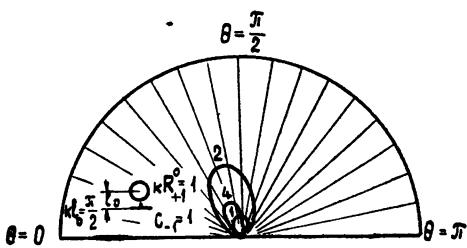


Рис. 4.

* Во всех остальных случаях мы не строили диаграммы направленности для $|H_\varphi^{(+1)}|^2$ ввиду относительной малости $|H_\varphi^{(+1)}|$.

полученных при решении нашей задачи формул. Отметим, что для значений kR_s^0 и c_s ($s = \pm 1$), не превосходящих нескольких единиц (во всяком случае—примерно до 5), численное решение не вызывает особых технических затруднений. С уменьшением же kR^0 и c сходимость процесса будет быстро улучшаться.

Для численного решения задачи систему (15) целесообразно переписать в виде

$$X_n^{(s)} - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\beta}_{nm}^{(-s, s)} X_m^{(s)} = F_n^{(s)} \quad (n = 1, 2, \dots; s = \pm 1), \quad (33)$$

где

$$\bar{\beta}_{nm}^{(-s, s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{nk}^{(-s, s)} \beta_{km}^{(s, -s)}, \quad (34)$$

$$\bar{F}_n^{(s)} = F_n^{(s)} - \sum_{l=1}^{\infty} \beta_{nl}^{(-s, s)} F_l^{(-s)}. \quad (35)$$

Система (33) решалась методом усечения. Для $kR^0 = c = 2$ мы ограничивались значениями $n, k, m = 1, 2, 3, 4, 5$, а для $kR^0 = c = 1$ значениями $n, k, m = 1, 2, 3$. Расчет матричных элементов системы (33) и ее свободных членов производился при помощи таблиц [4, 9] с использованием простейших счетных машин.

В случае, когда величина kl_0 , которой определяется отношение расстояния между центрами тел к длине волны диполя, много больше единицы и для $h_n^{(1)}(kl_0)$, имеет место асимптотическая формула $h_n^{(1)}(kl_0) \simeq (-i)^{n+1} e^{ikl_0}/kl_0$, согласно которой

$$Q_{1n1m} \simeq (-i) \frac{e^{ikl_0} 2t^{n-m}}{kl_0 N_{1m}(c_s)} \sum_{l=0,1}^{\infty} \sum_{t=0,1}^{\infty} d_l^{1n}(c_s) \times \\ \times d_t^{1m}(c_{-s}) \sum_{\sigma=|l-t|}^{l+t+2} b_{\sigma}^{(l+1, 1, t+1, 1)} P_{\sigma}(\cos \theta_{-s, s}), \quad (36)$$

мы, на основании формулы (12) и формулы $S_{mn}(c, \cos \theta) = \sum_{r=0,1}^{\infty} d_r^{mn}(c) P_{m+r}^n(\cos \theta)$, получим из (16) для $\beta_{nm}^{(-s, s)}$ выражение

$$\beta_{nm}^{(-s, s)} = 2(-i) \frac{e^{ikl_0 t^{n-m}} m [z_m^{(1)}(c_{-s}, \xi_{-s}^0)]'}{kl_0 n N_{1n}(c_s) [z_n^{(3)}(c_s, \xi_s^0)]'} \times \\ \times S_{1n}(c_{-s}, \cos \theta_{-s, s}) S_{1m}(c_s, \cos \theta_{-s, s}). \quad (37)$$

Так как $S_{1n}(c_{-s}, \cos \theta_{-s, s})$ и $S_{1m}(c_s, \cos \theta_{-s, s})$ для всех n и m равны нулю (в нашем случае $\cos \theta_{-s, s} = \pm 1$, а $S_{mn}(c, \pm 1) = 0$, если $m \neq 0$), то при $kl_0 \gg 1$ $\beta_{nm}^{(-s, s)} \simeq 0$; тогда из (15) получаем

$$X_n^{(s)} = F_n^{(s)} \quad (n = 1, 2, \dots; s = \pm 1), \quad (38)$$

где $F_n^{(s)}$ определяются формулой (17).

Таким образом, при достаточно большом kl_0 наличие в пространстве тела вращения, расположенного определенным образом по отношению к поверхности антенны, возбуждаемой находящимся на ее

поверхности диполем, момента которого направлен вдоль общей для тел оси вращения, не влияет практически на формирование поля антенны, хотя полное поле может существенно зависеть от него.

В принципе методом, примененным в статье, может быть решена задача и для случая, когда имеется несколько тел вращения, имеющих общую ось вращения при условии, что момент диполя направлен вдоль оси.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1 Е. А. Иванов, Изв. АН БССР, сер. физ.-тех., № 3, 5 (1960).
- 2 S. Meixner, F. W. Schäfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroid-funktionen, Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- 3 Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения, сб. статей. изд. Сов. радио, М., 1957, стр. 126.
- 4 C. Flammer, Spheroidal wave functions, Stanford Univ. Press., 1957.
- 5 Е. А. Иванов, ДАН БССР, 4, 3 (1960).
- 6 Л. В. Каиторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М.—Л., 1962.
- 7 Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.
- 8 А. М. Родов, Уч. записки БГУ, сер. физ.-мат., вып. 32, 97 (1957).
- 9 Я. Н. Шпильрейн, Таблицы специальных функций, ч. 1—2, ОНТИ ГТТИ, М.—Л., 1934.

Институт математики и вычислительной техники
АН БССР

Поступила в редакцию
27 марта 1963 г.

DIFFRACTION OF A RADIATING SURFACE ANTENNA FIELD EXCITED BY AN ELEMENTARY DIROLE ON SOME SOLIDS OF REVOLUTION

E. A. Ivanov

Diffraction of a surface antenna field on metallic spheroid, sphere or disk is considered, the field being excited by an elementary electric dipole situated on the perfectly conducting surface of the antenna and the dipole moment being parallel to the rotation axis of the solids.

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ МАЛОШУМЯЩИХ УСИЛИТЕЛЕЙ В СПЕКТРАЛЬНЫХ РАДИОМЕТРАХ

Э. В. Бородзич, Р. Л. Сороченко

Рассматривается схема нулевого спектрального радиометра. Принцип его работы основан на использовании нулевого метода приема радиоизлучения непрерывного спектра и дифференциального метода выделения спектральной линии на фоне шума постоянной спектральной плотности. Проводится расчет флуктуационной чувствительности и анализируются возможные паразитные эффекты такого радиометра

Разработанные в последнее время усилители с низким уровнем шумовой температуры открывают широкие возможности в спектральных радиоастрономических наблюдениях. Вместе с тем специфика их работы заставляет пересмотреть существующие схемы радиоспектрометров, подойти к ним с точки зрения возможности реализации той теоретически высокой чувствительности, которая может быть обеспечена усилителями новых типов.

До настоящего времени основным видом спектральных установок являлся частотный радиометр, принцип работы которого основан на модуляции частоты настройки приемного тракта и сравнении спектральных плотностей шумов в двух разнесенных по частоте участках спектра [1-7]. Кроме этого типа для спектральных измерений использовались радиометры постоянного тока, производящие непрерывное сравнение мощности шума в узкой полосе, настроенной на линию, с мощностью шума широкой полосы вне линии [8], а также амплитудные радиометры Дайка [9] и корреляционные приемники, выделяющие коррелированную составляющую при сложении сигналов, принятых и усиленных двумя независимыми трактами [10].

Применение на входе спектральных установок малошумящих усилителей связано с определенными трудностями. Для частотного радиометра эти трудности заключаются в том, что пока невозможно сделать частотную модуляцию полосы пропускания молекулярного или параметрического усилителя, удовлетворяющую необходимым для спектральных исследований требованиям. Регенеративная природа усиления в этих усилителях вызовет, по-видимому, дополнительные трудности в радиометрах постоянного тока, требующих очень стабильной работы приемного тракта.

В амплитудных и корреляционных радиометрах применение на входе малошумящих усилителей не вызывает каких-либо особых осложнений. Однако эти методы приема не являются специфичными для спектральных измерений и при проведении с их помощью спектрального анализа ограничение чувствительности может наступить раньше, как в случае, если бы при приеме использовались свойства монохроматического сигнала.

Действительно, при принципиальной возможности создать с помощью молекулярного усилителя радиометр с чувствительностью в сотые доли градуса мы встречаемся с опасностью, что изменения в излучении фона Галактики, излучении атмосферы, а также излуче-

ний Земли, принимаемом антенной через боковые и задние лепестки, будут обуславливать изменение антенной температуры в больших пределах. Согласно [11, 12], антенная температура параболического рефлектора за счет его рассеянного излучения составляет $20 \pm 30^{\circ}\text{K}$. Вполне очевидно, что эта величина может довольно быстро меняться на сотые и даже десятые доли градуса как вследствие вращения рефлектора в процессе наблюдений, так и от изменений метеорологических условий (температуры, влажности). Вместе с тем, это излучение имеет гладкий спектр и, следовательно, при определенных условиях может быть исключено при исследовании спектральных линий.

Ниже описывается схема спектрального радиометра, использующего УВЧ молекулярного и параметрического типов, которая, как нам кажется, может обеспечить хорошую реализацию флюктуационной чувствительности при спектральных измерениях как в линии 21 см , так и в других линиях.

1. НУЛЕВОЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИОМЕТР

Принцип работы спектрального радиометра, блок-схема которого изображена на рис. 1, основан на совместном использовании двух различных методов приема: нулевого метода приема радиоизлучения непрерывного спектра [13] и дифференциального метода выделения спектральной линии на фоне шума постоянной спектральной плотности.

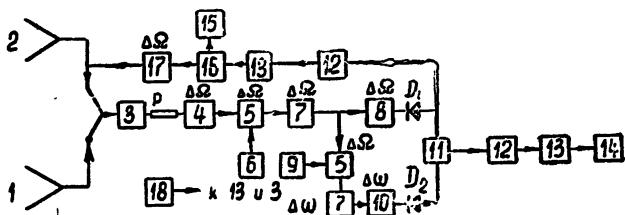


Рис. 1. Блок-схема нулевого спектрального радиометра:
 1—антenna; 2—эквивалент; 3—модулятор; 4—усилитель высокой частоты;
 5—смеситель; 6—первый гетеродин; 7—усилитель промежуточной частоты;
 8—фильтр полосы $\Delta\Omega$; 9—второй перестраиваемый гетеродин; 10—фильтр
 полосы $\Delta\omega$; 11—балансная ячейка; 12—усилитель низкой частоты; 13—син-
 хронный детектор; 14—регистрирующий прибор спектрального радиометра;
 15—компенсирующий прибор сплошного спектра; 16—блок регулировки
 компенсатора; 17—компенсатор шума; 18—опорный генератор.

Радиометр имеет широкополосный усилительный тракт $\Delta\Omega$ и дополнительный канал усиления с узкой полосой $\Delta\omega$, который при перестройке частоты второго гетеродина перемещается по полосе $\Delta\Omega$. При переключении с антены на эквивалент на выходе широкополосного тракта (после детектирования на детекторе D_1) выделяется сигнал с частотой модуляции, амплитуда которого пропорциональна разности температур антены и эквивалента $T_a - T_e$, средних для полосы $\Delta\Omega$. После соответствующего усиления и детектирования на синхронном детекторе этот сигнал „ошибки“ используется для управления мощностью компенсационного шума, подаваемого в эквивалент, как это принято в радиометрах, работающих по нулевому методу.

С другой стороны, шумы широкополосного тракта, продетектированные детектором D_1 , подаются на балансную ячейку, где они складываются с шумами полосы $\Delta\omega$ после детектирования их детектором D_2 .

При условии, что $\Delta\Omega \gg \Delta\omega$, а коэффициент усиления тракта $\Delta\omega$

подобран так, что при подключении ко входу приемника эквивалента мощности шумов, подаваемые на балансную ячейку из обеих полос, равны между собой, на выходе ячейки мы будем иметь сигнал с частотой модуляции, амплитуда которого пропорциональна разности $T_a - T_s$ в полосе $\Delta\omega$. Полагая спектральную плотность шумов эквивалента постоянной в полосе $\Delta\Omega$ (что технически вполне осуществимо с необходимой для измерений точностью), можно считать выделенный таким образом сигнал пропорциональным интенсивности спектральной линии. Дальнейшее его преобразование и регистрация производится обычным для амплитудного радиометра способом.

2. ФЛЮКТУАЦИОННАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Для определения чувствительности нулевого спектрального радиометра необходимо установить, как изменяется флюктуационная чувствительность за счет добавления при спектральных измерениях к основному каналу $\Delta\omega$ широкополосного канала $\Delta\Omega$ (рис. 1). Действительно, при отсутствии широкополосного канала мы имели бы амплитудный радиометр, чувствительность которого определяется хорошо известной формулой

$$\delta T = \pi T_w \sqrt{\frac{\Delta F}{\Delta\omega}}, \quad (1)$$

где δT —минимально обнаружимый сигнал, T_w —суммарная температура внутренних шумов и внешнего излучения, $\Delta\omega$, ΔF —ширины полос до и после детектора соответственно.

При включении канала $\Delta\Omega$ на балансной ячейке происходит вычитание мощностей шума в обеих полосах. Так как полоса $\Delta\omega$ находится внутри полосы $\Delta\Omega$, то изменение чувствительности нулевого спектрального радиометра по сравнению с амплитудным радиометром будет иметь место вследствие вычитания из спектра шумов полосы $\Delta\omega$ коррелированных шумов, заключенных в полосе $\Delta\Omega$, и добавления из этой же полосы шумов некоррелированных.

Обозначим через $R_1 = \sigma_1/\sigma_2$ коэффициент, характеризующий отношение среднеквадратичного значения флюктуаций на выходе балансной ячейки при совместной работе обоих каналов к среднеквадратичному значению флюктуаций одного узкополосного канала. Величина σ_1 может быть оценена как результат сложения статистически независимых флюктуаций σ' —некоррелированной части шумов полосы $\Delta\Omega$ и σ'' —коррелированных шумов обеих полос. В этом случае

$$\sigma_1 = \sqrt{(\sigma')^2 + (\sigma'')^2}. \quad (2)$$

Так как мощности шума в полосах $\Delta\Omega$ и $\Delta\omega$ должны быть равны между собой:

$$\bar{U}_{\Delta\Omega}^2 = \bar{U}_{\Delta\omega}^2 n_0, \quad (3)$$

то очевидно, что величина дополнительного коэффициента усиления по мощности узкополосного тракта должна соответствовать отношению полос пропускания, т. е.

$$n_0 = \frac{\Delta\Omega}{\Delta\omega}. \quad (4)$$

В этом случае*

* Полученная на основании вышеприведенных рассуждений формула для R_1 является вполне точной. Проделанный Ф. В. Бункиным строгий анализ привел к аналогичному результату при естественном допущении, что интенсивность флюктуаций после детектирования определялась в области «нулевых» частот

$$\sigma' = \sigma_{\Delta\omega} \sqrt{n_0 - 1}, \quad \sigma'' = \sigma_{\Delta\omega} (n_0 - 1), \quad \sigma_1 = \sigma_{\Delta\omega} \sqrt{n_0(n_0 - 1)}, \quad (5)$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{n_0 - 1}{n_0}}.$$

Здесь $\sigma_{\Delta\omega}$ — среднеквадратичное значение флюктуаций шумов при детектировании интервала частот $\Delta\omega$ из полосы $\Delta\Omega$.

Кроме изменения флюктуаций, добавление широкополосного канала приведет к некоторой потере сигнала спектральной линии, что, естественно, отразится на чувствительности. Коэффициент R_2 , показывающий, во сколько раз изменится величина предельно обнаружимого сигнала спектральной линии из-за этой причины,

$$R_2 = \frac{n_0}{n_0 - 1} \quad (6)$$

и общий поправочный коэффициент к формуле (1)

$$R = R_1 R_2 = \sqrt{\frac{n_0}{n_0 - 1}}. \quad (7)$$

Графическое представление функций $R_1(n_0)$, $R_2(n_0)$ и $R(n_0)$ дано на рис. 2. Как видно из рисунка, величина $R(n_0)$ довольно быстро приближается к единице; так, например, при $n_0=20$ ухудшение флюктуационной чувствительности, вызванное применением балансного метода, составляет всего 2,5%.

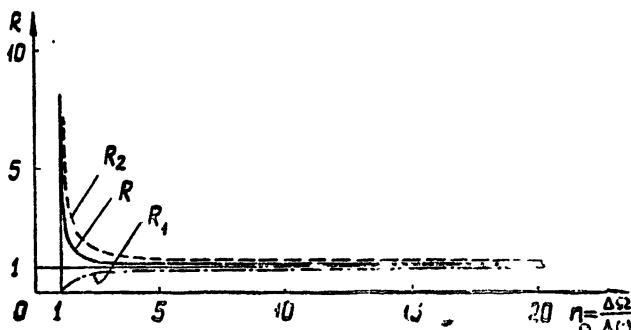


Рис. 2. Зависимость коэффициентов R_1 , R_2 и R от отношения полос $\Delta\Omega/\Delta\omega$.

3. «ПАРАЗИТНАЯ МОДУЛЯЦИЯ» НУЛЕВОГО СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИОМЕТРА

Флюктуационная чувствительность радиометра будет реализована в том случае, если сведена к необходимому минимуму величина „паразитной модуляции“, которая вызывает отклонение регистрирующего прибора радиометра в отсутствие сигнала спектральной линии. Появление „паразитной модуляции“ обусловливается изменением каких-либо параметров радиометра в такт с частотой модуляции, временными нестабильностями коэффициента усиления и полос пропускания.

Оценим величину „паразитной модуляции“ нулевого спектрального радиометра. Отнесем все частотные зависимости параметров эквивалента и УВЧ при подключенном эквиваленте к соответствующим параметрам тракта антенны и УВЧ при подключенной антенне. Будем считать, что шумовая температура УВЧ не зависит от частоты в полосе $\Delta\Omega$.

В этом случае при подключенном эквиваленте мощность шумов, отнесенная ко входу УВЧ, будет равна

$$\begin{aligned} P_{\Delta \Omega}^{\theta} &= k(T_{\text{вн}}^{\theta} + T_a) \Delta \Omega, \\ P_{\Delta \omega}^{\theta} &= k(T_{\text{вн}}^{\theta} + T_a) \Delta \omega \end{aligned} \quad (8)$$

для полос $\Delta \Omega$ и $\Delta \omega$ соответственно. При подключенной антенне аналогичные величины равны

$$\begin{aligned} P_{\Delta \Omega}^a &= k \{ T_{\text{вн}}^a + T_a [1 + \gamma(\omega)] \} \Delta \Omega = k(T_{\text{вн}}^a + T_a) \Delta \Omega, \\ P_{\Delta \omega}^a(\omega) &= \{ T_{\text{вн}}^a + T_a [1 + \gamma(\omega)] \} k \Delta \omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $T_{\text{вн}}^a$, $T_{\text{вн}}^{\theta}$ — температура внутренних шумов приемника при подключенной антенне и эквиваленте соответственно, $\gamma(\omega)$ — коэффициент, учитывающий частотную характеристику антеннного тракта в полосе $\Delta \Omega$; $\overline{\gamma(\omega)} = 0$.

Обозначим через $N_{\Delta \Omega}^{\theta} = N$ и $N_{\Delta \omega}^{\theta} = Nn$ коэффициенты усиления трактов $\Delta \Omega$ и $\Delta \omega$ при подключенном эквиваленте, через $N_{\Delta \Omega}^a = N + \Delta N$ — среднее по полосе $\Delta \Omega$ усиление широкополосного тракта при подключенной антенне и через $N_{\Delta \omega}^a(\omega) = [N_{\Delta \Omega}^a + \Delta N(\omega)]$ — значение коэффициента усиления узкополосного тракта также при подключенной антенне*.

С учетом принятых обозначений величина паразитной модуляции нулевого спектрального радиометра

$$\begin{aligned} \delta T(\omega, t) &= (T_{\text{вн}}^a + T_a) \frac{\Delta N(\omega)}{N} + T_a \gamma(\omega) + \Delta T \beta(t) + \\ &+ (T_{\text{вн}}^a + T_a) \left[\frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta N(\omega)}{N} \right] \beta(t) + T_a \gamma(\omega) \beta(t) + \\ &+ T_a \left[\frac{\Delta N}{N} + \frac{\Delta N(\omega)}{N} \right] [\gamma(\omega) + \beta(t)], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\Delta T = (T_{\text{вн}}^a + T_a) - (T_{\text{вн}}^{\theta} + T_a).$$

Запишем условие, когда $\delta T(\omega, t) < \delta T$. Полагая $T_a \ll 0,5 T_{\text{ш}}$ и обозначив $Q_{\Delta \omega} = (1/\pi) \sqrt{\Delta \omega / \Delta F}$, $Q_{\Delta \Omega} = T_{\text{ш}} / \Delta T$, будем иметь

$$\begin{aligned} Q_{\Delta \omega} \frac{\Delta N(\omega)}{N} + 0,5 Q_{\Delta \omega} \gamma(\omega) + \frac{Q_{\Delta \omega}}{Q_{\Delta \Omega}} \beta(t) + \\ + Q_{\Delta \omega} \left[\frac{\Delta N + \Delta N(\omega)}{N} \right] \beta(t) + 0,5 Q_{\Delta \omega} \gamma(\omega) \beta(t) + \\ + 0,5 Q_{\Delta \omega} \frac{[\Delta N \gamma(\omega) + \Delta N(\omega) \gamma(\omega) + \Delta N \beta(t) + \Delta N(\omega) \beta(t)]}{N} < 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Условие (11) является достаточным, но более жестким, чем это необходимо.

Оценим величины различных членов, входящие в выражение (11) и вытекающие отсюда требования к аппаратуре.

* Здесь $n = n_0 [1 + \beta(t)]$ — дополнительный коэффициент усиления тракта $\Delta \omega$; $\beta(t)$ — величина, характеризующая временные уходы от сбалансированного согласно (4) значения n_0 .

Первый член уравнения (11) связан с искажениями частотной характеристики УВЧ, которые происходят в такт с частотой модуляции вследствие переключения с антенны на эквивалент, имеющих в общем случае различные импедансы. Так как для спектральных радиометров, работающих со сравнительно узкой полосой, $Q_{\Delta\omega} \sim 10^3$, то необходимая малость первого члена по сравнению с единицей будет обеспечена при развязке (изоляторе) между модулятором и входом УВЧ порядка 30 ± 40 дБ.

Второй член уравнения (11) имеет место из-за различных частотных характеристик тракта антенны и эквивалента. Связанная с этим паразитная модуляция при тех же значениях $Q_{\Delta\omega}$ будет мала, если тракты антенны и эквивалента согласованы в полосе $\Delta\Omega$ с КСВ $\sim 1,1 \pm 1,5$.

Следующий член уравнения связан с работой цепи нулевого радиометра. Согласно [14], чувствительность нулевого радиометра определяется теми же формулами, что и амплитудного радиометра. Так как в схеме рис. 1 нулевой радиометр работает в более широкой полосе, чем та, которая используется для приема спектральной линии, $Q_{\Delta\Omega} > Q_{\Delta\omega}$ и третий член уравнения (11) должен быть много меньше единицы. Остальные члены уравнения второго порядка малости и существенного вклада в величину сигнала паразитной модуляции они вносить не будут.

Благодаря совместному применению нулевого и балансного метода величина паразитной модуляции непосредственно не зависит от

$$T_{\text{вн}}^{\text{a}}, T_a, T_{\vartheta}, (T_{\text{вн}}^{\text{a}} + T_a) \Delta N/N, \Delta N/N, \beta(t) \text{ и } \Delta T.$$

В уравнении (11) эти величины входят только в комбинации с коэффициентами, гораздо меньшими 1.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность Б. М. Чихачеву и Ф. В. Бункину за помощь в проведении анализа флюктуационной чувствительности нулевого спектрального радиометра, а также И. В. Карлову за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Чихачев, Р. Л. Сороченко, Труды 5 совещания по вопросам космологии, изд. АН СССР, М., 1956
2. Р. Л. Сороченко, Диссертация, ФИАН, М., 1961
3. С. А. Muller, Philips Techn. Rev., 17, 351 (1956).
4. R. X. Mc. Gee, J. D. Murgay, Austr. J. Phys., 12, 127 (1959).
5. B. Höglund, V. Radhakrishnan, Chalmers Tekniska högskolas handlanger, № 233 (1959).
6. B. H. Grah, Mitteilung der Universitäts Sternwarte Bonn., № 28 (1960)
7. R. D. Davies, R. C. Jennison, Astron. Confr. Univ. Manchester, 1, 35 (1950).
8. W. Selove, Rev. Sci. Instr., 25, 120 (1954).
9. R. H. Dicke, Rev. Sci. Instr., 17, 268 (1946).
10. Н. С. Карадашев, Б. М. Чихачев, Сообщения ГАИШ, 126, 66 (1962)
11. M. E. Baird, J. J. Cook, L. G. Cross, C. B. Arnold, IRE Trans. Antennas Prop., AP-9, 43 (1961).
12. B. F. G. Cooper, Rev. Sci. Instr., 32, 202 (1961).
13. K. Machin, M. Rule, D. Vonberg, Proc. IEE, 99, 127 (1952).
14. Н. В. Карлов, Диссертация, ФИАН, М., 1956

Физический институт им П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
1 апреля 1963 г.

THE APPLICATION OF LOW NOISE AMPLIFIERS IN SPECTRAL RADIOMETERS

E. V. Borodzich, R. L. Sorochenko

The scheme is considered of a zero spectral radiometer using the zero method of the continuous radiation reception and the differential method of the spectral line separation above white noise. The calculation is carried out of the fluctuation sensitivity and the possible interfering effects are analysed of the radiometer.

О ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВАХ КОСОЙ СПИРАЛИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

B. N. Иванов

Получено дисперсионное уравнение косой спиралей прямоугольного поперечного сечения в приближении анизотропно проводящей поверхности. Путем приближенного решения дисперсионного уравнения найдена зависимость замедления в такой системе от величины волнового числа для свободного пространства.

Настоящая работа посвящена анализу дисперсионных свойств спиралей прямоугольного поперечного сечения, у которой средняя плоскость витка не совпадает с поперечным сечением, как это имеет место в спирали с постоянным углом подъема, а составляет с ним значительный угол. Применение такой замедляющей системы позволяет использовать строго поперечный электронный пучок в усилителе с поперечным током^[1].

1. ОСНОВНЫЕ УПРОЩАЮЩИЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Считая, что длина поперечного сечения b велика по сравнению с его шириной a (рис. 1), можно предположить, что меньшие стороны

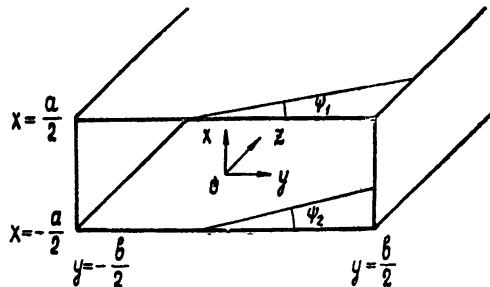


Рис. 1.

спиралей незначительно влияют на распределение поля близ больших сторон. Если заменить реальную спираль анизотропно проводящей поверхностью, то поле вблизи больших сторон можно представить в виде системы волн двух бесконечных анизотропно проводящих плоскостей, амплитуды которых связаны некоторыми граничными условиями на меньших сторонах сечения спирали.

Постоянные распространения этих волн в направлении z являются корнями w_s уравнения^[2]

$$P_{11}(w)P_{22}(w) - P_{12}^2(w) e^{-2aV\sqrt{w^2+\gamma^2}} = 0, \quad (1)$$

где

$$P_{rp} = w^2 + \beta(\operatorname{tg} \varphi_r + \operatorname{tg} \varphi_p) w + \gamma^2 \operatorname{tg} \varphi_r \operatorname{tg} \varphi_p - k^2 \quad (r, p = 1, 2), \quad (2)$$

β —постоянная распространения в направлении z , $\gamma^2 = \beta^2 - k^2$, k —волновое число для свободного пространства; смысл остальных величин понятен из рис. 1.

Предполагая, что углы φ_1 и φ_2 отличаются незначительно, и считая для определенности, что $\varphi_2 > \varphi_1$, введем следующие величины:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \psi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2},$$

при этом в силу сделанного допущения $\psi \ll \varphi$. Спираль такого типа можно получить, навив вначале спираль с постоянным углом подъема витка ψ и перекосив затем первоначальную плоскость поперечного сечения (среднюю плоскость витка) на угол φ . Поэтому рассматриваемую систему будем в дальнейшем для краткости именовать косой спиралью.

Для практики представляет интерес случай значительных замедлений, когда волна, распространяющаяся вдоль одной стороны спирали, испытывает малое возмущение из-за наличия второй стороны и наводит во второй стороне небольшой ток. В силу того, что углы φ_1 и φ_2 отличаются по величине незначительно, при переходе с одной стороны на другую волна не будет практически испытывать отражения; поэтому можно считать, что вдоль каждой из сторон спирали распространяется только одна волна, как это имеет место для спирали с постоянным углом подъема не слишком близко от пространственного резонанса [2].

При таких предположениях граничные условия на меньших сторонах поперечного сечения спирали можно учесть, потребовав, чтобы полное изменение фазы волны при обходе ею поперечного сечения было кратно 2π . Тогда дополнительная связь между постоянными распространения, которую необходимо добавить к уравнению (1) для получения зависимости β от k , имеет вид

$$(w_r - w_s)b = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3)$$

где w_r и w_s —два таких корня уравнения (1), что одному соответствует волна, распространяющаяся вдоль одной стороны спирали, а другому—волна, распространяющаяся вдоль другой стороны; при обходе поперечного сечения спирали эти волны представляют продолжение друг друга.

Таким образом, для получения дисперсионного уравнения косой спирали прямоугольного поперечного сечения необходимо решить уравнение (1) и подставить его решения в условие (3); последнее тогда даст связь между β и k , т. е. будет служить дисперсионным уравнением.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1)

Так как уравнение (1) может быть решено только приближенно, применим для его решения метод итераций [3]. Для получения нулевого приближения пренебрежем вторым слагаемым в уравнении (1), в результате чего оно превратится в алгебраическое уравнение четвертой степени, корни которого

$$\begin{aligned} w_{10} &= -\beta \operatorname{tg} \varphi_1 + k \sec \varphi_1; \\ w_{20} &= -\beta \operatorname{tg} \varphi_1 - k \sec \varphi_1; \\ w_{30} &= -\beta \operatorname{tg} \varphi_2 + k \sec \varphi_2; \\ w_{40} &= -\beta \operatorname{tg} \varphi_2 - k \sec \varphi_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь первые два корня соответствуют волнам в верхней анизотропно проводящей плоскости в отсутствие нижней плоскости, вторые два — волнам в нижней плоскости в отсутствие верхней.

Для преобразования уравнения (1) к виду, допускающему применение метода итераций, исключим из него величину $P_{12}(w)$, пользуясь легко проверяемым тождеством:

$$P_{12}^2(w) = P_{11}(w)P_{22}(w) + k^2(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1)^2 (w^2 + \gamma^2), \quad (5)$$

и затем запишем (1) следующим образом:

$$w = w_{i0} + \frac{k^2(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1)^2}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (w - w_{j0})} \frac{w^2 + \gamma^2}{e^{2aVw^2 + \gamma^2} - 1}. \quad (6)$$

Сходимость итерационного процесса для уравнения (6) при больших замедлениях обеспечивается большой величиной экспоненциального члена в правой части этого уравнения.

С каждой итерацией выражения для корней уравнения быстро усложняются, поэтому всюду в дальнейшем будем ограничиваться первым приближением, которое получается заменой в правой части (6) w на w_{i0} .

3. СЛУЧАЙ $m \neq 0$

В случае $m \neq 0$ приближенное дисперсионное уравнение для косой спирали получим, подставив в (3) первые приближения для корней. Из нулевого приближения для корней (4) следует, что пары следует выбирать таким образом: либо w_1 и w_4 , либо w_3 и w_2 .

В первом случае дисперсионное уравнение после несложных преобразований может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \beta(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1) - k(\sec \varphi_1 + \sec \varphi_2) - \frac{1}{2} \frac{k(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1)^2}{\beta(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1) - k(\sec \varphi_1 + \sec \varphi_2)} \times \\ & \times \left[\frac{\cos \varphi_1 (\beta \sec \varphi_1 + k \operatorname{tg} \varphi_1)^2}{\beta(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1) - k(\sec \varphi_1 - \sec \varphi_2)} \frac{1}{e^{2a(\beta \sec \varphi_1 + k \operatorname{tg} \varphi_1)} - 1} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos \varphi_2 (\beta \sec \varphi_2 - k \operatorname{tg} \varphi_2)^2}{\beta(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1) + k(\sec \varphi_1 - \sec \varphi_2)} \frac{1}{e^{2a(\beta \sec \varphi_2 - k \operatorname{tg} \varphi_2)} - 1} \right] = -\frac{m\pi}{b}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение, которое получается при подстановке второй пары корней, как легко видеть, можно получить из (7) заменой k на $-k$ и m на $-m$.

Для решения уравнения (7) также удобно использовать метод итераций. В качестве нулевого приближения возьмем решение уравнения, полученного из (7) после пренебрежения третьим слагаемым в его левой части, величина которого мала при больших замедлениях. Уравнение удобнее разрешить относительно величины замедления $c/v = \beta/k$:

$$\left(\frac{c}{v} \right)_0 = \frac{\sec \varphi_1 + \sec \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1} - \frac{m\pi}{kb} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}. \quad (8)$$

Выражение (8) может быть получено и непосредственно из (3), если туда подставить нулевые приближения (4) для корней уравнения (1).

Преобразовав уравнение к виду, удобному для применения метода итераций, и подставив в правую часть вместо замедления c/v его нулевое приближение (8), получаем после выполнения некоторых преобразований первое приближение:

$$(c/v)_1 = (c/v)_0 - \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1) \times \\ \times \left\{ \frac{\cos \varphi_1 [(c/v)_0 \sec \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_1]^2}{2(kb/m\pi) \sec \varphi_2 - 1} \frac{1}{\exp \{2ka[(c/v)_0 \sec \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_1]\} - 1} + \right. \\ \left. + \frac{\cos \varphi_2 [(c/v)_0 \sec \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_2]^2}{2(kb/m\pi) \sec \varphi_1 - 1} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\exp \{2ka[(c/v)_0 \sec \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_2]\} - 1} \right\}. \quad (9)$$

Для второй пары корней аналогично получим нулевое и первое приближения для замедления c/v :

$$(c/v)_0 = - \frac{\sec \varphi_1 + \sec \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1} + \frac{m\pi}{kb} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}; \quad (10)$$

$$(c/v)_1 = (c/v)_0 + \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1) \left\{ \frac{\cos \varphi_1 [(c/v)_0 \sec \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_1]^2}{2(kb/m\pi) \sec \varphi_2 - 1} \times \right. \\ \times \frac{1}{\exp \{2ka[(c/v)_0 \sec \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_1]\} - 1} + \frac{\cos \varphi_2 [(c/v)_0 \sec \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_2]^2}{2(kb/m\pi) \sec \varphi_1 - 1} \times \\ \times \left. \frac{1}{\exp \{2ka[(c/v)_0 \sec \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_2]\} - 1} \right\}. \quad (11)$$

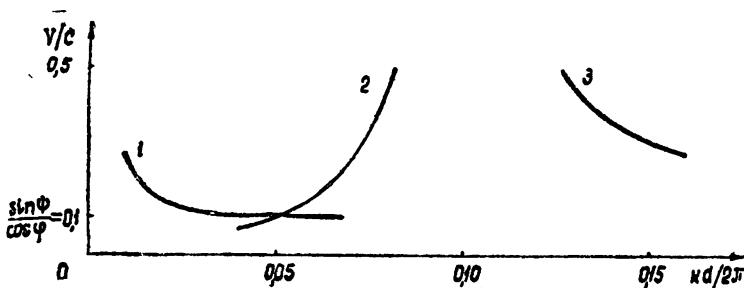


Рис. 2. Зависимость коэффициента замедления от волнового числа для косой спирали прямоугольного поперечного сечения при $b/a=5$, $\varphi=\pi/4$, $\psi=0,0708$:
1—случай $m=0$, 2—случай $m=1$, формула (9), 3—случай $m=1$, формула (11) ($d=b(\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1)$ —период спирали).

На рис. 2 приведены результаты расчета дисперсии для косой спирали некоторой выбранной геометрии в случае $m=1$ в виде зависимости коэффициента замедления v/c от величины, пропорциональной волновому числу k . Кривая 2 рассчитана по уравнению (9), кривая 3—по уравнению (11). Верхние части кривых опущены, поскольку уравнения (9) и (11) выведены в предположении значительных замедлений.

4. СЛУЧАЙ $m=0$

В случае $m=0$ условие (3) сводится к требованию кратного корня у уравнения (1); поэтому метод итераций, примененный для отыскания корней уравнения (1), следует несколько видоизменить. Как будет видно из дальнейшего, вполне, распространяющейся вдоль спирали в положительном направлении оси z , в случае $m=0$ соответствует только вторая пара корней (w_3 и w_2); поэтому для решения уравнения (1) запишем его в таком виде:

$$(w-w_{20})(w-w_{30}) = \frac{k^2 (\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1)^2}{(w-w_{10})(w-w_{40})} \frac{w^2 + \gamma^2}{e^{2a\sqrt{w^2 + \gamma^2}} - 1}. \quad (12)$$

Для получения нулевого приближения пренебрежем правой частью уравнения (12), величина которой мала при значительных замедлениях. Условие кратности корней тогда будет иметь вид

$$w_{20} = w_{30}.$$

Решая это дисперсионное уравнение относительно замедления, получим, переходя от углов φ_1 и φ_2 к φ и ψ , что

$$(c/v)_0 = \cos \varphi / \sin \psi. \quad (13)$$

Таким образом, в нулевом приближении при $m=0$ замедление оказывается постоянным и равным, как легко проверить, отношению длины одного витка к шагу спирали. Если взять первую пару корней w_1 и w_4 , то в нулевом приближении замедление будет таким же по абсолютной величине, но отрицательным, т. е. в этом случае волна в спирали распространяется в отрицательном направлении оси z .

Для получения первого приближения выразим β через k с помощью уравнения (13) и подставим в правую часть уравнения (12). Приравнивая нуль дискриминант полученного квадратного уравнения, получим первое приближение для дисперсионного уравнения, которое после некоторых преобразований может быть записано в виде:

$$\left(\frac{c}{v}\right)_1 = \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} - \operatorname{ctg} \psi \sqrt{\frac{\cos(\varphi + \psi) \cos(\varphi - \psi)}{e^{2ka \operatorname{ctg} \psi} - 1}}. \quad (14)$$

Результаты расчета по уравнению (14) дисперсии в случае $m=0$ для косой спирали с той же геометрией, что была выбрана для случая $m=1$, приведены на рис. 2 (кривая 1). Верхняя часть этой кривой опущена в силу того, что уравнение (14) верно только при значительных замедлениях.

Представляет интерес проследить, как влияет на ход дисперсионных кривых перекос средней плоскости витка спирали. Сравнение с результатами, полученными для спирали с постоянным углом подъема в [2], показывает, что качественных изменений в ход дисперсионных кривых такой перекос не вносит. С целью выяснения количественных изменений приведенные на рис. 2 дисперсионные кривые рассчитывались для спирали с тем же отношением b/a и тем же отношением длины витка к периоду, что у спирали с постоянным углом подъема в работе [2]. При этом оказалось, что в области боль-

ших замедлений, где справедливы уравнения (9), (11), (14), дисперсионные кривые настоящей работы и [2] совпали.

Из уравнения (14) также следует, что если при перекосе средней плоскости витка на угол φ сохранять неизменным угол φ между витком и средней его плоскостью, то максимальное замедление для волны с $m=0$ убывает пропорционально $\cos \varphi$.

Наконец, необходимо также отметить, что решения для любого m , как и в случае спиралей с постоянным углом подъема, имеют смысл только в окрестности соответствующего пространственного резонанса. Полученные дисперсионные уравнения описывают дисперсию той пространственной гармоники, амплитуда которой в окрестности этого резонанса является наибольшей.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Dunn, W. A. Hartman, Proc. IRE, **44**, 888 (1956).
2. В. Н. Иванов, Е. Т. Харченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 373 (1963).
3. В. Л. Загускин, Справочник по численным методам решения уравнений, Физматгиз, М., 1960.

Ростовский-на-Дону
государственный университет

Поступила в редакцию
7 февраля 1963 г.

ON DISPERSIONAL PROPERTIES OF OBLIQUE HELIX WITH RECTANGULAR CROSS SECTION

V. N. Ivanov

A dispersional equation has been obtained of an oblique helix with a rectangular cross section in the approximation of an anisotropically conductive surface. By an approximate solution of the dispersional equation the retardation dependence has been found out in such a system on the magnitude of the free space wave number

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЛБВ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

A. Ф. Голубенцев

Предложен новый метод определения усиления лампы бегущей волны с помощью тригонометрических рядов, коэффициенты которых являются дробно-рациональными функциями параметров Пирса. Метод основывается на представлении коэффициента усиления контурным интегралом и может быть легко распространен на другие СВЧ электронные приборы с длительным взаимодействием.

В [1, 2] предложен способ решения задачи об усилении малого сигнала в ЛБВ, основанный на применении степенных рядов по CN (C —параметр усиления Пирса, N —длина замедляющей системы в электронных волнах). При определении коэффициента усиления ЛБВ этим способом не нужно находить корни характеристического уравнения

$$\delta^3 + p_1\delta^2 + p_2\delta + p_3 = 0. \quad (1)$$

Величины p_1 , p_2 , p_3 , входящие в (1), выражаются через параметры Пирса b , d , $q=4QC$ следующим образом:

$$p_1 = i(b - id);$$

$$p_2 = q;$$

$$p_3 = i[q(b - id) + 1]$$

(i —мнимая единица).

Однако коэффициенты соответствующих степенных рядов в [1, 2] приходится вычислять при помощи рекуррентных формул, так что нельзя сказать с полным правом, что в [1, 2] получены аналитические выражения для коэффициента усиления ЛБВ, выраженные непосредственно через „первичные“ параметры b , d , q и CN . Ниже дается приближенное решение этой задачи, обладающее, как нам кажется, некоторыми преимуществами по сравнению со способом, развитым в [1, 2].

Коэффициент усиления ЛБВ в заранее фиксированном интервале изменения CN , определяемом рабочим режимом и параметрами замедляющей системы, представляется в виде $Ge^{2\pi Ni} = f(t) = e^{\lambda t} \varphi(t)$, где $t = 2\pi CN$, а λ —произвольная вещественная константа, превосходящая модуль наибольшего по абсолютной величине корня характеристического уравнения (1). Функция $\varphi(t)$ разлагается в ряд Фурье, коэффициенты которого вычисляются по простой формуле. Таким образом, необходимость использования рекуррентных соотношений отпадает.

Предлагаемый способ определения усиления ЛБВ с помощью тригонометрических рядов основывается на представлении коэффициента усиления ЛБВ контурным интегралом, данным в [3]. Исходя из этого представления, можно легко получить также основные соотношения метода рядов Квайта [1, 2] и показать их связь со степенными рядами Хевисайда в операционном исчислении, употребляемыми при изучении переходных процессов.

1. Упомянутое интегральное представление коэффициента усиления ЛБВ имеет следующий простой вид [3]:

$$Ge^{2\pi Ni} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{ts} \frac{s^2 + p_2}{s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3} ds, \quad (2)$$

где контур интегрирования C охватывает все полюсы функции $(s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3)^{-1}$. Разложим функцию $(s^2 + p_2)(s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3)^{-1}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки $s = \infty$:

$$\frac{s^2 + p_2}{s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{s^{k+1}}. \quad (3)$$

Коэффициенты разложения (3) определяются или путем непосредственного деления, или с помощью рекуррентной формулы

$$L_{k+3} + p_1 L_{k+2} + p_2 L_{k+1} + p_3 L_k = 0, \quad (4)$$

получаемой умножением (3) на $s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3$ и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях s в правой и левой части соотношений

$$s^2 + p_2 = (s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{s^{k+1}}. \quad (5)$$

Здесь (см. (5)) $L_0 = 1$, $L_1 = -p_1$, $L_2 = p_1^2$.

Подставив (3) в (2) и изменив порядок интегрирования и суммирования, легко находим для $f(t)$ разложение в степенной ряд по CN :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{k!} t^k; \quad (6)$$

коэффициенты ряда определяются по рекуррентной формуле (4), что совпадает с результатами работы [2]. В самом деле,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{st}}{s^{k+1}} ds = \sum_{k=0}^{\infty} L_k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \frac{1}{2\pi i} \times \\ \times \oint_C \frac{ds}{s^{k-m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{k!} t^k,$$

так как

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{ds}{s^{k-m+1}} = \delta_{km}$$

(δ_{km} — символ Кронекера).

2. Согласно [1], изображение $f(t)$ зависит только от коэффициентов характеристического уравнения p_1 , p_2 , p_3 . Следовательно, если при построении оригинала по заданному изображению не будет использована вторая теорема о разложении Хевисайда, то коэффициент усиления ЛБВ непосредственно выразится в виде функций от p_1 , p_2 , p_3 и CN .

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(t) = e^{-\lambda t} f(t)$. Если вещественное и положительное число λ взято достаточно большим, то график модуля функции $g(t)$ будет иметь характер, показанный на рис. 1, причем при достаточно большом λt_0 модуль $g(t_0)$ будет весьма мал.

Введем далее функцию $\Phi(t)$, заданную следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= g(t) \quad (\text{при } 0 \leq t \leq t_0), \\ \Phi(t) &= \Phi(2t_0 - t) = \Phi(-t);\end{aligned}$$

$\Phi(t)$ является четной функцией с периодом $2t_0$, совпадающей с $g(t)$ в интервале $(0, t_0)$. Ее, очевидно, можно разложить в ряд Фурье:

$$\Phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{t_0} t\right), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} \Phi(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{t_0}\right) dt = \\ &= \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} g(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{t_0}\right) dt.\end{aligned} \quad (8)$$

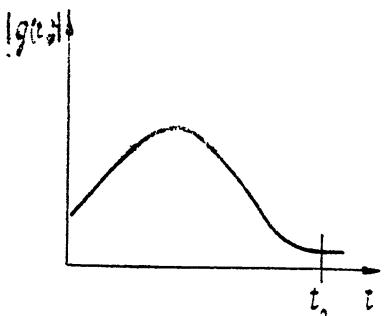


Рис. 1.

При выбранных λ и t_0 функция $g(t) = e^{-\lambda t} f(t)$ по абсолютному значению весьма мала для $t > t_0$, поэтому приближенно полагаем:

$$a_k = \frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{t_0}\right) dt = \frac{1}{t_0} \int_0^{\infty} \left\{ e^{-\left(\lambda - i \frac{k\pi}{t_0}\right)t} + e^{-\left(\lambda + i \frac{k\pi}{t_0}\right)t} \right\} f(t) dt. \quad (9)$$

С другой стороны, в [4] для L -изображения $f(t)$ получено следующее выражение:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \frac{s^2 + p_2}{s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3}. \quad (10)$$

Поэтому для коэффициентов тригонометрического ряда a_k имеем:

$$a_k \approx \frac{1}{t_0} \left\{ F\left(\lambda - i \frac{k\pi}{t_0}\right) + F\left(\lambda + i \frac{k\pi}{t_0}\right) \right\}. \quad (11)$$

Функция $F(s)$ определяется (10) и зависит только от коэффициентов характеристического уравнения p_1, p_2, p_3 . Таким образом, для коэффициента усиления $f(t)$ в произвольном интервале $(0, t_0)$ справедливо представление в виде ряда Фурье:

$$Ge^{2\pi N i} = f(t) = e^{\lambda t} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{t_0} t\right) \right\}, \quad (12)$$

коэффициенты которого алгебраически определяются с помощью функции $F(s)$.

При расчете усиления по формуле (12) необходимо иметь в виду, что λ должно превышать модуль наибольшего по абсолютному значению корня дисперсионного уравнения (точнее, $\lambda > \max\{\operatorname{Re} \delta_i\}$, $i=1, 2, 3$), так как в противном случае нельзя выбором t_0 сделать функцию $g(t)$ близкой к нулю при $t > t_0$. Аналогичным образом можно показать, что коэффициент усиления $f(t)$ может быть представлен рядом Фурье по синусам [5]:

$$f(t) = \frac{1}{t} e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin\left(\frac{2k+1}{2t_0} \pi t\right), \quad (13)$$

где

$$b_{2k+1} \approx -\frac{1}{it_0} \left[F'\left(\lambda - i \frac{2k+1}{2t_0} \pi\right) - F'\left(\lambda + i \frac{2k+1}{2t_0} \pi\right) \right].$$

Пригодность полученных выражений (12) и (13) для вычислений (т. е. быстрота сходимости рядов) определяется, как известно [6], порядком коэффициентов Фурье. Ряд Фурье практически пригоден для вычислений, если порядок убывания коэффициентов не ниже 3. С этой точки зрения ряд (12) является совершенно неудовлетворительным, так как, согласно (11), коэффициенты ряда того же порядка, что и $1/k$.

Однако этот недостаток можно легко устранить, так как для рядов Фурье сдробно-рациональными коэффициентами разработаны эффективные методы усиления сходимости, изложенные, например, в [6, 7]. В рассматриваемом случае необходимая быстрота сходимости тригонометрических рядов может быть получена путем разложения в ряды вида (12) и (13) функции $R_n(t) = f(t) - f_n(t)$, где $f_n(t)$ — сумма первых $n+1$ членов степенного ряда Квайта. При $n=2$ имеем

$$f(t) = 1 - p_1 t + \frac{p_2}{2!} t^2 + R_2(t).$$

Для $R_2(t)$ справедливо разложение (12), причем функция $F_2(s)$, через которую выражаются коэффициенты соответствующего тригонометрического ряда, связана с $F(s)$ простым соотношением

$$F_2(s) = F(s) - \frac{1}{s} + \frac{p_1}{s^2} - \frac{p_1^2}{s^3}.$$

Нетрудно видеть, что для этого случая порядок убывания коэффициентов равен 4.

В заключение выражаю глубокую благодарность П. В. Голубкову за внимание к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражение для коэффициентов ряда Фурье a_k можно записать в виде контурного интеграла. С помощью теоремы о затухании и правила об интегрировании оригинала из соотношения $f(t) \doteq F(s)$ следует:

$$\int_0^t e^{-kt} f(t) dt \doteq \frac{F(s+k)}{s}. \quad (14)$$

С помощью (9) и (14) получим для a_k представление в виде контурного интеграла:

$$a_k = \frac{1}{t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \frac{e^{st_0}}{s} \left[F\left(s + \lambda - i \frac{k\pi}{t_0}\right) + F\left(s + \lambda + i \frac{k\pi}{t_0}\right) \right] ds \quad (15)$$

(s_0 — абсцисса сходимости функции $f(t)$). Интегрируя функцию

$$\frac{e^{st_0}}{s} \left[F\left(s + \lambda - i \frac{k\pi}{t_0}\right) + F\left(s + \lambda + i \frac{k\pi}{t_0}\right) \right]$$

по контуру прямоугольника MNPQ (рис. 2) и устремляя высоту этого прямоугольника к бесконечности, получим

$$a_k = \frac{1}{t_0} \left[F\left(\lambda - i \frac{k\pi}{t_0}\right) + F\left(\lambda + i \frac{k\pi}{t_0}\right) + \frac{1}{t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \frac{e^{st_0}}{s} \times \right. \\ \left. \times \left[F\left(s + \lambda - i \frac{k\pi}{t_0}\right) + F\left(s + \lambda + i \frac{k\pi}{t_0}\right) \right] ds \right]. \quad (16)$$

Величина α выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $\lambda - s > s_0$. Сравнивая (16) с (11), получаем для ошибки Δ_k в определении коэффициентов ряда Фурье выражение

$$\Delta_k = \frac{1}{t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \frac{e^{st_0}}{s} \left[F\left(s + \lambda - i \frac{k\pi}{t_0}\right) + \right. \\ \left. + F\left(s + \lambda + i \frac{k\pi}{t_0}\right) \right] ds. \quad (17)$$

Вдоль пути интегрирования $s = -\alpha + iu$ и, следовательно,

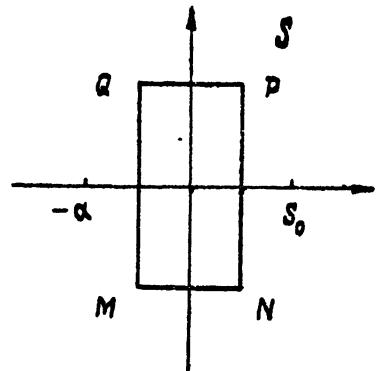


Рис. 2.

$$|\Delta_k| \leq \frac{1}{t_0} e^{-\alpha t_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\alpha - iu|} \left| F\left(\lambda - \alpha - i \frac{k\pi}{t_0}\right) + F\left(\lambda - \alpha + i \frac{k\pi}{t_0}\right) \right| du. \quad (18)$$

Поскольку $\lim_{|p| \rightarrow \infty} F(p) = 0$, интеграл в (18) конечен и меньше M , поэтому

$$|\Delta_k| \leq \frac{1}{t_0} \frac{M}{2\pi} e^{-\alpha t_0}.$$

Таким образом, выбором λ и t_0 ошибка в определении коэффициентов ряда Фурье может быть сделана малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. F. Quate, Bell Telephone Labs. Rep. № MM—53—1500—36, Oktober 20, 1953.
2. I. A. Muller, IRE Trans. Electron. Devices, 4, 159 (1957).
3. А. Ф. Голубенцев, Радиотехника и электроника, 7, 1046 (1962).
4. А. Ф. Голубенцев, Радиотехника и электроника, 8, 178 (1963).
5. R. A. Koisiimi, Phil. Mag., 19, 1061 (1955).
6. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, М., 1954.
7. А. М. Заездный, Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи, Госэнергоиздат, М.—Л., 1961.

Научно-исследовательский институт механики и физики
при Саратовском университете

Поступила в редакцию
29 января 1962 г

ON THE TWT EQUATIONS SOLUTION BY MEANS OF THE TRIGONOMETRIC SERIES

A. F. Golubentsev

A new method is proposed for the determination of TW tube amplification by means of trigonometric series, the coefficients being fraction-rational functions of Pierce's parameters. The method is based on the representation of the amplification factor in the form of a complex integral and can be easily applied to other UHF electronic devices with continuous interaction.

ШУМЯЩИЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ПОТОК В СИСТЕМЕ ВОЗБУЖДАЕМЫХ РЕЗОНАТОРОВ

A. C. Рошаль

Дается матричное представление уравнений, которые описывают прохождение электронного луча (с заданной матрицей спектральных плотностей шума на входе) через систему щелей связанных резонаторов, обладающих собственными ЭДС.

При теоретическом исследовании многих задач радиофизики оказываются очень эффективными методы теории матриц. В ряде недавних работ (см., например, [1,2]) на основе теории матриц рассматривается распространение связанных волн в системах, однородно распределенных вдоль координаты z (линии передачи, изолированные или связанные, а также с параметрическим воздействием; электронные потоки, которые могут быть связаны с линиями и т. п.). Этот класс проблем описывается системой линейных однородных дифференциальных уравнений для амплитуд распространяющихся волн.

В настоящей работе рассматривается другой часто встречающийся случай, когда имеются как распределенные, так и сосредоточенные элементы. Такова, например, система связанных резонаторов, пронизываемых электронным потоком, со щелевым взаимодействием, когда резонаторы представляются в виде контуров с сосредоточенными постоянными (рис. 1). Как показано далее, подобные системы описы-

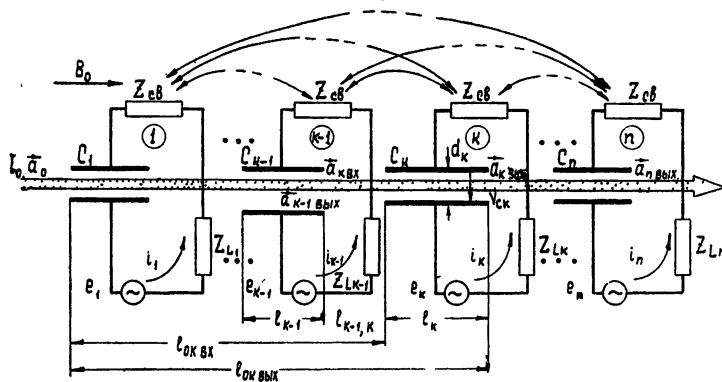


Рис. 1. Схема системы связанных резонаторов, пронизываемых электронным потоком:

I_0 —постоянный ток потока, a_0 —входная шумовая модуляция, B_0 —постоянное продольное магнитное поле. Импеданс связи Z_{cb} показан условно.

ваются совокупностью неоднородных линейных дифференциальных уравнений и линейных алгебраических уравнений. При решении широко используются матрицы. Особое внимание уделяется исследованию прохождения шума через систему. Полученные формулы полезны в качестве легко программируемого алгоритма при расчетах на быстро действующих цифровых вычислительных машинах.

Приводимая методика целесообразна, когда система связанных резонаторов (контуров) неудовлетворительно описывается распределенной моделью или цепочкой многополюсников, например, когда резонаторы различаются по своей геометрии и другим параметрам или их количество очень невелико (два—четыре) и различие во включении концевых резонаторов не позволяет считать цепочку однородной*. Полученные результаты применимы к системам с перекрестными связями произвольной сложности, а не только к случаям связей между соседними резонаторами, как обычно предполагается (в частности, когда система представляется цепочкой четырехполюсников).

1. УРАВНЕНИЕ ПОТОКА ЭЛЕКТРОНОВ

Ограничимся случаем, когда области взаимодействия резонаторов с потоком представляют собой зазоры типа конденсаторов, разделенные участками дрейфа (на рис. 1 изображены щели с поперечным полем, однако все формулы справедливы также для щелей с продольным полем). Уравнения электронного потока в предположении, что все переменные величины изменяются со временем пропорционально $\exp(j\omega t)$, можно представить в виде системы r линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка для амплитуд переменных величин**:

$$\frac{dw}{dz} = -jR_1 w + e_1. \quad (1)$$

Вектор $w = (w_1, \dots, w_r)'$ называется вектором*** связанных волн потока (или вектором состояний), причем его компоненты могут быть различной природы: скорости, координаты, токи и т. п.; R_1 — матрица уравнения размерности $r \times r$, e_1 — r -мерный вектор напряженности внешнего поля, z — координата вдоль луча.

Будем предполагать, что уравнение (1) с помощью неособенного преобразования $a = T w$ (замена базиса) можно привести к виду

$$\frac{da}{dz} = -jRa + e_0 \quad (e_0 = Te_1) \quad (2)$$

с диагональной матрицей $R = TR_1T^{-1}$. (Это предположение не является необходимым, однако оно облегчает последующие вычисления.) Здесь $a = (a_1, \dots, a_r)'$ — вектор амплитуд собственных волн потока. Очевидно, что $e_0 = 0$ в промежутке дрейфа, а в зазоре резонатора номера k можно представить $e = e_{0k}$ в виде

$$e_{0k} = p_k \frac{v_{ck}}{d_k}, \quad (3)$$

где p_k — некоторый вектор, v_{ck} — напряжение в зазоре, d_k — расстояние между пластинами резонатора. Поскольку R — диагональная матрица, то в пространстве дрейфа волны a_l не связаны; в резонаторе волны связаны благодаря полю e_0 .

Решение уравнения (2) в резонаторе номера k имеет вид

* Типичный пример — входное устройство связи с электронным потоком, состоящее из двух-трех связанных резонаторов, один из которых соединен с контуром генератора (антенны). Подобная трех-четырехконтурная система легко может быть количественно исследована согласно приводимой методике.

** Уравнение (1) отличается от аналогичного уравнения для распределенных систем [1-3] наличием свободного члена e_1 , который представляет собой внешнее поле, распространяющееся в щели с бесконечной фазовой скоростью.

*** Штрих означает транспонирование строки, т. е. вектор

$$\mathbf{a}_k(z) = e^{-jRz} \mathbf{a}_{k \text{ вх}} + e^{-jRz} \frac{1}{d_k} \left(\int_0^z e^{jRz} \mathbf{p}_k dz \right) \mathbf{v}_{ck}, \quad (4)$$

где $\mathbf{a}_{k \text{ вх}}$ —значение вектора состояний на входе в резонатор (при $z=0$). На выходе из резонатора длины l_k имеем

$$\mathbf{a}_{k \text{ вых}} \equiv \mathbf{a}_k(l_k) = e^{-jRl_k} \mathbf{a}_{k \text{ вх}} + e^{-jRl_k} \frac{1}{d_k} \left(\int_0^{l_k} e^{jRz} \mathbf{p}_k dz \right) \mathbf{v}_{ck}. \quad (5)$$

Входные и выходные значения для соседних резонаторов связаны соотношением

$$\mathbf{a}_{k \text{ вх}} = \Phi_{k-1} \mathbf{a}_{k-1 \text{ вых}}, \quad \Phi_{k-1} \equiv e^{-iRl_{k-1, k}}, \quad (6)$$

где Φ_{k-1} —матрица пространства дрейфа длиной $l_{k-1, k}$ между резонаторами номеров $(k-1)$ и k . Из (5) и (6) получаем рекуррентную формулу:

$$\mathbf{a}_{k \text{ вых}} = D_k \mathbf{a}_{k-1 \text{ вых}} + b_k \mathbf{v}_{ck}, \quad (7)$$

$$D_k \equiv e^{-iR(l_{k-1, k} + l_k)}, \quad b_k \equiv \frac{1}{d_k} \int_0^{l_k} e^{jRz} \mathbf{p}_k dz. \quad (8)$$

Здесь D_k —матрица дрейфа на участке $(l_{k-1, k} + l_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ (n —количество контуров), причем $\mathbf{a}_{0 \text{ вых}} \equiv \mathbf{a}_0 \equiv \mathbf{a}_{1 \text{ вх}} = (\mathbf{a}_{10}, \dots, \mathbf{a}_{r0})'$ —заданный вектор входных флюктуаций потока, $l_{0,1} = 0$.

Распространение волн потока вдоль системы удобно описывать обобщенным $r \times n$ -мерным вектором выходных амплитуд $\mathbf{a}_{\text{вых}} = (\mathbf{a}'_{1 \text{ вых}}, \dots, \mathbf{a}'_{n \text{ вых}})'$. Из (7) имеем следующую обобщенную рекуррентную формулу:

$$P_1 \mathbf{a}_{\text{вых}} = P_0 \mathbf{a}_0 + B \mathbf{v}_c, \quad (9)$$

где

$$P_1 = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -D_2 & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -D_3 & E & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -D_n & E \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & b_n \end{bmatrix},$$

а \mathbf{v}_c —вектор напряжений на зазорах: $\mathbf{v}_c = (v_{c1}, \dots, v_{cn})'$. Умножим (9) слева на P_1^{-1} (поскольку определитель $|P_1| = 1$, то P_1^{-1} всегда существует). Легко вычислить, что

$$P_1^{-1} P_0 = \Phi_{0 \text{ вых}} = \begin{bmatrix} \Phi_{01 \text{ вых}} \\ \vdots \\ \Phi_{0n \text{ вых}} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{0k \text{ вых}} \equiv e^{-iRl_{0k \text{ вых}}} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

где $l_{0k\text{вых}}$ — расстояние от входа в систему (в первый резонатор) до выхода из резонатора номера k . Таким образом,

$$\mathbf{a}_{\text{вых}} = \Phi_{0\text{вых}} \mathbf{a}_0 + P_1^{-1} B \mathbf{v}_c. \quad (12)$$

Первый член правой части (12) описывает свободный дрейф начальных флюктуаций, второй член — возмущения в потоке, наводимые резонаторами.

Электронный поток, в свою очередь, наводит в резонаторе номера k ток i_{n_k} , для которого может быть получено выражение

$$i_{n_k} = \frac{I_0}{d_k} \int_0^{l_k} \mathbf{g}'_k \mathbf{a}_k dz, \quad (13)$$

где \mathbf{g}_k — некоторый r -мерный вектор*. Из (5) и (13) видно, что i_{n_k} линейно зависит от $\mathbf{a}_{k\text{вх}}$ и \mathbf{v}_{ck} ; в свою очередь, $\mathbf{a}_{k\text{вх}}$ линейно зависит от $\mathbf{a}_{k-1\text{вх}}$ и \mathbf{v}_{ck-1} и т. д. В конечном итоге, ток в зазоре номера k линейно зависит от \mathbf{a}_0 и напряжений v_{c_1}, \dots, v_{c_k} . Вводя вектор наведенных токов $\mathbf{i}_n = (i_{n1}, \dots, i_{nn})'$, можно, очевидно, записать

$$\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_{n0} + Y_e \mathbf{v}_c. \quad (14)$$

Введенную таким образом матрицу Y_e размерности $n \times n$ назовем электронной проводимостью системы. Как видно из построения, Y_e является левой треугольной матрицей. Член \mathbf{i}_{n0} представляет собой наведенный ток, который был бы создан при отсутствии воздействия системы на поток (при $\mathbf{v}_c = 0$), т. е. ток, наводимый свободно дрейфующими входными флюктуациями: $\mathbf{i}_{n0} = F_0 \mathbf{a}_0$. Для F_0 находим

$$F_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_1 \\ \mathbf{f}'_2 \Phi_{02\text{вх}} \\ \vdots \\ \mathbf{f}'_n \Phi_{0n\text{вх}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}'_k = \frac{I_0}{d_k} \int_0^{l_k} \mathbf{g}'_k e^{-jRz} dz, \quad \Phi_{0k\text{вх}} = e^{-jRl_{0k\text{вх}}}, \quad (15)$$

где $l_{0k\text{вх}}$ — расстояние от входа в первый резонатор до входа в резонатор номера k , $\Phi_{0k\text{вх}}$ — соответствующая матрица дрейфа. Матрица электронной проводимости:

$$Y_e = FP_1^{-1}B + Y_{e0}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{f}'_2 \Phi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{f}'_3 \Phi_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{f}'_n \Phi_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$Y_{e0} = \begin{pmatrix} Y_{e,11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & Y_{enn} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

* Действительно, полагая для простоты поток линейным (бесконечно тонким), можно определить наведенный ток из соотношения [4] $d\mathbf{i}_{n_k} \mathbf{v}_{ck}^* = E_k^* I_k dz$. Напряженность поля между пластинами E_k линейно зависит от e_{0k} , а вектор тока I_k линейно связан с \mathbf{a}_k , т. е. $E_k = Q_1 e_{0k} = Q_1 \mathbf{p}_k \mathbf{v}_{ck} / d_k$, $I_k = I_0 Q_2 \mathbf{a}_k$, где Q_1, Q_2 — некоторые матрицы. Отсюда получаем $i_{n_k} = \int_0^{l_k} d\mathbf{i}_{n_k}$ в виде (13), причем $\mathbf{g}'_k = \mathbf{p}_k^+ Q_1^+ Q_2$, где индекс $+$ означает сопряженный вектор (матрицу).

$$Y_{ekk} = \frac{I_0}{d_k^2} \int_0^{l_k} \mathbf{g}'_k e^{-jRz} \left(\int_0^z e^{jRz} \mathbf{p}_k dz \right) dz. \quad (18)$$

2. УРАВНЕНИЕ СИСТЕМЫ РЕЗОНАТОРОВ

Для контура номера k (рис. 1) можно записать уравнения Кирхгофа и полного тока:

$$Z_{Lk} i_k + v_{ck} + \sum_{j=1}^n Z_{cb\,kj} i_j = e_k, \quad i_k = j\omega C_k v_{ck} + i_{hk}. \quad (19)$$

Здесь Z_{Lk} —импеданс нагрузки, подключенной к пластинам C_k , i_k —полный ток в контуре, $j\omega C_k v_{ck} = C_k \partial v_{ck} / \partial t$ —ток смещения через конденсатор C_k , e_k —ЭДС, действующая в резонаторе (в частности, это может быть ЭДС собственных шумов), $Z_{cb\,kj}$ —импеданс связи контуров k и j , который может быть различной природы. В силу взаимности связи $Z_{cb\,kj} = Z_{cb\,jk}$.

Вводя вектор полных токов $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)'$ и вектор ЭДС $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)'$, можно для всей системы резонаторов записать уравнения

$$Z_L \mathbf{i} + \mathbf{v}_c + Z_{cb} \mathbf{i} = \mathbf{e}, \quad (20)$$

$$\mathbf{i} = j\omega C \mathbf{v}_c + \mathbf{i}_{hk}. \quad (21)$$

Здесь Z_L , C —диагональные матрицы импеданса нагрузки и емкости пластин, Z_{cb} —симметричная матрица импеданса связи*:

$$Z_L = \begin{pmatrix} Z_{L1} & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & Z_{Ln} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & C_n \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$Z_{cb} = \begin{pmatrix} Z_{cb\,11} & Z_{cb\,12} & \dots & Z_{cb\,1n} \\ Z_{cb\,21} & Z_{cb\,22} & \dots & Z_{cb\,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{cb\,n1} & Z_{cb\,n2} & \dots & Z_{cb\,nn} \end{pmatrix}.$$

Из (20), (21) получим уравнение системы в виде

$$Z \mathbf{i} - (j\omega C)^{-1} \mathbf{i}_{hk} = \mathbf{e}, \quad Z = Z_L + Z_{cb} + (j\omega C)^{-1}, \quad (23)$$

где Z —импеданс системы, равный сумме собственного импеданса Z_0 (при отсутствии связей) и импеданса связи:

$$Z = Z_0 + Z_{cb}, \quad Z_0 = Z_L + (j\omega C)^{-1}. \quad (24)$$

Собственный импеданс Z_0 можно представить в виде

$$Z_0 = R_0 + j\omega L_0 + (j\omega C_0)^{-1}, \quad (25)$$

где R_0 , L_0 , C_0 —диагональные матрицы собственного сопротивления, индуктивности и емкости системы:

* Диагональные элементы матрицы Z_{cb} отличны от нуля в случае связи контуров через линию. При этом $Z_{cb\,kk}$ учитывает импеданс, вносимый линиями связи в контур номера k , и является сложной функцией частоты ω .

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_{01} & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & R_{0n} \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} L_{01} & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & L_{0n} \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} C_{01} & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & C_{0n} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

причем R_{0k} , L_{0k} , C_{0k} —суммарные параметры k -го контура при отсутствии связей*.

Если исключить i из (20) с помощью (21), то получим уравнение в наведенных токах:

$$i_n = -Y_p v_c + Z_n^{-1} e, \quad (27)$$

$$Y_p \equiv j\omega C + Z_n^{-1}, \quad (28)$$

где Y_p —эквивалентная проводимость системы, Z_n —импеданс системы без учета пластин:

$$Z_n = Z - (j\omega C)^{-1} = Z_L + Z_{cb}. \quad (29)$$

Величину Y_p можно разделить на активную и реактивную эквивалентные проводимости G_p , B_p :

$$Y_p = G_p + jB_p, \quad G_p \equiv \operatorname{Re} Y_p, \quad B_p \equiv \operatorname{Im} Y_p. \quad (30)$$

Если $C = C_0$, $Z_{Lk} = R_{0k} + j\omega L_{0k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), т. е. связи чисто индуктивные (взаимоиндуктивные), и частота ω близка к собственным частотам резонаторов $\omega_k = (L_{0k}C_k)^{-1/2}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то с точностью до членов порядка $\max(Q_{0k}^{-1})$

$$Y_p = Z_{bx}^{-1} + j\omega C_0 + (j\omega L)^{-1}, \quad Z_{bx} \equiv C_0^{-1}R_0^{-1}L, \quad (31)$$

$$L \equiv L_0 + (j\omega)^{-1}Z_{cb},$$

где Z_{bx} —входной импеданс системы, L —индуктивность системы**; $Q_{0k} = \omega_k L_{0k}/R_{0k}$ —собственная добротность резонатора номера k . Если L —вещественная матрица, например, в случае индуктивных связей без запаздывания, то $Z_{bx} = R_{bx}$, где $R_{bx} \equiv G_p^{-1}$ —входное сопротивление системы. В общем случае Z_{bx} имеет активную и реактивную компоненты.

Уравнения (20), (21) и др. и формулы (28), (31) и т. п. вполне совпадают по форме с аналогичными соотношениями для одного резонатора. Система резонаторов, таким образом, формально сводится к эквивалентному одиночному контуру. При этом представляется возможность рассматривать одновременно все контуры, выделяя при желании один из них, т. е. беря соответствующую строку уравнений. Точно так же эквивалентные схемы системы резонаторов (рис. 2, 3) сходны со схемами для одиночного резонатора с той разницей, что указанные параметры представляют собой матрицы, а переменные—векторы.

* Здесь $C_{0k}^{-1} = C_k^{-1} + C_{Lk}^{-1}$, где C_{Lk} —емкость нагрузки, подключенной к пластинам, $R_{0k} = \operatorname{Re} Z_{1k}$, L_{0k} —индуктивность нагрузки Z_{Lk} , т. е. $Z_{Lk} = R_{0k} + j\omega L_{0k} + (j\omega C_{Lk})^{-1}$.

** Это название связано с тем, что в наиболее важном практическом случае связей через взаимоиндукцию $Z_{cb} = j\omega M^i$, где взаимоиндукция системы

$M^i = \begin{pmatrix} 0 & M_{12}^i & \dots & M_{1n}^i \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\ M_{n1}^i & M_{n2}^i & \dots & 0 \end{pmatrix}$, так что $L = L_0 + M^i$, а в случае отсутствия связей $L = L_0$.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ШУМА И СИГНАЛА В СИСТЕМЕ

Подставляя (14) в (27), получаем самосогласованное решение для системы резонаторов, пронизываемой электронным потоком:

$$i_{h0} = - (Y_p + Y_e) v_c + Z_h^{-1} e. \quad (32)$$

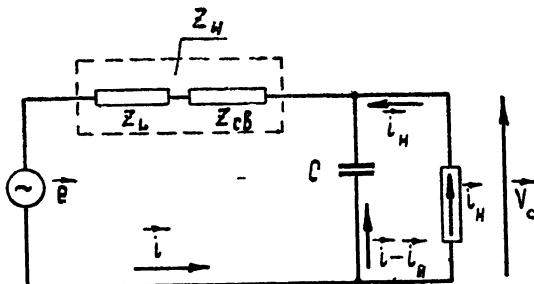


Рис. 2. Эквивалентная схема системы связанных контуров. В схеме действует ЭДС e и генератор тока i_h с бесконечно большим внутренним сопротивлением. Соответствующее уравнение:

$$e = Z_h i + (j\omega C)^{-1} (i - i_h).$$

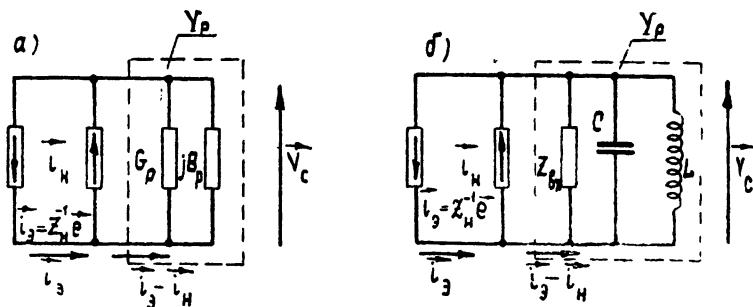


Рис. 3. Эквивалентная схема системы связанных контуров по наведенному току ($i_h, i_3 \equiv Z_h^{-1} e$ — генераторы тока с бесконечно большим внутренним сопротивлением):

$$a) i_3 - i_h = Y_p v_c; \quad b) i_3 - i_h = [Z_{bx}^{-1} + j\omega C + (j\omega L)^{-1}] v_c.$$

Этому уравнению соответствует эквивалентная схема рис. 4. На схеме G_e, B_e — активная и реактивная электронные проводимости:

$$Y_e = G_e + jB_e, \quad G_e \equiv \operatorname{Re} Y_e, \quad B_e \equiv \operatorname{Im} Y_e. \quad (33)$$

Если в схеме отсутствуют ЭДС ($e = 0$), то из (32) имеем,

$$i_{h0} = - (Y_p + Y_e) v_c.$$

Если матрица $(Y_p + Y_e)$ особенная, т. е. определитель $|Y_p + Y_e| = 0$, то в системе возможны незатухающие колебания (генерация). Как показано в [5], система переходит в режим генератора, если максимальное по модулю собственное значение матрицы $(Z_p Y_e)$, где $Z_p \equiv Y_p^{-1}$, превышает единицу.

Получим также самосогласованное решение в полных токах. Из (14), (20), (21) находим:

$$e = [Z_h + (j\omega C + Y_e)^{-1}] i - (j\omega C + Y_e)^{-1} i_{h0}. \quad (34)$$

Этому самосогласованному решению отвечает рис. 5. Обычно $\| \omega C \| \gg \| Y_e \|$, $\| i \| \gg \| i_{h0} \|$ *, так что $(j\omega C + Y_e)^{-1} \approx (j\omega C)^{-1} + (\omega C)^{-1} Y_e (\omega C)^{-1}$

$$e \approx [Z + (\omega C)^{-1} Y_e (\omega C)^{-1}] i - (j\omega C)^{-1} i_{h0}. \quad (34a)$$

При отсутствии потока $Y_e = 0$, $i_{h0} = 0$ и уравнение холодной системы

$$e = Z_i. \quad (34b)$$

Решение этого уравнения соответствует исследованию электрической схемы по методу контурных токов. Резонансные частоты системы могут быть приближенно найдены из уравнения $|X| = 0$, где $X \equiv \text{Im } Z$, причем решение обычно сводится к отысканию собственных значений матрицы LC_0 .

Умножая (32) на $v_c^+/2$ (или (34) на $i^+/2$) и полагая для простоты $i_{h0} = 0$, можно получить энергетические соотношения в системе: $P_0 = P_e + P_c$, где P_0 — полная (активная и реактивная) мощность источников, P_e — мощность, переданная потоку, P_c — мощность, переданная системе:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2} v_c^+ (Y_p + Y_e) v_c, & P_e &= \frac{1}{2} v_c^+ Y_e v_c, \\ P_c &= \frac{1}{2} v_c^+ Y_p v_c. \end{aligned} \quad (35)$$

(Формулы (35) следуют также из эквивалентной схемы рис. 4.) Аналогично определяются активная мощность, КПД и т. д. Под согласованием можно понимать условия, при которых полезная мощность $P_{ea} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} v_c^+ Y_e v_c$

максимальна.

Подставляя v_c из (32) в (12) и учитывая, что $i_{h0} = F_0 a_0$, получаем:

$$a_{\text{вых}} = M a_0 + S e, \quad (36)$$

$$M = \Phi_0 \text{ вых} - H F_0,$$

$$S = H Z_h^{-1}, \quad (37)$$

$$H = P_1^{-1} B (Y_p + Y_e)^{-1}.$$

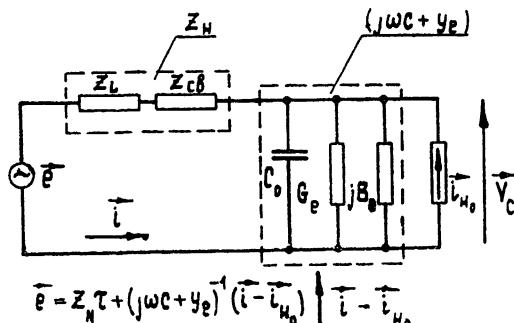


Рис. 5. Эквивалентная схема самосогласованного решения по полному току (i_{h0} — генератор наведенного тока входных флюктуаций, $e = Z_h i + (j\omega C + Y_e)^{-1} (i - i_{h0})$).

* Имеются в виду соотношения между нормами матриц (векторов).

Соотношение (36) описывает распространение в электронном потоке входных флюктуаций, а также сигнала и шумов, наводимых системой. Векторам $\mathbf{a}_{\text{вых}}$, \mathbf{a}_0 , \mathbf{e} соответствуют матрицы спектральных плотностей, определяемые, как обычно [3]*:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \overline{\mathbf{a}_{\text{вых}}(\omega) \mathbf{a}_{\text{вых}}^+(\omega)}, \quad A_0(\omega) = \overline{\mathbf{a}_0(\omega) \mathbf{a}_0^+(\omega)}, \\ \varepsilon(\omega) &= \overline{\mathbf{e}(\omega) \mathbf{e}^+(\omega)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Естественно считать, что входные флюктуации \mathbf{a}_0 и ЭДС системы \mathbf{e} не коррелированы, а также, что компоненты вектора \mathbf{e} не коррелированы между собой. Тогда

$$A(\omega) = M(\omega) A_0(\omega) M^+(\omega) + S(\omega) \varepsilon(\omega) S^+(\omega), \quad (39)$$

причем $\varepsilon(\omega)$ — диагональная матрица. Из (39) видно, что благодаря некоррелированности шума и сигнала их распространение в потоке можно рассматривать раздельно.

Условимся, что a_1 является быстрой волной потока (пространственного заряда в случае резонаторов с продольным полем и циклотронной в случае поперечного поля). Полагая, что e_1 является ЭДС сигнала, а e_k при $k = 2, 3, \dots, n$ — тепловые шумы (т. е. $e_k e_k^* = 4kT R_{0k}$, где T — температура стенок резонаторов), находим, что спектральная плотность быстрой волны на выходе из k -го резонатора

$$\begin{aligned} |\overline{a_{1k \text{ вых}}}|^2 &= \sum_{j=1}^r |M_{aj}|^2 |\overline{a_{0j}}|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{\substack{j=1 \\ j>j}}^r M_{aj} M_{aj}^* \overline{a_{0j}} \overline{a_{0j}^*} + \\ &+ |S_{a1}|^2 |e_1|^2 + 4kT \sum_{j=2}^n |S_{aj}|^2 R_{0j}, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\alpha = r(k-1) + 1$. Обычно можно пренебречь тепловыми шумами по сравнению с входными шумами потока. Член $|S_{a1}|^2$ характеризует мощность сигнала на быстрой волне, $|M_{a1}|^2$ — оставшуюся мощность входных флюктуаций на быстрой волне, остальные члены в первых двух суммах — перекачку шума из других волн, имеющихся на входе, в быструю волну под воздействием поля системы. Если $v_c = 0$ (система отсутствует), то $|M_{a1}|^2 = 1$; остальные члены равны нулю.

В малошумящих параметрических усилителях на быстрой волне необходимо предварительное ослабление быстрой волны шума. Коэффициент ослабления шума быстрой волны после k резонаторов можно получить из (40), полагая, что сигнал отсутствует ($e_1 = 0$):

$$N_{1k}(\omega) = \frac{|\overline{a_{1k \text{ вых}}}^2}{|\overline{a_{01}}|^2}. \quad (41)$$

В частности, на выходе из системы имеем $N_{1n}(\omega)$. Параметры системы, обеспечивающей полное удаление шума быстрой волны на заданной частоте ω , можно найти из условия

* Под указанным выражением надо понимать $A(\omega) = \lim 2\pi \overline{\mathbf{a}_{T \text{ вых}}(\omega) \mathbf{a}_{T \text{ вых}}^+(\omega)} / T$, где черта означает усреднение по ансамблю реализаций процесса,

$$\mathbf{a}_{T \text{ вых}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_{T \text{ вых}}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \mathbf{a}_{T \text{ вых}}(t) = \begin{cases} \mathbf{a}_{\text{вых}}(t) & \text{при } |t| < T \\ 0 & \text{при } |t| > T \end{cases}.$$

$$N_{1n}(\bar{\omega}) = 0. \quad (42)$$

Обычно можно ограничиться более простым уравнением

$$|M_{\alpha 1}(\bar{\omega})|^2 = 0, \quad \alpha = rn - r + 1, \quad (43)$$

которое соответствует условиям „минимума Компфнера“ для систем с сосредоточенными параметрами и может быть решено численно. Если (42) или (43) не имеет решения, то искомые параметры находятся из условия минимума соответствующих величин. Для широкополосного ослабления шума желательно обеспечить возможно более плотное прилегание кривой $M_{\alpha 1}(\omega)$ к оси абсцисс и с этой целью определить параметры системы так, чтобы $M_{\alpha 1}$ и некоторое количество его первых производных по ω обращались в 0 на частоте $\bar{\omega}^*$.

Для сложных систем с большим количеством различных параметров каждый из этих методов может быть применен при нескольких дискретных частотах $\omega = \bar{\omega}_i$ ($i = 1, 2, \dots$), выбранных в заданной полосе частот. Это позволит расширить полосу частот, в которой удаляются входные шумы потока. Возможны также и другие решения. Вычислительные трудности, возникающие в каждом случае, очевидны. Из вышеизложенного можно также заключить, что сложные системы обладают в этом отношении преимуществами, например, перед одиночными резонаторами. Это подтверждается численными расчетами [6].

Движение электронного потока, направляемого постоянным продольным магнитным полем, через систему щелей связанных резонаторов описывается в матричном виде неоднородным дифференциальным уравнением. Размерность матрицы уравнения определяется количеством связанных волн потока.

Система связанных резонаторов, пронизываемых шумящим электронным потоком, описывается матричными уравнениями и эквивалентными схемами, которые могут быть формально представлены в виде уравнений и схем одиночного резонатора. При этом различным параметрам схем соответствуют определенные матрицы, а переменным (токи, напряжения и т. п.)—векторы. Самосогласованное решение уравнений потока и системы позволяет получить матричное уравнение, которое характеризует распространение в потоке входных шумовых флюктуаций, а также шума и сигнала, наводимых системой. Описание процессов с помощью матричных соотношений удобно для численных расчетов на цифровых вычислительных машинах.

Автор выражает признательность В. М. Лопухину и В. И. Канавцу за ценные советы и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. C. Pease, J. Appl. Phys., 31, 1968 (1960).
2. M. C. Pease, J. Appl. Phys., 31, 2028 (1960).
3. Noise in electron devices, ed. by L. D. Smullin, H. A. Haus, J. Wiley, N.-Y.—London, 1959.

* Уравнению $dM_{\alpha 1}(\bar{\omega})/d\omega = 0$ в распределенных системах соответствует условие широкополосности сильной связи двух волн с постоянными распространения β_1 и β_2 : $d\beta_1/d\omega = d\beta_2/d\omega$ при $\omega = \bar{\omega}$.

- 4 W. H. Louisell, *Coupled modes and parametric electronics*, J. Wiley, N.-Y., 1960.
5 А. С. Рошаль, Радиотехника и электроника, 8, 522 (1963).
6 М. М. Ковалевский, А. С. Рошаль, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, 1195 (1963)

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
4 июля 1962 г.

NOISY ELECTRON BEAM IN THE SYSTEM OF EXCITED RESONATORS

A. S. Roshal'

The equations for electron beam passing through the system of coupled resonators with e. m. f. are presented in matrix form, the matrix of the input noise spectral densities being given.

**РАСШИРЕНИЕ ПОЛОСЫ УДАЛЕНИЯ ШУМА
В КВАДРУПОЛЬНОМ УСИЛИТЕЛЕ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ
НЕСВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ НА ВХОДЕ**

M. M. Ковалевский, A. C. Рошаль

Показана возможность расширения полосы ослабления шума быстрой циклотронной волны в квадрупольном усилителе с помощью системы несвязанных резонаторов с однородным поперечным полем (по сравнению с аналогичным одиночным резонатором).

ВВЕДЕНИЕ

Квадрупольные усилители быстрой циклотронной волны электронного потока обладают рядом полезных свойств по сравнению с другими усилителями сверхвысоких частот: низким коэффициентом шума, высокой стабильностью усиления, односторонностью, постоянным фазовым сдвигом вдоль усилителя, независимостью полосы пропускания от коэффициента усиления, способностью выдерживать большие перегрузки и т. п. [¹⁻³].

Установлено, что полоса усилителя в основном определяется устройствами связи [⁴⁻⁶], в частности, полоса частот по коэффициенту шума существенно зависит от полосы, в которой удаляются входные шумы потока на быстрой циклотронной волне во входном устройстве связи. Во всех существующих усилителях рассматриваемого типа входное и выходное устройства связи представляют собой одиночные резонаторы, в которых взаимодействие с потоком осуществляется в конденсаторном промежутке, имеющем однородное электрическое поле (резонаторы, предложенные Каччия [⁷]). По опубликованным данным полоса усиливаемых частот усилителя в настоящее время достигает нескольких процентов [³⁻⁶], причем полоса по коэффициенту шума меньше полосы усиления сигнала [⁶]. Поэтому желательно расширить полосу частот, в которой удаляются шумы потока на быстрой циклотронной волне перед входом в область усиления. Это необходимо также при работе в невырожденном режиме, когда разностная частота не равна частоте сигнала. В [⁸] указывается, что при этом для отбора шумов на разностной частоте можно использовать дополнительный резонатор. Как показано в настоящей работе, полосу удаления шума можно существенно расширить, помещая перед входным резонатором несколько пассивных резонаторов, которые служат для предварительного отбора шума.

Рассматриваемая схема усилителя изображена на рис. 1. После выхода из пушки поток электронов проходит через систему из *n* несвязанных резонаторов с однородным поперечным полем; области взаимодействия разделены участками дрейфа. Далее следуют квадрупольная секция и одиночный выходной резонатор (того же типа, что и входные резонаторы). Сигнал может быть введен в резонатор номера *n*. Однако в данной работе не рассматривается проблема согла-

сования источника сигнала с входным устройством связи и выходного устройства связи с нагрузкой; предполагается, что это может быть сделано с помощью соответствующих связей.

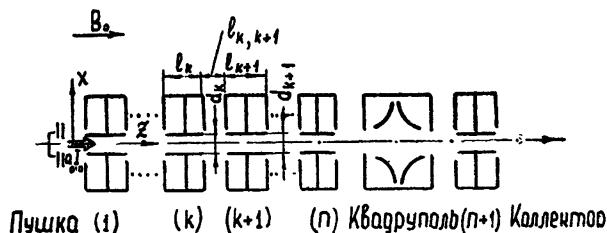


Рис. 1. Схема квадрупольного усилителя с системой несвязанных резонаторов на входе. На входе задана начальная шумовая модуляция в потоке a_0 ; I_0 —постоянный ток, B_0 —постоянное продольное магнитное поле.

Поскольку большое количество несвязанных резонаторов вряд ли осуществимо в практических конструкциях, численные расчеты проводились для $n=2$, 3 и сравнивались с результатами для одиночного резонатора ($n=1$). Найдено, что возможно расширение полосы в 1,5–2 раза по сравнению с входным устройством, состоящим из одного резонатора.

1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ШУМА В СИСТЕМЕ

С практической точки зрения необходимо уменьшить шум быстрой циклотронной волны электронного потока в относительно узкой полосе частот вблизи циклотронной частоты ω_c . В этой области частот можно рассматривать взаимодействие с резонаторами только быстрой циклотронной волны, пренебрегая значительно более слабым взаимодействием медленной циклотронной и синхронных волн. В этом приближении амплитуда быстрой циклотронной волны $a_{k \text{ вых}}$ на выходе из резонатора номера k линейно связана с амплитудой на входе $a_{k \text{ вх}}$ соотношением

$$a_{k \text{ вых}} = M_k a_{k \text{ вх}}, \quad (1)$$

где коэффициент M_k получен в результате самосогласованного решения уравнений потока и резонатора (см. Приложение). Для спектральных плотностей имеем:

$$\overline{|a_{k \text{ вых}}(\omega_s)|^2} = |M_k(\omega_s)|^2 \overline{|a_{k \text{ вх}}(\omega_s)|^2}, \quad (2)$$

где ω_s —частота в спектре, $\overline{|a_{k \text{ вых}}(\omega_s)|^2}$, $\overline{|a_{k \text{ вх}}(\omega_s)|^2}$ —спектральные плотности быстрой циклотронной волны на выходе и входе k -го резонатора соответственно (черта означает усреднение по ансамблю реализаций процесса в обычном смысле [9]).

Распространение шума вдоль системы резонаторов характеризуется коэффициентом

$$N_k(\omega_s) = \frac{\overline{|a_{k \text{ вых}}(\omega_s)|^2}}{\overline{|a_0(\omega_s)|^2}}, \quad (3)$$

где $\overline{|a_0(\omega_s)|^2}$ —спектральная плотность быстрой циклотронной волны на входе в систему, N_k представляет собой относительную мощность шума, оставшуюся в волне после k резонаторов. (В частности, на выходе из системы $N_k=N_n$.)

Нетрудно показать, что в пространстве дрейфа спектральная

плотность быстрой циклотронной волны не меняется. Вследствие этого из (2) и (3) имеем

$$N_k = \prod_{j=1}^k |M_j|^2. \quad (4)$$

Параметры входной системы, обеспечивающей полное удаление шума быстрой циклотронной волны на частоте $\omega = \omega_s / \omega_c = \bar{\omega}$, могут быть определены из уравнения

$$N_n(\bar{\omega}) = 0. \quad (5)$$

Как видно из (4), в пренебрежении медленной циклотронной и синхронными волнами оказывается возможным независимый подбор резонаторов: система, составленная из n резонаторов, каждый из которых полностью удаляет шум быстрой циклотронной волны на одной из частот ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$), будет иметь $N_n = 0$ на всей совокупности частот $\omega_1, \dots, \omega_n$. Если далее $M_1(\omega) \approx 0$ в $\Delta\omega_1, \dots, M_n(\omega) \approx 0$ в $\Delta\omega_n$, то во всей полосе $(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 + \dots + \Delta\omega_n)$ будет $N_n(\omega) \approx 0$.

Можно показать, что среднеквадратичное напряжение в зазоре номера k , наводимое шумовыми флюктуациями,

$$\overline{|v_{ck}|^2} = \frac{v_k}{g_k} \overline{|a_0(\omega)|^2}, \quad v_k(\omega) \approx \frac{1}{|Y_{pk}^0 + Y_{ek}^0|^2} |b_k|^2 N_{k-1}, \quad (6)$$

где N_{k-1} дается формулой (3), $g_k = \omega I_0 / 4 U_0 \delta_k^2$, Y_{pk}^0 — нормированная эквивалентная проводимость, Y_{ek}^0 — нормированная электронная проводимость k -го резонатора, δ_k — ширина зазора в циклотронных длинах волн, b_k — функция частоты (см. Приложение). В частности, в выходном резонаторе номера $(n+1)$

$$v_{n+1}(\omega) \approx \frac{1}{|Y_{pn+1}^0 + Y_{en+1}^0|^2} |b_{n+1}|^2 q N_n, \quad (7)$$

где q — коэффициент усиления в квадруполе.

Из (7) видно, что на всех частотах ω_i , на которых удалось обеспечить $N_n(\omega_i) = 0$, в выходном резонаторе шумовое напряжение не наводится (с точностью до медленной циклотронной и синхронных волн)*.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Расчет входной системы и исследование ее характеристик проводились на вычислительных машинах. При расчетах учитывалось также и влияние медленной циклотронной волны на величину N_n .

Для системы из трех резонаторов выбирались частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; параметры каждого резонатора номера k ($k=1, 2, 3$) определялись таким образом, чтобы данный резонатор, взятый в отдельности, обеспечивал полное удаление шума быстрой циклотронной волны на частоте ω_k . Для уменьшения влияния медленной циклотронной волны длина l_k резонатора номера k ($k=1, 2, 3$) выбиралась так, чтобы на частоте удаления шума ω_k на ней укладывалось целое число длин медленной циклотронной волны: $\bar{\psi}_k = \beta_c l_k / 2\pi = 2m_k / (\bar{\omega}_k + 1)$, где m_k — целое

* Параметры входной системы можно также определять из условий $v_{n+1}(\bar{\omega}) = 0$ вместо $N_n(\bar{\omega}_i) = 0$ ($i=1, 2, \dots$). Из (7) следует, что при этом будут получены те же результаты.

число, $\beta_c = \omega_c / u_0$. В этом случае на частоте ω_k медленная волна не наводит в среднем никакого поля в зазоре резонатора.

Результаты расчетов представлены на рис. 2—4. На рис. 2 приведены коэффициенты $N_1(\omega)$, $N_2(\omega)$, $N_3(\omega)$ для входного устройства, состоящего соответственно из одного, двух или трех одинаковых резонаторов. Каждый резонатор имеет длину $\psi_k = 10$, относительную собственную частоту $\omega_k = \omega_{0k} / \omega_c = 0,9998$, нагруженную добротность $Q_{hk} = 40$, нормированное характеристическое сопротивление $\rho_k = 2 \cdot 10^{-3}$ и обеспечивает полное удаление шума на частоте $\omega = 1$.

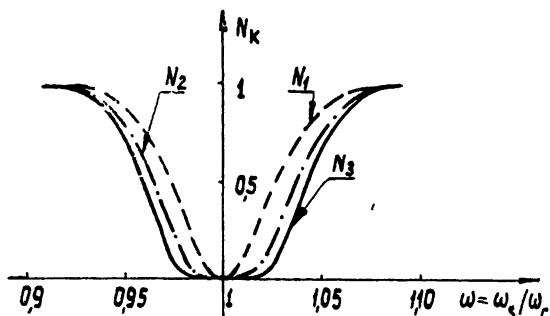


Рис. 2. Коэффициенты ослабления шума быстрой циклотронной волны после одного (N_1), двух (N_2) и трех (N_3) одинаковых резонаторов.

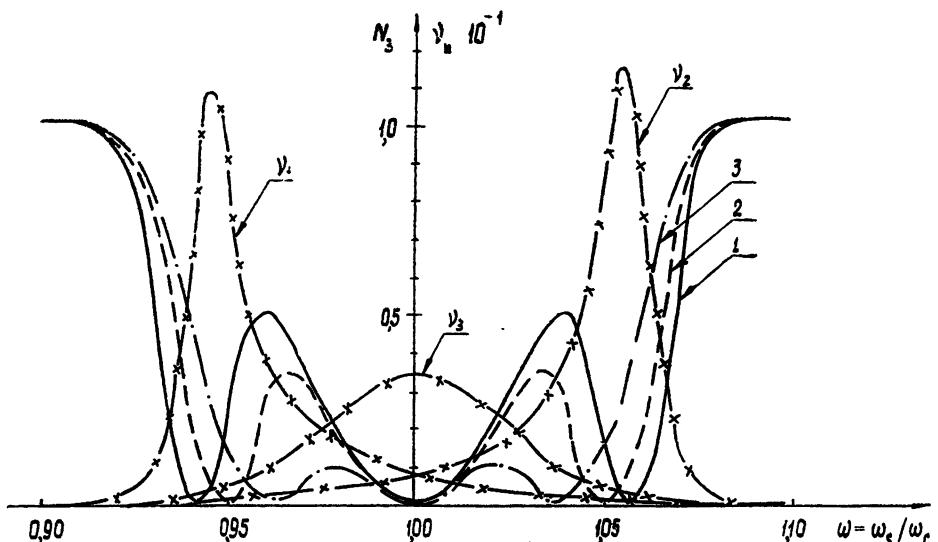


Рис. 3. Коэффициент ослабления шума быстрой циклотронной волны $N_3(\omega)$ в системах, состоящих из трех различных резонаторов ($\psi_k = 2m / (\omega_k + 1)$, $m = 10$, $\rho_k = 2 \cdot 10^{-3}$, $k = 1, 2, 3$). Параметры резонаторов системы 1:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 0,9537; & Q_{h1} &= 118; & \bar{\omega}_1 &= 0,946; \\ \omega_2 &= 1,049; & Q_{h2} &= 132; & \bar{\omega}_2 &= 1,057; \\ \omega_3 &= 0,9998, & Q_{h3} &= 40, & \bar{\omega}_3 &= 1.\end{aligned}$$

На графике приведены также средние квадратичные шумовые напряжения y_1 , y_2 , y_3 на зазорах резонаторов системы 1 (y_k имеет максимум на частоте ω_k , $k = 1, 2, 3$).

На рис. 3 представлены коэффициенты $N_3(\omega)$ для нескольких систем, состоящих из трех различных резонаторов. При этом третий резонатор сохраняется неизменным; его параметры рассчитаны для средней ча-

стоты $\omega_3 = 1$ (это удобно для ввода сигнала) и совпадают с параметрами резонаторов рис. 2. Перед ним помещаются еще два резонатора, которые служат для удаления шума быстрой волны на различных частотах ω_1, ω_2 . Положение частот видно на рисунке (при $\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3$, $N_3(\omega) = 0$). Наибольшую полосу (всюду имеется в виду полоса удаления шума по уровню 0,5 от входного значения) обеспечивает система, при использовании которой средние выбросы N_3 равны 0,5 (кривая 1). Из сравнения кривой 1 с графиком N_3 на рис. 2 видно, что система из резонаторов с различными собственными частотами (расчетные собственные частоты ω_k близки к частотам удаления шума ω_k) обеспечивает большее расширение полосы удаления шума: на рис. 2 полоса составляет 8,5%, тогда как для кривой 1 рис. 3 она составляет 12,5%. На этом же рисунке представлен типичный график среднеквадратичного шумового напряжения в зазорах v_1, v_2, v_3 (N_3 для этой системы изображается кривой 1). Как видно из рисунка, максимум v_k располагается вблизи частоты ω_k , на которой максимальная мощность шума переходит из потока в резонатор номера k и рассеивается на его активном сопротивлении*.

Рис. 4. Ослабление мощности шума быстрой циклотронной волны в системах, состоящих из трех различных резонаторов ($\psi_k = -2m(\omega_k + 1)$; $m = 15$; $\rho_k = -0,75 \cdot 10^{-3}$, $k = 1, 2, 3$). Параметры резонаторов системы 1:

$$\omega_1 = 0,9663, \quad Q_{n1} = 190; \quad \omega_1 = 0,940, \\ \omega_2 = 1,033; \quad Q_{n2} = 182; \quad \omega_2 = 1,040, \\ \omega_3 = 1; \quad Q_{n3} = 47, \quad \omega_3 = 1.$$

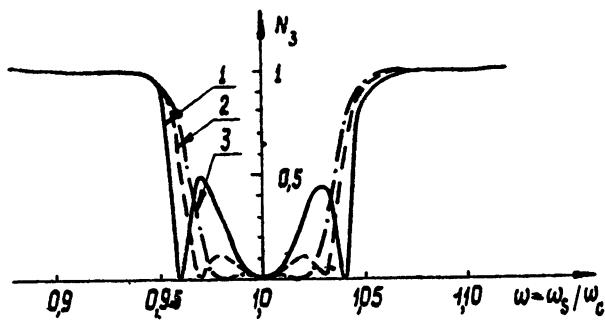


Рис. 4 аналогичен рис. 3, но относится к большим значениям пролетного угла ϕ_k . При увеличении ϕ_k можно значительно уменьшить характеристическое сопротивление ρ_k , однако полоса сужается; для кривой 1 рис. 4 она составит 9%.

Расчеты показали, что вклад медленной циклотронной волны в величину N_n не превышает нескольких сотых в рассматриваемой полосе частот, причем медленная волна проходит через систему практически неизменной.

Проведенное исследование входного устройства для квадрупольного усилителя показывает, что можно значительно расширить полосу удаления шума быстрой циклотронной волны электронного потока, помещая перед входным резонатором дополнительные пассивные резонаторы. Большой эффект будет получен при использовании различных резонаторов. Параметры каждого резонатора входной системы можно определить из условия полного удаления шума быстрой циклотронной волны на одной из частот, выбранной оптимальным обра-

* Напряжение v_3 в зазоре третьего резонатора меньше, чем в двух других, так как этот резонатор имеет более низкую добротность. Кроме того, как видно из рисунка, некоторая часть мощности шума быстрой циклотронной волны на частоте $\omega = 1$ уже отобрана в первом и втором резонаторах.

зом в заданной полосе. Система из трех одинаковых резонаторов расширяет полосу удаления шума приблизительно в 1,5 раза по сравнению с одиночным резонатором. Система из трех резонаторов с правильно выбранными различными собственными частотами и соответствующими остальными параметрами обеспечивает дальнейшее расширение полосы в 1,5 раза по сравнению с аналогичной системой одинаковых резонаторов. Полученные результаты могут быть полезны при расчете практических конструкций.

Авторы приносят благодарность В. М. Лопухину за повседневное руководство, а также выражают признательность участникам семинара кафедры радиотехники МГУ за детальное обсуждение работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Самосогласованное решение уравнений электронного потока и контура резонатора номера k приводит к следующему выражению для коэффициента M_k :

$$\begin{aligned} M_k &= e^{-j(\omega-1)\psi_k} + Y_{0k}^{-1} b_k^2, \quad Y_{0k} = Y_{pk}^0 + Y_{ek}^0, \\ b_k &= \frac{\exp[-j2\pi(\omega-1)\psi_k] - 1}{4\pi(\omega-1)}, \quad Y_{pk}^0 = \frac{1}{\rho_k Q_{hk}} + j \frac{1}{\rho_k} \left(\frac{\omega}{\omega_k} - \frac{\omega_k}{\omega} \right), \\ \rho_k &= \frac{\rho_{0k} G_0}{\delta_k^2}, \quad \omega_k = \frac{\omega_{0k}}{\omega_c}, \quad Y_{ek}^0 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1 - \exp[-j(\omega-1)\psi_k] - j(\omega-1)\psi_k}{(\omega-1)^2}, \\ \psi_k &= \beta_c l_k, \quad \delta_k = \beta_c d_k, \quad \bar{\psi}_k = \psi_k/2\pi, \quad \bar{\delta}_k = \delta_k/2\pi, \\ \beta_c &= \omega_c/u_0, \quad \omega_c = eB_0/m, \quad \omega = \omega_s/\omega_c, \\ G_0 &= I_0/U_0. \end{aligned}$$

Здесь ω_s —частота в спектре шума, ω_c —циклотронная частота, ω —относительная частота; ψ_k , δ_k —длина и расстояние между пластинами резонатора номера k в радианах циклотронной частоты; $\bar{\psi}_k$, $\bar{\delta}_k$ —длина и расстояние между пластинами в циклотронных длинах волн; Y_{pk}^0 —нормированная эквивалентная проводимость; Q_{hk} , ω_{0k} , ρ_{0k} —“холодная” нагруженная добротность, собственная частота и характеристическое сопротивление резонатора номера k ; G_0 —проводимость по постоянному току; I_0 , U_0 , u_0 —постоянные ток, напряжение и скорость луча.

Если резонатор должен обеспечить полное удаление шума быстрой циклотронной волны на частоте $\bar{\omega}_k$, целесообразно взять

$$\bar{\psi}_k = \frac{2m_k}{\omega_k + 1},$$

где m_k —целое число. При этом вклад медленной циклотронной волны в коэффициент ослабления шума N_n на частоте $\bar{\omega}_k$ уменьшается. Нормированное характеристическое сопротивление ρ_k может быть выбрано произвольно, а параметры Q_{hk} , ω_k определяются из уравнения $M_k(\bar{\omega}_k) = 0$:

$$Q_{hk} = \frac{1}{\rho_k \operatorname{Re} Y_{ek}^0(\bar{\omega}_k)}, \quad \Delta\omega_k \simeq -\frac{1}{2} \bar{\omega}_k \rho_k \operatorname{Im} Y_{ek}^0(\bar{\omega}_k),$$

где $\Delta\omega_k \equiv (\bar{\omega}_k - \omega_k)$ —расстройка резонатора относительно частоты $\bar{\omega}_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Electronics Control, **11**, 148 (1961).
2. Electronics, **33**, 92 (1960).
3. W. S. Van Slyck, Proc. Nat. Electron. Conf. Chicago, Ill. **17**, October, 1961.
4. R. Adler, G. Hrbek, G. Wade, Proc. IRE, **47**, 1713 (1959).
5. C. C. Johnson, J. Appl. Phys., **31**, 338 (1960).
6. A. Ashkin, Proc. IRE, **49**, 1016 (1961).
7. C. L. Cuccia, RCA Rev., **10**, 270 (1949).
8. R. Adler, G. Wade, Proc. IRE, **49**, 802 (1961).
9. Noise in electron devices, ed. L. D. Smullin, H. A. Haus, J. Wiley, New-York—London, 1959.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
25 марта 1963 г.

THE EXPANSION OF THE NOISE SUPPRESSION BAND IN A QUADRUPOLE AMPLIFIER BY MEANS OF THE SYSTEM OF NONCOUPLED INPUT RESONATORS

M. M. Kovalevski, A. S. Roshal

The possibility has been shown of the expansion of the fast cyclotron wave noise suppression band in a quadrupole amplifier by means of the system of noncoupled resonators with the uniform transverse field (in comparison with the analogous single resonator).

О ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА СИСТЕМУ ДВУХ КОНТУРОВ, СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТЬЮ

B. M. Богачев, Ю. А. Кравцов

Методом медленно меняющихся амплитуд рассматривается поведение двухконтурной системы с нелинейной емкостью связи под воздействием гармонической силы с частотой ω , близкой к одной из нормальных частот системы (Ω_1 или Ω_2). Показано, что при аппроксимации вольт-кулоновой характеристики емкости квадратичным трехчленом и при отношении нормальных частот $\Omega_1/\Omega_2 \approx 2$ возможны гистерезисные явления как при $\omega \approx \Omega_1$ (делитель частоты), так и при $\omega \approx \Omega_2$ (умножитель частоты). Учтено влияние сильной статической связи между контурами.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о поведении системы с двумя степенями свободы при наличии между ними нелинейной реактивной или параметрической связи не является новым. Еще в 1933 г. Горелик и Витт рассмотрели автономную консервативную систему с параметрической связью между двумя степенями свободы (маятник, подвешенный на пружине [1]). В 1935-36 гг. Чарахчьян исследовал параметрический делитель частоты в два раза [2], состоящий из двух параметрически связанных колебательных контуров накачки и сигнала, которые находятся под воздействием гармонической ЭДС накачки (параметрическая связь осуществлялась через нелинейную индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником). В работе [2] было установлено, что такая система может служить ограничителем амплитуды накачки.

В 1959 г. Зигман предложил параметрический ограничитель амплитуды диапазона СВЧ, использующий нелинейную емкость $p-n$ -перехода полупроводникового диода [3]. Однако теория ограничителя, опубликованная Зигманом совместно с Хо [4], не принимает во внимание неустойчивые ветви амплитудных кривых, частично исследованные еще в [2], и тем самым исключает возможность гистерезисных петель. Сказанное относится и к работам [5, 6]*.

В работах [2-6] рассматривается случай деления частоты, когда частота внешнего воздействия ω близка к бóльшей из двух собственных частот: $\omega \approx \Omega_1 \approx 2\Omega_2$. Возможен и другой случай $\omega \approx \Omega_2 \approx \Omega_1/2$, реализующийся в удвоителях частоты.

В работах [6, 8-10], посвященных умножителям частоты, как правило, интересуются энергетическими соотношениями и потому рассматривают только случай точной настройки: $\omega = \Omega_2 = \frac{1}{2} \Omega_1$; при этом

некоторые важные вопросы (вид резонансных кривых, устойчивость стационарного режима при расстройках и др.) остаются без внимания.

Во всех упомянутых работах статическая связь между контурами системы через нелинейный реактивный элемент предполагается слабой, что далеко не всегда выполняется на практике.

* Заметим, что гистерезисные петли обнаружены Григорьевым и Хохловым при исследовании реакции возбужденных колебаний на автогенератор накачки [7].

В данной статье исследуется двухконтурная система с сильной статической связью как при делении, так и при умножении частоты. Рассматриваются две дуальные схемы с параллельными и последовательными контурами (рис. 1). Предполагается, что нормальные ча-

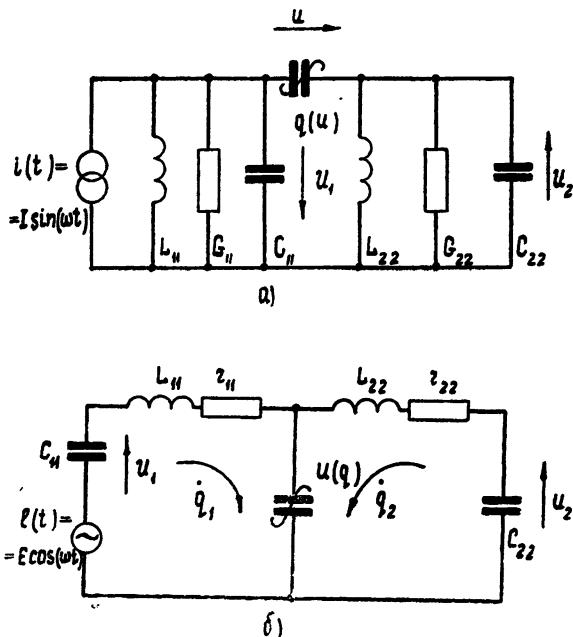


Рис. 1. Эквивалентные схемы параметрического делителя частоты: с параллельными (а) и с последовательными (б) контурами.

стоты системы Ω_1 и Ω_2 , относятся приблизительно как 2:1 и что в качестве нелинейного элемента используется полупроводниковый диод, имеющий нелинейную емкость C с вольт-кулоновой характеристикой $q(u)$. Основное внимание удалено исследованию условий, при которых в системе возможно существование неустойчивых ветвей амплитудных кривых и связанных с ними гистерезисных явлений.

1. ВЫВОД УКОРОЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим сначала случай деления частоты в схеме с параллельными контурами (рис. 1а). Пусть на систему действует гармонический ток $i(t) = I \sin(\omega t)$. Дифференциальные уравнения, описывающие систему, таковы:

$$\begin{aligned} C_{11} \frac{du_1}{dt} + G_{11} u_1 + \frac{1}{L_{11}} \int u_1 dt + \frac{dq(u)}{dt} &= i(t), \\ C_{22} \frac{du_2}{dt} + G_{22} u_2 + \frac{1}{L_{22}} \int u_2 dt + \frac{dq(u)}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u = u_1 + u_2$ — переменное напряжение на диоде.

Удобно ввести нормальные координаты v_1 и v_2 , связанные с напряжениями на контурах u_1 и u_2 линейным преобразованием*

* При такой замене $v_1 + v_2 = u_1 + u_2 = u$, что упрощает дальнейшие выкладки.

$$u_1 = \frac{v_1}{1+k_1} + \frac{k_2 v_2}{1+k_2}, \quad u_2 = \frac{k_1 v_1}{1+k_1} + \frac{v_2}{1+k_2}, \quad (2)$$

где k_1 и k_2 —коэффициенты распределения:

$$k_1 = \frac{n_2^2}{\omega_1^2} \frac{\Omega_1^2}{n_2^2 - \Omega_1^2}, \quad k_2 = \frac{n_1^2}{\omega_2^2} \frac{\Omega_2^2}{n_1^2 - \Omega_2^2}, \quad (3)$$

а Ω_1 и Ω_2 —нормальные частоты системы с учетом статической емкости диода $C_0 = [dq(u)/du]_{u=0}$:

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{2} \left[n_1^2 + n_2^2 \pm \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + n_1^4 n_2^4 / \omega_1^2 \omega_2^2} \right] / (n_1^2 n_2^2 + \omega_1^2 \omega_2^2). \quad (4)$$

В выражениях (3) и (4)

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{L_{11,22} C_0}, \quad n_{1,2}^2 = \frac{1}{L_{11,22}} \left(\frac{1}{C_{11,22}} + \frac{1}{C_0} \right).$$

После замены (2) и однократного дифференцирования система уравнений (1) приводится к виду

$$\ddot{\frac{v_1}{\Omega_1^2}} + v_1 = -\frac{\delta_1}{\Omega_1} \dot{v}_1 - \frac{\delta_{12}}{\Omega_2} \dot{v}_2 - \frac{1}{\Omega_1^2 C_1} \frac{d^2 \tilde{q}(u)}{dt^2} + e_1(t), \quad (5)$$

$$\ddot{\frac{v_2}{\Omega_2^2}} + v_2 = -\frac{\delta_{21}}{\Omega_1} \dot{v}_1 - \frac{\delta_2}{\Omega_2} \dot{v}_2 - \frac{1}{\Omega_2^2 C_2} \frac{d^2 \tilde{q}(u)}{dt^2} + e_2(t),$$

где

$$e_1(t) = \frac{1+k_1}{1-k_1 k_2} L_{11} \frac{di(t)}{dt}, \quad e_2(t) = -\frac{1+k_2}{1-k_1 k_2} k_1 L_{11} \frac{di(t)}{dt},$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1+k_1}{1-k_1 k_2} (L_{11} - k_2 L_{22}) \Omega_1^2, \quad \frac{1}{C_2} = \frac{1+k_2}{1-k_1 k_2} (L_{22} - k_1 L_{11}) \Omega_2^2,$$

$$\delta_1 = \frac{\Omega_1}{1-k_1 k_2} (L_{11} G_{11} - k_1 k_2 L_{22} G_{22}), \quad (6)$$

$$\delta_2 = \frac{\Omega_2}{1-k_1 k_2} (L_{22} G_{22} - k_1 k_2 L_{11} G_{11}),$$

$$\delta_{12} = \frac{k_2 \Omega_2}{1-k_1 k_2} \left(\frac{1+k_1}{1+k_2} \right) (L_{11} G_{11} - L_{22} G_{22}), \quad \delta_{21} = -\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{1+k_2}{1+k_1} \right)^2 \delta_{12};$$

$$\tilde{q}(u) = q(u) - q(0) - C_0 u = q(u) - q(0) - \left(\frac{dq(u)}{du} \right)_{u=0} u. \quad (7)$$

При $C_0 \ll C_{11}, C_{22}$, т. е. при слабой статической связи между контурами имеем обычные соотношения (см., например, [11]):

$$|k_{1,2}| \ll 1, \quad v_{1,2} \approx u_{1,2}, \quad C_{1,2} \approx C_{11,22} + C_0,$$

$$\Omega_{1,2}^2 \approx [L_{11,22} (C_{11,22} + C_0)]^{-1}, \quad e_1(t) \approx L_{11} \frac{di(t)}{dt}, \quad |e_2(t)| \ll |e_1(t)|,$$

$$\delta_{1,2} = \Omega_{1,2} L_{11,22} G_{11,22}, \quad \delta_{21} \sim \delta_{12} \ll \delta_1, \delta_2.$$

Считая затухания, расстройки и члены с $\tilde{q}(u)$ в уравнениях (5) достаточно малыми (порядка $\mu \ll 1$), будем искать решение в виде

$$v_1 = A_1 \cos \Phi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad (8)$$

$$v_2 = A_2 \cos \Phi_2 = A_2 \cos\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi_2\right),$$

где $A_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ — медленно меняющиеся амплитуды и фазы. Подставив выражения (8) в уравнения (5), отбросив малые члены порядка μ^2 , μ^3, \dots и выделив гармоники только с частотами ω и $\omega/2$, получим следующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Omega_1} \frac{dA_1}{dt} + \delta_1 A_1 + \frac{q_{s1}}{C_1} &= -\mathcal{E} \sin \varphi_1, \\ \left(\frac{2}{\Omega_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{2\Delta\omega_1}{\Omega_1} \right) A_1 + \frac{q_{c1}}{C_1} &= -\mathcal{E} \cos \varphi_1, \\ \frac{2}{\Omega_2} \frac{dA_2}{dt} + \delta_2 A_2 + \frac{q_{s2}}{C_2} &= 0, \\ \left(\frac{2}{\Omega_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{2\Delta\omega_2}{\Omega_2} \right) A_2 + \frac{q_{c2}}{C_2} &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathcal{E} = \frac{1+k_1}{1-k_1 k_2} L_{11} \Omega_1 I$ — приведенная амплитуда внешней силы, $\Delta\omega_1 = \omega - \Omega_1$, $\Delta\omega_2 = \omega/2 - \Omega_2$, а $q_{c1,2}$ и $q_{s1,2}$ — амплитуды гармоник заряда:

$$q_{c,s1,2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}(u) \frac{\cos}{\sin} \Phi_{1,2} d\Phi_{1,2}. \quad (10)$$

Уравнения вида (9) получаются и для схемы с последовательными контурами при действии на нее внешней силы $e(t) = E \cos(\omega t)$ (рис. 1б). Для этого, как и при исследовании параллельной схемы, необходимо ввести нормальные координаты p_1 и p_2 , связанные с зарядами q_1 и q_2 в первом и втором контурах формулами

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{p_1}{1+k_1} + \frac{k_2 p_2}{1+k_2}, \quad q_2 = \frac{k_1 p_1}{1+k_1} + \frac{p_2}{1+k_2}, \\ q_1 + q_2 &= p_1 + p_2 = q, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$k_1 = \frac{\Omega_1^2 - n_1^2}{\omega_1^2}, \quad k_2 = \frac{\Omega_2^2 - n_2^2}{\omega_2^2}, \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{L_{11,22} C_0}, \quad n_{1,2}^2 = \omega_{1,2}^2 + \frac{1}{L_{11,22} C_{11,22}},$$

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (n_1^2 + n_2^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (n_1^2 - n_2^2)^2 - \omega_1^2 \omega_2^2},$$

и отыскивать решение для зарядов p_1 и p_2 в виде (8):

$$p_1 = A_1 \cos \Phi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$p_2 = A_2 \cos \Phi_2 = A_2 \cos\left(\frac{\omega}{2}t + \varphi_2\right).$$

Тогда получаются следующие укороченные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Omega_1} \frac{dA_1}{dt} + \delta_1 A_1 + C_1 u_{s1} &= -Q \sin \varphi_1, \\ \left(\frac{2}{\Omega_1} \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{2\Delta\omega_1}{\Omega_1} \right) A_1 + C_1 u_{c1} &= -Q \cos \varphi_1, \\ \frac{2}{\Omega_2} \frac{dA_2}{dt} + \delta_2 A_2 + C_2 u_{s2} &= 0, \\ \left(\frac{2}{\Omega_2} \frac{d\varphi_2}{dt} + \frac{2\Delta\omega_2}{\Omega_2} \right) A_2 + C_2 u_{c2} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$C_1 = \frac{1+k_1}{1-k_1k_2} \left(\frac{1}{L_{11}} - \frac{k_2}{L_{22}} \right) \frac{1}{\Omega_1^2}, \quad C_2 = \frac{1+k_2}{1-k_1k_2} \left(\frac{1}{L_{22}} - \frac{k_1}{L_{11}} \right) \frac{1}{\Omega_2^2},$$

$$\delta_1 = \frac{1}{1-k_1k_2} \left(\frac{r_{11}}{L_{11}} - k_1k_2 \frac{r_{22}}{L_{22}} \right) \frac{1}{\Omega_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{1-k_1k_2} \left(\frac{r_{22}}{L_{22}} - k_1k_2 \frac{r_{11}}{L_{11}} \right) \frac{1}{\Omega_2},$$

$Q = (1+k_1) E / \Omega_1^2 L_{11} (1-k_1k_2)$ — приведенная амплитуда внешней силы,

$$u_{c,s1,2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(q) \cos \Phi_{1,2} d\Phi_{1,2}$$
 — амплитуды гармоник напряжения на

емкости, $\tilde{u}(q) = -u(q) + u(0) + q/C_0$ — нелинейная часть характеристики $u(q)$ обратной функции $q(u)$.

Заметим, что переход от выражений (9) к выражениям (12) можно совершить при помощи формальной замены $q_{c,s1,2}$ на $u_{c,s1,2}$, Σ на Q , а емкостей C_1 и C_2 на обратные величины $1/C_1$ и $1/C_2$. Такого рода взаимное соответствие между указанными уравнениями позволяет говорить о дуальности последовательной и параллельной схем в смысле укороченных уравнений.

Наиболее существенные особенности делителя частоты можно выявить уже при аппроксимации вольт-кулоновой характеристики квадратичным трехчленом

$$q(u) = q(0) + C_0(u) + \tilde{q}(u) = q(0) + C_0 u + \sigma u^2 \quad (u = v_1 + v_2)$$

в случае параллельной схемы или соответствующим трехчленом

$$u(q) = u(0) + q/C_0 - \tilde{u}(q) = u(0) + q/C_0 - sq^2 \quad (q = p_1 + p_2)$$

в случае последовательной схемы*. При такой аппроксимации характеристик получаем для гармоник $q_{c,s1,2}$ и $u_{c,s1,2}$ соответственно

$$q_{s1} = \frac{\sigma}{2} A_2^2 \sin \alpha, \quad q_{c1} = \frac{\sigma}{2} A_2^2 \cos \alpha,$$

$$q_{s2} = -\sigma A_1 A_2 \sin \alpha, \quad q_{c2} = \sigma A_1 A_2 \cos \alpha,$$

$$u_{s1} = \frac{s}{2} A_2^2 \sin \alpha, \quad u_{c1} = \frac{s}{2} A_2^2 \cos \alpha,$$

* Характеристикой $u(q) = u(0) + q/C_0 - sq^2$ обладает емкость диода с резким $p-n$ -переходом [6].

$$u_{s2} = -s A_1 A_2 \sin \alpha, \quad u_{c2} = s A_1 A_2 \cos \alpha \\ (\alpha = \varphi_1 - 2\varphi_2).$$

Подставив эти значения амплитуд гармоник в уравнения (9) или (12) и введя безразмерные амплитуды

1) в параллельной схеме

$$a_1 = \frac{\sigma A_1}{C_2 \delta_2}, \quad a_2 = \frac{\sigma A_2}{\sqrt{2 C_1 C_2 \delta_1 \delta_2}}, \quad m = \frac{\sigma \Sigma}{C_2 \delta_1 \delta_2},$$

2) в последовательной схеме

$$a_1 = \frac{C_2 s A_1}{\delta_2}, \quad a_2 = s A_2 \sqrt{\frac{C_1 C_2}{2 \delta_1 \delta_2}}, \quad m = \frac{s Q C_2}{\delta_1 \delta_2},$$

приходим к следующим укороченным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\tau} + a_1 + a_2^2 \sin \alpha &= -m \sin \varphi_1, \\ \left(\frac{d\varphi_1}{d\tau} + v \right) a_1 + a_2^2 \cos \alpha &= -m \cos \varphi_1, \\ \frac{2 \delta_1}{\delta_2} \frac{da_2}{d\tau} + a_2 - a_1 a_2 \sin \alpha &= 0, \\ \left(\frac{2 \delta_1}{\delta_2} \frac{d\varphi_2}{d\tau} + \xi \right) a_2 + a_1 a_2 \cos \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\xi = 2\Delta\omega_2/\Omega_2\delta_2$, $v = 2\Delta\omega_1/\Omega_1\delta_1$ — относительные расстройки и $\tau = \Omega_1\delta_1 t/2$ — безразмерное время.

Уравнения (13) описывают поведение схем, изображенных на рис. 1а и б как в стационарном, так и в динамическом режимах. В данной работе мы рассмотрим только установившийся режим.

2. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ДЕЛЕНИИ ЧАСТОТЫ

Уравнение стационарного режима получим из (13), положив $da_{1,2}/d\tau = d\varphi_{1,2}/d\tau = 0$:

$$a_1 + a_2^2 \sin \alpha = -m \sin \varphi_1, \quad (14)$$

$$v a_1 + a_2^2 \cos \alpha = -m \cos \varphi_1,$$

$$\begin{aligned} a_2 (1 - a_1 \sin \alpha) &= 0, \\ a_2 (\xi + a_1 \cos \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (14a)$$

Уравнениям (14a) всегда удовлетворяет нулевое решение $a_2^{(1)} \equiv 0$, которому соответствует амплитуда $a_1^{(1)} = m/\sqrt{1+v^2}$. Ненулевое решение $a_2 \neq 0$ существует при условии, что выражения в круглых скобках в (14a) равны нулю, откуда получается, что $a_1 = \sqrt{1+\xi^2}$. Этому значению a_1 соответствуют два значения амплитуды субгармонического колебания:

$$a_2^{(2,3)} = \sqrt{v\xi - 1 \pm \sqrt{m^2 - (\xi + v)^2}}. \quad (15)$$

Легко показать, что решение $a_2^{(3)}$, соответствующее знаку минус, является мнимым, если $m > m_{kp1} \equiv \sqrt{(1 + \xi^2)(1 + \nu^2)}$. Область значений $m > m_{kp1}$ будем называть областью A . При $m_{kp1} > m > m_{kp2} \equiv |\xi + \nu|$ (область B) оба решения $a_2^{(2)}$ и $a_2^{(3)}$ вещественны, а при $m < m_{kp2}$ и $m_{kp2} < m < m_{kp1}$ (область C) оба решения комплексны. Таким образом, в зависимости от значений параметров m , ξ , ν имеется либо одно решение $(a_2^{(3)} \equiv 0)$, область C), либо два решения ($a_2^{(1)} \equiv 0$, $a_2^{(2)} \neq 0$, область A), либо три решения ($a_2^{(1)} \equiv 0$, $a_2^{(2,3)} \neq 0$, область B).

Области A , B , C для различных значений затуханий δ_1 , δ_2 и расстроек между контурами $\nu_0 = 2(\Omega_1 - 2\Omega_2)/\delta_1\Omega_1$ показаны на рис. 2.

Так как расстройки ξ и ν

связаны линейно ($\nu =$

$= \frac{\delta_2}{\delta_1} \xi - \nu_0$), то зависимости критических амплитуд внешней силы m_{kp1} и m_{kp2} даны на рис. 2 в функции только одной расстройки ξ .

На рис. 3, 4 показаны зависимости амплитуд a_1 и a_2 от расстройки ξ при различных значениях амплитуды возбуждения m (параметры δ_2/δ_1 и ν_0 здесь те же, что на рис. 2). Рассмотрим подробнее рис. 3, соответствующий случаю $\delta_2/\delta_1 = 1$, $\nu_0 = 0$. При малых значениях $m < m_{kp1}$ субгармонические колебания не возбуждаются, так что $a_2(\xi) = a_2^{(1)}(\xi) \equiv 0$. При этом зависимость $a_1(\xi)$ представляет собой обычную резонансную кривую $a_1^{(1)} = m/\sqrt{1 + \nu^2}$. Если $m > m_{kp1}$ (область A на плоскости параметров m , ξ), то в системе возбуждаются субгармонические колебания с амплитудой $a_2^{(2)}$. В этом случае состояние $a_1^{(1)} =$

$= m/\sqrt{1 + \nu^2}$ становится неустойчивым (подробнее

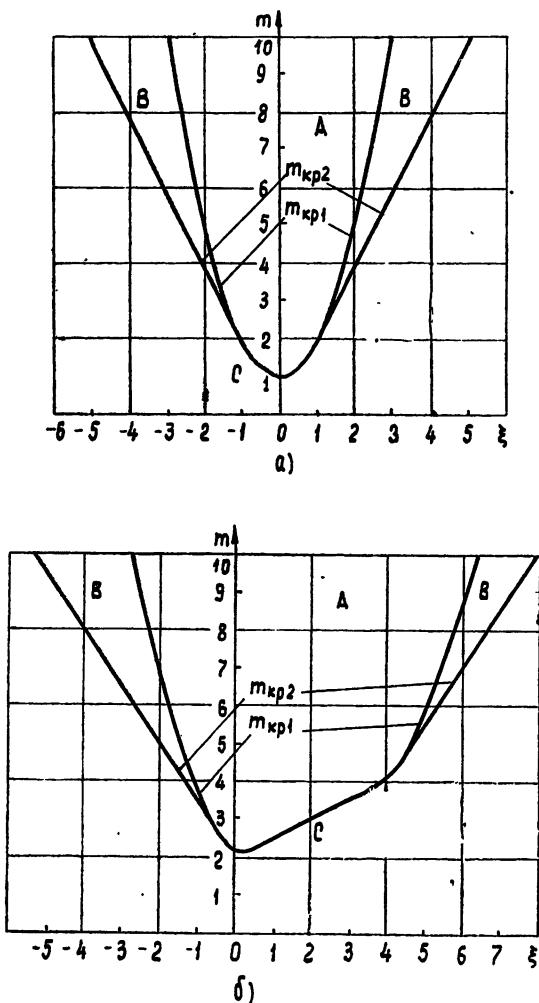


Рис. 2. Области неустойчивости двухконтурной системы:

а) $\delta_2/\delta_1 = 1$, $\nu_0 = 0$, б) $\delta_2/\delta_1 = 1/2$, $\nu_0 = 2$.

об устойчивости будет сказано ниже) и $a_1 = a_1^{(2)} = \sqrt{1 + \xi^2}$, т. е. мы получаем „перевернутую“ резонансную кривую (ср. [2, 4]). Если, наконец, $m_{kp2} < m < m_{kp1}$ (область B на плоскости m , ξ), то кроме ветви $a_2^{(2)}$ появляется еще одна—неустойчивая ветвь $a_2^{(3)}$; при этом, как вид-

но из рис. 3, возможны „скачки“ из одного состояния равновесия в другое как в цепи субгармоники, так и в цепи накачки.

Причина этого явления заключается в том, что при отличной от нуля расстройке в контуры накачки и субгармоники вносятся значительные реактивные сопротивления, зависящие от амплитуд колебаний a_1 и a_2 и фазы α .

На рис. 4 изображены кривые параметрического возбуждения для случая $\delta_2/\delta_1 = 1/2$, $\nu_0 = 2$. Кривые $a_{1,2}(\xi)$ в этом случае несимметричны, что особенно заметно при $m < 3$. На рис. 4 также имеются гистерезисные петли.

Наконец, на рис. 5 показаны зависимости a_1 и a_2 от амплитуды возбуждения m . С момента возникновения субгармонических колебаний амплитуда a_1 становится постоянной независимо от того, мягко или жестко возбуждаются субгармонические колебания, т. е. система является идеальным ограничителем.

Исследование устойчивости стационарного режима производилось обычным способом, при помощи критерия Раута—Гурвица. Оказалось, что состояние равновесия $a_2^{(1)} \equiv 0$, $a_1^{(1)} = m/\sqrt{1 + \nu^2}$ устойчиво в областях B и C (см. рис. 2) и неустойчиво в области A , а состояние $a_1^{(3)}, a_2^{(3)}$, существующее только в области B , всегда неустойчиво. Таким образом, области устойчивости (или неустойчивости) того или иного состояния равновесия ограничиваются уже известными нам кривыми $m_{kp1} = \sqrt{(1 + \xi^2)(1 + \nu^2)}$ и $m_{kp2} = |\xi + \nu|$, показанными на рис. 2. Рис. 2а соответствует случаю $\delta_2/\delta_1 = 1$ и $\nu_0 = 0$, когда частота Ω_1 точно в два раза больше частоты Ω_2 . Граница устойчивости $m_{kp1}(\xi)$ имеет один минимум и симметрична относительно $\xi = 0$. Если $\nu_0 \neq 0$, т. е. $\Omega_1 \neq 2\Omega_2$, то кривая $m_{kp1}(\xi)$ может иметь два минимума, например, при $\delta_1/\delta_2 = 1$ и $\nu_0 = 4$. При $\delta_2/\delta_1 \neq 1$ и $\nu_0 \neq 0$ симметрия границы нарушается, как это видно из рис. 2б, где $\delta_2/\delta_1 = 1/2$, $\nu_0 = 2$.

Отметим, что при $\nu_0 \neq 0$ кроме границ m_{kp1} и m_{kp2} , соответствующих областям мягкого и жесткого режимов, имеется еще одна граница устойчивости m_{kp3} , о существовании которой нам любезно сооб-

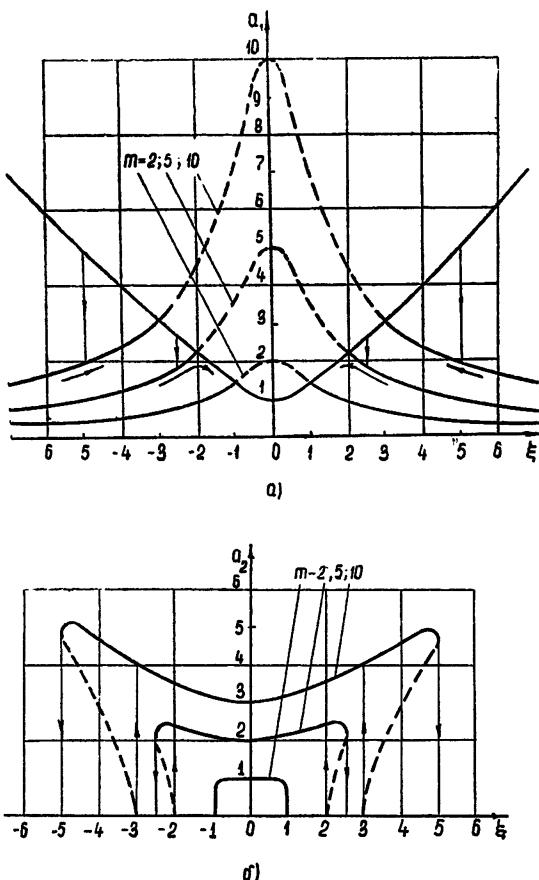


Рис. 3. Резонансные кривые делителя частоты с настроенными контурами ($\nu_0=0$) при равных затуханиях ($\delta_2/\delta_1 = 1$).

шил Ю. В. Григорьев. При пересечении этой границы устойчивости, которая нами не исследовалась, возникают автомодуляционные режимы.

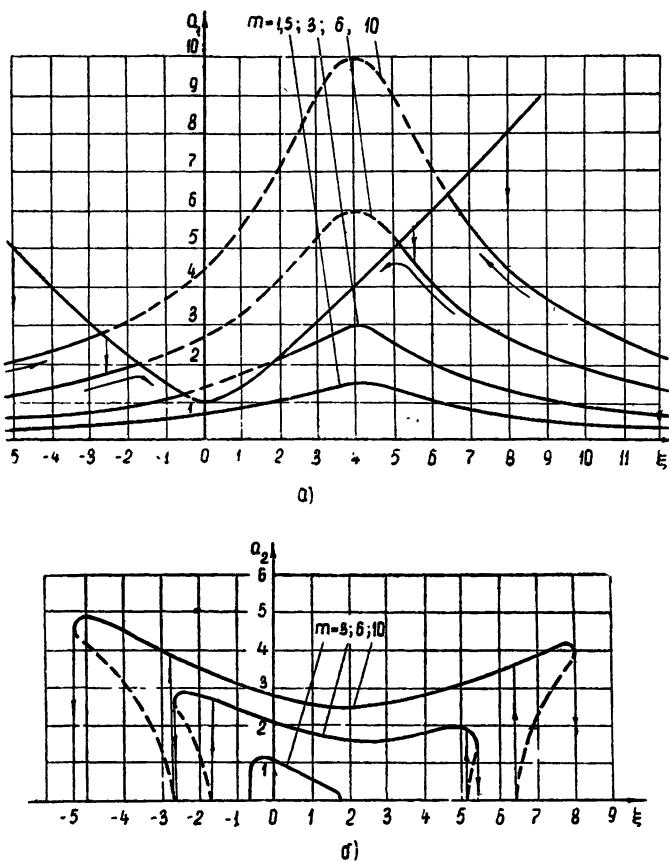


Рис. 4. Резонансные кривые делителя частоты с расстроеными контурами ($\nu_0 = 2$) при разных затуханиях ($\delta_2/\delta_1 = 1/2$).

3. СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ УМНОЖЕНИИ ЧАСТОТЫ

Рассмотрим теперь поведение двухконтурной системы при действии внешней силы $i(t) = I \sin(\omega t/2)$ или $e(t) = E \cos(\omega t/2)$ на второй контур, т. е. режим умножения частоты. Укороченные уравнения для этого случая имеют вид

$$\frac{da_1}{d\tau} + a_1 + a_2^2 \sin \alpha = 0, \quad (16)$$

$$\left(\frac{d\varphi_1}{d\tau} + \nu \right) a_1 + a_2^2 \cos \alpha = 0,$$

$$\frac{2\delta_1}{\delta_2} \frac{da_2}{d\tau} + a_2 - a_1 a_2 \sin \alpha = -m \sin \varphi_2, \quad (16a)$$

$$\left(\frac{2\delta_1}{\delta_2} \frac{d\varphi_2}{d\tau} + \xi \right) a_2 + a_1 a_2 \cos \alpha = -m \cos \varphi_2,$$

где в отличие от (13)

$$m = \sigma \varepsilon / \delta_2 \sqrt{2 C_1 C_2 \delta_1 \delta_2}, \quad \varepsilon = \frac{1 + k_2}{1 - k_1 k_2} L_{22} \Omega_2 /$$

для схемы с параллельными контурами и

$$m = (sQ/\delta_2) \sqrt{C_1 C_2 / 2\delta_1 \delta_2}, \quad Q = \frac{1 + k_2}{1 - k_1 k_2} \frac{E}{L_{22} \Omega_2^2}$$

для схемы с последовательными контурами.

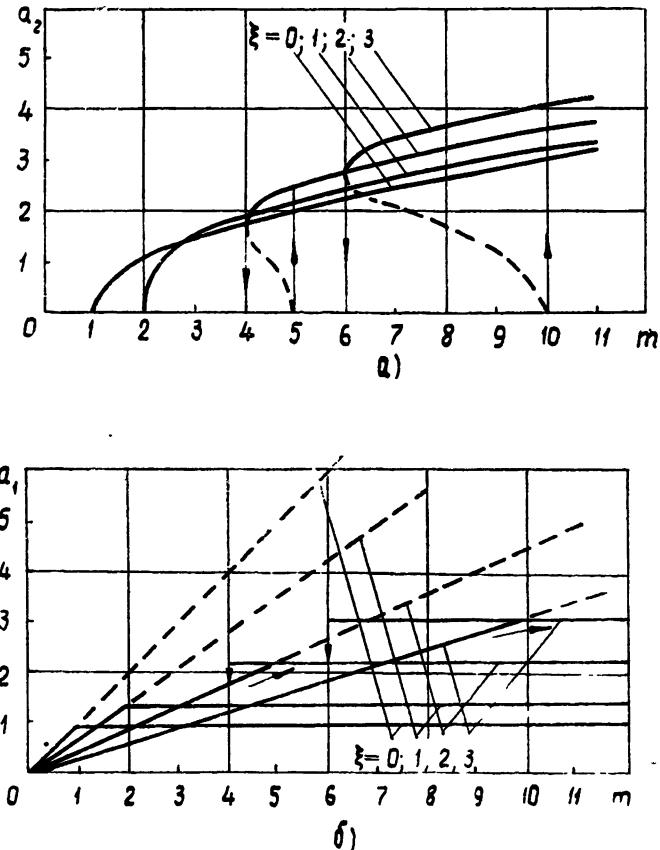


Рис. 5. Амплитудные характеристики делителя частоты ($\nu_0 = 0$, $\delta_2/\delta_1 = 1$).

В стационарном режиме ($da_{1,2}/d\tau = 0$, $d\varphi_{1,2}/d\tau = 0$) уравнения (16) дают связь между амплитудами $a_{1,2}$ и расстройкой ν :

$$a_1 = \frac{a_2^2}{\sqrt{1 + \nu^2}}, \quad (17)$$

а уравнения (16a) определяют связь этих амплитуд с расстройками ξ и ν и амплитудой внешнего возбуждения m :

$$a_1^3 \sqrt{1 + \nu^2} + 2 a_1^2 (1 - \xi \nu) + a_1 (1 + \xi^2) \sqrt{1 + \nu^2} - m^2 = 0, \quad (18)$$

$$[a_2^6 + 2a_2^4(1 - \xi\nu)]/(1 + \nu^2) + a_2^2(1 + \xi_2^2) - m^2 = 0. \quad (18a)$$

В отличие от случая деления частоты, уравнения (18), (18a) не содержат нулевого решения $a_1 \equiv 0$, т. е. эффект умножения наблюдается при сколь угодно малых амплитудах внешней силы и при любых расстройках. Отсутствие нулевого решения $a_1 \equiv 0$ не позволяет снизить порядок уравнений (18), как это было при делении частоты, и разрешить их относительно амплитуд a_1 и a_2 . Построение резонансных кривых умножителя $a_{1,2}(\xi)$ целесообразно производить с помощью его амплитудных характеристик $a_{1,2}(m)$, рассчитанных при различных значениях ξ и ν . Кривые $a_1(m)$ и $a_2(m)$ легко построить на основании выражений (18).

На рис. 6, 7 в качестве примера

даны амплитудные характеристики $a_1(m)$, $a_2(m)$ и резонансные кривые $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$ умножителя с настроенными контурами при равных затуханиях ($\nu_0 = 0$, $\delta_2/\delta_1 = 1$). Зависимости a_1 и a_2 , как и раньше, даны в функции одной расстройки ξ .
 (Напомним, что $\nu = \frac{\delta_2}{\delta_1} \xi - \nu_0$.)

Резонансные кривые умножителя $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$ (рис. 7) аналогичны резонансным кривым обычных связанных контуров при близких нормальных частотах. Так же, как в связанных контурах, изменением связи (величины m) или расстройки здесь можно получить различные типы резонансных кривых, например, одногорбые и двухгорбые, симметричные и несимметричные. Однако в силу нелинейности связи явления, происходящие при умножении частоты, сложнее. При больших величинах m здесь возможно появление неустойчивых участков, аналогичных гистерезисным петлям

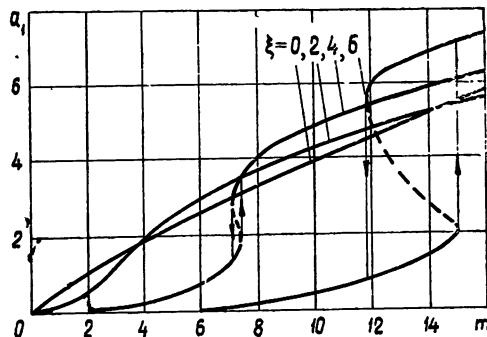
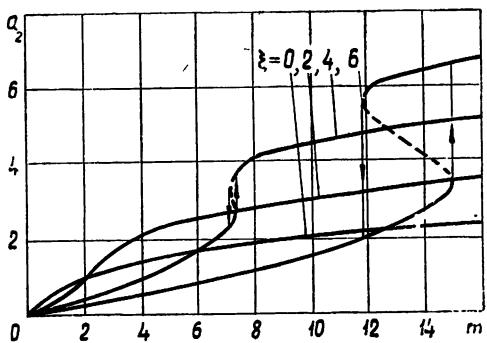


Рис. 6 Амплитудные характеристики удвоителя частоты ($\nu_0 = 0$, $\delta_2/\delta_1 = 1$).

при делении частоты (на рис. 6, 7 отмечены пунктиром). Штрих-пунктирными линиями на рис. 7 соединены особые точки семейства резонансных кривых — экстремумы амплитуд a_1 и a_2 ($da_{1,2}/d\xi = 0$) и точки с вертикальной касательной ($da_{1,2}/d\xi = \infty$). Заметим, что при больших величинах m резонансные кривые $a_1(\xi)$ имеют до пяти экстремальных значений.

Точки с вертикальными касательными, как известно, являются границами, разделяющими устойчивые и неустойчивые ветви резонансных кривых (см., например, [12]). Исследование устойчивости стационарного режима, проведенное при помощи критерия Раута — Гурвица, показало, что других областей неустойчивости в рассмотренном случае в умножителе нет.

4. СРАВНЕНИЕ С ДАННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТА И ВЫВОДЫ

Экспериментальное исследование резонансных кривых умножителя частоты проводилось с целью выявления областей неустойчивости, возникающих благодаря сильной нелинейной связи между контурами. Чтобы этот эффект был по возможности меньше искажен наклоном резонансных кривых за счет кубических и членов более высоких степеней разложения характеристики нелинейной емкости, исследовалась схема с последовательными контурами на диоде с резким $p-n$ -переходом. (Известно, что в этом случае в разложении характеристики $u(q)$ отсутствуют степени выше второй.)

Типичный вид семейства резонансных кривых удвоителя частоты показан на рис. 8а. Как видно из рисунка, неоднозначность амплитуды имеет место как при положительных, так и при отрицательных расстройках. Некоторый наклон кривых в сторону отрицательных расстроек объясняется влиянием паразитной емкости диода, благодаря которой в разложении $u(q)$ появляются члены, содержащие u^3, u^5, \dots

Опыты по исследованию параметрического деления частоты нами не проводились, и мы воспользуемся результатами, полученными Самойленко и Глотовым, которые исследовали делитель с последовательными контурами [6]. Кривые параметрического возбуждения, взятые из [6], показаны на рис. 8б. Как и в случае умножителя, при достаточно большой амплитуде внешней силы здесь появляются участки с жестким возбуждением. Некоторая несимметрия экспериментальных кривых объясняется, по-видимому, неравенством затуханий контуров δ_1 и δ_2 (ср. с рис. 4) и влиянием паразитной емкости диода.

Таким образом, результаты теоретического анализа качественно согласуются с опытом. Дальнейшее развитие теории возможно в нескольких направлениях. Во-первых, необходимо учсть члены более высокого порядка в разложении характеристики $q(u)$ (в дуальном случае $u(q)$). Во-вторых, следует проанализировать влияние нелинейных потерь в полупроводниковом диоде, который обычно используется в качестве нелинейной емкости. Наконец, представляет интерес исследовать случай сильной нелинейности, т. е. случай, когда амплитуды гармоник заряда $q_{c,s,1,2}$ (или напряжения $u_{c,s,1,2}$) не малы: при этом могут появиться „высшие типы неустойчивости“, обнаруженные в одноконтурных системах Хаяси [12].

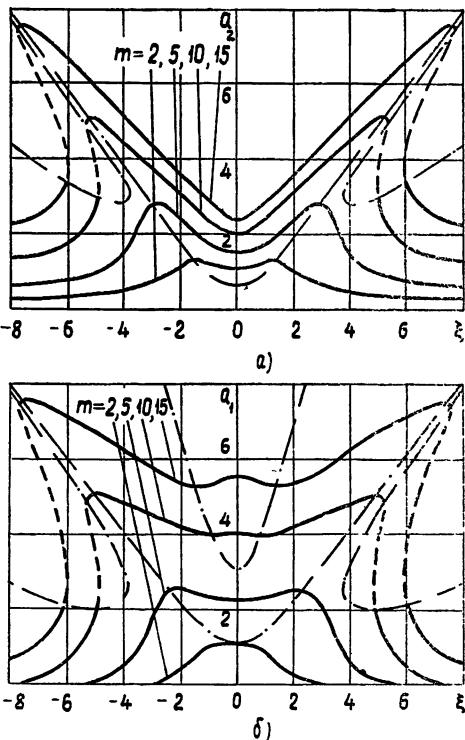


Рис. 7. Резонансные кривые удвоителя частоты с настроенными контурами ($v_0 = 0$) при равных затуханиях ($\delta_2/\delta_1 = 1$).

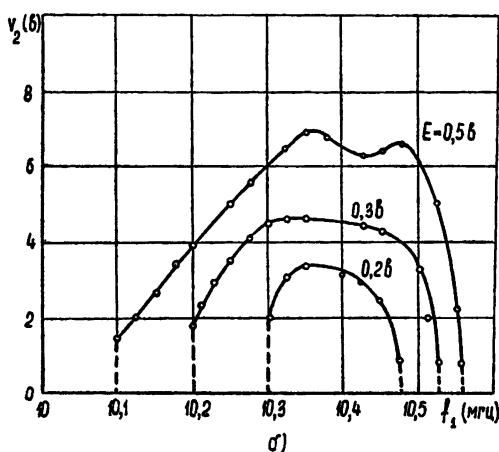
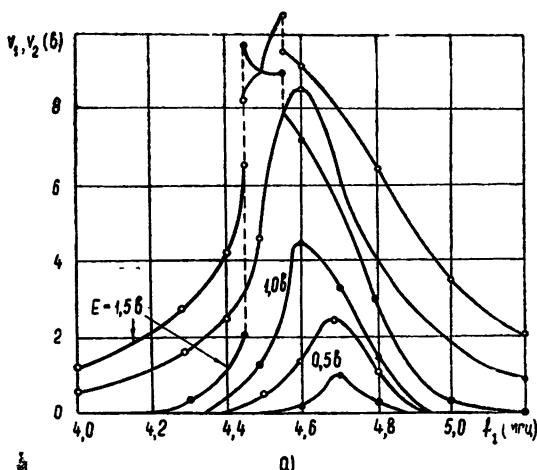


Рис. 8. Экспериментальные резонансные кривые:
а) удвоителя частоты, б) делителя частоты (●—напряже-
ние v_1 на емкости C_{11} , ○—напряжение v_2 на емкости C_{22} ,
см. рис. 16).

В заключение авторы выражают благодарность С. М. Рытову и М. В. Капранову за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. С. Горелик, А. А. Витт, ЖТФ, 3, 294 (1933).
- А. Н. Чарахчьян, ЖТФ, 6, 1230 (1936).
- А. Е. Siegman, Proc. IRE, 47, 447 (1959).
- L. T. Ho, A. E. Siegman, IRE Trans., MTT-9, 459 (1961).
- J. Hilibrand, W. R. Beatt, RCA Rev., 20, 229 (1959).
- В. И. Самойленко, И. Л. Глотов, Сб. Полупроводниковые приборы и их при-
менение, под ред. Я. А. Федотова, № 8, 250 (1962).
- Ю. В. Григорьев, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 1617 (1961).
- K. K. N. Chang, RCA Rev., 17, 455 (1956).
- D. B. Leeson, S. Weinreb, Proc. IRE, 47, 2076 (1959).
- K. M. Johnson, IRE Trans., MTT-8, 525 (1960).
- H. Heffner, G. Wade, J. Appl. Phys., 29, 1321 (1958).
- Т Хаяси, Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИЛ, М., 1957.

ON THE HARMONIC FORCE ACTION UPON THE TWO-CIRCUIT SYSTEM WITH A NONLINEAR CAPACITY

V. M. Bogatchev, Yu. A. Kravtsov

By the method of slowly varying amplitudes the reaction is considered of two-circuit system with a nonlinear coupling capacity under the influence of a harmonic force of frequency ω , which is near to one of the eigenfrequencies (Ω_1 or Ω_2).

It is shown that at the approximation of volt-coulomb capacity characteristic by the quadratic trinomial and at the ratio of eigen frequencies $\Omega_1, \Omega_2 \approx 2$ the hysteresis phenomena are possible both at $\omega \approx \Omega_1$ (frequency divider) and at $\omega \approx \Omega_2$ (frequency multiplier). The influence of strong static coupling between circuits has been taken into account.

К ТЕОРИИ *LR*-ГЕНЕРАТОРА НА ТРАНЗИСТОРЕ

Н. И. Ашбель и Л. В. Постников

Метод расчета автоколебательных схем на полупроводниковых триодах, описанный в работе [1], применен к исследованию динамики *LR*-генератора при статической модели транзистора. Выполнено разбиение фазовой плоскости на области линейности, найдено распределение в них состояний равновесия и выяснена их устойчивость. Получены точечные преобразования граничных прямых друг в друга. Показано существование, единственность и устойчивость предельного цикла. Произведен расчет периода автоколебаний.

В ряде работ, к числу которых относятся [2-7], исследуются физические процессы в различных схемах блокинг- и *LR*-генераторов на полупроводниковых триодах, проводится расчет длительности импульсов, частоты их следования, формы вершин, крутизны фронтов, амплитуды и выясняется зависимость этих величин от параметров схем и транзистора. Эти задачи являются по существу колебательными; однако их математическая постановка и решение значительно отличаются в строгости методам решения аналогичных задач, изложенных в [8]. В работе [1] на основе методов исследования кусочно-линейных систем с помощью фазовой плоскости и точечных преобразований [8] рассмотрена в общем виде полупроводниковая автоколебательная система с одной степенью свободы при кусочно-линейной идеализации статических характеристик транзистора. Полученные в [1] результаты использованы в настоящей работе для рассмотрения некоторых вопросов, связанных с динамикой *LR*-генератора на транзисторе.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ

Аппроксимируя, согласно [9], статические характеристики транзистора кусочно-линейными функциями:

$$\begin{aligned} I_k &= g_m v_k - \alpha g_n v_e, \\ I_e &= g_n v_e - \beta g_m v_k, \\ (-1)^m v_k &\leq 0, \\ (-1)^n v_e &\leq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и используя обозначения рис. 1, получим систему уравнений, описывающую схему *LR*-генератора:

$$\begin{aligned} (1-\beta) g_m v_k + (1-\alpha) g_n v_e &= x, \\ g_m v_k - \alpha g_n v_e &= y, \\ M\dot{x} + L_2\dot{y} + [1 + (R + \beta r) g_m] v_k - [1 + (r + \alpha R) g_n] v_e &= -E, \\ L_1\dot{x} + M\dot{y} - \beta r g_m v_k + (1 + r g_n) v_e &= E_0, \\ (-1)^m v_k &\leq 0, \quad (-1)^n v_e \leq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Фазовая плоскость системы будет однолистной, поскольку детерминант

$$A = (L_1 L_2 - M^2)(1 - \alpha\beta) g_m g_n \quad (3)$$

положителен для всех значений величин m, n , и разбивается на четыре области линейности, так как выражение

$$AB_{mn}^{12} = A_{mn}^{12} = -(L_1 L_2 - M^2) \quad (4)$$

отлично от нуля*.

Неравенства, определяющие области линейности, записываются так:

$$(-1)^m [B_m^1 x + B_m^2 y - B_m^3 E + B_m^4 E_0] \leq 0;$$

$$(-1)^n [B_n^1 x + B_n^2 y - B_n^3 E + B_n^4 E_0] \leq 0,$$

применительно к рассматриваемой схеме они примут вид

$$(-1)^m [\alpha x + (1 - \alpha) y] \leq 0;$$

$$(-1)^n [x - (1 - \beta) y] \leq 0.$$

Состояние равновесия единствено в силу сохранения знака выражения

$$A_{12}^{12} = 1 + Rg_m + rg_n + (1 - \alpha\beta)rRg_m g_n$$

при переходе через границы областей линейности, и находится в области G_{mn} , если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & (-1)^m \gamma_m = (-1)^m \times \\ & \times \frac{[1 + (r + \alpha R) g_n] E_0 - (1 + r g_n) E}{1 + R g_m + r g_n + (1 - \alpha\beta) r R g_m g_n} \leq 0, \\ & (-1)^n \gamma_n = (-1)^n \frac{[1 + (R + \beta r) g_m] E_0 - \beta r g_m E}{1 + R g_m + r g_n + (1 - \alpha\beta) r R g_m g_n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Неравенства (5) определяют собой разбиение плоскости E_0, E на области G_{mn}^0 , характеризующие положение состояния равновесия (рис. 2).

Из неравенств (5) и рис. 2 следует, что, если параметры E_0 и E принимают значения, находящиеся внутри области G_{01}^0 , то состояние равновесия находится в области G_{01} ; при этом для всех m и n , т. е. для всех областей G_{mn}

$$\gamma_m < 0, \quad \gamma_n > 0. \quad (6)$$

Характеристическое уравнение системы записывается в виде

$$p^2 - (B_1^1 + B_2^2)p + B_{12}^{12} = 0, \quad (7)$$

* Смысл величин A , имеющих различные индексы, пояснен в упомянутой работе [1]. Что касается величин B , то как в (4), так и в последующих соотношениях они связаны с величинами A формулами

$$B_v^\mu = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^4 b_{i\mu} A_v^i, \quad B_{v_1 v_2}^{\mu_1 \mu_2} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 b_{i\mu_1} b_{j\mu_2} A_{v_1 v_2}^{ij}$$

и т. д. Здесь $\mu, \mu_1, \mu_2 = 1, 2, 3, 4$; $v, v_1, v_2 = 1, 2, m, n$; b — постоянные коэффициенты и свободные члены правых частей системы (2). В целях экономии места в дальнейшем будут использованы обозначения и формулы работы [1].

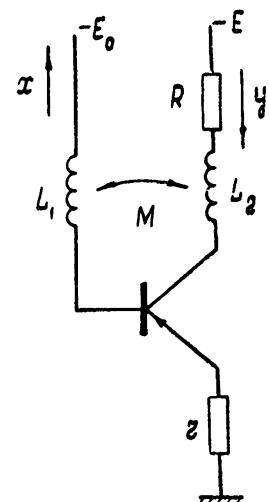


Рис. 1. Схема LR-генератора на транзисторе.

где

$$B_1^1 + B_2^2 = -\frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \left\{ L_2 R_n \left(1 + \frac{r}{R_n} \right) + L_1 [(1-\beta) R_n + (1-\alpha) R_m + r + R] + M [(2-\beta) R_n - \alpha R_m + 2r] \right\}; \quad (8)$$

$$B_{12}^{12} = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} [rR + RR_n + rR_m + (1-\alpha\beta) R_m R_n].$$

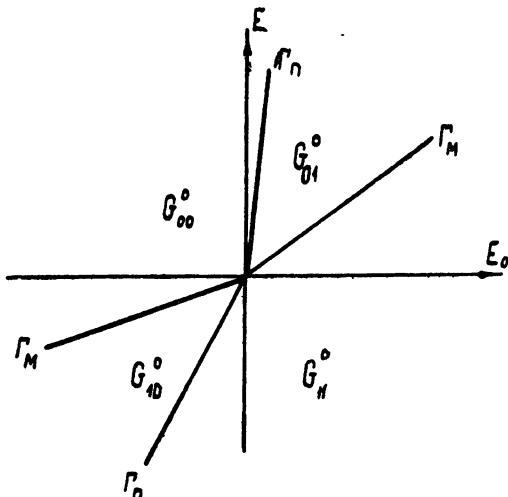


Рис. 2. Разбиение плоскости E_0, E на области G_{mn}^0 , определяющие положение равновесия.

Здесь

$$R_m = \frac{1}{g_m(1-\alpha\beta)}, \quad R_n = \frac{1}{g_n(1-\alpha\beta)}.$$

Нетрудно усмотреть, что состояние равновесия будет неустойчивым при $B_1^1 + B_2^2 > 0$, что выполняется только при наличии его в области G_{01} . Для исследуемой схемы в пренебрежении R_1^n по сравнению с R_0^m получим:

$$\frac{1}{h} (R_1^n + r) + h [(1-\alpha) R_0^m + r + R] + k (2r - \alpha R_0^m) < 0, \quad (9)$$

где $h = \sqrt{L_1/L_2}$ — коэффициент трансформации, $k = M/\sqrt{L_1/L_2}$ — коэффициент связи. Очевидно, что наивыгоднейшая с точки зрения условий возбуждения величина коэффициента трансформации определится выражением

$$h_0 = \sqrt{\frac{R_1^n + r}{(1-\alpha) R_0^m + r + R}}. \quad (9a)$$

При $h = h_0$ значения сопротивлений R и r , не нарушающие условия самовозбуждения, должны удовлетворять неравенству

$$\sqrt{(R_1^n + r)[(1-\alpha) R_0^m + r + R]} + kr < \frac{\alpha k}{2} R_0^m. \quad (10)$$

Область, выделяемая неравенством (10) на плоскости R, r для значений k , близких к единице, показана на рис. 3.

Таким образом, для возбуждения LR-генератора необходимо соблюдение двух условий: 1) наличие состояния равновесия в области G_{01} и 2) выполнение неравенства (9). Из уравнения (7) и соотношений (8)

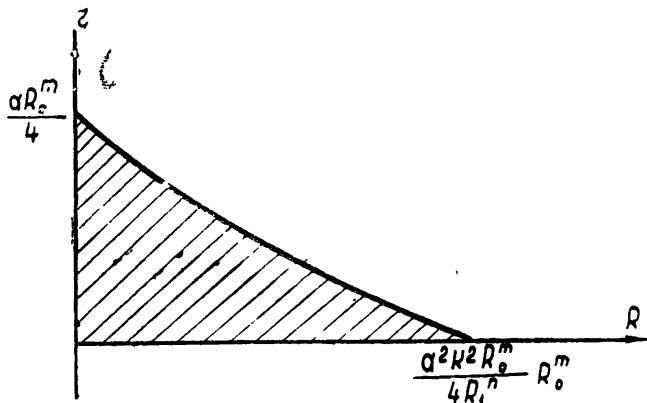


Рис. 3. Область возбуждения LR-генератора на плоскости параметров R, r для малой разности $1-k$.

следует, что при $k \rightarrow 1$ модуль одного из корней характеристического уравнения стремится к $+\infty$, в то время как другой корень остается конечным.

2. ТОЧЕЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАНИЦ ДРУГ В ДРУГА

Для того, чтобы написать точечные преобразования границ Γ_m и Γ_n друг в друга в области G_{01} и соседних с ней областях G_{00} и G_{11} , обозначим точки границ Γ_m и Γ_n , через которые фазовая траектория входит в область G_{01} , соответственно через s_{1m} и s_{1n} , а точки этих же границ, через которые фазовая траектория выходит из области G_{01} , — через s_{2m} и s_{2n} .

Следуя [1], имеем для области G_{01} :

$$s_{1m} = \frac{\omega A \sqrt{\eta_m} (-1)^m \left\langle d_n e^{-\sigma \tau} - d_n \left\{ \operatorname{ch} [\omega(\tau + \tau_{mn})] - \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} [\omega(\tau + \tau_{mn})] \right\} \right\rangle}{\operatorname{sh} [\omega(\tau + \tau_{mn})]} ;$$

$$s_{1n} = \frac{\omega A \sqrt{\eta_n} (-1)^n \left\langle d_m e^{\sigma \tau} - d_m \left\{ \operatorname{ch} [\omega(\tau + \tau_{mn})] + \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh} [\omega(\tau + \tau_{mn})] \right\} \right\rangle}{\operatorname{sh} [\omega(\tau + \tau_{mn})]} .$$

Преобразование в области G_{00} точек s_{2n} границы Γ_n в точки s_{1n} той же границы получается из формул (11), если положить в них $m=n$ и учесть, что $\tau_{mn}=0$:

$$s_{2n} = \frac{\omega A \gamma_n (-1)^n [e^{-\sigma\tau} - \operatorname{ch}(\omega\tau) + \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh}(\omega\tau)]}{\operatorname{sh}(\omega\tau)} ; \quad (12)$$

$$s_{1n} = \frac{\omega A \gamma_n (-1)^n [e^{\sigma\tau} - \operatorname{ch}(\omega\tau) - \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{sh}(\omega\tau)]}{\operatorname{sh}(\omega\tau)} .$$

Заметим, что m и n в конкретных выражениях для параметров преобразования нужно положить соответственно равными 0 и 1 в соотношениях (11) и $m=n=0$ в формулах (12).

Преобразование в области G_{01} точек s_{1n} границы Γ_n в точки s_{2m} границы Γ_m получается из уравнений (11) заменой в них индекса m индексом n , а индекса n индексом m и подстановкой в выражениях для параметров $m=0, n=1$. Преобразование точек s_{2m} границы Γ_m в точки s_{1m} той же границы для области G_{11} получается из формул (12), в которых индекс n надо заменить индексом m , а параметры брать при $m=n=1$.

Подставляя в общие соотношения для η_m и η_n (см. [1] и сноску на стр. 1217) значения A и B , соответствующие схеме LR -генератора, и проведя вычисления, получим:

$$\begin{aligned} \eta_m &= (A)^2 (B_m^1 B_{1m}^{12} + B_m^2 B_{2m}^{12}) = -(L_1 L_2 - M^2) g_n \{(1 + r g_n) \times \\ &\times [\alpha L_2 - (1 - \alpha) M] + [1 + (r + \alpha R) g_n] [\alpha M - (1 - \alpha) L_1]\}; \\ \eta_n &= (A)^2 (B_n^1 B_{1n}^{12} + B_n^2 B_{2n}^{12}) = -(L_1 L_2 - M^2) g_m \{\beta r g_m \times \\ &\times [L_2 + (1 - \beta) M] + [1 + (R + \beta r) g_m] [M + (1 - \beta) L_1]\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из соотношений (13) яствует, что если состояние равновесия, расположено в области G_{01} , неустойчиво, то η_m и η_n меньше нуля, т. е. одного знака. Из характеристического уравнения (7) и выражений (8) следует, что в области $G_{01} \sigma > 0$, а в областях G_{00} и $G_{11} \sigma < 0$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда ω является действительной величиной; поскольку преобразования (11) и (12) не зависят от знака ω , положим $\omega > 0$.

Учитывая, что при одинаковых знаках η_m и η_n τ_{mn} действительна и что

$$\tau_{mn} = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{1+w}{1-w},$$

причем в данном случае

$$w = \frac{-2(L_1 L_2 - M^2)(1 - \alpha\beta)\omega A}{g_n P + g_m Q} < 0,$$

где

$$P = \beta r g_m [\alpha L_2 - (1 - \alpha) M] + [1 + (R + \beta r) g_m] [\alpha M - (1 - \alpha) L_1];$$

$$Q = \{(1 + r g_n) [L_2 + (1 - \beta) M] + [1 + (r + \alpha R) g_n] [M + (1 - \beta) L_1]\},$$

замечаем, что $\tau_{mn} < 0$. На рис. 4 качественно построены графики функций соответствия преобразований (11) и (12) с учетом отмеченных особенностей параметров преобразования.

Величины отрезков осей \bar{s}_{1n} и \bar{s}_{1m} определяются выражениями

$$\bar{s}_{1n} = -A_{00}\gamma_n^0\lambda_{00}, \quad \bar{s}_{1m} = A_{11}\gamma_m^1\lambda_{11}, \quad (14)$$

где λ_{00} и λ_{11} —меньшие по абсолютной величине корни характеристического уравнения соответственно для областей G_{00} и G_{11} . Отрезок s_{2n} находится из уравнений (11), если в них положить $s_{1m} = 0$, а отрезок s_{2m} —из тех же уравнений при соответствующей замене индексов, если положить $s_{1n} = 0$. Асимптоты для функций соответствия $s_{2n} = f_1(s_{1m})$ и $s_{2m} = f_2(s_{1n})$ даются уравнениями

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sqrt{\frac{\gamma_n^0}{\gamma_m^1}} e^{-\sigma_{01}\tau_{mn}} s_{1m} + \\ &+ 2\sigma_{01}A_{01}\sqrt{\gamma_n^0(d_n^0 - d_m^1 e^{-\sigma_{01}\tau_{mn}})}; \\ s_{2m} &= \sqrt{\frac{\gamma_m^1}{\gamma_n^0}} e^{\sigma_{01}\tau_{mn}} s_{1n} - \\ &- 2\sigma_{01}A_{01}\sqrt{\gamma_m^1(d_m^1 - d_n^0 e^{\sigma_{01}\tau_{mn}})}. \end{aligned} \quad (15)$$

Область существования функций соответствия (11) определяется неравенствами (24) работы [1], которые после подстановки значения τ_{mn} и преобразований приводятся к виду

$$\frac{(-1)^m}{\gamma_n} [(A)^2(B_n^1 B_{1mn}^{123} + B_n^2 B_{2mn}^{123}) - (-1)^n AB_{mn}^{12}s_n] \geq 0; \quad (16)$$

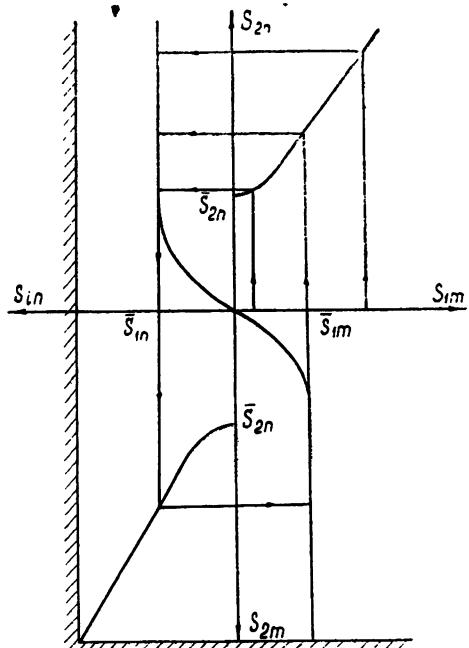
$$\frac{(-1)^n}{\gamma_m} [(A)^2(B_m^1 B_{1mn}^{123} + B_m^2 B_{2mn}^{123}) + (-1)^m AB_{mn}^{12}s_m] \leq 0.$$

Анализ неравенств (16) показал, что в рассматриваемом случае функции соответствия для преобразования точек границы Γ_m в точки границы Γ_n существуют для всех значений s_n и s_m . Поменяв в неравенствах (16) m и n местами, получим условия, определяющие область существования функций соответствия для преобразования точек границы Γ_n в точки границы Γ_m :

$$s_m \leq [ME + L_2 E_0 + (ME_0 + L_1 E)(1-\beta)] g_n^1;$$

$$s_n \leq [(ME + L_2 E_0)\alpha - (ME_0 + L_1 E)(1-\alpha)] g_m^0.$$

Границы области существования функций соответствия обозначены на рис. 4 штрихованными прямыми.



Гис. 4. Графики функций соответствия.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА. ПЕРИОД АВТОКОЛЕБАНИЙ

Для выяснения вопроса о существовании, единственности и устойчивости предельного цикла рассмотрим результирующую функцию последования

$$s_{1m}^* = F(s_{1m}), \quad (17)$$

которая, как нетрудно показать, обращаясь к [1], является непрерывной, монотонно нарастающей функцией ($\eta_n/\eta_m > 0$). Так как $F(0) > 0$ и функция (17) имеет горизонтальную асимптоту, то произойдет хотя бы одно пересечение ее графика с биссектрисой координатного угла, т. е. предельный цикл существует.

Производная от функции (17) в соответствии с формулой (26) работы [1] может быть представлена в виде

$$\frac{ds_{1m}^*}{ds_{1m}} = \frac{s_{1m}}{s_{1m}^*} e^{2\varphi(s_{1m})},$$

где

$$\varphi(s_{1m}) = \sigma_{01}(\tau_1 + \tau_3) + \sigma_{00}\tau_2 + \sigma_{11}\tau_4. \quad (18)$$

Из рассмотрения соотношений (25) работы [1] нетрудно заключить, что τ_1 и τ_3 являются монотонно убывающими, а τ_2 и τ_4 — монотонно нарастающими функциями аргумента s_{1m} . Так как $\sigma_{01} > 0$, а σ_{00} и $\sigma_{11} < 0$, то из (18) непосредственно следует, что $\varphi(s_{1m})$ является убывающей функцией. Поскольку функция (17) при нарастании s_{1m} пересекает первый раз биссектрису с коэффициентом наклона, меньшим единицы, т. е. при $\varphi(s_{1m}) < 0$, то другого пересечения быть не может, так как для него необходимо, чтобы $\varphi(s_{1m})$ было бы больше нуля. Следовательно, существующий предельный цикл единственен. Последнее же обстоятельство в совокупности с условием $F(0) > 0$ достаточно для утверждения, что этот цикл устойчив. Таким образом доказано существование, единственность и устойчивость предельного цикла.

На основе изложенного можно построить качественное разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории (рис. 5). Параметры предельного цикла (\tilde{s}_{1m} , \tilde{s}_{1n} , \tilde{s}_{2m} , \tilde{s}_{2n} , τ_1 , τ_2 , τ_3 и τ_4) определяются из систем (11) и (12) и уравнений, получаемых из них заменой индексов. Несмотря на то, что решение этих уравнений существует и единственno, найти его в конечном виде как функцию параметров системы не представляется возможным. Поэтому найдем решение приближенно для случая, представляющего практический интерес, а именно, когда коэффициент связи трансформатора $k=M/\sqrt{L_1 L_2}$ достаточно близок к единице.

Детерминант системы A при этом стремится к нулю, ω и $|\varphi|$ стремятся к бесконечности. Модуль одного из корней характеристического уравнения, как было отмечено ранее, стремится к бесконечности, другой же корень стремится к конечной величине. Из формул (14) усматривается, что отрезки осей \tilde{s}_{1n} и \tilde{s}_{1m} при $k \rightarrow 1$ стремятся к нулю, а коэффициенты наклона касательных в начале координат остаются равными единице. Можно показать, что отрезок, отсекаемый кривой $s_{2m}=f(s_{1n})$ на оси s_{2m} , при $\omega_{01} \rightarrow \infty$ стремится к конечной величине*

$$\tilde{s}_{2m} = -2\omega_{01} A_{01} \sqrt{\eta_n^1} (d_m^1 - d_n^0).$$

* Индексы 0,1 указывают, что значения берутся для области G_{01} .

Из уравнений (15) следует, что коэффициент наклона асимптоты при $\omega_{01} \rightarrow \infty$ остается конечным, а величины отрезков, отсекаемых на осях s_{2n} и s_{2m} асимптотами, стремятся к значениям отрезков, отсекаемых самими кривыми. Коэффициенты наклона касательных для функций $s_{1n} = f(s_{2n})$ и $s_{1m} = f(s_{2m})$ при $s_{2n} = s_{2m} = 0$ для рассматриваемого случая равны единице.

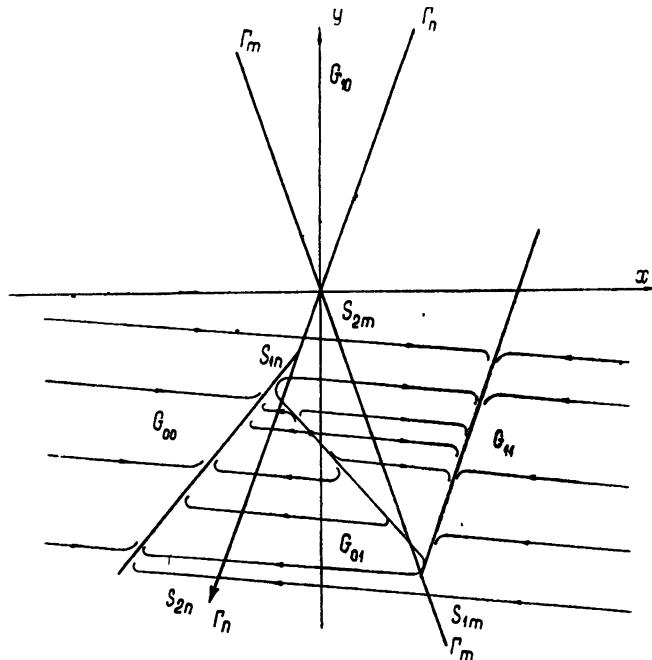


Рис. 5. Качественное разбиение фазовой плоскости x, y на фазовые траектории.

Исходя из изложенного, можно найти первые приближения для параметров предельного цикла, которые будут тем ближе к точным значениям, чем меньше разность $1 - k$. В качестве нулевого приближения можно принять

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{1m} &= \bar{s}_{1m} = \lambda_{11} A_{11} \gamma_m^1, \\ \tilde{s}_{1n} &= \bar{s}_{1n} = -\lambda_{00} A_{00} \gamma_n^0.\end{aligned}\quad (19)$$

Подставляя первую строку (19) в верхнее уравнение системы (11), а вторую строку в то же уравнение, предварительно заменив в нем индексы m на n и n на m , придем к выражениям, определяющим времена пробегов в области G_{01} :

$$1 + \frac{\lambda_{01}}{2\omega_{01}} - \frac{\lambda_{11} A_{11}}{2\omega_{01} A_{01}} - \frac{d_n^0}{d_m^1} e^{\omega_{01} \tau_{mn} - \lambda_{01} \tau_1} = -\frac{\lambda_{11} A_{11}}{2\omega_{01} A_{01}} e^{2\omega_{01}(\tau_1 + \tau_{mn})}; \quad (20)$$

$$1 + \frac{\lambda_{01}}{2\omega_{01}} - \frac{\lambda_{00} A_{00}}{2\omega_{01} A_{01}} - \frac{d_m^1}{d_n^0} e^{-\omega_{01} \tau_{mn} - \lambda_{01} \tau_3} = -\frac{\lambda_{00} A_{00}}{2\omega_{01} A_{01}} e^{2\omega_{01}(\tau_3 - \tau_{mn})}.$$

Поскольку левые части соотношений (20) остаются конечными при $\omega_{01} \rightarrow \infty$, необходимо, чтобы τ_1 и τ_3 стремились к нулю. Для достаточно больших ω_{01}

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{1}{2\omega_{01}} \ln \left[-\frac{2\omega_{01}A_{01}}{\lambda_{11}A_{11}} \left(1 - \frac{d_n^0}{d_m^1} \right) \right]; \\ \tau_3 &= \frac{1}{2\omega_{01}} \ln \left[-\frac{2\omega_{01}A_{01}}{\lambda_{00}A_{00}} \left(1 - \frac{d_m^1}{d_n^0} \right) \right].\end{aligned}\quad (21)$$

За пульевое приближение для \tilde{s}_{2n} и \tilde{s}_{2m} можно принять

$$\begin{aligned}\tilde{s}_{2n} &= \bar{s}_{2n} = 2\omega_{01}A_{01} \sqrt{\gamma_n^0} (d_n^0 - d_m^1); \\ \tilde{s}_{2m} &= \bar{s}_{2m} = -2\omega_{01}A_{01} \sqrt{\gamma_m^1} (d_m^1 - d_n^0).\end{aligned}\quad (22)$$

Проделав аналогичным способом со строками соотношений (22) операции подстановки в верхнее уравнение системы (12) и замены индексов n на m , после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}e^{-\lambda_{00}\tau_2} &= 1 + \left[\frac{\omega_{01}A_{01}}{\omega_{00}A_{00}} - \frac{\lambda_{00}}{2\omega_{00}} - \frac{\omega_{01}A_{01}}{\omega_{00}A_{00}} \frac{d_m^1}{d_n^0} e^{-\omega_{01}\tau_{mn}} \right] (1 - e^{-2\omega_{01}\tau_2}); \\ e^{-\lambda_{11}\tau_4} &= 1 + \left[\frac{\omega_{01}A_{01}}{\omega_{11}A_{11}} - \frac{\lambda_{11}}{2\omega_{11}} - \frac{\omega_{01}A_{01}}{\omega_{11}A_{11}} \frac{d_n^0}{d_m^1} e^{\omega_{01}\tau_{mn}} \right] (1 - e^{2\omega_{01}\tau_4}).\end{aligned}\quad (23)$$

Переходя в (23) к пределу при ω_{11} и $\omega_{00} \rightarrow \infty$ и учитывая, что τ_2 и τ_4 конечные величины, получим:

$$\begin{aligned}\tau_2 &= -\frac{1}{\lambda_{00}} \ln \left[1 + \frac{\omega_{01}A_{01}}{\omega_{00}A_{00}} \left(1 - \frac{d_m^1}{d_n^0} \right) \right]; \\ \tau_4 &= -\frac{1}{\lambda_{11}} \ln \left[1 + \frac{\omega_{01}A_{01}}{\omega_{11}A_{11}} \left(1 - \frac{d_n^0}{d_m^1} \right) \right].\end{aligned}\quad (24)$$

Период автоколебаний равен сумме времен пробега, даваемых (21) и (24), и может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned}T &= -\frac{1}{\lambda_{11}} \ln (1 + z_1) - \frac{1}{\lambda_{00}} \ln (1 + z_0) + \\ &+ \frac{1}{2\omega_{01}} \ln \left(-\frac{2\omega_{11}}{\lambda_{11}} z_1 \right) + \frac{1}{2\omega_{01}} \ln \left(-\frac{2\omega_{00}}{\lambda_{00}} z_0 \right),\end{aligned}\quad (25)$$

где

$$z_1 = \frac{\omega_{01}A_{01}}{\omega_{11}A_{11}} \left(1 - \frac{d_n^0}{d_m^1} \right), \quad z_0 = \frac{\omega_{01}A_{01}}{\omega_{00}A_{00}} \left(1 - \frac{d_m^1}{d_n^0} \right).$$

Первые два члена формулы (25) являются суммой времен медленных движений в областях G_{11} и G_{00} . Вторые два члена представляют времена пробега по участку быстрого движения, т. е. по фазовым траекториям области G_{01} . Как показано в работах [10, 11], это время состоит из двух

промежутков, пропорциональных соответственно $\varepsilon^{2/3} + \varepsilon \ln \varepsilon$ (время движения вблизи точки срыва) и ε (время, затрачиваемое на прохождение участка быстрого движения). Заметим, что поскольку в случае кусочно-линейной аппроксимации член $\varepsilon^{2/3}$ отсутствует, а ε по сравнению с $\varepsilon \ln \varepsilon$ является величиной более высокого порядка малости, в формуле (25) фактически учитывается только время движения системы вблизи точки срыва и пренебрегается временем пробега системой участка быстрых движений. В рассматриваемой задаче ε равно отношению корней характеристического уравнения.

Для оценки величины периода колебаний рассмотрим частный случай, когда на величины сопротивлений наложены следующие условия:

$$r, R_1^n, R_1^m \ll R, R_0^n, R_0^m,$$

h близко к оптимальному значению h_0 , а величина напряжения E_0 равна среднему геометрическому из величин напряжений, соответствующих границам Γ_m и Γ_n в области G_{01}^0 , при одном и том же напряжении E (см. рис. 2):

$$E_0 = \sqrt{\frac{\beta r g_m (1+r g_n)}{\alpha R g_n (1+R g_m)}} E.$$

При этих предположениях время пробега в области G_{11} , которое с точностью до поправки, обусловленной потоком рассеяния, совпадает с длительностью импульса напряжения на коллекторе относительно эмиттера, будет равно

$$\begin{aligned} \tau_4 &= \left(\frac{L_2}{R} + \frac{L_1}{r + R_1^n} \right) \ln \left[1 + \frac{\alpha h R_1^m}{r + R_1^n + h^2 R} \left(1 + \sqrt{\frac{\beta r g_1^n}{1 + r g_1^n}} \right) \right] \approx \\ &\approx \left(\frac{L_2}{R} + \frac{L_1}{r + R_1^n} \right) \frac{\alpha h R_1^m}{r + R_1^n + h^2 R}; \end{aligned}$$

время пробега в области G_{00}

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{L_2}{R + (1 - \alpha \beta) R_0^m} \ln \left[1 + \frac{\alpha h R_0^m}{R_1^n} \left(1 + \sqrt{\frac{1 + r g_1^n}{\beta r g_1^n}} \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{L_2}{R + (1 - \alpha \beta) R_0^m} \ln \left(\sqrt{\frac{1 + r g_1^n}{\beta r g_1^n}} \frac{\alpha h R_0^m}{R_1^n} \right). \end{aligned}$$

Из этих выражений видно, что постоянные времени в областях G_{00} и G_{11} имеют один и тот же порядок; однако время τ_4 , пропорциональное h , при значении последнего, определяемом формулой (9а), может быть сделано значительно меньшим τ_2 за счет увеличения величины R до предельного значения, даваемого неравенством (10). Из выражений (24) следует, что приближение состояния равновесия к границе Γ_n (что достигается уменьшением напряжения E_0) также приводит к уменьшению скважности; однако это происходит благодаря увеличению периода, а не за счет уменьшения длительности импульса. Приближение состояния равновесия к одной из границ уменьшает надежность работы генератора.

В заключение отметим, что поскольку взята сравнительно грубая

модель транзистора, в данной работе не проводилось количественное сравнение экспериментальных и теоретических результатов; качественное же сопоставление поведения реального *LR*-генератора подтверждает изложенную теорию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ашбель и Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 319 (1961).
2. К. Я. Сенаторов и В. А. Гужов, Радиотехника и электроника, 2, 1119 (1957).
3. В. Н. Яковлев, Радиотехника и электроника, 3, 1167 (1958).
4. И. А. Шестаков, Сб. статей под редакцией А. Я. Федотова, изд. Сов. радио, М., 1960.
5. Е. Е. Довжиков, Радиотехника, 15, 40 (1960).
6. В. А. Кузьмин, Радиотехника и электроника, 5, 497 (1960).
7. В. Н. Яковлев, Сб. статей под ред. А. Я. Федотова, изд. Сов. радио, М., 1960.
8. А. А. Андронов, А. А. Витт и С Э Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
9. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 767 (1959).
10. Л. С. Понtryагин, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 605 (1957).
11. Е. Ф. Мищенко, Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 627 (1957).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 февраля 1963 г.

TO THE THEORY OF LR TRANSISTOR GENERATOR

N. I. Ashbel' and L. V. Postnikov

The calculation method of autooscillating transistorized circuits described in [1] has been applied to the dynamic investigation of LR oscillator using the static model of a transistor. The phase plane portion into regions of linearity has been made, the distribution of equilibrium states in each region has been found out and the stability of these states has been examined. The pointwise transformations of boundary lines in each other have been shown. The autooscillating period calculation has been made.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ С МОДУЛЯЦИЕЙ

C. B. Шильман

Определены оптимальные характеристики системы с модуляцией для случая бесконечного интервала наблюдения и стационарного входного сигнала. Показано, что задача может быть сведена к решению интегральных уравнений типа Винера-Хопфа; даны методы приближенного решения этих уравнений.

Вопросы теории систем регулирования с модуляцией рассматривались в работе [1]. В данной статье решается задача определения оптимальных характеристик систем того же класса.

Блок-схема рассматриваемой линейной системы с модуляцией представлена на рис. 1 (M —модулятор, осуществляющий умножение входной величины на $h_1(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$, Φ —линейный корректирующий фильтр, D —демодулятор, производящий умножение входного сигнала на периодическую функцию $h_2(t)$ с круговой частотой

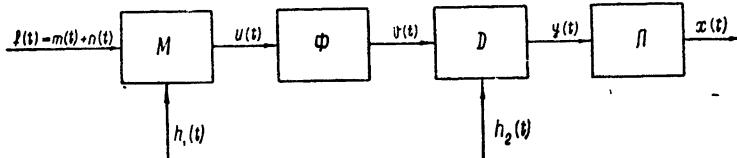


Рис. 1.

той ω_0 , \mathcal{L} —линейное звено). Полагаем, что $h_2(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле и может быть разложена в ряд Фурье:

$$h_2(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \cos[(2n+1)\omega_0 t + \psi_n],$$

$$\frac{c_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}^2 < \infty. \quad (1)$$

Эта система описывается линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

Пусть на вход модулятора поступают полезный сигнал $m(t)$ и шум $n(t)$, так что $f(t) = m(t) + n(t)$. Считаем $m(t)$ и $n(t)$ реализацией стационарных процессов с математическими ожиданиями, равными нулю. Будем предполагать, что $m(t)$ и $n(t)$ не связаны с $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Задача заключается в том, чтобы найти передаточные функции фильтра Φ и звена \mathcal{L} , обеспечивающие с наименьшей среднеквадратичной ошибкой воспроизведение на выходе системы сигнала $z(t)$, связанного с полезным сигналом, заданным линейным преобразованием $z(t) = H(p)m(t)$, $p = \frac{d}{dt}$.

В предположении о бесконечности интервала наблюдения ниже дается решение для случаев, когда передаточная функция одного из звеньев задана, а другая подлежит определению. Рассматривается также и система с обратной связью при условии подавления несущей (точнее, при подавлении образующихся на выходе демодулятора модулированных гармоник с частотами, равными или кратными частоте несущей).

Найдем корреляционную функцию процесса на выходе демодулятора и взаимную корреляционную функцию процессов с реализациями $z(t)$ и $y(t)$. Для этого запишем уравнения модулятора, фильтра Φ и демодулятора:

$$u(t) = h_1(t) f(t); \quad (2)$$

$$v(t) = \int_0^\infty k(\tau) u(t - \tau) d\tau; \quad (3)$$

$$y(t) = h_2(t) v(t). \quad (4)$$

Здесь $k(\tau)$ — импульсная переходная функция фильтра Φ . Из уравнений (2)–(4) получим

$$y(t) = h_2(t) \int_0^\infty k(\tau_1) h_1(t - \tau_1) f(t - \tau_1) d\tau_1,$$

откуда

$$\begin{aligned} y(t) y(t + \tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty k(\tau_1) k(\tau_2) h_2(t) h_1(t - \tau_1) h_2(t + \\ &\quad + \tau) h_1(t + \tau - \tau_2) f(t - \tau_1) f(t + \tau - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$y(t) z(t + \tau) = \int_0^\infty k(\tau_1) h_1(t - \tau_1) h_2(t) f(t - \tau_1) z(t + \tau) d\tau_1. \quad (6)$$

Функция $h(t, \tau) = h_1(t - \tau) h_2(t)$ является периодической функцией времени t и параметра τ . Кроме того, функция $h(t, \tau)$ и функция $h(t + t_0, \tau)$, сдвинутая относительно первой по времени на t_0 , равновероятны, так как $h_1(t)$ и $h_2(t)$ не связаны с входным сигналом $f(t)$. Поэтому $h(t, \tau)$ можно рассматривать как реализацию некоторого случайного периодического по времени процесса. Известно, что для такого процесса усреднение по совокупности эквивалентно усреднению по времени:

$$R_1(\tau_1) = \overline{h(t, \tau_1)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(t, \tau_1) dt; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R_2(\tau, \tau_1, \tau_2) &= \overline{h(t, \tau_1) h(t + \tau, \tau_2)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(t, \tau_1) \times \\ &\quad \times h(t + \tau, \tau_2) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь черта обозначает усреднение по совокупности функций.

Вычисление интегралов (7) и (8) дает

$$R_1(\tau_1) = \frac{c_1}{2} \cos(\omega_0 \tau_1 + \theta), \quad \theta = \psi_0 - \varphi; \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 R_2(\tau, \tau_1, \tau_2) = & \frac{c_1^2}{4} \cos(\omega_0 \tau_1 + \theta) \cos(\omega_0 \tau_2 + \theta) + \\
 & + \left[\frac{c_0^2}{8} \cos(\omega_0 \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}^2}{8} \cos(2n\omega_0 \tau) \right] \cos(\omega_0 \tau_1) \times \\
 & \times \cos(\omega_0 \tau_2) + \left[\frac{c_0^2}{8} \cos(\omega_0 \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}^2}{8} \cos(2n\omega_0 \tau) \right] \times \\
 & \times \sin(\omega_0 \tau_1) \sin(\omega_0 \tau_2);
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 a_{2n} = & \sqrt{c_{2n+1}^2 + c_{2n-1}^2 + 2c_{2n+1}c_{2n-1} \cos(\psi_{n+1} - \psi_n - 2\varphi)}; \\
 b_{2n} = & \sqrt{c_{2n+1}^2 + c_{2n-1}^2 - 2c_{2n+1}c_{2n-1} \cos(\psi_{n+1} - \psi_n - 2\varphi)}.
 \end{aligned}$$

Усреднив с учетом (7) и (8) правую и левую части выражений (5) и (6), получим

$$\begin{aligned}
 R_y(\tau) = & \overline{y(t)y(t+\tau)} = \int_0^\infty \int_0^\infty k(\tau_1) k(\tau_2) R_2(\tau, \tau_1, \tau_2) \times \\
 & \times R_f(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_1 d\tau_2;
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$R_{yz}(\tau) = \overline{y(t)z(t+\tau)} = \int_0^\infty k(\tau_1) R_1(\tau_1) R_{fz}(\tau + \tau_1) d\tau_1, \tag{12}$$

где $R_f(\tau)$ —корреляционная функция процесса с реализацией $f(t)$, $R_{fz}(\tau)$ —взаимная корреляционная функция процессов с реализацией $f(t)$ и $z(t)$. Поскольку $R_y(\tau)$ не зависит от t и $\overline{y(t)} \equiv 0$, то процесс на выходе демодулятора является стационарным в широком смысле.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЗВЕНА Л

Пусть известна передаточная функция фильтра $\Phi - K(p)$; будем искать передаточную функцию звена Л. Ошибку воспроизведения функции $z(t)$ можно записать в виде

$$\varepsilon(t) = z(t) - x(t) = z(t) - \int_0^\infty w(\alpha) y(t-\alpha) d\alpha,$$

где $w(\alpha)$ —импульсная переходная функция звена Л. Среднее значение квадрата ошибки

$$\sigma^2 = R_z(0) - 2 \int_0^\infty w(\alpha) R_{yz}(\alpha) d\alpha + \int_0^\infty \int_0^\infty w(\alpha) w(\beta) R_y(\alpha - \beta) d\alpha d\beta. \tag{13}$$

Для того, чтобы физически реализуемая функция $w(\alpha)$ обращала в минимум среднеквадратическую ошибку, необходимо и достаточно, чтобы она являлась решением интегрального уравнения [2-4]:

$$R_{yz}(\alpha) = \int_0^\infty w(\beta) R_y(\alpha - \beta) d\beta \quad (\alpha \geq 0). \tag{14}$$

Уравнение (14) является интегральным уравнением Винера-Хопфа. Его можно решить с помощью преобразования Фурье (методом фак-

торизации [^b]), если спектральная плотность $S_y(\omega)$ процесса на выходе демодулятора может быть представлена в виде:

$$S_y(\omega) = \Psi_1(j\omega) \Psi_2(j\omega),$$

где $\Psi_1(j\omega)$ регулярна, ограничена и не имеет нулей в нижней полуплоскости комплексного переменного ω , а $\Psi_2(j\omega)$ —регулярна, ограничена и не имеет нулей в верхней полуплоскости.

Найдем $S_y(\omega)$, для чего умножим обе части выражения (11) на $e^{-i\omega\tau}$ и проинтегрируем по τ от $-\infty$ до $+\infty$. С учетом соотношения (9) получим

$$\begin{aligned} S_y(\omega) = & \frac{c_1^2}{16} |K(j\omega + j\omega_0)e^{-i\theta} + K(j\omega - j\omega_0)e^{i\theta}|^2 S_f(\omega) + \\ & + \frac{c_0^2}{32} [S_\lambda(\omega + \omega_0) + S_\mu(\omega + \omega_0) + S_\lambda(\omega - \omega_0) + S_\mu(\omega - \omega_0)] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_{2n}^2}{32} [S_\lambda(\omega + 2n\omega_0) + S_\lambda(\omega - 2n\omega_0)] + \frac{b_{2n}^2}{32} [S_\mu(\omega + 2n\omega_0) + \right. \\ & \left. + S_\mu(\omega - 2n\omega_0)] \right\}; \end{aligned}$$

$$S_\lambda(\omega) = |K(j\omega + j\omega_0) + K(j\omega - j\omega_0)|^2 S_f(\omega);$$

$$S_\mu(\omega) = |K(j\omega + j\omega_0) - K(j\omega - j\omega_0)|^2 S_f(\omega).$$

Предположим, что $K(j\omega)$ и $S_f(\omega)$ —дробно-рациональные функции; тогда

$$\begin{aligned} S_y^N(\omega) = & \frac{c_1^2}{16} |K(j\omega + j\omega_0)e^{i\theta} + K(j\omega - j\omega_0)e^{-i\theta}|^2 S_f(\omega) + \\ & + \frac{c_0^2}{32} [S_\lambda(\omega + \omega_0) + S_\mu(\omega + \omega_0) + \\ & + S_\lambda(\omega - \omega_0) + S_\mu(\omega - \omega_0)] + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_{2n}^2}{32} [S_\lambda(\omega + 2n\omega_0) + \right. \\ & \left. + S_\lambda(\omega - 2n\omega_0)] + \frac{b_{2n}^2}{32} [S_\mu(\omega + 2n\omega_0) + S_\mu(\omega - 2n\omega_0)] \right\} \end{aligned}$$

будет четной дробно-рациональной функцией, и ее, как известно, можно представить в виде $S_y^N = |\Psi_y^N(j\omega)|^2$, где $\Psi_y^N(j\omega)$ —регулярна, ограничена и не имеет нулей в нижней полуплоскости ω .

Последовательность функций $\{S_y^N(\omega)\}$ в силу (1) сходится равномерно на всей плоскости комплексного переменного, за исключением малых окрестностей точек $\omega_r + 2n\omega_0$ и $\omega_l + (2n+1)\omega_0$, $n=0, \pm 1, \dots$, где ω_l —полюса $K(j\omega)$, а ω_r —полюса $S_f(\omega)$. Отсюда $S_y(\omega)$ является мероморфной четной функцией, удовлетворяющей условию

$$S_y(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} |\Psi_y^N(j\omega)|^2.$$

Обозначим $\lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_y^N(j\omega) = \Psi_y(j\omega)$, тогда

$$S_y(\omega) = \Psi_y(j\omega) \Psi_y^*(j\omega) = |\Psi_y(j\omega)|^2,$$

где $\Psi_y(j\omega)$ — мероморфная функция с полюсами и нулями в нижней полуплоскости ω , а $\Psi_y^*(j\omega)$ — функция, комплексно сопряженная с $\Psi_y(j\omega)$.

Теперь известными операциями [2-4] можно найти оптимальную передаточную функцию звена Л. Она будет определяться выражением

$$W(j\omega) = \frac{1}{2\pi\Psi_y(j\omega)} \int_0^\infty e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{yz}(\omega_1)}{\Psi_y^*(j\omega_1)} e^{j\omega_1 t} d\omega_1, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} S_{yz}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yz}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{c_1}{4} [K(-j\omega + j\omega_0) e^{-j\theta} + \\ &+ K(-j\omega - j\omega_0) e^{j\theta}] S_{fz}(\omega). \end{aligned}$$

Если $h_2(t)$ заменить тригонометрическим полиномом

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{n=0}^N c_{2n+1} \cos [(2n+1)\omega_0 t + \psi_n],$$

то получим дробно-рациональную аппроксимацию $S_y(\omega)$ и приближенное выражение для $W(j\omega)$.

Предположим, что шум на входе системы отсутствует ($f(t)=m(t)$). Тогда формула (15) будет определять передаточную функцию, осуществляющую оптимальную фильтрацию полезного сигнала от помех в виде модулированных гармоник с частотами, равными и кратными несущей частоте ω_0 . Если, например,

$$K(j\omega) = 1; \quad H(p) = 1;$$

$$f(t) = m(t); \quad h_1(t) = h_2(t) = \cos\left(\frac{\omega_0}{2} + \varphi\right);$$

$$S_f(\omega) = S_m(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}; \quad \omega_0 \gg 1.$$

В этом случае

$$S_{fz}(\omega) = \frac{1}{2} S_m(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \omega^2};$$

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{1}{4} S_f(\omega) + \frac{1}{8} (S_f(\omega - \omega_0) + S_f(\omega + \omega_0)) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega^4 + (\omega_0^2 - 4)\omega^2/2 + (2 + 3\omega_0^2 + \omega_0^4)/2}{(1 + \omega^2)(1 + (\omega - \omega_0)^2)(1 + (\omega + \omega_0)^2)}; \end{aligned}$$

$$\Psi_y(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega^2 - 2ja\omega - b}{(\omega - j)(\omega - \omega_0 - j)(\omega + \omega_0 + j)};$$

$$\Psi_y^*(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega^2 + 2ja\omega - b}{(\omega + j)(\omega - \omega_0 + j)(\omega + \omega_0 + j)},$$

где

$$a = \sqrt{\frac{\omega_0^2 - 4}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 + 3\omega_0^2 + \omega_0^4}{2}}},$$

$$b = \sqrt{\frac{2 + 3\omega_0^2 + \omega_0^4}{2}}.$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\omega_0^2 + 4}{1 + 2a + b} \frac{(j\omega)^2 + 2j\omega + \omega_0^2 - 1}{(j\omega)^2 + 2aj\omega + b}.$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ФИЛЬТРА Φ

Пусть теперь задана передаточная функция звена L ; будем искать оптимальную передаточную функцию фильтра Φ . Примем, что $W(j\omega)$ и $S_f(\omega)$ — дробно-рациональные функции ω .

Подставим в выражение (13) для среднего квадрата ошибки функции $R_y(\tau)$ и $R_{yz}(\tau)$, определяемые равенствами (11) и (12). Тогда

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= R_z(0) - 2 \int_0^\infty \int_0^\infty w(\alpha) k(\tau_1) R_1(\tau_1) R_{fz}(\alpha + \tau_1) d\alpha d\tau_1 + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w(\alpha) w(\beta) k(\tau_1) k(\tau_2) R_2(\alpha - \beta, \tau_1, \tau_2) \\ &\quad R_f(\alpha - \beta - \tau_2 + \tau_1) d\alpha d\beta d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования в правой части (14), получим

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= R_z(0) - 2 \int_0^\infty k(\tau_1) R_1(\tau_1) R_3(\tau_1) d\tau_1 + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty k(\tau_1) k(\tau_2) R_4(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

где

$$R_3(\tau_1) = \int_0^\infty w(\alpha) R_{fz}(\alpha + \tau_1) d\alpha; \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} R_4(\tau_1, \tau_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty w(\alpha) w(\beta) R_2(\alpha - \beta, \tau_1, \tau_2) \times \\ &\times R_f(\alpha - \beta - \tau_2 + \tau_1) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение, определяющее оптимальную весовую функцию $k(t)$, будет иметь вид

$$R_1(\tau_1) R_3(\tau_1) - \int_0^\infty k(\tau_2) R_4(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 = 0 \quad (\tau_1 \geq 0). \quad (17)$$

Подставив $R_2(\tau, \tau_1, \tau_2)$ в (16), а (16) в (17), получим

$$\begin{aligned} R_1(\tau_1) R_3(\tau_1) - \frac{C_1^2}{4} \int_0^\infty k(\tau_2) \cos(\omega_0 \tau_1 + \theta) \cos(\omega_0 \tau_2 + \theta) \times \\ \times R_{41}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 - \int_0^\infty k(\tau_2) \cos(\omega_0 \tau_1) \cos(\omega_0 \tau_2) R_{42}(\tau_1 - \end{aligned}$$

$$-\tau_2) d\tau_2 - \int_0^\infty k(\tau_2) \sin(\omega_0 \tau_1) \sin(\omega_0 \tau_2) \times \\ \times R_{43}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 = 0 \quad (\tau_1 \geq 0), \quad (18)$$

где

$$R_{41}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(\alpha) w(\beta) R_f(\tau - \beta + \alpha) d\alpha d\beta; \\ R_{42}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(\alpha) w(\beta) \left\{ \frac{c_0^2}{8} \cos[\omega_0(\alpha - \beta)] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}^2}{8} \cos[2n\omega_0(\alpha - \beta)] \right\} R_f(\alpha - \beta + \tau) d\alpha d\beta; \\ R_{43}(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(\alpha) w(\beta) \left\{ \frac{c_0^2}{8} \cos[\omega_0(\alpha - \beta)] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}^2}{8} \cos[2n\omega_0(\alpha - \beta)] \right\} R_f(\alpha - \beta + \tau) d\alpha d\beta.$$

Введем обозначения:

$$S_3(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_3(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = W(-j\omega) S_{fz}(\omega), \\ S_{41}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{41}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = |W(j\omega)|^2 S_f(\omega), \\ S_{42}(\omega) = \left[\frac{c_0^2}{32} (|W(j\omega + j\omega_0)|^2 + |W(j\omega - j\omega_0)|^2) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}^2}{32} (|W(j\omega + 2nj\omega_0)|^2 + |W(j\omega - 2nj\omega_0)|^2) \right] S_f(\omega) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{42}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$S_{43}(\omega) = \left[\frac{c_0^2}{32} (|W(j\omega + j\omega_0)|^2 + |W(j\omega - j\omega_0)|^2) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}^2}{32} (|W(j\omega + 2nj\omega_0)|^2 + |W(j\omega - 2nj\omega_0)|^2) \right] S_f(\omega) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{43}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (20)$$

Предположим далее, что а) звено L имеет ограниченную полосу частот, т. е. $|W(j\omega)| = 0$ при $|\omega| > \omega_c$, б) несущая частота ω_0 удовлетворяет условию $\omega_0 > 2\omega_c$, в) спектральная плотность процесса на входе системы $S_f(\omega)$ ограничена интервалом частот $|\omega| < \omega_c$. При

этих условиях $S_{42}(\omega) = S_{43}(\omega) = 0$ и, следовательно, $R_{42}(\tau) = R_{43}(\tau) = 0$. Уравнение (18) преобразуется к виду

$$R_3(\tau_1) - \frac{c_1}{2} \int_0^{\infty} k(\tau_1) \cos(\omega_0 \tau_1 + \theta) R_{41}(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 = 0 \quad (\tau_1 \geq 0).$$

Это соотношение является интегральным уравнением Винера-Хопфа относительно $\bar{k}(\tau_1) = k(\tau_1) \cos(\omega_0 \tau_1 + \theta)$.

Поскольку $S_f(\omega)$ является дробно-рациональной функцией, $S_{41}(\omega)$ можно представить в виде

$$S_{41}(\omega) = |\Psi_f(j\omega)|^2 |W(j\omega)|^2,$$

где $\Psi_f(j\omega)$ регулярна, ограничена и не имеет нулей в нижней полуплоскости; кроме того, $|\Psi_f(j\omega)|^2 = S_f(\omega)$. Функция $\bar{K}(j\omega) = \int_0^{\infty} k(\tau) \times \cos(\omega_0 \tau + \theta) e^{-j\omega\tau} d\tau$ может быть найдена отсюда для $|\omega| < \omega_c$ по формуле:

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{1}{c_1 \pi \Psi_f(j\omega) W(j\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{fz}(\omega_1)}{\Psi_f^*(j\omega_1)} e^{j\omega_1 t} d\omega_1,$$

где $\Psi_y^*(j\omega)$ — функция, комплексно сопряженная с $\Psi_f(j\omega)$.

Передаточная функция фильтра Φ связана с $\bar{K}(j\omega)$ соотношением

$$K(j\omega + j\omega_0) e^{-j\theta} + K(j\omega - j\omega_0) e^{j\theta} = \bar{K}(j\omega). \quad (21)$$

Функция $K(j\omega)$ должна быть подобрана так, чтобы она была ограничена при действительных ω и при $|\omega| < \omega_c$ выполнялось соотношение (21).

Существуют различные приближенные способы синтеза $K(j\omega)$ по $\bar{K}(j\omega)$, описанные, например, в [6]. В тех случаях, когда $\omega_c \ll \omega_0$, применяют, в частности, способ „узкополосной аппроксимации“ [6,7], согласно которому

$$K(j\omega) = \frac{1}{\cos \theta} \bar{K} \left[\frac{\omega_0}{2} \left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega} \right) \right]. \quad (22)$$

Теперь будем считать, что хотя бы одно из условий а, б, в не выполняется. Тогда $R_{42}(\tau) \neq 0$, $R_{43}(\tau) \neq 0$ и $k(\tau)$ будет определяться уравнением (17). Обозначим через $R_5(\tau)$ функцию, определяемую равенствами

$$R_5(\tau_1) \cos(\omega_0 \tau_1 + \theta) = R_1(\tau_1) R_3(\tau_1) - \int_0^{\infty} k(\tau_2) R_4(\tau_1, \tau_2) d\tau_2, \quad (23)$$

$$R_5(\tau_1) = 0 \quad \text{при } \tau_1 \geq 0.$$

Найдем преобразование Фурье левой и правой частей выражения (23):

$$F_0(\omega) K(j\omega) + F_1(\omega) K(j\omega + 2j\omega_0) + \\ + F_{-1}(\omega) K(j\omega - 2j\omega_0) = F_3(\omega) - F_5(\omega), \quad (24)$$

где

$$F_3(\omega) = \frac{c_1}{4} [S_3(\omega + \omega_0) e^{-j\theta} + S_3(\omega - \omega_0) e^{j\theta}],$$

$$\begin{aligned}
F_5(\omega) &= \frac{1}{2} [S_5(\omega + \omega_0) e^{-j\theta} + S_5(\omega - \omega_0) e^{j\theta}], \\
S_5(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_5(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad K(j\omega) = \int_0^{\infty} k(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\
F_0(\omega) &= \frac{c_1^2}{16} [S_{41}(\omega - \omega_0) + S_{41}(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{4} [S_{42}(\omega + \omega_0) + \\
&\quad + S_{42}(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{4} [S_{43}(\omega + \omega_0) + S_{43}(\omega - \omega_0)], \\
F_{-1}(\omega) &= \frac{c_1^2}{16} S_{41}(\omega - \omega_0) e^{j\theta} + \frac{1}{4} S_{42}(\omega - \omega_0) - \frac{1}{4} S_{43}(\omega - \omega_0), \\
F_1(\omega) &= \frac{c_1^2}{16} S_{41}(\omega + \omega_0) e^{-j\theta} + \frac{1}{4} S_{42}(\omega + \omega_0) - \frac{1}{4} S_{43}(\omega + \omega_0).
\end{aligned}$$

Выражение (24) является линейным разностным уравнением относительно искомой функции $K(j\omega)$. Будем искать решение этого уравнения. Для этого вместо ω подставим в (24) $\omega + 2m\omega_0$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$), тогда получим вместе с (24) бесконечную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $K(j\omega + 2m\omega_0)$:

$$\begin{aligned}
F_0(\omega + 2m\omega_0) K(j\omega + 2m\omega_0) &= F_3(\omega + 2m\omega_0) - F_5(\omega + 2m\omega_0) - \\
&- F_{-1}(\omega + 2m\omega_0) K(j\omega + 2(m-1)\omega_0) - F_1(\omega + \\
&+ 2m\omega_0) K(j\omega + 2(m+1)\omega_0) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{25}
\end{aligned}$$

Решение системы (25) может быть найдено с помощью непрерывных дробей в виде ряда:

$$\begin{aligned}
K(j\omega) &= \frac{1}{\chi(\omega)} \left\{ F_3(\omega) - F_5(\omega) - \frac{F_1(\omega)}{F_0(\omega + 2\omega_0) - L(\omega + 2\omega_0)} \times \right. \\
&\times \left[F_3(\omega + 2\omega_0) - F_5(\omega + 2\omega_0) - \frac{F_1(\omega + 2\omega_0)}{F_0(\omega + 4\omega_0) - L(\omega + 4\omega_0)} \times \right. \\
&\times (F_3(\omega + 4\omega_0) - F_5(\omega + 4\omega_0) - \dots) \left. \right] - \frac{F_{-1}(\omega)}{F_0(\omega - 2\omega_0) - M(\omega - 2\omega_0)} \times \\
&\times \left[F_3(\omega - 2\omega_0) - F_5(\omega - 2\omega_0) - \frac{F_{-1}(\omega - 2\omega_0)}{F_0(\omega - 4\omega_0) - M(\omega - 4\omega_0)} \times \right. \\
&\times (F_3(\omega - 4\omega_0) - F_5(\omega - 4\omega_0) - \dots) \left. \right]. \tag{26}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
L(\omega) &= \frac{F_1(\omega) F_{-1}(\omega + 2\omega_0)}{F_0(\omega + 2\omega_0) - F_1(\omega + 2\omega_0) F_{-1}(\omega + 4\omega_0) / [F_0(\omega + 4\omega_0) - \dots]}, \\
M(\omega) &= \frac{F_{-1}(\omega) F_1(\omega - 2\omega_0)}{F_0(\omega - 2\omega_0) - F_{-1}(\omega - 2\omega_0) F_1(\omega - 4\omega_0) / [F_0(\omega - 4\omega_0) - \dots]}, \\
\chi(\omega) &= F_0(\omega) - L(\omega) - M(\omega).
\end{aligned}$$

В произвольной конечной области ω при достаточно большом m_0 имеет место неравенство

$$\left| \frac{F_1(\omega + 2m\omega_0) F_{-1}(\omega + 2(m+1)\omega_0)}{F_0(\omega + 2m\omega_0) F_0(\omega + 2(m+1)\omega_0)} \right| < \frac{1}{4}; \\ |m| \geq m_0 + 1.$$

Поэтому, согласно признаку Ворпицкого [8], непрерывные дроби $L(\omega + 2m_0\omega_0)$ и $M(\omega - 2m_0\omega_0)$ сходятся в этой области к регулярным функциям.

Цепные дроби $L(\omega)$ и $M(\omega)$ могут быть получены соответственно из $L(\omega + 2m_0\omega_0)$ и $M(\omega - 2m_0\omega_0)$ по рекуррентным формулам:

$$L(\omega + 2m\omega_0) = \frac{F_1(\omega + 2m\omega_0) F_{-1}(\omega + 2(m+1)\omega_0)}{F_0(\omega + 2m\omega_0) - L(\omega + 2(m+1)\omega_0)}, \\ M(\omega - 2m\omega_0) = \frac{F_{-1}(\omega - 2m\omega_0) F_1(\omega - 2(m+1)\omega_0)}{F_0(\omega - 2m\omega_0) - M(\omega - 2(m+1)\omega_0)}.$$

Поскольку $F_0(\omega)$, $F_{+1}(\omega)$, $F_1(\omega)$ —мероморфные функции, а $L(\omega + 2m_0\omega_0)$ и $M(\omega - 2m_0\omega_0)$ регуляры в рассматриваемой произвольной конечной области, то $L(\omega)$ и $M(\omega)$ могут иметь в этой области только особые точки типа полюса. Это означает, что $L(\omega)$ и $M(\omega)$ являются также мероморфными функциями комплексного переменного ω .

В любой конечной области ω при $m > m_0 > 0$, где m_0 —достаточно большое число,

$$\left| \frac{F_1(\omega + 2(m-1)\omega_0)}{F_0(\omega + 2m\omega_0) - L(\omega + 2m\omega_0)} \right| \leq q_1 < \frac{\frac{1/2}{1 - \frac{1/4}{1 - \frac{1/4}{1 - \dots}}}}{1 - \dots} = 1, \\ \left| \frac{F_{-1}(\omega - 2(m-1)\omega_0)}{F_0(\omega - 2m\omega_0) - M(\omega - 2m\omega_0)} \right| \leq q_2 < 1.$$

Отсюда следует равномерная и абсолютная сходимость ряда (26) как в указанной области, так и на всей плоскости, если исключить из той и другой малые окрестности нулей $\chi(j\omega)$.

Обозначим

$$G^0(\omega) = \frac{1}{\chi(\omega)},$$

$$G^m(\omega) = \frac{1}{\chi(\omega)} \prod_{l=1}^m \frac{F_1(\omega + 2(l-1)\omega_0)}{F_0(\omega + 2l\omega_0) - L(\omega + 2l\omega_0)} \\ (m = 1, 2, 3, \dots);$$

$$G^m(\omega) = \frac{1}{\chi(\omega)} \prod_{l=1}^{|m|} \frac{F_{-1}(\omega - 2(l-1)\omega_0)}{F_0(\omega - 2l\omega_0) - M(\omega - 2l\omega_0)} \\ (m = -1, -2, -3, \dots);$$

$$G_{2m+1}(\omega) = (-1)^m [G^m(\omega) - G^{m+1}(\omega)] \\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Тогда

$$K(j\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} G_{2m+1}(\omega) \left[\frac{c_1}{4} S_3(\omega + (2m+1)\omega_0) e^{-\cdot^6} - \right.$$

$$-\frac{1}{2} S_5 (\omega + (2m+1)\omega_0) e^{-j\theta} \Big] + \sum_{m=+1}^{+\infty} G_{-2m+1}(\omega) \left[\frac{c_1}{4} S_3 \times \right. \\ \left. \times (\omega - (2m-1)\omega_0) e^{j\theta} - \frac{1}{2} S_5 (\omega - (2m-1)\omega_0) e^{j\theta} \right].$$

Обратное преобразование Фурье левой и правой частей можно представить в виде:

$$k(\tau) = \sum_{m=0}^{+\infty} k_{2m+1}(\tau) e^{-(2m+1)j\omega_0\tau-j\theta} + \sum_{m=1}^{+\infty} k_{-2m+1}(\tau) e^{(2m-1)j\omega_0\tau+j\theta},$$

где

$$k_{2m+1}(\tau) = \Phi^{-1}[K_{2m+1}(\omega)],$$

$$K_{2m+1}(\omega) = G_{2m+1}(\omega - (2m+1)\omega_0) \left[\frac{c_1}{4} S_3(\omega) - \frac{1}{2} S_5(\omega) \right] \quad (27)$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

Φ^{-1} — обратное преобразование Фурье. Отсюда следует, что импульсная переходная функция звена Φ может быть представлена в виде ряда модулированных гармоник, интеграл Фурье от амплитуд которых определяется равенствами (27).

Соотношениям (27) соответствуют интегральные уравнения Винера-Хопфа относительно неизвестных функций $k_{2m+1}(\tau)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\int_0^{\infty} k_{2m+1}(\tau_1) g_{2m+1}(\tau - \tau_1) d\tau_1 = \frac{c_1}{4} R_3(\tau) \quad (\tau \geq 0), \quad (28)$$

где

$$g_{2m+1}(\tau) = \Phi^{-1} \left[\frac{1}{G_{2m+1}(\omega - (2m+1)\omega_0)} \right] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Решив бесконечную систему интегральных уравнений (28), можно найти оптимальную передаточную функцию фильтра по формуле:

$$K(j\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{2m+1}(j\omega + (2m+1)j\omega_0) e^{-j\theta} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} K_{-2m+1}(j\omega - (2m-1)j\omega_0) e^{j\theta}.$$

В большинстве практических случаев можно ограничиться приближенным определением $K(j\omega)$ в виде

$$K(j\omega) = \sum_{m=0}^N K_{2m+1}(j\omega + (2m+1)j\omega_0) e^{-j\theta} + \\ + \sum_{m=1}^{N+1} K_{-2m+1}(j\omega - (2m-1)j\omega_0) e^{j\theta}.$$

При этом ряды в правой части (19), (20) следует заменить конечной суммой, а непрерывные дроби — простыми дробями. Тогда $F_0(\omega)$,

$F_1(\omega)$, $F_{-1}(\omega)$, $G_{2m+1}(\omega)$ будут аппроксимированы дробно-рациональными функциями $F_0^N(\omega)$, $F_1^N(\omega)$, $F_{-1}^N(\omega)$, $G_{2m+1}^N(\omega)$. Представление функций $1/G_{2m+1}^N(\omega)$ ($m = 0, \pm 1, \dots, \pm N, -(N+1)$) в виде

$$1/G_{2m+1}^N(\omega) = \Psi_{2m+1}^N(j\omega) \bar{\Psi}_{2m+1}^N(j\omega),$$

где $\Psi_{2m+1}^N(j\omega)$ регулярны и не имеют нулей в нижней полуплоскости ω , а $\bar{\Psi}_{2m+1}^N(j\omega)$ — в верхней полуплоскости, можно осуществить разложением $1/G_{2m+1}^N(\omega)$ на простые множители.

Пример. Предположим, что выполняются условия а, б, в. Кроме того, пусть $\omega_c \ll \omega_0$, $c_1 = 1$, $\theta = 0$, $H(p) = 1$ и в полосе частот $|\omega| < \omega_c$, $S_m(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$; $S_{mn}(\omega) = S_{nm}(\omega) = 0$, $S_n(\omega) \approx c^2$, $W(j\omega) \approx 1$. Тогда при $|\omega| < \omega_c$

$$S_f(\omega) = S_m(\omega) + S_n(\omega) = \frac{1 + c^2 + c^2\omega^2}{1 + \omega^2};$$

$$\Psi_f(j\omega) = \frac{c\omega - j\sqrt{1 + c^2}}{\omega - j};$$

$$\Psi_f^*(j\omega) = \frac{c\omega + j\sqrt{1 + c^2}}{\omega + j}; \quad S_{fz}(\omega) = S_m(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2};$$

$$\bar{K}(j\omega) = \frac{2}{c + \sqrt{1 + c^2}} \frac{1}{cj\omega + \sqrt{1 + c^2}}.$$

По формуле (22) находим:

$$K(j\omega) = \frac{4}{c + \sqrt{1 + c^2}} \frac{j\omega}{c(j\omega)^2 + 2\sqrt{1 + c^2} j\omega + c\omega_0^2}.$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОДАВЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ

Предположим, что цепочка звеньев М, Ф, Д, Л охвачена обратной связью (рис. 2) и выполняются условия а, б, в. Если, кроме того, функция $K(j\omega)$ ограничена при действительных ω , то такая замкнутая

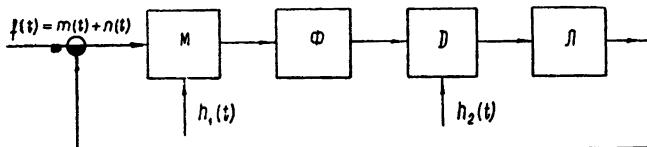


Рис. 2.

система эквивалентна линейной системе с постоянными параметрами, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии [1]:

$$\frac{c_2}{2} [K(j\omega + j\omega_0) e^{-j\theta} + K(j\omega - j\omega_0) e^{j\theta}] W(j\omega).$$

Отсюда вытекает следующий порядок приближенного определения оптимальных передаточных функций фильтра Φ и звена \mathcal{L}

1) Определяется оптимальная передаточная функция $B(j\omega)$ замкнутой линейной системы с постоянными параметрами, обеспечивающая воспроизведение сигнала $z(t)$ с наименьшей среднеквадратической ошибкой. В силу условия в $B(j\omega)$ будет определена только для $|\omega| < \omega_c$.

2) Находится передаточная функция разомкнутой системы $D(j\omega)$, соответствующая найденной передаточной функции $B(j\omega)$:

$$D(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{1 - B(j\omega)}.$$

3) Для $|\omega| < \omega_c$ определяются $K(j\omega)$ и $W(j\omega)$, исходя из равенства:

$$\frac{c_1}{2} [K(j\omega + j\omega_0) e^{-j\theta} + K(j\omega - j\omega_0) e^{j\theta}] W(j\omega) = D(j\omega). \quad (29)$$

4) Функции $K(j\omega)$ и $W(j\omega)$ должны быть подобраны так, чтобы при $|\omega| < \omega_c$ выполнялось равенство (29), $K(j\omega)$ была бы ограничена при всех действительных ω , а $W(j\omega)$ при $|\omega| \geq \omega_c$ удовлетворяла бы условию а.

В заключение автор благодарит Ю. И. Неймарка за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Шильман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 179 (1963).
2. В. С. Пугачев, Статистическая теория систем автоматического управления (лекции), ВВИА, им. Н. Е. Жуковского, 1961.
3. В. В. Соловьевников, Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, М., 1960.
4. Дж. Х. Лэйнинг и Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958.
5. Б. Нобл, Метод Винера-Хопфа, ИЛ, М., 1962
6. G. Weiss, IRE Transactions Automatic Control, AC-6, 54 (1961).
7. Сб. Корректирующие цепи в автоматике, ИЛ, М., 1954, стр. 479.
8. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова, Е. К. Исаакова, Л. А. Люстерник, Г. С. Салехов, А. Н. Хованский, Л. Я. Цлаф, А. Р. Янпольский, Математический анализ (справочная математическая библиотека), ГИФМЛ, М., 1961, стр. 292

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 марта 1963 г.

DETERMINATION OF OPTIMUM CHARACTERISTICS OF CONTROL SYSTEMS WITH MODULATION

S. V. Shil'man

Optimum characteristics have been determined of a system with modulation in the case of an infinite observation interval and stationary input signal. The problem is shown to be reduced to the solution of Winer-Hopf's integral equations; methods are given of an approximate solution of these equations.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ*

В. П. Савельев

Решается задача об оптимальном (по времени движения) управлении электровозом на некотором участке пути с заданными ограничениями на скорость движения электровоза без учета ограничений по перегреву его двигателей. Доказывается, что управление, находимое с помощью необходимых условий принципа максимума Л. С. Понtryагина, является действительно оптимальным.

В работе решается задача об оптимальном по времени движения управлении электровозом на некотором участке железнодорожного пути ($S_0 \leq S \leq S_{\text{кон}}$) без учета ограничений по перегреву его двигателей. На рассматриваемом участке заданы уклон $\alpha(S)$ как функция пути S и ограничение $V \leq \bar{V}(S)$ сверху на скорость V движения электровоза.

Под управлением электровозом будем понимать кусочно-непрерывную функцию времени $U(t)$ ($0 \leq t \leq T$), значения которой заключены в некотором отрезке $[-1, \bar{U}(V)]$; при этом различными управлениями $U_1(t) \neq U_2(t)$ будем называть такие управления $U_1(t)$ и $U_2(t)$, которые не принимают одинакового значения ни в одной точке некоторого интервала времени. Под оптимальным управлением $U^{\text{опт}}(t)$ ($0 \leq t \leq T$) понимается управление, при котором электровоз, не превышая заданного ограничения на скорость движения, проходит данный участок пути за минимальное время T .

В работе доказывается, что управление, находимое с помощью необходимых условий принципа максимума (см. [1]), является действительно оптимальным.

1. Если обозначить через $W(V)$ удельную силу сопротивления движению поезда, а через $f(V, U)$ — удельную силу тяги (торможения) электровоза, то уравнения движения последнего можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} dS/dt &= V; \\ dV/dt &= \gamma [f(V, U) - W(V) - \alpha(S)], \end{aligned} \quad (1)$$

где γ — постоянный коэффициент.

Чтобы выяснить характер зависимости удельной тяги (торможения) от скорости V и управления $U \in [-1, \bar{U}(V)]$, рассмотрим тяговые характеристики типового электровоза (Н-60), приведенные на рис. 1 (см. [2]).

Каждому значению U из интервала $0 < U \leq 1$ соответствуют включенные двигатели и отсутствие торможения^{**}. Значению $U = 0$ соответствуют выключенные двигатели и отсутствие торможения. Значениям U из интервала $-1 \leq U < 0$ соответствуют выключенные двигатели и наличие торможения, причем максимальное торможение достигается при $U = -1$. Из рис. 1 видно, что при скорости поезда V ,

* В настоящей работе излагаются основные результаты дипломной работы, выполненной под руководством Ю. И. Неймарка.

** Значение $U = +1$ будем приписывать 25-ой позиции ручки контроллера.

меньшей некоторого значения V^* , тяга электровоза имеет ограничение $l(V)$ по сцеплению между колесами электровоза и рельсами, так что $f(V, U) \leq l(V)$. Таким образом, значение $U = +1$ управление может принимать лишь при скорости $V \geq V^*$. Если же $V < V^*$, то наибольшим допустимым значением управления является решение $U^*(V)$ уравнения $f(V, U) - l(V) = 0$. Иначе говоря, значения управления $U(t)$ заключены в сегменте $[-1, \bar{U}(V)]$, где $\bar{U}(V) = \begin{cases} U^*(V) & \text{при } V < V^* \\ +1 & \text{при } V \geq V^* \end{cases}$.

Как видно из рис. 1, удельная сила тяги (торможения) $f(V, U)$ является монотонно возрастающей функцией по $U \in [-1, \bar{U}(V)]$; кроме того, $f'_V(V, U) < 0$ при $U > 0$ и $f'_V(V, U) > 0$ при $U < 0$. В дальнейшем задача об оптимальном управлении электровозом будет рассматриваться при этих предположениях относительно функции $f(V, U)$.

Особенностью данной задачи является тот факт, что ограничение $\bar{V}(S)$ на скорость движения поезда имеет разрывы, тогда как необходимые условия принципа максимума получены в предположении непрерывной кусочно-гладкой границы области изменения фазовых координат. Однако, как будет показано дальше, решив задачу об оптимальном управлении последовательно для каждого участка $S_k \leq S \leq S_{k+1}$ непрерывного ограничения $\bar{V}_k(S)$ на скорость (или отсутствия ограничения), мы тем самым решим задачу об оптимальном управлении электровозом на всем участке пути $S_0 \leq S \leq S_{\text{кон}}$.

2. Пусть на некотором участке пути $S_k \leq S \leq S_{k+1}$ нет ограничения на скорость движения поезда, в момент времени $t = t_k$ поезд имеет скорость $V(t_k) = V_k$ и прошел путь $S(t_k) = S_k$. Решим следующую задачу: среди всех возможных управлений $U(t)$ ($t_k \leq t \leq t_{k+1}$), переводящих фазовую точку из положения (S_k, V_k) на прямую $S = S_{k+1}$ так, чтобы $S(t_{k+1}) = S_{k+1}$, найти оптимальное.

Согласно принципу максимума, наряду с системой (1), рассмотрим систему уравнений относительно вспомогательных переменных $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2 \gamma \frac{d\alpha}{dS};$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 - \psi_2 \gamma [f'_V(V, U) - W'(V)] \quad (2)$$

и функцию $H(\psi_1, \psi_2, S, V, U) = \psi_1 V + \psi_2 \gamma [f(V, U) - W(V) - \alpha(S)]$.

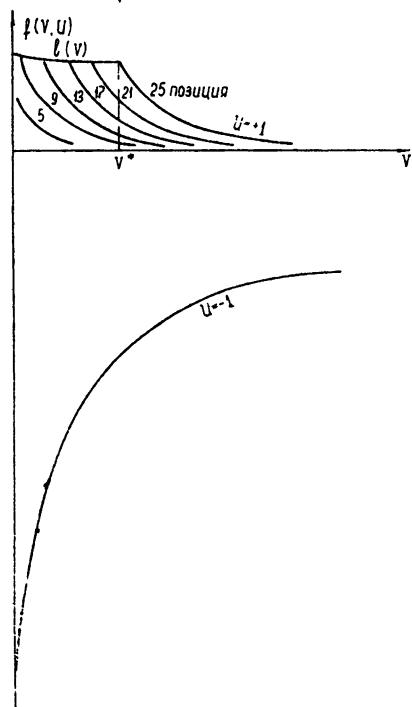


Рис. 1.

Если $U(t)$ ($t_k \leq t \leq t_{k+1}$) — искомое оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения (S_k, V_k) на прямую $S=S_{k+1}$, а $\begin{cases} S=S(t) \\ V=V(t) \end{cases}$ — соответствующая ему траектория (см. (1)), так что $S(t_k)=S_k$, $V(t_k)=V_k$ и $S(t_{k+1})=S_{k+1}$, то необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)=[\psi_1(t), \psi_2(t)]$, соответствующей управлению $U(t)$ и траектории $\begin{cases} S=S(t) \\ V=V(t) \end{cases}$ ($t_k \leq t \leq t_{k+1}$) (см. (2)), что

$$1) H(\psi_1(t), \psi_2(t), S(t), V(t), U(t)) = \max_{U \in [-1, \bar{U}(V)]} H(\psi_1(t), \psi_2(t), S(t), V(t), U(t))$$

для $t_k \leq t \leq t_{k+1}$,

$$2) \text{в правом конце траектории } \begin{cases} S=S(t) \\ V=V(t) \end{cases} \text{ } (t_k \leq t \leq t_{k+1}) \text{ вектор-функция } \psi(t) \text{ удовлетворяет условию трансверсальности:}$$

$$(\psi(t_{k+1}), \theta) = 0, \quad (3)$$

где θ — любой вектор, касательный к прямой $S=S_{k+1}$ (см. теоремы 2 и 3 в [1]).

Нетрудно видеть, что условие трансверсальности в нашем случае приводит к равенству

$$\psi_2(t_{k+1}) = 0, \quad (4)$$

а условие 1) записывается так:

$$\begin{aligned} & \{\psi_1(t) V(t) + \psi_2(t) \gamma [f(V(t), U(t)) - W(V(t)) - \alpha(S(t))] \} = \\ & = \max_{U \in [-1, \bar{U}(V)]} \{\psi_1(t) V(t) + \psi_2(t) \gamma [f(V(t), U) - W(V(t)) - \alpha(S(t))] \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что первое слагаемое, входящее в функцию $H(\psi_1, \psi_2, S, V, U)$, в каждый данный момент времени t не зависит от выбора управления $U(t)$; из (5) следует:

$$\begin{aligned} & \psi_2(t) \gamma [f(V(t), U(t)) - W(V(t)) - \alpha(S(t))] = \\ & = \max_{U \in [-1, \bar{U}(V)]} \{\psi_2(t) \gamma [f(V(t), U) - W(V(t)) - \alpha(S(t))] \}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\psi_2(t) f(V(t), U(t)) = \max_{U \in [-1, \bar{U}(V)]} \{\psi_2(t) f(V(t), U)\}. \quad (7)$$

Сказанное приводит к такому заключению: если в момент времени t из интервала $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ величина $\psi_2(t) > 0$, то необходимые условия оптимальности управления

$$\begin{aligned} & \gamma [f(V(t), U(t)) - W(V(t)) - \alpha(S(t))] = \\ & = \max_{U \in [-1, \bar{U}(V)]} \{\gamma [f(V(t), U) - W(V(t)) - \alpha(S(t))] \}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$f(V(t), U(t)) = \max_{U \in [-1, \bar{U}(V)]} f(V(t), U); \quad (8a)$$

если же $\psi_2(t) < 0$, то необходимыми условиями оптимальности управления являются

$$\begin{aligned} & \gamma [f(V(t), U(t)) - W(V(t)) - \alpha(S(t))] = \\ & = \min_{U \in [-1, \bar{U}(V)]} \{\gamma [f(V(t), U) - W(V(t)) - \alpha(S(t))]\}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$f(V(t), U(t)) = \min_{U \in [-1, \bar{U}(V)]} f(V(t), U). \quad (9a)$$

Учитывая монотонность функции $f(V, U)$ по $U \in [-1, \bar{U}(V)]$, легко видеть, что управление $U = \bar{U}(V(t))$ удовлетворяет условиям (8) и (8а), а уравнение $U = -1$ удовлетворяет условиям (9) и (9а). Момент времени $t = t_n$, при котором $\psi_2(t_n) = 0$, является моментом переключения управления.

Далее для простоты исследования уравнений (2) предполагается, что $|f'_V(V, U)| > |W'(V)|$ и $d\alpha/dS=0$ на участке $S_k \leq S \leq S_{k+1}$. При этих предположениях характер поведения функции $\psi_2(t)$ на отрезке $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ зависит от начальных значений $\psi_1(t_k) = C_1$ и $\psi_2(t_k) = C_2$ следующим образом (см. рис. 2):

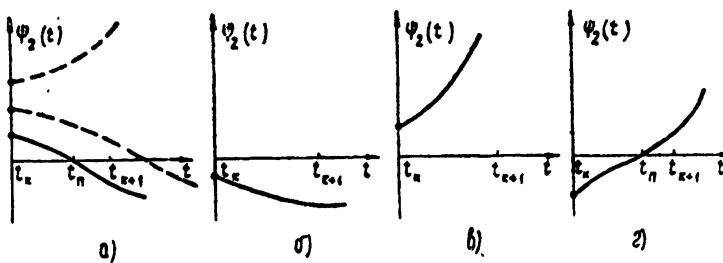


Рис. 2.

a) $C_1 > 0, C_2 > 0, \psi_2(t) > 0 \quad \text{при } t_k \leq t \leq t_{k+1}$

или $\begin{cases} \psi_2(t) > 0 & \dots \text{при } t_k \leq t < t_n \\ \psi_2(t_n) = 0 \\ \psi_2(t) < 0 & \dots \text{при } t_n < t \leq t_{k+1} \end{cases};$

б) $C_1 > 0, C_2 < 0, \psi_1(t) < 0 \quad \text{при } t_k \leq t \leq t_{k+1};$

в) $C_1 < 0, C_2 > 0, \psi_2(t) > 0 \quad \text{при } t_k \leq t \leq t_{k+1};$

г) $C_1 < 0, C_2 < 0, \begin{cases} \psi_2(t) < 0 & \text{при } t_k \leq t < t_n \\ \psi_2(t_n) = 0 \\ \psi_2(t) > 0 & \text{при } t_n < t \leq t_{k+1}. \end{cases}.$

Возьмем начальные значения $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ таким образом, чтобы $\psi_2(t) > 0$ при $t_k \leq t < t_{k+1}$ и выполнялось условие трансверсальности $\psi_2(t_{k+1}) = 0$ (см. рис. 2а). Тогда управлением, удовлетворяющим необходимому условию 1) принципа максимума, является управление

$$U(t) = \bar{U}(V(t)) \quad (t_k \leq t < t_{k+1}). \quad (10)$$

Взглянув на второе уравнение системы (1) и условие (8), замечаем, что управление (10) в каждый момент времени t из $t_k \leq t < t_{k+1}$ сообщает максимум ускорению dV/dt . А поделив в (1) второе уравнение на первое, приходим к выводу, что управление (10) в каждой точке соответствующей ему траектории $V = V^{\bar{U}}(S)$ ($S_k \leq S \leq S_{k+1}$) сообщает максимум величине dV/dS .

Взяв любое другое управление $U_1(t) \neq \bar{U}(V(t))$, мы при том же начальном условии $V(S_k) = V_k$ получим траекторию $V = V^{U_1}(S)$, полностью или частично лежащую ниже траектории $V = V^{\bar{U}}(S)$, т. е. $V^{U_1}(S) \leq V^{\bar{U}}(S)$ для всех S из $S_k \leq S \leq S_{k+1}$ (см. рис. 3).

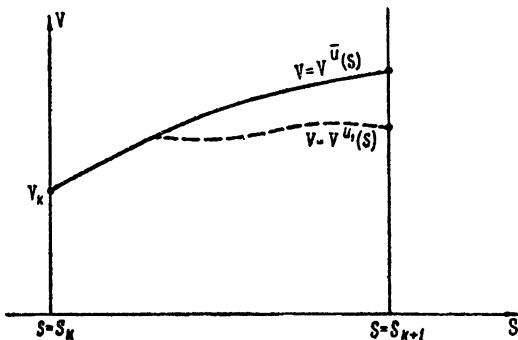


Рис. 3.

Рассматривая интегралы

$$\int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{dS}{V^{\bar{U}}(S)} = (t_{k+1} - t_k)_U = \bar{U}(V(t)),$$

$$\int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{dS}{V^{U_1}(S)} = (t_{k+1} - t_k)_{U_1} = U_1(t),$$

получим неравенство

$$(t_{k+1} - t_k)_U = \bar{U}(V(t)) < (t_{k+1} - t_k)_{U_1} = U_1(t). \quad (11)$$

Итак, в поставленной выше задаче для участка $S_k \leq S \leq S_{k+1}$ оптимальным управлением является управление (10).

Заметим еще, что оптимальное свойство траектории $V = V^{\bar{U}}(S)$, соответствующей управлению (10), сохранится, очевидно, и без предположений $|f'_V(V, U)| > |W'(V)|$ и $d\alpha/dS \equiv 0$, поскольку эти предположения в доказательстве неравенства (11) не используются.

3. Мы нашли оптимальное управление на участке $S_k \leq S \leq S_{k+1}$ без ограничения по скорости, не учитывая того, что за ним следует участок $S_{k+1} \leq S \leq S_{k+2}$ с ограничением $V \leq \bar{V}_{k+1}(S)$. Однако, если, следуя управлению (10) и уравнениям (1), фазовая точка приходит в положение $S(t_{k+1}) = S_{k+1}$, $V(t_{k+1}) \leq \bar{V}_{k+1}(S_{k+1})$ (см. рис. 4, траектория I), то задачу следует считать решенной, ибо управление, оптимальное из всех возможных управлений, приводящих фазовую точку на прямую $S = S_{k+1}$, тем более будет оптимальным из тех управлений, которые приводят на множество $\begin{cases} S = S_{k+1} \\ V \leq \bar{V}_{k+1}(S_{k+1}) \end{cases}$.

Если же управлению (10) соответствует $V(t_{k+1}) > \bar{V}_{k+1}(S_{k+1})$, то решаем следующую задачу: среди всех управлений, переводящих фазовую точку из положения (S_k, V_k) в положение $(S_{k+1}, \bar{V}_{k+1}(S_{k+1}))$, найти оптимальное.

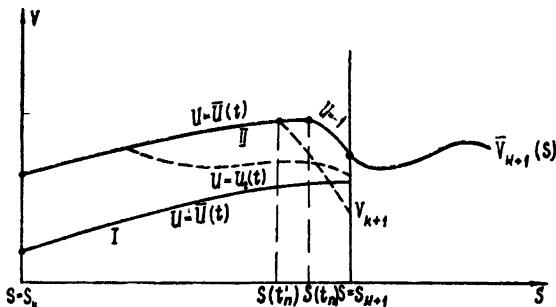


Рис. 4.

Выберем начальные значения $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ так, что

$$\psi_2(t) > 0 \quad \text{при} \quad t_k \leq t < t_n,$$

$$\psi_2(t_n) = 0,$$

$$\psi_2(t) < 0 \quad \text{при} \quad t_n < t \leq t_{k+1}$$

(см. рис. 2а). Тогда управлением, вытекающим из необходимого условия 1) принципа максимума, будет управление

$$U(t) = \begin{cases} \bar{U}(V(t)) & \text{при } t_k \leq t < t_n \\ -1 & \text{при } t_n \leq t < t_{k+1} \end{cases}. \quad (12)$$

Момент переключения $t = t_n$ выбирается так, чтобы траектория II (рис. 4), соответствующая управлению (12), приводила фазовую точку в положение $(S_{k+1}, \bar{V}_{k+1}(S_{k+1}))$.

Нетрудно видеть, что при любом управлении $U = U_2(t)$ ($t_k \leq t < t_{k+1}$), отличном от (12), траектория $V = V^{U_2}(S)$ лежит частично или полностью ниже траектории II. Действительно, выше первого ее участка, обладающего свойством $\max_{U \in [-1, \bar{U}(V)]} (dV/dS)$, не может проходить траектория

$V = V^{U_2}(S)$, исходящая из той же начальной точки (S_k, V_k) . Выше второго ее участка, соответствующего управлению $U = -1$, фазовая точка также не может оказаться, так как тогда она не попадает в положение $(S_{k+1}, \bar{V}_{k+1}(S_{k+1}))$ ни при каком возможном управлении $U = U_2(t)$.

Если бы мы искали оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения (S_k, V_k) в положение (S_{k+1}, V_{k+1}) , причем $V_{k+1} \leq \bar{V}_{k+1}(S_{k+1})$, то получили бы управление

$$U(t) = \begin{cases} \bar{U}(V(t)) & \text{при} \quad t_k \leq t < t'_n \\ -1 & \text{при} \quad t'_n \leq t < t_{k+1} \end{cases}, \quad (12a)$$

где $t'_n < t_n$ (см. рис. 4).

Легко показать, что управление (12) является самым оптимальным из всех управлений (12a). А отсюда следует вывод, что управление (12) есть оптимальное управление из всех управлений, переводящих точку из положения (S_k, V_k) на множество

$$\begin{cases} S = S_{k+1} \\ V \leq \bar{V}_{k+1}(S_{k+1}) \end{cases}$$

Таким образом, на участке $S_k \leq S \leq S_{k+1}$ без ограничения на скорость движения поезда оптимальным управлением является управление (10), если $V^{\bar{U}}(S_{k+1}) \leq \bar{V}_{k+1}(S_{k+1})$. Если же $V^{\bar{U}}(S_{k+1}) > \bar{V}_{k+1}(S_{k+1})$, то оптимальным управлением является управление (12).

4. Рассмотрим теперь участок пути $S_{k+1} \leq S \leq S_{k+2}$, на котором задано ограничение на скорость: $V \leq \bar{V}_{k+1}(S)$. Требуется среди всех возможных управлений, переводящих фазовую точку из положения $(S_{k+1}, V(S_{k+1}))$ на множество $\begin{cases} S = S_{k+2} \\ V \leq \min \{\bar{V}_{k+1}(S_{k+2}), \bar{V}_{k+2}(S_{k+2})\} \end{cases}$, найти оптимальное.

а) Предположим сначала, что уравнение

$$\frac{\gamma [f(\bar{V}_{k+1}(S), U) - W(\bar{V}_{k+1}(S)) - \alpha(S)]}{\bar{V}_{k+1}(S)} = \frac{d\bar{V}_{k+1}(S)}{dS} \quad (13)$$

для всех S из интервала $S_{k+1} \leq S \leq S_{k+2}$ имеет решение $U_r(S) \in [-1, \bar{U}(\bar{V}_{k+1}(S))]$. Это будет соответствовать тому, что траектории, соответствующие управлению $\bar{U}(V(t))$, могут пересекать границу $V = \bar{V}_{k+1}(S)$ лишь снизу вверх. Пусть еще $\bar{V}_{k+1}(S_{k+1}) > \bar{V}_{k+2}(S_{k+2})$. В этом случае справедливы следующие утверждения, доказательство которых не представляет труда.

Если $V^{\bar{U}}(S_{k+2}) < \bar{V}_{k+2}(S_{k+2})$, то оптимальным управлением является управление (10) (см. траекторию I, рис. 5).

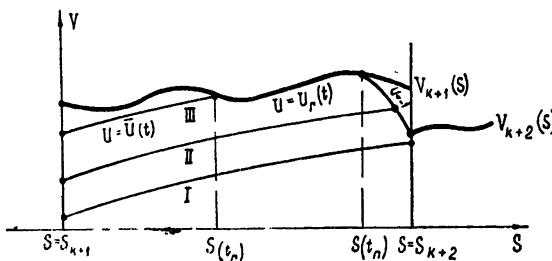


Рис. 5.

Управление (12), если оно соответствует траектории II, тоже является оптимальным.

Относительно управления

$$U(t) = \begin{cases} \bar{U}(V(t)) & \text{при } t_{k+1} \leq t < t_r \\ U_r(t) & \text{при } t_r \leq t < t_n \\ -1 & \text{при } t_n \leq t < t_{k+2} \end{cases}, \quad (14)$$

соответствующего оптимальной траектории вида III, заметим, что если $V(t_{k+1}) = \bar{V}_{k+1}(S_{k+1})$, то выпадает первый участок траектории III, соответствующий управлению $U = \bar{U}(V(t))$. Если же $\bar{V}_{k+2}(S_{k+2}) > \bar{V}_{k+1}(S_{k+2})$, то выпадает третий участок, соответствующий управлению $U = -1$. Если же $V(t_{k+1}) = V_{k+1}(S_{k+1})$ и $\bar{V}_{k+2}(S_{k+2}) > \bar{V}_{k+1}(S_{k+2})$, то остается лишь один участок траектории III, соответствующий управлению $U = U_r(t)$.

б) Может случиться, что при движении поезда со скоростью $V = \bar{V}_{k+1}(S)$, начиная с некоторого момента времени $t = t_{kp}$, значение управления $U_r(S)$, находящееся из (13), превзойдет по величине $\bar{U}(\bar{V}_{k+1}(S))$ и, следовательно, перестанет быть допустимым. В этом случае на границе $V = \bar{V}_{k+1}(S)$ существуют участки, на которых фазовые траектории, соответствующие управлению $U = \bar{U}(V(t))$, пересекают эту границу сверху вниз. Это имеет место при больших значениях уклона $\alpha(S)$ или $d\bar{V}_{k+1}(S)/dS$.

Пусть на границе $V = \bar{V}_{k+1}(S)$ имеется один такой участок. В этом случае оптимальным управлением будет управление

$$U(t) = \begin{cases} \bar{U}(V(t)) & \text{при } t_{k+1} \leq t < t'_r \\ U_r(S(t)) & \text{при } t'_r \leq t < t_{kp} \\ U(V(t)) & \text{при } t_{kp} \leq t < t''_r, \\ U_r(S(t)) & \text{при } t''_r \leq t < t_n \\ -1 & \text{при } t_n \leq t < t_{k+2} \end{cases}, \quad (15)$$

соответствующее траектории, изображенной на рис. 6.

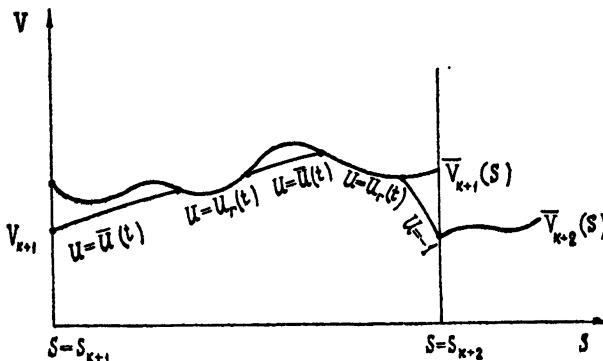


Рис. 6.

Следует опять отметить, что некоторые из участков управления в (15) могут выпадать. В то же время подобных „срывов“ оптимальной траектории с границы $V = \bar{V}_{k+1}(S)$ может быть несколько на участке $S_{k+1} \leq S \leq S_{k+2}$.

5. Пусть мы последовательно нашли указанным выше образом оптимальные управления $U_k^{\text{опт}}(t)$ ($t_k \leq t < t_{k+1}$) для каждого участка $S_k \leq S \leq S_{k+1}$, начиная с $k=0$. При этом конечные значения $S(t_{k+1}) = S_{k+1}$ и $V(t_{k+1}) = V_{k+1}$ для k -го участка являлись начальными значениями для $k+1$ -го участка.

Покажем, что управление

$$U^{\text{опт}}(t) = \begin{cases} U_0^{\text{опт}}(t) & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ U_1^{\text{опт}}(t) & \text{при } t_1 \leq t < t_2 \\ \dots & \dots \\ U_{N-1}^{\text{опт}}(t) & \text{при } t_{N-1} \leq t < t_N = T \end{cases}, \quad (16)$$

где $U_k^{\text{опт}}(t)$ ($t_k \leq t < t_{k+1}$)—оптимальное управление на k -ом участке, переводит фазовую точку из положения (S_0, V_0) в положение $(S_{\text{кон}}, V_{\text{кон}})$ по оптимальной в смысле быстродействия траектории из всех траекторий, удовлетворяющих заданному ограничению $V(S) \leq \bar{V}(S)$.

Действительно, если взять любое другое управление $U'(t)$ ($0 \leq t \leq T$), то в силу свойств траектории $V^{U^{\text{опт}}}(S)$, о которых говорилось выше, мы будем иметь $V^{U^{\text{опт}}}(S) \geq V^{U'}(S)$ для всех S , из $S_0 \leq S \leq S_{\text{кон}}$, причем на некотором участке пути будет справедливо неравенство $V^{U^{\text{опт}}}(S) > V^{U'}(S)$.

Рассматривая интегралы

$$T = \int_{S_0}^{S_{\text{кон}}} \frac{dS}{V^{U^{\text{опт}}}(S)}, \quad T' = \int_{S_0}^{S_{\text{кон}}} \frac{dS}{V^{U'}(S)},$$

получим $T < T'$, что и доказывает оптимальность управления (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понtryагин, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М., 1961.
- 2 Правила тяговых расчетов для поездной работы, Трансжелдориздат, М., 1961

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьком университете

Поступила в редакцию
22 марта 1963 г.

ON A PROBLEM OF OPTIMUM CONTROL

V. P. Saveljev

A problem is being considered of optimum control (relative to the travelling time) of the electric locomotive under certain restriction or speeds of locomotive and without any one on the overheating of its engines (motors). The control obtained with the help of necessary conditions of L. S. Pontriagin's maximum principle is proved to be really optimum.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПОИСКА

Б. А. Арефьев

Исследован процесс поиска экстремума в распространенных системах с постоянной (по модулю) скоростью входной величины при смещении характеристики в любом направлении с постоянной скоростью. Учитывается инерционность объекта и вмешательство в процесс поиска коммутатора, создающего принудительные реверсы исполнительного устройства

1. Исходные положения. Одной из основных задач теории экстремального регулирования является исследование поведения экстремальных систем при воздействии возмущений. Экстремальная характеристика объекта $y = f(x)$ при действии возмущений может смещаться как по оси ординат, так и по оси абсцисс, при этом может нарушаться процесс поиска и даже его устойчивость. Если возмущения кратковременны или имеют скачкообразную форму, то соответствующим выбором начала отсчета вопрос сводится к изменению начальных условий автономной системы. В общем случае приходится учитывать возмущения в самих уравнениях движения и поиск организовывать так, чтобы внешние воздействия не нарушали нормального функционирования регулятора.

Будем рассматривать один из наиболее распространенных классов экстремальных систем, в которых скорость поискового воздействия постоянна (по модулю). Еще в 1944 г. В. В. Казакевичем было отмечено, что для таких систем при интенсивных возмущениях может происходить срыв поиска. Более подробно такая же система, но со специальным устройством—динамическим преобразователем рассматривалась Юркевичем [1]. Объект считался безынерционным и предполагалось, что его характеристика равномерно смещается только по оси y .

Мы будем рассматривать ту же задачу в более широкой постановке: объект считаем инерционным и предполагаем, что возмущения вызывают равномерное смещение не только по оси y , но и по оси x . Если, как это обычно делается [1], принять, что в начальный момент начала отсчета совпадает с вершиной экстремальной характеристики, то уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sigma q; \\ y_1(t) &= -k[x(t) + \alpha t]^2; \\ \dot{T}y(t) + y(t) &= y_1(t) + \beta t.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь α —скорость смещения характеристики по оси x , β —по оси y (при $\alpha > 0$ характеристика смещается влево, при $\beta > 0$ —поднимается), T —постоянная времени объекта, x —его вход, y —выход, q —скорость сервомотора; знак σ определяется в зависимости от состояния системы, управляющей функцией принятого вида регулятора, коэффициент k зависит от статических свойств объекта.

Отметим, что уравнения (1.1) описывают движение системы

или, как удобнее говорить, точки, изображающей ее состояние, в неподвижной плоскости (x, y) . Такая система отсчета общепринята для задач стабилизации, но она оказывается не совсем удобной для нашей экстремальной задачи, где само положение экстремума, в которое должна приходить изображающая точка при нормально функционирующем регуляторе, меняется со временем.

Целесообразнее здесь вести исследование в подвижной системе координат (которую далее обозначим $\xi_0\eta$) с началом в экстремальной точке O_1 и поступательным движением в плоскости x, y . При $\alpha=0$ и $\beta=0$ обе системы совпадают. Движение изображающей точки в плоскости ξ, η показывает, насколько хорошо экстремальный регулятор выполняет свою основную задачу. Подвижная плоскость, по существу, совпадает с плоскостью изображения состояний для обычных задач стабилизации и формулировка основных требований переносится и на нее. Если, например, изображающая точка при $t \rightarrow \infty$ попадает в начало отсчета, то можно говорить об асимптотической устойчивости поиска, в системе координат $\xi_0\eta$ можно сформулировать определение устойчивости поиска, аналогичное устойчивости по Ляпунову и т. п. Заметим, что введенный способ отсчета координат приводит к несколько непривычным результатам. Так, например, система с выключенным регулятором и неподвижным исполнительным устройством при равномерном смещении характеристики в этой системе отсчета оказывается неустойчивой. Но так и должно быть: система будет все более и более отставать от предписанного ей экстремального состояния.

2. Смещение экстремальной характеристики по оси y . Положим в (1.1) $\alpha=0$. При $\beta>0$ характеристика будет подниматься, при $\beta<0$ — опускаться. Система (1.1) теперь сводится к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma q, \\ T\dot{y} + y &= -kx^2 + \beta t. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вводя подвижную систему координат $\xi_0\eta$ с началом в экстремальной точке и связанную с характеристикой объекта, мы должны принять

$$\xi = x, \quad \eta = y - \beta t. \quad (2.2)$$

Используя (2.2), сведем (2.1) к одному уравнению:

$$\sigma a \frac{d\eta}{d\xi} + \eta = -k\xi^2 - T\beta, \quad (2.3)$$

где $a = Tq$. Без члена $-T\beta$ (2.3) не отличалась бы от известного уравнения [2]

$$\sigma a \frac{dy}{dx} + y = -kx^2, \quad (2.4)$$

описывающего поведение системы при неподвижной характеристике объекта (отсутствие возмущений). При построении траекторий все интегральные кривые (2.4) следует опустить вниз на $T\beta$ (при $\beta>0$), как это показано на рис. 1. При любом способе переключения исполнительного устройства изображающая точка, двигаясь по соответствующим участкам траектории, сможет в лучшем случае достичь вершины O'_1 параболы, никогда не достигая (при достаточно большом t) вершины экстремальной характеристики $\eta = -k\xi^2$, совпадающей с началом координатной системы $\xi_0\eta$.

Будем рассматривать обычные системы управления по производной или с „запоминанием экстремума“, пренебрегая нечувствительностью приборов. Реверс в этих системах производится при $dy/dt=0$ или $dy/dx=0$.

Учитывая, что $dy = d\eta + \beta dt$, условие переключения в подвижной системе запишем в виде

$$\frac{d\eta + \beta dt}{d\xi} = 0; \quad (2.5)$$

это равенство в силу первых уравнений (1.1) и (2.2) равносильно соотношению

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\beta \frac{dt}{d\xi} = -\frac{\beta}{\sigma q}. \quad (2.6)$$

Иными словами, переключения будут происходить не в точках, где касательные горизонтальны, а там, где угловой коэффициент касательной к интегральной кривой будет равен $-\beta/q$ при движении слева направо ($\sigma = +1$) или β/q при движении влево ($\sigma = -1$) (см. рис. 1)*.

Следует отметить, что точки переключения, как и для случая $\beta = 0$, по-прежнему будут лежать на статической характеристике $\eta = -k\xi^2$, что следует из (2.6) и (2.3). Однако не вся эта кривая является геометрическим местом точек переключения. Часть ее, включающая начало координат O и ограниченная интегральными кривыми, проходящими через вершину O_1 смещенной параболы, оказывается недостижимой при движении изображающей точки из области A . В пределе, при длительном воздействии возмущений, смещающих экстремальную характеристику вверх, в системе устанавливаются периодические движения, параметры которых можно рассчитать обычными методами, использовав, например, формулы и приемы, указанные в [2]. Движение и его анализ в системах с „запоминанием экстремума“ выполняется примерно так же: момент обращения производной dy/dt в нуль предшествует убыванию величины y .

Из приведенных рассуждений следует, что для случая равномерного поднятия параболической характеристики в регуляторах с управлением по чувствительности или с „запоминанием экстремума“ процесс сводится к периодическим движениям, и координата входа остается конечной. Область нормального поиска A оказывается несколько расширенной: хотя интегральные кривые строятся для смещенной характеристики с началом в O' , границы определяются исходной характеристикой в системе $\xi \eta$.

До сих пор рассматривался наиболее тяжелый случай, когда уровень экстремума возрастал. Опускание характеристики облегчает процесс поиска. Переключение будет происходить при $d\eta/d\xi = \beta/q$ ($\sigma = 1$) или $d\eta/d\xi = -\beta/q$ (при $\sigma = -1$), что эквивалентно некоторому упреждению переключений. Попав в вершину параболы $\eta = -k\xi^2 + T\beta$, изображающая точка будет удерживаться в ней в результате быстрого следующих одно за другим переключений сервомотора и пой-

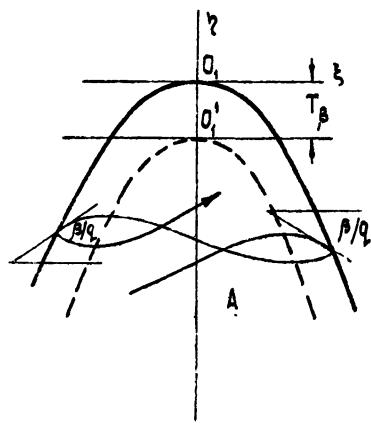


Рис. 1.

* В системе координат xOy петли на траектории могут иметь место только тогда, когда приборы обладают нечувствительностью

дет за экстремальной точкой, отставая от нее на $T\beta$. Примерно такой же характер будет иметь процесс при условии, что в силу начальных условий изображающая точка находилась над параболой, вне зоны A нормального поиска. Быстро следующие одно за другим переключения исполнительного устройства, обусловленные самим построением управляющей функции регулятора, будут удерживать его координату x примерно постоянной. Изображающая точка апериодическим движением, вызванным самовыравниванием объекта, будет перемещаться по вертикали, стремясь к положению, отстающему на $T\beta$ от соответствующей точки на экстремальной характеристике.

3. Работа системы с коммутатором. Для предотвращения последствий срыва поиска и возможных ложных срабатываний Казакевичем [8] было предложено устройство — коммутатор, осуществляющий принудительный реверс через определенные промежутки времени, при условии, если не поступает других сигналов с управляющего устройства.

Рассмотрим работу системы с коммутатором, взводящимся каждый раз от срабатывания сигнум-реле [1]. Если начальные условия таковы, что изображающая точка находится далеко от вершины параболы и ее границ, то переключения наступают через время, равное периоду коммутатора T_k , за которое регулирующий орган сместится вправо или влево на T_{kq} . Траектория будет состоять из отрезков 1—2—3—4

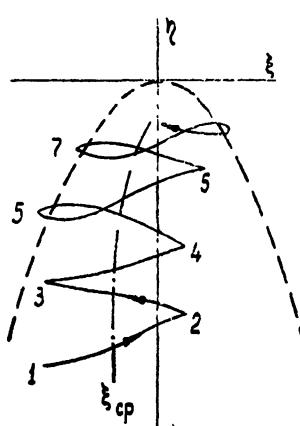


Рис. 2.

(рис. 2) интегральных кривых уравнения (2.3), концы которых лежат на вертикальных прямых. Среднее значение ξ_{cp} не изменяется. В дальнейшем на одной стороне будут выполняться условия переключения от сигнум-реле (точки 5—7)*, на другой переключение осуществляется коммутатором. Поскольку коммутатор взводится при каждом переключении сигнум-реле, путь, проходимый в одном направлении, сохраняется (T_{kq}), в другом направлении — сокращается. Среднее значение входной величины приближается к ее экстремальному значению, что было отмечено и в [3]. Рано или поздно и на другой стороне переключения будут происходить только от сигнум-реле, которое берет на себя все операции управления процессом. В дальнейшем может установиться колебательный цикл,

о котором говорилось выше.

Возможны случаи, когда при некотором β период колебаний окажется меньше периода движений, вызванных коммутатором. Тогда может установиться процесс, в котором часть переключений будет вызвана срабатыванием сигнум-реле, часть — коммутатором.

4. Смещение экстремальной характеристики по оси x . Система уравнений (1.1) для этого случая имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma q, \\ y_1 &= -k(x + \alpha t)^2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

* При построении кривых на рис. 3 и последующих рисунках учитывается возможная нечувствительность приборов.

$$Ty + y = y_1.$$

Будем рассматривать процесс в подвижной системе координат $\xi_0\eta$, перемещающейся вместе с характеристикой. Ясно, что

$$\begin{aligned} \xi &= x + \alpha t, \\ \eta &= y. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Преобразовывая систему (4.1) к одному уравнению, мы учтем, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} + \alpha = \sigma q + \sigma, \quad (4.3)$$

и исключая dt при $\sigma=1$, получим уравнение

$$a_1 \frac{d\eta}{d\xi} + \eta = -k\xi^2, \quad (4.4)$$

где $a_1 = T(\alpha+q)$, а при $\sigma=-1$ — уравнение

$$a_2 \frac{d\eta}{d\xi} + \eta = -k\xi^2, \quad (4.4a)$$

где $a_2 = T(\alpha-q)$.

Уравнения (4.4) и (4.4a) показывают, что при $q > \alpha$ в системе $\xi_0\eta$ траектории строятся примерно так же, как в системе x_0y при неподвижной характеристике, с той лишь разницей, что при движении регулирующего органа навстречу движению характеристики (скажем, при $\sigma=1, \alpha>0$) темп движения по оси η падает, по оси ξ — нарастает (см. (4.3)). Увеличение a на $T\alpha$ можно трактовать как фиктивное увеличение постоянной времени. При согласном движении наблюдается обратная картина. Искажение траекторий вследствие движения характеристики происходит так, как это указано на рис. 3а, б.

Используя (4.3), производную $d\eta/d\xi$ в нашем случае, когда $\eta=y$, можно представить так:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{(\sigma q + \alpha) dt}. \quad (4.5)$$

Поскольку наши идеализированные (без нечувствительности) приборы в неподвижной системе x_0y создают сигнал реверса при $dy/dt=0$ или $dy/dx=0$, ясно, что и в подвижной системе $\xi_0\eta$ в силу (4.5) реверс будет происходить опять на экстремальной характеристике (параболе $\eta = -k\xi^2$). В этом смысле смещение характеристики по оси x не вызывает изменений в процессе образования реверсов.

За пределами области A , лежащей под характеристикой, при любом α не может быть длительных движений исполнительного устройства в одну сторону. Координата x изображающей точки удерживается примерно постоянной, что в наших уравнениях можно отразить, полагая $\sigma=0$. Для определения траекторий существенно, что в любых движениях вертикальная компонента скорости точки, изображающей состояние системы, зависит только от ее расстояния до характеристики и скорости последней в направлении оси y , но не

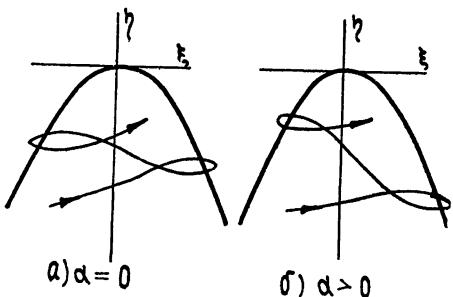


Рис. 3.

зависит от каких-либо компонент в направлении оси x . Вертикальная компонента скорости определяется внутренним свойством объекта — его самовыравниванием — и непосредственно не зависит от входного воздействия. Действительно, если из уравнения объекта

$$\dot{Ty} + y = -kx^2 + \beta t$$

вычесть уравнение экстремальной характеристики

$$y_{\text{хар}} = -kx^2 + \beta t,$$

то получим выражение для вертикальной скорости

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T} (y_{\text{хар}} - y), \quad (4.6)$$

подтверждающее сказанное. В подвижной системе, используя (2.2), получим относительную скорость

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{T} (y_{\text{хар}} - \eta - \beta t) - \beta = \frac{1}{T} (\eta_{\text{хар}} - \eta) - \beta$$

или, что же самое,

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{T} (-k\xi^2 - \eta) - \beta. \quad (4.7)$$

Легко проверить, что зависимости (4.6) и (4.7) не меняются при учете смещения характеристики и по оси x .

Используя (4.5) при $\beta=0$, полагая $\sigma=0$ и используя (4.7), получаем уравнение траекторий на плоскости $\xi_0\eta$ вне области A :

$$T\alpha \frac{d\eta}{d\xi} + \eta = -k\xi^2, \quad (4.8)$$

которое только значением коэффициента при $d\eta/d\xi$ отличается от (4.4).

Решение (4.8) имеет вид

$$\eta = Ce^{-\frac{\xi}{\alpha T}} - k[\xi^2 - 2T\alpha\xi + 2(T\alpha)^2], \quad (4.9)$$

где C — постоянная интегрирования.

Интегральные кривые изображены на рис. 4; движение по ним идет в направлениях, указанных стрелками. При некоторых начальных условиях изображающая точка попадает на границу области A , очерченной экстремальной характеристикой; далее процесс будет развиваться обычным порядком, как это отмечено пунктиром. Однако существуют начальные условия, при которых траектория не попадает на параболу (кривая 1—1). Тогда процесс будет неустойчив: при больших t система будет удаляться

Рис. 4.

от экстремального режима. Кривая, проходящая через начало координат, разделяет оба типа возможных движений. Анализ показывает, что вся правая ветвь параболы (при $\alpha < 0$ — левая) должна быть отне-

сена к неустойчивым состояниям (или, условно, полуустойчивым). Достаточно здесь будет одного нарушения переключения, как изображающая точка попадет на траекторию неустойчивого типа и станет удаляться от экстремального положения со скоростью α по оси ξ .

Важно отметить, что при всех этих движениях, совершающихся вне области A нормального поиска, коммутатор не вмешивается в работу системы, так как он взводится, не успевая сработать, после каждого быстро следующего одно за другим переключения, вызванного сигнум-реле и схемой управления. По-видимому, единственным средством придания устойчивости системе поиска в этом случае будет введение дополнительного устройства, замеряющего скорость по оси u или частоту переключения и при увеличении указанных величин отключающего от сигнум-реле взвод коммутатора и исполнительное устройство. Коммутатор желательно использовать улучшенного типа [3, 5], увеличивающий шаг в сторону больших приращений за время прямого или возвратного движения исполнительного устройства. Примерный ход траектории в этом случае будет иметь вид, изображенный на рис. 5. Вне зоны A (при работе системы управления от одного коммутатора) процесс между срабатываниями последнего идет в соответствии с уравнениями (4.4) и (4.4a). Движение вправо совершается с большей скоростью по оси ξ , но меньшей по оси u , влево — наоборот (участки 1—2 и 2—3 соответственно). В последующих движениях система управления с коммутатором заставляет регулирующий орган делать меньший шаг вправо, но больший влево (3—4 и 4—5). Изображающая точка приближается к области нормального поиска A .

Рассмотрим работу системы с коммутатором в области A . При достаточном удалении изображающей точки от экстремума и от границ реверсы будут определяться только коммутатором, движение — протекать в согласии с уравнениями (4.4) и (4.4a). Время перемещения в каждом направлении будет одинаково (T_k), но в силу разности скоростей в относительном движении среднее положение будет смещаться в направлении, противоположном движению характеристики (участки траектории 1—2—3 на рис. 6). Когда точка попадает на границу области (точка 4), вступает в действие сигнум-реле; в обратном направлении реверс осуществляется коммутатором (точка 5). Среднее значение ξ_{cp} будет приближаться к экстремальному ее значению $\xi=0$. Затем вступит в действие сигнум-реле, реверсируя и исполнительное устройство на обеих сторонах параболы. В системе могут установиться несимметричные автоколебания. В этом случае, когда расчетный период возможных периодических движений окажется больше $2T_k$, установится сложное движение, о котором говорилось в разделе 3.

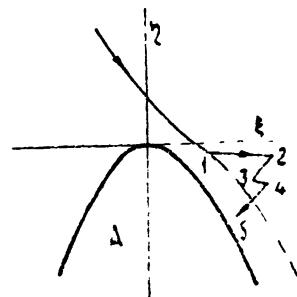


Рис. 5.

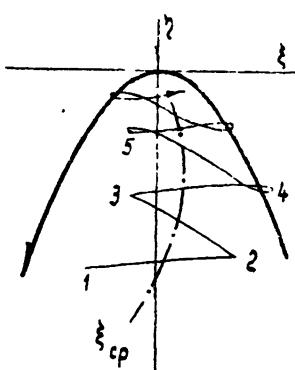


Рис. 6.

5. Общий случай $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Система с коммутатором. Теперь

уже нетрудно будет рассмотренные частные случаи объединить, полагая, что характеристика равномерно движется со скоростью α в направлении отрицательных x и со скоростью β по оси y . Положив

$$\xi(t) = x(t) + \alpha t, \quad \eta(t) = y(t) - \beta t, \quad (5.1)$$

вместо (1.1) будем иметь систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \sigma q + \sigma, \\ y_1(t) &= -k\eta^2(t), \\ T\dot{\eta}(t) + \eta(t) &= y_1(t) - T\beta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Сводя, так же как и в разделе 4, систему (5.2) к одному уравнению, получим при $\sigma=1$

$$a_1 \frac{d\eta}{d\xi} + \eta = -k\xi^2 - T\beta \quad (5.3)$$

и при $\sigma=-1$

$$a_2 \frac{d\eta}{d\xi} + \eta = -k\xi^2 - T\beta. \quad (5.4)$$

Значения постоянных a_1 и a_2 указаны выше.

Построение траекторий изображающей точки производится с учетом сделанных ранее выводов. Движение характеристики вверх вызывает смещение всей картины относительно системы отсчета вниз на $T\beta$ и, кроме того, вносит фиктивную нечувствительность: переключение происходит при $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\beta}{q}$, а не $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, смещение характеристики со скоростью α в направлении оси x нарушает симметрию. Кроме того, изменяется темп движения по направлению осей ξ и η : при движении вправо скорости в направлении оси ξ увеличиваются, по оси η движение замедляется. При движении влево наблюдается обратная картина. На рис. 7 произведено построение траекторий с учетом этих замечаний.

При продолжительном воздействии возмущений процесс сводится к несимметричным колебаниям.

Работа системы с коммутатором в общем случае объединяет в себе черты явлений, описанных выше. При значительном удалении изображающей точки от экстремальной характеристики последовательность переключений определяется одним коммутатором. Среднее значение координаты ξ_{cp} перемещается навстречу движению характеристики. Затем с одной стороны переключения начинают производиться сигнум-реле, ξ_{cp} уменьшается, среднее положение регулирующего органа в неподвижной системе координат перемещается вслед за экстремальной характеристикой. В конце концов около экстремальной точки устанавливаются несимметричные колебания, вызванные или переключениями одного сигнум-реле, или сигнум-реле с одной стороны и коммутатора с другой.

При начальных условиях, обусловливающих движение изображающей точки вне области нормального поиска A , процесс будет

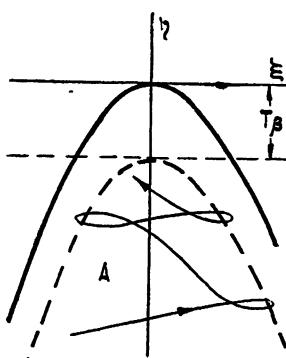


Рис. 7.

развиваться всюду одинаково: быстро следующие одно за другим переключения исполнительного устройства, вызванные системой управления регулятора, будут удерживать координату регулирующего органа примерно постоянной. Состояние сигнум-реле можно охарактеризовать условием $\sigma=0$. Коммутатор взводится после каждого сигнала сигнум-реле, не успевая сработать. Все ранее сделанные замечания о возможности получения неустойчивого поиска, разумеется, переносятся и на общий случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Юркевич, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 6, 30 (1960).
2. Б. А. Арефьев, Автоматика, № 4, 42 (1962).
3. В. В. Казакевич, Труды совещания по автоматическому управлению и вычислительной технике, Машгиз, М., 1959.
4. В. В. Казакевич и А. В. Алферов, Авт. свид. № 129252 от 25 сент 1959.
5. Б. А. Арефьев, Авт. свид. № 149141 от 27 окт. 1961.

Ленинградский институт точной механики и оптики

Поступила в редакцию
2 февраля 1963 г.

ON THE STABILITY OF THE EXTREMAL CONTROL WITH A CONSTANT SEARCH SPEED

B. A. Arefyev

The extremum search process has been examined in the common systems with a constant modulus of speed of the input value, the characteristic being shifted with a constant speed in any direction. The object inertias is taken into account as well as the commutator interference into the search proce causing the forced reverses of the executive element.

НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ СОВМЕЩЕНИЯ УСТРОЙСТВ ОПЕРАТИВНОЙ И ПОСТОЯННОЙ ПАМЯТИ

Н. С. Анишин

Рассматриваются три способа совмещения ферритовой оперативной и постоянной памяти.

Одним из наиболее распространенных и перспективных типов запоминающих устройств (ЗУ) электронных цифровых машин являются устройства на материалах с прямоугольной петлей гистерезиса (ферритах). Несмотря на то, что принципы построения оперативных и постоянных ЗУ на ферритах во многом схожи [1], в электронных цифровых машинах они выполняются в виде самостоятельных блоков. Некоторые узлы этих блоков по устройству и функциональному назначению одинаковы и могут быть использованы комплексно, т. е. как для оперативных, так и для постоянных ЗУ. Это позволяет в целях сокращения оборудования, габаритов, веса и т. п. (особенно для управляющих цифровых машин) совмещать устройства оперативной и постоянной памяти в тех цифровых машинах, где используются оба вида памяти.

Следует заметить, что при соответствующем подходе к конструированию таких ЗУ информационные характеристики (емкость информации, время обращения к хранимой информации, помехоустойчивость, надежность в работе и т. д.) совмещенных ЗУ могут быть не хуже, чем у раздельно выполняемых ЗУ. Ниже рассматриваются несколько способов совмещения ферритовой оперативной и постоянной памяти типа „*z*“.

Прежде чем начать рассмотрение способов совмещения, введем определения следующих понятий:

а)читывающий импульс—импульс тока чтения, посылаемый адресным (в частности, магнитным) ключом в числовую линейку;

б)читывающая обмотка—обмотка, проходящая через ферритовый сердечник, в которой возникают электрические сигналы при его перемагничивании;

в) считанный импульс—импульс напряжения, возникшего в обмотке считывания как результат „опроса“ данного ферритового сердечника;

г) записывающая обмотка—обмотка, по которой пропускается ток, переводящий (самостоятельно или совместно с другими токами) ферритовый сердечник в состояние „1“.

1. СОВМЕЩЕНИЕ СЧИТЫВАЮЩИХ ОБМОТОК В ЧИСЛОВОЙ ЛИНЕЙКЕ

Упрощенная блок-схема устройства совместного хранения оперативной и постоянной информации на ферритах приведена на рис. 1. Его основную часть составляют функциональные блоки ферритового оперативного запоминающего устройства типа „*z*“.

В ферритовом кубе 1 оперативной памяти сделана запись постоянной информации „прошивкой“ ферритов дополнительными проводами,

являющимися обмотками считывания постоянной информации. Для каждого разряда они проходят так же, как и обмотка считывания оперативной информации. Однако в отличие от обмотки считывания оперативной информации, которая проходит через все ферриты дан-

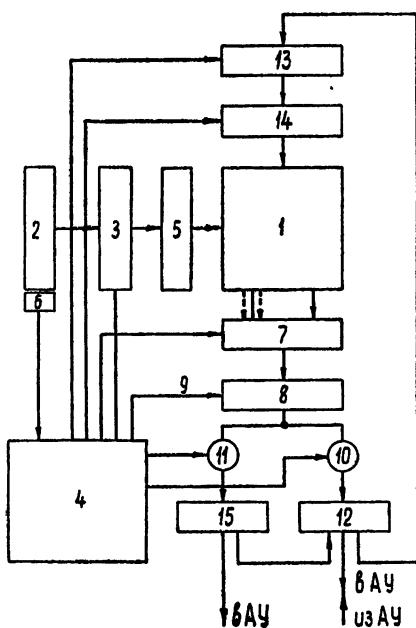


Рис. 1. Блок-схема совмещенного ЗУ:

1—ферриговий куб, 2—регистр адресов, 3—дешифратор, 4—блок управління, 5—усилители селектирующих импульсов, 6—триггер, 7—коммутатор, 8—усилитель считывания, 9—стробирующий импульс, 10, 11—клапаны, 12—регистр оперативной информации, 13—клапаны записи, 14—усилители записи и регенерации, 15—регистр постоянной информации.

ного разряда одинаково, они (в каждом разряде своеобразно) проша-
вают ферриты по-разному, что зависит от содержания постоянной
информации.

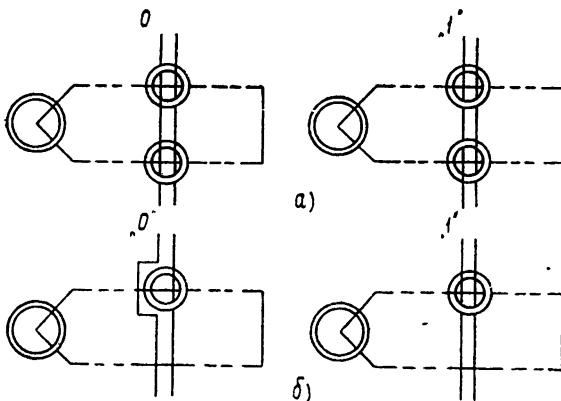


Рис. 2. Схема прошивки ферритов.

Схема прошивки ферритов обмотками считывания оперативной и постоянной информации показана на рис. 2а (прошиты два феррита—рабочий и компенсационный—на разряд) и рис. 2б (прошит один феррит на разряд).

В блок-схеме имеется регистр адресов оперативной и постоянной

информации 2 с триггером признака адреса 6. На этот регистр поступают адреса считываемых чисел, а также адреса, по которым записывается оперативная информация. Адрес через дешифратор 3 передается на возбуждение усилителей селектирующих импульсов 5, которые посылают в ферритовый куб токовые импульсы чтения или записи.

При считывании чисел в обмотке считывания оперативной информации и в обмотке считывания постоянной информации появляются электрические сигналы. Эти сигналы поразрядно подаются на коммутатор данного разряда 7, который по команде из блока управления 4 в зависимости от признака адреса (триггер 6) подключает к усилителю считывания 8 обмотку считывания оперативной или постоянной информации. На усилители считывания всех разрядов от блока управления приходит стробирующий импульс 9. Усилители считывания через клапаны 10 и 11 связаны с регистром оперативной информации 12 и регистром постоянной информации 15. Схема записи и регенерации оперативной информации работает так же, как и до совмещения.

Считывание постоянной информации по какому-либо адресу сопровождается считыванием оперативной информации по тому же адресу. Поэтому, чтобы не вызвать потерю оперативной информации по данному адресу, процесс считывания постоянной информации по этому же адресу протекает в следующем порядке, задаваемом блоком управления: а) считывание оперативного числа и передача его в регистр 12, б) запись вместо него числа, имеющего во всех разрядах „1“, в) вторичное считывание по тому же адресу теперь уже постоянного числа и передача его в регистр 15, г) запись числа оперативной информации из регистра 12 в куб по старому адресу.

Относительно пункта б) следует отметить, что при использовании прошивки, показанной на рис. 2а, может производиться запись любого числа, в частности, числа, состоящего из одних нулей, ибо при считывании „0“ перемагничивается компенсационный феррит, через который также проходит считающая обмотка постоянной информации.

При обращении к ОЗУ и к ПЗУ нагрузка на адресный ключ изменяется незначительно, ибо обмотки считывания оперативной или долговременной информации не отводят большой мощности даже в том случае, когда они коммутатором подключены к усилителю считывания, а основная мощность, посылаемая адресным ключом, идет на перемагничивание ферритов (и нагрев балластного сопротивления).

При использовании такого способа совмещения время обращения к постоянной информации T_d определяется по формуле

$$T_d = 2T_o - t_{ad}, \quad (1)$$

где T_o — время обращения к оперативной информации t_{ad} — время на установку адреса и выборку его дешифратором. Время t_{ad} вычитается потому, что при двух обращениях к ЗУ используется один и тот же адрес. Цикл обращения к ОЗУ не меняется.

Максимально возможная емкость и разрядность постоянного ЗУ равна емкости и разрядности оперативного ЗУ. Если же в качестве коммутатора 7 использовать многовходовый (например, $m+1$ входов) коммутатор и сделать m независимых обмоток считывания постоянной информации, то с одним оперативным ЗУ можно совместить m одинаковых по емкости и разрядности постоян-

ных ЗУ, содержащих различную информацию. В этом случае триггер признака 6 заменяется регистром признака адреса 6, который будет иметь N разрядов; здесь N определяется по формуле

$$N = \Delta\phi + \log_2(m+1), \quad (2)$$

где $\Delta\phi$ —величина, заключенная в интервале от 0 до 1 и приводящая значение N к целому числу.

Согласно показаниям регистра признака адреса, который фактически будет частью адреса постоянной информации, блок управления будет производить через коммутатор 7 выбор (из $m+1$) той или иной обмотки считывания в каждом разряде.

Таким образом, емкость постоянной памяти может быть в m раз больше емкости оперативной. Практически m ограничивается несколькими факторами:

- а) геометрическими размерами феррита,
- б) конструктивными возможностями размещения выходных контактов для обмоток считывания в каждой кассете,
- в) помехоустойчивостью коммутатора.

При реализации данного способа совмещения возникают трудности, связанные с его особенностями. Так, например, затрудняется замена неисправных ферритов МОЗУ на запасные, поскольку ферриты здесь привязаны к постоянной информации и не являются равноправными.

2. СОВМЕЩЕНИЕ СЧИТЫВАЮЩИХ ОБМОТОК ВНЕ ЧИСЛОВОЙ ЛИНЕЙКИ

Второй способ отличается от первого тем, что в каждой числовой линейке все разрядные считающие обмотки постоянной информации вынесены за пределы линейки, а иногда даже за пределы кассеты. Они проходят через отдельный феррит по схеме, показанной на рис. 3. Этот феррит перемагничивается током $I_{\text{чт}}$ в состояние $+B_r$, а током $I_{\text{зп1}}$ —в состояние $-B_r$. Токи $I_{\text{чт}}$ и $I_{\text{зп1}}$

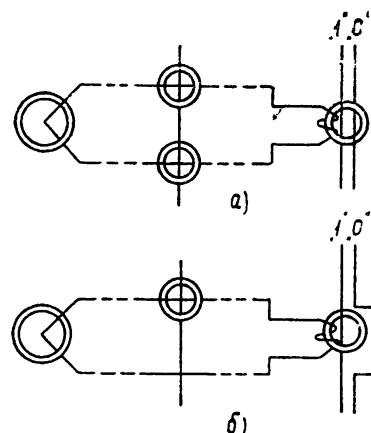


Рис. 3 Схема прошивки ферритов.

посылаются в линейку при записи или опросе данного адреса магнитным ключом. Провода тех разрядов, в которых в данном числе постоянной информации должна считываться „1“, проходят сквозь отверстие этого отдельного феррита, а в которых „0“,—проходят мимо (рис. 3а). В случае использования в оперативном ЗУ двух сердечников на разряд, провода, записывающие „1“, идут через отдельный феррит в направлении, встречном направлению проводов, записывающих „0“ (рис. 3б).

В этой схеме совмещения обмотки записи оперативной информации хотя и проходят параллельно обмоткам считывания постоянной информации, но они находятся друг от друга на сравнительно большом расстоянии, поэтому наводки первых на вторые практически отсутствуют. Такое разнесение в пространстве обмоток записи оперативного ЗУ и обмоток считывания постоянного ЗУ позволяет совместить во времени регенерацию оперативного числа и считывание постоянного числа и получить время обращения к постоянному ЗУ, равное времени обращения к оперативному ЗУ.

Для этого случая последовательность действия такова:

а) считывание оперативного числа по какому-либо адресу и передача его в регистр 12;

б) регенерация этого числа в оперативную память по прежнему адресу и одновременное считывание постоянного числа по тому же адресу, а также передача его в регистр 15.

Опрашивающим током для постоянного ЗУ будет ток записи оперативного ЗУ, посылаемый в линейку данного адреса соответствующим магнитным ключом. Так как при регенерации (записи) оперативной информации усилители считывания не нужны, то они коммутатором 7 подключаются к обмоткам считывания постоянного ЗУ и усиливают сигналы, поступающие при считывании постоянной информации.

Для данного способа совмещения остается в силе изложенное выше положение о совмещении с одним оперативным ЗУ нескольких постоянных ЗУ, одинаковых с ОЗУ по емкости.

Рассмотрим, что собой представляет коммутатор 7. О его сложности можно судить по одному из возможных конструктивных вариантов такого коммутатора, приведенному на рис. 4. Он состоит из трансформатора T , выполненного на оксифере и имеющего $m+1$ входных обмоток и одну выходную, соединенную с разрядным уси-

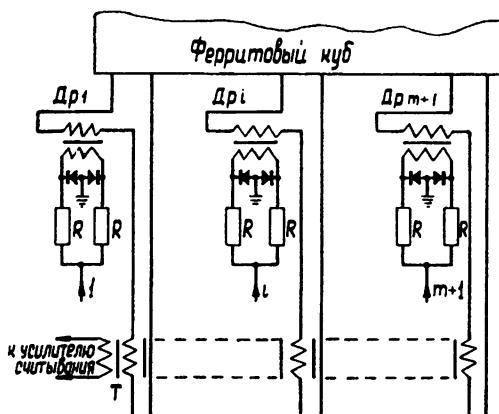


Рис. 4. Коммутатор сигналов считывания.

лителем считывания 8. Одна из первичных обмоток трансформатора T связана с обмоткой считывания оперативной информации, остальные—с m обмотками считывания постоянной информации. Эта связь осуществлена через дроссели на оксиферах $Dr_1 - Dr_{m+1}$, отличающихся от обычных дросселей тем, что у них, как у трансформаторов, есть вторичная обмотка, нагруженная на сопротивление $2R$. Это сопротивление сравнительно велико, поэтому сопротивление дросселей большое, и сигналы ни с одной (из $m+1$) считающей обмотки не проходят на трансформатор и, следовательно, на усилитель считывания.

Когда же надо подключить i -ую обмотку считывания на вход усилителя, в точку i подается отрицательный импульс тока. Он проходит через оба сопротивления и оба диода на „землю“. Диоды на время действия импульса оказываются в проводящем состоянии. Их динамическое сопротивление оказывается намного меньше сопро-

тивления $2R$ и поэтому шунтирует вторичную обмотку, а вместе с тем и первичную обмотку Др₁. Сопротивление Др₁ становится малым, и сигнал, считанный с i -ой обмотки практически полностью передается на трансформатор T , а через него на усилитель считывания.

Включение той или иной обмотки считывания производится блоком управления в зависимости от положений регистра адреса 6.

3. БЕСКОММУТАТОРНАЯ СХЕМА СОВМЕЩЕНИЯ

Основным преимуществом этой схемы является отсутствие коммутатора. Схема расположения и прошивки обмоток оперативной и постоянной информации такая же, как и во втором способе совмещения, но считающая обмотка постоянной информации в каждом разряде включена последовательно со считающей обмоткой оперативной информации. Кроме того, через все дополнительные ферриты постоянной информации проходит подмагничивающая обмотка, по которой проходит ток i_n .

Когда производится обращение к оперативной памяти, в подмагничивающую обмотку подается ток i_n , переводящий все дополнительные ферриты в область насыщения. Величина тока подмагничивания выбрана так, чтобы соблюдалось соотношение

$$|I_{\text{чт}} \omega_{\text{чт}}| < |i_n \omega_n|, \quad (3)$$

где $\omega_{\text{чт}}$ обычно равно 1, а ω_n — количество витков обмотки подмагничивания в дополнительном сердечнике.

Так как ток считывания, посыпаемый в линейку магнитным ключом, не изменяет состояния дополнительного феррита, то в считающей обмотке постоянной информации сигнал отсутствует и в общей обмотке появляется только сигнал оперативной памяти. Данный способ применим к системе типа „з“ с одним сердечником на разряд.

Считывание постоянной информации происходит в результате такой последовательности действий:

а) считывание оперативного числа по какому-либо адресу и передача его в регистр 12, выключение тока подмагничивания во всех дополнительных ферритах ПЗУ;

б) запись (вместо считанного) числа, состоящего из „0“ во всех разрядах;

в) вторичное считывание оперативного числа (все ферриты числовой линейки находятся уже в положении „0“) и одновременное считывание числа из постоянного ЗУ по тому же адресу и передача его в регистр 15;

г) включение тока подмагничивания и запись числа из регистра 12 по прежнему адресу в оперативное ЗУ.

Видим, что при считывании постоянного числа (пункт в) перемагничивается лишь дополнительный феррит, основные ферриты уже перед этим были опрошены и находились в нулевом положении. Так как вторичное считывание не изменило их состояния, то в считающей обмотке оперативной информации полезных сигналов не будет и, следовательно, на вход усилителя считывания поступят только сигналы постоянной памяти, которые и будут восприняты как код считываемого постоянного числа. Время обращения к постоянному ЗУ при использовании этого способа совмещения определяется по вышеупомянутой формуле (1).

При использовании в качестве адресного ключа трансформатора с двумя первичными обмотками (чтения и записи) и одной вторичной (нагруженной на числовую линейку) пункт б в последовательности действия адресного ключа можно исключить. В этом случае ток чтения и ток записи подаются от отдельных формирователей тока, возбуждаемых в любой последовательности, в отличие от координатных матриц с током смещения, где импульсы токов чтения и записи следуют один за другим.

За счет связи всех разрядов общими кольцами ПЗУ в обмотках считывания индуцируются сигналы, но уровень их незначителен.

Рассмотренными схемами совмещения оперативных и постоянных ЗУ не исчерпываются все возможные варианты такого совмещения. Применяя указанные способы совмещения, можно получать совмещенные ЗУ оперативной и постоянной информации, обладающие типовыми технико-экономическими характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Крайзмер, Устройства хранения дискретной информации, Госэнергоиздат, М.—Л., 1961.

Государственный Всесоюзный Центральный научно-исследовательский институт комплексной автоматизации

Поступила в редакцию
14 января 1963 г.

SOME METHODS OF MATCHING DEVICES WITH OPERATIVE AND PERMANENT MEMORY

N. S. Anishyn

Three methods of matching ferrite operative and permanent memory are considered.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

К МЕТОДИКЕ ПРЕЦИЗИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ «ИСКУССТВЕННОЙ ЛУНЫ»

H. M. Цейтлин

В последние годы был разработан метод, позволивший проводить весьма точные измерения интенсивности радиоизлучения и параметров антенны с использованием эталонного радиоизлучения диска, покрытого поглощающим материалом (см. [1–3]). В связи с повышением точности измерений возникла необходимость детального учета фонового радиоизлучения (атмосферы, космического радиоизлучения и радиоизлучения Земли). Ниже рассмотрено влияние радиоизлучения Земли из-за дифракционных явлений на диске, а также приведены соотношения, необходимые для учета фона.

1. При проведении измерений с использованием «искусственной Луны» («черного» диска)* приходится наблюдать диск под большими углами ϑ для уменьшения влияния радиоизлучения Земли, попадающего в антенну из-за дифракции на диске. На это обстоятельство было указано в [1], где приведена экспериментальная зависимость величины дифракционной поправки от угла наблюдения диска с диаметром $2a = 20\lambda$. Эту зависимость нетрудно оценить с достаточной точностью для различных значений $2a/\lambda$, что позволяет уменьшить погрешность измерений, а в ряде случаев наблюдать диск под небольшими углами места, что технически легче осуществимо.

Как известно [4, 5], температура антенны от теплового радиоизлучения какого-либо тела определяется величиной мощности излучения антенны, поглощенной в теле. Если дифрагированное на диске поле антенны попадает на Землю и при этом поглощается мощность αP_0 излучения антенны, то добавочное приращение температуры антенны от радиоизлучения Земли равно (считаем, что температура земной поверхности $T_0 = \text{const}$)

$$\Delta T_{a_3} = \alpha T_0, \quad (1)$$

где P_0 —полная излучаемая антенной мощность.

Используя (1), нетрудно показать, что приращение температуры антенны при приеме радиоизлучения диска относительно излучения (T_{Φ_d}) области неба, экранируемой диском, равно**

$$\Delta T_{a_d} = (T_0 - T_{\Phi_d})(1 + \xi)(1 - \beta_d)\eta, \quad (2)$$

где

$$\xi = \alpha/(1 - \beta_d), \quad (2a)$$

$(1 - \beta_d)$ —доля мощности, излучаемая антенной в телесный угол диска Ω_d . Соотношение (2) отличается от обычно используемого дифракционной поправкой ξ , определяемой значением α или ΔT_{a_3} .

Величину ΔT_{a_3} нетрудно найти, исходя из принципа Бабине (см., например, [6]). Согласно этому принципу, мощность P_r , рассеиваемая на абсолютно черном диске, равна по величине мощности, поглощаемой этим диском [7], т. е.

$$P_r = (1 - \beta_d) P_0. \quad (3)$$

Эта мощность P_r распределена в пространстве в соответствии с дифракционной диаграммой направленности диска F_d , совпадающей вне главного лепестка диаграммы

* Этalonным сигналом является разность антенных температур при помещении в главный лепесток диаграммы черного диска и при убиании диска

** При этом считаем, что фон космического радиоизлучения и радиоизлучения атмосферы за диском достаточно однороден, так что усредненная по главному лепестку диаграммы температура радиоизлучения фона равна T_{Φ_d} , усредненной по телесному углу диска

антенны, как следует из того же принципа Бабине, с диаграммой круглого отверстия $F_{\text{отв}}$ такого же диаметра, что и диск. Таким образом,

$$\Delta T_{a_3} = (1 - \beta_d) \int_{\Omega_3} F_{\text{отв}} T_0(1 - r^2) d\Omega / \int_{4\pi} F_{\text{отв}} d\Omega, \quad (4)$$

где Ω_3 — телесный угол Земли, пересекаемый $F_{\text{отв}}$. Из (1), (2a) и (4), полагая для оценки, что Земля является абсолютно черной (т. е. $r^2=0$), получаем

$$\xi = \int_{\Omega_3} F_{\text{отв}} d\Omega / \int_{4\pi} F_{\text{отв}} d\Omega. \quad (5)$$

Диаграмма $F_{\text{отв}}$ определяется распределением поля на отверстии, задаваемым диаграммой направленности антенны. Будем считать, что отверстие (диск) занимает столь небольшой телесный угол ($\Omega_d \ll \Omega_{\text{пл}}$), что распределение поля на отверстии можно считать равномерным и синфазным, т. е. рассматривать дифракцию плоской волны на отверстии*. В этом случае диаграмма направленности отверстия выражается хорошо известным соотношением (см., например, [8])

$$F_{\text{отв}} = \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right)^2 \left[\frac{2J_1(ka \sin \vartheta)}{ka \sin \vartheta} \right]^2, \quad (6)$$

где J_1 — функция Бесселя, $k = 2\pi/\lambda$, ϑ — угол, отсчитываемый от оси, проходящей через центр отверстия, перпендикулярно его плоскости. Доля мощности, рассеиваемой отверстием вне какого-либо телесного угла Ω_i , обозначим посредством $\beta_i^{\text{отв}}$:

$$1 - \beta_i^{\text{отв}} = \int_{\Omega_i} F_{\text{отв}} d\Omega / \int_{4\pi} F_{\text{отв}} d\Omega. \quad (7)$$

Выражая $\int_{4\pi} F_{\text{отв}} d\Omega$ через эффективную площадь отверстия $\sigma_{\text{эфф}}$ и учитывая, что при равномерном и синфазном распределении поля $\sigma_{\text{эфф}}$ равна геометрической площади, а диаграмма круглого отверстия является телом вращения, получаем

$$1 - \beta_i^{\text{отв}} = \frac{1}{2} (ka)^2 \int_0^{\Omega_i} \left(\frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right)^2 \left[\frac{2J_1(ka \sin \vartheta)}{ka \sin \vartheta} \right]^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (8)$$

Проведя замену переменных и отбросив медленно меняющийся множитель $\left(\frac{1 + \cos \vartheta}{2} \right)^2 \frac{1}{\cos \vartheta}^{**}$, а также используя известные соотношения из теории функций Бесселя, нетрудно показать (см. [6]), что

$$1 - \beta_i^{\text{отв}} = 2 \int_0^{\Omega_i} \frac{J_1^2(x)}{x} dx = 1 - J_0^2(ka \sin \vartheta_i) - J_1^2(ka \sin \vartheta_i),$$

откуда

$$\beta_i^{\text{отв}} = J_0^2(ka \sin \vartheta_i) + J_1^2(ka \sin \vartheta_i). \quad (9)$$

Если диск наблюдается под углом ϑ_i , то можно оценить дифракционную поправку $\xi(\vartheta_i)$, приняв ее равной (см. (5), (7))

$$\xi(\vartheta_i) = \frac{1}{2} \beta_i^{\text{отв}} = \frac{1}{2} [J_0^2(ka \sin \vartheta_i) + J_1^2(ka \sin \vartheta_i)]. \quad (10)$$

Рассчитанные по формуле (10) зависимости $\xi(\vartheta_i)$ для различных значений $2a/\lambda$ приведены на рис. 1. Здесь же нанесена экспериментальная зависимость (при $2a/\lambda = 20$), достаточно хорошо согласующаяся с расчетной. Используя рис. 1, можно вносить соответствующие поправки при измерениях. Из рис. 1 видно, что для уменьшения ξ необходимо наблюдать диск под достаточно большим углом, т. е. располагать

* Это приводит к тому, что величина ξ может оказаться несколько завышенной по сравнению с реальной дифракционной поправкой.

** Возможная при этом ошибка в величине доли мощности, поступающей в главный лепесток, не превышает 0,5% при $2a/\lambda > 3$. С увеличением $2a/\lambda$ погрешность уменьшается.

его на значительной высоте, что в случае больших антенн трудно осуществимо. При измерении параметров больших антенн эту трудность можно устранить, сочетая измерения по „черному“ диску с методом [11], т. е. с выносом облучателя из фокуса. При этом диск располагается в зоне Френеля антенны на расстоянии и высоте в $n \approx 10 \div 20$ раз, меньших, чем при измерениях в дальней зоне (см. также [2]). Возможная при этом дополнительная ошибка из-за изменения реакции зеркала на облучатель при его смещении, как показывает оценка, не превосходит 1–2%.

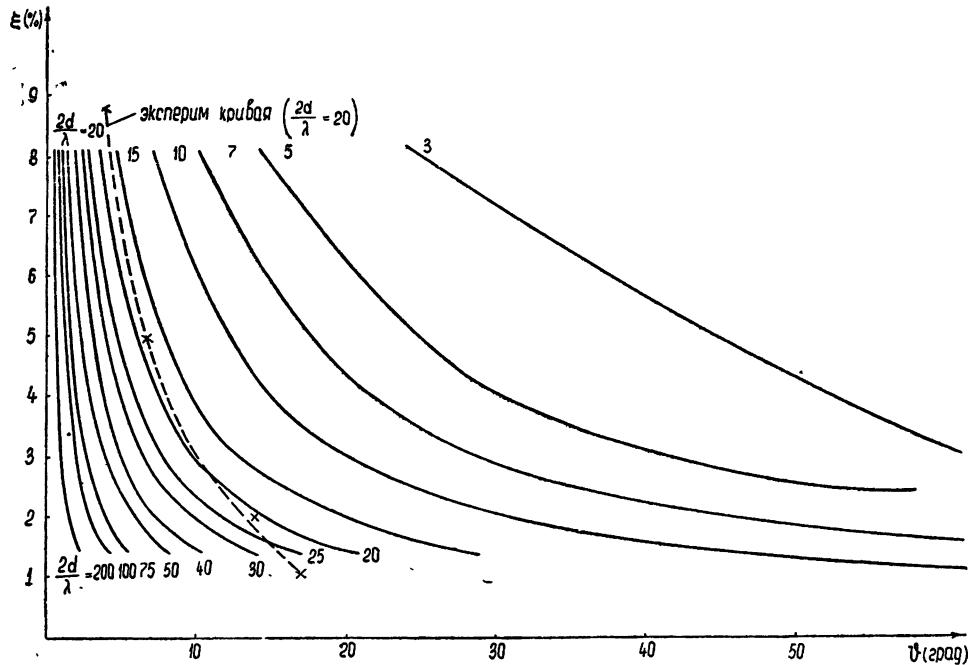


Рис. 1.

2. При измерении интенсивности (или температуры) излучения источника по методу „искусственной Луны“ определяется отношение $\Delta T_{a_{\text{ист}}}/\Delta T_{a_d}$, где $\Delta T_{a_{\text{ист}}}$ — приращение температуры антенны при приеме излучения источника относительно опорной области. Можно показать, что это отношение равно

$$\frac{\Delta T_{a_{\text{ист}}}}{\Delta T_{a_d}} = \frac{\Delta n_{\text{ист}}}{\Delta n_d} = \frac{(\bar{T}_{\text{ист}} - \bar{T}_{\Phi \text{ ист}})(1 - \beta_{\text{ист}})}{(1 + \xi)(T_0 - T_{\Phi d})(1 - \beta_d)} e^{-\gamma} + \frac{\Delta T_{\text{ср гл}}(1 - \beta_{\text{гл}})e^{-\gamma}}{(1 + \xi)(T_0 - T_{\Phi d})(1 - \beta_d)}, \quad (11)$$

где Δn — показания выходного прибора радиометра, $\bar{T}_{\text{ист}}$, $\bar{T}_{\Phi \text{ ист}}$ — усредненные по диаграмме в телесном угле источника температуры излучения источника и экранируемого им фона, $\Delta T_{\text{ср гл}}$ — разность усредненных по $\Omega_{\text{гл}}$ (главному лепестку) фоновых температур в области источника и опорной области, γ — поглощение в атмосфере, $\beta_{\text{ист}}$, β_d , $\beta_{\text{гл}}$ — коэффициенты рассеяния относительно $\Omega_{\text{ист}}$, Ω_d , $\Omega_{\text{гл}}$. Из (11) следует, что, например, в случае дискретного источника ($\Omega_{\text{ист}} \ll \Omega_{\text{гл}}$) и Луны ($\Omega_{\text{ист}} = \Omega_d$)

$$S_v = S_v^0 - \Delta S_v, \quad (12)$$

$$(\bar{T}_L - \bar{T}_{\Phi}) = (\bar{T}_L - \bar{T}_{\Phi})^0 - \Delta T_L,$$

где

$$S_v^0 = \frac{2k}{\lambda^2} \frac{e^\gamma}{k_1} \int_{\Omega_{\text{ист}}} F d\Omega (1 + \xi) (T_0 - T_{\Phi d}) \frac{\Delta n_{\text{ист}}}{\Delta n_d}, \quad (12a)$$

$$k_1 = \int_{\Omega_{\text{ист}}} T_{\text{ист}} F d\Omega / \int_{\Omega_{\text{ист}}} T_{\text{ист}} d\Omega \simeq 1,$$

$$(\bar{T}_L - \bar{T}_\Phi)^0 = e^\gamma \left(\int_{\Omega_L} F d\Omega / \int_{\Omega_L} F d\Omega \right) (1 + \xi) (T_0 - T_{\Phi L}) \frac{\Delta n_L}{\Delta n_d}; \quad (126)$$

$$\frac{\Delta S_v}{S_v^0} = \frac{\Delta T_L}{(\bar{T}_L - \bar{T}_\Phi)^0} = e^{-\gamma} \frac{\Delta T_{\text{ср гл}}}{(1 + \xi) (T_0 - T_{\Phi L})} \frac{\int_{\Omega_{\text{гл}}} F d\Omega}{\int_{\Omega_L} F d\Omega} \frac{\Delta n_d}{\Delta n_{\text{ист}}}. \quad (13)$$

Величины S_v^0 и $(\bar{T}_L - \bar{T}_\Phi)^0$, как ясно из (12a), (12b), могут быть измерены весьма точно. Основная погрешность в значения S_v и $(\bar{T}_L - \bar{T}_\Phi)$ вносится членами ΔS_v , ΔT_L из-за возможной неопределенности $\Delta T_{\text{ср гл}}$. Используя изофоты космического радиоизлучения и данные об излучении и поглощении атмосферы, можно внести необходимые поправки в соответствии с (11) и (13).

Рассмотренные выше соотношения использовались при прецизионных измерениях в дециметровом диапазоне волн (см. [9, 10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 4, 1004 (1961).
2. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 393 (1961).
3. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 623, (1962).
4. М. Л. Левин, ЖТФ, 25, 1313 (1955).
5. Д. Л. Пози, Р. Н. Брейсус элл, Радиоастрономия, ИЛ, М., 1958.
6. М. Вогн, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, 1959.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, ГИИТЛ, М.—Л., 1948, стр. 179.
8. А. З. Фрадин, Антенны сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1957.
9. В. П. Ласточкин, В. А. Порфирьев, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Н. Н. Холодилов, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, 629 (1963).
10. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, 1087 (1963).
11. Н. А. Есепкина, ДАН СССР, 113, 82 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
23 апреля 1963 г.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

C. H. Столяров

1. В последнее время определенный интерес приобретают явления, происходящие в движущихся ограниченных и безграничных средах [1, 2]. Возникающее при движении заряда в среде излучение Вавилова—Черенкова или переходное излучение на границе может оказаться полезным при экспериментальном изучении релятивистских потоков или сгустков заряженных частиц, а также для некоторых вопросов астрофизики.

Уравнение для потенциалов $A(r, t)$ и $\varphi(r, t)$ системы зарядов в изотропной однородной среде, движущейся равномерно со скоростью \mathbf{u} , были получены в работе [1]. Там же рассматривалось равномерное движение заряженной частицы.

Если же частица с зарядом q движется с произвольной скоростью $\mathbf{v}(t)$, т. е.

$$i(r, t) = q\mathbf{v}(t) \delta(r - r_0(t)), \quad \rho(r, t) = q\delta(r - r_0(t)),$$

то можно показать с помощью уравнений, полученных в [1], что фурье-компоненты потенциалов принимают вид

$$A(\omega, \mathbf{k}) = \frac{q}{4\pi^3} \int dt' \nu \left\{ \frac{\mathbf{v}(t')}{c} - \frac{\omega^2}{1 + \omega} \frac{\mathbf{u}}{c} \left[1 - \frac{u\omega(t')}{c^2} \right] \right\} \left\{ \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \omega^2 c^{-2} \times \right. \quad (1)$$

$$\times (\omega - \mathbf{k}u)^2 \Big\}^{-1} \exp [-i(\mathbf{k}r_0(t') - \omega t')];$$

$$\varphi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{q}{4\pi^3} \int dt' \mu \left\{ 1 - \frac{\gamma\gamma^2}{1+\gamma} \left[1 - \frac{u\mathbf{v}(t')}{c^2} \right] \right\} \left\{ \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \right.$$

$$\left. - \gamma\gamma^2 c^{-2} (\omega - \mathbf{k}u)^2 \right\}^{-1} \exp [-i(\mathbf{k}r_0(t') - \omega t')],$$

где

$$\gamma = \epsilon\mu - 1, \quad \gamma^{-2} = 1 - \frac{u^2}{c^2}, \quad r_0(t) = \int_0^t \mathbf{v}(t') dt',$$

ϵ и μ —диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость среды в системе, связанной с последней. В движущейся среде величины ϵ и μ , вообще говоря, являются функциями допплеровской смещенной частоты [3]

$$\omega' = \gamma(\omega - \mathbf{k}u).$$

В случае, когда среда обладает слабыми дисперсионными свойствами, с помощью (1) можно получить выражения для $A_\omega(r)$ и $\varphi_\omega(r)$ на любых расстояниях:

$$A_\omega(r) = \frac{\mu q}{2\pi} \int e^{i\omega t'} dt' \left\{ \frac{\mathbf{v}(t')}{c} - \frac{\gamma\gamma^2}{1+\gamma} \frac{\mathbf{u}}{c} \left[1 - \frac{u\mathbf{v}(t')}{c^2} \right] \right\} \times$$

$$\frac{\exp(i\omega R n(\theta)/c)}{R \sqrt{1 - \gamma\gamma^2 u^2 c^{-2} \sin^2 \theta}};$$

$$\varphi_\omega(r) = \frac{\mu q}{2\pi} \int e^{i\omega t'} dt' \left\{ 1 - \frac{\gamma\gamma^2}{1+\gamma} \left[1 - \frac{u\mathbf{v}(t')}{c^2} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{\exp(i\omega R n(\theta)/c)}{R \sqrt{1 - \gamma\gamma^2 u^2 c^{-2} \sin^2 \theta}}, \quad (2)$$

где θ —угол между \mathbf{u} и $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$, $R = |\mathbf{R}|$,

$$n(\theta) = \frac{\sqrt{1+\gamma} \sqrt{1 - \gamma\gamma^2 u^2 c^{-2} \sin^2 \theta} - \gamma\gamma^2 u c^{-1} \cos \theta}{1 - \gamma\gamma^2 u^2 c^{-2}}, \quad (3)$$

причем

$$A(r, t) = \int A_\omega(r) e^{-i\omega t} d\omega = \int e^{-i\omega t} d\omega \left\{ \int A(\omega, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} \right\}$$

и т. д. Те же самые выражения для потенциалов $A_\omega(r)$ и $\varphi_\omega(r)$, но на больших расстояниях, могут быть получены методом перевала.

Выражение (3) определяет показатель преломления $n(\theta)$ для волны в заданном направлении θ , возбуждаемой зарядом в движущейся среде. Из-за наличия выделенного направления в пространстве он зависит от угла θ .

Если среда движется со скоростью, превышающей фазовую скорость света в ней ($\epsilon\mu u^2 c^{-2} > 1$, т. е. $\gamma\gamma^2 u^2 c^{-2} > 1$), то в силу увлечения электромагнитной волны движущейся средой поле отлично от нуля только для углов, для которых

$$\sin^2 \theta < c^2 / \gamma u^2 \gamma^2.$$

2. Для вычисления потенциалов заряда в движущейся диспергирующей среде необходимо, вообще говоря, знать зависимость $\epsilon(\omega')$ и $\mu(\omega')$ от смещенной по Доплеру частоты ω' . Однако для поля заряда на далеких расстояниях методом перевала можно получить выражения для потенциалов, не конкретизируя зависимости $\epsilon(\omega')$ и $\mu(\omega')$:

$$A_\omega(r) = \frac{q}{2\pi\gamma u} \int dt' \frac{\exp[i\omega(t' + R_{\parallel}/u)]}{\sqrt{R_{\perp}}} \sum_m \left\{ \frac{\mathbf{v}(t')}{c} - \frac{\mathbf{u}\gamma^2}{c} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\gamma(\omega_m'^*)}{1 + \gamma(\omega_m'^*)} \left(1 - \frac{u\mathbf{v}}{c^2} \right) \right\} \frac{\mu(\omega_m'^*) \exp[iF(\omega_m'^*)]}{\sqrt{|\alpha(\omega_m'^*)| |F''(\omega_m'^*)|}};$$

$$\varphi_{\omega}(r) = \frac{q}{2\pi\gamma u} \int dt' \frac{\exp[i\omega(t' + R_{\parallel}/u)]}{\sqrt{R_{\perp}}} \sum_m \left\{ 1 - \frac{\zeta(\omega_m'^*)\gamma^2}{1 + \zeta(\omega_m')} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{u\vartheta}{c^2} \right) \right\} \frac{\mu(\omega_m'^*) \exp[iF(\omega_m'^*)]}{\sqrt{|a(\omega_m')| |F''(\omega_m'^*)|}},$$

где

$$a^2(\omega') = \frac{\omega^2}{u^2\gamma^2} \left\{ [1 - u^2\gamma^2\zeta(\omega') c^{-2}] \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 - 2\gamma \frac{\omega'}{\omega} + 1 \right\};$$

$$R_{\parallel}u = Ru; \quad R^2 = R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2; \quad F(\omega') = |a(\omega')| R_{\perp} = \frac{\omega' R_{\parallel}}{u\gamma};$$

$$F'(\omega') = \frac{dF}{d\omega'}; \quad F''(\omega') = \frac{d^2F}{d\omega'^2}.$$

Суммирование в формуле (4) производится по тем частотам $\omega_m'^*$, для которых $F'(\omega_m'^*) = 0$ и $a^2(\omega_m'^*) < 0$.

Выражения (4) получены при условии, что $|a(\omega_m'^*)| R_{\perp} \gg 1$, и в предположении, что точки перевала $\omega_m'^*$ и нули функции $1 + \zeta(\omega')$ находятся достаточно далеко друг от друга.

В качестве примера применения формул (4) рассмотрим случай изотропной электронной плазмы, движущейся со скоростью u . Тогда при $\omega < \omega_p'$ потенциалы экспоненциально затухают на далеких расстояниях, а при $\omega > \omega_p'$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\omega}(r) = & \frac{q}{2\pi} \int dt' \frac{\exp\left[i\omega\left(t' + \frac{1}{c}R\sqrt{1-\gamma^2}\right)\right]}{R(t')} \left\{ \frac{v(t')}{c} + \right. \\ & \left. + \frac{u}{c} \frac{\gamma^2[1-u\vartheta(t')/c^2]}{[1-(u/c)\cos\vartheta\sqrt{1-\gamma^2}]^2 - \gamma^2(1-u^2/c^2)} \right\}; \\ \varphi_{\omega}(r) = & \frac{q}{2\pi} \int dt' \frac{\exp\left[i\omega\left(t' + \frac{1}{c}R\sqrt{1-\gamma^2}\right)\right]}{R(t')} \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{\gamma^2[1-u\vartheta(t')/c^2]}{[1-(u/c)\cos\vartheta\sqrt{1-\gamma^2}]^2 - \gamma^2(1-u^2/c^2)} \right\}, \end{aligned}$$

где $\gamma = \omega_p'/\omega$; ω_p' — плазменная частота в системе, связанной со средой. Аналогично можно получить выражения для потенциалов в случае произвольной диспергирующей среды, движущейся с нерелятивистской скоростью. Тогда показатель преломления $n(\omega, \vartheta)$ имеет вид

$$n(\omega, \vartheta) = \sqrt{1 + \zeta(\omega)} - \zeta(\omega) \left[1 + \frac{\omega}{2\zeta(\omega)} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right] \frac{u}{c} \cos \vartheta.$$

Отсюда нетрудно получить явление увлечения света диспергирующей средой, движущейся с нерелятивистской скоростью [4]

$$v_{\text{Фаз}} = \frac{c}{n(\omega, \vartheta)} \approx \frac{c}{n(\omega)} + \left\{ \left(1 - \frac{1}{n^2(\omega)} \right) + \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{dn}{d\omega} \right\} u \cos \vartheta$$

3. Полученные выражения для потенциалов позволяют вычислять электромагнитные поля заряда и энергию, излучаемую зарядом в единицу времени, как это было сделано, например, в работе [5] для покоящегося заряда в движущейся среде. Однако для определения зоны формирования излучения в движущейся среде нет необходимости проводить громоздкие выкладки. Достаточно рассмотреть движение заряда на конечном отрезке пути [6] и вычислить его потенциалы.

Для этого рассмотрим заряд, движущийся конечный отрезок пути длиной $2l$, т.е.

$$\mathbf{v}(t) = \begin{cases} \mathbf{v}_0 = \text{const} & \text{при } -l/v_0 < t < l/v_0 \\ 0 & \text{при } t \text{ вне } [-l/v_0, l/v_0] \end{cases}$$

Тогда потенциалы поля такого заряда на больших расстояниях $R_0 \gg l$ приобретают вид:

$$\begin{aligned} A(R_0, t) &= \mu q \left\{ \frac{\mathbf{v}_0}{c} - \frac{z\gamma^2}{1+z} \frac{\mathbf{u}}{c} \left(1 - \frac{u\mathbf{v}_0}{c^2} \right) \right\} R_0^{-1} (1 - z\gamma^2 u^2 c^{-2} \sin^2 \theta)^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sin \left[\frac{\omega l}{v_0} \left(1 - \frac{n(\theta) \mathbf{v}_0}{c} \right) \right] \omega^{-1} \left(1 - \frac{n(\theta) \mathbf{v}_0}{c} \right)^{-1} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_0}{c} n(\theta) \right) \right]; \\ \varphi(R_0, t) &= \mu q \left\{ 1 - \frac{z\gamma^2}{1+z} \left(1 - \frac{u\mathbf{v}_0}{c^2} \right) \right\} R_0^{-1} (1 - z\gamma^2 u^2 c^{-2} \sin^2 \theta)^{-1/2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sin \left[\frac{\omega l}{v_0} \left(1 - \frac{n(\theta) \mathbf{v}_0}{c} \right) \right] \omega^{-1} \left(1 - \frac{n(\theta) \mathbf{v}_0}{c} \right)^{-1} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{R_0}{c} n(\theta) \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $n(\theta) \mathbf{v}_0 = n(\theta) v_0 \cos \theta$, 0 — угол между $\mathbf{n} = R_0/R_0$ и \mathbf{v}_0 , R_0 — расстояние от области, где движется заряд, до точки наблюдения. Из выражений (5) видно, что амплитуда поля заряда в движущейся среде достигает максимального значения на длине:

$$l \sim \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \frac{1}{1 - (n(\theta) \mathbf{v}_0)/c}. \quad (6)$$

Соотношение (6) определяет, таким образом, зону формирования поля заряда в движущейся среде, т.е. то расстояние, на котором поле заряда формируется как волна излучения.

Если же заряд проходит с постоянной скоростью расстояние, значительно превышающее длину формирования, то поле на далеких расстояниях будет равно пулю всегда, за исключением случая, когда

$$1 - \frac{n(\theta) \mathbf{v}_0}{c} = 0. \quad (7)$$

Условие (7) эквивалентно условию излучения Вавилова—Черенкова в движущейся среде, ибо в этом случае амплитуда поля пропорциональна длине пути, пройденного зарядом.

В заключение автор выражает признательность Б. М. Болотовскому за полезные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
2. К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 3, 336 (1960).
3. С. Н. Столяров, ЖТФ, 33, № 5 (1963).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИФМЛ, М., 1959 г.
5. I. E. Tamm, J. Phys. USSR, 1, 439 (1939).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
1 апреля 1963 г.

ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ НЕКОТОРЫХ НИЗКОЧАСТОТНЫХ И РАДИОЧАСТОТНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Д. А. Дмитренко, А. И. Чикин

Ширина спектральной линии генераторов, являющаяся одной из характеристик их нестабильности, измерялась, судя по литературным данным [1—3], у генераторов в диапазонах от десятков мегагерц и выше, и только одна из известных нам работ

⁴] включает в себя результаты измерений ширины спектральной линии генераторов нижней части диапазона радиочастот.

Теоретически малоизученный вопрос о медленных уходах частоты [5-7] тем не менее представляет большой практический интерес, так как эти уходы определяют реальную («техническую») ширину спектральной линии. В настоящей работе приводятся данные о ширине спектральной линии генераторов радиочастотного, ультразвукового и звукового диапазонов, в том числе кварцевых генераторов

С помощью дискриминаторов на Т-мостах с индуктивностью, работавших на частотах 3 кГц и 1 кГц [8], авторами были измерены спектральные плотности квадрата флюктуаций частоты рядом промышленных и специально собранных генераторов. Ламповые генераторы 101-И, ЗГ-2А, ЗГ-641 и собранный по схеме емкостной трехточки генератор на транзисторе П6 настраивались на частоту генерации 3 кГц; генератор на низкочастотном кварце генерировал синусоидальные колебания с частотой 1 кГц. При измерениях флюктуаций частоты кварцевых генераторов УКВ (собранных на сопротивлениях, с включением кварца между сеткой и анодом) с помощью балансного смесителя на двойном триоде выделялись биения с частотой 3 кГц, флюктуации которых, затем и исследовалась. Для получения биений с частотой 3 кГц от генераторов радиочастоты 250 кГц применялся двухсеточный смеситель на пентоде, на одну из сеток которого подавалось напряжение от исследуемого генератора, а на другую сетку—вторая гармоника кварцевого калибратора.

В процессе измерений генераторы на транзисторах питались от сухих батареи, а кварцевые генераторы—от аккумуляторов.

Спектральная плотность квадрата флюктуаций частоты генераторов, обозначаемая нами через $W_v(F)$ (v —флюктуация частоты колебаний в Гц, F —частота наблюдения спектра в Гц), измерялась в диапазоне от 1 до 300 Гц. При обработке экспериментальных данных выяснилось, что в указанном диапазоне $W_v(F)$ соответствует закону

$$W_v(F) = \frac{W_v(1)}{F^\alpha}. \quad (1)$$

К особенностям спектров флюктуаций частоты, не охватываемых соотношением (1), следует отнести следующее

а) у промышленных генераторов наблюдалась слабая паразитная частотная модуляция гармониками сети 50 Гц;

б) при измерениях ламповых генераторов ультразвукового диапазона, собранных на вакуумных кварцах, в спектрах флюктуаций частоты биений имели место всплески на частотах 15 и 30 Гц, происхождение которых осталось неясным. Отдельно измеренные (путем обвода дискриминаторов) амплитудные флюктуации измеряемых генераторов, шумы смесителей, шумы измерительного тракта и анализаторов производили в совокупности эффект на выходном приборе по крайней мере на $1 \frac{1}{2}$ порядка ниже эффекта от частотных флюктуаций.

Вычисления абсолютной ширины спектральной линии за секунду Δf производились, согласно работе [9], по формуле

$$\Delta f = \left[2\pi \int_1^{300} W_v(F) dF \right]^{1/2}, \quad (2)$$

где в качестве $W_v(F)$ подставлялось выражение (1), полученное из экспериментов. При определении Δf кварцевых генераторов (по флюктуациям частоты биений) ввиду идентичности схем и режимов численное значение интеграла в (2) делилось пополам. В случае биений генераторов радиочастоты с более стабильным кварцевым калибратором Δf вычислялась прямо по формуле (2).

Таблица 1

| Тип генератора | Частота генерации (кГц) | $W_v(1)$ (Гц) | α | Δf (Гц) | δf |
|--------------------------|-------------------------|---------------------|----------|---------------------|---------------------|
| 101-И | 3 | $5 \cdot 10^{-8}$ | 1/2 | $3,2 \cdot 10^{-3}$ | $1,1 \cdot 10^{-6}$ |
| ЗГ-2А | 3 | $3 \cdot 10^{-4}$ | 2 | $4,3 \cdot 10^{-2}$ | $1,5 \cdot 10^{-5}$ |
| ЗГ-641 | 3 | $8 \cdot 10^{-7}$ | 1 | $5,4 \cdot 10^{-3}$ | $1,8 \cdot 10^{-6}$ |
| ГСС-6 | 250 | $2 \cdot 10^{-5}$ | 2 | $1,1 \cdot 10^{-1}$ | $4,5 \cdot 10^{-7}$ |
| Генератор на транзисторе | 3 | $1 \cdot 10^{-7}$ | 1/2 | $4,5 \cdot 10^{-3}$ | $1,5 \cdot 10^{-6}$ |
| Генератор на транзисторе | 250 | $4 \cdot 10^{-5}$ | 1 | $3,8 \cdot 10^{-2}$ | $1,5 \cdot 10^{-7}$ |
| Кварцевый генератор | 75 | $9,4 \cdot 10^{-9}$ | 1 | $4 \cdot 10^{-4}$ | $5,5 \cdot 10^{-9}$ |
| Кварцевый генератор | 1 | $3,6 \cdot 10^{-8}$ | 3 | $3,3 \cdot 10^{-4}$ | $3,3 \cdot 10^{-7}$ |

Значения абсолютной ширины линии Δf , относительной ширины δf , а также величин W , (1) и a для исследованных генераторов сведены в таблицу 1. При вычислении δf низкочастотных промышленных генераторов на биениях они рассматривались как генераторы частоты 3 кгц.

В заключение отметим, что полученные из экспериментов значения δf для ламповых генераторов качественно согласуются с теоретическими работами^[5-7], где учитывалось влияние фликкер-шумов ламп на размытие спектральной линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, В. В. Хрулев, Радиотехника и электроника, 1, 831 (1956).
2. В. Н. Никонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 270 (1962).
3. Ю. А. Дрягин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 93 (1958).
4. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, Т. Д. Разина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1052 (1961).
5. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1, 818 (1956).
6. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 241 (1960).
7. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 573 (1959).
8. А. И. Чикин, ЖЭТФ, 42, 649 (1962).
9. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 1295 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
21 июня 1963 г.

ПРОСТОЙ ТЕРМОСТАТ ДЛЯ РЕЗОНАТОРА МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА

Г. М. Страховский, В. М. Татаренков

Как известно, частота молекулярного генератора наиболее сильно зависит от настройки резонатора на линию перехода:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\nu_0 - \nu_p}{\nu_0} \frac{Q_n}{Q} \right),$$

где ν —частота молекулярного генератора, ν_0 —частота инверсионного перехода, ν_p —частота резонатора, Q_p и Q —соответственно добротности резонатора и линии молекулярного перехода.

Зависимость частоты ν молекулярного генератора от других параметров гораздо слабее зависимости от ν_p , поэтому при использовании молекулярных генераторов в качестве стандартов частоты (времени) необходимо стабилизировать ν_p .

Обычно резонаторы изготавливают из материалов с малым коэффициентом линейного расширения ($\sim 10^{-6} \div 10^{-7}$ для различных инваров) и термостатируют их. При этом к термостатам предъявляются жесткие требования высокой чувствительности и долговременного точного удержания температуры. Изменение частоты молекулярного генератора от температуры резонатора, изготовленного из обычного инвара, имеет величину $d\nu/dT \approx 100$ гц · град⁻¹ (при $Q_p/Q \sim 10^{-3}$). Для поддержания частоты в пределах $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-10} \div 10^{-11}$ необходимо термостатировать резонатор с точностью $10^{-2} \div 10^{-3}$ град.

Нами испытан простой термостат, позволяющий удерживать температуру резонаторов постоянной с такой точностью, причем в резонаторе не создается заметного магнитного поля, которое может вызывать изменение частоты генератора. Блок-схема термостата изображена на рис. 1. Элементом, определяющим температуру резонатора, является мост, все плечи которого приблизительно равны 25 ом и намотаны на резонаторе бифилярно для уменьшения индуктивности. Одно из плеч моста выполнено из медного провода, три остальных—из манганинового. Экспериментальные амплитудная и фазовая характеристики моста приведены на рис. 2. Как видно, мост до нуля не балансируется из-за нескомпенсированных реактивностей. Для наших мостов $\beta_0 \approx 20$ мв на частоте 400 гц при питающем напряжении 1в. Крутизна моста на линейных участках $d\beta/dT \approx 4 \cdot 10^{-3}$.

Как видно из рис. 1, по принципу работы термостат представляет генератор, в котором обратная связь осуществляется и регулируется мостом. Чтобы схема рис. 1 служила термостатом, необходимо подобрать фазы так, чтобы положительная обратная связь осуществлялась на „холодной“ ($T_{раб} < T_0$) ветви характеристики моста. Та-

кой термостат никогда не перегреет резонатор, так как, если мост окажется случайно перегретым ($T > T_0$), то генерация прекращается, поскольку мост, проходя температуру $T = T_0$, изменяет фазу напряжения на входе усилителя на π , и положительная обратная связь становится отрицательной.

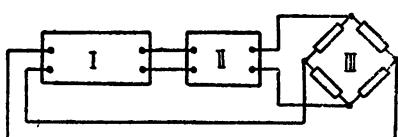
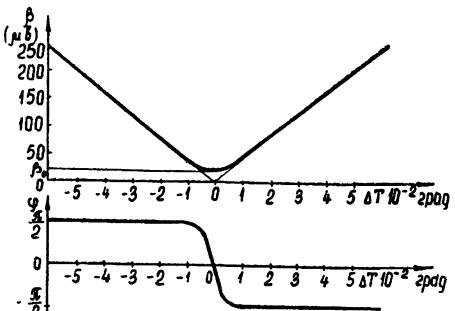


Рис. 1. Блок-схема термостата-генератора: I—избирательный усилитель на 400 гц ($\Delta\nu \approx 50$ гц, чувствительность порядка 30 $\mu\text{в}$, коэффициент усиления $K \approx 10^4$); II—усилитель мощности: связь с нагрузкой (мост $R_n = 25$ ом) — трансформаторная; максимальная выходная мощность порядка 5 вт; III—мост.

Рис. 2. Амплитудная и фазовая характеристики моста на частоте 400 гц:

β —напряжение разбаланса моста при питающем напряжении в 1 в, T —температура резонатора, T_0 —температура, при которой мост сбалансирован, $\Delta T = T - T_0$.



Характеристика термостата-генератора (выходная мощность в зависимости от температуры T) изображена на рис. 3. Там же штриховой линией изображена характеристика термостата-усилителя. Штрих-пунктир на рис. 3 представляет мощность, с которой необходимо подогревать резонатор, чтобы его температура была равна T . Точка пересечения этой кривой с характеристикой термостата определяет рабочую температуру $T_{раб}$ термостатируемого резонатора. Характеристика термостата-генератора из-за положительной обратной связи имеет большую крутизну, чем термостата-усилителя.

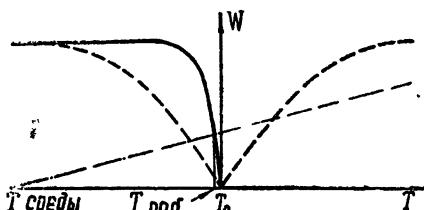


Рис. 3. Зависимость выходной мощности термостата-генератора и термостата-усилителя W от T .

ров. Однако по нестабильности частоты $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-11}$ нельзя судить о нестабильности температуры резонатора, поскольку частота ν зависит еще от флюктуаций давления в источнике пучка молекул NH_3 , колебаний напряжения на сортирующей системе и флюктуаций вакуума.

Мы могли зарегистрировать изменение $T_{рез}$ порядка $1 \cdot 10^{-3}$ град. Стабильность молекулярного генератора не менялась от замены ипварного резонатора латунным, для которого $d\nu_{лат}/dT \approx 10 d\nu_{инв}/dT$. При подогреве латунного резонатора внешним источником $u_{вых}$ термостата изменялось; при этом должна меняться и температура резонатора, которую мы могли фиксировать по изменению частоты молекулярного генератора. При изменении $u_{вых}$ в 3–5 раз частота молекулярного генератора оставалась постоянной с точностью $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-11}$, что говорит о том, что $\Delta T_p \leqslant 10^{-3}$ град (для молекулярного генератора с резонатором из латуни $d\nu/dT \approx 1000$ гц · град⁻¹).

Изготовленные образцы таких термостатов при работе молекулярного генератора обеспечивали лучшую стабильность температуры резонаторов по сравнению с другими испытанными нами типами гермостатов и поддерживали температуру постоянной с точностью не хуже 10^{-3} град.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Ф. Т еодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, М—Л, 1948
2. Electromech. Design, 5, 34 (1961) (см. Экспресс-информация ВИНИТИ, контрольно-измерительная техника № 16, реферат № 127 (1962)).

О МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ С ДВУМЯ ТИПАМИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРА

В. А. Щеглов

При теоретическом исследовании работы молекулярного генератора рассматривают случай, когда частота одного из типов колебаний резонатора близка к частоте спектральной линии излучения «активной» среды [1–5]. Обычно при этом считается, что частота ближайшего типа колебаний отстоит от частоты основного типа на интервал, значительно превосходящий ширину каждой из резонансных кривых этих типов колебаний. Однако на практике реализуются также случаи, когда соседние типы колебаний расположены по частоте достаточно близко друг к другу, так что при этом необходимо учитывать наличие второго типа колебаний в системе.

Общие уравнения молекулярного генератора, работающего на одном типе собственных колебаний резонатора, были получены в работах [2,6]. Материальные уравнения в этих работах справедливы в случае, когда направление вектора напряженности поля E совпадает с направлением фиксированной в пространстве оси. Для целей нашего рассмотрения необходимо получить более общие уравнения материальной среды, когда направление вектора E изменяется со временем в фиксированной плоскости.

Гамильтониан, учитывающий дипольное взаимодействие молекулы с электрическим полем в резонаторе $E(r, t)$, записывается в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - (\hat{d}E), \quad (1)$$

где \hat{H}_0 —гамильтониан свободной молекулы, которая, по предположению, имеет лишь два энергетических уровня W_1, W_2 ($\hbar\omega_{21} = W_2 - W_1$). Оператор дипольного взаимодействия представим в виде

$$(\hat{d}E) = \hat{d}(E_1 + E_2) = E_1(r, t) \hat{d}_1 + E_2(r, t) \hat{d}_2, \quad (2)$$

где \hat{d}_1, \hat{d}_2 —операторы проекций дипольного момента и E_1, E_2 —проекции электрического поля на направления соответственно первого и второго типов колебаний в данной точке. Уравнение для матрицы плотности, описывающей молекулу в резонаторе, имеет вид [6]

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}) - \tau^{-1} (\hat{\rho} - \hat{\rho}_0), \quad (3)$$

где τ —характерное время, по которому усредняется уравнение (для пучкового генератора τ —среднее время пролета молекул через резонатор) и $\hat{\rho}_0$ имеет компоненты $(\hat{\rho}_0)_{12} = (\hat{\rho}_0)_{21} = (\hat{\rho}_0)_{11} = 0$, $(\hat{\rho}_0)_{22} = a_0$ (если n —плотность молекул, то $N_0 = a_0 n$ —начальное число „активных“ молекул в единице объема).

Имея в виду, что для проекций средней поляризации вещества на направления каждого из типов колебаний имеют место соотношения

$$P_1 = n \operatorname{Sp}(\hat{\rho} \hat{d}_1) = n(\rho_{12} d_{21}^{(1)} + \rho_{21} d_{12}^{(1)}), \quad (4)$$

$$P_2 = n \operatorname{Sp}(\hat{\rho} \hat{d}_2) = n(\rho_{12} d_{21}^{(2)} + \rho_{21} d_{12}^{(2)}),$$

где $d_{ik}^{(1)}, d_{ik}^{(2)}$ ($i, k = 1, 2$)—матричные элементы операторов проекций дипольного момента молекулы на направления соответственно первого и второго типов колебаний*, с помощью (1)–(4) получим следующие уравнения, связывающие поляризацию с полем (материальные уравнения):

$$\begin{aligned} \ddot{P}_1 + \frac{2}{\tau} \dot{P}_1 + (\omega_{21}^2 + \tau^{-2}) P_1 &= -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} |d_{12}^{(1)}|^2 N E_1 + \\ &+ \left(\frac{id_-}{\hbar\tau} - \frac{\omega_{21} d_+}{\hbar} \right) N E_2 + \frac{id_-}{\hbar} \frac{d}{dt} (N E_2); \\ \ddot{P}_2 + \frac{2}{\tau} \dot{P}_2 + (\omega_{21}^2 + \tau^{-2}) P_2 &= -\frac{2\omega_{21}}{\hbar} |d_{12}^{(2)}|^2 N E_2 - \end{aligned} \quad (5)$$

* По предположению, $d_{ii}^{(1)} = d_{ii}^{(2)} = 0$.

$$-\left(\frac{id_-}{\hbar\tau} + \frac{\omega_{21}d_+}{\hbar}\right)NE_1 - \frac{id_-}{\hbar} \frac{d}{dt}(NE_1);$$

$$\dot{N} + \tau^{-1}(N - N_0) = \frac{2}{\hbar\omega_{21}} [E_1(\dot{P}_1 + \tau^{-1}P_1) + E_2(\dot{P}_2 + \tau^{-1}P_2)],$$

где $N=n(\rho_{22}-\rho_{11})$ —число „активных“ молекул в единице объема. Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} d_+ &= d_{12}^{(2)} d_{21}^{(1)} + d_{21}^{(2)} d_{12}^{(1)} = 2|d_{12}^{(1)}||d_{12}^{(2)}| \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \\ d_- &= d_{12}^{(2)} d_{21}^{(1)} - d_{21}^{(2)} d_{12}^{(1)} = 2i|d_{12}^{(1)}||d_{12}^{(2)}| \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (6)$$

(φ_1, φ_2 —фазы матричных элементов $d_{12}^{(1)}, d_{12}^{(2)}$).

Чтобы система уравнений была замкнутой, к уравнениям среды (5) надо добавить уравнения для типов колебаний резонатора, возбуждаемых током поляризации вещества:

$$\ddot{E}_1 + \frac{\omega_1}{Q_1} \dot{E}_1 + \omega_1^2 E_1 = -4\pi \dot{P}_1; \quad (7)$$

$$\ddot{E}_2 + \frac{\omega_2}{Q_2} \dot{E}_2 + \omega_2^2 E_2 = -4\pi \dot{P}_2$$

(ω_1, ω_2 —собственные частоты; Q_1, Q_2 —добротности типов колебаний)*. Вводя безразмерные величины

$$t' = \omega_{21}t; \quad x = E_1 |d_{12}^{(1)}| \tau/\hbar, \quad y = E_2 |d_{12}^{(2)}| \tau/\hbar;$$

$$u = P_1 / |d_{12}^{(1)}|, \quad v = P_2 / |d_{12}^{(2)}|; \quad \gamma_1 = 4\pi |d_{12}^{(1)}|^2 \tau/\hbar, \quad \gamma_2 = 4\pi |d_{12}^{(2)}|^2 \tau/\hbar;$$

$$\nu_1^2 = \omega_1^2 / \omega_{21}^2, \quad \nu_2^2 = \omega_2^2 / \omega_{21}^2; \quad \mu_1 = \omega_1 / \omega_{21} Q_1, \quad \mu_2 = \omega_2 / \omega_{21} Q_2; \quad \nu_L = 2/\omega_{21}\tau = Q_A^{-1},$$

преобразуем систему (5), (7) к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu_1 \dot{x} + \nu_1^2 x &= -\gamma_1 \ddot{u}; \\ \ddot{y} + \mu_2 \dot{y} + \nu_2^2 y &= -\gamma_2 \ddot{v}; \\ \ddot{u} + \mu_L \dot{u} + u(1 + \mu_L^2/4) &= -\nu_L N x - (\nu_L^2 \alpha/2 + \mu_L \beta) N y - \mu_L \alpha \frac{d}{dt'}(Ny); \\ \ddot{v} + \mu_L \dot{v} + v(1 + \mu_L^2/4) &= -\nu_L N y + (\mu_L^2 \alpha/2 - \mu_L \beta) Nx + \mu_L \alpha \frac{d}{dt'}(Nx); \\ \dot{N} + \tau^{-1}(N - N_0) &= \mu_L [x(\dot{u} + \mu_L u/2) + y(\dot{v} + \mu_L v/2)], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\alpha = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, $\beta = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, так что $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Нас будет интересовать случай, практически реализуемый в пучковом генераторе, когда ширина спектральной линии излучения значительно меньше ширины резонансной кривой каждого из типов колебаний резонатора:

$$\mu_L \ll \nu_1, \quad \nu_2 \ll 1. \quad (9)$$

Другой предельный случай $\mu_1, \mu_2 \ll \mu_L \ll 1$ был рассмотрен в [7].

С помощью исходной системы (8) будем рассматривать задачу о стационарных гармонических колебаниях молекулярного генератора с двумя типами собственных колебаний резонатора. Для решения системы (8) используем метод Ван-дер-Поля. Введем замену $u = \nu_L z_1$, $v = \nu_L z_2$, $N - N_0 = \mu_L w$ и перейдем к переменным Ван-дер-Поля:

* Заметим, что уравнения (7) пригодны для «активного» вещества, расположенного в однородном поле.

$$\begin{aligned}x &= x_1(t) \cos(\omega t) + x_2(t) \sin(\omega t), \\y &= y_1(t) \cos(\omega t) + y_2(t) \sin(\omega t), \\z_1 &= p_1(t) \cos(\omega t) + p_2(t) \sin(\omega t), \\z_2 &= q_1(t) \cos(\omega t) + q_2(t) \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (10)$$

($x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2, q_1, q_2$ — медленно меняющиеся во времени функции). От системы (8), учитывая лишь члены первого порядка малости по μ_L , переходим к укороченным уравнениям для медленных амплитуд:

$$\begin{aligned}(\mu_L/\mu_1)x_1 &= -x_1 + x_2(\nu_1^2 - \omega^2)/\mu_1 - \gamma_1(\mu_L/\mu_1)p_2; \\(\mu_L/\mu_1)x_2 &= -x_2 - x_1(\nu_1^2 - \omega^2)/\mu_1 + \gamma_1(\mu_L/\mu_1)p_1; \\(\mu_L/\mu_2)y_1 &= -y_1 + y_2(\nu_2^2 - \omega^2)/\mu_2 - \gamma_2(\mu_L/\mu_2)q_2; \\(\mu_L/\mu_2)y_2 &= -y_2 - y_1(\nu_2^2 - \omega^2)/\mu_2 + \gamma_2(\mu_L/\mu_2)q_1; \\p_1 &= -p_1 - p_2(\omega^2 - 1)/\mu_L - (w - n_0)(x_2 + \beta y_2 - \alpha y_1); \\p_2 &= p_1(\omega^2 - 1)/\mu_L - p_2 + (w - n_0)(x_1 + \beta y_1 + \alpha y_2); \\q_1 &= -q_1 - q_2(\omega^2 - 1)/\mu_L - (w - n_0)(y_2 + \beta x_2 + \alpha x_1); \\q_2 &= q_1(\omega^2 - 1)/\mu_L - q_2 + (w - n_0)(y_1 + \beta x_1 - \alpha x_2); \\w &= -w - x_1 p_2 - y_1 q_2 + x_2 p_1 + y_2 q_1.\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь $n_0 = N_0/\mu_L$ и имеется в виду дифференцирование по времени $t'' = \frac{1}{2}\mu_L t'$. Приравнивая к нулю левые части уравнений (11), получим систему алгебраических уравнений для определения положений равновесия. Условие их совместности дает уравнение для частот стационарных режимов:

$$\gamma_1[\mu_2^2 + 4(\delta_2 - \Delta)^2] [\mu_1\Delta - \mu_L(\delta_1 - \Delta)] + \gamma_2[\mu_1^2 + 4(\delta_1 - \Delta)^2] [\mu_2\Delta - \mu_L(\delta_2 - \Delta)] = 0, \quad (12)$$

где $\Delta = \omega - 1$, $\delta_i = \nu_i - 1$ ($i = 1, 2$) (предполагаем, что $|\delta_i| \ll 1$; тогда $|\Delta| \ll 1$).

Учитывая справедливость неравенств $\mu_L \delta_2/\mu_2 \geq \Delta \geq \mu_L \delta_1/\mu_1$ при $\delta_2/\mu_2 \geq \delta_1/\mu_1$ (это следует из (12)), находим частоту гармонического режима:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{\mu_L} &= \frac{\omega - 1}{\mu_L} = [\gamma_1 \delta_1 (\mu_2^2 + 4\delta_2^2) + \gamma_2 \delta_2 (\mu_1^2 + 4\delta_1^2)] [\gamma_1 \mu_1 (\mu_2^2 + 4\delta_2^2) + \\&+ \gamma_2 \mu_2 (\mu_1^2 + 4\delta_1^2)]^{-1}.\end{aligned}\quad (13)$$

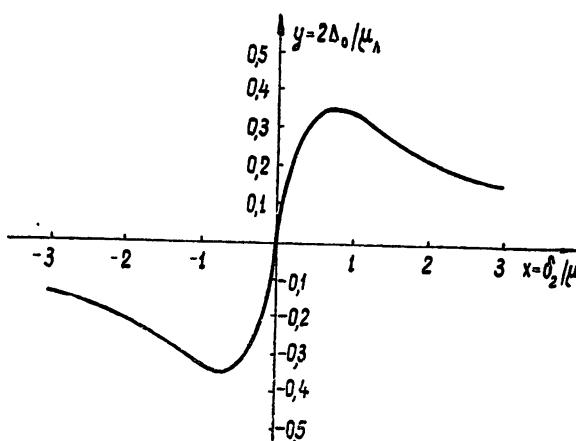


Рис. 1. Графическая зависимость относительного сдвига частоты гармонического режима от относительнойстройки второго типа колебаний.

Если $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\delta_1 = 0$, то

$$\frac{2\Delta/\mu_\lambda}{1+2(\delta_2/\mu)^2} \quad (14)$$

(см. рис. 1). При $\delta_2 = \pm v/\sqrt{2}$

$$|\Delta_{\max}| = \mu_\lambda / 4\sqrt{2}.$$

Для квадратов амплитуд установившихся синусоидальных колебаний получаем

$$\begin{aligned} p_{10}^2 + p_{20}^2 &= q_{10}^2 + q_{20}^2 = \frac{(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)(\mu_2^2 + 4\delta_2^2)}{\mu_\lambda[\gamma_1\mu_1(\mu_2^2 + 4\delta_2^2) + \gamma_2\mu_2(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)]} \times \\ &\times \left\{ n_0 - \frac{(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)(\mu_2^2 + 4\delta_2^2)}{\mu_\lambda[\gamma_1\mu_1(\mu_2^2 + 4\delta_2^2) + \gamma_2\mu_2(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)]} \right\}; \\ x_{10}^2 + x_{20}^2 &= \gamma_1 (\mu_\lambda/\mu_1) \left[1 + \frac{\gamma_2\mu_2(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)}{\gamma_1\mu_1(\mu_2^2 + 4\delta_2^2)} \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ n_0 - \frac{(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)(\mu_2^2 + 4\delta_2^2)}{\mu_\lambda[\gamma_1\mu_1(\mu_2^2 + 4\delta_2^2) + \gamma_2\mu_2(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)]} \right\}; \\ y_{10}^2 + y_{20}^2 &= \gamma_2 (\mu_\lambda/\mu_2) \left[1 + \frac{\gamma_1\mu_1(\mu_2^2 + 4\delta_2^2)}{\gamma_2\mu_2(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)} \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ n_0 - \frac{(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)(\mu_2^2 + 4\delta_2^2)}{\mu_\lambda[\gamma_1\mu_1(\mu_2^2 + 4\delta_2^2) + \gamma_2\mu_2(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)]} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

так что условие генерации запишется в виде

$$N_0 > N_{\text{окр}} = \frac{(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)(\mu_2^2 + 4\delta_2^2)}{\gamma_1\mu_1(\mu_2^2 + 4\delta_2^2) + \gamma_2\mu_2(\mu_1^2 + 4\delta_1^2)}. \quad (16)$$

При исследовании устойчивости найденного гармонического режима отметим, что фазовое пространство, определяемое (11), в силу (9) разбивается на области „быстрых“ движений (первые 4 уравнения) и „медленных“ (последние 5) [8]. Для „быстрых“ движений характеристическое уравнение имеет вид:

$$[(1+\lambda)^2 + (v_1^2 - \omega^2)^2/\mu_1^2] [(1+\lambda)^2 + (v_2^2 - \omega^2)^2/\mu_2^2] = 0, \quad (17)$$

откуда следует, что $\operatorname{Re} \lambda = -1 < 0$.

После линеаризации последних пяти дифференциальных уравнений (11) относительно состояния равновесия получаем характеристическое уравнение для „медленных“ движений:

$$\lambda [A^2(1+\lambda)^2 + B^2] (2A^2C^2 + \lambda^2 + \lambda) = 0, \quad (18)$$

где

$$A = \frac{\gamma_1 \mu_1 \mu_\lambda}{v_1^2 + 4(\delta_1 - \Delta)^2} + \frac{\gamma_2 \mu_2 \mu_\lambda}{v_2^2 + 4(\delta_2 - \Delta)^2},$$

$$B = \frac{2\gamma_1 \mu_\lambda}{v_1^2 + 4(\delta_1 - \Delta)^2} + \frac{2\gamma_2 \mu_\lambda}{v_2^2 + 4(\delta_2 - \Delta)^2},$$

$$C = \left[\frac{1}{A} \left(n_0 - \frac{1}{A} \right) \right]^{1/2}.$$

Из (18) имеем

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm i \left| \frac{B}{A} \right|, \quad \lambda_{4,5} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8A^2C^2}}{2}.$$

Нулевой корень появился из-за автономности исходной системы. Так как $\text{Re}\lambda_{2,3,4,5} < 0$, то найденный цикл орбитально устойчив.

Автор благодарен Н. Г. Басову и А. Н. Ораевскому за помощь и внимание к работе, а также В. Н. Луговому за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, УФН, 7, 485 (1955).
2. А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 4, 718 (1959).
3. Х. Ю. Халдре, Р. В. Хохлов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 5—6, 60 (1958).
4. А. С. Гуртовник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 83 (1958).
5. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 3, 1298 (1958).
6. В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 945 (1957).
7. В. Н. Луговой, Радиотехника и электроника, 10, 1700 (1961).
8. А. А. Андronov, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГИФМЛ, М., 1959.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
31 января 1963 г.

МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ГЕНЕРАТОР С ДВУМЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ РЕЗОНАТОРАМИ НА АММИАКЕ $N^{14}H_3$ (ЛИНИЯ 3,2)

Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, О. А. Туманов

Молекулярный генератор с двумя последовательными резонаторами на пучке молекул $N^{14}H_3$ (линия $J=3, K=3$) детально исследован в работах [1—3]. Одним из основных свойств такой системы является то, что частота колебания во втором резонаторе монохроматична и с очень большой точностью определяется и совпадает с частотой колебаний в первом. Этот факт можно использовать при создании молекулярного генератора с большой относительной стабильностью частоты. В таком генераторе первый резонатор, ответственный за стабильность частоты, делается без волноводов и может быть легко изолирован от многих дестабилизирующих факторов [4]. Со второго резонатора производится только съем мощности, и его совершенно нет надобности термостатировать. Однако в таком стандарте частоты исключается только влияние волноводной связи резонатора на стабильность частоты. Другие же дестабилизирующие факторы, в том числе и факторы, являющиеся следствием сложной структуры молекулярного перехода, полностью остаются. Поэтому мы стремились выяснить возможность создания молекулярного генератора на линии $J=3, K=2$ с двумя последовательными резонаторами.

В молекулярном генераторе с двумя последовательными резонаторами источник аммиака (канал $l=10$ мм, $\varnothing 1$ мм), сортирующая система, резонатор I и резонатор II устанавливались на одной оси. Расстояние между резонаторами было равно 10 мм. Добротности резонаторов были приблизительно одинаковыми (порядка 8000). Тип колебаний резонаторов E_{010} . Приемная аппаратура не отличалась от обычно применяемой при работе с однорезонаторными молекулярными генераторами.

Колебания во втором резонаторе возникают сразу же, как только начинается генерация в первом. При этом мощность колебаний во втором резонаторе в 5—10 раз меньше мощности колебаний в первом. На рис 1 представлены зависимости мощности колебаний во втором и первом резонаторах от расстройки первого резонатора для двух характерных значений напряжения на сортирующей системе. При достаточно большой мощности в первом резонаторе мощность во втором резонаторе зависит от Δv_1 сложным образом с характерным для молекулярного генератора с двумя последовательными резонаторами провалом при $\Delta v_1=0$ [5].

На рис 2 представлена зависимость мощности колебаний в обоих резонаторах от напряжения на сортирующей системе при $\Delta v_1=\Delta v_2=0$. Если мощность в первом резонаторе растет с увеличением V , то во втором сначала растет, достигает при $V \approx 15$ кв максимума, а при дальнейшем увеличении V начинает падать. Масштаб значений мощности во втором резонаторе на рис 1 и 2 увеличен в 2÷3 раза по сравнению со значениями для первого резонатора. Такая зависимость мощности во втором резонаторе от V также характерна для генератора с двумя последовательными резонаторами. На сильной линии $J=3, K=3$ $N^{14}H_3$ эти зависимости более наглядны [6]. Проведенные исследования показали, что линии $J=3, K=3$ $N^{14}H_3$ можно использовать в молекулярном генераторе с двумя последовательными резонаторами; при этом необходимо учитывать, что характеристики генератора с двумя последовательными

резонаторами имеют более сложный вид по сравнению с характеристиками обычных молекулярных генераторов с одним резонатором.

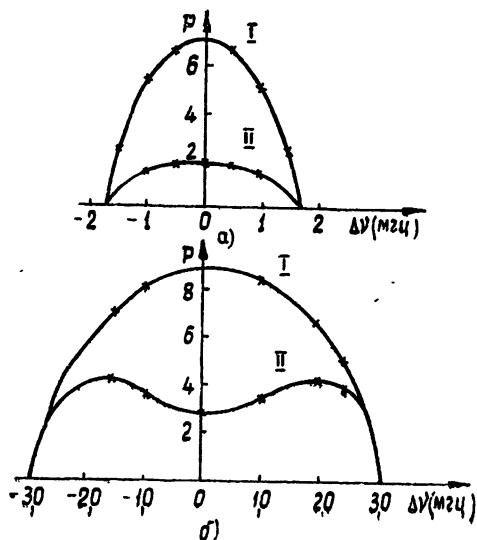


Рис. 1. Зависимость мощности колебаний в первом и втором резонаторах отстройки первого для различных V :
а) $V = 16$ кв; б) $V = 20$ кв.

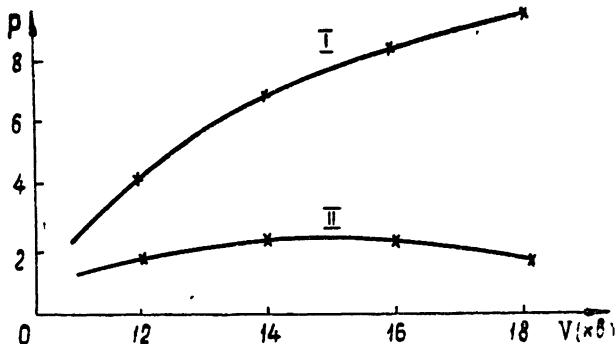


Рис. 2. Зависимость мощности излучения в первом и втором резонаторах от напряжения на сортирующей системе при $\Delta\nu_1 = \Delta\nu_2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Higa, Rev. Sci. Instr., 28, 726 (1957).
2. W. H. Wells, J. Appl. Phys., 29, 714 (1958).
3. N. Sher, IRE Nat. Conv. Rec., 78, 4199 (1960).
4. F. H. Reder, C. I. Bickart, Rev. Sci. Instr., 31, 1164 (1960).
5. Г. М. Страховский, В. М. Татаренков, ЖЭТФ, 42, 907 (1962).
6. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, ЖЭТФ, 42, 1529 (1962).