

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ В ЖУРНАЛЕ № 4, 1963 г.

| Стр. | Строка | Напечатано | Должно быть |
|------|-----------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 771 | 12 сверху | $h_e = \chi_{0_2}$ | $h_e = \chi_{0_2}$ |
| 805 | 10 сверху | $\dots u, v \text{ и } u, v' \dots$ | $\dots u, v \text{ и } u, v' \dots$ |
| 857 | 4 снизу | $\dots + 2Jgs \dots$ | $\dots + 2jgs \dots$ |
| | 3 снизу | $\dots + 2JgsE_1(2\pi DN) \dots$ | $\dots + 2jgsE_1(2\pi DN) \dots$ |

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ В ЖУРНАЛЕ № 5, 1963 г.

| | | | |
|------|-----------|---|---|
| 885 | 8 снизу | $\overline{\Pi}_r = \dots \iint_s \dots$ | $\overline{\Pi}_r = \dots \iint_s \dots$ |
| 910 | 12 снизу | Пусть $T_{\mu\nu}^{\Theta-M}(x) \dots$ | Пусть $T_{\mu\nu}^{\Theta-M}(x) \dots$ |
| 931 | 4 сверху | $\int \dots = \pi/\lambda$ | $\int \dots = \pi\lambda$ |
| 933 | 9 снизу | $\frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}_y^2}{\partial x} = \dots$ | $\frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x} = \dots$ |
| 1029 | 6 сверху | $\dots T_1^{n'i} x_i \in \frac{3}{2}(g) \dots$ | $\dots T_1^{n'i} x_i \in \frac{\epsilon}{2}(g) \dots$ |
| 1044 | 12 сверху | $\dots (x^j(t') + \dots - x^{j+1}(t') > 0)$ | $\dots (x^j(t') + \dots - x^{j+1}(t')) \epsilon > 0$ |
| 1050 | 10 снизу | | |

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|------|
| Гинзбург В. Л. и Писарева В. В. Поляризация радиоизлучения дискретных источников и изучение метагалактического, галактического и околосолнечного пространства | 877 |
| Кротиков В. Д. К теории интегрального радиоизлучения Луны | 889 |
| Базелян Л. Л., Брауде С. Я., Брук Ю. М., Жук И. Н., Мень А. В., Рябов Б. П., Содин Л. Г., Шарыкин Н. К. Спектры радиоизлучения дискретных источников Кассиопея-А, Лебедь-А, Телец-А и Дева-А на частотах $12,5 \pm 40$ мгц | 897 |
| Хачатрян Б. В. Об излучении осциллятора, движущегося в неоднородной среде | 904 |
| Пелетминский С. В. О прохождении частиц, обладающих дипольными моментами, через вещество | 910 |
| Цытович В. Н. О воздействии излучения на релятивистские частицы, движущиеся в магнитном поле | 918 |
| Рухадзе А. А. Циклотронные колебания неоднородной плазмы низкого давления | 928 |
| Филиппов Ю. Ф. Взаимодействие магнитозвуковых волн | 932 |
| Маханьков В. Г. О неустойчивостях в системе плазма-пучок ограниченного радиуса | 941 |
| Омелаенко А. С., Блиох П. В. Параметрическая неустойчивость электронного пучка в неоднородном анизотропном диэлектрике | 946 |
| Рыжов Ю. А. О влиянии диаграмм направленности антенн на интенсивность принимаемого излучения при рассеянии радиоволн на неоднородностях тропосферы | 952 |
| Иогансен Л. В. Резонансная дифракция упругих волн в плоско-слоистых средах с полным внутренним отражением | 958 |
| Голованивский К. С., Кузовников А. А. Нижняя частотная граница высокочастотного квазипотенциала в гелиевой и криptonовой плазме | 964 |
| Богатырев Ю. К., Островский Л. А. Распространение электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи с сосредоточенными параметрами. I. Нестационарные процессы | 973 |
| Богатырев Ю. К., Островский Л. А. Распространение электромагнитных волн в нелинейных линиях передачи с сосредоточенными параметрами. II. Структура фронта ударных волн | 985 |
| Иванов Е. А. Шар произвольной проводимости с неконцентрическим шаровым включением в поле вертикального электрического диполя | 992 |
| Штрапенин Л. Б. О распространении спиральных H_{pl} -волн в спиральном волноводе без излучения | 1003 |
| Ахманов С. А., Рошаль А. С. К теории переходных процессов в параметрически возбуждаемом контуре | 1008 |
| Неймарк Ю. И. Метод усреднения с точки зрения метода точечных отображений | 1021 |
| Глебский Ю. В. К вопросу оптимизации плана работ | 1033 |

Краткие сообщения и письма в редакцию

| | |
|--|------|
| Разин В. А., Федоров В. Т. . Интенсивности ряда дискретных источников, Луны и Солнца на частоте 927 мгц | 1052 |
| Ветухновская Ю. Н., Кузьмин А. Д., Кутузов Б. Г., Лосовский Б. Я., Саломоно- вич А. Е. Измерения спектра радиоизлучения ночной стороны Венеры в сан- тиметровом диапазоне волн | 1054 |
| Красовицкий В. Б., Степанов К. Н. О возбуждении электромагнитных волн в плазме потоком ионов | 1056 |
| Андронова И. А. Исследование сплошного спектра тока сегнетоэлектриков вблизи первой гармоники частоты переполяризации и порогового сигнала диэлектрического усилителя | 1058 |
| Малахов А. Н., Серебрянников В. С. Измерение технической ширины спектраль- ной линии клистронного генератора | 1062 |
| Белов В. Е. К статической теории цилиндрического магнетрона с внутренним катодом | 1065 |
| Турик А. В. Учет нижнего загиба нелинейной характеристики и гистерезиса при колебаниях в контуре с асимметричной характеристикой | 1068 |
| Белуга И. Ш. К расчету волновой проводимости экранированной многопровод- ной линии с прямоугольными проводниками | 1070 |
| Эйнгорин М. Я. О двух геометрических интерпретациях решений систем урав- нений алгебры логики и состояний их физических моделей | 1071 |
| Письма в редакцию | 1075 |

Информация

Линотипии статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. III, № 3, 1963

1076

ПОЛЯРИЗАЦИЯ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ И ИЗУЧЕНИЕ МЕТАГАЛАКТИЧЕСКОГО, ГАЛАКТИЧЕСКОГО И ОКОЛОСОЛНЕЧНОГО ПРОСТРАНСТВА

B. L. Гинзбург и B. V. Писарева

В связи с обнаружением поляризации радиоизлучения целого ряда внегалактических дискретных источников (радиогалактик) обсуждается вопрос об использовании поляризационных измерений для изучения метагалактического и галактического пространства. В случае покрытия источника солнечной короной речь может идти также о получении определенной информации о магнитных полях и неоднородностях в короне

Еще десять лет назад, в период установления представлений о магнитотормозной природе нетеплового космического радиоизлучения, был поставлен вопрос о возможности и большом значении поляризационных измерений [1, 2]. Основанием для этого служит тот факт, что магнитотормозное излучение, вообще говоря, поляризовано. К сожалению, изучение поляризации в радиодиапазоне до последнего времени не привлекало к себе достаточного внимания, хотя в этой области и проводились как теоретические [3–5], так и экспериментальные [6–8] исследования. Сейчас положение изменилось, о чем свидетельствует появление целого ряда работ [9–16]. При этом в плане дальнейшего изложения особенно важным представляется обнаружение поляризации радиоизлучения внегалактических источников [12–16]. Речь здесь идет о большом эффекте в том смысле, что поляризация иногда оказывается весьма значительной и, например, для некоторых областей Центавра-А достигает 45% (на волне длиной $\lambda=10\text{ см}$).

Нам представляется несомненным, что поляризационные измерения если еще не стали, то в ближайшем будущем окажутся одним из важнейших источников информации, получаемой радиоастрономическими методами. На таком пути можно будет сделать определенные выводы о релятивистских электронах, магнитных полях и концентрации ионизированного газа в источниках. Кроме того, можно надеяться, что в результате измерения вращения плоскости поляризации и деполяризации в зависимости от частоты и направления наблюдения удастся получить сведения о магнитных полях и электронной концентрации в пространстве между источником и Землей. Особенно важна возможность такого анализа в отношении метагалактического пространства, так как в этом случае имеющиеся данные особенно неопределенны (см. в этой связи [17, 18]). Однако просвечивание поляризованным радиоизлучением галактического гало и солнечной короны [19] также может представить выдающийся интерес (в случае просвечивания некоторых областей Галактики и солнечной короны можно, разумеется, измерять поляризацию не только внегалактических, но и галактических источников; для короны может оказаться целесообразным и практически доступным также просвечивание с помощью искусственных источников, помещенных на межпланетных ракетах).

В связи с изложенным авторам казалось целесообразным обсудить в настоящей статье вопрос о возможностях поляризационных измере-

ний в радиоастрономии (преимущественно в условиях, когда речь идет о просвечивании, а не вращении плоскости поляризации и деполяризации в самих источниках).

1. Поскольку рассматривается магнитотормозное излучение ультраполятистских частиц, излучение источника будем считать линейно поляризованным (эллиптическая составляющая в подобных условиях отсутствует [7]). Поэтому, помимо интенсивности I , наблюдаемое излучение полностью характеризуется еще двумя параметрами: степенью поляризации и позиционным углом колебаний электрического вектора. Источник можно характеризовать функциями $\Pi_s(\delta, \omega)$ и $\psi_s(s, \omega)$ —степенью поляризации и позиционным углом колебаний электрического вектора соответственно, где s —единичный вектор в направлении от данной точки источника к наблюдателю и ω —циклическая частота. Частотная зависимость величин Π_s и ψ_s может быть вызвана целым рядом эффектов: вращением плоскости поляризации в самом источнике (т. е. в области, где имеются излучающие электроны), различным пространственным распределением электронов с разными энергиями и некоторыми другими причинами. Вполне возможна, однако, такая ситуация, при которой в интересующем нас интервале частот $\Pi_s = \Pi_{s0}(s)$ и $\psi_s = \psi_{s0}(s)$, т. е. поляризационные свойства источника не зависят от частоты. Именно такой случай будет рассматриваться в первую очередь. Сюда относится и вариант, при котором заметное вращение имеет место во внешних частях излучающей туманности, но вне области с существенной эмиссией.

Поскольку влияние среды на пути между источником и приемником быстро уменьшается с ростом частоты (см. ниже), функции Π_{s0} и ψ_{s0} , если они существуют, могут быть определены в результате измерений на достаточно высокой частоте. Далее, в межзвездной среде анизотропией поглощения можно пренебречь; поэтому поляризация Π не должна изменяться, т. е. поляризация излучения в месте приема $\Pi_r = \Pi_s$. На опыте, однако, всегда приходится иметь дело с некоторой усредненной поляризацией, где усреднение ведется с учетом диаграммы направленности антенны. Усредненное значение поляризации Π_r уже может зависеть от частоты и не равно Π_s .

Предположим сначала, что диаграмма антенны так узка, что $\Pi_r = \Pi_s = \Pi$. Тогда приходится иметь дело только с вращением плоскости поляризации, причем в космических условиях в радиодиапазоне $\omega_H^2/\omega^2 \ll 1$ (например, даже для частоты $f = \omega/2\pi = 3 \cdot 10^7$ сек $^{-1}$, $\lambda = c/f = 10$ м и поля $H = 10^{-2}$ эрстед частота $\omega_H = |e| H/mc = 1,76 \cdot 10^5$ сек $^{-1}$ и отношение $\omega_H^2/\omega^2 \sim 10^{-6}$). Поэтому распространение радиоволн практически всегда можно считать „квазипродольным“, и разность показателей преломления для циркулярно поляризованных волн с разным направлением вращения электрического вектора равна (см., например, [20])^{*}

$$n_- - n_+ = \frac{4\pi e^3 H N \cos \alpha}{m^2 c \omega^3} = 5,6 \cdot 10^{16} \frac{HN \cos \alpha}{\omega^3}. \quad (1)$$

Здесь пренебрежено поглощением, использованы неравенства $\omega_H^2/\omega^2 \ll 1$ и $|n_- - 1| \ll 1$ (N —концентрация электронов и α —угол между полем H и вектором δ). Отсюда для поворота плоскости поляризации на пути R получаем (без учета рефракции):

* Показатель n_- отвечает волне, в которой электрический вектор вращается против часовой стрелки, если смотреть на источник.

$$\Delta\psi = \psi_r(s, \omega) - \psi_s(s, \omega) = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{\omega}{c} (n_+ - n_-) dr = 0,93 \cdot 10^6 \frac{1}{\omega^2} \int_0^R HN \cos \alpha dr, \quad (2)$$

где $\psi_r(s, \omega)$ — позиционный угол колебаний электрического вектора излучения, приходящего к наблюдателю в направлении s .

Посмотрим теперь, чем определяется зависимость $\Delta\psi$ от направления s . При этом предположим, что $\Delta\psi$ зависит от s лишь в слое с толщиной ΔR , расположенному на расстоянии R от наблюдателя. Тогда

$$\Delta\psi(s, \omega) = \Delta\psi_0 + \frac{0,93 \cdot 10^6}{\omega^2} \int_R^{R+\Delta R} HN \cos \alpha dr = \Delta\psi_0 + \varphi, \quad (3)$$

где величина

$$\Delta\psi_0 = \frac{0,93 \cdot 10^6}{\omega^2} \left[\int_0^R HN \cos \alpha dr + \int_{R+\Delta R}^{R_s} HN \cos \alpha dr \right]$$

не зависит от s .

Поле линейно поляризованной волны запишем в виде

$$E_x = \operatorname{Re} E_0 e^{i\varphi}, \quad E_y = \operatorname{Im} E_0 e^{i\varphi}, \\ E_0 = \text{const} \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} \int \frac{1}{2} (n_+ + n_-) dr \right) e^{i\Delta\psi_0}.$$

Свойства неоднородного слоя (области $R < r < R + \Delta R$) будем характеризовать функцией корреляции для величины $M = HN \cos \alpha$, причем выберем эту функцию в виде

$$\overline{\frac{M(s_1, r_1) M(s_2, r_2)}{M^2}} = \exp [-(s_1 r_1 - s_2 r_2)^2 / l^2],$$

где радиус-вектор r_1 записан как $r_1 = r_1 s_1$ и l — средний размер неоднородностей величины $HN \cos \alpha$. Здесь предполагается, что $\bar{M} = 0$ (черта везде означает усреднение по совокупности статистических распределений величины M).

Если $\Delta R \ll R$ и $R \theta_{\max} \ll R$, где θ_{\max} — максимальные угловые размеры источника, то

$$\overline{\frac{\varphi_1(s_1, \omega) \varphi_2(s_2, \omega)}{\varphi^2}} = \frac{\iint_R^{R+\Delta R} \overline{M_1(s_1, r_1) M_2(s_2, r_2)} dr_1 dr_2}{\iint_R^{R+\Delta R} \overline{M(s_1, r_1) M(s_2, r_2)} dr_1 dr_2} = \exp \left(- \frac{R^2 \theta^2}{l^2} \right), \quad (3)$$

где θ — угол между s_1 и s_2 , $\varphi_i(s_i, \omega) = \varphi(s_i, \omega)$ и т. п. Нас интересует функция корреляции величины $B = e^{i\varphi(s)}$, т. е. функция

$$\rho_B = [\overline{B(s_1) B^*(s_2)} - (\overline{B})^2] / [\overline{B(s_1) B^*(s_1)} - (\overline{B})^2] \quad (B^* = e^{-i\varphi(s)}).$$

Будем считать, что $\varphi(s)$ есть сумма большого числа случайных величин. Тогда, в силу центральной предельной теоремы,

$$\overline{B} = \exp[i\varphi_1(s_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\varphi_1) \frac{\exp[-\varphi_1^2/2\sigma^2]}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dz = \exp(-\sigma^2/2)$$

и

$$\begin{aligned} \overline{B(s_1) B^*(s_2)} &= \overline{\exp \{i[\varphi_1(s_1) - \varphi_2(s_2)]\}} = \exp \left\{ -\frac{|\varphi_1(s_1) - \varphi_2(s_2)|^2}{2} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\overline{\varphi^2} \left[1 - \frac{\overline{\varphi_1(s_1) \varphi_2(s_2)}}{\overline{\varphi^2}} \right] \right\}, \\ \rho_B &= \frac{\exp \{-\overline{\varphi^2} [1 - \overline{\varphi_1(s_1) \varphi_2(s_2)/\varphi^2}] - \exp(-\overline{\varphi^2})\}}{1 - \exp(-\overline{\varphi^2})}. \end{aligned}$$

Используя теперь выражение (3), при $\overline{\varphi^2} \ll 1$ можно произвести разложение $\exp(-\overline{\varphi^2})$ и $\exp\{-\overline{\varphi^2}[1 - \exp(-R^2 \theta^2/l^2)]\}$ в формуле для ρ_B по малому параметру. В результате мы сразу получаем:

$$\rho_B = \exp(-R^2 \theta^2/l^2), \quad \overline{\varphi^2} \ll 1. \quad (4)$$

При $\overline{\varphi^2} \gg 1$ приближенно

$$\rho_B = \exp \{-\overline{\varphi^2} [1 - \exp(-R^2 \theta^2/l^2)]\}, \quad (5)$$

где величина

$$\overline{\varphi^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \left(\frac{0.93 \cdot 10^6}{\omega^2} \right)^2 (\overline{NH})^2 l \Delta R$$

вычисляется в Приложении.

Как указывалось, мы сейчас считаем диаграмму направленности антенны узкой. При наличии неоднородностей это значит, что ширина диаграммы θ_a не только меньше угловых размеров, на которых изменяется угол ψ_s , но и удовлетворяет неравенству $\theta_a \ll l/R$. Проводя измерения с такой диаграммой, можно выяснить, как ведет себя функция $\rho_B(\theta, \omega)$ в зависимости от частоты. При этом наблюдения на достаточно высоких частотах, когда $\overline{\varphi^2} \ll 1$, позволяют определить l/R . Если расстояние до слоя с неоднородностями R известно, из анализа поведения функций $\rho_B(\theta, \omega)$ и $\varphi^2 = [\Delta\Phi(s, \omega) - \Delta\Phi_0]^2$ в зависимости от частоты можно определить l и $(\overline{NH})^2 \Delta R$.

Пусть вначале частота ω настолько велика, что эффект Фарадея отсутствует. По мере уменьшения ω могут иметь место следующие случаи.

а) Для рассматриваемой поляризации $\Pi_r = \Pi_s$, величина $\sqrt{\overline{\varphi^2}} < 1$ и направление колебаний электрического вектора изменяется одинаковым образом на всем размере источника, т. е. $\rho_B \approx 1$. Из (4) следует, что при наличии неоднородностей величины $NH \cos \alpha$ их размер l/R больше угловых размеров источника θ_s .

б) $\Pi_r = \Pi_s$, $\sqrt{\overline{\varphi^2}} < 1$ и направление колебаний электрического вектора хаотически изменяется вдоль источника (без учета члена $\Delta\Phi_0$), а средний угловой размер неоднородностей величины $e^{i\varphi}$ порядка θ , т. е. радиус корреляции для функции ρ_B порядка $R \theta$. В этом случае, как следует из (4), угловой размер неоднородностей величины $NH \cos \alpha$ будет также равен $l/R = \theta$.

в) $\Pi_r = \Pi_s$, направление колебаний электрического вектора для различных s с уменьшением ω сначала изменяется независимо от s , а затем при дальнейшем уменьшении ω появляется зависимость величины вращения электрического вектора от s . При этом угловой размер области с однородным вращением плоскости поляризации меняется

пропорционально ω^2 . В этом случае, как ясно из (4) и (5), $l/R \gg \theta_s$, но на низкой частоте параметр $l/(R\sqrt{\varphi^2})$ уже сравним или меньше θ_s . Другими словами, мы имеем дело с неоднородностью типа линзы с угловыми размерами, большими размеров изучаемой области источника.

Если при ширине диаграммы θ_a , меньшей размеров области источника с примерно одинаковой поляризацией, $\Delta\Phi$ меняется с частотой в значительной мере однородно вдоль области, но Π_r уменьшается, то это может быть связано с деполяризацией в самом источнике. Таким образом, проводя измерения с узкой диаграммой антенны, можно в принципе определить, происходит ли деполяризация в самом источнике или на пути к наблюдателю.

2. Рассмотрим теперь случай, когда при отсутствии эффекта Фарадея на пути к наблюдателю поляризация и интенсивность излучения от области источника с угловыми размерами порядка θ_a не меняются вдоль этой области. Пусть, однако, с уменьшением частоты средний угловой размер величины $e^{i\varphi}$ (т. е. радиус корреляции для функции ρ_B , деленный на R) становится меньше θ_a . При этом, очевидно, представляет интерес выяснить частотную зависимость степени поляризации и направлений колебаний электрического вектора для излучения, принимаемого антенной. Вычисления, проведенные для этого случая, даны в Приложении; здесь же мы приведем окончательные результаты.

Для использованной выше гауссовой функции корреляции неоднородностей величины $M = HN \cos \alpha$ наблюдаемая с данной антенной степень поляризации $\bar{\Pi}_r$ равна следующим величинам:

а) при $\bar{\varphi}^2 \ll 1/4$ и $R\theta_a/l \ll 1$

$$\bar{\Pi}_r = \Pi_s, \quad (6)$$

при $\bar{\varphi}^2 \ll 1/4$ и $R\theta_a/l \gg 1$

$$\bar{\Pi}_r = \Pi_s \left[1 - 2\bar{\varphi}^2 + 2\bar{\varphi}^2 \left(\frac{l}{R\theta_a} \right)^2 \right] = \Pi_s [1 - c_1 \omega^{-4}]; \quad (6a)$$

б) при $\bar{\varphi}^2 \gg 1/4$ и $R\theta_a/l \ll 1$

$$\bar{\Pi}_r \simeq \Pi_s, \quad (7)$$

при $\bar{\varphi}^2 \gg 1/4$ и $R\theta_a/l \gg 1$

$$\bar{\Pi}_r = \frac{V\pi}{2} \Pi_s \frac{L}{R\theta_a} = c_2 \omega^2. \quad (7a)$$

Здесь $L = l \sqrt{\frac{4}{3} \pi^{1/2} (0,93 \cdot 10^6 / \omega^2)^2 \bar{H}^2 \Delta R l}$, c_1 и c_2 — некоторые коэффициенты, не зависящие от ω .

Конечно, случай $R\theta_a/l \ll 1$ отвечает условиям, обсуждавшимся ранее, и приведен только для сравнения.

Для среднеквадратичного значения $\sqrt{\bar{\Pi}_r^2}$ были получены следующие выражения:

а) при $\bar{\varphi}^2 \ll 1/4$, $R\theta_a/l \gg 1$

$$\sqrt{\bar{\Pi}_r^2} = \Pi_s \left[1 - 4\bar{\varphi}^2 + 4\bar{\varphi}^2 \left(\frac{l}{R\theta_a} \right)^2 \right]^{1/2} = (1 - g_1 \omega^{-4})^{1/2}; \quad (8)$$

б) при $\frac{\varphi^2}{\omega^2} \gg 1/4$, $R\theta_a/L \gg 1$

$$\sqrt{\bar{\Pi}_r^2} = \Pi_s \frac{L}{R\theta_a} = g_2 \omega^2, \quad (9)$$

где g_1 и g_2 — некоторые коэффициенты, не зависящие от ω . Для $R\theta_a/l \ll 1$ и $R\theta_a/L \ll 1$, очевидно, $\sqrt{\bar{\Pi}_r^2} = \Pi_s$.

3. В последнее время проведены довольно подробные измерения [15] степени поляризации и направления колебаний электрического вектора для нескольких областей источника Центавр-А на частоте 1410 мгц. Кроме того, для трех областей измерения были проведены в интервале частот от 3000 мгц до 970 мгц. При этом на частоте 1000 мгц значения $\Delta\phi$ получились равными 306° , 350° и 344° , т. е. очень близкими для всех трех областей. Значение степени поляризации для центральной области источника быстро уменьшалось с понижением частоты; для двух других областей это уменьшение происходило медленнее. Для центральной области наблюдается также наибольшее отклонение угла поворота электрического вектора от значения, среднего для трех областей источника. Возможно, здесь присутствуют два эффекта: один связан с поворотом электрического вектора вне источника (во внешних областях источника, в Галактике или в Метагалактике) и второй — с деполяризацией и с дифференциальным вращением из-за эффекта Фарадея в самом источнике.

Используя формулу (2) при отвечающих наблюдениям $\omega = 2\pi \cdot 10^9$ сек⁻¹ и $\Delta\phi = 2\pi$, для $HNR \cos \alpha$ имеем

$$HNR \cos \alpha \approx 2,5 \cdot 10^{11}, \quad (10)$$

т. е. значение, полученное в работе [15]. Расстояние до Центавра-А составляет $4 \text{ мpc} = 1,2 \cdot 10^{25} \text{ см}$. Поле в Метагалактике, вероятно, не превосходит $5 \cdot 10^{-7} \text{ эрстед}$ и, скорее, $H \sim 10^{-7} \text{ эрстед}$, а концентрация $N \sim 10^{-5} \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$ (см. [17, 18]). Поэтому даже при $\cos \alpha \sim 1$, что представляется нам очень мало вероятным, для Метагалактики в данном случае $HNR \cos \alpha \sim 10^{13}$. Таким образом, нужно выяснить, не происходит ли вращение во внешних частях источника, в Галактике или в пределах Местной Группы галактик [21]. Согласно кратким сообщениям [22], фарадеевское вращение возрастает для источников с низкой галактической широтой. Отсюда, как и из некоторых других соображений (см. ниже), следует, что вращение скорее всего происходит в галактическом диске. Из данных [23] о спектре низкочастотного космического радиоизлучения можно прийти к заключению [18, 21], что в диске $\bar{N} \approx 0,1 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$ в слое с полутолщиной около $300 \text{ pc} \approx 10^{21} \text{ см}$ (этот вывод не является однозначным, так как получен в предположении, что $\bar{N}^2 \sim (\bar{N})^2$). Для источника Центавр-А (широта $b = 19^\circ$) отсюда $\bar{N}R = 10^{20}/\sin b \approx 3 \cdot 10^{20}$; поэтому для получения величины (10) нужно, чтобы $H \cos \alpha \approx 10^{-6}$. Для галактического диска такое значение, по-видимому, возможно.

В работе [14] приводятся результаты исследования поляризации нескольких внегалактических источников. При этом степень поляризации излучения более удаленных от наблюдателя источников в среднем была меньше, чем для более близких источников. Возможно, что уменьшение Π , происходило вследствие деполяризации излучения на облаках газа Метагалактики. Однако из результатов измерений на одной частоте трудно выявить какую-либо зависимость Π , от расстояния

до источника, поскольку степень поляризации различных источников Π_s в отсутствие эффекта Фарадея может меняться в широких пределах.

Для метагалактического поля $H \sim 10^{-7}$ эрстед при $N \sim 10^{-5}$ эл. см⁻³ и области с квазиоднородным полем $R \sim 10^{21}$ см произведение $\bar{H}N\bar{R} \cos \alpha \sim 10^{12}$; тогда при $\omega = 10^{10}$ сек⁻¹ ($\lambda = 20$ см) $|\Delta\Phi| \sim 10^{-2} \sim 1^\circ$. Отсюда ясно, что на волнах $\lambda \geq 20$ см вполне можно ожидать некоторого заметного в принципе метагалактического вращения (приведенная оценка $\bar{H}N\bar{R} \cos \alpha$ может быть, хотя и с некоторой натяжкой, увеличена по крайней мере на порядок). Одной из существенных трудностей является, однако, выделение метагалактического вращения. В этом отношении выгоднее всего, конечно, исследовать поляризацию возможно более далеких источников (для достаточно далеких источников, как подчеркнул Н. С. Кардашев, значительную роль играет также космологический эффект, т. е. учет эволюции Метагалактики). Учитывая, как деполяризация удаленных источников (без учета космологического эффекта) зависит от расстояния между источником и наблюдателем (формулы (П.14) и (П.15)), можно в принципе выделить эффект влияния Метагалактики, проводя измерения степени поляризации излучения ряда дискретных источников на нескольких частотах*.

Посмотрим теперь, как могут влиять на поляризацию излучения далеких источников облака, расположенные в Галактике. До сих пор нет достаточно определенных данных о размерах и распределении облаков ионизированного газа в Галактике. Если положить в облаках Галактики $\bar{H}N \cos \alpha \sim 10^{-6}$, $l \sim 10$ пс и $R \sim 1$ кпс, то, как следует из формул (4) и (5), неоднородности в направлении электрического вектора будут иметь угловой размер $\theta = l/R \approx 30'$ для излучения на частотах $\omega > 6 \cdot 10^9$ сек⁻¹ ($\lambda < 30$ см) и $\theta \sim l/(R\sqrt{\frac{\omega}{\phi^2}})$ при $\omega < 6 \cdot 10^9$ сек⁻¹ (например, при $\omega = 10^9$ сек⁻¹, $\lambda = 180$ см угол $\theta \sim 5'$). Наблюдения обычно проводятся с шириной диаграммы направленности антенны порядка нескольких градусов, что гораздо больше ожидаемого углового размера неоднородностей направлений электрического вектора. Желательны были бы измерения с узкой диаграммой направленности, так как при этом можно было бы выяснить, происходит ли деполяризация в самих излучающих областях или на облаках ионизированного газа по пути к наблюдателю.

Наблюдения поляризованного излучения дискретных источников

* В статье [26], полученной после того, как настоящая статья была уже написана, сообщается об обнаружении поляризации источника ЗС295. Деполяризация излучения этого источника на частоте $\omega/2\pi = 1410$ мгц, видимо, мала. Поэтому можно считать, что на пути $R_s = 1380$ мпс от источника соблюдается неравенство (см. формулу (П.14)).

$$\sqrt{\frac{\phi^2}{\omega^2}} = \frac{\pi^{1/4}}{\sqrt{2}} \left(\frac{0.93 \cdot 10^6}{\omega^2} \right) \sqrt{(NH)^2} \sqrt{IR_s} \ll 1.2.$$

Отсюда $\sqrt{(NH)^2} \ll 1/V^i$ или при $i \sim 0.3 - 3$ мпс $\simeq 10^{24} - 10^{25}$ см соответствующее среднее значение $\bar{NH} \ll (3 \cdot 10) \cdot 10^{-13}$ (при $\bar{N} \sim 10^{-5}$ эл. см⁻³ отсюда $\bar{H} \ll (3 \cdot 10) \cdot 10^{-8}$ эрстед). Если система состоит из облаков с характерным размером l , находящихся друг от друга на расстоянии $\sim \Lambda$ (между облаками вращения нет), то

$$\sqrt{\frac{\phi^2}{\omega^2}} \sim \frac{0.93 \cdot 10^6}{\omega^2} \sqrt{(NH)^2} l \sqrt{R_s/\Lambda}.$$

В указанных выше условиях, но при $l \sim 3 \cdot 10^{24}$ см и $\Lambda \sim 3 \cdot 10^{25}$ см получаем: $\bar{NH} \ll \sqrt{\Lambda/l} \sim 2 \cdot 10^{-12}$.

В еще более поздней публикации [27] поляризация радиоизлучения источника ЗС295 не обнаружена. В этой связи, разумеется, вопрос о справедливости приведенной оценки величины NH остается открытым.

в период покрытия их солнечной короной [19] могут служить средством исследования структуры и магнитного поля в короне. Полагая для мелкоструктурных неоднородностей в корональных лучах $l = 10^9 \text{ см}$, $H = 10^{-2} \text{ эрстед}$, $N \sim 10^6 \text{ эл. см}^{-3}$ и $\Delta R = 5r_\odot = 3 \cdot 10^{11} \text{ см}$ (см. [25]), для $\lambda = 10 \text{ см}$ получаем:

$$\sqrt{\bar{\varphi}^2} \sim 0.93 \cdot 10^6 \sqrt{(HN)^2 l \sqrt{\Delta R/l}} / \omega^2 \simeq \frac{1}{2}.$$

Как следует из формулы (6), при этом будет наблюдаться значительная деполяризация излучения. Если эффект деполяризации отсутствует, это значит, что $\sqrt{\bar{\varphi}^2} \ll 1$, откуда можно сделать некоторые заключения о верхней границе произведения $HNl\sqrt{\Delta R/l}$.

В заключение авторы хотели бы поблагодарить В. А. Разина за полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Степень поляризации излучения, принимаемого наблюдателем, по определению равна

$$\Pi_r = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I},$$

где Q , U и V —параметры Стокса. Для линейно поляризованного излучения $Q = I_p \cos 2\chi$, $U = I_p \sin 2\chi$, $V = 0$, I_p —интенсивность поляризованного излучения и χ —позиционный угол колебаний электрического вектора в месте наблюдения.

Пусть при отсутствии эффекта Фарадея в пространстве между источником и наблюдателем для рассматриваемой области источника поляризация и интенсивность излучения не меняются вдоль области.

В том случае, когда деполяризацию из-за эффекта Фарадея необходимо учитывать, степень поляризации Π_r (как непосредственно ясно из выражения Π_r через параметры Стокса) запишется в следующем виде (см. также [4]):*

$$\Pi_r = \Pi_s S^{-1} \left\langle \left\{ \int_s \cos [2(\psi_s + \Delta\psi)] dS \right\}^2 + \left\{ \int_s \sin [2(\psi_s + \Delta\psi)] dS \right\}^2 \right\rangle^{1/2},$$

где Π_s —степень поляризации источника, dS —элемент проекции рассматриваемой области источника на картинную плоскость (на плоскость, перпендикулярную лучу зрения), $S = \Omega R_s^2$ и Ω —тесесный угол, отвечающий источнику. При этом для простоты считается, что либо диаграмма направленности антенны значительно шире размеров источника, либо функция $g(\theta, \phi)$, характеризующая эффективную площадь антенны, постоянна в пределах рассматриваемого телесного угла Ω (в последнем случае, конечно, Ω характеризует антенну, а не источник).

Если неоднородности величины $M = HN \cos \alpha$ расположены в ограниченной области пространства (в слое толщины ΔR на расстоянии R от наблюдателя), удобно разделить $\Delta\psi(s, \omega)$ на слагаемое $\Delta\psi_0$, независящее от s , и слагаемое $\psi(s, \omega)$, значение которого определяется неоднородностями (см. основной текст). Тогда, как нетрудно видеть,

$$\Pi_r = \Pi_s S^{-1} \left[\int_s \cos [2(\psi_1 - \psi_2)] dS_1 dS_2 \right]^{1/2}. \quad (\text{П.1})$$

* Здесь предполагается, что измерения производятся на приемной аппаратуре с достаточно узкой шириной полосы, так что деполяризации в пределах полосы не происходят.

При малых значениях $2\sqrt{\overline{\varphi_{12}^2}} = 2\sqrt{(\varphi_1 - \varphi_2)^2} \ll 1$ под интегралом в (П.1) можно произвести разложение $\cos[2(\varphi_1 - \varphi_2)]$ по $2(\varphi_1 - \varphi_2)$. После усреднения по совокупности распределений $\bar{\Pi}_r$, принимает следующий вид:

$$\bar{\Pi}_r = \Pi_s S^{-1} \left\{ S - 2S \overline{\varphi^2} + 2S^{-1} \iint \overline{\varphi_1 \varphi_2} dS_1 dS_2 \right\}, \quad (\text{П.2})$$

где учтено, что $\overline{\varphi_1^2} = \overline{\varphi_2^2} = \overline{\varphi^2}$.

Будем считать, что у нас имеются только неоднородности величины M , для которых

$$\frac{M(s_1, r_1) M(s_2, r_2)}{M^2} = e^{-(r_1 - r_2)^2/l^2}, \quad r_1 = s_1 r_1, \quad r_2 = s_2 r_2. \quad (\text{П.2а})$$

Для $\overline{\varphi^2}$ и $\overline{\varphi_1 \varphi_2}$ имеем:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi^2} &= \left(\frac{0,93 \cdot 10^6}{\omega^2} \right)^2 \iint_R^{R+\Delta R} \overline{M_1(s_1, r_1) M_2(s_1, r_2)} dr_1 dr_2 = \\ &= \left(\frac{0,93 \cdot 10^6}{\omega^2} \right)^2 \overline{M^2} \iint_R^{R+\Delta R} e^{-(r_1 - r_2)^2/l^2} dr_1 dr_2 = \frac{\pi^{1/2}}{3} \left(\frac{0,93 \cdot 10^6}{\omega^2} \right)^2 (\overline{HN})^2 l \Delta R; \quad (\text{П.2б}) \\ \overline{\varphi_1 \varphi_2} &= \frac{\pi^{1/2}}{3} \left(\frac{0,93 \cdot 10^6}{\omega^2} \right)^2 (\overline{HN})^2 l \Delta R e^{-R^2 \theta^2/l^2}. \end{aligned}$$

Подставляя $\overline{\varphi_1 \varphi_2}$ в (П.2), получаем $\bar{\Pi}_r$ в следующем виде:

$$\bar{\Pi}_r = \Pi_s \left\{ 1 - 2\overline{\varphi^2} + \frac{2\overline{\varphi^2}}{S^2} \iint \exp \left(-\frac{R^2 \theta^2}{l^2} \right) dS_1 dS_2 \right\}. \quad (\text{П.3})$$

При больших значениях $2\sqrt{\overline{\varphi_{12}^2}} \gg 1$ задача о $\bar{\Pi}_r$ решается так же, как и для поляризации космического радиоизлучения с источником на определенном расстоянии R_s [4]:

$$\bar{\Pi}_r = \frac{\pi^{1/2}}{2S} \Pi_s \left\{ \iint_s \exp \left[-2\overline{\varphi_{12}^2} \right] dS_1 dS_2 \right\}^{1/2}; \quad (\text{П.4})$$

$$2\overline{\varphi_{12}^2} = 4\overline{\varphi^2} - 4\overline{\varphi_1 \varphi_2} = \frac{4}{3} \pi^{1/2} \left(\frac{0,93 \cdot 10^6}{\omega^2} \right)^2 (\overline{HN})^2 l \Delta R (1 - e^{-R^2 \theta^2/l^2}).$$

При $4\overline{\varphi^2} \gg 1$ экспоненту в (П.4) можно разложить по $R^2 \theta^2/l^2$. Подынтегральная функция тогда примет вид

$$\exp \left[-\frac{4}{3} \pi^{1/2} \left(\frac{0,93 \cdot 10^6}{\omega^2} \right)^2 (\overline{HN})^2 l \Delta R \left(\frac{R \theta}{l} \right)^2 \right] = \exp \left[-4\overline{\varphi^2} \left(\frac{R \theta}{l} \right)^2 \right].$$

Для $\bar{\Pi}_r$ в этом случае имеем:

$$\bar{\Pi}_r = \frac{\pi^{1/2} \Pi_s}{2S} \left\{ \iint_s \exp \left[-4\overline{\varphi^2} \left(\frac{R \theta}{l} \right)^2 \right] dS_1 dS_2 \right\}^{1/2}. \quad (\text{П.5})$$

Для источника, проекция которого на картинную плоскость представ-

ляет собой квадрат со стороной $R_s \theta_a$, интегрирование в (П.3) и (П.5) можно легко провести и $\bar{\Pi}_r$, записать в виде:

а) при $\bar{\varphi}^2 \ll 1/4$

$$\bar{\Pi}_r = \Pi_s \left\{ 1 - 2\bar{\varphi}^2 + \frac{2\bar{\varphi}^2}{(R_s \theta_a)^2} \left[\pi^{1/2} l \theta_a \frac{R_s^2}{R} \operatorname{erf} \left(\frac{R \theta_a}{l} \right) + l^2 R_s^2 \left(e^{-\left(\frac{R \theta_a}{l}\right)^2} - 1 \right) \right]^2 \right\}; \quad (\text{П.6})$$

б) при $\bar{\varphi}^2 \gg 1/4$

$$\bar{\Pi}_r = \frac{V\pi}{2} \frac{\Pi_s}{R_s^2 \theta_a^2} \left\{ \pi^{1/2} L \theta_a \frac{R_s^2}{R} \operatorname{erf} \left(\frac{R \theta_a}{L} \right) + L^2 \frac{R_s^2}{R^2} [e^{-(R \theta_a/L)^2} - 1] \right\}, \quad (\text{П.7})$$

где

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

и

$$L = l / \sqrt{\frac{4}{3} \pi^{1/2} \left(\frac{0,93 \cdot 10^6}{\omega^2} \right)^2 (\overline{HN})^2 l \Delta R}$$

—средний размер в направлении, перпендикулярном лучу зрения, на котором плоскость поляризации излучения после прохождения через область с неоднородностями поворачивается на угол порядка одного радиана.

а) Для $\bar{\varphi}^2 \ll 1/4$, $R \theta_a/l \gg 1$

$$\bar{\Pi}_r = \Pi_s \left[1 - 2\bar{\varphi}^2 + 2\bar{\varphi}^2 \left(\frac{l}{R \theta_a} \right)^2 \right] = \Pi_s (1 - c_1 \omega^{-4}). \quad (\text{П.8})$$

б) При $\bar{\varphi}^2 \gg 1/4$, $R \theta_a/l \gg 1$

$$\bar{\Pi}_r = \frac{V\pi}{2} \Pi_s \frac{L}{R \theta_a} = c_2 \omega^2. \quad (\text{П.9})$$

При $R \theta_a/l \ll 1$ или $R \theta_a/l \ll 1$ $\bar{\Pi}_r \approx \Pi_s$. Для случая $\bar{\varphi}^2 \gg 1/4$ и $R \theta_a/l \ll 1$ равенство $\bar{\Pi}_r \approx \Pi_s$ является неточным, так как статистика при этом уже „не работает“.

Аналогичным образом может быть найдено выражение для $V\bar{\Pi}_r^2$. Используя (П.1), сразу получаем:

$$\sqrt{\bar{\Pi}_r^2} = \Pi_s S^{-1} \left\{ \iint_S \cos [2(\varphi_1 - \varphi_2)] dS_1 dS_2 \right\}^{1/2},$$

где черта над косинусом означает усреднение по статистической совокупности распределений величины $\cos[2(\varphi_1 - \varphi_2)] = \cos(2\varphi_{12})$. Пусть $\varphi_1 - \varphi_2$ есть сумма большого числа случайных величин; тогда в силу центральной предельной теоремы

$$\begin{aligned} \overline{\cos(2\varphi_{12})} &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\varphi_{12}) \frac{\exp[-\varphi_{12}^2/2\bar{\varphi}_{12}^2]}{\sqrt{2\pi \bar{\varphi}_{12}^2}} d\varphi_{12} = \\ &= \exp[-2\bar{\varphi}_{12}^2] = \exp[-2(\bar{\varphi}^2 - \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2)]; \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

$$\sqrt{\bar{\Pi}_r^2} = \Pi_s S^{-1} \left\{ \iint_S \exp[-2\bar{\varphi}_{12}^2] dS_1 dS_2 \right\}^{1/2}.$$

Подставляя в (П.10) значение $2\overline{\varphi^2_{12}}$, после вычислений для $\sqrt{\overline{\Pi_r^2}}$ получаем:

а) при $\overline{\varphi^2} \ll 1/4$, $R\theta_a/l \gg 1$

$$\sqrt{\overline{\Pi_r^2}} = \Pi_s \left[1 - 4\overline{\varphi^2} + 4\overline{\varphi^2} \left(\frac{l}{R\theta_a} \right)^2 \right]^{1/2} = [1 - g_1 \omega^{-4}]^{1/2};$$

б) для $\overline{\varphi^2} \gg 1/4$, $R\theta_a/l \gg 1$

$$\sqrt{\overline{\Pi_r^2}} = \Pi_s \frac{L}{R\theta_a} = g_2 \omega^2.$$

Посмотрим теперь, как будет меняться с изменением частоты позиционный угол колебаний электрического вектора поляризованного излучения, принимаемого наблюдателем (для рассматриваемого случая, когда излучение проходит через слой с неоднородностями, а диаграмма направленности антенны θ_a шире углового размера неоднородностей).

По определению

$$\operatorname{tg}(2\chi) = \frac{Q}{U} = \frac{\int \sin[2(\psi_s + \Delta\psi_0 + \varphi)] dS}{\int \cos[2(\psi_s + \Delta\psi_0 + \varphi)] dS}, \quad (\text{П.11})$$

где ψ_s — позиционный угол колебаний электрического вектора в источнике, $\Delta\psi_0$ — поворот электрического вектора, постоянный вдоль всей рассматриваемой области источника, φ — поворот электрического вектора в слое с неоднородностями. Пусть ось x совпадает с направлением, повернутым на угол $\Delta\psi_0$ относительно направления поляризации в источнике. Тогда величина $\psi_s + \Delta\psi_0$ будет равна нулю. При малом φ функции $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ под интегралом в (П.11) можно разложить по φ и, следовательно, $\operatorname{tg}(2\Delta\chi) \approx 2\Delta\chi = 2 \int \varphi dS/S$; при этом

$$4(\overline{\Delta\chi})^2 = \frac{4 \iint \overline{\varphi_1 \varphi_2} dS_1 dS_2}{S^2} = \frac{4 \overline{\varphi^2} \iint e^{-R^2 \theta^2/l^2} dS_1 dS_2}{S^2}.$$

Если $R\theta_a/l \ll 1$, то среднеквадратичное значение угла поворота электрического вектора из-за влияния неоднородностей будет иметь следующий вид:

$$\sqrt{\overline{(\Delta\chi)^2}} = \sqrt{\overline{\varphi^2}} \sim \lambda^2; \quad (\text{П.12})$$

при $R\theta_a/l \gg 1$

$$\sqrt{\overline{(\Delta\chi)^2}} = \frac{\sqrt{\overline{\varphi^2}}}{\sqrt{R\theta_a/l}} \sim \lambda^2. \quad (\text{П.13})$$

В том случае, когда неоднородности с одинаковыми параметрами располагаются на всем пути R_s между источником и наблюдателем, формулы для степени поляризации принимают следующий вид:

а) при $\overline{\varphi^2} \ll 1/4$

$$\overline{\Pi_r} = \Pi_s \left\{ 1 - 2\overline{\varphi^2} + 2 \frac{\overline{\varphi^2}}{S^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \iint \frac{\operatorname{erf}(R_s \theta/l)}{R_s \theta/l} dS_1 dS_2 \right\}; \quad (\text{П.14})$$

б) при $\bar{\varphi}^2 \gg 1/4$, $2R_s \theta_a / L' \gg 1$

$$\overline{\Pi}_r = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Pi_s L' / 2R_s \theta_a, \quad (\text{П.15})$$

где

$$L' = l \sqrt{\frac{4}{9} \pi^{1/2} (0.93 \cdot 10^6 / \omega^2)^2 (\overline{HN})^2 R_s l}.$$

Для $2R_s \theta_a / L' \ll 1$

$$\overline{\Pi}_r \simeq \Pi_s.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, ДАН СССР, **92**, 1133 (1953); УФН, **51**, 343 (1953); Труды 3-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1954, стр. 260.
2. И. М. Гордон, ДАН СССР, **94**, 413 (1954); Труды 3-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1954, стр. 253, 268.
3. Г. Г. Гетманцев и В. А. Разин, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 496.
4. В. В. Писарева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 165 (1960).
5. А. А. Корчак и С. И. Сыроватский, Астрон. ж., **38**, 885 (1961).
6. В. А. Разин, Астрон. ж., **35**, 241 (1958).
7. С. Н. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, Astrophys. J., **126**, 468 (1957).
8. А. Д. Кузьмин и В. А. Удальцов, Астрон. ж., **36**, 33 (1959).
9. В. А. Удальцов, Астрон. ж., **39**, 849 (1962); Труды ФИАН, **17**, 161 (1962).
10. G. Westerhout, Ch. L. Seeger, W. N. Brouw, J. Tinbergen, Bull. Astron. Netherlands, **16**, 187 (1962).
11. R. Wielebinski, J. R. Shakeshaft, I. I. Pauliny-Toth, Observatory, **82**, 158 (1962).
12. J. Barrat, J. Legueux, E. Le Roux, Comptes Rendus, **251**, 2476 (1961).
13. С. Н. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, Astrophys. J., **135**, 656 (1962).
14. F. F. Gardner, J. B. Whiteoak, Phys. Rev. Letters, **9**, 197 (1962).
15. B. F. Cooper, R. M. Price, Nature, **195**, 1084 (1962).
16. R. N. Bracewell, B. F. Cooper, T. E. Cousins, Nature, **195**, 1289 (1962).
17. В. Л. Гинзбург и С. И. Сыроватский, Происхождение космических лучей, изд. АН СССР, М., 1963.
18. В. Л. Гинзбург и С. И. Сыроватский, Астрон. **45**, 466 (1963).
19. В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 341 (1960).
20. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, § 38, Физматгиз, М., 1960.
21. D. W. Sciamia, Nature, **196**, 760 (1962).
22. B. F. Cooper, R. M. Price, Nature, **196**, 761 (1962); F. F. Gardner, IAU/URSI Symposium № 20, Abstracts (1963).
23. G. R. A. Ellis, M. D. Waterworth, M. Bessell, Nature, **196**, 1079 (1962).
24. F. Hoyle, G. R. A. Ellis, On the existence of an ionised layer about the galactic plane (preprint), 1963.
25. В. В. Виткович, Астрон. ж., **35**, 52 (1958).
26. R. D. Davies, G. L. Verschuur, Nature, **197**, 32 (1963).
27. G. A. Seielstad, R. W. Wilson, Nature, **198**, 974 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 апреля 1963 г.

POLARIZATION OF THE DISCRETE SOURCES RADIATION AND THE STUDY OF
THE METAGALAXY, GALAXY AND THE SPACE IN THE NEIGHBOURHOOD
OF THE SUN

V. L. Ginzburg, V. V. Pisareva

The problem of the study of the galactic and metagalactic space by means of polarization measurements is discussed in the light of discovery of the radiation polarization of a number of extragalactic discrete sources (radio galaxies). When the occultation of the source by the solar corona takes place it is possible as well to obtain the definite information about magnetic fields and inhomogeneities in the solar corona.

К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ

В. Д. Кротиков

Проведен расчет интегрального радиоизлучения Луны. Показано, что в интегральном излучении значительно ослаблены высшие гармоники. Выведена формула для определения характерного параметра δ по экспериментальным данным, полученным с широкой диаграммой направленности (по сравнению с угловыми размерами Луны).

В настоящее время накоплен обширный экспериментальный материал по радиоизлучению Луны. Установлено, что диэлектрическая постоянная лунной поверхности близка к 1,5, а плотность — к 0,5 [1-4]. На основании теоретических расчетов теплового режима получена функция распределения температуры по поверхности Луны [5], знание которой позволяет на основании теории [6] производить расчет радиоизлучения Луны, как интегрального, так и дифференциального. Разработан метод прецизионных измерений [8], который весьма точно позволяет определить интегральные характеристики лунной поверхности. Теория же интегрального радиоизлучения Луны [6] позволяет получить аналитическое выражение только лишь для большого значения диэлектрической постоянной ($\epsilon \geq 4$). Для установленного низкого значения диэлектрической проницаемости ($\epsilon \approx 1,5$) полученные в [6] решения не имеют необходимой в настоящее время точности. Поэтому целесообразно установить общие соотношения, связывающие дифференциальные и интегральные характеристики излучения лунной поверхности, что позволит сравнивать результаты экспериментальных работ различных авторов, измерявших радиоизлучение Луны при использовании антенн с широкими (ширина диаграммы на половинном уровне мощности больше угловых размеров Луны) и узкими диаграммами направленности. Кроме того, эти соотношения позволяют уточнить ряд выводов об интегральном излучении Луны, которое в настоящее время измеряется весьма точно.

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ ЛУНЫ

На основании теории радиоизлучения Луны [6] и расчетов теплового режима [5] эффективная температура участка поверхности с сelenографическими координатами φ и ψ равна

$$T_e(\varphi\psi t) = [1 - R(\varphi\psi)] \left\{ T_0(\psi) + \right. \\ \left. + \sum (-1)^n \frac{T_n(\psi) \cos(n\Omega t - n\varphi - \xi_n - \epsilon_n(\varphi\psi))}{\sqrt{1 + 2\delta_n \cos \rho' + 2\delta_n^2 \cos^2 \rho'}} \right\}, \quad (1)$$

где $R(\varphi\psi)$ — дифференциальный коэффициент отражения, равный среднему арифметическому из коэффициентов отражения для вертикальной и горизонтальной поляризаций [6], φ_n — дополнительный сдвиг по фазе для n -ой гармоники изменения поверхностной температуры по отно-

шению к фазе освещенности, $\xi_n(\varphi\psi) = \arctg \frac{\delta_n \cos \rho'}{1 + \delta_n \cos \rho'}$ — сдвиг фазы по

отношению к нагреву участка поверхности координатами φ и ψ , $T_0(\psi)$ и $T_n(\psi)$ — постоянная составляющая и n -ая гармоника изменения поверхностной температуры. Последние, согласно [5], связаны с соответствующими значениями для центра диска следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} T_0(\psi) &= T_0(0) \eta_0(\psi) = T_0(0) \cos^{1/5} \psi; \\ T_1(\psi) &= T_1(0) \eta_1(\psi) = T_1(0) \cos^{1/3} \psi; \\ T_2(\psi) &= T_2(0) \eta_2(\psi) = T_2(0) \cos^{0.27} \psi; \\ T_3(\psi) &= T_3(0) \eta_3(\psi) = T_3(0) \cos^{7/16} \psi; \\ T_4(\psi) &= T_4(0) \eta_4(\psi) = T_4(0) \cos^{0.3} \psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Наконец, $\delta_n = \frac{l_n}{l_{nT}}$ — отношение глубин проникновения электрической

и тепловой волн для n -ой гармоники. Согласно [1], $\delta_n = 2\lambda \sqrt{n}$, где λ — длина волны, а $\cos \rho'$ связан с координатами φ, ψ следующим соотношением:

$$\cos \rho' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{(\epsilon - 1) + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}.$$

Численные величины T_n и η_n для различных значений параметра $\gamma = (K\rho c)^{-1/2}$ приведены в работе [7]. Для практических расчетов радиоизлучения Луны в выражении (1) достаточно учесть четыре гармоники, знак которых определяется показателем $a'_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ($n=1,2,3,4$).

Усредненная по диску Луны эффективная температура равна

$$\bar{T}_e = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [1 - R(\varphi\psi)] T_e(\varphi\psi t) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi. \quad (3)$$

Дифференциальные характеристики радиоизлучения Луны наиболее просто выражаются через характеристики лунной поверхности для центра лунного диска. Поэтому полное (интегральное) радиоизлучение Луны целесообразно представить через излучение центра диска, введя при этом необходимые пересчетные коэффициенты. Подставляя (1) в (3) и производя необходимые преобразования, получим выражение \bar{T}_e через температуру центра диска Луны:

$$\begin{aligned} \bar{T}_e &= (1 - R_\perp) \beta_0 T_0(0) + (1 - R_\perp) \sum (-1)^{a_n} \frac{T_n(0) \beta_n}{\sqrt{1 + 2\delta_n + 2\delta_n^2}} \times \\ &\quad \times \cos(n\Omega t - \varphi_n - \xi_n(\varphi\psi) - \Delta\xi_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $(1 - R_\perp)$ — излучательная способность центра диска, ξ_n — сдвиг по фазе радиоизлучения в центре диска по отношению к фазе нагрева поверхности, $(1 - R_\perp)\beta_0 T_0(0) = \tilde{T}$ — усредненная по координатам и времени постоянная составляющая эффективной температуры*,

* \tilde{T} может быть также представлена через среднесферическую излучательную способность $1 - \bar{R} = (1 - R_\perp) \alpha$ и постоянную составляющую средней по диску истинной температуры поверхности $\tilde{T}_{\text{раб}} = 0,964 T_0(0)$: $\tilde{T} = (1 - R_\perp) \alpha 0,964 T_0(0)$.

$\frac{(1 - R_{\perp}) T_n(0)}{\sqrt{1 + 2\delta_n + 2\delta_n^2}} \beta_n$ — n -ая гармоника усредненной по диску эффективной температуры. Коэффициент β_0 дается соотношением

$$\beta_0 = \frac{1}{\pi (1 - R_{\perp})} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [1 - R(\varphi\psi)] \eta_0(\psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi; \quad (5)$$

коэффициент β_n равен

$$\beta_n = \frac{\sqrt{1 + 2\delta_n + 2\delta_n^2} \sqrt{A_n^2 + B_n^2}}{\pi (1 - R_{\perp})}, \quad (6)$$

а дополнительный сдвиг по фазе $\Delta\xi_n = \arctg(B_n/A_n)$. Величины A_n и B_n выражаются следующими интегралами:

$$A_n = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{[1 - R(\varphi\psi)] \cos(n\varphi + \xi_n(\varphi\psi) - \xi_n(00)) \eta_n(\psi) \cos^2 \psi \cos \varphi}{\sqrt{1 + 2\delta_n \cos \rho' + 2\delta_n^2 \cos^2 \rho'}} d\varphi d\psi; \quad (7)$$

$$B_n = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{[1 - R(\varphi\psi)] \sin(n\varphi + \xi_n(\varphi\psi) - \xi_n(00)) \eta_n(\psi) \cos^2 \psi \cos \varphi}{\sqrt{1 + 2\delta_n \cos \rho' + 2\delta_n^2 \cos^2 \rho'}} d\varphi d\psi. \quad (8)$$

Выражение (4) позволяет пользоваться при расчетах интегральными соотношениями, выведенными для центра лунного диска, в связи с чем необходимо знать коэффициенты β_n и дополнительный сдвиг по фазе $\Delta\xi_n$. Расчет этих коэффициентов аналитически не представляется возможным; поэтому он был выполнен на электронной вычислительной машине для широкого интервала изменения ε и δ . В отличие от [3], определение коэффициента β_0 на основании расчетов теплового режима [5] (согласно [5,8], постоянная составляющая поверхности температуры в центре лунного диска равна $\tilde{T}_0(0) = 230^{\circ}\text{K}$, а $\eta_0(\psi) = \cos^{1/5} \psi$) позволяет рассчитать усредненную по диску постоянную составляющую эффективной температуры по известной постоянной составляющей в центре лунного диска $\tilde{T}_e(0)$, не используя при этом недостаточно точно известные из эксперимента значения полуденной (T_m) и полуночной (T_n) температур. Результаты этих расчетов и постоянная составляющая эффективной температуры для центра лунного диска приведены в таблице 1.

Здесь 0,964 — коэффициент усреднения,

$$\alpha = \frac{1}{\pi (1 - R_{\perp})} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [1 - R(\varphi\psi)] \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi$$

— нормированная относительно центра среднесферическая излучательная способность. График $\alpha(\varepsilon)$ приведен в [3].

Таблица 1

| ϵ | 1 | 1,05 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 3,0 | 5,0 |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|
| β_0 | 0,962 | 0,957 | 0,943 | 0,932 | 0,925 | 0,92 | 0,916 | 0,911 | 0,916 |
| \tilde{T}_e ($^{\circ}$ К) | 221 | 220 | 216,5 | 213 | 209,5 | 207 | 204,5 | 194,5 | 179,8 |
| $\tilde{T}_e(0)$ ($^{\circ}$ К) | 230 | 230 | 229,5 | 228,5 | 227 | 225 | 223 | 213,5 | 196,5 |

Из таблицы видно, что постоянная составляющая интегральной радиотемпературы хорошо совпадает с результатами работы [3]. Это свидетельствует о близости полученного [5] ($T_0(\psi) = 230^{\circ} \cos^{1/5} \psi$) и принятого в [3] ($T_0(\psi) = T_n + a_0(T_m - T_n) \cos^{1/2} \psi = 125^{\circ} + 102^{\circ} \cos^{1/2} \psi$) распределений поверхностной температуры по широте.

На рис. 1 и 2 изображено изменение коэффициентов β_1 и β_2 в за-

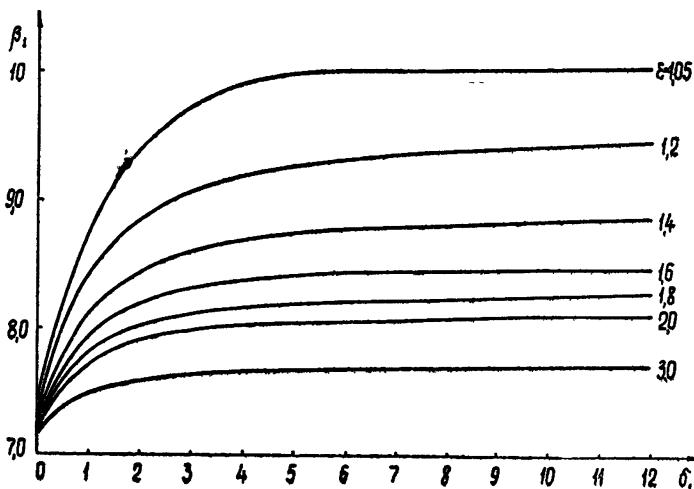


Рис. 1. Зависимость коэффициента β_1 от δ_1 для различных значений ϵ .

висимости от δ для различных значений ϵ . Приведенные графики позволяют выяснить, как меняются для интегрального излучения амплитуды гармоник колебаний радиояркости. Для общепринятого значения диэлектрической проницаемости лунной поверхности $\epsilon = 1,5$ коэффициент β_1 меняется во всем интервале изменения δ_1 ($0 \leq \delta \leq 12$) в пределах $0,725 \leq \beta_1 \leq 0,87$, а β_2 не превосходит 0,34. Для $\delta_1 \geq 10$, что соответствует, согласно [1], длине волны радиоизлучения $\lambda > 5 \text{ см}$, эти коэффициенты практически остаются постоянными. Как видно из рис. 1, коэффициент β_1 растет с уменьшением ϵ ; для $\epsilon = 1,05$ (что фактически соответствует случаю абсолютно черной Луны) становится даже больше единицы, если $\delta_1 \geq 6$ (или длина волны $\lambda \geq 3 \text{ см}$). Это связано с „уярчением“ края лунного диска. Действительно, глубина, с которой идет радиоизлучение данной точки лунной поверхности, $l = l_s \cos \rho' =$

$$= l_s \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{(\epsilon - 1) - \cos^2 \rho}, \text{ где } \rho \text{ — угол между направлением нормали}$$

к данной площадке и направлением на приемную антенну. Поэтому с уменьшением ϵ и уменьшением глубины проникновения электрической волны увеличивается вклад в радиоизлучение областей, расположенных вблизи края лунного диска.

На рис. 3 приведена зависимость от δ_1 дополнительного сдвига по

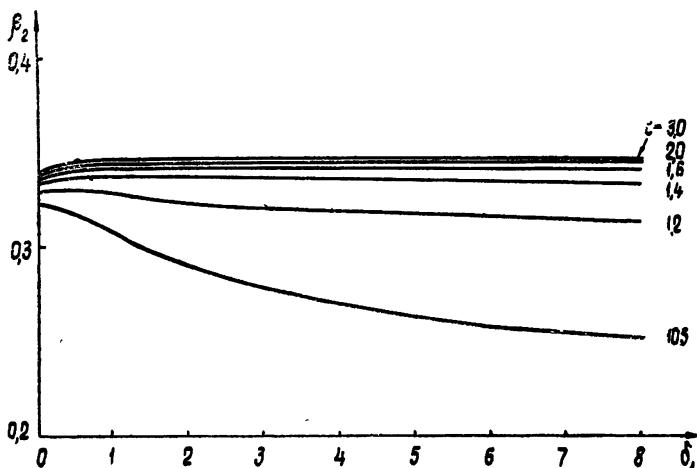


Рис. 2. Зависимость коэффициента β_2 от δ_1 для различных значений ϵ .

фазе для первой гармоники интегрального излучения. Для $\epsilon = 1,5$ этот сдвиг не превышает -3° . Это значит, что фаза интегрального излучения несколько опережает фазу излучения центра диска Луны. По-видимому, это связано с асимметрией нагрева лунной поверхности. Дополнительный сдвиг по фазе для второй гармоники интегрального излучения практически отсутствует.

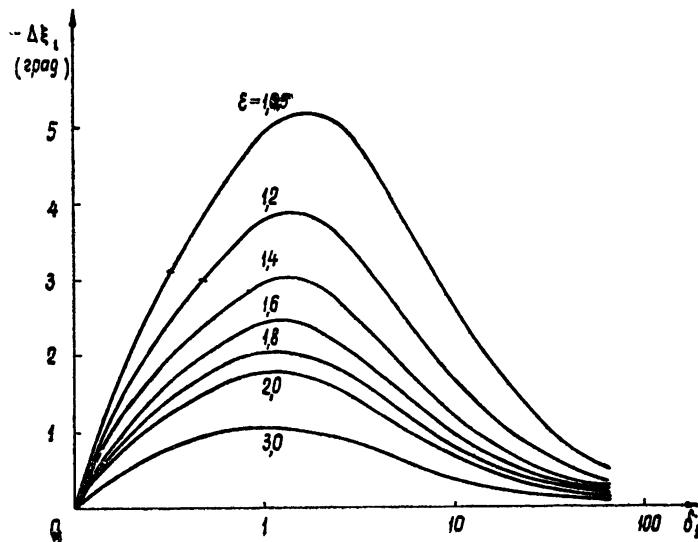


Рис. 3. Зависимость дополнительного сдвига по фазе $\Delta\xi_1$ от δ_1 для различных значений ϵ .

2. СОПОСТАВЛЕНИЕ ФАЗОВОЙ ЗАВИСИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ С ФАЗОВОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ИЗЛУЧЕНИЯ ЦЕНТРА ДИСКА ЛУНЫ

Эффективная радиотемпература для центра диска дается соотношением [6]

$$T_e(00t) = (1 - R_\perp) T_0(0) + (1 - R_\perp) \times \\ \times \sum (-1)^n \frac{T_n(0) \cos(n\Omega t - \varphi_n - \xi_n)}{\sqrt{1 + 2\delta_n + 2\delta_n^2}}, \quad (9)$$

а эффективная радиотемпература для всего диска—соотношением (3). Знание расчетных коэффициентов и дополнительных сдвигов по фазе позволяет провести сравнение средней по диску эффективной температуры с температурой центра лунного диска. Результаты расчета для $\delta/\lambda = 2$, $\varepsilon = 1,5$ и длин волн $0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 9,6 \text{ см}$, на которых экспериментально обнаружено колебание радиояркости, изображены на рис. 4, 5. При расчете радиоизлучения центра диска принималось [6]

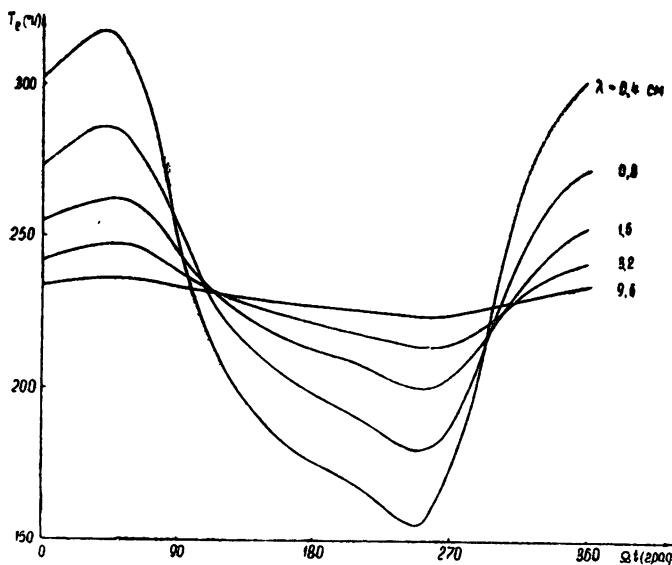


Рис. 4. Фазовая зависимость эффективной температуры центра диска Луны для различных длин волн.

во внимание четыре гармоники фурье-разложения поверхностной температуры; значение параметра $\gamma = (K\rho c)^{-1/2}$ было взято равным 400 [9].

Из представленных кривых видно, что колебание радиояркости в центре диска существенно отличается от колебания радиояркостей от всего диска. Как показывают оценки, отношение амплитуд гармоник к амплитуде первой гармоники в центре диска для самой короткой волны $0,4 \text{ см}$

$$\frac{T_2(0)}{T_1(0)} = 0,19; \quad \frac{T_3(0)}{T_1(0)} = 0,1; \quad \frac{T_4(0)}{T_1(0)} = 0,06,$$

а для средней по диску интегральной эффективной температуры соответствующие отношения

$$\frac{\bar{T}_2}{\bar{T}_1} = 0,08; \quad \frac{\bar{T}_3}{\bar{T}_1} = 0,006.$$

Для более длинных волн эти отношения еще меньше. Отсюда следует, что колебание радиояркости от всего диска хорошо описывается одной

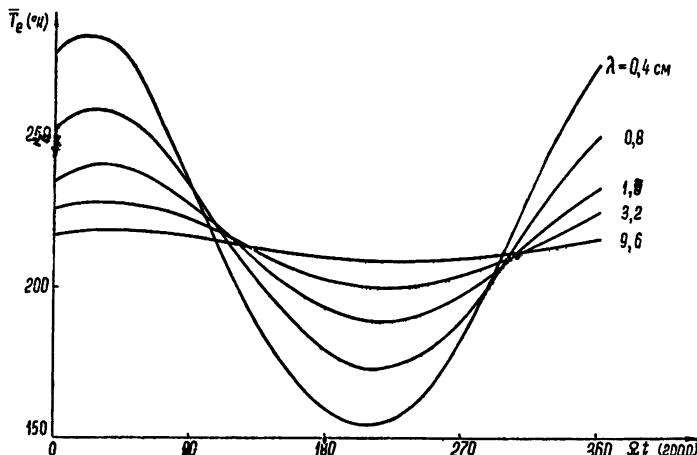


Рис. 5. Фазовая средней по диску эффективной температуры Луны для различных длин волн.

первой гармоникой. Это подтверждается результатами работ по измерению интегрального радиоизлучения Луны на разных длинах волн [8, 10, 12].

3. НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ

Полученные результаты позволяют строго рассчитывать параметры лунной поверхности для случая, если принимается интегральное излучение Луны. Как известно [1], при исследовании радиоизлучения Луны на волнах до 10 см экспериментально определяется отношение постоянной составляющей к амплитуде первой гармоники

$$M_{\text{эксп}} = \tilde{\bar{T}}/T_1. \quad (10)$$

Это же отношение для интегрального излучения, определенное из наших расчетов,

$$M_{\text{теор}} = \frac{T_0(0)}{T_1(0)} \frac{\beta_0}{\beta_1} \sqrt{1 + 2\delta_1 + 2\delta_1^2}. \quad (11)$$

Приравнивая (10) и (11) и учитывая, что, согласно [1], $T_0(0)/T_1(0) = 1,5$, получим соотношение для определения коэффициента δ_1 по экспериментальным данным:

$$\sqrt{1 + 2\delta_1 + 2\delta_1^2} = \frac{M_{\text{эксп}} \beta_1}{1,5 \beta_0}. \quad (12)$$

В полученное выражение не входят абсолютные значения температур, поэтому оно пригодно и для относительных измерений.

Принимая $\epsilon = 1,5$ и учитывая, что для этого значения $\epsilon \beta_0 = 0,928$ (см. таблицу 1), а β_1 для соответствующей длины волны дается графиком рис. 1, проведем расчет параметра δ по экспериментально опре-

деленной величине $M_{\text{экс}}$ для результатов, полученных с широкой диаграммой направленности. Результаты расчета приведены в таблице 2.

Таблица 2

| λ (см) | \tilde{T} ($^{\circ}$ К) | \bar{T}_1 ($^{\circ}$ К) | $M_{\text{экс}}$ | δ | δ/λ | Литература |
|----------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------|----------|-----------------------|------------|
| 1,6 | 208 | 37,5 | 5,6 | 2,85 | $1,3+0,35$ $-0,35$ | [10] |
| 3,2 | 210 | 13,5 | 15,55 | 7,3 | $2,0+0,3$ $-0,2$ | [8] |
| 3,2 | 213 | 14,0 | 15,22 | 7,13 | $2,0+0,3$ $-0,2$ | [11] |
| 9,6 | 218 | 7,0 | 31,2 | 13,9 | $1,50+0,7$ $-0,5$ | [12] |

Автор благодарен В. С. Троицкому за руководство настоящей работой и М. Н. Оржеховской за программирование задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Изв. Комиссии по физике планет, № 3 (1961).
2. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 39, 79 (1962).
3. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 39, 1089 (1962).
4. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1057 (1963).
5. В. Д. Кротиков, О. Б. Щуко, Астрон. ж., 40, 297 (1963).
6. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 51 (1954).
7. В. С. Троицкий, В. Д. Кротиков, УФН (в печати).
8. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1004 (1961).
9. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 40, 158 (1963).
10. С. А. Каменская, Б. И. Семенов, В. С. Троицкий, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 882 (1962).
11. Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, В. А. Порфириев, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 802 (1962).
12. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 604 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 декабря 1962 г.

TO THE THEORY OF THE LUNAR INTEGRAL RADIO EMISSION

V. D. Krotikov

Calculation of the Moon integral radio emission has been carried out. It is shown that higher harmonics of the integral radio emission are considerably reduced. The formula is given for the determination of a characteristic parameter „ δ “ on the basis of the experimental data obtaining with a large radiation pattern in comparison with lunat angular dimensions.

**СПЕКТРЫ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ
КАССИОПЕЯ-А, ЛЕБЕДЬ-А, ТЕЛЕЦ-А И ДЕВА-А НА ЧАСТОТАХ
 $12,5 \div 40 \text{ мгц}$**

*Л. Л. Базелян, С. Я. Брауде, Ю. М. Брук, И. Н. Жук, А. В. Мень,
Б. П. Рябов, Л. Г. Содин, Н. К. Шарыкин*

Приводятся результаты измерений потоков четырех дискретных источников в диапазоне $12,5 \div 40 \text{ мгц}$. Отмечен характерный «завал» спектра трех источников на частотах ниже $20 \div 25 \text{ мгц}$. На основании результатов измерений сделан расчет характерных параметров дискретных источников (меры эмиссии и отношения H_{\perp}/n_e) в предположении, что причиной «завала» спектра служит поглощение в облаках H_{Π} или уменьшение показателя преломления в источнике.

Одной из основных задач современной радиоастрономии является выяснение механизма излучения дискретных источников. Для решения этой проблемы необходимо знать частотные спектры плотности потока излучения источников в возможно более широком диапазоне частот. Для многих источников такие данные на частотах выше 38 мгц уже известны [1, 2]. Для частот ниже 38 мгц данные об абсолютных величинах плотностей потоков даже для наиболее мощных источников (Кассиопея-А, Лебедь-А, Телец-А и Дева-А) не достоверны, а для более слабых источников они вообще отсутствуют.

Вместе с тем именно в области декаметровых волн (частоты ниже 40 мгц) сведения о спектрах представляют особый интерес, ибо по имеющимся в литературе сведениям [3–5] в этом диапазоне частот наблюдается резкое изменение характера спектра радиоизлучения, выражаяющееся в уменьшении интенсивности с ростом длины волны.

В настоящей работе приводятся результаты исследования спектров четырех наиболее интенсивных дискретных источников в диапазоне частот $12,5 \div 40 \text{ мгц}$. Измерения проводились в течение 1961–62 гг. на радиоастрономической обсерватории Института радиофизики и электроники АН УССР.

1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ И АППАРАТУРА

Измерения потоков дискретных источников в диапазоне частот от $12,5$ до 40 мгц обладают некоторыми особенностями по сравнению с измерениями на более высоких частотах. В этом диапазоне эксперименты затруднены двумя обстоятельствами: помехами от земных радиостанций и влиянием ионосферы. Эти факторы приводят к тому, что при единичных измерениях потоков наблюдается значительный разброс данных. Поэтому для получения приемлемой точности необходимо провести большое число измерений.

Для получения абсолютных величин плотностей потоков была принята следующая методика. Абсолютные плотности потоков определялись только для наиболее интенсивного источника Кассиопея-А. Для этого использовались семь комплектов интерферометров с полуволновыми вибраторами в качестве антенн. Вибраторы были настроены на

частоты 12,5; 16,7; 20; 25; 30; 35 и 40 мгц и разнесены друг от друга на $150 \div 300$ м по направлению запад—восток. Измерения на таких интерферометрах позволили с наибольшей точностью эталонировать поток источника Кассиопея-А. Последнее обстоятельство связано с тем, что эффективную площадь A_e полузволнового вибратора можно вычислить точнее, чем соответствующую величину для других типов антенн. Следует, однако, отметить, что и для полузволнового вибратора расчетные значения A_e могут отличаться от реальных; это связано с трудностями учета реальных параметров почвы даже при наличии заземления. Кроме того, весьма трудно учесть влияние толщины вибратора при наличии поверхности раздела. Произведенные оценки этих двух факторов позволяют считать, что систематическая ошибка в величине A_e не превышала 10%. Необходимо отметить, что ряд авторов [6], использовавших полузволновые вибраторы как эталоны антенн, не учитывали возможных отклонений эффективной площади реальных вибраторов, расположенных над земной поверхностью, от расчетных значений A_e .

Измерения потоков источников Лебедь-А, Телец-А и Дева-А проводились по отношению к источнику Кассиопея-А. Для этой цели использовались два радиотелескопа. Первый радиотелескоп (диапазон частот $12 \div 19$ мгц) состоял из двух широкополосных фазированных решеток, разнесенных по направлению восток—запад на 332 м. Решетка содержала 24 горизонтальных вибратора длиной 7,8 м и диаметром 1,2 м, расположенных на высоте 4,5 м над землей и размещенных 4 рядами по 6 вибраторов в каждом. Для ориентации диаграммы, направленности в меридиональной плоскости использовались отрезки высокочастотных кабелей, которые включались в антенные коммуникации для фазирования. Ширина диаграммы направленности (по половинной мощности) каждой из решеток в направлении север—юг составляла на частоте 17 мгц 20° , а на частоте 12 мгц -30° . В направлении запад—восток ширина интерференционного лепестка была соответственно $3^\circ,2$ и $4^\circ,5$.

Для измерений в диапазоне частот от 20 до 40 мгц использовался радиотелескоп, антenna которого [7] представляла многовибраторную, прямоугольную решетку размерами 172 м \times $16,5$ м. Решетка была ориентирована в направлении запад—восток и имела 4 ряда по 32 горизонтальных вибратора длиной 4,75 м и диаметром 1,0 м, расположенных на высоте 3 м над землей. Как и в первом радиотелескопе, ориентация диаграммы направленности по углу места осуществлялась электрическим методом. Ширина диаграммы в направлении запад—восток на частоте 20 мгц была $4^\circ,6$, на частоте 40 мгц $-2^\circ,3$. В направлении север—юг ширина диаграммы -36° и 18° на частотах 20 и 40 мгц соответственно.

Приемная аппаратура, использовавшаяся при измерениях с интерферометрами, состояла из радиометров с фазовой модуляцией и записывающих устройств. В экспериментах использовались модуляторы, коммутирующие фазу сигнала одной из антенн на 180° с частотой $30 \div -200$ гц. Радиометры имели полосу пропускания $1 \div 12$ кгц. Более узкая полоса использовалась на частотах 12,5 и 16,7 мгц, где помехи от радиостанций особенно велики и требуется высокая избирательность по соседнему каналу. При этом выигрыш радиометра был невелик, что увеличивало случайную ошибку одного измерения и, следовательно, требовало повышенного числа однотипных измерений. На частотах $20 \div 40$ мгц использовалась более широкая полоса пропускания, так как в этом диапазоне помехи от радиостанций значительно слабее, и снижение селективности не ухудшало качества записей источников.

Постоянная времени накопителей радиометров выбиралась макси-

мально возможной, но такой, чтобы коэффициент ослабления частоты интерференции (или частоты, эквивалентной огибающей в проходных записях) был не более $1,4 \pm 1,5$. Это обеспечивало максимальную помехоустойчивость аппаратуры и достаточную точность определения поправки на сглаживание расчетным путем.

При измерениях мощность источников определялась с помощью специально разработанного генератора стандартного шума [8], который обеспечивал на выходе эквивалентные шумовые температуры до $5 \cdot 10^9$ °К при ширине шумовой полосы 1,5 мгц. Выходная мощность этого прибора, подававшаяся на вход калиброванного аттенюатора, измерялась термисторным микроваттметром. Как показали тщательные оценки, погрешность прибора не превосходила 10%.

Были проведены измерения потерь сигнала из-за затухания в коммуникационных кабелях антенн и учтены эффекты, связанные с неполным согласованием различных элементов радиотелескопов.

При измерениях источников Дева-А (53° над горизонтом) и Тельц-А (62° над горизонтом) было учтено изменение эффективной площади антенн по сравнению с эффективной площадью при приеме Кассиопеи-А ($81,5^\circ$ над горизонтом). Различие в этих опытах определялось расчетным путем и было невелико ($20 \pm 40\%$). Погрешность этих расчетов не превышала 5%.

На частотах ниже 20 мгц прием сигналов проводился обычно в ночное время (от 01 до 08 часов по местному времени), ибо в другое время помехи от радиостанций не позволяли вести измерения. Но даже в ночное время удавалось проводить эксперименты лишь в трех узких полосах близи частот 12,5; 14,7; 16,7 мгц. На частотах выше 20 мгц помехи от радиостанций были значительно слабее и с помощью 128-вибраторной антенны можно было вести измерения и в дневное время.

Как показали расчеты, проведенные в соответствии с работой [9], регулярное поглощение в ионосфере в ночное время для наиболее низких частот не превышает $0,1 \pm 0,2$ дБ. Эти данные не противоречат [10]. Учитывая вышеизложенное, можно определить вероятную систематическую ошибку измерений, которая оказывается равной 19%. Случайные ошибки измерений определялись в предположении нормального закона распределения по формуле:

$$\Delta_c = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad (1)$$

где n —число измерений, а \bar{x} —среднее значение измеряемой величины. На приводимых ниже графиках указана средняя ожидаемая ошибка

$$\Delta = \Delta_c + \Delta_0. \quad (2)$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Некоторые данные о положении исследованных источников приведены в таблице 1.

В таблице 2 приведены плотности потока излучения источника Кассиопея-А. Эти данные получены в 1962 г. при измерениях на интерферометре, состоявшем из двух полуволновых вибраторов.

В таблице 3 приведены данные о плотностях потока трех источников. При этих измерениях поток источника Кассиопея-А принимался в качестве опорной величины.

Таблица 1
Координаты источников

| Название источника | α 1960 | δ 1960 | t^{II} | b^{II} | Расстояние (парсек) |
|--------------------|------------------|-------------------|-----------------|-----------------|------------------------|
| Кассиопея-А | $23^h 21^m 33^s$ | $58^{\circ}35',3$ | 112° | $-1,5^{\circ}$ | $3,3 \cdot 10^3$ |
| Лебедь-А | $19^h 58^m 06^s$ | $40^{\circ}36',6$ | 77° | 6° | $100 \cdot 10^6$ |
| Телец-А | $05^h 32^m 15^s$ | $22^{\circ}00',0$ | 185° | -5° | $1,1 \cdot 10^3$ |
| Дева-А | $12^h 28^m 49^s$ | $12^{\circ}36',7$ | 285° | 73° | $11,4 \cdot 10^6$ |

Таблица 2

| | | | | | | | |
|--|------|------|------|-----|-----|-----|-----|
| f (мгц) | 12,5 | 16,7 | 20,0 | 24 | 30 | 35 | 40 |
| $s 10^{24}$ ($\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$) | 360 | 470 | 390 | 450 | 440 | 480 | 430 |
| Δ_c (%) | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| Δ (%) | 25 | 24 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 |

Таблица 3

| | | | | | | | |
|--|------|------|------|------|------|-------|-------|
| f (мгц) | 12,5 | 16,7 | 20 | 24 | 30 | 35 | 40 |
| s_L / s_K | 0,44 | 0,51 | 0,62 | 0,61 | 0,65 | 0,705 | 0,705 |
| $\Delta_{L/K}$ (%) | 13 | 7 | 5 | / | 3 | 5 | 5 |
| $s_L 10^{24}$ ($\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$) | 160 | 240 | 240 | 270 | 290 | 340 | 300 |
| Δ_L (%) | 32 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 |
| $s_T 10^{24}$ ($\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$) | 35 | 32 | 27 | 27 | 23 | 27 | 24 |
| Δ_T (%) | 40 | 40 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |
| $s_D 10^{24}$ ($\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$) | 55 | 44 | 59 | 49 | 50 | 50 | 43 |
| Δ_D (%) | 35 | 35 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |

Данные, приведенные в таблицах 2 и 3, позволяют продолжить частотные спектры наиболее интенсивных дискретных источников до частот 12 мгц. На рисунках 1 и 2 приведены эти спектры. Прямыми нанесен частотный ход плотности потока частот от 10^4 до 40 мгц по данным работ [1, 2]; результаты настоящей работы показаны точками.

Как следует из приведенных данных, в диапазоне декаметровых волн для всех рассматриваемых источников, кроме Тельца-А, имеет место отклонение от степенного спектрального закона, наблюдаемого на частотах выше 40 мгц. В связи с тем, что на частотах ниже 40 мгц происходит понижение плотности потока источников, можно, применяя методику работы [11], определить меру эмиссии МЕ (в предположении, что уменьшение потока обусловлено поглощением излучения в облаках H_{\perp}) или величину H_{\perp}/n_e (здесь H_{\perp} —нормальная компонента магнитного поля в источнике, n_e —число электронов в 1 см^3 *).

Для вычисления этих величин воспользуемся соотношениями [11]

$$ME = \bar{n}_e^2 l = 1,15 \alpha f_0^2, \quad (3)$$

* Полагая, что снижение потоков связано с механизмом генерации излучения, когда показатель преломления в источнике $\mu < 1$.

$$\frac{H_{\perp}}{n_e} = 14,4 \frac{f'_0}{f_0}. \quad (4)$$

Здесь l —размер облака (в парсеках), a —спектральный индекс, f_0 —частота (в герцах), при которой плотность потока максимальна, f'_0 —безразмерная частота. Пользуясь формулами (3) и (4), данными таблиц 2 и 3 и рисунками 1 и 2, на которых приведены теоретические кривые, вычисленные для поглощения в H_{II} (кривая II) и для $\mu < 1$ (кривая I), можно определить МЕ и H_{\perp}/n_e . Эти величины приведены в таблице 4. Точность определения МЕ и H_{\perp}/n_e — порядка $\pm 50\%$.

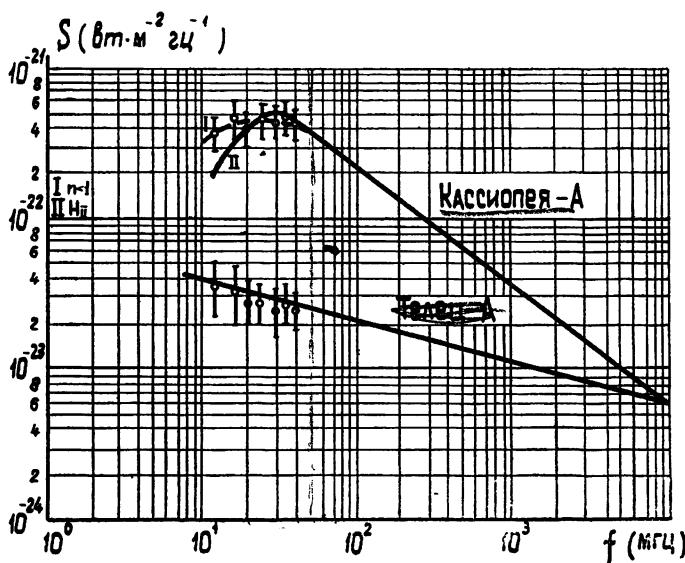


Рис. 1.

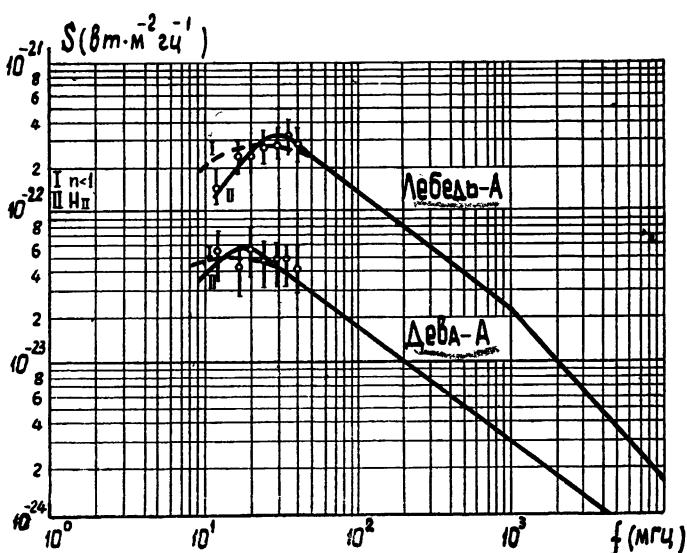


Рис. 2.

Таблица 4

| Название источника | α | Для H_{II} f_0 (мгц) | f'_0 | Для $\mu < 1$ f_0 (мгц) | $\frac{H_{\perp}}{n_e} \cdot 10^6$ | МЕ |
|--------------------|----------|-----------------------------|--------|------------------------------|------------------------------------|-----|
| Кассиопея-А | 0,75 | 30 | 3,5 | 15 | 3,5 | 700 |
| Лебедь-А | 0,75 | 30 | 3,5 | 15 | 3,5 | 700 |
| Телец-А | 0,25 | | 9,5 | — | — | — |
| Дева-А | 0,75 | 20 | 3,5 | 10 | 5,0 | 120 |

Значения, полученные для МЕ, не противоречат данным работы [12]. Так, если принять для Кассиопеи-А и Лебедя-А размер облаков ≈ 4 парсек, то при $ME \approx 700 n_e \approx 13 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$. Эти значения сравнимы с величинами [4], полученными на частотах 400 и 1390 мгц. С другой стороны, если положить плотность $n_e = 10^1 \div 10^2 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$, то для Кассиопеи-А и Лебедя-А величина $H_{\perp} \approx 3,5 \cdot 10^{-5} \div 3,5 \cdot 10^{-4}$, а для Девы-А $5 \cdot 10^{-5} \div 5 \cdot 10^{-4}$ эрстед. Величины H_{\perp} в этих источниках невелики: они значительно меньше тех максимальных величин, которыми обычно пользуются при вычислениях [13]. Однако вполне возможно, что в источниках отсутствуют условия, при которых величина H_{\perp} может достичь максимального значения.

Отметим ряд особенностей, наблюдающихся в спектрах измеренных источников. Как следует из таблицы 1, Кассиопея-А, Лебедь-А и Телец-А лежат близко к плоскости Галактики, в то время как Дева-А лежит значительно выше ее. Меры эмиссии для Кассиопеи-А и Лебедя-А одинаковы, а расстояния до этих источников отличаются примерно на пять порядков; поэтому естественно предположить, что все облака H_{II} , обусловливающие поглощение, лежат в плоскости Галактики. Но если это так, то поглощение потока от источника Дева-А должно быть меньше, чем от источника Телец-А. Если оставаться при этом в рамках гипотезы поглощения излучения в облаках H_{II} , необходимо допустить, что в направлении на Телец-А облака H_{II} имеют плотность значительно меньше, чем в направлениях на Кассиопею-А и Лебедь-А; кроме того, вне галактической плоскости в направлении на Деву-А имеются довольно плотные облака H_{II} .

Гипотеза, учитывающая изменения спектра в источнике, где $\mu < 1$, не требует таких допущений. Следует, однако, заметить, что для Лебедя-А совпадение расчетной кривой I с экспериментом значительно хуже, чем для кривой II (см. рис. 2). По-видимому, в реальных условиях действуют оба механизма и следовало бы установить, каков удельный вес каждого из них. Кроме того, было бы чрезвычайно важно измерить спектр дискретных источников для различных галактических широт, с тем, чтобы выяснить зависимость уменьшения спектрального индекса от b'' и сопоставить это уменьшение с пространственным распределением облаков H_{II} . Крайне желательно для всех дискретных источников продлить измерения в область частот ниже 10 мгц, где различие спектров, обусловливаемое разными механизмами, больше, чем на высоких частотах.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. R. Whithfield, Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford Univ. Press, 1959, p. 297.
2. А. Д. Кузмин, Труды ФИАН СССР, 17, 84 (1962).
3. R. J. Lamden A. C. B. Lovell, Phil. Mag., 8, 1725 (1956).
4. A. C. B. Lovell, H. W. Wells, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 121, 111 (1960).

5. Л. Л. Базелян, С. Я. Брауде, Ю. М. Брук, И. Н. Жук, А. В. Мень, Б. П. Рябов, Л. Г. Содин, Н. К. Шарыкин, ДАН УССР, **6**, 55 (1963).
6. H. W. Wells, Proc. IRE, **46**, 205 (1958); A. E. Little, Austral. J. Phys., **11**, 70 (1958).
7. Л. Л. Базелян, Ю. М. Брук, А. В. Мень, Н. К. Шарыкин, Радиотехника (в печати).
8. В. Н. Лановой, А. В. Мень, ПТЭ, **6**, 94 (1962).
9. А. Н. Казанцев, Изв. АН СССР, сер. техн., **9**, 1261 (1946).
10. Е. А. Бенедиктов, Ю. С. Коробков, Н. А. Митяков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 957 (1960).
11. С. Я. Брауде, ДАН УССР, **6**, 60 (1963).
12. J. H. Oort, Astrophys. J., **116**, 233 (1952).
13. В. Л. Гинзбург, УФН, **62**, 37 (1957).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
22 января 1963 г.

RADIO EMISSION SPECTRA OF DISCRETE SOURCES KASSIOPEIA-A,
CYGNYS-A, TAURUS-A, VIRGO-A AT 12.5 ± 40 mc/s FREQUENCIES

*L. L. Baselyan, S. Ya. Braude, Yu. M. Bruck, I. N. Zhouck, A. V. Men',
B. P. Ryabov, L. G. Sodin, N. K. Sharykin*

For four discrete sources results of measurements of radiation in 12.5 ± 40 mc/s band are given. A marked decrease of the spectra of three sources at frequencies below 20 ± 25 mc/s is noted. The results are used for calculation of characteristic parameters of the sources (emissivity and ratio H_{\perp}/n_e) under the assumption that the decrease of the spectrum is caused either by the absorption in clouds H_{II} or by decrease of a refractive index in the source.

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ОСЦИЛЛЕТОРА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Б. В. Хачатрян

В приближении геометрической оптики и методом возмущений получены выражения для излученной энергии при движении осциллятора в периодически неоднородной среде.

1. ГЕОМЕТРИКО-ОПТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Пусть в среде с диэлектрической постоянной

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon_0(\omega) + \Delta \cos(2\pi z/l), \quad \Delta \ll \varepsilon_0(\omega)$$

и магнитной проницаемостью $\mu = 1$ по оси z со скоростью v_0 движется осциллятор (колебания осциллятора параллельны поступательной скорости v_0). Плотности заряда и тока равны соответственно

$$\begin{aligned} \rho &= e\delta(x)\delta(y)\delta(z - z(t)); \\ j &= ev(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z(t)), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\begin{aligned} z(t) &= v_0 t + r_0 \sin(\Omega t), \\ v(t) &= v_0 + v_1 \cos(\Omega t), \quad v_1 = r_0 \Omega. \end{aligned}$$

Как показано в работе [1], поток энергии через плоскость, расположенную перпендикулярно траектории на расстоянии $z \rightarrow \infty$, за все время движения есть

$$S_\omega = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega \varepsilon} d\omega \int_0^\infty \times q^3 dq |A(q, z)|^2, \tag{1.2}$$

где

$$\begin{aligned} A(q, z) &= -\frac{i}{4\pi^2 c} \left(\frac{\varepsilon(z)}{\times(z)} \right)^{1/2} \int \frac{j(x, y, z't)}{[\times(z') \varepsilon(z')]^{1/2}} \exp \left\{ i \left(\omega t - xk_x - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - yk_y + \int_{z'}^z \times(z) dz \right) \right\} dx dy dz' dt, \end{aligned} \tag{1.3}$$

\times и q — продольная и поперечная компоненты волнового вектора соответственно. Приближение геометрической оптики требует выполнения условия

$$\lambda \ll l, \quad \lambda = c/\omega \sqrt{\varepsilon_0}. \tag{1.4}$$

При выполнении (1.4) зависимостью z' в знаменателе (1.3) можно пренебречь. В силу (1.4) можно считать, что изменение свойств среды мало сказывается на распространение волны, и поэтому можно ввести угол излучения волны θ согласно соотношениям:

$$q = k_0 \sin \theta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} \sin \theta; \quad x_0 = k_0 \cos \theta.$$

Для упрощения дальнейших вычислений представим плотность тока в виде

$$j = \frac{1}{2\pi} ev(t) \delta(x) \delta(y) \int e^{is(z-z(t))} ds.$$

Тогда, разлагая x в ряд

$$x \approx x_0 + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \Delta}{c^2 x_0} \cos \frac{2\pi z}{l}$$

и используя известное представление

$$\exp(-ia \sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) e^{-inx},$$

получаем:

$$A(q, z) = -\frac{ie\omega}{2\pi c x} \sum_{m, n} J_m(a) J_n(sr_0) \frac{1}{s} \delta(v_n - sv_0), \quad (1.5)$$

где

$$a = \omega^2 l / \Delta / 4\pi c^2 x_0, \quad s = x_0 + 2\pi m / l, \quad v_n = \omega - n\Omega.$$

При этом мы опустили несущественный фазовый множитель, поскольку в дальнейшем вычисляется $|A(q, z)|^2$.

Подставляя (1.5) в (1.2) и интегрируя по углам, получим для излученной энергии выражение

$$dI = \frac{2\pi e^2}{c^3 \beta} \omega^3 d\omega \sum_{m, m'} \sum_{n, n'} J_m(a) J_{m'}(a') J_n(sr_0) J_{n'}(s'r_0) \times \\ \times \frac{\sin^2 \theta}{ss'} \delta \left[(n - n') \Omega + \frac{2\pi v_0}{l} (m - m') \right], \quad (1.6)$$

где

$$\cos \theta = \frac{1}{v_0 k_0} \left(v_n - \frac{2\pi v_0}{l} m \right), \quad \beta = \frac{v_0}{c}.$$

Отсюда видно, что излучение будет только в том случае, когда $r\Omega = j2\pi v_0/l$ (r и j —целые числа). Из требования $|\cos \theta| \leq 1$ следует:

$$1 + \beta \sqrt{\epsilon_0} \geq \frac{n\Omega + (2\pi v_0/l) m}{\omega} \geq 1 - \beta \sqrt{\epsilon_0}. \quad (1.7)$$

Если

$$\epsilon_0 = 1 - 4\pi Ne^2/m_e \omega^2,$$

то правая часть неравенства дает (при $\alpha_{mn} > 0$):

$$\omega_{\max} = \frac{\alpha_{mn}}{2(1-\beta)} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b\beta}{\alpha_{mn}^2} (1-\beta)} \right) \geq \omega \geq \frac{\alpha_{mn}}{2(1-\beta)} \times \\ \times \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b\beta}{\alpha_{mn}^2} (1-\beta)} \right) = \omega_{\min},$$

где

$$\alpha_{mn} = n\Omega + (2\pi v_0/l) m, \quad b = 2\pi Ne^2/m_e.$$

При $\alpha_{mn} < 0$ имеет место обратное неравенство. Левая часть неравенства (1.7) приводит к условию

$$\omega \geq \alpha_{mn} (1 + \beta)^{-1}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (1.6) при малых неоднородностях ($a \ll 1$) и малых амплитудах колебаний осциллятора ($sr_0 \ll 1$). В нулевом приближении (когда из суммы берется член с $n = n' = m = m' = 0$) получается обычное черенковское излучение. В первом приближении ($m = m' = \pm 1, n = n' = \pm 1$)

$$dI = \frac{e^2 r_0^2 T}{4c^3 \beta} \omega^3 d\omega \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon_0(\omega)} \left(1 \mp \frac{\Omega}{\omega} \mp \frac{2\pi v_0}{l\omega} \right)^2 \right]$$

(T —время пролета).

Отметим, что при $m = m' = 0, n = n' = \pm 1$ (1.6) совпадает с выражением (22) работы [2].

Аналогичным методом [1,4] можно получить также более общие формулы при произвольном движении осциллятора в одномерно-периодической среде в квазиклассическом приближении. Ввиду громоздкости расчета мы их здесь не приводим.

2. РАСЧЕТ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ

При применении теории возмущений ограничение (1.4) является лишним; не усложняя выкладок, здесь удается рассмотреть движение осциллятора в произвольной периодической среде в произвольном направлении и с любой ориентацией. Для расчета излучения методом возмущений будем пользоваться обычной теорией рассеяния света [1,3].

Итак, рассмотрим немагнитную среду с диэлектрической проницаемостью*

$$\epsilon(r, \omega) = \epsilon_0(\omega) + \epsilon'; \quad \epsilon' \ll \epsilon_0(\omega),$$

где $\epsilon' = \sum_m \epsilon_m \exp\{2\pi i r b_m\}$ —произвольная периодическая функция координат.

Будем исходить из макроскопических уравнений Maxwella для потенциалов:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{\epsilon_0}{c^2} \hat{\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}} &= -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \\ \hat{\epsilon}_0 \left(\Delta \varphi - \frac{\epsilon_0}{c^2} \hat{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}} \right) &= -4\pi \rho; \\ \rho &= e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)); \\ \mathbf{j} &= \rho \mathbf{v}(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\hat{\epsilon}_0$ —оператор диэлектрической проницаемости, а радиус-вектор и скорость осциллятора равны соответственно

* Для применимости теории возмущений необходимо не только выполнение условия $\epsilon' \ll \epsilon_0(\omega)$: надо также, чтобы первое приближение теории возмущений было много меньше нулевого, что эквивалентно неравенству $a \ll 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \sin(\Omega t); \\ \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \cos(\Omega t); \quad \mathbf{v}_1 = \Omega \mathbf{r}_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Разлагая \mathbf{A} и φ в четырехкратные интегралы по переменным \mathbf{k} и ω , получим:

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{c} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - (\omega^2/c^2) \epsilon_0(\omega)}; \quad (2.3)$$

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{\epsilon_0(\omega)} \frac{\rho(\mathbf{k}, \omega)}{k^2 - (\omega^2/c^2) \epsilon_0(\omega)},$$

где

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e}{(2\pi)^3} \sum_n J_n(kr_0) \delta(v_n - k\mathbf{v}_0); \quad (2.4)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e}{(2\pi)^3} \sum_n \left(\mathbf{v}_0 + n \frac{\mathbf{v}_1}{kr_0} \right) J_n(kr_0) \delta(v_n - k\mathbf{v}_0).$$

Используя (2.3) и (2.4), находим фурье-компоненты $A_\omega(r)$ и $\varphi_\omega(r)$ откуда

$$E_{\omega_0}(\mathbf{r}) = \frac{ie}{2\pi^2} \sum_n \int p_n(\mathbf{k}) \frac{J_n(kr_0)}{k^2 - (\omega^2/c^2) \epsilon_0(\omega)} e^{ikr} \delta(v_n - k\mathbf{v}_0) d\mathbf{k}, \quad (2.5)$$

где

$$p_n(\mathbf{k}) = \frac{\omega}{c^2} \left(\mathbf{v}_0 + n \frac{\mathbf{v}_1}{kr_0} \right) - \frac{\mathbf{k}}{\epsilon_0(\omega)}.$$

Как известно [1,3], индукция \mathbf{D}'_ω и напряженность поля излученной волны связаны соотношением:

$$\mathbf{D}'_\omega = \epsilon_0(\omega) \mathbf{E}'_\omega + \epsilon' \mathbf{E}_{\omega_0};$$

\mathbf{D}'_ω с использованием запаздывающих потенциалов можно представить в виде [1]

$$\mathbf{D}'_\omega(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \left[\mathbf{k}' \left[\mathbf{k}' \int \frac{\mathbf{E}_{\omega_0}(r_1)}{|r - r_1|} \epsilon'(r_1) e^{ik' |r - r_1|} dr_1 \right] \right] \quad (2.6)$$

($\mathbf{k}' = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_0} \mathbf{e}$ —волновой вектор излученной волны). Вычислим $|\mathbf{E}'_\omega|^2$, на больших расстояниях R от заряда:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}'_\omega|^2 &= \frac{1}{\epsilon_0^2(\omega)} |\mathbf{D}'_\omega|^2 = \frac{k'^2}{16\pi^2 R^2 \epsilon_0^2(\omega)} \int (k'^2 (E_{\omega_0}^*(r_1) E_{\omega_0}(r_2)) - \\ &- (k'E_{\omega_0}^*(r_1)) (k'E_{\omega_0}(r_2))) e^{ik' (r_1 - r_2)} \epsilon'(r_1) \epsilon'(r_2) dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение $E_{\omega_0}(r_0)$ из (2.5) и интегрируя, найдем:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}'_\omega|^2 &= \frac{k'^2 e^2}{R^2 \epsilon_0^2(\omega)} \sum_{n, n'} \epsilon_m \epsilon_{m'} J_n(kr_0) J_{n'}(fr_0) \times \\ &\times \frac{k'^2 (p_n p_{n'}) - (k' p_n) (k' p_{n'})}{[k^2 - \omega^2 c^{-2} \epsilon_0(\omega)] [f^2 - \omega^2 c^{-2} \epsilon_0(\omega)]} \delta(v_n - k'\mathbf{v}_0 + 2\pi\mathbf{v}_0 b_m) \delta(v_{n'} - \\ &- k'\mathbf{v}_0 + 2\pi\mathbf{v}_0 b_{m'}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - 2\pi\mathbf{b}_m$, $\mathbf{f} = \mathbf{k}' - 2\pi\mathbf{b}_{m'}$; в $\mathbf{p}_{n'}$ вместо \mathbf{k} входит \mathbf{f} . Интенсивность излучения в интервале частот $d\omega$ и телесном угле $d\Omega$ равна

$$dI = c \sqrt{\varepsilon_0(\omega)} |E'_\omega|^2 R^2 d\Omega d\omega.$$

Используя (2.7), получим отсюда после интегрирования (полярную ось направляем по \mathbf{v}_0):

$$\begin{aligned} dI = & \frac{e^2 \omega}{v_0 \varepsilon_0(\omega)} d\omega \sum_{\substack{m, m' \\ n, n'}} \varepsilon_m \varepsilon_{m'} \delta [(n - n') \Omega + 2\pi v_0 (b_m - b_{m'})] \times \\ & \times \int J_n(kr_0) J_{n'}(fr_0) \frac{k'^2 (p_n p_{n'}) - (k' p_n)(k' p_{n'})}{[k^2 - \omega^2 c^{-2} \varepsilon_0(\omega)] [f^2 - \omega^2 c^{-2} \varepsilon_0(\omega)]} d\varphi \end{aligned} \quad (2.8)$$

и

$$\cos \theta = \frac{k' v_0}{k' v_0} = \frac{1}{k' v_0} (v'_n + 2\pi v_0 b_{m'}).$$

Рассмотрим конкретные примеры.

1) Движение осциллятора по оси z (колебания параллельны \mathbf{v}_0). Среда неоднородна только вдоль движения и $\epsilon' = \Delta \cos(2\pi z/l)$.

В этом случае

$$\mathbf{v}_0 = \{0, 0, v_0\}, \quad \mathbf{r}_0 = \{0, 0, r_0\},$$

$$\mathbf{b}_m = \{0, 0, b_m\}, \quad b_m = \frac{m}{l}, \quad \varepsilon_m = \frac{\Delta}{2} \delta_{1|m|} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Если наложить условие $\lambda \ll l$, то полученный из (2.8) результат совпадает с результатом геометрико-оптического рассмотрения при $|m| = |m'| = 1$.

2) Осциллятор движется по оси z и колеблется в направлении, перпендикулярном движению: $\mathbf{v}_0 = \{0, 0, v_0\}$, $\mathbf{r}_0 = \{r_0, 0, 0\}$. Среда опять неоднородна вдоль оси z . Для определенности возьмем $n=n'=1$; $m=m'=-1$; пусть амплитуды колебаний осциллятора малы ($k r_0 \ll 1$, $f r_0 \ll 1$). Тогда из (2.8) при $\lambda \ll l$ получаем:

$$\begin{aligned} dI = & \frac{e^2 r_0^2 T}{8c^3 \beta} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \omega^3 d\omega \left[2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} - \left(\frac{\Omega}{\omega} + \frac{2\pi v_0}{l\omega} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_0(\omega)} \left(\beta^2 \varepsilon_0(\omega) - 1 + \frac{\Omega}{\omega} + \frac{2\pi v_0}{l\omega} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

(ср. с формулами (28) и (30) работы [2]).

Как мне любезно сообщил М. Л. Тер-Микаелян, на целесообразность рассмотрения этой задачи в связи с работой [1] указывали Б. М. Болотовский, В. Л. Гинзбург, Э. М. Лазиев, И. М. Франк.

В заключение выражаю благодарность М. Л. Тер-Микаеляну за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Тер-Микаелян, Изв АН Арм ССР, серия физ.-мат. наук, 14, 103 (1961); Диссертация, ФИАН СССР, 1961.
2. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 36, 1823 (1959).
3. Л. Д. Ландау, Е. Н. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
4. В. Я. Эйдман, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 897 (1962).

ON RADIATION OF AN OSCILLATOR MOVING IN A NONUNIFORM MEDIUM

B. V. Khachatryan

Expressions for a radiated energy of an oscillator moving in a periodically nonuniform medium have been obtained in geometrical optics approximation and by the perturbation method.

О ПРОХОЖДЕНИИ ЧАСТИЦ, ОБЛАДАЮЩИХ ДИПОЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ, ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО

C. B. Пелетминский

Получены выражения для 4-силы и 4-момента силы, действующей при движении в среде на частицу, обладающую магнитным и электрическим дипольными моментами. Найдены черенковские и поляризационные потери энергии, импульса и момента количества движения частицы.

1. Вопрос о прохождении частиц, обладающих электрическим и магнитным дипольными моментами, через вещество рассматривался многими авторами в связи с черенковскими потерями энергии этими частицами [1-4]. Окончательное решение вопроса о черенковских потерях энергии дипольными моментами было дано в работе Гинзбурга и Эйдмана [4]. Рассматриваемый вопрос может представлять интерес в связи с тем, что нейтральные сгустки частиц с размерами, малыми по сравнению с длиной волн в среде, можно рассматривать как точечные частицы, обладающие мультипольными моментами.

В настоящей работе рассматриваются потери энергии, импульса и момента количества движения осциллятора, обладающего электрическим и магнитным дипольными моментами, при прохождении его через вещество. Полученные формулы дают не только черенковские потери, но и потери, связанные с наличием поглощения в среде (поляризационные потери).

2. Получим прежде всего выражения для 4-силы и 4-момента силы, действующей на частицу со стороны внешнего электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$.

Пусть $T_{\mu\nu}^{e-m}(x)$ — тензор энергии-импульса электромагнитного поля и $j_\nu(x)$ — 4-вектор плотности тока частицы. Тогда [5]

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}^{e-m}}{\partial x_\nu} = F_{\mu\nu} j_\nu.$$

Если $T_{\mu\nu}^{(q)}(x)$ — тензор энергии-импульса частицы, то

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}^{(q)}(x)}{\partial x_\nu} = -F_{\mu\nu} j_\nu. \quad (1)$$

4-вектор импульса частицы $p_\mu(\tau)$ (τ — собственное время частицы) определяется формулой

$$p_\mu(\tau) = - \int_{\sigma(\tau)} T_{\mu\nu}^{(q)}(x) d\sigma^\nu, \quad (1a)$$

где $d\sigma^\nu$ — элемент 3-мерной гиперповерхности $\sigma(\tau)$, проходящей через точку $x_\mu = \xi_\mu(\tau)$ ортогонально 4-вектору $\xi_\mu(\tau)$ ($\xi_\mu(\tau)$ — параметрическое уравнение 4-траектории частицы). В системе покоя частицы $d\sigma^\nu$ имеет компоненты $(0, 0, 0, idV)$.

Найдем производную вектора $p_\mu(\tau)$ по собственному времени τ . Для этого заметим, что, согласно теореме Гаусса,

$$\int_{\sigma(\tau + \delta\tau)} T_{\mu\nu}^{(q)} d\sigma^\nu - \int_{\sigma(\tau)} T_{\mu\nu}^{(q)} d\sigma^\nu = \int_{\Omega} \frac{\partial T_{\mu\nu}^{(q)}}{\partial x_\nu} d^4x, \quad (2)$$

где Ω —область пространства—времени, заключенная между гиперповерхностями $\sigma(\tau)$ и $\sigma(\tau + \delta\tau)$. При написании формулы (2) учтено, что $T_{\mu\nu}^{(q)}$ отлична от нуля только в непосредственной близости к 4-траектории частицы $\xi_\mu(\tau)$. Так как вектор нормали, соединяющей две гиперповерхности $\sigma(\tau)$ и $\sigma(\tau + \delta\tau)$ и проходящей через точку x гиперповерхности $\sigma(\tau)$, равен $\{1 + (x - \xi)\dot{\xi}\} \dot{\xi} \delta\tau$, то

$$d^4x = \delta\tau \dot{\xi}_\lambda (1 + \zeta \ddot{\xi}) d\sigma^\lambda,$$

$$\zeta = x - \xi(\tau).$$

Следовательно, согласно (1), (2),

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu,$$

где

$$f_\mu = \dot{\xi}_\lambda \int_{\sigma(\tau)} (1 + \zeta \ddot{\xi}) F_{\mu\nu}(x) j_\nu(x) d\sigma^\lambda. \quad (3)$$

Аналогичным образом, вводя тензор плотности момента количества движения электромагнитного поля:

$$M_{\mu\nu\rho}^{\text{эм}} = x_\mu T_{\nu\rho}^{\text{эм}} - x_\nu T_{\mu\rho}^{\text{эм}},$$

который удовлетворяет в соответствии с (1) уравнению

$$\frac{\partial M_{\mu\nu\rho}^{\text{эм}}}{\partial x_\rho} = x_\nu F_{\mu\rho} j_\rho - x_\mu F_{\nu\rho} j_\rho,$$

найдем, что тензор плотности момента количества движения частицы удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial M_{\mu\nu\rho}^{(q)}}{\partial x_\rho} = x_\mu F_{\nu\rho} j_\rho - x_\nu F_{\mu\rho} j_\rho. \quad (4)$$

Момент количества движения частицы определяется формулой

$$M_{\mu\nu} = - \int_{\sigma(\tau)} M_{\mu\nu\rho}^{(q)} d\sigma^\rho \quad (4a)$$

и удовлетворяет в силу соотношения (4) уравнению

$$\frac{dM_{\mu\nu}}{d\tau} = K_{\mu\nu};$$

$$K_{\mu\nu} = \dot{\xi}_\lambda \int_{\sigma(\tau)} (1 + \zeta \ddot{\xi}) \{ x_\nu F_{\mu\rho} j_\rho - x_\mu F_{\nu\rho} j_\rho \} d\sigma^\rho. \quad (5)$$

Наконец, собственный момент количества движения

$$M_{\mu\nu}^0 = M_{\mu\nu} - \{ \xi_\mu p_\nu - \xi_\nu p_\mu \} \quad (6)$$

удовлетворяет, согласно (3), (5), уравнению

$$\frac{dM_{\mu\nu}^0}{d\tau} = K_{\mu\nu}^0;$$

$$K_{\mu\nu}^0 = \dot{\xi}_\lambda \int_{\sigma(\tau)} (1 + \zeta \dot{\xi}) \{ \zeta_\nu F_{\mu\rho} j_\rho - \zeta_\mu F_{\nu\rho} j_\rho \} d\sigma^\lambda. \quad (6a)$$

При выводе этой формулы учтено, что $p_\mu = m \dot{\xi}_\mu$.

Если ток $j_\mu(x)$ создается движением частицы, обладающей зарядом e , то

$$j_\mu(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\xi}_\mu(\tau) \delta(x - \xi(\tau)) d\tau$$

и уравнение (3) дает выражение для 4-силы, действующей на заряд, а уравнение (6а) показывает, что $K_{\mu\nu}^0 = 0$ и, следовательно, собственный механический момент количества движения равен нулю. Если ток создается частицей, обладающей дипольными моментами, то

$$j_\mu(x) = \frac{\partial m_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu}, \quad (7)$$

где $m_{\mu\nu}(x) = -m_{\nu\mu}(x)$ — тензор плотности дипольных моментов, связанный с магнитным моментом m_l и электрическим дипольным моментом d_l соотношениями

$$m_l = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \int m_{kl}(x) dV; \quad d_l = -i \int m_{k4}(x) dV. \quad (8)$$

Плотность дипольных моментов частицы можно представить в виде

$$m_{\mu\nu}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\mu\nu}(\tau) \delta(x - \xi(\tau)) d\tau. \quad (9)$$

Тогда, согласно (8),

$$m_l = \frac{1}{2\dot{\xi}_0} \epsilon_{ikl} \mu_{kl}; \quad d_l = -\frac{i}{\dot{\xi}_0} \mu_{k4}. \quad (10)$$

Используя тензорный характер $\mu_{\lambda\rho}$ и формулы (10), легко найти закон преобразования m_k и d_k при преобразованиях Лоренца:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{m}_0 - (1 - \sqrt{1 - v^2}) \frac{(\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}}{v^2} - [\mathbf{v}, \mathbf{d}_0]; \\ \mathbf{d} &= \mathbf{d}_0 - (1 - \sqrt{1 - v^2}) \frac{(\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}}{v^2} + [\mathbf{v}, \mathbf{m}_0], \end{aligned} \quad (11)$$

где \mathbf{m}_0 , \mathbf{d}_0 — магнитный и электрический дипольные моменты в системе покоя частицы, а \mathbf{m} , \mathbf{d} — магнитный и электрический дипольные моменты частицы, движущейся со скоростью \mathbf{v} .

Формулы (7), (9) показывают, что 4-вектор тока, который создается произвольно движущейся частицей, обладающей дипольными моментами, можно представить в виде

$$j_{\mu}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\mu\nu}(\tau) \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \delta(x - \xi(\tau)) d\tau. \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) для плотности тока $j_{\mu}(x)$ в (3), (6а), найдем следующие выражения для 4-силы f_{μ} и 4-момента силы $K_{\mu\nu}^0$, действующей на частицу, которая обладает дипольными моментами:

$$f_{\mu} = -\mu_{\nu\rho} \left\{ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\rho}} + \dot{\xi}_{\rho} \dot{\xi}_{\lambda} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} \right\} - F_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} (\mu_{\nu\rho} \dot{\xi}_{\rho}); \quad (13)$$

$$K_{\mu\nu}^0 = \mu_{\alpha\rho} \{ (\dot{\xi}_{\mu} \dot{\xi}_{\beta} + \delta_{\mu\beta}) F_{\nu\alpha} - (\dot{\xi}_{\mu} \dot{\xi}_{\beta} + \delta_{\mu\beta}) F_{\nu\alpha} \}. \quad (14)$$

Заметим, что 4-сила f_{μ} в рассматриваемом случае не ортогональна к 4-скорости $\dot{\xi}_{\mu}$ и, следовательно, если $p_{\mu} = m \dot{\xi}_{\mu}$ ^{*}, то масса покоя m должна зависеть от собственного времени τ :

$$\frac{dm(\tau)}{d\tau} = -\dot{\xi}_{\mu} f_{\mu}. \quad (15)$$

3. Рассмотрим электромагнитное поле в среде, создаваемое током $j_{\mu}(x)$. Если характеризовать изотропную однородную среду продольной и поперечной диэлектрическими проницаемостями $\epsilon^l(k)$, $\epsilon^{tr}(k)$, то уравнения Максвелла в среде для Фурье-компонент поля и тока будут иметь вид [6-8]:

$$ikE(k) = 4\pi j_0(k), \quad kB(k) = 0,$$

$$i[k, B(k)]_l = -i\omega \left\{ \left(\delta_{lj} - \frac{k_l k_j}{k^2} \right) \epsilon^{tr}(k) + \frac{k_l k_j}{k^2} \epsilon^l(k) \right\} E_j(k) + 4\pi j_l(k), \quad (16)$$

$$[k, E(k)] = \omega B(k), \quad k_4 = i\omega,$$

где

$$E(x) = \int e^{ikx} E(k) d^4 k, \quad j(x) = \int e^{ikx} j(k) d^4 k.$$

Решая эти уравнения относительно $E(k)$ и $B(k)$, найдем:

$$E_j(k) = -\frac{4\pi i \omega}{k^2} \left\{ \frac{k_j k_l}{\omega^2 \epsilon^l(k)} + \frac{k^2 (\delta_{jl} - k_j k_l / k^2)}{\omega^2 \epsilon^{tr}(k) - k^2} \right\} j_l(k);$$

$$B_j(k) = -4\pi i \frac{\epsilon_{jrl}(k_r)}{\omega^2 \epsilon^{tr}(k) - k^2} j_l(k). \quad (17)$$

Фурье-компоненты тока диполя, согласно (12), имеют вид

$$j_{\nu}(k) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\nu\rho}(\tau) k_{\rho} e^{-ik\xi(\tau)} d\tau. \quad (18)$$

4. При прохождении частицы через вещество ее энергия и импульс меняются медленно. Рассмотрим поэтому равномерное движение диполя:

$$\xi(\tau) = \dot{\xi}\tau.$$

* Такое выражение для p_{μ} получается из (1а), если

$$T_{\mu\nu}^{(u)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\xi}_{\mu} \dot{\xi}_{\nu} m(\tau) \delta(x - \xi(\tau)) d\tau.$$

Согласно (18), плотность тока

$$j_v(k) = \frac{i}{(2\pi)^3} \mu_{vp} (-k \xi) k_p, \quad (18a)$$

где

$$\mu_{vp}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{vp}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Если диполь осциллирует с частотой ω_0 :

$$\mu_{vp}(\tau) = \mu_{vp} e^{-i\omega_0\tau} + \mu_{vp}^* e^{i\omega_0\tau}, \quad (19)$$

то

$$\mu_{vp}(\omega) = \mu_{vp} \delta(\omega - \omega_0) + \mu_{vp}^* \delta(\omega + \omega_0). \quad (19a)$$

Нас будут в дальнейшем интересовать потери энергии и импульса частицы, усредненные по периоду осцилляций диполя.

Средние потери энергии-импульса и момента количества движения частицы в единицу времени определяются, согласно формулам (3), (6а), выражениями

$$\frac{\overline{dp_\mu}}{dt} = \sqrt{1 - v^2} f_\mu, \quad \frac{\overline{dM_{\mu\nu}^0}}{dt} = \sqrt{1 - v^2} K_{\mu\nu}^0, \quad (20)$$

где множитель $\sqrt{1 - v^2}$ учитывает различие между собственным временем частицы τ и обычным временем t .

Подставляя в (20) выражение (13) для f_μ и используя формулы (10), (17), (18а), (19), получим после несложных преобразований окончательное выражение для средних потерь 4-импульса частицы:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dp_\mu}}{dt} = & \frac{\dot{\xi}_0}{\pi^2} \operatorname{Im} \int d^4 k \left\{ \frac{|\omega d - [k, m]|^2 - \frac{\omega^2}{k^2} |kd|^2}{\omega^2 \epsilon^{tr}(k) - k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{|kd|^2}{k^2 \epsilon^l(k)} \right\} k_\mu \delta(k \dot{\xi} + \omega_0), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\omega = -ik_4$.

Умножая это выражение на $\dot{\xi}$, найдем изменение со временем собственной массы частицы:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dm}}{dt} \equiv \dot{m} = & \frac{\dot{\xi}_0^2}{\pi^2} \omega_0 \operatorname{Im} \int d^4 k \left\{ \frac{|\omega d - [k, m]|^2 - \frac{\omega^2}{k^2} |kd|^2}{\omega^2 \epsilon^{tr}(k) - k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{|kd|^2}{k^2 \epsilon^l(k)} \right\} \delta(k \dot{\xi} + \omega_0). \end{aligned} \quad (22)$$

Если $\omega_0 = 0$, то $\dot{m} = 0$.

Из формул (21), (22) следует, что даже для вакуума, когда $\epsilon^{tr}(k) = \epsilon^l(k) = 1$, $\overline{dp_\mu}/dt$ и \dot{m} не обращаются в нуль. Действительно, при $\epsilon^{tr} = 1 + i\delta$ ($\delta \rightarrow +0$) в формулах (21), (22) под знаком интег-

рала появляется $\delta(k^2)$, вследствие чего выражение $\xi_0^2 \left\{ |\omega d - [k, m]|^2 - \frac{\omega^2}{k^2} |kd|^2 \right\}$, согласно (10), принимает релятивистски-инвариантную форму:

$$\xi_0^2 \left\{ |\omega d - [k, m]|^2 - \frac{\omega^2}{k^2} |kd|^2 \right\} = (\mu_{\alpha}, k_{\nu}) (\mu_{\alpha}^* k_{\lambda}).$$

Принимая во внимание, что

$$\int k_{\mu} k_{\nu} k_{\lambda} \delta(k^2) \delta(k\xi + \omega_0) d^4 k = \frac{2\pi\omega_0^4}{3} \{ \dot{\xi}_{\nu} \delta_{\mu\lambda} + \dot{\xi}_{\mu} \delta_{\nu\lambda} + \dot{\xi}_{\lambda} \delta_{\mu\nu} + 6\dot{\xi}_{\mu} \dot{\xi}_{\nu} \dot{\xi}_{\lambda} \},$$

получим следующие выражения для $\bar{p}_{\mu} \equiv \frac{dp_{\mu}}{d\tau}$, \bar{m} в случае вакуума:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\mu}}{d\tau} &= -\frac{4\omega_0^4}{3} \left\{ \frac{1}{2} \mu_{\alpha\nu} \mu_{\alpha}^* + 2(\mu_{\alpha\nu} \dot{\xi}_{\lambda}) (\mu_{\alpha\lambda}^* \dot{\xi}_{\mu}) \right\} \dot{\xi}_{\mu} - \\ &\quad - \frac{4\omega_0^4}{3} \{ \operatorname{Re} \mu_{\alpha\nu} \dot{\xi}_{\nu} \mu_{\alpha\mu}^* + (\mu_{\alpha\nu} \dot{\xi}_{\nu}) (\mu_{\alpha\lambda}^* \dot{\xi}_{\lambda}) \dot{\xi}_{\mu} \}; \\ \bar{m} &= -\frac{4\omega_0^4}{3} \left\{ \frac{1}{2} \mu_{\alpha\nu} \mu_{\alpha}^* + 2(\mu_{\alpha\nu} \dot{\xi}_{\nu}) (\mu_{\alpha\lambda}^* \dot{\xi}_{\lambda}) \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Первая формула дает потери энергии-импульса частицы за счет дипольного излучения, вторая формула — соответствующее изменение массы покоя частицы (см. Приложение).

Формула (21) для $\mu = 4$ при $\omega_0 = 0$ содержит выражение для чиренковских потерь энергии частицы, которое совпадает после некоторых преобразований с формулой (3) работы [4]. Заметим, что, согласно (21) для $\mu = 1, 2, 3$, импульс, теряемый частицей, не совпадает по направлению со скоростью частицы. Этот результат связан с тем, что излучение импульса происходит анизотропно.

Потери момента количества движения могут быть найдены аналогично по формулам (6а), (14). Мы ограничимся здесь только случаем $\omega_0 = 0$. Потери момента количества движения M даются формулой

$$\frac{dM}{dt} = [m, H] + [d, E] - (d\xi) [E, \xi] + (H\xi) [m, \xi] - \dot{\xi}_0 d(\xi H) + \dot{\xi}_0 (\xi d) H,$$

где E , B определяются выражениями (17), в которых

$$j(k) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \{ \omega d + [m, k] \} \delta(k\xi).$$

В заключение автор выражает благодарность А. И. Ахиезеру за обсуждение результатов работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим средние по периоду осцилляций потери энергии-импульса диполем, движущимся равномерно и прямолинейно в вакууме. Решая уравнения Максвелла с 4-вектором тока

$$j_\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\nu\rho}(\tau) \frac{\partial}{\partial x_\rho} \delta(x - \dot{\xi}_\tau) d\tau,$$

получим следующее выражение для тензора $F_{\mu\nu}$ электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\rho} \frac{\mu_{\nu\rho}(\tau)}{\sqrt{x^2 + (\dot{x})^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\rho} \frac{\mu_{\mu\rho}(\tau)}{\sqrt{x^2 + (\dot{x})^2}}, \quad (\text{П.1})$$

где $\tau = -x\dot{\xi} - \sqrt{x^2 + (\dot{x})^2}$. Так как излучение энергии-импульса в единицу собственного времени $dP_\mu/d\tau$ представляет собой 4-вектор, то

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = -\dot{\xi}_\lambda \int_S T_{\mu\nu} d\sigma^\nu, \quad (\text{П.2})$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля и $d\sigma^\nu$ — элемент двухмерной, достаточно далеко удаленной, поверхности S , лежащей на гиперповерхности $\sigma(\tau)$, ортогональной 4-вектору $\dot{\xi}_\mu(\tau)$. Действительно, в системе, где частица покоятся, выражение (П.2) приобретает обычную форму:

$$\left(\frac{dP_\mu}{d\tau} \right)_0 = \int_{S_0} T_{\mu k} dS^k.$$

Подставляя в выражение для $T_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \left(-\frac{1}{4} F_{\rho\lambda}^2 \delta_{\mu\nu} + F_{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} \right) \frac{1}{4\pi}$$

тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ (П.1), получим:

$$T_{\mu\nu}(x)|_{\zeta \rightarrow \infty} \simeq \frac{1}{4\pi\zeta^2} \left(\dot{\xi}_\mu + \frac{\zeta_\mu}{\zeta} \right) \left(\dot{\xi}_\nu + \frac{\zeta_\nu}{\zeta} \right) K_\lambda^2, \quad (\text{П.3})$$

где

$$K_\lambda = \ddot{\mu}_{\lambda\rho} \left(\dot{\xi}_\rho + \frac{\zeta_\rho}{\zeta} \right),$$

$$\zeta_\mu = x_\mu + (x\dot{\xi}) \dot{\xi}_\mu, \quad \zeta = \sqrt{\zeta_\mu^2} = (x^2 + (x\dot{\xi})^2)^{1/2}.$$

Подставляя далее в (П.2) выражение (П.3) для $T_{\mu\nu}$ и выбирая в качестве S сферу большого радиуса, найдем:

$$\frac{dP_\mu}{d\tau} = \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2} \ddot{\mu}_{\lambda\rho}^2 + 2 (\ddot{\mu}_{\nu\rho} \dot{\xi}_\rho)^2 \right\} \dot{\xi}_\mu + \frac{2}{3} \ddot{\mu}_{\nu\rho} \dot{\xi}_\rho \{ \ddot{\mu}_{\nu\mu} + \ddot{\mu}_{\nu\lambda} \dot{\xi}_\lambda \dot{\xi}_\mu \}.$$

Используя, наконец, формулы (19) для $\mu_{\nu\lambda}(\tau)$ и производя усреднение по периоду осцилляций, получим:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{dP_\mu}{d\tau}} &= \frac{4\omega_0^4}{3} \left\{ \frac{1}{2} \mu_{\alpha\nu} \mu_{\alpha\nu}^* + 2 (\mu_{\alpha\nu} \dot{\xi}_\nu) (\mu_{\alpha\lambda}^* \dot{\xi}_\lambda) \right\} \dot{\xi}_\mu + \\ &+ \frac{4\omega_0^4}{3} \{ \operatorname{Re} \mu_{\alpha\nu} \dot{\xi}_\nu \mu_{\alpha\mu}^* + (\mu_{\alpha\nu} \dot{\xi}_\nu) (\mu_{\alpha\lambda}^* \dot{\xi}_\lambda) \dot{\xi}_\mu \}. \end{aligned}$$

Это выражение совпадает с формулой (23) настоящей работы. Умножая это выражение на ξ_μ и используя (10), получим:

$$\xi_\mu \frac{d\overline{D}_\mu}{d\tau} = -\frac{4\omega_0^4}{3} (|\mathbf{d}_0|^2 + |\mathbf{m}_0|^2) \equiv \overline{m}.$$

Эта формула, согласно (15), (23), дает уменьшение собственной массы частицы за счет электрического и магнитного дипольного излучения

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ., 6, 3 (1942).
2. И. М. Франк, Сб. памяти С. И. Вавилова, изд. АН СССР, М.—Л., 1952, стр. 172.
3. В. Л. Гинзбург, Сб. памяти С. И. Вавилова, изд. АН СССР, М.—Л., 1952, стр. 193.
4. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 35, 1508 (1958).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
6. М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 22, 303 (1952).
7. В. П. Силин, А. А Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
8. J Lindhard, Det. Kong. Danske Vid. Selskab. Dan. Mat. Fys. Medd., 28, 5 (1954)

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
14 ноября 1962 г.

ON PASSAGE OF PARTICLES WITH DIPOLE MOMENTS THROUGH A MEDIUM

S. V. Peletminskii

Expressions have been obtained for the 4 component force and 4 component moment of force, acting upon the particle with magnetic and electric moments moving in the medium. Cherenkov and polarization losses have been found of the particle energy, momentum and angular momentum.

О ВОЗДЕЙСТВИИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩИЕСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

B. H. Цытович

Рассчитан эффект статистического воздействия излучения на электроны, движущиеся в магнитном поле. Оценивается возможность ускорения электронов космических лучей излучением различных диапазонов частот

1. Хорошо известно, что релятивистская заряженная частица, движущаяся в магнитном поле, может излучать широкий спектр частот, соответствующий высоким обертонам гирочастоты. Эти же частоты могут поглощаться частицей. Таким образом, если в некоторой области пространства имеется излучение соответствующих частот, оно будет воздействовать на заряженные частицы благодаря процессам индуцированного магнитотормозного поглощения и излучения волн [1, 2]. Индуцированные процессы излучения и поглощения свободными зарядами в среде возможны, если выполнено черенковское условие (скорость частицы больше скорости волны). Таков, например, механизм воздействия плазменных волн на заряженные частицы [1, 2]. При наличии магнитного поля также появляется возможность поглощения и излучения волн. Эффект при этом остается, если плотность среды (плазмы) стремится к нулю. Этот предел рассматривается в настоящей работе. Необходимый критерий применимости результатов состоит в выполнении неравенства $\omega \gg \omega_0 \varepsilon / m^*$.

Интерес к рассматриваемому кругу вопросов определяется тем, что излучение электронов космических лучей может иметь длины волн от длинноволнового радиодиапазона до светового. Следовательно, излучение широкого диапазона частот может ускорять электроны космических лучей (см. ниже).

В настоящей работе рассматривается действие излучения, имеющего случайные фазы. Это представляет интерес для возможных астрофизических приложений, так как космическое излучение имеет случайные фазы. Рассматриваемый эффект ускорения в пределе очень больших напряженностей полей волны переходит в статистическое фермиевское ускорение (см. работу автора [2]), соответствующее эффекту второго порядка.

Интересный эффект авторезонансного ускорения частиц волной с фиксированной фазой рассмотрен в [3] (см. также [4]). В космических условиях в среднем эффекты первого порядка являются несущественными. В некоторых исключительных условиях эффекты первого порядка все же возможны. Так, согласно [5], эффект Ферми первого порядка необходимо привлекать для объяснения сильных хромосферных вспышек. При этом речь идет о характерных размерах (длинах волн) $\lambda \sim 10^{11} \text{ см}$. Нужно отметить, что с ростом частоты промежутки времени τ , в течение которых фаза фиксирована, падают и время, в течение которого частица

* Здесь ω —частота, ω_0 —плазменная частота, ε —энергия частицы, m —ее масса.

может получить заметную энергию, например, от волн светового ($\lambda \sim 10^{-4}$ см) или радиодиапазона ($\lambda \sim 10^3$ см), заведомо больше τ . Результат усреднения показывает, что для частицы, движущейся вдоль магнитного поля (когда эффектом первого порядка служит явление авторезонансного ускорения [3]), эффект статистического ускорения существенно меньше, нежели в случае поперечного движения, когда играют роль высокие гармоники. Весьма важным требованием является то, что ускоряющая сила со стороны излучения должна превосходить силу торможения, обусловленную ионизационными и другими видами потерь. Это сводится к требованию, чтобы интенсивность волн превосходила некое минимальное значение.

Влиянию излучения на кинетику процессов в плазме посвящена работа [6]. В отличие от [6], ниже предполагается, что плотность излучения является заданной величиной (а не релаксирует быстро к частицам). Это законно в случае, когда средняя плотность энергии ускоряемых частиц значительно меньше плотности энергии излучения. Такой случай соответствует тому, что часто встречается в космических условиях.

В настоящей работе оценивается роль рассматриваемого эффекта ускорения для некоторых дискретных источников радиоизлучения. Отметим также, что когерентность существующих источников видимого света (лазеров) является весьма низкой ($\tau \sim 10^{-7}$ сек) и при $t \gg \tau$ ускорение будет статистическим.

2. Квантовый расчет воздействия излучения приводит к вычислению разностей вероятностей поглощения и излучения. Так, для среднего изменения энергии частицы

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \int_0^\infty d\omega \int dk \sum_n \hbar\omega \left(w_{p_z + \hbar k_z, n - \nu}^{p_z, n} - w_{p_z, n}^{p_z - \hbar k_z, n + \nu} \right) N_{\omega, k}. \quad (1)$$

Здесь $N_{\omega, k}$ — число квантов частоты ω и импульса k , p_z и n — квантовые числа, характеризующие состояние частицы в магнитном поле (см. [7]), w — вероятность спонтанного излучения (нижние индексы — начальное состояние, верхние — конечное). Учитывая, что изменения импульса $\delta p_z = \hbar k_z$ и $\delta p_\perp^2 = \hbar^2 2eH\nu = 2\omega_H \nu \hbar$ малы, можно (1) представить в виде производных от классических вероятностей ($c = 1$):

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \int_0^\infty d\omega \int dk \sum_{\nu=1}^\infty \hbar\omega \left(\hbar k_z \frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{\hbar\omega_H \nu}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp} \right) w_{\nu, p_z, p_\perp}(\omega, k) N_{\omega, k}, \quad (2)$$

где

$$\omega_H = |eH|/\epsilon, \quad v_\perp = p_\perp/\epsilon, \quad v_z = p_z/\epsilon.$$

Классическая вероятность спонтанного излучения имеет вид

$$\begin{aligned} w_{\nu, p_z, p_\perp}(\omega, k) &= \frac{e^2}{\pi\hbar} \frac{\delta(\omega^2 - k^2)}{1 - v_z x} \delta\left(\omega - \frac{\omega_H \nu}{1 - v_z x}\right) \times \\ &\times \left\{ \frac{(v_z - x)^2}{1 - x^2} J_\nu^2 \left(\frac{\nu v_\perp \sqrt{1 - x^2}}{1 - v_z x} \right) + v_\perp^2 J_\nu^2 \left(\frac{\nu v_\perp \sqrt{1 - x^2}}{1 - v_z x} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $x = \cos \Theta$, Θ — угол между k и магнитным полем. Выполняя дифференцирование в (2), получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle &= \frac{2e^2}{\varepsilon} \sum_{v=1}^{\infty} \omega_H^3 v^3 \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1-v_z x)^5} \left\{ -v_\perp^2 (1-x^2) J_v'^2(z) - \right. \\ &- 2(v_z - x)^2 J_v^2(z) + \frac{1}{v_\perp^2 (1-x^2)} [(1-v_z x)^2 + (v_z - x)^2 - v_\perp^2 (1-x^2)] \times \\ &\times [(1-v_z x)^2 - v_\perp^2 (1-x^2)] z J_v(z) J_v'(z) \left. \right\} \hbar N, - \quad (4) \\ &- \frac{e^2}{\varepsilon} \sum_{v=1}^{\infty} \omega_H^4 v^4 \int_{-1}^1 dx \frac{1-x^2}{(1-v_z x)^6} \left\{ \frac{(v_z - x)^2}{1-x^2} J_v^2(z) + v_\perp^2 J_v'^2(z) \right\} \hbar \frac{dN_v}{d\omega}, \end{aligned}$$

где

$$z = \frac{v_\perp \sqrt{1-x^2}}{1-v_z x}, \quad J_v' = \frac{d}{dz} J_v, \quad (5)$$

$$\text{а } N(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_{\omega, k, \Theta, \varphi} d\varphi \text{ при } k = \omega; \{k, \Theta, \varphi\} — \text{сферические компоненты } \mathbf{k}, \text{ ось } z \text{ направлена по магнитному полю, } N_v = N(\omega, x) \text{ при } \omega = \omega_H v (1-v_z x)^{-1}.$$

Для отыскания изменения импульса p_z необходимо подынтегральные выражения (4) умножить на x . Изменение перпендикулярного импульса частицы можно найти из соотношения

$$\left\langle p_\perp \frac{dp_\perp}{dt} \right\rangle = \left\langle \varepsilon \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle - \left\langle p_z \frac{dp_z}{dt} \right\rangle. \quad (6)$$

3. Рассмотрим сначала случай, когда $v_z \ll 1$, а излучение $N=N(\omega)$ изотропно, т. е. не зависит от x . В этом случае dp_z/dt мало и изменение энергии происходит за счет изменения p_\perp . Интегрирование по углам после довольно громоздких расчетов с использованием свойств бесселевых функций дает

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle &= \frac{2e^2}{\varepsilon} \sum_{v=1}^{\infty} \omega_H^3 v^3 \left\{ \frac{1-v_\perp^2}{v_\perp^2} J_{2v}(y) + \frac{3(1-v_\perp^4)}{2yv_\perp^2} \int_0^y J_{2v}(y') dy' - \right. \\ &\left. - \frac{3v_\perp^2 + 1}{2y^3} I(y) \right\} \hbar N + \frac{e^2}{\varepsilon} \sum_{v=1}^{\infty} \omega_H^4 v^4 \hbar \frac{dN}{d\omega} \times \\ &\times \left\{ \frac{1-v_\perp^4}{v_\perp^2 y} \int_0^y J_{2v}(y') dy' - \frac{3v_\perp^2 + 1}{y^3} I(y) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$I(y) = y^2 J_{2v}'(y) - y J_{2v}(y) + \int_0^y J_{2v}(y') dy', \quad (8)$$

$$y = 2v_\perp. \quad (9)$$

В частном случае, когда N зависит от частоты как $\omega^{-\gamma-1}$, имеем $dN/d\omega = -(\gamma+1)N/\omega_H^\gamma$ и

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{2e^2}{\varepsilon} \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_H^3 v^3 \left\{ \frac{(1-v_\perp^2)^2}{v_\perp^2} J_{2\nu}(y) + \frac{(2-\gamma)(1-v_\perp^4)}{2yv_\perp^2} \int_0^y J_{2\nu}(y') dy' + \right. \\ \left. + \frac{3v_\perp^2 + 1}{2y^3} \gamma I(y) \right\} N \hbar. \quad (10)$$

Если в определенной области частот излучение может быть охарактеризовано некой эффективной температурой $T_{\text{эфф}} = T_{\text{эфф}}/\omega$,

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{2e^2 T_{\text{эфф}}}{\varepsilon} \sum_{\nu} \omega_H^2 v^2 \left\{ \frac{(1-v_\perp^2)^2}{v_\perp^2} J_{2\nu}(y) + \frac{1-v_\perp^4}{yv_\perp^2} \int_0^y J_{2\nu}(y') dy' \right\}. \quad (11)$$

4. Для ультрарелятивистских скоростей, которые нас здесь интересуют, можно воспользоваться известным представлением функций Бесселя через функции Эйри или функции Макдональда $K_{1/3}$. Тогда вместо (7) получим

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{27\sqrt{3}e^2\omega_H^3}{8\pi\varepsilon(1-v_\perp^2)^{9/2}} \int_0^\infty \zeta^3 d\zeta N \hbar \left\{ \frac{1-v_\perp^2}{v_\perp^2} K_{1/3}(\zeta) + \frac{1-v_\perp^4}{2v_\perp^3} \times \right. \\ \times \frac{1}{\zeta} \int_\zeta^\infty K_{1/3}(\zeta') d\zeta' - \frac{(3v_\perp^2 + 1)(1-v_\perp^2)}{6v_\perp} \frac{1}{\zeta} K_{2/3}(\zeta) + \frac{3v_\perp^2 + 1}{18v_\perp^2} \times \\ \times (1-v_\perp^2)^2 \frac{1}{\zeta^2} K_{1/3}(\zeta) - \frac{3v_\perp^2 + 1}{54v_\perp^3} \frac{(1-v_\perp^2)^3}{\zeta^3} \int_\zeta^\infty K_{1/3}(\zeta') d\zeta' \Big\} + \quad (12) \\ + e^2 \frac{81\sqrt{3}\omega_H^4}{32\pi\varepsilon(1-v_\perp^2)^6} \int_0^\infty \zeta^4 d\zeta \hbar \frac{dN}{d\omega} \left\{ \frac{1-v_\perp^4}{3v_\perp^3} \frac{1}{\zeta} \int_\zeta^\infty K_{1/3}(\zeta') d\zeta' - \right. \\ - \frac{3v_\perp^2 + 1}{3v_\perp} \frac{1-v_\perp^2}{\zeta} K_{2/3}(\zeta) + \frac{3v_\perp^2 + 1}{9v_\perp^2} (1-v_\perp^2)^2 \frac{1}{\zeta^2} K_{1/3}(\zeta) - \\ \left. - \frac{3v_\perp^2 + 1}{27v_\perp^3} \frac{(1-v_\perp^2)^3}{\zeta^3} \int_\zeta^\infty K_{1/3}(\zeta) d\zeta \right\}.$$

Здесь

$$\zeta = \frac{2}{3} v (1-v_\perp^2)^{3/2} \quad (13)$$

и вместо суммы по ν записан интеграл по ζ в силу квазинепрерывности спектра. При условии $v \gg 1$ (высокие гармоники), которое предполагалось фактически в (12), существенный вклад вносят лишь те члены, которые не малы при $\zeta \ll 1$ и $\zeta \gg 1$. Это дает приближенное выражение ($v_\perp \rightarrow 1$):

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{27\sqrt{3}e^2\omega_H^3}{8\pi\varepsilon(1-v_\perp^2)^{7/2}} \int_0^\infty \zeta^2 d\zeta \hbar N(\zeta) \left\{ \zeta K_{1/3}(\zeta) - \frac{2}{3} K_{2/3}(\zeta) + \int_\zeta^\infty K_{1/3}(\zeta') d\zeta' \right\} - \quad (14)$$

$$- \frac{9\sqrt{3}e^2\omega_H^3}{8\pi\varepsilon(1-v_\perp^2)^{7/2}} \int_0^\infty \zeta^3 d\zeta \frac{dN}{d\zeta} \hbar \int_\zeta^\infty K_{5/3}(\zeta') d\zeta'.$$

Для температурного излучения, вычисляя получающийся интеграл, имеем

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{8}{3} \frac{e^2 \omega_H^2}{(1-v_\perp^2)^2} \frac{T_{\text{эфф}}}{\varepsilon}. \quad (15)$$

Для температурного излучения результат может быть получен в общем случае, если просуммировать (4) по v с помощью формул

$$\sum_{v=1}^{\infty} v^2 J_v^2(vl) = \frac{l^2(4+l^2)}{16(1-l^2)^{7/2}}, \quad \sum_{v=1}^{\infty} v^2 J_v'^2(vl) = \frac{4+3l^2}{16(1-l^2)^{7/2}}, \quad (16)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} v^2 2v l J_v(vl) J_v'(vl) = \frac{l^2}{16} \frac{8+24l^2+3l^4}{(1-l^2)^{9/2}}. \quad (17)$$

Для $v_z = 0$

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{e^2 T_{\text{эфф}} \omega_H^2}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 dx \left\{ \frac{x^2 (2+3v_\perp^2 - 3v_\perp^2 x^2)}{[1-v_\perp^2(1-x^2)]^{7/2}} + \frac{2+5v_\perp^2(1-x^2)}{[1-v_\perp^2(1-x^2)]^{5/2}} \right\}. \quad (18)$$

Отсюда в соответствии с (15)

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{4}{3} (1+v_\perp^2) \frac{e^4 H^2}{m^2} \frac{T_{\text{эфф}}}{m} \frac{\varepsilon}{m}. \quad (19)$$

Мы видим, что эффект ускорения растет с ростом энергии. В общем случае неравновесного излучения (14) можно представить в виде:

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon} e^2 \omega_H^3 \frac{\hbar}{(1-v_\perp^2)^{7/2}} \int_0^\infty \zeta^3 N(\zeta) K_{5/3}(\zeta) d\zeta. \quad (20)$$

В частном случае, когда N приблизительно постоянно при $\zeta \sim 1$, учитывая, что подынтегральная функция имеет максимум при $\zeta \sim 1$, можно приближенно написать

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle \simeq \frac{33\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) e^2 \left(\frac{eH}{m}\right)^3 \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^3 N \hbar. \quad (21)$$

Легко получить также изменение энергии в случае $N \propto \omega^{-1}$ — спектра, который приближенно имеет место для космического радиоизлучения. Положим, что

$$N = \begin{cases} N_0 \text{ при } \omega < \omega_s \\ N_0 (\omega_s/\omega)^r \text{ при } \omega > \omega_s \end{cases}. \quad (22)$$

Если $\gamma > 7/3$, то в (20) основной вклад дают $\zeta \ll 1$; если $\zeta_0 = \frac{2\omega_s}{\omega_H} \times \left(\frac{m}{\epsilon}\right)^3 \ll 1$, то

$$\left\langle \frac{d\epsilon}{dt} \right\rangle = \frac{54 \gamma \sqrt{3} e^2 2^{7/3}}{7 \pi \sqrt[3]{2} (3\gamma - 7) 3^{7/3}} \frac{\omega_s^{7/3} \omega_H^{2/3}}{\epsilon} \hbar N_0. \quad (23)$$

В случае, когда в окрестности наиболее существенных $\zeta \sim 1$ $dN/d\zeta$ столь велико, что основной вклад вносит второй член (14), имеем:

$$\left\langle \frac{d\epsilon}{dt} \right\rangle \approx -\frac{9 \sqrt{3}}{4\pi} \Gamma\left(\frac{10}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \frac{e^2 \omega_H^3}{\epsilon (1 - v_\perp^2)^{1/2}} \left(\frac{dN}{d\zeta}\right)_0 \hbar, \quad (24)$$

где $(dN/d\zeta)_0$ есть значение $dN/d\zeta$ при $\zeta \sim 1$.

5. Изменение функции распределения квантов $N_{\omega, k}$ при пренебрежении спонтанными процессами имеет вид:

$$\frac{dN_k}{dt} = \int_0^\infty dp_z \sum_{n, v} [w_{p_z, n}^{p_z - \hbar k_z, n+v}(k) - w_{p_z + \hbar k_z, n-v}^{p_z, n}(k)] \varphi_{p_z, n} N_k = -\gamma_k N_k \quad (25)$$

(φ —функция распределения ускоряемых частиц). Среднее поглощение энергии квантов

$$\bar{\gamma} = \int \gamma_k N_k^0 dk / \int N_k^0 dk, \quad (26)$$

где N_k^0 —начальное распределение квантов. Будем интересоваться значением γ_k , усредненным по всем возможным направлениям магнитного поля. Поскольку $\gamma_k = \gamma(k, x)$, т. е. зависит лишь от угла между H и k , то усреднение по направлениям H дает $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \gamma(k, x) dx = \bar{\gamma}_k^H$.

В этом случае в правой части формулы (26) необходимо подставить $\bar{\gamma}_k^H$. Если $N_k^0 = f_1(\Theta, \varphi) f_2(k)$, то (26) описывает среднее поглощение в случае, когда луч света определенного направления проходит через области пространства, где H , имея определенное значение, хаотически изменяет свое направление.

Интеграл от $f(\Theta, \varphi)$ сокращается в (26), и, следовательно, профилы ради можно считать $f(\Theta, \varphi) = 1$, т. е. подставить значение, соответствующее изотропному излучению. Тогда

$$\bar{\gamma}^H = (1/2) \int \gamma_k N_k^0 dk / \int N_k^0 dk. \quad (27)$$

Произведем оценку величины эффекта, считая, что можно пренебречь частицами, движущимися вдоль поля и имеющими значительные продольные скорости. Такое предположение разумно при хаотических направлениях поля, поскольку такие частицы быстро выходят из той области, где поле фиксировано. Для

$$\varphi(\epsilon) = n \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_\perp} \right)^\gamma \frac{\gamma - 1}{\epsilon_0} \quad (28)$$

в случае почти монохроматического излучения с частотой ω_0 получим

$$\frac{\bar{\gamma}^H}{\omega_0} = \frac{3^{1/2+1}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma+9}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma-1}{4}\right) \left(\frac{n r_0}{\omega_0^2}\right) \left(\frac{\omega_H^0}{\omega_0}\right)^{1/2+1} \left(\frac{\epsilon_0}{m}\right)^{\gamma-1}, \quad \omega_H^0 = \frac{eH}{m}. \quad (29)$$

Поглощение радиоволн и видимого света возможно на космических лучах благодаря тому, что высокие обертоны попадают в область больших частот. Как и следовало ожидать, этот эффект для Галактики ничтожен ($H \sim 10^{-5}$ эрстед, $\omega_H^0 \sim 1,7 \cdot 10^2$ сек⁻¹ для $\lambda \sim 7000 \text{ \AA}$, $\omega_0 \sim 3 \cdot 10^{16}$, $\epsilon_0 \sim 10^9$ эв, $n \sim 5 \cdot 10^{-13}$ эл·см⁻³). Если свет проходит через области ионизированного газа, содержащие большое число релятивистских частиц, такой эффект может быть существенным. Коэффициент поглощения можно записать через сечение

$$\bar{\gamma}^H = n_m \sigma, \quad n_m = n (\epsilon > m); \quad (30)$$

$$\sigma = \frac{1,72}{2\pi} \left(\frac{\omega_H^0}{\omega_0}\right)^{7/4} r_0 \lambda, \quad r_0 = \frac{e^2}{m}, \quad \gamma = \frac{3}{2}. \quad (31)$$

Этот результат в частном случае подтверждает общее утверждение [1, 2] о том, что σ имеет порядок $r_0 \lambda$. Поглощение на космических лучах также несущественно для внегалактических объектов.

Нужно подчеркнуть, что небольшая величина эффекта поглощения излучения обусловлена небольшим числом релятивистских электронов. Ситуация существенно меняется в случае, если увеличить число релятивистских частиц. Это, по-видимому, возможно при образовании ловушек космических лучей как вблизи Солнца, так и в Галактике, а также в источниках радиоизлучения, в которых генерируются релятивистские электроны.

Возникает вопрос о том, какую роль может играть рассмотренный эффект в ускорении космических лучей при вспышках сверхновых звезд. Существенна энергетическая зависимость эффекта ускорения. Так, согласно (19), ускорение пропорционально энергии и в этом отношении вполне сходно с фермиевским статистическим ускорением. Однако при этом коэффициент пропорциональности, зависящий как от величины напряженности магнитного поля, так и от эффективной температуры, может оказаться существенно большим фермиевского. Существенно также, что, согласно (21), возможно ускорение, пропорциональное ϵ^1 . Наиболее опасным эффектом, мешающим ускорению в области ультрарелятивистских энергий, являются синхротронные потери. Сравнение (19) с известной формулой синхротронных потерь показывает, что последние не препятствуют ускорению, если $T_{\text{эфф}} > \epsilon$. Большие эффективные температуры, например, при вспышках сверхновых возможны лишь в период, предшествующий максимуму блеска. В последующие периоды, например, в Крабовидной туманности, как показывают оценки, в настоящее время ускорение возможно лишь тем излучением, которое является запертым. Оно соответствует ограниченной области низких частот, обычно лежащих ниже экспериментально измеряемых. Если правильна гипотеза [1^o] о том, что излучение в максимуме блеска сверхновой является в основном излучением релятивистских электронов, то необходимо энергичное ускорение электронов для восполнения потерь. Такое ускорение, по оценкам, может осуществляться при помощи излучения низких частот.

6. Рассмотрим теперь вопрос о действии излучения в случае, когда в основном преобладает движение частицы вдоль магнитного поля. Будем считать $v_z \ll 1$ (см. (5)). В этом случае существует лишь первая гирочастота*. Из (4) получаем

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{e^2 \omega_H^3}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1 - v_z x)^5} [(1 - v_z x)^2 + (v_z - x)^2] N \sqrt{\varepsilon}, \quad (32)$$

Положив $N = N_0 (\omega^*/\omega)^\gamma$, $\gamma < 2$, найдем:

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{e^2 T^*}{2\varepsilon} \omega^{*\gamma-1} \omega_H^{3-\gamma} \int_{-1}^1 \frac{dx [(1 - v_z x)^2 + (v_z - x)^2]}{(1 - v_z x)^{5-\gamma} (1 - x^2)^{\gamma/2}}, \quad (33)$$

где $N_0 = T^*/\omega^*$, T^* — эффективная температура излучения при $\omega = \omega^*$. Результат вычисления интеграла (33) выражается сложно через обобщенные полиномы Лежандра $P_v^\mu (1/\sqrt{1 - v_z^2})$. Поскольку нас интересует ультраквадратичный случай, мы приведем соответствующее значение $\langle d\varepsilon/dt \rangle$:

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{e^2 T^*}{m} \omega^{*\gamma-1} \left(\frac{eH}{m} \right)^{3-\gamma} \frac{(2-\gamma)(4-\gamma)}{2^\gamma \Gamma(4-\gamma)} \Gamma^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right). \quad (34)$$

Таким образом, в данном случае, в отличие от рассмотренного выше, ускоряющий эффект не увеличивается с ростом энергии. Учитывая, что тормозное излучение растет как квадрат поля:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{\text{торм}} \simeq \frac{2}{3} \left(\frac{eH}{m} \right)^2 e^2,$$

получим, что ускорение будет иметь место при

$$\frac{T^*}{m} > \left(\frac{\omega_H^0}{\omega^*} \right)^{\gamma-1} \frac{2^\gamma \Gamma(4-\gamma)}{3(2-\gamma)(4-\gamma) \Gamma^2(1-\gamma/2)}. \quad (35)$$

Это условие, вообще говоря, менее жесткое, нежели то, которое следует из (19) или (23).

Если основным видом потерь являются ионизационные потери (они больше магнитотормозных), критерий на T^* становится более жестким, причем он не зависит от энергии частиц. В случае почти монохроматической линии $N = N_0 \delta(\omega - \omega_0)$ получим

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \hbar \frac{e^2 N_0 \omega_H^2}{2\varepsilon v_z} \left\{ \left(\frac{\omega_0}{\omega_H} \right) \left(1 + \frac{1}{v_z^2} \right) - \frac{2(1-v_z^2)}{v_z^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_H} \right)^2 + \frac{(1-v_z^2)^2}{v_z^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_H} \right)^3 \right\}.$$

Здесь необходимо, чтобы $1 - \omega_H/\omega_0 < v_z$ или при $\varepsilon/m \gg 1$

$$\frac{\varepsilon}{m} > \frac{\omega_0}{\omega_H^0} \quad (\omega_H^0 = eH/m). \quad (36)$$

* Это соответствует случаю, который рассматривался для излучения с фиксированной фазой в [3]. Для астрофизических приложений существенно, что фазы излучения всегда случайны, что ниже и предполагается. Если излучение имеет резкую направленность вдоль магнитного поля $\langle \Theta^2 \rangle \approx 2(1-x) \ll 1-v_z$, то $\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle \sim \varepsilon^2$ в

случае, когда N слабо зависит от частоты, и $\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle \sim \varepsilon$ для $N \sim \frac{T_{\text{эфф}}}{\omega}$ ($\varepsilon \gg m$), что легко получить из (32).

Если $\omega_0 = (eH/m)(\epsilon/m)$ и $\epsilon/m \gg 1$, то

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \hbar \frac{e^2 N_0 \omega_H^0 \omega^3}{2\omega_0 m}, \quad (37)$$

а при $\omega_0 \ll (eH/m)(\epsilon/m)$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{e^2 N_0 \omega_0 \omega_H^0}{m} \left(\frac{m}{\epsilon} \right)^2. \quad (38)$$

Расчет, аналогичный приведенному выше, дает при условии (36)

$$\frac{\gamma_H}{\omega_0} = \frac{(\gamma - 1)(\gamma^2 + 9\gamma + 22)}{8\pi(\gamma + 3)(\gamma + 4)(\gamma + 5)} \frac{n r_0}{\omega_0^2} \left(\frac{\omega_H^0}{\omega_0} \right)^{4+\gamma} \left(\frac{\epsilon_0}{m} \right)^{\gamma-1}. \quad (39)$$

Эта формула обеспечивает, вообще говоря, существенно меньший эффект благодаря малому фактору $(\omega_H^0/\omega)^{4+\gamma}$. Взаимодействие электронов космических лучей со световыми волнами в данном случае практически отсутствует, так как условие

$$\epsilon/m > \omega/\omega_H^0 \quad (40)$$

приводит к значению $\epsilon/m \sim 10^{13}$, т. е. $\epsilon \sim 10^{19}$ эв для электронов. Для радиодиапазона $\omega \sim 10^9$ сек⁻¹ $\epsilon/m \geq 10^7$ и $\epsilon \geq 10^{13}$ эв.

Все вышеизложенное показывает, что эффективность взаимодействия излучения с релятивистскими электронами при продольном движении существенно снижается.

7. В заключение подчеркнем следующие моменты.

1) Взаимодействие излучения с релятивистскими электронами космических лучей может быть существенным в некоторых дискретных источниках.

2) Взаимодействие излучения с космическими лучами в Галактике не может привести к заметному изменению спектров излучения (поглощению, смещению и т. п.).

3) Полученные результаты, по-видимому, могут представить интерес для понимания характера падения блеска сверхновых после вспышек, а также ускорения электронов до максимума блеска.

4) Релятивистские частицы, движущиеся вдоль магнитного поля, ускоряются менее эффективно, нежели в случае движения поперек поля. Это обстоятельство объясняется тем, что в случае поперечного движения основную роль играют высокие гармоники.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Цытович, ДАН СССР, **142**, 319 (1962); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 641 (1963).
2. В. Н. Цытович, Астроном. ж., **40**, 612 (1963).
3. А. А. Коломенский и А. А. Лебедева, ДАН СССР, **145**, 1259 (1962).
4. Я. Б. Файнберг, Диссертация, ФИАН, 1960.
5. Л. И. Дорман, Вариации космических лучей, Гостехиздат, М., 1957.
6. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетинский, ЖЭТФ, **42**, 552 (1962).
7. В. Н. Цытович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 1078 (1962).
8. В. Л. Гинзбург, УФН, **62**, 37 (1957).
9. В. Л. Гинзбург и С. Н. Сыроватский, УФН, **71**, 410 (1960).
10. И. М. Гордон, Астроном. ж., **37**, 246 (1960); ДАН СССР, **94**, 413 (1954).

ON RADIATION EFFECT UPON RELATIVISTIC PARTICLES MOVING IN A
MAGNETIC FIELD

V. N. Tsitovich

An effect of statistic radiation upon electrons moving in a magnetic field has been calculated. The possibility is estimated of an acceleration of cosmic electrons by radiation.

ЦИКЛОТРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

A. A. Рухадзе

Исследованы продольные колебания слабонеоднородной плазмы на частотах, кратных циклотронным частотам электронов и ионов $\omega \sim n\omega_{B_{e,i}}$. Показано, что в плазме с неоднородной температурой и плотностью ионные циклотронные колебания с длиной волны, меньшей гирорадиуса ионов, могут быть неустойчивыми, и вычислен инкремент нарастания колебаний. Электронные же циклотронные колебания неоднородной плазмы в рассматриваемых условиях устойчивы. Неустойчивость ионных циклотронных колебаний существенным образом связана с неоднородностью температуры ионов. Такая неустойчивость поэтому должна приводить к резкому увеличению теплопроводности и выравниванию температуры ионов в плазме.

1. Из теории малых колебаний пространственно однородной плазмы известно, что колебания плазмы на частотах, кратных циклотронным частотам электронов и ионов $\omega \sim n\omega_{B_{e,i}}$, вообще говоря, не являются продольными. Однако в области коротких длин волн, меньших гирорадиуса частиц, как показано в работах [1,2], в однородной плазме существует ветвь циклотронных колебаний, в которой поперечностью поля можно пренебречь и рассматривать эти колебания как чисто продольные ($\text{rot } \mathbf{E} = 0, \mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$). В настоящей работе исследуется именно эта ветвь колебаний в пространственно неоднородной плазме, удерживаемой сильным магнитным полем $B^2 \gg 8\pi P$, направленным вдоль оси z .

Рассматривается плазма, неоднородная вдоль оси x , с характерным размером неоднородности L , большим по сравнению с ларморовским радиусом частиц. Так как указанная ветвь колебаний в однородной плазме существует лишь в очень узком интервале углов около $\vartheta = \pi/2$ (см. [3]), то и в случае неоднородной плазмы мы ограничимся рассмотрением колебаний, распространяющихся поперек магнитного поля. Примем также, что длина волны колебаний вдоль неоднородности плазмы значительно меньше характерного размера неоднородности L . В этих условиях для описания продольных колебаний неоднородной плазмы справедливо следующее уравнение поля [3]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \Phi(x) = -4\pi \int dx_1 \Phi(x_1) \frac{1}{2\pi} \int dk_x e^{ik_x(x-x_1)} D(x, k_x), \quad (1)$$

где

$$D(x, k_x) = \sum -e^2 \left\{ \frac{N}{T} - \sum_n \left(1 + \frac{nk_y}{k_\perp^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\omega}{T} - \frac{k_y}{m\omega_B} \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{N}{\omega - n\omega_B} A_n \left(\frac{k_\perp^2 v_T^2}{\omega_B^2} \right) \right\}. \quad (2)$$

Здесь $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$, $v_T^2 = T/m$, а $A_n(x) = e^{-x} I_n(x)$, где $I_n(x)$ —функция Бесселя от мнимого аргумента. Суммирование в выражении (2) распространяется по электронам и ионам плазмы.

Асимптотические решения интегро-дифференциального уравнения (1) в приближении геометрической оптики имеют вид:

$$\Phi(x) = \frac{C}{\sqrt{k_x \left[1 + \frac{\partial}{\partial k_x^2} D(x, k_x) \right]}} \exp \left(i \int^x k_x(\omega, x') dx' \right), \quad (3)$$

где функции $k_x(\omega, x)$ являются решениями уравнения:

$$k_x^2(\omega, x) + k_y^2 - 4\pi D(x, k_x) = 0. \quad (4)$$

Это уравнение определяет симметричные корни $\pm k_x(\omega, x)$. Корни с малой мнимой частью характеризуют колебательные движения плазмы со спектром, определяемым дисперсионным уравнением

$$\int dx k_x(\omega, x) = \pi\lambda. \quad (5)$$

Здесь λ —целые числа, значительно превосходящие единицу. Если во всей плазме $\operatorname{Re} k_x^2(\omega, x) > 0$ (прозрачность), то интегрирование в формуле (5) проводится по всей области, занимаемой плазмой. Если же в этой области имеются точки поворота (точки, в которых $\operatorname{Re} k_x^2(\omega, x) = 0$), то интегрирование следует проводить по областям прозрачности плазмы, лежащим между точками поворота (подробнее о пределах интегрирования см. [3]).

2. Переходя к исследованию ионных циклотронных колебаний неоднородной плазмы, примем

$$\frac{\omega}{\omega - n\omega_{B_i}} \gg 1, \quad \frac{\omega_{B_i}^2}{v_{T_i}^2} \ll k_{\perp}^2 \ll \frac{\omega_{B_e}^2}{v_{T_e}^2}, \quad \frac{\omega_{L_i}^2}{v_{T_i}^2}, \quad (6)$$

т. е. будем считать, что длина волны колебаний меньше гирорадиуса ионов, но существенно больше гирорадиуса электронов и дебаевского радиуса ионов. При этих ограничениях уравнение (4) для определения $k_x(\omega, x)$ принимает вид:

$$\left(\omega - \frac{k_y v_{T_i}^2}{\omega_{B_i}} \frac{\partial}{\partial x} \right) N \left(1 - \frac{\omega}{\omega - n\omega_{B_i}} \frac{\omega_{B_i}}{\sqrt{2\pi} k_{\perp} v_{T_i}} \right) = 0. \quad (7)$$

Определив из этого уравнения величину $k_x(\omega, x)$ и подставив ее в формулу (5), получим дисперсионное соотношение для определения спектра ионных циклотронных колебаний неоднородной плазмы:

$$\int dx \left\{ \frac{\omega^2 \omega_{B_i}^2 (\omega - k_y v_{D_i} - \delta_i)^2}{2\pi v_{T_i}^2 (\omega - n\omega_{B_i})^2 (\omega - k_y v_{D_i})^2} - k_y^2 \right\}^{1/2} = \pi\lambda, \quad (8)$$

где

$$v_{D_i} = \frac{v_{T_i}^2}{\omega_{B_i}} \frac{d}{dx} \ln N, \quad \delta_i = -\frac{1}{2} \frac{k_y v_{T_i}^2}{\omega_{B_i}} \frac{d}{dx} \ln T_i = -\frac{k_y v_{D_i}}{2} \frac{\partial \ln T_i}{\partial \ln N}.$$

В плазме, в которой температура ионов однородна ($T_i = \text{const}$, $\delta_i = 0$), из соотношения (8) получаем, что спектр ионных циклотронных колебаний неоднородной плазмы совпадает со спектром однородной плазмы:

$$\omega = n\omega_{B_i} \left[1 + \frac{\omega_{B_i}}{\sqrt{2\pi} v_{T_i}} \left(k_y^2 + \frac{\pi^2 \lambda^2}{d^2} \right)^{-1/2} \right]. \quad (9)$$

Роль волнового числа k_x играет величина $\pi\lambda/d$, где d — линейный размер плазмы вдоль оси x .

Если температура ионов в плазме неоднородна, то ионные циклотронные колебания плазмы в определенных условиях могут стать неустойчивыми. Из дисперсионного соотношения (8) легко видеть, что это имеет место, если в значительной части области прозрачности плазмы $k_y v_{D_i} \simeq n\omega_{B_i}$. Если, кроме того, в этой области плазмы можно считать $\delta_i/v_{T_i} \approx \text{const}$ (что означает $\frac{d}{dx} \sqrt{T_i} = \text{const}$), то при условии $\omega = n\omega_{B_i} \ll \delta_i$ спектр ионных циклотронных колебаний определяется выражением:

$$\omega = n\omega_{B_i} \left[1 \pm i \sqrt{\frac{\delta_i}{\sqrt{2\pi} n v_{T_i}}} \left(k_y^2 + \frac{\pi^2 \lambda^2}{s^2} \right)^{-1/2} \right]. \quad (10)$$

где s — размер области прозрачности плазмы. Отсюда видно, что ионные циклотронные колебания слабонеоднородной плазмы неустойчивы, причем инкремент нарастания колебаний

$$\gamma \sim \omega_{B_i} \left(\frac{v_{T_i}}{\omega_{B_i}} \frac{d}{dx} \ln T_i \right)^{1/2} \ll \omega_{B_i}.$$

Таким образом, неустойчивость продольных колебаний неоднородной плазмы на частотах, кратных ионной циклотронной частоте $\omega \simeq n\omega_{B_i}$, в рассматриваемом приближении существенным образом связана с неоднородностью температуры ионов в плазме.

3. Рассмотрим теперь колебания неоднородной плазмы на частотах, кратных электронной циклотронной частоте $\omega \simeq n\omega_{B_e}$. Прием, что

$$\frac{\omega}{\omega - n\omega_{B_e}} \gg 1, \quad \frac{\omega_{B_e}^2}{v_{T_e}^2} \ll k_\perp^2 \ll \frac{\omega_{L_e}^2}{v_{T_e}^2}. \quad (11)$$

При этих условиях уравнение (4) для определения функции $k_x(\omega, x)$ имеет вид:

$$1 - \frac{1}{N} \left(\omega - \frac{k_y v_{T_e}^2}{\omega_{B_e}} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{N}{\omega - n\omega_{B_e}} \frac{\omega_{B_e}}{\sqrt{2\pi} k_\perp v_{T_e}} = 0. \quad (12)$$

Определив из этого уравнения величину $k_x(\omega, x)$ и подставив в формулу (5), получим дисперсионное соотношение для спектра электронных циклотронных колебаний неоднородной плазмы:

$$\int dx \left\{ \frac{\omega_{B_e}^2 (\omega - k_y v_{T_e} - \delta_e)^2}{2\pi v_{T_e}^2 (\omega - n\omega_{B_e})^2} - k_y^2 \right\}^{1/2} = \pi/\lambda, \quad (13)$$

где

$$v_{D_e} = \frac{v_{T_e}^2}{\omega_{B_e}} \frac{d}{dx} \ln N, \quad \delta_e = -\frac{1}{2} \frac{k_y v_{T_e}^2}{\omega_{B_e}} \frac{d}{dx} \ln T_e = -\frac{k_y v_{D_e}}{2} \frac{\partial \ln T_e}{\partial \ln N}.$$

Из дисперсионного соотношения (13) следует, что в отличие от ионных циклотронных колебаний электронные циклотронные колебания слабонеоднородной плазмы в рассматриваемом приближении всегда устойчивы, так как частота ω , определенная из этого соотношения, действительна. В неоднородной плазме происходит лишь сдвиг частоты колебаний. В этом особенно легко убедиться в случае, когда в области прозрачности плазмы $\delta_e/v_{T_e} \approx \text{const}$ (т. е. $\frac{d}{dx} \times$

$\times \sqrt{T_e} = \text{const}$), а $k_y v_{D_e} \approx n\omega_{B_e}$. При этом в области частот $\delta_e \gg (\omega - n\omega_{B_e})$ спектр электронных циклотронных колебаний определяется выражением

$$\omega = n\omega_{B_e} \left[1 - \frac{\delta_e}{\sqrt{2\pi} nv_{T_e}} \left(k_y^2 + \frac{\pi^2 \lambda^2}{s^2} \right)^{-1/2} \right] \quad (14)$$

и соответствует устойчивым колебаниям неоднородной плазмы. Из этого выражения следует, что продольные электронные циклотронные колебания в неоднородной плазме возможны не только в области частот $\omega > n\omega_{B_e}$, как это имеет место в однородной плазме [2], но также и в области частот $\omega < n\omega_{B_e}$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность В. П. Силину за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

- Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, **41**, 1527 (1962).
- Р. Рамазашвили, А. А. Рухадзе, ЖТФ, **32**, 644 (1962).
- Л. М. Коврижных, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ЖЭТФ, **44**, 1953 (1963).

Физический институт им П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
5 января 1963 г

CYCLOTRON OSCILLATIONS OF NONUNIFORM LOW DENSITY PLASMA

A. A. Rukhadze

Longitudinal oscillations of slightly nonuniform plasma have been investigated at the frequencies equal to multiple cyclotron electrons and ions frequencies $\omega \sim n\omega_{B_e}$. It is shown that in plasma with nonuniform temperature and density the ion cyclotron oscillations with the wavelength less than ion gyroradius may be unstable and the increment is calculated. But the electron cyclotron oscillations of nonuniform plasma are stable in the considered conditions. Ion cyclotron oscillations instability is considerably connected with ions temperature nonuniformity. Therefore, such an instability must lead to the rapid increase of the thermal conductivity and to ions temperature leveling in the plasma.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МАГНИТОЗВУКОВЫХ ВОЛН

Ю. Ф. Филиппов

Рассмотрено распространение магнитозвуковых волн конечной амплитуды в неограниченной плазме. Показано, что наличие нелинейных эффектов приводит к появлению гармоник с комбинационными частотами. Найдена зависимость их амплитуд от амплитуд и частот первичных волн, параметров плазмы и напряженности внешнего магнитного поля.

Магнитозвуковые волны малой амплитуды описываются линеаризованной системой уравнений магнитной гидродинамики; поэтому при распространении в плазме они не влияют друг на друга [1]. Представляет интерес рассмотреть распространение в плазме одновременно нескольких типов волн конечной амплитуды. Наличие нелинейных эффектов должно, очевидно, привести к взаимодействию между ними, в частности, к возникновению гармоник с комбинационными частотами.

Предположим, что в неограниченной плазме распространяются две магнитозвуковые и одна альфвеновская волны конечной амплитуды соответственно с частотами и фазовыми скоростями $\omega_1, u_1; \omega_2, u_2; \omega_3, u_a$, где $u_a = H_{0x}/\sqrt{4\pi\rho_0}$ — альфвеновская скорость, u_1 и u_2 — фазовые скорости магнитозвуковых волн. Ниже будут рассмотрены как случай $u_1 \neq u_2$, так и $u_1 = u_2$ при $\omega_1 \neq \omega_2$ (распространяются две ускоренные либо замедленные магнитозвуковые волны разной частоты).

Поведение этих волн описывается нелинейной системой уравнений магнитной гидродинамики. Ниже мы рассмотрим влияние малых нелинейных эффектов на распространение волн. Для упрощения выражений предположим, что эффектами диссипации можно пренебречь и во втором разложении по малому параметру, характеризующему влияние нелинейных эффектов. Выберем систему координат так, чтобы ось x совпала с направлением распространения волн, а вектор напряженности внешнего магнитного поля H_0 лежал в плоскости xOy . При этих предположениях решение исходной системы уравнений магнитной гидродинамики можно искать в виде разложения по параметру ϵ , характеризующему малость нелинейных эффектов.

Ниже предполагается также, что плазма неподвижна ($v_0 = 0$), компоненты скорости малы ($v = \epsilon v'$), а давление может быть представлено в виде разложения в ряд по плотности:

$$p = p_0 + \epsilon u_0^2 \rho' + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial u_0^2}{\partial \rho} \rho'^2. \quad (1)$$

Используя разложение (1), можно показать, что исходная система уравнений с точностью до ϵ^2 приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_x}{\partial t} + \frac{u_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}'_y}{\partial x} &= -\epsilon \left\{ \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{\partial v'_x}{\partial t} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{\partial u_0^2}{\partial \rho} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\rho_0} \left(\tilde{H}'_y \frac{\partial \tilde{H}'_y}{\partial x} + \tilde{H}'_z \frac{\partial \tilde{H}'_z}{\partial x} \right) \right\}; \end{aligned} \quad 20$$

$$\frac{\partial v'_y}{\partial t} - \frac{H_{0x}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}'_y}{\partial x} = -\varepsilon \left\{ \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{\partial v'_y}{\partial t} + v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial x} \right\}; \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'_x}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \rho' v'_x; \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}'_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H_{0y} v'_x - H_{0x} v'_y) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (v'_x \tilde{H}'_y); \quad (2b)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{H_{0x}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}'_z}{\partial x} = -\varepsilon \left(v'_x \frac{\partial v'_z}{\partial x} + \frac{\rho'}{\rho_0} \frac{\partial v'_z}{\partial t} \right); \quad (2c)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}'_z}{\partial t} + H_{0x} \frac{\partial v'_z}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} v'_x \tilde{H}'_z, \quad (2d)$$

где $u_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ — скорость звука, ρ_0 , H_0 , p_0 — равновесные значения плотности, напряженности внешнего магнитного поля и давления.

В линейном приближении эта система разбивается на две независимые группы: первая из них ($v'_z = \tilde{H}'_z = 0$) описывает распространение магнитозвуковых волн, вторая ($v'_x = \tilde{H}'_y = v'_y = 0$) — распространение альфвеновской волны. При учете малых нелинейных эффектов, как видно из системы (2), эти группы связаны и между ними наблюдается взаимодействие: альфвеновская волна влияет на магнитозвуковые и обратно.

Рассмотрим сначала частный случай $v'_x = 0$; система (2) при этом сводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}'_y^2}{\partial x} &= -\frac{\varepsilon}{8\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}'_z^2}{\partial x}; & \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}'_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial \tilde{H}'_y}{\partial t} - H_{0x} \frac{\partial v_y}{\partial x} &= 0; & \frac{\partial \tilde{H}'_z}{\partial t} - H_0 \frac{\partial v_z}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{H_{0x}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}'_z}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

(здесь и ниже для простоты записи штрихи опускаем). Если в начальный момент распространялась одна альфвеновская волна большой амплитуды:

$$\tilde{H}_z = h_0 \cos \frac{\omega_3}{u_a} (x - u_a t), \quad (4)$$

то нелинейные эффекты приводят к тому, что возникает еще одна волна Альфвена удвоенной частоты [2]:

$$v_y = \frac{\epsilon h_0^2}{H_{0y} \sqrt{4\pi\rho_0}} \cos \left[2 \frac{\omega_3}{u_a} (x - u_a t) \right]; \quad (4a)$$

$$\tilde{H}_y = \frac{\epsilon h_0^2}{H_{0y}} \cos \left[2 \frac{\omega_3}{u_a} (x - u_a t) \right].$$

Из (4) и (4а) видно, что обе эти волны распространяются без искажения фронта волны.

Рассмотрим теперь общий случай $v_x \neq 0$. Система (2) при этом сводится к двум уравнениям для v_x и \tilde{H}_z :

$$\frac{\partial^4 v_x}{\partial t^4} - (u_0^2 + u_a^2 + u_a'^2) \frac{\partial^4 v_x}{\partial t^2 \partial x^2} + u_0^2 u_a^2 \frac{\partial^4 v_x}{\partial x^4} = -\epsilon \varphi_1; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_z}{\partial t^2} - u_a^2 \frac{\partial^2 \tilde{H}_z}{\partial x^2} = -\epsilon \varphi_2, \quad (6)$$

где

$$u_a'^2 = H_{0y}^2 / 4\pi\rho_0;$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -\frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} v_x \tilde{H}_y + H_{0y} \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v_y}{\partial t} \right) \right\} + \\ & + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - u_a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left\{ \frac{u_0^2}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho v_x - \frac{\partial}{\partial t} \left[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{2\rho_0} \left(\frac{\partial u_0^2}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho^2}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{8\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}_y^2}{\partial x} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} (v_x \tilde{H}_z) + \frac{H_{0x}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v_z}{\partial t} \right); \quad (8)$$

φ_1 и φ_2 описывают в нашем случае влияние нелинейных эффектов на распространение волн. В первом приближении, когда амплитуда волн мала (нелинейные члены отсутствуют), решение системы (5) и (6) может быть представлено в виде

$$v_x = v_{01} \cos \left(\frac{\omega_1}{u_1} x - \omega_1 t \right) + v_{02} \cos \left(\frac{\omega_2}{u_2} x - \omega_2 t \right); \quad (9)$$

$$\tilde{H}_z = h_0 \cos \left(\frac{\omega_3}{u_a} x - \omega_3 t \right),$$

где u_1 и u_2 — фазовые скорости магнитозвуковых волн:

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} \{ \sqrt{(u_0 + u_a)^2 + u_a'^2} \pm \sqrt{(u_0 - u_a)^2 + u_a'^2} \} \quad (10)$$

(v_{01} и v_{02} — амплитуды магнитозвуковых волн, h_0 — амплитуда волны Альфвена).

Легко убедиться в том, что решение системы (5) и (6) обычным разложением по малому параметру ϵ приводит к появлению секулярных решений, линейно растущих с x и t . Поэтому найденное таким способом решение применимо только при малых x и t . С такой же трудностью сталкиваемся мы при решении обыкновен-

ных уравнений обычным методом разложения по малому параметру. Основная идея метода Боголюбова [3] при нахождении корректных решений последних заключается в таком выборе разложения, при котором секулярные слагаемые, не имеющие физического смысла, не появляются.

При исследовании распространения магнитозвуковой волны конечной амплитуды в работе [4] был указан способ решения уравнения (5), при котором отсутствуют секулярные решения. Обобщая этот способ на случай распространения в плазме одновременно нескольких волн, будем искать решение (5) и (6) в виде разложений

$$v_x = \alpha \cos \psi_1 + \beta \cos \psi_2 + \varepsilon V(\alpha, \beta, \gamma, \psi_1 \pm \psi_2, \psi_1 \pm \psi_3, \psi_2 \pm \psi_3); \quad (11)$$

$$\tilde{H}_z = \gamma \cos \psi_3 + \varepsilon W(\alpha, \beta, \gamma, \psi_1 \pm \psi_2, \psi_1 \pm \psi_3, \psi_2 \pm \psi_3),$$

где α , β и γ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0; \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \varepsilon A_\alpha; \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \varepsilon A_\beta; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \varepsilon A_\gamma, \end{aligned} \quad (12)$$

а функции ψ_i определяются из соотношений

$$a) \quad \psi_i = k_i x \left\{ 1 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} [Z_{ni} \cos(n\psi_i) + Y_{ni} \sin(n\psi_i)] \right\} - \omega_i t \quad (13)$$

—для решений, периодических по времени t ,

$$b) \quad \psi_i = k_i x - \omega_i t \left\{ 1 + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} [Z'_{ni} \cos(n\psi_i) + Y'_{ni} \sin(n\psi_i)] \right\} \quad (14)$$

—для решений, периодических по пространственной координате x^* . При этом мы предположим, что A_α , A_β , A_γ , Z_{ni} , Z'_{ni} , Y_{ni} , Y'_{ni} в соотношениях (11)–(14) зависят от амплитуд α , β , γ , но не от фаз ψ_i , а V и W являются периодическими функциями от $\psi_i \pm \psi_j$ ($i, j = 1, 2, 3$). Разлагая последние в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{nlj} A_{nlj} \cos n(\psi_i + \psi_j) + C_{nlj} \sin n(\psi_i + \psi_j) + \\ &\quad + B_{nlj} \cos n(\psi_i - \psi_j) + D_{nlj} \sin n(\psi_i - \psi_j); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} W &= \sum_{nlj} L_{nlj} \cos n(\psi_i + \psi_j) + P_{nlj} \cos n(\psi_i - \psi_j) + \\ &\quad + H_{nlj} \sin n(\psi_i - \psi_j) + R_{nlj} \sin n(\psi_i + \psi_j) \end{aligned} \quad (16)$$

и подставляя разложения (11)–(16) в уравнения (5), (6), получаем полную систему уравнений для определения

$$k_i, A_\alpha, A_\beta, \dots, R_{nlj}, H_{nlj}.$$

* Выше мы предположили, что в плоскости $x = 0$ находится гармонический (решение типа «а») либо ангармонический (решение типа «б») источник. Так как при $x = 0$ амплитуда волн не может нарастать, то естественно положить $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0$.

Первое приближение, в котором влиянием нелинейных эффектов на распространение волн пренебрегается, дает соотношения между ω_l и k_l , совпадающие с соответствующими дисперсионными уравнениями для магнитозвуковых волн [1].

В следующем приближении получаем*:

$$v_x = v_{01} \cos \psi_1 + v_{02} \cos \psi_2 + \varepsilon A_+ \cos (\psi_1 + \psi_2) + \varepsilon A_- \cos (\psi_1 - \psi_2); \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_z = h_0 \cos \psi_3 + \varepsilon B_1 \cos (\psi_1 + \psi_2) + \varepsilon D_1 \cos (\psi_1 - \psi_2) + \\ + \varepsilon B_2 \cos (\psi_2 + \psi_3) + \varepsilon D_2 \cos (\psi_2 - \psi_3), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\pm} = \frac{v_{01} v_{02} (\omega_1 u_2 \pm \omega_2 u_1)^2}{2u_0^2 u_a^2 \Delta_{\pm}} \left\{ \left[\left(\frac{(\omega_1 \pm \omega_2) u_0 u_a}{\omega_1 u_2 \pm \omega_2 u_1} \right)^2 - u_a^2 \right] \left\{ \left[\frac{\rho_0}{u_0 u_a} \frac{\partial u_0^2}{\partial \rho} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{u_0 u_a}{u_a'^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{u_1^2} \right) \left(1 - \frac{u_0^2}{u_2^2} \right) \right] \frac{(\omega_1 \pm \omega_2)}{u_0 u_a} (\omega_1 u_2 \pm \omega_2 u_1) + \right. \right. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \left. \left. \left. + \frac{u_1 + u_2}{u_0 u_a^3} (\omega_1 u_2 \pm \omega_2 u_1)^2 \right\} + (u_1 + u_2) (\omega_1 \pm \omega_2)^2 \left(1 - \frac{u_0}{u_a} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{u_a}{u_0} (\omega_1 \pm \omega_2) (u_2 - u_1) \left[\omega_1 \left(1 - \frac{u_0^2}{u_1^2} \right) \mp \omega_2 \left(1 - \frac{u_0^2}{u_2^2} \right) \right] \right] \right); \right. \end{aligned}$$

$$\Delta_{\pm} = (\omega_1 \pm \omega_2)^4 - 2\omega_1^2 \omega_2^2 + \frac{u_0^2 + u_a^2 + u_a'^2}{u_0^2 u_a^2} [(\omega_1 \pm \omega_2)^2 (\omega_1 u_2 \pm \omega_2 u_1)^2 - 2\omega_1^2 \omega_2^2 u_0 u_a] + \frac{1}{u_0^2 u_a^2} [(\omega_1 u_2 \pm \omega_2 u_1)^4 - 2\omega_1^2 \omega_2^2 u_0^2 u_a^2]; \quad (20)$$

$$B_l = \frac{h_0 v_{0l}}{2(u_i - u_a)} \left(1 + \frac{\omega_3 u_i}{\omega_i u_a} \right) \frac{2\omega_3 + \omega_l - \omega_3 u_a/u_i}{2\omega_3 + \omega_l + \omega_i u_a/u_i}; \quad (21)$$

$$D_l = \frac{h_0 v_{0l}}{2(u_i - u_a)} \left(1 - \frac{\omega_3 u_i}{\omega_i u_a} \right) \frac{2\omega_3 + \omega_l - \omega_3 u_a/u_i}{2\omega_3 - \omega_l - \omega_i u_a/u_i}; \quad (22)$$

ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 находятся из уравнений

$$a) \quad \psi_l = \frac{\omega_l x}{u_l (1 + \varepsilon q_l \cos \psi_l)} - \omega_l t, \quad \psi_3 = \frac{\omega_3}{u_a} (x - u_a t) \quad (23)$$

—для решений, периодических по времени t ,

$$b) \quad \psi_l = \frac{\omega_l x}{u_l} - \omega_l t [1 + \varepsilon q_l \cos \psi_l] \quad (24)$$

—для решений, периодических по пространственной координате x . Здесь

$$\begin{aligned} q_l = \frac{v_{0l} u_i^3}{u_i^2 (u_0^2 + u_a^2 + u_a'^2) - 2u_0^2 u_a^2} \left\{ \left(1 - \frac{u_a^2}{u_i^2} \right) \left[\frac{u_i^2}{u_a^2} \left(1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\rho_0}{2u_0^2} \frac{\partial u_0^2}{\partial \rho} \right) + \frac{u_i^2}{2u_a'^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{u_i^2} \right)^2 \right] \left. \left. \left. + \left(1 - \frac{u_0^2}{u_i^2} \right) \right\} \right. \right. \end{aligned} \quad (25)$$

* В первом приближении коэффициенты A_α , A_β , A_γ обращаются в нуль. Изменение амплитуд гармоник происходит только за счет искажения фронта волн, учтываемого функциями ψ_l .

Выражения (17)–(25) и являются решениями поставленной задачи. Решение (17)–(18) может быть обобщено и на случай распространения в плазме большего числа волн.

Влияние нелинейных эффектов приводит к тому, что уже в первом приближении разложения по ϵ магнитозвуковые волны влияют на альфеновскую: появляются гармоники с частотами $\omega_1 \pm \omega_3$, $\omega_2 \pm \omega_3$. Амплитуды этих гармоник B_1 , B_2 , D_1 , D_2 определяются выражениями (21)–(22), дающими их явную зависимость от параметров ω_1 , ω_2 , ω_3 , ρ_0 , v_{01} , v_{02} , h_0 , H_{0x} , H_{0y} . Известно, что в отсутствие магнитозвуковых волн альфеновская волна распространяется без искажения фронта волны. Взаимодействие же этих волн, как видно из (18), приводит в следующих приближениях к искажению фронта альфеновской волны.

Выражения (17), (19), (20), (23)–(25) описывают распространение магнитозвуковых волн и взаимодействие их между собой, в результате чего появляются гармоники с частотами $\omega_1 \pm \omega_2$, $2\omega_1$, $2\omega_2$. В общем случае выражения, описывающие распространение гармоник, имеют громоздкий вид. Ниже ограничимся исследованием решений, периодических по времени, для больших магнитных полей, когда $H_0^2 \gg 4\pi\rho_0 u_0^2$. Для простоты предположим также, что скорость звука не зависит от плотности ($\partial u_0^2 / \partial \rho = 0$). Распространение в плазме только одной волны подробно исследовано в работах [4, 5], поэтому на этом случае мы останавливаться не будем*.

1) Рассмотрим распространение двух ускоренных магнитозвуковых волн с одинаковыми фазовыми скоростями, но с разными частотами:

$$u_1 = u_2 \equiv u_+ \simeq \sqrt{u_a^2 + u_a'^2}, \quad \omega_1 \neq \omega_2. \quad (26)$$

Если частота одной из волн велика по сравнению с частотой другой (например, $\omega_1 \gg \omega_2$), то амплитуды гармоник, возникшие в результате взаимодействия волн, равны

$$A_+ \simeq A_- \simeq \frac{v_{01}v_{02}}{4u_0u_a} \sqrt{u_a^2 + u_a'^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{u_a^2}{u_a'^2} \frac{u_0u_a}{\sqrt{u_a'^2 + u_a^2}} \right]. \quad (27)$$

Из (27) замечаем, что при распространении двух ускоренных магнитозвуковых волн с одинаковыми фазовыми скоростями (26), но с сильно отличающимися частотами, в результате взаимодействия возникает гармоника, амплитуда которой не зависит от частот первичных волн и прямо пропорциональна произведению амплитуд последних.

2) Распространяются две замедленные магнитозвуковые волны с фазовыми скоростями $u_1 = u_2 \equiv u_- \simeq u_0u_a / \sqrt{u_a^2 + u_a'^2}$ и сильно отличающимися частотами: $\omega_1 \gg \omega_2$. В этом случае

$$A_+ \simeq A_- \simeq \frac{v_{01}v_{02}u_0u_a \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_a'^2}{u_a^2 + u_a'^2} \right) \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \frac{u_a^2 + u_a'^2}{u_0u_a} \right)^{-1}}{(u_a^2 + u_a'^2)^{3/2}}. \quad (28)$$

В отличие от предыдущего случая амплитуда этой гармоники зависит от частот первичных волн.

* Искажения фронта волн приводят к появлению разрывов. Очевидно, полученные решения применимы лишь в области, где разрывы отсутствуют.

3) Распространяются две магнитозвуковые волны с разными фазовыми скоростями $u_1 \equiv u_+$, $u_2 \equiv u_-$ и с разными частотами $\omega_1 \neq \omega_2$. Тогда

а) при $\omega_1 \gg \omega_2$

$$A_{\pm} \simeq -\frac{v_{01}v_{02}u_a}{2u_0\sqrt{u_a^2 + u_a'^2}} \left[1 \pm \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{u_a^2 + u_a'^2}{u_0u_a} \right]^2 \left(1 - \frac{\omega_2 u_a'^2}{\omega_1 u_a^2} \right) \left[1 + \left(1 \pm \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{u_a^2 + u_a'^2}{u_0u_a} \right)^2 \right]^{-1}; \quad (29)$$

б) при $\omega_2 \ll \omega_1$

$$A_+ \simeq A_- \simeq -\frac{v_{01}v_{02}}{2\sqrt{u_a^2 + u_a'^2}} \frac{u_a}{u_0} \left[1 + 2\frac{u_a'^2}{u_a^2} + \frac{u_0u_a}{u_a'^2} \right]. \quad (30)$$

Выражения для плотности ρ , напряженности магнитного поля \tilde{H}_y и поперечных компонент скорости можно найти из исходной системы уравнений (2), воспользовавшись полученными выше решениями для v_x и \tilde{H}_z . Ниже ограничимся рассмотрением случая $\omega_1 \neq \omega_2$ и $\omega_1 u_2 \neq \omega_2 u_1$. Опуская громоздкие промежуточные выкладки, приведем конечные результаты:

$$\rho = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{1}{u_i} \left(1 - \varepsilon \frac{q_i v_{xi}}{2v_0} \right) v_{xi} + \frac{\varepsilon v_{0i}^2}{2u_i} \cos(2\psi_i) + \varepsilon B_i \cos \tilde{\varphi}_i \right\}; \quad (31)$$

$$\frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} \tilde{H}_y = -\frac{u_0^2}{\rho_0} \rho - \sum_{i=1}^2 \left\{ u_i v_{xi} \left(1 + \varepsilon \frac{q_i v_{xi}}{2v_{0i}} \right) + \frac{\varepsilon v_{0i}^2}{4} \left[\frac{\rho_0}{u_i^2} \frac{\partial u_0^2}{\partial \rho} + \right. \right. \quad (32)$$

$$\left. \left. + \frac{u_i^2}{u_a'^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{u_i^2} \right) \right] \cos(2\psi_i) + \varepsilon C_i^0 \cos \tilde{\varphi}_i \right\} - \varepsilon \frac{h_0^2}{16\pi\rho_0} \cos(2\psi_3);$$

$$\frac{H_{0x}}{u_a} v_z = h_0 \cos \psi_3 + \sum_{+, -} \varepsilon B_{\pm} \frac{\omega_1 \pm \omega_3}{\frac{\omega_1}{u_1} \pm \frac{\omega_3}{u_a}} \cos(\psi_1 \pm \psi_3) + \varepsilon D_{\pm} \frac{\omega_2 \pm \omega_3}{\frac{\omega_2}{u_2} \pm \frac{\omega_3}{u_a}} \cos(\psi_2 \pm \psi_3); \quad (33)$$

$$v_y = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{u_a}{u_a'} \left(1 - \frac{u_0^2}{u_i^2} \right) v_{xi} - \varepsilon \frac{u_a v_{0i}^2}{u_a' u_i} \left[\frac{u_0^2}{u_i^2} + \frac{1}{4} \frac{\rho_0}{u_i^2} \frac{\partial u_0^2}{\partial \rho} + \right. \right. \quad (34)$$

$$\left. \left. + \frac{u_i^2}{4u_a^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{u_i^2} \right) \right] \cos(2\psi_i) - \varepsilon D_i^0 \cos \tilde{\varphi}_i \right\} + \varepsilon \frac{h_0^2}{16\pi\rho_0} \cos(2\psi_3),$$

где

$$\tilde{\varphi}_1 = \psi_1 + \psi_2; \quad \tilde{\varphi}_2 = \psi_1 - \psi_2; \quad v_{xi} = v_{0i} \cos \psi_i;$$

$$B_{1,2} \equiv B_{\pm} = \frac{1}{u_0 u_a} \frac{\omega_1 u_2 \pm \omega_2 u_1}{\omega_1 \pm \omega_2} \left[A_{\pm} + \frac{v_{01} v_{02} (u_1 + u_2)}{2u_0 u_a} \right];$$

$$C_{1,2}^0 \equiv C_{\pm} = \frac{u_0 u_a}{\omega_1 u_2 \pm \omega_2 u_1} \left\{ A_{\pm} (\omega_1 \pm \omega_2) + \frac{v_{01} v_{02}}{2} \left[\frac{(\omega_1 \pm \omega_2)}{u_0 u_a} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times (u_1 - u_2) - (\omega_1 u_2 \pm \omega_2 u_1) \left(\frac{\rho_0}{u_0^2 u_a^2} \frac{\partial u_0^2}{\partial \rho} + \frac{1}{u_a'^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{u_1^2} \right) \left(1 - \frac{u_0^2}{u_a'^2} \right) \right) \right] \right\};$$

$$D_{\pm} \equiv D_{1,2} = -\frac{u_a}{2u_a(\omega_1 \pm \omega_2)} \left\{ 2(\omega_1 \pm \omega_2) A_{\pm} - \left[2B_{\pm} u_0^2 + v_{01}v_{02} \left(1 + \frac{\rho_0}{u_0 u_a} \frac{\partial u_0^2}{\partial \rho} + \frac{u_0 u_a}{u_a'^2} \left(1 - \frac{u_0^2}{u_1^2} \right) \left(1 - \frac{u_0^2}{u_2^2} \right) + \left(1 - \frac{u_0^2}{u_1^2} \right) - \frac{u_0}{u_a} \right) \right] \left(\frac{\omega_1}{u_1} + \frac{\omega_2}{u_2} \right) \right\}.$$

При рассмотрении решений для ρ , v_x , H_y , H_z , v_z замечаем, что не только магнитозвуковые волны влияют на альфеновские, но наблюдается и обратное влияние. Последнее сказывается только на v_y и \tilde{H}_y компонентах магнитозвуковых волн. В выражениях для них появляется слагаемое, описывающее гармонику удвоенной частоты $2\omega_3$.

4) Рассмотрим теперь частный случай, когда в данном направлении неограниченной плазмы распространяются с одинаковыми частотами одна из магнитозвуковых волн и альфеновская ($\omega_1 = \omega_3 \equiv \omega$). Для определенности, как и выше, ограничимся исследованием решений, периодических по времени. Распространение этих волн при этом описывается выражениями

$$v_x = v_{0x} \cos \psi;$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_z &= h_0 \cos \psi_3 + \epsilon F_1 \cos \left[\frac{\omega x}{u_a} \left(1 + \frac{u_a}{u} \right) - 2\omega t \right] + \\ &+ \epsilon \frac{h_0 v_0}{2u_a} \cos \left[\left(1 - \frac{u_a}{u} \right) \frac{\omega x}{u_a} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

где u —фазовая скорость распространяющейся магнитозвуковой волны, ψ , ψ_3 и q определяются из (23) и (25), а

$$F_1 = \frac{h_0 v_0 (3u - u_a) (u_a + u)}{2u_a (3u + u_a) (u - u_a)}. \quad (36)$$

Первое слагаемое в (35) описывает распространение альфеновской волны, второе—распространение гармоники удвоенной частоты, появившейся в результате взаимодействия магнитозвуковой волны с альфеновской. Фазовая скорость этой гармоники $u_{\phi} = 2u u_a / (u + u_a)^{-1}$. При $u \rightarrow u_a$ магнитозвуковая волна переходит в альфеновскую ($u = u_a$, $v_x = 0$), а амплитуда этой гармоники обращается в нуль.

В предельном случае больших магнитных полей ($H_0^2 \gg 4\pi\rho_0 u_0^2$) при $H_{0x} = H_{0y} = H_0$ выражения для амплитуды и фазовой скорости этой гармоники принимают более простой вид:

$$F_1(u = u_+) = \frac{2\sqrt{\pi}}{7} (1 + \sqrt{8}) \frac{h_0 v_0}{H_0} \sqrt{\rho_0};$$

$$F_1(u = u_-) = \frac{9}{2} \sqrt{\pi} \frac{h_0 v_0}{H_0} \sqrt{\rho_0},$$

т. е. амплитуда гармоники 2ω при больших внешних магнитных полях в обоих случаях ($u = u_+$ и $u = u_-$) прямо пропорциональна произведению амплитуд первичных волн $h_0 v_0$, корню квадратному из плотности плазмы и обратно пропорциональна напряженности внешнего магнитного поля,

При взаимодействии между альфеновской и ускоренной магнитозвуковой волнами ($u = u_+$) фазовая скорость этой гармоники

$$u_\phi(u = u_+) \simeq 0,2 \frac{H_0}{\sqrt{\rho_0}}.$$

При взаимодействии между альфеновской и замедленной магнитозвуковой волнами u_- фазовая скорость гармоники $u_\phi \simeq 0,7 u_0$ прямо пропорциональна скорости звука и слабо зависит от напряженности внешнего магнитного поля и плотности плазмы.

Гармоника, описываемая третьим слагаемым в (35), в первом приближении не зависит от времени. Зависимость от времени появляется лишь в следующих приближениях разложения.

Исследования, аналогичные проведенным выше, могут быть проведены также при рассмотрении волн, распространяющихся в разреженной плазме в приближении Чу-Гольдбергера-Лоу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1957.
2. Л. Д. Пихачахчи, Укр. физ. ж., 6, 308 (1961).
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
4. Ю. Ф. Филиппов, Укр. физ. ж., 6, 248 (1961).
5. С. И. Солуянов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 41, 534 (1961).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
25 января 1963 г.

INTERACTION OF MAGNETO-SONIC WAVES

Yu. F. Filippov

The propagation of magneto-sonic waves with a finite amplitude has been considered in an infinite plasma. It is shown that non-linear effects cause the appearance of harmonics with combination frequencies. The dependence of their amplitudes on amplitudes and frequencies of initial waves has been found as well as on plasma parameters and the intensity of an external magnetic field.

— — — — —

О НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ В СИСТЕМЕ ПЛАЗМА—ПУЧОК ОГРАНИЧЕННОГО РАДИУСА

B. Г. Маханьков

Рассмотрено взаимодействие ограниченного по радиусу пучка заряженных частиц с плазмой в гидродинамическом приближении без учета соударений. Исследован спектр колебаний для различных волновых векторов и получены инкременты нарастания этих колебаний.

1. Интересующая нас система состоит из квазинейтральной плазмы плотности n_2 , через которую движется с релятивистской скоростью v_0 скомпенсированный пучок заряженных частиц плотности n_1 . Вся система представляет собой шнур радиуса r_0 с постоянной плотностью. Таким образом, функция распределения в стационарном состоянии будет иметь вид

$$f = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \delta(v - v_{\alpha}) h(r), \quad (1.1)$$

где суммирование производится по всем сортам частиц в системе, а

$$h(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r \leq r_0 \\ 0 & \text{при } r > r_0 \end{cases}; \quad v_{\alpha} = \begin{cases} v_{1e, i} = v_0 = (0, 0, v_0) \\ v_{2e, i} = 0 \end{cases}.$$

Используя кинетическое уравнение в линейном приближении, получим аналогично [1] уравнение поля в области $r \leq r_0$ (рассматриваются возмущения типа $E(r, z, t) = E(r, k, \omega, n) \exp\{i(kz + n\vartheta - \omega t)\}$):

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_z}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} E_z + \frac{\lambda'^2}{r_0^2} E_z = 0, \\ x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x^2 - n^2} \frac{d\Phi}{dx} \right) + \Phi = 0, \quad (1.2)$$

$$E_r = \frac{in}{x^2 - n^2} \frac{d\Phi}{dx} + \frac{i(k - \Omega_1^2 b/c^2)}{\varepsilon\omega^2/c^2 - k^2} \frac{1}{x^2 - n^2} \frac{dE_z}{dr},$$

где

$$\frac{\lambda'^2}{r_0^2} = \frac{(\omega^2/c^2) \eta (\varepsilon\omega^2/c^2 - k^2)}{(1 + \Omega_1^2 b^2/c^2) (\varepsilon\omega^2/c^2 - k^2) + (k - \Omega_1^2 b/c^2)^2},$$

$$x = r \sqrt{\varepsilon\omega^2/c^2 - k^2}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\omega^2}, \quad \gamma^2 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1},$$

$$b = \frac{v_0}{\omega - kv_0}, \quad \Omega_1^2 = 4\pi n_1 e^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right), \quad \Omega_2^2 = 4\pi n_2 e^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right), \quad (1.3)$$

$$\Phi = xE_{\vartheta} + \frac{(k - \Omega_1^2 b/c^2) n}{\sqrt{\varepsilon\omega^2/c^2 - k^2}} E_z, \quad \eta = 1 - \frac{\Omega_2^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2 (\omega - kv_0)^2},$$

e , m —заряд и масса электрона, M —масса иона.

Уравнения поля в области $r > r_0$ получаются из (1.2) при $\epsilon = \eta = 1$, $b = 0$. В дальнейшем величины, относящиеся к области $r \leq r_0$, снабжаются индексом 1, а к области $r > r_0$ — индексом 2. Решения (1.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_z^{(1)} &= A_1 J_n \left(\lambda' \frac{r}{r_0} \right), \quad E_z^{(2)} = A_2 H_n \left(\mu' \frac{r}{r_0} \right), \\ \Phi^{(1)} &= B_1 \Phi_1 \left(\lambda' \frac{r}{r_0} \right), \quad \Phi^{(2)} = B_2 \Phi_2 \left(\mu' \frac{r}{r_0} \right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\mu'^2 = (\omega^2/c^2 - k^2) r_0^2$, J_n и H_n — функции Бесселя и Ганкеля, Φ_1 и Φ_2 — линейно независимые решения второго уравнения (1.2), причем Φ_1 ограничено в нуле, а Φ_2 дает на бесконечности расходящуюся волну. Граничные условия при $r = r_0$ берем в виде

$$\begin{aligned} E_z^{(1)} &= E_z^{(2)}, \quad H_z^{(1)} = H_z^{(2)}, \\ E_\phi^{(1)} &= E_\phi^{(2)}, \quad H_\phi^{(1)} = H_\phi^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь предполагается, что поверхностные заряды и токи отсутствуют, что для объемных волн является вполне оправданным.

Из уравнений Максвелла следует:

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{ic}{\omega} \left[\frac{dE_z}{dr} - ikE_r \right], \\ H_z &= -\frac{ic}{\omega} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rE_\phi - \frac{in}{r} E_r \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Далее рассматриваются азимутальные волны при $k = 0$ и бегущие, волны при $n = 0$. Первый случай подробно исследован в работе [1], поэтому останавливаться на нем мы здесь не будем, приведя лишь решение соответствующего дисперсионного уравнения в области частот $|\omega|^2 \ll \Omega_{1,2}^2$ (в обратном пределе дисперсионное уравнение решений не имеет):

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\Omega_2^2 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} \right) + \sqrt{\left(\Omega_2^2 + \frac{\Omega_1^2}{\gamma^2} \right)^2 + 4\Omega_1^2\Omega_2^2 \frac{v_0^2}{c^2}} \right\}. \quad (1.7)$$

При получении выражения (1.7) предполагалось, что $2v_2 = (\Omega_1^2/c^2) r_0^2 \ll 1$ и $2v_1 = (\Omega_2^2/c^2) r_0^2 \ll \gamma^2$; эти условия ограничивают число частиц на единицу длины пучка.

В нерелятивистском пределе (1.7) переходит в формулу

$$\text{Im } \omega = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} \frac{v_0}{c}. \quad (1.8)$$

2. Вернемся к случаю $n = 0$, $k \neq 0$. Тогда, как легко показать, уравнения для полей E_ϕ и E_z развязываются, и решения этих уравнений могут быть представлены в виде линейных комбинаций модифицированных функций Бесселя и функций Кельвина. Дисперсионное уравнение получим, удовлетворяя условиям (1.5):

$$\mu \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) I_0(\lambda) K_1(\mu) + \left(\varepsilon - \frac{\Omega^2}{\omega^2} b k \right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \times \\ \times \lambda K_0(\mu) I_1(\lambda) = 0; \quad (2.1)$$

здесь

$$\lambda^2 = -(\lambda')^2, \quad \mu^2 = -(\mu')^2. \quad (2.2)$$

Исследуем уравнение (2.1) в двух областях частот: $|\omega| \gg \Omega_{1,2}$ и $|\omega| \ll \Omega_{1,2}$. Первую область частот по отношению к волновому вектору можно разбить на две: а) резонансную $(\omega - v_0 k)/\omega \ll 1$ и б) область, далекую от резонанса $(\omega - v_0 k)/\omega \gg 1$.

Исследовать резонансную область будем ниже; сейчас же рассмотрим дисперсионное уравнение (2.1) в нерезонансной области. Тогда $\varepsilon_n \approx 1$, $\eta_n \approx 1$, $b_n k \approx 1$, $\lambda \approx \mu$ и уравнение (2.1) перейдет в $I_0(\lambda) K'_0(\lambda) - K_0(\lambda) I'_0(\lambda) = 0$. Последнее не может выполняться, так как левая часть этого уравнения есть вронскиан линейно-независимых функций Бесселя. Таким образом, в области $|\omega| \gg \Omega_{1,2}$; $(\omega - kv_0)/\omega \gg 1$ уравнение (2.1) решений не имеет.

В области $|\omega| \ll \Omega_{1,2}$ будем, как и ранее, предполагать, что v_1 и $v_2/\gamma^2 \ll 1$; тогда

$$\frac{\omega^2}{c^2} r_0^2 \ll 1.$$

Эту область по отношению к волновому вектору можно разбить на две: $k^2 \ll \Omega^2/c^2$ и $k^2 \gg \Omega^2/c^2$; в первой области $\mu \ll 1$, во второй $\mu \gg 1$.

Исследуем случай $\mu \ll 1$. Здесь дисперсионное уравнение примет вид

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{c^2} \right) I_0(\lambda) - \left(1 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \frac{kv_0}{\omega - kv_0} \right) \times \\ \times \left(k - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \lambda \ln \frac{\mu}{c_1} I_1(\lambda) = 0, \quad (2.3)$$

и так как $\ln(\mu/c_1)$ велик, то с логарифмической точностью (2.3) имеет вид

$$\left(1 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{c^2} - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \frac{kv_0}{\omega - kv_0} \right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) I_1(\lambda) = 0. \quad (2.4)$$

Последнее уравнение разбивается на четыре отдельные уравнения:

$$1 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \frac{kv_0}{\omega - kv_0} = 0, \quad k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\lambda = 0, \quad \lambda^2 = -\lambda_i^2,$$

причем $I_1(\lambda_i) = 0$. Первое из уравнений (2.5) является кубическим относительно ω , но детерминант его отрицателен, поэтому комплексных корней оно не имеет. Уравнения $k^2 - \omega^2/c^2 = 0$ и $k^2 - \omega^2\varepsilon/c^2 = 0$ имеют также только действительные корни. Остается рассмотреть

$$1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_1'^2}{(\omega - kv_0)^2} = 0, \quad \Omega_1' = \frac{\Omega_1}{\gamma}, \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - v_0^2/c^2} \quad (2.6)$$

и

$$-\frac{(k^2 - \omega^2 \epsilon/c^2) \omega^2 \eta/c^2}{(k - \Omega^2 b/c^2)^2 - (k^2 - \omega^2 \epsilon/c^2)(1 + \Omega^2 b^2/c^2)} = \frac{\lambda_i^2}{r_0^2}. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.6) исследовано в ряде работ (см. [2,3] и цитированную там литературу). Добавим только, что в области $\omega \sim kv_0$ и $kv_0 = \Omega_2$ решение (2.6) имеет вид

$$\omega = kv_0 + \frac{\Omega_2}{2^{4/3}} (-1 \pm i\sqrt{3}) \left(\frac{n_1}{\gamma n_2} \right)^{1/3}. \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) справедливо при $n_1 \ll n_2 \gamma$; инкремент

$$\operatorname{Im} \omega = \frac{\Omega_2 \sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{n_1}{\gamma n_2} \right)^{1/3}.$$

Легко заметить, что если $\eta \neq 0$, $k^2 - \omega^2 \epsilon/c^2 \neq 0$, и учесть неравенство $\omega^2 r_0^2/c^2 \ll 1$, то (2.7) упрощается:

$$\left(k - \frac{\Omega_1^2}{c^2} b \right)^2 - \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) \left(1 + \frac{\Omega_1^2}{c^2} b^2 \right) = 0$$

или

$$\omega^2 \left(1 - \frac{\Omega'_1{}^2}{(\omega - kv_0)^2} \right) - \Omega_2^2 \left(1 + \frac{\Omega_1^2 \beta_0^2}{(\omega - kv_0)^2} \right) = 0 \quad (2.9)$$

$$(\beta_0 = v_0/c).$$

Из самого вида уравнения нетрудно заметить, что его решения имеют мнимые части по крайней мере в трех областях частот: 1) $\omega \ll kv_0$, 2) $\omega - kv_0 \ll \Omega'$, 3) $\omega \gg kv_0$.

В первой области

$$\omega^2 = \Omega_2^2 \frac{1 + \Omega_1^2 \beta_0^2 / (kv_0)^2}{1 - \Omega'^2 / (kv_0)^2}. \quad (2.10)$$

Возбуждение имеет место при $\Omega_1 > \gamma kv_0$. Если $\Omega_1 \gg \gamma kv_0$, то (2.10) справедливо, когда $\Omega_2 \ll kc/\gamma$. В том случае, когда $\Omega'_1 = kv_0$, решение (2.9) имеет вид:

$$\omega = \Omega_2 \frac{(-1 \pm \sqrt{3})}{2^{4/3}} \left(\frac{\gamma n_1}{n_2} \right)^{1/3}. \quad (2.11)$$

Это выражение справедливо при $(n_2/n_1)^{2/3} \gamma^{1/3} \ll 1$.

Во второй области $\omega - kv_0 \ll \Omega'_1$, $\Omega_1 \beta$ и инкремент

$$\operatorname{Im} \omega = \Omega_2 \gamma \beta. \quad (2.12)$$

Полученное выражение справедливо при $\gamma \Omega_2 \ll \Omega_1$ и $kv_0 \ll \Omega'$. В третьей области, когда $\omega \gg kv_0$, получим выражение, аналогичное (1.7) (см. [4]).

Рассмотрим теперь случай $\mu \gg 1$, т. е. $kr_0 \gg 1$; при этом опять $(\Omega_{1,2}^2/c^2) r_0^2 \ll 1$. Здесь уравнение (2.1) примет вид

$$I_0(\lambda) \mu + \left(1 - \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} b k \right) \lambda I_1(\lambda) = 0 \quad (2.13)$$

или, так как $\mu \gg 1$,

$$I_0(\lambda) = 0. \quad (2.14)$$

Это уравнение при релятивистской v_0 , $\beta_0 \sim 1$ комплексных решений не имеет. Таким образом, в этой области частот и волновых векторов нарастающих колебаний нет. В области $\omega \gg \Omega_{1,2}$ и $(\omega - kv_0)/\omega \ll 1$, как нетрудно показать, также нет нарастающих колебаний, что вполне естественно, так как в этой области частот $\varepsilon = 1$, и волны распространяются как в пустоте.

В проведенном рассмотрении существенным образом учитывалось наличие пространственной дисперсии в перпендикулярном к пучку направлении. В отсутствие таковой (для этого нужно формально положить $b = 0$) получим дисперсионное уравнение, аналогичное исследованному в работе [5]. В рассмотренной области $v \ll 1$ и $\beta_0 \sim 1$ оно комплексных решений не имеет.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. И. Ярковой, Препринт ОИЯИ Р-1053 (1962).
2. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
3. В. Г. Махоньев, Препринт ОИЯИ Р-910 (1962).
4. В. Г. Махоньев и А. А. Рухадзе, Препринт ОИЯИ Р-1005 (1962); Ядерный синтез (в печати).
5. Г. И. Будкер, Атомная энергия, 5, 9 (1956).

Объединенный институт ядерных
исследований

Поступила в редакцию
12 января 1963 г.

ON INSTABILITIES IN A RADIALLY BOUNDED PLASMA—BEAM SYSTEM

V. G. Makhan'kov

Interaction of charged particles beam radially bounded with plasma has been considered in hydrodynamic collisionless approximation. An oscillation spectrum for various wave vectors has been investigated and the increments of oscillation have been obtained.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В НЕОДНОРОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

А. С. Омелаенко, П. В. Блиох

Рассматривается параметрический резонанс в многоволновой системе. Показано, что наряду с обычным параметрическим резонансом, при котором период изменения параметров среды L должен быть вдвое меньше длины волны λ , может иметь место резонанс на биениях между волнами λ_1 и λ_2 . Резонанс на биениях возникает при выполнении равенства $L = \lambda_1\lambda_2 / |\lambda_1 - \lambda_2|^{-1}$.

1. Как известно, при распространении волны через периодически неоднородную среду может иметь место параметрический резонанс. Резонансное соотношение для основной (первой) зоны неустойчивости имеет вид

$$L = \lambda/2, \quad (1)$$

где L —период изменения параметров среды вдоль направления распространения, λ —длина волны, соответствующая среднему значению параметров. В настоящей заметке мы хотели бы обратить внимание на некоторые особенности параметрического резонанса в многоволновой системе, имеющей при данной частоте колебаний определенный спектр собственных волн λ_i .

Пусть, например, в данном направлении распространяются одновременно две волны с длинами λ_i и λ_j . Если эти волны интерферируют между собой, амплитуда результирующего колебания периодически изменяется (пространственные биения). Период биений $\Lambda_{ij} = 2\lambda_i\lambda_j|\lambda_i - \lambda_j|^{-1}$, а соответствующее волновое число $K_{ij} = 2^{-1}|\lambda_i - \lambda_j|$. Как будет показано ниже, параметрический резонанс может возникнуть благодаря этой периодичности, для чего необходимо выполнить условие, аналогичное (1):

$$L = \frac{\Lambda_{ij}}{2} = \frac{\lambda_i\lambda_j}{|\lambda_i - \lambda_j|}. \quad (2)$$

Мы будем называть этот резонанс разностным параметрическим резонансом или резонансом на биениях. Так же, как и обычный параметрический резонанс, резонанс на биениях приводит либо к затуханию (зона непрохождения), либо к нарастанию (зона неустойчивости) колебаний, распространяющихся в неоднородной среде. В дальнейшем и в том и другом случаях мы будем условно говорить о „неустойчивости“ волны, подразумевая под этим наличие у дисперсионного уравнения комплексных корней.

2. Рассмотрим в качестве многоволновой системы анизотропный диэлектрик (одноосный кристалл), сквозь который под некоторым углом к оси проходит скомпенсированный электронный пучок. Выберем систему прямоугольных координат так, чтобы ось z совпадала с направлением скорости пучка v_0 , ось y расположим

в плоскости, проходящей через оптическую ось кристалла и ось z . Пучок и среда предполагаются неограниченными; все переменные величины зависят только от z и t ; параметры диэлектрика являются периодическими функциями z :

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik}^{(0)} f(z); \quad f(z) = 1 + q \cos(pz).$$

Глубина модуляции параметра q при исследовании дисперсионных соотношений будет считаться малой ($q \ll 1$).

Исходными уравнениями нашей задачи является волновое уравнение

$$\Delta E - \operatorname{grad} \operatorname{div} E + \frac{\omega^2}{c^2} D + \frac{4\pi i \omega}{c^2} j = 0 \quad (3)$$

(зависимость от t гармоническая), а также линеаризованное кинетическое уравнение, определяющее электронный ток j в пучке. Соотношение между D и E возьмем в форме

$$D_i = \epsilon_{ik}(z) E_k. \quad (4)$$

В выбранной системе координат тензор ϵ_{ik} имеет следующие отличные от нуля компоненты:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_1; \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_1 \cos^2 \alpha + \epsilon_2 \sin^2 \alpha; \\ \epsilon_{23} &= \epsilon_{32} = (\epsilon_2 - \epsilon_1) \sin \alpha \cos \alpha; \\ \epsilon_{33} &= \epsilon_1 \sin^2 \alpha + \epsilon_2 \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

где α — угол между направлением скорости пучка и оптической осью. Главное значение тензора ϵ_{ik} , соответствующее оптической оси, равно ϵ_2 ; два других главных значения совпадают друг с другом и равны ϵ_1 .

Прежде чем приступить к исследованию уравнения (3), введем некоторые упрощающие предположения. Считая частоту сигнала достаточно большой, будем пренебрегать колебаниями ионов; кроме того, предполагаем, что вдоль оси z приложено настолько сильное магнитное поле, что поперечными смещениями электронов можно пренебречь. Последнее обстоятельство позволяет считать равными нулю поперечные компоненты скорости v и тока j ; что же касается j_z , то, пользуясь кинетическим уравнением, легко получить формулу:

$$j_z = - \frac{e^2}{m} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v} E_z(z') \exp \left[i \frac{\omega}{v} (z' - z) \right] dz' dv. \quad (6)$$

Здесь $f_0(v)$ — невозмущенная функция распределения электронов пучка, $v = v_z$.

В дальнейшем в качестве $f_0(v)$ мы выберем П-образную функцию, соответствующую равномерному распределению частиц в интервале скоростей $2v_T$ вблизи некоторого среднего значения v_0 . Анализическое выражение для производной от такой функции имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = \frac{j_0}{2v_T v_0 e} \{ \delta [v - (v_0 - v_T)] - \delta [v - (v_0 + v_T)] \}, \quad (7)$$

где j_0 — невозмущенная плотность тока пучка.

Запишем уравнение (3) в проекциях на оси координат:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} E_x &= 0, \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z) &= 0, \\ \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{32} E_y + \epsilon_{33} E_z) + \frac{4\pi i}{c^2} j_z(E_z) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое уравнение содержит только компоненту E_x . Оно характеризует распространение обычной волны.

Исключая E_y из второй пары уравнений системы (8), получим уравнение, описывающее распространение необыкновенной и плазменной волн:

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{p^2 c^2} n^2 f(\zeta) \right] E_z + \frac{4\pi i}{\omega \epsilon_{33}^{(0)}} \left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{p^2 c^2} \epsilon_{22}^{(0)} \right] \frac{j_z(E_z)}{f(\zeta)} = 0, \quad (9)$$

где $n = (\epsilon_{11}^{(0)} \epsilon_{22}^{(0)} / \epsilon_{33}^{(0)})^{1/2}$ — коэффициент преломления необыкновенной волны в одноосном диэлектрике при отсутствии пучка, $f(\zeta) = 1 + q \cos \zeta$, $\zeta = p z$ — безразмерная переменная.

Если бы параметры среды ϵ_{ik} не зависели от z , полный спектр системы состоял бы из 6 волн: четырех волн, бегущих в положительном направлении оси z (обыкновенная, необыкновенная, две плазменные), и двух волн, распространяющихся в противоположном направлении (обыкновенная и необыкновенная).

Можно сразу же указать те пары волн, для которых имеет смысл рассматривать разностный параметрический резонанс. Прежде всего заметим, что не представляет интереса резонанс на биениях двух одинаковых волн, распространяющихся в противоположных направлениях: если $K_i = -K_j$, то, согласно формуле (2), $L = \lambda_i/2$. Это условие совпадает с соотношением (1), т. е. для таких волн резонанс на биениях является обычным параметрическим резонансом. Тем самым из анализа исключается первое уравнение системы (8), а из четырех волн, соответствующих уравнению (9), нужно оставить следующие пары: необыкновенная—плазменная, плазменная—плазменная.

3. Соотношение (9) с учетом формулы (6) представляет собой линейное интегро-дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Будем искать его решение в виде модулированной волны:

$$E_z = e^{i\mu\zeta} \Phi(\zeta), \quad (10)$$

где $\Phi(\zeta)$ — периодическая функция с периодом $\zeta_0 = 2\pi$, совпадающим с периодом изменения ϵ_{ik} . Разлагая $\Phi(\zeta)$ в ряд Фурье

$$\Phi(\zeta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r e^{ir\zeta}, \quad (11)$$

подставим (10) в уравнение (9) и (6). Приравнивая нуль коэффициенты при $e^{ir\zeta}$, получим систему линейных однородных уравнений относительно амплитуд гармоник C_r . Условие разрешимости этой системы, определяющее связь между ω и μ , является дисперсионным уравнением для волн в неоднородной среде.

Рассмотрим сначала дисперсионное уравнение нулевого приближения по q , а потом определим поправки с точностью до q^2 к его корням $\mu_i = f_i(\omega)$.

Дисперсионное уравнение нулевого приближения ($q=0$) имеет вид

$$\left(\mu^2 - \frac{\omega^2}{p^2 c^2} n^2\right) \left(\mu^2 - \frac{\omega}{v_0 p}\right)^2 = \frac{\Omega^2}{v_0^2 p^2 \epsilon_{33}} \left(\mu^2 - \frac{\omega^2 \epsilon_{22}}{c^2 p^2}\right) + \tau^2 \mu^2 \left(\mu^2 - \frac{\omega^2}{c^2 p^2} n^2\right), \quad (12)$$

где $\Omega = (4\pi j_0 e/v_0 m)^{1/2}$ — плазменная частота пучка, а $\tau = v_T/v_0$ характеризует температуру электронов. При $\tau=0$ соотношение (12) совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [1]*. При малых значениях плотности и температуры пучка уравнение (12) имеет следующие корни:

$$\begin{aligned} \mu_{1,2}^{(0)} &= \pm \frac{\omega}{cp} n + \Delta_{1,2}, \\ \mu_{3,4}^{(0)} &= \frac{\omega}{v_0 p} \pm \Delta, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Delta_{1,2} = \pm \Omega^2 \frac{c}{2v_0^2 \omega p} \frac{n^2 - \epsilon_{22}}{\epsilon_{33} n \left[\left(n \mp \frac{c}{v_0} \right)^2 - \tau^2 n^2 \right]}, \quad (14)$$

$$\Delta = \frac{1}{v_0 p} \left[\Omega^2 \frac{c^2 - v_0^2 \epsilon_{22}}{\epsilon_{33} (c^2 - v_0^2 n^2)} + \tau^2 \omega^2 \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Волны $\mu_{1,2}^{(0)}$ соответствуют необыкновенным волнам в кристалле, а $\mu_{3,4}^{(0)}$ — плазменным волнам в пучке. Как видно из (14) и (15), волновые числа $\mu_{1,2}$ действительны, а $\mu_{3,4}$ могут быть комплексными, если

$$\Omega^2 \frac{c^2 - v_0^2 \epsilon_{22}}{\epsilon_{33} (c^2 - v_0^2 n^2)} + \tau^2 \omega^2 < 0 \quad (16)$$

или более подробно

$$\Omega^2 \frac{c^2 - v_0^2 (\epsilon_1 \cos^2 \alpha + \epsilon_2 \sin^2 \alpha)}{c^2 (\epsilon_1 \sin^2 \alpha + \epsilon_2 \cos^2 \alpha) - v_0^2 \epsilon_1 \epsilon_2} + \frac{v_T^2}{v_0^2} \omega^2 < 0. \quad (17)$$

Условие (17) определяет ту область значений параметров задачи, в которой пучок становится пространственно неустойчивым и система может использоваться для усиления сигнала. Пользуясь формулой (15), можно исследовать угловую зависимость коэффициента усиления

$$\operatorname{Im}(\mu_{3,4}) = f(\alpha).$$

В работе [1] такое исследование проведено для холодного пучка ($v_T=0$). Из соотношений (15) и (16) видно, что с ростом температуры коэффициент усиления уменьшается, а область углов, в которой возникает неустойчивость, сужается**.

* Пользуемся случаем, чтобы исправить ошибку в формуле (2a)^[1]. Дисперсионное уравнение для обыкновенной волны (2a) справедливо только при $k \mathbf{v}_0 = 0$. Поэтому среди результатов анализа этого уравнения остаются в силе только те выводы, которые относятся к случаю $k \mathbf{v}_0 = 0$.

** Здесь оговоримся, что наличие комплексных корней дисперсионного уравнения еще не является достаточным условием для реального существования нарастающих волн (волны могут оказаться затухающими). Для выяснения этого вопроса требуется специальный анализ, который в настоящей работе не проводится (см., например, [1,4]).

4. Перейдем к рассмотрению параметрических эффектов. Пусть параметры задачи таковы, что все четыре корня (13) являются действительными числами. При этом неустойчивость пучка может возникнуть только за счет членов порядка q^2 в дисперсионном уравнении.

Следуя схеме расчета работы [2], приведем без вычислений значения поправок к корням $\mu_i^{(0)}$ для интересующих нас резонансных случаев.

а) Параметрический резонанс на биениях между необыкновенной и плазменной волнами. Условие (2) выполняется, если $\mu_1^{(0)}$ и $\mu_3^{(1)}$ связаны соотношением:

$$\mu_1^{(0)} - \mu_3^{(0)} = 1. \quad (18)$$

При этом корень $\mu_3^{(0)}$ имеет следующее уточненное значение:

$$\mu_3 = \mu_3^{(0)} + \delta, \\ \delta^2 = - \frac{q^2 c^4 p^4}{16 \omega^4 \varepsilon_{33}^2} \Delta^{-2} (\mu_3^{(0)} - \mu_2^{(0)})^{-2} \left[\frac{\omega^4}{c^4 p^4} \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\Delta^2 - \tau^2 \mu_3^{(0)2}) - \frac{\Omega^2 \omega^2}{c^2 v_0^2 p^4} \mu_3^{(0)2} \right]^2 \\ (\mu_3 - \mu_2 \gg 1, \Delta \gg 1, \mu_3 \gg 1). \quad (19)$$

Появление комплексных корней дисперсионного уравнения при выполнении условия (18) указывает на параметрическую неустойчивость пучка. Аналогичный вид имеет поправка к $\mu_1^{(0)}$.

б) Параметрический резонанс на биениях между двумя плазменными волнами. Условие такого резонанса:

$$\mu_3^{(0)} - \mu_4^{(0)} = 2\Delta = 1. \quad (20)$$

Полагая так же, как и в первом случае, $\mu_3 = \mu_3^{(0)} + \delta$, найдем величину поправки:

$$\delta^2 = - q^2 \left[\frac{v_0^2}{c^2} n^2 \left(\frac{1}{4} - \tau^2 \frac{\omega^2}{v_0^2 p^2} n^2 \right) - \frac{\Omega^2}{v_0^2 p^2 \varepsilon_{33}} \frac{1}{\varepsilon_{33}} \right]^2. \quad (21)$$

Для изотропной среды ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) выражение (21) упрощается:

$$\delta^2 = - \frac{q^2}{16} \left(1 - 4 \frac{\omega^2}{v_0^2 p^2} \frac{v_T^2}{v_0^2} \right)^2. \quad (22)$$

Параметрический резонанс на биениях между плазменными волнами исследовался ранее при рассмотрении колебаний в электронных пучках с периодически меняющимися параметрами [2, 3]. Полученное в этих работах условие резонанса, естественно, совпадает с формулой (20). Несущественное отличие в выражениях для коэффициентов усиления δ объясняется тем, что в работе [2] переменными параметрами являлись плотность ρ_0 и скорость пучка v_0 , но не диэлектрическая проницаемость ε_{ik} .

Резонанс на биениях между необыкновенной и плазменной волнами, насколько нам известно, ранее не рассматривался. Заметим, что в условие резонанса на плазменных волнах (20) частота сигнала входит только в комбинации $(\omega v_T / p v_0^2)^2$; поэтому при малой температуре пучка усилитель, использующий этот эффект, должен быть весьма широкополосным. Наоборот, условие резонанса на биениях между плазменной и электромагнитной волной (18) су-

щественно зависит от частоты. Это обстоятельство может быть использовано для создания усилителя с хорошей частотной избирательностью.

Мы рассмотрели разностный параметрический резонанс в электронном пучке, проходящем через анизотропный диэлектрик. Это явление должно иметь место и во многих других многоволновых системах, например, при прохождении пучка через волновод с какими-либо периодическими неоднородностями.

В случае очень коротких длин волн может оказаться, что условия резонанса на биениях (2) легче осуществить, чем условия обычного резонанса (1). Дело в том, что для двух близких друг к другу длин волн $|\lambda_1 - \lambda_2| \ll \lambda_1, \lambda_2$ период изменения параметров L_2 , рассчитанный по формуле (2), окажется значительно большим, чем период L_1 , полученный из (1). Поэтому обычный резонанс по сравнению с резонансом на биениях требует создания более тонкой периодической структуры. Однако окончательные выводы в пользу того или иного вида резонанса могут быть сделаны лишь после расчета соответствующих коэффициентов усиления.

ЛИТЕРАТУРА

- П. В. Блиок, Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 4, 875 (1961).
- П. В. Блиок, Радиотехника и электроника, 2, 92 (1957).
- О. Е. Н. Rydbeck, B. Agdug, L'onde Electrique, 34, 499 (1959).
- Я. Б. Файнберг, В. И. Курилко, В. Д. Шапиро, ЖТФ, 31, 633 (1961).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
15 октября 1962 г.

THE PARAMETRICAL INSTABILITY OF THE ELECTRON BEAM IN A NONUNIFORM ANISOTROPIC DIELECTRIC

A. S. Omelaenko, P. V. Bliokh

The parametrical resonance is examined in a multiwave system. It is shown that except the ordinary parametrical resonance when the period L of the medium parameters variation must be half of the wavelength λ it may as well take place the resonance connecting with the beating between waves λ_1 and λ_2 . The latter arises when $L = \lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 - \lambda_2)$.

О ВЛИЯНИИ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ АНТЕНН НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ПРИНИМАЕМОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ РАДИОВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ ТРОПОСФЕРЫ

Ю. А. Рыжов

Рассмотрен вопрос о влиянии диаграмм направленности приемной и передающей антенны на параметры принимаемого сигнала, рассеянного тропосферой. Получена общая формула, выражающая интенсивность сигнала через интеграл от произведения диаграмм направленности антенн и углового энергетического спектра рассеянного поля. В частном случае узконаправленных антенн показано, что функциональная зависимость рассеяния от параметров задачи такая же, как при рассеянии радиоволн в заданном объеме, заполненном неоднородностями.

Обычно при расчете интенсивности принимаемого рассеянного излучения рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической волны на заданном объеме, заполненном неоднородностями [1-4]. При этом в большей части работ рассматривается поле в фраунгоферовой зоне объема рассеяния. Диаграмма передающей антенны в этом случае учитывается при расчете амплитуды плоской невозмущенной волны в объеме рассеяния, а диаграмма приемной антенны — в расчете принимаемой мощности на антенну при заданном потоке мощности в месте приема. Однако, как показано в [5-7], необходимо учитывать диаграмму направленности антенны более последовательно. В работе [6] учитывается влияние диаграммы приемной антенны на интенсивность принимаемого излучения. В [7] исследовалось влияние диаграммы приемной антенны, обладающей конической диаграммой направленности, при рассеянии на данном объеме. В статье [8] была рассчитана временная функция корреляции комплексного поля с учетом диаграммы приемной и передающей антенн. Однако использованное приближение для фаз невозмущенной и рассеянных волн в этой работе не является достаточным для решения задачи о рассеянии радиоволн под углом. Задача о влиянии диаграмм направленности антенн была поставлена и решена также в работе [9], где диаграммы антенн были аппроксимированы ступенчатыми функциями.

В настоящей статье проводится последовательный учет диаграмм направленности приемной и передающей антенн. Получены общие формулы для интенсивности принимаемого сигнала. Показано, что в случае достаточно узких диаграмм направленности функциональная зависимость параметров рассеяния (принимаемой мощности или функции корреляции поля) от длины волны, параметров среды, размеров антенн и т. д. такая же, как и в случае рассеяния на заданном объеме, заполненном неоднородностями. Эффективный объем рассеяния, участвующий в создании поля на приемной антенне, определяется областью пересечения диаграмм направленности антенн. Легко видеть, что линейные размеры эффективного объема рассеяния таковы, что приемная антenna располагается в зоне Френеля этого объема; при этом необходим учет

сферичности как невозмущенной волны, так и рассеянных волн. Угловой энергетический спектр рассеянного поля при прохождении сферической волны через слой с неоднородностями сужается по сравнению со спектром рассеяния плоской волны [10].

В расчете мы будем использовать схему эксперимента, указанную на рис. 1. В точках А и С располагаются соответственно пе-

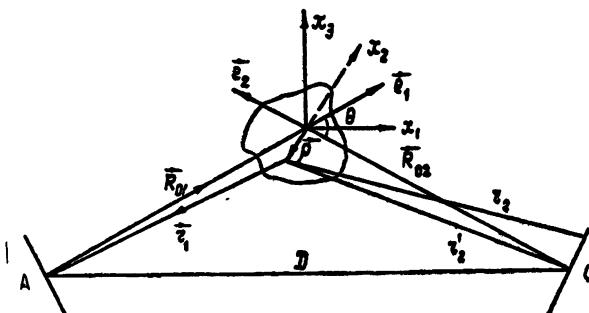


Рис. 1.

редающая и приемная антенны. Исходным выражением для расчета является формула для величины рассеянного поля:

$$E_1 = \frac{ik_0^2 A_0}{2\pi\lambda} \int_V \frac{n_1(\rho_1)}{r_1 r_2} e^{-ik_0(r_1+r_2)} g\left(\frac{k_0 r_1}{r_1}\right) dv. \quad (1)$$

В этом выражении интегрирование проводится по объему рассеяния, g —диаграмма направленности передающей антенны по полю. Для определения мощности, поступающей в приемник, найдем интенсивность поля в фокусе антенны*, используя следующую формулу для поля в фокусе антенны:

$$E = \frac{ie^{-ik_0 F}}{\lambda F} \int_{\Sigma} E_1(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Здесь интегрирование ведется по раскрыву приемной антенны с площадью Σ ; λ —длина волны, F —фокусное расстояние, k_0 —волновое число, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $E_1(\xi)$ —рассеянное поле на поверхности антенны. Средняя интенсивность поля в фокусе антенны (на входе приемника)

$$\overline{EE^*} = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_2(\xi_1) A_2(\xi_2) \overline{E_1(\xi_1) E_1^*(\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (3)$$

Мы ввели функцию $A_2(\xi)$, равную 1 на поверхности антенны и 0 во всех остальных точках плоскости приемной антенны. Соответственно интегрирование в (3) распространено на всю плоскость.

Возвратимся к выражению (1). Поле невозмущенной волны в (1) взято в виде

$$E_0 = \frac{iA_0}{\lambda r_1} e^{-ik_0 r_1} g\left(\frac{k_0 r_1}{r_1}\right), \quad (4)$$

* Рассматриваются антенны сантиметровых волн.

где диаграммная функция $g(\mathbf{q})$ связана с распределением поля по антенне (с функцией $A_1(\eta)$, характеризующей распределение освещенности по апертуре) формулой:

$$g(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\eta) e^{i\mathbf{q} \cdot \eta} d\eta. \quad (5)$$

Для упрощения выражения (1) мы предположим, что эффективный рассеивающий объем имеет линейные размеры, которые малы по сравнению с R_0 . В этом случае для величины $r_1 + r_2$ в (1) легко получить выражение, в котором учтены квадратичные относительные $|\rho_1| R_0^{-1}$ члены:

$$r_1 + r_2 = 2R_0 + \frac{\mathbf{K}\rho_1}{k_0} + \frac{\rho_1^2}{R_0} - \frac{(e_1\rho_1)^2}{2R_0} - \frac{(e_2\rho_2)^2}{2R_0} + \frac{\xi\rho_1}{R_0}. \quad (6)$$

Здесь $\rho_1 = (x_1, x_2, x_3)$ —радиус-вектор в системе координат, связанной с рассеивающим объемом, \mathbf{k} —вектор рассеяния, $\mathbf{K} = k_0(e_1 + e_2)$, $|\mathbf{K}| = 2k_0 \sin(\theta/2)$, θ —угол рассеяния волны; линейный относительно ξ член в (6) учитывает изменение оптического пути при смещении по поверхностям приемной антенны. При получении (6) учтено, что $\xi R_{02} = 0$. Наконец, как обычно, можно в (1) положить, что $r_1 r_2 = R_0^2$.

Согласно (3), для вычисления интенсивности на входе приемника необходимо знать корреляционную функцию комплексного поля в плоскости приемной антенны. Учитывая (1), (5), (6), а также тот факт, что $R_{01}\eta = 0$ (при записи $g\left(k_0 \frac{r_1}{r_1}\right)$), для $\overline{EE^*}$ в (3) получаем:

$$\begin{aligned} \overline{EE^*} &= \frac{k_0^4 A_0^2}{4\pi^2 \lambda^4 F^2 R_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\rho_1 - \rho_2)} \times \\ &\times A_2(\xi_1) A_2(\xi_2) A_1(\eta_1) A_1(\eta_2) \exp \left\{ -\frac{i k_0}{R_0} (\rho_1^2 - \rho_2^2) + \right. \\ &+ \frac{i k_0}{2R_0} [(e_1\rho_1)^2 + (e_2\rho_1)^2 - (e_1\rho_2)^2 - (e_2\rho_2)^2] - \frac{i k_0}{R_0} \rho_1 \xi_1 + \\ &\left. + \frac{i k_0}{R_0} \rho_2 \xi_2 - \frac{i k_0}{R_0} \rho_1 \eta_1 + \frac{i k_0}{R_0} \rho_2 \eta_2 \right\} d\mathbf{x} d\rho_1 d\rho_2 d\xi_1 d\xi_2 d\eta_1 d\eta_2. \end{aligned} \quad (7)$$

В этой формуле интегрирование по ρ_1 и ρ_2 распространено на все пространство, интегрирование по ξ_1 , ξ_2 , η_1 , η_2 ведется соответственно в плоскостях приемной и передающей антенн. Кроме того, введен в рассмотрение спектр функции корреляции флюктуаций коэффициента преломления по формуле

$$B_n(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}} d\mathbf{x}. \quad (8)$$

Вектор \mathbf{q} в (7) равен $\mathbf{x} - \mathbf{K}$.

Заметим, что выражение (7) несправедливо для углов рассеяния θ , близких к 0 или π , так как в этих случаях не выполняется условие малости отношения $|\rho/R_0|$.

Интегралы по ρ_1 и ρ_2 разделяются, и мы можем произвести интегрирование, учитывая, что $k_0 d^2 / R_0 \ll 1$, поскольку объем рассеяния находится в фраунгоферовой зоне антенны (d —линейный размер антенны); следовательно,

$$\frac{k_0(\xi_1 + \eta_1)^2}{4R_0 \sin^2(\theta/2)} \ll 1, \quad \frac{k_0(\xi_2 + \eta_2)^2}{4R_0} \ll 1, \quad \frac{k_0(\xi_3 + \eta_3)^2}{4R_0 \cos^2(\theta/2)} \ll 1.$$

Вводя в рассмотрение величину

$$\varphi = \left(\frac{q_1}{\sin^2(\theta/2)}, q_2, \frac{q_3}{\cos^2(\theta/2)} \right),$$

результат для $\overline{EE^*}$ в фокусе антенны запишем в виде

$$\begin{aligned} \overline{EE^*} = & \frac{\pi k_0 A_0^2}{\lambda^4 R_0 F^2 \sin^2 \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(\mathbf{x}) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_2(\xi_1) A_2(\xi_2) e^{-i \frac{\varphi}{2} (\xi_1 - \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \times \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(\eta_1) A_1(\eta_2) e^{-i \frac{\varphi}{2} (\eta_1 - \eta_2)} d\eta_1 d\eta_2 \right\} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если обозначить свертку от распределения поля по антенне через $R_k(\eta)$, т. е.

$$R_k(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi) A(\eta - \xi) d\xi, \quad (10)$$

и ввести функцию $G_k(q)$, определяющую диаграмму направленности антенны по мощности:

$$G_k(q) = |g(q)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} R_k(\eta) e^{-i q \eta} d\eta, \quad (11)$$

то для $\overline{EE^*}$ получаем следующее выражение:

$$\overline{EE^*} = \frac{\pi k_0 A_0^2}{\lambda^4 R_0 F^2 \sin^2 \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(\mathbf{x}) G_1\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) G_2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) d\mathbf{x}. \quad (12)$$

Здесь φ_1 и φ_2 —проекции вектора φ соответственно на плоскости передающей и приемной антенн.

Формула (12) является конечной общей формулой. По своей структуре она близка к соответствующим выражениям для линз [11]. Она показывает, что результирующая интенсивность определяется интегралом от диаграмм направленности антенн и углового энергетического спектра рассеянного поля (определенного спектром неоднородностей). Можно показать, что появление двоек в аргументах функций G_1 и G_2 тесно связано со сферической расходимостью волн в условиях симметрии задачи (объем рассеяния находится на одинаковом расстоянии от передатчика и приемника).

Дальнейшее вычисление мы проведем для круглых остронаправленных антенн. Учитывая, что

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = K = 2k_0 \sin(\theta/2),$$

$$\varphi_1 = \frac{x_1}{\sin^2(\theta/2)}, \quad \varphi_2 = x_2, \quad \varphi_3 = \frac{x_3 - K}{\cos^2(\theta/2)}, \quad (13)$$

выражение (12) удобно переписать в виде

$$\overline{EE^*} = \frac{2\pi k_0 A_0^2}{\lambda^4 R_0 F^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n \left(2x_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}, 2x_2, 2x_3 \cos^2 \frac{\theta}{2} + K \right) \times \\ \times G_1(x_a) G_2(x_c) dx_1 dx_2 dx_3, \quad (14)$$

где $x_a = x - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$ и $x_c = x - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2$.

Для круглых антенн с конической диаграммой

$$G_1(x_a) = G_1(\sqrt{x^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)^2}), \quad G_2(x_c) = G_2(\sqrt{x^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)^2}). \quad (15)$$

Чтобы вычислить мощность, поступающую в приемник, нужно величину $c \overline{EE^*}/8\pi$ (средний поток энергии в фокусе за 1 сек через площадку в 1 см) умножить на площадь фокального пятна, равную $\pi F^2/k_0^2 r_0^2$ (для круглой антенны радиуса r_0). Для отношения P_r/P_t , где $P_t = A_0^2 c r_0^2 / 8$ — излучаемая передающей антенной мощность, а P_r — принимаемая рассеянная мощность, получаем следующую формулу:

$$P_r/P_t = \frac{1}{R_0 \lambda^3 r_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n \left(2x_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}, 2x_2, 2x_3 \cos^2 \frac{\theta}{2} + K \right) \times \\ \times G_1(\sqrt{x^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)^2}) G_2(\sqrt{x^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)^2}) dx_1 dx_2 dx_3. \quad (16)$$

Предположим далее, что ширина углового спектра рассеянного поля намного шире диаграмм направленности антенн. В этом случае можно вынести функцию Φ_n за знак интегрирования в точке $\mathbf{x} = x_1 = x_2 = x_3 = 0$. (В этой точке произведение $G_1 G_2$ имеет острый максимум.) В оставшийся интеграл от $G_1 G_2$ подставим вместо G_1 и G_2 функцию, определяющую диаграмму круглой антенны:

$$G(q) = (2\pi)^2 r_0^2 \frac{J_1(r_0 q)}{q^2}, \quad (17)$$

где J_1 — функция Бесселя первого порядка. Учитывая, что

$$\mathbf{e}_1 = \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad \mathbf{e}_2 = \left(-\cos \frac{\theta}{2}, 0, \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

переходя к переменным

$$q_1 = x_1 \sin(\theta/2) - x_3 \cos(\theta/2), \\ q_2 = x_1 \sin(\theta/2) + x_3 \cos(\theta/2), \quad (18)$$

для величины $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_1 G_2 d\mathbf{x}$ получаем следующее выражение:

$$I_2 = \frac{(2r_0)^5 (2\pi)^4}{2 \sin \theta} \int_0^\infty \frac{H_1^2(x)}{x^4} dx \quad (19)$$

(H_1 — функция Струве первого порядка). Интеграл $\int_0^\infty H_1^2(x) x^{-4} dx$

легко вычислить, он равен $1/3\pi$. Окончательно для P_r/P_t в (16) имеем:

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{16 (2\pi)^4 r_0 \Phi_n [2k_0 \sin(\theta/2)]}{3\pi R_0 \lambda^3 \sin \theta}. \quad (20)$$

В этой формуле принято, что

$$\Phi_n(x_1, x_2, x_3) = \Phi_n(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}).$$

Для сравнения с соответствующими формулами рассеяния найдем отношение величины P_r/P_t из (20) к $(P_r/P_t)_0$ в свободном пространстве для этих же антенн, разнесенных на расстояние $D = 2R_0 \cos(\theta/2)$. В этом случае

$$(P_r/P_t)_0 = \frac{\pi^2 r_0^4}{4R_0^2 \lambda^3 \cos^2(\theta/2)}$$

и искомое отношение

$$\frac{P_{\text{рас}}}{P_0} = \frac{2^7 k_0^4 \Phi_n [2k_0 \sin(\theta/2)] D \gamma^3}{3\pi^3 \sin(\theta/2)}, \quad (21)$$

где $\gamma = \lambda/2r_0$ — эффективная угловая ширина диаграмм направленности.

Формула (21) фактически с точностью до численного коэффициента совпадает с соответствующей формулой в работе [4]. Таким образом, при достаточно узких диаграммах направленности антенн и не очень малых углах рассеяния функциональная зависимость интенсивности рассеяния от параметров задачи такая же, как при рассеянии на заданном объеме, заполненном неоднородностями.

В заключение заметим, что легко написать выражение, аналогичное (12), для функции корреляции комплексного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. G. Booker, E. Gordon, Proc. IRE, **38**, 401 (1950).
2. F. Villars, V. F. Weisskopf, Phys. Rev., **94**, 232 (1954).
3. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
4. В. И. Татарский, Флюктуационные явления при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
5. A. D. Wheelon, J. Appl. Phys., **28**, 684 (1957).
6. В. А. Зверев, Акустич. ж., **3**, 329 (1957).
7. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 521 (1959).
8. Ю. А. Ковура, Радиотехника и электроника, **2**, 195 (1962).
9. В. И. Татарский и Г. С. Голицын, Труды ИФА, № 4 (1962).
10. Д. Ж. Ратклиф, Проблемы соврем. физики, **10**, 5 (1957).
11. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 488 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 января 1963 г.

ON INFLUENCE OF ANTENNA PATTERNS UPON THE INTENSITY OF THE RECEIVING RADIATION AT RADIO WAVE SCATTERING ON TROPOSPHERIC IRREGULARITIES

Yu. A. Ryzhov

The problem has been considered of the influence of receiving and transmitting antenna patterns upon the parameters of the receiving signal scattered by the troposphere. A general formula has been obtained, which expresses the signal intensity in the form of an integral from the product of antenna patterns and an angular energy spectrum of the scattered field. It is shown in particular case of narrow antenna patterns that the scattering functional dependence on considered parameters is the same as at the radio wave scattering in the given volume with irregularities.

РЕЗОНАНСНАЯ ДИФФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ПЛОСКО-СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С ПОЛНЫМ ВНУТРЕННИМ ОТРАЖЕНИЕМ

Л. В. Иогансен

Рассмотрено прохождение упругих волн через плоско-слоистую систему из чередующихся твердых и нетвердых прослоек с учетом резонансной дифракции. Найдено, что в случае, когда в твердых прослойках выполнено условие полного внутреннего отражения одновременно как для продольных, так и для поперечных волн, возможно резонансное накопление волн внутри системы. Выполнен расчет акустического резонансного конденсатора полного отражения

Резонансной дифракцией мы называем краевой эффект, возникающий при наклонном падении плоских волн на слоистую систему, внутри которой происходит резонансное накопление волн [1]. Для случая электромагнитных волн в диэлектриках простейшими системами, где резонансная дифракция играет существенную роль, являются фильтр полного внутреннего отражения [2] и резонансный конденсатор полного внутреннего отражения [3]. Резонансная дифракция отрицательно влияет на работу фильтра и приводит к тому, что в краевой области, примыкающей к основанию, фильтр непрозрачен. Напротив, в конденсаторе полного отражения резонансная дифракция играет положительную роль и дает возможность одновременно фильтровать, накапливать волны и отводить их вдоль по резонатору. Как известно [4], расчет прохождения s -поляризованных электромагнитных волн через слоистую систему немагнитных диэлектриков в точности совпадает с расчетом прохождения звуковых волн через систему нетвердых упругих слоев с одинаковой плотностью. Поэтому характеристики электромагнитного фильтра и конденсатора полного отражения одновременно являются характеристиками соответственно акустического фильтра и конденсатора полного отражения (для частного случая, когда все слои имеют одинаковую плотность и не обладают сдвиговой упругостью, т. е. являются жидкими или газообразными). Нетрудно обобщить прежние расчеты и на случай жидких сред с различными плотностями.

В данной работе теоретически исследована резонансная дифракция упругих волн в слоистых средах с чередующимися твердыми и нетвердыми слоями, причем полноотражающие барьеры являются твердыми, в то время как граничные среды и резонатор являются жидкими (или газообразными). Характерные особенности такого рода систем обусловлены тем, что в твердых слоях одновременно возникают и продольные и поперечные волны, так что физика процессов сильно отличается от процессов в системах без сдвиговой упругости.

Проведенные расчеты, однако, показали, что в таких „комбинированных“ системах резонансы возможны и, следовательно, можно создавать акустические твердо-жидкие резонансные системы типа фильтров и конденсаторов. Акустический конденсатор полного отражения такого типа изображен схематически на рис. 1. Он со-

стоит из твердой, например, алюминиевой пластины полного внутреннего отражения 2 и непрозрачной стенки 4, между которыми заключен жидкий слой 3, играющий роль резонатора. Плоские волны, которые падают по заданному направлению на конденсатор из внешней жидкой среды 1 и не удовлетворяют условию резонанса, целиком отражаются от барьера 2 и не проникают внутрь конденсатора. Напротив, волны резонансной частоты вследствие резонансной дифракции почти полностью проникают внутрь резонатора, накапливаются там и далее текут вдоль по резонатору.

Проделанные расчеты чрезвычайно громоздки. Поэтому мы приводим лишь исходные соотношения и конечные результаты, опуская все промежуточные выкладки.

1. СШИВАНИЕ ВОЛН ДЛЯ СЛУЧАЯ ЧЕРЕДОВАНИЯ ТВЕРДЫХ И НЕТВЕРДЫХ СЛОЕВ

На плоской границе раздела твердых и жидкого сред должны выполняться обычные граничные условия: непрерывность нормальных составляющих скоростей сред и непрерывность напряжений [4]. Введем обозначения и запишем эти условия. Жидкие среды 1, 3, 5 и т. д. будем нумеровать индексом μ ; твердые среды 2, 4 и т. д.—индексом v . Звуковые волны в жидкостях средах будем описывать потенциалом ψ_μ , причем скорость среды

$$\mathbf{v}_\mu = \operatorname{grad} \psi_\mu, \quad (1)$$

а звуковое давление

$$p_\mu = -\rho_\mu \frac{\partial \psi_\mu}{\partial t} = -i\omega \rho_\mu \psi_\mu, \quad (2)$$

где ρ_μ —плотность среды, ω —круговая частота звука; предполагается, что зависимость от времени гармоническая. Волны в твердых средах будем описывать скалярным потенциалом ψ_v для продольных волн и векторным потенциалом ψ_{vt} для поперечных волн. При этом скорость среды

$$\mathbf{v}_v = \operatorname{grad} \psi_v + \operatorname{rot} \psi_{vt}. \quad (3)$$

Тензор напряжений (см. [5])

$$\sigma_{ik} = 2\rho_v c_{vt}^2 u_{vik} + \rho_v (c_{vt}^2 - 2c_{vi}^2) u_{vll} \delta_{ik}, \quad (4)$$

где ρ_v —плотность среды, c_{vt} и c_{vi} —соответственно скорость поперечных и продольных звуковых волн, δ_{ik} —символ Кронекера, u_{vik} —тензор деформаций, причем для случая гармонической зависимости от времени компоненты смещения просто выражаются через компоненты скорости (3):

$$u_{vk} = -\frac{i}{\omega} v_{vk}.$$

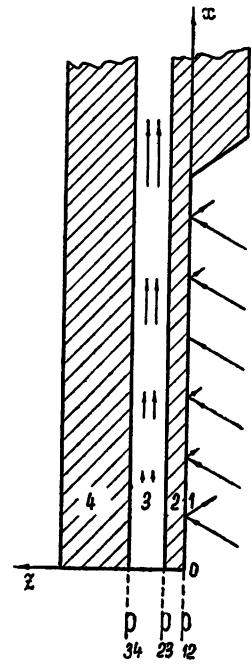


Рис. 1.

Введем декартову систему координат, направив ось z перпендикулярно слоям системы, как это изображено на рис. 1. При этом можно задать векторный потенциал единственной компонентой, направленной вдоль орта s оси y , т. е. положить $\psi_{vt} = s\psi_{vt}$.

Будем считать, что из крайней жидкой среды 1 на резонансную систему падает обыкновенная плоская однородная волна. При этом в слоистой системе возникнут „ортогональные волны“ [3]. Выпишем потенциалы этих волн для рассматриваемой задачи. В жидких слоях возникнут однородные „ортогональные волны“ следующего вида:

$$\begin{aligned}\psi_{\mu} = & \left\{ A_{\mu} \left(x - \frac{k_x}{k_{\mu z}} z \right) \exp [-i(k_x x - k_{\mu z} z)] + B_{\mu} \left(x + \frac{k_x}{k_{\mu z}} z \right) \times \right. \\ & \left. \times \exp [-i(k_x x - k_{\mu z} z)] \right\} \exp (i\omega t).\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь, как обычно, A_{μ} и B_{μ} — произвольные, вообще говоря, комплексные медленно меняющиеся амплитудные функции соответственно для падающей и отраженных волн; k_x и $k_{\mu z}$ — компоненты волнового вектора,

$$k_x^2 + k_{\mu z}^2 = k_{\mu}^2 = (\omega/c_{\mu})^2. \quad (6)$$

Будем считать, что в твердых слоях выполнены условия полного внутреннего отражения как для продольных, так и для поперечных волн. При этом в твердых слоях возникнут неоднородные „ортогональные волны“, потенциалы которых для продольных и поперечных волн соответственно имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\psi_{vl} = & \left\{ F_{vl} \left(x + i \frac{k_x}{q_{vlz}} z \right) \exp [-i(k_x x + iq_{vlz} z)] + \right. \\ & \left. + G_{vl} \left(x - i \frac{k_x}{q_{vlz}} z \right) \exp [-i(k_x x - iq_{vlz} z)] \right\} \exp (i\omega t); \\ \psi_{vt} = & \left\{ F_{vt} \left(x + i \frac{k_x}{q_{vitz}} z \right) \exp [-i(k_x x + iq_{vitz} z)] + \right. \\ & \left. + G_{vt} \left(x - i \frac{k_x}{q_{vitz}} z \right) \exp [-i(k_x x - iq_{vitz} z)] \right\} \exp (i\omega t).\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь F и G — произвольные комплексные медленно меняющиеся амплитуды соответственно для растущей и убывающей в сторону z волн, k_x и iq_{vlz} — компоненты комплексного волнового вектора для продольной волны,

$$k_x^2 - q_{vlz}^2 = k_{vl}^2 = (\omega/c_{vl})^2. \quad (9)$$

Для компонент волнового вектора поперечной волны имеет место аналогичное соотношение:

$$k_x^2 - q_{vitz}^2 = k_{vt}^2 = (\omega/c_{vt})^2. \quad (10)$$

Поскольку скорость продольных волн всегда больше скорости поперечных волн [5]: $c_{vl} > c_{vt} \sqrt{2}$, из (10) и (9) имеем: $q_{vlz} > q_{vitz}$.

Запишем теперь граничные условия в плоскости P_{μ} , раздела жидкой среды μ и твердой v . Непрерывность нормальных составляю-

ших скоростей, равенство нулю σ_{vzz} , непрерывность p_μ и $(-\sigma_{vzz})$ дают соответственно следующие три уравнения:

$$-ik_{\mu z}(A_\mu - B_\mu) - \frac{k_x}{k_{\mu z}}(A'_\mu - B'_\nu) = \\ (11)$$

$$= q_{v_{lz}}(F_{v_l} - G_{v_l}) - ik_x(F_{v_t} - G_{v_t}) + i \frac{k_x}{q_{v_{lz}}}(F'_{v_l} - G'_{v_l}) + (F'_{v_t} - G'_{v_t}); \\ - 2ik_x q_{v_{lz}}(F_{v_l} - G_{v_l}) + 2 \frac{(k_x^2 + q_{v_{lz}}^2)}{q_{v_{lz}}}(F'_{v_l} - G'_{v_l}) = \\ (12)$$

$$= (k_x^2 + q_{v_{tz}}^2)(F_{v_t} + G_{v_t}) + 4ik_x(F'_{v_t} + G'_{v_t});$$

$$\frac{\rho_\mu}{\rho_\nu}(A_\mu + B_\mu) = \left(1 - 2 \frac{k_x^2}{k_{v_t}^2}\right)(F_{v_l} + G_{v_l}) + \frac{2ik_x q_{v_{lz}}}{k_{v_t}^2}(F_{v_t} - G_{v_t}) - \\ (13)$$

$$- 4i \frac{k_x}{k_{v_t}^2}(F'_{v_l} + G'_{v_l}) - 2 \frac{(k_x^2 + q_{v_{tz}}^2)}{k_{v_t}^2 q_{v_{tz}}}(F'_{v_t} - G'_{v_t}).$$

В этих уравнениях комплексные амплитуды являются функциями одной переменной x , а штрих означает дифференцирование. Система из трех линейных дифференциальных уравнений (11)–(13) связывает две амплитудные функции в жидкой среде ν и четыре амплитудные функции в твердой среде μ . Следовательно, задание обеих амплитуд в жидкости, вообще говоря, не определяет однозначно всех амплитуд в твердой среде. В этом состоит принципиальное отличие рассматриваемой задачи от того, что имеет место для электромагнитных волн [2, 3], где задание комплексных амплитуд волн по одну сторону границы раздела однозначно определяет амплитуды по другую сторону границы раздела. Ввиду указанной неполноты системы уравнений (11)–(13) необходимо решать совместно уравнения сшивания на обеих границах одной и той же твердой прослойки. При этом получаем 6 уравнений, связывающих 8 функций: 2 пары амплитудных функций в жидкости и 4 амплитудные функции в твердом теле, так что задание двух комплексных амплитуд волн в любой из сред однозначно определяет амплитуды в других средах. Оказывается, что эту систему из 6 линейных дифференциальных уравнений для 8 неизвестных функций с точностью до первых производных можно разрешить относительно любых амплитуд и получить дифференциальные условия сшивания, аналогичные тем, что получены в [1–3]; однако коэффициенты в уравнениях будут более громоздки.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗОНАНСНОГО КОНДЕНСАТОРА

Будем считать, что на резонансный конденсатор, изображенный на рис. 1, из жидкой среды 1 падает плоская волна с заданной амплитудой A_1 . Расчет должен дать остальные 11 амплитуд: по 4 в твердых средах 2 и 4, две амплитуды в резонаторе 3 и амплитуду отраженной волны в среде 1. Физически ясно, что в среде 4 $F_{4l} \equiv F_{4t} \equiv 0$; иначе эти волны возрастали бы до бесконечности, что бессмысленно. Таким образом, остаются 9 неизвестных функций, связанных 9 дифференциальными уравнениями типа (11)–(13): по 3 на каждой из 3-х границ раздела. Развитыми ранее приближенными методами

[¹⁻³] эти уравнения удается решить. Ниже мы приведем некоторые результаты расчета для резонансных характеристик.

Резонансное накопление волн возможно, если одновременно выполнены неравенства

$$e^{-q_{2tz} d_2} \ll 1, \quad e^{-(q_{2lz} - q_{2tz}) d_2} \ll 1. \quad (14)$$

При этом условие резонанса имеет вид

$$k_{3z} d_3 = (k_{3z} d_3)_{\text{рез}} + \varepsilon_0, \quad (15)$$

где $(k_3 d_3)_{\text{рез}}$ определяется из приближенного условия резонанса:

$$e^{i(k_{3z} d_3)_{\text{рез}}} = \pm \left\{ \frac{\rho_3}{\rho_2} - i \frac{k_{3z}}{q_{2lz}} \left[\frac{(k_x^2 + q_{2tz}^2)^2}{k_{2t}^4} - \frac{4k_x^2 q_{2lz} q_{2tz}}{k_{2t}^4} \right] \right\} \{ \text{к. с.} \}^{-1}; \quad (16)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{k_{1z}^2}{k_{3z} q_{2lz}} \left[\left(1 - 2 \frac{k_x^2}{k_{2t}^2} \right) + \frac{4k_x^2 q_{2lz} q_{2tz}}{k_{2t}^2 (k_x^2 + q_{2tz}^2)} \right] \frac{|A_1|^2}{|A_{P_{34}}(\varepsilon_0, \infty)|^3}, \quad (17)$$

где $A_{P_{34}}(\varepsilon_0, \infty)$ — установившаяся резонансная амплитуда в бесконечно длинном резонаторе, которая определяется следующим выражением:

$$A_{P_{34}}(\varepsilon_0, \infty) = \mp \frac{i}{8} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{k_{2t}^4}{k_x^2 k_{3z} q_{2lz}} \left\{ 1 + i \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{k_{3z}}{q_{2lz}} \left[\frac{(k_x^2 + q_{2tz}^2)^2}{k_{2t}^4} - \frac{4k_x^2 q_{2lz} q_{2tz}}{k_{2t}^4} \right] \right\} \left\{ 1 - i \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{k_{1z}}{q_{2lz}} \left[\frac{(k_x^2 + q_{2tz}^2)^2}{k_{2t}^4} - \frac{4k_x^2 q_{2lz} q_{2tz}}{k_{2t}^4} \right] \right\} e^{q_{2tz} d_3} A_1. \quad (18)$$

Как обычно, амплитуда волн в резонаторе при точном резонансе возрастает по мере удаления от основания по закону

$$A_{P_{34}}(\varepsilon_0, x) = A_{P_{34}}(\varepsilon_0, \infty) [1 - e^{-x/l_0}], \quad (19)$$

куда входит характерная длина резонансной дифракции l_0 , выражение для которой можно записать так:

$$l_0 = \frac{k_x}{k_{1z}} \frac{\rho_3}{\rho_1} \frac{|A_{\text{ш}}(\varepsilon_0, \infty)|^2}{|A_1|^2} \tilde{d}_3. \quad (20)$$

При этом эффективная толщина резонатора

$$\begin{aligned} \tilde{d}_3 &= d_3 + \left\{ 1 + \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2} \frac{k_{3z}^2}{q_{2lz}^2} \left[\frac{(k_x^2 + q_{2tz}^2)^2}{k_{2t}^4} - \frac{4k_x^2 q_{2lz} q_{2tz}}{k_{2t}^4} \right]^2 \right\}^{-1} \times \\ &\times 3 \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{k_{3z}^2 (k_x^2 + q_{2tz}^2)}{q_{2lz} k_{2t}^4} \left\{ 4 \left[\frac{q_{2tz}}{q_{2lz}} \frac{(k_x^2 + q_{2lz}^2)}{(k_x^2 + q_{2tz}^2)} + \frac{q_{2lz}}{q_{2tz}} \frac{k_{2t}^4}{(k_x^2 + q_{2tz}^2)^2} - 1 \right] + \right. \\ &\left. + \left[\frac{(k_x^2 + q_{2tz}^2)}{q_{2lz}^2} - \frac{4k_x^2 q_{2tz}}{q_{2lz} (k_x^2 + q_{2tz}^2)} \right] \left[\frac{q_{2lz}^2}{k_{3z}^2} + 1 - \frac{4q_{2lz}^2}{(k_x^2 + q_{2tz}^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим, что выражение (20) имеет простой физический смысл: оно представляет собой умноженное на \tilde{d}_3 отношение x -составляющей вектора Умова в резонаторе к z -составляющей вектора Умова в падающей волне.

В [³] рассмотрены основные локальные и интегральные характеристики конденсатора при точном резонансе. Эти характеристики вы-

ражаются непосредственно через l_0 ; поэтому выражения, полученные в [3], одинаково применимы и для рассматриваемого нами акустического конденсатора. Найденные в [3] выражения для формы и ширины полосы пропускания конденсатора применимы к акустическому конденсатору по порядку величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Иогансен, ЖЭТФ, 40, 1838 (1961).
2. Л. В. Иогансен, Оптика и спектроскопия, 12, 318 (1962); 11, 542 (1961).
3. Л. В. Иогансен, ЖТФ, 32, 406 (1962).
4. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954.

Московский филиал Киевского института
гражданского воздушного флота

Поступила в редакцию
19 июня 1962 г

RESONANCE DIFFRACTION OF ELASTIC WAVES IN PLANELAYER MEDIA WITH TOTAL REFLECTION

L. V. Jøgansen

Elastic waves propagation has been considered in a plane-layer system consisting of solid and nonsolid layers alternated. The resonance diffraction has been taken into account. It has been established that if there existing a condition of the total reflection in solid layers both for longitudinal and transverse waves, the wave resonance storage is possible inside the system. A design has been carried out of an acoustic resonator with total reflection.

НИЖНЯЯ ЧАСТОТНАЯ ГРАНИЦА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В ГЕЛИЕВОЙ И КРИПТОНОВОЙ ПЛАЗМЕ

К. С. Голованивский, А. А. Кузовников

Экспериментально изучены граничные частоты квазипотенциала в гелиевой и криptonовой плазме путем измерения ионного тока на плоский стеночный зонд. Результаты качественно согласуются с моделью ионной электростатической поляризации плазмы во внешнем электрическом поле. Рассчитаны нижние граничные частоты, при которых внешнее поле начинает проникать вглубь плазмы; эти частоты удовлетворительно согласуются с *нижними* частотными границами квазипотенциала.

Нижняя частотная граница в. ч. квазипотенциала была обнаружена и исследована в неоновой плазме [1]. В этой работе было показано, что граничная частота в. ч. квазипотенциала определяется плотностью ионов плазмы, и сделано предположение о том, что физическим процессом, определяющим нижнюю частотную границу, является процесс электростатической поляризации плазмы во внешнем электрическом поле.

Модель образования заряженных слоев при поляризации плазмы, предложенная в [1], базируется на представлении о том, что положительные ионы, двигаясь через плазму под действием внешнего поля, образуют на границе плазмы нескомпенсированный заряд, поле которого направлено против приложенного поля. Электроны при этом предполагаются неподвижными. Такая модель физически оправдана тем, что средняя тепловая энергия ионов много меньше средней тепловой энергии электронов.

Действительно, пусть в поляризованной плазме установилось некоторое распределение потенциала $U(x)$. До наложения внешнего поля пусть для простоты концентрация заряженных частиц во всех точках будет одинаковой, т. е. $n_i = n_e = n_0$. После поляризации концентрация частиц перераспределилась:

$$n_e(x) = n_0 \exp \left[-\frac{eU(x)}{kT_e} \right]; \quad (1)$$

$$n_i(x) = n_0 \exp \left[\frac{eU(x)}{kT_i} \right]. \quad (2)$$

В случае, когда

$$T_e \gg \frac{eU(x)}{k}, \quad (3)$$

что, как легко показать, осуществляется всегда при

$$T_i \ll T_e, \quad (4)$$

можно записать

$$n_e(x) \approx n_0, \quad (5)$$

т. е. концентрация электронов во всех точках осталась приблизительно такой же, как и до наложения внешнего поля. Следовательно, поляризация в основном обусловлена перераспределением холодных положительных ионов, и поэтому время поляризации оказывается порядка d/\bar{v}_i , где d — толщина слоя заряда, полностью экранирующего внешнее поле [1,2], \bar{v}_i — средняя направленная скорость иона.

Целью настоящей работы является дальнейшая проверка механизма нижней частотной границы, предложенного в [1], а именно выяснение зависимости нижней частотной границы от рода газа. В качестве рабочих газов были избраны Не и Kr, атомы которых сильно отличаются по массе от атомов Ne, а также друг от друга.

1. ЭКСПЕРИМЕНТ

Экспериментальная установка аналогична установке, описанной в [1]. Стеклянная разрядная трубка содержит три отростка с радиусами $R_1 = 2,5 \text{ см}$, $R_2 = 1,5 \text{ см}$, $R_3 = 1 \text{ см}$. В каждый из отростков впаян стеночный зонд и конический анод. Кроме того, каждый из отростков снабжен цилиндрическим зондом, при помощи которого можно измерять параметры плазмы на оси отростка. На внешнюю поверхность каждого отростка в области стеночного зонда накладываются плоские медные пластины размером $26 \text{ мм} \times 19 \text{ мм}$, подключенные к выходу высокочастотного генератора. Напряжение высокой частоты на пластинах регистрируется катодным вольтметром и всегда поддерживается на уровне 25 в (амплитудное значение).

Высокочастотное поле, созданное пластиной, обладало такой неоднородностью, что $\text{grad } E^2$ был направлен из плазмы к стеночному зонду. Поэтому диффузионный ток ионов под действием в. ч. квазипотенциала уменьшался [3]. За меру эффекта в. ч. квазипотенциала принималось отношение изменения радиального ионного тока Δi_r на отрицательный (около 110 в относительно анода) стеночный зонд при включении в. ч. поля к ионному току i_{r0} при том же потенциале зонда в отсутствие в. ч. поля [3]:

$$\frac{\Delta i_r}{i_{r0}} = \frac{n}{\nabla n} \frac{e}{kT_e} \nabla \Phi_i. \quad (6)$$

Здесь Φ_i — ионный в. ч. квазипотенциал, остальные обозначения стандартные. Влияние электронного в. ч. квазипотенциала в (6) не учитывается из-за малого времени пролета электроном области, в которой квазипотенциал значителен. Так как напряженность в. ч. поля была достаточно малой, чтобы практически не нарушать радиальное распределение концентрации и электронную температуру, то $\Delta i_r/i_{r0}$ пропорционально $\nabla \Phi_i$.

Измерения производились в Kr и He при следующих давлениях: Kr — 1 мм рт. ст.; $0,35 \text{ мм}$ рт. ст.; $0,1 \text{ мм}$ рт. ст. и $0,05 \text{ мм}$ рт. ст.; He — 1 мм рт. ст.; $0,35 \text{ мм}$ рт. ст. и $0,1 \text{ мм}$ рт. ст. Перед измерениями все детали разрядной трубки тщательно обезгаживались в вакууме, после чего трубка наполнялась исследуемым газом до нужного давления и отпаивалась от вакуумной системы.

Диапазон исследованных частот был от 10^4 гц до 10^7 гц . При более высоких частотах необходимо учитывать электронный в. ч. квазипотенциал, что в значительной мере усложнило бы интерпретацию результатов; при более же низких частотах эффект в. ч. квазипотенциала практически во всех случаях был равен нулю.

Методика эксперимента заключалась в измерении величины $\Delta i_r/i_{r0}$ в зависимости от частоты поля для различных значений разрядного тока при данном давлении в газе. Аналогичные измерения производились в отростках с различным диаметром сечения, причем, как и в случае неона [1], совпадение граничных частот для одинаковых концентраций в отростках с различным диаметром при прочих равных условиях (газ, давление) указывало на то, что причина существования нижней частотной границы не связана с конечным диффузионным временем жизни иона.

Общая схема экспериментальной установки представлена на рис. 1.

Обработка экспериментальных данных производилась следующим

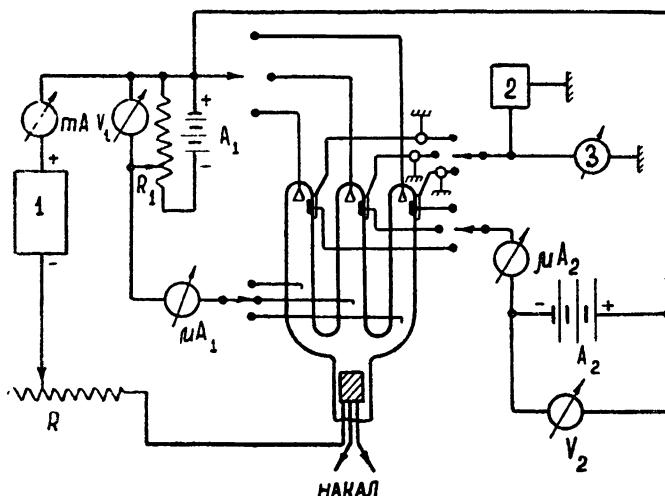


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 — выпрямитель, 2 — высокочастотный генератор, 3 — ламповый вольтметр, V_1 , μA_1 , A_1 — вольтметр, микроамперметр и батарея аккумуляторов цепи цилиндрических зондов, расположенных на оси отростков, μA_2 , A_2 и V_2 — микроамперметр, батарея аккумуляторов и вольтметр цепи стеночных зондов.

образом. Строилась зависимость $\Delta i_r/i_{r0}$ от частоты поля в каждом отростке при фиксированном давлении для нескольких значений разрядного тока. Каждому току разряда соответствовала некоторая концентрация ионов на оси положительного столба, определенная при помощи цилиндрического зонда. Нижняя частотная граница определялась как точка на оси частот, в которой нарастающая часть зависимости $\Delta i_r/i_{r0}$ от частоты переходила в плато. После этого строился график зависимости нижней частотной границы в. ч. квазипотенциала от плотности ионов на оси столба для разных давлений газа и разных радиусов трубки.

На рис. 2 и 3 представлены зависимости нижней частотной границы от плотности ионов при различных давлениях для Не и Kr. Из графиков видно, что с ростом концентрации n заряженных частиц граничная частота возрастает как n^k , где $0,5 \leq k < 1$. С увеличением давления газа нижняя частотная граница понижается. При понижении давления граничные частоты приближаются к ионной ленгмюровской частоте для соответствующего газа. Легко видеть из рис. 2, 3, что граничные частоты практически не зависят от радиуса разрядной трубки. Это означает, как уже указывалось выше, что нижняя частотная граница не обусловлена конечным временем жизни ионов плазмы. Из сравнения результатов измерения нижней частотной гра-

ницы в Не и Kr становится ясным, что при всех равных условиях (давление, плотность ионов) граничные частоты в Kr гораздо ниже, чем в Не. В то же время граничные частоты в Не (см. [1]) лежат между граничными частотами в Не и в Kr (для удобства сравнения на графики нанесены пунктирными линиями ленгмюровские ионные частоты для всех трех газов).

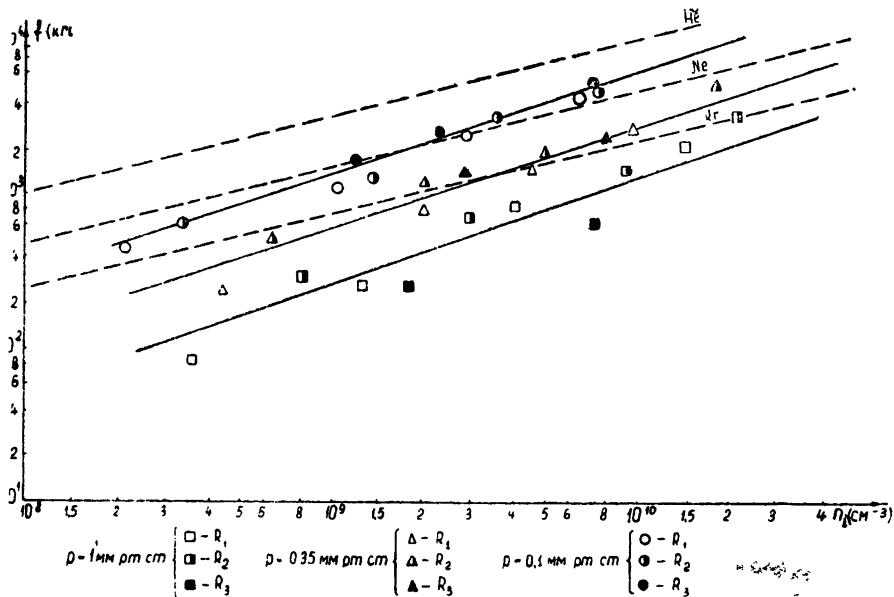


Рис. 2. Граничные частоты в. ч. квазипотенциала в Не.

2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Согласно модели, предложенной в [1], граничная частота должна быть тем ниже, чем меньше средняя скорость \bar{v}_i , с которой ионы движутся во внешнем поле, формируя слой. При этом приближенно

$$\lg f_r = \lg A + \frac{1}{2} \lg n,$$

где

$$A = (4\pi e \bar{v}_i^2 / U_0)^{1/2}, \quad (7)$$

U_0 — разность потенциалов, приложенная к плазме.

Величину A можно найти из графиков рис. 2 и 3. Тогда по фор-

Таблица 1

| | p (мм рт. ст.) | λ_i (см) | \bar{v}_i (см/сек $^{-1}$) | d (см) | | |
|----|------------------|---------------------|----------------------------------|---------------------|---------------------|------------------------|
| | | | | $n=10^8$ см $^{-3}$ | $n=10^9$ см $^{-3}$ | $n=10^{10}$ см $^{-3}$ |
| Не | 0,1 | $76 \cdot 10^{-3}$ | $23 \cdot 10^4$ | | | |
| | 0,35 | $22 \cdot 10^{-3}$ | $10 \cdot 10^4$ | $360 \cdot 10^{-3}$ | $110 \cdot 10^{-3}$ | $36 \cdot 10^{-3}$ |
| | 1,0 | $7,6 \cdot 10^{-3}$ | $4,4 \cdot 10^4$ | | | |

мule (7) можно определить средние направленные скорости ионов. В таблицах 1 и 2 приведены эти данные для Не и Кг.

Таблица 2

| | p (мм рт. ст.) | λ_i (см) | \bar{v}_i (см·сек $^{-1}$) | d (см) | | |
|----|------------------|---------------------|-------------------------------|---------------------|---------------------|------------------------|
| | | | | $n=10^3$ см $^{-3}$ | $n=10^6$ см $^{-3}$ | $n=10^{10}$ см $^{-3}$ |
| Кг | 0,05 | $62 \cdot 10^{-3}$ | $5,9 \cdot 10^4$ | | | |
| | 0,1 | $31 \cdot 10^{-3}$ | $2,9 \cdot 10^4$ | $360 \cdot 10^{-3}$ | $110 \cdot 10^{-3}$ | $36 \cdot 10^{-3}$ |
| | 0,35 | $8,9 \cdot 10^{-3}$ | $1,5 \cdot 10^4$ | | | |
| | 1,0 | $3,1 \cdot 10^{-3}$ | $0,48 \cdot 10^4$ | | | |

Как видно из таблиц, средняя скорость дрейфа ионов при формировании слоя объемного заряда уменьшается с ростом давления, причем при одинаковом давлении v_i в гелии в $7 \div 9$ раз больше, чем в криптоне. При наличии дрейфового режима отношение на-

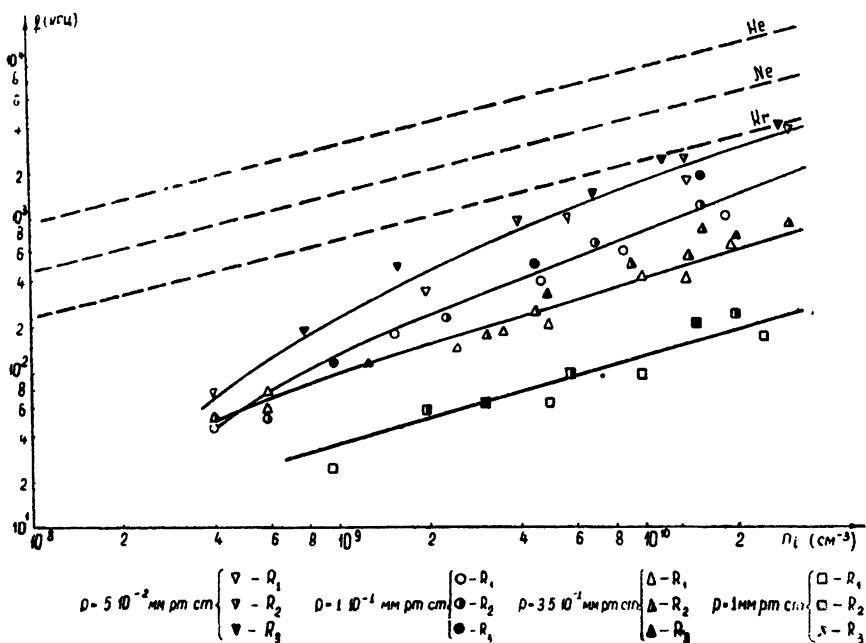


Рис. 3. Граничные частоты в ч. квазипотенциала в Кг.

правленных скоростей ионов при равных условиях равно отношению их подвижностей. Так, например, для давления 1 мм рт. ст., когда в обоих газах при всех концентрациях, с которыми мы работали, при формировании слоя осуществлялся дрейфовый режим, отношение дрейфовой скорости ионов Кг к дрейфовой скорости ионов Не равнялось 0,11 (см. таблицы 1 и 2), в то время как отношение подвижностей этих ионов в собственном газе равно примерно 0,09 [4]. Таким образом, результаты измерений нижней частотной границы в Кг и Не удовлетворительно согласуются с качественными следствиями модели ионной электростатической поляризации плазмы.

Рассмотрим количественно вопрос об электрическом поле внутри ограниченной плазмы, находящейся во внешнем переменном поле. Для простоты внешнее поле будем считать однородным и плотность ионов во всех точках плазмы в начальный момент одинаковой.

Уравнение движения „среднего“ иона запишется в виде

$$M \ddot{z} + \nu z = e [E^{\text{вн}}(t) - E^{\text{пол}}(t)]. \quad (8)$$

Здесь M —масса иона, ν —эффективная частота соударений ионов с нейтральными атомами, $E^{\text{вн}}$ и $E^{\text{пол}}$ —внешнее электрическое поле и поле поляризации соответственно. Электрическое поле поляризации есть поле внутри двойного слоя объемного заряда:

$$E^{\text{пол}} = 4\pi e n z(t), \quad (9)$$

где z —смещение иона в результирующем поле. Зависимость внешнего поля от времени будем считать гармонической:

$$E^{\text{вн}}(t) = E_0^{\text{вн}} \sin(\omega t).$$

Тогда (8) можно записать в виде

$$\ddot{z} + \nu \dot{z} + \omega_i^2 z = \gamma \sin(\omega t), \quad (10)$$

где

$$\omega_i^2 = 4\pi e^2 n / M \text{ и } \gamma = e E_0^{\text{вн}} / M. \quad (11)$$

Незатухающая во времени часть общего решения уравнения (10) при начальных условиях $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ имеет вид

$$z(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{\nu^2 \omega^2 + (\omega_i^2 - \omega^2)^2}} \sin \left[\omega t + \arctg \left(\frac{\nu \omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \right]. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (9), получаем выражение для поля поляризации:

$$E^{\text{пол}}(t) = \frac{4\pi e n \gamma}{\sqrt{\nu^2 \omega^2 + (\omega_i^2 - \omega^2)^2}} \sin \left[\omega t + \arctg \left(\frac{\nu \omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \right]. \quad (13)$$

Фактически действующее на частицы поле равно разности приложенного поля и поля поляризации:

$$E^{\text{д}}(t) = E_0^{\text{вн}} \sin(\omega t) - \frac{E_0^{\text{вн}} \omega_i}{\sqrt{\nu^2 \omega^2 + (\omega_i^2 - \omega^2)^2}} \times \\ \times \sin \left[\omega t + \arctg \left(\frac{\nu \omega}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \right]. \quad (14)$$

Из (14) легко найти амплитуду действующего поля

$$E_0^{\text{д}} = E_0^{\text{вн}} \sqrt{1 - \frac{\omega_i^2 (\omega_i^2 - 2\omega^2)}{\nu^2 \omega^2 + (\omega_i^2 - \omega^2)}}. \quad (15)$$

На рис. 4 представлены результаты численного расчета зависимости отношения $E_0^{\text{д}}/E_0^{\text{вн}}$ от частоты приложенного поля для Не по формуле (15). Эффективные частоты соударений брались в соответствии с давлениями, при которых производились измерения низ-

ней частотной границы. Аналогичные расчеты были проведены для Kr.

Как видно из рис. 4, амплитуда действующего внутри плазмы поля становится заметной при некоторых зависящих от давления газа и концентрации ионов частотах, затем нарастает с крутизной,

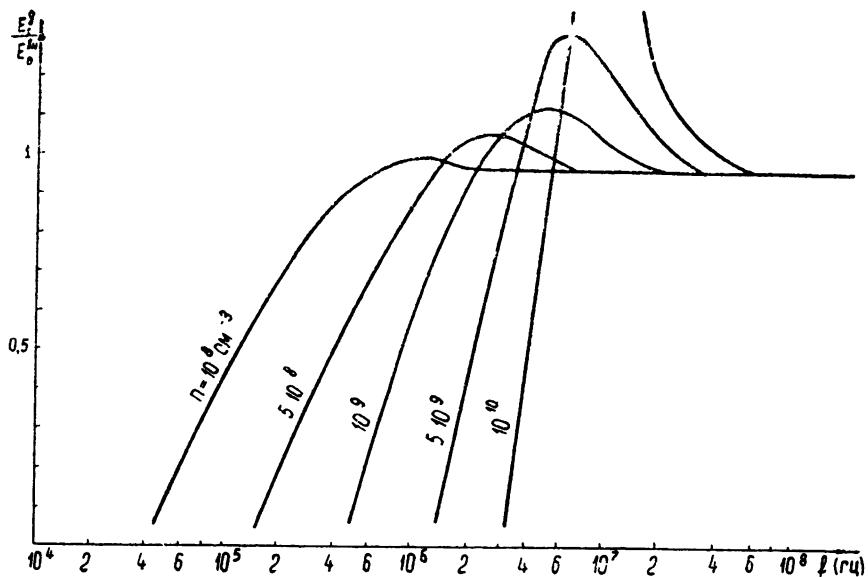


Рис. 4а. Зависимости E_0^A/E_0^{BH} от частоты поля, рассчитанные по формуле (15) для He: $p = 1 \text{ мм рт. ст.}$

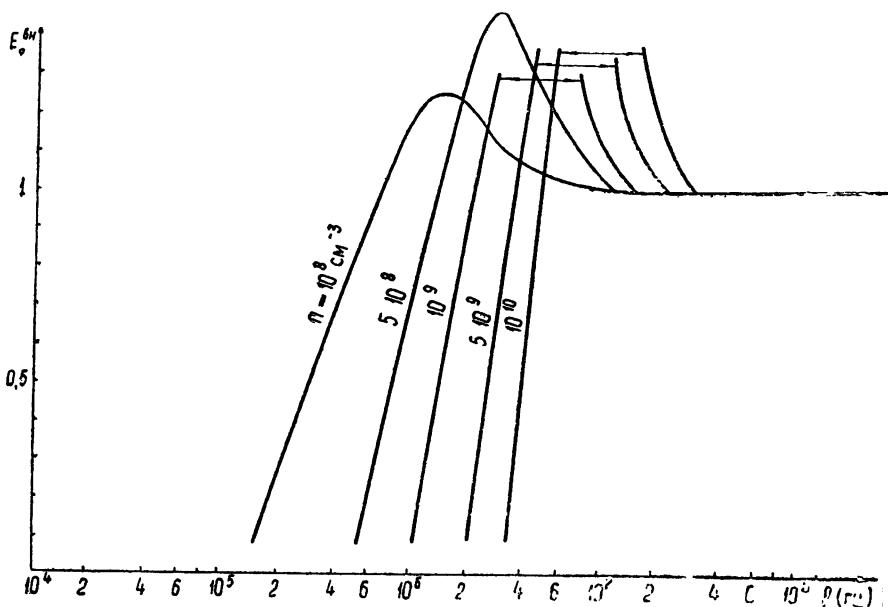


Рис. 4б. Зависимости E_0^A/E_0^{BH} от частоты поля, рассчитанные по формуле (15) для He. $p = 0,35 \text{ мм рт. ст.}$

определенной теми же факторами, и, проходя через максимум, быстро стремится к величине амплитуды приложенного переменного поля. Чем выше давление, тем меньше крутизна нарастания величины $E_0^{\text{л}}/E_0^{\text{вн}}$ и, следовательно, тем ниже частоты, при которых действующее внутри плазмы поле становится заметным. При пони-

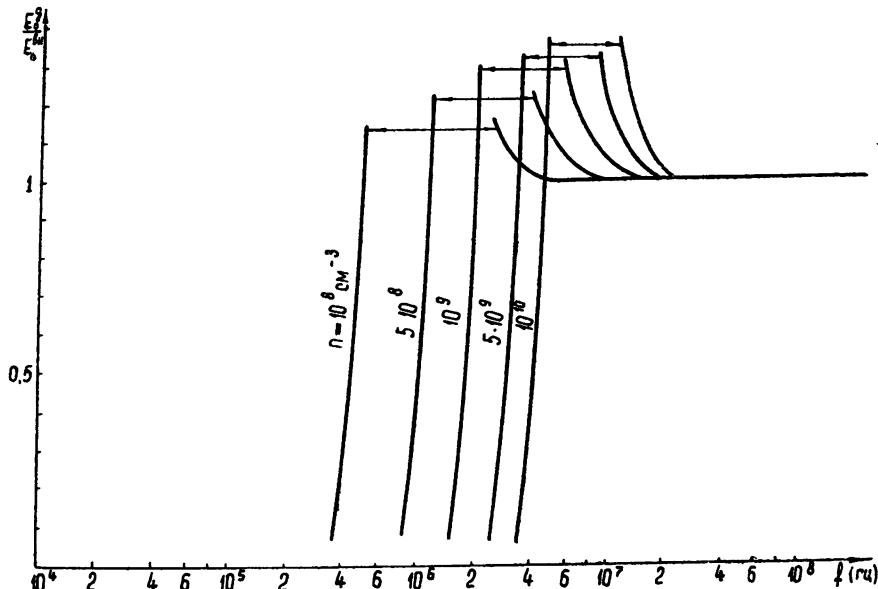


Рис. 4в. Зависимости $E_0^{\text{л}}/E_0^{\text{вн}}$ от частоты поля, рассчитанные по формуле (15) для Не: $p = 0,1 \text{ мм рт. ст.}$

жении давления газа и повышении концентрации ионов частоты, при которых начинается резкий подъем величины $E_0^{\text{л}}/E_0^{\text{вн}}$, приближаются к максимальному возможному значению

$$\omega_{\text{макс}} = 0,71 \omega_0. \quad (16)$$

Поскольку в положительном столбе концентрация зарядов уменьшается от оси к периферии, то в периферийных областях $E_0^{\text{л}}$ будет приближаться к $E_0^{\text{вн}}$ при более низких частотах. Можно утверждать, что если вблизи оси действующее поле достигает заметной величины, то на периферии оно уже установилось, т. е. стало равным приложенному извне полю. Итак, условно можно считать за нижнюю частотную границу частоту, при которой проникновение поля в приосевые области становится заметным (из-за большой крутизны нарастания действующего поля при изменении частоты неопределенность в определении граничной частоты незначительна).

Сравнения найденной таким образом граничной частоты с экспериментальными значениями нижней частотной границы для Не даны в таблице 3.

Таблица 3

| $n_i (cm^{-3})$ | 10^8 | $5 \cdot 10^8$ | 10^9 | $5 \cdot 10^9$ | 10^{10} | $p (мм рт. ст.)$ |
|-----------------|--------|----------------|--------|----------------|-----------|------------------|
| $f_r (кгц)$ | | | | | | |
| Теория | 360 | 850 | 1500 | 3000 | 4000 | 0,1 |
| Эксперимент | 360 | 860 | 1300 | 4000 | 6200 | |
| Теория | 130 | 460 | 900 | 2000 | 3200 | |
| Эксперимент | 130 | 400 | 620 | 1900 | 2700 | 0,35 |
| Теория | 40 | 130 | 400 | 1500 | 3000 | |
| Эксперимент | 60 | 170 | 250 | 800 | 1300 | 1,0 |

Аналогичное сравнение было произведено для криптона (таблица 4).

Таблица 4

| $n_i (cm^{-3})$ | $5 \cdot 10^8$ | 10^9 | $5 \cdot 10^9$ | 10^{10} | $p (мм рт. ст.)$ |
|-----------------|----------------|--------|----------------|-----------|------------------|
| $f_r (кгц)$ | | | | | |
| Теория | 120 | 320 | 800 | 1500 | 0,05 |
| Эксперимент | 100 | 240 | 1000 | 1600 | |
| Теория | 100 | 220 | 490 | 950 | |
| Эксперимент | 60 | 130 | 420 | 800 | 0,1 |
| Теория | 30 | 100 | 270 | 600 | |
| Эксперимент | 50 | 100 | 220 | 400 | 0,35 |
| Теория | 13 | 35 | 100 | 240 | |
| Эксперимент | 21 | 33 | 85 | 120 | 1,0 |

Таким образом, модель ионной электростатической поляризации приводит к граничным частотам, удовлетворительно согласующимся с результатами измерения нижней частотной границы в. ч. квазипотенциала в плазме положительного столба.

Авторы признательны А. А. Власову за интерес к работе и весьма полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Голованивский, А. А. Кузовников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 933 (1962).
2. К. С. Голованивский, А. А. Кузовников, Радиотехника и электроника 8, 622 (1963).
3. К. С. Голованивский, А. А. Кузовников, ЖТФ, 31, 890 (1961).
4. А. Энгель, Ионизованные газы, Физматгиз, М., 1959.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
14 сентября 1962 г.

LOWER FREQUENCY BOUNDARY OF THE HIGH-FREQUENCY QUASIPOTENTIAL IN HELIUM AND KRYPTON PLASMA

K. S. Golovanivsky, A. A. Kuzovnikov

Boundary frequencies of the quasipotential in helium and krypton plasma have been experimentally studied by the measurement of an ion current of the plane wall sonde. The results agree qualitatively with the model of plasma's ion electrostatic polarization in an external electric field. Lower boundary frequencies have been calculated, at which the external field begins to penetrate into the plasma; these frequencies conform satisfactorily to lower frequency boundaries of the quasipotential.

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ
С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.**

I. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский

Приводятся результаты численного решения задачи о распространении импульса тока в LC -линии передачи, нелинейными элементами которой являются индуктивности, заполненные ненасыщенным ферритом. Рассмотрены процессы формирования и отражения электромагнитных ударных волн как при медленном (квазистатическом), так и при быстром (пекогерентном) перемагничивании феррита. Полученные данные сопоставляются с результатами приближенного аналитического решения

Теория ударных электромагнитных волн, как и вообще нелинейных волновых процессов, сталкивается с большими математическими трудностями, связанными с интегрированием нелинейных уравнений в частных производных. Исключение составляют лишь некоторые задачи, имеющие прямую математическую аналогию в хорошо изученных разделах газодинамики сжимаемых сред (простые волны, граничные условия на разрыве и т. п.) [1]. Физически наиболее интересными являются, однако, задачи, в которых проявляется специфика ударных электромагнитных волн (различные виды нелинейных и дисперсионных зависимостей в среде, поляризация волн и т. д.). Некоторые из них удается решить приближенными методами путем введения тех или иных упрощающих предположений, границы применимости которых не всегда очевидны. Так, исследование структуры полей в области фронта ударной волны проведено (в большинстве случаев качественными методами) почти исключительно для стационарных (т. е., строго говоря, имеющих бесконечную протяженность во времени и пространстве) волн [2, 3, 7]. В анализе нестационарных процессов ударная волна фигурирует как разрыв [1, 4], за исключением некоторых слабонелинейных случаев [5, 6].

В экспериментах с ударными волнами в настоящее время наибольшее применение имеют линии задержки с сосредоточенными параметрами [7–10]. Исследование процессов в таких линиях еще более усложняется, так как приходится иметь дело с системами нелинейных дифференциально-разностных уравнений; полученные результаты являются в основном качественными и относятся к стационарным ударным волнам [11, 12]. При этом остается невыясненным, например, существенный вопрос об амплитуде колебаний на фронте ударной волны.

Такая неполнота теоретических результатов делает весьма желательным численное решение хотя бы некоторых задач, что позволит, во-первых, выяснить границы применимости полученных решений и, во-вторых, дополнить их информацией о тех характеристиках процесса, которые не поддаются аналитическому исследованию.

В настоящей статье излагаются результаты численного решения задачи о распространении импульса в линии передачи с сосредоточенными параметрами, представляющей собой цепочку идентичных четы-

рехполюсников, нелинейными элементами которых являются катушки индуктивности, намотанные на ферритовых сердечниках (рис. 1). В первой части работы рассматриваются нестационарные процессы, в частности, образование и развитие ударной волны. Результаты, относящиеся к структуре фронта квазистационарной ударной волны, изложены во второй части [15].

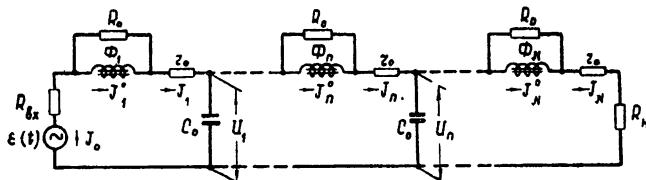


Рис. 1.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система дифференциально-разностных уравнений, описывающая процессы, происходящие в линии с сосредоточенными параметрами (рис. 1), имеет вид*

$$\begin{aligned} I_{n-1} - I_n &= C_0 dU_n/dt; \\ U_n - U_{n+1} &= d\Phi_n/dt + r_0 I_n; \\ I_n &= I_n^0 + (U_n - U_{n+1})/R_0 \quad (2 \leq n \leq N-1), \end{aligned} \quad (1)$$

где I_n и U_n —соответственно ток и напряжение в n -ом звене линии, I_n^0 и Φ_n —ток и магнитный поток в индуктивности звена, C_0 —емкость, а R_0 и r_0 —сопротивления потерь звена линии.

При достаточно медленном (на фронте волны $dH/dt < 10^8 \div 10^9$ эрстед·сек⁻¹) изменении магнитного поля в катушке индуктивности звена, когда необратимые процессы в феррите несущественны, изменение намагниченности ненасыщенного феррита описывается квазистатическим уравнением связи $\Phi = \Phi(I)$. Система (1) определяет краевую задачу, соответствующую схеме рис. 1, если задано аналитическое выражение для функции $\Phi_n(I_n^0)$. В рассматриваемом случае принято, что

$$\Phi_n(I_n^0) = L_0 I_n^0 + \Phi_0 \operatorname{arctg}(\alpha_0 I_n^0) \quad (2)$$

(здесь L_0 , Φ_0 и α_0 —постоянные параметры), что хорошо аппроксимирует экспериментальные кривые намагниченности ферритов [9].

При быстром ($dH/dt > 10^9$ эрстед·сек⁻¹) изменении магнитного поля в феррите звена квазистатический характер связи между потоком индукции Φ_n и током в катушке I_n^0 нарушается, и перемагничивание феррита происходит некогерентным образом [13]. При этом в уравнении для магнитного потока

$$\Phi_n = L_0 I_n^0 + \frac{4\pi\eta L_0}{p} M_n \quad (2a)$$

изменение продольной (по отношению к магнитному полю) компонен-

* Отметим, что если временной масштаб процессов велик по сравнению с постоянной времени звена, то система уравнений (1) описывает ТЕМ-волны в линии передачи с распределенными параметрами

ты намагниченности феррита M_n удовлетворительно описывается уравнением [5, 12]

$$dM_n/dt = q_0(1 - M_n^2/M_s^2) I_n^0. \quad (3)$$

Здесь M_s — намагниченность насыщения; η , q_0 , p — постоянные коэффициенты: $\eta \ll 1$ — коэффициент заполнения, учитывающий, что катушка индуктивности может быть не целиком заполнена ферритом, p зависит от конфигурации катушки, q_0 учитывает диссипативные свойства феррита [13]. Поперечные компоненты M_n в среднем равны нулю.

Решение системы уравнений (1) с учетом (2) или (2a), (3) будет полностью определено, если к ней добавить начальные и граничные условия. Предполагалось, что в начальный момент времени $t=0$ феррит в линии намагнчен однородно по всей длине, а напряжение и ток отсутствуют, т. е.

$$I_n(t=0) = U_n(t=0) = 0, \quad M_n(t=0) = M_0. \quad (4)$$

На вход линии подключена заданная импульсная ЭДС*

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} E_0 \sin^2(2\pi t/T_0) & (0 \leq t \leq T_0/2) \\ 0 & (t < 0, t > T_0/2) \end{cases} \quad (5)$$

с постоянным внутренним сопротивлением R_{bx} . На конце линия нагружена на активное сопротивление R_h (или линейную линию с таким же волновым сопротивлением); поэтому

$$U_N = R_N I_N. \quad (6)$$

Окончательно с учетом начальных и граничных условий (4)–(6) системы уравнений (в безразмерных переменных i , u , m , τ), описывающих процессы в линии, запишутся в следующем виде.

1) Для случая квазистатической связи (2) (при $r_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{d\tau} &= i_{n-1} - i_n; \\ \frac{di_n}{d\tau} &= \frac{u_n - u_{n+1}}{1 + a[1 + [i_n + b(u_n - u_{n+1})]^2]^{-1}} + b(i_{n-1} - 2i_n + i_{n+1}); \\ \frac{di_1}{d\tau} &= \frac{1}{1 + b\rho_{bx}} \frac{\varepsilon(\tau) - i_1 \rho_{bx} - u_1}{1 + a[1 + [i_1 + b(\varepsilon(\tau) - i_1 \rho_{bx} - u_1)]^2]^{-1}} - \frac{b}{1 + b\rho_{bx}} \left(i_1 - i_2 - \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \right); \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_{50} = \rho_h i_{50} \quad (N=50); \quad i_n(\tau=0) = u_n(\tau=0) = 0,$$

где

$$u_n = (\alpha_0/\Phi_0)U_n, \quad i_n = \alpha_0 I_n, \quad \tau = t/\tau_0 \quad (\tau_0^2 = L_0 C_0)$$

и постоянные параметры

$$a = \sigma_0 \Phi_0 / L_0, \quad b = \rho_0 / R_0, \quad \rho_{bx} = R_{bx}/\rho_0, \quad \rho_h = R_h/\rho_0, \quad \rho_0^2 = L_0/C_0,$$

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} \varepsilon_0 \sin^2(2\pi\tau/T) & (0 \leq \tau \leq T/2) \\ 0 & (\tau < 0, \tau > T/2) \end{cases}$$

* Форма импульса типична для имеющихся экспериментов [8, 9]

$$\left(\varepsilon_0 = \frac{\alpha_0}{\Phi_0} E_0, \quad T = \frac{T_0}{\tau_0} \right).$$

Вычисления проводились для 6 вариантов со значениями параметров приведенных в таблице 1.

Таблица 1

| Параметры \ Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------------------|-----|-------|-----|-------|-----|-----|
| ε_0 | 20 | 20 | 100 | 100 | 20 | 100 |
| a | 600 | 600 | 600 | 600 | 100 | 100 |
| b | 0 | 0,005 | 0 | 0,005 | 0 | 0 |
| $\rho_{\text{вх}}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| ρ_n | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $T/2$ | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 |

2) Для случая динамической связи (2а) (при $1/R_0=0$)

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{d\tau} &= i_{n-1} - i_n; \\ \frac{di_n}{d\tau} &= u_n - u_{n+1} - q(1 - m_n^2) i_n - r i_n; \\ \frac{dm_n}{d\tau} &= q(1 - m_n^2) i_n; \\ \frac{di_1}{d\tau} &= \varepsilon(\tau) - u_1 - i_1 \rho_{\text{вх}} - q(1 - m_1^2) i_1 - r i_1; \\ u_{100} &= \rho_n i_{100} \quad (N = 100), \end{aligned} \quad (8).$$

где

$$u_n = (p \rho_0 / M_s) U_n, \quad i_n = (p / M_s) I_n, \quad m_n = M_n / M_s,$$

$$r = r_0 / \rho_0, \quad q = q_0 \tau_0.$$

Начальные условия и форма $\varepsilon(\tau)$ ($\varepsilon_0 = p \rho_0 E_0 / M_s$) — те же, что и в предыдущем случае*.

Вычисления производились для 11 вариантов, соответствующих различным наборам параметров, указанных в таблице 2.

Таблица 2

| Параметры \ Вариант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---------------------|------|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| ε_0 | 7,5 | 7,5 | 7,5 | 7,5 | 7,5 | 3,75 | 15 | 7,5 | 7,5 | 7,5 | 7,5 |
| q | 0,62 | 1,32 | 0,132 | 0,62 | 0,62 | 0,62 | 0,62 | 0,62 | 0,62 | 0,62 | 0,62 |
| m_0 | 0 | 0 | 0 | +0,9 | -0,9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\rho_{\text{вх}}$ | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 1 |
| ρ_n | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3,75 | 3,75 | 3,75 | 1 |
| $T/2$ | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 240 | 480 | 240 | 240 |
| r | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,05 | 0 |

* Число звеньев линии N здесь взято в два раза большим, так как процесс формирования ударной волны, ввиду малости постоянной времени звена τ_0 , занимает большее время, чем в первом случае.

Отметим, что выбранные значения параметров соответствуют реальным условиям экспериментов [9, 10]. Например, в варианте 1 таблицы 1 при $\tau_0 = 10^{-6}$ сек, длительности импульса $60 \cdot 10^{-9}$ сек и $\varepsilon_0 = 20$ амплитуда импульса магнитного поля равна 30 эрстед (рис. 2), а варианту 1 таблицы 2 при $M_s = 300$ гс, $\tau_0 = 0,5 \cdot 10^{-9}$ сек отвечает амплитуда импульса магнитного поля 450 эрстед при той же длительности импульса.

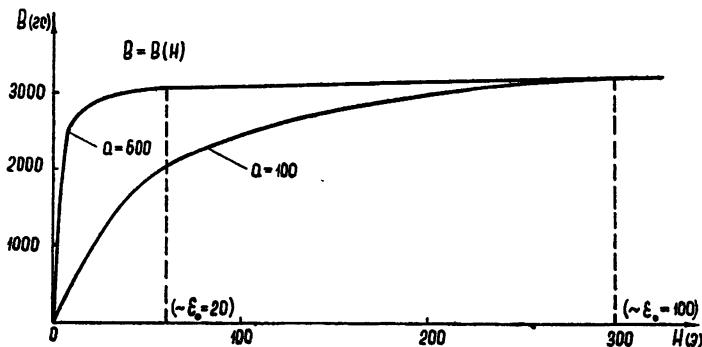


Рис. 2.

Решение было выполнено на вычислительной машине БЭСМ-2. Система (7) решалась методом Рунге—Кутта с автоматическим выбором шага, а система (8)—методом Эйлера с последующими итерациями на каждом шаге (величина шага $\Delta\tau \sim 0,01 \div 0,02$)*. На ленту печатающего устройства выводились значения функций i , u (для второго случая также i и m) в 17 точках линии через интервалы времени $\Delta\tau = 1$, а также значения i , u , m во всех звеньях для моментов времени $\tau = 10, 20, 40, 80, 160$. Кроме того, вместе с i , u , m через интервалы $\Delta\tau = 1$ печатались максимальные в данный момент значения функций i , $di/d\tau$, $du/d\tau$ и номера соответствующих звеньев. Момент τ_{\max} , до которого доводилось решение в различных вариантах, изменялся от 200 до 600. Погрешность вычислений—не более 10^{-2} .

2. ОБРАЗОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ УДАРНЫХ ВОЛН

1. Квазистатическое перемагничивание феррита. На рис. 3а показана эволюция формы импульса тока при распространении вдоль линии**. Графики построены по результатам численного решения вариантов 1 и 2 (таблица 1). Видно, что в первых ячейках линии ($n \sim 1 \div 15$) каждая точка профиля волны бежит с постоянной скоростью, так что ширина импульса на любом фиксированном уровне тока остается постоянной; такая деформация импульса характерна для простой волны. Начиная с $n \sim 15 \div 20$, скорость нарастания фронта импульса становится достаточно большой, после чего начинают сказываться дисперсионные и диссипативные свойства линии (рис. 3б). Пространственная дисперсия (линия является периодической структурой [11]) приводит к появлению колебаний на вершине импульса. Амплитуда их в дальнейшем (см. $n = 30$) увеличивается, а частота уменьшается***.

* Программирование и расчеты на машине были выполнены В. П. Алешиным, Т. Н. Александровской и С. Ф. Морозовым. Особенности программирования для систем высокого порядка типа (1) изложены в [10].

** Все последующее справедливо и для импульсов напряжения

*** Влияние пространственной дисперсии на структуру фронта ударной волны более подробно рассмотрено во второй части работы [15].

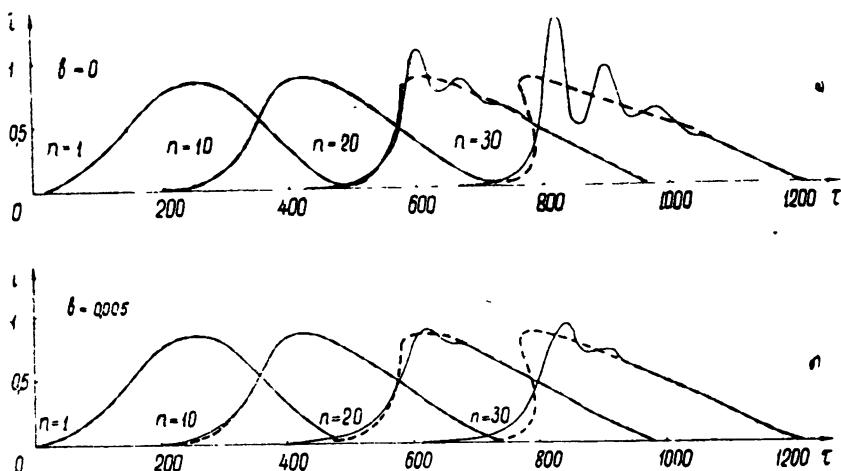


Рис. 3.

На том же рис. За пунктиром указаны теоретические кривые тока, рассчитанные по формуле, справедливой для линии с распределенными параметрами:

$$i_n(\tau) = i_0 \sin^2 \left[\frac{2\pi}{T} (\tau - n \Delta^*) \right], \quad (9)$$

где $\Delta^* = 1 + a/[1 + (i^*)^2] = \text{const}$ —безразмерное время задержки на одну ячейку линии точки профиля импульса тока на уровне $i = i^*$. Хорошее совпадение аналитического и численного решений наблюдается до $n \sim 15$.

Отметим, что отличие формы импульса от простой волны (9) возникает сначала в области вершины. Это происходит потому, что вершина импульса (при $\epsilon_0 = 20$) заходит в область наиболее резкого изменения величины $\mu = dB/dH$ ($d\Phi/di$) (см. рис. 2), вследствие чего скорость точек верхней части профиля импульса значительно превышает скорость точек его нижней части.

На рис. 3б показана деформация импульса в линии с потерями ($b \neq 0$), обусловленными сопротивлениями R_o . Видно, что в начале линии, когда скорость изменения тока на фронте волны незначительна, потери практически не влияют на характер формирования простой волны. Однако в дальнейшем они способствуют демпфированию колебаний на вершине импульса.

При больших амплитудах импульса ($\epsilon_0 = 100$, варианты 3, 4) характеристику намагничения (рис. 2) с достаточной степенью точности можно считать Z-образной; поэтому простые волны практически не имеют места. Начиная уже с первых ячеек, происходит быстрое увеличение крутизны фронта импульса; одновременно за фронтом возникают осцилляции. Все сказанное выше вполне удовлетворительно согласуется с результатами экспериментальных исследований [8, 10].

2. Динамическое (некогерентное) перемагничивание феррита. Нестационарные процессы в линии при некогерентном перемагничивании феррита протекают качественно отличным от предыдущего случая образом—простые волны не образуются. С самого начала в образовании и развитии ударной волны существенную роль играют релаксационные явления, возникающие при перемагничивании фер-

рита, и связанная с ним диссипация энергии волн [5, 8, 9]. Действительно, во всех вариантах таблицы 2 крутизна переднего участка импульса в процессе распространения возрастает и в большинстве из них достигает значения, существенно большего, чем в остальной части импульса. На этом же участке намагниченность m , изменяясь монотонно, достигает величины, практически равной единице, и в дальнейшем остается постоянной (см., например, рис. 4).

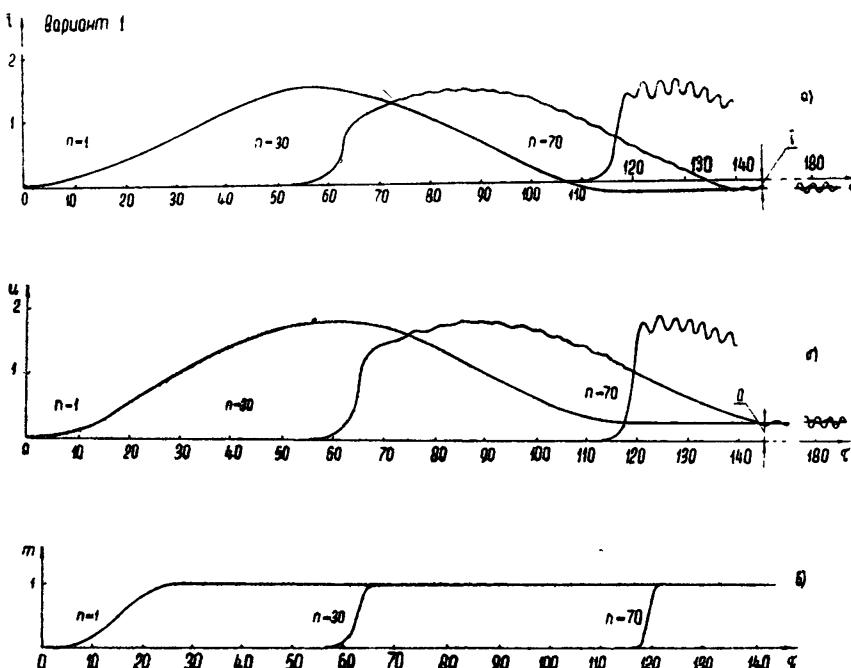


Рис. 4.

Здесь можно говорить об образовании ударной волны, перед фронтом которой $i=0$, $u=0$, а позади свойства цепочки линейны. Поскольку для всех вариантов $T/2 \gg 1$ (т. е. дисперсией по отношению к входному импульсу в линейном случае можно пренебречь), спад импульса распространяется со „скоростью света“, т. е. время прохождения им одного звена $\tau_3=1$.

Влияние параметров звеньев линии на процесс развития ударной волны можно видеть из рис. 6, где показано изменение амплитуды ударной волны i_p вдоль линии при одинаковых параметрах входного импульса. Для крутых перепадов („разрывов“) интенсивность диссипации (q) не влияет на процесс формирования (кривые рис. 6, построенные по данным вариантов 1 и 2, практически совпадают), а увеличение начальной намагниченности m_0 замедляет указанный процесс. Все сказанное выше хорошо согласуется с экспериментальными исследованиями [8, 9] и качественно — с приближенной теорией, развитой в [5].

Аналитическое решение, полученное в [5] для случая слабонелинейной линии без учета пространственной дисперсии, нетрудно сравнить с численным для варианта 3, где выполняется условие малости влияния феррита ($i_{\max}/(1-m_0) \sim 15 \gg 1$), а дисперсию можно

не учитывать. Изменение формы импульса тока при распространении вдоль линии (для варианта 4) иллюстрирует рис. 5, где сплошные кривые построены по результатам численного счета, а пунктирные—по приближенным формулам [5]

$$e^{k\varphi/(k+1)} - e^{-\varphi/(k+1)} = \left\{ e^{k\tilde{\varphi}(\tau-n)/(k+1)} - e^{\tilde{\varphi}(\tau-n)/(k+1)} \right\} e^{-8\pi kgn/(k+1)^2}; \quad (10)$$

$$i = \tilde{i}(\tau - n) \frac{ke^{\tilde{\varphi}(\tau-n)} - 1}{e^{\tilde{\varphi}(\tau-n)} - 1} \frac{e^{\varphi} - 1}{ke^{\varphi} - 1},$$

где

$$k = \frac{1 + m_0}{1 - m_0}, \quad \varphi = 2q \int_{-\infty}^{\tau} id\tau, \quad \tilde{\varphi}(\tau - n) = 2q \int_{-\infty}^{\tau} \tilde{i}(\tau - n)d\tau$$

—решение, соответствующее линии с распределенными параметрами без феррита. Налицо хорошее соответствие приближенного и точного решений.

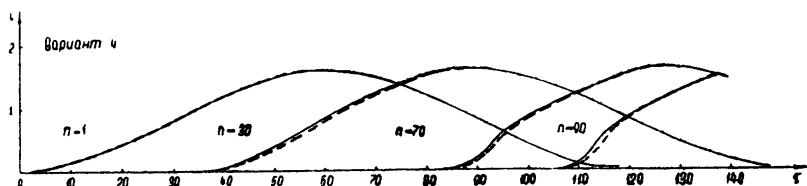


Рис. 5.

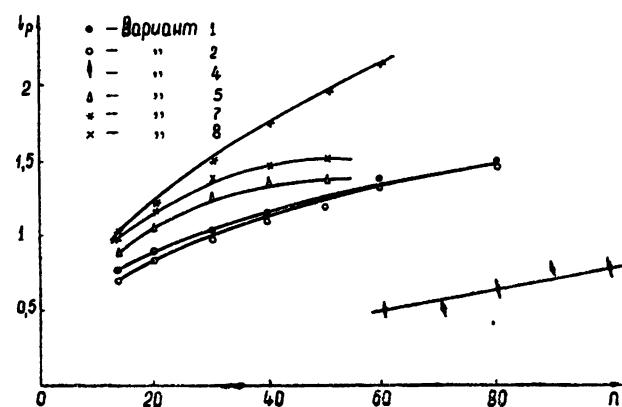


Рис. 6

3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА УДАРНОЙ ВОЛНЕ. ОТРАЖЕНИЯ

При квазистатическом перемагничивании возрастает крутизна фронта импульса в целом. Начиная с некоторого момента времени, крутизна фронта и скорость ($1/\Delta_p$) распространения волны практически остаются постоянными. Теоретически из граничных условий на фронте ударной волны [1, 11] имеем

$$\Delta_p = \left[\frac{\alpha_0}{\Phi_0} \frac{\Phi(I)}{I} \right]^{1/2} \quad (11)$$

или, с учетом (2),

$$\Delta_p = \left(1 + \frac{a \operatorname{arctg} I}{I} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

где I —амплитуда импульса тока*.

Величины безразмерного времени запаздывания фронта импульса на одну ячейку линии Δ_p , вычисленные по формуле (11) и полученные из данных численного счета, хорошо совпадают. Например, для вариантов 1, 3, 5 (таблица 1) соответственно получаем $\Delta_{p\text{расч}} = 21,4; 9,1; 8,7$, тогда как $\Delta_{p\text{теор}} = 22; 9,8; 9$.

При некогерентном перемагничивании, как уже отмечалось, в большинстве вариантов на начальном участке фронта импульса быстро возникает область с большой крутизной („разрыв“). В этом случае из граничных условий на разрыве, согласно [1, 5, 12], вместо (11) имеем

$$\Delta_p = \rho_p = \left(1 + \frac{1 - m_0}{i_p} \right)^{1/2}, \quad (12)$$

где Δ_p —безразмерное время прохождения фронтом ударной волны одной ячейки линии, i_p —амплитуда тока „разрыва“, $\rho_p = u_p/i_p$ —безразмерное волновое сопротивление линии по отношению к ударной волне. На рис. 7 приведены кривые зависимости Δ_p и ρ_p от i_p , построенные по формуле (12). Точками изображены данные численного счета для всех вариантов таблицы 2. Хорошее совпадение результатов показывает правильность „разрывной“ трактовки ударной волны в случае некогерентного перемагничивания феррита.

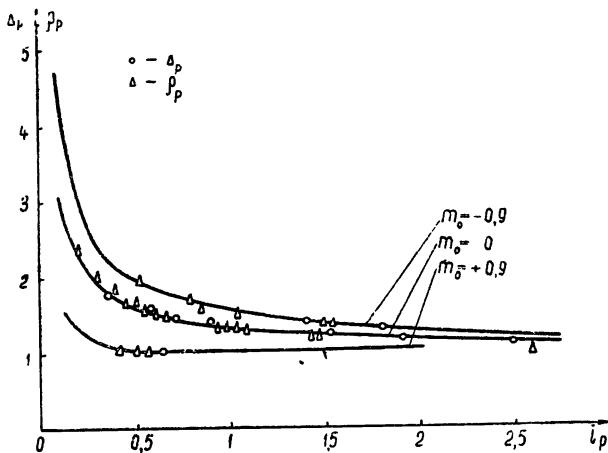


Рис. 7.

Сделаем теперь несколько замечаний в связи с отражениями от „разрыва“ и от нагрузки при динамическом перемагничивании феррита.

1. *Отражения от „разрыва“.* Почти во всех вариантах таблицы 2 после прохождения импульса возникает продолжительная область, в которой значения i и u практически постоянны или колеблются около постоянных значений (см. рис. 4а, б). Наличие та-

* При наличии колебаний на фронте импульса величина I определяется как максимальная амплитуда усредненного тока, около которого происходят колебания

кой области обусловлено отражением от ударной волны и последующими переотражениями от входа линии*. Указанные величины \bar{i} и \bar{u} можно вычислить, учитывая, что за „разрывом“ $m=1$, т. е. линия линейна**. Рассматривая прошедшую и отраженную волны на входе линии, нетрудно показать, что

$$-\bar{i} = \frac{\bar{u}}{\rho_{\text{вх}}} = i_p \frac{\rho_p - 1}{\rho_{\text{вх}} + 1}. \quad (13)$$

Следовательно, всегда $\bar{i} < 0$, $\bar{u} > 0$. При $\rho_{\text{вх}} = 1$ (13) дает ток отраженной от разрыва волны в линии с кусочно-линейной характеристикой намагничивания [7].

На рис. 8 построены кривые (13) для используемого в большинстве вариантов значения $\rho_{\text{вх}} = 3,75***$. Данные численного решения (отмеченные точками) хорошо описываются формулой (13), из которой видно, что \bar{i} и \bar{u} в широких пределах слабо зависят от i_p (при $i_p \rightarrow \infty$ $\bar{i} \rightarrow -(1-m_0)/2(\rho_{\text{вх}}+1)$). Этим и объясняется то, что \bar{i} и \bar{u} длительное время остаются постоянными, хотя i_p изменяются довольно сильно****.

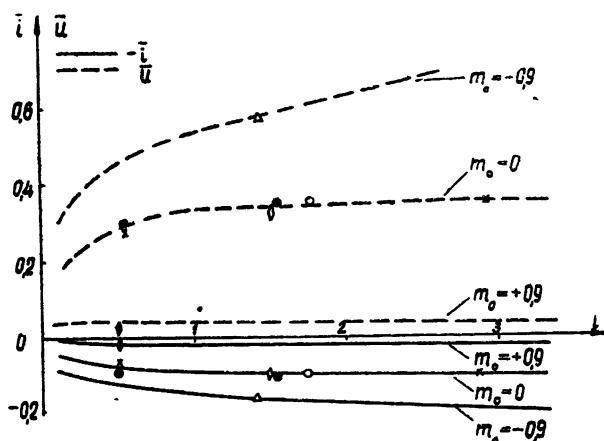


Рис. 8.

2. Отражение от конца линии. После того, как фронт ударной волны достигает последнего звена, происходит отражение от нагрузки. Величины i_n и u_n тока и напряжения в нагрузке в момент отражения можно определить без труда, записывая граничные условия для падающей и отраженной волн и учитывая линейность линии за разрывом:

$$i_n = \frac{u_n}{\rho_n} = i_p \frac{1 + \rho_p}{1 + \rho_n}. \quad (14)$$

* В варианте 11 таких переотражений не происходит, так как $\rho_{\text{вх}} = 1$.

** Строго говоря, изменение знака \bar{i} на спаде импульса приводит к медленному обратному перемагничиванию феррита. Однако в рассматриваемом интервале времени t остается практически равным единице, так что линейность линии не нарушается.

*** На рис. 8 для численного решения на оси абсцисс откладывались максимальные значения i_p в каждом варианте.

**** Расширение области постоянных \bar{i} и \bar{u} происходит также за счет допплер-эффекта (отражение от удаляющейся границы).

В частности, при $\rho_h=0$ (короткозамкнутая линия) имеем случай, рассмотренный в [14]. Рис. 9 (где сплошные кривые соответствуют формуле (14)) показывает, что отражение i_h/i_p может существенно превышать значение 2, максимальное в линейном случае.

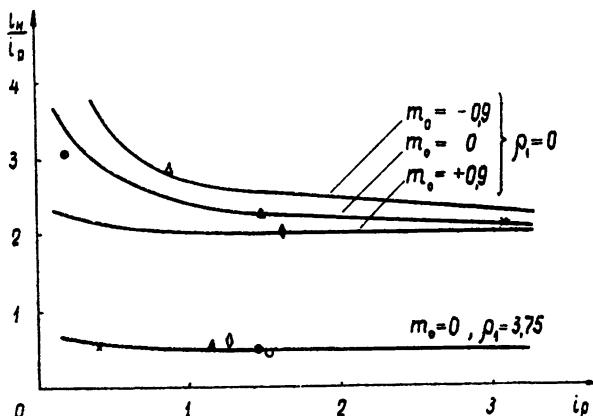


Рис. 9.

Заметим, что теоретическое рассмотрение вопросов об отражениях в линии с квазистатическим перемагничиванием феррита более сложно, чем при некогерентном, так как в этом случае за фронтом ударной волны (на спаде импульса) линия продолжает оставаться существенно нелинейной и следует учитывать взаимодействие падающей и отраженной волн. Из численных расчетов, однако, следует, что после прохождения импульса область с постоянными $i=i$ и $u=u$ не образуется, а коэффициент отражения от конца короткозамкнутой линии также превышает 2.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 36, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 79 (1960).
- 2 Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 276 (1960).
- 3 Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 324, 338 (1963).
- 4 Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 955 (1961).
- 5 Л. А. Островский, ЖТФ, 33, 1080 (1963).
- 6 Р. В. Хохлов, Радиотехника и электронника, 4, 917 (1961).
- 7 И. Г. Катаев, Вопросы радиоэлектроники, радионизмерительная техника, сер. 6, вып. 3, 3 (1960).
- 8 А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 551 (1963).
- 9 А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 561 (1963).
- 10 А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 116 (1962).
- 11 Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 860 (1961).
- 12 Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1130 (1962).
- 13 Е. М. Сугогу, J. Appl. Phys., 28, 1011 (1957); 29, 1709 (1958).
- 14 Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 413 (1963).
- 15 Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 985 (1963).
- 16 В. П. Алешин, С. Ф. Морозов, Доклад на Всесоюзной конференции по применению вычислительных машин в народном хозяйстве, Горький, 1962.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN NONLINEAR LUMPED
TRANSMISSION LINES. I. NONSTATIONARY PROCESSES*Yu. K. Bogatyryov, L. A. Ostrovskii*

The results are given of the numerical calculation of the current impuls propagation in LC transmission line the nonlinear elements of which are inductances filled with an unsaturated ferrite. The processes of forming and reflecting the electromagnetic shock waves has been considered, using both the slow (quasi-static) and the rapid (incoherent) reversal of the ferrite magnetic polarity. The results obtained are compared with those of an approximate analytical solution.

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ
С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.
II. СТРУКТУРА ФРОНТА УДАРНЫХ ВОЛН**

Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский

Обсуждаются результаты численного решения поставленной в статье [1] задачи. Исследуется структура квазистационарных ударных волн. Выясняется влияние параметров линии и феррита на длительность фронта волны, на период и амплитуду колебаний за фронтом. Полученные данные сопоставляются с результатами приближенного аналитического решения.

В первой части настоящей работы [1] рассмотрены процессы образования и развития ударной волны, граничные условия и некоторые вопросы, связанные с отражениями в *LC*-линии передачи, нелинейными элементами которой являются индуктивности, заполненные ненасыщенным ферритом*. Исследования проводились для двух моделей перемагничивания феррита: квазистатической и динамической (некогерентной). Из полученных результатов следует, что в обоих случаях, начиная с некоторого момента, структура фронта ударной волны и значения величин по обе стороны от нее мало изменяются в течение достаточно большого (по сравнению с ее собственной длительностью) времени. Такую волну естественно рассматривать как локально стационарную. Ниже приводятся результаты численного решения задачи о распространении импульса, относящиеся к структуре фронта стационарной волны (длительность начального участка, период и амплитуда колебаний за фронтом). Полученные данные сопоставляются с результатами приближенного аналитического решения.

**1. СТРУКТУРА ФРОНТА ПРИ НЕКВАЗИСТАТИЧЕСКОМ
ПЕРЕМАГНИЧИВАНИИ ФЕРРИТА**

На структуру фронта ударной волны существенное влияние оказывает дисперсия рассматриваемой цепочки. Дисперсионные свойства линии и феррита перед фронтом волны и за ним различны. Поэтому вопросы о длительности апериодического участка фронта ударной волны τ_p , периоде и амплитуде колебаний за этим участком фронта будем исследовать отдельно.

1. Время нарастания тока в ударной волне. Если за время τ_p форма начального участка фронта изменяется незначительно (исключая изменения колебательного характера), то, как уже отмечалось, можно рассматривать ударную волну в каждый момент времени как стационарную. Страго аналитически найти структуру даже стационарной волны в линии с сосредоточенными параметрами не представляется возможным; однако τ_p можно оценить из ли-

* Там же приведены таблицы изменения параметров для всех исследованных вариантов.

нейной теории по коэффициенту нарастания тока вблизи состояния равновесия ($i = 0$, $u = 0$, $m = 0$) [2]. Такая оценка приводит к формуле

$$2 \operatorname{ch}(\Delta_p \lambda) - 2 = \lambda^2 + 4\pi(1 - m_0^2)q\lambda. \quad (1)$$

Кривые $1/\tau_p = f(i_p)$, построенные с помощью (1), приведены на рис. 1; точки означают результаты численного счета (под τ_p здесь

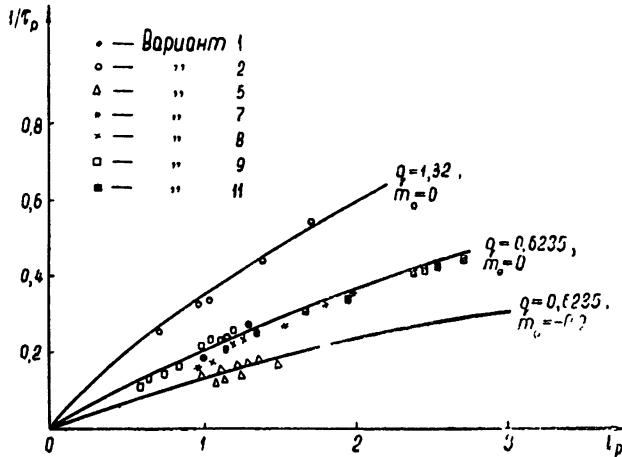


Рис. 1.

следует понимать время нарастания тока i от $0,1i_p$ до $0,9i_p$, т. е. $\tau_p \approx 2,2/\lambda$). Большинство точек лежит вблизи аналитических кривых; однако имеются и некоторые отклонения, что говорит об ограниченной применимости оценок, сделанных в линейном приближении для стационарной волны.

2. Колебания за фронтом ударной волны*. Как уже отмечалось, появление колебаний связано с дискретностью параметров линии, т. е. с пространственной дисперсией. Параметры колебаний непосредственно за фронтом „локально стационарной“ ударной волны в основном определяются ее амплитудой i_p или скоростью $1/\Delta_p$ в данный момент. По мере роста i_p и $1/\Delta_p$ предыдущие группы колебаний отстают и, таким образом, весь импульс „заполняется“ колебаниями, амплитуда которых в данной точке падает со временем, поскольку „отставшие“ цуги соответствуют меньшим i_p . Картина такого типа приведена на рис. 2а.

Отметим, что период колебаний τ_\sim изменяется мало и равен приблизительно 3. Нетрудно видеть, что соответствующая частота близка к критической частоте данной цепочки четырехполюсников, т. е. имеют место „π-колебания“ ($\omega_{kp} = 2$, $T_{kp} = \pi$) [2]. Действительно, графики распределения i вдоль линии в фиксированные моменты времени (см. рис. 2б, где нанесен дискретный ряд точек, соответствующих целым n и соединенных для наглядности отрезками прямых) показывают, что разность фаз колебаний в соседних

* Страге говоря, область, где имеются колебания, должна быть отнесена к фронту ударной волны. Однако при отсутствии других видов диссипации, кроме характеризуемых параметром q , протяженность ударной волны является бесконечной (в насыщенному ферриту колебания не затухают). Поэтому под фронтом здесь понимается область апериодического нарастания тока.

ячейках близка к π^* . Фазовая скорость колебаний непосредственно за фронтом равна $1/\Delta_p$, групповая же скорость близка к нулю, чем объясняется быстрое отставание от фронта излучаемых импульсов и „заполнение“ импульса колебаниями.

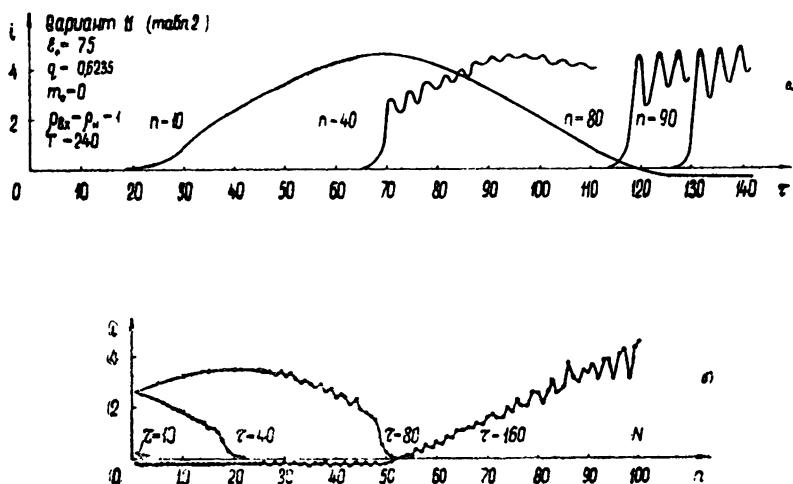


Рис. 2.

Аналитически величина τ_\sim , как и Δ_p , может быть найдена из линейной теории, согласно которой [2]

$$\operatorname{ch}(\Delta_p \lambda) - 1 = \frac{1}{2} \lambda^2 \quad (\lambda = j 2\pi/\tau_\sim). \quad (2)$$

Отсюда ясно, что ω_{kp} представляет собой максимально возможное значение частоты колебаний $1/\tau_\sim$. При этом изменение i_p в пределах от 1 до 2, соответствующее рассмотренным вариантам, мало влияет на величину $\omega \sim \omega_{kp}$, что и согласуется со сказанным выше.

Перейдем к вопросу об амплитуде колебаний \bar{i}_\sim . Уравнение баланса энергии для стационарной волны дает:

$$\bar{s}_\sim = \frac{z_p \bar{i}_\sim^2}{2} = \frac{\bar{s}_- - v_p \bar{w}_- - Q}{v_p/v_{rp} - 1}. \quad (3)$$

Здесь \bar{s}_- и \bar{w}_- —поток и плотность энергии волны, имеющей за „разрывом“ постоянные значения i_p , v_p , $z_p = \bar{u}_-/i_-$ —волновое сопротивление, v_{rp} —групповая скорость рассматриваемых колебаний ($v_{\text{фаз}} = v_p$), Q —энергия, диссирируемая в единицу времени на фронте ударной волны. Величину Q , однако, вычислить не удается, так как для этого нужно знать структуру волны во всей области, где происходит диссипация. Во всяком случае из (3) следует, что при $v_{rp} < v_p = v_{\text{фаз}}$ за ударной волной всегда имеют место колебания, причем i_- падает с ростом Q (в данном случае незатухающие коле-

* Небольшое отличие сдвига фаз от π приводит к тому, что разность величин i и i_- в соседних ячейках может постепенно изменяться от нуля до некоторой максимальной величины.

бания с $v_{\text{фаз}} = v_p$ могут быть только для i_p , больших некоторого конечного значения).

На рис. 3 показана зависимость \bar{i}_\sim от i_p , полученная путем чис-

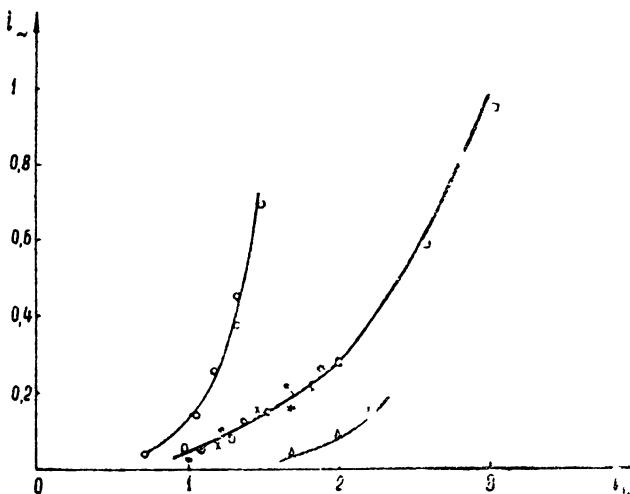


Рис. 3

ленного решения. Так как величина i_\sim растет с ростом q , то из (3) можно заметить, что в рассматриваемой области значений i_p величина Q падает с ростом q (за счет уменьшения τ_p). Отметим, что колебания заметной амплитуды i_\sim имеют место, как и следовало ожидать, с некоторого конечного значения i_p .

Если кроме магнитных потерь есть еще какой-либо механизм диссипации, действующий во всех точках волны (например, потери, обусловленные сопротивлением $r_0 \neq 0$, включенным последовательно с индуктивностью звена линии; вариант 10 таблицы 2 [1]), то колебания также быстро затухают.

2. СТРУКТУРА ФРОНТА ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИИ ФЕРРИТА

Теоретическое рассмотрение структуры фронта стационарной ударной волны, проведенное в [3], показало, что при квазистатическом перемагничивании феррита в линии могут существовать стационарные волны в виде перепада с последующими колебаниями лишь при наличии диссипации энергии в области перепада („разрыва“). Поэтому здесь подробно будут рассмотрены варианты 2 и 4, где $b \neq 0$ (см. таблицу 1 в [1]).

Для получения более полной информации о структуре фронта стационарной волны, чтобы точнее сопоставить данные численного счета с аналитически полученными, оказалось целесообразным несколько изменить форму импульса на входе линии и задать $\varepsilon(\tau)$ при $T/4 < \tau < T/2$ равным не $\varepsilon_0 \sin^2(2\pi\tau/T)$, а $\varepsilon_0 = \text{const}$ (при $\tau > T/4$ $\varepsilon(\tau)$ также равно ε_0).

При расчетах диссипация в линии, как уже отмечалось в первой части работы, считывалась сопротивлением $R_0(b)$, влияние которого в некотором смысле аналогично проявлению вязкости феррита, характеризуемой параметром q (при некогерентном перемагничивании).

На рис. 4 показана форма волн тока и напряжения в различных звеньях линии. Видно, что, начиная с $n \sim 10$, форма волны практически не изменяется и ее в первом приближении можно рассматривать как стационарную.

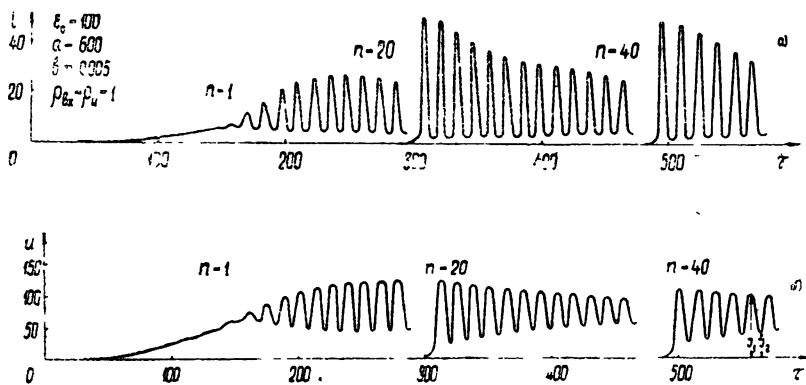


Рис. 4.

1. Время нарастания тока. Значение величины τ_p , полученное из результатов численного решения, хорошо совпадает с вычисленным из дисперсионного уравнения линии, которое для начального участка фронта волны имеет вид [3]

$$2 \operatorname{ch}(\Delta_p \lambda) - 2 = \frac{(1+a)\lambda^2}{1 + (1+a)b\lambda}. \quad (4)$$

При этом выполняется соотношение $\tau_p \approx 1/\lambda$. Например, для варианта 4 ($\Delta_p = 9,1$; $a = 600$; $b = 0,005$) $\tau_p = 2$, а $1/\lambda = 2,3$. К сожалению, целиком проследить зависимость τ_p от $i_p(\Delta_p)$ не удается ввиду малого количества вариантов.

2. Колебания за фронтом волны. Вначале отметим, что причина возникновения и механизм установления колебаний за фронтом ударной волны, естественно, те же, что и в рассмотренном ранее случае. Период колебаний τ_\sim приблизительно постоянен и хорошо совпадает с найденным из линейной теории, согласно которой [3]

$$2 \operatorname{ch}(\Delta_p \lambda) - 2 = \left(1 + \frac{a}{1+I^2}\right) \lambda^2 \left[1 + \left(1 + \frac{a}{1+I^2}\right) b\lambda\right]^{-1} \quad (5)$$

($\lambda = j2\pi/\tau_\sim$). Так, для варианта 4 (рис. 3) из формулы (5) имеем $\tau_\sim = 12$, а из численного счета $\tau_\sim = 13$.

Что касается формы колебаний, то при больших амплитудах (это особенно заметно сразу за фронтом волны) она, в отличие от формы осцилляций в линии с некогерентным перемагничиванием феррита, существенно отличается от гармонической (см. рис. 4). Это объясняется тем, что во втором случае колебания происходят на участке линии с линейными параметрами (феррит насыщен; $m \approx 1$ везде за фронтом волны), тогда как в первом линия за фронтом волны остается существенно нелинейной (см. рис. 2 первой части работы [1]). Нетрудно видеть, что за время одного периода колебаний „постоянная“ времени звена линии (без учета R_0) изменяется от наибольшего значения, равного $\tau_1 = \sqrt{C_0 \Phi'(I_1)}$, до наименьшего

$-\tau_2 = \sqrt{C_0 \Phi'(I_2)}$ (I_1, I_2 — максимальное и минимальное значения тока в волне за период осцилляций; рис. 4б). При этом $\tau_1 < \tau_2$, и, следовательно, изменение тока в верхней части области колебаний происходит быстрее, нежели в нижней (это рассуждение, естественно, является грубым)*. Амплитуда колебаний с течением времени медленно затухает. При отсутствии сопротивления R_0 ($b=0$) колебания за фронтом волны не затухают и их амплитуда остается равной $2I$ (—максимальная амплитуда перепада тока на входе линии).

Отметим также, что уравнение баланса энергии стационарной волны (3) остается в силе (по крайней мере для малых амплитуд колебаний) и для рассматриваемого здесь случая неквазистатического перемагничивания феррита.

Результаты, описанные в первой и во второй частях настоящей работы, подтверждают правильность имеющихся теоретических представлений и согласуются с экспериментальными данными [4, 5]. В частности, удается проследить процесс установления стационарной ударной волны и определить с достаточной точностью параметры решения. Отметим, что непосредственное определение решения, описывающего стационарную (бесконечно протяженную) волну, численными методами оказывается чрезвычайно затруднительным с точки зрения отыскания алгоритма, хотя при этом система уравнений, описывающая процессы в линии, сводится к трем дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом [2, 3]. Действительно, необходимо отыскать единственную интегральную кривую, проходящую через две особые точки (начальное и конечное состояния в ударной волне) в бесконечномерном фазовом пространстве (характеристическое уравнение в окрестности особой точки трансцендентно и имеет бесконечное число корней)**.

Следует также отметить, что задача в целом является довольно громоздкой даже для решения на быстродействующей вычислительной машине. Так, при 100 звеньях линии необходимо много-кратно решать через малые (для получения достаточной точности) интервалы времени $\Delta\tau$ систему из 300 уравнений. Практически решение задачи только для одного варианта на БЭСМ-2 занимает $2 \frac{1}{2}$ часа машинного времени. Это обстоятельство не позволяет, в частности, получить в разумное время решение для более сложных моделей перемагничивания феррита, учитывающих влияние размагничивающего поля, анизотропию, гистерезис и другие факторы. Тем не менее, основные из имеющихся экспериментальных результатов могут быть объяснены с помощью рассмотренных здесь моделей.

В заключение авторы выражают глубокую признательность А. В. Гапонову, А. М. Белянцеву и Г. И. Фрейдману за ценные замечания при обсуждении полученных результатов, а также В. П. Алешину, Т. Н. Александровской и С. Ф. Морозову, выполнивших программирование задач.

* В случае слабо нелинейной линии форма колебаний за фронтом стационарной ударной волны определяется из рассмотрения поведения интегральных кривых на фазовой плоскости [3].

** Отметим, что в имеющихся работах, посвященных исследованию структуры ударных волн в сжимаемых средах численными методами, задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений невысокого (как правило, второго) порядка, поэтому указанная трудность не имеет места.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ю. К. Богатырев, Л. А. Островский, I, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика 6, 973 (1963).
- 2 Ю. К. Богатырев, I, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1130 (1962).
- 3 Ю. К. Богатырев, I, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 860 (1961).
- 4 А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, I, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 551 (1963).
- 5 А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, II, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 561 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 января 1963 г.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN NONLINEAR LUMPED
TRANSMISSION LINES. II. THE STRUCTURE OF THE SHOCK WAVES FRONT

Yu. K. Bogatyryov, L. A. Ostrovskii

The calculation results are discussed of the problem formulated earlier in [1]. The structure of quasistationary shock waves is studied. The influence of line and ferrite parameters is cleared up upon the duration of the wave front, the period, and the amplitude of oscillations behind the front. The results obtained are compared with these of an approximate analytical solution.

**ШАР ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТИ
С НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКИМ ШАРОВЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ В ПОЛЕ
ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ**

E. A. Иванов

Дано строгое решение осесимметричной задачи о дифракции электромагнитных волн на шаре произвольной проводимости с неконцентрическим иородным шаровым включением. Решение представлено в виде рядов по сферическим волновым функциям, коэффициенты которых находятся из бесконечных систем линейных уравнений. Приведен пример численного решения задачи для некоторых частных значений параметров.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в неограниченном пространстве находится шар радиуса R_0 , содержащий внутри себя другой шар радиуса a , центр которого не совпадает с центром первого. Область вне внешнего шара будем в дальнейшем называть средой I, область между внутренней поверхностью большего шара и внешней поверхностью меньшего—средой II, а область внутри шара радиуса a —средой III. Всем величинам, характеризующим вторичные поля в этих средах, будем приписывать индексы $i=1, 2, 3$ соответственно. Диэлектрические постоянные ϵ_i , магнитные проницаемости μ_i и проводимости σ_i каждой среды считаются постоянными, причем в общем случае

$$k^2 = \begin{cases} k_1^2 = \frac{\epsilon_1 \mu_1 \omega^2}{c^2}, & \epsilon_1 = \mu_1 = 1 \quad \text{для среды I} \\ k_2^2 = \frac{\epsilon_2 \mu_2 \omega^2 + 4\pi \mu_2 \sigma_2 \omega_i}{c^2} & \text{для среды II} \\ k_3^2 = \frac{\epsilon_3 \mu_3 \omega^2 + 4\pi \mu_3 \sigma_3 \omega_i}{c^2} & \text{для среды III} \end{cases} \quad (1)$$

В точке O_1 на линии центров (вне сферы радиуса R_0 , на расстоянии l_1 от центра внутреннего шара) находится источник первично го электромагнитного поля—элементарный электрический диполь с моментом p , направленным вдоль линии центров.

Мы ставим своей целью определение вторичных электромагнитных полей, возникающих в средах I—III в результате возбуждения шаров полем диполя. Очевидно, что конечная проводимость шаров обусловливает появление как „отраженных“, так и „преломленных“ полей, причем в среде I возникает только „отраженное“ вторичное поле, в среде III—только „преломленное“ вторичное поле, а в среде II вторичное поле будет представлять собой результат наложения как „отраженных“ от поверхности шара радиуса a волн, так и волн, „преломленных“ на границе раздела сред I, II. Строгое решение этой задачи, как обычно, сводится к реше-

нию уравнений Максвелла при заданных граничных условиях для составляющих электромагнитного поля на сферических поверхностях и в бесконечности. В частности, тангенциальные составляющие результирующих полей должны быть непрерывными при переходе через поверхность шаров. Поле на бесконечности должно удовлетворять условиям излучения.

В сферической системе координат поле вертикального электрического диполя, помещенного в начало координат, как известно [1], является соленоидальным и задается векторами*

$$\mathbf{E}^0 = \{E_r^0, E_\theta^0, 0\} e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}^0 = \{0, 0, H_\varphi^0\} e^{-i\omega t},$$

где

$$\begin{aligned} E_r^0 &= -\frac{1}{ik_1 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta H_\varphi^0); \\ E_\theta^0 &= \frac{1}{ik_1 r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi^0); \\ H_\varphi^0 &= -k_1^2 |\mathbf{p}_1| \frac{e^{ik_1 r}}{r} \left(1 - \frac{1}{ik_1 r}\right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

В силу осевой симметрии вторичные поля в каждой среде I—III будут также соленоидальными. Поэтому, если обозначить их через $\mathbf{E}^{(i)}$, $\mathbf{H}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$), результирующее поле в среде I определится векторами

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}^{(1)} = \{E_r^0 + E_r^{(1)}, E_\theta^0 + E_\theta^{(1)}, 0\},$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^{(1)} = \{0, 0, H_\varphi^0 + H_\varphi^{(1)}\},$$

а в средах II, III—соответственно векторами

$$\mathbf{E}^{(i)} = \{E_r^{(i)}, E_\theta^{(i)}, 0\}, \quad \mathbf{H}^{(i)} = \{0, 0, H_\varphi^{(i)}\} \quad (i = 2, 3).$$

Так как при этом компоненты $E_r^{(i)}$, $E_\theta^{(i)}$ ($i = 0, 1, 2, 3$) электрических полей в каждой среде связаны с единственной отличной от нуля компонентой $H_\varphi^{(i)}$ вектора $\mathbf{H}^{(i)}$ соотношениями вида (2), то для нахождения поля в средах I—III достаточно предварительно определить там составляющую H_φ . Известно, что компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в прямоугольных координатах удовлетворяют волновому уравнению $\Delta U + k^2 U = 0$. Этому же уравнению, записанному в сферических координатах, будет удовлетворять и составляющая H_φ , так как $H_x = -H_\varphi \sin \varphi$. В результате мы приходим к следующей задаче: требуется найти функции $H_\varphi^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, однозначно определенные в областях I—III и удовлетворяющие

a) волновым уравнениям в I—III

$$\Delta_{r, \theta, \varphi} H_\varphi^{(i)} + k_i^2 H_\varphi^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (3)$$

b) условиям сопряжения на поверхностях шаров

* В дальнейшем временной множитель $e^{i\omega t}$ будет всюду опускаться.

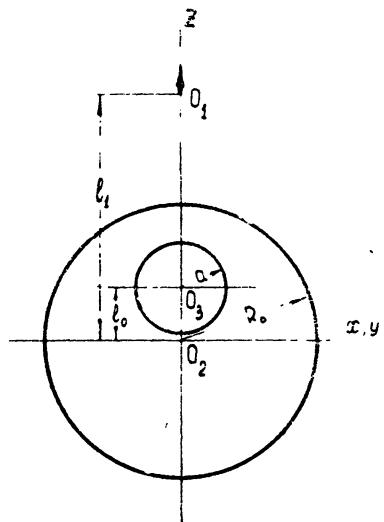


Рис. 1.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\mu_1}{k_1^2} \frac{\partial}{\partial r} [r(H_\varphi^0 + H_\varphi^{(1)})] = \frac{\mu_2}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi^{(2)}) \\ H_\varphi^0 + H_\varphi^{(1)} = H_\varphi^{(2)} \end{array} \right\} (r = R_0), \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\mu_2}{k_2^2} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi^{(3)}) = \frac{\mu_3}{k_3^2} \frac{\partial}{\partial r} (rH_\varphi^{(4)}) \\ H_\varphi^{(2)} = H_\varphi^{(3)} \end{array} \right\} (r = a); \quad (5)$$

в) условиям излучения на бесконечности

$$H_\varphi^{(1)} = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial H_\varphi^{(1)}}{\partial r} + ik_1 H_\varphi^{(1)} = 0\left(\frac{1}{r}\right). \quad (6)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для решения задачи введем две системы прямоугольных координат $O_2x_2y_2z_2$ и $O_3x_3y_3z_3$, так, чтобы их соответствующие оси были параллельны и одинаково направлены и чтобы оси $O_i z_i$ ($i = 2, 3$) совпадали с линией центров и имели положительное направление вдоль вектора \mathbf{p} . Одновременно с этим вводим две системы сферических координат r_i, θ_i, φ_i ($i = 2, 3$) с началами в точках O_i ; они связаны с декартовыми координатами формулами

$$x_i = r_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, \quad y_i = r_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, \quad z_i = r_i \cos \theta_i.$$

Тогда в координатах системы O_2 составляющая H_φ^0 может быть записана в виде следующего ряда по сферическим бесселевым функциям*:

$$H_\varphi^0 = \frac{k_1 |\mathbf{p}|}{l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n h_n^{(1)}(k_1 l_1) j_n(k_1 r_2) P_n^1(\cos \theta_2) \quad (l_1 > r_2); \quad (7)$$

$$H_\varphi^0 = \frac{k_1 |\mathbf{p}|}{l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n j_n(k_1 l_1) h_n^{(1)}(k_1 r_2) P_n^1(\cos \theta_2) \quad (l_1 < r_2) \quad (8)$$

(здесь $\sigma_n = 2n + 1$, $h_n^{(1)}(x) = \sqrt{\pi/2x} H_{n+1/2}^{(1)}(x)$, $j_n(x) = \sqrt{\pi/2x} J_{n+1/2}(x)$, $P_n^1(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра). Искомые функции $H_\varphi^{(i)}$ мы также представим в виде разложений по сферическим бесселевым функциям, полагая**

$$H_\varphi^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(1)} h_n^{(1)}(k_1 r_2) P_n^1(\cos \theta_2); \quad (9)$$

$$H_\varphi^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(2)} j_n(k_2 r_2) P_n^1(\cos \theta_2) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(3)} h_n^{(1)}(k_2 r_3) P_n^1(\cos \theta_3); \quad (10)$$

* Формулы (7), (8) можно получить из соответствующих формул (2.24), (2.25) в [2] (стр. 135), переходя там к сферическим координатам.

** Нам кажется уместным заметить, что в работе [3], несколько пересекающейся с нашей, выбор разложений для представления функции U_2 (см. формулу (7) в [3]) произведен неправильно. Он не соответствует физическому содержанию рассматриваемой в [3] задачи, в чем можно убедиться, если положить там $a=0$. Тогда, как это следует из соотношений (9) в [3], $C_n=D_n=E_n \equiv 0$. Следовательно, тогда и $U_2 \equiv 0$, хотя в силу конечной проводимости шара радиуса R_0 внутри него должно быть вторичное поле, отличное от нуля. В результате, полученные в [3] выводы не отвечают действительности.

$$H_{\varphi}^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(4)} j_n(k_3 r_3) P_n^1(\cos \theta_3). \quad (11)$$

Коэффициенты $x_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) будут определены в дальнейшем из условий (4), (5).

Чтобы удовлетворить последним, нам потребуются теоремы сложения для элементарных функций сферических волн:

$$h_n^{(1)}(kr_j) P_n^1(\cos \theta_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=|n-m|}^{n+m} A_{nm\sigma}^{(j)s}(l_0) h_s^{(1)}(kr_s) P_{\sigma}^1(\cos \theta_s) \quad (l_0 < r_s); \quad (12)$$

$$j_n(kr_j) P_n^1(\cos \theta_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\sigma=|n-m|}^{n+m} A_{nm\sigma}^{(js)}(l_0) j_{\sigma}(kr_s) P_{\sigma}^1(\cos \theta_s) \quad (l_0 \geq r_s), \quad (13)$$

которые, в частности, могут быть получены из формулы (12) в [4]* заменой там ξ_s на ξ_s и наоборот (с последующим переходом от сфероидальных координат к сферическим). Здесь положено, что

$$A_{nm\sigma}^{(js)}(l_0) = i^{m+\sigma-n} (2m+1) j_m(kr_{js}) P_m(\cos \theta_{js}) a_{\sigma}^{(m0n1)}, \quad (14)$$

где через r_{js} , θ_{js} обозначены сферические координаты начала O_s в координатной системе с началом в O_j (в нашем случае $j, s=2, 3$, $r_{js}=l_0$, а $\theta_{23}=0$, $\theta_{32}=\pi$); через $a_{\sigma}^{(m0n1)}$ обозначены коэффициенты в разложении [4]

$$P_m^{m_1}(\cos \theta) P_k^{k_1}(\cos \theta) = \sum_{\sigma=|k-m|}^{k+m} a_{\sigma}^{(mm_1kk_1)} P_{\sigma}^{m_1+k_1}(\cos \theta), \quad (15)$$

причем

$$a_{\sigma}^{(mm_1kk_1)} = \left[\frac{(m+m_1)! (k+k_1)! (\sigma-m_1-k_1)!}{(m-m_1)! (k-k_1)! (\sigma+m_1+k_1)!} \right]^{1/2} (mk00|\sigma0)(mkm_1k_1|\sigma, m_1+k_1). \quad (16)$$

Простые скобки здесь обозначают коэффициенты Клебша—Гордона [5, 6].

Используя свойство ортогональности полиномов Лежандра и формулу (13), на основании (4), (7), (9), (10) находим, что

$$x_n^{(1)} - a_n x_n^{(2)} - b_n \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(32)}(l_0) \right) x_p^{(3)} = -f_n; \quad (17)$$

$$x_n^{(1)} - a'_n x_n^{(2)} - b'_n \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(32)}(l_0) \right) x_p^{(3)} = -f'_n \quad (n=1, 2, \dots),$$

где

$$a_n = \frac{j_n(k_2 R_0)}{h_n^{(1)}(k_1 R_0)}; \quad b_n = \frac{h_n^{(1)}(k_2 R_0)}{h_n^{(1)}(k_1 R_0)}; \quad f_n = \frac{\sigma_n h_n^{(1)}(k_1 l_1) j_n(k_1 R_0)}{h_n^{(1)}(k_1 R_0)};$$

$$a'_n = \delta \frac{[R_0 j_n(k_2 R_0)]'}{[R_0 h_n^{(1)}(k_1 R_0)]'}; \quad b'_n = \delta \frac{[R_0 h_n^{(1)}(k_2 R_0)]'}{[R_0 h_n^{(1)}(k_1 R_0)]'}; \quad f'_n = \frac{\sigma_n h_n^{(1)}(k_1 l_1) [R_0 j_n(k_1 R_0)]'}{[R_0 h_n^{(1)}(k_1 R_0)]'},$$

$\delta = \mu_2 k_1^2 / \mu_1 k_2^2$, а через $[R_0 Z_n(R_0)]'$ обозначено $\frac{\partial}{\partial r} [r Z_n(r)]_{r=R}$. Из (17), в свою очередь, следует, что

* В формуле (14) статьи [4] следует вместо $A_{\sigma}^{(pppq)}$ брать $B_{\sigma}^{(pppq)}$.

$$x_n^{(1)} = \frac{a'_n b_n - a_n b'_n}{b_n - b'_n} x_n^{(2)} + \frac{f_n b'_n - f'_n b_n}{b_n - b'_n}; \quad (18)$$

$$x_n^{(2)} + \frac{b_n - b'_n}{a_n - a'_n} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(32)}(l_0) \right) x_p^{(3)} = \frac{f_n - f'_n}{a_n - a'_n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (19)$$

Аналогичным образом из (5) находим

$$x_n^{(4)} = c_n x_n^{(3)} + d_n \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(23)}(l_0) \right) x_p^{(2)}; \quad (20)$$

$$x_n^{(4)} = c'_n x_n^{(3)} + d'_n \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(23)}(l_0) \right) x_p^{(2)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$c_n = \frac{h_n^{(1)}(k_2 a)}{j_n(k_3 a)}; \quad d_n = \frac{j_n(k_2 a)}{j_n(k_3 a)};$$

$$c'_n = \frac{[ah_n^{(1)}(k_2 a)]'}{\delta_0 [aj_n(k_3 a)]'}; \quad d'_n = \frac{[aj_n(k_2 a)]'}{\delta_0 [aj_n(k_3 a)]'};$$

$\delta_0 = \mu_3 k_2^2 / \mu_2 k_3^2$. Отсюда

$$x_n^{(4)} = \frac{c'_n d_n - c_n d'_n}{d_n - d'_n} x_n^{(3)}; \quad (21)$$

$$x_n^{(3)} + \frac{d_n - d'_n}{c_n - c'_n} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(23)}(l_0) \right) x_p^{(2)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Из (18), (19) и (21), (22) видно, что для определения коэффициентов разложений (9)–(11) необходимо теперь в первую очередь исследовать, разрешима ли бесконечная система линейных уравнений

$$x_n^{(2)} + \frac{b_n - b'_n}{a_n - a'_n} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(32)}(l_0) \right) x_p^{(3)} = \frac{f_n - f'_n}{a_n - a'_n}; \quad (23)$$

$$x_n^{(3)} + \frac{d_n - d'_n}{c_n - c'_n} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(23)}(l_0) \right) x_p^{(2)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Мы покажем ниже, что если в (17), (20) произвести замену коэффициентов $x_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) по формулам

$$x_n^{(1)} = X_n^{(1)} j_n(k_1 R_0); \quad x_n^{(2)} = X_n^{(2)} h_n^{(1)}(k_2 R_0); \quad (24)$$

$$x_n^{(3)} = X_n^{(3)} j_n(k_2 a); \quad x_n^{(4)} = X_n^{(4)} h_n^{(1)}(k_3 a),$$

то получающаяся из (23) система

$$X_n^{(2)} + \sum_{p=1}^{\infty} B_{pn}(l_0) X_p^{(3)} = F_n, \quad (25)$$

$$X_n^{(3)} + \sum_{p=1}^{\infty} C_{pn}(l_0) X_p^{(2)} = 0,$$

в которой

$$B_{pn}(l_0) = \frac{b_n - b'_n}{h_n^{(1)}(k_2 R_0)(a_n - a'_n)} j_p(k_2 a) \sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(32)}(l_0), \quad (26)$$

$$C_{pn}(l_0) = \frac{d_n - d'_n}{j_n(k_2 a)(c_n - c'_n)} h_p^{(1)}(k_2 R_0) \sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}^{(23)}(l_0), \quad (27)$$

$$F_n = \frac{f_n - f'_n}{h_n^{(1)}(k_2 R_0)(a_n - a'_n)}, \quad (28)$$

становится разрешимой; ее решение может быть в общем случае найдено методом усечения [7]. Для этого, в частности, достаточно доказать, что матрица системы (25) образует вполне непрерывный

оператор в гильбертовом пространстве L^2 и что $\sum_{n=1}^{\infty} |F_n|^2 < \infty$. Тогда

к системе (25) будет применима теорема Гильберта о разрешимости бесконечных систем линейных уравнений с вполне непрерывной формой [7]. Напомним, что достаточным условием того, чтобы система (25) обладала вполне непрерывной формой, является сходимость рядов $\sum_{p,n=1}^{\infty} |B_{pn}|^2$ и $\sum_{p,n=1}^{\infty} |C_{pn}|^2$.

Оценим по модулю $B_{pn}(l_0)$ и $C_{pn}(l_0)$. Пользуясь асимптотическими относительно порядка n формулами для функций $j_n(x)$ и $h_n^{(1)}(x)$ [8]

$$j_n(x) \sim \frac{2^n n! x^n}{(2n+1)!}, \quad h_n^{(1)}(x) \sim \frac{-i(2n)!}{2^n n! x^{n+1}} \quad (29)$$

и формулой Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, мы найдем, что для достаточно больших n

$$\frac{b_n - b'_n}{h_n^{(1)}(k_2 R_0)(a_n - a'_n)} \sim \frac{(k_1/k_2)^{n+1}}{j_n(k_1 R_0)} \frac{1 - \delta}{1 + \delta}; \quad (30)$$

$$\frac{d_n - d'_n}{j_n(k_2 a)(c_n - c'_n)} \sim \frac{(k_2/k_3)^n}{h_n^{(1)}(k_3 a)} \frac{1 - \delta_0}{\delta_0}; \quad (31)$$

$$\frac{f_n - f'_n}{j_n(k_1 R_0)(a_n - a'_n)} \sim \text{const } n \left(\frac{R_0}{l_1} \right)^{n+1} \quad (32)$$

(мы считаем здесь, что $q=R_0/l < 1$, предполагая тем самым, что диполь не находится на поверхности шара радиуса R_0). Из (30)–(32) следует, что при соответствующем выборе постоянных C_1 , C_2 и C_3 уже для всех номеров n будут справедливы неравенства

$$\left| \frac{b_n - b'_n}{h_n^{(1)}(k_2 R_0)(a_n - a'_n)} \right| < C_1 \frac{|k_1/k_2|^{n+1}}{|j_n(k_1 R_0)|}; \quad (33)$$

$$\left| \frac{d_n - d'_n}{j_n(k_2 a)(c_n - c'_n)} \right| < C_2 \frac{|k_2/k_3|^n}{|h_n^{(1)}(k_3 a)|}; \quad (34)$$

$$|F_n| < C_3 n q^{n+1}. \quad (35)$$

Далее, на основании (14),

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}(l_0) \right| &\leq \sum_{m=|p-n|}^{p+n} (2m+1) |j_m(k_2 l_0)| |a_n^{(m0p1)}| < \\ &< C_4 \sum_{m=|p-n|}^{p+n} m |j_m(k_2 l_0)| |a_n^{(m0p1)}|. \end{aligned} \quad (36)$$

Умножив обе части соотношения (15), взятого при $k=p$, $m_1=0$, $k_1=1$, на $P_n^1(\cos \theta) d\theta$ и интегрируя их по θ в промежутке $[0, \pi]$, получим

$$a_n^{(m0p1)} = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \int_0^\pi P_m(\cos \theta) P_p^1(\cos \theta) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

где подынтегральная функция непрерывна внутри $(0, \pi)$ и обращается в нуль на его концах. На основании теоремы о среднем находим, что

$$|a_n^{(m0p1)}| \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)} |P_m(\cos \theta^*) P_p^1(\cos \theta^*) P_n^1(\cos \theta^*)| \sin \theta^*,$$

где $0 < \theta^* < \pi$. Так как [9]

$$P_m(\cos \theta^*) < \frac{8}{(2\pi m \sin \theta^*)^{1/2}}, \quad P_n^1(\cos \theta^*) < \frac{n+1}{\sqrt{n} \sin \theta^*} \left(\frac{8}{\pi \sin \theta^*} \right)^{1/2},$$

то можно показать, что при соответствующем выборе постоянной C для всех n и p

$$|a_n^{(m0p1)}| < C_5 \sqrt{\frac{p}{mn}}; \quad (37)$$

тогда

$$\left| \sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}(l_0) \right| < C_6 \sqrt{\frac{p}{n}} \sum_{m=|p-n|}^{p+n} \sqrt{m} |j_m(k_2 l_0)|. \quad (38)$$

Если теперь учесть, что для достаточно больших n $|j_n(x)| > |j_{n+1}(x)|$ то из (38) следует:

$$\left| \sum_{m=|p-n|}^{p+n} A_{pmn}(l_0) \right| < C_7 \sqrt{\frac{p(p+n)}{n}} |j_{|p-n|}(k_2 l_0)|. \quad (39)$$

Таким образом, на основании (33), (34) и (39) мы нашли, что

$$|B_{pn}(l_0)| < \text{const}_1 \left| \frac{k_1}{k_2} \right|^{n+1} \sqrt{\frac{p(p+n)}{n}} \left| \frac{j_p(k_2 a) j_{|p-n|}(k_2 l_0)}{j_n(k_1 R_0)} \right|; \quad (40)$$

$$|C_{pn}(l_0)| < \text{const}_2 \left| \frac{k_2}{k_3} \right|^n \sqrt{\frac{p(p+n)}{n}} \left| \frac{h_p^{(1)}(k_2 R_0) j_{|p-n|}(k_2 l_0)}{h_n^{(1)}(k_3 a)} \right|. \quad (41)$$

Образуем двойную последовательность

$$\{z_{pn}\}_{p,n=1,2,\dots} = \left\{ \left| \frac{k_1}{k_2} \right|^{n+1} \sqrt{\frac{p(p+n)}{n}} \left| \frac{j_p(k_2 a) j_{|p-n|}(k_2 l_0)}{j_n(k_1 R_0)} \right| \right\} \quad (42)$$

и оценим ее общий член z_{pn} . Пусть $n \rightarrow \infty$, p — конечное. Тогда на основании (29) и формулы Стирлинга получим, что

$$z_{pn} \sim \left| \frac{k_1}{k_2} \frac{|j_p(k_2 a)| p!}{|k_2 a|^p} \frac{n!}{p!(n-p)!} \left(\frac{a}{R_0} \right)^p \left(\frac{l_0}{R_0} \right)^{n-p} \right|,$$

откуда

$$z_{pn} < \text{const} \frac{n!}{p!(n-p)!} \left(\frac{a}{R_0} \right)^p \left(\frac{l_0}{R_0} \right)^{n-p}.$$

Нетрудно убедиться теперь, что при соответствующем выборе постоянной K_1 (p — конечное)

$$z_{pn} < K_1 \frac{(n+p)!}{p! n!} u_1^p u_2^n, \quad (43)$$

где $u_1 = a/R_0 < 1$, $u_2 = l_0/R_0 < 1$ и $u_1 + u_2 = (a+l_0)/R_0 < 1$. Последнее означает, что внутренний шар не касается внешнего. Из (43) видно, что можно указать такое K_1 , что это неравенство останется верным и для любых номеров n .

Пусть теперь $p \rightarrow \infty$, n — конечное. Тогда подобным же образом мы находим, что

$$z_{pn} \sim \frac{|k_1/k_2|^{n+1} 2\pi |k_2 a|^p |k_2 R_0|^{p-n}}{\sqrt{n} |j_n(k_1 R_0)| p! (p-n)!} < K_2 \frac{(n+p)!}{p! n!} u_1^p u_2^n, \quad (44)$$

где K_2 — некоторая постоянная, при соответствующем выборе которой (44) будет верным для всех p . Если $n \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow \infty$ независимо друг от друга, то вновь находим, что

$$z_{pn} < K_3 \frac{(n+p)!}{p! n!} u_1^p u_2^n, \quad (45)$$

где K_3 — некоторая постоянная. Таким образом, из (43), (44) и (45) следует, что для всех членов последовательности (42)

$$z_{pn} < K_4 \frac{(n+p)!}{p! n!} u_1^p u_2^n, \quad K_4 = \text{const}. \quad (46)$$

Тогда на основании (40)

$$|B_{pn}(l_0)| < K_5 \frac{(n+p)!}{p! n!} u_1^p u_2^n. \quad (47)$$

Аналогичным путем устанавливаем справедливость неравенства

$$|C_{pn}(l_0)| < K_6 \frac{(n+p)!}{p! n!} u_1^p u_2^n. \quad (48)$$

В результате оказывается, что систему (25) можно мажорировать системой с матричными элементами из правых частей (47), (48) и со свободными членами из правой части (35). Такая система, очевидно, обладает вполне непрерывной формой, так как $\sum_{p,n=1}^{\infty} \left[\frac{(n+p)!}{p! n!} \times \right.$

$\left. \times u_1^p u_2^n \right]^2 < \infty$. Кроме того, ее свободные члены удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} |nq^{n+1}|^2 < \infty$. Поэтому мажорантная система и, следовательно,

система (25), на основании соответствующих теорем из [7] для бесконечных систем и теоремы Гильберта, единственным образом разрешима и $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n^{(l)}|^2 < \infty$ (предположение о существовании нетривиального

ного решения однородной системы, отвечающей (25), приводит к противоречию с теоремой единственности решения уравнений Максвелла). Нетрудно заметить, что система с матричными элементами, удовлетворяющими (47), (48), квазирегулярная [7]. Следовательно, ее решение может быть найдено методом усечения.

Определением коэффициентов $X_n^{(2)}, X_n^{(3)}$, через которые выражаются затем все остальные коэффициенты разложений (9)–(11), полностью решается поставленная нами задача.

3. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Пусть $a = 0$. Тогда $j_n(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), а $h_n^{(1)}(0)$ имеет полюс порядка $n + 1$. Поэтому из (27) следует, что $C_{pn}(l_0) \equiv 0$ и, следовательно, $X_n^{(3)} \equiv 0$ и $x_n^{(3)} \equiv 0$. Из (21) и (24) находим, что и $X_n^{(4)} \equiv 0$. В результате оказывается, что

$$H_{\varphi}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(2)} h_n^{(1)}(k_2 R_0) j_n(k_2 r_2) P_n^1(\cos \theta_2),$$

а

$$H_{\varphi}^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^{(4)} h_n^{(1)}(k_3 a) j_n(k_3 r_3) P_n^1(\cos \theta_3) \equiv 0,$$

так как при $a=0$ и $r_3=0$ ($0 \leq r_3 \leq a$). Из (25) находим, что $X_n^{(2)} = F_n$. Тем самым рассматриваемая задача переходит в задачу о дифракции поля диполя на проводящей сфере.

Пусть теперь $l_0 = 0$. Тогда из (14) следует, что $A_{nm}^{(is)} = 0$, если $m \neq 0$, и $A_{nm}^{(is)}(l_0) = i^{s-n} a_n^{(00n)}$, если $m = 0$ (здесь $s = n$, так как $|n - m| \leq s \leq n + m$). Поэтому $A_{n0n}^{(js)}(l_0) = 1$ (из (15) в этом случае вытекает, что $P_0(\cos \theta) P_n^1(\cos \theta) = a_n^{(00n)} P_n^1(\cos \theta)$, откуда видно, что $a_n^{(00n)}$ должно быть равно единице). Обращаясь теперь к (17) и (20) и полагая там $m = 0$, $p = n$, мы находим, что

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} - a_n x_n^{(2)} - b_n x_n^{(3)} &= -f_n; \\ x_n^{(1)} - a'_n x_n^{(2)} - b'_n x_n^{(3)} &= -f'_n; \\ x_n^{(4)} - c_n x_n^{(3)} - d_n x_n^{(2)} &= 0; \\ x_n^{(4)} - c'_n x_n^{(3)} - d'_n x_n^{(2)} &= 0. \end{aligned} \tag{49}$$

Это дает решение задачи для случая двух концентрических шаров.

Рассмотрим случай, когда $|k_2 l_0| \ll 1$. Тогда, сохраняя в (26) и (27) в суммах по m только первые два слагаемые с номерами $m = 0$ и $m = 1$, с точностью не ниже чем $|k_2 l_0|^2$ получим

$$B_{pn} = \frac{b_n - b'_n}{h_n(k_2 R_0)(a_n - a'_n)} j_p(k_2 a) [A_{p0n}^{(32)}(l_0) + A_{p1n}^{(32)}(l_0)]; \tag{50}$$

$$C_{pn} = \frac{d_n - d'_n}{j_n(k_2 a)(c_n - c'_n)} h_p^{(1)}(k_2 R_0) [A_{p0n}^{(23)}(l_0) + A_{p1n}^{(23)}(l_0)]. \tag{51}$$

Так как $|p - n| \leq m \leq p + n$, то в (25) при суммировании по p следует сохранить лишь слагаемые с номерами $p = n - 1, n, n + 1$, содержащие $A_{n0n}(l_0) = 1$ (при $m = 0$) и $A_{n-1, 1n}(l_0), A_{n1n}(l_0), A_{n+1, 1n}(l_0)$ (при $m = 1$). В результате система (25) принимает вид:

$$\begin{aligned} X_n^{(2)} + L_n X_n^{(3)} + \sum_{p=n-1}^{n+1} M_{pn} X_p^{(3)} &= F_n; \\ X_n^{(3)} + N_n X_n^{(2)} + \sum_{p=n-1}^{n+1} Q_{pn} X_p^{(2)} &= 0 \\ (n=1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{j_n(k_2 a)(b_n - b'_n)}{h_n^{(1)}(k_2 R_0)(a_n - a'_n)}; \\ M_{pn} &= \frac{j_p(k_2 a)(b_n - b'_n)}{h_n^{(1)}(k_2 R_0)(a_n - a'_n)} A_{p1n}^{(32)}(l_0); \\ N_n &= \frac{h_n^{(1)}(k_2 R_0)(d_n - d'_n)}{j_n(k_2 a)(c_n - c'_n)}; \\ Q_{pn} &= \frac{h_p^{(1)}(k_2 R_0)(d_n - d'_n)}{j_n(k_2 a)(c_n - c'_n)} A_{p1n}^{(23)}(l_0). \end{aligned}$$

Ее решение может быть найдено методом последовательных приближений.

В качестве иллюстрации применяемого метода решения задачи приведем пример численного решения для некоторых частных значений параметров, от которых зависит дифрактированное поле в волновой зоне. На рисунке 2 дана диаграмма направленности (зависимость $|H_\varphi^{(1)}|^2$ от угла θ) для случая, когда среда I—вакуум ($\sigma_1 = 0$), среда II—диэлектрик ($\sigma_2 = 0, k_2 = 2k_1$), среда III—идеальный проводник ($\sigma_3 = \infty$) при условии $k_2 a = 1, k_2 l_0 = 2, k_2 R_0 = 4, k_1 l_1 = 4, k_1 R_0 = 2$.

Выбор указанных значений параметров не связан с каким-либо конкретным физическим аналогом рассматриваемого примера. Мы учитывали лишь, что эти значения отвечают случаю, в целом далекому от тех, для которых при численном решении можно с достаточной степенью точности пользоваться асимптотическими формами функций Бесселя.

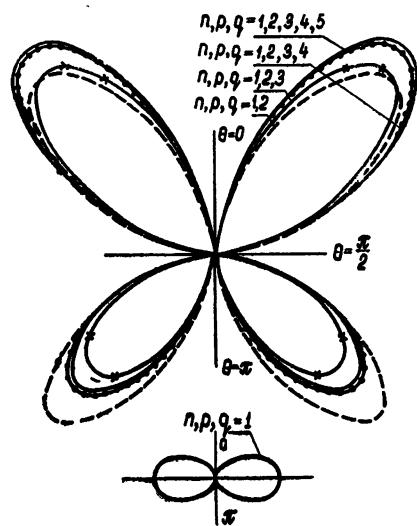


Рис. 2.

Для численного решения системы (25) предварительно приводилась к виду

$$X_n^{(2)} - \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{\infty} B_{qn} C_{pq} \right) X_p^{(2)} = F_n \quad (53)$$

$$(n = 1, 2, \dots)$$

и решалась затем методом усечения для $n, p, q = 1, n, p, q = 1, 2, n, p, q = 1, 2, 3, n, p, q = 1, 2, 3, 4, n, p, q = 1, 2, 3, 4, 5$ соответственно. Затем рассчитывалось поле $H_{\varphi}^{(1)}$ (для волновой зоны) по формуле (9) с учетом (23) и (24).

На рис. 2 представлены результаты вычислений для всех указанных выше порядков усечения. Из рисунка видно, что в данном случае уже четвертые и пятые порядки усечения дают практически совпадающие результаты. На рисунке особо выделена нормированная диаграмма направленности* для $|H_{\varphi}^{(1)}|^2$, отвечающей первому порядку усечения ($n, p, q = 1$), в связи с тем, что во взятом нами масштабе изобразить $|H_{\varphi}^{(1)}|^2$ для $n, p, q = 1$ на общем рисунке не представляется возможным из-за относительной малости значений ее по сравнению со значениями для других порядков усечения.

Для заданного положения диполя и указанной длины волны сходимость вычислительного процесса зависит от размеров шаров и длины их линии центров: с увеличением R_0 и a , а также l_0 ($a + l_0 < R_0$) сходимость ухудшается, и наоборот.

Подобным же образом может быть решена задача и для случая, когда диполь расположен внутри шара большего (меньшего) радиуса на прямой, совпадающей с линией центров.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гостехиздат, М., 1953.
2. М. Г. Белкина, Сб Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения, изд. Сов. радио, М., 1957.
3. Б. П. Дьяконов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 5, 1579 (1959).
4. Е. А. Иванов, ДАН БССР, 4, 3 (1960).
5. И. М. Гельфанд, Р. А. Минилос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращения и группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.
6. Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применение в физике, Физматгиз, М., 1958.
7. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
8. Д. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948.
9. Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.

Институт математики и вычислительной техники
АН БССР

Поступила в редакцию
8 декабря 1962 г.

THE CONDUCTIVE SPHERE WITH NONCONCENTRIC SPHERIC INSERTION IN THE VERTICAL ELECTRIC DIPOLE FIELD

E. A. Ivanov

An exact solution is given for the problem of electromagnetic waves diffraction on a sphere of arbitrary conductivity with nonconcentric spheric insertion, axial symmetry being assumed. The solution has the form of the series of spheric wave functions with coefficients satisfying to infinite sets of linear equations. A numerical solution of the problem is given for some values of parameters.

* В качестве нормирующей единицы взято значение $|H_{\varphi}^{(1)}(\pi/2)|^2$.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СПИРАЛЬНЫХ H_{nm} -ВОЛН В СПИРАЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ БЕЗ ИЗЛУЧЕНИЯ

Л. Б. Штрапенин

Рассмотрено распространение магнитных волн вдоль спиральной ленты без излучения. Определены постоянная распространения и шаг спирали как функции радиуса волновода и частоты.

В последние годы в связи с проблемой использования волноводов в качестве линий передач большое внимание уделяется вопросу распространения электромагнитных волн в спиральных волноводах. Из всех типов волн наиболее перспективной для дальней волноводной передачи является волна H_{01} . Благодаря отсутствию продольных токов затухание волны H_{01} уменьшается с увеличением частоты и в области миллиметровых волн оно оказывается достаточно малым.

В большинстве работ, посвященных спиральным волноводам, применяется цилиндрическая система координат. Это не позволяет разделить электромагнитное поле на H - и E -волны, поскольку в системе существуют волны, у которых все компоненты поля отличны от нуля. Задача о распространении электромагнитных волн в спиральных волноводах значительно упрощается при использовании спиральной системы координат [1,2], в которой можно естественным образом разделить электромагнитное поле на H - и E -спиральные волны.

Если рассматривать задачу о распространении электромагнитных волн в спиральных волноводах в спиральной системе координат и использовать граничные условия Мойжеса [3], то можно подобрать такой шаг спирали при заданных длине волны λ_0 и радиусе волновода a , что поляризованная по спирали волна H_{nm} будет распространяться вдоль спиральной ленты, не возбуждая щелей; все поле будет сосредоточено внутри волновода и потери обусловлены только токами в спиральной ленте. На такую возможность указали Янг и Морган [4]. Однако использование граничных условий анизотропно проводящего цилиндра и рассмотрение задачи в цилиндрической системе координат приводит авторов к неправильным выводам.

В спиральной системе координат с координатами r , Φ , ξ выражения для полей H_{nm} -волны имеют вид

$$\begin{aligned} E_{r_1} &= B_1 \frac{k_v}{\gamma^2 r} J_v(\gamma r); & E_{r_2} &= B_2 \frac{k_v}{\gamma^2 r} \tilde{H}_v^{(2)}(\gamma r); \\ E_{\Phi_1} &= B_1 \frac{ik}{\gamma \cos \alpha} J'_v(\gamma r); & E_{\Phi_2} &= B_2 \frac{ik}{\gamma \cos \alpha} \tilde{H}_v^{(2)'}(\gamma r); \\ E_{\xi_1} &= -B_1 \frac{ikp}{2\pi\gamma r} J'_v(\gamma r); & E_{\xi_2} &= -B_2 \frac{ikp}{2\pi\gamma r} \tilde{H}_v^{(2)'}(\gamma r); \end{aligned} \quad (1)$$

$$H_{r_1} = B_1 \frac{ih}{\gamma} J'_v(\gamma r); \quad H_{r_2} = B_2 \frac{ih}{\gamma} \tilde{H}_v^{(2)'}(\gamma r);$$

$$H_{\Phi_1} = -B_1 \frac{hv}{\gamma^2 \cos \alpha} J_v(\gamma r); \quad H_{\Phi_2} = -B_2 \frac{hv}{\gamma^2 \cos \alpha} \tilde{H}_v^{(2)}(\gamma r);$$

$$H_{\xi_1} = B_1 \left(1 + \frac{phv}{2\pi\gamma^2 r^2} \right) J_v(\gamma r); \quad H_{\xi_2} = B_2 \left(1 + \frac{phv}{2\pi\gamma^2 r^2} \right) \tilde{H}_v^{(2)}(\gamma r)$$

(фактор $\exp(i\omega t - ih\xi - in\Phi)$ везде опускается). Границные условия в спиральной системе координат имеют вид [2]

$$E_{\Phi_1}(a) + E_{\xi_1}(a) \sin \alpha = E_{\Phi_2}(a) + E_{\xi_2}(a) \sin \alpha,$$

$$E_{\Phi_1}(a) + E_{\xi_1}(a) \sin \alpha = -\frac{1}{2} ik l'_1 \left\{ H_{\xi_1}(a) - H_{\xi_2}(a) + \frac{n}{ka} \times \right. \\ \left. \times [E_{r_1}(a) - E_{r_2}(a)] \right\} \cos \alpha. \quad (2)$$

В (1) и (2)

$$\gamma^2 = k^2 - h^2, \quad v = n - \frac{ph}{2\pi}, \quad (3)$$

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad h = \frac{\omega}{v_\Phi}, \quad l'_1 = \frac{p}{\pi} \ln \sin \frac{\pi b}{p},$$

p —шаг спирали, $2b$ —ширина металлической ленты. Подставляя в (2) значение компонент (1), получим уравнения

$$B_1 J'_v(\gamma a) - B_2 \tilde{H}_v^{(2)'}(\gamma a) = 0; \\ B_1 \left\{ \frac{1}{\gamma} J'_v(\gamma a) + \frac{1}{2} l'_1 \left(1 + \frac{phv}{2\pi\gamma^2 a^2} + \frac{nv}{\gamma^2 a^2} \right) J_v(\gamma a) \right\} - \\ - B_2 \left\{ \frac{1}{2} l'_1 \left(1 + \frac{phv}{2\pi\gamma^2 a^2} + \frac{nv}{\gamma^2 a^2} \right) \tilde{H}_v^{(2)}(\gamma a) \right\} = 0. \quad (4)$$

Пусть $B_2 = 0$ (поле вне спирали отсутствует). Тогда уравнения (4) будут удовлетворены, если

$$1 + \frac{phv}{2\pi x^2} + \frac{nv}{x^2} = 0, \quad (5)$$

$$J'_v(x) = 0,$$

где $x = \gamma a$.

Уравнения (5) позволяют определить постоянную распространения h и шаг спирали p как функцию λ_0 и a , при которых волна H_{nm} будет распространяться вдоль спирали без излучения. Потери в спиральной ленте не учитываются. Из (3) и (5) получим

$$v = n - \sqrt{x^2 + n^2}, \quad (6)$$

$$p = \frac{2\pi}{h} \sqrt{x^2 + n^2}$$

и дисперсионное уравнение

$$J'_{n-} V \sqrt{x^2 + n^2} (x) = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим наиболее интересный случай аксиально-симметричной волны, когда $n = 0$. Тогда, согласно (7), имеем производную функции Бесселя, в которой индекс равен аргументу с обратным знаком, $J'_{-x}(x) = 0$. Для определения x используем соотношения

$$J_v(x) J'_{-v}(x) - J_{-v}(x) J'_v(x) = -2 \frac{\sin(\pi v)}{\pi x}; \quad (8)$$

$$J_{-v}(x) = J_v(x) \cos(\pi v) - N_v(x) \sin(\pi v).$$

Отсюда

$$J'_{-x}(x) = \frac{J_x(x) J'_x(x) \cos(\pi x) - N_x(x) J'_x(x) \sin(\pi x) - 2 \sin(\pi x)/\pi x}{J_x(x)} = 0. \quad (9)$$

Воспользуемся приближенными выражениями для $J_x(x)$, $J'_x(x)$, $N_x(x)$ в виде [6]

$$\begin{aligned} J_x(x) &= \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/6} \pi x^{1/3}}; & J'_x(x) &= \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3)}{2^{1/3} \pi x^{2/3}}; \\ N_x(x) &= -\frac{3^{1/3} \Gamma(1/3)}{2^{2/3} \pi x^{1/3}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получим уравнение для определения x :

$$\operatorname{tg}(\pi x) = \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(2/3)}{4\pi - \sqrt{3} \Gamma(1/3) \Gamma(2/3)}. \quad (11)$$

Его корни: $x_{01} = 0,17$; $x_{02} = 1,17$; $x_{03} = 2,17$.

Для отыскания корней уравнения (7) при $n = +1$ для волны H_{1m} используем асимптотическое представление бесселевой функции:

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi v}{2}\right). \quad (12)$$

Тогда получим уравнение для нахождения корней x_{1m} :

$$\operatorname{tg}\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x}. \quad (13)$$

Решая его, найдем: $x_{11} = 0,43$; $x_{12} = 1,78$; $x_{13} = 3,02$. При $n = -1$, что соответствует обратной волне, представление (12) не имеет места, так как $|v| > x$. Однако анализ корней уравнений, проведенный по формулам Мак-Магона, показывает, что в этих случаях x отрицательно, т. е. быстрых волн в обратном направлении не будет.

Определим теперь h и p из (6):

$$h = \sqrt{k^2 - x^2/a^2}; \quad p = (2\pi/h) \sqrt{x^2 + n^2}. \quad (14)$$

Для каждого типа волн H_{nm} существует критическая длина волны, при которой $h = 0$; т. е. волны без излучения распространяться не будут:

$$\lambda_k = 2\pi a/x_{nm}. \quad (15)$$

При этом условии шаг стремится к бесконечности.

Для волны H_{0m} имеем: $\lambda_{01} = 37 \text{ см}$; $\lambda_{02} = 5,38 \text{ см}$; $\lambda_{03} = 2,9 \text{ см}$; для волны H_{1m} — $\lambda_{11} = 14,6 \text{ см}$; $\lambda_{12} = 3,52 \text{ см}$; $\lambda_{13} = 2,09 \text{ см}$. Например, шаг спирали p для $\lambda_0 = 0,8 \text{ см}$ и $a = 2 \text{ см}$:

$$p_{01} = 0,136 \text{ см}; \quad p_{02} = 0,94 \text{ см}; \quad p_{03} = 1,67 \text{ см}. \quad (16)$$

Из (16) видно, что для волны H_{01} шаг спирали, а значит, и наклон $\operatorname{tg} \alpha = p/2\pi a$ должны быть достаточно малыми при обычных условиях дальней передачи.

Для экспериментальной проверки некоторых результатов, полученных в данной работе, была собрана установка, блок-схема которой дана на рис. 1. Главными частями установки служит спиральный волно-

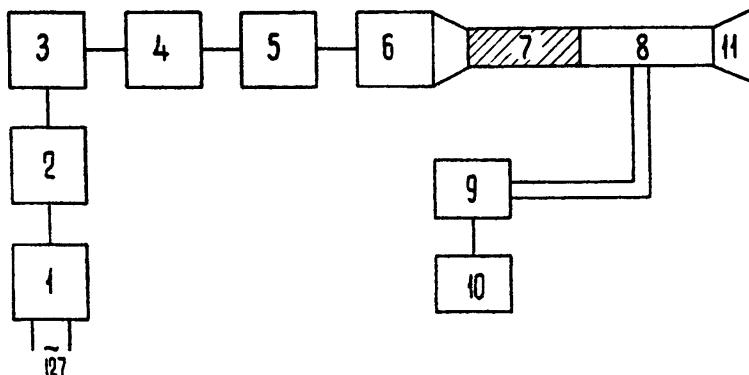


Рис. 1. Блок-схема установки:

1—стабилизированный выпрямитель; 2—клинстронный генератор; 3—переменный аттенюатор; 4—измеритель КСВН; 5—трансформатор сопротивлений; 6—отрезок прямого волновода с переходом на круглый волновод; 7—спиральный волновод; 8—анализатор (круглый волновод со штыревой антенной); 9—вольномер (служит в качестве детекторной секции); 10—усилитель; 11—конический рупор.

вод, соединенный с вращающейся секцией круглого волновода. В круглом волноводе имеется отверстие (проходная секция), в которое вставлена штыревая антенна. Антенна при помощи коаксиального кабеля соединена с индикаторным устройством. На круглом волноводе имеется лимб, позволяющий фиксировать положение штыревой антенны.

В прямоугольном волноводе создается волна H_{10} . Эта волна проходит в цилиндрический, а затем в спиральный волновод, трансформируясь в волну H_{11} . Вращая анализатор, можно определить распределение поля по φ . Для цилиндрического волновода в силу квадратичности детектора это распределение пропорционально $\cos^2 \varphi$. Экспериментальные точки хорошо укладываются на этой кривой [5]. Для спирального волновода при соответствующем подборе шага распределение поля по φ должно иметь вид круга. Измерения производились на волне $\lambda_0 = 3,12 \text{ см}$. Спиральный волновод представлял из себя пенопластовый цилиндр ($\epsilon \approx 1$) с намотанной на него по спирали медной лентой. Радиусы цилиндров $a_1 = 1,25 \text{ см}$, $a_2 = 1,42 \text{ см}$, $a_3 = 2,9 \text{ см}$. При подборе соответствующего шага осуществлялась круговая поляризация. Во всех случаях шаг был близок к расчетному. В соответствии с формулой (14), по мере увеличения радиуса волновода шаг спирали уменьшается. Потери, обусловленные токами в спиральной ленте, меньше при узких щелях.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. A. Woldron, Quart. J. Mechanics Appl. Mathematics, 11, 438 (1958).
2. В. П. Шестопалов, А. И. Адонина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 703 (1961).
3. С. Я. Мойжес, ЖТФ, 25, 454 (1955).
4. S. P. Morgan, J. A. Young, Bell System Tech. J., 35, 1347 (1956).
5. Л. Б. Штрапенин, ЖТФ, 28, 1513 (1958).
6. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, 1, ИЛ, М., 1949.

Омский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию
16 января 1963 г.ON NONRADIATING PROPAGATION OF H_{nm} SPIRAL MODES IN A
SPIRAL WAVEGUIDE*L. B. Shtrapenin*

The H_{nm} modes nonradiating propagation in a spiral tapered transmission line has been considered. The propagation constant and spiral step have been determined as a functions of frequency and the waveguide radius.

К ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОМ КОНТУРЕ

C. A. Ахманов, A. C. Рошаль

Сообщаются результаты численного интегрирования укороченных уравнений, описывающих переходные процессы в параметрически возбуждаемом колебательном контуре, в котором амплитуда стационарных колебаний определяется безынерционной нелинейной реактивностью. Проанализирован режим установления амплитуды и фазы колебаний для различных начальных условий. Рассмотрены также переходные процессы, возникающие в параметрически возбужденном контуре при приложении к нему внешней силы, имеющей частоту параметрической генерации. В исследуемой системе, в отличие от систем с диссипативным ограничением стационарной амплитуды, переходный процесс носит колебательный характер. Обсуждается вопрос о переходных процессах в системах с инерционной нелинейностью.

Предметом настоящей работы является количественный анализ переходных процессов в параметрически возбуждаемом контуре (параметрическом генераторе). Практический интерес такой задачи связан с необходимостью исследования нестационарных процессов в параметрических делителях частоты и режимов переключения параметрических триггеров (параметронов), предназначенных для использования в цифровых устройствах с фазовой записью информации.

Если реакцией параметрически возбуждаемого контура на генератор накачки можно пренебречь, переходные процессы в контуре описываются системой укороченных уравнений для амплитуды A и фазы ϑ вида

$$\frac{dA}{d\tau} = f_1(A, \vartheta); \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = f_2(A, \vartheta), \quad (1)$$

где f_1 и f_2 —в общем случае нелинейные функции A и ϑ . Уравнения (1) могут быть рассмотрены раздельно и решены аналитически лишь для случая автономного параметрического генератора, в котором ограничение стационарной амплитуды происходит за счет активного нелинейного сопротивления (здесь фазовое уравнение может быть решено независимо от амплитудного). Задача подобного типа была рассмотрена в работе Мандельштама и Папалекси [1], посвященной анализу режима установления колебаний при резонансе n -го рода.

Если ограничение амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний происходит за счет нелинейной реактивности, амплитуда сильно влияет на фазу, уравнения (1) необходимо решать совместно и аналитических решений здесь получить уже не удается*. Вместе с тем в наиболее распространенных параметрических генераторах на полупроводниковых диодах с нелинейной емкостью

* Исключением является случай контура без потерь, представляющий, правда, чисто теоретический интерес (см., например, [3, 4]).

и на сердечниках с нелинейной индуктивностью такой режим используется весьма часто (см., например, [⁵⁻⁷]). Качественное исследование интегральных кривых уравнений (1) на фазовой плоскости для режима ограничения амплитуды нелинейной реактивностью было проведено еще в тридцатых годах Гуляевым и Мигулиным [²] и затем Вейденхаммером (его результаты изложены в монографии [³]).

Однако для решения ряда вопросов, связанных с использованием параметрических генераторов, необходимо располагать конкретными данными о ходе переходного процесса во времени. Надо отметить также, что в [²⁻⁴] рассматривались лишь колебания в автономном параметрическом генераторе; вместе с тем определенный интерес представляет изучение переходных процессов и в неавтономных режимах. В настоящей работе приводятся результаты численного интегрирования уравнений одноконтурного параметрического генератора на цифровой вычислительной машине, выполнившегося для различных начальных условий и режимов генератора.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ниже рассматриваются переходные процессы в колебательном контуре с параметрами L_0 , C_0 , r_s ($\omega_0 = 1/\sqrt{L_0 C_0}$), параметрически возбуждаемом напряжением накачки $v_h = V_h \sin(2\omega t)$ и находящимся под воздействием внешней, синхронной, гармонической силы $f(t) = V_{bh} \cos(\omega t - \phi)$. Укороченные уравнения, описывающие поведение амплитуды A и фазы ϑ колебаний, для случая, когда ограничение амплитуды происходит за счет нелинейной реактивности, имеют вид

$$\frac{2}{\omega} \frac{dA}{dt} = A \left[-\delta + \frac{m}{2} \cos(2\vartheta) \right] - V_0 \sin(\vartheta - \varphi); \quad (2)$$

$$\frac{2}{\omega} \frac{d\vartheta}{dt} = h + \frac{1}{4} \gamma A^2 - \frac{m}{2} \sin(2\vartheta) - \frac{V_0}{A} \cos(\vartheta - \varphi). \quad (3)$$

Здесь параметры V_0 и φ непосредственно связаны с амплитудой и фазой внешней силы V_{bh} , ψ ; конкретный вид указанной зависимости определяется схемой включения внешней силы в контур генератора. Затухание $\delta = \frac{1}{Q}$, где Q — добротность колебательного контура; m — глубина модуляции реактивного параметра, h — относительная расстройка и γ — коэффициент, характеризующий нелинейность реактивного элемента.

Конкретные значения перечисленных параметров определяются схемой параметрического генератора и видом нелинейной реактивности. Для случая гетеропараметрического возбуждения колебательного контура с нелинейной индуктивностью*, в которой магнитный поток в функции тока имеет вид $\Phi(i) = L_0 i + L_3 i^3$ (знак L_3 может быть и положительным, и отрицательным),

$$h = 1 - \omega_0^2/\omega^2; \quad \gamma = \frac{3L_3}{C_0 L_0^2}.$$

* К анализу этого случая с достаточной степенью точности сводится, по-видимому, исследование так называемого балансного параметрического генератора (пара метрона) с нелинейной индуктивностью, широко используемого в настоящее время в цифровых устройствах [⁷].

Для генератора с нелинейной емкостью полупроводникового диода, зависящей от напряжения v по закону $C = C_0 + C_1v + C_2v^2$, имеем (см. также [5, 9])

$$m = \frac{C_1 V_n}{C_0}; \quad h = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \quad \gamma = \frac{C_2}{C_0}.$$

Для дальнейшего удобно привести уравнения (2), (3) к безразмерному виду. При нормировке входящих в (2), (3) величин целесообразно воспользоваться хорошо известными результатами для стационарного режима автономного ($V_0 = 0$) параметрического генератора. Положим для определенности $\gamma > 0^*$; тогда устойчивые стационарная амплитуда A_c и фаза ϑ_c автономного генератора удовлетворяют соотношениям

$$A_c^2 = \frac{4}{\gamma} \left[-h + \frac{m}{2} \sin(2\vartheta_c) \right]; \quad (4)$$

$$\sin(2\vartheta_c) = \sqrt{1 - (2\delta/m)^2}. \quad (5)$$

Из (5) следует, как известно, возможность возбуждения одного из двух устойчивых состояний, характеризуемых различными значениями стационарной фазы $\vartheta_{c1}, \vartheta_{c2}$, сдвинутыми друг относительно друга на π :

$$\vartheta_{c1} = \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{2\delta}{m}\right)^2}; \quad \vartheta_{c2} = \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{2\delta}{m}\right)^2} + \pi. \quad (6)$$

Введем нормированные (безразмерные) параметры: $\tau = \omega t / 2\pi$ (время в периодах параметрических колебаний), $\hat{A} = A/A_c$; $\hat{V} = V_0/A_c$; $\hat{\vartheta} = \vartheta/\pi$; $\hat{\varphi} = \varphi/\pi$ (углы в долях π) и

$$\hat{\gamma} = \gamma A_c^2 = 4 \left(-h + \frac{m}{2} \sin(2\vartheta_c) \right). \quad (7)$$

Тогда уравнения (2), (3) примут вид

$$\frac{d\hat{A}}{d\tau} = \pi \left\{ \hat{A} \left[-\hat{\delta} + \frac{m}{2} \cos(2\pi\hat{\vartheta}) \right] - \hat{V} \sin[\pi(\hat{\vartheta} - \hat{\varphi})] \right\}; \quad (8)$$

$$\frac{d\hat{\vartheta}}{d\tau} = h + \frac{1}{4} \hat{\gamma} \hat{A}^2 - \frac{m}{2} \sin(2\pi\hat{\vartheta}) - \frac{\hat{V}}{\hat{A}} \cos[\pi(\hat{\vartheta} - \hat{\varphi})]. \quad (9)$$

Переходный процесс в системе, описываемой уравнениями (8), (9), возникает, если в некоторый момент времени $\tau = 0$ изменяются либо параметры системы, либо характер внешнего воздействия. Если длительность процесса изменения внешних условий или параметров τ_0 оказывается значительно меньшей временем релаксации фазы τ_ϑ (как видно из (9), $\tau_\vartheta \sim 1/\pi m$) и амплитуды $\tau_A \sim 1/\pi(m/2 - \delta)$, то расчет характеристик переходного процесса с достаточной степенью точности можно провести в предположении о скачкообраз-

* Такой знак имеет γ для нелинейной емкости $p-n$ -перехода, работающей при фиксированном напряжении смещения

ном изменении параметров или внешних условий*. Уравнения (8), (9) должны быть при этом решены с постоянными значениями параметров, стационарной внешней силой и начальными условиями, заданными при $\tau = 0$:

$$\hat{A}(0) = \hat{A}_0; \quad \hat{\vartheta}(0) = \hat{\vartheta}_0. \quad (10)$$

Рассматривались переходные процессы двух типов.

1) Установление колебаний (запуск) — переходный процесс, возникающий при скачкообразном изменении коэффициента модуляции реактивного параметра или добротности колебательного контура: $mQ < (mQ)_{kp} = 2$ для $\tau < 0$ и $mQ > 2$ для $\tau \geq 0$. Здесь представляется интерес влияние параметров системы и начальных условий (которые можно менять в широком интервале) на характер и длительность переходного процесса.

2) Переходные процессы, возникающие в параметрически возбужденном контуре, находящемся в одном из стационарных состояний, при внезапном приложении к нему внешней силы $f(t)$ — захватывание**. Начальные условия при $\tau = 0$ здесь следует задать в виде $\hat{A}_0 = 1$, $\hat{\vartheta}_0 = \hat{\vartheta}_c$ и варьировать параметры системы, амплитуду и фазу внешней силы. Наибольший практический интерес представляет исследование условий, при которых воздействие внешней силы приводит к переходу параметрического генератора из одного устойчивого состояния в другое, и длительности возникающего переходного процесса.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Решение дифференциальных уравнений (8) — (9) на машине проводилось с относительной точностью 10^{-5} . Каждый вариант оканчивался, либо когда текущее τ превышало некоторое заданное τ_{\max} (которое обычно составляло $30 \div 100$), либо при условии, если переходный процесс с достаточной степенью точности можно было считать законченным, т. е. если одновременно выполнялись неравенства

$$|d\hat{A}/d\tau| < \varepsilon_1; \quad |d\hat{\vartheta}/d\tau| < \varepsilon_2, \quad (11)$$

где ε_1 , ε_2 — малые положительные числа ($\sim 10^{-3} \div 5 \cdot 10^{-4}$). При исследовании режима установления колебаний к (11) добавлялось еще условие $|1 - \hat{A}| < \varepsilon_3$.

Обратимся к результатам численного интегрирования уравнений (8) — (9) для режима запуска параметрического генератора. Результаты вычислений, приведенные на графиках рис. 1—5, показывают характер изменения во времени амплитуды и фазы устанавливающихся колебаний для различных начальных условий и различных значений параметров δ , m и \hbar . Отметим, что в отдельном задании величины γ нет необходимости, поскольку в норми-

* Условия $\tau_n \ll \tau_0$, $\tau_n \ll \tau_A$ обычно хорошо выполняются. Лишь на очень высоких частотах оказывается иногда необходимым учитывать конкретный закон изменения амплитуды накачки во времени; проведение такого расчета представляет собой отдельную задачу.

** Поскольку термин «захватывание» широко используется в теории колебаний, следует подчеркнуть, что в настоящей работе под захватыванием параметрического генератора понимается изменение фазы его колебаний под воздействием внешнего синхронного сигнала.

рованное уравнение (9) входит расчетный параметр γ , определяемый формулой (7); знак γ во всех вычислениях полагался положительным.

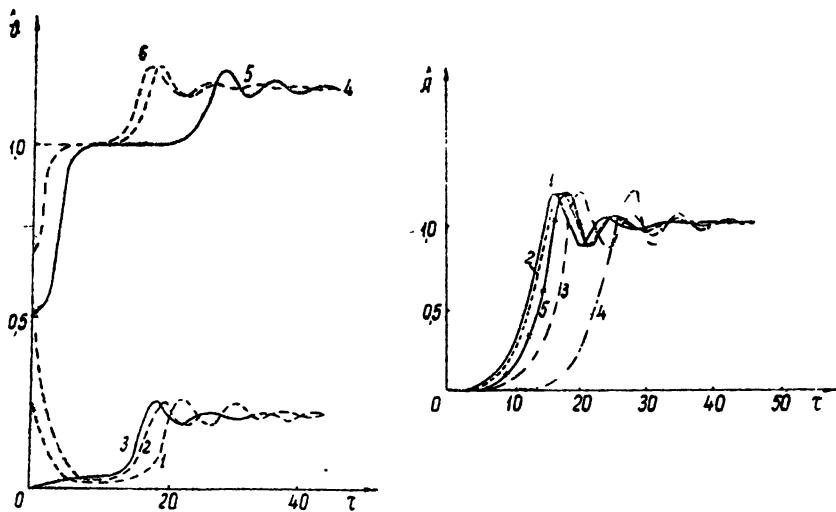


Рис. 1. Установление колебаний при различных начальных фазах. Кривые $\hat{v} = \hat{v}(\tau)$ исходят из точек $(0, \hat{\vartheta}_0)$; $\delta = 0,05$; $m = 0,3$; $h = 0,01$; $\hat{A}_0 = 0,01$. Для кривой 1 — $\hat{\vartheta}_0 = 0$, 2 — $\hat{\vartheta}_0 = 0,2$, 3 — $\hat{\vartheta}_0 = 0,4$, 4 — $\hat{\vartheta}_0 = 0,5$, 5 — $\hat{\vartheta}_0 = 0,7$, 6 — $\hat{\vartheta}_0 = 1$.

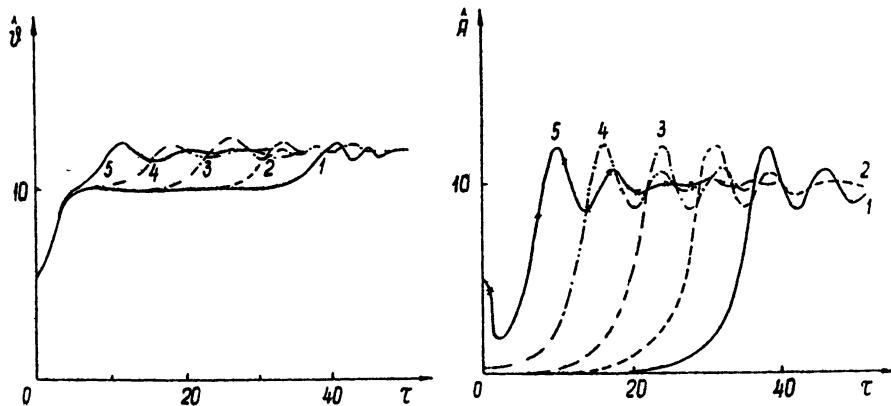


Рис. 2. Установление колебаний при различных начальных амплитудах ($\delta = 0,05$, $m = 0,3$; $h = 0,01$; $\hat{\vartheta}_0 = 0,52$). Для кривой 1 — $\hat{A}_0 = 10^{-4}$, 2 — $\hat{A}_0 = 10^{-3}$, 3 — $\hat{A}_0 = 10^{-2}$, 4 — $\hat{A}_0 = 0,1$, 5 — $\hat{A}_0 = 0,5$.

Все вычисления были выполнены для области расстроек, в которой нулевое состояние равновесия является неустойчивым: $|h| < \sqrt{m^2/4 - \delta^2}$. При рассмотрении процесса установления в практических наиболее интересных случаях, когда $A_0 \ll 1$, удобно разбить его на два этапа: „линейный“, соответствующий выполнению неравенств $\gamma A^2/4 \ll m/2$; $\gamma A^2/4 \ll h$, и „нелинейный“, где указанные неравенства уже не выполняются. На „линейном“ этапе фазовые

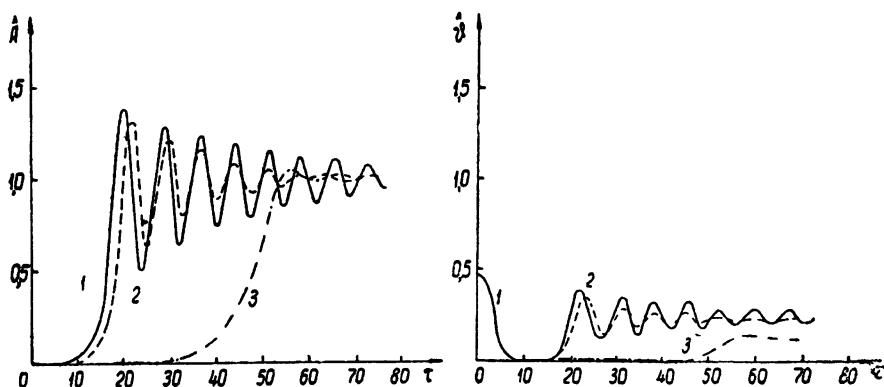


Рис. 3. Влияние затухания $\delta = 1/Q$ на процесс установления колебаний ($m = 0,3$; $h = 0,01$; $\hat{A}_0 = 0,01$; $\hat{\theta}_0 = 0,48$).
Для кривой 1— $\delta=0,01$, 2— $\delta=0,02$, 3— $\delta=0,1$.

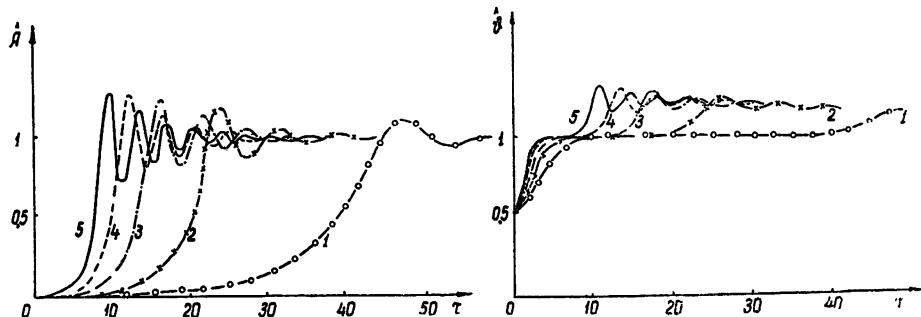


Рис. 4. Влияние коэффициента модуляции реактивности m на процесс установления колебаний ($\delta = 0,05$; $h = 0,01$; $\hat{A}_0 = 0,01$; $\hat{\theta}_0 = 0,52$).
Для кривой 1— $m=0,2$, 2— $m=0,3$, 3— $m=0,4$, 4— $m=0,5$, 5— $m=0,6$

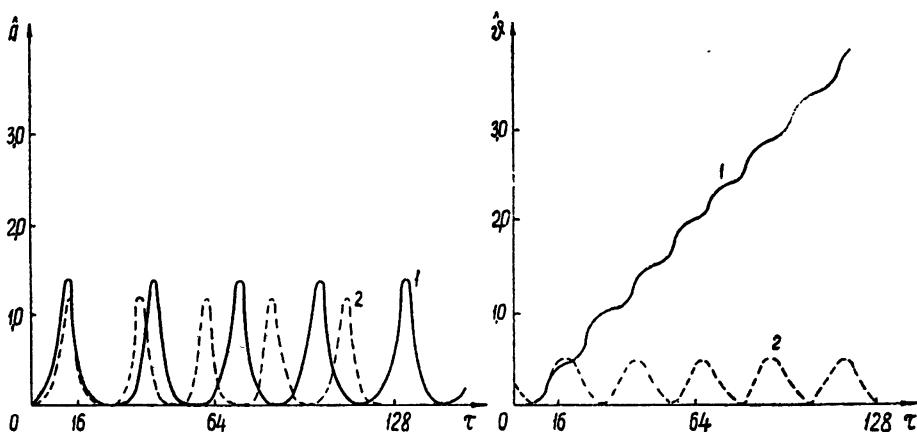


Рис. 5. Переходный процесс в параметрически возбуждаемом автономном контуре с бесконечной добротностью ($\delta = 0$; $m = 0,3$; $h = 0,01$; $\hat{A}_0 = 0,01$).
Для кривой 1— $\hat{\theta}_0=0$, для кривой 2— $\hat{\theta}_0=0,25$.

траектории сначала стягиваются к „линейным“ установившимся фазам, определяемым формулой

$$\sin(2\hat{\vartheta}_n) \simeq 2h/m \quad (12)$$

и соответствующим максимальной передаче энергии от генератора накачки параметрически возбуждаемым колебаниям, а затем на нелинейном этапе отходят от них, стремясь к $\hat{\vartheta}_c$.

Сказанное наглядно иллюстрируется, например, графиками рис. 1, на которых показан процесс установления колебаний при различных начальных фазах $\hat{\vartheta}_0 = 0 \div 1$. На рисунке хорошо видны области притяжения устойчивых фаз, разделенные сепаратрисой, расположенной вблизи $\hat{\vartheta} = 0,5$. На первой стадии процесса установления колебаний фазы стягиваются к „линейным“ фазам, т. е. к $\hat{\vartheta}_n = 0,02$ для $0 < \hat{\vartheta}_0 < 0,5$ и к $\hat{\vartheta}_n \simeq 1,02$ для $0,5 < \hat{\vartheta}_0 < 1^*$; амплитуда параметрических колебаний при этом изменяется мало (для $\hat{\vartheta}_0$, близких к сепаратрисе, она даже несколько уменьшается) и равна по порядку величины начальной амплитуде \hat{A}_0 . Длительность этого этапа процесса установления τ_1 зависит от значения $\hat{\vartheta}_0$. При $\hat{\vartheta}_0 = \hat{\vartheta}_n$, $\tau_1 = 0$; при $\hat{\vartheta}_0 \neq \hat{\vartheta}_n$, $\tau_1 \neq 0$ и по порядку величины $\tau_1 \simeq \tau_0$. Отметим, что τ_1 не зависит от режима ограничения стационарной амплитуды (ср., например, с [10], где обсуждается вопрос об установлении колебаний в параметрическом генераторе с нелинейным сопротивлением). Для $\tau > \tau_1$ начинается экспоненциальный рост амплитуды, а фаза остается приблизительно постоянной и равной $\hat{\vartheta}_n$. Длительность этого этапа переходного процесса

$$\tau_2 \simeq \pi \left[\frac{m}{2} \cos(2\pi\hat{\vartheta}_n) - \delta \right]^{-1} \ln \hat{A}_0^{-1}.$$

Наконец, при достаточно больших амплитудах $\hat{A} \simeq 1$ фазы удаляются от линейных установившихся значений и стремятся к стационарным значениям, определяемым соотношением (5): $\hat{\vartheta}_{c1} = 0,196$ или $\hat{\vartheta}_{c2} = 1,196$ для нижней и верхней областей соответственно. Рост амплитуды замедляется, и она постепенно достигает стационарного значения $\hat{A} = 1$. При этом на последнем этапе процесса установления изменения амплитуды и фазы носят уже не монотонный, а колебательный характер. Аналитическая оценка длительности этого последнего этапа переходного процесса τ_3 затруднительна**, и поэтому здесь целесообразно непосредственно пользоваться результатами численного расчета.

На рис. 2 приведены графики изменения амплитуды и фазы устанавливающихся колебаний для различных значений начальной амплитуды \hat{A}_0 . Для всех кривых рис. 2 начальная фаза бралась близкой к сепаратрисе, так что результаты проведенного расчета позволяют оценить максимальное время установления параметри-

* Соответствующие графики для $\hat{\vartheta}_0$, заключенных в интервале $1 \div 2$, имеют совершенно аналогичный вид.

** Получение приближенных аналитических результатов для последнего этапа оказывается возможным лишь в предположении, что отклонения амплитуды и фазы от стационарных значений являются достаточно малыми (см. [8]).

ческих колебаний. Эта оценка представляет интерес, поскольку практически из-за флюктуаций параметров трактов и частоты на-качки $\hat{\vartheta}_0 \neq \hat{\vartheta}_c^*$. Минимальное время, соответствующее оптимальной начальной фазе ($\tau_1 = 0$), как видно из графиков рис. 1, составляет величину, в $1,5 - 2$ раза меньшую.

На рис. 3 и 4 приведены графики изменения амплитуды и фазы устанавливающихся колебаний для различных значений затухания контура δ и коэффициента модуляции реактивного параметра m . Из указанных графиков видно, что рост амплитуды на начальных стадиях переходного процесса происходит тем быстрее, чем с большим запасом выполнено условие параметрического возбуждения $m/2 > \delta$. При этом для $m/2 \approx \delta$ процесс установления амплитуды носит практически монотонный характер; с ростом m (или уменьшением δ) все отчетливее выявляются осцилляции амплитуды и фазы в процессе установления, причем частота осцилляций увеличивается. В пределе для $\delta = 0$ (контур без затухания) стационарные амплитуда и фаза при $\hat{A}_0 \neq 1$ и $\hat{\vartheta}_0 \neq \hat{\vartheta}_c$ вообще не устанавливаются, и колебания в параметрическом генераторе представляют собой сильно автомодулированный процесс (см. рис. 5, где приведены графики изменения амплитуд и фаз устанавливающихся колебаний для $\hat{A}_0 = 0,01$ и различных значений начальной фазы).

Результаты численного исследования режима захватывания параметрического генератора внешним сигналом, имеющим частоту, равную частоте параметрической генерации, и фазу, противоположную фазе колебаний в контуре генератора, представлены на рис. 6 и 7. На рис. 6 проиллюстрировано влияние амплитуды внешнего

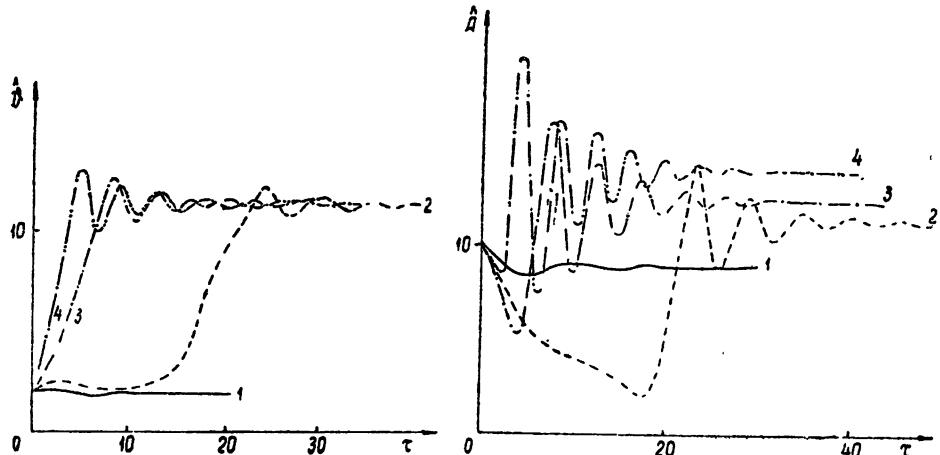


Рис. 6. Режим захватывания. Влияние амплитуды внешнего сигнала на переходный процесс ($\delta = 0,05$; $m = 0,3$; $h = 0,01$; $\hat{A}_0 = 1$; $\hat{\vartheta}_0 = 0,196$; фаза внешнего сигнала сдвинута на 1 относительно $\hat{\vartheta}_0$).

Для кривой 1 — $\hat{V} = 0,02$, 2 — $\hat{V} = 0,05$, 3 — $\hat{V} = 0,1$, 4 — $\hat{V} = 0,2$. Амплитуда $\hat{V} = 0,02$ недостаточна для переключения.

* Существенную роль в ряде случаев могут играть флюктуации A_0 и ϑ_0 , связанные с аддитивным шумом. Особенности процесса установления колебаний в параметрическом генераторе, самовозбуждающемся от шумов, обсуждаются в [10, 16].

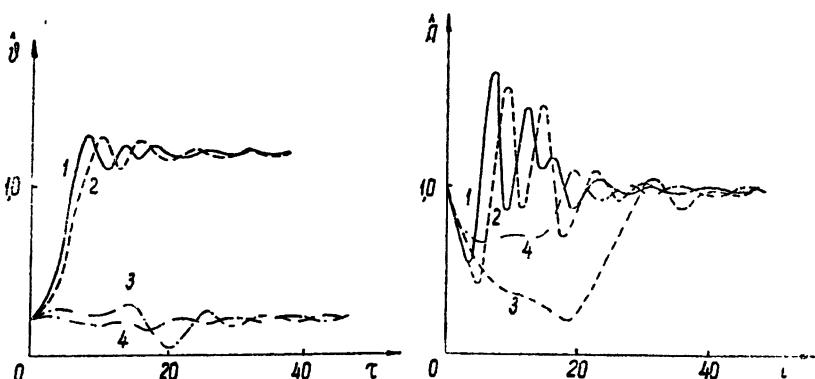


Рис. 7. Режим захватывания с выключением внешнего сигнала. Параметры те же, что на рис. 6; $\tau_p = 15$.

Для кривой 1— $\hat{V}=0,1$, 2— $\hat{V}=0,08$, 3— $\hat{V}=0,05$, 4— $\hat{V}=0,04$. При заданном τ_p сигналы с амплитудами $\hat{V} = 0,04$ и $0,05$ не производят переключения генератора.

сигнала на характер и длительность переходного процесса, возникающего при внезапном включении внешней силы. Из приведенных графиков видно, что включение внешнего сигнала изменяет как амплитуду, так и фазу колебаний в контуре. При этом фаза колебаний в контуре смещается в сторону фазы внешнего сигнала. При амплитуде внешней силы, превышающей некоторое критическое значение \hat{V}_{kp} , фаза колебаний в контуре переходит через сепаратрису, т. е. внешний сигнал переводит генератор из одного устойчивого состояния в другое—происходит переключение генератора (для параметров системы, использованных на рис. 6, $\hat{V}_{kp}=0,048$). Время, необходимое для переключения, сильно зависит от \hat{V} ; последнее обстоятельство можно использовать при записи двоичной информации в параметронной матрице памяти [6].

На рис. 7 проиллюстрированы количественные соотношения, лежащие в основе такой записи; здесь в программе было предусмотрено не только внезапное включение внешней силы, но и скачкообразное выключение ее по прошествии времени τ_p . Для этого при $\tau \geq \tau_p$ вместо \hat{V} в память машины засыпался нуль, и вычисления заканчивались как обычно, если выполнялись условия (11). Из рис. 7 видно, что за время $\tau_p = 15$ сигнал с амплитудой $\hat{V} = 0,05$ не производит переключения параметрического генератора, в то время как сигнал с вдвое большей амплитудой $\hat{V} = 0,1$ переключает генератор за $\tau_p = 10$.

Расчеты показывают, что значение \hat{V}_{kp} и время переключения зависят от параметров генератора m и δ ; при этом с ростом m величина \hat{V}_{kp} и необходимая для переключения длительность воздействия внешней силы на параметрический генератор возрастают.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Как следует из приведенных результатов численного интегрирования уравнений параметрического генератора с реактивным

ограничением, наиболее характерным отличием переходных процессов в рассматриваемом генераторе от таковых в системах с диссипативным ограничением является осцилляторный характер изменения амплитуды и фазы. Поэтому здесь специального обсуждения заслуживает вопрос об определении длительности процессов установления. Действительно, если исходить из критериев, принятых в теории систем с лимитационным характером приближения к состоянию устойчивого равновесия, временем установления следует считать время τ_y , по истечении которого $|\hat{A} - 1| < \Delta\hat{A}$, $|\hat{\vartheta} - \hat{\vartheta}_c| < \Delta\hat{\vartheta}$, где $\Delta\hat{A}$, $\Delta\hat{\vartheta}$ —заданные малые величины. Вместе с тем первые достижения амплитудой и фазой своих стационарных значений в генераторе с реактивным ограничением происходят за времена τ'_y , существенно меньшие τ_y ; при этом τ'_y и τ_y отличаются друг от друга тем сильнее, чем больше коэффициент модуляции реактивного параметра и добротность контура параметрического генератора. Поэтому для практических приложений (в особенности для цифровой техники) наиболее интересно τ'_y ; с этой точки зрения целесообразно увеличивать m и $Q = 1/\delta^*$.

Результаты численных расчетов для автономного генератора согласуются с качественным анализом системы (2) + (3) на фазовой плоскости (см. [2, 3]). Осциллирующие кривые рис. 1—4 соответствуют устойчивым фокусам на фазовой плоскости. Безразмерная частота осцилляций имеет порядок $\Omega_{osc} \sim \sqrt{m/2 - \delta}$ и уменьшается при подходе к границе области параметрического возбуждения. Результаты численного расчета переходных процессов для $\delta = 0$ согласуются с результатами анализа на фазовой плоскости, проведенного Вейденхаммером [3]. Здесь особые точки оказываются центрами, и при $\hat{A}_0 \neq 1$, $\hat{\vartheta}_0 \neq \hat{\vartheta}_c$ изображающая точка попадает на замкнутые интегральные кривые, охватывающие центры. При этом в зависимости от значения $\hat{\vartheta}_0$ могут реализоваться как траектории, охватывающие начало координат (кривая 1 рис. 5), так и траектории, охватывающие только ненулевые особые точки (кривая 2).

Точное аналитическое исследование явления захватывания параметрического генератора с реактивным ограничением провести не удается даже для установившегося режима. Качественную же интерпретацию численных результатов можно дать, исходя из следующих соображений. Движение фазы параметрического генератора, описываемое уравнением (9), можно сопоставить с движением частицы в силовом поле $U(\hat{\vartheta})$ вида

$$U(\hat{\vartheta}) = h\hat{\vartheta} - \frac{m}{4\pi} \cos(2\pi\hat{\vartheta}) + \frac{\hat{V}}{\hat{A}\pi} \sin[\pi(\hat{\vartheta} - \hat{\varphi})] \quad (13)$$

(для простоты, поскольку здесь нас интересует лишь качественная сторона дела, член $\gamma\hat{A}^2$ в (13) не учтен; как следует из вышеизложенного, обусловленные им отличия $\hat{\vartheta}_c$ от соответствующих значений линейных фаз $\hat{\vartheta}_l$ обычно малы).

* Максимальные значения Q определяются, как известно, временем затухания колебаний в контуре после выключения накачки (см. [6]).

На рис. 8 (кривая 1) изображен потенциальный профиль $U(\hat{\vartheta})$ для автономного генератора с $h = 0$; потенциальные ямы, разделенные интервалом, равным 1 (в безразмерных фазах), соответствуют возможным устойчивым состояниям генератора. При $\hat{V} \neq 0$ потенциальный профиль модифицируется; на кривой 2 показан потенциальный профиль $U(\hat{\vartheta})$ для случая, когда фаза воздействующей

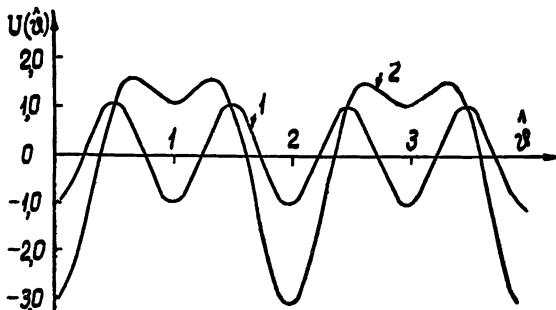


Рис. 8. Графики потенциального профиля, соответствующего фазовому управлению для автономного параметрического генератора с $h = 0$ (кривая 1) и для параметрического генератора, находящегося под воздействием гармонической внешней силы, имеющей фазу, совпадающую с одной из устойчивых фаз генератора

$$(кривая 2; U(\hat{\vartheta}) = -\cos(2\pi\hat{\vartheta}) - 2\cos\pi\hat{\vartheta}).$$

щей силы совпадает с одной из установившихся фаз (0,1) генератора (при этом $\hat{\varphi} = \varphi/\pi = 1/2$, поскольку фаза на емкости сдвинута на $\pi/2$ относительно фазы сигнала, последовательно вводимого в контур). Из сравнения кривых 1, 2 видно, что при достаточно больших \hat{V} на интервале $\hat{\vartheta} [0, 2]$ существует лишь одна потенциальная яма — параметрический генератор, находящийся под внешним воздействием, становится системой с одним устойчивым состоянием. Из рассмотрения профиля $U(\hat{\vartheta})$ нетрудно оценить порядок величины амплитуды внешней силы \hat{V} , при которой исчезает одно из устойчивых состояний генератора, т. е. происходит захватывание.

Рассмотренный механизм ограничения амплитуды в параметрическом генераторе может быть назван „безынерционным реактивным ограничением“, поскольку здесь среднее значение нелинейной емкости, определяющее вложение энергии в контур от генератора накачки, мгновенно следует за амплитудой параметрических колебаний. Возможны, однако, и другие, инерционные механизмы ограничения амплитуды колебаний в параметрических системах. К ним относится, например, механизм ограничения в параметрическом генераторе на полупроводниковом диоде с инерционной цепью автосмещения и механизм ограничения в параметрическом генераторе с добротным резонатором накачки (ограничение за счет конечной мощности накачки). В обоих этих случаях, как и в рассмотренном выше генераторе с безынерционной реактивной нелинейностью, при больших значениях амплитуды \hat{A} уменьшается вложение энергии в параметрический контур, однако механизм, осуществляющий изменение энерговложения, имеет конечную постоянную вре-

мени. Особый интерес представляет режим ограничения за счет конечной мощности накачки; как было показано в ряде работ (см., например, [11]), этот режим может быть использован для создания эффективных параметрических ограничителей амплитуды. Переходные процессы в колебательных системах с инерционной нелинейностью, как показывают теория и эксперимент (см., например, [11]), также колебательный характер; период и характер осцилляций зависят теперь еще и от соотношения постоянной времени контура и постоянной времени реактивной нелинейности (постоянной времени цепи автосмещения или постоянной времени резонатора накачки). При этом, если в генераторе с безынерционной реактивной нелинейностью автомодуляционный процесс, как показывает вышеизложенный расчет, имеет место лишь в отсутствие потерь, в генераторах с инерционной нелинейностью автомодуляция может возникать и при потерях, не равных нулю. Периодические автомодуляционные процессы часто наблюдаются в генераторах с автосмещением; автомодуляция возникает и в генераторах с резонатором накачки при специально подобранных постоянных временах*. Пример такой системы рассмотрен в работе [15].

В заключение отметим, что осцилляции при установлении колебаний и автомодуляция наблюдаются обычно в трехуровневых квантовомеханических генераторах СВЧ диапазона [12] и оптического диапазона [13, 14]. При феноменологическом подходе механизмы ограничения в указанных генераторах следует отнести, очевидно, к реактивному ограничению. Примером возможного безынерционного механизма реактивного ограничения в оптическом квантовом генераторе является ограничение за счет струкционных эффектов на торцах оптического резонатора, пропорциональных световому давлению (изменяется собственная частота резонатора), примером инерционного ограничения—ограничение за счет „высвечивания“ инвертированных уровней. В связи с этим может представить интерес детальное сравнение возможных механизмов реактивного ограничения в квантовомеханических генераторах—с одной стороны и параметрических—с другой; такое сравнение может позволить выявить ряд общих колебательных свойств квантовомеханических генераторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, ЖТФ, 4, 67 (1934).
2. В. П. Гуляев, В. В. Мигулин, ЖТФ, 4, 48 (1934).
3. Г. Каудерер, Нелинейная механика, ИЛ, М., 1961.
4. М. В. Четкин, Радиотехника и электроника, 5, 520 (1960).
5. И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 995 (1960).
6. L. S. Onyschkevich, W. Kosonocky, A. Lo, IRE Trans., EC-8, 277 (1955).
7. E. Goto, Proc. IRE, 47, 1304 (1959).
8. М. В. Четкин, Радиотехника и электроника, 7, 1444 (1962).
9. В. И. Самойленко, Е. М. Злочевский, Сб. Электронные радиоимпульсные вычислительные системы дискретного действия, Оборонгиз, М., 1962, стр. 134.
10. С. А. Ахманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 769 (1961).

* В качестве другого примера можно указать параметрический генератор 4-ой субгармоники, исследованный в нашей лаборатории В. А. Власовым. В этом генераторе нелинейная емкость, возбуждаемая генератором накачки частоты ω , связывала два колебательных контура, настроенных на частоты $\omega/2$ и $\omega/4$. При этом энерговложение в резонатор 4-ой субгармоники накачки осуществляется через резонатор 2-ой субгармоники

11. I. Ho, A. Siegman, IRE Trans., MTT-9, 459 (1961).
12. F. Saito, J. Phys. Soc. Japan, 16, 2592 (1961).
13. J. Singer, S. Wang, Phys. Rev. Lett., 6, 351 (1961).
14. В. Н. Генкин, Я. И. Ханин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 423 (1962).
15. Ю. В. Григорьев, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 1617 (1961).
16. С. А. Ахманов, В. П. Комолов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1175 (1962).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
28 декабря 1962 г.

TO THE THEORY OF TRANSIENT PROCESSES IN PARAMETRICALLY,
EXCITED CIRCUIT

S. A. Akhmanov, A. S. Roshal'

Results are presented of numerical integration of the shortened equations describing the transient processes in a parametrically excited circuit, the amplitude of stationary oscillations being determined by the inertialless nonlinear reactance. The regime of setting up of the amplitude and the phase has been analysed for various initial conditions. The transient processes are also considered in a circuit parametrically excited by periodic external force with the frequency equal to that of parametric generation. The non-stationary process is proved to be of oscillatory character contrary to that in the systems with dissipative limitation of stationary amplitude. The non-stationary processes in the systems with inertial reactive nonlinearity are discussed.

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕТОДА ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ю. И. Неймарк

Метод усреднения трактуется с точки зрения метода точечных отображений, что позволило упростить доказательства известных теорем Богоявленского и Крылова, получить новые результаты о соответствии движений усредненной и исходной систем в большом, обнаружить непосредственную связь метода усреднения со стробоскопическим методом Минорского и указать обобщение метода усреднения на разрывные системы.

Обоснование метода усреднения [1] и, тем самым, метода Ван-дер-Поля [2] состоит в установлении при некоторых предположениях и достаточно малых $\mu > 0$ связи между решениями дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = \mu X(x, t) \quad (1)$$

и решениями уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \mu \tilde{X}(x), \quad (2)$$

получаемого из него усреднением правой части по явно входящему времени t . Заметим, что введением нового времени $t' = \mu t$ уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt'} = \tilde{X}(x). \quad (2a)$$

Близость с точностью до ε решений с одинаковыми начальными условиями исходного (1) и усредненного (2) уравнений на промежутке времени длительности $T(\varepsilon)/\mu$ была установлена Мандельштамом и Папалексис [3]. При этом функция $X(x, t)$ предполагалась дважды непрерывно дифференцируемой по x и непрерывной и периодической по t . В работах Богоявленского и Крылова, Гихмана, Красносельского и Крейна было показано, что указанная близость решений имеет место и при более общих предположениях и может рассматриваться как следствие непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий.

Для бесконечного промежутка времени основными являются результаты Богоявленского и Крылова [1], согласно которым устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия или устойчивому (неустойчивому) периодическому движению усредненной системы (2) соответствует при достаточно малых μ устойчивое (неустойчивое) периодическое движение или, соответственно, устойчивое (неустойчивое) двухмерное интегральное многообразие исходной системы (1). При этом предполагается, что характеристические показатели

* Зависимость функции $X(x, t)$ от μ не вносит в последующее никаких изменений и поэтому ради простоты опущена.

состояния равновесия и периодического движения усредненной системы (2а) имеют отличные от нуля действительные части.

В настоящей работе метод усреднения и метод Ван-дер-Поля трактуются с точки зрения метода точечных отображений [5, 6]. Рассмотрение ограничено случаем, когда правые части уравнений (1) являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями x , непрерывными и периодическими функциями времени t периода τ . Такой подход позволяет значительно упростить доказательство теорем Боголюбова и Крылова и установить новые результаты о соответствии движений в большом. В применении к системам второго порядка из этих результатов следует тождественность топологических структур разбиения фазового пространства на траектории у исходной и усредненной систем, если только усредненная система груба в смысле Андронова—Понtryгина и μ достаточно мало. Кроме того, такой подход позволяет обнаружить непосредственную связь метода усреднения с известным стробоскопическим методом Минорского [4].

1. О СВЯЗИ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМИ ОТБРАЖЕНИЯМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ИСХОДНОМУ И УСРЕДНЕННОМУ УРАВНЕНИЯМ

Уравнения (1) и (2) представляют собой векторную форму записи системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, X_2, \dots, X_n$ — компоненты векторов x и X соответственно. Будем геометрически интерпретировать решения системы (1) и (2) в пространстве переменных x_1, x_2, \dots, x_n, t . При этом каждой системе значений x_1, x_2, \dots, x_n, t будем ставить в соответствие точку M с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n, t - [t/\tau]\tau$, где $[t/\tau]$ означает целую часть числа t/τ . Через каждую точку этого пространства, которое мы будем называть фазовым пространством, проходит единственная фазовая траектория и каждая из фазовых траекторий через промежутки времени τ пересекает вновь и вновь гиперплоскость $t=0$.

Пусть M — некоторая точка плоскости $t=0$; выходящая из точки M фазовая траектория через время τ вновь пересекает плоскость $t=0$ в некоторой точке \bar{M} . Точечное отображение, переводящее точку M в \bar{M} , обозначим через T_τ . Для отыскания этого точечного отображения необходимо найти решение уравнения (1) на промежутке времени τ . С любой степенью точности это решение может быть найдено путем итерирования соотношения

$$x^{(m)}(t) = x(0) + \mu \int_0^t X(x^{(m-1)}(\sigma), \sigma) d\sigma, \quad (3)$$

связывающего $m-1$ приближение с m приближением. Ограничиваюсь первым приближением, найдем, что

$$x(\tau) = x(0) + \mu \int_0^\tau X(x(0), \sigma) d\sigma + \mu \Omega(x(0), \mu), \quad (4)$$

где в любой ограниченной области фазового пространства при $\mu \rightarrow 0$

$$\Omega(x, \mu) \rightarrow 0, \quad \Omega'_x(x, \mu) \rightarrow 0 \quad (5)$$

равномерно по x (см. Приложение 1). Согласно (4), точечное отображение T_τ , переводящее точку x плоскости $t=0$ в точку \bar{x} той же плоскости, записывается в виде

$$\bar{x} = x + \mu\tau \tilde{X}(x) + \mu\tilde{\Omega}(x, \mu). \quad (6)$$

Найдем теперь точечное отображение \tilde{T}_τ для усредненного уравнения (2). Как и в предыдущем случае, прибегая к методу последовательных приближений и ограничиваясь первым приближением, найдем, что

$$\bar{x} = x + \mu\tau \tilde{X}(x) + \mu\tilde{\Omega}(x, \mu), \quad (7)$$

где $\tilde{\Omega}(x, \mu)$ так же, как и $\Omega(x, \mu)$, удовлетворяет условиям (5).

Таким образом, с точки зрения метода точечных отображений переход от рассмотрения уравнения (1) к рассмотрению усредненного уравнения (2) соответствует исследованию точечного отображения (7) вместо отображения (6), отличающегося от отображения (7) добавком второго порядка малости относительно μ . Ясно, что все утверждения, которые могут быть сделаны для точечного отображения (7) вне зависимости от этой добавки, будут иметь место и для точечного отображения (6), т. е. будут общими для исходной и усредненной систем.

Стробоскопический метод Минорского*, состоящий в изучении вспомогательной системы дифференциальных уравнений, получаемой из данной системы, учитывая только те точки ее решения, которые отстоят (во времени) на 2π . Данный метод распространяется на довольно узкий класс дифференциальных уравнений, близких к линейным, однако такие уравнения весьма часто встречаются в приложениях*. Нетрудно видеть, что рассмотрение точек, отстоящих на время 2π , по существу означает рассмотрение точечного отображения $T_{2\pi}$, изучение которого, в свою очередь, путем замены конечных приращений дифференциалами Минорский, подменяет рассмотрением нового вспомогательного уравнения. Если ограничиться, как это делает Минорский, первыми приближениями и при нахождении координат точек, отстоящих по времени на 2π , и в выражении конечных приращений через дифференциалы, то вспомогательное уравнение Минорского, как это следует из предыдущего, будет совпадать с усредненным уравнением.

2. О СВЯЗИ МЕЖДУ СОСТОЯНИЯМИ РАВНОВЕСИЯ УСРЕДНЕННОГО УРАВНЕНИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Неподвижным точкам точечного отображения T_τ соответствуют периодические движения периода τ системы дифференциальных уравнений (1). При этом корни z характеристического уравнения неподвижной точки точечного отображения связаны с характеристическими показателями ρ соответствующего периодического движения соотношением [5]

$$\rho = \frac{1}{\tau} \ln z. \quad (8)$$

Неподвижные точки x^* отображения T_τ , согласно (6), находятся из уравнения

$$\tau \tilde{X}(x^*) + \Omega(x^*, \mu) = 0. \quad (9)$$

Характеристическое уравнение, определяющее значения z , после замены z на $1+\mu\tau\lambda$ можно записать в виде

* Цитата взята из работы Минорского [4], стр. 8.

$$\text{Det} \left\| \left(\frac{\partial \tilde{X}_i}{\partial x_j} \right)_{x^*} + 0(\mu) - \delta_{ij} \lambda \right\| = 0, \quad (10)$$

где δ_{ij} —символ Кронекера, равный 1 при $i=j$ и 0 при $i \neq j$; $0(\mu)$ обозначает здесь и в дальнейшем величины, стремящиеся к нулю вместе с μ .

Допустим, что при $\mu=0$ уравнение (9) имеет корень $x_{\mu=0}^*$, а соответствующие ему корни $\lambda_{\mu=0}$ уравнения (10) при $\mu=0$ отличны от нуля. Правая часть уравнения (10) при $\mu=0$ и $\lambda=0$ является якобианом уравнения (9) с $\mu=0$. В силу сделанного предположения этот якобиан отличен от нуля. Отсюда следует, что корень $x_{\mu=0}^*$ уравнения (9) допускает продолжение по параметру μ , так что $x^* = x_{\mu=0}^* + 0(\mu)$. В силу этого корни λ уравнения (10) при достаточно малых μ представляются в виде $\lambda = \lambda_{\mu=0} + 0(\mu)$.

При $\mu=0$ корень $x_{\mu=0}^*$ уравнения (9) является состоянием равновесия усредненной системы (2а), а корни $\lambda_{\mu=0}$ уравнения (10) являются характеристическими показателями этого состояния равновесия; поэтому каждому состоянию равновесия усредненной системы с отличными от нуля характеристическими показателями соответствует периодическое движение (периода τ) исходной системы с характеристическими показателями

$$\rho = \frac{1}{\tau} \ln (1 + \mu \tau \lambda_{\mu=0} + \mu 0(\mu)) = \mu \lambda_{\mu=0} + \mu 0(\mu). \quad (11)$$

В частности, устойчивому состоянию равновесия усредненной системы, у которого все $\lambda_{\mu=0}$ имеют отрицательные действительные части, соответствует асимптотически устойчивое периодическое движение исходной системы.

3. О СООТВЕТСТВИИ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ УСРЕДНЕННОЙ СИСТЕМЫ И СООТВЕТСТВУЮЩЕГО УСТОЙЧИВОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

Областью притяжения устойчивого состояния равновесия или периодического движения называется множество точек фазового пространства, которые при $t \rightarrow +\infty$ асимптотически приближаются к состоянию равновесия или соответственно к периодическому движению (имеется в виду замкнутая фазовая кривая, соответствующая периодическому движению).

Для установления соответствия между областью притяжения устойчивого состояния равновесия усредненной системы и областью притяжения соответствующего устойчивого периодического движения исходной системы воспользуемся следующей леммой (см. Приложение 2).

Лемма. Пусть непрерывное точечное отображение T_1 переводит каждую точку компактной области G после многократного повторения в точки области g ; тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$ и такое N , что всякое отображение T_2 , отличающееся в G от T_1 не более, чем на δ , переводит любую точку G (в результате не более N итераций) в точки ε -окрестности g .

Пусть \bar{P} —область притяжения устойчивого состояния равновесия усредненной* системы, у которой корни $\lambda_{\mu=0}$ имеют отрица-

* Движения усредненной системы рассматриваются в пространстве x, t , т. е. в фазовом пространстве исходной системы.

тельные действительные части. Достаточно малая окрестность устойчивой замкнутой фазовой траектории исходной системы, соответствующей этому состоянию равновесия, принадлежит к ее области притяжения $\tilde{\Pi}$.

Согласно только что сформулированной лемме любая компактная часть области $\tilde{\Pi}$ при достаточно малом μ стягивается в окрестность периодического движения и, следовательно, любая компактная часть области $\tilde{\Pi}$ принадлежит Π . Таким же образом устанавливается, что любая компактная часть Π принадлежит (при достаточно малом μ) $\tilde{\Pi}$.

4. О СООТВЕТСТВИИ УСТОЙЧИВОМУ ПЕРИОДИЧЕСКОМУ ДВИЖЕНИЮ УСРЕДНЕННОЙ СИСТЕМЫ УСТОЙЧИВОЙ ТОРОИДАЛЬНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть усредненная система (2а) имеет периодическое движение $x=\varphi(t')$ периода τ_0 . Это означает, что у точечного отображения \tilde{T}_τ имеется устойчивая инвариантная замкнутая кривая $\tilde{\Gamma}$, уравнение которой $x=\varphi(t')$. В силу близости отображений \tilde{T}_τ и T_τ естественно предположить, что и отображение T_τ имеет близкую к $\tilde{\Gamma}$ устойчивую инвариантную кривую Γ . Последней соответствует устойчивая тороидальная интегральная поверхность исходной системы (1). Эта интегральная поверхность составлена из фазовых кривых исходной системы, выходящих из точек кривой Γ , лежащей в плоскости $t=0$.

Таким образом, если бы сделанное предположение имело место, то устойчивому периодическому движению усредненной системы соответствовала бы устойчивая тороидальная поверхность исходной системы и в силу леммы имело бы место соответствие между их областями притяжения (в том же смысле, как и в уже рассмотренном случае состояния равновесия). В Приложении 3 доказывается, что предположение о сохраняемости устойчивой инвариантной кривой точечного отображения T_τ при малых его изменениях имеет место, если характеристические показатели периодического движения усредненной системы (2а) отличны от нуля.

Точечное отображение T_τ на инвариантной кривой Γ определяет некоторое отображение. Число вращения Пуанкаре ω этого отображения непрерывно зависит от μ , так что $\omega = \mu/\tau_0 + \mu\Omega(\mu)$, где

μ/τ_0 — число вращения отображения \tilde{T}_τ на замкнутой кривой $\tilde{\Gamma}$.

Отметим, что в общем случае $\omega \neq \mu/\tau_0$ и поэтому движения усредненной и исходной системы с близкими начальными условиями, соответствующие $\tilde{\Gamma}$ и Γ , расходятся на конечное расстояние при возрастании времени.

5. БЛИЗОСТЬ РЕШЕНИЙ УСРЕДНЕННОГО И ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЙ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ

Пусть T_1 и T_2 — точечные отображения, удовлетворяющие условиям

$$\|T_1x_1 - T_2x_1\| < \epsilon, \quad \|T_2x_1 - T_2x_2\| < q \|x_1 - x_2\|. \quad (12)$$

Тогда, как легко проверить,

$$\|T_1^n x_1 - T_2^n x_2\| < \varepsilon \frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n \|x_1 - x_2\|. \quad (13)$$

Возьмем в качестве T_1 и T_2 отображения T_τ и \tilde{T}_τ ; при этом $\varepsilon = A\mu^2$, $|q| < 1 + B\mu$ и, следовательно, для $n = T/\mu$

$$\|T_\tau^{T/\mu} x - \tilde{T}_\tau^{T/\mu} x\| < \frac{A}{B} \mu (e^{LT} - 1).$$

Иными словами, если $\tilde{x}(t)$ и $x(t)$ —решения усредненного и исходного уравнений с одним и тем же начальным условием, то

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \frac{A}{B} \mu (e^{LT} - 1) + A\mu^2 \quad (14)$$

при всех $0 \leq t \leq T\tau/\mu$.

6. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ПРИМЕНЕНИИ К НЕАВТОНОМНЫМ СИСТЕМАМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В применении к неавтономным системам второго порядка имеет место не только соответствие между некоторыми типами движений и их областями притяжения, но и соответствие в целом. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема. Если усредненная система груба в смысле Андронова—Понtryгина, то в любой конечной по x части фазового пространства x, t каждой ячейке усредненной автономной системы, интерпретируемой в пространстве x, t , соответствует (с точностью до величин, стремящихся к нулю вместе с μ) такая же ячейка исходной неавтономной системы.

Для доказательства этой теоремы, формулировка которой была приведена в работе [6], достаточно показать, что точечные отображения T_τ и \tilde{T}_τ имеют при малых μ близкие и качественно одинаковые структуры.

Поскольку усредненная автономная система груба в смысле Андронова—Понtryгина, то ее возможные качественные структуры, а следовательно, и структуры отображения \tilde{T}_τ хорошо известны и полностью определяются состояниями равновесия, предельными циклами и сепаратрисами седел.

Соответствие между неподвижными точками и инвариантными замкнутыми кривыми отображений T_τ и \tilde{T}_τ установлено*. Осталось убедиться, что такое же соответствие имеет место и между сепаратрисами**. Непрерывная зависимость сепаратрис от непрерывно дифференцируемого изменения точечного отображения в некоторой окрестности седлообразной неподвижной точки следует непосредственно из того, что сепаратриса является неподвижным элементом сжимающего точечного отображения \tilde{T}_τ или \tilde{T}_τ^{-1} множества кривых, выходящих из седла и близких к сепаратрисе (см. Приложение 4). По выходе из этой окрестности седла, спустя конечное время, на котором имеет место оценка (14), сепаратриса попадает в задан-

* Соответствие между неустойчивыми инвариантными замкнутыми кривыми следует из того, что они являются устойчивыми инвариантными кривыми отображений \tilde{T}_τ^{-1} и T_τ^{-1} .

** Аналогичное утверждение о сепаратрисах имеется в работе [7].

ную окрестность устойчивой неподвижной точки или устойчивой инвариантной замкнутой кривой; указанная окрестность в целом мало меняется с переходом от отображения \tilde{T}_τ к отображению T_τ .

Таким образом, каждой ячейке отображения \tilde{T}_τ соответствует близкая ячейка отображения T_τ , в которой, в силу раздела 3, последовательные итерации всех точек асимптотически приближаются к соответствующим устойчивым неподвижным точкам или устойчивым инвариантным кривым.

7. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ К РАЗРЫВНЫМ СИСТЕМАМ

Допустим, что правая часть уравнения (1) допускает разрывы непрерывности на некоторых поверхностях $S_j(x, t)=0$, $j=1, 2, \dots, m$ (S_j —дважды непрерывно дифференцируемые функции x и t , периодические по t периода τ) и что фазовые кривые непрерывно продолжаются через поверхности разрыва. Допустим также, что прямые, параллельные оси t , не имеют касаний с поверхностями $S_j=0$.

При этих предположениях точечное отображение T_τ можно записать в виде

$$\bar{x} = x + \mu \sum \int_{t_j(x)}^{t_{j+1}(x)} X(x(\sigma), \sigma) d\sigma, \quad (15)$$

где $x(t)$ —решение исходной системы, обращающееся в x при $t=0$, $t_j(x)$ —моменты пересечения фазовой кривой $x(t)$ ($0 \leq t < \tau$) с поверхностями $S_j(x, t)=0$. С точностью до величин порядка μ^2 точечное отображение (15) записывается в виде

$$\bar{x} = x + \sum \mu \int_{t_j(x)}^{t_{j+1}(x)} X(x, \sigma) d\sigma, \quad 0 \leq t(x) < \tau. \quad (16)$$

Здесь $t_j(x)$ —решение уравнения $S_j(x, t) = 0$.

Если обозначить

$$\tilde{X}(x) = \sum \int_{t_j(x)}^{t_{j+1}(x)} X(x, \sigma) d\sigma = \int_0^\tau X(x, \sigma) d\sigma, \quad (17)$$

то точечное отображение T_τ с точностью до величин порядка μ^2 совпадает с точечным отображением \tilde{T}_τ для усредненного уравнения. Это достаточно для того, чтобы остались в силе все сделанные ранее утверждения (точечные отображения T_τ и \tilde{T}_τ непрерывно дифференцируемы по x , и отличие их первых производных также порядка μ^2 , т. е. условия (5) выполнены).

Если предположение об отсутствии касаний прямых, параллельных оси t , с поверхностями $S_j=0$ не выполнено, точечное отображение T_τ , а вместе с ним и $\tilde{X}(x)$ будут иметь разрывы непрерывности по x , т. е. усредненное уравнение станет разрывным. Мы ограничимся лишь констатацией этого факта, поскольку дальнейшее рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящей работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пусть в рассматриваемой области переменных x и t

$$\|X(x, t)\| < L, \quad \left\|\frac{\partial X}{\partial x}\right\| < M, \quad \left\|\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right\| < N. \quad (1.1)$$

Из уравнения (3) при $m=1$ следует, что

$$\|x^{(1)}(t) - x(0)\| < \mu L \tau. \quad (1.2)$$

Вычитая почленно из равенства

$$x(t) = x(0) + \mu \int_0^t X(x(\sigma), \sigma) d\sigma \quad (1.3)$$

равенство (3) с $m=1$, найдем, что

$$\|x(t) - x^{(1)}(t)\| < \mu \int_0^t \left\|\frac{\partial X}{\partial x}\right\| \|x(\sigma) - x(0)\| d\sigma < \mu^2 LM \tau^2. \quad (1.4)$$

Продифференцируем уравнение (3) при $m=1$ и уравнение (1.3) по $x(0) = x^0$:

$$\frac{\partial x^1}{\partial x^0} = 1 + \mu \int_0^t \frac{\partial X}{\partial x} d\sigma; \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial x}{\partial x^0} = 1 + \mu \int_0^t \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x^0} d\sigma. \quad (1.6)$$

Из соотношений (1.5) и (1.6) следует:

$$\left\|1 - \frac{\partial x^1}{\partial x^0}\right\| < \mu M \tau; \quad (1.7)$$

$$\left\|\frac{\partial x}{\partial x^0}\right\| < \frac{1}{1 - \mu M \tau}. \quad (1.8)$$

Вычитая почленно из (1.6) (1.5), найдем, что

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial x}{\partial x^0} - \frac{\partial x^1}{\partial x^0}\right\| &< \mu \int_0^t \left\|\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x^0}\right\| \left\|1 - \frac{\partial x}{\partial x^0}\right\| d\sigma + \\ &+ \mu \int_0^t \left\|\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{x^0} - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_x\right\| \left\|\frac{\partial x}{\partial x^0}\right\| d\sigma < \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$< \mu^2 M^2 \tau^2 + \mu \int_0^t \left\|\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right\| \|x - x^0\| \left\|\frac{\partial x}{\partial x^0}\right\| d\sigma < \mu^2 \tau^2 \left(M^2 + \frac{NL}{1 - \mu M \tau}\right).$$

Из соотношений (1.4) и (1.9) следуют оценки

$$\|\Omega(x, \mu)\| < \mu^2 LM \tau^2, \quad \|\Omega'_x(x, \mu)\| < \mu^2 \tau^2 \left(M^2 + \frac{NL}{1 - \mu M \tau}\right), \quad (1.10)$$

которые и доказывают сделанное утверждение (5).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Прежде всего мы покажем, что для любого $\varepsilon/2$ существует такое N , что для любого $x \subset G$ и некоторого $n < N$ $T_1^n x \subset \frac{\varepsilon}{2}(g)^*$. В противном случае существовали бы последовательность точек x_1, x_2, \dots и неограниченно возрастающая последовательность n_1, n_2, \dots целых чисел, такие, что $T_1^{n_i} x \not\subset \frac{\varepsilon}{2}(g)$ при всех целых $n'_i < n_i$. Последовательность x_1, x_2, \dots имеет предельную точку $x^* \subset G$. В силу предположения существует такое m , что $T_1^m x^* \subset \frac{\varepsilon}{4}(g)$, и в силу непрерывности отображения T_1^m некоторая $\alpha(x^*)$ преобразуется отображением T_1^m в $\frac{\varepsilon}{2}(g)$, что приводит к противоречию.

Покажем теперь, что для любого $\varepsilon/2$ и любого N существует такое δ , что из условия $\|T_1^n x - T_2^n x\| < \delta$ для всех $n < N$ следует: $\|T_1^n x - T_2^n x\| < \varepsilon/2$. Отображение T в G равномерно непрерывно, т. е. существует такая положительная невозрастающая функция $\omega(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, что из $\|x_1 - x_2\| < \delta$ следует $\|T_1 x_1 - T_1 x_2\| < \omega(\delta)$. В силу этого и сделанного предположения относительно T_2 имеем

$$\begin{aligned} \|T_1^n x - T_2^n x\| &= \|T_1^n x - T_1^{n-1} T_2 x + T_1^{n-1} T_2 x - \dots + T_1 T_2^{n-1} x - \\ &- T_2^n x\| \leq \|T_1^{n-1}(T_1 x) - T_1^{n-1}(T_2 x)\| + \|T_1^{n-2}(T_1 T_2 x) - T_1^{n-2}(T_2^2 x)\| + \dots \\ &\dots + \|T_1(T_2^{n-1} x) - T_2(T_2^{n-1} x)\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \omega(\delta) + \dots + \omega(\delta) \leq \omega(\delta) + \omega(\delta) + \dots, \end{aligned}$$

где $\omega(\delta)$ обозначает i -ую итерацию функций ω . Сумма $\sum_{i=1}^{N-1} \omega(\delta) + \dots + \omega(\delta) + \dots \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и поэтому при некотором δ не превосходит $\varepsilon/2$.

Таким образом, для любой точки $x \subset G$ существует $n < N$ и δ такие, что

$$T_1^n x \subset \frac{\varepsilon}{2}(g), \quad \|T_1^n x - T_2^n x\| < \varepsilon/2,$$

и, следовательно, такие, что $T_2^n x \subset \varepsilon(g)$. Лемма доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Доказательство сохраняемости инвариантной замкнутой кривой при малых изменениях отображения \tilde{T}_τ , таких, что

$$\begin{aligned} \|T_\tau x - \tilde{T}_\tau x\| &< A \mu^2; \\ \|\tilde{T}_\tau x_2 - \tilde{T}_\tau x_1 - T_\tau x_2 + T_\tau x_1\| &< B \mu^2 \|x_2 - x_1\|, \end{aligned} \tag{3.1}$$

может быть проведено следующим образом.

Сначала введем в окрестности периодического движения $x = \varphi(t')$ периода τ_0 усредненной системы новые переменные u_1, u_2, \dots, u_n посредством замены вида

$$x_j = \varphi_j(u_1) + a_{j1}(u_1) u_2 + \dots + a_{jn}(u_1) u_n \tag{3.2}$$

* Чрез $\frac{\varepsilon}{2}(g)$ обозначена $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестность множества g .

$(a_{sj}(u_1)$ —периодические функции u_1) так, чтобы в этих переменных линеаризованное отображение \tilde{T}_τ по переменным u_2, \dots, u_n в смысле евклидовой метрики было сжимающим с коэффициентом сжатия $0 < q < 1 - a^2 \mu$. По переменной u_1 отображение \tilde{T}_τ в силу замены вида (3.2) удовлетворяет условию

$$\|u_1 - u_1 - \mu\tau\| < \psi C(u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1/2}. \quad (3.3)$$

Указанная замена может быть найдена следующим образом. Сначала сделаем какую-нибудь замену вида (3.2), не требуя выполнения последующих условий. Пусть фазовая траектория усредненной системы, выходящая из точки u_2, \dots, u_n поверхности S ($u_1=0$), вновь пересекает эту поверхность в точке u_2, \dots, u_n . Линеаризованное отображение переменных u_2, \dots, u_n в u_2, \dots, u_n обозначим через L . Так как $\tilde{\Gamma}$ —устойчивое периодическое движение, то все собственные значения L по модулю меньше единицы. Пусть v_2, \dots, v_n —новые переменные на поверхности $u_1=0(S)$, в которых L имеет диагональный вид. (Предполагается, что L можно привести к диагональному виду, что заведомо имеет место, если все собственные числа L различны.) Точке $M(u_1, u_2, \dots, u_n)$ припишем теперь новые координаты v'_1, v'_2, \dots, v'_n следующим образом: пусть фазовая траектория, выходящая из точки v_2, \dots, v_n на поверхности S , попадает в точку M спустя время t' и пусть спустя время $\Theta(v_2, \dots, v_n)$ она вновь пересекает S ; тогда за координаты точки M возьмем $v'_1 = t' \Theta^{-1} \tau_0$ и v'_2, \dots, v'_n , получаемые из v_2, \dots, v_n путем линейного преобразования $L^{t'/\Theta}$.

Теперь непосредственно устанавливаем, что отображение \tilde{T}_τ множества замкнутых кривых $u_2 = \psi_2(u_1), \dots, u_n = \psi_n(u_1)$, расположенных в достаточно малой окрестности периодического движения $\tilde{\Gamma}$ и удовлетворяющих условию

$$|\psi_j(u_1 + \Delta u_1) - \psi_j(u_1)| < B |\Delta u_1|, \quad (3.4)$$

переводит в себя и что в естественной для этих замкнутых кривых метрике

$$\|\psi - \chi\| = \max_{u_1} \{ (\psi_2(u_1) - \chi_2(u_1))^2 + \dots + (\psi_n(u_1) - \chi_n(u_1))^2 \} \quad (3.5)$$

является сжимающим с коэффициентом $0 < q < 1 - b^2 \mu$.

Из сохранения условия (3.4) и сжимаемости отображения \tilde{T}_τ в силу неравенств (3.1) при достаточно малом μ следуют эти же свойства для отображения T_τ . В силу принципа сжатых отображений отображение T_τ имеет инвариантную кривую Γ , близкую к $\tilde{\Gamma}$, точнее [5]

$$\|\Gamma - \tilde{\Gamma}\| < \frac{A \mu^2}{1 - q} < \frac{A \mu}{b^2}. \quad (3.6)$$

Все точки некоторой окрестности Γ при повторном применении отображения T_τ асимптотически приближаются к кривой Γ .

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Запишем в окрестности седловой неподвижной точки $x_1=x_2=0$ отображение $\tilde{T}_{-\tau}$, обратное \tilde{T}_τ , в каноническом виде:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \tilde{\lambda}_1 x_1 + \tilde{\omega}_1(x_1, x_2), \\ \bar{x}_2 &= \tilde{\lambda}_2 x_2 + \tilde{\omega}_2(x_1, x_2),\end{aligned}\quad (4.1)$$

где $0 < \lambda_1 < 1 - a^2 \mu < 1 + a^2 \mu < \lambda_2$ и

$$|\tilde{\omega}_j(x_1, x_2)| < \mu A (x_1^2 + x_2^2), \quad \left| \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial x_s} \right| < \mu B \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (4.2)$$

В некоторой δ -окрестности неподвижной точки рассмотрим множество кривых $x_2 = \varphi(x_1)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad |\varphi(x_1 + \Delta x_1) - \varphi(x_1)| < \varepsilon |\Delta x_1|. \quad (4.3)$$

Всякая кривая $x_2 = \varphi(x_1)$ этого множества преобразованием \tilde{T}_τ преобразуется в кривую $\bar{x}_2 = \bar{\varphi}(x_1)$, уравнение которой можно, согласно (4.1), записать в виде

$$\tilde{\lambda}_2 x_2 + \tilde{\omega}_2(x_1, x_2) = \varphi(\tilde{\lambda}_1 x_1 + \tilde{\omega}_1(x_1, x_2)). \quad (4.4)$$

При некотором фиксированном, достаточно малом δ кривая $x_2 = \bar{\varphi}(x_1)$ также удовлетворяет условиям (4.3). Действительно, из (4.4) находим, что

$$\begin{aligned}|\Delta x_2| &\leq |\omega_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - \omega_2(x_1, x_2)| + \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} |\varphi(\tilde{\lambda}_1(x_1 + \Delta x_1) + \\ &+ \omega_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2)) - \varphi(\tilde{\lambda}_1 x_1 + \omega_1(x_1, x_2))| < \mu B \delta (|\Delta x_1| + |\Delta x_2|) + \\ &+ \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} \varepsilon (\tilde{\lambda}_1 |\Delta x_1| + \mu B \delta (|\Delta x_1| + |\Delta x_2|))\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}|\Delta x_2| &< \left(\mu B \delta + \frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\lambda}_2} \varepsilon + \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} \varepsilon \mu B \delta \right) |\Delta x_1| \left(1 - \mu B \delta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tilde{\lambda}_2} \varepsilon \mu B \delta \right)^{-1} < \varepsilon (1 - b^2 \mu) |\Delta x_1|,\end{aligned}$$

если только $\delta < \delta_0$, $\mu < \mu_0$.

Пусть $x_2 = \varphi(x_1)$ и $x_2 = \psi(x_1)$ — две произвольные кривые, удовлетворяющие условиям (4.3); тогда, как легко убедиться,

$$\max |\bar{\varphi}(x_1) - \bar{\psi}(x_1)| < (1 - \mu C^2) \max |\varphi(x_1) - \psi(x_1)|$$

и поэтому, если под расстоянием между кривыми $x_2 = \varphi(x_1)$ и $x_2 = \psi(x_1)$ понимать максимум $|\varphi(x_1) - \psi(x_1)|$, отображение \tilde{T}_τ в рассматриваемом множестве кривых является сжимающим.

Неподвижной кривой этого сжимающего отображения будет сепараторика \tilde{C} . Теперь следует показать, что сепараторика C седловой точки $x_1^*(\mu)$, $x_2^*(\mu)$ (близкой к точке $x_1 = x_2 = 0$) отображения T_τ близка к \tilde{C} .

Повторяя для отображения T_τ все рассуждения, проведенные только что для отображения \tilde{T}_τ , убедимся, что C является непод-

зижной кривой отображения, порождаемого отображением T_τ в селестве кривых $x_2=\varphi(x_1)$, которые удовлетворяют условию $x_2^*=\varphi(x_1^*)$ и второму условию (4.3).

После замены переменных в отображении T_τ , совмещающей точку x_1^*, x_2^* с точкой $x_1=0, x_2=0$, в силу первой оценки (3.1) Приложения 3 и известного свойства зависимости неподвижного элемента сжимающего отображения от его изменений [5] получаем, что кривая \tilde{C} и кривая, которая получается параллельным смещением C на расстояние $\sqrt{x_1^{*2} + x_2^{*2}} \sim \mu$, отличаются друг от друга на величину порядка μ .

Таким образом, в пределах фиксированной окрестности $\delta \tilde{C}$ и C отличаются друг от друга на величину порядка μ , что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Богоявленский Ю. А Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1955.
2. Van der Pol', Phil. Mag., 7, 3 (1927).
3. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, ЖЭТФ, 4, 117 (1934).
4. N. Minorsky, Comptes Rendus, 3, 232 (1951); Cahier de Physique, 4, 112 (1960).
5. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 1, № 1, 41; № 2, 95; № 5—6, 146 (1958).
6. Ю. И. Неймарк, Доклад на Международном симпозиуме по теории нелинейных колебаний, Киев, 1961
7. Л. Н. Белюстина, ДАН СССР, 148, 251 (1963).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 декабря 1962 г.

METHOD OF AVERAGING FROM THE POINT OF VIEW OF THE POINTWISE TRANSFORMATIONS METHOD

Yu. I. Neimark

The method of averaging is treated from the point of view of the pointwise transformations method. That way enables one to simplify the proof of well known Bogolyubov and Krylov's theorems as well as to obtain new results concerning the correspondence of motions of the averaged and initial systems in large and at last to reveal the direct relationship between the averaging method and Minorsky's stroboscopic one and to point out the generalization of the averaging method for systems with jumps or discontinuities.

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАНА РАБОТ

Ю. В. Глебский

Рассматривается задача планирования производства нескольких видов деталей на нескольких станках, причем для каждой детали задаются возможные технологические маршруты. Требуется составить план, при котором в единицу времени выпускается наибольшее количество продукции при заданных отношениях между количествами деталей различных видов. В принятой здесь идеализации производственный процесс бесконечен. Доказано, что для отыскания максимальной производительности оборудования достаточно решить задачу линейного программирования, составленную без учета последовательности операций по обработке деталей.

В связи с применением математических машин к задачам производственного планирования возникает проблема математического описания этих задач.

Здесь рассматривается следующая задача (задача A). Имеется m видов деталей, причем каждая деталь должна последовательно пройти несколько видов обработок. Существует также n станков, причем известно, какие станки могут производить данную обработку и сколько времени занимает каждая такая обработка. Требуется составить план работ таким образом, чтобы выпускать как можно больше продукции в единицу времени при заданных отношениях между количествами выпускаемых деталей различных видов.

Аналогичные задачи (с той разницей, что в них минимизируется время, а не максимизируется производительность) ставились и раньше, например, в работах [1-3]. В этой же статье задача ставится асимптотически, т. е. для бесконечно продолжающегося производственного процесса. Учитывается время переналадки (т. е. перехода от одной операции к другой) станков.

Основной результат статьи заключается в том, что каждой задаче A отвечает некоторая задача линейного программирования (задача L), составляемая без учета последовательности операций и времен переналадок*. Производительность, получаемая в результате решения задачи L, является точной верхней гранью в задаче A (т. е. достижима с любой степенью точности). Заметим, что аналогичные результаты получаются и в задаче с конечным временем, если только не учитывать времени переналадок и аппроксимировать количества деталей (которые, очевидно, принимают лишь целочисленные значения) непрерывно изменяющимися величинами [4]**.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ A

1. Дано m видов деталей, причем каждая деталь i -го вида должна проходить последовательно l_i (l_i —положительное целое число) видов обработки ($i = 1, \dots, m$). Если дана пара (i, h) , где i — вид детали,

* В этом состоит основное отличие этой работы от работ, указанных выше; хотя исходная задача там и сводится к задаче линейного программирования, но условие о последовательности операций включается в условия последней задачи.

** В постановке задачи принимали участие сотрудники ГИФТИ Т. Е. Брейдо, Г. Г. Рубинштейн и Т. Н. Эйнгорина, работающие в области автоматизации процессов планирования применительно к Горьковскому автозаводу.

а h -вид обработки ($h = 1, \dots, l_i; i = 1, \dots, m$), то будем говорить, что нам дана j -ая операция, где $j = \sum_{l'=1}^{i-1} l_i + h$, т. е. j есть номер пары (i, h) .

Очевидно, j может принимать значения $1, \dots, l$, где $l = \sum_{i=1}^m l_i$.

Даны n станков и пусть выделено некоторое множество S пар (j, k) ($j = 1, \dots, l; k = 1, \dots, n$), причем для каждого $j = 1, \dots, l$ найдется по крайней мере одно k , такое, что $(j, k) \in S$. (Принадлежность (j, k) к множеству S означает, что k -ый станок может выполнять j -ую операцию.) Далее, каждой паре $(j, k) \in S$ ставится в соответствие действительное число t_{jk} — продолжительность j -ой операции на k -ом станке (т. е. если j есть номер пары (i, h) , то число t_{jk} равно времени, которое требуется для полной обработки вида h одной детали вида i на k -ом станке).

Пусть, кроме того, заданы неотрицательные действительные числа $d_{kjj'}$, где $(j, k) \in S, (j', k) \in S, j \neq j'$, характеризующие времена переналадок k -го станка от j -ой операции к j' -ой.

Дополним совокупность всех операций операцией с номером $j=0$ (простой). Всюду в дальнейшем буквы i, j, k (возможно, с различными индексами вверху или внизу) будут интерпретироваться как переменные для обозначения соответственно видов деталей, номеров операций и номеров станков; следовательно, они могут принимать следующие значения: $i = 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, l; k = 1, \dots, n$.

2. Назовем планом работ (слово „работ“ мы станем опускать) упорядоченную совокупность γ , состоящую из n функций $j_k(t)$, каждая из которых любому моменту времени $t > 0$ ставит в соответствие операцию j ; эта операция такова, что $(j, k) \in S$ или $j=0$, и обладает следующими двумя свойствами: 1) для каждого k функция $j_k(t)$ определяет систему попарно не пересекающихся полуинтервалов $(u_1^{ikr}, v_1^{ikr}]^*$ (где при данном j индекс r пробегает конечное или счетное множество значений); внутри полуинтервалов $j_k(t) = j$ и выполняется условие $v_1^{ikr} - u_1^{ikr} = t_{jk}$; для тех точек t , которые не входят в указанные полуинтервалы, выполняется равенство $j_k(t) = 0$; 2) если $j \neq j'$, то для любых двух полуинтервалов $(u_1^{ikr}, v_1^{ikr}]$ и $(u_1^{i'kr'}, v_1^{i'kr'})]$, для которых $v_1^{ikr} \leq u_1^{i'kr'}$, должно выполняться условие $v_1^{i'kr'} - v_1^{ikr} \geq d_{kjj'}$. (Принадлежность $t \in (u_1^{ikr}, v_1^{ikr})$ означает, что в момент t k -ый станок согласно плану γ должен производить j -ую операцию. Второе свойство означает, что если на k -ом станке меняется операция, то должно оставаться время для переналадки.)

Если дан план γ , то для всех $j \neq 0, k$ и $t > 0$ обозначим через $x_{\gamma}^{j,k}(t)$ число всех тех полуинтервалов $(u_1^{ikr}, v_1^{ikr}]$, для которых $v_1^{ikr} \leq t$, и через $y_{\gamma}^{j,k}(t)$ — число тех полуинтервалов $(u_1^{ikr}, v_1^{ikr}]$, для которых $u_1^{ikr} \leq t$. Далее введем следующие обозначения ($j > 0$):

$$x_{\gamma}^j(t) = \sum_{k=1}^n x_{\gamma}^{j,k}(t), \quad y_{\gamma}^j(t) = \sum_{k=1}^n y_{\gamma}^{j,k}(t).$$

* Т. е. полуинтервалов $u_1^{ikr} \leq t \leq v_1^{ikr}$.

Очевидно, что величины $x_{\gamma}^i(t)$, $y_{\gamma}^i(t)$ являются монотонно неубывающими функциями от t , принимающими целочисленные значения, при чем $x_{\gamma}^j(t) \leq y_{\gamma}^j(t)$.

План γ назовем выполнимым, если для всех $t > 0$ и любых $j > 0$, таких, что $j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i$, выполняется неравенство $y_{\gamma}^{j+1}(t) \leq x_{\gamma}^j(t)$.

Пусть j есть номер пары (i, h) . Тогда условие $j \neq \sum_{i'=1}^{i''} l_{i'}$ эквивалентно условию $h \neq l_i$. Величина $x_{\gamma}^{j,k}(t)$ (соответственно $x_{\gamma}^j(t)$) равна числу деталей i -го вида, прошедших согласно плану γ к моменту t полностью обработку вида h на k -ом станке (соответственно, на всем оборудовании); величина $y_{\gamma}^{j,k}(t)$ (соответственно, $y_{\gamma}^j(t)$) равна числу деталей i -го вида, для которых к моменту t эта обработка на k -ом станке (соответственно, на всем оборудовании) начиналась, независимо от того, закончилась она или нет. Неравенство $y_{\gamma}^{j+1}(t) \leq x_{\gamma}^j(t)$ при $h \neq l_i$ необходимо и достаточно для того, чтобы при отсутствии „заделов“ в начале работы имела возможность начинать $(h+1)$ -ую обработку любой детали после того, как эта деталь прошла h -ую обработку.

3. Рассмотрим векторное пространство \mathcal{E} размерности l . Если $X \in \mathcal{E}$, то компоненты X будем обозначать малыми латинскими буквами с индексами наверху: $X = (x^1, \dots, x^l)$. Очевидно, что любой план γ определяет две вектор-функции $X_{\gamma}(t)$ и $Y_{\gamma}(t)$ с компонентами $x_{\gamma}^i(t)$ и $y_{\gamma}^i(t)$ соответственно. (Знак γ внизу мы будем опускать в тех случаях, когда из контекста ясно, о каком плане идет речь.)

Пусть $Z \in \mathcal{E}$ — вектор с положительными коэффициентами, удовлетворяющими условию $z^{j+1} = z^j$ при $j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i$, $j > 0$. (Вектор Z задает

отношения между количествами обрабатываемых деталей различных видов.) План γ будем называть допустимым, если он выполним и если $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} X_{\gamma}(t)$ существует и равен $g_{\gamma} Z$ при некотором $g_{\gamma} > 0$. Величину g_{γ} можно назвать производительностью оборудования при данном плане работ.

Обозначим через Γ совокупность всех допустимых планов и пусть $g_A = \sup_{\gamma \in \Gamma} g_{\gamma}$. Тогда задачей A будем называть задачу отыскания g_A и отыскания по любому $\varepsilon > 0$ тех допустимых планов γ , для которых $g_{\gamma} \geq g_A - \varepsilon$. Вопрос о том, существуют ли допустимые планы с $g_{\gamma} = g_A$, в этой работе не рассматривается.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ L И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА $g_A \leq g_L$

1. Режимом будем называть упорядоченную совокупность из n номеров операций $\rho = (j_1, \dots, j_n)$ (нижний индекс указывает номер станка), такую, что, если $j_k > 0$, то $(j_k, k) \in S$. Обозначим множество всех режимов через R и число всех режимов через N . Очевидно, $N \leq (l+1)^n$.

Каждому режиму $\rho = (j_1, \dots, j_n)$ поставим в соответствие вектор

производительностей режима $B(\rho)$ с компонентами $b^j(\rho) = \sum_{k, j_k=i} \frac{1}{t_{jk}}$,

где суммирование (при данном $\rho = (j_1, \dots, j_n)$) идет по всем тем k , для которых $j_k = j$, $j > 0$. Если для данного $j > 0$ режим ρ не содержит j_k , равных j , то $b^j(\rho) = 0$. (Задание режима в момент t определяет, какую операцию должен производить каждый станок в момент t . Поэтому, если j есть номер пары (i, h) , то $b^j(\rho)$ в среднем равно количеству деталей i -го вида, проходящих h -ую обработку в единицу времени, при условии, что режим ρ неограниченно продолжается.)

2. Сформулируем следующую задачу линейного программирования (задача L).

Совокупность $N+1$ действительных чисел $g, f(\rho)$, где $\rho \in R$, будем называть L -допустимой, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{\rho \in R} B(\rho) f(\rho) = gZ; \quad (1)$$

$$\sum_{\rho \in R} f(\rho) = 1; \quad (2)$$

$g \geq 0; f(\rho) \geq 0; \rho \in R$. Среди всех L -допустимых совокупностей требуется найти такую, при которой число g принимает наибольшее значение.

Покажем, что эта задача имеет решение, причем максимальное значение, g , которое мы обозначим через g_L , будет положительным. Для каждого $j > 0$ зафиксируем k_j такое, что $(j, k_j) \in S$ (см. пункт 1 первого раздела статьи), и через ρ_j обозначим режим $\rho_j = (j_1, \dots, j_n)$, такой, что $j_{k_j} = j$ и $j_k = 0$ при $k \neq k_j$. Очевидно, вектор $B(\rho_j)$ имеет следующие компоненты: $b^{j'}(\rho_j) = 0$ при $j' \neq j$ и $b^j(\rho_j) = 1/t_{jk_j}$. Положим $f^*(\rho) = 0$ для всех $\rho \in R$, не совпадающих ни с одним из ρ_j , и

$$f^*(\rho^j) = t_{jk_j} z^j \left(\sum_{j'=1}^l t_{j'k_j} z^{j'} \right)^{-1}.$$

Полагая

$$g^* = \left(\sum_{j=1}^l t_{jk_j} z^j \right)^{-1},$$

получим, что совокупность $g^*, f^*(\rho)$ — L -допустима, так как для нее удовлетворяются равенства (1), (2), причем $g^* > 0$. Далее, если $g, f(\rho)$ — любая L -допустимая совокупность, то, очевидно,

$$f(\rho) \leq 1 \quad (3)$$

для всех $\rho \in R$; так как $z^1 > 0$, то из соотношений (1) и (3) следует, что

$$g \leq \frac{1}{z^1} \sum_{\rho \in R} b^1(\rho). \quad (4)$$

Таким образом, множество L -допустимых совокупностей не пусто и, как это вытекает из определения L -допустимости и неравенств (3), (4), компактно в пространстве размерности $N+1$. Отсюда следует, что задача L имеет решение, причем $g_L \geq g^* > 0$, что и требовалось показать.

3. Лемма 1. Пусть последовательность совокупностей $g_p, f_p (\rho)$, $\rho \in R$, $p = 1, 2, \dots$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\sum_{\rho \in R} b^j (\rho) f_p (\rho) \geq g_p z^j$$

для $j > 0$ и

$$\sum_{\rho \in R} f_p (\rho) = 1,$$

где $g_p \geq 0$, $f_p (\rho) \geq 0$, $\rho \in R$, $p = 1, 2, \dots$. Тогда $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} g_p \leq g_L$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что для последовательности, удовлетворяющей условиям леммы, выполняются условия

$$f_p (\rho) \leq 1, \quad g_p \leq \frac{1}{z^1} \sum_{\rho \in R} b^1 (\rho) \quad (p = 1, 2, \dots)$$

(см. пункт 2, где доказывались аналогичные неравенства). Из них следует, что можно выбрать такую подпоследовательность $g_{p_s}, f_{p_s} (\rho)$, $s = 1, 2, \dots$, что $\lim_{s \rightarrow \infty} g_{p_s} = \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} g_p = g_0$ и $\lim_{s \rightarrow \infty} f_{p_s} (\rho) = f_0 (\rho)$ для всех $\rho \in R$. Очевидно, что $\sum_{\rho \in R} f_0 (\rho) = 1$ и

$$\sum_{\rho \in R} b^j (\rho) f_0 (\rho) \geq g_0 z^j \quad (1)$$

для $j > 0$, причем $f_0 (\rho) \geq 0$, $g_0 \geq 0$. Можно считать, что $g_0 > 0$, так как в противном случае доказательство очевидно. Покажем, что величины $f_0 (\rho)$, $\rho \in R$ можно заменить величинами $\tilde{f} (\rho)$, $\rho \in R$, где $\tilde{f} (\rho) \geq 0$, таким образом, что будут выполняться равенства

$$\sum_{\rho \in R} b^j (\rho) \tilde{f} (\rho) = g_0 z^j; \quad \sum_{\rho \in R} \tilde{f} (\rho) = 1. \quad (2)$$

Для этого достаточно показать следующее: пусть величины $f_1 (\rho)$, $\rho \in R$, где $f_1 (\rho) \geq 0$, удовлетворяют при $j = j_0$ строгому неравенству

$$\sum_{\rho \in R} b^{j_0} (\rho) f_1 (\rho) > g_0 z^{j_0} \quad (3)$$

и равенству $\sum_{\rho \in R} f_1 (\rho) = 1$; тогда найдутся величины $f_2 (\rho)$, $\rho \in R$ такие,

что удовлетворяются равенства

$$\sum_{\rho \in R} b^j (\rho) f_2 (\rho) = \sum_{\rho \in R} b^j (\rho) f_1 (\rho), \quad (4)$$

если $j \neq j_0$, и

$$\sum_{\rho \in R} b^{j_0} (\rho) f_2 (\rho) = g_0 z^{j_0}, \quad (5)$$

при условии $\sum_{\rho \in R} f_2 (\rho) = 1$. Действительно, если мы это докажем, то те из неравенств (1), которые являются строгими, мы сможем одно за другим заменять на равенства, не меняя правых частей остальных

неравенств, пока не придем к величинам $\tilde{f}(\rho)$, удовлетворяющим равенствам (2).

Итак, пусть величины $f_1(\rho) \geq 0$, $\rho \in R$ удовлетворяют неравенству (3) и условию $\sum_{\rho \in R} f_1(\rho) = 1$. Обозначим через ρ^1, \dots, ρ^q все те ре-

жимы, для которых одновременно выполняются неравенства $f_1(\rho^s) > 0$ и $b^{j_0}(\rho^s) > 0$ ($s = 1, \dots, q$). Заметим, что для всякого режима $\rho^s = (j_1^s, \dots, j_n^s)$ найдутся такие k , что $j_k^s = j_0$, так как в противном случае $b^{j_0}(\rho^s) = 0$ (см. пункт 1 второго раздела).

Очевидно,

$$\sum_{\rho \in R} f_1(\rho) b^{j_0}(\rho) = \sum_{s=1}^q f_1(\rho^s) b^{j_0}(\rho^s) > g_0 z^{j_0}.$$

Введем обозначение $a = \sum_{s=1}^q f_1(\rho^s) b^{j_0}(\rho^s) - g_0 z^{j_0}$. Так как $g_0 z^{j_0} > 0$, то най-

дается такое целое s' ($0 \leq s' \leq q$), что $\sum_{s=1}^{s'} f_1(\rho^s) b^{j_0}(\rho^s) \leq a$, но $\sum_{s=1}^{s'+1} f_1(\rho^s) \times$

$\times b^{j_0}(\rho^s) > a$. Далее, определим число c равенством

$$c = \frac{1}{f_1(\rho^{s'+1}) b^{j_0}(\rho^{s'+1})} \left[\sum_{s=1}^{s'+1} f_1(\rho^s) b^{j_0}(\rho^s) - a \right].$$

Очевидно, $c > 0$ и

$$1 - c = \frac{1}{f_1(\rho^{s'+1}) b^{j_0}(\rho^{s'+1})} \left[f_1(\rho^{s'+1}) b^{j_0}(\rho^{s'+1}) - \sum_{s=1}^{s'+1} f_1(\rho^s) b^{j_0}(\rho^s) + a \right] = \\ = \frac{1}{f_1(\rho^{s'+1}) b^{j_0}(\rho^{s'+1})} \left[a - \sum_{s=1}^{s'} f_1(\rho^s) b^{j_0}(\rho^s) \right] \geq 0.$$

Для любого $s = 1, \dots, s' + 1$ обозначим через $\bar{\rho}^s$ режим, получающийся из режима $\rho^s = (j_1^s, \dots, j_n^s)$ заменой всех $j_k^s = j_0$ на $j_k^s = 0$. Пусть R' —множество всех режимов, не совпадающих ни с одним из $\rho^1, \dots, \rho^{s'+1}, \bar{\rho}^1, \dots, \bar{\rho}^{s'+1}$. Величины $f_2(\rho)$ определим следующим образом:

$$f_2(\rho) = f_1(\rho) \quad (\text{если } \rho \in R');$$

$$f_2(\rho^s) = 0 \quad (\text{если } s = 1, 2, \dots, s');$$

$$f_2(\rho^{s'+1}) = cf_1(\rho^{s'+1});$$

$$f_2(\bar{\rho}^s) = f_1(\rho^s) + f_1(\bar{\rho}^s) \quad (\text{если } s = 1, \dots, s');$$

$$f_2(\bar{\rho}^{s'+1}) = (1 - c) f_1(\rho^{s'+1}) + f_1(\bar{\rho}^{s'+1}).$$

Очевидно, что $f_2(\rho) \geq 0$ для всех $\rho \in R$. Далее легко видеть, что для любого $s = 1, \dots, s' + 1$ величины $b^{j_0}(\bar{\rho}^s) = 0$ и $b^j(\bar{\rho}^s) = b^j(\rho^s)$ при $j \neq j_0$. Отсюда для $j \neq j_0$ имеем:

$$\sum_{\rho \in R} b^j(\rho) f_2(\rho) = \sum_{\rho \in R'} b^j f_2(\rho) + \sum_{s=1}^{s'} b^j(\bar{\rho}^s) f_2(\bar{\rho}^s) + b^j(\bar{\rho}^{s'+1}) f_2(\bar{\rho}^{s'+1}) +$$

$$\begin{aligned}
 & + b^j(\rho^{s'+1}) f_2(\rho^{s'+1}) = \sum_{\rho \in R} b^j(\rho) f_1(\rho) + \sum_{s=1}^{s'} b^j(\bar{\rho}^s) [f_1(\rho^s) + f_2(\bar{\rho}^s)] + \\
 & + b^j(\bar{\rho}^{s'+1}) [(1-c)f_1(\rho^{s'+1}) + f_1(\bar{\rho}^{s'+1})] + b^j(\rho^{s'+1}) cf_1(\rho^{s'+1}) = \\
 & = \sum_{\rho \in R'} b^j(\rho) f_1(\rho) + \sum_{s=1}^{s'} b^j(\rho^s) f_1(\rho^s) + \sum_{s=1}^{s'} b^j(\bar{\rho}^s) f_1(\bar{\rho}^s) + b^j(\rho^{s'+1}) f_1(\rho^{s'+1}) + \\
 & + b^j(\bar{\rho}^{s'+1}) f_1(\bar{\rho}^{s'+1}) = \sum_{\rho \in R} b^j(\rho) f_1(\rho),
 \end{aligned}$$

чем и доказаны равенства (4). Далее, при $j=j_0$, $b^{j_0}(\rho) f_2(\rho)=b^{j_0}(\rho) f_1(\rho)$, если $\rho \in R'$, $b^{j_0}(\rho^s) f_2(\rho^s)=0$ и $b^{j_0}(\bar{\rho}^s) f_2(\bar{\rho}^s)=0$ при $s=1, \dots, s'$; $b^{j_0}(\rho^{s'+1}) f_2(\rho^{s'+1})=cb^{j_0}(\rho^{s'+1}) f_1(\rho^{s'+1})$ и, наконец, $b^{j_0}(\bar{\rho}^{s'+1}) f_2(\bar{\rho}^{s'+1})=0$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\rho \in R} b^{j_0}(\rho) f_2(\rho) & = cb^{j_0}(\rho^{s'+1}) f_1(\rho^{s'+1}) + \sum_{s=s'+2}^q b^{j_0}(\rho^s) f_1(\rho^s) = \\
 & = \sum_{s=1}^q b^{j_0}(\rho^s) f_1(\rho^s) - \sum_{s=1}^{s'+1} b^{j_0}(\rho^s) f_1(\rho^s) + cb^{j_0}(\rho^{s'+1}) f_1(\rho^{s'+1}) = \\
 & = \sum_{s=1}^q b^{j_0}(\rho^s) f_1(\rho^s) - \sum_{s=1}^{s'+1} b^{j_0}(\rho^s) f_1(\rho^s) + \sum_{s=1}^{s'+1} b^{j_0}(\rho^s) f_1(\rho^s) - a = \\
 & = \sum_{s=1}^q b^{j_0}(\rho^s) f_1(\rho^s) - a = g_0 z^{j_0},
 \end{aligned}$$

что доказывает равенство (5).

Далее,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\rho \in R} f_2(\rho) & = \sum_{\rho \in R} f_2(\rho) + \sum_{s=1}^{s'} f_2(\bar{\rho}^s) + f_2(\bar{\rho}^{s'+1}) + f_2(\rho^{s'+1}) = \\
 & = \sum_{\rho \in R'} f_1(\rho) + \sum_{s=1}^{s'} [f_1(\rho^s) + f_1(\bar{\rho}^s)] + (1-c)f_1(\rho^{s'+1}) + f_1(\bar{\rho}^{s'+1}) + \\
 & + cf_1(\rho^{s'+1}) = \sum_{\rho \in R} f_1(\rho) = 1;
 \end{aligned}$$

отсюда следует, что величины $f_2(\rho)$, $\rho \in R$ обладают требуемыми свойствами. Поэтому, как указано выше, существуют такие величины $\tilde{f}(\rho) \geq 0$, $\rho \in R$, которые удовлетворяют равенствам (2). Но тогда совокупность величин $g_0, f(\rho)$ L -допустима, откуда следует, что $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p = g_0 \leq g_L$. Лемма доказана.

4. Нетрудно видеть, что поскольку каждый план определяется как совокупность функций $j_k(t)$, то план γ можно отождествить с функцией $\rho(t) = (j_1(t), \dots, j_k(t))$, которая любому $t > 0$ ставит в соответствие некоторый режим $\rho(t)$ (однако не любая такая функция задает план; см. пункт 2 первого раздела). Для данного плана γ , за-

даваемого функцией $\rho(t)$, обозначим через $e_\gamma(\rho, t)$ меру множества тех точек t' , для которых выполняются условия $\rho(t') = \rho$ и $t' \leq t$.

Лемма 2. Пусть $\gamma \in \Gamma$. Тогда для любого $t > 0$ и любого $j > 0$ выполняется равенство

$$\sum_{\rho \in R} e_\gamma(\rho, t) b^j(\rho) = x_\gamma^j(t) + \zeta^j(t),$$

где $0 \leq \zeta^j(t) < n$.

Доказательство. Пусть график $\gamma \in \Gamma$, определяющий функцию $\rho(t) = (j_1(t), \dots, j_n(t))$, и номер $j > 0$ заданы. Обозначим через $e^j(k, t)$ меру множества тех точек t' ($0 < t' \leq t$), для которых $j_k(t') = j$. Нетрудно видеть*, что

$$e^j(k, t) = x^{j,k}(t) t_{jk} + \eta^j(k, t), \quad (1)$$

где $\eta^j(k, t)$ равно 0, если t не принадлежит ни к одному из интервалов (u^{jkr}, v^{jkr}) , и равно $t - u^{jkr}$, если $u^{jkr} < t < v^{jkr}$. Очевидно, $0 \leq \eta^j(k, t) < t_{jk}$. Деля обе части равенства (1) на t_{jk} и суммируя по $k = 1, \dots, n$, получаем

$$\sum_{k=1}^n [e^j(k, t)/t_{jk}] = x^j(t) + \zeta^j(t), \quad (2)$$

где $\zeta^j(t) = \sum_{k=1}^n [\eta^j(k, t)/t_{jk}]$, и, следовательно, $0 \leq \zeta^j(t) < n$.

Обозначим через R^{jk} совокупность тех режимов $\rho = (j_1, \dots, j_n)$, для которых $j_k = j$. Тогда

$$e^j(k, t) = \sum_{\rho \in R^{jk}} e(\rho, t). \quad (3)$$

Для каждого $\rho = (j_1, \dots, j_n) \in R$ обозначим через $\varphi_\rho = (\varphi_\rho^1, \dots, \varphi_\rho^n)$ упорядоченную совокупность чисел φ_ρ^k , равных 1, если $j_k = j$, и равных 0 при $j_k \neq j$. Нетрудно видеть, что для каждого k имеет место равенство

$$\sum_{\rho \in R^{jk}} e_\gamma(\rho, t) = \sum_{\rho \in R} e_\gamma(\rho, t) \varphi_\rho^k,$$

откуда, принимая во внимание (3), получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^j(k, t)}{t_{jk}} = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho \in R} \frac{e_\gamma(\rho, t) \varphi_\rho^k}{t_{jk}} = \sum_{\rho \in R} \sum_{k=1}^n \frac{e_\gamma(\rho, t) \varphi_\rho^k}{t_{jk}}.$$

Далее, легко видеть (см. пункт 1 второго раздела), что

$$b^j(\rho) = \sum_{k=1}^n [\varphi_\rho^k / t_{jk}],$$

откуда

$$\sum_{\rho \in R} e_\gamma(\rho, t) = \sum_{\rho \in R} \sum_{k=1}^n \frac{e_\gamma(\rho, t) \varphi_\rho^k}{t_{ik}} = \sum_{k=1}^n \frac{e^j(k, t)}{t_{ik}}.$$

Из последнего равенства и равенства (2) получаем

* См. пункт 2 раздела 1.

$$\sum_{\rho \in R} e_\gamma(\rho, t) b^j(\rho) = x^j(t) + \zeta^j(t),$$

где $0 \leq \zeta^j(t) < n$, что и требовалось доказать.

5. Теорема 1. В рассматриваемой задаче имеет место соотношение $g_A \leq g_L$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \Gamma$. Тогда (см. пункт 3 раздела 1) для всех $j > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} x^j(t) = g_\gamma z^j. \quad (1)$$

Возьмем любую последовательность точек $t_p > 0$ ($p = 1, 2, \dots$), такую, что $\lim_{p \rightarrow \infty} t_p = \infty$. Введя обозначение

$$f_p(\rho) = \frac{e_\gamma(\rho, t_p)}{t_p} \quad (\rho \in R; p = 1, 2, \dots),$$

согласно лемме 2 получаем:

$$\sum_{\rho \in R} f_p(\rho) b^j(\rho) = \frac{1}{t_p} x^j(t_p) + \frac{1}{t_p} \zeta^j(t_p) \geq \frac{1}{t_p} x^j(t_p) = g_p z^j,$$

где $g_p = x^j(t_p)/t_p$ и, в силу (1), $\lim_{p \rightarrow \infty} g_p = g_\gamma$. Кроме того,

$$\sum_{\rho \in R} f_0(\rho) = \frac{1}{t_p} \sum_{\rho \in R} e_\gamma(\rho, t_p) = 1.$$

Но тогда для последовательности совокупностей $g_p, f_p(\rho), \rho \in R$ имеется силу леммы 1, согласно которой $g_\gamma = \lim_{p \rightarrow \infty} g_p \leq g_L$. Поскольку мы взяли любой план $\gamma \in \Gamma$, то и $g_A = \sup_{\gamma \in \Gamma} g_\gamma \leq g_L$, что и требовалось доказать.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАВЕНСТВА $g_A = g_L$ И ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ (С ТОЧНОСТЬЮ ДО ϵ) ПЛАНОВ

1. Теорема 2. В рассматриваемой задаче имеет место равенство $g_A = g_L$.

В силу теоремы 1 осталось доказать, что $g_A \geq g_L$. Для этого достаточно убедиться, что по любому $\epsilon > 0$ можно найти такой допустимый план γ , что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} X_\gamma(t) = gZ$, где $g \geq g_L - \epsilon$.

Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Пусть совокупность величин $g_L, f(\rho) \geq 0, \rho \in R$ является решением задачи L . Обозначим через ρ^s ($s = 1, \dots, q$) все те режимы $\rho \in R$, для которых $f(\rho) > 0$. Тогда имеют место равенства

$$\sum_{s=1}^q b^j(\rho^s) f(\rho^s) = g_L z^j; \quad \sum_{s=1}^q f(\rho^s) = 1.$$

Если не обращать внимания на выполнимость плана, переналадки и дискретность обработки деталей, то нетрудно указать способ построения „плана“ γ , для которого $g_\gamma = g_L$. Именно, разобьем ось

$0 < t < \infty$ на „производственные циклы“, каждый продолжительностью $\tau = \sum_{s=1}^q \tau^s$, где $\tau^s = cf(\rho^s)$ и c —любое положительное действительное число. В каждом таком цикле будут действовать все режимы ρ^s с продолжительностью τ^s каждый ($s = 1, \dots, q$). Очевидно, для достаточно больших t имеет место приближенное равенство

$$\frac{1}{t} e_{\bar{\gamma}}(\rho^s, t) \simeq f(\rho^s)$$

(см. пункт 4 раздела 2). Отсюда по лемме 2 имеем:

$$\frac{1}{t} x^j(t) \simeq \frac{1}{t} x^j(t) + \frac{1}{t} \zeta^j(t) = \sum_{s=1}^q \frac{e_{\bar{\gamma}}(\rho^s, t)}{t} b^j(\rho^s) \simeq \sum_{s=1}^q f(\rho^s) b^j(\rho^s) = g_L z^j.$$

Поэтому $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} x^j(t) = g_L z^j$ и таким образом, $g_{\bar{\gamma}} = g_L$. Однако для

того, чтобы превратить „план“ $\bar{\gamma}$ в план в смысле определения, данного в пункте 2 первого раздела, необходимо учесть переналадки и дискретность обработки. На это потребуются дополнительные затраты времени. Но и после этого план может быть еще невыполнимым, так как не учтена последовательность обработки. Поэтому вначале, перед действием этого плана, мы накапливаем запасы деталей, прошедших промежуточную обработку (межоперационные заделы). Эти запасы обеспечивают в дальнейшем бесперебойную работу по циклам, как указано выше, причем после каждого цикла запасы восстанавливаются.

Таким образом, можно получить план γ , который уже станет допустимым в задаче A , но из-за дополнительных затрат времени будет иметь место неравенство $g_{\gamma} < g_{\bar{\gamma}} = g_L$. Если теперь сделать величину c достаточно большой, то указанные выше дополнительные затраты времени (на каждый цикл эти затраты составляют определенную величину, не зависящую от продолжительности цикла) будут занимать малую долю по сравнению с тем временем, при котором действует „план“ $\bar{\gamma}$. Поэтому можно добиться выполнения неравенства $g_{\gamma} \geq g_L - \varepsilon$.

Непосредственное доказательство теоремы 2 проводится в пункте 3 раздела 3. Предварительно мы установим справедливость некоторых лемм, необходимых для этого доказательства.

2. Функцию $\rho(t) = (j_1(t), \dots, j_n(t))$, определенную в промежутке $0 < t \leq t_1$, будем называть t_1 -планом, если компоненты этой функции—режимы $j_k(t)$ удовлетворяют тем же двум условиям, что и в пункте 2 первого раздела при определении плана (с той разницей, что вместо множества всех точек $t > 0$ берется промежуток $(0, t_1]$). Аналогично для t_1 -плана $\rho(t)$ $0 < t \leq t_1$ определяются функции $x^j(t)$, $y^j(t)$ для $0 < t \leq t_1$. Заметим, что t_p -план называется выполнимым, если $y^{j+1}(t) \leq x^j(t)$ для всех $j \neq \sum_{i=1}^n l_i$, $j > 0$ и $0 < t \leq t_1$.

Лемма 3. Для того, чтобы функция $\rho(t)$, $t > 0$ определяла план (выполнимый план), достаточно существования последовательности t_p ($p = 1, 2, \dots$), такой, что $\lim_{p \rightarrow \infty} t_p = \infty$, и при любом $p = 1, 2, \dots$ функция $\rho(t)$, $0 < t \leq t_p$ являлась t_p -планом (выполнимым t_p -планом).

Доказательство очевидно.

Режим $\rho = (j_1, \dots, j_n)$, у которого все $j_k = 0$, будем обозначать символом 0, $\rho = 0$.

Лемма 4. Пусть t_1 -план $\rho(t)$ определяет вектор-функции $X(t)$ и $Y(t)$ и пусть найдутся такие точки t' , t'' ($0 < t' < t'' \leq t_1$), что $\rho(t) = 0$ при $t' < t \leq t''$. Тогда $X(t) = Y(t) = X(t')$ для всех t из интервала $t' \leq t \leq t''$.

Доказательство очевидно.

Введем некоторые обозначения, необходимые для дальнейшего: $d = \max d_{kjj}$, где наибольшее значение берется по всем тройкам k, j, j' , таким, что $(j, k) \in S$, $(j', k) \in S$, $j \neq j'$; $w = \max_{(j, k) \in S} t_{jk}$; $n^j(\rho)$ равно (для данного режима $\rho = (j_1, \dots, j_n)$) числу тех k , для которых $j_k = j$. Если ξ — любое действительное число, то $[\xi]$ означает целую часть числа ξ ; $[\xi]'$ — целое число, равное $[\xi] + 1$, если ξ не целое, и равное ξ , если ξ — целое.

Лемма 5. Пусть заданы режим $\rho = (j_1, \dots, j_n)$ и два действительных числа t' , t_1 , такие, что $t' \geq d$ и $t_1 - t' \geq w$. Далее, пусть дан t_1 -план $\rho(t) = (j_1(t), \dots, j_n(t))$, такой, что выполняются следующие условия:

$$1) \rho(t) = 0 \text{ при } t' - d < t \leq t';$$

$$2) \rho(t) = \rho \text{ при } t' < t \leq t_1 - w;$$

$$3) \text{ для всех } k \text{ и для } t_1 - w < t \leq t_1 \text{ имеет место равенство } j_k(t) = j,$$

если $j_k > 0$ и $\frac{t - t'}{t_{jk} k} \leq \left[\frac{t_1 - w - t'}{t_{jk} k} \right]'$; в противном случае $j_k(t) = 0$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

$$a) x^j(t_1) = y^j(t_1) = x^j(t') + \sum_{k, j_k=j} \left[\frac{t_1 - w - t'}{t_{jk}} \right]' \text{ для всех } j > 0;$$

б) для того, чтобы t_1 -план $\rho(t)$ был выполним, достаточно, чтобы для всех положительных $j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i$ удовлетворялись следующие условия:

$$16) y^{j+1}(t) \leq x^j(t) \text{ при } 0 < t \leq t';$$

$$26) x^{j+1}(t') + n^j(\rho) + n^{j+1}(\rho) \leq x^j(t');$$

$$36) x^{j+1}(t_1) + 2n^j(\rho) + n^{j+1}(\rho) \leq x^j(t_1).$$

Заметим, что работа оборудования согласно t_1 -плану, удовлетворяющему условиям леммы, происходит в промежутке $t' < t \leq t_1$, следующим образом. В момент t' k -ый станок начинает операцию j_k над новой деталью и продолжает эту операцию (над деталями того же вида) до $t_1 - w$; в промежутке $t_1 - w < t \leq t_1$ станок заканчивает j_k -ую операцию над той деталью, которая обрабатывалась им в момент $t_1 - w$, и затем останавливается.

Доказательство. Утверждение а) леммы следует из сделанного выше замечания и леммы 4 очевидным образом. Для доказательства утверждения б) допустим, что нам задан t_1 -план, удовлетворяющий условиям 1—3 и 16—36 леммы. Очевидно, достаточно доказать неравенство $\left(j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i, j > 0 \right)$

$$y^{j+1}(t) \leq x^j(t) \quad (1)$$

только для промежутка $t' < t < t_1$.

Фиксируем некоторое положительное $j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i$. Из утверждения

а) леммы и определения $b^j(\rho)$ (пункт 1 раздела 2) имеем

$$x^j(t_1) - x^j(t') = \sum_{k, j_k=j} \left[\frac{t_1 - w - t'}{t_{jk}} \right]' \leq \sum_{k, j_k=i} \frac{t_1 - w - t'}{t_{jk}} +$$

$$+ n^j(\rho) = (t_1 - w - t') b^j(\rho) + n^j(\rho),$$

откуда

$$x^j(t_1) \leq x^j(t') + (t_1 - w - t') b^j(\rho) + n^j(\rho). \quad (2)$$

Аналогично этому

$$x^{j+1}(t_1) - x^{j+1}(t') = \sum_{k, j_k=j+1} \left[\frac{t_1 - w - t'}{t_{j+1 k}} \right]' \geq$$

$$\geq \sum_{k, j_k=j+1} \frac{t_1 - w - t'}{t_{j+1 k}} = (t_1 - w - t') b^{j+1}(\rho).$$

Из последнего неравенства, условия Зб) и неравенства (2) следует, что

$$\begin{aligned} b^{j+1}(\rho) &\leq \frac{1}{t_1 - w - t'} (x^{j+1}(t_1) - x^{j+1}(t')) \leq \frac{1}{t_1 - w - t'} \times \\ &\times (x^j(t_1) - 2n^j(\rho) - n^{j+1}(\rho) - x^{j+1}(t')) \leq \\ &\leq \frac{1}{t_1 - w - t'} (x^j(t') + (t_1 - w - t') b^j(\rho) - n^j(\rho) - n^{j+1}(\rho) - x^{j+1}(t')), \end{aligned}$$

откуда

$$b^{j+1}(\rho) \leq b^j(\rho) + \frac{1}{t_1 - w - t'} (x^j(t') - x^{j+1}(t') - n^j(\rho) - n^{j+1}(\rho)). \quad (3)$$

При доказательстве неравенства (1) рассмотрим два случая:

$$t' < t \leq t_1 - w; \quad t_1 - w < t < t_1.$$

Нетрудно видеть, что в первом случае

$$x^j(t) = x^j(t') + \sum_{k, j_k=j} \left[\frac{t - t'}{t_{jk}} \right].$$

Так как

$$\sum_{k, j_k=j} \left[\frac{t - t'}{t_{jk}} \right] \geq \sum_{k, j_k=i} \frac{t - t'}{t_{jk}} - n^j(\rho) = (t - t') b^j(\rho) - n^j(\rho),$$

мы имеем неравенство

$$x^j(t) \geq x^j(t') + (t - t') b^j(\rho) - n^j(\rho). \quad (4)$$

Однако

$$y^{j+1}(t) = x^{j+1}(t') + \sum_{k, j_k=j+1} \left[\frac{t - t'}{t_{j+1 k}} \right]'$$

и, следовательно,

$$y^{j+1}(t) \leq x^{j+1}(t') + (t - t') b^{j+1}(\rho) + n^{j+1}(\rho). \quad (5)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{t - t'}{t_1 - w - t'} (x^j(t') - x^{j+1}(t_1) - n^j(\rho) - n^{j+1}(\rho)) &\leq \\ &\leq x^j(t') - x^{j+1}(t_1) - n^j(\rho) - n^{j+1}(\rho), \end{aligned}$$

так как по условию 2б) леммы величина, стоящая в правой части этого неравенства, не отрицательна, а $(t-t')/(t_1-w-t') \leq 1$ для рассматриваемого случая. Отсюда и из неравенств (3)–(5) получаем

$$\begin{aligned} y^{j+1}(t) &\leq x^{j+1}(t') + n^{j+1}(\rho) + (t - t') b^{j+1}(\rho) \leq x^{j+1}(t') + n^j(\rho) + \\ &+ (t - t') b^j(\rho) + \frac{t - t'}{t_1 - w - t'} (x^j(t') - x^{j+1}(t') - n^j(\rho) - n^{j+1}(\rho)) \leq \\ &\leq x^j(t') + (t - t') b^j(\rho) - n^j(\rho) \leq x^j(t), \end{aligned}$$

что и доказывает неравенство (1) в рассматриваемом случае.

Во втором случае в силу монотонности функций $x^j(t)$ имеем:

$$\begin{aligned} x^j(t) &\geq x^j(t_1 - w) = x^j(t') + \sum_{k, j_k=j} \left[\frac{t_1 - w - t'}{t_{jk}} \right] \geq \\ &\geq x^j(t') + \sum_{k, j_k=j} \left[\frac{t_1 - w - t'}{t_{jk}} \right]' - n^j(\rho) = x^j(t_1) - n^j(\rho). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и условия 3б) леммы получаем:

$$y^{j+1}(t) \leq y^{j+1}(t_1) = x^{j+1}(t_1) \leq x^j(t_1) - n^j(\rho) \leq x^j(t),$$

что и доказывает неравенство (1). Лемма доказана.

3. Переходим к доказательству теоремы 2. Пусть ε —произвольное положительное число и пусть совокупность величин $g_L, f(\rho) \geq 0$, $\rho \in R$ является решением задачи L . Обозначая через ρ^s ($s = 1, \dots, q$) те режимы, для которых $f(\rho^s) > 0$, получим следующую систему равенств ($j > 0$):

$$\sum_{s=1}^q b^j(\rho^s) f(\rho^s) = g_L z^j; \quad \sum_{s=1}^q f(\rho^s) = 1. \quad (1)$$

Для доказательства мы строим допустимый план γ , такой, что $g_\gamma = g \geq g_L - \varepsilon$ (см. пункт 1 раздела 3). Доказательство разбивается на следующие 4 этапа: определение необходимых констант, построение плана для стадии „накопления запасов деталей“, построение плана для любого „производственного цикла“, окончание доказательства.

I. Определение констант. Введем обозначение $b^j = \sum_{s=1}^q b^j(\rho^s)$ и определим число a равенством

$$a = d + \sum_{j=1}^l t_{jk_j} (wb^j + 1), \quad (2)$$

где k_j и t_{jk_j} имеют тот же смысл, что в пункте 2 раздела 2. Выберем число $c > 0$ настолько большим, чтобы выполнялись следующие условия: 1) $cf(\rho^s) - w > 0$ ($s = 1, \dots, q$); 2) $g = \frac{g_L c}{c + qd + a} \geq g_L - \varepsilon$.

Обозначим $\tau^s = cf(\rho^s)$ и для каждого $j > 0$, такого, что $j \neq \sum_{i=1}^{l'} l_i$, определим целое положительное число e^j таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$e^i \geq \max_{1 \leq s' \leq q} \left(\sum_{s=1}^{s'} \tau^s b^{j+1}(\rho^s) - \sum_{s=1}^{s'} (\tau^s - w) b^j(\rho^s) \right) + 2n; \quad (3)$$

$$(e^j + 1) t_{jk_j} \geq d. \quad (4)$$

Определим величины x_0^j ($j > 0$):

$$x_0^j = 0 \text{ (если } j = \sum_{i=1}^{i'} l_i \text{);}$$

$$x_0^j = x_0^{j+1} + e^j + 1 \text{ (если } j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i \text{).}$$

II. „Накопление запасов“. Определим функцию $\rho(t) = (j_1(t), \dots, j_n(t))$, соответствующую плану γ , в промежутке $(0, t_0]$, где $t_0 = \sum_{j=1}^l x_0^j t_{jk_j} + d$.

Именно, для t в промежутке $\left(\sum_{i'=1}^{i'-1} x_0^{i'} t_{i' k_i}, \sum_{i'=1}^j x_0^{i'} t_{i' k_j} \right]$ полагаем $\rho(t) = \rho_j$ (см. пункт 2 раздела 2), т. е. $j_{k_j}(t) = j$ и $j_k(t) = 0$ при $k \neq k_j$, $j = 1, \dots, l$ (при $j = 1$ левый конец рассматриваемого промежутка равен 0); для t в промежутке $\left[\sum_{j=1}^l x_0^j t_{jk_j}, t_0 \right]$ полагаем $\rho(t) = 0$.

Заметим, что если $j = \sum_{i=1}^{i'} l_i$, то соответствующие промежутки выпускаются, так как их длина равна 0. Если $j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i$, то промежуток $\left(\sum_{i'=1}^{i'-1} x_0^{i'} t_{i' k_j}, \sum_{i'=1}^j x_0^{i'} t_{i' k_j} \right]$ имеет длину $x_0^j t_{jk_j} > d$ (согласно неравенству (4)); кроме того, в этот промежуток укладываются полуинтервалы длиной t_{jk_j} ровно x_0^j раз. Отсюда легко заключить, что функция $\rho(t)$ в промежутке $(0, t_0]$ определяет t_0 -план, причем $x_0^j(t) = x_0^j$. Кроме того, построенный t_0 -план выполним (это следует из определения величин x_0^j и из того, что в нашем плане выполнение $(j+1)$ -ых операций происходит после выполнения всех j -ых операций).

III. „Цикл“. Рассмотрим последовательность точек $t_p = t_{p-1} + \sum_{s=1}^q \tau^s + qd + a$ ($p = 1, 2, \dots$). Мы будем строить функцию $\rho(t)$ в промежутке $t_{p-1} < t \leq t_p$, предполагая, что до t_{p-1} она уже построена. Одновременно индукцией по p мы покажем, что функция $\rho(t)$ в промежутке $0 < t \leq t_p$ обладает следующими свойствами:

1) имеют место следующие неравенства:

$$gz^j(t_p - t_0) + x_0^j - 1 < x^j(t_p) \leq gz^j(t_p - t_0) + x_0^j \quad (5)$$

для любого $j > 0$ и $g = g_L c(c + qd + a)^{-1}$,

$$x^{j+1}(t_p) + e^j < x^j(t_p) \quad (6)$$

для $j > 0$, $j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i$;

2) $\rho(t) = 0$ при $t_p - d < t \leq t_p$;

3) $\rho(t)$ в промежутке $(0, t_p]$ является выполнимым t_p -планом.

Для промежутка $(0, t_0]$, т. е. при $p=0$, функция $\rho(t)$ уже построена, причем, как нетрудно проверить, все перечисленные выше свойства удовлетворяются. Пусть функция $\rho(t)$ уже построена в промежутке $(0, t_{p-1}]$ ($p=1, 2, \dots$) и обладает этими свойствами.

Сначала определим функцию $\rho(t)$ в промежутке $(t_{p-1}, t_p]$, где

$t'_p = t_p - a = t_{p-1} + \sum_{s=1}^q \tau^s + qd$. Разделим этот промежуток точками $t_p^s = t_p^{s-1} + \tau^s + d$ ($s=1, \dots, q$), $t_p^0 = t_{p-1}$, $t_p^q = t'_p$. В полуинтервале (t_p^{s-1}, t_p^s) определим $\rho(t)$ следующим образом (ср. лемму 5):

$$\rho(t) = \rho^s \text{ при } t_p^{s-1} < t \leq t_p^s - \tau^s - w = t_p^s - w - d$$

(заметим, что согласно выбору c выполняется неравенство $\tau^s = cf(\rho^s) \geq w$; поэтому данное выше определение имеет смысл).

Для всех k и для $t_p^s - w - d < t \leq t_p^s - d$ положим $j_k(t) = j_k^s$, если $j_k^s > 0$ и $(t - t_p^s + w + d)/t_{j_k^s} \leq [(\tau^s - w)/t_{j_k^s}]'$; в противном случае полагаем $j_k(t) = 0$ (здесь через j_k^s обозначен номер операции, стоящий на k -ом месте в режиме $\rho^s = (j_1^s, \dots, j_n^s)$);

$$\rho(t) = 0 \text{ при } t_p^s - d < t \leq t_p^s.$$

Нетрудно видеть, что определенная таким образом функция $\rho(t)$ будет представлять собой t'_p -план (при этом мы учитываем, что функция $\rho(t)$ при $0 < t \leq t_{p-1}$ уже есть t_{p-1} -план). Поэтому мы можем использовать лемму 5 для любого $s=1, \dots, q$, взяв в качестве t' точку t_p^{s-1} и в качестве t_1 точку $t_p^s - d$ (при $s=1$ следует учесть предположение о выполнении свойства 2 для $p=1$). Заметим, что по лемме 4 $x^j(t_p^s) = x^j(t_p^s - d)$. Так как $w/t_{j_k} \geq 1$ для всех $(j, k) \in S$, то $b^j(\rho^s)w = \sum_{k, j_k^s=j} (w/t_{j_k}) \geq n^j(\rho^s)$, откуда в силу утверждения а) леммы

$$k, j_k^s = j$$

мы получаем следующие неравенства ($j > 0$):

$$x^j(t_p^s) - x^j(t_p^{s-1}) = \sum_{k, j_k^s=i} \left[\frac{\tau^s - w}{t_{j_k}} \right]' \leq \sum_{k, j_k^s=j} \frac{\tau^s - w}{t_{j_k}} + \\ + n^j(\rho^s) = \tau^s b^j(\rho^s) - wb^j(\rho^s) + n^j(\rho^s) \leq \tau^s b^j(\rho^s).$$

Суммируя полученные неравенства для $s=1, \dots, s'$, будем иметь ($s'=1, \dots, q$; $j > 0$)

$$x^j(t_p^{s'}) \leq x^j(t_{p-1}) + \sum_{s=1}^{s'} \tau^s b^j(\rho^s). \quad (7)$$

Далее очевидна справедливость следующего неравенства:

$$x^j(t_p^s) - x^j(t_p^{s-1}) \geq \sum_{k, j_k^s=j} \frac{\tau^s - w}{t_{j_k}} = (\tau^s - w) b^j(\rho^s),$$

откуда суммированием по s получаем

$$x^j(t_p^{s'}) \geq x^j(t_{p-1}) + \sum_{s=1}^{s'} (\tau^s - w) b^j(\rho^s). \quad (8)$$

Применяя неравенство (7) для $j+1$, неравенство (6) для $p-1$, неравенства (3) и (8) для любого положительного $j \neq \sum_{i=1}^{l_p} l_i$, мы будем иметь ($s' = 1, \dots, q$)

$$\begin{aligned} x^{j+1}(t_p^{s'}) &\leq x^{j+1}(t_{p-1}) + \sum_{s=1}^{s'} \tau^s b^{j+1}(\rho^s) \leq x^j(t_{p-1}) - e^j + \sum_{s=1}^{s'} \tau^s b^{j+1}(\rho^s) \leq \\ &\leq x^j(t_{p-1}) - \sum_{s=1}^{s'} \tau^s b^{j+1}(\rho^s) + \sum_{s=1}^{s'} (\tau^s - w) b^j(\rho^s) - 2n + \sum_{s=1}^{s'} \tau^s b^{j+1}(\rho^s) = \\ &= x^j(t_{p-1}) + \sum_{s=1}^{s'} (\tau^s - w) b^j(\rho^s) - 2n \leq x^j(t_p^{s'}) - 2n \end{aligned}$$

или окончательно

$$x^{j+1}(t_p^{s'}) + 2n \leq x^j(t_p^s) \quad (9)$$

для всех $s = 1, \dots, q$; $j \neq \sum_{i=1}^{l_p} l_i$; $j > 0$. Теперь индукцией по $s = 1, \dots, q$

мы можем доказать выполнимость t_p' -плана $\rho(t)$, используя утверждение б) леммы 5 для любого s , как указано выше. Действительно, условия б) леммы 5 выполняются по индукции, а условия 2б) и 3б) следуют из неравенства (9), так как при любом $\rho \in R$

$$n^j(\rho) + n^{j+1}(\rho) \leq n.$$

Таким образом, $\rho(t)$ построена для $0 < t \leq t_p'$ и доказано, что она есть выполнимый t_p' -план.

Для дальнейшего докажем несколько неравенств. Применяя неравенство (7) при $s' = q$ и учитывая, что $\tau^s = cf(\rho^s)$, а также равенства (1), будем иметь

$$x^j(t_p') = x^j(t_p^q) \leq x^j(t_{p-1}) + \sum_{s=1}^q cf(\rho^s) b^j(\rho^s) = x^j(t_{p-1}) + cg_L z^j.$$

Применяя неравенство (8) при $s' = q$, получим

$$x^j(t_p') \geq x^j(t_{p-1}) + \sum_{s=1}^q (cf(\rho^s) - w) b^j(\rho^s) = x^j(t_{p-1}) + cg_L z^j - wb^j,$$

где $b^j = \sum_{s=1}^q b^j(\rho^s)$. Так как $\sum_{s=1}^q \tau^s = \sum_{s=1}^q cf(\rho^s) = c$, то $t_p - t_{p-1} = c + qd + a$, поэтому из определения $g = g_L c(c + qd + a)^{-1}$ нетрудно вывести равенство

$$cg_L + cg(t_{p-1} - t_0) = g(t_{p-1} - t_0).$$

Отсюда и из того, что по индукции выполняется неравенство (5) для $p-1$, получаем следующее неравенство ($j > 0$):

$$x^j(t_p') \leq x^j(t_{p-1}) + cg_L z^j \leq gz^j(t_{p-1} - t_0) + cg_L z^j + x_0^j = gz^j(t_p - t_0) + x_0^j.$$

Аналогично этому

$$\begin{aligned} x^j(t_p') &\geq x^j(t_{p-1}) + cg_L z^j - wb^j \geq gz^j(t_p - t_0) + x_0^j - \\ &- 1 + cg_L z^j - wb^j = gz^j(t_p - t_0) + x_0^j - wb^j - 1. \end{aligned}$$

Записывая оценки для $x^j(t_p')$ в одну строчку, будем иметь неравенства ($j > 0$)

$$gz^j(t_p - t_0) + x_0^j - wb^j - 1 \leq x^j(t_p') \leq gz^j(t_p - t_0) + x_0^j. \quad (10)$$

Обозначим через x_p^j наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$x_p^j \leq gz^j(t_p - t_0) + x_0^j. \quad (11)$$

Очевидно, что тогда из (10) следует: $x^j(t_p') \leq x_p^j$, так как $x^j(t_p')$ — целое. Положим теперь $\tau_j' = (x_p^j - x^j(t_p')) t_{jk_j}$, для $j > 0$ и $t_p'' = t_p' + \sum_{j=1}^l \tau_j'$.

Функцию $\rho(t)$ продолжаем от t_p' до t_p'' следующим образом: $\rho(t) = \rho_j$, для $t_p' + \sum_{j=1}^{j'-1} \tau_j' < t \leq t_p' + \sum_{j=1}^{j'} \tau_j'$ ($j' = 1, \dots, l$). Нетрудно видеть, что таким образом продолженная функция $\rho(t)$ является t_p'' -планом, причем $x^j(t_p'') = x_p^j$.

Покажем далее, что $t'' + d \leq t_p$. Из неравенств (11) и (10) имеем $x_p^j - x^j(t_p') \leq gz^j(t_p - t_0) + x_0^j - gz^j(t_p - t_0) - x_0^j + wb^j + 1 = wb^j + 1$.

Отсюда и из (2) получаем

$$t_p - t_p' = \sum_{j=1}^l \tau_j = \sum_{j=1}^l (x_p^j - x^j(t_p')) t_{jk_j} \leq \sum_{j=1}^l (wb^j + 1) t_{jk_j} = a - d.$$

Но так как $t_p - t_p' = a$, ясно, что $t_p - t_p'' = t_p - t_p' + t_p' - t_p'' \geq d$.

Положим теперь $\rho(t) = 0$ при $t_p'' < t \leq t_p$. Таким образом, функция $\rho(t)$ определена до t_p . Покажем, что эта функция обладает свойствами 1–3.

Так как $x^j(t_p) = x(t_p'') = x_p^j$, то из определения числа x_p^j (см. (11)) следует, что неравенство (5) удовлетворяется. Далее, для $j > 0$, $j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i$ из (5), из неравенства $x_0^{j+1} + e^j + 1 \leq x_0^j$ и равенства $z^{j+1} = z^j$ будем иметь:

$$\begin{aligned} x^{j+1}(t_p) + e^j &\leq gz^{j+1}(t_p - t_0) + x_0^{j+1} + e^j = \\ &= gz^j(t_p - t_0) + x_0^{j+1} + e^j \leq gz^j(t_p - t_0) - 1 + x_0^j < x^j(t_p). \end{aligned}$$

Таким образом удовлетворяется неравенство (6), и, следовательно, свойство 1 доказано.

Свойство 2 следует из неравенства $t_p'' + d \leq t_p$. Остается доказать свойство 3. То, что функция $\rho(t)$, $0 < t \leq t_p$ является t_p -планом, следует из самого построения этой функции. Выполнимость t_p' -плана $\rho(t)$, $0 < t \leq t_p'$ уже доказана. Выполнимость t_p -плана $\rho(t)$

следует из того, что $x^{j+1}(t_p) \leq x^j(t_p)$ при $j \neq \sum_{i=1}^{i'} l_i$ (см. неравенство (6)), а также из того, что, согласно нашему построению плана, в промежутке $(t_p', t_p]$ ($j + 1$)-операции производятся после выполнения j -ых операций. Из свойства 3 и из леммы 4 вытекает, что функция $\rho(t)$ ($0 < t < \infty$) является выполнимым планом, так как $\lim_{p \rightarrow \infty} t_p = \infty$.

IV. Окончание доказательства. Осталось показать, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} x^j(t)$ существует и равен gz^j . Так как $t_p - t_{p-1} = c + qd + a$, то после тривиальных преобразований неравенств (5) получаем ($p=1, 2, \dots$)

$$gz^j t_{p-1} + c_1 - 1 < x^j(t_p) \leq g z^j t_{p-1} + c_1,$$

где $c_1 = (c + qd + a) gz^j - gz^j t_0 + x_0^j$. Отсюда следует, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{x^j(t_p)}{t_p} = g z^j. \quad (12)$$

Если в неравенство (5) вместо p подставить $p-1$, то из полученного неравенства, аналогично предыдущему, будем иметь

$$gz^j t_p + c_2 - 1 < x^j(t_{p-1}) \leq g z^j t_p + c_2,$$

где $c_2 = -gz^j(c + qd + a) - gz^j t_0 + x_0^j$. Отсюда следует, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{x^j(t_{p-1})}{t_p} = g z^j. \quad (13)$$

Пусть теперь $t_{p-1} < t \leq t_p$. В силу монотонности имеем неравенства: $x^j(t_{p-1}) \leq x^j(t) \leq x^j(t_p)$, откуда получаем

$$\frac{x^j(t_{p-1})}{t_p} \leq \frac{x^j(t)}{t} < \frac{x^j(t_p)}{t_{p-1}}.$$

Из последних неравенств и соотношений (12), (13) имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} x^j(t) = g z^j,$$

откуда следует, что построенный план допустим; поскольку вместе с тем $g \geq g_L - \varepsilon$, то, согласно сказанному в начале пункта 1 раздела 3, доказательство теоремы 2 можно считать законченным.

Таким образом, задачу A в принципе можно считать решенной. Действительно, для нахождения величины $g_A = g_L$ достаточно решить задачу L , для чего существуют известные методы линейного программирования. Вместе с тем доказательство теоремы 2 дает способ построения оптимальных планов (с точностью до любого > 0).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. H. Bowman, Operations Res., 7, 621 (1959).
2. G. B. Dantzig, Manag. Sci., № 2, 191 (1960).
3. А. Л. Лурье, Проблемы кибернетики, вып. 7, 201 (1962).
4. Ю. В. Глебский и В. Н. Шевченко, О составлении оптимального графика работ, Тезисы доклада с научно-технической конференции по применению электронно-вычислительных машин в народном хозяйстве, Горький, 1962

TO THE OPTIMIZATION OF THE OPERATION SCHEDULE

Yu. V. Glebsky

The production planning is considered of some kinds of details on several machines, the possible technologic routes being given for each detail. The schedule is required to be such a one which provides maximum production value per unit of time with given ratio of quantities of various details. The production process is assumed to be infinite according to this idealization. The problem of finding out the maximum productivity of the equipment is proved to be reduced to the problem of a linear programming, the succession of operations being not essential.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ИНТЕНСИВНОСТИ РЯДА ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ, ЛУНЫ И СОЛНЦА НА ЧАСТОТЕ 927 мгц

В. А. Разин, В. Т. Фёдоров

В октябре 1962 года в экспедиции на Кара Даге в Крыму были проведены пресцизационные измерения интенсивности радиоизлучения нескольких мощных дискретных источников, Луны и Солнца на частоте 927 мгц. Наблюдения проводились с помощью радиотелескопа с 8-метровым параболическим зеркалом. Ширина луча антенны по точкам половинной мощности составляла 3° . Флюктуационный порог чувствительности аппаратуры был около $0,2^\circ\text{K}$ при постоянной времени 1 сек. Принималась вертикальная компонента радиоизлучения. Калибровка радиотелескопа осуществлялась по искусственноому источнику, представлявшему собой диск диаметром 3,8 м, покрытый поглощающим материалом. Диск был расположен на горе на расстоянии 231 м от радиотелескопа и имел угол места 26° . Такой метод калибровки радиотелескопа позволяет, как известно [1], обеспечить высокую точность измерений. Интенсивности источников измерялись относительно опорных областей, выбиравшихся на расстоянии $5^\circ \pm 6^\circ$ от источников.

Результаты измерений приведены в таблице 1. В третьем столбце таблицы 1 даны

Таблица 1

Потоки радиоизлучения дискретных источников на частоте 927 мгц

| Источник | Координаты опорной области | | | | Плотность потока радиоизлучения относительно опорной области ($10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-3} \text{ гц}^{-1}$) | Точность (%) | Плотность потока радиоизлучения источника ($10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-3} \text{ гц}^{-1}$) | Точность (%) | | | | |
|------------------|--|--|--------------------------|-------------------------|--|--------------------|---|-------------------|--|--|--|--|
| | экваториальные | | галактические | | | | | | | | | |
| | α (1962.0) | δ (1962.0) | l^1 | b^1 | | | | | | | | |
| Кассиопея-А | $0^h 01^m 42^s$ $22^h 41^m 42^s$ | $58^\circ 36', 4$ $58^\circ 36', 4$ | 85° 75° | -3° 0° | 3360 3328 | 2,4(1,5) 3,5(3) | 3289 3318 3295 | 2,7 3,8 2,5 | | | | |
| Лебедь-А | $20^h 12^m$ | $45^\circ 05'$ | 50° | $+5^\circ$ | 2028 | 2,7(2) | 2239 | 3,6 | | | | |
| Телец-А | $5^h 50^m$ | 18° | 158° | -2° | 988 | 3,2(2,5) | 1025 | 4 | | | | |
| Дева-А | Антенна отводилась по азимуту на 8° | | | | 300 | 2,6(1,1) | 295 | 3 | | | | |
| Туманность Орион | $5^h 12^m$ | -6° | $174,5^\circ$ | -22° | 409 | 3,8(3) | 378 | 4,9 | | | | |

плотности потоков радиоизлучения источников (для обеих поляризаций), измеренные относительно опорных областей, координаты которых указаны во втором столбце. Ошибки измерений потоков радиоизлучения источников относительно опорных областей даны в четвертом столбце таблицы 1 (в скобках приведены флюктуационные ошибки измерений). В пятом столбце таблицы 1 приведены потоки, получившиеся после того, как были учтены разности температур распределенного космического радиоизлучения в местах расположения источников и опорных областях. Вычисление разностей температур проводилось путем интегрирования по диаграмме направленности антены изофот на 200 мгц [6], 408 мгц [2] и 960 мгц [3] в соответствующих областях и пересчета на частоту 927 мгц с использованием спектрального индекса яркостной температуры, равного 2,7.

Точности, с которыми определены потоки радиоизлучения источников, приведены в шестом столбце таблицы 1. При оценке точности измерений, кроме флуктуационной ошибки и ошибки в определении разности температур небосвода в месте расположения источника и в опорной области, были учтены еще следующие погрешности: 1) ошибка в определении телесного угла диска $\pm 1\%*$, 2) ошибка в определении разности температуры диска и температуры неба за диском $\pm 0.5\%$, 3) ошибка из-за неточного определения поглощения радиоволн в атмосфере $\pm 0.5\%$, 4) ошибка из-за неточного наведения электрической оси антенны на источник $\pm 0.5\%$, 5) ошибка в вычислении дифракционной поправки $\pm 1.2\%[4]$, 6) ошибка из-за неидеальной «черноты» диска $\pm 0.5\%$, 7) ошибки в измерении разностей температур антенны, обусловленных неоднородностью местного фона (излучение окрестных гор и т. п.). Результирующая погрешность находилась как корень квадратный из суммы квадратов перечисленных ошибок.

Для Кассиопеи-А в таблице 1 приведены два ряда цифр, так как использовались две опорные области. В пятом столбце таблицы 1 под чертой приведена величина потока радиоизлучения Кассиопеи-А, полученная путем усреднения значений потоков, написанных над чертой, с учетом их статистического веса, а в шестом столбце под чертой—погрешность, с которой определена эта величина. Результаты, приведенные в таблице 1, находятся в хорошем согласии с данными Харриса и Робертса [5] на частоте 960 мгц.

Интенсивности радиоизлучения Луны и Солнца измерялись так же, как и интенсивности дискретных источников. Эффективная температура Луны на частоте 927 мгц найдена равной $230^{\circ}\text{K} \pm 7^{\circ}\text{K}$ ($233^{\circ}\text{K} \pm 7^{\circ}\text{K}$ без учета неоднородности распределения космического радиоизлучения).

Эффективные температуры Солнца приведены в таблице 2.

Таблица 2

Эффективная температура Солнца на частоте 927 мгц

| Время измерения | Эффективная температура Солнца ($^{\circ}\text{K}$) | Точность (%) |
|-----------------|---|--------------|
| 12.Х.1962 | $2,93 \cdot 10^5$ | 8,5 |
| 18.Х.1962 | $2,96 \cdot 10^5$ | 3,5 |
| 26.Х.1962 | $3,06 \cdot 10^5$ ($3,02 \cdot 10^5$) | 3 |

12 и 18 октября для определения температуры Солнца использовалась тепловая калибровка радиометра и средняя за весь период наблюдений величина сигнала от диска с температурой 283°K , выраженная в единицах тепловой калибровки радиометра. 26 октября радиотелескоп калибровался непосредственно по диску (в скобках приведено значение эффективной температуры Солнца, полученное тем же методом, что и 12, 18 октября).

Пользуемся случаем поблагодарить В. П. Ботавина, В. Д. Кротикова, Н. Б. Михайлову, Э. С. Планкина, К. С. Станкевича, В. С. Троицкого и Н. М. Цейтлина за содействие в выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв высш уч. зав — Радиофизика, 4, 1004 (1960).
2. C. L. Seeger, F. L. H. M. Stumpers and N. van Hugck, Phil. Tech. Rev., 21, № 11, 317 (1959/60).
3. R. W. Wilson and J. G. Bolton, Pub. Astr. Soc. Pac., 72, 331 (1960).
4. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика (в печати)
5. D. E. Harris and J. A. Roberts, Pub. Astr. Soc. Pac., 72, 237 (1960).
6. F. Dröge, W. Priester, Zs. f. Astrophys., 40, 236 (1956).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 апреля 1963 г.

* Телесный угол диска был измерен В. А. Порфириевым.

ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ НОЧНОЙ СТОРОНЫ ВЕНЕРЫ В САНТИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН*

Ю. Н. Ветухновская, А. Д. Кузьмин, Б. Г. Кутузов,
Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович

1. Измерения интенсивности радиоизлучения ночной стороны Венеры, проведенные на волнах 4 мм [1, 2], 8 мм [3, 4], 3,2 см [5], 10 см [6, 7], 20 см [8, 9] и 40 см [9], показали, что яркостная температура планеты примерно постоянна в диапазонах от 4 до 8 мм и от 3 до 40 см и равна $350 \pm 400^\circ\text{K}$ и $\sim 600^\circ\text{K}$ соответственно.

Для интерпретации этих результатов предложено несколько моделей Венеры, для анализа которых весьма важно знать также спектр в области длин волн от 8 мм до 3 см , являющейся переходной от низких к высоким яркостным температурам. В связи с этим около нижнего соединения 1962 г. были проведены измерения яркостной температуры Венеры на волнах 8 мм , 1,6 см и 3,3 см .

2. Измерения проводились с помощью модуляционных радиометров, имевших флюктуационную чувствительность 1; 0,3 и $0,1^\circ\text{K}$ на волнах 8 мм , 1,6 см и 3,3 см соответственно. Был использован метод прохождений диаграммы антennы мимо Венеры с малой дифференциальной скоростью, аналогичный применявшемуся ранее [1, 3]. Образцы кривых прохождения приведены на рис. 1.

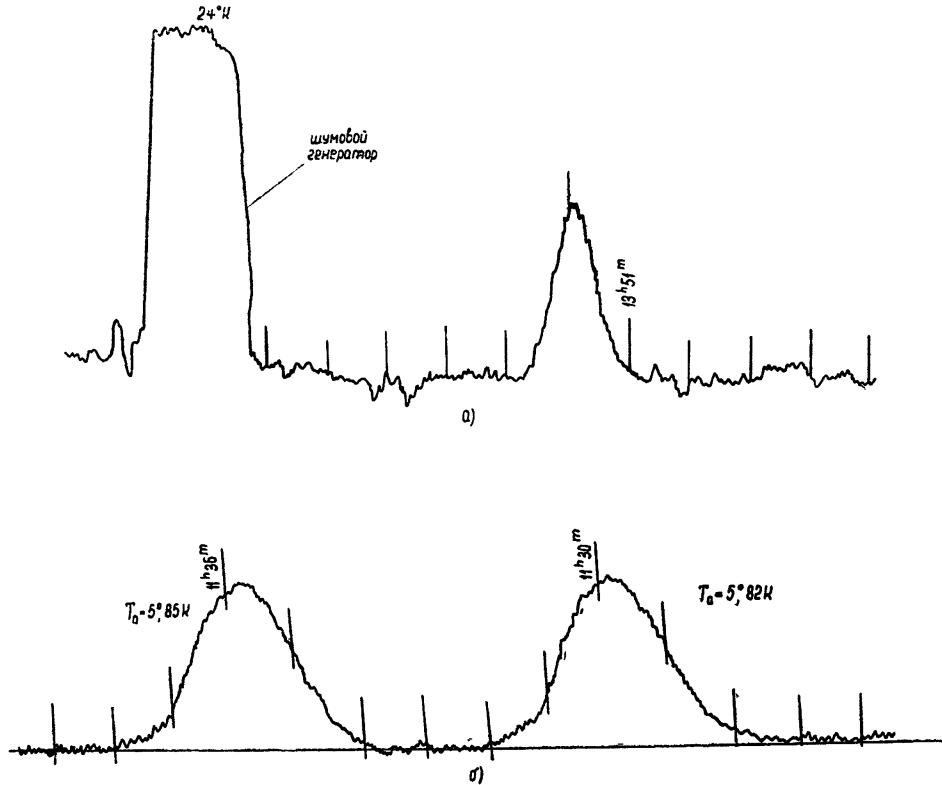


Рис. 1. Образцы записей прохождения Венеры а) на волне 1,6 см 5. II. 62;
б) на волне 3,3 см 18. II. 62.

Калибровка антенной температуры производилась с помощью газоразрядных шумовых генераторов, включаемых в тракт сигнала через направленные ответвители со слабой связью. Определение эффективной площади антennы производилось по радиоизлучению внеземных источников. На волне 8 мм в качестве такого источника был использован Юпитер, яркостная температура которого принималась равной 140°K . На волнах 1,6 и 3,8 см опорным источником являлся Телец-А. Плотность потока радиоизлучения его на волне 3,3 см , согласно [10], равна $560 \cdot 10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \text{ гц}^{-1}$. На волне

* Доложено на Всесоюзной конференции по радиоастрономии, Горький, 1963.

не 1,6 см плотность потока определялась экстраполяцией от волны 3,3 см со спектральным индексом 0,25 и принималась равной $470 \cdot 10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \text{ гц}^{-1}$.

При пересчете антенных температур в яркостные вводились поправки на поглощение в атмосфере и на соизмеримость угловых размеров планеты и диаграмм направленности антенн. Угловые размеры Тельца-А определялись по уширению кривой прохождения и в предположении о гауссовом распределении радиояркости; они составили 3',8 по уровню половинной интенсивности.

Систематические ошибки в определении яркостной температуры Венеры, обусловленные неточностью учета поглощения и ошибкой измерения эффективной площади антены по опорным источникам, параметры которых (см. выше) считались известными, оцениваются нами в 6; 10 и 3% на волнах 8 мм, 1,6 см и 3,3 см соответственно.

3. Измерения производились в течение ноября 1962 г. На волне 8 мм было 7 дней наблюдений; в каждый из них проводилось от 7 до 15 прохождений. Для 6 дней наблюдения яркостная температура Венеры была заключена в пределах от 360 до 400°K со средневзвешенным значением 386°K и среднеквадратичным отклонением 9°K.

На волне 1,6 см для 8 дней наблюдений средняя за день яркостная температура Венеры была заключена в пределах от 470 до 570°K. Всего за эти дни произведено 46 измерений. Средняя по этим измерениям яркостная температура Венеры равна 534°K со среднеквадратичным отклонением 11°K. Проводившиеся в то же время наблюдения радиоизлучения Юпитера на волне 1,6 см позволили определить также яркостную температуру и этой планеты, оказавшуюся равной $165 \pm 25^{\circ}\text{K}$.

На волне 3,3 см для 14 дней наблюдений яркостная температура Венеры была заключена в пределах от 540 до 600°K. Всего произведено 162 измерения. Средняя яркостная температура, полученная из этих измерений, составляет 575°K со среднеквадратичным отклонением 10°K.

Результаты измерений суммированы в таблице 1, где приведены также

Таблица 1

| λ (см) | $\bar{T}_{\text{я}} \text{ В}$ ($^{\circ}\text{K}$) | $\Delta T_{\text{я}} \text{ В}$ ($^{\circ}\text{K}$) | Год наблюдения* | Наблюдатели |
|----------------|---|--|-----------------|---|
| 0,4 | 370* | 90* | 1961 | Кисляков, Кузьмин, Саломонович |
| 0,43 | 350 | 50 | 1961 | Грант, Корбетт |
| 0,8 | 386 | 30 | 1952 | Кузьмин, Кутузова, Саломонович |
| 0,86 | 410 | 30 | 1961 | Гибсон, Мак-Ивен |
| 1,6 | 534 | 60 | 1962 | Кузьмин, Лосовский, Саломонович |
| 3,2 | 550 | 70 | 1961 | Майер, Мак-Каллух, Слонейкер |
| 3,3 | 575 | 20 | 1962 | Ветухновская, Кузьмин, Лосовский, Саломонович |
| 10 | 590 | 50 | 1961 | Дрейк |
| 21 | 620 | 80 | 1961 | Лилли |
| 20 | 600 | — | 1962 | Дрейк |
| 40 | 600 | — | 1962 | Дрейк |

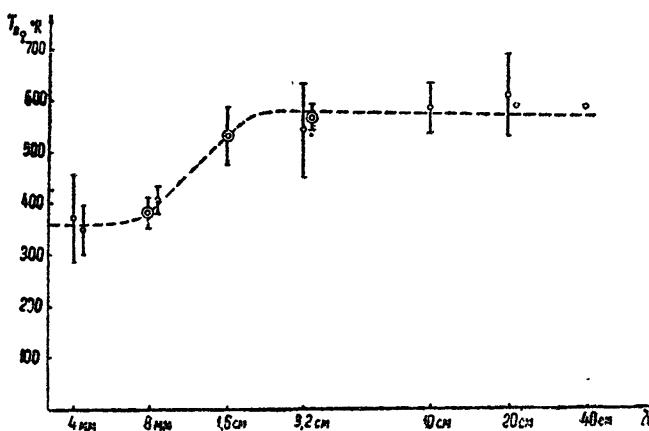


Рис. 2. Спектр радиоизлучения Венеры в области длин волн от 4 мм до 40 см (○—данные настоящей статьи).

* Значение, приведенное в [1], уточнено по последним измерениям Луны.

последние данные других наблюдателей. В таблице указаны усредненные по видимому диску яркостные температуры ночной стороны Венеры и суммарные (случайные и систематические) ошибки ее определения.

Спектр яркостной температуры ночной стороны Венеры, построенный по этим данным, приведен на рис. 2.

Авторы весьма признательны А. Е. Башаринову за содействие в проведении настоящей работы. В подготовке аппаратуры, проведении наблюдений и обработке результатов принимали участие Н. П. Абросимов, Н. Ф. Ильин, А. Н. Козлов, Л. А. Левченко, М. Т. Левченко, Н. Д. Мацкова, Н. В. Орлова, В. И. Пушкарев, Л. Шевченко. Авторы выражают им свою благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астроном. ж., **39**, 410 (1962).
2. G. R. Grant, H. H. Corbett, Astron. J., **67**, 115 (1962).
3. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астроном. ж., **39**, 660 (1962).
4. Дж. Гибсон, Р. Мак Ивен, сб. Радиоастрономия, Парижский симпозиум, ИЛ, М., 1961.
5. С. Н. Мауг, Т. Р. Mc Cullough, R. M. Sloapaker, Report to the XI Intern. Astrophys. Symposium, The planet's physic, Liege, 1962.
6. А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астроном. ж., **38**, 1115 (1961).
7. F. D. Drake, Publ. NRAO, **1**, 165 (1962).
8. A. E. Lilleley, Astron. J., **66**, 290 (1961).
9. J. W. Findlay, Sky and Telescope, **25**, 73 (1963).
10. В. С. Лазаревский, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Астроном. ж., **40**, 12 (1963).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
6 апреля 1963 г.

О ВОЗБУЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ ПОТОКОМ ИОНОВ

В. Б. Красовицкий, К. Н. Степанов

1. Как известно, черенковское и магнитотормозное излучение потоков ионов, проходящих через верхнюю атмосферу, приводит к появлению УНЧ излучения [1] и варияциям магнитного поля Земли. При этом оказывается, что существенный вклад в излучение потока с малой плотностью и большим тепловым разбросом по скоростям вносят гармоники с большим номером [2, 3]*. В условиях аномального эффекта Доплера магнитотормозное и черенковское излучение становится когерентным, а система плазма-поток—неустойчивым.

В настоящей работе исследуется возбуждение электромагнитных волн в плазме в условиях квазипродольного распространения потоком ионов с малой плотностью, проходящих через плазму параллельно магнитному полю; исследовано также возбуждение волн при $\Theta \approx \pi/2$; Θ —угол между внешним магнитным полем H_0 и волновым вектором k ,

$$\mathbf{k} = (k_x = k \sin \Theta, k_y = 0, k_z = k \cos \Theta).$$

2. Дисперсионное уравнение электромагнитных волн в плазме имеет вид

$$An^4 + Bn^2 + C = 0, \quad n = ck/\omega, \quad (1)$$

где

$$A = \epsilon_{11} \sin^2 \Theta + \epsilon_{33} \cos^2 \Theta + 2\epsilon_{13} \sin \Theta \cos \Theta;$$

$$B = 2(\epsilon_{12} \epsilon_{23} - \epsilon_{22} \epsilon_{13}) \sin \Theta \cos \Theta + \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{33} - (\epsilon_{22} \epsilon_{33} + \epsilon_{23}^2) \cos^2 \Theta - \\ - (\epsilon_{11} \epsilon_{23} + \epsilon_{12}^2) \sin^2 \Theta;$$

$$C = \epsilon_{33} (\epsilon_{11} \epsilon_{22} + \epsilon_{12}^2) + \epsilon_{11} \epsilon_{23}^2 + 2\epsilon_{12} \epsilon_{23} \epsilon_{13} - \epsilon_{22} \epsilon_{13}^2.$$

* Авторы признательны М. А. Гинцбургу за возможность ознакомиться с его работой [3] до опубликования

Тензор ϵ_{ij} можно представить в виде

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(0)} + \epsilon_{ij}^{(i)} + \epsilon_{ij}^{(e)},$$

где $\epsilon_{ij}^{(0)}$ — тензор диэлектрической проницаемости плазмы, а $\epsilon^{(e, i)}$ — добавка к $\epsilon_{ij}^{(0)}$, обусловленная электронами и ионами пучка.

Мы рассматриваем распространение низкочастотных электромагнитных волн в плазме с достаточно большой плотностью, так что имеют место неравенства

$$\Omega \gg \omega_H \gg \omega \gg \frac{m}{M} \omega_H.$$

Здесь $\Omega = \sqrt{4\pi n_0 e^2/m}$ — ленгмюровская частота плазмы, ω_H — гироизменение электронов, $(m/M) \omega_H$ — гироизменение ионов плазмы, M — масса ионов плазмы.

Если фазовая скорость волн значительно больше средней тепловой скорости электронов и ионов плазмы ($\beta_e n \cos \theta \ll 1$, $\beta_i = \sqrt{T_e/mc^2}$), то тензор $\epsilon_{ij}^{(0)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{(0)} &= \epsilon_{22}^{(0)} = \epsilon_1 = 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_H^2} - \frac{m}{M} \frac{\Omega^2}{\omega^2}; \\ \epsilon_{12}^{(0)} &= i \epsilon_2 = -\frac{i \Omega^2}{\omega \omega_H}; \quad \epsilon_{33}^{(0)} = \epsilon_3 = -\frac{\Omega^2}{\omega^2}; \quad \epsilon_{13}^{(0)} = \epsilon_{23}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В этом случае в плазме возможно распространение обыкновенной волны, показатель преломления которой при θ , не близких к $\pi/2$, равен n_0 , где

$$n_0^2 = \Omega^2/\omega \omega_H \cos \theta. \quad (3)$$

Отсюда для частоты получаем

$$\omega = \frac{\omega_H \cos \theta}{r}, \quad r = \frac{\Omega^2}{c^2 k^2}. \quad (4)$$

Тензор диэлектрической проницаемости $\epsilon_{ij}^{(i)}$ для пучка, движущегося вдоль магнитного поля со скоростью v_0 и имеющего максвелловское распределение частиц по скоростям с температурой T' в собственной системе координат, имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{(i)} &= \frac{\Omega'^2}{\omega^2} z_0 \frac{e^{-\mu}}{\mu} i \sqrt{\pi} \sum_s w(z_s) s^2 I_s, \\ \epsilon_{22}^{(i)} &= \frac{\Omega'^2}{\omega^2} z_0 e^{-\mu} i \sqrt{\pi} \sum_s w(z_s) \left[\left(\frac{s^2}{2\mu} + 2\mu \right) I_s - 2\mu I'_s \right], \\ \epsilon_{13}^{(i)} &= \frac{\Omega'^2}{\omega^2} z_0 \frac{e^{-\mu}}{\mu} i \sqrt{2\pi} \sum_s w(z_s) s y_s I_s; \\ \epsilon_{33}^{(i)} &= 2 \frac{\Omega'^2}{\omega^2} \left[y_0^2 + z_0 e^{-\mu} i \sqrt{\pi} \sum_s w(z_s) y_s^2 I_s \right]; \\ \epsilon_{23}^{(i)} &= \frac{\Omega'^2}{\omega^2} z_0 e^{-\mu} \sqrt{2\pi} \sum_s w(z_s) y_s (I'_s - I_s); \\ \epsilon_{12}^{(i)} &= \frac{\Omega'^2}{\omega^2} z_0 e^{-\mu} \sqrt{\pi} \sum_s w(z_s) s (I_s - I'_s), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Omega' = \sqrt{4\pi n'_0 e^2/M'}$ — ленгмюровская частота для ионов пучка, M' — их масса, n'_0 — плотность, $I_s = I_s(\mu)$ — модифицированная функция Бесселя,

$$I'_s = dI_s/d\mu, \quad \sqrt{\mu} = kv_T \sin \Theta/\omega_l, \quad \omega_l = eH_0/M'c, \quad v_T = \sqrt{T'/M'}.$$

$$y_s = \frac{\omega - s\omega_i}{\sqrt{2}kv_T \cos \theta}, \quad z_s = \frac{\omega - kv_0 \cos \theta - s\omega_i}{\sqrt{2}kv_T \cos \theta}, \quad w(z_s) = e^{-z_s^2} \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_s} e^{t^2} dt \right].$$

Используя соотношения

$$\sum_s \frac{I_s(\mu)}{\gamma - s} = -i \int_0^\infty e^{\mu} \cos \varphi + i \gamma \varphi d\varphi, \quad \sum_s I_s(\mu) = e^\mu,$$

можно представить (5) в виде

$$\epsilon_{11}^{(i)} = i \frac{\Omega'^2 \sigma}{\omega^2} \int_0^\infty (\cos \varphi - \mu \sin^2 \varphi) e^{f(\varphi)} d\varphi;$$

$$\epsilon_{12}^{(i)} = i \frac{\Omega'^2 \sigma}{\omega^2} \int_0^\infty (\mu \cos \varphi - \mu + 1) \sin \varphi e^{f(\varphi)} d\varphi;$$

$$\epsilon_{22}^{(i)} = i \frac{\Omega'^2 \sigma}{\omega^2} \int_0^\infty [\mu + (1 - 2\mu) \cos \varphi + \mu \cos^2 \varphi] e^{f(\varphi)} d\varphi; \quad (6)$$

$$\epsilon_{33}^{(i)} = 2 \frac{\Omega'^2 \sigma}{\omega^2} \left\{ (z_0 - y_0)^2 + i \sigma \int_0^\infty \left[\left(z_0 - y_0 + \frac{i \omega \varphi}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] \right\} e^{f(\varphi)} d\varphi;$$

$$\epsilon_{13}^{(i)} = -\frac{\Omega'^2 \sigma}{\omega^2} \sqrt{-\frac{2}{\mu}} \left\{ z_0 - y_0 + i \int_0^\infty \left[\sigma (z_0 - y_0) + i \omega^2 \varphi \left(z_0 - \frac{y_0}{2} \right) + \frac{z}{2} - \frac{\omega^3 \varphi^2}{4} \right] \right\} e^{f(\varphi)} d\varphi;$$

$$\epsilon_{23}^{(i)} = \frac{\Omega'^2 \sigma}{\omega^2} \sqrt{2\mu} \int_0^\infty \left(z_0 - y_0 + \frac{i \omega \varphi}{2} \right) (1 - \cos \varphi) e^{f(\varphi)} d\varphi,$$

где

$$f(\varphi) = \mu (\cos \varphi - 1) + i \omega \varphi - \frac{\omega^2 \varphi^2}{4}, \quad \sigma = \frac{\omega - kv_0 \cos \theta}{\omega_i}, \quad z = \frac{kv_T \cos \theta}{\omega_i}.$$

3. Рассмотрим излучение волн, для которых длина волны значительно меньше гирорадиуса частиц пучка, имеющих скорость порядка v_T ($kv_T \gg \omega_i$). Для этого представим антиэрмитовские части ϵ_{ij}'' тензора $\epsilon_{ij}^{(i)}$, которые определяют инкремент парастания, в виде интегралов по φ от $-\infty$ до ∞ . Например, антиэрмитовская часть $\epsilon_{11}^{(i)}$ равна

$$\epsilon_{11}'' = \frac{\Omega'^2 \sigma}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\omega^2}{2} \operatorname{Re} \varphi \sin \varphi e^{f(\varphi)} + \sigma \operatorname{Im} \sin \varphi e^{f(\varphi)} \right] d\varphi. \quad (7)$$

Аналогично можно представить антиэрмитовские части остальных компонент $\epsilon_{ij}^{(i)}$.

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда фазовая скорость волны в системе отсчета, связанной с пучком, меньше или порядка v_T ($\sigma \ll kv_T/\omega_i$). Очевидно, что в этом случае будет осуществляться наиболее сильное взаимодействие пучка с волной, так как число резонансных частиц в пучке велико.

В рассматриваемом случае главный вклад в интегралы (6) дают значения $\varphi \lesssim \omega_i/kv_T \ll 1$. Разлагая $\cos \varphi$ в экспоненте $e^{f(\varphi)}$ в ряд при малых φ , получим для антиэрмитовских частей $\epsilon_{11}^{(i)}$ и $\epsilon_{22}^{(i)}$ следующие выражения:

$$\epsilon_{22}'' = \frac{\Omega'^2 \sigma}{\omega^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} \sin \theta e^{-z_0^2 \cos^2 \theta}; \quad (8)$$

$$\epsilon_{11}'' = \epsilon_{22}'' \left(1 + 2 z_0^2 \sin^2 \Theta \right) \cos^2 \Theta.$$

Остальные компоненты ϵ_{ij}'' по порядку величины не превосходят (8); в дисперсионном уравнении их можно не учитывать, так как они умножаются на малые члены $\sim \omega/\omega_H$.

Решая дисперсионное уравнение (1) с учетом (8), получаем

$$\frac{\gamma}{\omega} = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Omega'^2}{c^2 k^2} \frac{\omega - kv_0 \cos \Theta}{kv_T} \left(1 + z_0^2 \sin^2 \Theta \right) e^{-z_0^2 \cos^2 \Theta}, \quad (9)$$

где частота ω определяется выражением (4).

В инкремент нарастания (9) при Θ , не близких к нулю, дают вклад черенковское и магнитотормозное излучения первых гармоник, вплоть до номеров порядка kv_T/ω_i . Так как гирочастота ионов ω_i мала по сравнению с излучаемой частотой $\omega \approx kv_0 \cos \Theta$, а гирорадиус ионов велик по сравнению с длиной волны, то магнитное поле слабо влияет на движение иона под действием электромагнитной волны. Поэтому инкремент (9) получается таким же, как если бы ионы пучка проходили через изотропную замедляющую среду, в которой возможно распространение волн с законом дисперсии (4). В изотропной среде поглощение (испускание) волн обусловлено эффектом Черенкова (затухание Ландау). Условие неустойчивости в рассматриваемом случае совпадает с обычным условием черенковского возбуждения: $kv_0 \cos \Theta > \omega$. Отсюда видна некоторая условность разделения черенковского и циклотронного механизмов поглощения волн в магнитоактивной плазме*.

4. Как видно из (9), инкремент нарастания увеличивается при $\Theta \rightarrow \pi/2$. Однако выражениями (3) и (4) при $\Theta \rightarrow \pi/2$ пользоваться нельзя. Предполагая по-прежнему выполнение неравенств (2), запишем дисперсионное уравнение (1) при $\Theta \approx \pi/2$ в виде

$$n^4 (\epsilon_{11} \sin^2 \Theta + \epsilon_{33} \cos^2 \Theta) - n^2 (\epsilon_{11} \epsilon_{33} + \epsilon_{12}^2 \sin^2 \Theta) + \epsilon_{12}^2 \epsilon_{33} = 0. \quad (10)$$

Из (10) получаем выражение для частоты:

$$\omega^2 = \frac{\Omega^2 [(1+r)m/M + \cos^2 \Theta]}{(1+r)[1 + (\Omega^2/\omega_H^2)(1+r)]}. \quad (11)$$

Для инкремента в этом случае получаем выражение

$$\frac{\gamma}{\omega} = - \frac{\omega^2}{2 c^2 k^2} \frac{1+r}{r[(1+r)m/M + \cos^2 \Theta]} \epsilon_{11}''. \quad (12)$$

Если считать в (12), что $\cos^2 \Theta \gg m/M$, это выражение совпадает с (9). Как видно из (12), при $\cos^2 \Theta \sim m/M$ инкремент увеличивается в $\sqrt{M/m}$ раз по сравнению с (9). При этом максимальное значение γ порядка

$$\gamma_{\text{макс}} \sim \frac{n_0'}{n_0} \omega_H \sqrt{\frac{m}{M}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Гершман, В. А. Угаров, УФН, 72, 235 (1960).
2. М. А. Ginzburg, Phys. Rev. Lett., 1, 12 (1961).
3. М. А. Гинцбург, ЖЭТФ (в печати)
4. М. А. Гинцбург, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 11, 1679 (1961).
5. К. Н. Степанов, А. Б. Киценко, ЖТФ, 31, 167 (1961).
6. В. Л. Гинзбург, УФН, 69, 537 (1959).
7. М. С. Ковнер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 746 (1960).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
30 июня 1962 г

* На это обстоятельство указывал Гинзбург [6].

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЛОШНОГО СПЕКТРА ТОКА СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ ВБЛИЗИ ПЕРВОЙ ГАРМОНИКИ ЧАСТОТЫ ПЕРЕПОЛЯРИЗАЦИИ И ПОРОГОВОГО СИГНАЛА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ

И. А. Андронова

При периодической переполяризации сегнетоэлектриков ток, протекающий через сегнетоэлектрик, имеет сложный дискретно-сплошной спектр: он содержит гармоники частоты переполяризации и сплошную составляющую (шум), наличие которой связано с нестрогой повторяемостью процесса переполяризации. Исследование шумовой составляющей спектра на частотах, достаточном ($\geq 1 \text{ кгц}$) удаленных от гармоник частоты переполяризации, посвящены работы [1]. При приближении частоты наблюдения к гармоникам частоты переполяризации имеет место сильный рост спектральной плотности шума. Причиной этого являются сравнительно медленные флюктуации параметров сегнетоэлектрических образцов.

Для устройств, содержащих сегнетоматериалы (усилители, модуляторы, умножители частоты), существенен сплошной спектр для частот наблюдения, сравнительно близко примыкающих к гармоникам частоты переполяризации (обычно к первой гармонике). Результатом исследования сплошного спектра в диапазоне частот наблюдения, сопредоточенных вблизи первой гармоники частоты переполяризации, и посвящена настоящая заметка. Измерения проводились с образцами варикондов двух типов ВК-1 и 8z(BaTiO₃ + 8% ZrO₂) при частоте переполяризации $F \simeq 20 \text{ кгц}$. Режимы переполяризации образцов в описываемых опытах выбирались таким образом, чтобы в дальнейшем можно было проводить сравнение с результатами измерения шума динамического усилителя.

В качестве источника переполяризующего напряжения применялся специально построенный малошумящий генератор (в схеме применялись трансформаторы без железа), питание которого осуществлялось от аккумуляторов. При исследовании шума вблизи первой гармоники интервал частот наблюдения оказался удобным разбить на два: первый интервал вблизи самой линии в полосе примерно 1 герц и второй интервал от $\sim 20 \text{ гц}$ до $2 - 3 \text{ кгц}$.

В обоих случаях для измерения шума применялась мостовая схема, описанная в [1]. При исследовании спектра шума в интервале от 20 гц до 3 кгц частично скомпенсированное напряжение первой гармоники с выхода мостовой схемы поступало на усилитель, пропускающий полосу частот, примыкающую к частоте переполяризации ($\pm 3 \text{ кгц}$); далее следовал детектор и узкополосный спектр-анализатор на диапазон от 20 гц до 16 кгц с полосой 4 гц .

Результаты измерений приведены на рис. 1, где по оси абсцисс отложена в логарифмическом масштабе частота наблюдения, отсчитанная от частоты 1-й гармоники (Δf), а по оси ординат (также в логарифмическом масштабе) отложен корень квадратный из спектральной плотности шума G . Из рисунка видно, что спектральная плотность резко растет при приближении к первой гармонике частоты переполяризации величина G хорошо аппроксимируется законом $A(\Delta f)^{-a}$, где a близко к 1, 2, $A \simeq 9.2 \cdot 10^{-16^*}$. Как известно, подобным законом аппроксимируются низкочастотные флюктуации во многих физических объектах (фликкер-эффект ламп, шум детекторов).

Для измерения шума, непосредственно примыкающего к гармонике (в полосе около 1 гц^{**}), в значительной степени скомпенсированное напряжение первой гармоники частоты переполяризации с мостовой схемы подавалось на узкополосный анализатор, настроенный на эту частоту. Выход анализатора через детектор был соединен с самописцем.

Если бы подаваемый на анализатор сигнал содержал только дискретную гармонику, то выход самописца оставался бы во время опыта постоянным. Наличие сплошного спектра, примыкающего к гармонике, приводит к хаотическим колебаниям показаний самописца.

Для количественной характеристики подобных «уходов» определялась величина отношения $\bar{J}_t^2 / (\bar{J})^2$, где J — эффективное значение тока, а \bar{J}_t^2 — средний квадрат отклонений тока от J за время t . Численная величина этого отношения (за время $\sim 10 \text{ мин}$) для исследованных образцов примерно одинакова и равна 10^{-10} . Это отношение мало меняется (слегка падает) с ростом частоты переполяризации. При этом абсолютные величины $(\bar{J})^2$ и \bar{J}_t^2 растут с ростом частоты переполяризации примерно пропорционально квадрату частоты. Для сравнения мощности спектра «уходов» вблизи первой гармоники с мощностью шумового спектра между гармониками (в той

* Замена сегнетоэлектрика линейным конденсатором (для контроля) дала значительно меньшее значение спектральной плотности (см. кривую 2 на рис. 1).

** Этую часть спектра будем называть «медленными уходами гармоник». Такая терминология была введена для описания спектра шума вблизи гармоник, возникающей при периодическом перемагничивании ферромагнитных материалов.

частот, где спектральная плотность мало изменяется) была проведена оценка отношения $\bar{J}_t^2/G(f)F$: оказалось, что это отношение составляет $10 \div 40$.

Кроме указанных «уходов» наблюдается медленный монотонный дрейф уровня первой гармоники, который становится заметным (на фоне «уходов») при времени наблюдения, превышающем 10 мин. Наблюдения показали, что такие факторы, как время приложения постоянного и переменного напряжения*, температура и предыстория состояния образца, влияют на скорость дрейфа. Окончательно эти вопросы нельзя считать выясненными. Отметим только, что процессы медленного монотонного изменения параметров сегнетоконденсаторов известны в литературе (например, процессы старения [2]).

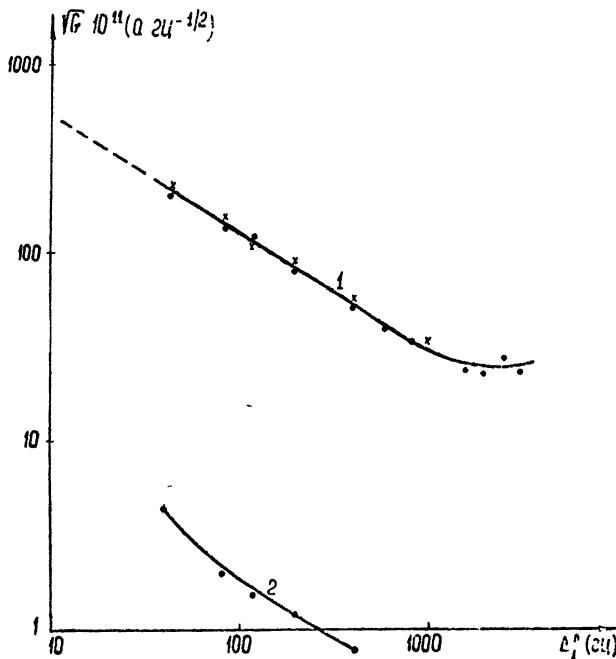


Рис. 1. Шумовой спектр вблизи первой гармоники частоты переполяризации:

— — данные, полученные в мостовой схеме; $\times \times \times$ — данные, полученные по шуму диэлектрического усилителя

$$(F = 23,6 \text{ кГц}, E_{\sim} = 2,25 \text{ кВ см}^{-1}, E_{\perp} = 2,8 \text{ кВ см}^{-1}).$$

Кривая 1 — сегнетоконденсатор, кривая 2 — линейный конденсатор.

Представляет интерес убедиться в том, что исследованная спектральная плотность сегнетоэлектрических образцов определяет чувствительность диэлектрического усилителя при усилении низкочастотных и квазистационарных сигналов. Для этой цели были проведены измерения шума усилителя, собранного по схеме параллельного резонанса на диапазон усиливаемых частот $20 \div 2000$ Гц при частоте питающего напряжения 20 кГц; экспериментальные результаты сопоставлены с результатами, полученными расчетным путем с использованием шумовых характеристик самих образцов. Этот расчет был проведен, исходя из эквивалентной схемы сегнетоконденсатора [1], построенной по типу эквивалентной схемы диода как источника шума, с учетом конкретных параметров диэлектрического усилителя. Это сравнение дает следующую связь спектральной плотности шума на выходе усилителя $\bar{u}^2(F_h)$ на частоте сигнала F_h с шумом сегнетоконденсатора $G(F + F_h)$ вблизи частоты переполяризующего напряжения:

$$\bar{u}^2(F_h) = [z^2(F + F_h) + z^2(F - F_h)]G(F + F_h)\eta^2(F_h), \quad (1)$$

где $z(F \pm F_h)$ — импеданс контура диэлектрического усилителя на частотах $F \pm F_h$, а $\eta(F_h)$ — коэффициент передачи выходного детектора в схеме диэлектрического усилителя.

* В описываемых опытах время приложения напряжения доходило до 10 часов.

Численные сравнения шума усилителя и шума, рассчитанного по формуле (1), дали в пределах точности измерений ($15 \pm 20\%$) хорошее совпадение результатов. На рис. 1 крестиками отмечены значения G , полученные из данных шума диэлектрического усилителя.

Таким образом, рост шума усилителя при понижении частоты сигнала связан с флюктуациями используемых в схеме сгнётоконденсаторов.

Для характеристики порядков величин приведем некоторые количественные данные. Для рассматриваемой схемы усилителя пороговый сигнал (при полосе на выходе 1 гц) на частоте 2000 гц составляет 0,1 мкв, а на частоте 40 гц — 10 мкв. Для того, чтобы оценить пороговый сигнал диэлектрического усилителя при усиливании квазистоянных напряжений, надо учитывать медленные уходы первой гармоники частоты переполяризации. Последние приводят к случайным «блужданиям нуля» на выходе усилителя (после детектора) в отсутствие сигнала и тем самым определяют пороговый сигнал усилителя при усиливании квазистоянных напряжений*. Проведенные оценки с учетом «медленных уходов» дают для этого случая $\mu_{\text{пор}} \approx 400 \text{ мкв}^{**}$.

Из приведенных оценок видно, что уходы и дрейф резко ухудшают чувствительность диэлектрического усилителя при усиливании низкочастотных и квазистоянных сигналов. С аналогичными трудностями приходится сталкиваться при работе с ламповыми и магнитными усилителями.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Андронова, ДАН СССР, 119, 68 (1958); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 90 (1961).
2. Д. М. Казарновский, Электричество, 2, 40 (1954).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 апреля 1963 г

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ ШИРИНЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ КЛИСТРОННОГО ГЕНЕРАТОРА

А. Н. Малахов, В. С. Серебрянников

В настоящей заметке излагаются результаты экспериментального исследования флюктуаций частоты кристаллического генератора. Измерения спектральной плотности флюктуаций частоты генератора проводились методом Берштейна [1]. Блок-схема экспериментальной установки аналогична описанной в работе [2]. Применяемый анализатор спектра позволял производить измерения спектральной плотности на фиксированных частотах в диапазоне от 100 гц до 20 кгц. Анализатор состоял из широкополосного усилителя и набора узкополосных фильтров. Напряжение на выходе анализатора измерялось специальным вольтметром, постоянная времени которого была увеличена до трех секунд. Отсутствие помех контролировалось при помощи осциллографа, включенного на выходе широкополосного усилителя. Обработка результатов измерения проводилась по формулам, приведенным в работе [3].

Колебания исследуемого генератора можно записать в виде

$$x(t) = A_0[1 + \alpha(t)] \cos(\omega_0 t + \int \gamma(t) dt),$$

здесь флюктуации амплитуды и частоты генератора $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ — случайные стационарные процессы, имеющие гауссово распределение при условии, что $\bar{\alpha} = \bar{\gamma} = 0$; $\bar{\alpha^2} \ll 1$; $\bar{\gamma^2} \ll \omega_0^2$ (черта сверху означает статистическое усреднение). Подав эти колебания на дискриминатор, на выходе последнего будем иметь:

$$y(t) = B_0[1 + \beta(t)] \cos(\omega_0 t + \int \gamma_1(t) dt),$$

* Аналогичное явление наблюдается при исследовании магнитных усилителей постоянного тока, работающих на второй гармонике [3]. В этом случае играют роль уходы второй гармоники частоты перемагничивания

** Такое значение было получено без учета монотонного дрейфа. При времени измерения больше 10 мкс для оценки порогового сигнала надо учитывать также дрейф.

где $\beta(t)$ и $\nu_1(t)$ — флюктуации амплитуды и частоты выходного колебания. Как показано в работе [3], измеряя спектральную плотность амплитудных флюктуаций выходного колебания $W_\beta(f, n)$ в зависимости от n параметра, определяющего настройку дискриминатора, можно определить спектральные плотности амплитудных и частотных флюктуаций входного колебания: $W_\alpha(f)$, $W_\nu(f)$, $W_{\alpha\nu}(f) = W_{\alpha\nu}^0(f) + W'_{\alpha\nu}(f)$ (здесь $W_{\alpha\nu}^0(f)$ и $W'_{\alpha\nu}(f)$ — четная и нечетная части спектральной плотности $W_{\alpha\nu}(f)$, соответствующей смешанной функции корреляции $\Phi_{\alpha\nu}(\tau) = \alpha(t)\nu(t+\tau)$). Существование $W_{\alpha\nu}(f)$ говорит о наличии корреляции между $\alpha(t)$ и $\nu(t)$.

Результаты экспериментов. В наших экспериментах изучались флюктуации кластрона, работающего на частоте $f_0 = 9,1 \cdot 10^9$ Гц ($\lambda = 3,3$ см). Линия задержки имела время задержки $\tau_0 = 3,5 \cdot 10^{-8}$ сек и эквивалентную добротность $Q_d = \omega_0 \tau_0 = 2,00$.

При измерении флюктуаций использовался специально подобранный по малым шумам детектор. Напряжение на детекторе, обусловленное частотными флюктуациями, было много больше шумов детектора и анализатора. Амплитудные флюктуации были измерены совместно с шумами детектора. Чтобы при расчете можно было использовать формулы, выведенные в [3], амплитуда колебания, поступающего на детектор при измерении амплитудных флюктуаций, подбиралась так, чтобы ток детектора совпал по величине с током при измерении частотных флюктуаций.

Эксперименты велись для седьмой и восьмой зон генерации кластрона со стабилизированным питанием. Анализатором спектра непосредственно измерялись величины $W_\beta(f, n)$ для значений n , лежащих в пределах от 6 до 7. Измеренные спектральные плотности указаны на рис. 1. По этим спектральным плотностям определялись

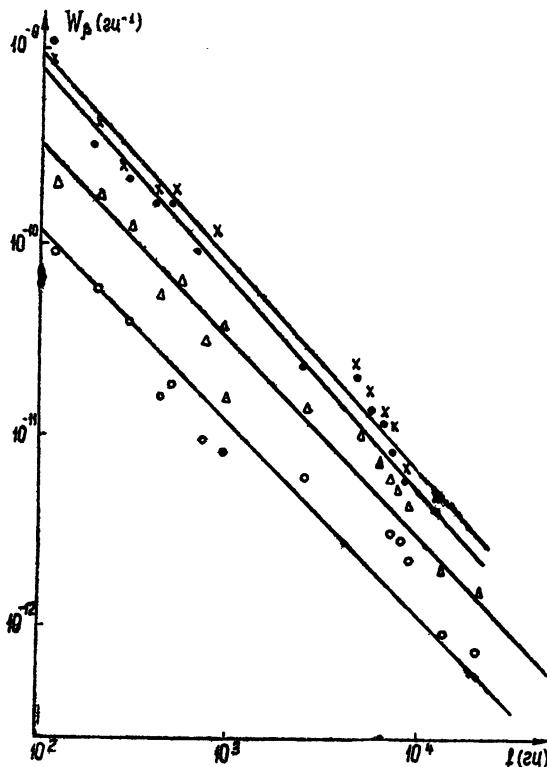


Рис. 1. Зависимость W_β от f .

Зона № 7: $\Delta\Delta\Delta - W_\beta(f_1 + n)$, $\circ\circ\circ - W_\beta(f_1 - n)$, $u_{\text{отр}} = 108$ в.

Зона № 8: $\times\times\times - W_\beta(f_1 + n)$, $\bullet\bullet\bullet - W_\beta(f_1 - n)$, $u_{\text{отр}} = 68$ в.

спектральные плотности $W_\nu(f)$ и $W_{\alpha\nu}^0(f)$. Величина $W'_{\alpha\nu}(f)$ получилась значительно меньше, чем $W_{\alpha\nu}^0(f)$. Тем самым можно утверждать, что для кластронного генератора корреляция между амплитудными и частотными флюктуациями является четной. Спектральную плотность $W_\alpha(f)$ в наших экспериментах мы найти не могли, так как

не предпринимали специальных мер для отделения амплитудных флуктуаций кристалла от шумов детектора. Вычисленные спектральные плотности $W_v(f)$ и $W_{av}^0(f)$ изображены на рис. 2, 3.

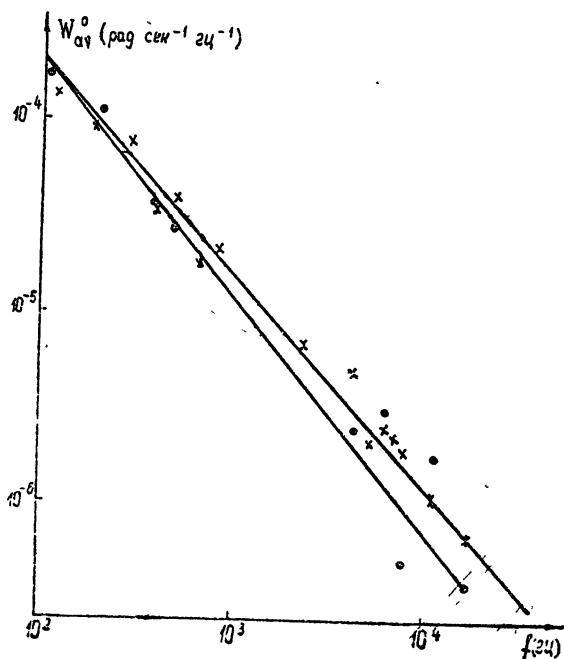


Рис. 2. Зависимость W_{av}^0 от f :

$\times \times \times$ — зона № 7, $\bullet \bullet \bullet$ — зона № 8.

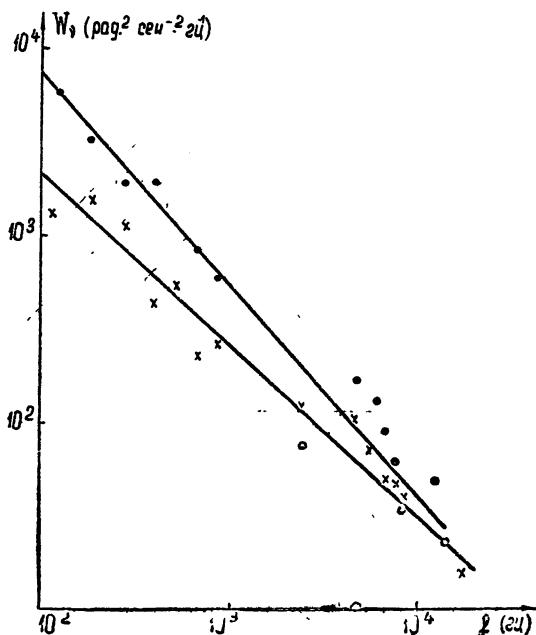


Рис. 3. Зависимость W_v от f :

$\times \times \times$ — зона № 7, $\bullet \bullet \bullet$ — зона № 8.

Вид кривой $W_v(f)$ дает возможность описать ее зависимость $W_v(f) = A/f^\alpha$. Относительную техническую ширину линии определяем из следующего выражения [3]:

$$\delta f = \frac{\sqrt{2}}{f_0 \pi} \left[\int_0^{\infty} W_v(f) df \right]^{1/2}.$$

Заменив пределы интегрирования на 1 гц и 20 кгц, получим значение δf за время порядка 1 секунды. Результаты измерения дали для седьмой зоны значения $A = -2,6 \cdot 10^5 \text{ рад}^2 \cdot \text{сек}^{-2}$, $\alpha = 0,95$ и относительную ширину линии $\delta f = 8,8 \cdot 10^{-8}$. Для восьмой зоны генерации $A = 1,2 \cdot 10^6 \text{ рад}^2 \cdot \text{сек}^{-2}$, $\alpha = 1,1$, $\delta f = 1,4 \cdot 10^{-7}$. Таким образом, относительная техническая ширина линии генераторов на лампах с оксидным катодом на частотах 10^{10} гц (так же, как и на низких частотах; см. [3]) равна по порядку величины 10^{-7} .

В заключение авторы считают своим долгом выразить благодарность Л. М. Волынкиной, принимавшей большое участие в проведении измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 145 (1950).
2. В. С. Троицкий, В. В. Хрулев, Радиотехника и электроника, 1, 832 (1956).
3. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, Т. Д. Разина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1052 (1961).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
10 февраля 1963 г.

К СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МАГНЕТРОНА С ВНУТРЕННИМ КАТОДОМ

B. E. Белов

Дифференциальные уравнения, описывающие движение электрона в цилиндрическом магнетроне, в силу трудностей, связанных с их интегрированием, пока не имеют точного аналитического решения. Поэтому при работе магнетрона в режиме $H \geq H_{kp}$ можно предположить самые разнообразные решения, соответствующие различным формами траекторий электронов. В зависимости от формы траектории разбиваются на два типа:

1) траектории электронов — концентрические окружности, что соответствует $I = 0$, где I — полный ток от катода к аноду (режим Бриллюэна);

2) траектории электронов имеют петлеобразный характер, что соответствует $I \neq 0$ (двухпоточный режим).

Вопрос о выборе режима работы имеет принципиальное значение в теории магнетрона; разрешению его посвящен целый ряд работ. Делакруа [1], интерпретируя результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, показал, что при небольших отношениях радиуса анода к радиусу катода ($r_a/r_k < 2$) возможен только режим Бриллюэна. В работах [2—4] из качественного анализа полученных при определенных приближениях дифференциальных уравнений также делается вывод о том, что в магнитном поле, большем критического, при $r_a/r_k < 2,271$ возможно движение электронов лишь по концентрическим окружностям. В [5] сформулирована задача, поставленная Г. А. Гринбергом,— исследовать изменение формы траектории электрона при переходе от плоского к почти плоскому магнетрону (отношение радиуса катода к радиусу анода близко к единице). Форма траектории электрона в плоском случае была найдена Брауде [7, 8]. Эта задача различными методами решалась Поплавским [6] и Мойжесом [5]. Последний, в противоположность [6], доказывает отсутствие радиального движения электронов при $H \geq H_{kp}$, для магнетрона, близкого к плоскому.

Методы качественного исследования, использованные в работах [2—6], основывались на различного рода упрощениях основных дифференциальных уравнений, движении электронов и оценке их интегралов. В настоящей работе предпринят качественный анализ дифференциальных уравнений задачи без какого-либо их упрощения.

Движение электрона в цилиндрическом магнетроне с учетом пространственного заряда описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -4\pi\rho; \quad (1)$$

$$2\pi rr\rho = -I; \quad (2)$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = \frac{eH}{c} \dot{r}; \quad (3)$$

$$\frac{2e}{m} \dot{\varphi} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\dot{r} = \ddot{r} = \dot{\theta} = \theta = 0 \quad \text{при } r = r_k \quad (5)$$

(r_k — радиус катода).

С помощью простых преобразований система (1)–(4) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению, которое в переменных $\xi = r/r_k$, $\tau = \omega t$ записывается так

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\xi^2}{d\xi} \right) = \frac{a}{\xi} - \left(\xi + \frac{1}{\xi^3} \right) \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\xi^2|_{\xi=1} = d\xi^2/d\xi|_{\xi=1} = 0, \quad (7)$$

где $a = 4eI/m\omega^3 r_k^2$, $\omega = eH/mc$, $1 < \xi < \xi_{kp} = r_{kp}/r_k$ (r_{kp} — критический радиус, при котором $\dot{r}^2 = 0$).

Предположение о наличии радиального движения электронов при $H > H_{kp}$ соответствует предположению о том, что функция $\xi^2 = f(\xi)$ положительна и отлична от нуля в интервале $[1, \xi_{kp}]$, за исключением, может быть, ограниченного числа точек. Функция $f(\xi)$ может иметь: а) один максимум; б) два и более максимумов и соответствующее число минимумов, причем в точках минимума $f'(\xi) > 0$.

На основании этих сведений о зависимости $\xi^2 = f(\xi)$ в случае двухпоточного режима исследуем, насколько она совместима с уравнением (6). Для этого применим метод, использованный в работе [9].

1. Предположим, что функция $\xi^2 = f(\xi)$ имеет один экстремум ξ_m^2 в некоторой точке ξ_m (случай а) и проходит через нуль при некотором значении $\xi = \xi_{kp}$. В точках $\xi_1 < \xi_m$ и $\xi_2 > \xi_m$, удовлетворяющих условию $f(\xi_1) = f(\xi_2)$, возьмем разность выражений $\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\xi^2}{d\xi} \right)$, определяемых из (6):

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\xi^2}{d\xi} \right) \right]_1 - \left[\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\xi^2}{d\xi} \right) \right]_2 = - \left(\xi_1 + \frac{1}{\xi_1^3} - \xi_2 - \frac{1}{\xi_2^3} \right). \quad (8)$$

Анализируя функцию $\Phi(\xi) = \xi + \frac{1}{\xi^3}$, находим, что при изменении ξ от 1 до ∞ функция $\Phi(\xi)$ сначала убывает, достигает своего минимального значения при $\xi = 3^{1/4}$, после чего стремится к бесконечности вместе с ξ . Отсюда можно утверждать на основании (8), что, по крайней мере, при $\xi_{kp} < 3^{1/4}$ для всех ξ_1 и ξ_2 будет справедливо следующее неравенство:

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\xi^2}{d\xi} \right) \right]_1 < \left[\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\xi^2}{d\xi} \right) \right]_2. \quad (9)$$

Таким образом, величину $\frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\xi^2}{d\xi} \right)$ можно рассматривать в данном случае как двухзначную функцию ξ^2 , вегда которой связаны неравенством (9).

Умножим (9) на $d\xi^2$ и пройдем интегрирование слева и справа в пределах от $\xi^2|_{\xi=\xi_1}$ до $\xi^2|_{\xi=\xi_m}$. В результате получим

$$\xi_1 \left(\frac{d \dot{\xi}^2}{d \xi} \right)_1^2 > \xi_2 \left(\frac{d \dot{\xi}^2}{d \xi} \right)_2^2 + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\frac{d \dot{\xi}^2}{d \xi} \right)^2 d \xi. \quad (10)$$

Неравенство (10), как это следует из его вывода, справедливо для всех ξ_1 и ξ_2 , соответствующих различным $\dot{\xi}^2 < \dot{\xi}_m^2$, в том числе и для точек $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = \xi_{kp}$, в которых $\dot{\xi}^2 = 0$. Принимая во внимание тот факт, что при $\xi_1 = 1$ $\dot{\xi}^2 = \left(\frac{d \dot{\xi}^2}{d \xi} \right) = 0$ (начальные условия), для $\dot{\xi}^2 = 0$ имеем

$$0 > \xi_{kp} \left(\frac{d \dot{\xi}^2}{d \xi} \right)_{kp}^2 + \int_1^{\xi_{kp}} \left(\frac{d \dot{\xi}^2}{d \xi} \right)^2 d \xi,$$

что является противоречием, ибо в правой части этого неравенства стоит положительная величина. Это свидетельствует о том, что сделанное предположение о характере функции $\dot{\xi}^2 = f(\xi)$ не может быть принято.

2. Предположим, что функция $\dot{\xi}^2 = f(\xi)$ имеет произвольное число экстремумов (случай б). Здесь мы можем выбрать для исследования часть кривой $\dot{\xi}^2 = f(\xi)$, определенную в интервале $[\xi_{\min}, \xi'_2]$, где ξ_{\min} — координата последнего минимума, а ξ'_2 — координата последней точки, в которой $f(\xi'_2) = f(\xi_{\min})$, причем $\xi'_2 < \xi_{kp}$.

В области значений $\xi_{kp} < \xi^2 < 3^{1/4}$ в этом случае будет справедливо неравенство (9) для всех ξ_1 и ξ_2 из указанного интервала, которые удовлетворяют условию $f(\xi_1) = f(\xi_2)$.

Величину $\frac{d}{d \xi} \left(\xi \frac{d \dot{\xi}^2}{d \xi} \right)$ в интервале $[\xi_{\min}, \xi'_2]$ снова можно рассматривать как двухзначную функцию $\dot{\xi}^2$, ветви которой связаны тем же неравенством (9). Обозначив через $\dot{\xi}_m^2$ значение последнего максимума функции $f(\xi)$, проинтегрируем (9), умноженное на $d \dot{\xi}^2$, слева и справа в пределах от $\dot{\xi}^2 \Big|_{\xi=\xi_{\min}}$ до $\dot{\xi}^2 \Big|_{\xi=\xi'_2}$. Получаем выражение

(10) с заменой ξ_1 через ξ_{\min} и ξ_2 через ξ'_2 , что приводит нас к такому же, как и в случае а, противоречию.

На основании проведенных выше рассуждений можно сделать следующий вывод: предположение о наличии радиального движения электронов в режиме $H > H_{kp}$ по крайней мере, в интервале значений $1 < r_{kp}/r_k < 3^{1/4}$ противоречит основной системе уравнений (1)–(4) при начальных условиях (5) и потому не может быть принято. Следовательно, единственным возможным решением в этом случае является режим Бриллюэна.

В заключение выражаю благодарность С В Беллюстину за постоянный интерес и ценные обсуждения настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. L. Delcroix, Ann. Phys., 9, 269 (1954).
2. L. Brillouin, F. Bloch, Adyances in Electronics, 3, 145 (1951).
3. Магнетроны сантиметровых волн, ч. I, изд. Сов. радио, М., 1954.
- 4 Электронные лампы, ч. II, изд. Сов. радио, М., 1954.
5. Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 26, 1836 (1956).
6. Р. П. Поплавский, ЖЭТФ, 25, 162 (1953).
7. С. Я. Брауде, ЖЭТФ, 5, 621 (1935).
8. С. Я. Брауде, ЖЭТФ, 10, 217 (1940).
9. Г. К. Иванова, ЖТФ, 29, 1068 (1959).

Поступила в редакцию
13 февраля 1963 г.

УЧЕТ НИЖНЕГО ЗАГИБА НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ КОЛЕБАНИЯХ В КОНТУРЕ С АСИММЕТРИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

A. B. Турек

Расчет нелинейных колебаний в асимметричном контуре с сегнетоэлектриком выполнен в работе [1] без учета гистерезиса и нижнего загиба нелинейной характеристики. В настоящем сообщении указан метод, позволяющий избавиться от этих ограничений.

При одновременном приложении к сегнетоэлектрику переменного и постоянного полей напряжение U и заряд q изменяются по асимметричному частному циклу (рис. 1), параметры которого зависят как от амплитуды, так и от формы приложенного напряжения. В связи с тем, что нас будут интересовать только гармонические колебания, учет нелинейности сводится к выделению нечетной части асимметричного цикла. Основная идея предлагаемого метода заключается в замене упомянутой операции введением (по аналогии с ферромагнетиками [2]) пульсационной емкости $C_p = \Delta q / \Delta U$ и соответственно пульсационной диэлектрической проницаемости. При таком подходе нелинейные свойства сегнетоэлектрика описываются с помощью семейства пульсационных характеристик $U = f(q, U_0)$, где $U = \Delta U / 2$, а $q = \Delta q / 2$. Каждая из этих характеристик, приведенных на рис. 1 для керамического образца $\text{BaTiO}_3 - \text{BaSnO}_3$, соответствует определенному значению постоянного напряжения U_0 . Использование характеристик рис. 1 позволяет рассчитывать резонансные кривые рассмотренного в [1] контура в предположении, что пульсационные характеристики не зависят от формы колебаний. Для керамических сегнетоэлектриков на основе титаната бария такое приближение приемлемо.

Учет гистерезиса при гармонических колебаниях сводится к введению, по аналогии с [3], эллипса потерь, площадь которого равна площади S петли гистерезиса, большая полуось a равна амплитуде гармонических колебаний, а малая полуось $S(a) / \pi a$ определяет дополнительное напряжение, опережающее заряд на $\pi/2$ и обуславливающее гистерезисные потери. Функция $S(a)$ для рассматриваемых сегнетоэлектриков почти не зависит от постоянного напряжения (рис. 2), но в случае необходимости эту зависимость легко учесть.

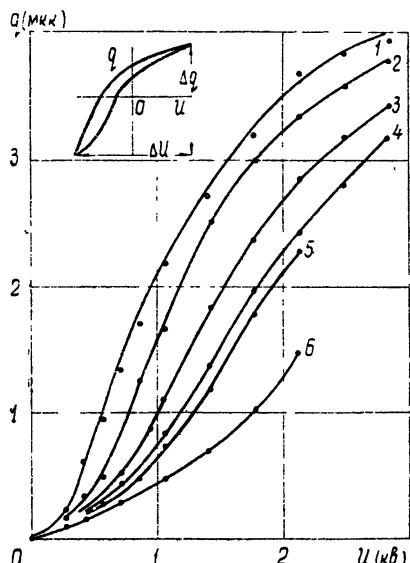


Рис. 1.

Рис. 1. Пульсационные характеристики сегнетоэлектрика при различных постоянных напряжениях U_0 :

1— $U_0=0$; 2— $U_0=0.25$ кв; 3— $U_0=0.5$ кв; 4— $U_0=0.75$ кв; 5— $U_0=1.0$ кв; 6— $U_0=1.5$ кв

Рис. 2. Зависимость площади гистерезисных петель от амплитуды заряда:

●●●— $U_0=0$; ○○○— $U_0=0.25$ кв; △△△— $U_0=0.5$ кв; □□□— $U_0=0.75$ кв;
▲▲▲— $U_0=1.0$ кв; ×××— $U_0=1.5$ кв

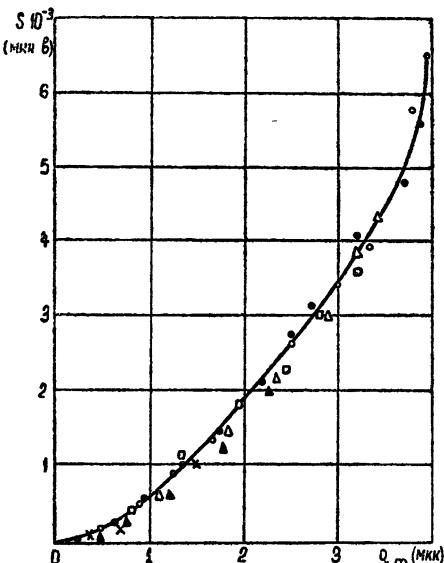


Рис. 2.

При сделанных выше предположениях уравнение гармонических колебаний $[q=a \cos(\omega t)]$ в контуре [1] приводится к виду

$$-L\omega^2 a \cos(\omega t) + f(a, U_0) \cos(\omega t) - \frac{S(a)}{\pi a} \sin(\omega t) = U_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} -L\omega^2 a + f(a, U_0) &= U_m \cos \varphi, \\ S(a)/\pi a &= U_m \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2)$$

Исключив из (2) φ , получим уравнение резонансных кривых

$$\omega^2 = \frac{f(a, U_0)}{La} \pm \frac{1}{La} \sqrt{U_m^2 - \left[\frac{S(a)}{\pi a} \right]^2}, \quad (3)$$

для построения которых достаточно графического задания $f(a, U_0)$ и $S(a)$. Таким образом, мы получаем возможность избежать трудностей, связанных с аналитической аппроксимацией частных циклов, и без труда учесть нижний загиб нелинейной характеристики и гистерезис.

На рис. 3 показаны резонансные кривые последовательного контура, построенные с помощью характеристик рис 1 и 2 (пунктир), а также кривые собственных

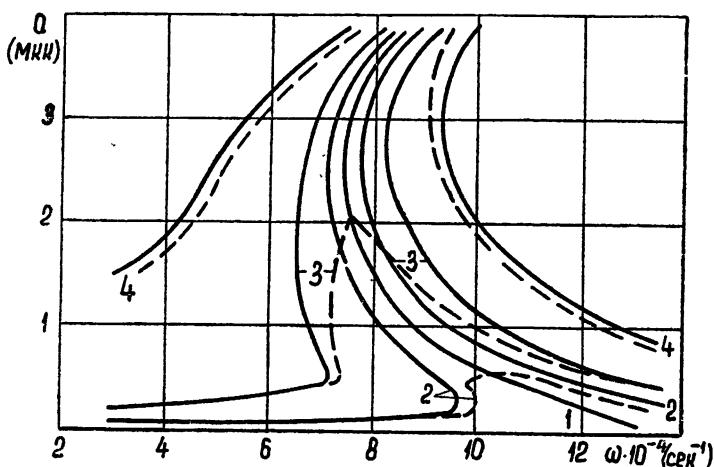


Рис. 3. Кривые собственных (1) и вынужденных (2—4) колебаний последовательного контура с сегнетоэлектриком ($U_0 = 0,25$ кв):
1— $U_m = 0$, $S(a) = 0$, 2— $U_m = 100$ в, 3— $U_m = 300$ в, 4— $U_m = 800$ в.

и вынужденных колебаний, построенные без учета гистерезиса (сплошные линии). При малых амплитудах a кривая собственных колебаний имеет мягкий характер — следствие учета нижнего загиба характеристики. Роль гистерезисного демпфирования особенно велика при малых величинах входных напряжений U_m , причем гистерезисные потери не только ограничивают амплитуды колебаний, но и сильно сглаживают нелинейные эффекты, связанные со скачками амплитуд

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Турик, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1037 (1962).
2. В. Е. Скобелев, Изв. высш. уч. зав.—Электромеханика, № 3, 243 (1962).
3. Я Г. Пановко, ЖТФ, 23, 486 (1953).

К РАСЧЕТУ ВОЛНОВОЙ ПРОВОДИМОСТИ ЭКРАНИРОВАННОЙ МНОГОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ПРОВОДНИКАМИ

И. Ш. Белуга

В работе [1] получено выражение для волновой проводимости $M(\varphi)$ периодической многопроводной линии, показанной на рис. 1. Оно имеет вид

$$M(\varphi) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{p}{l} + C'_k + C''_k \right), \quad (1)$$

где „краевая емкость“ $C'_k (C''_k)$ зависит только от разности фаз φ потенциалов соседних проводников и от отношений размеров $\mu = l/L$, $\eta' = 2W'/L$ (соответственно от $\eta'' = 2W''/L$). Формулы для краевых емкостей были найдены при $p/l = \infty$. Цель настоящего сообщения — привести формулу для поправки к (1), обусловленной конечностью p/l .

Волновая проводимость $M(\varphi)$ может быть представлена в виде [2]

$$M(\varphi) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[\gamma_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 4 \sin^2 \left(\frac{m\varphi}{2} \right) \frac{\gamma_m}{\epsilon_0} \right], \quad (2)$$

где γ_0 — емкость между проводником и электрическими экранами, γ_m — емкость между нулевым и m -ым проводником.

Эти емкости можно представить в виде суммы:

$$\gamma_m = \gamma'_m + \gamma''_m \quad (m \neq 1), \quad (3)$$

$$\frac{\gamma_1}{\epsilon_0} = \frac{p}{l} + \frac{\gamma'_1}{\epsilon_0} + \frac{\gamma''_1}{\epsilon_0}, \quad (3a)$$

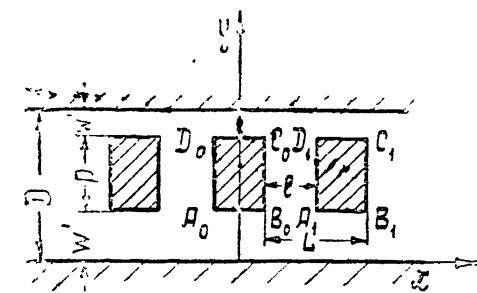


Рис. 1. Поперечное сечение однорядной экранированной многопроводной линии с прямоугольными проводниками. В плоскостях $y=0$ и $y=D$ либо $E_{tg}=0$ („электрический“ экран), либо $H_{tg}=0$ („магнитный“ экран).

где γ'_m , γ'_1 (γ''_m , γ''_1) — емкости между верхними (нижними) частями проводников и верхним (нижним) экраном. Такое разбиение возможно в том случае, когда электростатическая энергия взаимодействия между гранями $A_m B_m$ ($m = 0, \pm 1, \dots$) и экраном $x=0$, с одной стороны, и противоположными гранями $C_m D_m$ и экраном $x=D$, с другой, мала по сравнению с остальной электростатической энергией. В дальнейшем считаем это условие выполненным.

При больших p/l емкости γ_m , γ'_1 (γ''_m , γ''_1) зависят только от параметров μ и η' (μ и η''), что и соответствует формуле (1). По мере уменьшения p/l эти емкости должны уменьшаться за счет уменьшения размера p вертикальных граней $A_m D_m$, $B_m C_m$. Именно это уменьшение и обуславливает искомую поправку к (1). Основную часть поправки вносят изменения емкостей γ_0 и γ'_1 , оценкой которых мы и ограничимся.

Так как энергией взаимодействия противоположных граней и экранов мы пренебрегаем, достаточно рассмотреть случай, когда $W' = W'' \equiv W$, $\eta' = \eta'' \equiv \eta$.

Уменьшение $\Delta\gamma'_0$ емкости γ_0 на экран было подсчитано с помощью конформных отображений для двух крайних случаев: $L = l = 0$ ($\mu = 1$) и $L = l = \infty$. Расхождение между $\Delta\gamma'_0$ в этих крайних случаях составило меньше 6% по отношению к $\gamma_{0\min} = \gamma'_0|_{p=1}$ при

$$p/l > 0,25, \quad (4)$$

$$\xi' = 2W'/l > 1,25 - p/l. \quad (4a)$$

Столь малого расхождения и следовало ожидать, так как $\Delta\gamma'_0$ обусловлено уменьшением энергии взаимодействия между вертикальными гранями и экраном и должно слабо зависеть от размера горизонтальных граней.

¹ В [1] была лишь оценочная ошибка, которая возникает при применении (1) к линии с конечным отношением p/l (в наиболее неблагоприятном случае $L=l$, $\varphi=0$).

Для $\Delta\gamma_0$ при $L - l = \infty$, кроме того, найдена приближенная формула, основанная на расчете уменьшения энергии первой высшей волны в щели $B_0C_0A_1D_1$ при неизменной амплитуде этой волны на входе в щель (вдоль B_0A_1 и C_0D_1). Расхождение между точной и приближенной формулой меньше 1%. Таким образом, можно пользоваться приближенной формулой вида

$$\frac{\Delta\gamma_0}{\epsilon_0} = -\frac{16}{\pi} e^{-\pi[p/l + 0.5f_2(\xi)]}, \quad (5)$$

где

$$f_2(\xi) \approx \frac{2}{\pi} \left[\ln(1 + \xi^2) + 2\xi \operatorname{arctg} \frac{1}{\xi} \right] \quad (5a)$$

$$(\xi' = 2W/l).$$

Изменение γ_{1k} подсчитано в случае $L - l = \infty$. Оно составляет меньше 2% от $\gamma_{1\min} = \gamma_{1\mu=1}$ при наличии „электрических“ экранов в случае (4), (4a) и меньше 1% — при „магнитных“ экранах в случае $p/l > 0.25$. Таким образом, здесь этим изменением можно пренебречь.

Итак, если экран — „магнитный“, то при $p/l > 0.25$ формулы для C_k (т. е. для C'_k или C''_k), приведенные в [4], достаточно точны без поправок. Если экран — „электрический“ и выполнены неравенства (4), (4a), то поправка на конечность p/l сводится к замене

$$4 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) C_k \rightarrow 4 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) C_k - \frac{16}{\pi} e^{-\pi[p/l + 0.5f_2(\xi)]}. \quad (6)$$

При $\xi = 2W/l > 1.25 - p/l$ и отношении $p/l > 0.25; 0.5; 1$ поправка меньше 17.4%, 7.9% и 2.4% соответственно. Если рассчитывать затухание в многопроводной линии по формулам, полученным дифференцированием формул для $M(\varphi)$ (см. [8]), то максимальная поправка для затухания за счет потерь в прямоугольных проводниках составит 50%, 25% и 7% соответственно.

В заключение отметим, что расчет двухпроводных линий типа „прямоугольный проводник в прямоугольном экране“ и „два прямоугольных проводника, симметрично расположенных между двумя экранами“, рассмотренных в [4–6], сводится к расчету рассматриваемой линии (рис. 1) при $\varphi = \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ш. Белуга, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 84 (1959).
2. A. Leblond, G. Mourier, Ann. Radioélectricité, **9**, 180, 311 (1954).
3. И. Ш. Белуга, Электроника, № 8, 3 (1961).
4. T. S. Chen, IRE Trans., MTT-8, 510 (1960).
5. R. V. Garver, IRE Trans., MTT-9, 262 (1961).
6. W. J. Getsinger, IRE Trans., MTT-10, 65 (1962).

Поступила в редакцию
25 января 1963 г.

О ДВУХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И СОСТОЯНИЙ ИХ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

М. Я. Эйнгорин

Известно, что каждому набору двоичных независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}, x_n$, где $x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, может быть геометрически поставлена во взаимно однозначное соответствие одна из вершин n -мерного единичного куба. Общее число вершин этого куба совпадает с числом всех наборов значений n двоичных переменных и равно 2^n . При этом, если учесть, что двоичное переменное x_j , соответствующее

j -му измерению куба, может принимать лишь два значения 0 и 1, то одной (начальной) вершине должно быть приписано значение $x_j=0$ при $j=1, 2, \dots, n$.

Назовем вершины $X_i^0 = \{x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_j}^0, \dots, x_{i_n}^0\}$ и $X_i^1 = \{x_{i_1}^1, x_{i_2}^1, \dots, x_{i_j}^1, \dots, x_{i_n}^1\}$ смежными, если они соединены одним ребром куба. В этом случае все вершины n -мерного единичного куба могут быть объединены в $n+1$ непересекающееся множество $\{X_i^j\}_{j=1, 2, \dots, n+1}$ несмежных вершин. При этом, если нулевое множество $\{X_0^0\}$ имеет одну вершину X_0^0 , то первое множество $\{X_1^0\}$, не пересекающееся с $\{X_0^0\}_0$, имеет $C_n^1 = C_n^1$ вершин, смежных с вершинами множества $\{X_0^0\}_0$, второе множество $\{X_1^1\}_2$, не пересекающееся с $\{X_1^0\}_1$, имеет $C_n^2 = C_n^2$ вершин, смежных с вершинами множества $\{X_1^0\}_1$ и т. д.; последнее аналогично построенное множество $\{X_n^n\}_n$ имеет C_n^n , т. е. также одну вершину, отвечающую коду $x_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, количества вершин в множествах распределены как биноминальные коэффициенты C_n^i при $i=0, 1, 2, \dots, n$. Общее число вершин $N = \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$.

Заметим, что число различных множеств $\{X_i^j\}_{j=1, 2, 3, \dots, n+1}$ в зависимости от того, какая из вершин n -мерного единичного куба выбрана за нулевую, составляет 2^n наборов и равно числу всех вершин куба.

Через все вершины каждого множества $\{X_i^j\}_{j=1, 2, 3, \dots, n+1}$ нашего n -мерного пространства могут быть проведены параллельные плоскости, число которых равно $n+1$. В этом случае нетрудно показать, что в каждой плоскости будут лежать точки X_i^j , которым соответствуют двоичные коды $\{x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_j}^0, \dots, x_{i_n}^0\}$, имеющие постоянное число нулей и единиц.

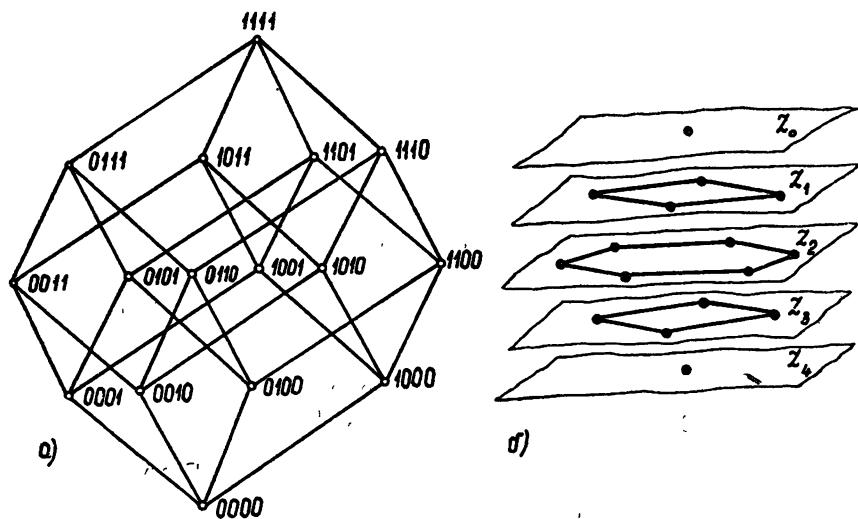


Рис. 1.

Для примера на рис. 1а дана проекция куба с $n=4$, а на рис. 1б даны его пять плоскостей: Z_0 — с одной $\{X_0^0\}_0 = \{(0000)\}_0$, Z_1 — четырьмя $\{X_1^0\}_1 = \{(1000)_1, (0100)_2, (0010)_3, (0001)_4\}_1$, Z_2 — шестью $\{X_2^0\}_2 = \{(1100)_1, (1010)_2, (1001)_3, (0110)_4, (0101)_5, (0011)_6\}_2$, Z_3 — вновь с четырьмя $\{X_3^0\}_3 = \{(1110)_1, (1101)_2, (1111)_3, (0111)_4\}_3$ и Z_4 — с одной $\{X_4^0\}_4 = \{(1111)\}_4$ вершиной.

Может быть установлено взаимно однозначное соответствие между решениями систем уравнений алгебры логики [1-3] вида

$$x_j = f_j(X) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \quad f_j(X) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\},$$

$$x_j(t+\tau) = f_j[X(t)] \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

где

$$x_j(t+\tau) = \begin{cases} 0 & f_j[X(t)] = 0 \\ 1 & \end{cases}$$

$$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)\},$$

и вершинами n -мерного единичного куба. При этом решениям симметричных систем уравнений соответствуют вершины единичного куба, принадлежащие множеству $\{X_i^0\}_j$ и лежащие в его плоскости j .

С другой стороны, известно, что каждому решению указанных представлений систем уравнений также взаимно однозначно соответствует устойчивое состояние физической модели. Следовательно, между устойчивыми состояниями физических моделей и вершинами нашего куба существует взаимно однозначное соответствие.

Так, например, для системы уравнений (см. (2.11) работы [1])

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5; \\ x_2 &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5; \\ x_3 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \\ x_4 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5; \\ x_5 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \end{aligned}$$

плоскость решений или состояний физической модели имеет вид, данный на рис. 2a*. Принудительный переход физической модели системы, например, из состояния (00011)

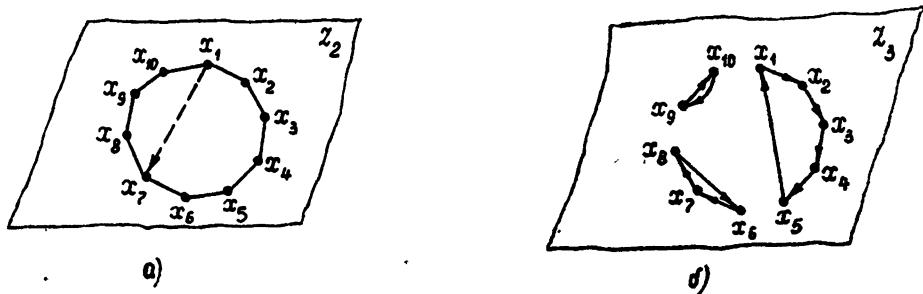


Рис. 2.

в состояние (10001) сопровождается скачком в плоскости состояний Z_2 из точки X_1^0 в точку X_7^0 . Аналогично в зависимости от матрицы переходов для симметричных систем уравнений с запаздыванием переход соответствующих физических моделей из одного состояния в другое характеризуется скачком из данной точки плоскости состояний Z_k в другую. Так, для системы уравнений (см. (2.33) работы [3])

$$x_1 = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \\ \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau},$$

$$x_2 = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \\ \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau};$$

$$x_3 = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \\ \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau};$$

* На рис. 2a и 2б под точкой x_i надо понимать точку X_i^0 .

$$x_4 = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \\ \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\pi};$$

$$x_5 = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \\ \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \rangle_{\tau}.$$

и соответствующей физической модели будем иметь в плоскости состояний Z_3 три замкнутых траектории, представленных на рис. 2б. Для несимметричных систем уравнений переход осуществляется скачком по траектории, проходящей внутри n -мерного куба, соединяющей данные точки разных плоскостей решений (состояний) Z_i и Z_k .

Может быть предложена другая геометрическая интерпретация решений систем уравнений алгебры логики и соответствующих состояний физических моделей этих уравнений. Рассмотрим плоскую систему прямоугольных координат, по оси абсцисс которой отложено число единиц α в n -разрядном двоичном коде (см. рис. 3), а по оси

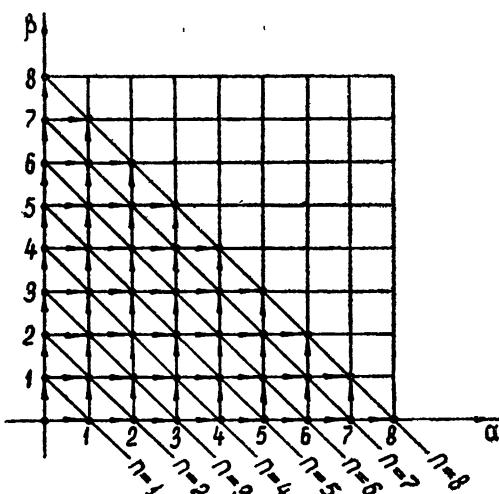


Рис. 3.

ординат — число нулей β в этом же коде, где n , a и β — целые натуральные числа. В этом случае каждому значению числа переменных n будет соответствовать прямая $n=a+\beta$, пересекающая оси абсцисс и ординат через значения числа единиц и нулей — n . На каждой такой прямой будет расположена $n+1$ точка. Каждой точке соответствует значение всех кодов $\{X_i^0\}_{\tau}$, имеющих β нулей и $a=n-\beta$ единиц. Число кодов, соответствующих данной точке, равно числу всех наикратчайших траекторий (решений), соединяющих точку $\{00 \dots 00 \dots 0\}$ с заданной. Число траекторий $N_m = C_n^m$, где m — число единиц (нулей) в коде. Общее число траекторий, подходящих к данной прямой, $N = \sum_{j=0}^n C_n^j = 2^n$.

Таким образом, симметричной системе уравнений (физической модели), имеющей в решениях (состояниях) α единиц, соответствует одна точка $(\alpha, n-\alpha)$ на прямой $n=\text{const}$. Каждому решению (состоянию) такой системы соответствует одна кратчайшая траектория, соединяющая точку $(\alpha, n-\alpha)$ с точкой начала координат. Переход физической модели из одного состояния в другое соответствует (для моделей симметричных систем уравнений) переходу от одной кратчайшей траектории к другой, а в случае несимметричных систем уравнений — переходу от данной траектории прямой $n_i=\text{const}$ с точкой α_j , $n_i-\alpha_j$ к другой траектории этой же прямой $n_i=\text{const}$ с точкой α_l , $n_i-\alpha_l$, отличающейся соотношением числа нулей β и числа единиц α в коде (см. рис. 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 169 (1958).
2. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 588 (1962).
3. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 810 (1963).
4. С. В. Яблонский, Функциональные построения в многозначной логике, Труды МИАН, 51, 158 (1958).
5. Д. Гильберт, В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, М., 1957

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 апреля 1963 г.

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

В доказательстве предложения 5 работы Л. Н. Белюстиной «Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты», опубликованной в № 2 журнала за 1963 г., автором допущена ошибка: не учтены все логические возможности для расположения в пространстве параметров γ , λ , d поверхности двойных циклов II рода (поверхности ε). В результате предложение 5 остается недоказанным. Вследствие этого, установленные в работе качественные структуры рассматриваемой системы для значений параметра $d > 1$ будут справедливы с точностью до четного числа циклов II рода. Такие циклы, если бы они существовали, должны исчезать при уплотнении траекторий с уменьшением параметра d до значения $d = 1$

Л. Н. Белюстина

Поступило в редакцию
14 октября 1963 г.

В статье Р. А. Дудника «К теории лампы с поперечным взаимодействием», опубликованной в № 4 журнала «Радиофизика» за 1963 г. (стр. 765), опущен следующий рисунок.

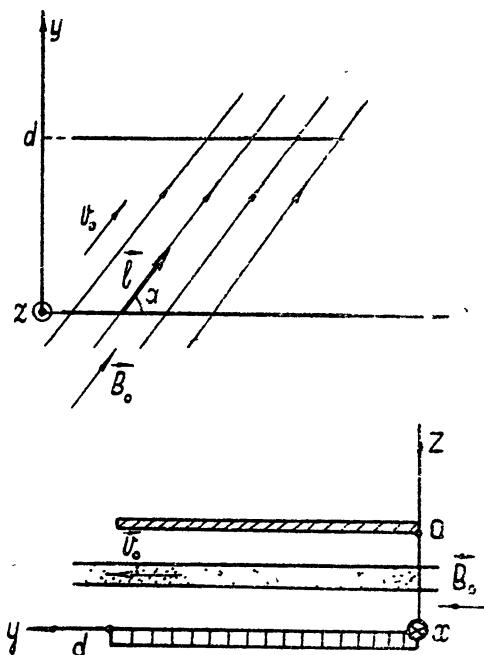


Рис. 1.

Р. А. Дудник

Поступило в редакцию
22 октября 1963 г.