

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ В ЖУРНАЛЕ № 4, 1963 г.

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
771	12 сверху	$h_e = \chi_{0_2}$	$h_e = \chi_{0_2}$
805	10 сверху	$\dots u, v \text{ и } u, v' \dots$	$\dots u, v \text{ и } u, v' \dots$
857	4 снизу	$\dots + 2Jgs \dots$	$\dots + 2jgs \dots$
	3 снизу	$\dots + 2JgsE_1(2\pi DN) \dots$	$\dots + 2jgsE_1(2\pi DN) \dots$

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ В ЖУРНАЛЕ № 5, 1963 г.

885	8 снизу	$\overline{\Pi}_r = \dots \iint_s \dots$	$\overline{\Pi}_r = \dots \iint_s \dots$
910	12 снизу	Пусть $T_{\mu\nu}^{\Theta-M}(x) \dots$	Пусть $T_{\mu\nu}^{\Theta-M}(x) \dots$
931	4 сверху	$\int \dots = \pi/\lambda$	$\int \dots = \pi\lambda$
933	9 снизу	$\frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}_y^2}{\partial x} = \dots$	$\frac{H_{0y}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x} = \dots$
1029	6 сверху	$\dots T_1^{n'i} x_i \in \frac{3}{2}(g) \dots$	$\dots T_1^{n'i} x_i \in \frac{\epsilon}{2}(g) \dots$
1044	12 сверху	$\dots (x^j(t') + \dots - x^{j+1}(t')) > 0).$	$\dots (x^j(t') + \dots - x^{j+1}(t')) \epsilon > 0)$
1050	10 снизу		

СОДЕРЖАНИЕ

Федосеев Л. И. Радиоизлучение Луны и Солнца на волне 1,3 м.м	655
Матвеенко Л. И. Результаты наблюдения радиополяризации Солнца на волне $\lambda=5 \mu$	660
Станкевич К. С., Бондарь Л. Н. О флюктуациях радиоизлучения атмосферы	669
Жевакин С. А., Наумов А. П. О коэффициенте поглощения электромагнитных волн водяными парами в диапазоне $10 \mu \div 2 \text{ см}$	674
Луговой В. Н. Об электродинамических свойствах нестационарной плазмы	695
Силин В. П. Об интеграле столкновений для плазмы	702
Эйдман В. Я. Об электромагнитных волнах в неоднородной среде, пронизывающей потоком плазмы	709
Ловецкий Е. Е., Рухадзе А. А. Низкочастотные колебания холодной магнитоактивной плазмы в поле тяжести	715
Городинский Г. В., Тамойкин В. В. Резонансное излучение заряда, пролетающего вблизи плазменного сгустка	721
Гречишник В. С., Айнбinder Н. Е. Уровни квадрупольной энергии для некоторых спинов	729
Белуга И. Ш. Двухмерно-периодическая многопроводная линия, содержащая N круглых проводников в ячейке	738
Островский Л. А. Модуляция сигналов в линиях передачи с периодически меняющимися параметрами	752
Дудник Р. А. К теории лампы с поперечным взаимодействием	764
Бертулис В. А. Исследование синхротронных колебаний ускоряемых частиц с учетом обратных связей по положению пучка	775
Брусин В. А., Неймарк Ю. И., Фейгин М. И. О некоторых случаях зависимости периодических движений релейной системы от параметров	785
Аронович Г. В. Об устойчивости одной нелинейной динамической системы	801
Эйнгорин М. Я. О синтезе дискретных управляемых устройств на основе систем уравнений алгебры логики с запаздыванием	810
Ашель Н. И., Емельянова И. С. и Постников Л. В. О применении двухполюсника, содержащего туннельный диод и транзистор, в элементах вычислительных устройств	832
Постников Л. В., Ляпухов В. Е. К расчету стабилизатора напряжения на транзисторах	839
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Наумов А. И. Радиоизлучение Луны и Солнца на волне 1,8 м.м	847
Ларионцев Е. Г. и Шафранов В. Д. О торможении радиационным трением заряда, движущегося в плазме, находящейся в магнитном поле	849
Эйдман В. Я. К вопросу о затухании электромагнитных волн в плазме, помещенной в неоднородный диэлектрик	851
Здорнова Е. А., Малахов А. Н. Измерения амплитудных флюктуаций генератора на полупроводниковых триодах	853
Голубенцев А. Ф. О возможности применения метода рядов Квайта к магнетронным усилителям прямой и обратной волн	856
Эйнгорин М. Я. О замкнутых траекториях в рециркуляционных регистрах без сдвига информации	857
Информация	
IV Всесоюзная научная конференция по радиоастрономии	860
Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. III, № 2, 1963	868

РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ ЛУНЫ И СОЛНЦА НА ВОЛНЕ 1,3 мм

Л. И. Федосеев

На волне 1,3 мм с помощью радиотелескопа, ширина диаграммы направленности которого составляла $10 \pm 12'$, измерена температура радиоизлучения центральной части диска Луны в зависимости от ее фазы. Получено, что радиояркость Луны T_L в течение лунации меняется по закону:

$$T_L = [216 + 120 \cos(\Omega t - 16^\circ) + 20 \cos(2\Omega t - 34^\circ) - 6 \cos(3\Omega t - 19^\circ)]^{\circ}\text{К}.$$

Радиотемпература Солнца, измеренная на волне 1,3 мм, оказалась равной $6700 \pm 700^{\circ}\text{К}$.

В последние годы получен обширный материал по радиоизлучению Луны. Однако данным измерений в диапазоне волн от 1,6 см до 8 мм [1-3] довольно хорошо удовлетворяют как однослоистая (однородная) модель строения лунной поверхности, так и двухслойная модель (прозрачный для микрорадиоволн слой материала с низкой теплопроводностью, лежащий на твердой подложке с более высокой теплопроводимостью [4]). Чтобы получить сведения о слоях лунной почвы, прилегающих к предполагаемому слою с низкой теплопроводностью, необходимо измерять радиоизлучение Луны на возможно более коротких волнах. Такие измерения были выполнены Кисляковым на волне 4 мм [5] и Синтоном на волне 1,5 мм [6].

Результаты работы [6] находятся в хорошем соответствии с однородной моделью лунной поверхности. Вообще, как доказано в [7], невозможно подобрать параметры двухслойной модели, чтобы удовлетворить совокупности данных в широком интервале волн от 4 мм до 3,2 см [1-3, 5, 8, 9]. Что касается измерений Синтона, то обработка их результатов весьма затруднительна, так как на протяжении лунного цикла сделано лишь несколько измерений, причем диапазон принимаемых волн простирается примерно от 0,7 до $2,5 \div 3$ мм, что также усложняет интерпретацию результатов. Поэтому было целесообразно измерить радиоизлучение Луны на какой-либо из волн этого диапазона.

Для измерений была выбрана длина волны $\lambda = 1,3$ мм (полоса принимаемых частот примерно $\pm 10\%$ от средней частоты), соответствующая одному из минимумов атмосферного поглощения [10]. Место наблюдений — урочище Чечекты (Восточный Памир) находилось на высоте 3860 м над уровнем моря, что также позволило значительно снизить влияние поглощения в атмосфере на точность результатов.

Наблюдения велись с помощью радиотелескопа, диаграмма направленности которого имела ширину $10 \div 12'$ (по уровню половинной мощности). Наличие такой узкой диаграммы направленности позволяет считать, что измерялась яркостная температура центральной части лунного диска.

1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ

При измерении радиояркости Луны и Солнца калибровка производилась по методу, описанному в работе [5]. При этом антенна направлялась сначала на центр Луны или Солнца, затем на участок неба

рядом с источником излучения под тем же углом к горизонту, что и источник, и, наконец, на „черную“ область с температурой, равной температуре окружающего воздуха T_0 (в качестве такой области использовался один и тот же не освещаемый Солнцем склон горы). Пусть для каждого из этих положений антенны радиотелескопа выходной сигнал равен соответственно α_i , α_n и α_0 . Как показано в [5], температура источника T_i может быть выражена через эти величины следующим образом:

$$T_i = \frac{\alpha_i - \alpha_n}{\alpha_0 - \alpha_n} (T_0 + \Delta T_1 + \Delta T_2), \quad (1)$$

где ΔT_1 — поправка на неизотермичность атмосферы и ΔT_2 — поправка на неизотропность рассеяния антенны. Для стандартной атмосферы первая поправка имеет вид:

$$\Delta T_1 = bH \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma^k}{kk!}, \quad (2)$$

где $b = 6,5 \text{ град}\cdot\text{км}^{-1}$ — постоянная, определяющая быстроту падения температуры с высотой; $H = 2,2 \text{ км}$ — эффективная высота атмосферы для водяного пара; γ — коэффициент поглощения в атмосфере в направлении источника. Вторая поправка зависит от качества антенны (от величины рассеяния антенны и соотношения между изотропной и неизотропной частями рассеяния), от величины и распределения поглощения, а также от расположения местных предметов.

При каждом наблюдении Луны операция наведения антенны на Луну, небо и „черную“ область повторялась $10 \div 15$ раз. Температура Луны для каждого измерения вычислялась по формуле (1). При этом считалось, что атмосфера мало отличается от стандартной и поправка ΔT_1 вычислялась по формуле (2). Вычисление ΔT_2 из-за сложности учета перечисленных выше факторов не производилось, а на основании [5], где описаны измерения с антенной такого же типа и в приблизительно таких же условиях*, было принято, что $\Delta T_2 \approx 0,15 T_0$. Полученные таким способом в течение одного сеанса наблюдений значения температуры Луны усреднялись.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ

Наблюдения, проведенные в течение двух лунных циклов (август—сентябрь 1962 г.), позволили найти зависимость радиотемпературы центральной части диска Луны от ее фазы. На рис. 1 темными кружками отмечены экспериментальные точки, полученные в течение первого цикла, и светлыми — в течение второго. Здесь же представлена аппроксимирующая кривая (сплошная линия).

Среднеквадратичный разброс экспериментальных точек относительно проведенной кривой не превышает 11%. Этим разбросом (флюктуационной ошибкой) определяется точность измерений относительных значений постоянной и переменной составляющих радиоизлучения Луны.

Кроме флюктуационной, не исключена также систематическая ошибка, основные источники которой следующие: неточность учета неизотропности рассеяния антенны (ее можно оценить величиной $\pm 10\%$),

* В работе [5] при ширине главного лепестка диаграммы направленности $25'$ измерялась поправка на неизотропность рассеяния вне угла $96'$, т. е. примерно вчетверо большего, чем ширина диаграммы направленности. В нашем случае нужно учесть влияние рассеяния вне угла Луны ($30'$) при ширине главного лепестка около $10'$.

а также неточность учёта неизотермичности атмосферы, связанная с возможными систематическими отклонениями распределения метеопараметров по высоте от принятого для стандартной атмосферы (при-

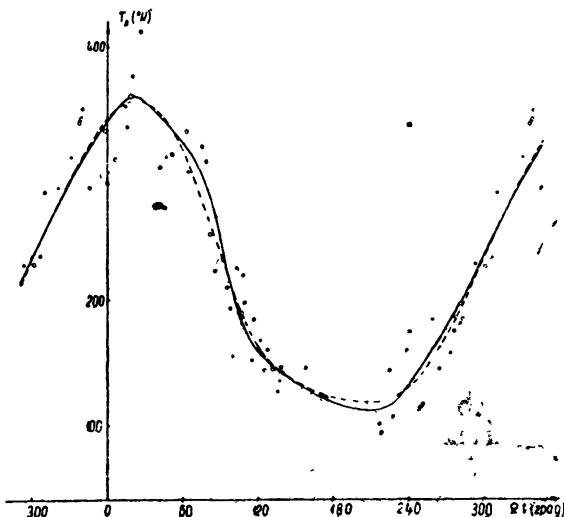


Рис. 1.

мерно $\pm 2\%$). Поэтому абсолютные значения температуры даются с точностью $\pm 15\%$.

В этот же период измерялась радиотемпература Солнца T_C . В результате усреднения данных большого числа измерений получено:

$$T_C = [6700 \pm 700]^\circ\text{K}.$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как видно из рис. 1, экспериментальная кривая заметно отличается от синусоиды. Путем численного разложения полученной зависимости в ряд Фурье было найдено, что

$$T_L = [216 + 120 \cos(\Omega t - 16^\circ) + 20 \cos(2\Omega t - 34^\circ) - 6 \cos(3\Omega t - 19^\circ)]^\circ\text{K}, \quad (3)$$

где Ω — частота лунации ($\Omega t = 0$ соответствует моменту полнолуния). Кривая, описываемая выражением (3), изображена на рис. 1 пунктиром.

Интересно сравнить полученный результат с теорией.

Пользуясь теоретической зависимостью эффективной температуры центра диска Луны T_L от ее фазы [11] для однородной модели и зная, как меняется температура поверхности Луны во время лунации [12], можно, ограничиваясь третьей гармоникой, записать:

$$\begin{aligned} T_L = & (1 - R_\perp) 230 + \frac{(1 - R_\perp) 156}{\sqrt{1 + 2\delta + 2\delta^2}} \cos(\Omega t - 3^\circ - \xi_1) + \\ & + \frac{(1 - R_\perp) 36}{\sqrt{1 + 2\sqrt{2}\delta + 4\delta^2}} \cos(2\Omega t - 83^\circ - \xi_2) + \\ & + \frac{(1 - R_\perp) 26}{\sqrt{1 + 2\sqrt{3}\delta + 6\delta^2}} \cos(3\Omega t - 6^\circ - \xi_3), \end{aligned} \quad (4)$$

где R_{\perp} — коэффициент отражения от лунной поверхности при нормальном падении; δ — отношение коэффициента затухания первой гармоники тепловой волны к коэффициенту затухания электрической волны и

$$\operatorname{tg} \xi_n = \frac{\sqrt{n} \delta}{1 + \sqrt{n} \delta} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

Принимая для лунной почвы диэлектрическую постоянную $\epsilon = 1,5$ [13, 14], получим из (4) значение постоянной составляющей 227°K , что в пределах ошибки совпадает с измеренной величиной 216°K .

Приравнивая отношения постоянной составляющей к амплитуде первой гармоники, найденные из (3) и (4), легко определить, что $\delta = 0,22 \pm 0,1$ и $\delta/\lambda = 1,7 \pm 0,7$. Для этого значения δ из (5) имеем: $\xi_1 = 10^{\circ} \pm 4$, что хорошо согласуется с экспериментально полученной величиной $\xi_1 = 13^{\circ}$.

В связи с тем, что ошибка при выделении второй и третьей гармоник может быть значительной, мы ограничимся в отношении их лишь следующим замечанием: так как ширина диаграммы направленности используемого телескопа приблизительно равна $1/3$ углового размера Луны, в результате измерений мы получаем усредненные в пределах главного лепестка значения высших гармонических составляющих. Это усреднение приводит к уменьшению их амплитуд, причем уменьшение тем сильнее, чем выше номер гармоники. Поэтому, как и следовало ожидать, полученные значения амплитуд второй и третьей гармоник (20°K и 6°K) лежат между соответствующими значениями для центра лунного диска ($26,5^{\circ}\text{K}$ и 18°K)* и значениями, которые можно получить при максимальном усреднении, т. е. принимая радиоизлучение Луны антенной с широкой диаграммой направленности (9°K и $0,3^{\circ}\text{K}$)**.

Таким образом, полученные на волне $1,3 \text{ мм}$ экспериментальные данные полностью могут быть объяснены с помощью однослойной модели лунной поверхности, причем величина $\delta/\lambda = 1,7 \pm 0,7$ в пределах ошибки не отличается от 2, т. е. можно считать, что установленная в [7] для диапазона от 4 мм до $3,2 \text{ см}$ зависимость

$$l_s = 2\lambda l_t, \quad (6)$$

связывающая глубину проникновения тепловой волны l_t с толщиной радиоизлучающего слоя l_s , справедлива вплоть до волны $1,3 \text{ мм}$.

В отношении измерений радиотемпературы Солнца можно сказать, что значение $T_C = 6700^{\circ} \pm 700^{\circ}$ в пределах погрешности совпадает с данными измерений на волне $1,8 \text{ мм}$; $T_C = 5300^{\circ} \pm 700^{\circ}$ [15]; $T_C = 6500^{\circ} \pm 700^{\circ}$ [16].

В заключение автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность В. А. Александрову, Д. П. Степанову, П. В. Шобыреву и В. О. Эллинскому, принявшим участие в подготовке и проведении измерений, а также И. Л. Берштейну, А. Г. Кислякову и В. С. Троицкому за ценные замечания, сделанные при обсуждении настоящей работы.

* Значения $26,5^{\circ}$ и 18° получаются, если подставить в (4) $\delta = 0,22$.

** Для расчета амплитуд гармоник при приеме на антенну с диаграммой направленности, ширина которой превышает угловые размеры Луны, были использованы коэффициенты усреднения, вычисленные В. Д. Кротиковым и О. Б. Щуко.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 35, 129 (1958).
2. М. Р. Зелинская, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Астрон. ж., 36, 643 (1958).
3. J. E. Gibson, Proc. IRE, 46, 280 (1959).
4. J. H. Piddington, H. C. Mippett, Austral. J. Sci. Res., 4a, 459 (1951).
5. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 433 (1961).
6. W. M. Sinton, J. Opt. Soc. Am., 45, 975 (1955).
7. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 39, 73 (1962).
8. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 600 (1961).
9. А. Н. Саломонович, Сб. трудов Пулковского международного симпозиума—Луна (1961).
10. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 674 (1963).
11. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 511 (1954).
12. В. Д. Кротиков, О. Б. Шуко, Астрон. ж. (в печати).
13. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж. (в печати).
14. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 39, 79 (1962).
15. Н. А. Горюхов, Ю. А. Дрягин, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 413 (1962).
16. А. И. Наумов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 декабря 1963 г.

LUNAR AND SOLAR RADIO EMISSION AT 1.3 mm WAVELENGTH

L. I. Fedoseev

The radio emission temperature of the central part of the lunar disk as a function of its phase have been measured at 1.3 mm wavelength by means of radiotelescope with narrow beam $10 \pm 12'$. The radiobrightness of the Moon T_M is proved to change according to the law

$$T_M = [216 + 120 \cos(\Omega t - 16^\circ) + 20 \cos(2\Omega t - 34^\circ) - 6 \cos(3\Omega t - 19^\circ)]^{\circ}\text{K}.$$

Solar radiotemperature measured at 1.3 mm wavelength turned out to be equal to $6700 \pm 700^{\circ}\text{K}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЯ РАДИОПЯТЕН НА СОЛНЦЕ НА ВОЛНЕ $\lambda=5 \text{ м}$

Л. И. Матвеенко

Сообщаются результаты наблюдений радиопятен на Солнце на волне $\lambda=5 \text{ м}$, проведенных на Крымской станции ФИАН в июне 1960 г. Рассматривается методика измерений. Приводятся размеры, форма, эффективная температура радиопятен, а также траектории и скорости их движения.

Наблюдения за изменениями температуры, формы, эффективной площади и координат областей повышенной интенсивности радиоизлучения (радиопяты) на Солнце в метровом диапазоне радиоволн представляют значительный интерес для выяснения вопроса динамики и механизма их образования. Как ранее сообщалось [1], в июне 1960 г. на Крымской научной станции Физического института им. П. Н. Лебедева были проведены интерференционным методом наблюдения за радиопятнами на Солнце на волне $\lambda=5 \text{ м}$. Одновременно велась регистрация радиоизлучения Солнца на радиоспектрографе. В настоящей работе приводятся методика и результаты этих наблюдений.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ РАДИОИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ И ЭФФЕКТИВНЫХ РАЗМЕРОВ РАДИОИСТОЧНИКОВ

Обычная система радиоинтерферометра [2] состоит из двух расположенных антенн, сигналы которых суммируются, усиливаются и регистрируются. В случае радиоинтерферометра с фазовой модуляцией напряжение на выходе приемника при квадратичном детектировании с точностью до постоянного коэффициента равно

$$u_{\text{вых}} = \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (D \sin \phi + \Delta l) \right], \quad (1)$$

где D —расстояние между антеннами, λ —длина волн принимаемого сигнала, Δl —разность электрических длин кабелей, соединяющих антенны, ϕ —угол прихода сигнала, отсчитываемый от нормали к базе интерферометра.

По интерференционной записи радиоисточника, т. е. зависимости $u_{\text{вых}}$ от времени, и известным D , λ и Δl из выражения (1) можно определить с точностью до ширины лепестка интерференции угол β —одну из координат радиоисточника. Вторая координата радиоисточника может быть найдена аналогичным методом на радиоинтерферометре с иной ориентацией базы.

В случае определения координат радиоисточников расчеты значительно упрощаются при использовании экваториальной системы координат. В этом случае положение лепестков интерференционной диаграммы направленности равноплечного радиоинтерферометра, произвольно ориентированного в пространстве, определится следующим выражением:

$$\cos(t-t_0) = \frac{\sin(n\lambda/D) - \sin\delta \sin\delta_0}{\cos\delta \cos\delta_0}, \quad (2)$$

где

$$\sin\delta_0 = (\tan\varphi \sin\gamma - \cos\gamma \cos\beta) \cos\varphi,$$

$$\sin t_0 = \cos\gamma \sin\beta / \cos\delta_0,$$

δ_0 , t_0 —склонение и часовой угол базы радиоинтерферометра, γ , β —высота и азимут направления вдоль базы радиоинтерферометра, φ —широта места, n —порядковый номер лепестка, D —длина базы радиоинтерферометра.

Наличие двух радиоинтерферометров с известными параметрами позволяет, согласно (2), получить два уравнения с двумя неизвестными, из которых легко с точностью до ширины лепестка определить координаты неизвестного радиоисточника. Эффективные размеры радиоисточника в направлении базы радиоинтерферометра, как известно [3], определяются интерференционным методом по глубине модуляции.

2. АППАРАТУРА И АНТЕННЫ

Для определения координат и размеров радиопяты нами была применена система из трех радиоинтерферометров с фазовой модуляцией. Базы радиоинтерферометров расположены в виде треугольника (рис. 1). Параметры радиоинтерферометров приведены в таблице 1.

Таблица 1

Ориентация базы	D (м)	γ	β
В.—З.	639,0	13°23'31"	90° 0' 0"
Ю.—с.-в.	862,24	-6°15'12"	14°29'42"
Ю.—с.-з.	806,43	-8°58'18"	-16°21'54"

Антennaя система радиоинтерферометров Ю.—с.-в. и Ю.—с.-з. состояла из усеченных параболических антенн с раскрытием 15×15 м², а В.—З.—из параболоида диаметром

30 м и синфазной решетки из 16 волновых диполей. Все антенны неподвижны и ориентированы в плоскости меридиана на радиоисточник Телец-А*. Длина баз радиоинтерферометров была выбрана таким образом, чтобы исключить модуляцию потока радиоизлучения „спокойного“ Солнца. Ориентация баз радиоинтерферометров и их длина определены достаточно геодезическими методами. Приемники—обычного супергетеродинного типа. Параметры приемников (полоса пропускания 0,5 мГц и постоянная времени $\tau=24$ сек) выбраны из соображений длительности сеанса наблюдений и оптимальной чувствительности. Чувствительность приемников 0,5°К; шум-фактор—1,5. Фазовая модуляция осуществлялась изменением фазы принимаемого сигнала на 180° путем периодического изменения электрической длины кабеля, соединяющего одну из антенн радиоинтерферометра.

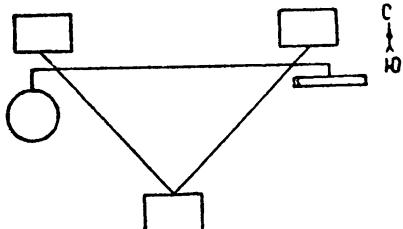


Рис. 1. Расположение баз радиоинтерферометров.

* Координаты источника Телец-А $\alpha=5^h32^m09^s$, $\delta=+21^{\circ}59'$; поток радиоизлучения $F=18 \cdot 10^{-24}$ вт·м⁻²·гц⁻¹.

3. МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ И ЭФФЕКТИВНЫХ РАЗМЕРОВ „РАДИОПЯТЕН“

При наблюдении радиопятыен использовалось прохождение Солнца через неподвижные диаграммы направленности радиоинтерферометров. Калибровка радиоинтерферометров, т. е. определение положения лепестков интерференции в пространстве и их амплитуда, производилась по внезатменным наблюдениям радиоисточника Телец-А.

Радиоинтерферометры с перекрещивающимися базами имеют соответствующим образом пересекающиеся в пространстве лепестки интерференционных диаграмм направленности. Положение максимумов интерференционных диаграмм направленности определяется формулой (2) и может быть представлено в виде семейства кривых (рис. 2). Но положение соответствующих максимумов интерференционной записи отлично от положения соответствующих максимумов интерференционной диаграммы направленности на величину, определяемую постоянной времени интегрирующего устройства радиометра

$$\Delta T = \frac{T}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{T} \tau \right),$$

где $T \approx 43200 \lambda/\pi D \cos \phi \cos \delta$ — период интерференции. Кроме того, надо учитывать поправку, обусловленную неравноплечностью интерферометра. Общая поправка может быть достаточно точно определена по наблюдениям нескольких радиоисточников с известными координатами. При наличии радиоисточника со склонением, близким к склонению неизвестного источника, поправка может быть определена по одному этому источнику. В нашем случае таким радиоисточником является Телец-А; в мае—июне склонения Солнца и Тельца близки.

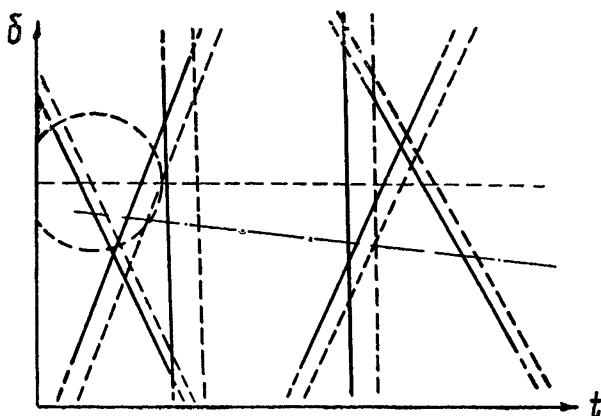


Рис. 2. Семейство кривых, определяющее положение максимумов по трем базам: сплошные линии — расчетные максимумы интерференционных диаграмм; пунктирные — экспериментальные максимумы интерференционных записей; штрих-пунктирная линия — траектория движения радиопятыни; окружность — положение Солнца в определенный момент времени.

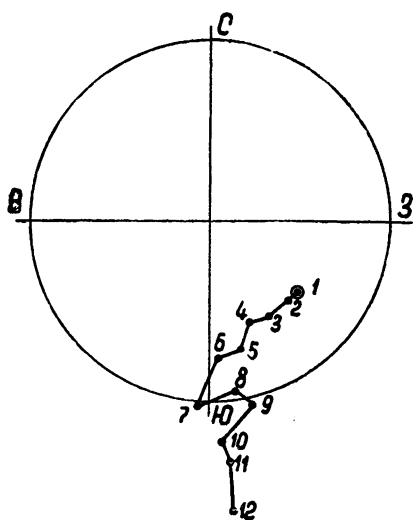
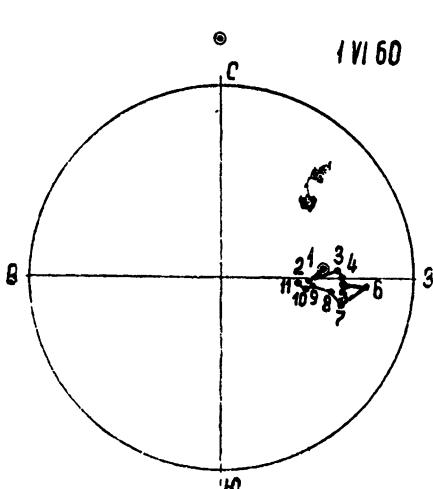
Введя поправку на положение максимумов интерференционной записи рис. 2, получим семейство кривых, определяющее положение максимумов интерференционных записей. Зная положение максимумов интерференционных записей неизвестного радиоисточника, довольно просто с точностью до ширины лепестка определить его координаты. Действительно, каждой δ (прямой, параллельной оси абсцисс; см. рис. 2) соответствует определенная очередность и скважность по времени между интерференционными максимумами на записях по разным базам. И наоборот, определенной очередности и скважности между макси-

мумами будет соответствовать с точностью до ширины лепестка определенное склонение радиоисточника. Часовой угол радиоисточника определяется по общему сдвигу максимумов записи во времени относительно максимумов семейства кривых. Таким образом, радиоисточник пересекает лепестки интерференционной диаграммы с определенным опережением или запаздыванием, что и определяет его часовой угол.

В случае „радиопятен“ возможно значительное изменение их координат в течение сеанса наблюдения. В этом случае важно знать начальную точку отсчета траектории движения пятна. Естественно предположить, что радиопятно находится либо в пределах солнечного диска, либо вблизи него. Исходя из этого, выбираем наиболее близкую к центру Солнца начальную точку отсчета. Затем отсчитываем от нее интервалы времени согласно скважности и очередности положения максимумов интерференционных записей рис. 2. По полученной кривой, зная положение Солнца на каждый момент времени, легко определить траекторию движения пятна относительно солнечного диска.

Траектории движения радиопятен показаны на рис. 3.

17.VI.60



24.VI.60

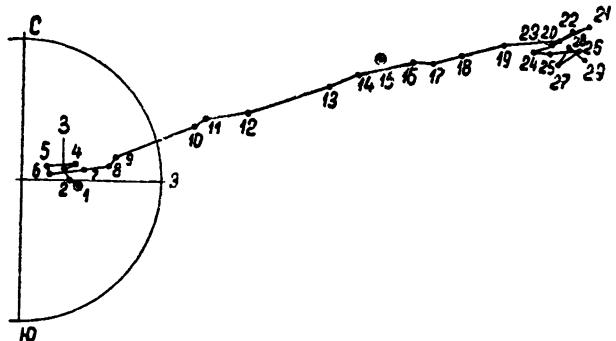


Рис. 3. Траектории движения радиопятен. Движение радиопятна происходит в направлении возрастания номеров. Обведенные точки—возможные начальные точки отсчета.

Обведенными точками обозначены возможные начальные точки отсчета. Выбор той или иной точки отсчета смещает парапелльно траекторию без изменения ее формы или направления. По изменению координат радиопятна во времени определяется скорость его движения.

Как траектория, так и скорость движения определены в плоскости, перпендикулярной лучу зрения. В случае нескольких радиопятен на Солнце данным методом будут определены координаты центра тяжести всей группы. По характеру изменения потока радиоизлучения Солнца можно судить, в каких случаях пятно единственно. При этом, правда, не исключено наличие „неподвижного радиопятна“ и выходящего из него потока материи (подвижного радиопятна) одновременно. В этом случае видимое движение радиопятна будет отлично от истинного:

$$l_{\text{ист}} = l \left(1 + \frac{\Omega_h T_h M_h}{\Omega_{\text{дв}} T_{\text{дв}} M_{\text{дв}}} \right),$$

где l —видимое движение радиопятна, $\Omega_{\text{дв}}$, $T_{\text{дв}}$ и Ω_h , T_h —угловые размеры и температура двигающегося и неподвижного пятен соответственно, $M_{\text{дв}}$ и M_h —глубина модуляции двигающегося и неподвижного пятна.

Абсолютная ошибка измерения координат, определенная по внезапенным наблюдениям радиоисточника Телец-А, не превышает $\pm 3'$. Относительная ошибка измерения координат в течение одного сеанса наблюдения $\pm 1',5$.

Эффективные размеры радиопятен определялись по глубине модуляции их радиоизлучения. Как известно [3], при интерференционном методе приема глубина модуляции радиоизлучения источника зависит от его размеров. Модулированная составляющая потока радиоизлучения пятен определялась по интерференционным записям, полный поток радиоизлучения—по наблюдениям на радиоспектрографе. По трем базам измерялись три коэффициента модуляции, из которых определялись размеры радиопятен в соответствующих направлениях. Точность определения размеров радиопятен $\pm 20\%$. При отсутствии сведений о полном потоке радиоизлучения пятна приводятся данные о соотношении его размеров.

Эффективная температура радиопятен находилась по формуле

$$T_{\text{эфф}} = F \lambda^2 / 2k \Omega,$$

где Ω —площадь радиопятна в стерадианах, F —плотность потока радиоизлучения пятна.

Данный метод измерений очень эффективен для излучения радиопятен на Солнце в метровом диапазоне радиоволн, так как он обеспечивает при большом разрешении широкий обзор. Это очень важно при наблюдении пятен с большой подвижностью. Кроме того, этот метод не требует сложных антенных систем. Недостаток метода—потеря однозначности в определении координат, хотя при наличии двух одинаково ориентированных баз с определенным соотношением их длин эта неоднозначность может быть исключена.

4 РЕЗУЛЬТАТЫ НАБЛЮДЕНИЙ

В конце мая 1960 г. на Солнце было обнаружено интерференционным методом яркое радиопятно. С 1 июня начались регулярные наблюдения. В июне радиопятна наблюдались в течение 5 дней. Результаты наблюдений представлены на рис. 3 и в таблице 2. На рисунках видна траектория движения радиопятна в течение одного сеанса наблюдения. В таблице приводятся время наблюдения радио-

пятна, скорость его движения, максимальное перемещение за время наблюдения, характер траектории, максимальный и минимальный размеры радиопятна в момент, близкий к кульминации Солнца, отношение его максимального и минимального размеров в течение времени наблюдения (первая цифра—начало наблюдения, вторая—конец), ориентация большего размера, эффективная температура и характер радиоизлучения Солнца в данный момент.

Появление радиопятен сопровождалось повышением потока радиоизлучения Солнца на метровых волнах, и, наоборот, повышению потока соответствовало появление радиопятен (рис. 4, таблица 2). Вклад излучения радиопятен в радиоизлучение Солнца растет с ростом длины волны. Для примера на рис. 5 показан спектр излучения радиопятна, наблюдавшегося 16 июня. Радиоизлучение пятен 16—17 июня носило спокойный характер (рис. 6). В эти дни наблюдались лишь медленные изменения потока радиоизлучения Солнца. 2—4 июня радиоизлучение характеризовалось непрерывными короткими всплесками, достигающими 10% от общего уровня излучения, а также эпизодическими всплесками, повышавшими уровень радиоизлучения более чем вдвое.

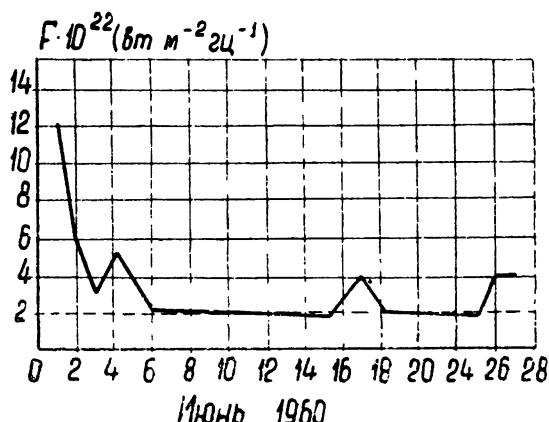


Рис. 4. Изменение потока радиоизлучения Солнца ($f = 75$ мгц).

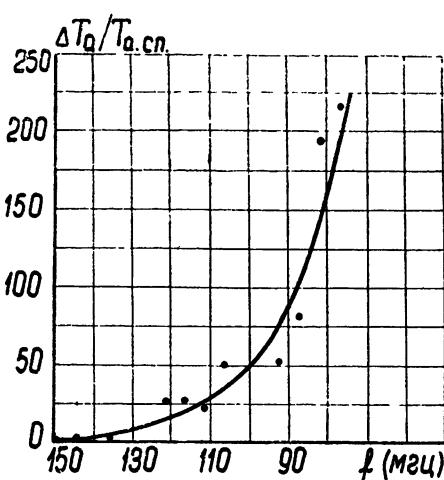


Рис. 5. Спектр излучения радиопятна 16.VI.60.

движении радиопятен.

Подвижные радиопятна можно представить в виде потоков или сгустков материи, выбрасываемой Солнцем. В пользу этого, как видно из таблицы, говорит вытянутость радиопятен в направлении движения.

Рассмотрение траекторий движения радиопятен показывает, что в большинстве случаев движение носит направленный характер и смещение радиопятна за время наблюдения достигает более $0,5 R_\odot$. Как ранее указывалось, относительная ошибка измерений координат не превышает $\pm 1',5$, т. е. $\pm 0,1 R_\odot$, и соответствует ошибкам, обусловленным ионосферой. Появление радиопятен на Солнце может сопровождаться процессами, приводящими к возмущению ионосферы, что, несомненно, должно отразиться на ошибке измерения координат. Но изменения координат на $0,5R_\odot \div 4R_\odot$ не могут быть объяснены влиянием ионосферы и свидетельствуют о движении радиопятен.

Хаотическое на первый взгляд движение координат радиопятна 5 июня может быть объяснено возникновением во время наблюдения трех потоков, следующих друг за другом с некоторым запаздыванием по времени. Так как интерференционный метод измеряет координаты центра тяжести радиопятен, то в случае, когда очередной поток возникает до того, как исчезнет предшествующий, мы не можем проследить три независимые траектории движения каждого потока, а фиксируем лишь их начальные стадии. Наличие трех потоков подтверждается синхронными изменениями потока радиоизлучения Солнца.

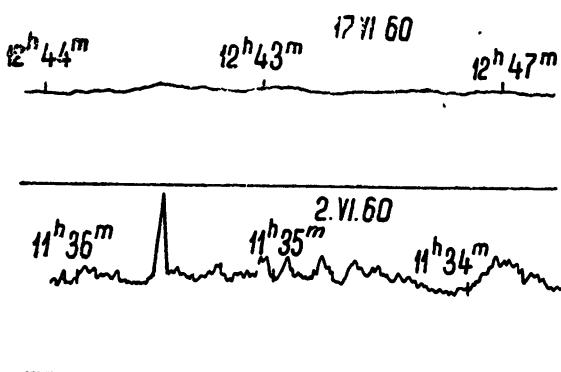


Рис. 6. Характер радиоизлучения Солнца 2 и 17 июня 1960 г.

Первого июня радиопятно двигалось по замкнутой траектории со скоростью $100 \div 500 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$. Этот случай, по-видимому, обусловлен потоком материи, поднимающимся вверх, а затем спадающим вниз. Если считать, что движение происходило в радиальном направлении, то скорость и высота подъема радиопятна были несколько выше и равны соответственно $200 \div 1000 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$ и $0,8 R_{\odot}$. В этом случае скорость движения потока, если считать по нижнему пределу, недостаточно высока для отрыва потока от Солнца. Для отрыва потока его скорость должна быть больше критической, последняя для Солнца на высоте критических частот для метрового диапазона радиоволн ($h=0,5 \div 0,7 R_{\odot}$) равна приблизительно $500 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$. Так как скорость меньше критической, поток, достигнув определенной высоты, начал падать вниз.

26 июня наблюдалось перемещение радиопятна на расстояние $4R_{\odot}$ со скоростью $500 \div 1500 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$. Радиопятно вытянуто в направлении движения. Этот случай может быть представлен в виде потока материи, выброшенного Солнцем со скоростью больше критической, т. е. покидающего его. В момент выхода потока из плотных слоев короны наблюдались флюктуации координат, вероятно, из-за рефракции; среднее положение измеряемых координат радиопятна при этом может мало изменяться из-за возбуждения нижележащих плотных слоев короны движущимся потоком. Затем происходит движение потока во внешних слоях короны, которое и регистрируется. Наконец, поток начинает рассеиваться, что может снова привести к флюктуации координат.

Как видно из таблицы 2, скорости движения радиопятен в большинстве случаев превосходят критическую, а траектории движения носят направленный характер. Отсюда можно заключить, что радио-

Таблица 2

Дата	Время наблюдения	Скорость движения ($км \cdot сек^{-1}$)	Максимальное перемещение	Вид траектории	Размер (угл. мин)	Отношение максимального и минимального размеров	Ориентация	$T_{\text{эфф}} (^\circ K)$	Характер радиолизлучения Солнца
1.VI. 1960	$12^h44^m \pm 13^h20^m$	$100 \div 500$	$0,4 R_\odot$	Замкнутая	5×10	$1,7 \div 4$	По направлению движения	$6 \cdot 10^{10}$	Всплески малой интенсивности, "пички"
2.VI	"	$12^h30^m \pm 13^h10^m$		Направленная	20×20		по направлению движения	$2,5 \cdot 10^9$	"пички"
3.VI	"	$13^h06^m \div 13^h20^m$	500	$0,6 R_\odot$	Хаотическая	20×5	4		"пички"
4.VI	"	$12^h32^m \div 13^h19^m$	$500 \div 1000$	$0,7 R_\odot$	Хаотическая	25×20	$1,25$	$2,7 \cdot 10^9$	"пички"
5.VI	"	$12^h39^m \div 13^h12^m$	$500 \div 1000$	$0,7 R_\odot$	Направленная		5	10^9	"пички"
16.VI	"	$12^h39^m \div 13^h03^m$	$500 \div 1500$	$1,3 R_\odot$	Направленная	15×18	$1,2$	по направлению движения	"спокойный"
17.VI	"	$12^h30^m \div 13^h18^m$	1000	$1,25 R_\odot$	Направленная	15×20	$1 \div 1,6$	$0,7 \cdot 10^9$	"спокойный"
26.VI	"	$12^h06^m \div 13^h26^m$	$500 \div 1500$	$4 R_\odot$	Направленная		5	$0,4 \cdot 10^3$	"спокойный"
27.VI	"	$12^h44^m \div 13^h16^m$	$300 \div 1000$	$0,8 R_\odot$	Направленная	15×18	$1,2$	$1,1 \cdot 10^9$	"спокойный"

пятна обусловлены потоками материи, покидающими Солнце. Размеры радиопятен довольно значительны и в ряде случаев достигают $25'$. Температура радиопятен лежит в пределах $(1 \div 60)10^9$ $^{\circ}\text{К}$, что свидетельствует о нетепловом механизме радиоизлучения. В будущем предполагается провести наблюдения в поляризованном излучении для уточнения механизма излучения радиопятен.

Большая подвижность радиопятен и недостаточное количество наблюдений не позволили выявить оптические явления, сопутствующие появлению радиопятен на метровых волнах.

1. Радиопятна метрового диапазона ($\lambda=5\text{ м}$) в ряде случаев обусловлены потоками либо сгустками материи, движущейся со скоростями $500 \div 1500\text{ км}\cdot\text{сек}^{-1}$.

2. Радиопятна вытянуты в направлении движения; их размеры в некоторых случаях достигают $25'$.

3. Отдельные радиопятна (потоки материи) имеют скорости больше критической и, следовательно, покидают Солнце.

В заключение автор приносит благодарность В. В. Виткевичу за обсуждение результатов работы и В. В. Локтионову за помощь в наблюдениях.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. И. Матвеенко, Доклад на расширенном пленуме комиссии по радиоастрономии, Москва, 1960.
- В. В. Виткевич, А. Д. Кузьмин, Л. И. Матвеенко, Р. Л. Сороченко, В. А. Удалцов, Радиотехника и электроника, 6, 1490 (1961).
- В. В. Виткевич, Астрон. ж., 29, 450 (1952).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
11 июля 1962 г.

THE RESULTS OF OBSERVATIONS OF THE RADIO SPOTS ON THE SUN AT 5 m WAVELENGTH

L. I. Matveenko

The results of observations of the radio spots on the Sun at 5 m wavelength carried out at the Crimean station „PHIAN“ in June 1960 are given. Methods of measurements are considered. Dimensions, shapes, effective temperature trajectories and velocities of radio spots are set forth.

О ФЛЮКТУАЦИЯХ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

К. С. Станкевич, Л. Н. Бондарь

Рассчитана среднеквадратичная флюктуация температуры радиоизлучения атмосферы на основе модели турбулентного перемешивания.

В работе [1] проведено вычисление флюктуаций температуры радиоизлучения для модели стандартной атмосферы в предположении, что температура радиоизлучения T_a мала по сравнению с кинетической температурой атмосферы T . Однако эту задачу можно решить без этого предположения; тогда полученным решением можно воспользоваться для оценки величины флюктуаций в миллиметровом диапазоне волн.

Выберем направление распространения волны за ось x и запишем уравнение переноса:

$$\frac{dT_a}{dx} + \kappa T_a - \kappa T = 0, \quad (1)$$

где κ — коэффициент поглощения. Рассматривая в дальнейшем только малые флюктуации, представим случайные поля, входящие в уравнение (1), в виде суммы невозмущенного поля и малого возмущения:

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= \overline{\kappa(x)} + \Delta\kappa(x); \\ T(x) &= \overline{T(x)} + \Delta T(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Решение (1) будем также искать в виде

$$T_a(x) = \overline{T_a(x)} + \Delta T_a(x). \quad (3)$$

После подстановки (2) и (3) в (1) получим уравнение для средних величин:

$$\frac{d\overline{T_a}}{dx} + \overline{\kappa T_a} - \overline{\kappa T} = 0 \quad (4)$$

и уравнение для малых возмущений:

$$\frac{d}{dx} \Delta T_a + \overline{\kappa} \Delta T_a + \Delta \overline{T_a} - \overline{\kappa} \Delta T - \Delta \overline{\kappa T} = 0. \quad (5)$$

Последнее имеет решение, обращающееся в нуль при $x = 0$:

$$\Delta T_a = e^{-\int_0^x \kappa dx'} \left[\int_0^x [\Delta \overline{\kappa T_a} - \overline{\kappa} \Delta T - \Delta \overline{\kappa T}] e^{\int_0^{x'} \kappa dx''} dx' \right]. \quad (6)$$

Интегрируя (4), для средних значений получим:

$$T_a(x, 0) = e^{-\int_0^x \kappa dx'} \left[\int_0^x T e^{\int_0^{x'} \kappa dx''} dx' + T_a(0) \right], \quad (7)$$

где $T_a(0)$ — внешнее излучение, падающее на атмосферу.

С помощью (6) можно найти стандартными методами структурную функцию для флюктуаций температуры радиоизлучения атмосферы D_{T_a} , выраженную через структурные функции коэффициента поглощения и температуры.

Возьмем разность ΔT_a в двух близких точках плоскости $x = \text{const}$

$$\Delta T_a(x_1y_1) - \Delta T_a(x_1y_2) = e^{-\int_0^x z dx'} \int_0^x \{ [T_a(x_1) - T(x_1)] [\Delta x(x_1, y_1) - \Delta x(x_1, y_2)] - \\ - x(x_1) [\Delta T(x_1, y_1) - \Delta T(x_1, y_2)] \} e^{\int_0^{x_1} z dx'} dx_1 \quad (8)$$

и найдем

$$\frac{[\Delta T_a(x_1y_1) - \Delta T_a(x_1y_2)]^2}{[\Delta T_a(x_1y_1) - \Delta T_a(x_1y_2)]^2} = e^{-2 \int_0^x z dx'} \int_0^x dx_1 \int_0^x dx_2 e^{\int_0^{x_1} z dx' + \int_0^{x_2} z dx'} \times \\ \times \{ [T_a(x_1) - T(x_1)] [T_a(x_2) - T(x_2)] \times \\ \times [\Delta x(x_1, y_1) - \Delta x(x_1, y_2)] [\Delta x(x_2, y_1) - \Delta x(x_2, y_2)] + \\ + x(x_1)x(x_2) [\Delta T(x_1, y_1) - \Delta T(x_1, y_2)] [\Delta T(x_2, y_1) - \Delta T(x_2, y_2)] - \\ - 2x(x_2)(T_a(x_1) - T(x_1)) [\Delta x(x_1, y_1) - \Delta x(x_1, y_2)] [\Delta T(x_2, y_1) - \Delta T(x_2, y_2)] \}. \quad (9)$$

Поскольку x зависит от T , последний член в выражении (9) отличен от нуля. Для нахождения взаимной структурной функции x и T воспользуемся выражением для коэффициента поглощения, приведенным в [1]:

$$x = (K_1 + K_2 q) \frac{P^2}{T^{5/2}}, \quad (10)$$

которое справедливо в миллиметровом и сантиметровом диапазонах вне резонансных линий поглощения.

В дециметровом диапазоне поглощают только молекулы кислорода и x имеет вид [3]

$$x \sim \frac{P}{T^2} \frac{\Delta v}{v^2 + \Delta v^2}.$$

Рассмотрим случай, когда $v^2 \ll \Delta v^2$. Поскольку $\Delta v \sim P / V T$, то

$$x = K \frac{1}{T^{3/2}}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) найдем часть возмущения, коррелирующую с ΔT . Поскольку процессы в атмосфере подчинены уравнению адиабаты:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{\Delta P}{P}, \quad (12)$$

из (10) получим:

$$\Delta x_T = x \frac{5 - \alpha}{2(\alpha - 1)} \frac{\Delta T}{T}. \quad (13)$$

Для x , описываемого выражением (11), будем иметь

$$\Delta x = -\frac{3}{2} \times \frac{\Delta T}{T} \quad (14)$$

или в общем случае

$$\Delta x_T = Ax \frac{\Delta T}{T}. \quad (15)$$

Для структурной функции $D_{T_a}(\rho)$ из (9) и (15) получим:

$$D_{T_a}(\rho) = e^{-2 \int_0^x dx' \int_0^x dx_1 \int_0^x dx_2 e^{\int_0^{x_1} dx' + \int_0^{x_2} dx'}} \times \\ \times \left\{ [T_a(x_1) - T(x_1)] [T_a(x_2) - T(x_2)] \times \right. \\ \times [\Delta x(x_1, y_1) - \Delta x(x_1, y_2)] [\Delta x(x_2, y_1) - \Delta x(x_2, y_2)] + \\ + \times (x_1) \times (x_2) \left[1 - 2A \frac{T_a(x_1) - T(x_1)}{T(x_1)} \right] \times \\ \times \left. [\Delta T(x_1, y_1) - \Delta T(x_1, y_2)] [\Delta T(x_2, y_1) - \Delta T(x_2, y_2)] \right\}. \quad (16)$$

После известных алгебраических преобразований с усредненными произведениями выражений в квадратных скобках найдем для структурной функции флюктуаций радиоизлучения атмосферы зависимость от структурных функций для x и T :

$$D_{T_a}(\rho) = e^{-2 \int_0^x dx' \int_0^x dx_1 \int_0^x dx_2 e^{\int_0^{x_1} dx' + \int_0^{x_2} dx'}} \times \\ \times \left\{ [T_a(x_1) - T(x_1)] [T_a(x_2) - T(x_2)] [D_x(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \rho^2}) - D_x(|x_1 - x_2|)] + \right. \\ + \times (x_1) \times (x_2) \left[1 - 2A \frac{T_a(x_1) - T(x_1)}{T(x_1)} \right] \times \\ \times [D_T(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \rho^2}) - D_T(|x_1 - x_2|)] \left. \right\}, \quad (17)$$

Структурная функция для коэффициента поглощения и температуры в неоднородном турбулентном потоке с плавно меняющимися характеристиками может быть представлена в виде [2]

$$D_{x,T}(x_1, x_2) = C_{x,T}^2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) |x_1 - x_2|^{2/3} \quad \text{при } l_0 < |x_1 - x_2| < L_0; \quad (18)$$

$$D_{x,T}(x_1, x_2) = C_{x,T}^2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) l_0^{2/3} \left(\frac{|x_1 - x_2|}{l_0} \right)^2 \quad \text{при } |x_1 - x_2| < l_0,$$

где l_0 и L_0 — внутренний и внешний масштабы турбулентности. Величину C_x^2 можно найти, пользуясь схемой турбулентного перемещивания в атмосфере:

$$C_x^2 = a_1^2 L_0^{4/3} M_x^2, \quad (19)$$

где

$$M_x = \frac{\partial x}{\partial H} \frac{dH}{dh} + \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dh}, \quad H = T + \gamma_a h,$$

H, q — соответственно потенциальная температура и удельная влажность. Для интегрирования (17) перейдем к новым переменным $\xi = x_1 - x_2$, $2\eta = x_1 + x_2$ и воспользуемся тем, что основной вклад в $D(\rho)$ дают области с $\xi < \rho$. В случае плоской земли и в предположении, что изменение коэффициента поглощения с высотой происходит по экспонциальному закону

$$x = (x_{10} + x_{20}) e^{-h/H_{\text{эфф}}}, \quad (20)$$

интегрирование выражения (17) можно провести до конца. В отсутствие внешнего излучения имеем:

$$\begin{aligned} D_{T_a}(\rho) = & \frac{T_0^2}{2} e^{-2x_0 H_{\text{эфф}}/\cos \varphi} \int_0^L d\eta \int_0^\infty d\xi [D_x(\sqrt{\xi^2 + \rho^2}) - D_x(\xi)] + \\ & + \frac{x_0^2}{2} e^{-2x_0 H_{\text{эфф}}/\cos \varphi} \int_0^L d\eta \int_0^\infty d\xi [D_T(\sqrt{\xi^2 + \rho^2}) - D_T(\xi)] \times \\ & \times \left\{ e^{-\eta \cos \varphi / H_{\text{эфф}}} \left[e^{2x_0 H_{\text{эфф}}/\cos \varphi} (1 - e^{-\eta \cos \varphi / H_{\text{эфф}}}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2Ae^{(x_0 H/\cos \varphi)} (1 - e^{-\eta \cos \varphi / H_{\text{эфф}}}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Выберем плоскость наблюдения L в бесконечности и проведем интегрирование для случая, когда коэффициент поглощения описывается выражением (10)

$$\begin{aligned} D_{T_a}(\rho) = & 0,15 \rho^{5/3} x_0 a^2 L_0^{4/3} T_0^2 e^{-2x_0 H/\cos \varphi} \left\{ \left(0,03 + 0,2 \frac{x_{20}}{x_0} \right)^2 \frac{H_{\text{эфф}} x_0}{\cos \varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{(\gamma_a - \gamma_h)}{T_0^2} \left[e^{2x_0 H_{\text{эфф}}/\cos \varphi} - 1 + 2 \frac{5 - \alpha}{\alpha - 1} (e^{x_0 H_{\text{эфф}}/\cos \varphi} - 1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Параметры α и L_0 известны из экспериментальных данных [8]. На высотах порядка 1 км $L_0 \sim 100$ м и коэффициент $a = 2,4$, как это следует из измерений структурных функций температурного поля. Для длинноволновой части дециметрового диапазона всегда $x_0 H/\cos \varphi \ll 1$ и экспоненциальные множители можно разложить в ряд. Для x , данного выражением (11), будем иметь:

$$D_{T_a}(\rho) \approx 0,2 \rho^{5/3} L_0^{4/3} a^2 x_0 (\gamma_a - \gamma_h)^2 \frac{H_{\text{эфф}} x_0}{\cos \varphi}. \quad (23)$$

Для вычисления температуры флюктуаций необходимо знать функцию корреляции $B(0)$, которая для однородной среды равна

$$B(0) = \frac{1}{2} D(\infty) - \frac{1}{2} D(0).$$

В нашем случае $B(0) = \frac{1}{2} D(\infty) \rightarrow \infty$, и поэтому функции корреляции не существует. Однако, поскольку структурная функция (18) не существует на расстояниях, больших внешнего масштаба турбулентности L_0 , для оценок можно принять, что

$$B(0) \simeq \frac{1}{2} D(L_0). \quad (24)$$

В дециметровом диапазоне $x_0 H_{\text{эфф}} \simeq 0,01$, $x_0 \simeq 2 \cdot 10^{-3}$ и

$$\sqrt{\Delta T_a^2} = \frac{0,02^\circ\text{K}}{\sqrt{\cos \varphi}}. \quad (25)$$

В сантиметровом диапазоне флюктуации также описываются выражением (25) [1].

При $x_0 H / \cos \varphi \sim 1$ для вычисления $\sqrt{\Delta T_a^2}$ нужно воспользоваться (21), из которого видно, что с увеличением зенитного угла φ флюктуации увеличиваются,

Флюктуации уровня внешнего сигнала $T_a(0)$ из-за флюктуаций коэффициента поглощения атмосферы можно также вычислить, пользуясь выражением (17).

В случае $T_a(0) \gg T_0$ $D_{T_a}(\rho)$ принимает простой вид:

$$D_{T_a}(\rho) = T_a^2(0) e^{-2 \int_0^x dx} \int_0^x dx_1 \int_0^x dx_2 \left[D_x \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \rho^2} - D_x(x_1 - x_2) \right) \right] = \\ = 0,15 a^2 x_0 \rho^{5/3} L_0^{4/3} T_a^2(0) \left(0,03 + 0,2 \frac{x_{20}}{x_0} \right)^2 \frac{H_{\text{эфф}} x_0}{\cos \varphi} e^{-2x_0 H / \cos \varphi}. \quad (26)$$

Сравнивая (26) и (22), можно видеть, что флюктуации уровня сигнала имеют величину порядка $\frac{T_a(0)}{T_0} \sqrt{\Delta T_a^2}$. Так, в случае приема радиоизлучения Солнца величина флюктуации может достигать нескольких градусов.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 969 (1960).
2. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
3. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 декабря 1962 г.

ON FLUCTUATIONS IN ATMOSPHERIC RADIO EMISSION

K. S. Stankovich, L. N. Bondar'

The variance of atmospheric radio emission temperature is calculated by means of turbulent mixing theory.

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВОДЯНЫМИ ПАРАМИ В ДИАПАЗОНЕ $10\mu \div 2\text{ см}$

С. А. Жевакин, А. П. Наумов

Выполнен расчет поглощения атмосферного водяного пара в диапазоне $10\mu \div 2\text{ см}$ с формой линии, полученной из решения кинетического уравнения, и полуширинами, рассчитанными по теории Андерсона. При вычислениях использовались матричные элементы направляющих косинусов для модели жесткого асимметричного волчка; однако молекулярные термы H_2O брались с учетом центробежного возмущения. Результаты расчета находятся в хорошем согласии с экспериментом.

На распространение сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых радиоволн в атмосфере существенное влияние оказывает молекулярное поглощение газов, обладающих вращательными и колебательными спектрами в этой области. Поглощение из-за вращательных переходов возможно лишь газами, имеющими либо электрический, либо магнитный дипольные моменты. Из основных газов атмосферы сравнительно большими постоянными дипольными моментами обладают кислород и пары воды (соответственно, $\mu_{\text{O}_2} = 1,854 \cdot 10^{-20}$ эрг·гаусс $^{-1}$, $\mu_{\text{H}_2\text{O}} \approx 1,84 \cdot 10^{-18}$ CGSE).

В субмиллиметровой области присутствуют вращательные, а в инфракрасной области — колебательные линии озона [1—3]. Поглощением озона нельзя пренебречь в верхних слоях атмосферы (например, в стратосфере); в условиях же нижней атмосферы полосы поглощения озона перекрываются более интенсивными полосами водяного пара и углекислого газа. Поглощение углекислого газа является существенным в области $12,9 \div 17,1\mu$ [3]. Оно вызвано колебательной полосой CO_2 , центрированной при $\lambda = 14,7\mu$. На сантиметровых и миллиметровых волнах существуют слабые линии CO , NO , NO_2 и N_2O [4,5]. Дипольные моменты перечисленных газов $\sim 0,1$ дебая [6], т. е. примерно в 20 раз меньше дипольного момента H_2O ; к тому же концентрация их не превышает 0,0001% по объему [7], так что эти газы практически не дают вклада в поглощение (верхняя граница отношения коэффициентов поглощения $\gamma_{\text{CO}, \text{NO}, \text{NO}_2, \text{N}_2\text{O}} / \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \sim 10^{-3}$).

При соударениях у неполярных молекул (например, азота, углекислого газа) может появиться индуцированный дипольный момент. Однако поглощение, обусловленное индуцированным дипольным моментом, существенно лишь при высоких давлениях (например, для азота при $P \sim 100$ атм [8]); при обычных же условиях этот эффект пренебрежимо мал по сравнению с поглощением водяных паров и кислорода. Оценки, выполненные согласно [9], показывают, что на миллиметровых волнах $\gamma_{\text{CO}, \text{N}_2} / \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \sim 10^{-6}$.

Поэтому нами было рассчитано лишь поглощение кислородом и водяным паром. В данной статье рассматривается поглощение только водяным паром. Результаты для кислорода будут приведены в другом месте.

Теоретические расчеты коэффициента поглощения водяного пара выполнялись неоднократно. В 1947 г. Ван-Флек [10] рассчитал коэф-

фициент поглощения паров H_2O в диапазоне $1/\lambda = 0,2 \div 16 \text{ см}^{-1}$, позднее Роджерс [11] выполнил более полный расчет (до $1/\lambda = 26 \text{ см}^{-1}$) с учетом линий субмиллиметровой области. Однако эти работы содержат неточности. Так, Ван-Флек рассматривал лишь один квантовый переход $5_{-1} - 6_{-5}$, а влияние остальных линий вращательного спектра H_2O аппроксимировал приближенным выражением. Оба автора [10, 11] в качестве структурного фактора использовали форму линии по Ван-Флеку—Вайскопфу [12], которая, как собирается показать один из авторов данной статьи в другом месте, является неправильной. Кроме того, Ван-Флек и Роджерс полагали, что полуширины спектральных линий водяного пара постоянны по диапазону и равны $0,1 \text{ см}^{-1}$, что не соответствует действительности.

В инфракрасной области спектра для расчетов поглощения обычно используются либо определенные модели полос поглощения (модель равноотстоящих линий одинаковой интенсивности [13], статистическая модель [14]), либо различные полуэмпирические функции поглощения (например, [15, 16]). В работе [17] Эльзассер рассчитал поглощениеарами воды в диапазоне $18,2\mu \div 80\mu$, используя закон квадратного корня, полученный для больших значений массы поглощающего вещества при усреднении функции поглощения по частоте. Обзор перечисленных методов расчета содержится в [3]. Недостатком указанных методов является их ориентировочный характер, причем трудно даже оценить величину ошибки, связанной с применением того или иного способа расчета. Поэтому целесообразно иметь возможно более точный расчет коэффициента поглощения водяных паров.

В настоящей работе проведен расчет коэффициента поглощения водяных паров в диапазоне $2 \text{ см} \div 10\mu$ с учетом всех вращательных линий H_2O (до значения квантового числа полного момента количества движения $J = 12$ включительно), для которых матричные элементы направляющих косинусов жесткого асимметричного волчка* больше или равны 10^{-6} . Таких спектральных линий оказалось 871. Ошибка в коэффициенте поглощения, связанная с неучетом спектральных линий, для которых матричные элементы направляющих косинусов меньше 10^{-6} , составляет менее 0,1% по всему диапазону. Матричные элементы направляющих косинусов брались из работы Швандемана и Лаури [18], а полуширины спектральных линий—из расчетов Бенедикта и Каплана [19]. Термы молекулы H_2O с учетом центробежного возмущения были заимствованы из работы [20]. В качестве формы спектральной линии использовалась форма линии, полученная из решения кинетического уравнения. Более полные данные о поглощении водяным паром миллиметровых и сантиметровых волн (до $\lambda = 32 \text{ см}$) приведены в [21].

1. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Поглощение энергии излучения происходит при переходе молекул газа из нижнего энергетического состояния в более высокое. Формула для интенсивности молекулярного поглощения может быть непосредственно выведена из эйнштейновских коэффициентов перехода. Для коэффициента поглощения γ , следя, например, [22], имеем:

$$\gamma_{lm} = \frac{8\pi^3 v_{lm}}{3hc} (N_l - N_m) |\mu_{lm}|^2 f(v, v_{lm}). \quad (1)$$

* Молекула H_2O является асимметричным волчком.

Здесь под l и m понимается совокупность квантовых чисел, относящихся к невырожденным вращательным квантовым состояниям; ν_{lm} — боровская частота перехода, N_l и N_m — число частиц в 1 см³, находящихся соответственно в нижнем состоянии l и верхнем m , μ_{lm} — матричный элемент дипольного момента μ , который вызывает переход $l \rightarrow m$; множитель $f(\nu, \nu_{lm})$ описывает форму линии поглощения; h и c — постоянная Планка и скорость распространения волны соответственно. В состоянии теплового равновесия

$$N_m/N_l = e^{-h\nu_{lm}/kT}. \quad (2)$$

Для молекул типа асимметричного волчка, имеющих вращательное число J и квантовое число τ , количество молекул в 1 см³, находящихся в нижнем вращательном состоянии J_τ , равно

$$N_l = N_{J_\tau} = N \frac{F_\nu g e^{-E(J, \tau)kT}}{G}, \quad (3)$$

где N — полное число молекул в 1 см³, F_ν — доля молекул в рассматриваемом колебательном состоянии (полагается, что все молекулы находятся в основном электронном состоянии), G — вращательная функция распределения, $E(J, \tau)$ — энергия вращения в состоянии J_τ , g — статистический вес для вырождений, связанных с внутренним и внешним квантовыми числами. Для паров воды низшая колебательная частота $\omega_2 = 1595$ см⁻¹ [23]; поэтому для основного колебательного состояния при средних температурах $F_\nu = 1$ с погрешностью, не превышающей 1% [22].

Подставляя (2) и (3) в (1), получаем:

$$\gamma_{lm} = \frac{8\pi^3 \nu_{lm}}{3hc} \frac{N}{G} (e^{-E_l/kT} - e^{-E_m/kT}) |\mu_{lm}|^2 f(\nu, \nu_{lm}). \quad (4)$$

Соотношение (4) дает коэффициент поглощения для фиксированного перехода на некоторой частоте ν . Для нахождения полного коэффициента поглощения на частоте ν необходимо произвести суммирование по всем квантовым переходам:

$$\gamma = \frac{8\pi^3 N}{3hcG} \sum_{ij} |\mu_{ij}|^2 \nu_{ij} (e^{-E_i/kT} - e^{-E_j/kT}) f(\nu, \nu_{ij}). \quad (5)$$

В работе [12], вышедшей в 1945 г., был подвергнут справедливой критике вывод формулы спектральной линии, обусловленной соударениями, который дал в свое время Лоренц [24]. Согласно Ван-Флеку — Вайскопфу, лоренцовская форма линии в области низких частот не соответствует действительности и должна быть в этой области спектра заменена другой формой, пригодной, по мнению Ван-Флека и Вайскопфа, как в оптическом, так и в радиодиапазонах. С тех пор в радиоспектроскопии широко используется форма линии, полученная в [12]:

$$f(\nu, \nu_{ij}) = \frac{\nu}{\pi \nu_{ij}} \left[\frac{\Delta \nu}{(\nu_{ij} - \nu)^2 + \Delta \nu^2} + \frac{\Delta \nu}{(\nu_{ij} + \nu)^2 + \Delta \nu^2} \right]. \quad (6)$$

Однако, при выводе формулы (6) Вайскопф и Ван-Флек [12] в свою очередь допустили ошибку, состоящую в применении неправильной „модели сильных соударений“, согласно которой как координата, так и скорость оптического электрона после соударения становятся равными тепловым (один из авторов настоящей статьи предполагает остановиться на этом подробнее в другом месте).

Если вместо неправильной „модели сильных соударений“ применить метод кинетического уравнения, то при некоторых идеализациях оказывается возможным определить функцию распределения оптического электрона по скоростям и координатам, устанавливающуюся под действием соударений и внешнего синусоидального электромагнитного поля. Это позволяет найти как мнимую, так и действительную части диэлектрической проницаемости среды и ее зависимость от частоты ν внешнего поля [25]. Мнимая часть диэлектрической проницаемости ϵ при условии $|\epsilon - 1| \ll 1$ определяет коэффициент поглощения среды; таким образом, зная частотную зависимость этого коэффициента, получаем форму спектральной линии поглощения.

Такой способ получения коэффициентов преломления и поглощения, а следовательно, и формы линии поглощения был использован Уленбеком и Ван-Чангом [26]. Последние, взяв в качестве модели оптического электрона классический осциллятор, находящийся под воздействием как внешнего электромагнитного поля, так и соударений молекул окружающей среды, на которые электрическое поле не действует, рассмотрели два случая: 1) масса частицы осциллятора велика по сравнению с массой молекул окружающего газа; 2) отношение масс осциллятора и молекул произвольно; молекулы отталкиваются центральной силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния между ними. К этим двум идеализациям Жевакиным и Стрелковым [27] добавлено рассмотрение третьего случая, когда масса линейного осциллятора, моделирующего молекулу, много меньше массы частиц окружающей среды. Во всех трех идеализациях как по классической, так и по квантовой теории для модели линейного осциллятора в предположении, что время соударений τ_c много меньше периода колебаний внешнего поля $\tau_1 = 1/\nu$, получается одна и та же форма спектральной линии:

$$f(\nu, \nu_{ij}) = \frac{\nu \nu_{ij}}{\pi} \frac{4\Delta\nu}{(\nu_{ij}^2 - \nu^2)^2 + 4\nu^2 (\Delta\nu)^2}, \quad (7)$$

которая и использовалась в настоящей работе.

Хотя реальные условия формирования спектральных линий водяного пара и отличаются от идеализированных условий, принятых в указанных трех случаях*, однако то обстоятельство, что форма спектральной линии (7) обнаруживает особую „устойчивость“, оставаясь одинаковой во всех трех идеализациях, позволяет надеяться, что область применимости формулы (7) шире той области, для которой она строго установлена. Отметим также, что хотя метод кинетического уравнения и предполагает малость времени соударения τ_c в сравнении с периодом колебаний $\tau_1 = 1/\nu$, сказанное позволяет надеяться, что форма (7) может сохраниться и при нарушении условия $\tau_c \ll \tau_1$.

Учитывая, что $\nu_{ij} = -\nu_{ji}$, $f(\nu, \nu_{ij}) = -f(\nu, \nu_{ji})$, $|\nu_{ij}|^2 = |\nu_{ji}|^2$ и в предположении, что структурный фактор $f(\nu, \nu_{ij})$ записан в форме (7), полученной из решения кинетического уравнения, соотношение (5) можно записать в виде

* Так, например, вращательный спектр молекулы H_2O неэквидистантен, т. е. может быть описан только нелинейным осциллятором, притом не с одной, а с тремя степенями свободы; отношение массы молекулы H_2O к массам молекул O_2 и N_2 порядка единицы; силы взаимодействия убывают не как $1/r^5$ и даже не являются центральными: они имеют либо диполь-квадрупольный (H_2O-N_2, O_2), либо диполь-дипольный (H_2O-H_2O) характер.

$$\gamma = 10^6 \log_{10} e \frac{32\pi^2 N}{3hcG\lambda^2} \Sigma_{ij} |\mu_{ij}|^2 \left(\frac{1}{\lambda_{ij}} \right) \times \\ \times |e^{-E_i/kT} - e^{-E_j/kT}| \frac{(\Delta\nu/c)_{ij}}{[(1/\lambda_{ij})^2 - (1/\lambda)^2]^2 + 4(\Delta\nu/c)_{ij}^2 (1/\lambda)^2} d\sigma \cdot \text{км}^{-1}. \quad (8)$$

Множитель $10^6 \log_{10} e$ введен для выражения коэффициента поглощения в $\text{дб} \cdot \text{км}^{-1}$; $(\Delta\nu/c)_{ij}$ — полуширина спектральной линии перехода $i \rightarrow j$ в см^{-1} . Вращательная функция распределения

$$G = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{\tau=-J}^{+J} g_1 (2J+1) e^{-E(J,\tau)/kT}, \quad (9)$$

где g_1 — ядерный статистический вес.

Ядра, образующие молекулу H_2O , имеют спин, отличный от нуля. Поэтому симметричные и антисимметрические состояния имеют различные статистические веса. Для молекулы H_2O антисимметрические состояния имеют статистический вес, превосходящий в три раза статистический вес симметрических состояний (без учета, разумеется, обычного множителя $2J+1$). Окончательно G можно записать так:

$$G = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{\tau=-J}^{+J} [2 - (-1)^{J+\tau}] (2J+1) e^{-E(J,\tau)/kT}. \quad (10)$$

2. РАСЧЕТ ПОГЛОЩЕНИЯ. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА

1. В выражении (8) параметр $(\Delta\nu/c)_{ij}$ характеризует полуширину спектральной линии, т. е. ту расстройку, при которой интенсивность линии убывает вдвое. В атмосфере при нормальных условиях существенно только уширение, обусловленное давлением газа. Андерсон [28] провел подробное исследование уширения линий вследствие столкновений. Бенедикт и Каплан [19], воспользовавшись теорией Андерсона, рассчитали на электронной вычислительной машине ширины линий при соударениях молекул $\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2$. В работе [19] приводятся также расчетные температурные коэффициенты n_{ij} .

Уширение, обусловленное давлением, для перехода $i \rightarrow j$ выражается соотношением

$$\left(\frac{\Delta\nu}{c} \right)_{ij} = 0,9 \left(\frac{\Delta\nu}{c} \right)_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2} \frac{P}{760} \left(\frac{T}{300} \right)^{-n_{ij}}, \quad (11)$$

где $(\Delta\nu/c)_{ij}^{\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2}$ — полуширина линии для перехода $i \rightarrow j$, обусловленная соударением молекул $\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2$ при давлении $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$ и температуре $T = 300^\circ\text{K}$, а множитель 0,9 введен нами в формулу (11) по той причине, что кроме соударений $\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2$ необходимо учитывать соударения $\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}$ и $\text{H}_2\text{O}-\text{O}_2$. Действительно, азот составляет 78%, кислород 21%, водяной пар 1% (при обычной летней влажности 7,5 $\text{г} \cdot \text{м}^{-3}$) от полного числа молекул воздуха. Если учесть, что эффективное сечение соударений $\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}$ примерно в 5 раз больше эффективного сечения соударений $\text{H}_2\text{O}-\text{N}_2$ [29-31]*, а эффективное сечение соударений $\text{H}_2\text{O}-\text{O}_2$ в ~ 3 раза меньше [19], то среднее взвешенное значение полуширины спектральной линии при соударениях H_2O -воздух и $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$, $T = 300^\circ\text{K}$ составит

* В работе Броунштейна [32] вместо указанного фактора ~ 5 получен фактор ~ 100 . Однако по ряду соображений этот результат мы считаем неправильным.

$$(1 \cdot 0,8 + 0,33 \cdot 0,21 + 5 \cdot 0,01) \left(\frac{\Delta v}{c} \right)_{ij}^{H_2O - N_2} \simeq 0,9 \left(\frac{\Delta v}{c} \right)_{ij}^{H_2O - N_2}.$$

В настоящее время надежные измерения полуширин спектральных линий H_2O существуют лишь для перехода $5_{-1} - 6_{-5}$. Для перехода $5_{-1} - 6_{-5}$ ($\lambda_{ij} = 1,35 \text{ см}$) эксперимент дает $(\Delta v/c)_{\text{эксп}} = 0,087 \text{ см}^{-1}$ [29]. Из работы [19] для этого перехода следует $(\Delta v/c)_{\text{теор}} = 0,082 \text{ см}^{-1}$. В инфракрасной области измерения Аделя [33] для переходов $6_5 - 5_1$ ($\lambda_{ij} = 18,64\mu$) и $8_{-3} - 9_{+3}$ ($\lambda_{ij} = 15,99\mu$) дали соответственно $0,12 \text{ см}^{-1}$ и $0,11 \text{ см}^{-1}$. Эти значения, по-видимому, завышены в $2 \div 3$ раза. Из работы [19] следует, что полуширины для отдельных переходов при $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$ и $T = 300^\circ\text{K}$ изменяются от $0,1 \text{ см}^{-1}$ ($1_{-1} - 1_{+1}$) до $\sim 0,03 \text{ см}^{-1}$ ($10_9 - 11_{11}$, $11_{11} - 12_3$, $12_9 - 12_{11}$ и т. д.).

2. Входящий в формулу (8) матричный элемент дипольного момента $|\mu_{ij}|^2$ для молекулярного спектра, для которого возможно представление волновой функции как вращательной части Ψ_R и колебательно-электронной $\Psi_{v,e}$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} |\mu_{ij}|^2 &= \left| \int \Psi_{i\mu}^* \Psi_j d\tau \right|^2 = \Sigma_F \left| \int \Psi_{i\mu_F}^* \Psi_j d\tau \right|^2 = \\ &= \Sigma_F \left| \Sigma_g \int \Psi_{F_i}^* \Phi_{F_g} \Psi_{R_j} d\tau \int \Psi_{v_{lej}}^* \mu_g \Psi_{v_{je}} d\tau \right|^2 = \mu_y^2 \Sigma_F \Sigma_g |\Phi_{F_g}^A|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь μ —дипольный момент молекулы, F —оси неподвижной декартовой системы координат, Φ_{Fg} —направляющие косинусы между неподвижной осью F и подвижной осью g (подвижные оси отождествляются с главными осями молекулы), $\int \Psi_{v_{lej}}^* \mu_g \Psi_{v_{je}} d\tau$ —матричный элемент дипольного момента молекулы в подвижной системе координат. Лишь одна компонента такого матричного элемента (μ_y) отлична от нуля для молекул паров H_2O . С учетом спина ядра (12) окончательно записывается в виде

$$|\mu_{ij}|^2 = [2 - (-1)^{|z|}] \mu_y^2 \Sigma_F \Sigma_g |\Phi_{F_g}^A|^2. \quad (13)$$

В расчетах принималось, что $\mu_y = 1,84 \cdot 10^{-18} \text{ CGSE}$. Величины матричных элементов направляющих косинусов $\Sigma_F \Sigma_g |\Phi_{F_g}^A|^2$ в данной работе находились путем интерполяции (при значении коэффициента асимметрии молекулы $H_2O x = -0,436$) из работы Швандемана и Лаури [18].

3. Энергетические термы молекулы H_2O брались из работы Бенедикта, Классена и Шоу [20], где они вычислены из экспериментальных данных, т. е. с учетом центробежного возмущения. Поэтому в получаемых из этих термов длинах волн соответствующих спектральных линий λ_{ij} учтено центробежное возмущение.

Число молекул H_2O в $1 \text{ см}^3 N$ может быть выражено через плотность водяных паров ρ по формуле:

$$N = 10^{-6} \frac{N_0}{\eta} \rho \quad (14)$$

($N_0 = 6,025 \cdot 10^{23}$ — число Авогадро, η — молекулярный вес воды, ρ в $\text{г} \cdot \text{м}^{-3}$). Подставляя (11), (13), (14) в (6) и заменяя $E_i = \nu_i h c$, где ν_i и ν_j — термы молекулы H_2O в см^{-1} , имеем:

$$\gamma = \frac{0,26085 \cdot 10^5}{G(T)} \rho \frac{1}{\lambda^2} \sum_{ij} \frac{1}{\lambda_{ij}} |\beta_{ij}| e^{-\nu_i \hbar c / kT} - e^{-\nu_j \hbar c / kT} | \times \\ \times \frac{0,9 (\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2} (T/300)^{-n_{ij}} P/760}{[(1/\lambda_{ij})^2 - (1/\lambda)^2]^2 + 4 [0,9 (\Delta\nu/c)_{ij}^{H_2O-N_2} (T/300)^{-n_{ij}} P/760]^2 (1/\lambda)^2} \partial \sigma \cdot \text{км}^{-1}, \quad (15)$$

где $\beta_{ij} = [2 - (-1)^{|\tau|}] \Sigma_F \Sigma_g |\Phi_{Fg}^A|^2$. Множитель

$$G(T) = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{\tau=-J}^{+J} (2J+1) [2 - (-1)^{|\tau|}] e^{-E(J, \tau)/kT}$$

специально не вычислялся, а был взят из работы [17], где он получен с учетом центробежного возмущения.

Расчет поглощения был выполнен при $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ для следующих параметров атмосферы:

- 1) $T = 293^\circ\text{K}$, $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$,
- 2) $T = 253^\circ\text{K}$, $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$,
- 3) $T = 223^\circ\text{K}$, $P = 198 \text{ мм рт. ст.}$,
- 4) $T = 214^\circ\text{K}$, $P = 42 \text{ мм рт. ст.}$.

Последние две пары значений T , P отвечают примерно условиям, существующим в земной атмосфере на высотах $H=10 \text{ км}$ и $H=20 \text{ км}$. В настоящей статье приводятся результаты поглощения только на уровне Земли: $T = 293^\circ\text{K}$, $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$; для остальных указанных пар значений T , P расчеты даны в [34].

4. Оценим точность наших расчетов. Возможные неточности связаны с неучетом центробежного возмущения при вычислении сил осцилляторов отдельных линий, что ведет к ошибке в величине коэффициента поглощения, увеличивающейся от 1% на длинных субмиллиметровых до 25% на волнах $\lambda \approx 10\mu$, с разбросом значений дипольного момента молекулы μ_y и с неточностью ширин спектральных линий, взятых нами из расчетов Бенедикта и Каплана. Что касается формы спектральной линии, полученной методом кинетического уравнения, то, поскольку этот метод существенно предполагает малость времени соударений τ_c в сравнении с периодом внешнего электромагнитного поля $\tau_1 = 1/\nu$, эта форма, строго говоря, справедлива лишь в этом предположении. Время соударений $\tau_c \sim 10^{-13} \text{ сек}$, тогда как при $\lambda = 100\mu$ период колебаний $\tau_1 = 3 \cdot 10^{-13} \text{ сек}$. Поэтому при периодах колебаний $\tau_1 > 3 \cdot 10^{-13} \text{ сек}$ ($\lambda > 100\mu$) следует ожидать, что получение формы спектральной линии с помощью кинетического уравнения не должно привести к существенным ошибкам. Совпадение расчетного коэффициента поглощения в окне прозрачности $\lambda = 8 + 12\mu$ с экспериментальным значением свидетельствует о том, что указанная форма линии хорошо соответствует эксперименту и на более коротких волнах, на которых условие $\tau_c \ll \tau_1$ не выполняется.

Величина дипольного момента молекулы H_2O неодинакова для различных спектральных линий. Для перехода $5_{-1} - 6_{-5}$ эта величина по ряду экспериментальных работ (см., например, [35]) равна 1,94 дебая. Средняя измеренная величина равна $1,84 \cdot 10^{-18} \text{ CGSE}$. Эта величина μ_y и бралась для расчета. Так как, согласно [35], дипольный момент H_2O для разных квантовых переходов может отличаться на $\pm 5\%$ от значения $1,84 \cdot 10^{-18} \text{ CGSE}$, неточность наших расчетов из-за вариаций μ_y от линии к линии можно оценить в $\pm 10\%$. Основная неточность расчетов коэффициента поглощения в диапазоне волн

$\lambda > 100\mu$, в котором основной вклад дают спектральные линии, возникающие при переходах между энергетическими уровнями с малыми квантовыми числами J , связана с неточностью принятых нами теоретических значений ширины спектральных линий. Эту неточность трудно оценить; она, по-видимому, не превосходит 20%*.

† В диапазоне $\lambda < 100\mu$, в котором основную роль начинают играть спектральные линии, отвечающие переходам между энергетическими уровнями с большими квантовыми числами J , к этой ошибке добавляется ошибка $\pm 25\%$, возникающая из-за неучета центробежного возмущения в матричных элементах направляющих косинусов.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ПОГЛОЩЕНИЯ

Расчет поглощения радиоволн водяными парами в диапазоне $2 \text{ см} \div 10\mu$ выполнялся по формуле (15). Для выяснения влияния структурного фактора $f(\nu, \nu_{ij})$ был сделан также расчет по формуле, в которой использовалась форма линий Ван-Флека и Вайскопфа. На рис. 1—15 представлены результаты расчета: кривая 1 изображает коэффи-

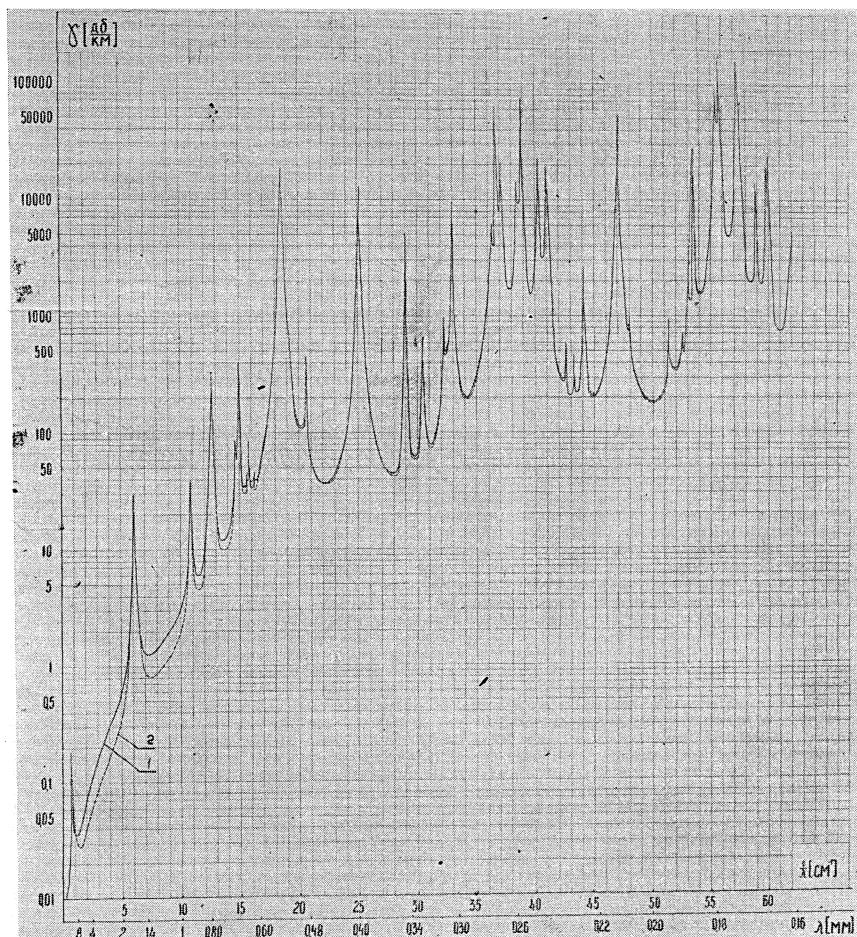


Рис. 1.

* При большей величине погрешности трудно ожидать удовлетворительного согласия расчетов с измерениями поглощения в окнах прозрачности субмиллиметровых волн (см. ниже).

циент поглощения, вычисленный с формой линий по кинетическому уравнению, кривая 2—с формой линий по Ван-Флеку — Вайскопфу. В обоих случаях $T = 293^{\circ}\text{K}$, $P = 760 \text{ mm. rt. st.}$, $\rho = 7,5 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$.

Из сравнения результатов расчетов видно, что в области 0,6 $\text{mm} \div 30\mu$, несмотря на значительное отличие форм линий в крыльях,

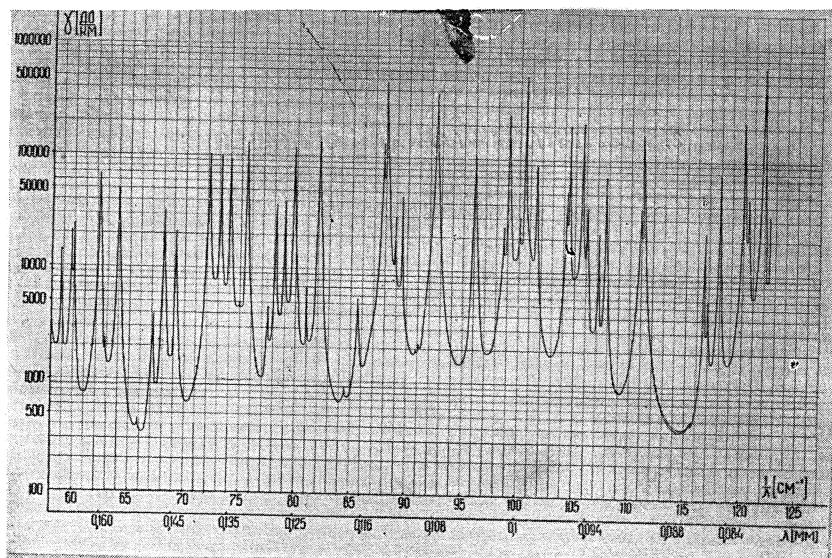


Рис. 2.

они ведут к мало разнящимся значениям коэффициентов поглощения (последнее связано с тесным расположением спектральных линий в этой области спектра и с тем обстоятельством, что вблизи центра линии различные формы близки друг к другу). Правда, вне указанного диапазона разница в коэффициентах поглощения значительна. На миллиметровых волнах она достигает двух раз; в области известного инфра-

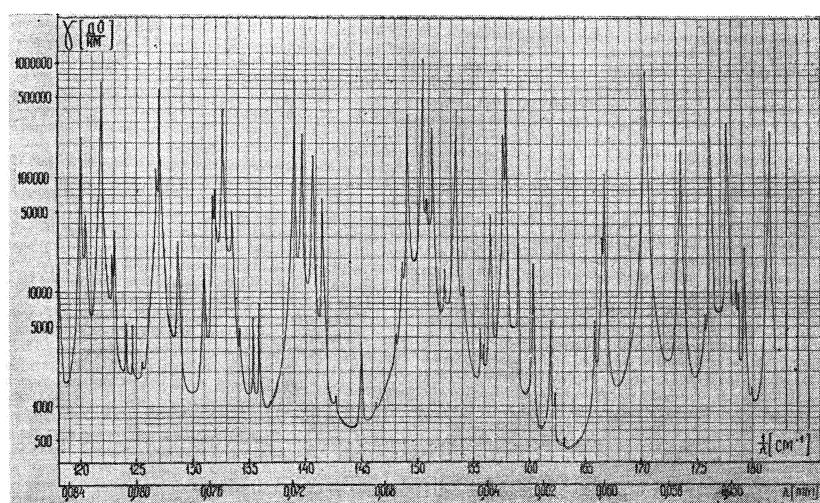


Рис. 3.

красного окна прозрачности $\lambda \sim 10\mu$ коэффициент поглощения с формой линии по кинетическому уравнению равен $0,55 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$, в то время как поглощение с формой линии по Ван-Флеку—Вайсконфу в этой области составляет около $20 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$. Таким образом, расчет поглощения с формой линии по Ван-Флеку—Вайсконфу вопреки действительности приводит к отсутствию окна прозрачности при $\lambda \sim 10\mu$.

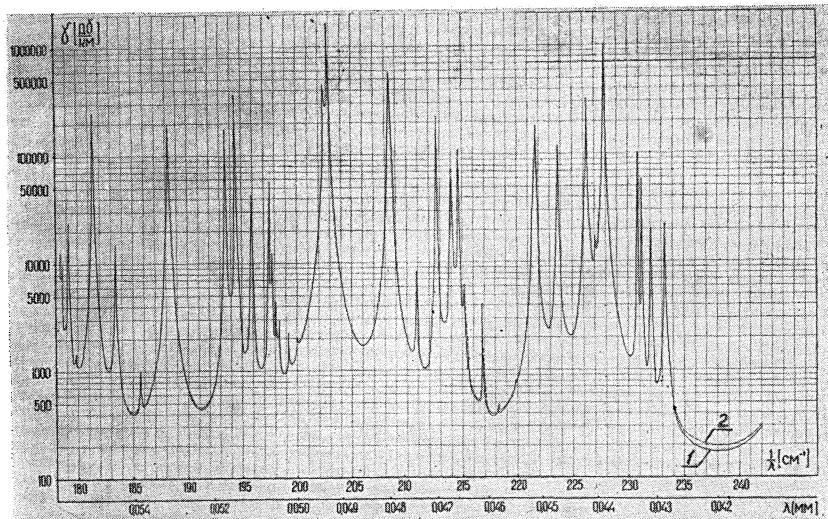


Рис. 4.

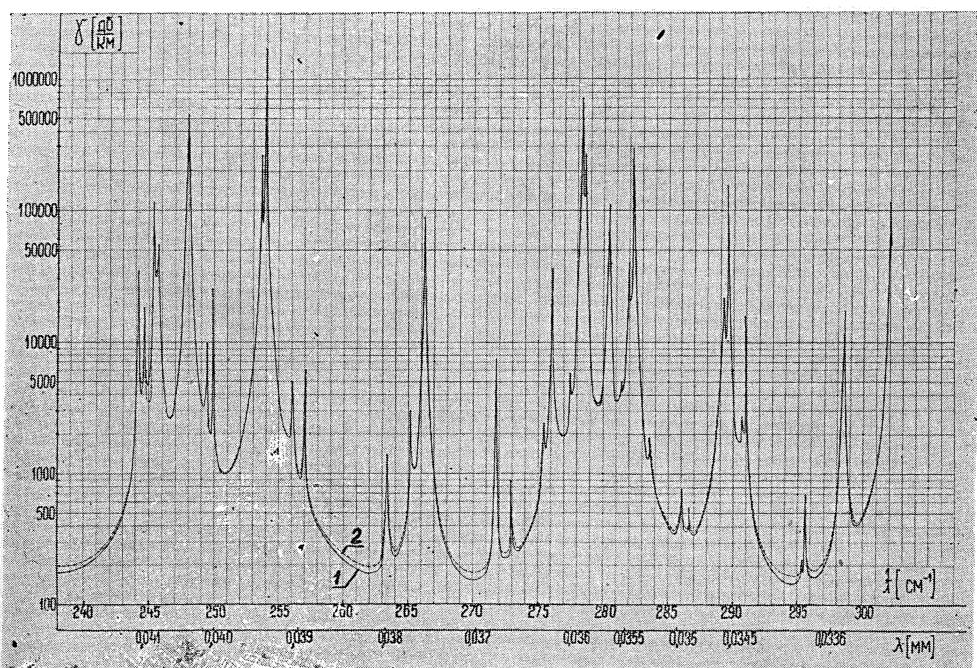


Рис. 5.

Из формулы (15) нетрудно установить общие закономерности для коэффициента поглощения.

Коэффициент поглощения γ пропорционален плотности водяных паров. Так будет при относительно небольших концентрациях водяного пара, которые только и имеются в земной атмосфере; при значи-

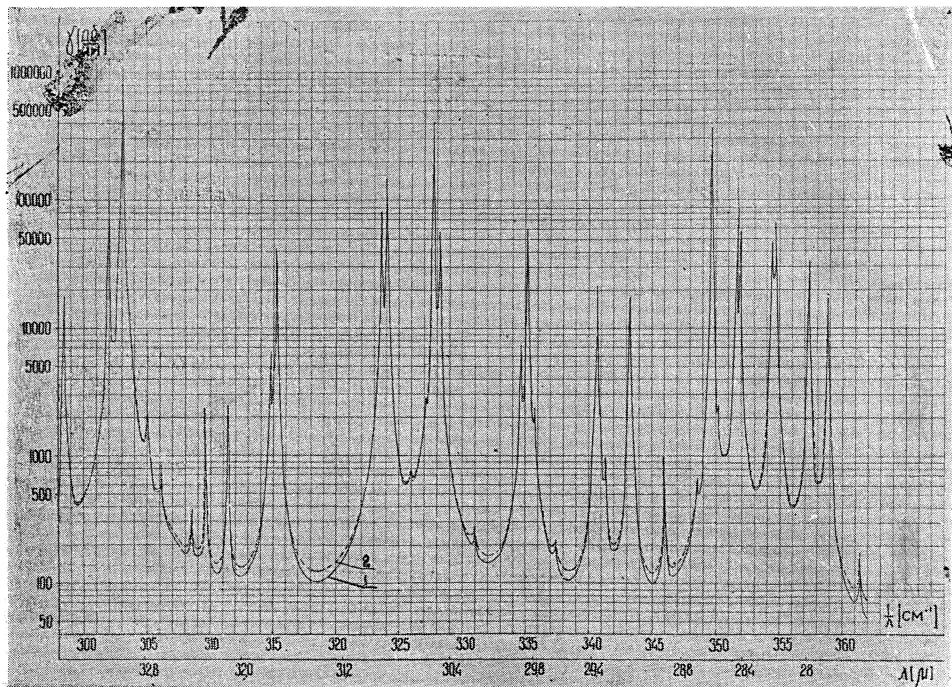


Рис. 6.

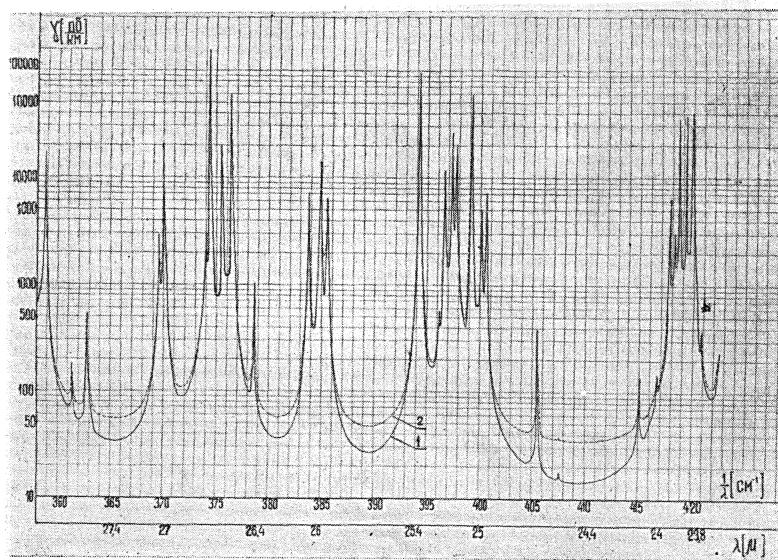


Рис. 7.

тельных концентрациях (достижимых только в лабораторных условиях) наступит отклонение от пропорциональности (в сторону увеличения) из-за роста роли соударений типа $\text{H}_2\text{O}-\text{H}_2\text{O}$.

Пропорциональная зависимость γ от ρ позволяет переходить от значения абсолютной влажности $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$, принятой в расчетах, к любому другому значению влажности атмосферы. Равным образом

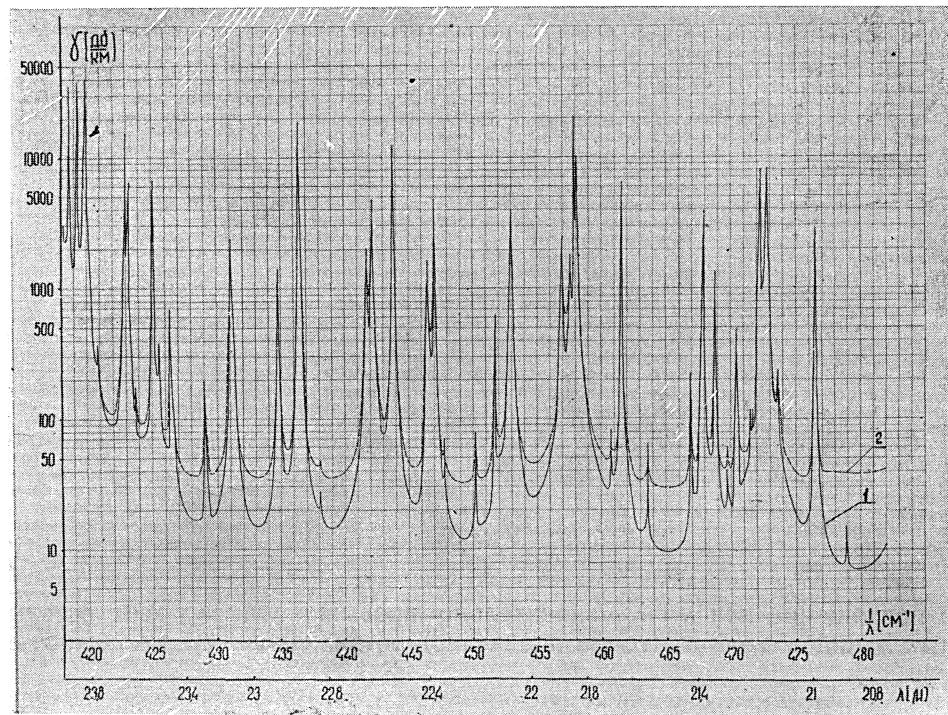


Рис. 8.

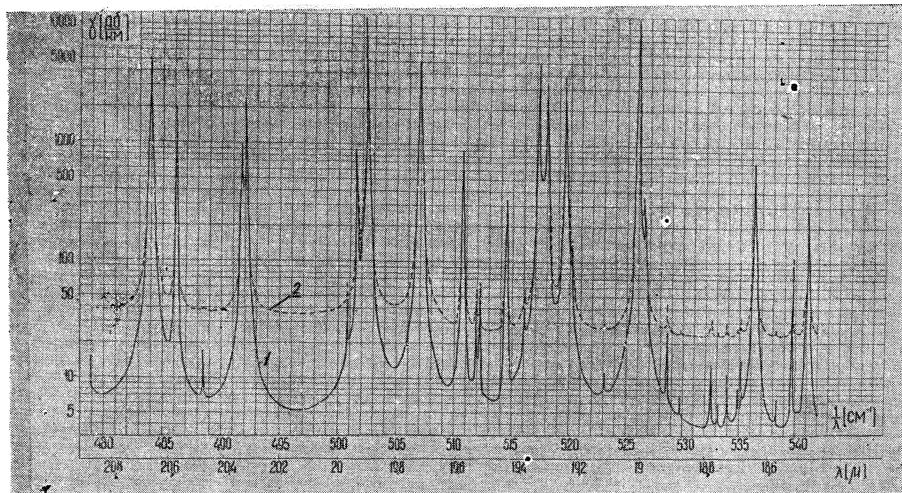


Рис. 9.

легко установить зависимость коэффициента поглощения γ от давления P (при постоянной температуре). Из формулы (15) видно, что коэффициент поглощения в центрах линий (резонанс $\lambda = \lambda_{ij}$) обратно пропорционален давлению P (в том случае, если вклад данной линии

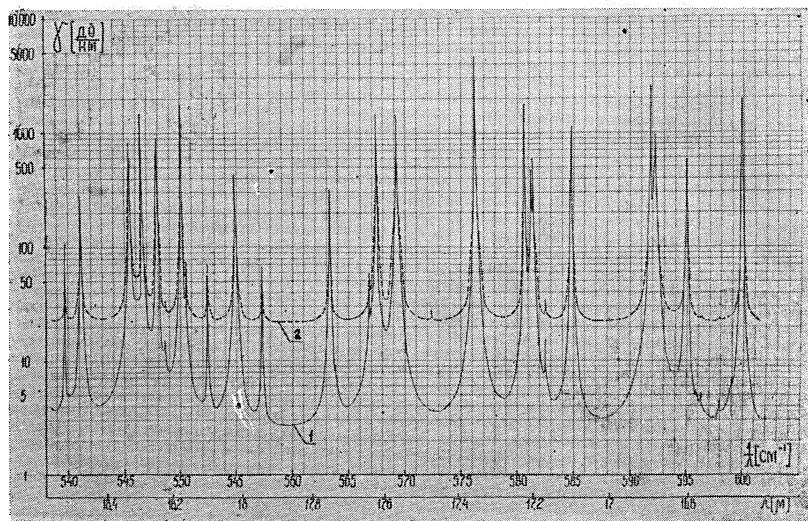


Рис. 10.

в поглощение при $\lambda = \lambda_{ij}$ значительно превышает вклад всех остальных линий в этой же точке диапазона), тогда как вне резонанса, т. е. при

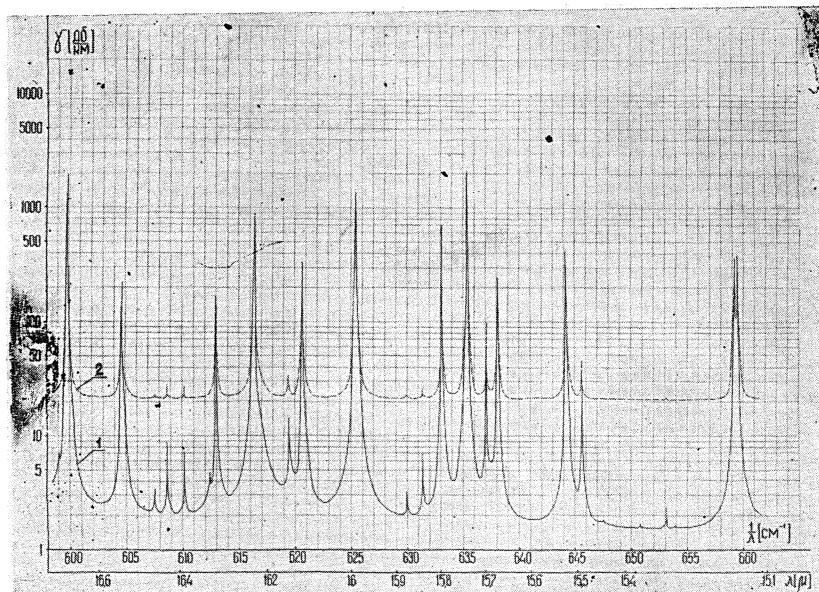


Рис. 11.

$$\left[\left(\frac{1}{\lambda_{ij}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \right]^2 \gg 4 \left[0,9 \left(\frac{\Delta\nu}{c} \right)_{ij}^{H_2O-N_2} \left(\frac{T}{300} \right)^{-n_{ij}} \left(\frac{P}{760} \right) \right]^2 \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 \quad (16)$$

он прямо пропорционален давлению P . В узкой области резонанса $\nu - \nu_{ij} \sim \Delta\nu_{ij}$ зависимость γ от P носит сложный характер.

На сантиметровых, миллиметровых и ближних субмиллиметровых

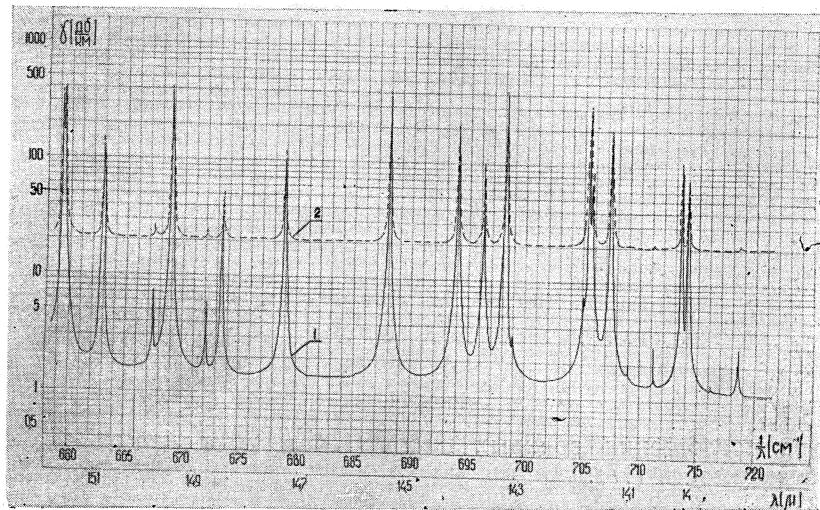


Рис. 12.

волнах (до $\lambda \approx 0,2$ м.м.) температурную зависимость коэффициента поглощения в окнах прозрачности можно представить в виде

$$\gamma \sim 1/T \quad (17)$$

(см. также рис. 1 работы [34]). Для резонансных частот спектральных линий в указанной области выполняется соотношение $\nu_{ij} \ll kT/\hbar$. Мож-

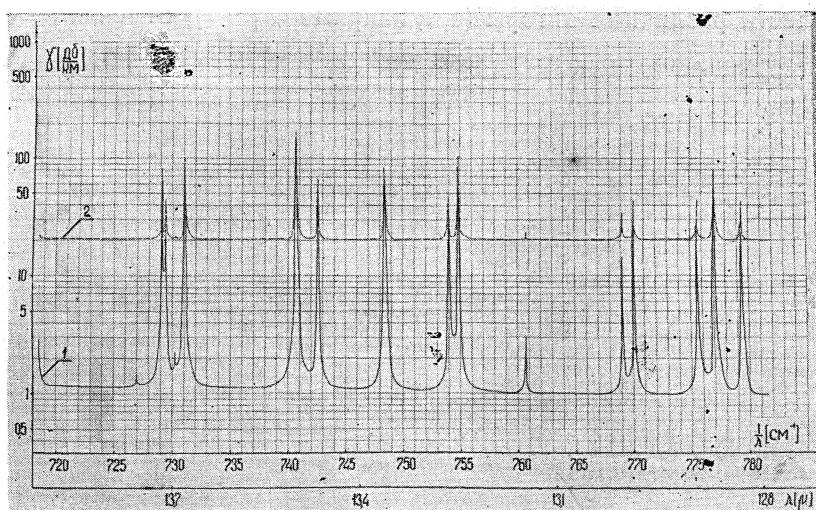


Рис. 13.

но показать, что для первых двух десятков квантовых переходов ($5_1 - 6_5$, $2_2 - 3_2$ и т. д.) функции $e^{-E_i/kT} T^{-n_{ij}} \sim T$. Тогда с учетом соотношений $\nu_{ij} \ll kT/h$ и $G(T) \sim T$ из общего выражения для коэф-

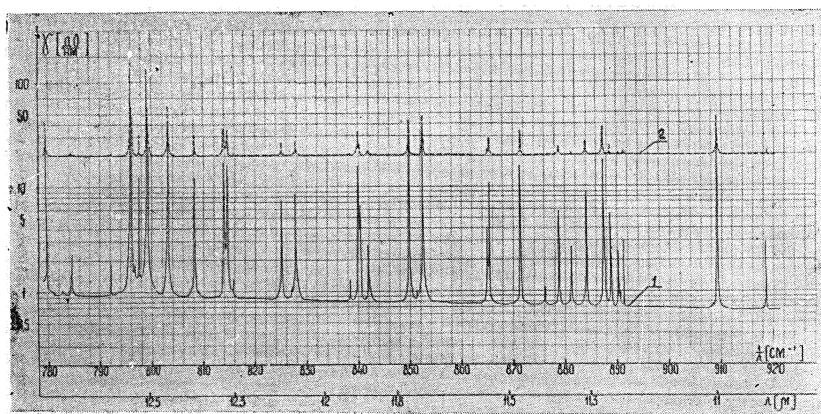


Рис. 14.

фициента поглощения водяных паров (15) легко получить вне резонанса зависимость (17).

4. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В первую очередь интересно сопоставить теоретический коэффициент поглощения с данными эксперимента на обоих концах вращательного спектра паров воды — в миллиметровом диапазоне волн и в диапазоне $\lambda \sim 10\mu$, ибо именно на этих концах приобретает значение форма спектральной линии в крыльях и степень соответствия теоретических результатов опыту при той или иной форме линии позволяет судить о правильности формы линии (в середине диапазона вращательного спектра паров воды выбор той или иной формы линии мало сказывается на результатах, см. раздел 3).

При сравнении теории Ван-Флека с экспериментом в миллиметровой области различные авторы (см., например, [36, 37]) отмечали плохое

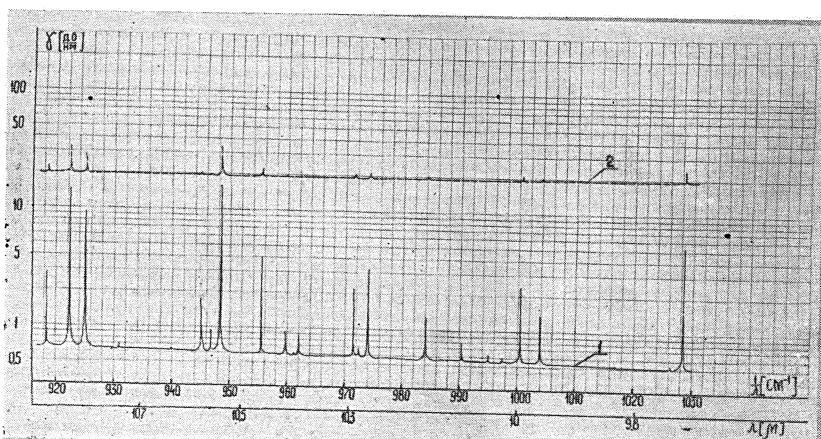


Рис. 15.

их соответствие („аномалии поглощения“). Аналогичное сравнение в этом диапазоне с коэффициентом поглощения, вычисленным в данной работе, детально рассматривается в [21]. Здесь же необходимо отметить, что при форме спектральной линии по Ван-Флеку—Вайскопфу расчет коэффициента поглощения приводит в миллиметровой области к результатам [10], которые в ~ 3 раза меньше экспериментальных, а в области $\lambda \sim 10\mu$ —к поглощению, в ~ 40 раз большему экспериментального ($20 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$, см. рис. 15, вместо $\sim 0,5 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ из эксперимента [38]). Напротив, наши расчеты коэффициента поглощения при форме спектральной линии из кинетического уравнения приводят к хорошему согласию с экспериментом, давая на миллиметровых волнах поглощение в 2 раза больше в сравнении с поглощением по Ван-Флеку (таким образом, расхождение с экспериментом уменьшается с 3 до 1,5 раз), а на волнах $\lambda \approx 10\mu$ —поглощение $0,55 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$, т. е. совпадающее с экспериментальным значением*. Хотя в литературе по инфракрасной спектроскопии в дальней области спектра водяных паров приводился неоднократно (см., например, [39–46]), во всех этих работах отсутствуют данные, по которым можно было бы определить коэффициент поглощения.

Особняком здесь стоит работа Гебби [47], в которой, строго говоря, такие данные хотя и отсутствуют, однако они могут быть восполнены при помощи предположений, стоящих, несомненно, недалеко от истины. Гебби опубликовал результаты измерения при помощи двухлучевого интерферометра и теплового детектора инфракрасного излучения типа Голея интенсивности излучения Солнца, проходящего через атмосферу Земли. При обработке этих данных, принимая для зависимости давления от высоты формулу $P = P_0 e^{-H/8,4}$, для коэффициента поглощения в окнах прозрачности $\gamma = \gamma_0 e^{-H/2,1}$ [48] и учитывая линейное (вне центров линий поглощения) уменьшение γ с давлением, получаем при количестве „осажденной воды“ 0,2 г в опыте Гебби и абсолютной влажности на уровне моря $7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ эффективный путь для солнечного излучения $l_{\text{эфф}} = 0,141 \text{ км}$. Если обозначить интенсивность излучения Солнца перед входом в атмосферу I_0 , а интенсивность на высоте расположения приемника через I , то величина поглощения в $\text{дБ} \cdot \text{км}^{-1}$, отнесенная к приземному слою, будет равна

$$\gamma = \frac{10 \cos \theta}{l_{\text{эфф}}} \lg_{10} (I_0/I), \quad (18)$$

где θ —зенитный угол Солнца, а $l_{\text{эфф}}$ выражено в км. Зависимость интенсивности излучения Солнца от длины волны определяется законом Релея—Джинса:

$$I_0 = A/\lambda^2, \quad (19)$$

где A —постоянная, зависящая от температуры Солнца T_S .

Так как график Гебби заходит в ближнюю (со стороны длинных волн) субмиллиметровую область, в которой поглощение не только рассчитывалось, но измерялось и экспериментально, то оказывается возможным надежное определение константы A . В минимуме поглощения при $1/\lambda \approx 11,5 \text{ см}^{-1}$, согласно теории (см., например, рис. 1), коэффициент поглощения равен $6,1 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$. Измерения, выполненные

* Результаты расчета Роджерса [11] в диапазоне $0,72 \text{ м} \div 5 \text{ см}$ мало отличаются от результатов Ван-Флека. Отличие результатов Роджерса от приведенных в настоящей работе полностью объясняется различием в принятых ширинах и формах спектральных линий, за исключением большого расхождения на волне $\lambda \approx 0,63 \text{ мм}$. Проверка показала, что, по-видимому, это расхождение связано с неправильным значением матричного элемента направляющих косинусов, принятого в [11] для спектральной линии 5₅—6₁.

в [49], находятся в хорошем согласии с расчетами настоящей работы. Тессинг и Каплан [50] в этом же окне прозрачности приводят данные, в ~ 3 раза превышавшие расчетные; однако, как подробно показано в [49], коэффициент поглощения, полученный Тессингом и Капланом, носит далеко не экспериментальный характер. Дело в том, что в работе [50] коэффициент поглощения водяных паров непосредственно не измерялся, а был определен путем пересчета из измерений солнечного излучения в широкой полосе миллиметрового диапазона при весьма нестрогих предположениях.

Поэтому для определения константы A мы использовали значение $\gamma \approx 6,1 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ при $1/\lambda = 11,5 \text{ см}^{-1}$. В качестве нулевого уровня, от которого отсчитывались значения интенсивности солнечного излучения в работе [47], мы взяли касательную к самой нижней точке кривой Гебби. При таком выборе нулевой линии все интенсивности положительны. Кроме того, нетрудно убедиться, что смещение (в разумных пределах) нулевой линии от выбранного нами положения мало влияет на величину получаемого в дальнейшем коэффициента поглощения для окон прозрачности. Подставляя полученные выше значения в формулу (18), получаем при $1/\lambda = 11,5 \text{ см}^{-1}$ $A = 0,0686$. Пользуясь формулой $\gamma = (10 \cdot 0,649 / 0,141) \lg_{10} (0,0686 (1/\lambda)^2 I^{-1})$, мы подсчитали те значения поглощения γ , отнесенные к приземному слою атмосферы, которые получаются из графика Гебби при принятых нами условиях. Эти значения представлены кривой 2 на рис. 16. Из рис. 16 видно, что результаты эксперимента Гебби приводят к значению поглощения

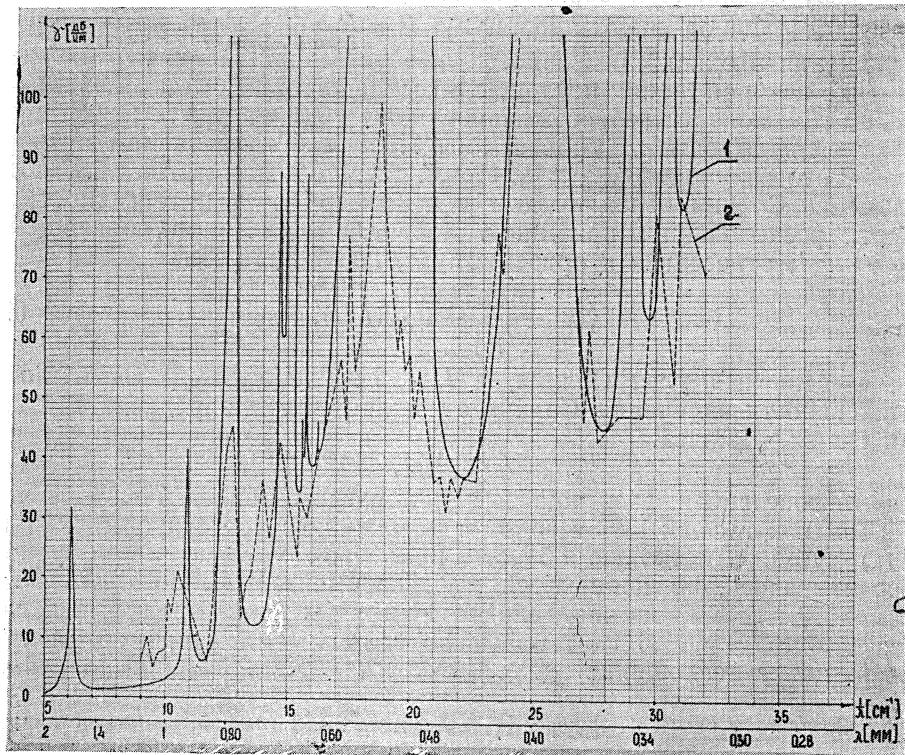


Рис. 16. Величина поглощения воздуха в $\text{дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ при абсолютной влажности $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$, $P = 760 \text{ мм рт. ст.}$, получающаяся из измерений Гебби (кривая 2). Кривой 1 нанесены теоретические значения коэффициента поглощения.

в окнах прозрачности, близкому к теоретическим значениям. При этом разрешающая сила прибора в опыте Гебби была столь велика ($0,2 \text{ см}^{-1}$), что поглощение в полученных им окнах прозрачности не искажено за счет усреднения. Отметим, что вне окон прозрачности из-за малой интенсивности принимаемого от Солнца излучения и связанными с этим большими ошибками измерения в работе Гебби вообще нельзя ожидать совпадения экспериментальных и теоретических результатов. Эксперимент Гебби подтверждает как наличие двух относительных окон прозрачности субмиллиметровой области вблизи $\lambda = 0,45 \text{ м}\mu$ и $\lambda = 0,36 \text{ м}\mu$, так и теоретически полученные для этих окон значения коэффициентов поглощения $\gamma = 37 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ и $\gamma = 45 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$.

Ярославский и Станевич [51] измерили коэффициент поглощения водяных паров в диапазоне $2500 \pm 20\mu$. Если эти данные пересчитать к абсолютной влажности $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ (в оригинале результаты приведены для влажности $\rho = 10,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$), то из сравнения следует, что результаты авторов [51] сильно расходятся с теоретическими. Они расходятся также и с данными работы [47]. В диапазоне $\lambda = 0,95 \pm 0,8 \text{ м}\mu$, согласно [51], коэффициент поглощения оказывается равным $\gamma = 150 \pm 300 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$.

Легко видеть, если бы непрозрачность атмосферы в этом диапазоне была столь велика, то Гебби при указываемом им количестве „осажденной воды“ $0,2 \text{ см}$ в атмосфере над высотой 3450 м не только не смог бы разрешить и идентифицировать ряд линий поглощения солнечного излучения в этом слое атмосферы, но и вообще не смог бы „увидеть“ Солнце в этом участке диапазона. Действительно, так как абсолютная влажность $7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ отвечает слою осажденной воды $0,75 \text{ см}$ на 1 км , то, если, согласно [51], положить $\gamma = 200 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$, поглощение в толще атмосферы над высотой 3450 м будет равно $200 \cdot 0,2 / 0,75 = 53 \text{ дБ}$ (мы не приняли здесь во внимание малых и взаимно компенсирующих друг друга эффектов увеличения поглощения из-за наклонного падения в $1/\cos \theta$ и уменьшения поглощения из-за уменьшения ширин спектральных линий с высотой). Таким образом, интенсивность Солнца при коэффициенте поглощения $\gamma = 200 \text{ дБ} \cdot \text{км}^{-1}$ будет ослаблена более чем в 10^5 раз, что означает, что Гебби не мог бы с высоты 3450 м принимать солнечное излучение. Данные Ярославского и Станевича расходятся и с измерениями Рядова, Фурашова и Шаронова [49]. Отмеченные обстоятельства свидетельствуют о неизвестности измерений [51] на рассматриваемом участке спектра. На волнах $35 \div 150\mu$ результаты авторов [51] меньше вычисленного поглощения в $\sim 3 \div 5$ раз. В диапазоне $60\mu \div 220\mu$ спектрометрические измерения коэффициента поглощения паров H_2O , выполненные Фурашовым [52], находятся в значительно лучшем согласии с нашими расчетами, нежели измерения Ярославского и Станевича.

Подводя итог краткому сопоставлению теоретических и экспериментальных результатов поглощения миллиметровых и субмиллиметровых волн в водяных парах, можно заключить, что, если не говорить об отмеченном выше и установленном многими авторами расхождении между теоретическим и экспериментальным значениями коэффициента поглощения в $\sim 1,5$ раза в окнах миллиметрового диапазона, в настоящее время нет каких-либо надежных данных, свидетельствующих о расхождении теории с экспериментом.

5. ОКНА ПРОЗРАЧНОСТИ ДЛЯ СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛН В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ

На сантиметровых и миллиметровых волнах (до $\lambda \sim 2 \text{ м}\mu$) существенный вклад в поглощение вносят молекулы атмосферного кислорода. На волнах короче $2 \text{ м}\mu$ поглощение в атмосфере полностью

определяется водяными парами, что отмечалось выше. На рис. 17 кривой 1 изображен суммарный коэффициент поглощения γ_A в водяных парах и кислороде воздуха при $T = 293^\circ$, $P = 760$ мм рт. ст. и абсолютной влажности $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$. Кислородное поглощение вычислялось аналогично тому, как это было сделано Роджерсом, с той разницей, что вместо формы спектральной линии Ван-Флека—Вайсконфа была

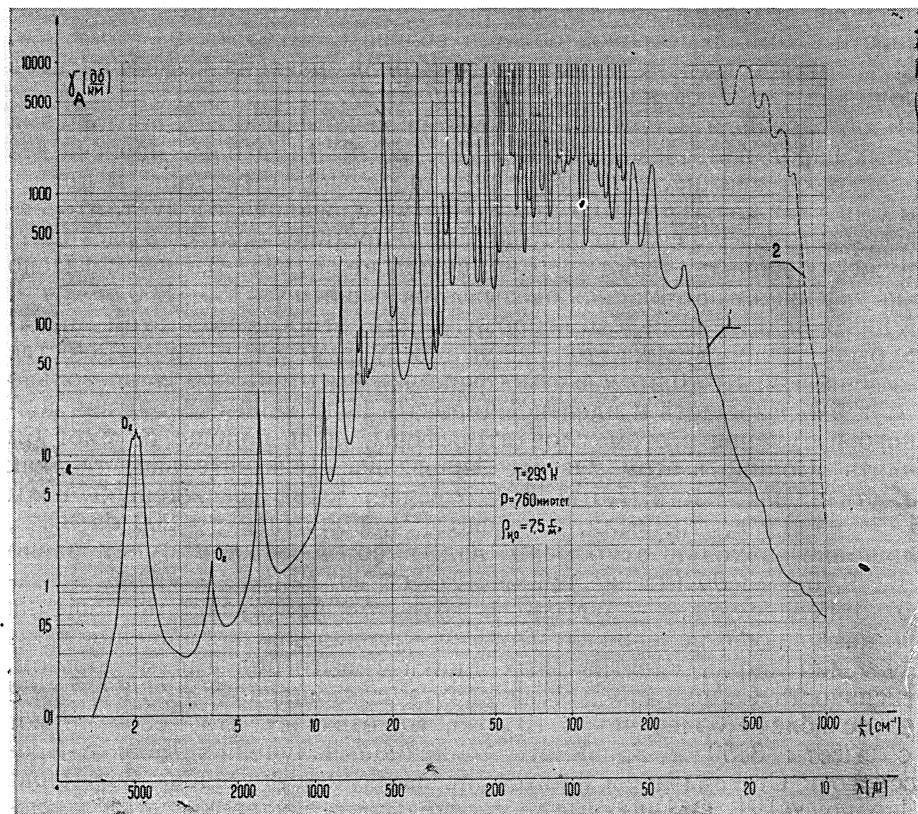


Рис. 17. Коэффициент поглощения γ_A атмосферных водяного пара и кислорода в диапазоне $7 \text{ мкм} \div 10 \mu$ при $T = 293^\circ\text{K}$, $P = 760$ мм рт. ст. и абсолютной влажности $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ (кривая 1). Кривой 2 изображена огибающая максимумов поглощения в инфракрасной области (кривая 1 в этой области спектра изображает огибающую минимумов поглощения).

использована форма линии по кинетическому уравнению. Результат оказался весьма близким к расчету Роджерса, приведенного в работе [53]. Кривой 2 на рис. 17 изображена огибающая максимумов поглощения в инфракрасной области. Кривая 1 в этой области спектра изображает огибающую минимумов поглощения. Окна прозрачности расположены вблизи длин волн, представленных в таблице 1.

Таблица 1
Коэффициент поглощения γ в окнах прозрачности субмиллиметрового диапазона
($T = 293^\circ$, $P = 760$ мм рт. ст., $\rho = 7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$)

$\lambda (\text{мкм})$	0,85	0,72	0,6	0,46	0,35	0,020	0,018	0,015	0,013	0,010
$\gamma (\delta\text{Б} \cdot \text{км}^{-1})$	6	14	35	37	45	5	3	1,5	1,1	0,54

Следует отметить, что летом абсолютная влажность приземного слоя всюду примерно одинакова. Так, в пустыне Сахара она только в ~ 2 раза меньше, чем в средней полосе Советского Союза. В некоторых районах северо-востока Азии (северо-восточный Китай, Арктика, район Верхоянска), где в январе упругость водяного пара из-за вымораживания падает до $0,1 \text{ мм} \div 0,025 \text{ мм}$, а при температуре -70°C в районе Верхоянска может уменьшаться до $0,003 \text{ мм}$ рт. ст. [54] (против упругости $7,6 \text{ мм}$ рт. ст., отвечающей абсолютной влажности $7,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$), поглощение в окнах прозрачности становится малым (см. таблицу 2).

Таблица 2

Коэффициент поглощения γ_A ($\text{дБ} \cdot \text{км}^{-1}$) приземной атмосферы в январе в районе Верхоянска

Температура атмосферы	$\lambda (\text{мм})$							
	8	1,3	0,85	0,72	0,60	0,50	0,46	0,36
-40°C	0,032	0,024	0,022	0,038	0,15	0,38	0,14	0,17
-70°C	0,032	0,020	0,0032	0,0054	0,021	0,054	0,02	0,02

В таблице 2 значения поглощения при $\lambda = 8 \text{ мм}$ и $1,3 \text{ мм}$ получены с учетом кислородного поглощения.

Изменение коэффициента поглощения атмосферного водяного пара с высотой в окнах прозрачности и во всем диапазоне $2 \text{ см} \div 10 \mu$ подробно обсуждается в [34].

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность С. И. Альберу за программирование и решение данной задачи на электронно-вычислительной машине. Авторы признательны также И. А. Раковой и М. Б. Флаксман за обработку результатов расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. K. Gora, J. Mol. Spectroscopy, 3, 78 (1959).
2. H. A. Gebbie, N. W. B. Stone, C. D. Shaw, Nature, 187, 765 (1960).
3. К. Я. Кондратьев, Лучистый теплообмен в атмосфере, Гидрометеоиздат, Л., 1956.
4. S. N. Ghosh and V. Malavija, J. Atm. Terr. Phys., 21, 243 (1961).
5. C. O. Britt, C. W. Tolbert, A. W. Straiton, J. Res. NBS, 65-D, 15 (1961).
6. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ГИИЛ, М., 1958.
7. Р. М. Гуди, Физика стратосферы, Гидрометеоиздат, Л., 1958.
8. R. Heastie, D. H. Martin, Canad. J. Phys., 40, 122 (1962).
9. A. A. Maryott, G. Birnbaum, J. Chem. Phys., 36, 2026 (1952).
10. J. H. Van Vleck, Phys. Rev., 71, 425 (1947).
11. T. Rogers, Proc. of the conference on radio meteorology, 9–12 November, Univ. of Texas, 1953.
12. J. H. Van Vleck, V. E. Weiskopf, Rev. Mod. Phys., 17, 227 (1945).
13. W. M. Elsasser, Heat transfer by infrared radiation in the atmosphere, Mc. Millan, Harvard, 1942.
14. R. M. Goody, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 78, 165 (1952).
15. А. И. Лебединский, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., (астрономия), № 31, вып. 3, 49 (1939).
16. Б. Г. Кастрон, Труды ЦАОС, вып. 3, 127 (1948).
17. W. M. Elsasser, Astrophys. J., 87, 497 (1938).
18. R. H. Schwendeman, a. V. W. Laurie, Tables of line strengths, Pergamon Press, 1956.
19. W. Benedict, L. Caplan, J. Chem. Phys., 30, 388 (1959).
20. W. S. Benedict, H. H. Claassen, T. H. Shaw, J. Res. NBS, 49, 91 (1952).
21. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Радиотехника и электроника (в печати).
22. В. Горди, В. Смит, Р. Трамбаруло, Радиоспектроскопия, ГИТПЛ, М., 1955.
23. M. Ceccaldi, M. Coldman, E. Roth, Colloquium Spectroscopicum International VI, Amsterdam, May 1956, Pergamon Press, 1957.

24. Н. А. Lorenz, Proc. Amster. Acad. Sci., 8, 591 (1906).
 25. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Файнберг, Распространение радио-
 волн, ГИТТЛ, М., 1953.
 26. G. E. Uhlenbeck, C. S. Wang Chang, Proc. symposium on transport pro-
 cesses in statistical mechanics, Brussels, August 1956, Interscience publishers, 1958.
 27. Г. М. Стрелков, Дипломная работа, Горьк. ун-т, 1961.
 28. P. W. Anderson, Phys. Rev., 76, 647 (1949).
 29. G. E. Becker, S. H. Autler, Phys. Rev., 70, 303 (1946).
 30. К. П. Васильевский, Диссертация, ЛГУ, 1962.
 31. D. E. Burgh, E. B. Singleton, D. Williams, Applied Optics., 1, 369 (1962).
 32. А. М. Броунштейн, Труды ГГО, вып. 42 (104), 5 (1953).
 33. A. Adel, Phys. Rev., 71, 806 (1947).
 34. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Геомагнетизм и аэрономия, 3, 666 (1963).
 35. S. Golden, T. Wentink, B. Hilger, M. Strandberg, Phys. Rev., 73, 92
 (1948).
 36. A. Stratton, C. Tolbert, Proc. IRE, 48, 893 (1960); 49, 220 (1961).
 37. E. Rosenblum, Microwave J., 4, № 3, 91 (1961).
 38. H. Gebbi, W. Harding, C. Hilsum, A. Pryce, V. Roberts, Proc. Roy.
 Soc., A-206, 87 (1951).
 39. V. Roberts, J. Sci. Instr., 29, 134 (1952).
 40. H. Happ, W. Eckhardt, L. Genzel, G. Sperling, R. Weber, Z. Natur-
 forsch., 12A, 522 (1957).
 41. L. Genzel, W. Eckhardt, Z. F. Phys., 139, 578 (1954); 139, 592 (1954); 144, 316
 (1956).
 42. H. Joshiaga, S. Fujita, S. Minami, A. Mitsuishi, R. Oetjen, J. Ja-
 mada, J. Opt. Soc. Amer., 48, 315 (1958).
 43. H. A. Gebbie, G. Vanasse, Nature, 178, 432 (1958).
 44. H. A. Gebbie, J. Phys. Radium, 19, 230 (1958).
 45. J. Strong, G. Vanasse, E. Loewenstein, J. Opt. Soc. Amer., 49, 309 (1959).
 46. J. Strong, G. Vanasse, J. Opt. Soc. Amer., 49, 844 (1959).
 47. H. A. Gebbie, Phys. Rev., 107, 1194 (1957).
 48. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).
 49. В. Я. Рядов, Н. И. Фуршов, Г. А. Шаронов, Радиотехника и электроника,
 (в печати).
 50. H. Teissing, P. Caplan, J. Appl. Phys., 27, 538 (1958).
 51. Н. Г. Ярославский, А. Е. Станевич, Оптика и спектроскопия, 6, 799 (1959);
 7, 621 (1959).
 52. Н. И. Фуршов, Доклад на XV Всесоюзном совещании по спектроскопии, Минск,
 5—11 июля, 1963.
 53. A. B. Crawford, D. C. Hogg, BSTJ, 35, 907 (1956).
 54. А. Хргиан, Физика атмосферы, Физматгиз, М., 1958.

Поступила в редакцию
 18 октября 1962 г.

ON THE ABSORPTION COEFFICIENT OF ELECTROMAGNETIC WAVES
 BY WATER VAPOURS IN $10\mu \div 2$ cm BAND

S. A. Zhevakin, A. P. Naumov

Calculation has been carried out of the absorption of radiation in $10\mu \div 2$ cm band by the atmospheric water vapour. The shape of lines has been obtained from the solution of the kinetic equation and half-widths of lines have been calculated by the use of Anderson's theory. Matrix elements of the direction cosines for the rigid asymmetric top have been used; however, centrifugal perturbation was taken into account when calculating the molecular terms of H_2O . The results are in good agreement with the experiment.

ОБ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЫ

В. Н. Луговой

Вычислен тензор электропроводности нерелятивистской плазмы, находящейся в периодическом по времени сильном стороннем электромагнитном поле. При этом предполагается, что стороннее магнитное поле имеет переменную составляющую, параллельную постоянной. Обсуждается вопрос о полном локальном поглощении в такой плазме, определяющем возможность параметрического усиления электромагнитных волн.

Исследованию электродинамических свойств нерелятивистской плазмы, находящейся в сильном стороннем электромагнитном поле, посвящены работы [1,2]. В них предполагается, что стороннее поле является монохроматическим. Однако даже при монохроматическом источнике сильное стороннее поле в плазме вследствие нелинейных эффектов, вообще говоря, не остается монохроматическим; его зависимость от времени будет лишь периодической.

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых электродинамических свойств плазмы, находящейся в периодическом по времени сильном стороннем электромагнитном поле. Ниже считается, что стороннее магнитное поле имеет вид $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_1(t)$, где переменная составляющая $\mathbf{H}_1(t)$, параллельная постоянной составляющей \mathbf{H}_0 , является периодической функцией времени с произвольным периодом $2\pi/p$. Связанное с переменным магнитным полем электрическое поле также является периодическим с периодом $2\pi/p$.

Поля \mathbf{H}_1 и \mathbf{E}_1 могут быть разложены в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(t) &= \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_1^{(k)} e^{-ikpt} \quad (\mathbf{H}_1^{(0)} = 0); \\ \mathbf{E}_1(t) &= \operatorname{Re} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_1^{(k)} e^{-ikpt}. \end{aligned} \quad (1)$$

Легко видеть, что поле \mathbf{E}_1 должно считаться сильным [3,4], если выполнено неравенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}_1^{(k)}|^2 \frac{1}{(kp)^2 + v_{\text{эфф}}^{(1)^2}} \geq \frac{3m k T \delta}{e^2}, \quad (2)$$

где e , m — заряд и масса электрона, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура тяжелых частиц плазмы, δ — средняя относительная доля энергий, передаваемая при одном соударении электрона с тяжелой частицей, $v_{\text{эфф}}^{(1)}$ — эффективная частота соударений электрона с тяжелыми частицами в отсутствие поля. Переменное магнитное поле $\mathbf{H}_1(t)$ будет считаться сильным [1,2], если выполнено условие *

* Это условие означает, что поле $\mathbf{H}_1(t)$ заметно изменяет картину локального поглощения некоторого слабого электрического поля волны E_2 .

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2}{(kpmc)^2} (|H_1^{(k)}|^2 + |H_1^{(-k)}|^2) \geq 1. \quad (3)$$

Для простоты мы будем исходить из элементарной теории дисперсии в плазме, основанной на представлениях о средней скорости электрона v и эффективной частоте соударений $\nu_{\text{эфф}}$. Однако все проведенное ниже рассмотрение может быть проведено и на основе кинетического уравнения. Некоторые результаты кинетического рассмотрения будут кратко приведены ниже.

Вычислим тензор электропроводности (по отношению к некоторому слабому монохроматическому полю) для плазмы, находящейся в сильном стороннем электромагнитном периодическом поле. Будем исходить из уравнения для средней скорости электрона, которое в нерелятивистском приближении имеет вид (см., например, [1,3,4]):

$$m \left(\frac{dv}{dt} + \nu_{\text{эфф}} v \right) = e \left(E + \frac{[vH(t)]}{c} \right). \quad (4)$$

Здесь $E = E_1 + E_2$, $H = H_0 - H_1(t)$, E_2 —слабое электрическое поле волны (магнитным полем волны, как обычно, пренебрегаем в силу соотношения $v/c \ll 1$). В общем случае кинетические параметры плазмы (в частности, $\nu_{\text{эфф}}$) в сильном переменном электрическом поле зависят от времени. Однако, если частота p удовлетворяет условию

$$p \gg \delta\nu_{\text{эфф}}, \quad (5)$$

то эффективная частота соударений $\nu_{\text{эфф}}$ „не успевает“ следить за изменением E_1 . В этом случае величина $\nu_{\text{эфф}}$ является функцией только совокупности амплитуд $E_1^{(k)}$ ($\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф}}(E_1^{(k)})$) и не зависит от времени*. Этот случай мы и будем далее рассматривать.

В силу линейности уравнения (4) плотность тока $I = Nev$ (N —концентрация электронов) является суммой $I_1 + I_2$ токов, индуцируемых соответственно полями E_1 и E_2 (при этом в обоих случаях $\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф}}(E_1^{(k)})$). Плотность полного тока $I_2 = \frac{dP_2}{dt} + j_{2np}$, индуцируемого слабым полем E_2 , удовлетворяет уравнению

$$m \left(\frac{dI_2}{dt} + \nu_{\text{эфф}} I_2 \right) = e \left(Ne E_2 + \frac{[I_2 H(t)]}{c} \right). \quad (6)$$

Положим $E_2 = E_{20} e^{-i\omega t}$. Тогда из уравнения (6) следует, что в установившемся режиме для I_2 имеет место соотношение $I_2 = \sigma(\omega, t) E_{20} e^{-i\omega t}$, где тензор электропроводности (по отношению к полному току) $\sigma(\omega, t)$ является периодической функцией t с периодом $T = 2\pi/p$. Выберем систему координат так, чтобы направление оси z совпадало с направлением вектора H_0 ($H_z = H_0 - H_1(t)$). Тогда из уравнения (6) сразу следует, что $\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = \sigma_{yz} = 0$ и для σ_{zz} справедливо обычное выражение, получаемое в отсутствие магнитного поля (см., например, [3,4]).

Чтобы определить остальные компоненты тензора электропровод-

* Строго говоря, условие (5) означает, что симметричная часть функции распределения $f_0(v)$ электронов по скоростям не зависит от времени (с точностью до малых $\sim \delta\nu_{\text{эфф}}/p$ и δ) [3,4]. Если учесть, что δ —средняя относительная доля энергии, трансформируемой электроном при одном соударении с тяжелой частицей,—всегда много меньше единицы, то неравенство (5) можно переписать также в виде $p \geq \nu_{\text{эфф}}$.

ности, будем считать, что поле E_z направлено перпендикулярно оси z . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{2x}}{dt} + \nu_{\text{эфф}} I_{2x} &= -\frac{|e|}{mc} [H_0 - H_1(t)] I_{2y} + \frac{Ne^2}{m} E_{2x0} e^{-i\omega t}; \\ \frac{dI_{2y}}{dt} + \nu_{\text{эфф}} I_{2y} &= \frac{|e|}{mc} [H_0 - H_1(t)] I_{2x} + \frac{Ne^2}{m} E_{2y0} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (7) упрощается с помощью замены переменных $z = I_{2x} + iI_{2y}$, $\zeta = I_{2x} - iI_{2y}$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} + \nu_{\text{эфф}} z &= i\Omega(t) z + \frac{Ne^2}{m} (E_{2x0} + iE_{2y0}) e^{-i\omega t}; \\ \frac{d\zeta}{dt} + \nu_{\text{эфф}} \zeta &= -i\Omega(t) \zeta + \frac{Ne^2}{m} (E_{2x0} - iE_{2y0}) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (7a)$$

Здесь $\Omega(t) = \frac{|e|}{mc} [H_0 - H_1(t)]$. Обозначим

$$\varphi(t) = \frac{|e|}{mc} \int_s^{2\pi/p} H_1(t) dt, \quad (8)$$

где значок s означает, что из неопределенного интеграла выбирается первообразная без постоянной составляющей, т. е. $\int_s^{2\pi/p} \varphi(t) dt = 0$. Решая уравнения (7a), находим:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(\omega, t) &= \frac{Ne^2}{2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n a_m^* \left\{ \frac{1}{\nu_{\text{эфф}} - i(\omega + \omega_H + np)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\nu_{\text{эфф}} - i(\omega - \omega_H - mp)} \right\} e^{i(m-n)pt}; \\ \sigma_{xy}(\omega, t) &= i \frac{Ne^2}{2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n a_m^* \left\{ \frac{1}{\nu_{\text{эфф}} - i(\omega + \omega_H + np)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\nu_{\text{эфф}} - i(\omega - \omega_H - mp)} \right\} e^{i(m-n)pt}; \\ \sigma_{yy}(\omega, t) &\equiv \sigma_{xx}(\omega, t); \quad \sigma_{yx}(\omega, t) \equiv -\sigma_{xy}(\omega, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\omega_H = |e|H_0/mc$, а величины a_n суть коэффициенты разложения функции $e^{i\varphi(t)}$ в ряд Фурье по t :

$$a_n = \frac{p}{2\pi} \int_0^{2\pi/p} e^{i[npt + \varphi(t)]} dt. \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что a_n удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n-k} a_n^* = \delta_{0k}. \quad (11)$$

Соотношения (11) означают, в свою очередь, унитарность матрицы $W_{mn} = a_{m-n}$.

Из полученных выражений видно, что компоненты тензора $\hat{\sigma}(\omega, t)$ зависят как от переменного магнитного поля H_1 , так и от электрического поля E_1 . Зависимость от E_1 состоит в том, что эффективная частота соударений $\nu_{\text{эфф}}$ является функцией совокупности амплитуд $E_1^{(k)}$. Переменное магнитное поле $H_1(t)$ определяет коэффициенты a_n . При условии $p \geq \nu_{\text{эфф}}$ вещественные части выражений в фигурных скобках формул (9) имеют раздельные максимумы в окрестностях частот $\pm \omega_H \pm np$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

Коэффициенты a_n характеризуют высоты этих максимумов.

Удобной характеристикой электродинамических свойств сред с зависящими от времени свойствами (и в частности, нестационарной плазмы) является набор тензоров $\hat{\sigma}^{(n)}(\omega)$, представляющих собой коэффициенты разложения тензора $\hat{\sigma}(\omega, t)$ в ряд Фурье по t . Легко видеть, что в рассматриваемом случае справедливы выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(n)}(\omega) &= \frac{Ne^2}{2m} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m+n} a_m^* \left\{ \frac{1}{\nu_{\text{эфф}} - i[\omega + \omega_H + (m+n)p]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\nu_{\text{эфф}} - i(\omega - \omega_H - mp)} \right\}; \\ \sigma_{xy}^{(n)}(\omega) &= i \frac{Ne^2}{2m} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m+n} a_m^* \left\{ \frac{1}{\nu_{\text{эфф}} - i[\omega + \omega_H + (m+n)p]} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\nu_{\text{эфф}} - i(\omega - \omega_H - mp)} \right\}; \\ \sigma_{yy}^{(n)}(\omega) &= \sigma_{xx}^{(n)}(\omega); \quad \sigma_{yx}^{(n)}(\omega) = -\sigma_{xy}^{(n)}(\omega).\end{aligned}\quad (12)$$

В том частном случае, когда стороннее переменное магнитное поле является гармоническим: $H_1(t) = H_1 \cos(pt)$, выражение (10) для коэффициентов a_n дает $a_n = J_n(\Delta)$, где $\Delta = |e|H_1/\rho mc$, J_n — бесселева функция первого рода n -го порядка. В этом случае выражения (12) переходят в соответствующие выражения, приведенные в [1,2].

Особое значение имеет нулевой тензор $\hat{\sigma}^{(0)}(\omega)$: им определяются локальные поглощающие свойства среды по отношению к монохроматическому полю $E_2 = E_{20} e^{-i\omega t}$. Средняя по времени энергия этого поля, поглощаемая в единицу времени в единице объема среды, дается выражением

$$Q^{(0)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{I}_2 \mathbf{E}_{20} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(\omega) E_{20\alpha} E_{20\beta}^* + \text{к. с.} \right). \quad (13)$$

Легко видеть, что от переменного магнитного поля $H_1(t)$ зависит локальное поглощение $Q_1^{(0)}$ только перпендикулярной к \mathbf{H}_0 составляющей поля E_2 . Причем это поглощение всегда положительно.

Если в рассматриваемой среде распространяется слабая электромагнитная волна от монохроматического источника частоты ω , то поле этой волны в любой точке пространства в общем случае имеет вид

$$\mathbf{E}_2 = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_n e^{-i(\omega + np)t}. \quad \text{Локальное поглощение для произвольного}$$

электрического поля такого вида определяется всем набором тензоров $\hat{\sigma}^{(n)}(\omega)$:

$$Q = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau I_2 E_2 dt = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{(n-k)} (\omega + kp) E_{n\alpha}^* E_{k\beta} + \text{к. с.} \right\}. \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что величина Q (которую мы будем называть полным локальным поглощением) представляет вещественную часть некоторой квадратичной формы. Мы приведем эту квадратичную форму в рассматриваемом случае плазмы к диагональному виду. Для этого воспользуемся равенствами (12). В результате получим: $Q = Q_\perp + Q_z$, где выражение для Q_z не отличается от соответствующего выражения для стационарной изотропной плазмы, а величина Q_\perp определяется следующей формулой:

$$Q_\perp = \frac{Ne^2 v_{\text{эфф}}}{4m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{|A_n + iB_n|^2}{v_{\text{эфф}}^2 + (\omega + \omega_H + np)^2} + \frac{|C_n - iD_n|^2}{v_{\text{эфф}}^2 + (\omega - \omega_H + np)^2} \right\}; \quad (15)$$

$$A_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} E_{kx}; \quad C_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k-n}^* E_{kx}; \quad (16)$$

$$B_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} E_{ky}; \quad D_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k-n}^* E_{ky},$$

Учитывая унитарность матрицы a_{k-n} , легко найти обратные соотношения:

$$E_{kx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-n}^* A_n; \quad A_n = \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} a_{n-m} a_{m-l} C_l; \quad (17)$$

$$E_{ky} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-n}^* B_n; \quad B_n = \sum_{m,l=-\infty}^{\infty} a_{n-m} a_{m-l} D_l.$$

Из выражения (15) сразу следует, что полное локальное поглощение всегда положительно. Это, в свою очередь, означает, что усиление слабой электромагнитной волны в плазме, находящейся одновременно в сильном стороннем электромагнитном поле, невозможно (во всяком случае при условии $p \gg \delta v_{\text{эфф}}$ и при $H_1(t) \parallel H_0$).

Приведенные выше соотношения основаны на элементарной теории. Аналогичные выражения получаются и в результате кинетического рассмотрения. Приведем, например, выражение для тензора $\hat{\sigma}(\omega, t)$:

$$\sigma_{xx}(\omega, t) = -\frac{2\pi e^2 N}{3m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n a_m^* e^{i(m-n)pt} \int_0^\infty v^3 \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{v(v) - i(\omega + \omega_H + np)} + \frac{1}{v(v) - i(\omega - \omega_H - mp)} \right\} \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v};$$

$$\sigma_{xy}(\omega, t) = -i \frac{2\pi e^2 N}{3m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n a_m^* e^{i(m-n)pt} \int_0^\infty v^3 \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{v(v) - i(\omega + \omega_H + np)} - \frac{1}{v(v) - i(\omega - \omega_H - np)} \right\} \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v}; \quad (18)$$

$$\sigma_{yy}(\omega, t) \equiv \sigma_{xx}(\omega, t); \quad \sigma_{yx}(\omega, t) \equiv -\sigma_{xy}(\omega, t).$$

Здесь $v(v)$ — частота соударений электронов, имеющего скорость v , с тяжелыми частицами, $f_0(v, t)$ — нормированная на единицу симметричная часть функций распределения электронов по скоростям (см. [3,4]). При условии (5) функция распределения $f_0(v, t)$ не зависит от времени и из (18) следуют выражения для тензоров $\sigma^{(n)}(\omega)$, аналогичные выражениям (12).

В заключение остановимся на одном простом примере. Рассмотрим зависимость коэффициентов a_n от переменной составляющей магнитного поля $H_1(t)$ в некотором специальном случае, выбранном из условия, чтобы функция $H_1(t)$ сильно отличалась от гармонической. В случае $H_1(t) = H_1 \cos(pt)$ коэффициенты a_n являются бесселевыми функциями $J_n(\Delta)$, которые заметно отличны от нуля при $\Delta \gtrsim |n|$ и осцилируют при дальнейшем увеличении $\Delta = |e|H_1/rmc$. Поэтому, например, на кривой локального поглощения монохроматического поля с увеличением Δ появляются максимумы на частотах $\pm \omega_H \pm np$ ($n=0, 1, 2, \dots$), высоты которых осцилируют, уменьшаясь до нуля и вновь увеличиваясь [1,2].

Пусть теперь поле $H_1(t)$ на интервале $-\pi/2p < t < 3\pi/2p$ имеет вид

$$H_1(t) = \begin{cases} H_1(-\pi/2p < t < \pi/2p) \\ -H_1(\pi/2p < t < 3\pi/2p) \end{cases}. \quad (19)$$

Используя (8) и (10), находим:

$$a_n(\Delta) = -\frac{2\Delta}{\pi(n^2 - \Delta^2)} \sin [(n + \Delta)\pi/2], \quad (20)$$

где $\Delta = |e|H_1/rmc$. Величины $|a_n(\Delta)|^2$ определяют высоты соответствующих максимумов на кривой локального поглощения монохроматического поля (см. (13)).

Мы видим, что зависимость коэффициентов a_n от амплитуды поля вида (19) во многом сходна с соответствующей зависимостью для монохроматического стороннего поля. При $\Delta=0$ отличен от нуля только коэффициент $a_0=1$. С возрастанием Δ до величины $\Delta=1$ коэффициент a_0 уменьшается до нуля. При этом заметные значения принимают коэффициенты a_1 и a_{-1} , что означает, в свою очередь, исчезновение максимума поглощения на гирочастоте ω_H и появление соседних максимумов на частотах $\pm \omega_H \pm p$. Величина любого из коэффициентов a_n (при фиксированном n) осциллирует с изменением Δ . Амплитуда этих осцилляций максимальна при $\Delta \approx |n|$. Однако поведение коэффициентов $a_n(\Delta)$ имеет и существенное отличие от зависимости $J_n(\Delta)$. Оно состоит в наличии осцилляций этих коэффициентов по Δ при $\Delta \lesssim |n|$, в то время как бесселевые функции $J_n(\Delta)$ слабо монотонно возрастают при увеличении Δ , приобретая заметную величину лишь при $\Delta \approx |n|$.

Автор благодарен Ф. В. Бункину за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Луговой, ЖЭТФ, 41, 1562 (1961).
2. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 41, 1859 (1961).

3. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, 201 (1960).
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Гостехиздат, М., 1960.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
30 ноября 1962 г.

ON ELECTRODYNAMIC PROPERTIES OF NONSTATIONARY PLASMA

Lougovoy V. N.

Conductivity tensor is calculated for nonrelativistic plasma affected by time-periodic strong external electromagnetic field, the varying component of the external magnetic field being parallel to the constant one. The full local absorption in the plasma is discussed in connection with possibility of the parametric amplification of electromagnetic waves.

ОБ ИНТЕГРАЛЕ СТОЛКНОВЕНИЙ ДЛЯ ПЛАЗМЫ

В. П. Силин

Рассмотрен интеграл столкновений частиц плазмы в магнитном поле, учитывающий не только кулоновское, но и поперечное взаимодействие частиц. В качестве приложения исследовано влияние поперечного взаимодействия частиц на диффузию поперек магнитного поля в электронно-позитронной плазме. Получено общее выражение для коэффициента диффузии, определяемое флюктуациями электромагнитного поля плазмы. Для случая разреженной плазмы выявлена зависимость коэффициента диффузии от направленности флюктуационного излучения.

1. В работах [1,2] был получен интеграл столкновений заряженных частиц плазмы, находящихся в сильном магнитном поле. При этом в качестве исходной идеи было использовано представление о действующем поле точечной частицы, учитывающем поляризацию плазмы [3]. Важным обстоятельством, существенно упростившим рассмотрение в работах [1,2], было ограничение кулоновским взаимодействием. В настоящем сообщении мы откажемся от такого ограничения и выпишем интеграл столкновений, учитывающий полное взаимодействие заряженных частиц, обусловленное электромагнитным полем плазмы*. Такой интеграл столкновений затем будет использован для рассмотрения диффузии в плазме поперек магнитного поля.

2. Не проводя здесь выкладок, во многом аналогичных выполненным в работе [2], укажем, что главное отличие заключается лишь в полном рассмотрении уравнений поля плазмы, в то время как ранее (см. [2]) мы ограничивались учетом только продольного поля. В результате несколько громоздких вычислений для случая пространственно однородного распределения частиц получаем следующее выражение для интересующего нас интеграла столкновений:

$$\begin{aligned} I[f_\alpha] = & \sum_{\beta m_\alpha m_\beta} \int dp_\beta \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\alpha} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha}{v_\alpha^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^\perp} \right) \left(\frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{c^2} \right)^2 \times \\ & \times \pi \delta(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha - k_z v_z^\beta + m_\beta \Omega_\beta) |A_{ij}^{-1}(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha, \mathbf{k}) F_j^\beta(m_\beta, \mathbf{k}) \times (1) \\ & \times F_i^\alpha(m_\alpha, \mathbf{k})|^2 \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\alpha} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha}{v_\alpha^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^\perp} - k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\beta} + \frac{m_\beta \Omega_\beta}{v_\beta^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\beta^\perp} \right) f_\alpha f_\beta. \end{aligned}$$

Здесь e_α , v_α , p_α , $\Omega_\alpha = e_\alpha B c / \epsilon_\alpha$ — соответственно заряд, скорость, импульс и гирочастота α -ой частицы,

$$A_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij} k^2 + k_i k_j, \quad (2)$$

* Для частного случая распределений, зависящих лишь от энергии частиц, соответствующий интеграл столкновений приведен в работе [4].

$$\begin{aligned}
 F_x^\alpha(m, \mathbf{k}) &= v_\perp^\alpha \left\{ \frac{ik_y}{k_\perp} J'_m \left(\frac{k_\perp v_\perp^\alpha}{\Omega_\alpha} \right) - \frac{k_x}{k_\perp} \frac{m\Omega_\alpha}{k_\perp v_\perp^\alpha} J_m \left(\frac{k_\perp v_\perp^\alpha}{\Omega_\alpha} \right) \right\}, \\
 F_y^\alpha(m, \mathbf{k}) &= v_\perp^\alpha \left\{ -\frac{ik_x}{k_\perp} J'_m \left(\frac{k_\perp v_\perp^\alpha}{\Omega_\alpha} \right) - \frac{k_y}{k_\perp} \frac{m\Omega_\alpha}{k_\perp v_\perp^\alpha} J_m \left(\frac{k_\perp v_\perp^\alpha}{\Omega_\alpha} \right) \right\}, \\
 F_z^\alpha(m, \mathbf{k}) &= v_z^\alpha J_m \left(\frac{k_\perp v_\perp^\alpha}{\Omega_\alpha} \right)
 \end{aligned} \quad (3)$$

$(J_m(x)$ —функция Бесселя).

Имея в виду, что для тензора диэлектрической проницаемости справедливо выражение

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \delta_{ij} + \sum_{\beta m} \frac{4\pi e_\beta^2}{\omega^2} \int d\mathbf{p}_\beta \frac{F_i^\beta(m, \mathbf{k}) F_j^{\beta*}(m, \mathbf{k})}{\omega - k_z v_z^\beta + m\Omega_\beta + i\Delta} \times \\
 &\times \left(k_z \frac{\partial f_\beta}{\partial p_z^\beta} - \frac{m\Omega_\beta}{v_\beta^\perp} \frac{\partial f_\beta}{\partial p_\perp^\beta} \right) + \sum_{\beta} \frac{4\pi e_\beta^2}{\omega^2} \int d\mathbf{p}_\beta v_\beta^\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial p_\perp^\beta}
 \end{aligned} \quad (4)$$

(Δ —бесконечно малая положительная величина), а также используя формулу для спектральной плотности флюктуаций электрического поля [5]:

$$\begin{aligned}
 (E_i E_l)_{\omega, \mathbf{k}} &= \left(\frac{4\pi\omega}{c^2} \right)^2 A_{il}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) A_{rl}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \sum_{\beta m_\beta} e_\beta^2 \int d\mathbf{p}_\beta f_\beta \times \\
 &\times \delta(\omega - k_z v_z^\beta + m_\beta \Omega_\beta) F_i^\beta(m_\beta, \mathbf{k}) F_r^{\beta*}(m_\beta, \mathbf{k}),
 \end{aligned} \quad (5)$$

запишем интеграл столкновений (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 I[f_\alpha] &= \sum_{m_\alpha} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\alpha} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha}{v_\alpha^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\perp^\alpha} \right) F_i^{\alpha*}(m_\alpha, \mathbf{k}) F_l^\alpha(m_\alpha, \mathbf{k}) \times \\
 &\times \left\{ \frac{\pi e_\alpha^2}{(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha)^2} (E_i E_l)_{k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha, \mathbf{k}} \left(k_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_z^\alpha} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha}{v_\alpha^\perp} \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_\perp^\alpha} \right) + \right. \\
 &\left. + f_\alpha \frac{2\pi e_\alpha^2}{i c^2} [A_{il}^{*-1}(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha, \mathbf{k}) - A_{il}^{-1}(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha, \mathbf{k})] \right\}.
 \end{aligned} \quad (6)$$

В такой записи очевидно, что коэффициент диффузии в пространстве скоростей определяется флюктуациями электромагнитного поля*.

Для частного случая разреженной плазмы (когда плотность частиц стремится к нулю и можно пренебречь эффектами поляризации) интеграл столкновений может быть записан в виде

$$I = I^{(l)} + I^{(r)}, \quad (7)$$

* Флюктуации поперечного электромагнитного поля в формуле (6) могут быть выражены через флюктуации магнитного поля. При этом следует пользоваться формулой

$$(E_i E_l)_{\omega, \mathbf{k}} (\delta_{lm} k^2 - k_l k_m) (\delta_{lj} k^2 - k_l k_j) = \frac{\omega^2}{c^2} e_s e_r e_t e_r e_t (B_s B_r)_{\omega, \mathbf{k}}$$

где

$$I^{(l)} [f_\alpha] = \sum_{\beta m_\alpha m_\beta} \int d\mathbf{p}_\beta \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\alpha} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha}{v_\alpha^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^\perp} \right) J_{m_\alpha}^2 \left(\frac{k_\perp v_\alpha^\perp}{\Omega_\alpha} \right) \times \\ \times J_{m_\beta}^2 \left(\frac{k_\perp v_\beta^\perp}{\Omega_\beta} \right) \left(\frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{k^2} \right)^2 \pi \delta(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha - k_z v_z^\beta + m_\beta \Omega_\beta) \quad (8)$$

$$\times \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\alpha} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha}{v_\alpha^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^\perp} - k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\beta} + \frac{m_\beta \Omega_\beta}{v_\beta^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\beta^\perp} \right) f_\alpha f_\beta;$$

$$I^{(tr)} [f_\alpha] = \sum_{\beta m_\alpha m_\beta} \int d\mathbf{p}_\beta \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\alpha} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha}{v_\alpha^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^\perp} \right) \times \\ \times \pi \delta([k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha]^2 - c^2 k^2) \pi \delta(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha - k_z v_z^\beta + m_\beta \Omega_\beta) \times \\ \times \frac{(4\pi e_\alpha e_\beta c^2)^2}{c |v(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha, \mathbf{k})|} \left\{ \frac{v_\perp^\alpha v_\perp^\beta}{c^2} J'_{m_\alpha} \left(\frac{k_\perp v_\alpha^\perp}{\Omega_\alpha} \right) J'_{m_\beta} \left(\frac{k_\perp v_\beta^\perp}{\Omega_\beta} \right) - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{v_z^\alpha v_z^\beta}{c^2} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha m_\beta \Omega_\beta}{c^2 k_\perp^2} \right) J_{m_\alpha} \left(\frac{k_\perp v_\alpha^\perp}{\Omega_\alpha} \right) J_{m_\beta} \left(\frac{k_\perp v_\beta^\perp}{\Omega_\beta} \right) \right\}^2 \times \\ \times \left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\alpha} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha}{v_\alpha^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\alpha^\perp} - k_z \frac{\partial}{\partial p_z^\beta} + \frac{m_\beta \Omega_\beta}{v_\beta^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\beta^\perp} \right) f_\alpha f_\beta. \quad (9)$$

В последней формуле

$$v(\omega, \mathbf{k}) = \sum_m 4\pi^2 e_1^2 \int d\mathbf{p}_1 \left\{ \left[\frac{\omega^2}{c^2 k^2} - \left(\frac{v_z^\gamma}{c} \right)^2 - \left(\frac{m \Omega_\gamma}{c k_\perp} \right)^2 \right] J_m^2 \left(\frac{k_\perp v_\gamma^\perp}{\Omega_\gamma} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{v_\gamma^\perp}{c} \right)^2 \left[J'_m \left(\frac{k_\perp v_\gamma^\perp}{\Omega_\gamma} \right) \right]^2 \right\} \delta(\omega - k_z v_z^\gamma + m \Omega_\gamma) \left(k_z \frac{\partial f_\gamma}{\partial p_z^\gamma} - \frac{m \Omega_\gamma}{v_\gamma^\perp} \frac{\partial f_\gamma}{\partial p_\gamma^\perp} \right). \quad (10)$$

Интеграл столкновений (8) соответствует использованному в работе [6]. При этом интегрирование по \mathbf{k} должно быть ограничено как со стороны больших, так и малых значений. Последнее фактически означает, что полностью пренебрегать влиянием поляризации плазмы никогда нельзя. Эффективно в продольном интеграле столкновений влияние поляризации проявляется в обрезании на прицельных параметрах порядка радиуса Дебая.

Интеграл столкновений (9) аналогичен полученному Ахиезером, Алексиным, Барьяхтаром и Пелетминским [7] в условиях, когда излучение релаксирует вслед за распределением частиц.

3. Особый интерес представляет случай пространственно неоднородных распределений. Формальная сторона соответствующего рассмотрения близка изложенной в [2]. При этом в условиях, когда одномерная неоднородность несущественна для поляризационных свойств плазмы*,

* В сильном магнитном поле плазма без столкновений неустойчива при сколь угодно малых одномерных градиентах (см. [8]). Однако соответствующие коэффициенты нарастания пропорциональны градиентам, а потому могут быть всегда выбраны достаточно малыми. Влияние слабой неоднородности на поляризационные свойства плазмы проявляется в том, что в формуле (4) для диэлектрической проницаемости следует сделать замену (11), а также $\omega - k_z v_z^\beta + m \Omega_\beta \rightarrow \omega - k_z v_z^\beta + m \Omega_\beta - (k_z v_\perp^\beta / 2 \Omega_\beta^2) \times d \Omega_\beta / dy$.

все отличие соответствующего интеграла столкновений от выражения (1) заключается в замене

$$k_z \frac{\partial}{\partial p_z^T} - \frac{m\Omega_\gamma}{v_\gamma^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\gamma^\perp} \rightarrow k_z \frac{\partial}{\partial p_z^T} - \frac{ck_x}{e_\gamma B} \frac{\partial}{\partial y_\gamma} - \frac{m\Omega_\gamma}{v_\gamma^\perp} \frac{\partial}{\partial p_\gamma^\perp}. \quad (11)$$

Функция распределения здесь считается зависящей не только от p_z^T и p_\perp^T , но и от y_γ — проекции центра орбиты частицы в магнитном поле на ось y .

Рассматривая слабое отклонение плазмы от пространственно однородного равновесного состояния ($f = f_0 + \delta f$), нетрудно убедиться, что в результате интегрирования по импульсам наш интеграл столкновений для неоднородного случая приводит к следующему диффузионному члену:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \sum_{m_\alpha m_\beta} \int dp_\alpha dp_\beta \delta f_\alpha f_{0\beta} \int dk \delta(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha - k_z v_z^\beta + m_\beta \Omega_\beta) \times \\ & \times \frac{2k_x^2 e_\beta^2}{c^2 B^2} |A_{ij}^{-1}(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha, \mathbf{k}) F_j^3(m_\beta, \mathbf{k}) F_i^\alpha(m_\alpha, \mathbf{k})|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Ниже будем считать $f_{0\beta}$ максвелловским распределением, а δf_α — максвелловским распределением, умноженным на отношение неравновесной добавки плотности числа частиц к ее равновесному значению N_α . Тогда формула (12) принимает вид

$$D_\alpha \frac{\partial^2 \delta N_\alpha}{\partial y_\alpha^2}, \quad (13)$$

где коэффициент

$$\begin{aligned} D_\alpha = & \frac{1}{N_\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \int dp_\alpha dp_\beta dk \sum_{m_\alpha m_\beta} \delta(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha - k_z v_z^\beta + m_\beta \Omega_\beta) \times \\ & \times f_{0\alpha} f_{0\beta} \frac{k_\perp^2 e_\beta^2}{c^2 B^2} |A_{ij}^{-1}(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha, \mathbf{k}) F_j^3(m_\beta, \mathbf{k}) F_i^\alpha(m_\alpha, \mathbf{k})|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

4. Рассмотрим некоторые примеры приложения формулы (14).

В случае разреженной плазмы, когда $e^2 B^2 / M^2 c^2 \gg 4\pi e^2 N_e / M$, коэффициент диффузии, аналогично (7), можно представить в виде суммы двух слагаемых, возникающих от продольного и поперечного взаимодействия частиц:

$$D_\alpha = D_\alpha^{(I)} + D_\alpha^{(II)}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} D_\alpha^{(I)} = & \frac{1}{N_\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \int dp_\alpha dp_\beta f_\alpha f_\beta \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} dk \frac{c^2 k_\perp^2 e_\beta^2}{k^4 B^2} \sum_{m_\alpha m_\beta} J_{m_\alpha}^2 \left(\frac{k_\perp v_\alpha^\perp}{\Omega_\alpha} \right) \times \\ & \times J_{m_\beta}^2 \left(\frac{k_\perp v_\beta^\perp}{\Omega_\beta} \right) \delta(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha - k_z v_z^\beta + m_\beta \Omega_\beta); \end{aligned} \quad (16)$$

$$D_\alpha^{(II)} = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \int dp_\alpha dp_\beta f_\alpha f_\beta \int dk \frac{c^2 k_\perp^2 e_\beta^2}{B^2} \pi \times$$

$$\times \sum_{m_\alpha m_\beta} \delta \left(k^2 - \frac{[m_\alpha \Omega_\alpha - k_z v_z^\alpha]^2}{c^2} \right) \delta (k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha - k_z v_z^\beta + m_\beta \Omega_\beta) \times \\ \times \frac{1}{|\nu(k_z v_z^\alpha - m_\alpha \Omega_\alpha, k)|} \left\{ \frac{v_\perp^\alpha v_\perp^\beta}{c^2} J'_{m_\alpha} \left(\frac{k_\perp v_\alpha^\perp}{\Omega_\alpha} \right) J'_{m_\beta} \left(\frac{k_\perp v_\beta^\perp}{\Omega_\beta} \right) - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{v_z^\alpha v_z^\beta}{c^2} - \frac{m_\alpha \Omega_\alpha m_\beta \Omega_\beta}{c^2 k_\perp^2} \right) J_{m_\alpha} \left(\frac{k_\perp v_\alpha^\perp}{\Omega_\alpha} \right) J_{m_\beta} \left(\frac{k_\perp v_\beta^\perp}{\Omega_\beta} \right) \right\}^2. \quad (17)$$

Формула (16) соответствует коэффициенту диффузии, полученному в работе [9]*. В частности, если гирорадиус частиц существенно превышает радиус дебаевского экранирования, то для нерелятивистской плазмы из формулы (16) следует, что

$$D_\alpha^{(I)} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{c^2 e_\beta^2}{B^2} N_\beta \sqrt{2\pi} \frac{4}{3} \sqrt{\frac{M_\alpha M_\beta}{M_\beta \times T_\alpha + M_\alpha \times T_\beta}} L, \quad (18)$$

где L — кулоновский логарифм отношения дебаевского радиуса к минимальному прицельному параметру**.

Поперечный коэффициент диффузии (17) принимает особенно простой вид в условиях, когда в нерелятивистской плазме имеется заметное число позитронов. Тогда

$$D_{e,p}^{(tr)} \sim \frac{e^2}{Mc^2} \frac{N_p \times T_e \times T_p}{N_e Mc^2 Mc^2} . \quad (19)$$

Этот коэффициент диффузии будет превышать обычный (см. (18)) при условии

$$\frac{N_e}{N_p} \frac{(Mc^2)^{5/2} L}{(\times T_e)^{3/2} \times T_p} < \frac{B^2}{4\pi N_e Mc^2} = \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2} . \quad (20)$$

Для $\times T/Mc^2 \sim 10^{-2}$ и $B \sim 10^5$ эрстед неравенство (20) принимает вид

$$\frac{N_e}{N_p} L < \frac{3 \cdot 10^9}{N_e} .$$

5. До сих пор мы считали, что флюктуации электромагнитного поля в плазме целиком обусловлены движением частиц плазмы. Обратимся теперь к случаю, когда уровень шумов в плазме значительно превышает шум, создаваемый составляющими ее частицами. Конечно, в этих условиях будет происходить нагрев плазмы, так что температура частиц будет являться функцией времени. Это, однако, несущественно для рассматриваемого сейчас процесса диффузии. Имея в виду формулы (12) и (5), запишем в интересующем нас случае следующее выражение для коэффициента диффузии:

* В случае изотермической плазмы формула (16) дает правильное выражение и в условиях, когда плазма не является разреженной.

** При $e^2 B^2 / M^2 c^2 > 4\pi e^2 N_e / M \gg e^2 B^2 / MM_c c^2$ электронный коэффициент диффузии имеет вид [9]

$$D^{(I)} = \frac{c^2 e^2 N}{B^2} \sqrt{2\pi} \frac{4}{3} \sqrt{\frac{M}{\times T}} \left\{ L + \frac{3}{4} \ln \frac{M_t}{M} \ln \frac{\Omega_e}{\omega_{Le}} \right\} ,$$

что по порядку величины близко к выражению (18).

$$D_a = \frac{1}{N_a} \int dp_a f_a \sum_{m_a} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{c^2 k_x^2}{B^2} \pi \frac{1}{(k_z v_z^a - m_a \Omega_a)^2} \times \\ \times F_i^{a*}(m_a, \mathbf{k}) F_j^a(m_a, \mathbf{k}) (E_i E_j)_{k_z v_z^a - m_a \Omega_a, \mathbf{k}}. \quad (21)$$

Простейшим примером приложения формулы (21) является случай весьма разреженной плазмы, в которой можно пренебречь влиянием среды на законы распространения электромагнитного поля. Тогда существенно лишь поперечное поле, причем

$$D_a^{(tr)} = \frac{1}{N_a} \int dp_a f_a \sum_{m_a} \int \frac{dk}{16\pi^2} \frac{c^4 k_x^2}{B^2} \int \frac{d\omega}{\omega^2} \times \\ \times \delta(\omega - k_z v_z^a + m_a \Omega_a) \left\{ \left(\frac{v_a^\perp}{c} \right)^2 \left[J'_{m_a} \left(\frac{k_\perp v_a^\perp}{\Omega_a} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{m_a^2 \Omega_a^2}{c^2 k_\perp^2} - \frac{\omega^2}{c^2 k^2} + \frac{v_z^{a^2}}{c^2} \right) J_{m_a}^2 \left(\frac{k_\perp v_a^\perp}{\Omega_a} \right) \right\} (E_{tr}^2)_{\omega, \mathbf{k}}. \quad (22)$$

Для нерелятивистской плазмы это выражение существенно упрощается:

$$D_a = \int \frac{dn}{8\pi} \frac{e_a^2}{M_a c} \frac{\times T_a}{M_a c^2} n_x^2 (1 + n_z^2) \times \\ \times \frac{\times T(\Omega_a, \mathbf{n}) + \times T(-\Omega_a, \mathbf{n})}{M_a c^2}. \quad (23)$$

Здесь \mathbf{n} —единичный вектор в направлении \mathbf{k} . При получении формулы (23) учтено соотношение

$$(E_{tr}^2)_{\omega, \mathbf{k}} = 8\pi |\omega| \times T \left(\omega, \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \delta(\omega^2 - c^2 k^2). \quad (24)$$

Формула (26) фактически является определением понятия температуры $T(\omega, \mathbf{n})$ излучения в интервале частот $\omega, \omega + d\omega$ и в направлении \mathbf{n} .

В частном случае распределения излучения, когда $T(\omega, \mathbf{n})$ не зависит от направления, из формулы (24) следует:

$$D_a = \frac{2}{5} \frac{e_a^2}{M_a c} \frac{\times T_a}{M_a c^2} \frac{\times T(\Omega_a)}{M_a c^2}. \quad (25)$$

Формула (25) была получена ранее Ахиезером, Барьяхтаром и Пелетминским [9].

Представляет интерес случай резко направленного излучения. Если, например, излучение заперто цилиндрическим зеркалом, расположенным параллельно магнитному полю, то

$$T(\omega, \mathbf{n}) = \delta(n_z) T_\perp(\omega). \quad (26)$$

Подставляя (26) в формулу (23), получаем:

$$D_a = \frac{1}{4} \frac{e_a^2}{M_a c} \frac{\times T_a}{M_a c^2} \frac{\times T_\perp(\Omega_a)}{M_a c^2}. \quad (27)$$

Для плоских зеркал, параллельных постоянному магнитному полю и градиенту неоднородной добавки к плотности, когда

$$T(\omega, \mathbf{n}) = \delta(n_z) \delta(n_y) T(\omega), \quad (28)$$

имеем:

$$D_a = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{M_a c} \frac{\times T_a}{M_a c^2} \frac{\times T(\Omega_a)}{M_a c^2}. \quad (29)$$

Если же зеркала расположены в плоскости zx , то $D_a = 0$. В случае излучения, запертого зеркалами, стоящими поперек силовых линий магнитного поля,

$$T(\omega, \mathbf{n}) = \delta(n_x) \delta(n_y) T_{\parallel}, \quad (30)$$

и коэффициент диффузии также оказывается равным нулю.

Легко записать выражение для коэффициента диффузии электронов (21) в случае нерелятивистской плазмы с излучением обычновенной волны, запертым зеркалами, расположенными в плоскости yz . Тогда отличен от нуля лишь

$$(E_z^2)_{\omega, k} = 4\pi |\omega| \times T(\omega) \delta(\omega^2 - \omega_{Le}^2 - c^2 k^2) \delta(n_y) \delta(n_z). \quad (31)$$

После подстановки выражения (31) в формулу (21) получаем:

$$D_e = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{Mc^2} \left(\frac{\times T}{Mc^2} \right)^2 \frac{\times T(\Omega_e)}{Mc^2} \left[1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \right]^{5/2}. \quad (32)$$

Необходимо заметить, что это выражение значительно меньше определенных формулами (25), (27), (29).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Елеонский, П. С. Зырянов, В. П. Силин, Физика металлов и металловедение, 2, 955 (1961).
2. В. М. Елеонский, П. С. Зырянов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 42, 896 (1962).
3. В. П. Силин, ЖЭТФ, 40, 1768 (1961).
4. Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин, ДАН СССР, 145, 764 (1962).
5. В. П. Силин, ЖЭТФ, 41, 969 (1961).
6. В. П. Силин, ЖЭТФ, 43, 1813 (1962).
7. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ, 42, 552 (1962).
8. N. A. Kral, M. N. Rosenbluth, Доклад на конференции по физике плазмы в Зальцбурге, 1961, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН (в печати), А. Б. Михайловский, Некоторые вопросы теории плазмы, вып. 3, Госатомиздат, 1963.
9. С. Т. Беляев, Сб. Физика плазмы, 3, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 66.
10. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ (в печати).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
8 октября 1962 г.

ON THE COLLISIONS INTEGRAL FOR PLASMA

V. P. Siliin

The collisions integral for particles in magnetized plasma is considered, both coulomb and transverse interaction of particles being taken into account. As a supplement the influence is investigated of the particles transverse interaction upon diffusion across a magnetic field in electron-positron plasma. The general expression is obtained for the diffusion coefficient connected with fluctuations of electromagnetic field in plasma. For the rarefied plasma the dependence is found of the diffusion coefficient upon the directivity of the fluctuational radiations.

ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛНАХ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ, ПРОНИЗЫВАЕМОЙ ПОТОКОМ ПЛАЗМЫ

В. Я. Эйдман

Рассматриваются продольные электромагнитные колебания в неоднородной среде, пронизываемой потоком плазмы. Показывается, что неоднородность среды может привести к радикальному изменению характера устойчивости системы. Так, если в однородной среде реализуется неустойчивость, то при учете зависимости диэлектрической проницаемости ϵ от координаты система может оказаться устойчивой.

1. Рассмотрению круга вопросов, связанных с особенностью распространения электромагнитных волн во взаимно-проникающих средах, было посвящено много работ. Однако в этих работах, как правило, предполагалось, что среда однородна. Между тем, например, в космических условиях часто имеют дело с потоками плазмы в неоднородной среде*. Для того, чтобы выяснить некоторые особенности, имеющие здесь место, в настоящей статье рассматривается случай распространения продольных волн в слоисто-неоднородной среде, пронизываемой потоком однородной плазмы.

Ниже будем описывать движущуюся плазму при помощи линеаризованного кинетического уравнения, а неподвижную слоисто-неоднородную среду, свойства которой меняются вдоль координатной оси Oz , — диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z)$ (тепловым движением электронов неподвижной среды пренебрегаем). Поэтому уравнения Максвелла записутся в виде (см. также [2])

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\epsilon(z)}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\text{div } \epsilon(z) \mathbf{E} = 4\pi\rho; \quad \text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= e \int \mathbf{v} \varphi d\mathbf{v}; \quad \rho = e \int \varphi d\mathbf{v}; \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_r \varphi + \frac{e \mathbf{E}}{m} \nabla_{\mathbf{v}} f_0 = 0; \\ f_0 &= \frac{N}{v_T^3 \pi^{3/2}} e^{-v^2/v_T^2}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{v}^* = \{v_x, v_y, v_z - u\}; \quad \varphi \ll f_0,$$

где u — скорость потока, движущегося вдоль направления Oz , $v_T = \sqrt{2T/m}$, N — средняя тепловая скорость и концентрация электронов плазмы. Для продольной волны $\mathbf{E} = \{0, 0, E(z) e^{-i\omega t}\}$, распространяющейся параллельно координатной оси Oz , будем иметь из (1), (2):

* Ряд особенностей, возникающих при собственных колебаниях такой среды, исследуются в работе [1].

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) \omega^2 E_\omega(z) &= -4\pi i \omega j_z = \\ &= -\frac{2\omega^2 i \omega}{\pi^{1/2} v_T^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (v_z - u) e^{-(v_z - u)^2/v_T^2} e^{i \frac{\omega}{v_T} z} dv_z \int_z^\infty E_\omega(z') e^{-i \frac{\omega}{v_T} z'} dz', \end{aligned} \quad (3)$$

где $\omega_0^2 = 4\pi N e^2/m$.

Уравнение (3) представляет из себя однородное интегральное уравнение. Для дальнейшего удобно его несколько преобразовать. Разложим в интеграл Фурье электрическое поле волны

$$E_\omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_k e^{ikz} dk. \quad (4)$$

Подставляя это выражение в правую часть (3) и выполняя несложные преобразования, найдем, например, для $\operatorname{Im} \frac{\omega}{kv_T} > 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) E_\omega(z) &= \frac{2\omega_0^2}{v_T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\{ -i \sqrt{\pi} \frac{\omega - ku}{kv_T} \times \right. \\ &\times \left. W\left(\frac{\omega - ku}{kv_T}\right) - 1 \right\} E_k e^{ikz} dk. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь функция $W(x)$ выражается при помощи интеграла вероятности:

$$W(x) = e^{-x^2} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int_0^x e^t dt. \quad (6)$$

При получении формулы (5) было использовано соотношение (см., например, [8])

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(v-u)^2/v_T^2} v(v-u) dv}{\omega - kv} &= \frac{\omega \sqrt{\pi} v_T}{k^2} \times \\ &\times \left\{ -i \sqrt{\pi} \frac{\omega - ku}{kv_T} W\left(\frac{\omega - ku}{kv_T}\right) - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение (5)—довольно сложное, но в интересном случае малых тепловых скоростей электронов плазмы его легко можно свести к дифференциальному уравнению. Если $u/v_T \gg 1$, $\omega - ku \neq 0$, то можно разложить функцию W в степенной ряд*

$$W(x) = \frac{i}{\sqrt{\pi} x} \left(1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} + \dots \right). \quad (8)$$

Если подействовать на обе стороны уравнения (5) оператором $(d^{2n}/dz^{2n}) e^{-iz\omega/u}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) и воспользоваться соотношением (8), то можно получить для $E_\omega(z)$ приближенное дифференциальное урав-

* Действительной частью W , связанной с затуханием Ландау, можно пренебречь, поскольку она экспоненциально мала (см. (6)).

нение с точностью до членов порядка $(v_T/u)^{2(n-1)}$. Так, при $n=2$ будем иметь:

$$\frac{d^4}{dz^4} [\epsilon E_\omega e^{-iz\omega/u}] = - \frac{\omega_0^2}{u^2} \left\{ \frac{d^2}{dz^2} [E_\omega e^{-iz\omega/u}] + \frac{3}{2} \frac{v_T^2}{u^2} e^{-iz\omega/u} \frac{d^2 E_\omega}{dz^2} + \dots \right\}, \quad (9)$$

где невыписанные члены—порядка $(v_T/u)^4$.

В качестве примера рассмотрим подробнее случай, когда можно вообще пренебречь пространственной дисперсией, т. е. тепловым движением электронов плазмы ($v_T=0$). Тогда для функции $F=\epsilon E_\omega e^{-iz\omega/u}$ из (9) следует уравнение (см. также [1]):

$$\frac{d^2}{dz^2} F + \frac{\omega_0^2}{u^2 \epsilon(z)} F = 0. \quad (10)$$

Это уравнение хорошо исследовано; такое же уравнение, но с заменой $\omega_0^2/u^2 \epsilon$ на $(\omega^2/c^2) \epsilon$, получается для волны, распространяющейся в неподвижной среде, характеризуемой диэлектрической проницаемостью $\epsilon(z)$, если направление распространения волны совпадает с осью Oz [4].

При $\epsilon(z)=\text{const}$, подставив в (10) $E \sim e^{ikz}$, получим обычное дисперсионное соотношение для продольных волн во взаимно-проникающих средах без пространственной дисперсии (см., например, [5])

$$-\epsilon + \omega_0^2/(\omega - uk)^2 = 0. \quad (11)$$

Прежде всего выпишем приближение геометрической оптики для уравнения (10) ($\frac{d\epsilon}{dz} \lambda \ll \epsilon$, λ —длина волны в среде):

$$E_\omega = \frac{1}{\epsilon^{3/4}} \exp \left[i \frac{\omega}{u} z \pm i \frac{\omega_0}{u} \int \frac{dz}{V_\epsilon(z)} \right];$$

$$F = \sqrt[4]{\epsilon} \exp \left[\pm i \frac{\omega_0}{u} \int \frac{dz}{V_\epsilon(z)} \right]. \quad (12)$$

Так, для линейного слоя

$$\epsilon = az + is \quad (13)$$

(a, s —отрицательные величины) обе нормальные волны при $|z| \gg 1$ распространяются вдоль положительного направления оси Oz , т. е. в направлении, совпадающем со скоростью потока. В этом же направлении одна из нормальных волн экспоненциально растет при $\epsilon < 0$ (см. (12)). Приближение геометрической оптики становится несправедливым в тех точках, где $\epsilon(z)=0$ или $\epsilon(z)=\infty$. Используя уравнение (10), можно выяснить характер поведения электрического поля вблизи этих особенностей. Например, аппроксимируя функцию $\epsilon(z)$ вблизи ее нуля линейной зависимостью (13), находим решение уравнения (10) в виде

$$E_1 = \frac{e^{iaz}}{\sqrt{\epsilon}} H_1^{(1)} \left(2 \frac{\omega_0}{ua} \sqrt{-\epsilon} \right); \quad E_2 = \frac{e^{iaz}}{\sqrt{\epsilon}} H_1^{(2)} \left(2 \frac{\omega_0}{ua} \sqrt{-\epsilon} \right), \quad (14)$$

где $\alpha = \omega/u$; $H_1^{(1)}, H_1^{(2)}$ —функции Ханкеля. Из (14) следует, что при $\epsilon \rightarrow 0$ $E_{1,2} \rightarrow \mp iua/\pi\omega_0 \epsilon$ ($z \rightarrow 0, s \ll 1$). Таким образом, поле нормальной

волны нарастает как $1/\epsilon$ при $\epsilon \rightarrow 0$ и при отсутствии затухания ($s = 0$) обращается в бесконечность*.

2. В электродинамике сред, пронизываемых потоком плазмы, важное место занимает вопрос об устойчивости такой системы относительно электромагнитных возмущений. Поэтому необходимо и здесь решить задачу о поведении поля в среде при наличии начального возмущения. Пусть в момент времени $t = 0$ задано электрическое поле $E(z, t = 0)$. Очевидно, здесь достаточно рассмотреть лишь возмущения типа $E(z, t = 0) = E_0 e^{ikz}$. Учтем эти начальные условия введением в уравнения Максвелла (1) стороннего тока $j_{ct} = -(1/4\pi) E_0 e^{ikz} \delta(t)$, $j_\omega = -(E_0/8\pi^2) e^{ikz}$. Тогда, например, вместо однородного уравнения (10) для функции $F = \epsilon E_\omega e^{-i\omega z}$ будем иметь:

$$\frac{d^2}{dz^2} F + \frac{\omega_0^2}{u^2 \epsilon(z)} F = -\frac{i(k-\alpha)^2}{2\pi\omega} E_0 e^{iz(k-\alpha)}. \quad (15)$$

Если F_1, F_2 — линейно-независимые решения (10), то из (15) получаем:

$$E(z, t) = -\frac{E_0 i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz\alpha}}{\epsilon\omega} \left\{ F_1 \int_z^z e^{iz'(k-\alpha)} \frac{F_2(z')}{\Delta(z')} dz' - F_2 \times \right. \\ \left. \times \int_z^z e^{iz'(k-\alpha)} \frac{F_1(z')}{\Delta(z')} dz' \right\} (k-\alpha)^2 e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} E_\omega(z) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (16)$$

где $\Delta = F_2 dF_1/dz - F_1 dF_2/dz$.

При наличии особых точек в верхней полуплоскости комплексного переменного ω интегрирование по $d\omega$ надо вести, обходя эти точки сверху (чтобы удовлетворить начальному условию $E(t < 0) = 0$). Аналогичная ситуация имеет место, разумеется, и в случае однородной среды. Учитывая то обстоятельство, что выражения для F_1, F_2 могут быть записаны через известные функции лишь для некоторых частных случаев $\epsilon(z)$, важное значение приобретает случай медленного изменения свойств среды, когда справедливо приближение геометрической оптики (12). В этом случае имеем:

$$E_{ro}(z, t) = -\frac{E_0 u}{4\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz\alpha}}{\epsilon^{3/4}\omega} \left\{ e^{i\frac{\omega_0}{u} \int_z^z \frac{dz'}{\sqrt{\epsilon(z')}}} \int_z^z e^{i \left[z'(k-\alpha) - \frac{\omega_0}{u} \int_z^{z'} \frac{dz''}{\sqrt{\epsilon(z'')}} \right]} \times \right. \\ \times \epsilon^{1/4}(z') dz' - e^{-i\frac{\omega_0}{u} \int_z^z \frac{dz'}{\sqrt{\epsilon(z')}}} \int_z^z e^{i \left[z'(k-\alpha) + \frac{\omega_0}{u} \int_z^{z'} \frac{dz''}{\sqrt{\epsilon(z'')}} \right]} \times \\ \left. \times \epsilon^{1/4}(z') dz' \right\} (k-\alpha)^2 e^{-i\omega t} d\omega. \quad (17)$$

Если выражение для E_ω , входящее в (16), (17), имеет особенности в верхней полуплоскости комплексного переменного ω , то возмущение может нарастать во времени, т. е. рассматриваемая система будет неустойчива (точнее, абсолютно неустойчива).

* Заметим, что при распространении электромагнитной волны в неподвижной среде под углом к направлению изменения свойств среды может иметь место такого же типа особенность вблизи точки отражения ($E \approx 1/\epsilon$ при $\epsilon \rightarrow 0$) [4].

Рассмотрим более подробно выражение (17). Если среда однородна, то E_ω вычисляется элементарно и при наличии корней уравнения (11), расположенных в верхней полуплоскости $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, имеет место неустойчивость.

При учете зависимости диэлектрической проницаемости ϵ от координаты картина может радикально измениться. Допустим, что $\epsilon = \epsilon_0(\omega) + \epsilon_1(z, \omega)$, $|\epsilon_0| \gg |\epsilon_1|$. Тогда при

$$\left| \frac{\omega_0}{2u\epsilon_0^{3/2}} \int^z \epsilon_1(z') dz' \right| \ll 1 \quad (18)$$

можно положить

$$\Phi(\omega, z) = \int^z \exp \left\{ i \left[z'(k - \alpha) \mp \frac{\omega_0}{u} \int^{z'} \frac{dz''}{V_\epsilon(z'')} \right] \right\} \times \\ \times dz' \approx \int^z \exp \left\{ iz' \left(k - \alpha \mp \frac{\omega_0}{u V_{\epsilon_0}} \right) \right\} dz'.$$

В результате мы приходим к случаю потока плазмы в однородной среде, когда при $k - \alpha \mp \omega_0/u \sqrt{\epsilon_0} = 0$, как указывалось выше, E_ω может иметь полюс в верхней полуплоскости ($\omega_2 > 0$). Если же условие (18) не соблюдается, то $\Phi(z)$ представляет собой всюду при $\omega_2 > 0$ осцилирующую функцию, которая не имеет особенностей при конечных z в верхней полуплоскости комплексного переменного ω (так как $\epsilon(\omega)$ не имеет там ни нулей, ни особых точек). Разумеется, выражение E_ω (см. (17)) при $\omega_2 > 0$ не имеет особенностей и для бесконечно удаленных точек ($z \rightarrow \pm \infty$). Это означает, что в рассматриваемом случае неоднородной среды система всегда устойчива.

Как известно, неустойчивость возникает при когерентном взаимодействии зарядов потока. Если же поток пронизывает неоднородную среду, то такая когерентность может, вообще говоря, нарушиться, так как отдельные заряды потока находятся в разных условиях, ввиду зависимости диэлектрической проницаемости ϵ от координаты*. Исключением, разумеется, может оказаться периодическая среда (см. ниже). Заметим, что выше исследовалась возможность нарастания поля во времени в фиксированной точке z , т. е. рассматривалась по существу абсолютная неустойчивость.

Применим теперь формулу (17) для среды с периодически изменяющимися свойствами:

$$\epsilon = \epsilon_0(\omega) + \Delta(\omega) \cos[\xi(\omega)z], \quad \Delta \ll \epsilon_0, \quad \frac{1}{\xi} \gg u \sqrt{\epsilon_0}/\omega_0, \quad (19)$$

где ϵ_0 , Δ , ξ — не зависящие от координат параметры. После элементарных вычислений будем иметь:

$$E_{\Gamma 0}(z, t) = \frac{E_0 e^{ikz} u i}{4\pi\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k - \alpha)^2}{V_{\epsilon_0}(\omega)} \sum_{ss'=-\infty}^{\infty} \times \\ \times J_s(x) J_{s'}(x) \left\{ \frac{e^{iz(s-s')\xi}}{k - \alpha - \frac{\omega_0}{u \sqrt{\epsilon_0}} + s\xi} - \frac{e^{iz(s'-s)\xi}}{k - \alpha + \frac{\omega_0}{u \sqrt{\epsilon_0}} - s\xi} \right\} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (20)$$

* Поэтому характер излучения, испускаемого отдельными частями потока, будет различен.

($x = \omega_0 \Delta / 2\epsilon_0^{3/2} u \xi$, $J_s(x)$ —функция Бесселя). Здесь, как обычно, путь интегрирования охватывает особые точки подынтегрального выражения с $\omega_2 > 0$ сверху. С учетом этого обстоятельства интегрирование в (20) становится элементарным.

Рассмотрим вклад, вносимый в (20) частотами, удовлетворяющими уравнению

$$k - \alpha \pm \left(\frac{\omega_0}{u V_{\epsilon_0}} - s \xi \right) = 0. \quad (21)$$

Допустим, что соответствующая однородная система ($\Delta = 0$) устойчива, т. е. уравнение (21) при $s = 0$ не имеет корней с положительной мнимой частью. Тогда, вообще говоря, можно задать такую функцию $\xi(\omega)$, что появятся корни (21) с $\omega_2 > 0$, т. е. будет неустойчивость. Таким образом, периодическая среда может только способствовать появлению неустойчивости.

В заключение укажем на один простой случай, когда известно точное решение уравнения (15). Допустим, что

$$\epsilon = az^2, \quad \omega_0^2/u^2 a = -8/4, \quad (22)$$

т. е. a —постоянная величина. При $\epsilon < 0$ в отсутствие дисперсии в однородной среде всегда имеет место неустойчивость (см. (11)). Покажем, что в случае неоднородной среды, характеризуемой (22), несмотря на то, что во всем пространстве $\epsilon < 0$, не имеет места нарастающего во времени решения уравнения (15) не существует. Легко видеть, что в рассматриваемом случае $F_1 = z^2$, $F_2 = 1/z$. Подставляя эти функции в (16), после несложных преобразований будем иметь:

$$\frac{dE(zt)}{dt} = -\frac{2E_0 u}{3\epsilon z} e^{ik[z-tu]}, \quad (23)$$

т. е. поле в каждой точке осциллирует с частотой ku .

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Sumi, J. Phys. Soc. Japan, 15, 120, (1950).
2. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 43, 1419 (1962).
3. В. Д. Шафранов, Электромагнитные волны в плазме, изд. Ин-та атомной энергии им. И. В. Курчатова, АН СССР, М., 1960.
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
5. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ДАН СССР, 69, 555 (1949).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
4 декабря 1962 г.

ON ELECTROMAGNETIC WAVES IN NONUNIFORM MEDIUM PIERCED BY PLASMA FLOW

V. Ya. Eidman

Longitudinal electromagnetic oscillations are considered in nonuniform medium pierced by a plasma flow. It is shown that the nonuniformity of the medium may result in the radical change of stability criterion for the system. For instance, if the flow in uniform medium is unstable it may turn out to be stable provided the permittivity ϵ depends on coordinates.

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ХОЛОДНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

E. E. Ловецкий, A. A. Рухадзе

В квазигидродинамическом приближении исследуется спектр низкочастотных колебаний слабонеоднородной холодной плазмы, находящейся в магнитном поле и в поле тяжести. Выяснены условия, при которых колебания плазмы неустойчивы, и получены инкременты нарастания колебаний.

Реальная плазма, как ионосферная, так и лабораторная, всегда находится во внешнем магнитном поле, силовые линии которого, вообще говоря, искривлены. Кривизну силовых линий магнитного поля можно учесть с помощью введения эффективного поля тяжести $g \sim v_T^2/R$, где v_T — тепловая скорость частиц, а R — кривизна силовых линий. В магнитоактивной плазме, находящейся в поле тяжести, возникают дрейфы частиц поперек магнитного поля, приводящие к существенной неоднородности последнего. В определенных условиях такие дрейфы частиц могут вызвать раскачку электромагнитных колебаний и привести к неустойчивости плазмы.

Естественно, что изучение вопроса устойчивости неоднородной плазмы в поле тяжести будет наиболее последовательным, если плазму описывать с помощью кинетического уравнения с самосогласованным взаимодействием. Однако, отыскание решений системы кинетических уравнений и уравнений поля часто бывает очень затруднено. В настоящей работе для исследования вопроса устойчивости неоднородной плазмы в поле тяжести используется квазигидродинамическое приближение без учета столкновений. Такое приближение пригодно для описания колебаний плазмы низкого давления с фазовыми скоростями, значительно превышающими тепловые скорости частиц.

Задача об устойчивости плазмы в поле тяжести в указанном приближении рассматривалась ранее в работах [1-3]. В [1, 2] была обнаружена неустойчивость неоднородной плазмы в поле тяжести по отношению к возбуждению продольных дрейфовых волн, обусловленная дрейфом электронов относительно ионов. В [3] было показано, что плазма в поле тяжести неустойчива также по отношению к возбуждению поперечных электромагнитных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля. Спектры колебаний плазмы в этих работах получены при некоторых специальных предположениях о характере неоднородности плазмы (см. ниже).

В настоящей работе будут получены спектры колебаний слабонеоднородной плазмы без каких-либо предположений о характере неоднородности для случая низкочастотных колебаний $\omega \ll \omega_{Bi}$ (ω_{Bi} — гирочастота ионов) и при условии $v'_\alpha \ll \omega_{B\alpha}$, где $v_\alpha = \frac{1}{\omega_{B\alpha}} \frac{[gB]}{B}$ — скорость дрейфа частиц α -сорта, B — магнитное поле, направленное вдоль оси z , g — поле тяжести, направленное по оси x , штрихом обозначается диф-

ференцирование по x . Дрейф частиц при этом происходит вдоль оси y . Условие равновесия плазмы можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} \frac{B^2}{8\pi} = g \sum_{\alpha} N_{\alpha} m_{\alpha} = g \rho(x), \quad (1)$$

где $N_{\alpha}(x)$ —плотность числа частиц, $\rho(x)$ —плотность плазмы. С учетом соотношения (1) неравенство $v'_{\alpha} \ll \omega_{B\alpha}$ примет вид $v_{\alpha}^2 \ll v_a^2$, где v_a —альфвеновская скорость.

В работе [3] получен оператор тензора диэлектрической проницаемости неоднородной плазмы в квазигидродинамическом приближении (иначе говоря, в модели двухжидкостной гидродинамики). В рассматриваемом случае низкочастотных колебаний для компонент этого тензора справедливы выражения:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{11} &= 1 + \frac{c^2 \omega_i^2}{\omega^2 v_a^2}; \quad \hat{\epsilon}_{12} = -i \frac{c^2}{v_a^2 \omega} \left(v'_i + \frac{\omega_i}{\omega} v_i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\omega_i^2}{\omega_{Bi}} \right); \\ \hat{\epsilon}_{21} &= i \frac{c^2}{v_a^2 \omega} \left(v'_i - \frac{\omega_i}{\omega} v_i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\omega_i^2}{\omega_{Bi}} \right) - i \frac{c^2}{\omega^2} \left(\frac{\omega_i v_i}{v_a^2} \right)'; \\ \hat{\epsilon}_{22} &= 1 + \frac{c^2}{v_a^2} \left(1 - \frac{v_i^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{c^2}{\omega^2} \left(\frac{v_i^2}{v_a^2} \right)' \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c^2 v_i}{\omega \omega_i} \left(\frac{\omega_{Bi}}{v_a^2} \right)' - \frac{k_z^2 v_i^2 \omega_{Bi}^2 c^2}{\omega^2 \omega_i^2 v_a^2}; \quad (2) \\ \hat{\epsilon}_{13} &= \hat{\epsilon}_{31} = 0; \\ \hat{\epsilon}_{23} &= \hat{\epsilon}_{32} = - \sum_{\alpha} \frac{k_z v_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 \omega_{\alpha}}; \quad \hat{\epsilon}_{33} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}, \end{aligned}$$

где $\omega_{\alpha} = \omega - k_y v_{\alpha}$, а $\omega_{L\alpha}$ —ленгмюровская частота частиц α -сорта. Компоненты тензора (2) написаны с точностью до членов порядка m/M . Плазму считаем квазинейтральной: $\sum e_{\alpha} N_{\alpha} = 0$.

Для исследования вопроса устойчивости малых колебаний неоднородной плазмы необходимо решить систему уравнений Максвелла [3]:

$$\left\{ \hat{k}^2 \delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{\omega^2 \hat{\epsilon}_{ij}}{c^2} (\omega, \hat{k}) \right\} E_j = 0, \quad (3)$$

где $\hat{k} = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, k_y, k_z \right)$, а E —электрическое поле, возникающее из-за слабого отклонения плазмы от равновесного состояния. Следует заме-

тить, что в рассматриваемой модели оператор $\hat{\epsilon}_{ij}(\omega, \hat{k})$ является дифференциальным оператором второго порядка (2). Поэтому для решения системы уравнений (3) достаточно пользоваться обычными граничными условиями электродинамики материальных сред. В общем случае (3) представляет собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, аналитическое решение которой невозможно. Из этой системы можно получить, вообще говоря, три уравнения шестого порядка для каждой из компонент поля E .

В некоторых частных случаях, однако, эти уравнения для отдельных компонент поля оказываются уравнениями второго порядка и могут быть написаны в виде

$$\lambda^2 y'' + q(\omega, x) y = 0, \quad (4)$$

где λ — параметр, малый по сравнению с характерным размером изменения функции $q(\omega, x)$. Тогда для описания колебаний слабонеоднородной плазмы можно использовать метод геометрической оптики [5, 6]. Этот метод связан с теорией асимптотических решений уравнений типа (4). Спектр собственных значений в случае действительных $q(\omega, x)$ определяется асимптотической формулой:

$$\oint dx \sqrt{q(\omega, x)} = 2\pi n\lambda. \quad (5)$$

Интегрирование в соотношении (5) ведется по замкнутому контуру, включающему точки поворота (точки, в которых $q(\omega, x)=0$), или по области, занимаемой плазмой, если точки поворота отсутствуют*.

Тензор $\hat{\epsilon}_{ij}(\omega, \hat{k})$ содержит члены с пространственными производными от магнитного поля B и плотности числа частиц N_a ; такие производные появляются также при получении уравнений для отдельных компонент поля из системы уравнений (3). При анализе указанных членов с пространственными производными следует иметь в виду два характерных масштаба неоднородности плазмы: L_1 , характеризующий неоднородность магнитного поля и, согласно уравнению (1), имеющий порядок $L_1 \sim v_a^2/g$, и L_2 , характеризующий неоднородность плотности плазмы. Эти масштабы неоднородности являются независимыми.

Рассмотрим несколько конкретных случаев распространения электромагнитных колебаний в используемой нами модели неоднородной плазмы.

1. Электромагнитные волны вдоль неоднородности плазмы ($k_y = k_z = 0$). В этом случае система уравнений (5) с учетом явного вида тензора $\hat{\epsilon}_{ij}(\omega, \hat{k})$ сводится к следующей системе уравнений:

$$E_y' + \left(\frac{v_i^2}{v_a^2 + c^2} \right)' E_y' + \left[\frac{\omega^2}{v_a^2} \left(1 + \frac{v_a^2}{c^2} \right) + v_i \left(\frac{\omega_{Bi}}{v_a^2} \right)' \right] E_y = 0; \quad (6)$$

$$E_z'' + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) E_z = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) заменой

$$E_y = u \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{v_i^2}{v_a^2 + c^2} \right\}$$

сводится к виду

$$u'' + q(\omega, x) u = 0;$$

$$q(\omega, x) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{v_a^2}{c^2} \right) + v_i \left(\frac{\omega_{Bi}}{v_a^2} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{v_i^2}{v_a^2 + c^2} \right)'' - \frac{1}{4} \left(\frac{v_i^2}{v_a^2 + c^2} \right)^{''2}, \quad (8)$$

аналогичному (4). Метод геометрической оптики применим для решения уравнения (8) в том случае, когда последними тремя членами в выражении для $q(\omega, x)$ можно пренебречь**, т. е. при условии

* Последнее является следствием требования обращения в нуль решения уравнения (4) на границе плазмы.

** Приближение геометрической оптики для решения уравнения (8) применимо при условии $(\sqrt{q})' \ll q$. В общем случае это условие выполняется при пренебрежении тремя последними слагаемыми в выражении для q . Однако для некоторых частных видов неоднородности плазмы в рамках приближения геометрической оптики эти члены могут существенно влиять на спектр колебаний плазмы. Например, в плазме, в которой $v_a = \text{const}$ и $(\ln N)' = \text{const}$, при условии $L_2/L_1 \gg v_i^2/(v_a^2 + c^2)$, указанные члены могут привести к неустойчивости колебаний с инкрементом $\gamma \sim g/v_a$.

$L_{1,2}^2 \gg v_a^2 c^2 / \omega^2 (v_a^2 + c^2)$. При этом дисперсионное уравнение для определения спектра колебаний, согласно соотношению (5), запишется в виде

$$\oint dx \sqrt{\frac{\omega^2}{v_a^2} \left(1 + \frac{v_a^2}{c^2} \right)} = 2\pi n. \quad (9)$$

В случае $v_a = \text{const}$ спектр, определенный из уравнения (9), совпадает со спектром колебаний однородной плазмы

$$\omega^2 = \frac{v_a^2}{1 + v_a^2/c^2} \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2, \quad (10)$$

где d —размер плазмы вдоль оси x , а величина $\pi n/d$ играет роль волнового числа k_x .

Из уравнения (7) находим дисперсионное соотношение для определения спектра поперечных колебаний неоднородной плазмы:

$$\oint dx \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right)} = 2\pi n, \quad (11)$$

откуда при $\omega_{Le} = \text{const}$ получаем известный спектр колебаний однородной плазмы

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + \left(\frac{\pi n}{d} \right)^2 c^2. \quad (12)$$

2. Электромагнитные волны поперек магнитного поля ($k_y \equiv k \neq 0$, $k_z = 0$). В этом случае в системе уравнений (3) отщепляется уравнение для компоненты E_z , соответствующее поперечным колебаниям неоднородной плазмы со спектром, определяемым из дисперсионного уравнения

$$\oint dx \sqrt{-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right)} = 2\pi n. \quad (13)$$

Компоненты поля E_x и E_y при этом оказываются связанными соотношением

$$E_x = - \frac{i}{k^2 - \omega^2 c^{-2} (1 + \omega_i^2 \omega^{-2})} \left\{ \frac{\omega}{v_a^2} \left(v'_i - \frac{\omega_i^2}{\omega_{Bi}} \right) E_y + \left(\frac{\omega_i v_i}{v_a^2} + k \right) E'_y \right\} \quad (14)$$

и удовлетворяют в отдельности дифференциальным уравнениям второго порядка. Наиболее простой вид дифференциальное уравнение для E_y имеет при условиях $c \gg v_a$ и $k^2 v_a^2 \gg \omega^{2*}$ и представляет собой уравнение для продольных колебаний плазмы [6]:

$$E''_y + \left(\ln \frac{N}{B} \right)' E'_y + k^2 \left[\frac{g}{\omega \omega_i} \left(\ln \frac{N}{B} \right)' - 1 \right] E_y = 0. \quad (15)$$

С помощью замены

$$E_y = \frac{B}{\sqrt{N}} u$$

и при условии $kL \gg 1$ это уравнение сводится к виду

$$u'' + k^2 \left[\frac{g}{\omega \omega_i} \left(\ln \frac{N}{B} \right)' - 1 \right] u = 0, \quad (16)$$

* При этих условиях из соотношения (14) следует, что $kE_x = -iE'_y$, т. е. $\text{rot } E = 0$.

откуда для определения спектра колебаний получаем:

$$\oint dx \sqrt{k^2 \left[\frac{g}{\omega \omega_i} \left(\ln \frac{N}{B} \right)' - 1 \right]} = 2\pi n. \quad (17)$$

Приведем формулы для спектров собственных колебаний в области частот $\omega \ll kv_i$ и $\omega \gg kv_i$ соответственно при $B(\ln N/B)' = \text{const}$ и $(\ln N/B)' = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= g \left(\ln \frac{N}{B} \right)' \left[1 + \left(\frac{\pi n}{kd} \right)^2 \right]^{-1} \quad \text{при } \omega \gg kv_i; \\ \omega &= \frac{\omega_{Bi}}{k} \left(\ln \frac{N}{B} \right)' \left[1 + \left(\frac{\pi n}{kd} \right)^2 \right]^{-1} \quad \text{при } \omega \ll kv_i. \end{aligned} \quad (18)$$

Из уравнения (17), а также из формул (18) видно, что, если во всей плазме $g(\ln N/B)' < 0$, то колебания плазмы в области частот $\omega \gg kv_i$ будут неустойчивыми. Инкремент нарастания колебаний типа (18) был вычислен в работе [1] в предположении линейной зависимости B и N от координаты x . Спектры, полученные в работе [3] для случая распространения волн вдоль направления дрейфа частиц, справедливы при тех же предположениях, в которых получены формулы (18) и при условии $(\pi n/kd)^2 \ll 1$. Из того факта, что при $\omega \ll kv_i$ колебания плазмы оказываются устойчивыми, следует, что волновой вектор \mathbf{k} демпфирует неустойчивые колебания неоднородной плазмы.

3. Электромагнитные волны поперек направления дрейфа частиц ($k_z=k \neq 0$, $k_y=0$). В этом случае все компоненты поля E связаны друг с другом. Однако в предположениях

$$v_a \ll c, \quad \omega^2 \ll k^2 v_a^2, \quad kL_{1,2} \gg \frac{g^2}{\omega^2 v_a^2} \geq 1 \quad (19)$$

уравнение для E_y , описывающее поперечные колебания плазмы, отщепляется и имеет вид

$$E_y'' - k^2 \left(1 + \frac{g^2}{\omega^2 v_a^2} \right) E_y = 0. \quad (20)$$

Соответствующий спектр колебаний при этом определяется уравнением

$$\oint dx \sqrt{-k^2 \left(1 + \frac{g^2}{\omega^2 v_a^2} \right)} = 2\pi n. \quad (21)$$

Из этого уравнения следует, что поперечные волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля, всегда неустойчивы, если выполнены сделанные выше предположения (19). В частном случае $v_a^2 = \text{const}$ имеем:

$$\omega^2 = - \frac{g^2}{v_a^2} \left[1 + \left(\frac{\pi n}{kd} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (22)$$

Такая неустойчивость неоднородной плазмы совершенно аналогична пучковой неустойчивости поперечных волн в однородной плазме [7]. Роль пучка играет дрейф электронов относительно ионов. Наконец, отметим, что спектры, полученные в работе [3] для случая распространения волн вдоль магнитного поля, справедливы при $v_a^2 = \text{const}$ и $(\pi n/kd)^2 \ll 1$.

Авторы глубоко благодарны В. П. Силину за обсуждение и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Rosenbluth, C. Longmire, Ann. Phys., **1**, 120 (1957).
2. M. Rosenbluth, N. Kroll, N. Rostoker, Доклад на конференции по физике плазмы в г. Зальцбурге, 1961, Ядерный синтез, Дополнение **1**, 143 (1962).
3. Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, ЖТФ, **33**, 652 (1963).
4. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, М., Атомиздат, 1961.
5. В. П. Силин, ЖЭТФ, **44**, 1271 (1963).
6. Л. М. Коврижных, Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ДАН СССР, **149**, 1052 (1963).
7. А. А. Рухадзе, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **4**, 401 (1963).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
6 декабря 1962 г.

LOW-FREQUENCY OSCILLATIONS OF COLD MAGNETOACTIVE PLASMA IN GRAVITATION FIELD

E. E. Lovetsky, A. A. Rukhadse

In quasihydrodynamic approximation the spectrum is investigated of low-frequency oscillations of the slightly nonuniform cold plasma placed in magnetic and gravitation fields. Conditions are cleared up under which plasma oscillations are unstable. Increments of the oscillations are also obtained.

РЕЗОНАНСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА, ПРОЛЕТАЮЩЕГО ВБЛИЗИ ПЛАЗМЕННОГО СГУСТКА

Г. В. Городинский, В. В. Тамойкин

Рассмотрено излучение равномерно движущегося заряда вблизи плазменного шарика в приближении $ka \ll 1$. Показано, что на частотах, соответствующих дипольному, квадрупольному и более высшим мультипольным резонансам, появляется резонансное излучение, интенсивность которого значительно превосходит энергию, излучаемую зарядом, пролетающим над металлическим шариком таких же размеров.

В литературе появился ряд работ [1-3], посвященных излучению заряженной частицы, пролетающей над металлическим шариком; здесь мы рассмотрим излучение заряда, пролетающего над плазменным шариком, который мы выбираем в качестве простейшей модели плазменного сгустка.

Плазменный шарик, в отличие от диэлектрического шара с $\epsilon = \text{const}$, даже при условии $a/\lambda \ll 1$ (a -радиус шара, λ -характерное расстояние, на котором изменяется электрическое поле) обладает резонансами дипольного, квадрупольного и более высших типов [4]. Следовательно, на частотах, соответствующих „плазменным резонансам“, возможно так называемое резонансное излучение, которое в целом ряде случаев может оказаться значительно большим, чем излучение, рассмотренное в [1-3].

Это легко понять на примере дипольного излучения из следующих рассуждений. Пусть расстояние R , на котором существенно изменяется поле движущегося заряда, много больше радиуса плазменного шарика ($R \gg a$). Тогда дипольный момент шарика

$$p_\omega = \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 2} a^3 E_\omega^0$$

и на частотах, где $\epsilon(\omega) = -2$, может быть много больше, чем в случае металлического шарика тех же размеров ($\epsilon = \infty$).

Заметим, что метод, использованный в настоящей работе, является более общим, чем метод изображений, примененный в [1-3], так как он не ограничен условием $v \ll c$.

Итак, пусть частица с зарядом q с постоянной скоростью v пролетает на некотором прицельном расстоянии l от центра плазменного шарика ($l > a$). Введем декартову систему координат с началом в центре шара. Пусть частица движется вдоль оси z в плоскости xz по траектории $x = -l$. Тогда в выбранной системе отсчета фурье-компоненты поля равномерно движущегося заряда в вакууме запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x^0(\omega) = & q \sqrt{1 - \beta^2} K_1 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{(x+l)^2 + y^2} \right) \times \\ & \times \frac{x+l}{\sqrt{(x+l)^2 + y^2}} \exp \left(i \frac{\omega}{v} z \right); \end{aligned}$$

$$E_y^0(\omega) = \alpha \sqrt{1-\beta^2} K_1 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{(x+l)^2+y^2} \right) \times \\ \times \frac{y}{\sqrt{(x+l)^2+y^2}} \exp \left(i \frac{\omega}{v} z \right); \quad (1)$$

$$E_z^0(\omega) = -i\alpha (1-\beta^2) K_0 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{(x+l)^2+y^2} \right) \times \\ \times \exp \left(i \frac{\omega}{v} z \right),$$

где $\alpha = \omega q/\pi v^2$, $\beta = v/c$ и $K_0(x)$, $K_1(x)$ — функции Макдональда нулевого и первого порядка соответственно.

Частота резонансного излучения для случая шара малых размеров ($ka \ll 1$, $k\sqrt{\epsilon}a \ll 1$, где $k = \omega/c$), согласно [4, 5], определяется из дисперсионного соотношения для колебаний диэлектрической сферы:

$$\epsilon n + n + 1 + i(ka)^{2n+1} \frac{(\epsilon-1)(n+1)}{(2n+1)[1 \cdot 3 \dots (2n-1)]^2} = 0. \quad (2)$$

Подставляя в (2)

$$\epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2, \quad (3)$$

где

$$\omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m, \quad (4)$$

получаем:

$$\omega_n = \frac{\omega_0}{\sqrt{2+1/n}}; \quad (5)$$

$$\gamma'_n = \omega_n (ka)^{2n+1} \frac{n+1}{(2n+1)n[1 \cdot 3 \dots (2n-1)]^2}. \quad (6)$$

Здесь ω_n — частота n -го мультипольного резонанса, а γ'_n — постоянная радиационного затухания плазменного шарика.

В случае, если диэлектрическая проницаемость — комплексная ($\epsilon(\omega) = \epsilon' - i\epsilon''$), можно показать, что

$$\gamma_n = \gamma'_n + \omega_n \epsilon''. \quad (7)$$

В выражении (5) случай $n=1$ соответствует дипольному резонансу ($\epsilon(\omega) = -2$), $n=2$ — квадрупольному ($\epsilon = -3/2$) и т. д.

Для нахождения поля излучения E' шара, возбуждаемого движущейся частицей, представим общее поле $E = E^0 + E'$ в виде ряда по сферическим функциям m_{omn} и n_{omn} :

$$\begin{Bmatrix} E^{0,r} \\ H^{0,r} \end{Bmatrix} = \sum_{o,m,n} \begin{Bmatrix} a_{omn}^{0,r} \\ ib_{omn}^{0,r} \end{Bmatrix} m_{omn} + \begin{Bmatrix} b_{omn}^{0,r} \\ ia_{omn}^{0,r} \end{Bmatrix} n_{omn}. \quad (8)$$

Здесь $n=1, 2, 3, \dots$, $m=0, 1, 2, \dots, n$, $o=e, 0$ — индекс, указывающий четность сферических функций. Используя граничные условия на поверхности шара, можно показать [5], что коэффициенты разложения поля заряда E^0 и поля излучения E' в (8) с точностью до членов более высокого порядка по ka связаны между собой следующими соотношениями:

$$b'_{\sigma mn} = -i \frac{(\epsilon-1)(n+1)(ka)^{2n+1}}{(\epsilon n+n+1)(2n+1)[1 \cdot 3 \dots (2n-1)]^2 + i(\epsilon-1)(n+1)(ka)^{2n+1}} b^0_{\sigma mn} \quad (9)$$

при.

$$\epsilon n + n + 1 = 0, \quad (10)$$

$$b'_{\sigma mn} = -b^0_{\sigma mn}. \quad (11)$$

Что касается коэффициентов $a'_{\sigma mn}$, то они по крайней мере в $(ka)^{-2}$ раз меньше соответствующих коэффициентов $b'_{\sigma mn}$, и мы их учитывать не будем.

В [4] для произвольного внешнего поля получены формулы, выражающие коэффициенты $b^0_{\sigma mn}$ через значения внешнего поля и его производных в центре шара. Для интересующего нас конкретного случая поля, создаваемого движущимся зарядом, при $n=1, 2$ (рассматриваем для простоты только дипольное и квадрупольное излучение) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} b^0_{e01} &= -\frac{3}{2} i \alpha (1-\beta^2) K_0 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right); \\ b^0_{e11} &= \frac{3}{2} \alpha \sqrt{1-\beta^2} K_1 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right); \\ b^0_{e02} &= \frac{5}{2} \frac{\alpha}{k} \frac{\omega}{v} K_0 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right) (1-\beta^2); \\ b^0_{e12} &= \frac{5}{6} \frac{1}{k} i \alpha \frac{\omega}{v} (2-\beta^2) \sqrt{1-\beta^2} K_1 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right); \\ b^0_{e22} &= -\frac{5}{12} \frac{1}{k} \alpha \sqrt{1-\beta^2} \left\{ \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} K_0 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{l} K_1 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Остальные коэффициенты $b_{\sigma m1}$ и $b_{\sigma m2}$ равны нулю. Интенсивность излучения шара, возбуждаемого зарядом, в телесный угол $d\Omega$ в интервале частот $\omega, \omega+d\omega$ равна

$$dS_\omega = S_\omega 4\pi R^2 d\Omega d\omega, \quad (13)$$

где S_ω — плотность потока энергии вычисляется по формуле

$$S_\omega = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [E^\star H^\star]. \quad (14)$$

Подставляя (8) и (14) в (13), получим:

$$dS_\omega = -c \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\sigma, m, n} i |b'_{\sigma mn}|^2 [n_{\sigma mn} m_{\sigma mn}^*] \right\} R^2 d\Omega d\omega. \quad (15)$$

Здесь мы двойные суммы по индексам σ, m, n свели к однократным, воспользовавшись свойствами ортогональности сферических функций. Величина $|b'_{\sigma mn}|^2$ определяется выражением

$$|b_{\sigma mn}^r|^2 = |\Psi_n(\omega)|^2 |b_{\sigma mn}^0|^2, \quad (16)$$

в котором

$$\Psi_n(\omega) = \frac{i(\epsilon-1)(n+1)(ka)^{2n+1}}{(\epsilon n+n+1)(2n+1)[1 \cdot 3 \dots (2n-1)]^2 + i(\epsilon-1)(n+1)(ka)^{2n+1}}. \quad (17)$$

Полагая в (15) $n=1$, для углового распределения дипольного излучения электромагнитных волн получаем следующее выражение:

$$dS_\omega(\Theta) = \frac{9q^2(1-\beta^2)\omega^6a^6}{4\pi^2c^3v^4} \frac{1}{(ka)^6} |\Psi_1(\omega)|^2 \left\{ (1-\beta^2) K_0^2 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right) \sin^2 \Theta + \right. \\ \left. + K_1^2 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right) (\cos^2 \Theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \right\} d\omega d\Omega. \quad (18)$$

Чтобы найти полную интенсивность на частоте ω , проинтегрируем (18) по углу φ от 0 до 2π и по углу Θ от 0 до π :

$$dS_\omega = \frac{6q^2(1-\beta^2)\omega^6a^6}{\pi c^3v^4} \frac{1}{(ka)^6} |\Psi_1(\omega)|^2 \left\{ (1-\beta^2) K_0^2 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right) + \right. \\ \left. + K_1^2 \left(\frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} l \right) \right\} d\omega. \quad (19)$$

Если в (19) положить $\beta \ll 1$ и $\omega = \omega_0/\sqrt{3}$ (при этом $|\Psi_1(\omega)|^2 = 1$), то интенсивность дипольного излучения заряда, пролетающего над плазменным шариком, будет в $9/4(ka)^6$ раз больше, чем энергия, излучаемая зарядом, пролетающим вблизи металлического шара тех же размеров [2].

Из выражения (19) видно, что излучение носит ярко выраженный резонансный характер, поскольку функция $|\Psi_1(\omega)|^2$ спадает в 4 раза при расстройке $\Delta\omega \approx 0,4\omega_0(ka)^3$ относительно резонансной частоты $\omega = \omega_0/\sqrt{3}$.

Рассмотрим некоторые частные случаи в выражении для дипольного излучения заряда, пролетающего вблизи плазменного шара.

1) Пусть

$$(\omega/v)l \gg 1. \quad (20)$$

Это условие можно переписать следующим образом:

$$\frac{\omega}{c} a \frac{1}{\beta} \frac{l}{a} \gg 1. \quad (21)$$

Так как все формулы получены при условии $\frac{\omega}{c} a \ll 1$, то при $l \approx a$ неравенство (21) переходит в следующее:

$$\beta \ll 1. \quad (22)$$

Учитывая это, из (19) находим следующее выражение:

$$dS_\omega = \frac{6q^2}{\omega \beta^3 l} \exp \left(-2 \frac{\omega}{v} l \right) d\omega. \quad (23)$$

Интенсивность излучения в этом случае экспоненциально мала. Неравенство (21) можно выполнить также при условии $l \gg a$. Если при этом выполняется также условие

$$\frac{\omega}{v} l \sqrt{1-\beta^2} \gg 1, \quad (24)$$

а β не мало, то выражение (19) принимает вид

$$dS_{\omega} = \frac{3q^2(2-\beta^2)}{\omega^3 l} \sqrt{1-\beta^2} \exp\left(-2\frac{\omega}{v} l \sqrt{1-\beta^2}\right) d\omega. \quad (25)$$

Излучение в этом случае также экспоненциально мало.

2) Если выполняется обратное (20) условие $(\omega/v)l \ll 1$, то для излученной энергии получим следующее выражение:

$$dS_{\omega} = \frac{6q^2 c}{\pi \omega^2 \beta^2 l^2} d\omega. \quad (26)$$

В данном случае излучение, вообще говоря, может быть и не мало.

Положим теперь в (15) $n=2$. Тем самым кроме дипольного будет учтено также квадрупольное излучение. В результате для углового распределения излучения получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} dS_{\omega}(\Theta) = & \frac{9q^2(1-\beta^2)\omega^6 a^6}{4\pi^2 c^3 v^4} \frac{1}{(ka)^6} \left\{ |\Psi_1(\omega)|^2 [(1-\beta^2) K_0^2 \sin^2 \Theta + \right. \\ & + K_1^2 (\cos^2 \Theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)] + \frac{25}{9\beta^2} |\Psi_2(\omega)|^2 [(1-\beta^2) K_0^2 (9 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + \right. \\ & \left. + \sin^2 \Theta \sin^2(2\varphi) + \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta \cos^2(2\varphi)) + K_1^2 ((2-\beta^2)^2 \cos^2 \Theta \sin^2 \varphi + \right. \\ & \left. +(2-\beta^2)^2 \cos^2(2\Theta) \cos^2 \varphi + \frac{4}{(\omega/v)^2 l^2} \sin^2 \Theta \sin^2(2\varphi) + \right. \\ & \left. + \frac{4}{(\omega/v)^2 l^2} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta \cos^2(2\varphi)] + \frac{4 \sqrt{1-\beta^2}}{(\omega/v) l} K_0 K_1 (\sin^2 \Theta \sin^2(2\varphi) + \right. \\ & \left. \left. + \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta \cos^2(2\varphi)) \right] \right\} d\omega. \end{aligned} \quad (27)$$

Полная интенсивность излучения на данной частоте ω получается интегрированием (27) по всем углам Θ от 0 до π и по углам φ от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} dS_{\omega} = & \frac{6q^2(1-\beta^2)\omega^6 a^6}{\pi c^3 v^4} \frac{1}{(ka)^6} \left\{ |\Psi_1(\omega)|^2 [(1-\beta^2) K_0^2 + K_1^2] + \right. \\ & + \frac{10}{6\beta^2} |\Psi_2(\omega)|^2 \left[4(1-\beta^2) K_0^2 + \left((2-\beta^2)^2 + \frac{4}{(\omega/v)^2 l^2} \right) K_1^2 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{4 \sqrt{1-\beta^2}}{(\omega/v) l} K_0 K_1 \right] \right\} d\omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Рассмотрим частоту, для которой $\varepsilon=-3/2$, соответствующую частоте квадрупольного резонанса. В этом случае $|\Psi_2(\omega)|^2=1$, $|\Psi_1(\omega)|^2 \ll 1$. Мы видим, что излучение вблизи частоты квадрупольного резонанса также носит ярко выраженный резонансный характер, поскольку функция $|\Psi_2(\omega)|^2$ резко спадает при расстройке $\Delta\omega=\omega-\omega_{\text{квадр}} \approx 2 \cdot 10^{-2} \omega_0 (ka)^5$,

Из этого выражения видно, что кривая квадрупольного резонанса более узкая, чем у дипольного. Правда, в реальных условиях учет затухания ($\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$) приводит к относительно большему, чем в случае дипольного резонанса, уширению этой линии.

Если сравнить выражения для интенсивности dS_{ω} при дипольном ($n=1$) и квадрупольном ($n=2$) излучении, то оказывается, что при условии $(\omega/v)l \ll 1$

$$\frac{dS_{\omega}^{\text{квадр}}}{dS_{\omega}^{\text{дип}}} \underset{\omega \rightarrow \omega_0}{\sim} 14 \left/ \left(\frac{\omega_0}{v} l \right)^2 \beta^2 \right. . \quad (28a)$$

а при условии $(\omega/v)l \gg 1, \beta \ll 1$

$$\frac{dS_{\omega}^{\text{квадр}}}{dS_{\omega}^{\text{дип}}} \underset{\omega \rightarrow \omega_0}{\sim} \frac{6}{\beta^2} e^{-0.1(\omega_0/v)l} . \quad (28b)$$

Если учесть комплексный характер диэлектрической проницаемости шарика (учет соударений), то это приведет к уменьшению интенсивности излучения высших мультипольных типов по сравнению с дипольным, так что практически не приходится учитывать излучение выше квадрупольного.

Утверждать, что излучение будет носить резонансный характер для всех номеров n , вообще говоря, нельзя, поскольку для достаточно больших n расстояние между резонансными частотами $\Delta_{\omega} = \omega_n - \omega_{n-1}$ станет сравнимым с шириной линий резонансного излучения (при $\epsilon'' = \text{Im } \epsilon \neq 0$).

Рассмотрим в выражении (28) некоторые частные случаи, положив $\omega = \omega_0 / \sqrt{2+1/2}$.

1) $(\omega/v)l \gg 1$. Это условие при $l \approx a$ выполняется, если соблюдается неравенство $\beta \ll 1$. В результате имеем:

$$dS_{\omega} = \frac{40q^2}{\omega \beta^5 l} \exp \left(-2 \frac{\omega}{v} l \right) d\omega . \quad (29)$$

2) При $l \gg a$ и $(\omega/v)l \sqrt{1-\beta^2} \gg 1$ имеем:

$$dS_{\omega} = \frac{5q^2 \sqrt{1-\beta^2}}{\omega \beta^5 l} \{4(1-\beta^2) + (2-\beta^2)^2\} \exp \left(-2 \frac{\omega}{v} l \sqrt{1-\beta^2} \right) d\omega , \quad (30)$$

т. е. интенсивность экспоненциально мала.

3) $(\omega/v)l \gg 1$, но $(\omega/v)l \sqrt{1-\beta^2} \ll 1$. Это возможно, когда $\beta \approx 1$.

Тогда выражение для излученной энергии принимает следующий вид:

$$dS_{\omega} = \frac{10q^2 v}{\pi \omega^2 l^2 \beta^5} d\omega . \quad (31)$$

4) $(\omega/v)l \ll 1$. Это выполняется, в частности, при $\beta \approx 1, l \approx a$. Тогда интенсивность излучения на частоте квадрупольного резонанса

$$dS_{\omega} = \frac{40q^2 v^3}{\pi \omega^4 l^4 \beta^5} d\omega . \quad (32)$$

Заметим, что хотя плотность излученной энергии при квадрупольном резонансе может оказаться значительно больше плотности энергии дипольного излучения, однако полная энергия квадрупольного излучения заряда, пролетающего вблизи плазменного шара, получаемая интегрированием $dS_{\omega}^{\text{квадр}}$ по всем частотам ω или грубо

$$J_{\text{квадр}} \approx S_{\omega_{\text{макс}}}^{\text{квадр}} \Delta \omega_2 \approx S_{\omega_{\text{макс}}}^{\text{квадр}} 2 \cdot 10^{-2} \omega_0 (ka)^5,$$

оказывается значительно меньше энергии дипольного излучения

$$J_{\text{дип}} \approx S_{\omega_{\text{макс}}}^{\text{дип}} \Delta \omega_1 \approx S_{\omega_{\text{макс}}}^{\text{дип}} 0,4 \omega_0 (ka)^3$$

(поскольку ширина линии квадрупольного излучения значительно меньше, чем при дипольном излучении). Представляет поэтому интерес тот случай, когда внешнее поле E^0 задано лишь на одной частоте ω , совпадающей с собственной частотой $2n$ -польного резонанса плазменной сферы. Для этого можно рассмотреть систему зарядов, расположенных на одинаковом расстоянии L друг от друга и движущихся с постоянной скоростью v . Здесь ток

$$\mathbf{j} = e v \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - LN - \mathbf{v}t). \quad (33)$$

Так как j есть периодическая функция с периодом L , то, разложив (33) в ряд, получим следующее выражение:

$$\mathbf{j} = \frac{e v}{L} \sum_s e^{i \frac{\Omega}{v} s z - i \Omega s t} \delta(y) \delta(x), \quad (34)$$

где

$$\Omega = 2\pi v/L. \quad (35)$$

Тогда поле, создаваемое такой системой движущихся зарядов, представляет собой сумму

$$\mathbf{E}^0 = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_s^0(\Omega s), \quad (36)$$

где поле $\mathbf{E}_s^0(\Omega s)$ можно получить из выражений (1), если сделать в них следующую замену:

$$\omega \rightarrow \Omega s, \quad \alpha \rightarrow \alpha' = \Omega s q / \pi v L. \quad (37)$$

Таким образом, внешнее поле E^0 будет представлять собой сумму полей с дискретными частотами $\sim \Omega$. Следовательно, если одна из дискретных частот Ωs поля системы движущихся зарядов совпадет с одной из резонансных частот плазменной сферы, то появится острый пик в излучении на резонансной частоте; энергия излучения будет велика, поскольку вся она будет сосредоточена на данной частоте.

В заключение остановимся на следующем вопросе. Пусть плоская волна $E^0 e^{-ikx + i\omega t}$ падает на плазменный шар малых размеров ($ka \ll 1$). Тогда выражение для поперечного сечения рассеяния имеет следующий вид [5]:

$$Q = \frac{2\pi}{k^2} \sum_n \left(\left| \frac{b_n^r}{b_n^0} \right|^2 + \left| \frac{a_n^r}{a_n^0} \right|^2 \right) (2n+1) \simeq \frac{2\pi}{k^2} \sum_n |\Psi_n(\omega)|^2 (2n+1). \quad (38)$$

Поэтому вдали от всех высших мультипольных резонансов основной вклад в рассеяние плоской волны будет при $n=1$. В этом случае угловое распределение рассеянного излучения будет совпадать с диаграммой излучения элементарного диполя. Однако, если частота падающей волны приближается к одной из резонансных частот n -го порядка плазменной сферы, то диаграмма рассеяния существенно изменится, поскольку основной вклад в рассеянное излучение будет вносить уже не дипольное, а $2n$ -польное электрическое колебание плазменной сферы. Так, при $n=2$ угловое распределение рассеянного поля будет иметь вид диаграммы излучения квадруполя.

Авторы признательны В. Л. Гинзбургу и Н. Г. Денисову за ценное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ, 29, 388 (1955).
2. А. Ц. Аматуни, А. Н. Оганесян, Изв. АН Арм. ССР, 14, 99 (1961).
3. Г. В. Городинский, В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
4. В.Б. Гильденбург, И. Г. Кондратьев, ЖТФ, 33, 301 (1963).
5. Д. А. Стреттон, Теория электромагнетизма, ОГИЗ, Гостехиздат, М., 1948.
6. T. R. Kaiser and R. L. Closs, Phil. Mag., 43, 1 (1952).
7. N. Herlofson, Arkiv För Fysik, 3, 247 (1951).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 сентября 1962 г.

RESONANT RADIATION OF A CHARGE MOVING NEAR PLASMOID

G. V. Gorodinsky, V. V. Tamoikin

Radiation of a charge moving uniformly nearby a spheric plasmoid is considered, in approximation $ka \ll 1$. It is shown that at the frequencies corresponding to dipole quadrupole and the higher multipole resonances there appears resonant radiation the intensity of which considerably exceeds the energy radiated by a charge moving near metal sphere of the same radius.

— — — — —

УРОВНИ КВАДРУПОЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СПИНОВ

B. C. Гречишкун, H. E. Айнбinder

Получены выражения для уровней квадрупольной энергии ядер с целыми спинами $J=2, 3$ и 4 в случае произвольного значения параметра асимметрии тензора градиента электрического кристаллического поля η . Для спина $J=5/2$ протабулированы параметры нулевого расщепления зеемановского спектра ядерного квадрупольного резонанса (в интервале значений η от 0 до 1). Эксперименты по методу конуса нулевого расщепления проводились на монокристаллах $SbCl_3$ и $2SbCl_3 \cdot C_6H_6$ (резонанс Sb^{121} , $J = 5/2$). С помощью таблиц получены значения параметра асимметрии η для этих монокристаллов, равные $0,15$ и $0,10$ соответственно.

В последнее время возникла необходимость расчета уровней энергии для целых и полуцелых спинов в трех областях исследований: в области ядерного резонанса (квадрупольного, магнитного и спинового) [1–3], электронного парамагнитного резонанса [4, 5] и исследований по резонансному поглощению γ -квантов (эффект Мессбауэра) [6, 7].

Вопрос об уровнях ядерного квадрупольного резонанса рассматривался в ряде работ [1–3, 8]. Если спин резонирующего ядра является целым, то вычисление уровней чисто квадрупольной энергии (т. е. в нулевом внешнем магнитном поле) значительно сложнее [8], чем для полуцелых спинов, поскольку в последнем случае матрица спинового гамильтониана оказывается более простой в смысле диагонализации. Точные квантово-механические формулы были найдены лишь для $J=1$ [8].

1. В настоящей работе мы рассматриваем случаи спинов $J=2, 3$ и 4 .

1) Спин $J=2$. Этим спином обладают некоторые радиоактивные изотопы (Cl^{36} , K^{42} , Cu^{60} и др.), причем периоды их полураспада могут меняться в широких пределах. Изотопы с большим периодом полураспада (например, $Cl^{36} - 3 \cdot 10^5$ лет) можно считать практически стабильными и на них выполнять эксперименты по ядерному резонансу. С другой стороны, в электронном парамагнитном резонансе ионы Cr^{2+} и Mn^{3+} обладают спином, равным 2 . Поэтому полученные здесь результаты (при подстановке $\eta = 3E/D$ [3]) можно легко переписать на случай электронного парамагнитного резонанса в нулевом магнитном поле.

Матрицу спинового гамильтониана [1]

$$H = \frac{eQq_{zz}}{4J(2J-1)} \left[(3\hat{I}_z^2 - \hat{I}^2) + \frac{\eta}{2} (\hat{I}_+^2 + \hat{I}_-^2) \right] \quad (1)$$

можно в этом случае записать в виде

	2	0	-2	1	-1	
eQq_{zz}	$\frac{1}{4}$	$\frac{\eta}{4\sqrt{6}}$	0	0	0	2
	$\frac{\eta}{4\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{\eta}{4\sqrt{6}}$	0	0	0
	0	$\frac{\eta}{4\sqrt{6}}$	$\frac{1}{4}$	0	0	-2, (2)
	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{\eta}{8}$	1
	0	0	0	$\frac{\eta}{8}$	$-\frac{1}{8}$	-1

где eQq_{zz} —постоянная квадрупольного взаимодействия, η —параметр асимметрии, \hat{I}_+ , \hat{I}_- , \hat{I}_z —компоненты оператора механического момента ядра. Поскольку матрица (2) записывается в блок-диагональном виде, то ее диагонализация дает

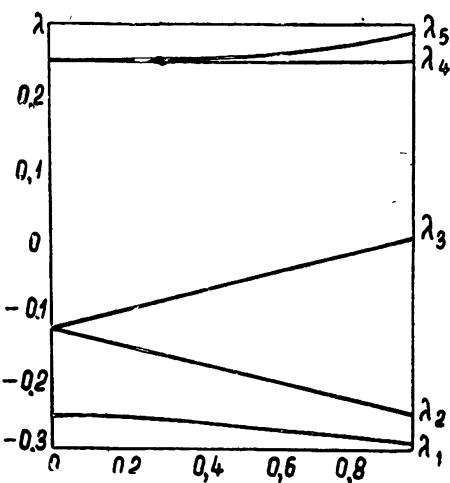


Рис. 1. Зависимость уровней квадрупольной энергии от параметра асимметрии η в случае $J=2$.

и многие радиоактивные изотопы (Na^{22} , Sb^{124} и др.). В настоящее время ядерный квадрупольный резонанс B^{10} наблюдается в ряде веществ [9]. Однако уровни энергии не были вычислены в случае, если параметр асимметрии градиента электрического поля отличен от нуля и имеет произвольное значение. Матрица гамильтонiana (1) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{3}} ; \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{8} (1 + \eta) ; \\ \lambda_3 &= -\frac{1}{8} (1 - \eta) ; \\ \lambda_4 &= \frac{1}{4} ; \\ \lambda_5 &= \frac{1}{4} \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{3}} .\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь все уровни энергии выражены в единицах eQq_{zz} . На рис. 1 представлена их зависимость от параметра асимметрии η .

2) Спин $J=3$. Этим спином обладает стабильный изотоп B^{10}

3	1	-1	-3	2	0	-2	
$\frac{1}{4}$	$\frac{\eta}{4\sqrt{15}}$	0	0	0	0	0	3
$\frac{\eta}{4\sqrt{15}}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{\eta}{10}$	0	0	0	0	1
0	$\frac{\eta}{10}$	$-\frac{3}{20}$	$-\frac{\eta}{4\sqrt{15}}$	0	0	0	-1
0	0	$\frac{\eta}{4\sqrt{15}}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	-3 ; (4)
0	0	0	0	0	$\frac{\eta}{2\sqrt{30}}$	0	2
0	0	0	0	$\frac{\eta}{2\sqrt{30}}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{\eta}{2\sqrt{30}}$	0
0	0	0	0	0	$\frac{\eta}{2\sqrt{30}}$	0	-2

при этом уровни энергии

$$\lambda_1 = -\frac{1}{10} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{3}\eta^2} \right); \quad \lambda_5 = -\frac{1}{10} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{5}{3}\eta^2} \right);$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\eta}{20} - \sqrt{\frac{1}{150}(6+3\eta+3\eta^2)}; \quad \lambda_6 = \frac{1-\eta}{20} + \sqrt{\frac{1}{150}(6+3\eta+\eta^2)}; \quad (5)$$

$$\lambda_3 = \frac{1+\eta}{20} - \sqrt{\frac{1}{150}(6-3\eta+3\eta^2)}; \quad \lambda_7 = \frac{1+\eta}{20} + \sqrt{\frac{1}{150}(6-3\eta+\eta^2)}.$$

$$\lambda_4 = 0;$$

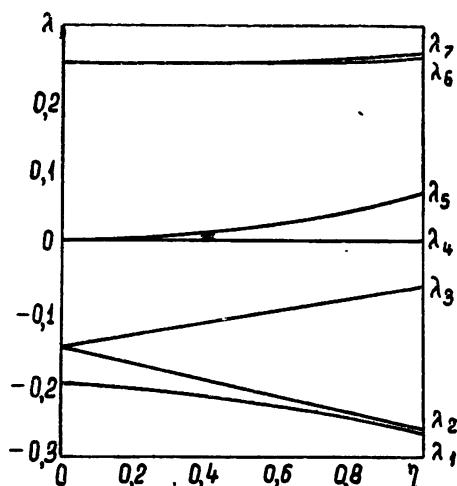


Рис. 2. Зависимость уровней квадрупольной энергии от параметра асимметрии в случае $J=3$.

Зависимость уровней энергии, выраженных в единицах eQq_{zz} , от параметра асимметрии η представлена на рис. 2.

3) Спин $J=4$. В этом случае матрица имеет вид:

	4	2	0	-2	-4	3	1	-1	-3	
eQq_{zz}	$\frac{1}{4}$	$\frac{\eta}{8\sqrt{7}}$	0	0	0	0	0	0	0	4
	$\frac{\eta}{8\sqrt{7}}$	$-\frac{1}{14}$	$\frac{3\sqrt{10}\eta}{112}$	0	0	0	0	0	0	2
	0	$\frac{3\sqrt{10}\eta}{112}$	$-\frac{5}{28}$	$\frac{3\sqrt{10}\eta}{112}$	0	0	0	0	0	0
	0	0	$\frac{3\sqrt{10}\eta}{112}$	$-\frac{1}{14}$	$\frac{\eta}{8\sqrt{7}}$	0	0	0	0	-2
	0	0	0	$\frac{\eta}{8\sqrt{7}}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	-4. (6)
	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3\eta}{16\sqrt{7}}$	0	0	3
	0	0	0	0	0	$\frac{3\eta}{16\sqrt{7}}$	$-\frac{17}{112}$	$\frac{5\eta}{56}$	0	1
	0	0	0	0	0	0	$\frac{5\eta}{56}$	$-\frac{17}{112}$	$\frac{3\eta}{16\sqrt{7}}$	-1
	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3\eta}{16\sqrt{7}}$	$\frac{1}{16}$	-3

Эта матрица легко диагонализуется. В результате получаются три квадратных уравнения, корни которых

$$\lambda_{6,2} = -\frac{5}{4}(1+\eta) \pm \frac{1}{4}\sqrt{(12+5\eta)^2 + 63\eta^2};$$

$$\lambda_{7,3} = -\frac{5}{4}(1-\eta) \pm \frac{1}{4}\sqrt{(12-5\eta)^2 + 63\eta^2}; \quad (7)$$

$$\lambda_{8,4} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{81 + 7\eta^2},$$

и одно кубическое уравнение, дающее остальные три собственных значения:

$$\lambda^3 - 13(3 + \eta^2)\lambda - 70(1 - \eta^2) = 0. \quad (8)$$

Все эти уровни энергии, выраженные в единицах $eQq_{zz}/28$, приведены на рис. 3 в зависимости от η .

2. Если на монокристалл накладывается слабое магнитное поле H_0 , то наблюдается зееман-эффект в ядерном квадрупольном резонансе. Если спин ядра целый, то точные формулы для уровней энергии могут быть получены лишь при $J=1$. В остальных случаях приходится использовать теорию возмущений. В случае полуцелых спинов теория возмущений также дает хороший результат [10]. Если направление магнитного поля в кристалле совпадает с образующей конуса нулевого расщепления (см. рис. 4 [11]) и спектр из квартета становится триплетом, то уравнение этого конуса [11]:

$$\sin^2\theta = \frac{\gamma}{\alpha + \beta \cos(2\phi)}, \quad (9)$$

где θ и ϕ — полярные углы H_0 в системе главных осей тензора градиента электрического поля; α , β и γ — параметры нулевого расщепления. Осью конуса в этом случае является ось z ; однако для некоторых переходов (например, для перехода $\pm 1/2 \leftrightarrow \pm 3/2$, $J=5/2$), начиная с определенного значения η , происходит так называемый переворот конуса, т. е. осью симметрии становится ось y . В этом случае уравнение конуса нулевого расщепления имеет вид

$$\sin^2\theta' = \frac{\alpha - \beta - \gamma}{\alpha - \beta - (\alpha + \beta) \sin^2 \varphi'}, \quad (10)$$

где θ' теперь отсчитывается от оси y (φ' — азимутальный угол в плоскости xz).

Параметры нулевого расщепления для η (параметра асимметрии) от 0 до 1 через 0,1 были протабулированы для $J=5/2$, $7/2$, $9/2$ в работах [3, 11, 12]. Однако, как показал эксперимент с монокристаллами $SbCl_3$ (резонанс Sb^{121} и Sb^{123}) и $2SbCl_3C_6H_6$ (резонанс Sb^{121}), такая точность недостаточна. В связи с этим в настоящей работе для $J=5/2$ составлены таблицы 1—3 с гораздо большей точностью (η меняется через 0,01). В этом случае использовались таблицы параметров зееман-расщепления [13].

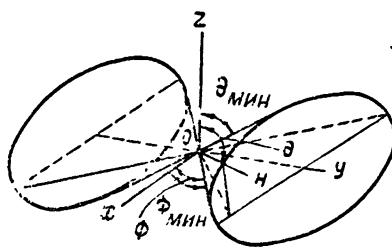


Рис. 4. Вид конуса нулевого расщепления с осью симметрии, параллельной оси y .

откуда $\eta = 0,15$. Аналогично для монокристалла $2SbCl_3 \cdot C_6H_6$ $\eta = 0,10$.

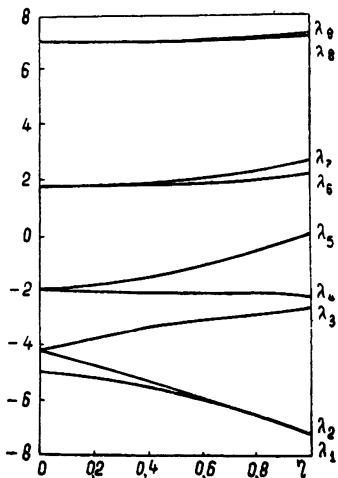


Рис. 3. Зависимость уровней квадрупольной энергии от параметра асимметрии в случае $J=4$.

Составленные здесь таблицы значительно облегчают задачу экспериментатора. Из эксперимента непосредственно определяются θ_{\min} и θ_{\max} (рис. 4). С помощью этих таблиц параметр асимметрии η можно определить с точностью до 0,01. Например, по нашим измерениям в монокристалле $SbCl_3$ (резонанс Sb^{121} , переход $\pm 1/2 \leftrightarrow \pm 3/2$, $J=5/2$):

$$\theta_{\min} = 37^\circ \pm 1^\circ,$$

$$\theta_{\max} = 49^\circ \pm 1^\circ,$$

Таблица 1

Углы раствора конуса нулевого расщепления для спина 5/2 и перехода $\pm 1/2 \leftrightarrow \pm 3/2$

η	θ_{\max}	θ_{\min}	η	θ_{\max}	θ_{\min}
0,01	43°42'	42°56'	0,51	73°55'	58°36'
0,02	44°06'	42°34'	0,52	73°18'	58°44'
0,03	44°30'	42°13'	0,53	72°43'	58°53'
0,04	44°55'	41°52'	0,54	72°12'	59°01'
0,05	45°21'	41°31'	0,55	71°44'	59°08'
0,06	45°47'	41°11'	0,56	71°15'	59°17'
0,07	46°14'	40°51'	0,57	70°48'	59°25'
0,08	46°42'	40°32'	0,58	70°23'	59°33'
0,09	47°11'	40°14'	0,59	70°00'	59°41'
0,10	47°40'	39°55'	0,60	69°39'	59°48'
0,11	48°11'	39°37'	0,61	69°19'	59°56'
0,12	48°42'	39°20'	0,62	59°00'	60°03'
0,13	49°14'	39°03'	0,63	68°42'	60°11'
0,14	49°48'	38°46'	0,64	68°24'	60°18'
0,15	50°22'	38°29'	0,65	68°07'	60°25'
0,16	50°58'	38°13'	0,66	67°51'	60°32'
0,17	51°35'	37°58'	0,67	67°38'	60°39'
0,18	52°13'	37°42'	0,68	67°25'	60°46'
0,19	52°52'	37°27'	0,69	67°12'	60°53'
0,20	53°33'	37°12'	0,70	66°59'	60°59'
0,21	54°16'	36°58'	0,71	66°47'	61°06'
0,22	55°00'	36°43'	0,72	66°36'	61°13'
0,23	55°46'	36°29'	0,73	66°26'	61°19'
0,24	56°34'	36°16'	0,74	66°16'	61°25'
0,25	57°24'	36°02'	0,75	66°07'	61°32'
0,26	58°16'	35°49'	0,76	65°58'	61°39'
0,27	59°11'	35°36'	0,77	65°50'	61°45'
0,28	60°09'	35°23'	0,78	65°43'	61°51'
0,29	61°10'	35°11'	0,79	65°35'	61°57'
0,30	62°15'	34°59'	0,80	65°27'	62°03'
0,31	63°23'	34°47'	0,81	65°20'	62°09'
0,32	64°41'	34°35'	0,82	65°13'	62°15'
0,33	65°55'	34°23'	0,83	65°07'	62°21'
0,34	67°20'	34°12'	0,84	65°02'	62°27'
0,35	68°52'	34°00'	0,85	64°57'	62°33'
0,36	70°34'	33°49'	0,86	64°52'	62°39'
0,37	72°28'	33°39'	0,87	64°47'	62°45'
0,38	74°39'	33°28'	0,88	64°43'	62°50'
0,39	77°16'	33°18'	0,89	64°38'	62°56'
0,40	80°40'	33°07'	0,90	64°34'	63°02'
0,41	86°48'	32°57'	0,91	64°30'	63°07'
0,42	84°44'	32°53'	0,92	64°26'	63°13'
0,43	82°14'	32°53'	0,93	64°23'	63°19'
0,44	80°38'	32°52'	0,94	64°21'	63°24'
0,45	79°15'	32°49'	0,95	64°19'	63°30'
0,46	78°05'	32°51'	0,96	64°17'	63°35'
0,47	77°03'	32°50'	0,97	64°15'	63°41'
0,48	76°09'	32°50'	0,98	64°13'	63°46'
0,49	75°18'	32°48'	0,99	64°12'	63°51'
0,50	74°36'	32°27'	1,00	64°11'	63°57'

Таблица 2
Переход $\pm 3/2 \longleftrightarrow \pm 5/2$

η	θ_{\max}	θ_{\min}	η	θ_{\max}	θ_{\min}
0,01	89°26'	89°26'	0,51	70°08'	68°06'
0,02	88°52'	88°51'	0,52	69°56'	67°53'
0,03	88°18'	88°16'	0,53	69°45'	67°41'
0,04	87°44'	87°42'	0,54	69°34'	67°29'
0,05	87°10'	87°09'	0,55	69°23'	67°17'
0,06	86°37'	86°33'	0,56	69°12'	67°07'
0,07	86°04'	85°59'	0,57	69°02'	66°56'
0,08	85°32'	85°25'	0,58	68°52'	66°46'
0,09	85°00'	84°50'	0,59	68°42'	66°36'
0,10	84°28'	84°17'	0,60	68°32'	66°27'
0,11	83°56'	83°43'	0,61	68°23'	66°18'
0,12	83°26'	83°10'	0,62	68°14'	66°09'
0,13	82°55'	82°37'	0,63	68°05'	66°01'
0,14	82°25'	82°05'	0,64	67°56'	65°53'
0,15	81°56'	81°33'	0,65	67°47'	65°45'
0,16	81°27'	81°01'	0,66	67°39'	65°38'
0,17	80°59'	80°29'	0,67	67°30'	65°31'
0,18	80°31'	79°58'	0,68	67°22'	65°25'
0,19	80°04'	79°28'	0,69	67°14'	65°18'
0,20	79°37'	78°58'	0,70	67°06'	65°12'
0,21	79°11'	78°29'	0,71	66°59'	65°07'
0,22	78°45'	77°59'	0,72	66°51'	65°01'
0,23	78°20'	77°31'	0,73	66°44'	64°56'
0,24	77°56'	77°04'	0,74	66°36'	64°51'
0,25	77°32'	76°36'	0,75	66°29'	64°47'
0,26	77°09'	76°10'	0,76	66°22'	64°42'
0,27	76°46'	75°43'	0,77	66°15'	64°38'
0,28	76°24'	75°18'	0,78	66°08'	64°34'
0,29	76°03'	74°53'	0,79	66°02'	64°31'
0,30	75°42'	74°29'	0,80	65°55'	64°28'
0,31	75°21'	74°05'	0,81	65°48'	64°25'
0,32	74°58'	73°38'	0,82	65°42'	64°22'
0,33	74°42'	73°19'	0,83	65°35'	64°19'
0,34	74°23'	72°57'	0,84	65°29'	64°17'
0,35	74°04'	72°35'	0,85	65°23'	64°15'
0,36	73°46'	72°15'	0,86	65°17'	64°13'
0,37	73°29'	71°54'	0,87	65°11'	64°12'
0,38	73°12'	71°34'	0,88	65°05'	64°11'
0,39	72°55'	71°15'	0,89	64°59'	64°09'
0,40	72°39'	70°57'	0,90	64°53'	64°08'
0,41	72°24'	70°39'	0,91	64°47'	64°08'
0,42	72°08'	70°21'	0,92	64°41'	64°07'
0,43	71°53'	70°04'	0,93	64°36'	64°07'
0,44	71°39'	69°47'	0,94	64°30'	64°07'
0,45	71°25'	69°31'	0,95	64°24'	64°07'
0,46	71°11'	69°16'	0,96	64°19'	64°07'
0,47	70°58'	69°01'	0,97	64°13'	64°07'
0,48	70°45'	68°46'	0,98	64°08'	64°08'
0,49	70°32'	68°32'	0,99	64°02'	64°09'
0,50	70°20'	68°19'	1,00	63°57'	64°11'

Таблица 3
Переход $\pm 1/2 \longleftrightarrow \pm 5/2$

η	θ_{\max}	θ_{\min}	η	θ_{\max}	θ_{\min}
0,01	58°52'	58°11'	0,51	76°22'	47°58'
0,02	59°12'	57°51'	0,52	76°38'	47°52'
0,03	59°34'	57°31'	0,53	76°54'	47°47'
0,04	59°55'	57°12'	0,54	77°10'	47°41'
0,05	60°16'	56°53'	0,55	77°26'	47°36'

Продолжение табл. 3

η	θ_{\max}	θ_{\min}	η	θ_{\max}	θ_{\min}
0,06	60°38'	56°34'	0,56	77°42'	47°31'
0,07	61°00'	56°15'	0,57	77°57'	47°26'
0,08	61°22'	55°57'	0,58	78°12'	47°21'
0,09	61°44'	55°39'	0,59	78°27'	47°16'
0,10	62°07'	55°22'	0,60	78°42'	47°11'
0,11	62°29'	55°06'	0,61	78°56'	47°06'
0,12	62°52'	54°49'	0,62	79°10'	47°02'
0,13	63°14'	54°32'	0,63	79°24'	46°57'
0,14	63°37'	54°16'	0,64	79°38'	46°53'
0,15	64°00'	54°00'	0,65	79°52'	46°49'
0,16	64°23'	53°45'	0,66	80°05'	46°45'
0,17	64°46'	53°30'	0,67	80°19'	46°41'
0,18	65°08'	53°15'	0,68	80°32'	46°37'
0,19	65°31'	53°01'	0,69	80°45'	46°33'
0,20	65°54'	52°47'	0,70	80°58'	46°29'
0,21	66°17'	52°33'	0,71	81°11'	46°26'
0,22	66°40'	52°20'	0,72	81°24'	46°23'
0,23	67°02'	52°07'	0,73	81°36'	46°19'
0,24	67°25'	51°55'	0,74	81°49'	46°16'
0,25	67°47'	51°42'	0,75	82°01'	46°12'
0,26	68°10'	51°30'	0,76	82°14'	46°08'
0,27	68°32'	51°19'	0,77	82°26'	46°05'
0,28	68°54'	51°07'	0,78	82°38'	46°02'
0,29	69°16'	50°56'	0,79	82°51'	45°59'
0,30	69°37'	50°46'	0,80	83°03'	45°55'
0,31	69°59'	50°35'	0,81	83°16'	45°52'
0,32	70°21'	50°25'	0,82	83°28'	45°49'
0,33	70°41'	50°15'	0,83	83°41'	45°46'
0,34	71°02'	50°06'	0,84	83°54'	45°43'
0,35	71°23'	49°56'	0,85	84°07'	45°40'
0,36	71°44'	49°48'	0,86	84°20'	45°37'
0,37	72°04'	49°39'	0,87	84°33'	45°35'
0,38	72°24'	49°30'	0,88	84°47'	45°32'
0,39	72°44'	49°22'	0,89	85°01'	45°29'
0,40	73°03'	49°14'	0,90	85°16'	45°26'
0,41	73°23'	49°06'	0,91	85°31'	45°24'
0,42	73°42'	48°58'	0,92	85°47'	45°21'
0,43	73°58'	48°51'	0,93	86°04'	45°18'
0,44	74°19'	48°43'	0,94	86°22'	45°15'
0,45	74°37'	48°36'	0,95	86°41'	45°13'
0,46	74°55'	48°30'	0,96	87°03'	45°10'
0,47	75°13'	48°23'	0,97	87°26'	45°08'
0,48	75°31'	48°16'	0,98	87°55'	45°05'
0,49	75°48'	48°10'	0,99	88°31'	45°03'
0,50	76°05'	48°04'	1,00	90°00'	45°00'

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Гречишкін, Н. Е. Айнбінднер, ФТТ, 3, 1821 (1961).
2. В. С. Гречишкін, Н. Е. Айнбінднер, ФТТ, 3, 2981 (1961).
3. Н. Е. Айнбінднер, В. С. Гречишкін, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 1123 (1962).
4. С. А. Альтшуллер, Б. М. Козырев, Электронный парамагнитный резонанс, Физматгиз, М., 1961.
5. J. Weber, Rev. Mod. Phys., 31, 631 (1959).
6. R. L. Mösbauer, Z. Phys., 151, 124 (1958).
7. E. Matthias, W. Schneider, R. M. Steffen, Phys. Rev., 125, 261 (1962).
8. T. P. Das, E. L. Hahn, Solid State Phys. Suppl., 1, 18 (1958).
9. H. G. Dehmelt, H. Krüger, Z. Phys., 180, 385 (1951).
10. M. H. Cohen, Phys. Rev., 96, 1278 (1954).

11. R. Shimomura, N. Inoue, J. Phys. Soc. Japan, **14**, 86 (1959).
12. N. Inoue, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, **24**, 619 (1960).
13. N. Inoue, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, **24**, 7 (1960).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
21 ноября 1962 г.

QUADRUPOLE ENERGY LEVELS FOR SOME SPINS

V. S. Grechishkin, N. E. Einbinder

Expressions for the quadrupole energy levels of nuclei with the integer spins $J=2,3$ and 4 are obtained in the case of an arbitrary magnitude of the asymmetry parameter η of the electric field gradient tensor. For spin $J=5/2$ the zero splitting parameters of Zeeman spectrum of the nuclear quadrupole resonance are tabulated (η varying between 0 and 1). The experiments according to the zero splitting cosine method were carried out, with monocrystals $Sb Cl_3$ and $2Sb Cl_3 \cdot C_6H_6$ (resonance Sb^{121} , $J=5/2$). By means of the tables the asymmetry parameter magnitudes were obtained for these monocrystals which are equal to 0,15 and 0,10 correspondingly.

ДВУХМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКАЯ МНОГОПРОВОДНАЯ ЛИНИЯ, СОДЕРЖАЩАЯ N КРУГЛЫХ ПРОВОДНИКОВ В ЯЧЕЙКЕ

И. Ш. Белуга

Предложен метод расчета матрицы волновых сопротивлений, амплитуд пространственных гармоник и затухания в двухмерно-периодической многопроводной линии, содержащей N круглых проводников в ячейке. Радиусы проводников не предполагаются малыми, а базисные векторы двухмерной решетки—ортогональными. Метод основан на развитом в [1,2] способе расчета двухмерных электростатических полей, удовлетворяющих условиям Флоке, и на принципе минимума электростатической энергии. Полученные результаты нужны для расчета замедляющих систем методом многопроводных линий и для расчета некоторых длинных линий.

Многие периодические замедляющие системы рассчитываются методом многопроводных линий [3]. Наиболее общий вид периодической многопроводной линии—двуихмерно-периодическая линия с N проводниками в ячейке. В настоящей работе предлагается метод количественного расчета параметров такой линии в случае круглых проводников.

Различные линии, составленные из круглых проводников, рассмотрены в работах, указанных в [1], а также в статьях [4] (одномерно-периодическая линия с экраном) и [5] (проводник в прямоугольном желобе). Все эти линии, а также многорядная линия между двумя плоскими экранами и линия с прямоугольным экраном, могут быть представлены как частные случаи рассматриваемой здесь линии.

Настоящая работа является продолжением [1]. Для вывода формул использован более простой, чем в [1], путь, основанный на теореме Томсона [6].*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем в плоскости поперечного сечения рассматриваемой многопроводной линии (рис. 1) комплексные координаты $z = x + iy$. Комплексные периоды обозначим через iL и $iL\tau$, где $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ ($\tau_2 = \text{Im } \tau > 0$), и положим

$$L = 2\pi. \quad (1)$$

Множество точек

$$z = \pi i (\vartheta_1 + \tau \vartheta_2) \quad (-1 \leq \vartheta_{1,2} < 1) \quad (2)$$

будем называть основной ячейкой и обозначать через P_{00} . Координату центра m -го проводника основной ячейки обозначим через z_m ($z_m \in P_{00}$), а его радиус—через r_m . Совокупность m -ых проводников всех ячеек назовем m -ой решеткой проводников.

Считаем, что поле $E = -\text{grad } u(z)$, где $u(z)$ —электростатический потенциал, удовлетворяет условиям Флоке (1.4)**, (1.4a).

* В дальнейшем используется практическая система единиц.

** (1.4) означает формулу (4) из [1]. Аналогичные обозначения используются и ниже.

Потенциалы проводников U_n ($n = 1, \dots, N$) линейно зависят от их зарядов Q_m (на единицу длины):

$$U_n = \sum_{m=1}^N s_{nm} Q_m \quad (n = 1, \dots, N), \quad (3)$$

а следовательно, и от их токов I_m :

$$U_n = \sum_{m=1}^N K_{nm} I_m \quad (n = 1, \dots, N), \quad (4)$$

где

$$K_{nm} = s_{nm}/c \quad (n, m = 1, \dots, N), \quad (5)$$

так как ток проводника в случае бегущей ТЕМ-волны

$$I_m = c Q_m \quad (m = 1, \dots, N), \quad (6)$$

где c — скорость света в вакууме. Квадратная матрица с элементами K_{nm} ($n, m = 1, \dots, N$) называется матрицей волновых сопротивлений. Требуется рассчитать ее элементы K_{nm} . Кроме того, требуется рассчитать амплитуды пространственных гармоник и коэффициент затухания α бегущей волны.

На поверхности проводников положим $E_{tg} = 0$; при расчете затухания плотность поверхностного тока j может быть найдена из равенства $j = H_{tg}$.

Искомые величины K_{nm} и αL не меняются при пропорциональном изменении всех размеров, что позволяет ограничиться расчетом при условии (1).

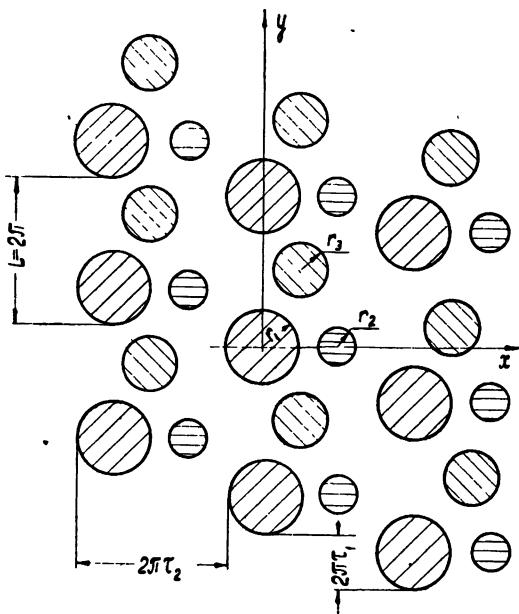


Рис. 1. Поперечное сечение двухмерно-периодической многопроводной линии, содержащей $N(N=3)$ круглых проводников в ячейке. Проводники, составляющие одну решетку проводников, заштрихованы одинаково.

2. РАСЧЕТ МАТРИЦЫ ВОЛНОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Введем величину $q_0(n) = q_{0,+}(n)^*$ и функцию $\omega(\Theta, n)$ ($n = 1, \dots, N$), определяющие полный заряд n -го проводника

$$Q_n = 2\pi\epsilon_0 q_0(n) \quad (7)$$

и угловую плотность заряда в точке $z = z_n + r_n e^{i\Theta}$

$$\sigma(z_n + r_n e^{i\Theta}) = \epsilon_0 \omega(\Theta, n) \quad (n = 1, \dots, N). \quad (7a)$$

Из (7), (7a) следует:

* Индексом (+) отмечаются величины, относящиеся к рассматриваемому полю; величины, относящиеся к комплексно-сопряженному полю, отмечаются индексом (—).

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(\Theta, n) d\Theta = q_0(n) = q_{0,+}(n) \quad (n = 1, \dots, N). \quad (76)$$

При заданных полных зарядах проводников истинному распределению зарядов вдоль контуров проводников соответствует минимальное значение запасенной в ячейке электростатической энергии W_E (теорема Томсона [6]), равное

$$(W_E)_{\min} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N U_n Q_n^* = \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^N s_{nm} Q_m Q_n^* \quad (8)$$

(*—знак комплексной сопряженности). При произвольном распределении плотности зарядов электростатическая энергия

$$W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} u(z_n + r_n e^{i\Theta}) \omega^*(\Theta, n) d\Theta. \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9) и используя (7) и (5), получаем:

$$\sum_{m,n=1}^N K_{nm} q_0(m) q_0^*(n) = 60 k_{\min}, \quad (10)$$

где

$$k = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_n + r_n e^{i\Theta}) \omega^*(\Theta, n) d\Theta, \quad (11)$$

а k_{\min} означает минимальное значение k при заданных $q_0(n)$ (76), соответствующее истинному распределению плотности заряда. Найдя k_{\min} в зависимости от $q_0(n)$ ($n = 1, \dots, N$), мы сможем отыскать K_{nm} из (10).

Чтобы получить $k_{\min}(q_0(n))$, выразим величину k через коэффициенты Фурье функций $\omega(\Theta, n)$, а затем найдем эти коэффициенты из условия минимума величины k . Для нахождения k воспользуемся развитым в [1,2] методом расчета комплексных электростатических полей, удовлетворяющих условиям Флоке, с помощью теории аналитических функций.

Аналитический потенциал $\Phi_+(z, m)$ поля $E(z, m)$ m -ой решетки проводников выражается через потенциал $\Phi_1(z) = \Phi_{1,+}(z)$ (1.25) поля „ T -решетки“ точечных зарядов (системы зарядов $Q_{mn} = 2\pi\epsilon_0 e^{i(m\varphi+n\varphi')}$, расположенных в точках $z = 2\pi i(m + n\tau)$) по формуле:

$$\Phi_+(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} q_{k,+}(m) \Phi_{1,+}^{(k)}(z - z_m), \quad (12)$$

которая выводится аналогично (1.50).

Функция $\Phi_+(z, m)$ однозначно определена при $\varphi \neq 0$ (см. (1.4a)) вне проводников m -ой решетки, внутри каждой из полос, ограниченных прямыми

$$x = x_m + 2\pi n \tau_2 \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \quad (13)$$

а производные этой функции—везде вне проводников, в том числе и на этих прямых. Коэффициенты $q_{k,+}(m)$ удовлетворяют равенству

$$q_{k,+}(m) = \frac{1}{2\pi} r_m^k \int_0^{2\pi} \omega(\Theta, m) e^{ik\Theta} d\Theta \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (14)$$

(см. (1.40), (7а, б)). Из (14) следует, что разложение $\omega(\Theta, m)$ в ряд Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega(\Theta, m) = q_{0,+}(m) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{q_{k,+}(m)}{r_m^k} e^{-ik\Theta} + \right. \\ \left. + \frac{q_{k,-}^*(m)}{r_m^k} \right] e^{ik\Theta} \quad (m = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$q_{k,-}(m) = \frac{1}{2\pi} r_m^k \int_0^{2\pi} \omega^*(\Theta, m) e^{ik\Theta} d\Theta \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (16)$$

Электростатический и аналитический потенциалы $U_1(z)$ и $\Phi_1(z)$ T -решетки удовлетворяют условиям четности [1]:

$$U_1(-z) = U_1^*(z); \quad (17)$$

$$\Phi_{1,-}(z) = \Phi_{1,+}(-z). \quad (18)$$

Меняя в (12) индексы + на - и используя (18), получаем:

$$\Phi_-(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} q_{k,-}(m) \Phi_1^{(k)}(z_m - z) \quad (19)$$

(нижний индекс + у $\Phi_1(z)$ опускаем). Электростатические потенциалы $u(z, m)$ и $U_1(z)$ могут быть выражены через аналитические потенциалы следующим образом:

$$u(z, m) = \frac{1}{2} [\Phi_+(z, m) + \Phi_-^*(z, m)]; \quad (20)$$

$$U_1(z - z_m) = \frac{1}{2} [\Phi_1(z - z_m) + \Phi_1^*(z_m - z)]. \quad (21)$$

Формула (20) следует из соотношений

$$\Phi_+(z, m) = u(z, m) - ih(z, m); \quad (22)$$

$$\Phi_-(z, m) = u^*(z, m) - ih^*(z, m), \quad (23)$$

(см. [2]), а (21) — из аналогичных формул для $\Phi_1(z)$ и из (18). Согласно (1.23), в окрестности точки $z=0$

$$\Phi_1(z) = -\ln z + \Delta\Phi_1(z) + \text{const}, \quad (24)$$

где $\Delta\Phi_1(z)$ регулярно и равно нулю при $z=0$.

Разлагая $U_1(z - z_m)|_{|z-z_m|=\text{const}}$ по азимутальным гармоникам и используя (21) и (24), находим, что в окрестности точки $z=z_m$

$$U_1(z - z_m) = \overline{U_1(\xi)|_{|\xi|=|z-z_m|}} + \frac{1}{2} [\Delta\Phi_1(z - z_m) + \Delta\Phi_1^*(z_m - z)]. \quad (25)$$

Подставляя (12), (19) в (20) и учитывая (21), получаем:

$$\begin{aligned} u(z, m) = q_{0,+} U_1(z - z_m) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^k}{k!} q_{k,+}(m) \Phi_1^{(k)}(z - z_m) + \frac{q_{k,-}^*(m)}{k!} (\Phi_1^{(k)}(z_m - z))^* \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Разлагая все члены правой части (26) в ряд Тейлора (при $n \neq m$) или Лорана (при $n = m$) по степеням $(z - z_n)$, используя при этом (21) и (25) соответственно и полагая затем $z - z_n = r_n e^{i\theta}$, придем к выражению*

$$\begin{aligned} u(z_n + r_n e^{i\theta}; m) &= q_0(m) b_{0(n), 0(m)} + \\ &+ \sum_{\substack{k, l=0 \\ k+l \neq 0}}^{\infty} \{(-1)^k q_{k,+}(m) b_{l(n), k(m)} r_n^l e^{il\theta} + \\ &+ (-1)^l q_{k,-}^*(m) b_{k(m), l(n)}^* r_n^l e^{-il\theta}\} + \\ &+ \delta_{nm} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l r_n^l} (q_{l,+}(n) e^{-il\theta} + q_{l,-}^*(n) e^{il\theta}), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}; \quad (27a)$$

$$b_{0(n), 0(m)} = \begin{cases} \frac{1}{2} [\Phi_1(z_n - z_m) + \Phi_1^*(z_m - z_n)] & (n \neq m; x_m \neq x_n) \\ U_1(z_n - z_m) & (n \neq m) \end{cases}; \quad (28a)$$

$$\overline{U_1(z)|_{|z|=r_m}} = \overline{\operatorname{Re} \Phi_1(z)|_{|z|=r_m}} \quad (n = m) \quad (28b)$$

$$b_{l(n), k(m)} = \begin{cases} \frac{1}{2k! l!} \Phi_1^{(k+l)}(z_n - z_m) & (n \neq m; k + l \neq 0) \\ \frac{1}{2k! l!} \Delta \Phi_1^{(k+l)}(0) & (n = m; k + l \neq 0) \end{cases}. \quad (28c)$$

Вид функций, которые следует подставить в правые части (28), (28a–г), будет найден в разделе 4; пока же считаем все коэффициенты $b_{l(n), k(m)}$ известными.

Подстановка суммы,

$$u(z_n + r_n e^{i\theta}) = \sum_{m=1}^N u(z_n + r_n e^{i\theta}; m) \quad (29)$$

и формулы (27) в (11) дает выражение k через $q_0(m)$, $q_{k,\pm}(m)$ ($m = 1, \dots, N$; $k = 1, 2, \dots$). Отбрасывая в разложении $\omega(\Theta, m)$ (15) в ряд Фурье гармоники с номерами $k > v(m)$ и вводя новые параметры

$$p_{k(m)} = (-1)^k q_{k,+}^*(m), \quad (30)$$

$$g_{k(m)} = q_{k,-}(m) \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (30a)$$

получим для k приближенное выражение

* Здесь и далее вторые индексы (в скобках) определяются номером проводника, а первые (перед скобками) номером гармоники плотности заряда на этом проводнике.

$$k = \sum_{m, n=1}^N \sum_{\substack{k=0 \\ k+l \neq 0}}^{\nu(m)} \sum_{l=0}^{\nu(n)} \{ b_{l(n), k(m)} g_{l(n)} p_{k(m)}^* + b_{l(n), k(m)}^* g_{l(n)} p_{k(m)} \} + \\ + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^{\nu(n)} \frac{g_{l(n)} g_{l(n)}^* + p_{l(n)} p_{l(n)}^*}{2lr_n^{2l}} + \sum_{m, n=1}^N b_{0(n), 0(m)} g_{0(n)} g_{0(m)}^*. \quad (31)$$

Заметим, что

$$g_{0(m)} = p_{0(m)} = q_{0,+}^*(m) = Q_m^*/2\pi\varepsilon_0. \quad (31a)$$

Условия стационарности величины k (31):

$$\frac{\partial k}{\partial g_{l(n)}^*} = 0; \quad \frac{\partial k}{\partial p_{l(n)}^*} = 0 \quad (l = 1, \dots, \nu(n); n = 1, \dots, N) \quad (32)$$

приводят к системе $2M = 2 \sum_{m=1}^N \nu(m)$ линейных уравнений:

$$\frac{g_{l(n)}}{2lr_n^{2l}} + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{\nu(m)} b_{l(n), k(m)}^* p_{k(m)} + \sum_{s=1}^N b_{l(n), 0(s)}^* g_{0(s)} = 0; \quad (33)$$

$$\frac{p_{l(n)}}{2lr_n^{2l}} + \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^{\nu(m)} b_{k(m), l(n)} g_{k(m)} + \sum_{s=1}^N b_{0(s), l(n)} g_{0(s)} = 0 \quad (33a)$$

$$(l = 1, \dots, \nu(n); n = 1, \dots, N)$$

для $2M$ неизвестных $g_{k(m)}, p_{k(m)}$ ($k = 1, \dots, \nu(m); m = 1, \dots, N$).

Прежде чем искать k_{\min} в зависимости от заданных величин $g_{0(m)} = Q_m^*/2\pi\varepsilon_0$, рассмотрим следующую задачу. Требуется найти стационарное значение функции*

$$J(x_1, x_1^*, \dots, x_p, x_p^*) = Z_{km} x_m x_k^* + c_k x_k^* + c_k^* x_k, \quad (34)$$

аналогичной (31). При этом считаем, что

$$Z_{km} = Z_{mk}^*, \quad (34a)$$

т. е. что матрица Z , составленная из коэффициентов Z_{km} , эрмитова.

Из условий стационарности

$$\frac{\partial J}{\partial x_k^*} = Z_{km} x_m + c_k = 0 \quad (k = 1, \dots, P) \quad (35)$$

следует, что стационарное значение функции J достигается при

$$x_n = -Z_{nl}^{-1} c_l \quad (n = 1, \dots, P), \quad (36)$$

где Z^{-1} — матрица, обратная матрице Z . Подставляя (36) в (34), находим:

$$J_{\text{стаци}} = -Z_{lk}^{-1} c_k c_l^* = c_k x_k^* = c_k^* x_k, \quad (37)$$

причем x_k, x_k^* определяются равенствами (36). Выражение (37) можно записать с помощью формулы для обратной билинейной формы [8] в виде

* В (34) и ниже по повторяющимся индексам подразумевается суммирование в пределах от 1 до P .

$$J_{\text{стак}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & c_n^* & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ c_m & \dots & Z_{mn} & \dots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}}{|Z|}. \quad (38)$$

В знаменателе здесь стоит определитель матрицы Z (порядка P), а в числителе—определитель матрицы порядка $P+1$, полученной окаймлением матрицы Z слева столбцом с элементами $0, c_1, \dots, c_P$ и сверху—строкой с элементами $0, c_1^*, \dots, c_P^*$.

Вернемся к расчету k_{\min} . Систему уравнений (33), (33a), аналогичную (35), разобьем на две группы—(33) и (33a). Точно так же неизвестные разделим на две группы— $g_{k(m)}$ и $p_{k(m)}$. Внутри каждой группы отдельные уравнения (неизвестные) расположим в порядке возрастания индекса l (индекса k), а при одинаковых l (одинаковых k)—в порядке возрастания индекса n (индекса m). В результате матрица Z , составленная из коэффициентов системы (33), (33a), разобьется на 4 подматрицы порядка M

$$Z = \begin{vmatrix} Z^{11} & Z^{12} \\ Z^{21} & Z^{22} \end{vmatrix} \quad (39)$$

с элементами

$$Z_{l(n), k(m)}^{11} = Z_{l(n), k(m)}^{22} = \delta_{mn} \delta_{kl} \frac{1}{2lr_n^{2l}} \quad (40)$$

(см. (27a)),

$$Z_{l(n), k(m)}^{12} = b_{l(n), k(m)}^*, \quad (40a)$$

$$Z_{l(n), k(m)}^{21} = b_{k(m), l(n)}. \quad (40b)$$

Минимальное значение первых двух сумм в (31) находим с помощью формулы, аналогичной (38). Подставив получающееся при этом выражение для k_{\min} в (10), сравнивая с левой частью (10), и учитывая (31a), находим:

$$K_{st} = 60b_{0(s), 0(t)} + \frac{60}{|Z|} \begin{vmatrix} 0 & \dots & b_{k(m), 0(t)} & \dots & b_{0(t), k(m)}^* & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_{l(n), 0(s)}^* & \dots & Z_{l(n), k(m)}^{11} & \dots & Z_{l(n), k(m)}^{12} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ b_{0(s), l(n)} & \dots & Z_{l(n), k(m)}^{21} & \dots & Z_{l(n), k(m)}^{22} & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}. \quad (41)$$

$(s, t = 1, \dots, N).$

Первое слагаемое в (41) представляет собой K_{st} в приближении равномерного распределения зарядов на контурах проводников, справедливом при малых радиусах проводников. Таким образом, элементы K_{st} матрицы волновых сопротивлений выражены через радиусы проводников r_n (см. (40)) и величины $b_{k(m), l(n)}$ (см. (40а), (40б)), способ расчета которых описан ниже (в разделе 4).

Величина k_{\min} , значение которой нужно для расчета затухания, выражается через r_n , $b_{k(m), l(n)}$ и через заряды проводников Q_n . Выражение для k_{\min} получается, если в правой части (41) множители 60 заменить единицей, все коэффициенты b , содержащие индекс s (индекс t), умножить на $g_{0(s)} = Q_s^*/2\pi\epsilon_0$ (на $g_{0(t)}^* = Q_t/2\pi\epsilon_0$) и просуммировать произведения по s и по t от 1 до P .

3. ЗАТУХАНИЕ И АМПЛИТУДЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГАРМОНИК

Коэффициент затухания волны, бегущей вдоль многопроводной линии,

$$\alpha = P_{\text{п}}/2P_s \quad (42)$$

(см. [9]), где

$$P_s = c W_E \quad (42a)$$

— поток энергии через сечение одной ячейки, а

$$P_{\text{п}} = R_S \sum_{m=1}^N \int_0^{2\pi} |j(\Theta, m)|^2 r_m d\Theta \quad (42b)$$

— мощность потерь в проводниках ячейки на единицу их длины. В (42б) входит плотность поверхностного тока

$$j(\Theta, m) = \frac{\epsilon_0 \omega(\Theta, m)}{r_m} c \quad (43)$$

(см. (7а) и (6)) и поверхностное сопротивление проводников R_S (ом). По известным $\omega(\Theta, m)$ (см. (15), (30), (30а)) и W_E (см. (9), (11)) находим коэффициент затухания:

$$\alpha L = \frac{R_S}{60 k_{\min}} \sum_{n=1}^N \left(\frac{|g_{0(n)}|^2}{r_n} + \sum_{k=1}^{\nu(n)} \frac{|g_{k(n)}|^2 + |p_{k(n)}|^2}{r_n^{2k+1}} \right). \quad (44)$$

Величины $g_{k(n)}$, $p_{k(n)}$ ($k = 1, \dots, \nu(n)$; $n = 1, \dots, N$) определяются при известных $g_{0(n)} = Q_n^*/2\pi\epsilon_0$ из системы уравнений (33), (33а). Если заданы потенциалы проводников, то при расчете затухания и амплитуд пространственных гармоник их заряды (токи) должны быть предварительно найдены из (4) после расчета K_{nm} .

Чтобы найти разложение потенциала $u(z, m)$ по пространственным гармоникам, воспользуемся формулами (26), (21), причем $\Phi_1(z)$ запишем в виде разложения по пространственным гармоникам. Выделяя из $\Phi_1(z)$ (см. (1.25)) аналитический потенциал $f_0(z)$ „ T_0 -ряда“ точечных зарядов (системы зарядов $Q_m = 2\pi\epsilon_0 e^{im\varphi}$, расположенных в точках $z = 2\pi im$):

$$f_0(z) = \begin{cases} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{e^{-a_m z}}{a_m} & (\operatorname{Re} z > 0) \\ \sum_{m=0,2,\dots} \frac{e^{a_m z}}{a_m} & (\operatorname{Re} z < 0) \end{cases} \quad (45)$$

(см. (1.17), (1.12), (1.14)) и почленно суммируя разложения по пространственным гармоникам аналитических потенциалов остальных вертикальных рядов точечных зарядов, получаем:

$$\Phi_1(z) = f_0(z) + \Phi_{10}(z), \quad (46)$$

где

$$\Phi_{10}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{(-1)^m a_m z}}{a_m} c_m^- \quad (| \operatorname{Re} z | < 2\pi\tau_2). \quad (47)$$

Здесь и ниже используется обозначение

$$c_m^{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\varphi_m \tau_2 + i(-\varphi_m \tau_1 + (-1)^m \varphi')}{2} \right) \pm 1 \right]. \quad (48)$$

Величины $\varphi_m = 2\pi a_m$ определены формулами (1.9а). Ряды (45), (47) можно дифференцировать почленно любое число раз.

Подставляя (46), (45), (47), (30), (30а), (21) в (26), находим:

$$u(z, m) = \sum_{k=0}^{\infty} (u(z, m))_k \quad (r_m < |x| < 2\pi\tau_2 - r_m), \quad (49)$$

где

$$(u(z, m))_k = \begin{cases} \frac{1}{2a_k} e^{\pm i\varphi_k(y-y_m)/L} [\langle p^*(m) \rangle_k c_k^{\mp} e^{\pm \varphi_k(x-x_m)/L} + \\ \quad + \langle g^*(m) \rangle_k c_k^{\pm *} e^{\mp \varphi_k(x-x_m)/L}] \\ \quad (r_m < x < 2\pi\tau_2 - r_m) \\ \frac{1}{2a_k} e^{\pm i\varphi_k(y-y_m)/L} [\langle p^*(m) \rangle_k c_k^{\pm} e^{\pm \varphi_k(x-x_m)/L} + \\ \quad + \langle g^*(m) \rangle_k c_k^{\mp *} e^{\mp \varphi_k(x-x_m)/L}] \\ \quad (-2\pi\tau_2 + r_m < x < -r_m). \end{cases} \quad (50)$$

Верхние знаки в (50) относятся к четным k , нижние — к нечетным. В (50) использованы обозначения:

$$\langle p^*(m) \rangle_k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} p_{l(m)}^* (-1)^{lk} a_k^l; \quad (51)$$

$$\langle g^*(m) \rangle_k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} g_{l(m)}^* (-1)^{lk} a_k^l. \quad (51a)$$

Разложение $u(z, m)$ по пространственным гармоникам при другом положении осей координат записывается с помощью тех же формул (50), причем величины φ_k , φ' , x , y и величина L (период вдоль оси y) должны быть взяты в новой системе координат, а в рядах (51, 51а) величины $p_{l(m)}^*$, $g_{l(m)}^*$, вычисленные в старой системе координат, должны быть заменены новыми:

$$(p_{l(m)}^*)_{\text{нов}} = p_{l(m)}^* e^{-il\psi}; \quad (52)$$

$$(g_{l(m)}^*)_{\text{нов}} = g_{l(m)}^* e^{+il\psi}. \quad (52a)$$

Здесь ψ — угол поворота новой оси u относительно старой, отсчитываемый против часовой стрелки, а v — отношение периода вдоль новой к периоду вдоль старой оси u . Формулы (52), (52а) установлены сравнением главных частей разложений в ряд Лорана по степеням $(z - z_m)$ функций $\Phi(z, m)$ в новой и в старой системе координат.

4. РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ $b_{l(n), k(m)}$

Покажем, как можно рассчитать коэффициенты $b_{l(n), k(m)}$, пользуясь формулами (28), (28а—г).

Считаем, что аргумент $z' = z_n - z_m$ функций, входящих в правые части формул (28, 28а—г), принадлежит P_{00} (см. (2)). Этим случаем можно ограничиться в силу условий Флокае (1.4), (1.4а). Выделяя поле T_0 -ряда (см. (45), (46)), представим коэффициенты $b_{l(n), k(m)}$ в виде двух слагаемых:

$$b_{l(n), k(m)} = (b_{l(n), k(m)})_0 + (b_{l(n), k(m)})_{10}, \quad (53)$$

определеняемых формулами:

$$(b_{0(n), 0(m)})_{10} = \frac{1}{2} [\Phi_{10}(z_n - z_m) + \Phi_{10}^*(z_m - z_n)]; \quad (54)$$

$$(b_{l(n), k(m)})_{10} = \frac{1}{2k! l!} \Phi_{10}^{(k+l)}(z_n - z_m) \quad (k + l \neq 0); \quad (54a)$$

$$(b_{0(n), 0(m)})_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} [f_0(z_n - z_m) + f_0^*(z_m - z_n)] & (m \neq n; x_m \neq x_n) \\ \frac{u(z_n - z_m)}{u_1(z)|z|=r_m} & (m = n) \end{cases}; \quad (55)$$

$$(b_{l(n), k(m)})_0 = \begin{cases} \frac{1}{2k! l!} f_0^{(k+l)}(z_n - z_m) & (m \neq n; k + l \neq 0) \\ \frac{1}{2k! l!} \Delta f_0^{(k+l)}(0) & (k + l \neq 0; m = n) \end{cases}. \quad (55b)$$

$$(55c)$$

$$\text{Здесь } u_1(z) \text{ — потенциал } T_0\text{-ряда;}$$

$$\Delta f_0(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} s_k'' z^k \quad (56)$$

(см. (24), (1.12)). Вместо (1.15) приводим общее выражение для s_k'' :

$$s_k'' = \frac{1}{k!} B_k(a), \quad (56a)$$

следующее из (1.12) и из определения многочленов Бернулли $B_k(x)$ [10]. Подставляя (56), (56а) в (55c), находим:

$$(b_{l(m), k(m)})_0 = \frac{-1}{2(k+l)k!l!} B_{k+l}(a) \quad (k + l \neq 0). \quad (57)$$

Правая часть (55b) найдена в [1] (см. (1.22)), откуда

$$(b_{0(m), 0(m)})_0 = \overline{u_1(z)|z|=r_m} = -\ln r_m + \frac{\pi}{\varphi} + \delta(\varphi), \quad (58)$$

где

$$\delta(\varphi) = a^2 \left(\frac{1}{1-a^2} + 0,2021 + 0,037 a^2 \right). \quad (58a)$$

Рассмотрим формулы (54), (54a). Направление оси u выберем так, чтобы τ_2 имело наибольшее возможное для данной решетки значение (всегда $(\tau_2)_{\max} \geq \sqrt{3}/2$, см. [1]). Тогда в (54), (54a) можно подставить (47); при этом получаются быстро сходящиеся ряды. Если $|\operatorname{Re}(z_n - z_m)| \geq \pi$, то аналогично в (55), (55b) можно подставить (45). Если же $|\operatorname{Re}(z_n - z_m)| < \pi$, то в (55b) можно воспользоваться формулами

$$f_0^{(1)}(z) = -e^{-bz^2}/2\operatorname{sh}\left(\frac{z}{2}\right) \quad (b = (\pi - \varphi)/\pi) \quad (59)$$

или

$$f_0^{(1)}(z) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}/(z - 2\pi im); \quad (59a)$$

первая из них следует из (1.12) и удобнее при $k+l \leq 3$, а вторая соответствует представлению поля T_0 -ряда в виде суммы полей отдельных зарядов и удобнее при $k+l > 3$.

Для расчета $(b_{0(m), 0(n)})_0$ при $m \neq n$ и $|\operatorname{Re}(z_n - z_m)| < \pi$ воспользуемся (55a) и равенством, аналогичным (25):

$$u_1(z) = \overline{u_1(z)}|_{|z|=\text{const}} + \frac{1}{2} [\Delta f_0(z) + \Delta f_0^*(-z)]. \quad (60)$$

Сходимость ряда, получающегося при подстановке (56) в (60), можно улучшить, выделяя потенциал зарядов, расположенных в точках $z = \pm 2\pi i$. В результате $u_1(z)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} u_1(z) = & -\ln|z| + \frac{\pi}{\varphi} + \delta(\varphi) - \frac{1}{2} \cos \varphi \ln(R_1^2 R_{-1}^2) - \\ & - \frac{i}{2} \sin \varphi \ln(R_1^2 / R_{-1}^2) - \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{i \delta s''_{2l-1}}{2l-1} |z|^{2l-1} \sin[(2l-1)\psi] + \right. \\ & \left. + \frac{\delta s''_{2l}}{2l} |z|^{2l} \cos(2l\psi) \right], \end{aligned} \quad (61)$$

где

$$R_1^2 = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{2\pi}\right)^2; \quad (61a)$$

$$R_{-1}^2 = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(1 + \frac{y}{2\pi}\right)^2; \quad (61b)$$

$$x = \operatorname{Re} z; \quad y = \operatorname{Im} z; \quad \psi = \arg z; \quad (61b)$$

$$\delta s''_{2l-1} = s''_{2l-1} + (-1)^{l-1} \frac{2}{(2\pi)^{2l-1}} \sin \varphi; \quad (61c)$$

$$\delta s''_{2l} = s''_{2l} + (-1)^l \frac{2}{(2\pi)^{2l}} \cos \varphi \quad (l = 1, 2, \dots). \quad (61d)$$

При $|z| < \pi$ в (61) можно оставить лишь слагаемые с $l = 1$ и $l = 2$. При $\varphi \rightarrow 0$ представление $\Phi_1(z)$ в виде (46) становится неудобным

для расчета коэффициентов $b_{l(n), k(m)}$, так как приводит к неопределенностим ($\infty - \infty$). Вместо (46) можно тогда воспользоваться следующим разбиением величин $\Phi_1(z)$ и $b_{l(n), k(m)}$, не дающим особенностей при $\varphi = 0$:

$$\Phi_1(z) = \hat{f}_0(z) + \Phi_{11}(z) + \beta(z), \quad (62)$$

где

$$\hat{f}_0(z) = f_0(z) - e^{az}/2a, \quad (62a)$$

$$\Phi_{11}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m} e^{(-1)^m a_m z} c_m, \quad (62b)$$

$$\beta(z) = \frac{1}{2a} e^{az} \operatorname{cth} \left[\frac{1}{2} (\varphi\tau_2 + i(-\varphi\tau_1 + \varphi')) \right], \quad (62b)$$

$$b_{l(n), k(m)} = (\hat{b}_{l(n), k(m)})_0 + (b_{l(n), k(m)})_{11} + (b_{l(n), k(m)})_{\beta}. \quad (63)$$

Два последних слагаемых в (63) вычисляются по формулам, отличающимся от (54), (54a) подстановкой вместо $\Phi_{10}(z)$ выражений (62b), (62b) соответственно.

Первое слагаемое в (63) вычисляется по формулам (55), (55a—г) с заменой $f_0 \rightarrow \hat{f}_0$, $u_1 \rightarrow \hat{u}_1$. При $|\operatorname{Re}(z_n - z_m)| \geq \pi$ следует в (55), (55b) подставлять (62a), где $f_0(z)$ представлено рядами (45).

Вместо (57), (58), (59), (59a), (60), (61) получим соответственно

$$\begin{aligned} (\hat{b}_{l(m), k(m)})_0 &= \frac{-1}{2(k+l) k! l!} \frac{1}{2} \times \\ &\times [B_{k+l}(a) + (-1)^{k+l} B_{k+l}(-a)] \quad (k+l \neq 0), \end{aligned} \quad (64)$$

$$(\hat{b}_{0(m), 0(m)})_0 = -\ln r_m + \delta(\varphi), \quad (65)$$

$$\hat{f}_0^{(1)}(z) = \frac{-1}{2} e^{az} \operatorname{cth}(z/2), \quad (66)$$

$$\hat{f}_0^{(1)}(z) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{e^{im\varphi}/(z - 2\pi im)\} - e^{az}/2, \quad (66a)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(z) &= u_1(z) - (\pi/\varphi) + \frac{1}{a} \left[-\operatorname{sh}^2 \left(\frac{ax}{2} \right) \cos(ay) + \sin^2(ay/2) \right] - \\ &- (i/2a) \sin(ay) \operatorname{ch}(ax), \end{aligned} \quad (67)$$

где $u_1(z)$ определено рядом (61).

При $\varphi = 0$, $\varphi' \neq 0$ имеем:

$$(b_{0(n), 0(m)})_{\beta} = \frac{\pi\tau_2}{1 - \cos \varphi'} - i \frac{x_n - x_m}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi'}{2} \right) \quad (\varphi = 0), \quad (68)$$

$$(b_{l(n), k(m)})_{\beta} = -(i/4) \operatorname{ctg}(\varphi'/2) \quad (\varphi = 0; \quad k+l = 1), \quad (68a)$$

$$(b_{l(n), k(m)})_{\beta} = 0 \quad (\varphi = 0; \quad k+l > 1), \quad (68b)$$

так что

$$\lim_{\varphi' \rightarrow 0} (b_{l(n), k(m)})_\beta = \infty \quad (\varphi = 0; \quad k + l < 2), \quad (69)$$

и решение с $\varphi = \varphi' = 0$ существует только при $\sum_{m=1}^N Q_m = 0$, когда вклад, вносимый в k (31) слагаемыми $(b_{l(n), k(m)})_\beta$ (см. (63), (68), (68a, б)), равен нулю.

При $\varphi = 0$ (при $\varphi = \pi$) функция $\hat{u}_1(z)$ ($u_1(z)$) представляется конечным выражением:

$$\hat{u}_1(z) = -\ln |2\operatorname{sh}(z/2)| \quad (\varphi = 0), \quad (70)$$

$$u_1(z) = -\ln |\operatorname{th}(z/4)| \quad (\varphi = \pi). \quad (70a)$$

Конечные выражения получаются и при $\varphi = (p/g)\pi$, где (p/g) — несократимая дробь. Представив поле T -решетки в виде суммы полей g решеток с периодами $L = 2\pi g$, с помощью (70), (70a) получаем:

$$\hat{u}_1(z) = -\sum_{k=-n}^n e^{ik\varphi} \ln \left| 2\operatorname{sh} \left(\frac{z - 2\pi ik}{2(2n+1)} \right) \right| \quad \left(\varphi = \frac{2l}{2n+1}\pi \right), \quad (70b)$$

$$u_1(z) = -\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} e^{ik\varphi} \ln \left| \operatorname{th} \left(\frac{z - 2\pi ik}{8n} \right) \right| + \\ + i(-1)^{l+1} \ln \left| \frac{1 + i \operatorname{th}(z/8n)}{1 - i \operatorname{th}(z/8n)} \right| \quad \left(\varphi = \frac{2l+1}{2n}\pi \right).$$

При небольших g эти выражения могут оказаться удобнее, чем (67), (61).

Предложенный метод позволяет производить численный расчет параметров любых периодических многопроводных линий с круглыми проводниками или, что то же самое, решать двухмерную электростатическую задачу при любом периодическом расположении круглых проводников. При этом требуется только, чтобы число проводников в ячейке не было очень большим и чтобы зазор между соседними проводниками был не слишком мал по сравнению с их радиусами (в противном случае приходится учитывать много гармоник в функциях $w(\theta, m)$). Эти условия обычно выполняются.

Упрощения, возникающие при рассмотрении отдельных частных случаев, например, в случае какого-нибудь вида симметрии, удобно учитывать непосредственно в выражении для k (31), тем самым снижая количество варьируемых параметров.

В общем случае расчет должен проводиться на вычислительной машине.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ш. Белуга, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 942 (1961).
2. И. Ш. Белуга, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 689 (1961).
3. А. Leblon, J. Moigne, Ann. Radioélectricité, 9, 180, 311 (1954).
4. В. А. Сухов, Б. Ф. Рыженко, Радиотехника и электроника, 7, 1769 (1962).
5. Чишолм, Сб. Полосковые системы сверхвысоких частот, ИЛ, М., 1959, стр. 87.
6. Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
7. В. Смайт, Электростатистика и электродинамика, ИЛ, М., 1954.

8. Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
9. С. Рамо, Дж. Уиннери, Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
10. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова, Е. К. Исакова, Л. А. Люстерник, Г. С. Салехов, А. Н. Хованский, Л. Я. Цлаф, А. Р. Янпольский, Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби (Справочная математическая библиотека), Физматгиз, М., 1961.

Поступила в редакцию
20 октября 1962 г.

TWO-DIMENSIONALLY PERIODIC MULTIWIRE LINE WITH N CYLINDER CONDUCTORS IN A CELL

I. Sh. Belouga

The method is suggested for calculation of wave impedance matrix, amplitudes of space harmonics and attenuation factor in two-dimensionally periodic multiwire line with N cylinder conductors in a cell. The angle between base vectors of the two-dimensional array as well as radii of conductors are supposed to be arbitrary. The method is based on that developed in [1,2] for two-dimensional electrostatic fields satisfying Floquet's conditions as well as on extremal properties of the energy of an electrostatic field. The results obtained are usefull for the calculation of slow-wave systems by the method of multiwire lines and for the calculation of some transmission lines.

МОДУЛЯЦИЯ СИГНАЛОВ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С ПЕРИОДИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Л. А. Островский

Рассматривается изменение частоты и амплитуды волн, распространяющихся в линиях передачи с переменными во времени параметрами. Приводятся данные экспериментального исследования параметрического модулятора, подтверждающие основные выводы теории.

1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДУЛЯЦИИ В ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

1. Изменение параметров линии передачи во времени приводит, как известно, к изменению частоты и энергии распространяющихся в ней волн. Хорошо изучены возможности усиления и преобразования частоты сигналов в резонансных параметрических системах с бегущими волнами. Для целей периодической модуляции амплитуды и, в особенности, фазовой и частотной модуляции заслуживает внимания, в свою очередь, применение линий передачи с медленно (по сравнению с частотой волны) меняющимися параметрами. Такие модуляторы имеют ряд преимуществ по сравнению с обычными системами с сосредоточенными параметрами.

Математический анализ соответствующих задач может быть проведен на основе теории, развитой в работах [1—5], где, в частности, был рассмотрен ряд случаев модуляции. Ниже исследуются свойства огибающих волн для произвольного периодического закона изменения параметров однородной недиспергирующей линии передачи с малыми потерями*. Телеграфные уравнения волн в такой линии имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial LI}{\partial t} + RI = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial CU}{\partial t} + GU = 0. \quad (1)$$

Здесь U — напряжение, I — ток, $L(t)$, $C(t)$, $R(t)$, $G(t)$ — соответственно погонные индуктивность, емкость, сопротивление и проводимость утечки линии. При условии достаточно медленного изменения всех параметров и малых R и G справедливо следующее решение системы (1) (аналогичное приближению геометрической оптики для неоднородных сред):

$$U = C^{-3/4} L^{-1/4} \exp \left[-\frac{1}{2} \int (R/L + G/C) dt \right] \left\{ \Phi_1 \left(\int v dt - z \right) + \right. \\ \left. + \Phi_2 \left(\int v dt + z \right) \right\}; \quad (2)$$

* Некоторые из приводимых ниже результатов при $R=G=0$ получены в [6]; там же описано экспериментальное обнаружение эффектов частотной и амплитудной модуляции волн в линии передачи с сегнетоэлектрическими конденсаторами на частоте сигнала около 17 кгц.

$$I = \rho^{-1} C^{-3/4} L^{-1/4} \exp \left[-\frac{1}{2} \int (R/L + G/C) dt \right] \times \\ \times \left\{ \Phi_1 \left(\int v dt - z \right) - \Phi_2 \left(\int v dt + z \right) \right\},$$

где $v(t) = (LC)^{-1/2}$, $\rho(t) = (L/C)^{1/2}$, Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции. Если $\rho = \text{const}$, $R = G = 0$, то решение (2) является точным [2].

Имея в виду полубесконечную ($z \geq 0$) линию, рассмотрим бегущую в положительном направлении волну с граничным условием в виде квазимонохроматического колебания:

$$U(0, t) = \bar{U}_0(t) \sin \left[\int_0^t \omega_0 dt + \psi_0 \right]; \quad I(0, t) = \rho^{-1} U(0, t), \quad (3)$$

где \bar{U}_0 и ω_0 — медленные функции t , $\psi_0 = \text{const}$. Обозначая $\xi = \int v dt - z$, $\xi_0 = \int v dt$ и выражая t в виде функции ξ_0 , легко из (2) и (3) определить вид функции $\Phi_1(\xi)$ (в данном случае, очевидно, $\Phi_2 \equiv 0$). В результате получим:

$$U = \rho I = \bar{U}_0[t(\xi)] \frac{P(t)}{P[t(\xi)]} \sin \left\{ \int_0^{t(\xi)} \omega_0 dt + \psi_0 \right\}. \quad (4)$$

Здесь $P(t) = C^{-3/4} L^{-1/4} \exp \left[(-1/2) \int (R/L + G/C) dt \right]$, а функция $t(\xi)$ имеет тот же вид, что и $t(\xi_0)$. Дифференцируя $\psi = \int_0^{t(\xi)} \omega_0 dt + \psi_0$, получим выражения для мгновенных значений частоты $\omega(z, t) = \partial \psi / \partial t$ и волнового числа $k(z, t) = -\partial \psi / \partial z$:

$$\omega = v(t) k(\xi) = \omega_0[t(\xi)] \frac{v(t)}{v[t(\xi)]}. \quad (5)$$

Для амплитуды $\bar{U}(z, t)$ имеем:

$$\bar{U} = \bar{U}_0[t(\xi)] \frac{P(t)}{P[t(\xi)]}. \quad (6)$$

2. Конкретный вид решения зависит от закона изменения функций v и P . Однако ряд выводов можно сделать и в общем случае, рассматривая поведение фиксированного фронта волны, определяемого равенством $\xi = \xi_0 = \text{const}$ или моментом $t_0 = t(\xi_0)$ его выхода из точки $z=0$. Как следует из (5), для данного фронта k остается постоянным, а ω пропорционально v . Если v изменяется с периодом $T \ll 2\pi/\omega$, то наибольшее и наименьшее значения ω достигаются для всех фронтов одновременно, соответственно в те же моменты, что и максимумы и минимумы v . Обозначим эти моменты через $t_{\max} = t_1 \pm nT$ и $t_{\min} = t_2 \pm nT$ ($n=0, 1, 2, \dots$), где t_1 и t_2 — любые из t_{\max} и t_{\min} . Соответствующие значения ω зависят от t_0 . При $\omega_0 = \text{const}$ легко указать максимальное и минимальное из возможных значений ω :

$$\frac{\omega_{\max}}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_{\min}} = \frac{v_{\max}}{v_{\min}}. \quad (7)$$

Следовательно, значение ω_{\max} достигается для фронтов, вышедших в моменты t_{\min} (т. е. наибольшее время ускоряющихся) и наоборот, что физически вполне понятно *. Координаты точек, в которых имеют место указанные экстремальные значения ω , равны

$$\begin{aligned} z(\omega_{\max}) &= \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} v dt = \int_{t_2}^{t_1} v dt + n \int_0^T v dt = z_a + nz_0; \\ z(\omega_{\min}) &= \int_{t_{\max}}^{t_{\min}} v dt = \int_{t_1}^{t_2+T} v dt + n \int_0^T v dt = z_b + nz_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Значения пределов интегрирования здесь удовлетворяют условиям $t_{\min} < t_{\max} < t'_{\min}$, $0 < t_1 - t_2 < T$, т. е. z_a и z_b — минимальные значения соответствующих величин. Что касается точек с координатами $nz_0 = n \int_0^T v dt = n \bar{v} T$, где \bar{v} — среднее за период значение v , то в этих точках $\omega = \omega_0$. Действительно, все фронты проходят расстояние от $z = 0$ до $z = nz_0$ за одно и то же время nT (значение $z_0 = \int_t^{t+T} v dt$ не зависит от пределов интегрирования за период), когда v принимает исходное значение $v(t_0)$; как ясно из (5), отношение $\omega/\omega_0 = 1$ остается при этом неизменным.

Согласно (7), $z_a + z_b = z_0$. Практически важен случай, когда $z_a = z_b = z_{\text{опт}}$, что всегда выполняется при четной относительно экстремумов функции v , например, когда параметры означенно меняются под действием синусоидального модулирующего сигнала. В этом случае $z_{\text{опт}}$ можно рассматривать как оптимальную длину линии с точки зрения получения наибольшей девиации частоты на кратчайшей длине.

Аналогичные формулы можно получить и для амплитудной модуляции, которая, согласно (6), определяется изменением функции P . Однако при периодическом изменении параметров P является периодической функцией лишь в отсутствие потерь. В последнем случае для экстремумов \bar{U} справедлива формула (7) с заменой v на P , а в формулах, соответствующих (8), изменяются лишь пределы интегрирования. Если, в частности, меняется только один из параметров L и C , то экстремумы функций v и P достигаются одновременно; при этом координаты z_a и z_b для \bar{U} и ω совпадают (точки z_0 совпадают всегда при равенстве периодов v и P), т. е. амплитудная и частотная модуляции наиболее сильно выражены в одних и тех же точках.

Из (2) и (4) легко видеть, что средний поток энергии волны $\bar{S} = \bar{I}\bar{U}$ для фиксированного фронта пропорционален ω^2 (это справедливо для произвольной медленной зависимости параметров от z и t [4-6]), а средняя плотность энергии $\bar{w} = \frac{1}{2} (\bar{C}\bar{U}^2 + \bar{L}\bar{I}^2) \approx C\bar{U}^2$ пропорциональна ω . Следовательно, изменение указанных величин в среде без потерь всегда определяется изменением v .

* Если ω_0 не постоянно, то значения ω_{\max} и ω_{\min} достигаются для фронтов, в моменты выхода которых соответственно максимальна и минимальна функция ω/v .

При наличии в линии периодически меняющихся потерь функция P не является периодической, но может быть представлена в виде

$$P = e^{-\bar{r}t} P'(t).$$

Здесь \bar{r} —среднее значение величины $r = \frac{1}{2}(R/L+G/C)$, а P' —периодическая функция. Следовательно, точки экстремумов \bar{U} по-прежнему повторяются, но экстремальные значения убывают. Изменение R и G в данном приближении дает „чистую“ амплитудную модуляцию*. Именно, при постоянных L и C имеем:

$$\bar{U} = U_0(t-z/v) \exp\left(-\frac{\bar{r}}{v}z\right) \exp\left\{\int_t^t(r-\bar{r})dt\right\}. \quad (9)$$

Здесь в каждой фиксированной точке z амплитуда меняется периодически.

3. Остановимся далее на двух случаях, когда, пользуясь малостью параметрических эффектов, удается записать решение (3) в явном виде. Для малых расстояний от входа, когда $z \ll vT$ или $t-t_0 \ll T$, можно считать, что $\xi=v(t)(t-t_0)-z$. Поэтому (4) запишется в виде

$$U = \bar{U}_0 \left(1 + \frac{z}{v(t)} \frac{d}{dt} \ln \frac{P}{U_0}\right) \sin \left\{ \int_0^t \omega_0 dt - \frac{z}{v} \omega_0 + \psi_0 \right\}. \quad (10)$$

Отсюда для частоты колебаний в точке z имеем:

$$\omega(z, t) = \omega_0 \left\{ 1 + \frac{z}{v} \frac{d}{dt} \ln \frac{v}{\omega_0} \right\}. \quad (11)$$

При $\omega_0=\text{const}$ (10) совпадает с формулой, полученной в [3].

Пусть теперь z произвольно, но v изменяется мало около некоторого постоянного значения:

$$v = v_0 + v_1(t) \quad (v_1 \ll v_0).$$

Учитывая, что $\xi=v_0t + \int_0^t v_1 dt - z$ или $v_0t \approx \xi_0 - \int_0^t v_1 dt$, получим при-

ближенно:

$$t(\xi) \approx t - z/v_0 - \int_t^{t-z/v_0} v_1 dt. \quad (12)$$

Если на входе $\omega_0=\text{const}$, то

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \frac{1}{v_0} [v_1(t-z/v) - v_1(t)]. \quad (13)$$

Для полного решения задачи следует рассмотреть еще явления на входе ($z=0$) рассматриваемой линии. Пусть в области $z \leq 0$ находится линия с постоянным волновым сопротивлением ρ_0 . В данном приближении, как нетрудно видеть, частота волны в точке $z=0$ непре-

* При $R=G=0$ только амплитудную модуляцию дает такое изменение L и C , что $v=\text{const}$; однако в этом случае энергия волны не модулирована.

рывна, а амплитуды прошедшей и отраженной волн удовлетворяют квазистационарным граничным условиям:

$$\frac{\bar{U}_{\text{пр}}}{\bar{U}_{\text{пад}}} = \frac{2\rho(t)}{\rho_0 + \rho(t)}; \quad \frac{\bar{U}_{\text{отр}}}{\bar{U}_{\text{пад}}} = \frac{\rho_0 - \rho(t)}{\rho_0 + \rho(t)}, \quad (14)$$

т. е. в общем случае на границе происходит „чистая“ амплитудная модуляция волны.

4. В качестве примера рассмотрим линию передачи с $R = G = 0$, $L = \text{const}$, емкость которой изменяется под действием синусоидального модулирующего напряжения *:

$$U_m = \bar{U} + \tilde{U}_m \cos(\Omega t), \quad |\tilde{U}_m| < |\bar{U}|. \quad (15)$$

Границный сигнал (3) считаем немодулированным ($\bar{U}_0 = \text{const}$, $\omega_0 = \text{const}$).

На небольших участках зависимость $C(U_m)$ можно считать линейной, тогда

$$C = C_0[1 + a \cos(\Omega t)]; \quad 0 < a < 1. \quad (16)$$

Решение (14) можно записать в явном виде через эллиптические функции. В частности, для экстремальных значений ω и S имеем из (7):

$$\frac{\omega_{\text{макс}}}{\omega_0} = \left(\frac{\bar{S}_{\text{макс}}}{\bar{S}_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^{1/2}; \quad \frac{\omega_{\text{мин}}}{\omega_0} = \left(\frac{\bar{S}_{\text{мин}}}{\bar{S}_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{1-a}{1+a} \right)^{1/2}, \quad (17)$$

причем, согласно (8),

$$z_{\text{опт}} = z_0/2 = \frac{2}{\Omega \sqrt{LC_0(1+a)}} F \left(\sqrt{\frac{2a}{1+a}}, \pi/2 \right), \quad (18)$$

где $F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} (1 - k \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi$ — эллиптический интеграл первого рода. При $a \ll 1$ $z_{\text{опт}} \approx \pi v_0 / \Omega$, т. е. равно половине „длины волны“ параметра. Общее решение при $a \ll 1$ имеет вид (см. (12)):

$$U = \bar{U}_0 \{1 + (3/4)a [\cos(\Omega t(\xi)) - \cos(\Omega t)]\} \sin[\omega_0 t(\xi)], \quad (19)$$

где

$$t(\xi) = t - z/v_0 - \frac{a}{\Omega} \cos[\Omega(t - z/2v_0)] \sin(\Omega z/2v_0).$$

Отсюда

$$\omega = \omega_0 \{1 + a \sin[\Omega(t - z/v_0)] \sin(\Omega z/2v_0)\}, \quad (20)$$

т. е. амплитуда и частота волны изменяются во времени гармонически. Отметим, что формулы для изменения частоты в случае $a \ll 1$ получены ранее в [3] **.

* Разумеется, необходимо, чтобы амплитуда волны \bar{U} была мала по сравнению с \tilde{U}_m , иначе задача является нелинейной.

** Приведенные в [3] формулы для ω и z_0 содержат также величины порядка a^2 ; учет последних, однако, сделан некорректно, так как отброшены величины того же порядка. Например, согласно [3], $z_0 = \frac{4\pi v_0}{\Omega \sqrt{1-a^2}} \approx \frac{2\pi v_0}{\Omega} \left(1 + \frac{1}{8}a^2\right)$, тогда как из (17)

найдем: $z \approx \frac{2\pi v_0}{\Omega} (1 + (3/16)a^2)$. В пренебрежении указанными величинами полученная там формула для ω совпадает с (20)

В описанном ниже эксперименте используется емкость полупроводниковых диодов, зависимость которой от U_m хорошо описывается формулой [7]:

$$C = C_0(1 + U_m/U_s)^{-1/2}; \quad C_0, \quad U_s = \text{const.} \quad (21)$$

В этом случае из (7), (8) и (15) найдем:

$$\frac{\omega_{\max}}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_{\max}} = \left(\frac{U_s + \bar{U} + \tilde{U}_m}{U_s + \bar{U} - \tilde{U}_m} \right)^{1/4}; \quad (22)$$

$$z_{\text{опт}} = z_0/2 = v_0 \int_0^{2\pi/\Omega} \left[1 + \frac{\bar{U} + \tilde{U} \cos(\Omega t)}{U_s} \right]^{1/4} dt. \quad (23)$$

Приведем еще используемую ниже формулу для изменения ω при $z \ll z_{\text{опт}}$ (см. (11)):

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{1}{4} \frac{\Omega z}{v_0} \left[1 + \frac{\bar{U} + \tilde{U} \sin(\Omega t)}{U_s} \right]^{-5/4} \frac{\tilde{U}_m}{U_s} \cos(\Omega t) \quad (24)$$

(амплитуда \bar{U} пропорциональна $\omega^{3/2}$). Следовательно, в начале линии ω линейно зависит от z . Максимальное и минимальное значения ω в данной точке достигаются в моменты

$$t = \frac{1}{\Omega} \arcsin \left\{ \frac{2}{\alpha} \left[1 - \sqrt{1 + (5/4)\alpha^2} \right] \right\}; \quad \alpha = \frac{\tilde{U}_m}{\bar{U}_m + U_s}. \quad (25)$$

Соответствующие девиации $|\omega - \omega_0|_{\max}$ равны (но осуществляются через различные интервалы времени — в точках наибольшей производной $v(t)$).

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

1. Для экспериментального изучения описанных выше эффектов использовались линии передачи в виде цепочек звеньев с сосредоточенными параметрами (искусственные линии задержки), которые для

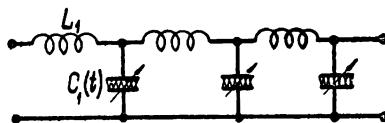


Рис. 1.

частот, малых по сравнению с $\omega_{kp} = 2(L_1 C_1)^{-1/2}$, хорошо моделируют, как известно, распределенные линии (рис. 1). В качестве переменной емкости использовалась емкость коллектор—база полупроводниковых триодов П1Е (линия I), а также емкость сегнетоэлектрических конденсаторов (варикондов) типа ВК-3 (линия II). На рис. 2 изображена зависимость емкости триодов от запирающего напряжения \bar{U} и емкости варикондов от постоянного напряжения \bar{U} . Изменение емкости осуществлялось синусоидальным переменным напряжением U_m вида (15).

Блок-схема эксперимента приведена на рис. 3. На исследуемую линию подаются одновременно напряжение $U_{\text{вх}}$ несущей (высокой) частоты f_0 , модулирующее напряжение U_m частоты f_m и постоянное напряжение смещения \bar{U} . Цепи высокой и низкой частот развязаны

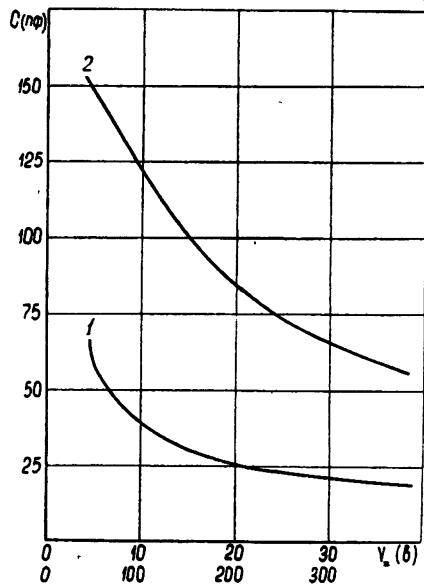


Рис. 2. Зависимость емкости промежутка коллектор—база триодов П1Е (кривая 1, верхний масштаб по оси абсцисс) и емкости варикондов ВК-3 (кривая 2, нижний масштаб) от напряжения смещения.

фильтрами. Отметим, что для обеспечения подачи одинакового модулирующего напряжения во все точки линии фильтр низких частот 5 состоит из пяти идентичных параллельных звеньев, через которые напряжение U_m подается в пять равноотстоящих точек линии*.

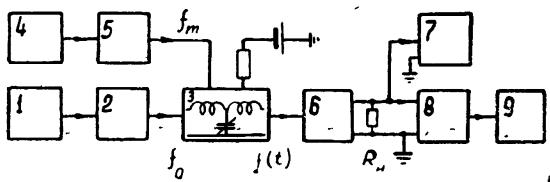


Рис. 3. Блок-схема экспериментальной установки:

1—генератор несущей, 2 и 6 — фильтры высоких частот, 3—исследуемая линия, 4—генератор модулирующего напряжения, 5—фильтр низких частот, 7—осциллограф, 8—усилитель, 9—частотный дискриминатор-ограничитель.

Модулированный выходной сигнал поступает на осциллограф, а также на частотный дискриминатор-ограничитель.

2. Линия I содержала 25 звеньев с триодами П1Е; индуктивность одного звена $L_1=0,4 \text{ мкГн}$. Линия согласована на выходе по отношению к рабочей точке $\bar{U}=15 \text{ в}$. Соответствующее значение волнового сопротивления $\rho_0=115 \text{ ом}$, а среднее время задержки одного звена $\tau_0=\sqrt{L_1 C_1(\bar{U})}=3,5 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$. Частота входного сигнала $f_0=4,6 \text{ мгц}$.

* В противном случае, если длина линии сравнима с $z_{\text{опт}}$, распределение U_m в ней может носить характер стоячей волны,

На рис. 4а приведены графики зависимости максимальных относительных девиаций частоты $\frac{f_{\max} - f_0}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0}$ и $\frac{f_{\min} - f_0}{f_0} = -\frac{\Delta f}{f_0}$ от координаты (n —номер звена) при $\tilde{U}_m=7$ в*, а на рис. 4б— зависимость тех же величин от частоты модулирующего напряжения f_m . Сплошные

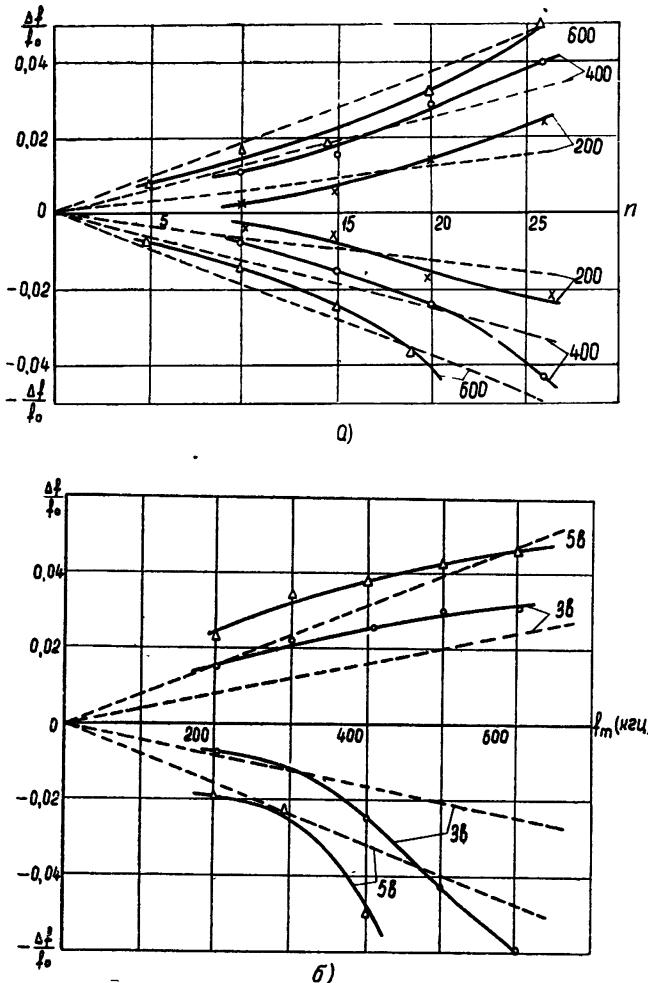


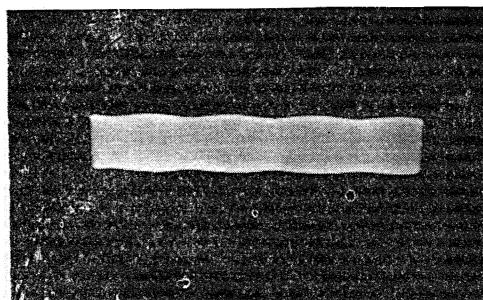
Рис. 4. а) Изменение максимальной девиации частоты волны $\Delta f/f_0$ вдоль линии I ($f_0=4,6$ мгц, $\tilde{U}=7$ в; справа указаны значения f_m в кгц), б) зависимость $\Delta f/f_0$ от f_m на конце линии (справа указаны значения \tilde{U}_m). Положительные значения соответствуют $(f_{\max}-f_0)/f_0$, а отрицательные— $(f_{\min}-f_0)/f_0$.

кривые—экспериментальные. Пунктирные прямые, соответствуют значениям функции (24) в точках (25) (в данном случае для конца линии $z \approx 10^{-2} z_{\text{опт}}$ и формула (24) применима **.

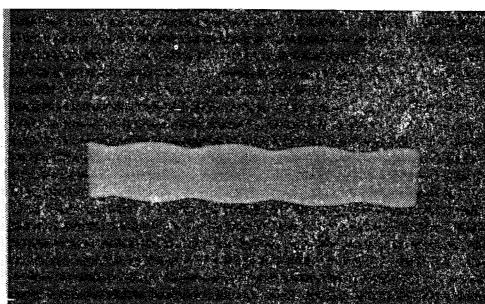
* Указано пиковое значение амплитуды. Амплитуда сигнала несущей частоты—десятые доли вольта.

** Отметим, что в пределах эксперимента кривая рис. 2а хорошо описывается формулой $C=C(\tilde{U})(\tilde{U}/U_m)^{1/2}$, являющейся частным случаем (20) при $U \gg U_s$, $C \ll C_0$.

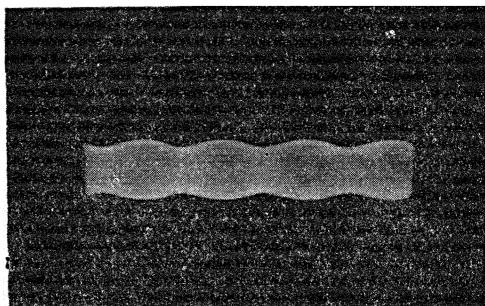
Из приведенных данных видно качественное и, в известной мере, количественное (по крайней мере в отношении порядков величин) соответствие теории и эксперимента*. Наблюдаемая величина девиации $(f_{\max} - f_{\min})/2f_0$ достигала 10%. Теоретически достижимые величины f_{\max} и f_{\min} для $z=z_{\text{опт}}$, определяемые формулой (22), для $\tilde{U}=7$ в равны соответственно $1,36 f_0 \approx 6,25 \text{ мгц}$ и $f_0/1,36 \approx 3,38 \text{ мгц}$.



а)



б)



в)

Рис. 5. Амплитудная модуляция в линии I

($f_0=4,6 \text{ мгц}$, $f_m=200 \text{ кгц}$): а) при $\tilde{U}_m=4 \text{ с}$,

б) $\tilde{U}_m=7 \text{ с}$, в) $\tilde{U}_m=10 \text{ с}$.

* Более точные измерения не являлись целью работы; возможность их ограничивалась в данном случае значительной погрешностью частотного дискриминатора, особенно для больших f_m .

Наблюдалась также амплитудная модуляция сигнала. На рис. 5 приведены осциллограммы напряжения в пятнадцатом звене линии. Сравнение с теорией здесь, однако, затруднительно ввиду необходимости учета влияния изменяющихся малых потерь (которые для полупроводниковых диодов, вообще говоря, не описываются введенной выше функцией G). Отметим только, что в согласии с формулами (14) небольшая амплитудная (без частотной) модуляция имеет место уже на входе линии.

3. Аналогичные эффекты наблюдались в линии II, содержащей 30 звеньев. Индуктивность одного звена линии II $L_1 = 3 \text{ мГн}$, так что в рабочей точке $\tilde{U}=100 \text{ в}$ имеем $\rho_0=170 \text{ ом}$, $\tau_0=1,9 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$. В данном случае изменение емкости невелико и может быть приближенно описано формулой (16). При $\tilde{U}=100 \text{ в}$, $\tilde{U}=14 \text{ в}$ из рис. 2б следует, что $C_0=120 \text{ пФ}$, $a=0,054$. Теоретические кривые (пунктир на рис. 6) построены по формуле (20). Изменение функций $\Delta f/f_0$ и $-\Delta f/f_0$ вдоль линии при разных $f_m(\tilde{U}=14 \text{ в}, f_0=4,6 \text{ мГц})$ показано на рис. 6. Ввиду большей электрической длины линии II (отношение $z/z_{\text{опт}}$ для конца линии при $f_m=600 \text{ кГц}$ равно 0,682) девиация частоты того же порядка, что и для линии I, получается при значительно меньшем изменении емкости. Экстремальные значения (7) равны соответственно $f_{\text{макс}} \approx 4,85 \text{ мГц}$, $f_{\text{мин}} \approx 4,35 \text{ мГц}$.

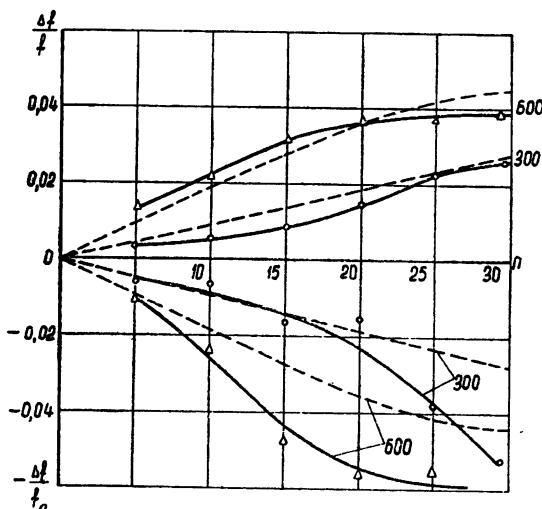
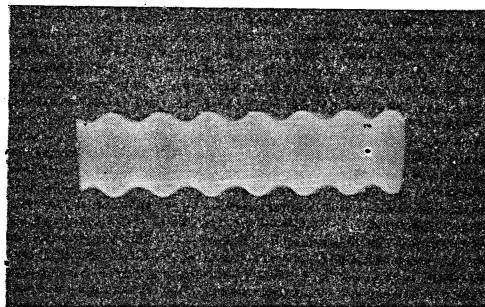


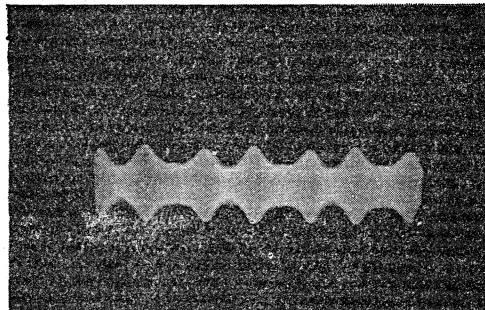
Рис. 6. Изменение $\Delta f/f_0$ вдоль линии II ($f_0=4,6 \text{ мГц}$, $\tilde{U}_m=14 \text{ в}$; обозначения те же, что на рис. 4а).

Осциллограммы напряжения на конце линии приведены на рис. 7. Здесь между основными максимумами амплитуды имеются максимумы меньшей величины, причем при малых коэффициентах модуляции эти максимумы почти сравниваются, и сигнал модулирован практически с частотой $2f_m$. Заметим еще, что при включении модулирующего напряжения в линии II наблюдалось понижение уровня выходного сигнала (максимальное значение амплитуды модулированного сигнала не превышает его амплитуды при $\tilde{U}_m=0$), т. е. возрастание по-

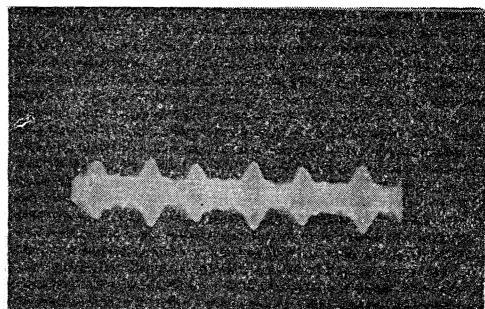
терь, величина которых была значительно больше, чем в линии I—при $U=100$ в, $f_0=4,6$ мгц на всей длине линии волна затухает примерно в 2,5 раза. Указанные эффекты объясняются, по-видимому,



а)



б)



в)

Рис. 7. Амплитудная модуляция в линии II
($f_0=4,6$ мгц, $f_m=200$ кгц): а) при $\tilde{U}_m=7$ в,
б) 14 в, в) 21 в.

гистерезисным характером потерь в сегнетоэлектриках (которые в первом приближении влияют лишь на амплитудную модуляцию).

В заключение остановимся на особенностях рассмотренного способа модуляции. Будучи нерезонансным, данный модулятор является весьма широкополосным в том смысле, что отношение $(f_{\max} - f_{\min})/2f_0$ в больших пределах не зависит от f_0 . Поскольку большинство приведенных формул верно не только для периодического, но и для всякого ограниченного изменения параметров, возможно осуществление модуляции как в непрерывном, так и в импульсном режимах, причем в различных точках линии можно одновременно получать различные законы модуляции. Наконец, отметим, что так как описанный модулятор является по существу фазовым, то он в принципе не воздействует на задающий генератор и не влияет на стабильность его режима.

Что касается материалов, позволяющих менять параметры линии передачи, то, как и в параметрических усилителях, наиболее перспективными для высоких частот являются, по-видимому, полупроводниковые диоды и ферриты, которые в принципе создают возможность построения модуляторов с указанными свойствами в различных диапазонах, вплоть до сверхвысоких частот.

Автор весьма признателен А. В. Гапонову за обсуждение результатов работы, а также Ю. А. Назарову и в особенности Б. С. Сверлову за помощь в постановке эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Труды физич. ин-та АН СССР, 2, № 1, 40. (1940).
2. С. И. Аверков, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 4, 46 (1958).
3. F. R. Morgenstheiger, IRE Trans., MTT-6, 167 (1958).
4. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 672 (1960).
5. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 294 (1960).
6. Л. А. Островский, Дипломная работа, ГГУ, 1957.
7. М. Д. Каравеев, УФН, 69, 217 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 октября 1963 г.

MODULATION OF SIGNALS IN TRANSMISSION LINES WITH PERIODICALLY VARYING PARAMETERS

L. A. Ostrovsky

Variation is considered of the frequency and amplitude of waves propagating in transmission lines with time varying parameters. Data of the experimental investigation of a parametrical modulator are given, which confirm the main conclusions of the theory.

К ТЕОРИИ ЛАМПЫ С ПОПЕРЕЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

P. A. Дудник

Рассмотрено дисперсионное уравнение лампы с поперечным взаимодействием для режима малых амплитуд при слабом токе пучка. Вычислен коэффициент усиления этой лампы в случае достаточно узких замедляющих систем; проведено сравнение с ЛБВ малой длины.

В последнее время появилось ряд работ, посвященных изучению взаимодействия электронных потоков с двухмерными замедляющими системами [¹⁻⁶]. Применение двухмерных замедляющих систем в приборах лучевого типа представляется перспективным в связи с возможностью использования коротких пучков, проходящих „поперек“ системы. По-видимому, такие замедляющие системы найдут применение также и в приборах с замкнутым электронным потоком типа цилиндрического магнетрона.

В работах [¹⁻⁵] рассматриваются некоторые приборы с поперечным взаимодействием. Так, в [^{1,2}] описана лампа, в которой в качестве замедляющей системы использована плоская спираль, а электронный пучок проходит поперек системы или под острым углом к продольной оси спирали. Считается, что амплитуда поля замедленной волны остается постоянной по ширине спирали. Это предположение позволило прибор с поперечным током рассматривать с помощью одномерной модели, в которой учитывается конечность времени взаимодействия каждого электрона с замедляющей системой. Общие соображения о применении двухмерных замедляющих систем в электронных приборах приведены в статье [³]. Работы [^{4,5}] посвящены исследованию волноводной модели ЛПВ, в которой замедляющей системой является прямоугольный волновод, заполненный изотропным диэлектриком, а электронный пучок движется перпендикулярно оси волновода. Приближенный метод получения дисперсионного уравнения ЛПВ с произвольной замедляющей системой, основанный на применении сопряженной леммы Лоренца, описан в статье [⁶].

В настоящей работе излагаются некоторые результаты теоретического исследования ЛПВ, основанного на использовании так называемых „двуихмерных телеграфных уравнений“ [⁷]. Описание двухмерных замедляющих систем с помощью телеграфных уравнений позволяет получить уравнения ЛПВ в компактной и общей форме. При таком подходе удается получить соотношения, характеризующие работу приборов с поперечным взаимодействием, в которых применяются различные способы фокусировки электронного потока при произвольных замедляющих системах. Приближенный характер телеграфных уравнений является недостатком этого метода. Заметим, однако, что элементарная теория обычной ЛБВ, использующая телеграфные уравнения, дает качественно верные результаты, находящиеся в хорошем количественном соответствии с выводами более точной теории [⁸].

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛПВ

Рассмотрим следующую простейшую модель ЛПВ (см. рис. 1). Двухмерная замедляющая система, лежащая в плоскости $z = 0$, помещена в волновод с идеально проводящей верхней крышкой. Длина волновода по оси x неограничена, ширина равна d , высота $a \ll \lambda_m$, где λ_m — длина замедленной волны. Условимся называть волноводом, имеющим идеально проводящие боковые стенки при $y = 0$ и $y = d$, прямоугольным волноводом, и полосковым волноводом, если боковые стенки отсутствуют.

Будем считать, что боковые стенки прозрачны для электронов и электронный поток равномерно вводится по всей длине волновода в пространство взаимодействия. В общем случае направление движения электронного потока может составлять некоторый угол α с осью x (ЛПВ с „косым“ пучком). В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением модели ЛПВ с чисто поперечным током, когда поток движется вдоль оси y . Электронный поток предполагается сфокусированным сильным продольным магнитным полем B_0 (фокусировка типа „O“).

Поля (напряжение и ток) в волне, распространяющейся в безграничной двухмерной системе, пропорциональны

$$e^{j\omega t - jhx - jxy}. \quad (1)$$

Решив задачу о возбуждении двухмерной замедляющей линии заданным током и определив движение электронов потока, совершающее под действием поля медленной волны, известным способом можно получить дисперсионное уравнение системы. Согласно [7], для рассматриваемой модели ЛПВ типа „O“ в режиме малых амплитуд при пленоочном электронном потоке дисперсионное уравнение запишется:

$$[x^2 + 2\tilde{Y}_{12}hx + \tilde{Y}_{11}h^2 + \tilde{B}](h_e - z)^2 = -\chi h_e^2 x^2, \quad (2)$$

где

$$\tilde{Y}_{12} = Y_{12}/Y_{22}; \quad \tilde{Y}_{11} = Y_{11}/Y_{22}; \quad \tilde{B} = B/Y_{22};$$

$$h_e = \frac{\omega}{v_0}; \quad \chi = \frac{I_0}{2V_0} - \frac{j\psi^2}{Y_{22}h_e};$$

χ — малый безразмерный параметр; I_0 и v_0 — постоянные составляющие линейной плотности конвекционного тока пучка и скорости электронов; V_0 — потенциал пучка; функция $\psi(z)$ характеризует спадание амплитуды поля замедленной волны от замедляющей системы ($\psi \sim 1$); $B = j\omega e/a$ — проводимость зазора, образованного импедансной стенкой и крышкой волновода. Пользуясь импедансным приближением, двухмерную замедляющую систему (например, косую гребенку) можно представить как импедансную поверхность, которая в общем случае обладает анизотропной проводимостью $\hat{Y} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$. Для определен-

ности считаем $Y_{12} = Y_{21}$. В системе без потерь $Y_{22} = -jY$, $Y > 0$ и, следовательно, параметр χ — действительная положительная величина, причем $\chi \ll 1$ при слабом токе пучка.

Левая часть уравнения (2) состоит из двух сомножителей, первый из которых связан с замедляющей системой, второй — с электронным потоком. Связь между постоянными распространения холодной системы и пучка определяется параметром χ . Заметим, что при переходе к одномерной модели (положив $h = 0$) получаем уравнение, аналогичное дисперсионному уравнению ЛБВ [8].

Рассматриваемая система имеет конечные размеры по оси y , поэтому распространяющиеся в ней волны типа (1) должны удовлетворять определенным граничным условиям при $y = 0$ и $y = d$. Согласно [7], для волновода без электронного потока с учетом граничных условий продольные и поперечные волновые числа имеют вид:

$$\kappa_{01,2} = \pm \frac{n\pi}{d} - \tilde{Y}_{12} h_0; \quad h_0^2 = -\frac{\tilde{B} + n^2\pi^2/d^2}{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что, например, волна напряжения записывается в виде

$$V = e^{-j\kappa_0(x - \tilde{Y}_{12}y)} \sin\left(\frac{n\pi}{d} y\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

для прямоугольного волновода и в виде

$$V = e^{-j\kappa_0(x - \tilde{Y}_{12}y)} \cos\left(\frac{n\pi}{d} y\right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

для полоскового волновода. Из (4) и (5) ясно, что амплитуда поля замедленной волны меняется по ширине системы, образуя стоячие волны. Для полоскового волновода возможен особый, вырожденный тип замедленной волны, когда $n = 0$, $\kappa_0 = \kappa_0$.

Используя предложенную выше терминологию, можно сказать, что в работе [1] описана лампа с поперечным током, работающая на вырожденной моде замедленной волны. В работе [4] описана ЛПВ, использующая изотропную замедляющую систему, для которой $\tilde{Y}_{12} = 0$.

В принятых предположениях постоянные распространения горячей системы слабо отличаются от (3). Дисперсионное уравнение (2) можно рассматривать как алгебраическое уравнение четвертого порядка относительно κ ; оно определяет поперечные волновые числа κ как функции другой неизвестной величины — продольного волнового числа h . Из граничных условий следует, что корни уравнения (2) должны удовлетворять дополнительным требованиям. Эти условия наиболее просто могут быть сформулированы, если предположить, что электронный поток входит в пространство взаимодействия невозмущенным. Тогда для прямоугольного волновода

$$\text{при } y = 0 \quad V = 0, \quad v = 0, \quad \rho = 0; \quad \text{при } y = d \quad V = 0; \quad (6)$$

для полоскового волновода

$$\text{при } y = 0 \quad I_y = 0, \quad v = 0, \quad \rho = 0; \quad \text{при } y = d \quad I_y = 0. \quad (7)$$

Здесь v и ρ — переменные составляющие скорости электронов и плотности пространственного заряда пучка, I_y — поперечная компонента поверхностного тока.

Система (6) или (7) однородных уравнений имеет нетривиальные решения, когда определитель ее равен нулю: $\text{Det} = 0$. Это позволяет получить уравнение, которое должно решаться совместно с уравнением (2) для определения κ и h .

Ниже приводятся результаты исследования дисперсионного уравнения (2) в приближении слабого тока пучка для достаточно узких замедляющих систем. Рассмотрены случаи различных возможных синхронизаций электронного потока с полем медленной волны в прямоугольном и полосковом волноводе, когда амплитуда поля медленной волны меняется по ширине системы. Отдельно рассмотрен случай вырож-

денной волны для ЛПВ с „косым“ пучком, проведено сравнение с ЛБВ малой длины.

2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

Согласно (5), фазовая скорость волны имеет продольную и поперечную составляющие. В общем случае амплитуда волны меняется по синусоидальному закону вдоль y ; поэтому волне, движущейся в волноводе слева направо*, соответствуют два поперечных волновых числа $x_{01,2}$ и одно продольное h_0 (3). При сильной анизотропии, когда

$-\tilde{Y}_{12}h_0 > n\pi/d$, фазовые скорости, соответствующие поперечным волновым числам, будут направлены в сторону положительных y . Следовательно, возможен синхронизм электронного потока, движущегося вдоль оси y с постоянной скоростью v_0 , с одной из этих поперечных составляющих фазовой скорости волны, т. е. $h_e = x_{01}$ или $h_e = x_{02}$.

При слабой анизотропии, когда $-\tilde{Y}_{12}h_0 < n\pi/d$, возможен только синхронизм $h_e = x_{01}$, а волна с x_{02} имеет фазовую скорость, направленную в сторону отрицательных y .

Предположим, что в системе осуществлена синхронизация электронного потока с медленной волной холодной системы. Для простоты синхронизацию считаем точной:

$$h_e = x_{01}. \quad (8)$$

Решение уравнения (2) ищем в виде

$$x = x_{01}(1 + \delta); \quad h = h_0(1 + \Delta). \quad (9)$$

Уравнение (2) можно записать:

$$[x - k_1(h)][x - k_2(h)](h_e - x)^2 = -\chi h_e^2 x^2;$$

$$k_{1,2}(h) = -\tilde{Y}_{12}h \pm \sqrt{(\tilde{Y}_{12}^2 - \tilde{Y}_{11})h^2 - \tilde{B}},$$

Следуя методу возмущений, положим:

$$k_{1,2}(h) \simeq k_{1,2}(h_0) + k'_{1,2}(h_0)h_0\Delta. \quad (10)$$

Используя (3), легко показать, что

$$k_{1,2}(h_0) = x_{01,2}; \quad k'_{1,2}(h_0) = \frac{dk_{1,2}}{dh} = -\tilde{Y}_{12} \mp \frac{h_0 d}{n\pi} (\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2). \quad (10a)$$

В результате из (2), учитывая (8)–(10), получаем:

$$\begin{aligned} \delta^4 - p\delta^3 + q\delta^2 + r\delta + t &= 0; \\ p &= (g_1 + g_2)\Delta - 2\pi n/N_1; \quad r = 2\chi; \\ q &= \chi - (2\pi n/N_1)g_1\Delta; \quad t = \chi; \end{aligned} \quad (11)$$

$$g_{1,2} = \frac{h_0}{x_{01}} k'_{1,2}(h_0),$$

где $N_1 = x_{01}d$ — длина пространства взаимодействия прибора.

* Согласование на концах волновода предполагается идеальным.

Уравнение (11) получено с точностью до членов, содержащих поправку к продольному волновому числу Δ только в первой степени. В (11) три корня, соответствующие синхронизации (8), близки друг к другу. Четвертый корень уравнения, соответствующий возмущенной быстрой волне холодной системы x_{02} , является удаленным и лежит в окрестности $\delta_4 \sim -2\pi n/N_1$. Найдем приближенное значение удаленного корня, пользуясь формулой Ньютона:

$$\delta_4 = -\frac{2\pi n}{N_1} + v \simeq -\frac{2\pi n}{N_1} - \frac{f(-2\pi n/N_1)}{f'(-2\pi n/N_1)}, \quad (12)$$

где f — левая часть уравнения (11), а f' — ее производная по δ , взятые при $\delta = -2\pi n/N_1$. Нетрудно убедиться, что

$$v \simeq g_2 \Delta + \chi \frac{N_1(N_1 - 2\pi n)^2}{(2\pi n)^3}. \quad (12a)$$

Это выражение получено с точностью до членов, содержащих Δ и χ только в первой степени. Все дальнейшие вычисления выполнены с этой степенью точности. В случае слабого тока пучка оценка удаленного корня необходима, так как $(x_{01} - x_{02})d = 2\pi n$.

Если в системе уравнений (6) выразить переменные составляющие скорости электронов v и плотности пространственного заряда пучка ρ через напряжение V , то, используя (8)–(9), (12), можно показать, что определитель равен

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} e^{-jN_1\delta_1} & e^{-jN_1\delta_2} & e^{-jN_1\delta_3} & e^{-jN_1v} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1+\delta_1}{\delta_1} & \frac{1+\delta_2}{\delta_2} & \frac{1+\delta_3}{\delta_3} & \alpha \\ \left(\frac{1+\delta_1}{\delta_1}\right)^2 \left(\frac{1+\delta_2}{\delta_2}\right)^2 \left(\frac{1+\delta_3}{\delta_3}\right)^2 & \beta \end{vmatrix} = 0; \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{1 - 2\pi n/N_1 + v}{-2\pi n/N_1 + v}; \quad \beta = \alpha^2.$$

Таким образом, согласованное решение вида (1), удовлетворяющее граничным условиям, получается в результате совместного решения дисперсионного уравнения (11) и уравнения (13), которые определяют поправки к постоянным распространения δ_i и Δ .

Нахождение совместного решения системы уравнений (11) и (13) в аналитической форме практически невозможно. Представляет определенный интерес попытка численного решения системы.

В качестве предварительного этапа рассмотрим приближенное решение уравнений в случае достаточно узких замедляющих систем. Из принятых выше предположений о слабом возмущающем действии пучка следует, что $|\delta_i| \ll 1$ ($i = 1, 2, 3$), $|\Delta| \ll 1$ и $\chi \ll 1$. Дополнительное предположение о малой длине пространства взаимодействия позволяет считать $|N_1\delta_i| < 1$, $|N_1v| < 1$, так что замена экспонент верхней строки детерминанта рядом обеспечивает достаточную точность при малом числе членов ряда.

Раскладывая экспоненты в степенные ряды

$$e^{-jN\delta_i} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-jN\delta_i)^s}{s!}, \quad e^{-jNv} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-jNv)^s}{s!}$$

и подставляя их в трансцендентное уравнение (13), можно записать его в форме ряда. Оказывается, что в коэффициенты этого ряда входят такие комбинации корней дисперсионного уравнения (11) δ_i , которые удается выразить с помощью формул Виета и нескольких рекуррентных соотношений в довольно простом виде. Ряд, соответствующий уравнению (13), имеет вид:

$$\text{Det} = \frac{[\sigma]}{(\delta_1 \delta_2 \delta_3)^2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-jN_1)^s}{s!} [D_{s+2} + K_{s+2} + L_{s+2} - \nu^s - \alpha(K_{s+2} + 2L_{s+2}) + \beta L_{s+2}] = 0, \quad (14)$$

где $[\sigma] = (\delta_1 - \delta_2)(\delta_1 - \delta_3)(\delta_2 - \delta_3)$.

Коэффициенты ряда D_s , K_s , L_s соответствуют следующим комбинациям корней дисперсионного уравнения (11):

$$\begin{aligned} (\delta_2 - \delta_3)(\delta_1^s - (\delta_1 - \delta_3)\delta_2^s + (\delta_1 - \delta_2)\delta_3^s) &= [\sigma]D_s; \\ (\delta_2^2 - \delta_3^2)\delta_1^s - (\delta_1^2 - \delta_3^2)\delta_2^s + (\delta_1^2 - \delta_2^2)\delta_3^s &= [\sigma]K_s; \\ (\delta_2^2 \delta_3 - \delta_2 \delta_3^2)\delta_1^s - (\delta_1^2 \delta_3 - \delta_1 \delta_3^2)\delta_2^s + (\delta_1^2 \delta_2 - \delta_1 \delta_2^2)\delta_3^s &= [\sigma]L_s, \end{aligned} \quad (15)$$

и для них выполняются рекуррентные соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} D \\ K \\ L \end{array} \right\}_s = p \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right\}_{s-1} - q \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right\}_{s-2} - r \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right\}_{s-3} - t \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right\}_{s-4} \quad (16)$$

при

$$\begin{aligned} D_0 &= 0, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \\ K_0 &= 0, \quad K_1 = -1, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = \delta_1 \delta_2 + \delta_1 \delta_3 + \delta_2 \delta_3, \\ L_0 &= 1, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = \delta_1 \delta_2 \delta_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь p , q , r и t — коэффициенты уравнения (11); величины D_3 , K_3 и L_3 вычисляются с помощью формул Виета.

Согласно (11)–(13), (15)–(17) коэффициенты ряда (14) содержат только одну неизвестную величину Δ . Таким образом, из системы уравнений (11), (13) мы получили уравнение для Δ .

Займемся решением уравнения (14). В настоящей работе случай кратных корней, когда граничные условия удовлетворяются тождественно, не рассматривается. Уравнение (14) получено в предположении слабого усиления в пространстве взаимодействия прибора; поэтому ограничимся нахождением решения с точностью до членов, содержащих Δ и χ только в первой степени. Согласно (11), (12), (16) и (17), получаем:

$$\begin{aligned} D_3 &= g_1 \Delta - \chi \frac{N_1(N_1 - 2\pi n)^2}{(2\pi n)^3}; \quad D_4 = \chi \left(\frac{N_1 - 2\pi n}{2\pi n} \right)^2 - \chi; \quad D_5 = -\chi \frac{N_1}{2\pi n}; \\ K_3 &= \chi - \chi \left\{ \frac{N_1 - 2\pi n}{2\pi n} \right\}^2; \quad K_4 = \chi \frac{N_1}{2\pi n}; \quad K_5 = 0; \\ L_3 &= -\chi \frac{N_1}{2\pi n}; \quad L_4 = 0; \quad L_5 = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

Остальные коэффициенты D_s , K_s и L_s с индексом $s > 5$ равны нулю. Подставляя (18) в (14) и учитывая (12), (13), найдем:

$$\Delta = \frac{\chi}{g_1 - g_2} \left\{ \left[-\frac{N_1^3}{12\pi n} + \frac{4N_1(N_1 - 2\pi n)(N_1 - \pi n)}{(2\pi n)^3} \right] + j \frac{N_1^2(N_1 - 2\pi n)}{(2\pi n)^2} \right\}. \quad (19)$$

Используя известное соотношение $v_{\text{grp}} v_{\Phi x} = v_g^2$, где v_{grp} и $v_{\Phi x}$ — групповая и фазовая скорости волн в системе, учитывая (10а) и (11), запишем $\text{Im } h_0 \Delta$ в развернутом виде:

$$\text{Im } h_0 \Delta = -\chi \frac{1}{d} \frac{1}{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2} \left(\frac{v_g}{c} \right)^2 \left(\frac{c}{v_{\text{grp}}} \right) \left(\frac{c}{v_{\Phi y}} \right) \frac{N_1^2 (N_1 - 2\pi n)}{8\pi n} \quad (20)$$

(c — скорость света в вакууме).

Выражение (20) определяет постоянную нарастания волны вдоль волновода. Видно, что усиление возможно только при слабой анизотропии системы, когда $-\tilde{Y}_{12} h_0 < n\pi/d$. $\text{Im } h_0 \Delta$ пропорциональна первой степени линейной плотности конвекционного тока пучка I_0 и становится тем больше, чем больше длина пространства взаимодействия. По-видимому, зависимость $\text{Im } h_0 \Delta$ от $(v_g/c)^2 (c/v_{\text{grp}})(c/v_{\Phi y})$ в такой форме является общей для приборов с взаимодействием в поперечном направлении [4].

В предельном случае $\tilde{Y}_{12} = 0$, $N_1 = \pi n$ получаем:

$$\text{Im } h_0 \Delta = \frac{I_0}{2V_0 - Y_{11} h_e} \frac{j\psi^2}{d} \frac{1}{8} \left(\frac{n\pi}{c} \right)^2 \left(\frac{v_g}{c} \right)^2 \left(\frac{c}{v_{\text{grp}}} \right) \left(\frac{c}{v_{\Phi y}} \right). \quad (21)$$

Формула (21) аналогична выражению (52) работы [4], описывающему усиление ЛПВ, в которой в качестве холодной системы использован прямоугольный волновод с изотропным диэлектриком. Нетрудно показать, что при $\tilde{Y}_{12} = 0$ выражение для $\text{Re } h_0 \Delta$ совпадает с соответствующим выражением работы [4].

Отметим, что в (21) в знаменателе стоит $1/8$ вместо $1/16$ в [4]. Расхождение определяется тем, что в настоящей работе учитывается вклад, вносимый волной, близкой к быстрой волне замедляющей системы x_{02} (а в предельном случае $\tilde{Y}_{12}=0$ — отраженной волной) в граничные условия для пучка на входе системы, т. е. $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ (см. (13)). Действительно, из (14) и (18) видно, что члены, умножаемые на α и β , являются величинами порядка χ и пренебрежение ими некорректно для ЛПВ в случае слабого усиления на участке взаимодействия.

Перейдем к рассмотрению синхронизации электронного потока с быстрой волной замедляющей системы

$$h_e = x_{02}, \quad (22)$$

которая возможна при сильной анизотропии. Решение ищем в виде

$$x = x_{02}(1 + \delta), \quad h = h_0(1 + \Delta). \quad (23)$$

Способом, аналогичным (9)–(10), получаем уравнение типа (11) с соответствующими коэффициентами. Решаем это уравнение совместно с уравнением типа (13), в котором N_1 заменено на $N_2 = x_{02} d$. В том же приближении для Δ получаем:

$$\Delta = \frac{\chi}{g_1 - g_2} \left\{ \left[-\frac{N_2^3}{12\pi n} + \frac{4N_2(N_2 + 2\pi n)(N_2 + \pi n)}{(2\pi n)^3} \right] - j \frac{N_2^2(N_2 + 2\pi n)}{(2\pi n)^2} \right\}, \quad (24)$$

так как $(g_1 - g_2) < 0$ (см. (10а)), $\operatorname{Im} h_0 \Delta > 0$. Следовательно, при синхронизации $h_e = x_{0_2}$ в ЛПВ, использующей прямоугольный волновод, можно ожидать усиления.

3. ПОЛОСКОВЫЙ ВОЛНОВОД

Этот случай отличается от рассмотренного в разделе 2 граничными условиями, которые надо брать в форме (7). Отсюда легко получить уравнение типа $\operatorname{Det} = 0$. Решая его совместно с уравнениями типа (11), полученными для двух возможных синхронизаций, способом, аналогичным (11)–(18), находим:

$$\Delta = \frac{\chi}{g_1 - g_2} \left[-\frac{N_{1,2}^3}{12\pi n} \mp j \frac{N_{1,2}^3}{(2\pi n)^2} \right]. \quad (25)$$

Здесь верхний знак соответствует синхронизации $h_e = x_{0_1}$, нижний — $h_e = x_{0_2}$. Согласно (10а) и (25), усиление возможно на первой синхронизации при любой анизотропии системы. Запишем $\operatorname{Im} h_0 \Delta > 0$ в форме:

$$\operatorname{Im} h_0 \Delta = \chi \frac{1}{d} \frac{1}{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2} \left(\frac{v_g}{c} \right)^2 \left(\frac{c}{v_{px}} \right) \left(\frac{c}{v_{py}} \right) \frac{N_1^3}{8\pi n}. \quad (26)$$

Видно, что усиление прибора тем больше, чем больше \tilde{Y}_{12} . При $\tilde{Y}_{12}=0$, как и в (21), получаем совпадение с [4]. Это следовало ожидать, так как механизм усиления, по-видимому, аналогичен указанному в [5] и связан с наличием стоячей волны вдоль оси y . При $\tilde{Y}_{12} \neq 0$ начинает дополнительно работать как бы новая ЛБВ, в результате общее усиление прибора возрастает. Различие между (19), (24) и (25) определяется влиянием граничных условий.

В заключение рассмотрим ЛПВ, работающую на вырожденной моде замедленной волны.

3. СЛУЧАЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ВОЛНЫ

При $n = 0$, согласно (3), $x_{0_{1,2}} = x_0 = -\tilde{Y}_{12}h_0$ и амплитуда поля не меняется вдоль y (5). В этом случае не представляет больших трудностей рассмотрение работы ЛПВ с „косым“ пучком (см. рис. 1). Учитывая действие сильного фокусирующего магнитного поля $B_0 = -B_0 l_0$, где l_0 — единичный вектор в направлении движения электронов, для режима малых амплитуд при пленочном электронном потоке дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$[x^2 + 2\tilde{Y}_{12}hx + \tilde{Y}_{11}h^2 + \tilde{B}][h_e - (h \cos \alpha + x \sin \alpha)]^2 = -\chi h_e^2 [h \cos \alpha + x \sin \alpha]^2. \quad (27)$$

Видно, что уравнение (2) получаем при $\alpha = \pi/2$. Для „косого“ пучка возможна синхронизация:

$$h_e = h_0 \cos \alpha + x_0 \sin \alpha. \quad (28)$$

Решение (27) ищем в виде:

$$x = x_0(1 + \delta); \quad h = h_0(1 + \Delta). \quad (29)$$

С точностью до членов, содержащих Δ только в первой степени, из (27)–(29) получаем:

$$\begin{aligned} \delta^4 - p\delta^3 + q\delta^2 + r\delta + t &= 0; \\ p &= 2\Delta(1 - \gamma); \quad q = 2\beta\Delta + \mu; \\ r &= 2\mu(1 + \gamma); \quad t = \mu(1 + \gamma)^2; \\ \mu &= \chi \sin^2 \alpha (1 + \gamma)^2; \quad \gamma = \frac{h_0}{x_0} \operatorname{ctg} \alpha; \quad \beta = \frac{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2}{\tilde{Y}_{12}^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

При слабом токе пучка $|\delta_i| \ll 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

В рассматриваемом случае из граничных условий (7) нетрудно получить уравнение типа $\operatorname{Det} = 0$. Решая его совместно с (30) способом, аналогичным (11)–(18), получаем следующую поправку к продольному волновому числу:

$$\Delta = \frac{\mu}{\beta} (1 + \gamma) \left[\frac{N^2}{12} (1 + \gamma) + j \frac{N}{4} \right], \quad (31)$$

где $N = x_0 d$. Запишем $\operatorname{Im} \Delta$ более подробно:

$$\operatorname{Im} \Delta = \chi \frac{h_0 d}{4} \frac{\sin^2 \alpha}{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2} [-\tilde{Y}_{12} + \operatorname{ctg} \alpha]^3. \quad (32)$$

Видно, что при постоянной амплитуде поля волны вдоль y усиление в ЛПВ возможно, если замедляющая система анизотропна или применен косой пучок.

В случае чисто поперечного тока, когда $\alpha = \pi/2$,

$$\operatorname{Im} \Delta = \chi \frac{\tilde{Y}_{12}^2}{\tilde{Y}_{11} - \tilde{Y}_{12}^2} \frac{N}{4}, \quad (33)$$

усиление определяется анизотропией системы; чем больше \tilde{Y}_{12} , тем больше $\operatorname{Im} \Delta$.

При $\tilde{Y}_{12} = 0$, $x_0 = 0$ получаем ЛБВ с косым пучком, в которой каждый электрон проходит путь $d/\sin \alpha$, где d — ширина системы. Если $\alpha \rightarrow 0$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (d/\sin \alpha) = L_{\text{ном}},$$

причем $L_{\text{ном}}$ достаточно мало*, получаем переход к короткой ЛБВ. Здесь, согласно (32),

$$\operatorname{Im} \Delta = \frac{I_0}{2V_0} \frac{j\psi^2}{Y_{11}h_e} \frac{N}{4}, \quad (34)$$

где $N = h_0 L_{\text{ном}}$.

Этот результат можно проверить, исходя из дисперсионного уравнения обычной ЛБВ [8]. Если при синхронизации $h_e = h_0$ искать решение в виде $h = h_0(1 + \delta)$ и понизить порядок уравнения, поделив его на $\delta - \delta_4$ (δ_4 — полученное с помощью формулы Ньютона значение удаленного корня, лежащего в окрестности $\delta \sim -2$), то, как нетрудно показать, кубическое уравнение будет иметь вид:

$$\delta^3 + \frac{1}{8} \chi \delta^2 + \frac{3}{4} \chi \delta + \frac{1}{2} \chi = 0, \quad (35)$$

где $\chi = I_0 K / 2V_0$, так что параметр Пирса $C^3 = \chi/2$.

* А именно, настолько мало, что ряд, представляющий экспоненту, быстро сходится.

Уравнение (35) является более точным, чем укороченное уравнение

$$\delta^3 = -C^3, \quad (35a)$$

которое используется в элементарной теории ЛБВ. Применение уравнения (35a) для оценки усиления ЛБВ малой длины недопустимо. Действительно, используя (35), можно показать, что усиление ЛБВ малой длины, определяемое совместным действием трех прямых волн, записывается

$$G = \left| \frac{V(x)}{V_0} \right| \simeq 1 + \chi \frac{N^2}{4} + 0(\chi^2), \quad (36)$$

где $N = h_0 x$. А при использовании уравнения (35a) получаем $G \simeq 1 + + \lambda \chi^2 N^6$, где λ — коэффициент пропорциональности. Учитывая (29), убеждаемся, что выражения (34) и (36) аналогичны. Поэтому содержащийся в работе [1] результат $\text{Im } \Delta \sim \chi^2 N^6$, описывающий усиление лампы в случае достаточно короткой длины пространства взаимодействия, неверен, так как в [1] используется уравнение, левая часть которого аналогична (35a).

В рассматриваемом приближении усиление ЛПВ пропорционально плотности тока пучка, что находится в соответствии с оценкой усиления ЛБВ малой длины.

Усиление ЛПВ тем больше, чем больше \tilde{Y}_{12} — анизотропия используемой замедляющей системы.

Получение предельного перехода от лампы с поперечным взаимодействием к короткой ЛБВ, совпадение с результатами работы [4], в которой рассматривается холодная система с хорошо известными свойствами (прямоугольный волновод, заполненный изотропным диэлектриком), указывает на возможность применения телеграфных уравнений к расчету взаимодействия электронных потоков с двухмерными замедляющими системами.

Изложенные выше результаты исследования модели ЛПВ типа „О“ получены в приближении слабого тока пучка для достаточно узких замедляющих систем. Представляет определенный интерес дальнейшее исследование ЛПВ в случае широких замедляющих систем [7] и учет влияния пространственного заряда пучка.

Автор глубоко признателен А. В. Гапонову за предложенную тему и большое внимание к проделанной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Dunn, W. A. Hartman, L. M. Field, G. S. Kino, Proc. IRE, **44**, 879 (1956).
2. D. A. Dunn, W. A. Hartman, Proc. IRE, **44**, 888 (1956).
3. G. Moigne, L'onde e'lectr., **38**, 371, 95 (1958).
4. Л. Н. Лошаков, Радиотехника и электроника, **5**, 1448 (1960).
5. Л. Н. Лошаков, Радиотехника и электроника, **6**, 767 (1961).
6. Л. Н. Лошаков, Радиотехника и электроника, **6**, 2012 (1961).
7. А. В. Гапонов, Доклад на сессии Научно-технического общества радиотехники и электроники им. А. С. Попова, М., 1961; см. также Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
8. Д. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1953.

TO THE THEORY OF THE TUBE WITH TRANSVERSE INTERACTION

R. A. Doudnik

The dispersion equation of the tube with transverse interaction is considered for the regime of small amplitudes and beam current. The amplification factor of the tube is calculated in the case of sufficiently slow-wave narrow system Comparison with short TWT is carried out.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНХРОТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ УСКОРЯЕМЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ ПО ПОЛОЖЕНИЮ ПУЧКА

B. A. Бертулис

Рассматривается дифференциальное уравнение возмущаемых нелинейных синхротронных колебаний. Анализируется выбор параметров ускорителя и элементов системы обратных связей по положению ускоряемого пучка заряженных частиц.

В резонансных циклических ускорителях синхротронные колебания ускоряемых частиц возникают из-за разброса энергии и начальных фаз при инжекции, из-за квантовых флюктуаций излучения, из-за паразитных изменений частоты и амплитуды ускоряющего напряжения, а также технических пульсаций магнитного поля. Допуски на амплитуду и частоту ускоряющего напряжения и на напряженность магнитного поля определяются с учетом допустимой части потерь ускоряемых частиц. Особенно жесткие требования к допускам магнитного и радиочастотного электрического полей устанавливаются для сильнофокусирующих ускорителей.

Эффективным средством повышения интенсивности пучка ускоряемых частиц и ослабления допусков на параметры технических устройств служат следящие системы, которые, измеряя фазовое положение частиц относительно равновесного, соответствующим образом корректируют ускоряющее поле [1-4]. Теоретические исследования влияния корректирующего устройства на динамику ускоряемых частиц, проведенные в работах [5, 6], не учитывают несимметричность нелинейного колебательного процесса, а также инерционность и некоторые другие динамические свойства элементов, входящих в систему обратной связи. В настоящей статье дается анализ нелинейных синхротронных колебаний, описываемых дифференциальным уравнением вида

$$M(p)\psi + N(p)F(\psi) = H(p)[h(t) + g(t) - g_k(t)], \quad p \equiv \frac{d}{dt} \quad (1)$$

или в простейшем случае вида

$$(p^2 + 2\gamma_1 p)\psi - \Omega_b^2 (\sin \psi_{cm} - \sin \psi) = H(p)[h(t) + g(t) - g_k(t)]. \quad (2)$$

Сигнал $g_k(t)$ системы обратной связи зависит от коэффициента усиления k_y и динамических параметров, определяющих память системы. Учитываемая нелинейность дифференциального уравнения имеет форму

$$F(\psi) = \sin \psi_{cm} - \sin \psi = \sin \psi_{cm} - \psi + \frac{1}{6}\psi^3 - \frac{1}{120}\psi^5 + \dots \quad (3)$$

При анализе нелинейных процессов дифференциальное уравнение колебательного движения частиц в резонанском циклическом ускорителе условно разделяется на „приведенную“ линейную часть $W_1(p)$ и нелинейность $F(\psi)$. Структурная схема ускорителя с учетом системы

обратных связей $W_2(p)$, корректирующей частоту ускоряющего напряжения, изображена на рис. 1.

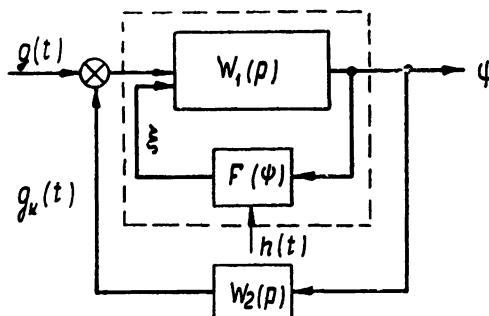


Рис. 1.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ СИНХРОТРОННЫХ ФАЗОВЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Нелинейные преобразования колебательного процесса представляют собой результат последовательного проведения нелинейного преобразования без памяти и линейного преобразования (линейной фильтрации).

Решение предполагается в виде смещенной синусоиды

$$\psi = \psi_{\text{см}} + \psi_a = \psi_{\text{см}} + a \sin \theta, \quad (4)$$

$$\frac{da}{dt} = -a \gamma_1, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

где $\psi_{\text{см}}$ — значение равновесной фазы в ускоряющем поле (рис. 2), a — амплитудное значение отклонения ускоряемых частиц от равновесной фазы.

Адиабатическая составляющая $\psi_{\text{см}}$ придает процессу на выходе нелинейности несимметричный характер, который искажает колебательный процесс. В результате этого переменная ξ на выходе нелинейности получает явно выраженный несинусоидальный характер уже при малых значениях амплитуды колебаний. В дальнейшем принимается, что линейная часть ускорителя

$$W_1(p) = \frac{N(p)}{M(p)}, \quad (5)$$

обладая свойством обобщенного фильтра

$$\left| \frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} \right| \gg \left| \frac{N(kj\omega)}{M(kj\omega)} \right| \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (6)$$

сильно подавляет амплитуды всех высших гармоник. Так как высшие гармоники переменной ξ не оказывают влияния на изучаемый процесс ψ , то отпадает необходимость их учета.

Будем считать, что нелинейность $F(\psi)$ усиливает первую гармонику колебательного процесса ψ в q раз, а постоянная составляющая на выходе нелинейности принимает значение $F_{\text{см}}$. Тогда гармонический коэффициент усиления можем записать в виде

$$q = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \left(\sin \psi_{\text{см}} - \psi + \frac{1}{6} \psi^3 - \frac{1}{120} \psi^5 + \dots \right) \sin \theta d\theta = 1 - \frac{1}{2} \psi_{\text{см}}^2 - \frac{1}{8} a^2 + \frac{1}{24} \psi_{\text{см}}^4 + \frac{1}{16} a^2 \psi_{\text{см}}^2 + \frac{1}{192} a^4 - \dots \simeq 1 - \frac{1}{2} \psi_{\text{см}}^2 - \frac{1}{8} a^2. \quad (7)$$

Постоянная составляющая координаты ξ

$$\begin{aligned} F_{\text{см}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sin \psi_{\text{см}} - \psi + \frac{1}{6} \psi^3 - \frac{1}{120} \psi^5 + \dots \right) d\theta = \\ &= \sin \psi_{\text{см}} - \psi_{\text{см}} \left(1 - \frac{1}{6} \psi_{\text{см}}^2 - \frac{1}{12} a^2 + \frac{1}{120} \psi_{\text{см}}^4 + \frac{1}{24} a^2 \psi_{\text{см}}^2 + \frac{1}{64} a^4 - \dots \right) \simeq (8) \\ &\simeq \sin \psi_{\text{см}} - \psi_{\text{см}} \left(1 - \frac{1}{6} \psi_{\text{см}}^2 - \frac{1}{12} a^2 \right). \end{aligned}$$

На выходе нелинейности (3) имеем гармонически линеаризованный процесс

$$\xi_1 = F(\psi_1) = F_{\text{см}} + q \psi_\alpha. \quad (9)$$

Смещение колебательного процесса энергетически невозможно без адиабатической составляющей внешнего воздействия $h(t)$. Тогда дифференциальное уравнение процесса ускорения представляется в следующем гармонически линеаризованном виде:

$$M(p)(\psi_{\text{см}} + \psi_\alpha) + N(p)(F_{\text{см}} + q \psi_\alpha) = H(p) h(t). \quad (10)$$

Учитывая большое различие в частотах изменения переменных $\psi_{\text{см}}, h(t)$ по сравнению с колебательной составляющей движения ψ_α , данное уравнение разделяем на два связанные через величины $F_{\text{см}}$ и q уравнения:

$$M(p)\psi_{\text{см}} + N(p)F_{\text{см}} = H(p)h(t), \quad (11)$$

$$M(p)\psi_\alpha + N(p)q\psi_\alpha = 0. \quad (12)$$

Синхротронные колебания, описываемые нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка типа (12), исследовались методом гармонической линеаризации в работе [7], которая нами была получена при корректировании рукописи. В отличие от работы [7], дифференциальное уравнение (10) или система уравнений (11) и (12), характеризующие процесс ускорения, содержат несимметричную нелинейность $F(\psi)$, позволяющую изучать синхротронные колебания при адиабатическом изменении $h(t)$ скорости роста управляющего магнитного поля и изменении интенсивности радиационных излучений. Вместе с тем $\sin \psi$, входящий в нелинейность, разложен в степенной ряд для того, чтобы избежать в выражениях функции смещения $F_{\text{см}}$ и гармонического коэффициента усиления q рядов, содержащих бесселевые функции. В аналогичных выражениях (8) и (7) полученные степенные ряды, по нашему мнению, дают большую наглядность при обсуждении интересующих вопросов. Учет трех членов разложения $\sin \psi$ обеспечивает хорошую точность; приближенный характер результатов, полу-

чаемых методом гармонической линеаризации, обусловлен идеализацией условия (6) для обобщенного фильтра.

Для учета влияния на синхротронные колебания внешнего возмущения $g(t)$ разделяем спектр помех на несколько частей: низкочастотную часть, резонансную часть и высокочастотные шумы. Низкочастотные паразитные изменения параметров ускоряющего напряжения и магнитного поля приводят к медленному изменению адиабатических величин $h(t)$ и Φ_{cm} . Таким образом, низкочастотные помехи вызовут прирост ψ_{cm}^{cl} значения равновесной фазы (рис. 2).

Если стационарная случайная помеха характеризуется двумя первыми вероятностными моментами (математическим ожиданием и дисперсией), то из-за нелинейной структуры ускорителя определение случайных составляющих равновесной фазы и колебательного процесса связано с высшими вероятностными моментами. Ввиду замкнутости структурной схемы ускорителя линейная часть сглаживает высшие вероятностные моменты. Учет усиления в нелинейности $F(\psi)$ только первых вероятностных моментов означает статистическую линеаризацию.

Функция смещения с учетом низкочастотного случайного прироста значения равновесной фазы определяется [8] по формуле математического ожидания

$$F_{cm,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M'[F(\psi_n)] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin \psi_{cm} - \psi + \frac{1}{6} \psi^3 - \right. \\ \left. - \frac{1}{120} \psi^5 + \dots \right) w(\psi_{cm}^{cl}) d\psi, \quad (13)$$

где $M' []$ — символ математического ожидания, $w(\psi_{cm}^{cl})$ — дифференциальный закон распределения случайной составляющей.

Низкочастотные помехи, не раскачивая синхротронных колебаний, путем изменений значения равновесной фазы сильно изменяют несимметричность нелинейности. В результате этого гармонический коэффициент усиления приобретает форму (7) при подстановке вместо Φ_{cm} величины $\Phi_{cm} + \psi_{cm}^{cl}$. Так как низкочастотные помехи заметно не влияют на синхротронные колебания, то система обратной связи для коррекции ускоряющего напряжения по положению центра пучка практически не реагирует на действие этих помех. Заметим, что шумовые помехи, спектр которых выше частоты синхротронных колебаний, влияют на работу системы обратной связи только путем изменения чувствительности элементов.

Большое значение при исследовании системы коррекции синхротронных колебаний по положению центра пучка имеет анализ влияния на процесс ускорения резонансных внешних воздействий, спектр которых расположен вблизи частоты $\omega_m(t)$ синхротронных колебаний. Резонансные помехи изменяют как медленно меняющуюся равновесную фазу, так и колебательную составляющую процесса. При учете резонансных помех процесс ускорения можно представить в виде

$$\psi_p = \psi_{cm} + \psi_{cm}^{cl} + a \sin \theta, \quad (14)$$

где $\psi_{cm}^{cl} + a \sin \theta$ рассматривается в целом как единый случайный процесс [9].

Функция смещения, определяющая несимметричность нелинейности, выражается равенством

$$F_{\text{см}\ p} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} F(\psi_p) d\psi_p w_c(\psi_p^{\text{сл}}), \quad (15)$$

где

$$w_c(\psi_p^{\text{сл}}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi w(\psi_c^{\text{сл}} + a \sin \theta) d\theta. \quad (16)$$

В этом случае гармонический коэффициент усиления заменяется эквивалентным

$$q^{\text{экв}} = \frac{q^{\text{ст}} + 2\sigma_p^2 q^{\text{сп}}/a^2}{1 + 2\sigma_p^2/a^2}, \quad (17)$$

определенным из условия минимума среднеквадратичного отклонения заменяющей функции исходной

$$M'[(F(\psi) - F_{\text{см}\ p} - q^{\text{экв}} \psi_a)^2].$$

В формуле (17) статистический коэффициент усиления учитывает непосредственное воздействие резонансной случайной помехи на амплитуду колебательного процесса

$$q^{\text{ст}} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_{-\infty}^{\infty} F(\psi_p) w(\psi_p^{\text{сл}}) d\psi_p,$$

а усредненный коэффициент усиления учитывает изменение амплитуды первой гармоники колебаний из-за случайного отклонения равновесной фазы $\psi_{\text{см}}$, влияющей на несимметричность нелинейности

$$q^{\text{сп}} = \frac{1}{\pi \sigma_p^2} \int_0^\pi F(\psi_p) \psi_p w(\psi_p) d\psi_p.$$

Считая дифференциальный закон распределения случайной составляющей процесса нормальным, имеем формулу

$$w(\psi) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\psi - \psi_{\text{см}})^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (18)$$

Дисперсию случайной составляющей процесса ускорения можем получить на основании уравнения (1) в следующем виде:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0^2(j\omega) S_b(\omega) d\omega, \quad (19)$$

где $S_b(\omega)$ — спектральная плотность внешних возмущений $g(t)$ учитываемого диапазона частот,

$$W_0(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{M(j\omega) + F(\psi) N(j\omega)/\psi} \quad (20)$$

— частотная характеристика ускорителя.

В системе управления процессом ускорения заряженных частиц внешние возмущения часто имеют явно выраженный периодический характер. Эти помехи могут быть вызванными реакцией пучка частиц

при совершении синхротронных колебаний. Так как исследование влияния на процесс ускорения случайного внешнего воздействия связано с трудностями вычислительного характера, то часто целесообразно узкополосную помеху выразить гармонической функцией

$$g_2(t) = B \sin(\omega_d t).$$

Пусть возмущаемый процесс ускорения при этом имеет вид

$$\psi_d = \psi_{cm} + a_d \sin(\omega_d t + \varphi_d). \quad (21)$$

Выражая переменную $g(t)$ равенством

$$g_2(t) = B \sin[(\omega_d t + \varphi_d) - \varphi_d] = B \cos \varphi_d \sin(\omega_d t + \varphi_d) - B \sin \varphi_d \cos(\omega_d t + \varphi_d)$$

и производную процесса (21)—формулой

$$\frac{d\psi_d}{dt} = a_d \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi_d),$$

запишем внешнее возмущение таким образом:

$$g_2(t) = \frac{B}{a_d} \left(\cos \varphi_d - \frac{\sin \varphi_d}{\omega_d} p \right) a_d \sin(\omega_d t + \varphi_d). \quad (22)$$

Аналогично (10), дифференциальное уравнение, описывающее возмущаемый процесс ускорения, приобретает вид:

$$M(p)(\psi_{cm} + \psi_a) + N(p)(F_{cm} + q\psi_a) = H(p)[h(t) + g(t)]. \quad (23)$$

Если функция $g(t)$ имеет случайный характер со спектром, близким к частоте синхротронных колебаний, то, учитывая большое различие частот составляющих движения ψ_{cm} и ψ_a , на основании формул (15) и (17) можем записать для уравнения (23) систему взаимосвязанных уравнений:

$$M(p)\psi_{cm} + N(p)F_{cm}p = H(p)h(t), \quad (24)$$

$$M(p)\psi_a + N(p)q^{9KB}\psi_a = 0. \quad (25)$$

При учете только гармонического возмущения синхротронные колебания описываются уравнением

$$\left[M(p) - H(p) \frac{B}{a_d} \left(\cos \varphi_d - \frac{\sin \varphi_d}{\omega_d} p \right) + N(p)q \right] a_d \sin(\omega_d t + \varphi_d) = 0. \quad (26)$$

Согласно однородным уравнениям (12), (25), (26), как свободные, так и возмущаемые синхротронные колебания могут быть исследованы при помощи соответствующего характеристического уравнения.

2. СИСТЕМА КОРРЕКЦИИ УСКОРЯЮЩЕГО ПОЛЯ ПО ПОЛОЖЕНИЮ ЦЕНТРА ЧАСТИЦ

Внешние возмущения ускоряющего напряжения и управляющего магнитного поля приводят к тому, что центр пучка, образовавшегося около старого значения равновесной фазы, получает импульс энергии, не соответствующий новому мгновенному значению равновесной фазы. Система коррекции ускоряющего напряжения строится таким образом, чтобы центр пучка совершал синхротронные колебания с минимальными значениями амплитуды. В корректируемом по положению пучка ускорителе центр пучка сразу начинает совершать синхротронные колебания не около нового мгновенного значения равновесной фазы, а около промежуточных значений, приближающихся к новому.

Датчикам, измеряющим фазовые и радиальные отклонения центра пучка, предъявляются соответствующие требования точности и быстродействия. Ток в цепи индикаторов и приемника пропорционален скорости изменения заряда пучка вблизи чувствительных элементов:

$$i_s(t) = C_1 \frac{dq_s}{dt}. \quad (27)$$

Считая заряд q_s одного пучка ускоряемых частиц распределенным вдоль оси камеры по нормальному закону, получим напряжение на входе приемника в виде серии импульсов

$$U_s(t) = r_1 i_s(t) = C_s \frac{q_s}{\sigma_s^2} (\omega_p t - \pi/q_a) \exp\left\{-\frac{(\omega_p t - \pi/q_a)^2}{2\sigma_s^2}\right\}, \quad \omega_p t \leq \frac{2\pi}{q_a}, \quad (28)$$

где q_a — кратность частоты ω_p ускоряющего поля частоте обращения частиц, σ_s^2 — дисперсия частиц в пучке, r_1 — входное сопротивление приемника.

Датчики, обладая определенной инерционностью и другими частотными и структурными свойствами, преобразуют серию импульсов $U_s(t)$ в информацию о положении центра частиц. Датчик фазового положения содержит, кроме звена, сигнализирующего о моменте появления частиц вблизи чувствительных элементов, звено, измеряющее скорость роста магнитного поля и интенсивность излучения; последние определяют равновесную фазу ψ_{cm} .

Высокочастотные флюктуации, которые практически не влияют на колебательный процесс, сглаживаются в датчике, инерционность которого в основном определяется детекторным каскадом. Так как постоянная времени T_u детектора значительно выше постоянных времени других каскадов, то напряжение $U_d(t)$ на выходе датчика связано с входным $U_\phi(t)$ через дифференциальное уравнение первого порядка:

$$T_u \frac{dU_d}{dt} + U_d(t) = k_d U_\phi(t), \quad (29)$$

где k_d — коэффициент усиления. Передаточная функция датчика

$$K_u(p) = \frac{k_d}{T_u p + 1}. \quad (30)$$

Для получения частотной модуляции ускоряющего напряжения необходимо изменять емкость или индуктивность контура автогенератора в соответствии с напряжением датчика. Изменения емкости или индуктивности могут быть осуществлены с помощью реактивных пентодов, полупроводниковых диодов и триодов, ферритовых сердечников в индуктивных катушках, сегнетоэлектриков в конденсаторах и т. п. Добавочные реактивные элементы должны обеспечивать высокую стабильность средней частоты ω_p ускоряющего напряжения. Тогда регулируемая частота

$$\omega_d(t) = \omega_p + \omega_c(t).$$

Сигнал датчика пропорционален колебательной составляющей движения; следовательно,

$$\omega_d(t) = \omega_p [1 + m \cos(\omega_m t)] \quad (31)$$

и напряжение генератора имеет вид

$$U_c(t) = U_{co} \sin [\omega_p t + \beta_1 \sin(\omega_m t) + \varphi_1]$$

или

$$U_c(t) = U_{c_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1) \sin (\omega_p t + n \omega_m t + \varphi_1), \quad (32)$$

где $J_n(\beta_1)$ — функция Бесселя n -го порядка. Величины

$$m = \omega_{c \text{ макс}} / \omega_p, \quad \beta_1 = \omega_p m / \omega_m = \omega_{c \text{ макс}} / \omega_m$$

носят название глубины и индекса модуляции, $\omega_c(t)$ — отклонения или девиации частоты.

Считая модуляционную характеристику исполнительного звена линейной и ограничиваясь учетом первого слагаемого ряда (32), получаем связь между девиацией частоты и модулирующим напряжением $U_{\text{ин}}(t)$ в виде

$$T_m \frac{d \omega_c}{dt} + \omega_c(t) = k_m U_{\text{ин}}(t), \quad (33)$$

где T_m , k_m — постоянная времени и коэффициент усиления частотного модулятора. Для передаточной функции модулятора справедливо выражение

$$K_m(p) = \frac{k_m}{T_m p + 1}. \quad (34)$$

С помощью реактивных элементов, вводимых последовательно в систему обратных связей, можно достичь любого быстродействия и более эффективного подавления синхротронных колебаний центра пучка. Однако при высоких значениях быстродействия и коэффициента усиления система теряет устойчивость.

При изменении частоты генератора меняется и амплитуда ускоряющего напряжения. Зависимость этой амплитуды от частоты дается

характеристикой реального резонатора. Если частота ω_p ускоряющего напряжения несколько выше резонансной частоты ω_0 резонатора, то мгновенное отставание центра частиц компенсируется не только мгновенным удлинением периода, но и несколько увеличенной при этом амплитудой ускоряющего напряжения. Эффективность коррекции за счет увеличения амплитуды при удлинении периода напряжения повышается с ростом добротности резонатора. Коэффициент усиления k_m и постоянная времени T_m исполнительного звена зависят также и от добротности резонатора. Смещение равновесной фазы при

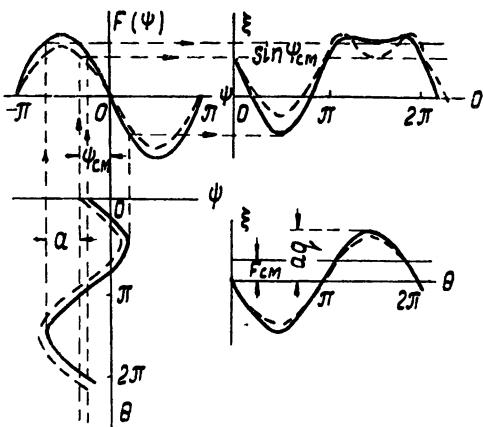


Рис. 3.

изменении амплитуды ускоряющего напряжения показано на рис. 3. Аналогичное смещение равновесной фазы имеет место и при изменении частоты ускоряющего напряжения.

Для достижения желаемого быстродействия в системе коррекции частоты $\omega_c(t)$, более плавного смещения центра пучка с одного значения равновесной фазы в другое и для обеспечения устойчивости про-

цесса в систему обратной связи включается оптимизирующее звено с передаточной функцией $W_3(p)$. Учитывая формулы (30) и (34), передаточную функцию системы обратных связей можем записать в виде:

$$W_2(p) = \frac{g_k(p)}{\psi_a(p)} = K_u(p) K_m(p) W_3(p) = \frac{k_u k_m W_3(p)}{(T_u p + 1)(T_m p + 1)}. \quad (35)$$

Зависимость процесса ускорения $\psi(t)$ от паразитных внешних воздействий $g(t)$ в корректируемом по положению пучка ускорителе характеризуется передаточной функцией замкнутой системы

$$\Phi_c(p) = \frac{\psi(p)}{g(p)} = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p) W_2(p)}, \quad (36)$$

где передаточная функция $W_0(p)$ ускорителя без системы коррекции аналогична частотной характеристике (20). Так как датчик реагирует только на колебательную составляющую движения центра пучка, то на основании формулы (36) имеем:

$$\frac{1}{W_0(p)} \psi(t) + W_2(p) \psi_a(t) = h(t) + g(t)$$

или

$$M(p) \psi + N(p) \psi + H(p) W_2(p) \psi_a = H(p)[h(t) + g(t)]. \quad (37)$$

Используя функцию смещения (15) и формулу эквивалентного коэффициента усиления (17), а также учитывая большое различие в частотах переменных, для уравнения (37) можем записать:

$$M(p) \psi_{cm} + N(p) F_{cm} p = H(p) h(t); \quad (38)$$

$$[M(p) + H(p) W_2(p)] \psi_a + N(p) q^{ekb} \psi_a = 0. \quad (39)$$

Полученные уравнения взаимосвязаны через величины $F_{cm} p$ и q^{ekb} ,

3. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УСКОРЕНИЯ¹

Допустимая величина амплитуды синхротронных колебаний ускоряемых частиц главным образом определяется энергией, получаемой частицами в положении максимального отставания от фазы ψ_{cm} . Это положение иллюстрируется максимальными провалами во втором полупериоде кривой $\xi(t)$ (рис. 2 и 3). При увеличении амплитуды синхротронных колебаний или значения равновесной фазы эти провалы увеличиваются. Если провалы кривых (сплошные кривые на рис. 2, 3) не достигают линий $\xi = \sin \psi_{cm}$, то частицы участвуют в процессе ускорения. Если же упомянутые провалы пересекают линии $\xi = \sin \psi_{cm}$ (прерывистые кривые), то частицы выпадают из процесса ускорения.

Устойчивость системы определяется по характеристическому уравнению. Эквивалентные характеристические уравнения, описывающие колебательные составляющие процесса ускорения, могут быть получены из соответствующих однородных дифференциальных уравнений. Устойчивые синхротронные колебания возможны только в том случае, когда вещественные части всех корней характеристического уравнения имеют отрицательные значения. Если существует одна пара чисто мнимых корней, а остальные корни имеют отрицательные вещественные части, то колебательный процесс находится на грани устойчивости. На этих положениях основаны критерии устойчивости Гурвица, Михайлова, Найквиста и другие.

Принятое условие (6) не позволяет получить достаточно точных

результатов. Для уточнения границы устойчивости нужно предположить, что кроме первой гармоники процесс ускорения содержит несколько высших. Считая, что процесс ускорения содержит только первую смещенную гармонику колебаний, для системы, описываемой дифференциальным уравнением (2), без учета внешних воздействий получаем условие устойчивости:

$$q = 1 - \frac{1}{2} \psi_{cm}^2 - \frac{1}{8} a^2 + \frac{1}{24} \psi_{cm}^4 + \frac{1}{16} a^2 \psi_{cm}^2 + \dots \geq 0. \quad (40)$$

При исследовании колебательного процесса на электронном моделирующем устройстве условие (6) не является необходимым, так как блок безынерционной нелинейности преобразует полный процесс $\Phi(t)$, а не только первую гармонику, учитываемую методом гармонической линеаризации. Учитывая высшие гармоники на входе нелинейности, можем получить область устойчивости в форме

$$D_q \simeq 1 - \frac{2}{\pi} |\psi_{cm}| - \frac{1}{\pi} a \geq 0, \quad (41)$$

правильность которой подтверждается и на моделирующей машине.

Полученные однородные дифференциальные уравнения (12), (25), (26) и (39) позволяют определить также частоту, коэффициент затухания колебаний и некоторые другие величины. Если по техническим соображениям однозначно выбирается большинство параметров ускорителя, то для обеспечения нормального ускорения частиц путем анализа определяются оптимальные значения остальных параметров.

Автор глубоко благодарен научному руководителю А. А. Воробьеву, по инициативе которого проводилась работа, а также сотрудникам сектора сверхвысокочастотной техники НИИ при Томском политехническом институте за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Воробьев, Изв. высш. уч. зав.—Электромеханика, 5, 92 (1958).
2. Дж. Адамс, Атомная техника за рубежом, 9, 3 (1960).
3. Э. Л. Бурштейн, А. А. Васильев, А. Л. Минц, В. А. Петухов, С. М. Рубчинский, Атомная энергия, 12, 103 (1962).
4. Э. Л. Бурштейн, Ю. С. Иванов, А. А. Кузьмин, Приборы и техника эксперимента, 4, 102 (1962).
5. K. Johnson, C. Schmelzer, CERN Symposium, 1, 395 (1956).
6. Э. Л. Бурштейн, Н. Е. Белов, Научные труды РАИАН СССР, 1, 3 (1959).
7. Н. Л. Сосенский, Научные труды РАИАН СССР, 3, 72 (1961).
8. Е. П. Попов, И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных систем, ГИФМЛ, М., 1960.
9. А. А. Первозванский, Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, ГИФМЛ, М., 1962.

Поступила в редакцию
11 августа 1962 г.

INVESTIGATION OF ACCELERATED PARTICLES SYNCHROTRON OSCILLATIONS CONSIDERING BEAM POSITION FEEDBACKS

V. A. Bertoulis

Differential equation of the excited nonlinear synchrotron oscillations is considered. The choice of the accelerator parameters is analysed as well as the system elements of the accelerated beam feedbacks.

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ЗАВИСИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОТ ПАРАМЕТРОВ

В. А. Брусин, Ю. И. Неймарк, М. И. Фейгин

Исследуются некоторые случаи зависимости периодических движений релейной системы от параметров. Полученные результаты иллюстрируются на примере вынужденных колебаний осциллятора с сухим трением и бифуркаций простейшего симметричного периодического движения.

Как известно [1, 2], исследование периодических движений релейной системы сводится к изучению неподвижных точек точечных отображений вида

$$T_{i_m i_{m-1} \dots} T_{i_2 i_3} T_{i_1 i_2}, \quad (1)$$

где каждое из точечных отображений $T_{i_s i_{s+1}}$ соответствует либо переходу фазовой точки с поверхности переключения реле на нее же, либо переходу фазовой точки „пластинки“ скользящих движений в ее край. Бифуркациям периодических движений соответствуют либо бифуркации неподвижных точек точечного отображения (1), либо переход неподвижных точек точечного отображения (1) на границу области его определения. Рассмотрение бифуркаций первого типа не представляет труда, поскольку оно непосредственно сводится к применению общих теорем о бифуркациях неподвижных точек точечного отображения.

В настоящей работе исследуются бифуркации второго типа. В разделе 1 устанавливаются законы „существования“ областей определения различных точечных отображений и показывается, что в рассматриваемом типе перехода от одного точечного преобразования к другому сохраняется непрерывность отображения. В разделе 2 выясняется характер зависимости от параметров неподвижных точек кусочно-гладкого точечного отображения. В третьем разделе выясняются правила перехода одних периодических движений релейной системы в другие. В четвертом разделе подробно рассматривается бифуркация простейшего симметричного периодического движения в периодическое движение со скользящим движением. И, наконец, в разделе 5 полученные результаты иллюстрируются на примере исследования вынужденных колебаний осциллятора с сухим трением,

1. Рассмотрим неавтономную релейную систему, у которой линейное звено имеет коэффициент передачи $K(p)$, представимый в виде

$$K(p) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p - \lambda_i}, \quad (1.1)$$

а реле имеет несимметричную характеристику

$$x = \Omega(y) = \begin{cases} H & (y > 0) \\ h & (y < 0) \end{cases}, \quad (1.2)$$

где ради определенности примем, что $H > h$. Внешнее периодическое воздействие $f(t)$ предполагается периодическим и приложенным к входу реле.

Как известно, фазовое пространство такой релейной системы (пространство переменных y_1, \dots, y_n и времени t) разбивается поверхностью реле Π

$$y = \sum y_i + f(t) = 0 \quad (1.3)$$

на два полупространства $G_+(y > 0)$ и $G_-(y < 0)$, в каждом из которых уравнения имеют вид

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + c_i \Omega(y) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

При выполнении условия

$$c = \sum c_i < 0$$

поверхность переключения реле Π разбивается на три части: часть Π_{+-}

$$\sum \dot{y}_i + f(t) = 0, \quad \sum \lambda_i y_i + Hc + \dot{f}(t) > 0, \quad (1.5)$$

сквозь которую проходят фазовые траектории, идущие из полупространства G_+ в G_- , часть Π_{-+}

$$\sum y_i + f(t) = 0, \quad \sum \lambda_i y_i + hc + \dot{f}(t) < 0, \quad (1.6)$$

сквозь которую проходят фазовые траектории, идущие из G_- в G_+ , и „пластинки“ скользящих движений Π_s

$$\sum y_i + f(t) = 0, \quad -hc < \sum \lambda_i y_i + \dot{f}(t) < -Hc. \quad (1.7)$$

Уравнения движения на пластинке Π_s имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \lambda_i y_i + c_i x; \\ y = \sum y_i + f(t) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Прекращение скользящего движения, описываемого уравнениями (1.8), может произойти лишь при достижении фазовой точкой одного из краев пластинки скользящих движений, т. е. при переходе одного из неравенств (1.7) в равенство. Заметим, что величина x на пластинке Π_s заключена между h и H и обращается в h и H на ее краях. Поэтому при $h < x < H$ имеет место скользящее движение, а при $x=h$ или $x=H$ фазовая точка приходит на край пластинки скользящих движений. Сход фазовой точки с края пластинки скользящих движений в полупространство $G_+(G_-)$ имеет место, если в силу уравнения (1.8) x становится больше H (меньше h).

Выясним поведение фазовых траекторий вблизи краев пластинки скользящих движений. Согласно уравнениям (1.4), (1.8), в полупространствах G_+ и G_- и соответственно на пластинке скользящих движений Π_s

$$\dot{y} = \sum \lambda_i y_i + c \Omega(y) + \dot{f}(t);$$

$$\ddot{y} = \sum \lambda_i^2 y_i + \sum \lambda_i c_i \Omega(y) + \ddot{f}(t); \quad (1.9)$$

$$\dddot{y} = \sum \lambda_i^3 y_i + \sum \lambda_i^2 c_i \Omega(y) + \ddot{f}(t);$$

$$\begin{aligned} c\dot{x} &= - \sum \lambda_i^2 y_i - \sum \lambda_i c_i x - \ddot{f}(t); \\ c\ddot{x} &= - \sum \lambda_i^3 y_i - \sum \lambda_i^2 c_i x - \ddot{f}(t) - \sum \lambda_i c_i \dot{x}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для определенности ограничимся краем $x = H$. В окрестности этого края, принадлежащей пространству G_- , все фазовые траектории подходят к плоскости переключения реле.

Ход траекторий в G_+ несколько более сложен. При приближении к краю $x = H$ из G_+ величина y обращается в нуль и $\ddot{y} = -c\dot{x}$. Поэтому в окрестности участка края $x = H$, на котором \ddot{y} не обращается в нуль, возможно (в зависимости от знака \ddot{y}) два случая поведения фазовых траекторий, изображенных на рис. 1а и 1б.

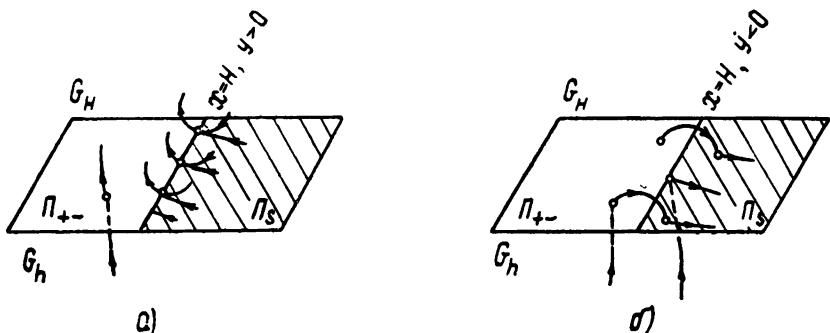


Рис. 1.

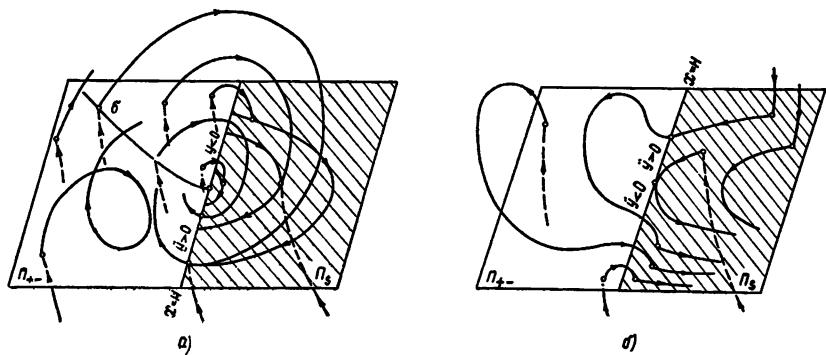


Рис. 2.

В точках, разделяющих эти случаи, $\ddot{y} = 0$ и поведение фазовых траекторий зависит от знака \ddot{y} , совпадающего, в силу (1.9) и (1.10), со знаком $c\dot{x}$. Возможные виды поведения фазовых траекторий в полупространстве G_+ и на пластинке Π_s в окрестности точек края, в которых $\ddot{y} = 0$, но $y \neq 0$, показаны на рис. 2. В случае, когда $\ddot{y} > 0$ (рис. 2а), на Π_{-+} существует кривая σ , разделяющая точки, на которых фазовые кривые идут на Π_s , от точек, из которых фазовые кривые уходят в G_+ . Фазовые траектории, выходящие из точек σ , приходят на край $x = H$, $y > 0$. В случае $\ddot{y} < 0$ (рис. 2б) все точки Π_{-+} , близкие к рассматриваемому участку края $x = H$, переводятся фазовыми траекториями в точки Π_s ; при этом точки края $x = H$, $y < 0$ пе-

рекходят в себя, а точки края $x=H$, $y<0$ —в точки некоторой кривой на пластинке Π_s .

Фазовые траектории релейной системы определяют на плоскости переключения Π ряд точечных отображений. Припишем областям Π_{-+} , Π_{+-} и Π_s индексы 1, 3 и 2 соответственно и обозначим через T_{ij} преобразование, переводящее точки области i в точки области j . При этом T_{2j} есть отображение точек пластинки Π_s либо в край $x=H$, если $j=1$, либо в край $x=h$, если $j=3$. Пусть точка M_1 плоскости Π принадлежит области определения точечного отображения $T_{i_1 i_2}$ и преобразуется им в точку M_2 , принадлежащую области определения отображения $T_{i_2 i_3}$. Отображение $T_{i_2 i_3}$ преобразует точку M_2 в точку M_3 , принадлежащую области определения отображения $T_{i_3 i_4}$ и т. д. до отображения $T_{i_{m-1} i_m}$. Точечное преобразование

$$T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{i_2 i_3} T_{i_1 i_2} \quad (1.11)$$

преобразует точку M_1 в точку M_m .

Пусть $\sigma_{i_s i_{s+1}}$ — граница области определения точечного отображения $T_{i_s i_{s+1}}$. В эту границу при $i_s = 1$ входит край $x=H$, а при $i_s = 3$ — край $x=h$. Кроме того, границе принадлежат точки, из которых выходят фазовые траектории, касающиеся поверхности переключения реле (такое касание возможно только в краях „пластинки“ скользящих движений), а также точки, из которых выходят сепаратрисные фазовые траектории, идущие в состояние равновесия в полупространствах G_+ или соответственно G_- (этих состояний равновесия не будет, если $\sum (c_i/\lambda_i) H > 0$ или соответственно $\sum (c_i/\lambda_i) h < 0$). При $i_s = 2$ граница области определения, кроме краев $x=H$ и $x=h$, включает в себя фазовые кривые пластинки скользящих движений, касающиеся краев, и сепаратрисные фазовые кривые, идущие в состояние равновесия, расположенное на пластинке скользящих движений.

Согласно изложенному выше способу построения отображения (1.11), точка M_1 принадлежит границе области его определения тогда и только тогда, когда хотя бы одна из точек M_s лежит на границе $\sigma_{i_s i_{s+1}}$. Пусть только одна из точек M_1, M_2, \dots, M_m , например, M_s принадлежит границе $\sigma_{i_s i_{s+1}}$ и пусть эта граница является одним из краев пластинки скользящих движений. Ради определенности пусть это будет край $x=H$. Обозначим через $\gamma_{i_k i_{k+1}}$ отрезок фазовой траектории, соединяющей точки M_k с M_{k+1} . Тогда $\gamma_{i_{s-1} i_s}$ может лежать либо в G_+ , либо в G_- , либо в Π_s . Если $\gamma_{i_{s-1} i_s}$ принадлежит G_- , то $\gamma_{i_s i_{s+1}}$ может быть расположена либо в G_+ , либо в Π_s (рис. 3а и 3б). Если $\gamma_{i_{s-1} i_s}$ находится в G_+ , то $\gamma_{i_s i_{s+1}}$ находится в G_+ (рис. 3в). Если $\gamma_{i_{s-1} i_s}$ принадлежит Π_s , то в точке M_s $\gamma_{i_{s-1} i_s}$ касается края $x=H$. В простейшем случае в точке прикосновения $x=0$ и $x \neq 0$; тогда $x < 0$ и $\gamma_{i_s i_{s+1}}$ также принадлежат Π_s (рис. 3г).

На рис. 3 изображены не только траектории $\gamma_{i_{s-1} i_s}$ и $\gamma_{i_s i_{s+1}}$, но и возможные типы близких к ним траекторий. В случае рис. 3а близкими к траектории, проходящей через точку M_s , будут траектории типов $\gamma_{i_{s-1} 1}, \gamma_{1 i_{s+1}}$ и $\gamma_{i_{s-1} 2}, \gamma_{2 1}, \gamma_{1 i_{s+1}}$; в случае рис. 3б — траектории типов $\gamma_{i_{s-1} 2}, \gamma_{2 i_{s+1}}$ и $\gamma_{i_{s-1} 1}, \gamma_{1 2}, \gamma_{2 i_{s+1}}$; рис. 3в — типов $\gamma_{i_{s-1} i_{s+1}}$ и $\gamma_{i_{s-1} 2}, \gamma_{2 1}, \gamma_{1 i_{s+1}}$; рис. 3г — типов $\gamma_{i_{s-1} i_{s+1}}$ и $\gamma_{i_{s-1} 1}, \gamma_{1 2}, \gamma_{2 i_{s+1}}$. Это означает, что в рассматриваемом нами случае вдоль некоторой поверхности,

проходящей через точку M_s , могут примыкать друг к другу области определения точечных отображений:

$$T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{1 i_{s+1}} T_{i_{s-1} 1} \dots T_{i_1 i_2}, \quad T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{1 i_{s+1}} T_{21} T_{i_{s-1} 2} \dots T_{i_1 i_2}, \quad (1.12)$$

либо

$$T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{2 i_{s+1}} T_{i_{s-1} 2} \dots T_{i_1 i_2}, \quad T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{2 i_{s+1}} T_{12} T_{i_{s-1} 1} \dots T_{i_1 i_2}, \quad (1.12a)$$

либо

$$T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{i_{s-1} i_{s+1}} \dots T_{i_1 i_2}, \quad T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{1 i_{s+1}} T_{21} T_{i_{s-1} 2} \dots T_{i_1 i_2}, \quad (1.12b)$$

либо

$$T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{i_{s-1} i_{s+1}} \dots T_{i_1 i_2}, \quad T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{2 i_{s+1}} T_{12} T_{i_{s-1} 1} \dots T_{i_1 i_2}. \quad (1.12b)$$

Существенно, что при каждом из этих переходов от отображения одного вида к отображению другого вида сохраняется непрерывность преобразования

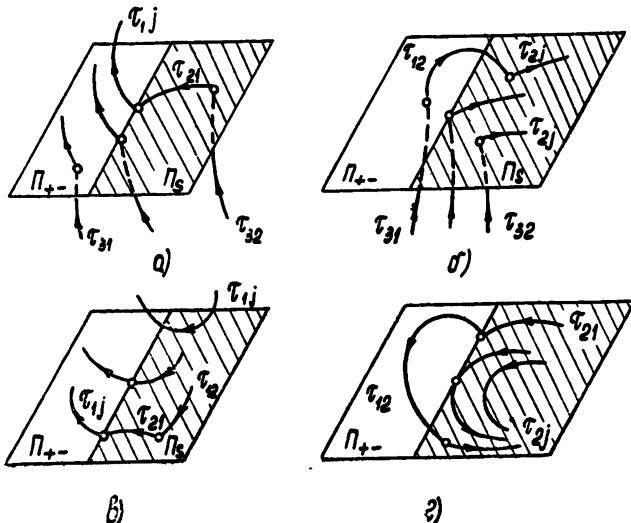


Рис. 3.

2. Согласно предыдущему разделу, изучение рассматриваемых бифуркаций периодического движения приводит к следующей общей задаче. Пусть задано точечное отображение T , зависящее от параметра μ , которое при $\mu=0$ имеет неподвижную точку M^* , лежащую на достаточно гладкой поверхности S . Точечное отображение T в окрестности M^* непрерывно и в каждой полуокрестности D_+ и D_- , на которые разбивается окрестность M^* поверхностью S , достаточно гладкое.

Зависимость отображения T от параметра μ в каждой из полуокрестностей D_+ и D_- и зависимость S от μ дважды непрерывно дифференцируемы. Спрашивается, что может произойти с неподвижной точкой M^* при непрерывном изменении параметра μ .

Введем новые переменные u_1, u_2, \dots, u_n так, чтобы на поверхности S $u_n=0$, а в точке M^* $u_1=u_2=\dots=u_n=0$. Тогда преобразование T можно записать в виде

$$\bar{u}_j = \begin{cases} f_j^+(u_1, u_2, \dots, u_n; \mu) & (u_n \geq 0) \\ f_j^-(u_1, u_2, \dots, u_n; \mu) & (u_n \leq 0) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Здесь f_j^+ и f_j^- дважды непрерывно дифференцируемы по u_1, u_2, \dots, u_n и μ , причем

$$f_j^+(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, 0; \mu) = f_j^-(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, 0; \mu) \quad (2.2)$$

при $u_n=0$. Линеаризуя по u_1, u_2, \dots, u_n и μ правые части (2.1), запишем (с учетом (2.2)) отображение T в виде

$$\bar{u}_j = \sum_{s=1}^{n-1} a_{js} u_s + b_j \mu + \begin{cases} a_{jn}^+ u_n & (u_n \geq 0) \\ a_{jn}^- u_n & (u_n \leq 0) \end{cases} + \dots \quad (2.3)$$

Неподвижные точки отображения T находятся из уравнений

$$\sum_{s=1}^{n-1} (a_{js} - \delta_{js}) u_s^* + b_j \mu + (a_{jn}^\pm - \delta_{jn}) u_n^* + \dots = 0. \quad (2.4)$$

Допустим, что собственные значения матрицы, составленной из элементов a_{js} ($j, s = 1, 2, \dots, n-1, n$), отличны от единицы. Тогда, разрешая первые $n-1$ уравнений (2.4) относительно $u_1^*, u_2^*, \dots, u_{n-1}^*$,

$$u_j^* = \alpha_j^\pm u_n^* + \beta_j \mu + \dots \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.5)$$

и подставляя полученные значения u_j^* в последние уравнения, найдем:

$$u_n^* = A^\pm \mu + \dots \quad (2.6)$$

Из (2.5)–(2.6) следует, что в зависимости от знаков A^+ и A^- возможны два следующие случая:

1) неподвижная точка M^* при изменении μ переходит из одной полуокрестности D в другую;

2) две неподвижные точки при возрастании или убывании μ сливаются (на поверхности S) и исчезают.

Первый случай имеет место, когда $A^+ A^- > 0$; второй — когда $A^+ A^- < 0$.

Вопрос об устойчивости неподвижных точек определяется корнями характеристического уравнения

$$\chi^\pm(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n}^\pm \\ a_{21} & a_{22} - z & \dots & a_{2n-1} & a_{2n}^\pm \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn}^\pm - z \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

При произвольных a_{jn}^+ и a_{jn}^- нет никакой связи между корнями уравнений $\chi^+(z)=0$ и $\chi^-(z)=0$, т. е. условие непрерывности преобразования T на поверхности S не накладывает никаких ограничений на устойчивость, но оставляет в силе прежнюю ситуацию [3] (имеющую место для достаточно гладких преобразований) для возникновения и исчезновения неподвижных точек.

3. Любому периодическому движению релейной системы соответствует неподвижная точка M_1 отображения вида

$$T_{i_m i_1} T_{i_{m-1} i_m} \dots T_{i_2 i_3} T_{i_1 i_2}. \quad (3.1)$$

Пусть при изменении параметров релейной системы одна из точек $M_s = T_{i_{s-1} i_s} \dots T_{i_1 i_2} M_1$ приходит на край $x=H$ пластиинки скользящих движений. Согласно предыдущему, при этом происходит либо слияние неподвижной точки отображения (3.1) с неподвижной точкой одного из отображений (1.12) (с последующим их исчезновением), либо неподвижная точка точечного отображения (3.1) непрерывно переходит в неподвижную точку одного из отображений (1.12)*. Если обозначить через $\tau_{i_s i_{s+1}}$ время движения фазовой точки от точки M_s к точке M_{s+1} , то при переходе от отображения (3.1) к одному из отображений первого столбца (1.12) время движения $\tau_{i_s i_{s+1}}$ обращается в нуль, а второй индекс i_s предыдущего времени $\tau_{i_{s-1} i_s}$ заменяется на первый индекс i_{s+1} последующего времени $\tau_{i_{s+1} i_{s+2}}$. Если при этом $i_{s-1} = i_s$, то это означает, что участок фазовой траектории $M_{s-1} M_s$ вливается в участок $M_{s-2} M_{s-1}$.

Таким образом, в рассматриваемых случаях происходит либо слияние двух периодических движений разных типов, либо переход периодического движения одного типа в периодическое движение другого типа. При этом тип одного периодического движения может быть получен из типа другого периодического движения по следующему формальному правилу: одно из времен $\tau_{i_s i_{s+1}}$ опускается и индекс i_s предшествующего времени заменяется на i_{s+1} . Промежуток времени с двумя одинаковыми индексами опускается.

Как известно, уравнения периодических движений релейной системы могут быть записаны в виде системы уравнений относительно времен $\tau_{i_1 i_2}, \dots, \tau_{i_{m-1} i_m}, \tau_{i_m i_1}$ (в случае автономной системы — еще и фазы φ). Согласно изложенному, уравнения бифуркационных поверхностей в пространстве параметров, т. е. уравнения границ области существования периодического движения рассматриваемого типа ($\tau_{i_1 i_2}, \tau_{i_2 i_3}, \dots, \tau_{i_m i_1}$) могут быть получены путем обращения в уравнениях периодического движения одного из времен $\tau_{i_s i_{s+1}}$ в нуль и путем обращения в нуль одного из времен в уравнениях более сложных периодических движений**, в которое может перейти или с которым может сливаться периодическое движение***. Подчеркнем, что при этом речь идет не о всей границе, а лишь о соответствующей рассматриваемым типам бифуркаций.

В обсуждаемом здесь случае возможно четыре типа бифуркационных поверхностей. Соответствующие им бифуркции изображены на рис. 3. При этом, если на бифуркационной поверхности происходит слияние периодических движений разных типов, то области их существования располагаются по одну сторону от бифуркационной поверхности; напротив, при переходе периодического движения одного типа в периодическое движение другого типа соответствующие области су-

* Заметим, что тип переходов от отображения (3.1) к отображениям второго столбца (1.12) совпадает с типами переходов от отображений первого столбца (1.12) к отображению (3.1), и поэтому различных типов переходов только четыре.

** Т. е. периодических движений с большим числом m .

*** При этом система уравнений периодического движения содержит на единицу больше уравнений, чем переменных, и, следовательно, накладывает одно условие на параметры.

ществования располагаются по разные стороны от бифуркационной поверхности.

Пересечения в пространстве параметров этих бифуркационных поверхностей можно подразделить на два случая в соответствии с тем, соответствуют ли они обращению в нуль соседних или не соседних времен. Второй случай не имеет никаких особенностей, поскольку соответствующие бифуркции происходят „независимо“ друг от друга. В первом же случае они взаимосвязаны.

Из хода фазовых траекторий следует, что соседними промежутками времени, обращающимися одновременно в нуль, могут быть либо времена τ_{12} , τ_{21} , либо времена τ_{21} , τ_{12} . Обращение τ_{12} в нуль требует, чтобы в соответствующей точке края пластинки скользящих движений $\dot{y}=0$, $\ddot{y}<0$, а обращение в нуль τ_{21} — чтобы $\dot{y}=0$ и $\dot{x}>0$, т. е. чтобы $y=0$ и $\dot{y}>0$. Таким образом, при одновременном обращении в нуль τ_{12} и τ_{21} $y=0$ и $\dot{y}=0$. Возможно только три случая прохождения фазовой траектории через точку края $x=H$, в которой $\dot{y}=\dot{y}=0$ ($\ddot{y}\neq 0$). Можно проверить, что к точкам линии пересечения бифуркационных поверхностей примыкает либо две, либо три области существования различных типов периодических движений.

4. Ниже более подробно рассматривается бифуркация простейшего симметричного периодического движения Γ автономной релейной системы в периодическое движение со скользящим движением Γ' (рис. 4). Характеристика реле, естественно, предполагается симметричной ($H=-h=1$). Точка пересечения $M(y_1, y_2, \dots, y_n)$ Γ с плоскостью переключений реле является неподвижной точкой преобразования

$$\bar{y}_i = - \left(y_i - \frac{c_i}{\lambda_i} \right) e^{-\lambda_i \tau} - \frac{c_i}{\lambda_i}, \quad (4.1)$$

где τ — наименьший положительный корень уравнения

$$\sum \bar{y}_i = 0, \quad (4.2)$$

а точка $M'(y'_1, \dots, y'_n)$ пересечения Γ' с плоскостью переключения неподвижной точкой преобразования, которые с помощью промежуточных переменных $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ и времен τ' и τ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \bar{y}'_i &= - \left(\tilde{y}_i - \frac{c_i}{\lambda_i} \right) e^{-\lambda_i \tilde{\tau}} - \frac{c_i}{\lambda_i}; \\ \tilde{y}_i &= y'_i e^{-\lambda_i \tau'} + \int_0^{\tilde{\tau}'} c_i e^{-\lambda_i (\tau' - v)} x(v) dv. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $\tilde{\tau}$ и $\tilde{\tau}'$ — наименьшие положительные корни уравнений

$$\sum \bar{y}'_i = 0, \quad \sum \lambda_i \tilde{y}_i - c = 0, \quad (4.4)$$

а

$$x(v) = \int_0^v \Psi(\omega) \sum \tilde{y}_i e^{-\lambda_i (v-\omega)} d\omega \quad (4.5)$$

($\Psi(\omega)$ — оригинал $K^{-1}(p)$).

Мы предполагаем, что параметры рассматриваемой релейной си-

стемы являются некоторыми функциями параметра μ и что при $\mu=0$ существует замкнутая фазовая кривая Γ^* , пересекающая края пластины скользящих движений (рис. 4). Это означает, что при $\mu=0$ преобразования (4.1) и (4.3) имеют неподвижную точку $M^*(y_1^*, \dots, y_n^*)$, координаты которой удовлетворяют условиям

$$\sum \lambda_i y_i^* - c = 0, \quad \sum \lambda_i^2 y_i^* - \sum \lambda_i c_i > 0 \quad (4.6)$$

и $\tau = \tilde{\tau} = \tau^*$, $\tau' = 0$, $\tilde{y}_i = y'_i = y_i^*$. Таким образом, преобразование (4.1) и (4.3) имеют общую неподвижную точку M^* , и нужно изучить, что происходит с этой неподвижной точкой при изменении μ .

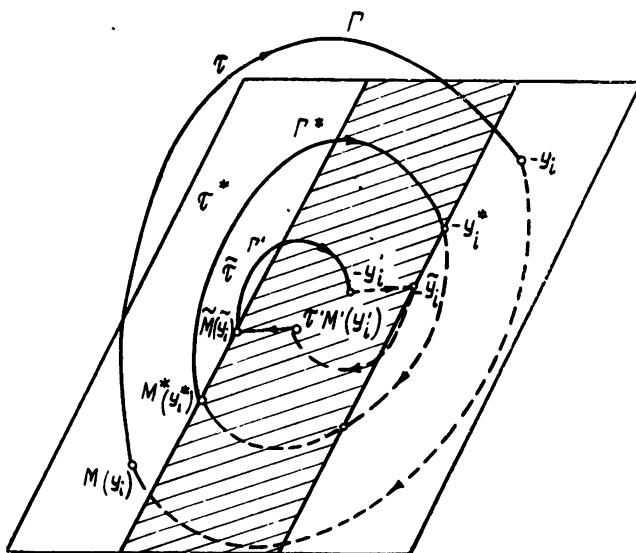


Рис. 4.

Неподвижная точка $M(y_1, y_2, \dots, y_n)$ преобразования (4.1) удовлетворяет системе уравнений

$$y_i = -\left(y_i - \frac{c_i}{\lambda_i}\right)e^{-\lambda_i \tau} - \frac{c_i}{\lambda_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.7)$$

а неподвижная точка $M'(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ преобразования (4.3) — системе уравнений

$$y'_i = -\left(\tilde{y}_i - \frac{c_i}{\lambda_i}\right)e^{-\lambda_i \tilde{\tau}} - \frac{c_i}{\lambda_i};$$

$$\tilde{y}_i = y'_i e^{-\lambda_i \tau'} + \int_0^{\tau'} c_i e^{-\lambda_i (\tau' - v)} x(v) dv. \quad (4.8)$$

Решениям этих систем соответствуют неподвижные точки только в том случае, если соответственно

$$\sum \lambda_i y_i - c \leq 0, \quad \tau > 0 \quad (4.9)$$

или

$$\sum \lambda_i y'_i - c \geq 0, \quad \tau' \geq 0, \quad \tau > 0. \quad (4.10)$$

Линеаризуем преобразование (4.3) в окрестности значений

$$\begin{aligned}
 y_i &= \tilde{y}_i = y'_i = y^*_i, \quad \tau = \tilde{\tau} = \tau^*, \quad \tau' = 0, \quad \mu = 0, \\
 -\Delta \bar{y}'_i &- e^{-\lambda_i \tau^*} \Delta \tilde{y}_i + (\lambda_i y^*_i - c_i) e^{-\lambda_i \tau^*} \Delta \tilde{\tau} + A_i \mu &= 0, \\
 -\Delta \tilde{y}_i + \Delta y'_i &- (\lambda_i y^*_i - c_i) \tau' &= 0, \\
 \sum \Delta \bar{y}'_i &= 0, \quad \sum \lambda_i \Delta \tilde{y}_i + B \mu &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_i &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \frac{c_i}{\lambda_i} \left(e^{-\lambda_i \tau} - 1 \right) - e^{-\lambda_i \tau} \tilde{y}_i \right\}_{\mu=0, \quad \tilde{\tau}=\tau^*, \quad \tilde{y}_i=y^*_i}, \\
 B &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \sum \lambda_i \tilde{y}_i - c \right\}_{\mu=0, \quad \tilde{y}_i=y^*_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Из линеаризованных уравнений (4.11) преобразования (4.3) можно получить линеаризованные уравнения преобразования (4.1), положив $\tau' = 0$, отбросив последнее уравнение, опустив штрихи у переменных y'_i, \dots, y_n' и $\tilde{\tau}$ заменив на τ :

$$\begin{aligned}
 -\Delta \bar{y}_i &- e^{-\lambda_i \tau^*} \Delta \tilde{y}_i + (\lambda_i y^*_i - c_i) e^{-\lambda_i \tau^*} \Delta \tilde{\tau} + A_i \mu &= 0; \\
 -\Delta \tilde{y}_i + \Delta y'_i &= 0; \\
 \sum \Delta \bar{y}'_i &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Положим в (4.11) и соответственно в (4.12) $\Delta \bar{y}'_i = z \Delta y'_i$, $\Delta \bar{y}_i = z \Delta y_i$ и решим полученную систему относительно $\Delta y'_i$, Δy_i :

$$\Delta y'_i = \frac{\Delta'_i(z)}{\Delta'(z)} \mu, \quad \Delta y_i = \frac{\Delta_i(z)}{\Delta(z)} \mu. \tag{4.13}$$

Можно показать*, что имеют место соотношения

$$\Delta'_i(1) = \Delta_i(1) \sum \lambda_i (\lambda_i y^*_i - c_i), \quad \Delta'(z) = \Delta(z) \sum \lambda_i (\lambda_i y^*_i - c_i). \tag{4.14}$$

При $z = 1$ $\Delta y'_i$ и Δy_i представляют собой изменения координат неподвижных точек преобразований (4.1) и (4.3) соответственно. Соотношения (4.14) означают, что эти изменения равны. Далее, $\Delta'(z)$ и $\Delta(z)$ являются характеристическими уравнениями преобразований соответственно (4.1) и (4.3) при $\mu=0$. В силу (4.14) и (4.6) их корни совпадают. Это означает, в соответствии с разделом 3, что при изменении μ неподвижная точка преобразования (3.1) переходит в неподвижную точку преобразования (3.3) и что при этом устойчивость неподвижной точки сохраняется. (Естественно предполагается, что при $\mu=0$ $\Delta(z)$ не имеет корней с модулем, равным единице.)

Таким образом, к границе области существования и устойчивости простейшего симметричного режима, соответствующей рассматриваемой

* См. Приложение.

бифуркации, всегда примыкает область существования и устойчивости периодического режима со скользящим движением.

5. В качестве примера проведем разбиение плоскости параметров осциллятора с сухим трением на области различных периодических режимов. Как известно [4, 5], движение осциллятора с сухим трением описывается уравнением

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = \sin \tau - \beta F(\dot{\xi}), \quad (5.1)$$

где β — безразмерная сила трения, а $F(\dot{\xi})$ — релейная функция: $F(\dot{\xi}) = \text{sgn } \dot{\xi}$, если $\dot{\xi} \neq 0$ и $-1 \leq f(0) \leq 1$. Для релейной системы (5.1) коэффициент передачи линейного звена

$$K(p) = \sum \frac{c_i}{p - \lambda_i} = \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

т. е. $\lambda_1 = j\omega$, $\lambda_2 = -j\omega$; $c_1 = c_2 = 1/2$. Функция $f(t) = (\omega^2 - 1)^{-1} \cos \tau = \alpha \cos \tau$, $H = \beta$, $h = -\beta$.

Уравнения (1.5) — (1.7) трех частей поверхности переключений реле Π_{+-} , Π_{-+} и Π_s для системы (5.1) принимают соответственно вид

$$y_1 = y_2 + \alpha \cos \tau = 0; \quad j\omega(y_1 - y_2) - \beta - \alpha \sin \tau > 0; \quad (5.2)$$

$$y_1 + y_2 + \alpha \cos \tau = 0; \quad j\omega(y_1 - y_2) + \beta - \alpha \sin \tau < 0; \quad (5.3)$$

$$y_1 + y_2 + \alpha \cos \tau = 0; \quad -\beta < j\omega(y_1 - y_2) - \alpha \sin \tau < \beta. \quad (5.4)$$

Уравнения преобразований области Π_{+-} в область Π_{-+} (T_{13}) и в область Π_s (T_{12}) имеют вид

$$y_1^s + y_2^s + \alpha \cos \tau^s = 0;$$

$$y_1^{s+1} = \bar{y}_2^{s+1} = \beta/2j\omega + \left(y_1^s - \frac{\beta}{2j\omega} \right) e^{j\omega(\tau^{s+1} - \tau^s)}; \quad (5.5)$$

$$y_1^{s+1} + y_2^{s+1} + \alpha \cos \tau^{s+1} = 0.$$

Уравнения преобразований T_{31} и T_{32} отличаются от (5.5) лишь знаком перед β . Наконец, уравнения преобразования области Π_s в край пластиинки $x = \beta$ (T_{21}) или в край $x = -\beta$ (T_{23}) записываются так:

$$y_1^{k+1} = \bar{y}_2^{k+1} = y_1^k - \frac{\alpha}{2} [\cos \tau^{k+1} - \cos \tau^k + j\omega (\sin \tau^{k+1} - \sin \tau^k)]; \quad (5.6)$$

$$\sin \tau^{k+1} - \omega^2 \alpha \sin \tau^k + j\omega(y_1^k - y_2^k) = \begin{cases} +\beta & \text{для } T_{21}, \\ -\beta & \text{для } T_{23}. \end{cases}$$

В работе [5] было доказано, что нелинейное уравнение (5.1) имеет единственное устойчивое симметричное решение с периодом 2π . Следовательно, бифуркациям периодических режимов осциллятора с сухим трением соответствует приход неподвижных точек точечного преобразования на границу области его определения и изучение различных периодических режимов сводится к выделению на плоскости параметров $\omega - \beta$ всех возможных бифуркационных границ. Будем обозначать периодические режимы последовательностью отрезков времени движения фазовой точки по кускам траектории, начала и концы которых расположены на поверхности переключений. При этом в силу симметричности режимов для их определения достаточно знать лишь τ_{ij} , составляющие полупериод π .

Простейший периодический режим (τ_{13}, τ_{31}) или просто (τ_{13}) может переходить в два типа режимов со скольжением (рис. 3а и 3в): ($\tau_{13}, \tau_{32}, \tau_{23}$) и (τ_{12}, τ_{23}) (рис. 5а и 5б). Каждому из переходов соответствует своя бифуркационная граница, уравнения которой получим из уравнений этих режимов, полагая в них $\tau_{23}=0$.

Уравнения относительно координат неподвижной точки симметричного преобразования $T_{23} T_{32} T_{13} T_{21} T_{12} T_{31}$ для режима ($\tau_{13}, \tau_{32}, \tau_{23}$) получим из уравнений (5.5) и (5.6), положив $y_i^3 = -y_i^0$ и $\tau^3 = \tau^0 + \pi$. После исключения пространственных координат y_i^0, y_i^1 и y_i^2 останется три трансцендентных уравнения относительно τ^0, τ_{32} и τ_{23} :

$$\begin{aligned} -\cos(\tau^0 - \tau_{32} - \tau_{23}) - \cos \tau^0 \cos[\omega(\pi - \tau_{32} - \tau_{23})] + \frac{1}{\omega} \sin \tau^0 \sin[\omega(\pi - \tau_{32} - \tau_{23})] &= 0; \\ \frac{2\beta}{\omega} \sin(\omega \tau_{32}) - \alpha \cos(\tau^0 - \tau_{23}) - \alpha \cos \tau^0 \cos[\omega(\pi - \tau_{23})] + \frac{\alpha}{\omega} \sin \tau_0 \sin[\omega(\pi - \tau_{23})] &= 0; \\ 2\beta \cos(\omega \tau_{32}) + \omega \alpha \cos \tau^0 \sin[\omega(\pi - \tau_{23})] + \omega^2 \alpha \sin(\tau^0 - \tau_{23}) + \\ &+ \sin \tau^0 \{\alpha \cos[\omega(\pi - \tau_{23})] - 1\} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

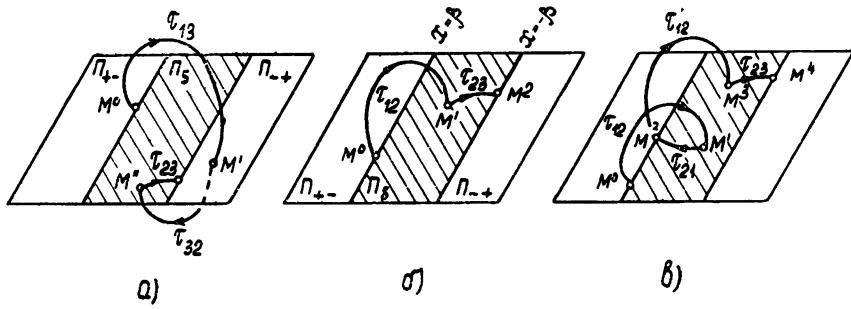


Рис. 5.

Аналогичным образом придем и к следующим уравнениям относительно τ^0 и $\tau_{12}=\pi-\tau_{23}$ для периодического режима (τ_{12}, τ_{23}):

$$\cos(\tau^0 + \tau_{12}) + \frac{1}{\omega} \sin \tau^0 \sin(\omega \tau_{12}) - \cos \tau^0 \cos(\omega \tau_{12}) = 0; \quad (5.8)$$

$$2\beta - \sin \tau^0 - \omega \alpha \sin(\tau^0 + \tau_{12}) + \alpha \sin \tau^0 \cos(\omega \tau_{12}) + \alpha \omega \cos \tau^0 \sin(\omega \tau_{12}) = 0.$$

Полагая в выражениях (5.7) и (5.8) $\tau_{23}=0$, находим уравнения бифуркационных границ указанных режимов с режимом (τ_{13}):

$$\omega \cos \left[\omega \left(\frac{\pi}{2} - \tau_{32} \right) \right] \sin \tau_{32} + \sin \left[\omega \left(\frac{\pi}{2} - \tau_{32} \right) \right] \cos \tau_{32} - \sin \frac{\omega \pi}{2} = 0; \quad (5.9)$$

$$\beta = \left| \frac{\omega \cos(\omega \pi/2)}{(\omega^2 - 1) \{(\omega^2 - 1) \cos^2[\omega(\pi/2 - \tau_{32})] + 1\}^{1/2}} \right|,$$

что соответствует касанию фазовой траектории края пластинки скользящих движений (рис. 3в), и

$$\beta = \left| (\omega^2 - 1) \left(1 + \frac{1}{\omega^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\omega \pi}{2} \right) \right|^{1/2}, \quad (5.10)$$

что соответствует „сквозному“ проходу фазовой траектории через край пластинки (рис. 3а).

Попутно из уравнений (5.7) получится и уравнение бифуркационной границы между режимами $(\tau_{13}, \tau_{32}, \tau_{23})$ и (τ_{12}, τ_{23}) , если положим в них $\tau_{32}=0$. Оно имеет вид

$$\beta = \alpha \sin \frac{k\pi}{\omega} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.11)$$

и соответствует „сходу“ фазовой траектории с края пластинки скользящих движений (рис. 3б). Ход кривых (5.9)–(5.11) изображен на рис. 6.

Рассмотрим еще периодический режим $(\tau_{12}, \tau_{21}, \tau'_{12}, \tau_{23})$ с двумя участками без скольжения и двумя скользящими движениями за полупериод (рис. 5в). Уравнения относительно $\tau^0, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau'_{12}$ для этого режима приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \omega \cos(\tau^0 + \tau_{12}) - \omega \cos \tau^0 \cos(\omega \tau_{12}) + \sin \tau^0 \sin(\omega \tau_{12}) &= 0; \\ \sin(\tau^0 + \tau_{12} + \tau_{21}) - \omega^2 \alpha \sin(\tau^0 + \tau_{12}) + \omega \alpha \cos \tau^0 \sin(\omega \tau_{12}) + \alpha \sin \tau^0 \cos(\omega \tau_{12}) &= 0; \\ -\omega \cos(\omega \tau'_{12}) \cos(\tau^0 + \tau_{12} + \tau_{21}) + \omega \cos(\tau^0 + \tau_{12} + \tau_{21} + \tau'_{12}) + & \quad (5.12) \\ + \sin(\omega \tau'_{12}) \sin(\tau^0 + \tau_{12} + \tau_{21}) &= 0; \\ 2\beta - \sin \tau^0 + \alpha [\omega \sin(\omega \tau'_{12}) \cos(\tau^0 + \tau_{12} + \tau_{21}) + & \\ + \cos(\omega \tau'_{12}) \sin(\tau^0 + \tau_{12} + \tau_{21}) - \omega^2 \sin(\tau^0 + \tau_{12} + \tau_{21} + \tau'_{12})] &= 0. \end{aligned}$$

Полагая в уравнениях (5.12) $\tau_{21} = 0$ и $\tau'_{12} = 0$, получим уравнения бифуркационных кривых, соответствующих переходу данного режима в режим (τ_{12}, τ_{23}) . Эти уравнения включают систему (5.8), а также

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2 + 1}{\omega} \sin \tau_{12} \sin(\omega \tau_{12}) + 2 \cos \tau_{12} \cos(\omega \tau_{12}) - 2 &= 0; \\ \cos \tau^0 [\omega \sin(\omega \tau_{12}) - \sin \tau_{12}] + \sin \tau^0 [\cos(\omega \tau_{12}) - \cos \tau_{12}] &= 0 \quad (5.13) \end{aligned}$$

для $\tau_{21} = 0$ и

$$2\beta - \sin \tau^0 - 1 = 0 \quad (5.14)$$

для $\tau'_{12} = 0$. Кривые (5.13) и (5.14) соответствуют касанию фазовой траектории края пластинки скользящих движений. При этом в первом случае траектория расположена в подпространстве G_+ (рис. 3в), а во втором—на пластинке скользящих движений (рис. 3г).

Проведенное разбиение плоскости параметров $\omega - \beta$ на области различных периодических режимов изображено на рис. 6. Отметим, что в окрестности точек пересечения бифуркационных границ, которые соответствуют обращению в нуль двух не расположенных рядом τ_{ij} , имеют место более сложные периодические режимы. На рис. 7 представлены осциллограммы, снятые при моделировании уравнения (5.1), которые иллюстрируют все четыре типа бифуркаций: „сквозной“ проход траектории через край пластинки скользящих движений (а), касание траекторией края со стороны G_+ или G_- (б), „ход“ траектории с края пластинки (в) и касание края пластинки траекторией скользящего движения (г).

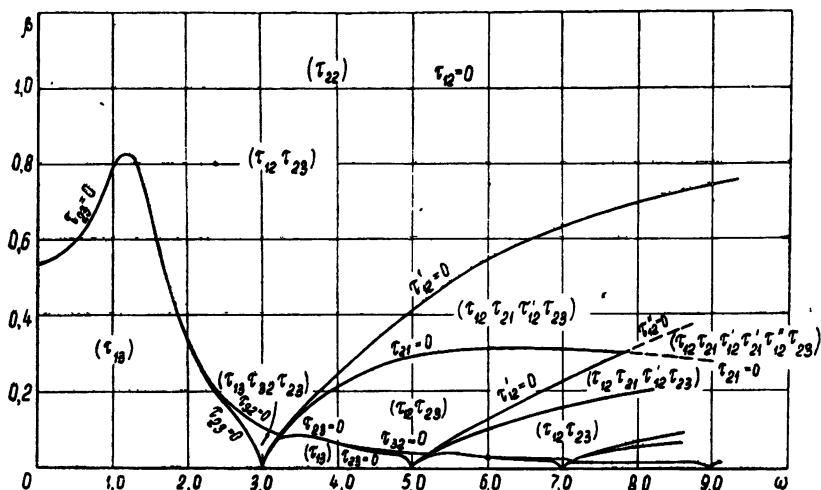


Рис. 6.

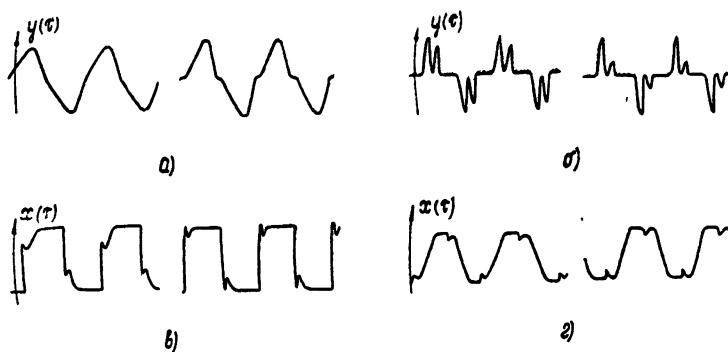


Рис. 7.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем соотношения (4.13). Рассмотрим квадратную матрицу A' порядка $2n+2$:

$$\begin{array}{|c||c|c|c|c|} \hline & -1 & 0 & 0 & \Phi_1 \\ \hline a_{ij} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline \hline b_{kj} & \begin{matrix} e^{-\lambda_1 \tau^*} \\ e^{-\lambda_2 \tau^*} \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ e^{-\lambda_n \tau^*} \end{matrix} & \begin{matrix} \Phi_1 e^{-\lambda_1 \tau^*} \\ \vdots \\ \Phi_n e^{-\lambda_n \tau^*} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \hline c_1 \dots c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline d_1 \dots d_n & \lambda_1 & \dots & \lambda_n & 0 \\ \hline \end{array} \quad (I)$$

$$(i, j, k = 1, 2, \dots, n) \quad \Phi_i = \lambda_i y_i^* - c_i, \quad \sum_{i=1}^n \Phi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_i > 0.$$

Прямой проверкой легко убедиться, что $\Delta'(z)$ и $\Delta'_i(1)$ есть определители матриц, которые можно получить из A' надлежащим выбором элементов $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{kj}, c_j, d_j$; при этом $\Delta(z)$ и $\Delta_i(1)$ будут главными минорами $n+1$ -го порядка этих матриц.

Обозначим A главный минор этой матрицы $2n+1$ -го порядка и покажем, что $|A'| = |A| \sum \lambda_i \Phi_i$. Подвергнем A' , а следовательно, и A элементарным преобразованиям, не меняющим, как известно, величин определителей: 1) j -ую строку умножим на λ_j и сложим с последней; 2) $n+j$ -ую строку умножим на $e^{-\lambda_j t^*}$ и сложим с j -ой. В результате получим матрицу \bar{A}' , эквивалентную A' :

$$\bar{A}' = \left| \begin{array}{c|cc|cc} \bar{a}_{ij} & 0 & \Phi_1 & \Phi_1 \\ \hline \bar{b}_{kj} & e^{-\lambda_i t^*} 0 & \Phi_1 e^{-\lambda_i t^*} 0 \\ & 0 & e^{-\lambda_n t^*} & \Phi_n e^{-\lambda_n t^*} 0 \\ \hline \bar{c}_1 \dots \bar{c}_n & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \bar{d}_1 \dots \bar{d}_n & 0 \dots 0 & 0 & \sum \lambda_i \Phi_i \end{array} \right| \quad (\text{II})$$

Из (II) получаем, раскладывая определитель по элементам последней строки:

$$|A'| = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_i |A| + \sum_{i=1}^n (-1)^i \bar{d}_i |A_i|, \quad (\text{III})$$

где A_i — матрица, получающаяся из A' вычерчиванием последней строки и i -го столбца:

$$A_i = \left| \begin{array}{c|cc|cc} \bar{a}_{ij} & 0 & \Phi_1 & \Phi_1 \\ \hline \bar{b}_{kj} & e^{-\lambda_i t^*} 0 & \Phi_1 e^{-\lambda_i t^*} 0 \\ & 0 & e^{-\lambda_n t^*} & \Phi_n e^{-\lambda_n t^*} 0 \\ \hline \bar{c}_1 \dots \bar{c}_n & 0 \dots 0 & 0 & 0 \end{array} \right|.$$

В каждом $n-1+j$ столбце ($j=1, 2, \dots, n$) лишь один элемент не нулевой — именно $e^{-\lambda_j t^*}$. Раскладывая определитель $|A_i|$ по этим столбцам, получим определитель $n+1$ -го порядка, у которого последний и предпоследний столбцы равны. Таким образом, $|A_i| = 0$ и утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. Ю. И. Неймарк, Ученые записки ГГУ, сер. физич., 30, 159 (1956).
3. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958); 1, № 2, 95 (1958); 1, № 5—6, 146 (1958).
4. Den-Hartog Trans. ASME APM, 53, 107 (1931).
5. Н. А. Железцов, ПММ, 13, 3 (1949).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 октября 1962 г.

ON SOME CASES OF DEPENDENCE OF PEIODIC MOTIONS OF RELAY
SYSTEM UPON PARAMETERS

V. A. Brousin, Yu. I. Neimark, M. I. Feigin

Some cases of dependence of periodic motions of a relay system upon the parameters are investigated. The results are illustrated by an example of the forced oscillations of the oscillator with a dry friction in a regime of bifurcation of the simplest symmetric periodic motion.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Г. В. Аронович

Исследуется устойчивость гидравлических процессов в напорной системе ГЭС с уравнительным резервуаром переменного сечения в случае, когда состояние равновесия системы лежит на линии склейки двух нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы. По обе стороны от линии склейки дифференциальные уравнения отличаются друг от друга, начиная с членов первого порядка. Приводятся результаты моделирования задачи на машине ЭМУ-8.

Настоящая статья посвящена исследованию одного случая общей задачи устойчивости стационарных режимов ГЭС с уравнительными резервуарами*. Именно, исследуется устойчивость гидравлических процессов в напорной системе ГЭС с цилиндрическим уравнительным резервуаром со стояком (или с двухкамерным резервуаром) в одном особом случае, когда состояние равновесия системы лежит на линии склейки двух нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы. По обе стороны от этой линии дифференциальные уравнения отличаются друг от друга, начиная с членов первого порядка. Предполагается также, что по одну сторону от линии склейки система устойчива, а по другую сторону неустойчива в малом (соответственно площадь резервуара больше или меньше критической площади Тома). Обычные критерии устойчивости в этом случае неприменимы и вопрос требует специального рассмотрения.

Пусть напорная система изолированной ГЭС имеет вид, изображенный на рис. 1а. Найдем условия затухания колебаний горизонта в уравнительном резервуаре, предполагая, как обычно, что турбина снабжена так называемым идеальным регулятором, поддерживающим мощность на выходе системы постоянной, и пренебрегая инерцией воды в уравнительном резервуаре и в турбинном трубопроводе. Площадь сечения стояка считаем сравнимой с площадью резервуара.

Уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{L}{g} \frac{dv}{dt_1} + z + Pv |v| = 0; \quad (1)$$

$$fv = F(z) \frac{dz}{dt_1} + Q, \quad (2)$$

где

$$F(z) = \begin{cases} F_1 & (H + z < H_1) \\ F_2 & (H + z > H_1). \end{cases}$$

Здесь z — высота горизонта в резервуаре над статическим уровнем, Q — расход воды, v — скорость потока в штольне, $Pv |v|$ — потери на-

* Эта задача рассматривалась в ряде работ, существенно продвинувших вперед ее решение (см. [1,2], а также [3]).

пора в штольне. Индексом нуль ниже обозначаются величины, соответствующие новому равновесному режиму. К этим уравнениям следует добавить условие постоянства мощности

$$N = \gamma \eta Q (H + z) = \gamma \eta_0 Q_0 (H + z_0), \quad (3)$$

с помощью которого Q выражается через z . В дальнейшем считаем коэффициент полезного действия $\eta = \text{const} = \eta_0$.

Введем безразмерные величины

$$x = z/Pv_0^2, \quad y = \frac{v}{v_0}, \quad t = \frac{fv_0}{F_1 Pv_0^2} t_1,$$

а также обозначения

$$\beta = \frac{Pv_0^2}{H}, \quad \epsilon = g (Pv_0^2)^2 F_1 / f L v_0^2, \quad \alpha = H_1/H, \quad \gamma = F_1/F_2.$$

Тогда, учитывая, что

$$v_0 f = Q_0, \quad z = -Pv_0^2,$$

и ограничиваясь случаем прямого течения, представим систему уравнений (1), (2) в виде

$$\frac{dy}{dt} = -\epsilon (x + y^2); \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = y - \frac{1 - \beta}{1 + \beta x} \quad (1 + \beta x < \alpha); \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = \gamma \left(y - \frac{1 - \beta}{1 + \beta x} \right) \quad (1 + \beta x > \alpha).$$

К аналогичной системе дифференциальных уравнений сводится и задача о колебаниях горизонта в двухкамерном уравнительном резервуаре (см. рис. 16), если пренебречь длиной стояка, соединяющего верхнюю и нижнюю камеры. Такое пренебрежение вполне допустимо, если площадь сечения стояка, как обычно, во много раз меньше площади сечения камер и вода проходит длину стояка (при изменениях открытия направляющего аппарата) чрезвычайно быстро по сравнению с периодом колебаний горизонта в камерах. Поэтому исследование уравнений (4), (5) будет справедливым для резервуаров обоих типов (за исключением того, что у цилиндрического резервуара со стояком F_2 всегда $F_1 > F_2$, а у двухкамерного резервуара $F_1 \geq F_2$).

Ниже для определенности считаем $\gamma < 1$.

Если процессы в рассматриваемой динамической системе таковы, что все время $1 + \beta x > \alpha$ или $1 + \beta x < \alpha$, то полностью справедливы результаты работы [4] и дальнейшего рассмотрения не требуется. Особенности, специфические для данной системы, появляются тогда, когда в процессе колебаний изображающая точка системы из области, где $1 + \beta x > \alpha$, переходит в область, где $1 + \beta x < \alpha$, и обратно, причем в одной из этих областей система неустойчива, а в другой устойчива. Ниже мы ограничимся рассмотрением этих специфических движений в системе.

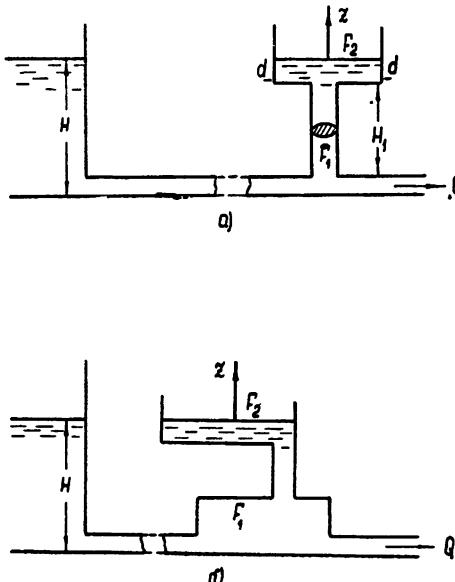


Рис. 1.

Устойчивость в малом. Подставляя в систему уравнений (4), (5) $x = -1 + \xi$ и $y = 1 + \eta$, получим уравнения в возмущениях, описывающие движение системы около стационарного режима, которому соответствует состояние равновесия $\xi = 0, \eta = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \eta + \frac{c\xi}{1+c\xi} \quad \left(\xi < 1 + \frac{\alpha - 1}{\beta} \equiv A \right); \\ \frac{d\xi}{dt} &= \gamma \left(\eta + \frac{c\xi}{1+c\xi} \right) \quad (\xi > A); \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\varepsilon (\xi + 2\eta + \eta^2) \quad \left(c \equiv \frac{\beta}{1-\beta} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $\alpha = 1 - \beta$. Тогда $A = 0$ и состояние равновесия $\xi = 0, \eta = 0$ лежит на линии склейки дифференциальных уравнений (при $A \neq 0$ исследование устойчивости точки $\xi = 0, \eta = 0$ тривиально). Отметим, что правые части уравнений (6) отличаются по обе стороны от линии склейки членами первого порядка. Интерес представляет случай, когда особая точка $(-1, 1)$ системы уравнений (4), (5), соответствующая $\xi = 0, \eta = 0$, будет типа склеенного фокуса. Для определения ее устойчивости воспользуемся методом точечных отображений и рассмотрим линеаризованное преобразование, соответствующее системе уравнений (6) [5].

Кусочно-линейная система дифференциальных уравнений, получающаяся из системы (6) путем ее линеаризации в соответствующих областях значений ξ , имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= c\xi + \eta \quad (\xi < 0); \\ \dot{\xi} &= \gamma(c\xi + \eta) \quad (\xi > 0); \\ \dot{\eta} &= -\varepsilon(\xi + 2\eta). \end{aligned} \quad (7)$$

В области $\xi < 0$ решение системы (7) для начальных условий при $t=0$

$$\xi = \xi_0 = 0, \quad \eta = \eta_0 < 0$$

можно записать в форме

$$\xi = \frac{\eta_0}{k_1 - k_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t});$$

$$\eta = \frac{\eta_0}{k_1 - k_2} (k_1 e^{\lambda_1 t} - k_2 e^{\lambda_2 t}).$$

Здесь $\lambda_j = \sigma \pm i\omega$ ($j = 1, 2$) — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + (2\varepsilon - c)\lambda + \varepsilon(1 - 2c) = 0$, а $k_1 = \lambda_1 - c$, $k_2 = \lambda_2 - c$ — так называемые коэффициенты распределения. Считаем $1 - 2c > 0$, $\varepsilon < c/2$. При $t = \tau_1 = \pi/\omega$

$$\xi = \xi_1 = 0, \quad \eta = \eta_1 = -e^{\pi\sigma/\omega} \eta_0.$$

Аналогично в области $\xi > 0$ решение системы (7) (для начальных условий $\xi = 0, \eta = \eta_1$ при $t = \pi/\omega$) имеет вид

$$\xi = \frac{\eta_1}{k'_1 - k'_2} \left[e^{\lambda'_1(t-\pi/\omega)} - e^{\lambda'_2(t-\pi/\omega)} \right];$$

$$\eta = \frac{\eta_1}{k'_1 - k'_2} \left[k'_1 e^{\lambda'_1(t-\pi/\omega)} - k'_2 e^{\lambda'_2(t-\pi/\omega)} \right],$$

причем $\lambda'_j = \sigma' \pm i\omega'$ ($j = 1, 2$) — корни уравнения

$$\lambda^2 + (2\varepsilon - c\gamma)\lambda + \varepsilon\gamma(1 - 2c) = 0,$$

а $k'_1 = \lambda'_1 - c$, $k'_2 = \lambda'_2 - c$. При $t = \tau_1 + \tau_2 = \pi/\omega + \pi/\omega'$

$$\xi = \xi_2 = 0; \quad \eta = \eta_2 = -e^{\pi\sigma'/\omega'} \eta_1,$$

откуда

$$\eta_2 = e^{\pi(\sigma/\omega + \sigma'/\omega')} \eta_0. \quad (8)$$

Соотношение (8) представляет функцию последования, определяющую отображение полупрямой η ($\eta < 0$) в себя. Неподвижной точкой этого точечного отображения является точка $\eta = 0$. Эта точка устойчива, если $|\eta_2| < |\eta_0|$ или если

$$\sigma/\omega + \sigma'/\omega' < 0. \quad (9)$$

Условие (9) является условием устойчивости в малом исследуемого состояния равновесия [5]. В развернутом виде условие (9) запишется так:

$$\frac{c/2 - \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - (\varepsilon + c/2)^2}} + \frac{c\gamma/2 - \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon\gamma - (\varepsilon + c\gamma/2)^2}} < 0. \quad (9a)$$

Определение характера границы области устойчивости. Границу области устойчивости в пространстве параметров найдем, если в выражении (9) или (9a) знак неравенства заменим знаком равенства:

$$\sigma/\omega + \sigma'/\omega' = 0. \quad (10)$$

Отсюда после приведения к общему знаменателю и подстановки значений σ , σ' , ω , ω' получим

$$\varepsilon^2 = c^2\gamma/4, \quad (11)$$

$$\omega' = \sqrt{\gamma} \omega. \quad (12)$$

Если $\varepsilon < c/2$, то $\varepsilon > c\gamma/2$ (условие неустойчивости для стояка или нижней камеры). Так как $\sigma = c/2 - \varepsilon$ и $\omega_0^2 = \varepsilon(1 - 2c)$, то $\sigma' = -\sqrt{\gamma}\sigma$ и $\omega_0'^2 = \varepsilon\gamma(1 - 2c) = \gamma\omega_0^2$.

Для определения характера границы области устойчивости перепишем систему уравнений (6) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\varepsilon(\xi + 2\eta + \eta^2); \\ \dot{\xi} &= c\xi + \eta - \frac{(c\xi)^2}{1 + c\xi} \quad (\xi < 0); \\ \dot{\xi} &= \gamma \left(c\xi + \eta - \frac{(c\xi)^2}{1 + c\xi} \right) \quad (\xi > 0). \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть $\xi < 0$. Путем линейного преобразования

$$\xi = u, \quad \eta = -(c - \sigma)u - \omega v$$

приведем первые два уравнения системы (13) к каноническому виду:

$$\dot{u} = \sigma u - \omega v + g(u, v); \quad (14)$$

$$\dot{v} = \omega u + \sigma v + h(u, v),$$

где $g(u, v)$, $h(u, v)$ — ряды, расположенные по степеням u, v и начинаяющиеся с членов не ниже второй степени. В нашем случае

$$g(u, v) = \{-(cu)^2 + (cu)^3 - \dots\},$$

$$h(u, v) = -\frac{1}{\omega} \{-\varepsilon [-(c-\sigma)u - \omega v]^2 + (c-\sigma)[c^2 u^2 - c^3 u^3 + \dots]\}.$$

Если $\xi > 0$, то, введя другое линейное преобразование

$$\xi = u, \quad \eta = -\left(c - \frac{\sigma'}{\gamma}\right)u - \frac{\omega'}{\gamma}v,$$

получим аналогично из первого и третьего уравнений системы (13)

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sigma' u - \omega' v' + g_1(u, v'); \\ \dot{v}' &= \omega' u + \sigma' v' + h_1(u, v'). \end{aligned} \tag{15}$$

Интерпретируем u, v и u, v' как декартовы координаты на соответствующих плоскостях и исследуем движение изображающей точки системы на плоскости, полученной из полуплоскости $u < 0, v$ и полу-плоскости $u > 0, v'$, склеенных по оси $u = 0$. Введем полярные координаты $u = \rho \cos \varphi$ и $v = v' = \rho \sin \varphi$ и представим уравнения движения (14) и (15) в окрестности исследуемого состояния равновесия в следующей форме (см. [6]):

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho R_1(\varphi) + \rho^2 R_2(\varphi) + \dots \quad (\varphi_1 < \varphi \leq \pi + \varphi_1); \tag{16}$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho R'_1(\varphi) + \rho^2 R'_2(\varphi) + \dots \quad (\pi + \varphi_1 < \varphi \leq 2\pi + \varphi_1). \tag{17}$$

Здесь $R_k(\varphi)$ и $R'_k(\varphi)$ — известные в силу уравнений движения тригонометрические функции φ . Решение уравнения (16), определяемое начальными условиями $\rho = \rho_0 > 0$ при $\varphi = \varphi_1 + 0$, ищем в виде ряда

$$\rho = \rho_0 u_1(\varphi) + \rho_0^2 u_2(\varphi) + \dots, \tag{18}$$

сходящегося для всех φ в промежутке $\varphi_1 < \varphi \leq \pi + \varphi_1$ при достаточно малых ρ_0 . Подставляя (18) в уравнение (16) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ_0 , получим для определения функций $u_j(\varphi)$ рекуррентные дифференциальные уравнения:

$$\frac{du_1}{d\varphi} = u_1 R_1; \quad \frac{du_2}{d\varphi} = u_2 R_1 + u_1^2 R_2; \dots$$

с начальными условиями $u_1(\varphi_1 + 0) = 1; u_j(\varphi_1 + 0) = 0 (j \neq 1)$. Из этих уравнений последовательно определим $u_1(\varphi), u_2(\varphi), \dots$ В интервале $\varphi_1 + 0 < \varphi \leq \pi + \varphi_1$

$$\begin{aligned} u_1 &= C e^{\int R_1 d\varphi}; \\ u_2(\varphi) &= e^{\int R_1 d\varphi} \left[C_1 + C^2 \int R_2 e^{\int R_1 d\varphi} d\varphi \right]. \end{aligned} \tag{19}$$

При $\varphi = \pi + \varphi_1$

$$\rho(\pi + \varphi_1) = \rho_1 = \rho_0 u_1(\pi + \varphi_1) + \rho_0^2 u_2(\pi + \varphi_1) + \dots \tag{20}$$

Решение уравнения (17) для начального условия $\rho = \rho'_1$ при $\varphi = \pi + \varphi_1 + 0$ также ищем в виде ряда

$$\rho = \rho'_1 u'_1(\varphi) + \rho'^2_1 u^1_2(\varphi) + \dots, \quad (21)$$

сходящегося для всех φ в промежутке $\varphi_1 + \pi < \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ и для всех достаточно малых ρ'_1 . При $\varphi = 2\pi + \varphi_1$

$$\rho(2\pi + \varphi_1) = \rho'_2 = \rho'_1 u'_1(2\pi + \varphi_1) + \rho'^2_1 u^1_2(2\pi + \varphi_1) + \dots \quad (22)$$

Для определения функций $u'_j(\varphi)$, как и выше, получим уравнения:

$$\frac{du'_1}{d\varphi} = u'_1 R'_1; \quad \frac{du'_2}{d\varphi} = u'_2 R'_1 + u'^2_2 R'_2; \dots$$

с начальными условиями

$$u'_1(\pi + \varphi_1) = 1; \quad u^1_j(\pi + \varphi_1) = 0 \quad (j \neq 1).$$

Из формул линейного преобразования легко установить, что

$$\rho'_1 = \frac{\omega\gamma}{\omega'} \rho_1, \quad \rho'_2 = \frac{\omega\gamma}{\omega'} \rho_2. \quad (23)$$

Подставляя в (22) с помощью (23) выражение (20), получим

$$\rho_2 = a_1 \rho_0 + a_2 \rho_0^2 + \dots, \quad (24)$$

где

$$a_1 = u_1(\pi + \varphi_1) u'_1(2\pi + \varphi_1);$$

$$a_2 = u_2(\pi + \varphi_1) u'_1(2\pi + \varphi_1) + \frac{\omega\gamma}{\omega'} u'_2(2\pi + \varphi_1) u^2_1(\pi + \varphi_1).$$

В нашей задаче, в соответствии с уравнениями (13)–(15), справедливы следующие выражения:

$$R_1(\varphi) = \frac{\sigma}{\omega} \quad (\sigma = c/2 - \varepsilon > 0);$$

$$R_2(\varphi) = a_1 \cos^3 \varphi + a_2 \cos^2 \varphi \sin \varphi + a_3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + a_4 \sin^3 \varphi;$$

$$a_1 = \frac{\varepsilon}{\omega^3} \left(\frac{7}{8} c^3 - c^2 + \frac{7}{4} c^2 \varepsilon + \frac{c \varepsilon^3}{2} + \varepsilon^3 \right);$$

$$a_2 = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \left(\frac{7}{4} c^2 + c \varepsilon + 3 \varepsilon^2 \right);$$

$$a_3 = \frac{\varepsilon}{\omega} \left(\frac{c}{2} + 3 \varepsilon \right);$$

$$a_4 = \varepsilon;$$

$$R'_1(\varphi) = \frac{\sigma'}{\omega'} \quad (\sigma' = c\gamma/2 - \varepsilon < 0);$$

$$R'_2(\varphi) = a'_1 \cos^3 \varphi + a'_2 \cos^2 \varphi \sin \varphi + a'_3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + a'_4 \sin^3 \varphi;$$

$$a'_1 = \frac{\gamma^2 \varepsilon}{\omega'^3} \left(\frac{7}{8} c^3 - c^2 + \frac{7}{4} \frac{c^2 \varepsilon}{\gamma} + \frac{c \varepsilon^2}{2\gamma^2} + \frac{\varepsilon^3}{\gamma^3} \right);$$

$$a'_2 = \frac{\gamma \varepsilon}{\omega'^2} \left(\frac{7}{4} c^2 + \frac{c \varepsilon}{\gamma} + \frac{3 \varepsilon^2}{\gamma^2} \right);$$

$$a'_3 = \frac{\varepsilon}{\omega'} \left(\frac{c}{2} + \frac{3 \varepsilon}{\gamma} \right);$$

$$a'_4 = \frac{\varepsilon}{\gamma};$$

$$u_1(\varphi) = e^{(\sigma/\omega)(\varphi - \varphi_1)}; \quad u'_1(\varphi) = e^{(\sigma'/\omega')(\varphi - \pi - \varphi_1)};$$

$$u_2(\varphi) = e^{(\sigma/\omega)\varphi} \left[C_1 + e^{-(2\sigma/\omega)\varphi_1} \sum_{k=1}^4 a_k I_k(\varphi) \right],$$

где

$$I_k(\varphi) = \int \cos^{4-k} \varphi \sin^{k-1} \varphi e^{(\sigma/\omega)\varphi} d\varphi \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Так как $u_2(\varphi_1) = 0$, то

$$C_1 = -e^{-(2\sigma/\omega)\varphi_1} \sum_{i=1}^4 a_i I_i(\varphi_1),$$

откуда

$$u_2(\varphi) = e^{(\sigma/\omega)(\varphi - \varphi_1)} e^{-(\sigma/\omega)\varphi_1} \sum_{i=1}^4 a_i [I_i(\varphi) - I_i(\varphi_1)].$$

Аналогично

$$u'_2(\varphi) = e^{(\sigma'/\omega')(\varphi - 2\pi - 2\varphi_1)} \sum_{i=1}^4 a'_i [I'_i(\varphi) - I'_i(\pi + \varphi_1)],$$

где

$$I'_k(\varphi) = \int \cos^{4-k} \varphi \sin^{k-1} \varphi e^{(\sigma'/\omega')\varphi} d\varphi \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Так как $\varphi_1 = \pi/2$, то, обозначая $b_1 \equiv \sigma/\omega$, $b_2 \equiv \sigma'/\omega'$, получим:

$$u_2(\pi + \varphi_1) = \frac{e^{\pi b_1} (1 + e^{\pi b_1})}{(1 + b_1^2)(9 + b_1^2)} [-6a_1 - 2a_2 b_1 - a_3 (3 + b_1^2) - a_4 (b_1^3 + 7b_1)];$$

$$u'_2(2\pi + \varphi_1) = \frac{e^{\pi b_2} (1 + e^{\pi b_2})}{(1 + b_2^2)(9 + b_2^2)} [6a'_1 + 2a'_2 b_2 + a'_3 (3 + b_2^2) + a'_4 (b_2^3 + 7b_2)].$$

Отсюда по формулам (24) получим:

$$\alpha_1 = e^{\pi(b_1 + b_2)};$$

$$\alpha_2 = e^{(b_1 + b_2)\pi} \frac{1 + e^{\pi b_1}}{(1 + b_1^2)(9 + b_1^2)} [-6a_1 - 2a_2 b_1 - a_3 (3 + b_1^2) -$$

$$- a_4 (b_1^3 + 7b_1)] + \frac{\omega \gamma}{\omega'} e^{\pi(2b_1 + b_2)} \frac{1 + e^{\pi b_2}}{(1 + b_2^2)(9 + b_2^2)} [6a'_1 + 2a'_2 b_2 + \\ + a'_3 (b_2^3 + 3) + a'_4 (b_2^3 + 7b_2)].$$

На границе области устойчивости $b_1 + b_2 = 0$ (т. е. $\alpha_1 = 1$), откуда следует, что

$$\alpha_2 = \frac{1 + e^{\pi b_1}}{(1 + b_1^2)(9 + b_1^2)} \left\{ 6 \left(\frac{\omega\gamma}{\omega'} a'_1 - a_1 \right) - 2b_1 \left(\frac{\omega\gamma}{\omega'} a'_2 + a_2 \right) + \right. \\ \left. + (b_1^2 + 3) \left(\frac{\omega\gamma}{\omega'} a'_3 - a_3 \right) - b_1(b_1^2 + 7) \left(\frac{\omega\gamma}{\omega'} a'_4 + a_4 \right) \right\}. \quad (25)$$

Знак α_2 зависит от выражения в фигурных скобках. Подставляя сюда значения a_i , a'_i , b_j и учитывая соотношения (11) и (12), найдем для членов в фигурных скобках следующее выражение:

$$D \equiv \frac{2}{\omega} \left(\frac{c^2}{4} - \epsilon^2 \right) \left\{ \frac{1}{\omega^2} \left[\left(\frac{c}{2} - \epsilon \right)^2 + 12\epsilon(1-c) \right] + 1 \right\}.$$

Так как $c < 1/2$ и $\epsilon < c/2$, то непосредственно видно, что $D > 0$. Следовательно, $\alpha_2 > 0$ и граница области устойчивости в рассматриваемом критическом случае—опасная [7] (как и в случаях, когда состояние равновесия смещено по отношению к линии разрыва).

Результаты электронного моделирования. Рассматриваемая задача была смоделирована на электронной аналоговой машине ЭМУ-8 вычислительного центра ГИФТИ*. На рис. 2 приведены некоторые результаты определения критических начальных отклонений ξ_0^* , соответ-

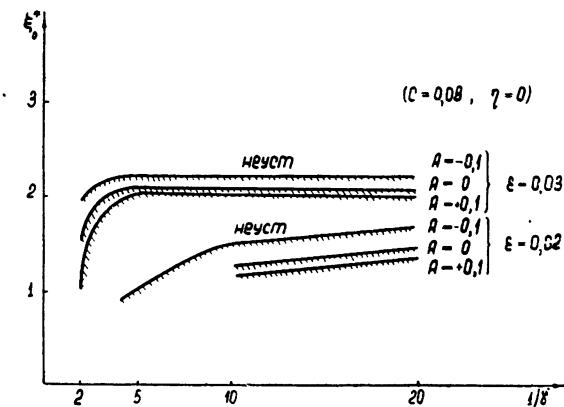


Рис. 2.

ствующих границе области притяжения устойчивого равновесия системы. Эти значения определены для $A = 0$, когда состояние равновесия $\xi = 0$, $\eta = 0$ лежит на линии $d-d$ (см. рис. 1а), а также для $A < 0$, когда состояние равновесия лежит выше линии $d-d$, и для $A > 0$, когда оно лежит ниже этой линии.

ЛИТЕРАТУРА

- Н. А. Картвелишвили, Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 75 (1958).
- С. Яегер, Paper Amer. Soc. Mech. Engrs., № 59-A-270, 1, (1959).
- Г. В. Аронович, Л. Н. Белюстина, Н. А. Картвелишвили, Я. К. Любимцев, ПМТФ, № 3, 56 (1961).
- Г. В. Аронович, Л. Н. Белюстина, Инж. сб., 13, 132 (1952).
- Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958).
- А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
- Н. Н. Батутина, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М., 1949.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
31 октября 1962 г

* Задачу моделировала К. К. Седова.

ON STABILITY OF A NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM

G. V. Aronovich

The stability is investigated of hydraulic processes in a water-pillar system of the Water Power Plant containing the levelling reservoir with variable cross section. In the case considered the equilibrium state on the line of matching of two nonlinear differential equations. These equations coincide in the terms of the zero order. The analog computer (ЭМУ-8) results are given.

О СИНТЕЗЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ УСТРОЙСТВ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М. Я. Эйнгорин

Рассматриваются некоторые виды систем уравнений алгебры логики с запаздыванием, описывающие автономные и неавтономные дискретные устройства с обратными связями. Приведены физические модели этих систем, по своим функциональным свойствам эквивалентные различным счетчикам, генераторам импульсов, динамическим триггерам и другим устройствам.

Системы уравнений алгебры логики с дискретным запаздыванием при их моделировании на различных элементах позволяют строить многие новые дискретные управляемые устройства. В первом разделе работы кратко рассматриваются симметричные системы уравнений без запаздывания, во втором для функций начальных условий, заданных на некотором интервале времени τ , даны решения аналогичных систем с дискретным запаздыванием и в третьем приведены некоторые примеры их моделирования. Полученные физические модели по своим функциональным свойствам представляют собой различные счетчики с заданными основаниями счисления, генераторы импульсов, динамические триггеры и другие устройства дискретного действия.

1. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ БЕЗ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

В общем случае система уравнений алгебры логики, разрешенная относительно переменных, может быть записана в виде

$$x_j = f_j(X) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}, \quad f_j(X) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

и имеет физическую модель, показанную на рис. 1а. Решениями системы уравнений (1.1) назовем такие наборы значений переменных X^0 , которые удовлетворяют этой системе. Систему (1.1) назовем противоречивой, если она не имеет ни одного решения; в противном случае система не противоречива.

Для систем уравнений (1.1), правые части которых представлены в дизъюнктивной форме [1]*, могут быть сформулированы достаточно простые теоремы относительно их решений и преобразований.

Теорема 1. Каждой конъюнкции Y'_l симметричной инверской системы уравнений

* Такие системы ниже обозначаются как (1.1)'.

$$x_j = \bigvee_{l=1}^N a_{jl} Y'_l \quad (l = 1, 2, \dots, n), \quad (1.2)$$

где

$$a_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при } x_j \not\in \{X\}'_l \\ 0 & \text{при } x_j \in \{X\}'_l \end{cases}, \quad (1.3)$$

$Y'_l = \bigwedge_{i=1}^{m'} x_{l_i}$, $N = C_n^{m'}$, m' —число переменных, а $\{X\}'_l$ —их набор в каждой конъюнкции Y'_l , соответствует решение X_l^0 вида

$$\left\{ x_{l_1}^0, x_{l_2}^0, \dots, x_{l_{m'-1}}^0, x_{l_m}^0, x_{l_{m'+1}}^0, \dots, x_{l_{n-1}}^0, x_{l_n}^0 \right\} = \{0,0,\dots,0,0,1,\dots,1,1\}, \quad (1.4)$$

в котором

$$x_{l_k}^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{x}_{l_k} \not\in \{X\}'_l \\ 0 & \text{при } \bar{x}_{l_k} \in \{X\}'_l \end{cases}. \quad (1.5)$$

Число решений системы равно N , других решений она не имеет.

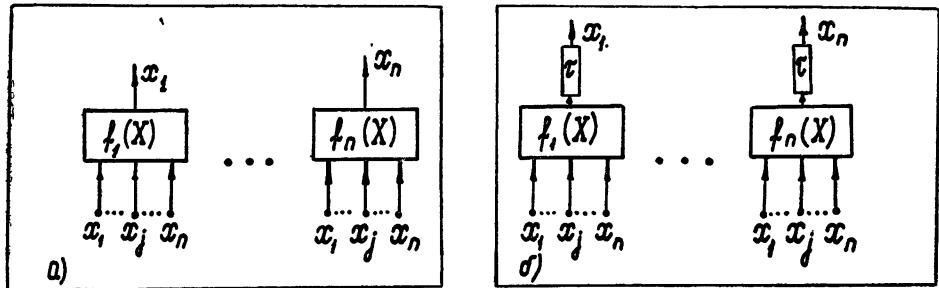


Рис. 1.

Теорема 2. Каждой конъюнкции Y'_l симметричной безынверсной системы уравнений

$$x_j = \bigvee_{l=1}^N a_{jl} Y'_l \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.6)$$

где

$$a_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при } x_j \in \{X\}''_l \\ 0 & \text{при } x_j \not\in \{X\}''_l \end{cases}, \quad (1.7)$$

$Y''_l = \bigwedge_{i=1}^m x_{l_i}$, $N = C_n^m$, m —число переменных, а $\{X\}''_l$ —их набор в каждой конъюнкции функции Y''_l , соответствует основное решение X_l^0 вида

$$\left\{ x_{l_1}^0, x_{l_2}^0, \dots, x_{l_{m-1}}^0, x_{l_m}^0, x_{l_{m+1}}^0, \dots, x_{l_{n-1}}^0, x_{l_n}^0 \right\} = \{1,1,\dots,1,1,0,\dots,0,0\}, \quad (1.8)$$

в котором

$$x_{l_k}^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } x_{l_k} \subset \{X\}_l^*, \\ 0 & \text{при } x_{l_k} \not\subset \{X\}_l^*, \end{cases} \quad (1.9)$$

нулевое решение X_0^0 и дополнительные решения, являющиеся различными почленными дизъюнкциями основных решений (1.8). Число основных решений системы равно N . Других решений система не имеет.

Теорема 3. Умножение произвольной конъюнкции $Y_l (Y_l^*)$ инверсной системы уравнений (1.2) при условии (1.3) (безынверсной системы уравнений (1.6) при условии (1.7)) на произвольную безынверсную (инверсную) функцию $G_l(X)$, переменные которой принадлежат $\{X\}/\{X\}_l^* (\{X\}/\{X\}_l^*)$, не изменяет основные решения системы, за исключением того, что инверсная система может приобрести нулевое решение. При этом безынверсная система теряет образованные с конъюнкцией Y_l^* те дополнительные решения, для которых новое логическое произведение ортогонально хотя бы к одной из конъюнкций, образующих каждое из указанных решений.

В частности, если при $l=1, 2, \dots, N$ $G_l(X)=Y_l^* = \&_{i=m'+1}^n x_{l_i}$ для инверсной и $G_l(X)=Y_l = \&_{i=m+1}^n \bar{x}_{l_i}$ для безынверсной систем уравнений, то все функции правых частей уравнений будут представлены в совершенной нормальной дизъюнктивной форме. В этом случае скажем, что система задана в совершенной нормальной дизъюнктивной форме [3,4] (СНДФ).

Теорема 4. Система уравнений (1.1)' имеет нулевое X_0^0 (единичное X_{11}^0) решение в том и только в том случае, если во все ее конъюнкции (в каждую функцию $f_j(X)$) входит по крайней мере одно безынверсное переменное (одна безынверсная конъюнкция).

В качестве примера рассмотрим систему инверсных симметричных уравнений для $n=5$ и $m'=2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 ; \\ x_2 &= \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 ; \\ x_3 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 ; \\ x_4 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 ; \\ x_5 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Она имеет $N = C_5^2 = 10$ решений

$$\begin{aligned} \{x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0\} &= \{1,1,1,0,0\}, \{1,1,0,1,0\}, \{1,1,0,0,1\}, \{1,0,1,1,0\}, \\ &\{1,0,1,0,1\}, \{1,0,0,1,1\}, \{0,1,1,1,0\}, \{0,1,1,0,1\}, \\ &\{0,1,0,1,1\}, \{0,0,1,1,1\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

в каждом из которых два нуля и три единицы.

Та же система, заданная в СНДФ для $n=5$ и $m'=2$, запишется в виде

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5; \\
 x_2 &= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5; \\
 x_3 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5; \\
 x_4 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5; \\
 x_5 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5;
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

и имеет те же решения (1.11) и еще нулевое решение.

Для дальнейшего заметим, что все рассмотренные результаты справедливы и для несимметричных систем инверсных и безынверсных уравнений, коэффициенты a_{ji} , которых удовлетворяют соответственно условиям (1.3) и (1.7). То же имеет место в случае смешанных [1] систем уравнений, для которых инверсные и безынверсные части всех конъюнкций удовлетворяют этим условиям. Такие системы назовем системами, представленными в канонической форме. С другой стороны, произвольную систему нетрудно привести к канонической форме [1]. Поэтому в настоящей работе будут рассматриваться лишь канонические системы уравнений.

2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Система уравнений с запаздыванием, разрешенная относительно переменных, запишется в виде

$$x_j(t+\tau) = f_j[X(t)] \quad (j=1, 2, \dots, n), \tag{2.1}$$

где

$$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)\} \tag{2.2}$$

и имеет физическую модель, изображенную на рис. 1б. Функции $x_j(t+\tau)$ и $f_j[X(t)]$ зависят от времени и могут принимать лишь два значения—нуль и единицу.

Пусть

$$\tilde{X}(t') = \{\tilde{x}_1(t'), \tilde{x}_2(t'), \dots, \tilde{x}_j(t'), \dots, \tilde{x}_n(t')\} \tag{2.3}$$

— начальные функции правых частей уравнений (начальные условия), заданные в интервале времени $0 \leq t' \leq \tau$. Решениями системы уравнений (2.1) назовем такие функции $x_j^0(t)$ ($j=1, 2, \dots, n$), значения которых на интервале времени $0 \leq t < \infty$ удовлетворяют этой системе.

Теорема 5. Решение системы (2.1) с некоторого момента времени является периодической функцией, имеющей ограниченное число наборов значений переменных $X_l^0(t)$ ($l=1, 2, \dots, N$).

Коротко приведем некоторые эквивалентные преобразования функций алгебры логики и систем уравнений с запаздыванием. Если через $\langle f(X) \rangle_\tau$ обозначить функцию, запаздывающую на время τ , то некоторые из этих преобразований при

$$x^\alpha = \begin{cases} \bar{x}, & \text{если } \alpha=1 \\ x, & \text{если } \alpha=0 \end{cases}$$

будут таковы:

$$1) \quad \left\langle \& \sum_{j=1}^n x_j^\alpha \right\rangle_\tau = \& \sum_{i=0}^l \left\langle \sum_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} x_j^\alpha \right\rangle_\tau \text{ при } m_0=0 \text{ и } m_{l+1}=n;$$

$$2) \quad \left\langle \bigvee_{j=1}^n x_j^\alpha \right\rangle_\tau = \bigvee_{i=1}^l \left\langle \bigvee_{j=m_i+1}^{m_{i+1}} x_j^\alpha \right\rangle_\tau \text{ при } m_0=0 \text{ и } m_{l+1}=n;$$

$$3) \quad \langle x^\alpha x^\alpha \dots x^\alpha \rangle_\tau^\beta = \langle x^\alpha \rangle_\tau^\beta;$$

$$4) \quad \langle x^\alpha \vee x^\alpha \vee \dots \vee x^\alpha \rangle_\tau^\beta = \langle x^\alpha \rangle_\tau^\beta;$$

$$5) \quad \langle x^\alpha \rangle_\tau = \langle x \rangle_\tau^\alpha;$$

$$6) \quad \langle f(X) \rangle_\tau = \langle \langle \dots \langle f(X) \rangle_{\tau/p_1} \dots \rangle_{\tau/p_{k-1}} \rangle_{\tau/p_k} \text{ при } \sum_{i=1}^k \tau/p_i = \tau;$$

$$7) \quad \left\langle \bigvee_{j=1}^N \& \sum_{l_j=1}^n x_{l_j j}^\alpha \right\rangle_\tau = \left\langle \bigvee_{j=1}^N \left\langle \& \sum_{l_j=1}^n x_{l_j j}^\alpha \right\rangle_{\tau'} \right\rangle_{\tau-\tau'};$$

$$8) \quad \langle f(X) \rangle_\tau = f[\langle X \rangle_\tau].$$

Кроме того, к системе (2.1) могут быть применены преобразования 1, 2 и 4, данные в [1]; они приводят к эквивалентным уравнениям вида (1.2), (1.4) и (1.5) той же работы, но с дискретным запаздыванием.

Представим правые части всех уравнений системы (2.1) в дизъюнктивной форме:

$$x_j(t+\tau) = \bigvee_{l=1}^N c_{jg} Y_g(t) \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (2.4)$$

где N —число различных, не входящих друг в друга конъюнкций, $Y_g(t)$ —конъюнкции, состоящие из функций (2.2) инверсной ($Y'_g(t) = \& \bar{x}_{g_i}(t)$), безинверсной ($Y''_g(t) = \& x_{g_i}(t)$) или смешанной системы уравнений, коэффициенты $c_{jg} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$.

Используя приведенные преобразования, представим систему (2.4) в одном из видов:

$$x_j(t) = \left\langle \bigvee_{l=1}^N c_{jg} Y_g(t) \right\rangle_\tau \quad (j=1, 2, \dots, n); \quad (2.5)$$

$$x_j(t) = \left\langle \bigvee_{l=1}^N c_{jg} \langle Y_g(t) \rangle_{\tau/2} \right\rangle_{\tau/2} \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (2.6)$$

Та же система может быть записана в матричной* форме

$$\| x_j(t+\tau) \| = \| c_{jg} \| \cdot \| Y_g(t) \| \quad (j=1, 2, \dots, n; \quad g=1, 2, \dots, N), \quad (2.7)$$

где $\| c_{jg} \|$ —матрица коэффициентов и $\| Y_g(t) \|$ —матрица конъюнкций.

* В произведении матриц двоичной логики, в отличие от обычных матриц, алгебраическая сумма их членов заменяется на дизъюнкцию, произведение—на конъюнкцию.

Рассмотрим частный вид системы (2.7), в которой матрица

$$\| c_{jg} \| = \| a_{jl} \| \cdot \| b_{lg} \|, \quad (2.8)$$

где a_{jl} , $b_{lg} = \begin{cases} 0 & , \\ 1 & \end{cases}$, $\| a_{jl} \|$ — матрица коэффициентов системы

$$\| x_j \| = \| a_{jl} \| \cdot \| Y_l \| \quad (j=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, N), \quad (2.9)$$

удовлетворяющая (1.3), (1.7) или аналогичным условиям работы [1], $\| b_{lg} \|$ — матрица переходов, имеющая L_l единиц в строке и выполняющая преобразование

$$\| \bigvee_{l=1}^{L_l} Y_{l_i}(t) \| = \| b_{lg} \| \cdot \| Y_g(t) \| \quad (l=1, 2, \dots, N; \quad g=1, 2, \dots, N). \quad (2.10)$$

Можно считать, что (2.9) имеет единичную диагональную матрицу переходов $\| b_{lg} \|$ и может быть решена, согласно изложенному в работе [1].

Система (2.4) или (2.7) с учетом (2.8) запишется в виде:

$$\| x_j(t+\tau) \| = \| a_{jl} \| \cdot \| b_{lg} \| \cdot \| Y_g(t) \| \quad (j=1, 2, \dots, n; \quad l=1, 2, \dots, N). \quad (2.11)$$

Из (2.7) и (2.11)

$$c_{jg} = \bigvee_{l=1}^N a_{jl} b_{lg} \quad (j=1, 2, \dots, n; \quad g=1, 2, \dots, N). \quad (2.12)$$

Для дальнейшего введем систему уравнений без запаздывания

$$\| x_j \| = \| c_{jg} \| \cdot \| Y_g \| \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad g=1, 2, \dots, N), \quad (2.13)$$

составленную по (2.7) или (2.11). Сформулируем несколько теорем, позволяющих находить решение таких систем уравнений, а также в случае необходимости составлять уравнения с заранее заданным видом решений.

Теорема 6. Преобразование системы уравнений (2.9) по

$$\| Y_l \| = \| b_{lg} \| \cdot \| Y_g \| \quad (l=1, 2, \dots, N; \quad g=1, 2, \dots, N) \quad (2.14)$$

исключит из набора основных решений $\{X_i^0\}$ те X_α^0 (соответствующие конъюнкциям Y_α), для которых $b_{\alpha\beta} = 1$ при $\alpha \neq \beta; \alpha = 1, 2, \dots, N; \beta = 1, 2, \dots, N$.

Частный случай. Если для всех ненулевых коэффициентов $b_{\alpha\beta}$ матрицы переходов $\alpha \neq \beta$, то система (2.11) без запаздывания становится противоречивой или сохраняет лишь нулевое и, может быть, единичное решение.

Представим начальные условия (2.3) в виде дизъюнкций начальных значений $\tilde{X}_\gamma(t')$:

$$\tilde{X}(t') = \bigvee_{\gamma=1}^h \tilde{X}_\gamma(t'), \quad (2.15)$$

где

$$\tilde{X}_\gamma(t') = \{\tilde{x}_1(t'_\gamma), \tilde{x}_2(t'_\gamma), \dots, \tilde{x}_j(t'_\gamma), \dots, \tilde{x}_n(t'_\gamma)\}; \quad (2.16)$$

$$0 \leq t'_1 < \dots, \leq t'_\gamma < \dots, \leq t'_h < \tau,$$

В каждом интервале времени $t'_{\tau-1} \leq t'_\tau < t'_{\tau+1}$ набор начальных условий сохраняет постоянные значения функции $\tilde{x}_j(t'_\tau) = \begin{cases} 0 & \text{для всех } j = \\ 1 & \end{cases}$ $= 1, 2, \dots, n$. Вне интервала $t'_{\tau-1} \leq t'_\tau < t'_{\tau+1}$ функции $x_j(t'_\tau) \equiv 0$. Обозначим через $\tilde{Y}_l(t'_\tau)$ конъюнкции $Y_l(t)$ ($l=1, 2, \dots, N$) с подставленными в них значениями переменных $\tilde{x}_j(t'_\tau)$ (из начальных условий (2.16) для заданного интервала времени $t'_{\tau-1} \leq t'_\tau < t'_{\tau+1}$). В этом случае нетрудно показать, что система уравнений (2.4), (2.7) или (2.11) имеет частное решение

$$(10) \quad X_{01}^0(t) = \|x_i^0(t)\|_\gamma = \begin{cases} \|0\| - \text{для всех } t = k\tau + t'_\tau; t'_{\tau-1} \leq t'_\tau < t'_{\tau+1} \\ \quad (k=0, 2, 4, \dots (k=1, 3, 5, \dots)) \\ \|1\| - \text{для всех } t = k\tau + t'_\tau; t'_{\tau-1} \leq t'_\tau < t'_{\tau+1} \\ \quad (k=1, 3, 5, \dots (k=0, 2, 3, \dots)) \end{cases} \quad (2.17)$$

с фазой (01), (10), определяемой начальными условиями в том и только том случае, если в каждую функцию правой части каждого уравнения входит хотя бы одна инверсная конъюнкция.

Теорема 7. Если система уравнений (2.13) имеет решение для каждой конъюнкции Y_g , то соответствующая ей система с запаздыванием (2.7) в зависимости от начальных условий имеет периодические решения с наибольшим периодом τ , если она безынверсная или смешанная, и с наибольшим периодом 2τ , если она инверсная. Согласно теореме 6, система (2.13) в этом случае удовлетворяет условиям (1.3) или (1.7).

Теорема 8. Каждое начальное значение (2.16) $\tilde{X}_j(t')$ ($j=1, 2, \dots, h$) инверсной, безынверсной или смешанной системы уравнений с запаздыванием вида (2.11) при условии (1.3) или (1.7) для соответствующей ей системы (2.9) дает частное решение

$$\|x_j^0(t)\|_\gamma = \begin{cases} \|a_{j1}\| \cdot \|b_{lg}\|^k \cdot \|\tilde{Y}_g(t')\| \\ \quad - \text{для всех } t = k\tau + t'_\tau; t'_{\tau-1} \leq t'_\tau < t'_{\tau+1}, \\ \|0\| - \text{для всех } t \neq k\tau + t'_\tau \quad (k=0, 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (2.18)$$

где $j=1, 2, \dots, n$ и матрица $\|b_{lg}\|$ — с произвольным числом единиц в каждой строке и столбце. Полное решение системы (2.11) представляет собой в каждый момент времени почлененную дизъюнкцию всех частных решений (2.18):

$$\|x_j^0(t)\| = \bigvee_{\tau=1}^h \|x_j^0(t)\|_\gamma \quad (j=1, 2, \dots, n). \quad (2.19)$$

Частное решение (2.18) достаточно найти при максимальном значении $k=k_\tau$, соответствующем первому повторению кода частного решения. Нетрудно видеть, что продолжение решения является перио-

дической функцией. Пусть числа k_{γ_1} и k_{γ_2} соответствуют первым по времени ближайшим совпадающим кодам X_1^0 частного решения; тогда его период

$$T_\gamma = k_\gamma \tau, \quad (2.20)$$

где $k_\gamma = k_{\gamma_2} - k_{\gamma_1}$, а величина

$$T'_\gamma = k_{\gamma_1} \tau \quad (2.21)$$

равна времени переходной части данного частного решения. Период полного решения

$$T = \tau \prod_{\gamma=1}^d k_\gamma, \quad (2.22)$$

где d —число взаимно простых чисел k_γ всех интервалов начальных условий t_γ ; $d < h$. Время переходной части полного решения равно наибольшему из времен T'_γ .

Решение (2.18) основано на знании матриц $\|a_{jl}\|$ и $\|b_{lg}\|$, первая из которых находится по конъюнкциям системы (2.13) и условиям (1.3) и (1.7), а вторая—из (2.8) по заданной матрице $\|c_{jg}\|$.

Заметим, что теорема 9 справедлива для произвольной системы уравнений с запаздыванием, для которой возможно представление в виде (2.8).

Нетрудно показать, что решение (2.19) системы (2.11) в каждый момент времени совпадает с одним из решений соответствующей ей системы (2.9). Исключение составляют решения $X_{10}^0(t)$ и $X_{01}^0(t)$ системы (2.11), которым нет соответствующих решений в (2.9).

Частное решение (2.18) системы (2.11), состоящее из основных решений соответствующей системы (2.9), будем называть в дальнейшем элементарным. Тогда нетрудно видеть, что (2.18) в случае инверсной (безинверсной) системы уравнений дает частные решения, совпадающие (в общем случае — не совпадающие) с элементарными. В случае безинверсных систем уравнений в зависимости от начальных условий частное решение может быть равно дизъюнкции нескольких элементарных.

Рассмотрим более подробно матрицу переходов $\|b_{lg}\|$. Обозначим через $L_i(H_j)$ число единиц в каждой строке (каждом столбце) матрицы $\|b_{lg}\|$. Назовем ненулевые коэффициенты b_{ij} и $b_{\gamma\delta}$ соседними, если индексы этих коэффициентов таковы, что либо $i=\delta$, либо $j=\gamma$. Будем говорить, что коэффициент $b_{\gamma\delta}$ следует за b_{ij} (b_{ij} предшествует $b_{\gamma\delta}$), если $j=i$. Упорядоченную таким образом последовательность ненулевых коэффициентов матрицы $\|b_{ij}\|$ назовем траекторией $\{b_{ij}\}$. Если в этой последовательности следующих друг за другом коэффициентов один встречается (не встречается) по крайней мере дважды, будем говорить, что эта последовательность образует замкнутую (незамкнутую) траекторию. Коэффициент незамкнутой траектории, не имеющий предыдущего (последующего), назовем начальным (конечным). Назовем коэффициент $b_{ij}=1$ замкнутой траектории $\{b_{lg}\}$ начальным (конечным), если он имеет минимум $j(i)$ для данной траектории. В этом случае начальный и конечный элемент—соседние и конечный предшествуют начальному.

Пусть теперь M_d —число коэффициентов в траектории $\{b_{lg}\}_d$. При $i=j=l$ одиночный коэффициент b_{ll} может рассматриваться как замкну-

тая траектория $\{b_{il}\}$ с $M_d=1$. Заметим, что траектории $\{b_{lg}\}_d$ может быть поставлена во взаимно однозначное соответствие последовательность конъюнкций $\{Y_l\}_d$. В свою очередь, каждой последовательности конъюнкций $\{Y_l\}_d$ соответствует последовательность наборов значений переменных $\{X_l\}_d$, являющихся решениями соответствующей системы уравнений вида (2.9).

Назовем конъюнкцию Y_l или набор значений переменных начальным (конечным), если индекс l соответствует первому индексу начального (конечного) коэффициента b_{lg} для замкнутой и второму (второму) индексу начального (конечного) коэффициента b_{lg} разомкнутой траектории $\{b_{lg}\}_d$. В соответствии с этим можно ввести обобщенные фазы и говорить о сдвиге фазы последовательности значений наборов переменных

$$\{X_{l_p}\}_d = \{X_{d_p}, \dots, X_{d_q}, X_{d_1}, X_{d_2}, \dots, X_{d_l}, \dots, X_{d_{p-1}}\} \quad (2.23)$$

относительно основной последовательности

$$\{X_l\}_d = \{X_{d_1}, X_{d_2}, \dots, X_{d_l}, \dots, X_{d_{p-1}}, X_{d_p}, \dots, X_{d_q}\}, \quad (2.24)$$

первый набор которой является начальным. При этом q равно M_l для замкнутых и M_l+1 для разомкнутых траекторий.

Учитывая сказанное, можно дать следующий метод отыскания всех решений системы (2.11), если для соответствующей ей системы (2.9) выполнено условие (1.3) или (1.7) (матрица переходов $\|b_{lg}\|$

такова, что $L_i = \begin{cases} 0 & \text{и } H_j = \begin{cases} 0 & \text{при } i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, N. \end{cases} \end{cases}$ Действи-

тельно, знание функций начальных условий, вида матрицы переходов и решений системы (2.9) полностью определяет все частные и полное решения системы (2.11). Так, если считать, что код X входит в код Y при $X \vee Y = Y$, то каждой траектории $\{b_{lg}\}_d$ соответствует частное элементарное решение

$$X_{d_{l_1}}^0(t) = \begin{cases} aX_{d_l} - \text{для } t = (k+p)\tau + t'_1 \\ \text{при } i = (k+p)_{\text{mod } M_d} \text{ и } t'_{l-1} \leq t'_1 < t'_{l+1} . \\ 0 - \text{в противоположном случае} \end{cases} \quad (2.25)$$

Здесь $a=1$ при наличии в (2.23) кода, равного одному из кодов (2.16) для инверсных и входящего в один из кодов (2.16)—для безынверсных систем уравнений, и $a=0$ —при отсутствии таких кодов в (2.23), p — начальная фаза, определяемая начальными условиями, совпадающими с набором X_{d_p} из (2.23), X_{d_l} — набор значений переменных из $\{X_{l_p}\}_d$; далее $k=0, 1, 2, \dots$ для замкнутых и $k=0, 1, 2, \dots, M_{d-p+1}$ —для незамкнутых траекторий. При этом незамкнутая траектория, начиная с $k=M_{d-p+1}$, дает продолжение решения (2.25) в виде $\{X_{01}^0(t)\}$ для инверсных и в виде $\{X_{00}^0(t)\}$ —для безынверсных и смешанных уравнений.

Набор (2.16), не являющийся решением системы (2.9), при числе нулей, большем (меньшем) числа нулей в любом из основных решений (2.9), дает периодическое решение $\{X_{10}^0(t)\}[\{X_{01}^0(t)\}]$ для инверсных систем с периодом 2τ , решение $\{X_{00}^0(t)\}[\{X_{11}^0(t)\}]$ — при числе единиц

в (2.16), большем двух) — для безынверсных* и $\{X_{00}^0(t)\}$ — для смешанных систем уравнений с запаздыванием, имея период τ . Общее решение в этом случае находится по формуле (2.19), а его максимальный период определяется матрицей переходов и равен

$$T_{\max} = \tau g \prod_{i=1}^d M_i, \quad (2.26)$$

где d — число замкнутых взаимно простых максимальных траекторий матрицы $\|b_{lg}\|$, $g=1$ для безынверсных, смешанных или инверсных систем уравнений, имеющих замкнутую траекторию с четным M_i , и $g=2$ для инверсных систем уравнений, не имеющих такой замкнутой траектории, — в случае, если начальные условия имеют нулевой, единичный или не входящий в решение системы (2.9) без запаздывания набор переменных.

В зависимости от конкретного вида начальных условий система имеет решение с периодом

$$T = \tilde{g} \tilde{\tau} \prod_{i=1}^{d'} e_i M_i, \quad (2.27)$$

где d' — число замкнутых взаимно простых, максимальных (по M_i) траекторий, имеющих в начальных условиях коды, входящие в эти замкнутые траектории, $e_i=1$ — при наличии в начальных условиях (2.15) набора переменных, входящего в соответствующую траекторию M_i , и $e_i = 1/M_i$ — при отсутствии в (2.15) соответствующего набора переменных; $\tilde{g}=1$, в случае, если в начальных условиях есть нулевой, единичный или другой набор, не являющийся решением системы (2.9) без запаздывания, и $\tilde{g}=1/g$ во всех остальных случаях; при этом $T < T_{\max}$.

Рассмотрим частный случай решения систем уравнений с запаздыванием вида (2.11) при начальных условиях, разделенных на равные интервалы времени

$$t'' = t'_\gamma - t'_{\gamma-1} = \tau/h, \quad (2.28)$$

когда в пределах данного интервала ($\gamma=1, 2, \dots, h$) начальные условия $\tilde{X}_\gamma(t')$ сохраняют постоянные значения. В этом случае для матрицы $\|b_{lg}\|$, имеющей $L_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \\ 1 & \end{cases}$ и $H_i = \begin{cases} 0 & \text{при } i, j=1, 2, \dots, N, \\ 1 & \end{cases}$, сдвиг данного частного решения относительно остальных может быть охарактеризован величиной q , где

$$t'_\gamma = (\alpha + q) t'' \quad (2.29)$$

при $q=0, 1, 2, \dots, h$ и $0 \leq \alpha < 1$.

Теорема 9. Система уравнений вида (2.11), имеющая d замкнутых траекторий с величинами $M_1 < M_2 < \dots < M_d$ и начальными условиями с h равными дискретными интервалами времени, имеет не более h

* В случае $m''=1$ симметричной безынверсной, а также в общем случае — безынверсной системы уравнений, частное решение для t'_γ находится по формуле (2.18), если в функцию начальных условий для времени t'_γ (см. (2.9)) входят „ α “ кодов X_β ($\beta=1, 2, \dots, \alpha$) траекторий $\{X_{I_1}\}, \dots, \{X_{I_\beta}\}$ ($\beta \leq \alpha$) исходной системы.

коэффициентов $e_1=1$; остальные коэффициенты $e_\gamma = 1/M_\gamma$. Система имеет максимальный период T в случае взаимно простых траекторий с $e_{d-h-\delta}=1$ ($\delta=1, 2, \dots, h$) и $e_\gamma = 1/M_\gamma$ ($\gamma=1, 2, \dots, d-h-1$).

Вернемся к случаю $L_i > 0$; $H_g > 0$ и $i=1, 2, \dots, N$. Вид всех частных решений рассмотренных систем с запаздыванием может быть найден и графически по плоскости переходов, которая строится на основе матрицы переходов $\|b_{lg}\|$ с учетом типа систем уравнений. Все траектории M_l , согласно данной $\{b_{lg}\}$, могут быть представлены в виде графиков на плоскости x, y . При этом $L_i(H_g)$ единиц в строке (столбце) матрицы означает узел с L_i сходящимися (H_g расходящимися) траекториями. На рис. 2 даны основные виды траекторий и не указаны лишь случаи многократного пересечения и касания. При этом стрелка

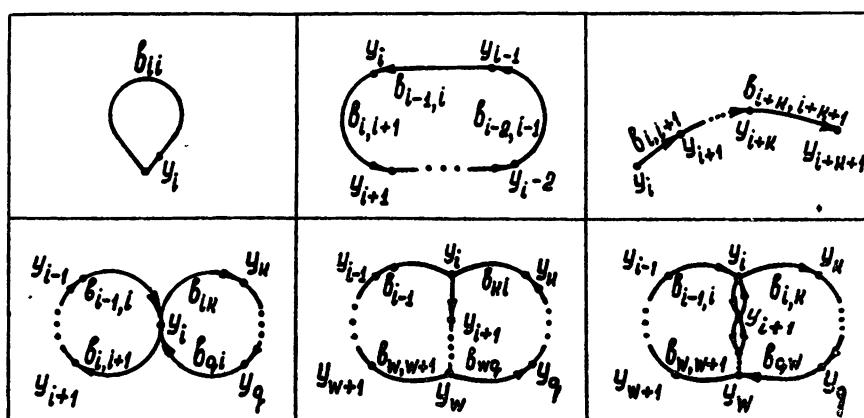


Рис. 2.

указывает направление перехода b_{lg} из состояния l в состояние g , длившееся время τ , точка — конъюнкцию Y_τ , эквивалентную решению Z_τ , соответствующей системы уравнений (2.9).

Очевидно, может быть выделено несколько типов узлов с прилежащими к ним участками траектории в зависимости от вида систем уравнений, как это и показано на рис. 3. Во всех случаях, отмеченных звездочкой (см. рис. 3), система имеет решение, значение которого через время τ равно дизъюнкции решений, соответствующих конъюнкциям Y_{τ_δ} при $\delta=1, 2, \dots, \beta$. Во всех случаях, отмеченных двумя звездочками, для каждого последующего момента времени $t' + \tau$ решение системы уравнений определяется рис. 3, если конъюнкция $W_{\tau_\delta}(t)$ для $\delta=1, 2, \dots, \beta$ взаимно ортогональны и равны дизъюнкции тех решений, конъюнкция $W_{\tau_\delta}(t)$ которых не ортогональны. (Здесь $W_{\tau_\delta}(t) = -Z_{\tau_\delta}(t)Y_{\tau_\delta}(t)$; $Y_{\tau_\delta}(t)$ — одна из конъюнкций правых частей уравнений, $Z_{\tau_\delta}(t)$ — безынверсная конъюнкция левых частей всех уравнений, в которые входит конъюнкция $Y_{\tau_\delta}(t)$.) Переход системы при начальных условиях, не совпадающих ни с одним из решений системы (2.9), дан на рис. 4. Случай, отмеченный звездочкой в момент времени $t=t'+\tau$, дает значение $X^0(t'+\tau)$, равное дизъюнкции наибольшего числа основ-

Безинверсная система	Смешанная система с инверсной основой	Инверсная система	Вид особой точки

Рис. 3.

ных решений соответствующей системы (2.9) $X^0(t' + \tau) = \sum_{j=1}^n X_{ij}^0(t')$, при котором $\tilde{X}(t') V \sum_{j=1}^n X_{ij}^0(t') = \tilde{X}(t')$.

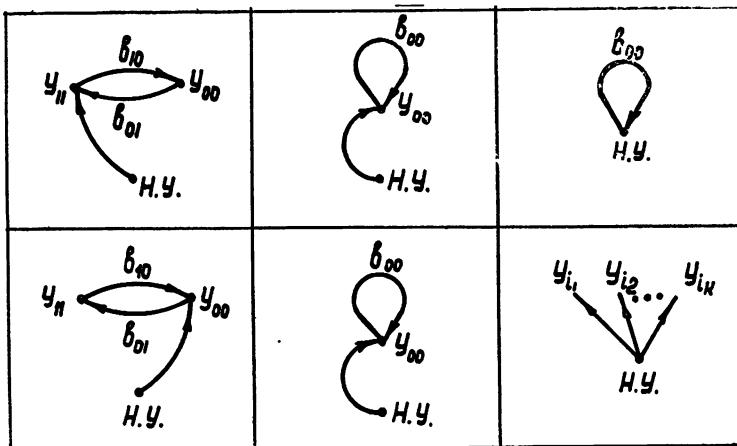


Рис. 4.

Таким образом, для каждой системы уравнений с запаздыванием может быть дана плоскость переходов с учетом рис. 2 и 3. По каждым начальным условиям (2.16) с учетом рис. 4 легко находятся все частные решения системы. Общее решение системы при данных начальных условиях определяется из (2.19), а наибольший период — из (2.26).

В общем случае решение системы (2.11) может быть представлено в виде двух составляющих $X^0(t) = X_1^0(t) V X_2^0(t)$, где $X_1^0(t)$ — периодическая часть решения, а $X_2^0(t)$ — непериодическая, определяемая незамкнутыми траекториями до момента $t_1 = \alpha_l \tau + t'_1$ (при $\alpha_l = M_l - p_l$ максимальном среди всех незамкнутых траекторий для наборов (2.16) начальных условий (2.15) и переходных частей замкнутых траекторий).

Обратная задача синтеза систем уравнений вида (2.11) с заданными решениями и периодом не представляет труда и ясна из предыдущего и нижеприведенных примеров.

В качестве одного из примеров рассмотрим систему вида (1.10) с запаздыванием на величину τ и с диагональной матрицей переходов

$\| b_{lg} \|$ при начальных условиях $\tilde{X}(\tau)$, разбитых на 16 участков, как это показано в таблице 1. В ней приведены также решения системы уравнений (период решения 2τ). Аналогично в таблице 2 даны начальные условия и решение системы (1.12) с запаздыванием τ и диагональной матрицей переходов. В связи с отсутствием решений вида $\{X_{01}^0(t)\}$ и $\{X_{10}^0(t)\}$ система имеет решение периода τ .

Решения тех же систем (1.10) и (1.12) с запаздыванием, преобразованных на основе матрицы переходов $\| b_{lg} \|$, будут иметь в зависимости от начальных условий и вида матрицы различный период и порядок смены частных решений. Рассмотрим еще несколько конкретных примеров для различных матриц переходов и начальных условий.

1) Циклическая матрица переходов, представленная в таблице 3 и имеющая одну замкнутую траекторию, включающую все индексы конъюнкций системы. В этом случае системы уравнений (1.10) и (1.12) с запаздываниями имеют вид

Таблица 1

X_j	γ	$\tilde{X}_j(t')$	$X_j^0(t')$	$X_j^0(t' + \tau)$	$X_j^0(t' + 2\tau)$
	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	1 2 3 4 5 6
x_1	0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0	0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1	1 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1	1 0 0 1 1 0
x_2	0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1	1 0 0 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1	0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1	1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1	1 0 0 1 1 0
x_3	0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1	1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1	0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1	1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1	1 0 0 1 1 1
x_4	0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1	1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0	0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0	1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1	1 0 0 1 1 1
x_5	0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0	0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0	1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1	1 0 0 1 1 1

Таблица 2

X_j	γ	$\tilde{X}_j(t')$	$X_j^0(t')$	$X_j^0(t' + \tau)$	$X_j^0(t' + 2\tau)$
	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	1 2 3 4 5 6
x_1	0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0	0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0	0 0 0 0 0 0
x_2	0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1	0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1	0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1	0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0	0 0 0 0 0 0
x_3	0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1	0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1	0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1	0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0	0 0 0 0 0 1
x_4	0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1	0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0	0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0	0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0	0 0 0 0 0 1
x_5	0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1

Таблица 3

$Y_j(t' + \tau)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Y_i(t)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

$$\begin{aligned}
x_1 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\
x_2 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\
x_3 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \quad (2.30) \\
x_4 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\
x_5 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\
x_1 &= \langle \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \\
&\quad \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\
x_2 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \\
&\quad \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\
x_3 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \\
&\quad \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \quad (2.31) \\
x_4 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \\
&\quad \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\
x_5 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \\
&\quad \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}.
\end{aligned}$$

В таблицах 4 и 5 даны начальные условия и решения этих систем, имеющие период 10τ .

2) Матрица переходов, имеющая три замкнутых траектории (таблица 6) с $M_1=5$, $M_2=3$, $M_3=2$. В этом случае система (1.10) и (1.12) с запаздыванием имеют вид

$$\begin{aligned}
x_1 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\
x_2 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\
x_3 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 \rangle_{\tau};
\end{aligned}$$

Таблица 4

γ	$X_j(t')$	$X_j^0(t')$	$X_j^0(t'+\tau)$	$X_j^0(t'+2\tau)$	$X_j^0(t'+3\tau)$	$X_j^0(t'+4\tau)$	$X_j^0(t'+5\tau)$	$X_j^0(t'+6\tau)$	$X_j^0(t'+7\tau)$	$X_j^0(t'+8\tau)$	$X_j^0(t'+9\tau)$	$X_j^0(t'+10\tau)$
x_1	0 1 0 0 0	1 0 0 0 1	0 1 0 1 0	1 0 0 0 1	0 1 1 1 0	1 0 1 0 1	0 1 1 0 1	0 1 1 1 0	0 1 0 1 0	1 0 1 0 1	0 1 0 1 0	1 0 0 0 1
x_2	0 1 0 1 0	1 0 1 0 1	0 1 0 1 0	1 1 1 0 1	0 1 0 1 0	0 1 0 1 0	1 0 0 0 1	0 1 0 0 1	0 1 0 1 0	1 0 1 0 1	0 1 0 1 0	1 0 1 0 1
x_3	0 1 1 1 0	1 0 0 0 1	0 0 0 1 0	0 1 1 1 0	1 0 1 0 1	0 1 0 1 0	0 1 1 1 0	1 0 0 0 1	0 1 0 1 0	0 1 0 1 0	1 0 0 0 1	1 0 0 0 1
x_4	0 1 1 1 1	1 0 1 0 1	0 1 0 1 0	1 0 1 0 1	0 1 1 1 0	1 0 0 0 1	0 1 1 1 0	1 0 0 0 1	0 1 1 1 0	1 0 1 1 0	1 0 1 1 0	1 0 1 0 1
x_5	0 1 1 1 1	1 0 1 0 1	0 1 0 1 0	1 1 1 0 1	0 0 0 1 0	0 1 1 1 0	1 0 1 0 1	0 1 0 1 0	1 0 1 0 1	0 1 1 1 0	1 0 1 1 0	1 0 1 0 1

Таблица 5

γ	$\tilde{X}(\ell')$	$X_j^0(\ell')$	$X_j^0(\ell'+\tau)$	$X_j^0(\ell'+3\tau)$	$X_j^0(\ell'+4\tau)$	$X_j^0(\ell'+5\tau)$	$X_j^0(\ell'+6\tau)$	$X_j^0(\ell'+7\tau)$	$X_j^0(\ell'+8\tau)$	$X_j^0(\ell'+9\tau)$	$X_j^0(\ell'+10\tau)$
x_1	0 1 0 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0
x_2	0 1 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0
x_3	0 1 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0
x_4	0 1 1 0 1	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0
x_5	0 1 1 0 1	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 0 0

$$\begin{aligned} x_4 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\ x_5 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \rangle_{\tau}; \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \langle \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \\ &\quad \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \rangle_{\tau}; \\ x_2 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee \\ &\quad \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\ x_3 &= \langle \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \\ &\quad \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \\ &\quad \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \rangle_{\tau}; \\ x_5 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \\ &\quad \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 \rangle_{\tau}; \end{aligned}$$

их наибольший период решения 30 τ .

Таблица 6

$Y_j(t)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

3) Матрица переходов (таблица 7), имеющая две замкнутых траектории с $M_1=7$ и $M_2=3$. В этом случае преобразованная инверсная система уравнений (1.10) с запаздыванием имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\ x_2 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\ x_3 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \\ x_4 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \rangle_{\tau}; \\ x_5 &= \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_4 \bar{x}_5 \rangle_{\tau}; \end{aligned} \quad (2.34)$$

ее наибольший период решения $T=2 \cdot 7 \cdot 3\tau=42\tau$. Та же система (2.34) в случае смешанных конъюнкций или представлений в СНДФ имеет наибольший период $T=21\tau$.

Таблица 7

$Y_j(t+\tau)$	$Y_i(t)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
2		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

На основе рассмотренного может быть выполнен синтез систем (автоматов [5]), имеющих различный вид и период решений. Аналогичные теоремы имеют место для более широкого класса систем уравнений, описанных в работе [1], с введенными в них запаздываниями и преобразованиями согласно матрице переходов.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Рассмотренные системы уравнений могут моделироваться на одном из полных наборов логических элементов любой физической природы. В общем случае схемы физических моделей для систем уравнений (1.1) и (1.2), разрешенных относительно переменных, даны соответственно на рис. 1а и 1б.

Назовем состояние физической модели, описываемое системой уравнений (1.1) или (2.1), устойчивым, если это состояние сохраняется соответственно в течение времени δt или $\tau + \delta t$; в противном случае оно неустойчиво. Состояния, которые не могут быть реализованы в системе ни в какой момент времени, кроме времени действия начальных условий, назовем противоречивыми.

Устойчивость состояния физической модели зависит от ее конфигурации, определяемой системой уравнений, и характеристик физических элементов, использованных при моделировании. Отвлечемся от характеристик физических элементов и будем считать, что устойчивость определяется только конфигурацией модели. В этом случае могут быть сформулированы некоторые утверждения, связывающие решения систем уравнений и устойчивые состояния соответствующих им физических моделей.

Теорема 10. Каждому решению системы уравнений вида (1.1) или (2.1) соответствует эквивалентное ему состояние выходов физической модели.

Система уравнений может иметь не более 2^n различных наборов составляющих решений. Эти 2^n наборов могут быть разбиты, согласно системе (2.9), на наборы, являющиеся решениями, и наборы $\{X\}^{\text{III}}$, не являющиеся решениями системы, которые могут быть заданы только в начальных условиях. Вторую группу наборов назовем противоречивыми. В свою очередь, наборы первой группы в зависимости от коэф-

фициентов системы уравнений b_{lg} могут быть разбиты на две группы: а) наборы $\{X\}^I$, имеющие период τ (при этом $l=g$) и называемые устойчивыми; б) наборы $\{X\}^{II}$, соответствующие $l \neq g$ и называемые неустойчивыми.

Физические модели рассмотренных систем уравнений также имеют эквивалентные устойчивые, неустойчивые и противоречивые состояния. При этом устойчивые решения дают периодические с периодом τ или постоянные наборы состояний выходов физической модели; неустойчивые — не периодические, переходящие в периодические или периодические с периодом $a\tau$ ($a=2, 3, \dots, M_d$); противоречивые решения не имеют эквивалентных состояний выходов физической модели.

Для моделирования в качестве полного набора элементов примем элементы дизъюнкции, конъюнкции и инверсии и будем обозначать их

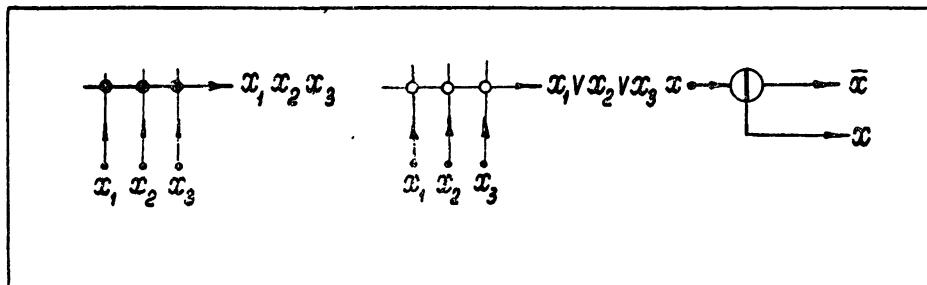


Рис. 5.

как в [2] или на рис. 5. Тогда схема модели системы (1.10) будет иметь вид, показанный на рис. 6а и состояния выходов, соответствующие

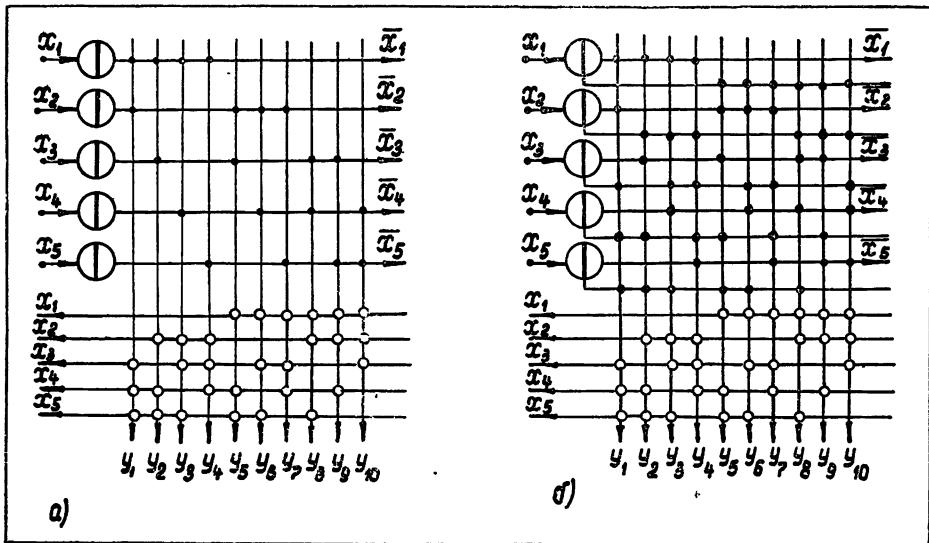


Рис. 6.

решениям этой системы. Логическая схема модели системы уравнений вида (1.12) дана на рис. 6б; все устойчивые состояния схемы определяются решениями этой системы. Те же уравнения (1.10) и (1.12), но с запаздыванием вида (2.1), имеют аналогичные схемы с той лишь

разницей, что в цепях обратных связей включены элементы задержки на величину τ . Эти схемы моделей имеют состояния, определяемые в зависимости от начальных условий теоремами 8 и 9 для случая диагональной матрицы переходов.

На основе рассмотренных систем уравнений могут быть построены многие логические схемы моделей. От этих схем можно перейти к физическим моделям; некоторые примеры моделирования рассмотренных систем уравнений даны в работах [1,2].

Ниже приведем несколько примеров моделирования систем уравнений с запаздыванием на двухтактных ферритовых схемах и транзисторах. Пусть I —ток, достаточный для перевода выбранного типа феррита с прямоугольной петлей гистерезиса из одного насыщенного состояния (единицы), в другое (нуль). Для удобства начертания схем введем следующие условные обозначения: тороид феррита—прямая жирная линия; обмотка с током установления 1 (0)—прямая, пересекающая феррит, с точкой над или слева (под или справа) линии феррита; обмотка считывания—прямая, пересекающая феррит с точками слева и справа (или над и под) линией феррита; проводник, не имеющий обмотки на феррите—прямая, пересекающая линию феррита без точек. В этом случае элементы, используемые при моделировании, могут быть условно изображены, как это показано на рис. 7.

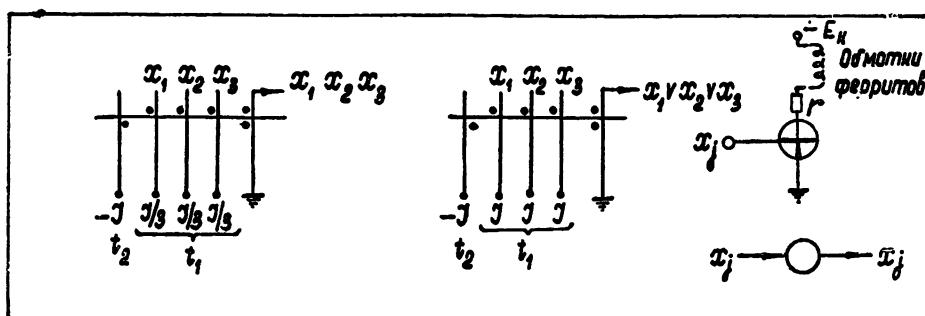


Рис. 7.

Если через t_1 и t_2 обозначить тактовые импульсы, сдвинутые друг относительно друга на $\tau/2$ и обеспечивающие работу двухтактных ферритовых схем, то последовательное соединение элементов дизъюнкции и конъюнкции (или наоборот) дает задержку выходного сигнала по отношению к входному на величину, равную периоду следования тактовых импульсов. Следовательно, в этом случае можно не вводить в модели специальных элементов задержки при моделировании систем уравнений (2.6). На рис. 8а, б, в, г, д и е даны логические схемы моделей систем уравнений (1.10) и (1.12) с запаздыванием для матриц переходов, приведенных соответственно в таблицах 3, 6 и 7. На рис. 9 даны аналогичные схемы, выполненные на элементах рис. 7, причем схемы рис. 9а, в и д выполнены в соответствии с безынверсной системой уравнений, имеющей конъюнкции, дополнительные к конъюнкциям систем (1.10); схема же рис. 9б, г и е соответствует схемам рис. 8б, г и е с той лишь разницей, что инверсия получается соответствующим направлением намотки ферритов, образующих конъюнкции. Для простоты на схемах упрощены изображения импульсных усилителей, а также не указаны диоды, стоящие последовательно со

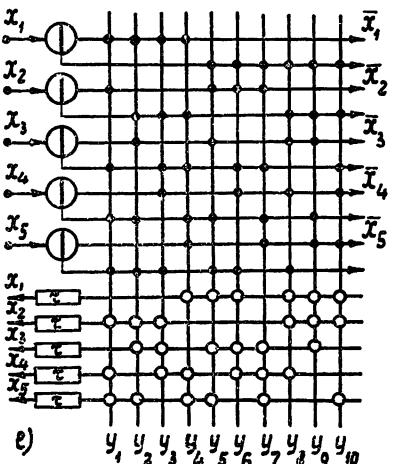
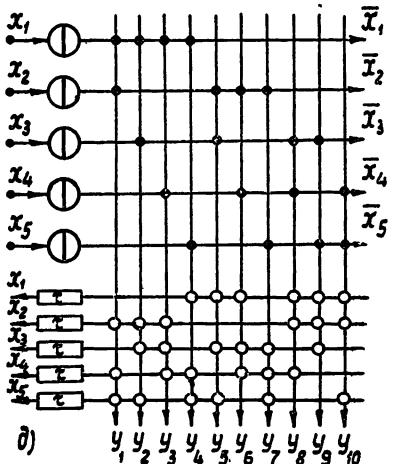
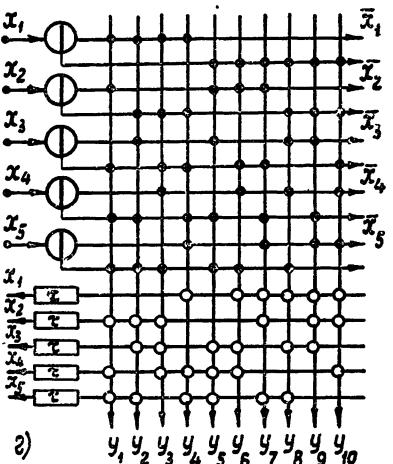
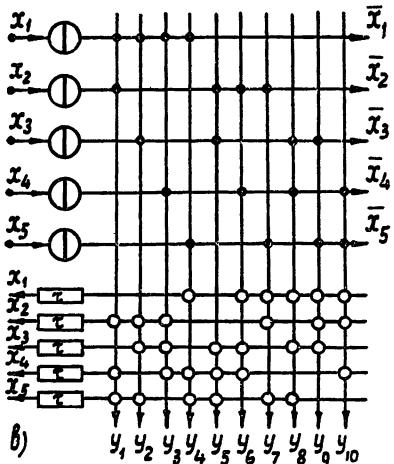
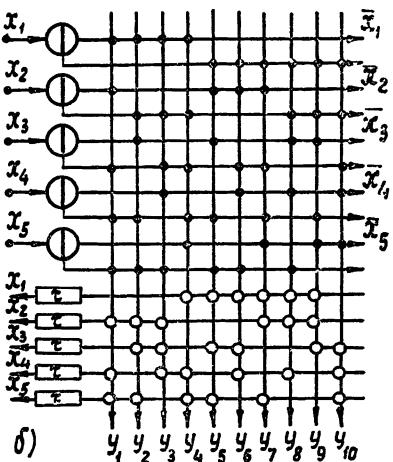
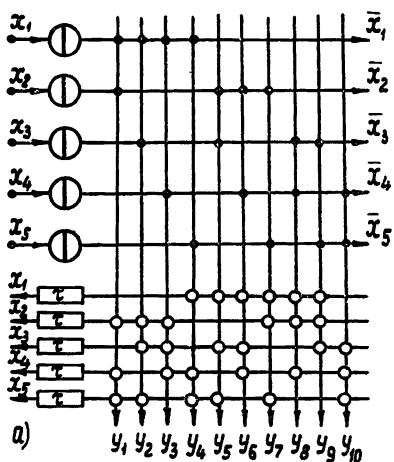


Рис. 8.

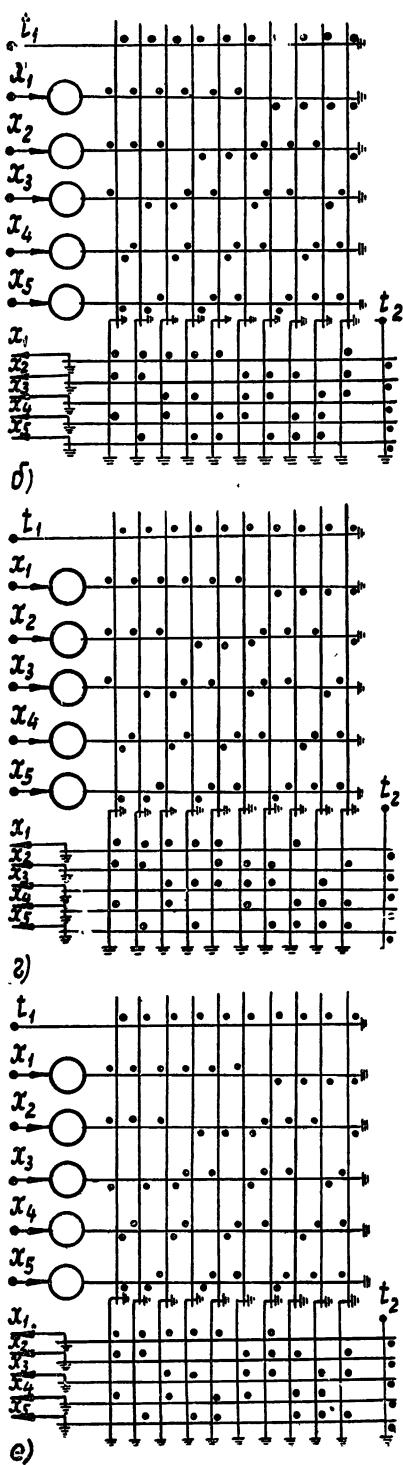
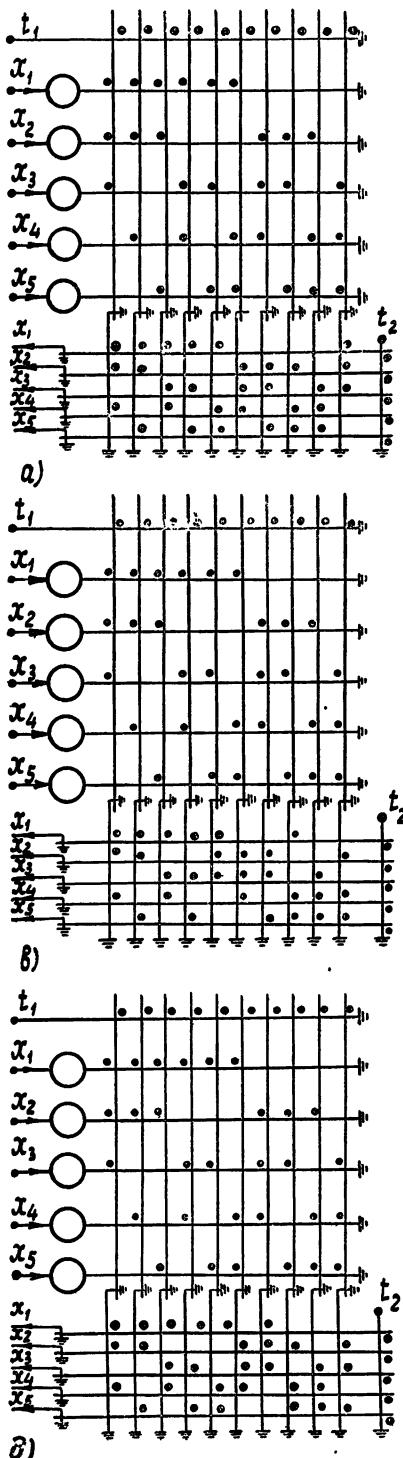


Рис. 9,

всеми считающими обмотками, и сопротивления в цепях коллекторов усилителей, обеспечивающие необходимые токи в обмотках.

Все эти схемы имеют в цепях обратной связи дискретные единичные задержки на один такт τ . Поэтому, согласно теоремам 8 и 9, в физических моделях рис. 8а, б может существовать рециркуляция одного типа с периодом 10τ . Для схем рис. 8в и г—три типа рециркуляции соответственно с периодами 5τ , 3τ или 2τ . Для схем рис. 8д и е—два типа рециркуляции с периодами 7 или 3. В случае, если в схемах рис. 8в, г, д, е ввести в цепи обратных связей соответственно 6-ти и 4-х тактные ферритовые ячейки, то период схем 8в и г, д, е может быть увеличен до 30τ и 42τ .

Из схем рис. 9 легко могут быть получены счетчики импульсов с различным модулем счета. Для схем рис. 9а, б будет модуль 10, для схем рис. 9в, г в зависимости от начальных условий—5,3 или 2, для схем рис. 9д—7,3 и 2, для схемы рис. 9е—6,7 и 3. Для этого достаточно на один из входов (например, t_1) подавать тактовые импульсы, а на второй (например, t_2)—импульсы, подлежащие счету. Необходимо лишь, чтобы импульсы, подлежащие счету, не подавались чаще, чем через период следования тактовых импульсов (t_2).

В случае наличия в модели замкнутых траекторий, разделив цепь сдвига t_1 на h групп t_1^i ($i=1, 2, \dots, h$), в каждую из которых входят все элементы конъюнкции, относящиеся к данной траектории M_i , получим счетчик h различных последовательностей импульсов.

В настоящее время выполнен ряд генераторов импульсов (счетчиков) с одной замкнутой траекторией на $N=10$, $N=15$ и $N=35$ выходов (состояний), работающих на частоте 100 и 200 кгц. Схемы выполнены на кристаллических диодах, триодах и ферритах. Путем намотки на конъюнктивные ферриты по одной дополнительной обмотке (с последовательно включенным диодом), выдающей импульс при сбросе феррита на ноль импульсом t_1 , со схем получено вдвое больше выходов (т. е. 20, 30 и 70) удвоенной частоты.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 1, № 2, 169 (1958).
- 2 М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 588 (1962).
3. С. В. Яблонский, Труды МИАН, 51, 158 (1958).
4. Д. Гильберт, В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, М., 1957.
- 5 В. М. Глушков, Синтез цифровых автоматов, Физматгиз, М., 1962

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
6 апреля 1962 г.

ON THE DISCRETE CONTROL SYSTEMS SYNTHESIS ON THE BASIS OF SETS OF LOGIC ALGEBRA EQUATIONS WITH DELAY

Eingorin M. Ya.

Some sets of logic algebra equations with delay which describe the autonomous and non-autonomous feedback discrete systems are considered. Physical models of the systems are given the functions of which are equivalent to all sorts of counters, pulse generators, dynamic triggers and other devices.

О ПРИМЕНЕНИИ ДВУХПОЛЮСНИКА, СОДЕРЖАЩЕГО ТУННЕЛЬНЫЙ ДИОД И ТРАНЗИСТОР, В ЭЛЕМЕНТАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Н. И. Ашбель, И. С. Емельянова и Л. В. Постников

Для двухполюсника, содержащего туннельный диод и транзистор, получены условия неоднозначной зависимости тока от напряжения, аналогичной статической характеристике тиратрона. Показана возможность синтеза элементов вычислительных устройств, в которых надежность и наличие параллельного выхода, свойственные тиратронным схемам, сочетаются с большим быстродействием. Проведена экспериментальная проверка работы кольцевого счетчика с применением такого двухполюсника.

Как известно, особенностью вольтамперной характеристики туннельного диода является неоднозначная зависимость напряжения от тока. Это обстоятельство используется при конструировании схем с несколькими состояниями равновесия. При этом обычно практикуется последовательное соединение туннельных диодов [1]. На этом принципе выполнены счетчики, регистры и дешифраторы вычислительных машин [2,3]. Однако последовательное соединение туннельных диодов при отсутствии специальных трансформаторов исключает возможность снятия напряжения с отдельного диода относительно общей точки.

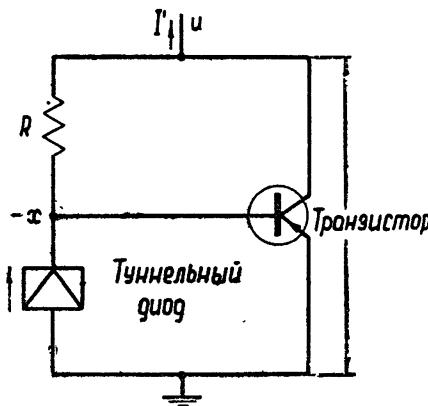


Рис. 1. Исследуемая схема.

Анализ схемы рис. 1 [2,4] позволил обнаружить аналогию между зависимостью тока I' от напряжения u и вольтамперной характеристикой тиратрона, в связи с чем представляется возможным повысить быстродействие надежных тиратронных схем триггеров, счетчиков, регистров [5,6] с параллельным выходом, поскольку частотный диапазон как у туннельного диода, так и у транзистора значительно шире, чем у тиратрона. В обозначениях рис. 1 уравнения схемы имеют вид

$$u + v_k - x = 0;$$

$$\begin{aligned}
 v_e &= x; \\
 I' + \frac{x-u}{R} + g'_m v_k - \alpha g'_n v_e &= 0; \\
 \frac{x-u}{R} + i + g'_m (1-\beta) v_k + g'_n (1-\alpha) v_e &= 0; \\
 i = f(x).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u — напряжение коллектора относительно земли, v_k и v_e — напряжения коллектора и эмиттера относительно базы транзистора, g'_m и g'_n — проводимости коллекторного и эмиттерного переходов, принимающие по два значения — одно для открытого ($m, n=1$) и одно для закрытого перехода ($m, n=0$)*, α и β — безразмерные константы, меньшие единицы; смысл остальных обозначений ясен из рис. 1. Последнее уравнение системы (1) является вольтамперной характеристикой туннельного диода (рис. 2).

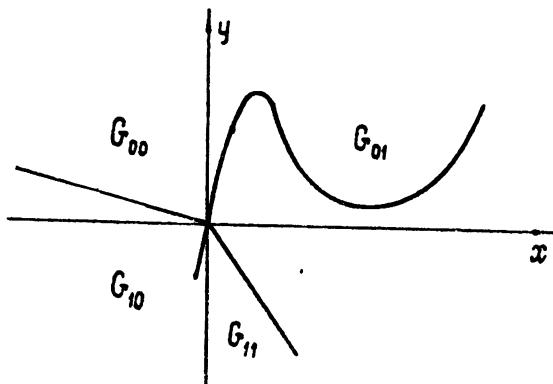


Рис. 2. Вольтамперная характеристика туннельного диода.

Система уравнений (1) написана для областей G_{mn} транзистора [7], определяемых неравенствами:

$$(-1)^m v_k \leq 0, \quad (-1)^n v_e \leq 0. \tag{2}$$

Проведя замену переменных

$$RI'=I; \quad Rg'_m=g_m; \quad Rg'_n=g_n; \quad Ri=y; \quad Rf(x)=\varphi(x),$$

преобразуем систему уравнений (1) и неравенства (2) к виду:

$$\left. \begin{array}{l} u - I - g_m v_k = (1 - \alpha g_n) x; \\ u - (1 - \beta) g_m v_k = [1 + (1 - \alpha) g_n] x + y; \\ u + v_k = x; \\ y = \varphi(x); \end{array} \right\} \tag{3}$$

$$(-1)^m v_k \leq 0; \quad (-1)^n x \leq 0. \tag{4}$$

* Для того, чтобы различать проводимости коллекторного и эмиттерного переходов, условимся при подстановке вместо m и n их значений (0;1) сохранять эти индексы, перенося их вверх.

Найдя из уравнений (3) функцию $v_k = v_k(x, y)$ и подставив ее в неравенство (4), получим разбиение плоскости x, y на области G_{mn} (рис. 2):

$$(-1)^m [y + (1 - \alpha) g_n x] \geq 0, \quad (-1)^n x \leq 0.$$

Очевидно, что нелинейная часть вольтамперной характеристики туннельного диода целиком расположена в рабочей области G_{01} транзистора.

Для построения характеристики туннельного диода на плоскости переменных u, I необходимо предварительно выяснить расположение рабочей области G_{01} на этой плоскости. Разрешая систему (3) относительно переменных $v_k = v_k(u, I)$, $x = x(u, I)$ и используя неравенства (4), находим:

$$(-1)^m \frac{I - \alpha g_n u}{1 + g_m - \alpha g_n} \geq 0; \quad (-1)^n \frac{I - (1 + g_m) u}{1 + g_m - \alpha g_n} \geq 0.$$

На рис. 3а и 3б показано расположение областей G_{mn} на плоскости u, I ; рис. 3а соответствует случаю $\alpha g_1^n > 1 + g_0^m$ или $1/R < \alpha g_1'^n - g_0'^m$, для рис. 3б справедливо противоположное неравенство.

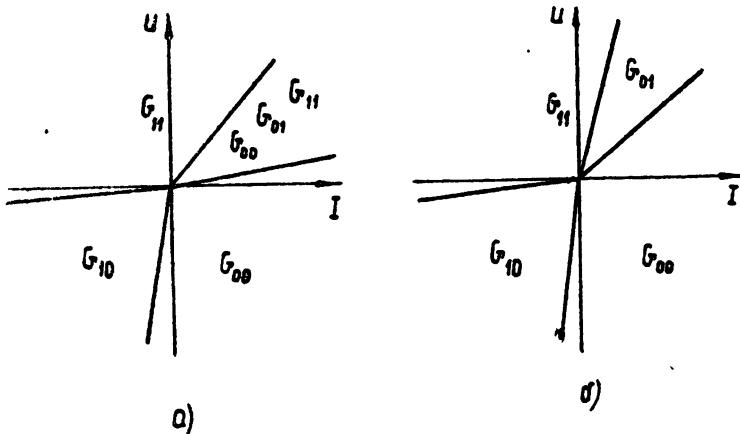


Рис. 3. Расположение областей G_{mn} на плоскости u, I .

Найдем в явном виде зависимость u (I). Для этого определим из первых трех уравнений системы (3) $x = x(u, I)$, $y = y(u, I)$:

$$x = \frac{(1 + g_m) u - I}{1 + g_m - \alpha g_n}; \quad (5)$$

$$y = -\frac{g_n [1 + (1 - \alpha \beta) g_m] u - [1 + (1 - \beta) g_m + (1 - \alpha) g_n] I}{1 + g_m - \alpha g_n}.$$

Проведем кусочно-линейную аппроксимацию характеристики туннельного диода

$$y = k_i x + b_i \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad (6)$$

где k_i и b_i выбираются согласно графику рис. 4. Уравнения (6) после подстановки выражений (5) примут вид

$$u = K_i I + B_i,$$

где

$$K_i = \frac{1+k_i + (1-\beta)g_m + (1-\alpha)g_n}{(1+g_m)k_i + g_n [1+(1-\alpha\beta)g_m]},$$

$$B_i = \frac{b_i(\alpha g_n - 1 - g_m)}{(1+g_m)k_i + g_n [1+(1-\alpha\beta)g_m]}.$$
(7)

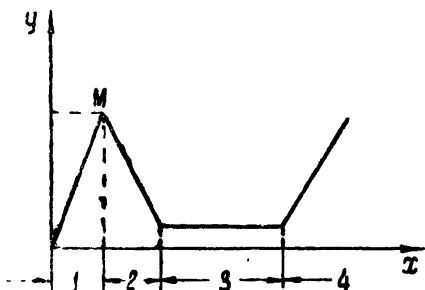


Рис. 4. Кусочно-линейная аппроксимация характеристики туннельного диода.

Заметим, что в области G_{01} величина K_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения в зависимости от параметров схемы.

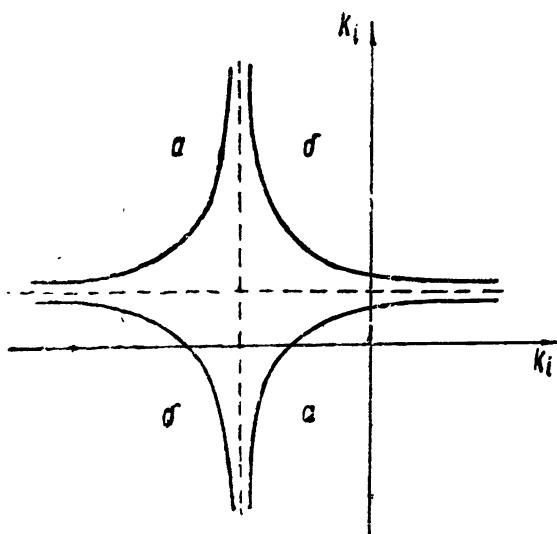


Рис. 5. График зависимости K_i от k_i .

Диаграмма рис. 5, построенная на основании формулы (7), позволяет производить выбор величин K_i для получения желаемой формы кривой $i=i(I)$. При $1/R < \alpha g'_m - g'_n$ коэффициенты K_i располагаются на ветвях гиперболы a , для противоположного неравенства значения K_i лежат на ветвях гиперболы b .

Границы разбиения плоскости параметров $1/R$ и g_2 ($g_2 = k_2/R$) определяются уравнениями

$$1/R - g_2 + (1-\beta)g'_m + (1-\alpha)g'_n = 0;$$

$$-g_2(1/R + g'_m) + g'_n[1/R + (1-\alpha\beta)g'_m] = 0;$$

$$1/R + g'_m - \alpha g'_n = 0.$$

Разбиение плоскости $1/R, g_2$ на области различного качественного поведения кривых $u(I)$ проведено на рис. 6. Вычисления показали, что все три границы пересекаются в точке A с координатами

$$(1/R)_A = \alpha g'_n - g'_m, \quad (g_2)_A = g'_n - \beta g'_m.$$

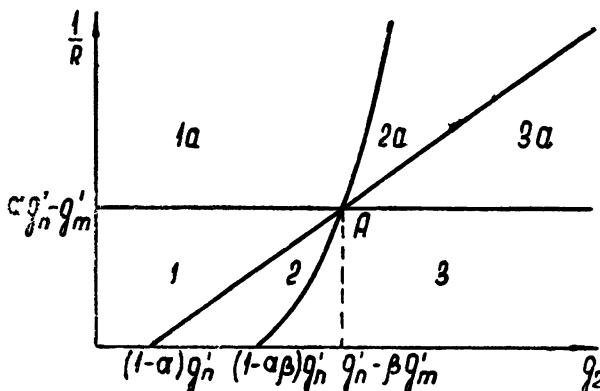


Рис. 6. Разбиение плоскости параметров $1/R, g_2$.

Рис. 7а—7м иллюстрируют зависимость $u(I)$ в каждой из этих областей для случаев $k_1 > k_4$ и $k_1 < k_4$. Области 1 и 1а рис. 6, соответствующие малым значениям абсолютных величин отрицательного сопротивления тунNELьного диода, дают однозначную зависимость I от u (рис. 7а, б, ж, з). В областях 2 и 2а рис. 6 при некоторых значениях параметров $1/R$ и g_2 получается неоднозначная зависимость между I и u , причем в области 2 график функции $u(I)$ подобен характеристике тиратрона (рис. 7в, и), а в области 2а зависимость $u(I)$ аналогична характеристике тунNELьного диода (рис. 7г, к). Наконец, для величин параметров областей 3 и 3а рис. 6 характеристика неоднозначна как по напряжению u , так и по току I ; однако в области 3 преобладает качественная близость к характеристике тиратрона (рис. 7д, л), в то время как в области 3а превалирует качественная близость к характеристике тунNELьного диода (рис. 7е, м).

Таким образом, с точки зрения поставленной задачи преимущественный интерес представляют значения $1/R$ и g_2 , лежащие в областях 2 и 3 рис. 6. Для оценки влияния параметра $1/R$ на рабочее напряжение u воспользуемся системой (5):

$$u = \frac{[1/R + (1-\beta) g'_m + (1-\alpha) g'_n] x + i}{1/R + (1-\beta) g'_m}. \quad (8)$$

График этой функции представлен на рис. 8. Точкам u_1 , u_2 и u_3 соответствуют напряжения

$$u_1 = \left[1 + \frac{(1-\alpha) g'_n}{(1-\beta) g'_m} \right] x + \frac{i}{(1-\beta) g'_m}; \quad u_2 = \frac{(g'_n - \beta g'_m)x + i}{\alpha g'_n - \beta g'_m}; \quad u_3 = x.$$

Количественная оценка этих величин дает для u_1 значение порядка десятков киловольт, а для u_2 и u_3 — порядка десятых долей вольта.

Изложенное позволяет сделать следующие выводы. 1) Подбором сопротивления R в рассматриваемой схеме характеристика тиратрон-

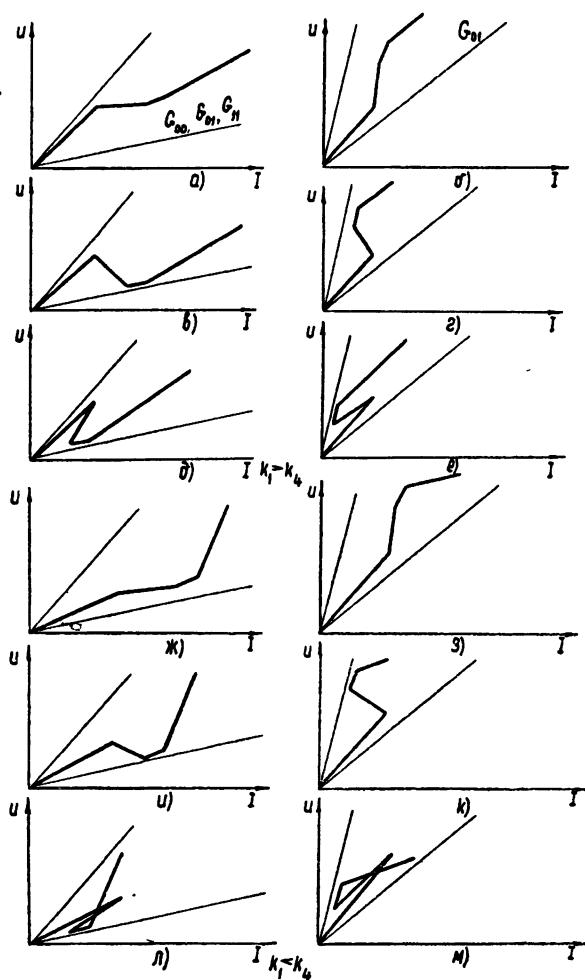


Рис. 7. Зависимость u (I) в каждой из областей рис. 6 для случаев $k_1 > k_4$ и $k_1 < k_4$.

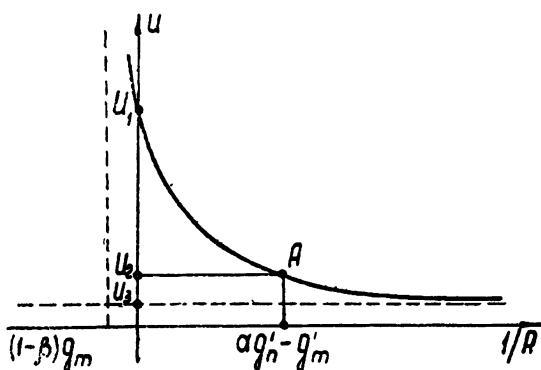


Рис. 8. График зависимости u от параметра $1/R$.

ногого типа может быть получена на всем диапазоне рабочих напряжений транзистора. 2) Характеристика типа туннельного диода получается при столь малых напряжениях на коллекторе, что транзистор почти не играет никакой роли. 3). Максимум напряжения вольтамперной характеристики исследуемой схемы совпадает с рабочим напряжением на коллекторе транзистора при значении R , определяемом из уравнения (8):

$$R = \frac{u - x}{[(1 - \beta) g'_m + (1 - \alpha) g'_n] x - (1 - \beta) g'_m u + i}$$

или приближенно

$$R \approx \frac{u}{(1 - \alpha) g'_n x - (1 - \beta) g'_m u + i}.$$

Экспериментально снятые вольтамперные характеристики рассматриваемого двухполюсника качественно согласуются с расчетными. Данный двухполюсник был использован в кольцевом счетчике (рис. 9),

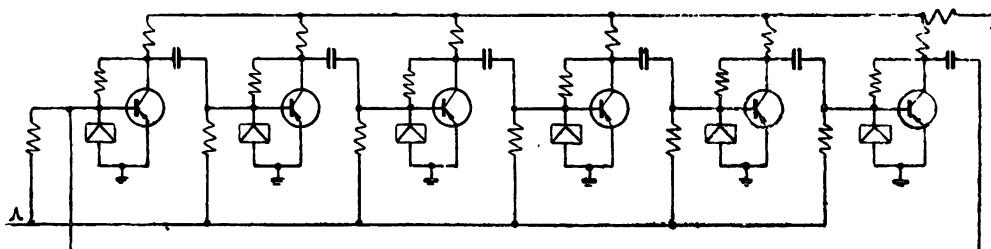


Рис. 9. Схема шестеричного кольцевого счетчика.

предназначенном для работы на частоте 10 кГц. Частотные пределы этого счетчика не исследовались экспериментально, но крутизна передних и задних фронтов генерируемых счетчиком импульсов дает основание полагать, что на обычных транзисторах частоту запускающих импульсов можно довести до 100 кГц; при использовании дрейфовых триодов эта граница может быть значительно повышена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. Туннельные диоды, ИЛ, М., 1961, стр. 64.
2. J. J. Amodey and W. F. Kosoposky, RCA Rev. Tech. J., 22, 669 (1961).
3. Ph. Spiegel, Rev. Sci. Instr., 31, 754 (1960).
4. C. D. Todd, Electronic Design, 26, 48 (1961).
5. А. С. Котосонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 319 (1961).
6. Л. Н. Кораблев, Лампы с холодным катодом, изд. АН СССР, М., 1961.
7. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 767 (1959).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 июня 1962 г.

ON THE USE OF IMPEDOR CONTAINING TUNNEL DIODE AND TRANSISTOR IN COMPUTER CIRCUITS

N. I. Ashbel, I. S. Emelianova, L. V. Postnikov

For the impedor containing a tunnel diode and a transistor the conditions have been obtained of an ambiguity of the current dependence upon the voltage, the dependence being analogous to the static characteristic of a thyratron. A possibility is pointed out of the synthesis of the computers elements reliability of which and availability of a parallel output, being typical for thyratron schemes, are combined with a higher speed of the operation. An experimental test is carried out of the operation of the ring counter with the impedor.

К РАСЧЕТУ СТАБИЛИЗАТОРА НАПРЯЖЕНИЯ НА ТРАНЗИСТОРАХ

Л. В. Постников, В. Е. Ляпухов

Рассмотрена упрощенная схема компенсационного стабилизатора напряжения на транзисторах. В плоскости питающих напряжений выделена область, соответствующая нормальному режиму работы. В пределах этой области получена зависимость выходного напряжения от напряжений питания и параметров схемы. Проведено исследование устойчивости при отсутствии корректирующих элементов.

Исследованию стабилизаторов напряжения на полупроводниковых триодах посвящено большое число работ (см., например, [1-9]); однако некоторые вопросы стабилизации напряжения до сих пор не получили достаточно полного освещения. В большинстве случаев расчет стабилизаторов проводится на основе линейно-статической идеализации транзисторов, которая не дает возможности определить пределы стабилизации, подобрать режим питания триодов, найти условия устойчивости и т. д. Для выяснения первых двух вопросов необходим нелинейный подход, для выяснения третьего следует учесть диффузию заряда в базе.

В предлагаемой статье делается попытка использовать для расчета стабилизаторов математический аппарат, примененный к исследованию автоколебательных систем [10-13]. Здесь рассматриваются две стороны работы стабилизатора напряжения: 1) стабильность выходного напряжения при изменении питающего напряжения и нагрузки, 2) устойчивость и основные причины, приводящие стабилизатор к самовозбуждению. Первый вопрос решается на основе кусочно-линейных статических уравнений транзистора, предложенных в [10], с применением символической записи, использованной в работах [11, 12]. Второй вопрос сводится к построению Δ -разбиения по двум параметрам, причем в качестве уравнений транзистора берутся операторные уравнения работы [13].

1. СТАБИЛЬНОСТЬ ВЫХОДНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Схема рассматриваемого здесь стабилизатора напряжения (см. рис. 1) представляет собой последовательное соединение двух каскадов: усилителя напряжения на триоде T_1 и эмиттерного повторителя на триоде T_2 . При замыкании обратной связи ($U_1 = U_2$) получаем систему автоматического регулирования. Эта система не является астатической, поэтому выходное напряжение U будет зависеть от параметров схемы. Выясним, в каких пределах изменения напряжений и при каких значениях остальных параметров эта зависимость будет наиболее слабой.

Уравнения схемы рис. 1 можно записать в виде

$$\begin{array}{cccccc}
 U_1 & +0 & +0 & +0 & +v_{e_1} & +0 & = -E_0; \\
 0 & +U & +0 & +v_{k_2} & +0 & -v_{e_2} & = -E; \\
 -U_1 & +U & -v_{k_1} & +0 & +0 & -v_{e_2} & = 0; (1) \\
 0 & +HU & +0 & -\beta_2 g_{m_2} v_{k_2} & +0 & +g_{n_2} v_{e_2} & = 0; \\
 0 & +0 & -g_{m_1} v_{k_1} & +[1+(1-\rho_2)g_{m_2}]v_{k_2} & +\alpha_1 g_{n_1} v_{e_1} & +(1-\alpha_2)g_{n_2} v_{e_2} & = 0.
 \end{array}$$

Области линейности G_{m_1, m_2, n_1, n_2} определяются соотношениями

$$(-1)^{m_1} v_{k_1} \leq 0, \quad (-1)^{m_2} v_{k_2} \leq 0, \quad (-1)^{n_1} v_{e_1} \leq 0, \quad (-1)^{n_2} v_{e_2} \leq 0, \quad (2)$$

где $g_i = R \tilde{g}_i$ (\tilde{g}_i —проводимости триодов), $H = R(r+R_1+R_2)/r(R_1+R_2)$ (r —эквивалентное сопротивление нагрузки).

Будем считать, что входное сопротивление усилителя много больше

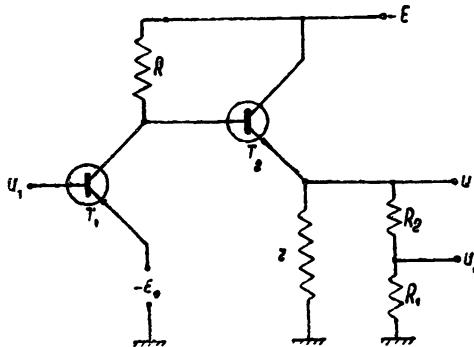


Рис. 1.

сопротивления R_1 ; тогда уравнения для схемы с замкнутой обратной связью можно получить из системы (1), положив в ней $U_1 = hU$, где $h = R_1(R_1 + R_2)^{-1}$:

$$\begin{array}{lllll} hU & +0 & +0 & +v_{e_1} & +0 \\ U & +0 & +v_{k_2} & +0 & -v_{e_2} \\ (1-h)U - v_{k_1} & +0 & +0 & +0 & -v_{e_2} \\ HU & +0 & -\beta_2 g_{m_2} v_{k_2} & +0 & +g_{n_2} v_{e_2} \\ 0 & -g_{m_1} v_{k_1} & +[1+(1-\beta_2)g_{m_2}]v_{k_2} & +\gamma_1 g_{n_1} v_{e_1} & +(1-\alpha_2)g_{n_2} v_{e_2} \end{array} = 0; \quad (3)$$

Разрешая систему (3) относительно напряжения U , получим зависимость выходного напряжения от напряжений питания:

$$U = -\frac{A_1^1}{A} E_0 - \frac{A_1^2}{A} E. \quad (4)$$

Разрешая систему (3) относительно v_{k_1} и v_{e_i} ($i = 1, 2$) и подставляя полученные выражения в неравенства (2), получим разбиение плоскости $E_0 E$ на области линейности G_{m_1, m_2, n_1, n_2} :

$$\frac{(-1)^j}{A} [A_j^1 E_0 + A_j^2 E] \geq 0 \quad (j = m_1, m_2, n_1, n_2). \quad (5)$$

Аналогично работам [11, 12] обозначим границу $A_j^1 E_0 + A_j^2 E = 0$ области линейности через Γ_j . Эта граница существует, если

$$E_0 = -\frac{A_j^2}{A_j^1} E \quad (6)$$

удовлетворяет трем другим неравенствам. Подставляя выражение (6) для E_0 в неравенства (2) и пользуясь операцией обращения детерми-

нантов (см. Приложение к работе [11]), получим условия существования границы Γ_j :

$$\frac{(-1)^{j_1} A_{j_1}^{12}}{A_j^1} E \geq 0 \quad (7)$$

(где j_1 принимает не равные j значения из m_1, m_2, n_1, n_2). В конкретной форме (после сокращения на положительные множители) эти условия примут вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{m_1}: & (-1)^{m_2} E \geq 0, \quad (-1)^{n_1} E \leq 0, \quad (-1)^{n_2} E \geq 0; \\ \Gamma_{m_2}: & (-1)^{m_1} E \geq 0, \quad (-1)^{n_1} E \geq 0, \quad (-1)^{n_2} E \leq 0; \\ \Gamma_{n_1}: & (-1)^{m_1} E \geq 0, \quad (-1)^{m_2} E \geq 0, \quad (-1)^{n_2} \{H[1 + (1 - \beta_2) g_{m_2}] - \\ & -(1 - h)\beta_2 g_{m_1} g_{m_2}\} E \leq 0; \\ \Gamma_{n_2}: & (-1)^{m_1} E \geq 0, \quad (-1)^{m_2} E \geq 0, \quad (-1)^{n_1} \{H[1 + (1 - \beta_2) g_{m_1}] - \\ & -(1 - h)\beta_2 g_{m_1} g_{m_2}\} E \leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В рассматриваемой схеме нас интересует только область G_{0011} , поскольку только в ней стабилизатор будет вести себя как система автоматического регулирования.

Подстановка $m_1 = m_2 = 0, n_1 = n_2 = 1$ в неравенства (8) показывает, что границы Γ_{m_1} и Γ_{m_2} не существуют, а границы Γ_{n_1} и Γ_{n_2} существуют при выполнении неравенств

$$E > 0, \quad H[1 + (1 - \beta_2) g_{m_2}] - (1 - h)\beta_2 g_{m_1} g_{m_2} \geq 0. \quad (9)$$

При выполнении этих же неравенств существует, следовательно, и сама область G_{0011} , причем она определяется неравенствами

$$\frac{1}{A} [A_{n_1}^1 E_0 + A_{n_2}^2 E] \leq 0; \quad \frac{1}{A} [A_{n_1}^1 E_0 + A_{n_2}^2 E] \leq 0. \quad (10)$$

Детерминант A из коэффициентов левой части системы (3) во всех областях отрицателен, кроме области G_{0110} , в которой при некоторых значениях параметров он может быть положительным. Однако непосредственная проверка по неравенствам (8) показывает, что область G_{0110} не существует. Следовательно, зависимость (4) будет однозначной.

В конкретной записи неравенства (10) (с учетом того, что для подавляющего числа триодов в области G_{0011} выполняются условия $g_{m_1}, g_{m_2} \ll (1 - \alpha_1) g_{n_1}, (1 - \alpha_2) g_{n_2}$) для значений h , не близких к нулю или единице, можно записать приближенно в виде

$$\begin{aligned} & hg_{n_2} [1 + (1 - \alpha_2 \beta_2) g_{m_2}] E - \{H[1 + (1 - \alpha_2) g_{n_2}] + \\ & + g_{n_2} [1 + (1 - \alpha_1) g_{m_1} + (1 - \alpha_2 \beta_2) g_{m_2}\} E_0 \geq 0; \\ & \{H[1 + (1 - \beta_2) g_{m_2}] - h\alpha_1 \beta_2 g_{n_1} g_{m_2}\} E + \alpha_1 g_{n_1} [H + \beta_2 g_{m_2}] E_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

На рис. 2а показана область G_{0011} , определяемая неравенствами (11), для случая

$$\frac{h\alpha_1 \beta_2 g_{n_1} g_{m_2}}{1 + (1 - \beta_2) g_{m_2}} > H > \frac{(1 - h)\beta_2 g_{m_1} g_{m_2}}{1 + (1 - \beta_2) g_{m_2}}, \quad (12)$$

а на рис. 2б—та же самая область для случая

$$H > \frac{h\alpha_1\beta_2g_{n_1}g_{m_2}}{1 + (1 - \alpha_2)g_{m_2}}. \quad (13)$$

Выражение для выходного напряжения (4) при

$$g_{m_1}, g_{m_2} \ll (1 - \alpha_1)g_{n_1}, (1 - \alpha_2)g_{n_2}$$

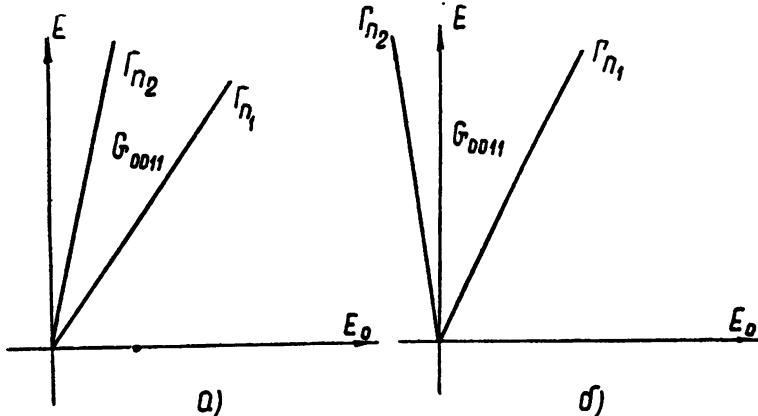


Рис. 2.

и значениях h , не близких к нулю или единице, в конкретной записи имеет вид

$$U = -\frac{\alpha_1 g_{n_1} g_{n_2} E_0 + g_{n_2} [1 + (1 - \alpha_2 \beta_2) g_{m_2}] E}{H [1 + (1 - \alpha_2) g_{n_2}] + h \alpha_1 g_{n_1} g_{n_2}}. \quad (14)$$

Из этого выражения ясно, что напряжение U тем меньше зависит от питающего напряжения E и параметров триодов, чем лучше выполняются неравенства

$$H \ll \frac{h \alpha_1 g_{n_1} g_{n_2}}{1 + (1 - \alpha_2) g_{n_2}}; \quad (15)$$

$$E \ll \frac{\alpha_1 g_{n_1} E_0}{1 + (1 - \alpha_2 \beta_2) g_{m_2}}. \quad (16)$$

В этом случае стабильность выходного напряжения стабилизатора в основном определяется стабильностью напряжения E_0 и сопротивлений R_1 и R_2 . Неравенства (15) и (16) будут выполняться тем лучше, чем лучше выполняются неравенства

$$(1 - \alpha_2 \beta_2) g_{m_2} \ll 1, \quad (1 - \alpha_2) g_{n_2} \gg 1. \quad (17)$$

Эти неравенства определяют оптимальную величину сопротивления R (см. рис. 1). Неравенства (12) и (15) или (13) и (15) дают пределы допустимого изменения нагрузки; неравенства (11) и (16) — пределы допустимого изменения напряжения питания E .

2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАБИЛИЗАТОРА

Как уже говорилось в начале статьи, для расчета устойчивости берутся операторные уравнения транзистора, использованные в работе [13]. Эти уравнения являются довольно грубым приближением к дей-

ствительности, поскольку они написаны для симметричных триодов и не учитывают зарядной емкости переходов и диффузионных токов эмиттера и коллектора. Однако эти уравнения учитывают запаздывание сигнала из-за процессов диффузии носителей заряда в базе, а этот фактор является определяющим при расчете устойчивости. Кроме того, они достаточно просты и поэтому могут быть использованы для исследования устойчивости даже сравнительно сложных схем. Поскольку операторные уравнения работы [13] по форме ничем не отличаются от статических уравнений триода, использованных в первой части данной работы, то для расчета устойчивости достаточно напряжения в системе (1) считать изображениями, а величины g_m , g_n и $\alpha = \beta$ — операторами, т. е. функциями комплексной величины p .

Положим в системе (1) $E_0 = E = 0$, что равносильно переносу начала координат в состояние равновесия, и перенесем столбец, содержащий напряжение U_1 , в правую часть системы. Тогда получим:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & +0 & +0 & +v_{e_1} & +0 & = -U_1; \\ U & +0 & +v_{k_2} & +0 & -v_{e_2} & = 0; \\ U & -v_{k_1} & +0 & +0 & -v_{e_2} & = U_1; \\ HU & +0 & -\alpha_2 g_{m_2} v_{k_2} & +0 & +g_{n_2} v_{e_2} & = 0; \\ 0 & -g_{m_1} v_{k_1} & +[1+(1-\alpha_2) g_{m_2}] v_{k_2} & +\alpha_1 g_{n_1} v_{e_1} & +(1-\alpha_2) g_{n_2} v_{e_2} & = 0, \end{array} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} g_{m_i} &= g_{m_i}^0 v_i \operatorname{cth} v_i w_i, & g_{n_i} &= g_{n_i}^0 v_i \operatorname{cth} v_i w_i, \\ \alpha_i &= \frac{1}{\operatorname{ch} w_i v_i}, & v_i &= \sqrt{1 + \tau_i p} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (19)$$

Разрешая систему (18) относительно U и полагая $U = U_2/h$, $p = j\omega$, получим выражение для коэффициента передачи разомкнутой системы

$$K(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{h(g_{n_2} - \alpha_2 g_{m_2})(g_{m_1} - \alpha_1 g_{n_1})}{(H + \alpha_2 g_{m_2})(1 - \alpha_2) g_{n_2} + (H + g_{n_2}) [1 + (1 - \alpha_2) g_{m_2} + g_{m_1}]} \quad (20)$$

Если сделать очевидные пренебрежения, справедливые на всем диапазоне изменения величины ω , то

$$K(j\omega) \approx \frac{h(g_{m_1} - \alpha_1 g_{n_1})}{(1 - \alpha_2) H + 1 + g_{m_1} + (1 - \alpha_2^2) g_{m_2}} \quad (21)$$

Из выражений (21) и (19) следует, что $K(0)$ — действительная отрицательная величина. Стабилизатор может быть неустойчивым только в том случае, если при изменении $\omega_1 \arg K(j\omega)$ изменится на π . Посмотрим, за счет чего может это произойти. Для этого исследуем поведение функций

$$\psi(j\omega) = v \operatorname{cth}(vw), \quad \alpha(j\omega) = 1/\operatorname{ch}(wv)$$

(где $v = \sqrt{1 + j\omega\tau}$) при изменении ω :

$$|\psi(j\omega)| = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2) \frac{\sin^2(wa) + \cos^2(wb)}{\sin^2(wa) + \cos^2(wb)}}{\sin^2(wa) + \cos^2(wb)}}; \quad (22)$$

$$\arg \psi(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{\sin(wa) \cos(wb)}{\sin^2(wa) + \cos^2(wb)};$$

$$|\alpha(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\sin^2(wa) + \cos^2(wb)}}; \quad (23)$$

$$\arg \alpha(j\omega) = -\operatorname{arctg} [\operatorname{th}(wa) \operatorname{tg}(wb)],$$

где

$$a = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} + 1}{2}}; \quad b = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} - 1}{2}}.$$

Значения $\arg \psi(j\omega)$ по абсолютной величине всегда меньше $\pi/2$; следовательно, из-за изменения g_{m_1} и g_{n_1} коэффициент передачи не может изменить фазу на π . Величина $\arg \alpha(j\omega)$ при изменении ω меняется в широких пределах; однако α_2 входит в выражение (21) только в комбинации $1 \pm \alpha_2$, а $|\alpha|$ всегда меньше единицы; поэтому и за счет изменения α_2 коэффициент передачи не может изменить фазу на π . Исходя из сказанного, можно сделать вывод, что основным фактором, приводящим стабилизатор к возбуждению, является изменение аргумента α_1 , т. е. запаздывание сигнала на выходе усилителя по отношению к сигналу на входе.

Сопоставляя выражения (21), (22) и (23), нетрудно усмотреть, что кривая Найквиста может пересечь действительную ось справа от начала координат только при таких значениях ω , которые определяются неравенством $w_1 b_1 > \pi/2$. При этом условии выражение для коэффициента передачи (21) можно значительно упростить. Поскольку обычно $w \ll 1$, то при $w_1 b_1 > \pi/2$ *

$$\begin{aligned} \alpha \simeq b \simeq \sqrt{\frac{\omega \tau}{2}}; \quad \psi(j\omega) \simeq v \simeq \sqrt{\frac{\omega \tau}{2}} (1 + j); \\ \alpha \simeq 2e^{-\omega \sqrt{\frac{\omega \tau}{2}} (1+j)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Считая, что оба триода имеют одинаковое τ и разные w (именно, $w_2 > w_1$), и используя приближенные выражения (24), получим коэффициент передачи в виде

$$K(x) = \frac{x [\delta - \gamma e^{-x(1+j)}]}{x + Q(1-j)}, \quad (25)$$

где

$$x = w_1 \sqrt{\frac{\omega \tau}{2}}; \quad \delta = \frac{hg_{m_1}^0}{g_{m_1}^0 + g_{m_2}^0};$$

* Приведенные формулы справедливы только для $\omega \geq 0$. Кривую Найквиста и границы D -разбиения для $\omega < 0$ нетрудно построить, зная их для $\omega \geq 0$.

$$\gamma = \frac{2hg_{n_1}^0}{g_{m_1}^0 + g_{m_2}^0}; \quad Q = \frac{N_1(H+1)}{2(g_{m_1}^0 + g_{m_2}^0)}.$$

Положим в выражении (25) $K(x) = 1$ и построим D -разбиение по параметрам γ и Q . Элементарные выкладки показывают, что D -разбиение имеет особую границу $Q=0$ и неособую границу, определяемую уравнениями

$$\gamma = \frac{\eta e^x}{\sin x - \cos x}; \quad Q = -\frac{\eta x \sin x}{\sin x - \cos x}, \quad (26)$$

где $\eta = 1 - \delta$. Штриховка (штрихуется неустойчивая сторона) наносится справа, если

$$\sin x - \cos x > 0.$$

Кривая, определяемая уравнениями (26), имеет асимптоты

$$Q + (-1)^n \frac{\pi(1/4 + n)}{\sqrt{2}} e^{-\pi(1/4 + n)} \gamma = \frac{1}{2} \eta$$

при $x = \pi(1/4 + n)$ и пересекает ось γ при

$$\gamma = -(-1)^n \eta e^{n\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

D -разбиение (см. рис. 3) показывает, что для стандартных триодов при отсутствии корректирующих элементов и не очень большой нагрузке стабилизатор всегда неустойчив, причем неустойчивость выше

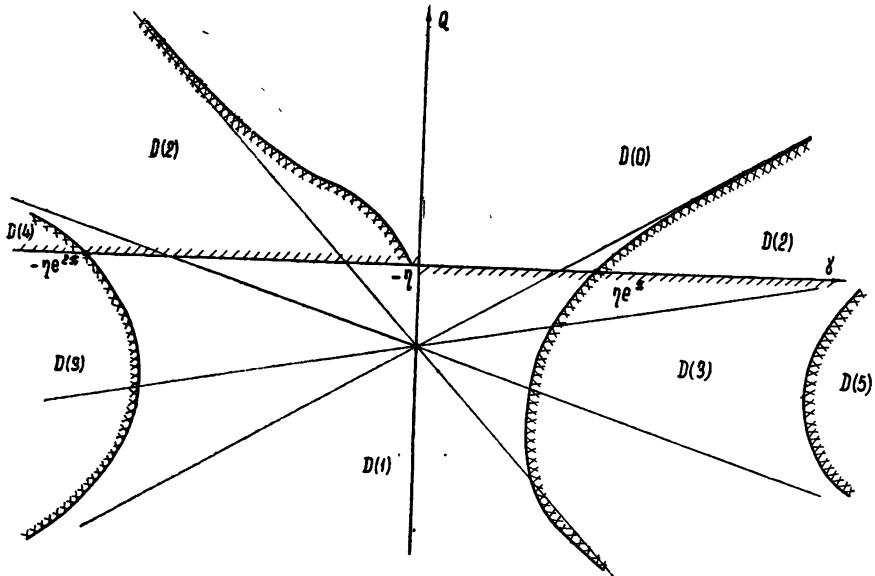


Рис. 3.

для лучших триодов (с α , близким к единице, и малым отношением g_m/g_n). Увеличение нагрузки может привести к срыву автоколебаний; однако при этом стабилизатор может выйти из режима стабилизации (см. первую часть работы). Полученные результаты хорошо согласуются с проведенным экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Ухина, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, М., вып. 3, 1958, стр. 175.
2. М. В. Агапов, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, М., вып. 7, 1961, стр. 243.
3. В. И. Александрина, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, М., вып. 7, 1961, стр. 229.
4. С. Д. Додик, Измерительная техника, № 12, 34 (1959).
5. С. Д. Додик, Измерительная техника, № 7, 23 (1961).
6. С. Д. Додик, М. И. Левин, Измерительная техника, № 3, 28 (1961).
7. Я. К. Трохименко, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 4, 459 (1958).
8. Дж. Каррол, Новые схемы на полупроводниковых приборах, ИЛ, М., 1961, стр. 51.
9. И. И. Слюсаренко, Тр. НИИ комплексной автоматизации, вып. 2, 190 (1961).
10. Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 766 (1959).
11. Н. И. Ашбель, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 319 (1961).
12. В. Г. Аранович, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1156 (1961).
13. Н. И. Ашбель, Л. В. Постников, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1149, (1961).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 июня 1962 г.

TO THE DESIGN OF VOLTAGE STABILIZER ON TRANSISTORS

L. V. Postnikov, V. E. Liapuchov

The simplified scheme of the compensation voltage stabilizer on transistors is considered. The region of input voltages corresponding to the normal operating conditions is stated. Within this region the dependence of the output voltage upon the input voltages and the parameters of the system has been obtained. The investigation of stability is carried out when no correcting elements being used.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ ЛУНЫ И СОЛНЦА НА ВОЛНЕ 1,8 мм

A. I. Наумов

Для исследования близко прилегающих к поверхности слоев лунной коры необходимо знание фазовой зависимости радиоизлучения Луны на волнах короче 4 мм [1,2]. В литературе имеются данные результатов измерения радиоизлучения Луны на волнах 1,8 мм [3] и 1,5 мм [4]. В работе [3] произведено только одно измерение вблизи третьей четверти; в [4] хотя и сделано несколько измерений на протяжении лунного цикла, но фазовой зависимости радиоизлучения Луны не получено. Кроме этого, слишком широкая полоса принимаемых волн (от 0,7 до 3 мм) в [4] затрудняет анализ полученных данных.

1. Нами в августе—сентябре 1962 г. (два лунных цикла) были произведены измерения интенсивности радиоизлучения Луны на волне 1,8 мм. С целью уменьшения влияния атмосферного поглощения на результаты измерений наблюдения проводились на Памире, на высоте 3860 м над уровнем моря. Для измерений был применен радиотелескоп, состоящий из параболического зеркала диаметром 96 см и модуляционного приемника на волну 1,8 мм (полоса принимаемых частот приблизительно равна $\pm 10\%$ относительно средней частоты). Облучатель размещался в фокусе зеркала и представлял собой открытый конец волновода сечением $0,8 \times 1,6$ мм. Ширина диаграммы направленности, снятой по Солнцу, составляет около $8' \div 10'$ (на уровне половинной интенсивности).

Измерения и обработка полученных данных проводились по методике, изложенной в работе [2]. Именно, калибровка радиотелескопа осуществлялась по тепловому излучению атмосферы и обработка данных велась по формуле

$$T_{\text{и}} = \frac{\alpha_{\text{и}} - \alpha_{\text{н}}}{\alpha_0 - \alpha_{\text{н}}} (T_0 + \Delta T_1 + \Delta T_2),$$

где $T_{\text{и}}$ —радиотемпература источника, $\alpha_{\text{и}}$ —показание выходного прибора радиометра при наведении антенны на источник, $\alpha_{\text{н}}$ —при наведении антенны на участок неба рядом с источником, α_0 —при наведении антенны на склон горы, T_0 —окружающая температура, ΔT_1 —поправка на неизотермичность атмосферы, ΔT_2 —поправка на неизотропность рассеянного излучения антенны.

В условиях Памира поправка на неизотермичность атмосферы не превышает $3 \div 5\%$. Вторая поправка в основном определяется качеством антенны. Вследствие неполного облучения зеркала эта поправка—не выше 10%.

На рис. 1 представлен график зависимости радиотемпературы Луны от ее оптической фазы. Экспериментальные точки, являющиеся результатом усреднения $10 \div 15$ измерений, аппроксимированы синусоидальной кривой

$$T_{\text{л}} = [240 + 115 \cos(\Omega t - 14^\circ)] \text{ } ^\circ\text{K}$$

(Ω —частота лунации, t —время; за начало отсчета фазы принят момент полнолуния). Как видно из рис. 1, экспериментальные точки имеют большой флюктуационный разброс относительно аппроксимирующей кривой. В связи с этим получить информацию относительно 2-й и 3-й гармоник не представляется возможным, хотя можно заметить, что наиболее вероятная кривая была бы не синусоидальной.

Отклонение большинства экспериментальных точек не превышает $10 \div 15\%$. Этим разбросом определяется случайная ошибка измерений постоянной и переменной составляющих радиоизлучения Луны. Абсолютные значения радиотемпературы Луны с учетом систематической погрешности, обусловленной неизотропностью рассеяния антенны, даны с точностью $\pm 15\%$.

Полученная зависимость радиоизлучения Луны от ее фазы (1) вполне согласуется с выводами теории однослоевой модели [1,5]. В самом деле, из отношения постоянной к переменной составляющей радиоизлучения Луны можно получить параметр $\delta = \bar{\beta} / \bar{\chi}$ —

отношение коэффициентов затухания тепловой и электрической волн в почве Луны. В данном случае $\delta = 0,34 \pm 0,15$. Учитывая соотношение $\operatorname{tg} \theta = \delta/(\delta + 1)$, получим фазовый сдвиг $\theta = 14^\circ \pm 5^\circ$, что хорошо согласуется с экспериментальным значением θ .

Параметр δ/λ (λ —длина волны), являющийся характеристикой однородного твердого диэлектрика [6], равен $1,85 \pm 0,8$; его можно считать (с точностью эксперимента)

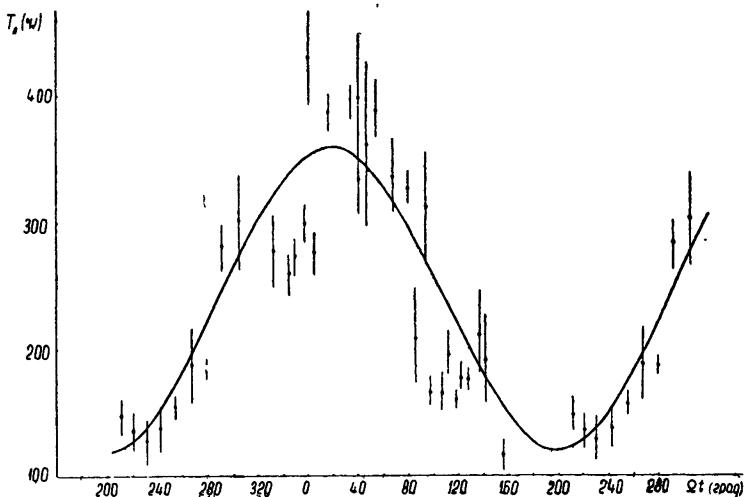


Рис. 1. Зависимость радиотемпературы Луны от оптической фазы.

совпадающим с результатами на более длинных волнах. Это совпадение свидетельствует о том, что слой лунной коры толщиной до 7 см (глубина проникновения электромагнитной волны $\lambda = 1,8$) имеет такие же физические свойства, как и слои на глубине до 100 см.

2. Многочисленные измерения интенсивности радиоизлучения Солнца дали следующий результат:

$$T_C = [6500 \pm 700] \text{ } ^\circ\text{K}.$$

Сравнение с данными работ [3] и [7] показало, что в пределах точности измерений результаты совпадают: $T_C = [5300 \pm 700] \text{ } ^\circ\text{K}$ [3] и $T_C = [5670 \pm 230] \text{ } ^\circ\text{K}$ [7]. Но нам кажется, что точность, указанная в работе [7], завышена, поскольку неизвестно, как автор учитывал неизотропность рассеянного излучения антенны, а также неизотермичность атмосферы.

Автор благодарит В. С. Троицкого и А. Г. Кислякова за руководство данной работой, Л. И. Федосеева за помощь при проведении измерений, А. А. Романычева за участие в подготовке аппаратуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Астроном. ж., 39, 73 (1962).
2. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 433 (1961).
3. Н. А. Горюхов, Ю. А. Драгин, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 413 (1962).
4. W. M. Sinton, J. of Opt. Soc. Am., 45, 975 (1955).
5. В. С. Троицкий, Астроном. ж., 31, 511 (1954).
6. М. Р. Зелинская, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Астроном. ж., 31, 643 (1959).
7. D. I. H. Wort, Nature, 195, 1288 (1962).

О ТОРМОЖЕНИИ РАДИАЦИОННЫМ ТРЕНИЕМ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Е. Г. Ларинцев и В. Д. Шафранов

Влияние силы трения, возникающей при циклотронном излучении с учетом нормального и аномального допплер-эффектов, на движение заряда исследовано в работах Гинзбурга и Эйдмана [1–3]. В настоящей заметке, носящей в основном методический характер, получено общее выражение работы силы радиационного трения над поступательной и вращательной степенями свободы заряда в виде, допускающем непосредственную наглядную квантовую интерпретацию.

Пусть заряд движется по закону $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в однородной среде. Разложим плотность¹ заряда и плотность тока, связанные с этим зарядом, а также порождаемое им электромагнитное поле в интеграл Фурье:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = \int \rho(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega; \quad (1)$$

$$j(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) = \int j(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega; \quad (2)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \quad (3)$$

и т. д. Заметим, что фурье-компоненты $\rho(\mathbf{k}, \omega)$ и $j(\mathbf{k}, \omega)$ не независимы: они связаны уравнением непрерывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} j = 0$, т. е.

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = \frac{kj(\mathbf{k}, \omega)}{\omega}. \quad (4)$$

Нас будут интересовать усредненные по времени билинейные величины, такие как работа поля над зарядом, которые, очевидно, не зависят от координаты и фазы заряда в некоторый начальный момент времени (при условии, что среда однородна и стационарна). Усредненные по этим координатам и фазам произведения типа $\langle E_\alpha(\mathbf{r}, t) j_\beta(\mathbf{r}', t') \rangle$ будут зависеть от \mathbf{r} , \mathbf{r}' и t , t' только через разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $t - t'$ (поскольку среда однородна и стационарна). Отсюда для корреляции фурье-компонент следуют сразу соотношения вида

$$\langle E_\alpha(\mathbf{k}, \omega) j_\beta^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (E_\alpha j_\beta^*)_{\mathbf{k}, \omega} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'); \quad (5)$$

$$\langle j_\alpha(\mathbf{k}, \omega) j_\beta^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (j_\alpha j_\beta^*)_{\mathbf{k}, \omega} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega')$$

и т. д. С помощью уравнения (2) нетрудно получить (см. [4,5])

$$(j_\alpha j_\beta^*)_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{e^2}{(2\pi)^4 V} \int_{-\infty}^{\infty} v_\alpha(t) v_\beta(0) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \int_0^t \mathbf{v}(t') dt')} dt, \quad (6)$$

где V —объем, по которому производится усреднение.

Запишем решение уравнений Максвелла в виде $E_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = L_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) j_\beta(\mathbf{k}, \omega)$ [5]. Тогда работа поля над зарядом представится в виде $A = VA'$, где „плотность“ работы

$$A' = \int A'_{\mathbf{k}, \omega} d\mathbf{k} d\omega, \quad A'_{\mathbf{k}, \omega} = L_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) (j_\beta j_\alpha^*)_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (7)$$

В выражении для полной работы $A = VA'$ объем V , очевидно, выпадает. Полученные таким методом потери энергии заряда на излучение, равные взятой с минусом работе A , совпадают с другими расчетами [6–8] и выражаются формулой [5]

$$-\frac{d\Sigma}{dt} = -A = \int_0^\infty d\omega \left\{ P_0(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(\omega) + P_{-n}(\omega)] \right\}, \quad (8)$$

где

$$P_n(\omega) = -\operatorname{Re} \sum_{l=1}^2 i \frac{e^2}{\pi^2 \omega} \int \frac{d\mathbf{k}}{1 + \sigma_{x_l}^2} \times \\ \times \frac{\{(a_{x_l}^0 v_\perp n/x_l + a_{z_l}^0 v_z) J_n(x_l) + v_\perp J'_n(x_l)\}^2}{k^2 c^2/\omega^2 - N_l^2} \delta(\omega - k_z v_z - n\omega_B) \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (9)$$

Здесь N_l^2 ($l = 1, 2$) — квадрат показателя преломления, а $a_{xL}^0, a_{zL}^0, a_{xL}$ — величины, характеризующие поляризацию излучаемых волн, $x_L = k_\perp v_\perp / \omega_B$, ω_B — циклотронная частота. Аргументы δ -функций показывают, что $P_0(\omega)$ есть интенсивность черенковского излучения заряда, $P_n(\omega)$ — интенсивность циклотронного излучения при нормальном, а $P_{-n}(\omega)$ — при аномальном допплер-эффекте.

Найдем теперь среднюю плотность силы трения

$$\langle F' \rangle = \langle \rho(r, t) E(r, t) + \frac{1}{c} [j(r, t) B(r, t)] \rangle. \quad (10)$$

Согласно общим правилам, ее можно записать в виде интеграла от соответствующей спектральной плотности:

$$\langle F' \rangle = \int F'_{k, \omega} dk d\omega, \quad F'_{k, \omega} = (\rho^* E)_{k, \omega} + \frac{1}{c} (j^* B)_{k, \omega}. \quad (11)$$

Выражая в (11) B через E : $B = \frac{c}{\omega} [kE]$ (из уравнения $\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$), а ρ через j (с помощью уравнения (41)), получим выражение для спектральной плотности радиационной силы $F_{k, \omega} = VF'_{k, \omega}$ в виде

$$F_{k, \omega} = \frac{k}{\omega} A_{k, \omega}, \quad (12)$$

где $A_{k, \omega} = VA'_{k, \omega} = (jE)_{k, \omega} V$ — спектральная плотность работы поля излучения над зарядом.

Очевидна квантовомеханическая трактовка полученного выражения. Величина $-A_{k, \omega}/\hbar\omega$ представляет собой спектральную плотность числа квантов, испускаемых в единицу времени движущимся зарядом. Импульс, уносимый каждым квантами, равен $\hbar k$. Произведение этих двух величин, совпадающее с $-F_{k, \omega}$, представляет собой, следовательно, суммарную спектральную плотность импульса, теряемого в единицу времени зарядом.

С помощью средней силы трения нетрудно найти выражение для работы над поступательной и вращательной степенями свободы. Так как скорость движения вдоль магнитного поля (в нулевом приближении) постоянна ($v_z = \text{const}$), то работа силы радиационного трения над поступательной степенью свободы $A_{\parallel} = \langle v_z F_z \rangle = v_z \langle F_z \rangle$, т. е., согласно (12),

$$A_{\parallel} = \int \frac{k_z v_z}{\omega} A_{k, \omega} dk d\omega. \quad (13)$$

Благодаря наличию δ -функций в выражении для $A_{k, \omega}$ (см. (8), (9)), множитель $k_z v_z / \omega$ заменяется в каждом члене суммы по n на $(\omega - n\omega_B)/\omega$, так что для потери энергии поступательного движения получим:

$$-\frac{d\mathcal{E}_{\parallel}}{dt} = -A_{\parallel} = \int_0^{\infty} d\omega \left\{ P_0(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\omega - n\omega_B}{\omega} P_n(\omega) + \frac{\omega + n\omega_B}{\omega} P_{-n} \right] \right\}. \quad (14)$$

Потери энергии вращательного движения заряда получаются вычитанием (14) из (8):

$$-\frac{d\mathcal{E}_{\perp}}{dt} = -\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} - \frac{d\mathcal{E}_{\parallel}}{dt} \right) = \int_0^{\infty} d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\omega_B}{\omega} P_n(\omega) - \frac{n\omega_B}{\omega} P_{-n} \right]. \quad (15)$$

Напомним, что $P_n(\omega)$ есть интенсивность излучения „нормальных“ допплеровских частот

$$\omega = \frac{n\omega_B}{1 - k_z v_z / \omega}, \quad (n = 1, 2, \dots; k_z v_z / \omega = N\beta_{\parallel} \cos \theta < 1), \quad (16)$$

а $P_{-n}(\omega)$ — „аномальных“ допплеровских частот

$$\omega = -\frac{n\omega_B}{1 - k_z v_z / \omega} \quad (n = 1, 2, \dots; k_z v_z / \omega = N\beta_{\parallel} \cos \theta > 1). \quad (17)$$

Как видно из (15), излучение нормальных допплеровских частот сопровождается уменьшением вращательной энергии заряда, в то время как излучение аномальных допплеровских частот сопровождается не уменьшением, а увеличением вращательной энергии заряда. Эта особенность аномального допплеровского излучения исследовалась в работах [1-3], где указывалась и ее квантовомеханическая интерпретация. С квантовомеханической точки зрения излучение нормального допплеровского кванта сопровождается изменением энергии осциллятора (вращающегося заряда) на величину $\hbar\omega_B$ ($n\omega_B$ — частота излучения в системе координат, где $v_z = 0$), т. е. уменьшением поперечной энергии заряда. Излучение же аномального допплеровского кванта сопровождается изменением энергии осциллятора на величину $-\hbar\omega_B$, т. е. увеличением поперечной энергии (происходящим за счет уменьшения энергии поступательного движения).

Из полученной выше формулы (15) следует, что имеется не только качественное согласие квантовомеханического вывода с классическими расчетами, но и полное количественное соответствие. Действительно, число нормальных квантов, приходящихся на единичный интервал частот, равно $P_n/\hbar\omega$, а число аномальных — $P_{-n}/\hbar\omega$. Так как первые уносят энергию $\hbar\omega_B$, а вторые — $-\hbar\omega_B$, то полная энергия, уносимая квантами, равна

$$Q = \int_0^{\infty} d\omega \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\omega_B}{\omega} P_n - \frac{n\omega_B}{\omega} P_{-n} \right), \quad (18)$$

что совпадает с потерей энергии вращательного движения заряда (15), полученной из классической электродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 36, 1823 (1960).
2. В. Л. Гинзбург, УФН, 69, 537 (1959).
3. В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 192 (1960).
4. В. Д. Шафранов, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 416.
5. В. И. Пистунович, В. Д. Шафранов, Ядерный синтез, 1, 189 (1961).
6. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 34, 131 (1958); 36, 1335 (1959).
7. R. Q. Twiss, I. A. Roberts, Australian J. Phys., 11, 425 (1958).
8. В. И. Пахомов, В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, ЖТФ, 31, 1170 (1961).

Поступила в редакцию
18 февраля 1963 г.

К ВОПРОСУ О ЗАТУХАНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ, ПОМЕЩЕННОЙ В НЕОДНОРОДНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК

В. Я. Эйдман

Как показано в [1], при распространении электромагнитной волны в неоднородной среде возникает поглощение волны, обвязанное изменению свойств среды. На основании формулы Кирхгофа это поглощение связывается с переходным излучением зарядов плазмы. Однако в указанной статье выкладки производятся до конца лишь для среды с периодически меняющимися свойствами. Между тем представляет интерес рассмотреть и более общий случай произвольного изменения свойств среды. В настоящей заметке рассматривается случай распространения плазменной волны в слоисто-неоднородной среде с медленно меняющимися свойствами. При этом зависимость дизелектрической постоянной ϵ от координаты z не конкретизируется.

Как и в [1], предполагаем, что однородная плазма помещена в неоднородный дизелектрик. Тогда для продольной волны, распространяющейся вдоль направления изменения свойств среды, совпадающего с направлением координатной оси Oz , будем иметь уравнение

$$\frac{d^2E_{\omega}}{dz^2} + \epsilon E_{\omega} = \delta \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega^2/k^2 v_T^2}}{k^3} E_k e^{ikz} dk, \quad (1)$$

где $\epsilon = 2 [\epsilon_d(z) \omega^2 - \omega_0^2] \omega^2 / 3 \omega_0^2 v_T^2$, $\epsilon_d(z)$ — дизелектрическая проницаемость дизелектрика, $\omega_0^2 = 4\pi e^2 N/m$ — ленгмюровская частота плазмы, $v_T^2 = 2T/m$ — средняя тепловая

скорость электронов плазмы, $v_T/c \ll 1$, $\delta = -4i\sqrt{\pi}\omega^5/3v_T^5$, $E_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega}(z) e^{-ikz} dz$.

Соответствующее уравнение получается и для $k < 0$. Поскольку при $\omega \gg (2\pi/\lambda)v_T$ (λ —наименьшая длина волны излучения) правая часть уравнения (1) мала, то в приближении геометрической оптики для отыскания коэффициента поглощения волны можно воспользоваться методом возмущений. В результате для коэффициента поглощения α_{ω} волны, распространяющейся в положительном направлении оси $0z$, получается выражение

$$\alpha_{\omega} = \operatorname{Re} \frac{\delta}{2\sqrt[4]{\epsilon}} e^{-i \int V_{\epsilon} dz} \int_0^{\infty} \frac{e^{\omega^2/k^2 v_T^2} J_k e^{ikz}}{k^3} dk, \quad (2)$$

где

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i \left[\int V_{\epsilon} dz - kz \right]}}{\sqrt[4]{\epsilon}} dk.$$

Чтобы указать на связь полученного затухания волны с переходным излучением, перейдем к определению излучательной способности η_{ω} . В рассматриваемой задаче достаточно провести вычисления лишь для одномерного случая. Для продольного поля, возбуждаемого током $J_{ct} = evN_{\perp}\delta(z-vt)$ {0, 0, 1}, имеем уравнение $(E(z) = E(0, 0, 1))$

$$\frac{d^2 E_{\omega}}{dz^2} + \epsilon E_{\omega} = \delta_1 e^{i\omega z/v}, \quad (3)$$

где N_{\perp} — число электронов, приходящихся на единицу площади ($N_{\perp} = N^{2/3}$),

$$\delta_1 = -4ieN_{\perp}\omega^3/3\omega_0^2v_T^2.$$

Решение (3) в приближении геометрической оптики элементарно:

$$E_{\omega} = -\frac{\delta_1 i}{2} \left\{ \frac{e^{-i \int V_{\epsilon} dz}}{\sqrt[4]{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} J_k^* \frac{e^{iz(\omega/v-k)}}{i(\omega/v-k)} dk - \right. \\ \left. - \frac{e^{-i \int V_{\epsilon} dz}}{\sqrt[4]{\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} J_k \frac{e^{iz(\omega/v+k)}}{i(\omega/v+k)} dk \right\}. \quad (4)$$

Вычисляя величину излученной в единицу времени энергии и усредняя ее по распределению Максвелла $f_0 = (N_{\parallel}/v_T \pi^{1/2}) e^{-v^2/v_T^2}$ ($N = N_{\parallel}N_{\perp}$), получаем для волны, распространяющейся в положительном направлении оси $0z$:

$$\eta_{\omega} = \frac{\omega^5 m}{6v_T^3 \pi^{1/2}} \frac{e^{-i \int V_{\epsilon} dz}}{\sqrt[4]{\epsilon}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega^2/k^2 v_T^2} J_k e^{ikz}}{k^3} dk + \text{к. с.} \quad (5)$$

Сравнивая теперь значение η_{ω} с $\alpha_{\omega} I_{\omega}$ (в рассматриваемом одномерном случае $I_{\omega} = T/2\pi$), находим, что эти величины совпадают. Таким образом, можно утверждать, что полученное затухание плазменной волны обусловлено переходным излучением.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 43, 1419 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 февраля 1963 г.

ИЗМЕРЕНИЯ АМПЛИТУДНЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ ГЕНЕРАТОРА НА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ТРИОДАХ

E. A. Здорнова, A. N. Малахов

В работах [1–3], посвященных исследованию амплитудных флюктуаций лампового генератора, установлено, что как спектр, так и интенсивность флюктуаций амплитуды определяется в основном фликкер-шумом ламп. Представляет интерес провести аналогичные исследования для генератора на полупроводниковых триодах.

Экспериментальная часть этой задачи была выполнена с помощью анализатора низкочастотного спектра [4] в диапазоне частот от 1 до 100 гц. Для исследования был взят LC-генератор, собранный по схеме с общим эмиттером (рис. 1). Измерения проводились демодуляционным методом на установке, состоящей из исследуемого генератора, катодного повторителя, детектора и анализатора.

Сигнал генератора

$$x(t) = R_0 [1 + \rho(t)] \cos [\omega_0 t + \varphi(t)]$$

(где R_0 —средняя амплитуда колебаний, $\rho(t)$ —относительные флюктуации амплитуды ($\rho^2 \ll 1$), а $\varphi(t)$ —фазовые флюктуации генератора), пройдя катодный повторитель, поступал на линейный детектор. На нагрузке последнего получалась составляющая напряжения, пропорциональная

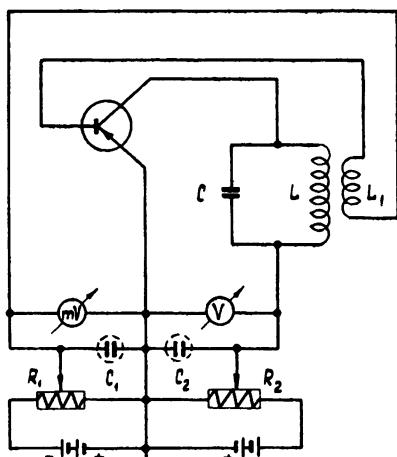


Рис. 1..

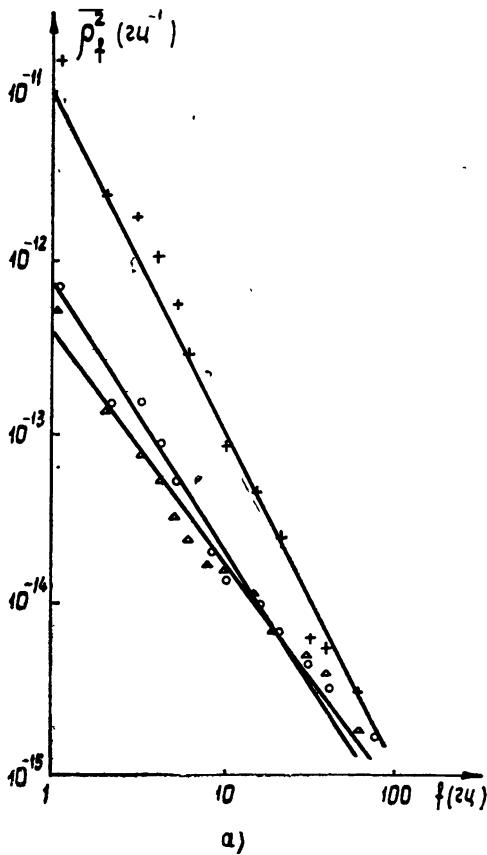


Рис. 2. Зависимость $\sqrt{\rho_f^2}$ от f :
a) для триода П5А (+— $u_K=11$ в, $u_0=90$ мв; $\circ\circ$ — $u_K=8$ в,
 $u_0=130$ мв; $\Delta\Delta$ — $u_K=8$ в, $u_0=90$ мв);

нальная $\rho(t)$; спектральная плотность последней измерялась с помощью анализатора спектра. В схеме детектора предусмотрен фильтр верхних частот—для того, чтобы на вход детектора поступал только сигнал с частотой генератора (30 гц) и не проходили низкочастотные шумы генератора и повторителя.

Результатом измерений являлась спектральная плотность относительных флюктуаций амплитуды ρ_f^2 , усредненная за 80 сек.

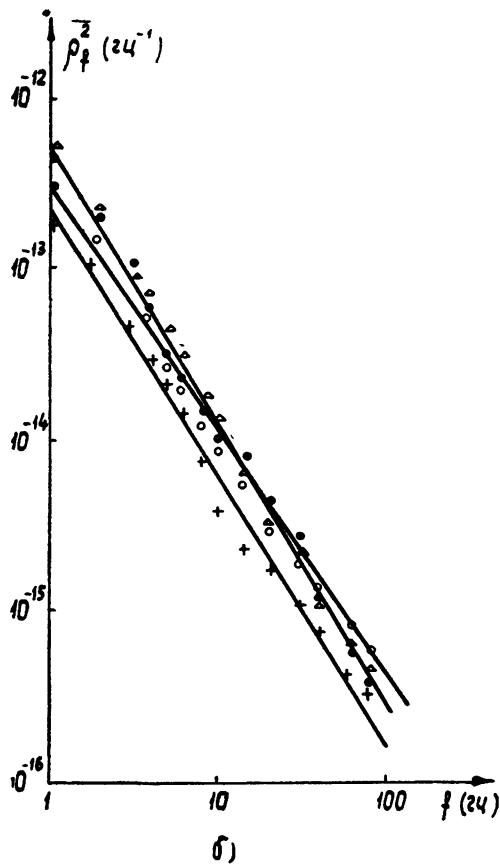


Рис. 2. Зависимость ρ_f^2 от f :

б) для триода П401 (+ + - $u_k = 6 \text{ в}$, $u_\delta = 200 \text{ мв}$; ○○ - $u_k = 8 \text{ в}$,
 $u_\delta = 220 \text{ мв}$; ●● - $u_k = 6 \text{ в}$, $u_\delta = 220 \text{ мв}$; △△ - $u_k = 6 \text{ в}$,
 $u_\delta = 240 \text{ мв}$).

В работе были исследованы сплавные триоды П1А, П5А, П13 и П15, диффузионные триоды П401, П403А и триод П101 (по 2-5 экземпляров каждого типа). Амплитуда автоколебаний генераторов была около 10 в.

Спектры относительных амплитудных флюктуаций ρ_f^2 для транзисторов П5А и П401 даны на рис. 2. Подобные зависимости имели место и для других транзисторов. Эксперименты показывают, что в области частот от 1 до 100 гц спектральная плотность у исследованных транзисторов подчиняется закону $\rho_f^2 = A/f^\alpha$, где A и α зависят от типа транзистора и режимов его работы. Результаты измерений A и α для всех исследованных триодов сведены в таблицу. Из нее следует, что в общем случае A и α меняются в следующих пределах:

$$1,0 \cdot 10^{-13} < A < 3,0 \cdot 10^{-8},$$

$$1,0 < \alpha < 2,0.$$

В работе [6] было установлено, что шум-фактор триодов П1, П5, и П13 в основном зависит от коллекторного напряжения, а триодов П401, П402 и П403—от тока эмитте-

ра. В нашем случае (для генератора на триодах П1, П5А, П13 и П15) с увеличением коллекторного напряжения u_k также наблюдалось возрастание A и α (см. таблицу), но, кроме этого, была заметна зависимость их и от напряжения базы u_b . Последнее, по-видимому, можно отнести за счет изменения интервала отсечки колебаний генератора, связанной с отпиранием коллекторного перехода [5].

Для генератора на диффузионных триодах П401 и П403 характерна более узкая область изменений значений A и α при вариациях режима, чем для сплавных триодов:

$$1,0 \cdot 10^{-13} < A < 5 \cdot 10^{-13};$$

$$1,4 < \alpha < 1,6.$$

Таблица I

Тип транзистора	u_k (в)	u_b (мв)	A	α
П1А	5	90	$9 \cdot 10^{-12}$	1,3
	7	90	$1,5 \cdot 10^{-11}$	1,3
	7	120	$3,6 \cdot 10^{-11}$	1,5
П5А	8	90	$3,5 \cdot 10^{-13}$	1,4
	8	130	$7 \cdot 10^{-13}$	1,5
П13	11	90	$1 \cdot 10^{-11}$	1,9
	10	60	$7 \cdot 10^{-9}$	1,4
	10	80	$8 \cdot 10^{-9}$	1,4
П15	14	80	$3 \cdot 10^{-8}$	1,7
	7	80	$1,3 \cdot 10^{-12}$	1,5
	7	100	$2,5 \cdot 10^{-12}$	1,9
П401	8,5	100	$8 \cdot 10^{-12}$	1,9
	6	220	$2,3 \cdot 10^{-13}$	1,6
	6	240	$5 \cdot 10^{-13}$	1,6
П403А	8	220	$3 \cdot 10^{-13}$	1,4
	6	200	$2 \cdot 10^{-13}$	1,4
	6	240	$1 \cdot 10^{-13}$	1,4
П101	4	200	$2,5 \cdot 10^{-13}$	1,5
	3	520	$9 \cdot 10^{-10}$	1,2
	5	520	$7 \cdot 10^{-10}$	1,1
	6	520	$6 \cdot 10^{-10}$	1,1

Незначительные изменения поверхностного шума в данном случае определяются, по-видимому, тем, что при генерации токи эмиттера не превышали 1 ма [7].

К этой же группе транзисторов можно отнести и триод П101 (типа $n-p-n$). У него A слабо зависит от u_k . Проверить зависимость от u_b не удалось, так как колебания возникали в очень узком интервале напряжений u_b ($0,5 \div 0,52$ в).

Отметим, что для ламповых генераторов $\alpha \approx 1$ и A лежит в пределах от 10^{-10} до 10^{-12} .

Авторы благодарны студентам-дипломникам В. Н. Мисевичу и Л. А. Синицыной, которые принимали участие в проведении этих экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 20 (1958).
2. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 574 (1959).
3. В. А. Логачев, О. Д. Поздеев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 306 (1962).
4. А. Н. Малахов, ПТЭ, № 1, 79 (1958).
5. М. И. Конторович, С. Г. Пелликан, В. Н. Фролов, Радиотехника и электроника, 5, 439 (1960).
6. Л. Н. Капцов, В. А. Курочкин, К. Я. Сенаторов, Радиотехника и электроника, 5, 2062 (1960).
7. Ю. П. Карпов, ФТГ, 3, 1691 (1961).

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА РЯДОВ КВАЙТА К МАГНЕТРОННЫМ УСИЛИТЕЛЯМ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ

А. Ф. Голубенцев

Предложенный в [1,2] метод определения усиления ЛБВ и ЛОВ типа О, основанный на применении степенных рядов по CN (C —параметр усиления Пирса, N —длина замедляющей системы в электронных волнах), использовался в последнее время для решения ряда новых задач электроники СВЧ. В частности, Гепперт [3] использовал этот метод при анализе ЛБВ с переменной фазовой скоростью, а Керри и Уиннери [4]—при исследовании каскадных усилителей с обратной волной. Кацем [5] подобным методом было изучено влияние на работу ЛБВ поглотителя с меняющимся по длине системы затуханием.

В связи с этим интересно отметить, что для ЛБВ и ЛОВ типа М легко получаются аналогичные результаты. В самом деле, пользуясь обозначениями, введенными Гулдом в [6], можно записать характеристическое уравнение для магнетронного усилителя в следующем виде:

$$(\delta + jb \pm d)(\delta^2 + 2jgs\delta - s^2) = \pm \delta, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega}{u_0}(1 + jD\delta), & s &= \frac{-\sigma_0}{2\epsilon_0 B_0 u_0 D}, \\ D^2 &= \frac{\omega}{\omega_c} \frac{I_0 K}{2V_0} \frac{E_y}{E_z}, & g &= \frac{\operatorname{th}(\beta_e d) - \operatorname{th}(\beta_e a)}{\operatorname{th}(\beta_e d) + \operatorname{th}(\beta_e a)}, \\ \beta_1 &= \frac{\omega}{u_0}(1 + Db \mp Dd) \end{aligned}$$

(верхний знак относится к прямой волне). Для амплитуды E_i в [6] найдено выражение:

$$\begin{aligned} E_i = & \frac{\delta_i^2 + 2jgs\delta_i - s^2}{(\delta_i - \delta_{i+1})(\delta_i - \delta_{i+2})} \left\{ E_{1z}(0) - \frac{1}{2A \operatorname{cth}(\omega a/u_0)} \frac{\sigma_1(0)}{\sigma_0} \left[\delta_{i+1} + \delta_{i+2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2jgs - \frac{\delta_{i+1}\delta_{i+2}}{js} \right] - \frac{1}{A} \frac{\omega y_1(0)}{u_0} \left[\delta_{i+1} + \delta_{i+2} + 2jgs + \frac{\delta_{i+1}\delta_{i+2} - s^2}{js} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Через A в (2) обозначено выражение

$$\frac{1}{D} \frac{1}{B_0 u_0} \frac{\operatorname{sch}(\omega d/u_0)}{1 + \operatorname{th}(\omega d/u_0) \operatorname{cth}(\omega a/u_0)}.$$

Для случая $y_1(0) = \sigma_1(0) = 0$ выражение для E_i упрощается, и для коэффициента усиления получается следующее выражение:

$$\frac{E_{1z}}{E_{1z}(0)} e^{j\beta_e z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\delta_i^2 + 2jgs\delta_i - s^2}{(\delta_i - \delta_{i+1})(\delta_i - \delta_{i+2})} e^{\beta_e D\delta_i z}. \quad (3)$$

Пользуясь специальными симметрическими функциями корней характеристического уравнения $E_n(z)$, введенными в [2], можно переписать (2) в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{E_{1z}}{E_{1z}(0)} e^{j\beta_e z} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\delta_i^2 e^{\beta_e D\delta_i z}}{(\delta_i - \delta_{i+1})(\delta_i - \delta_{i+2})} + 2Jgs \sum_{i=1}^3 \frac{\delta_i e^{\beta_e D\delta_i z}}{(\delta_i - \delta_{i+1})(\delta_i - \delta_{i+2})} - \\ &- s^2 \sum_{i=1}^3 \frac{e^{\beta_e D\delta_i z}}{(\delta_i - \delta_{i+1})(\delta_i - \delta_{i+2})} = E_2(2\pi DN) + 2Jgs E_1(2\pi DN) - s^2 E_0(2\pi DN), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$E_n(2\pi DN) = \sum_{i=1}^3 \frac{\delta_i^n e^{\beta_e D\delta_i z}}{(\delta_i - \delta_{i+1})(\delta_i - \delta_{i+2})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\pi DN)^k}{k!} L_{n+k}. \quad (5)$$

Коэффициенты L_{n+k} удовлетворяют, очевидно, рекуррентному соотношению

$$L_{n+3} + p_1 L_{n+2} + p_2 L_{n+1} + p_3 L_n = 0. \quad (6)$$

Это рекуррентное соотношение полностью определяет коэффициенты ряда (5), так как $L_0 = L_1 = 0$, $L_2 = 1$. Поэтому коэффициент усиления магнетронного усилителя можно найти без предварительного определения корней дисперсионного уравнения. В замкнутом виде выражения для L_k даны в работе [1]. Коэффициенты p_1 , p_2 , p_3 , входящие в рекуррентное соотношение (6), равны соответственно:

$$\begin{aligned} p_1 &= d + j(b + 2gs), \\ p_2 &= -1 - s^2 - 2bgs + 2jdg, \\ p_3 &= -s^2(d + jb) \end{aligned}$$

для усилителей прямой волны и

$$\begin{aligned} p_1 &= -d + j(b + 2gs), \\ p_2 &= 1 - s^2 - 2bgs - 2jdg, \\ p_3 &= -s^2(-d + jb) \end{aligned}$$

для усилителей обратной волны. Для случая, когда $y_1(0)$ и $\sigma_1(0)$ отличны от нуля, коэффициент усиления также выражается линейной комбинацией функций $E_n(2\pi DN)$. Соответствующие выражения для этого случая получаются аналогично предыдущему.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. F. Quate, Power Series Solution of Travelling Wave Tube Equations, Bell Telephone Labs. Rep № MM-53-1500-36, Oktober 20, 1953.
2. I. A. Mulliken, IRE Trans. Electron Devices, 4, 159 (1957).
3. Heppert, Proc. IRE, 46, 1658 (1958).
4. M. Currie, J. R. Whinnery, Proc. IRE, 43, 1617 (1955).
5. А. М. Кац, Радиотехника и электроника, 5, 1986 (1960).
6. R. Gould, J. Appl. Phys., 28, 599 (1957).
7. А. Ф. Голубенцев, Радиотехника и электроника, 7, 1046 (1962).

Поступила в редакцию
16 декабря 1961 г.

О ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЯХ В РЕЦИРКУЛЯЦИОННЫХ РЕГИСТРАХ БЕЗ СДВИГА ИНФОРМАЦИИ

М. Я. Эйнгорин

Рассмотрим плоскости переходов* рециркуляционных регистров и задержек работы [1] в зависимости от числа разрядов n в коде информации, подлежащей хранению, числа свободных разрядов регистра a и общего числа запоминающих элементов регистра $N = n + a$.

Замкнутую последовательность векторов, соединяющих вершины (запоминающие элементы) плоскости переходов (см. рис. 1а) назовем траекторией движения информации или просто траекторией. Тогда в зависимости от величин n и a можно различить два случая.

I. n и a взаимно просты. При этом плоскость переходов имеет одну замкнутую траекторию, обходящую все ее вершины (все N запоминающих элементов).

II. n и a имеют общий делитель. Здесь число независимых замкнутых траекторий в плоскости переходов равно общему наибольшему делителю m чисел n и a .

Каждая замкнутая траектория имеет $\beta = \beta_1 + \beta_2$ вершин (запоминающих элементов), из которых $\beta_1 = n/m$ заняты информацией и $\beta_2 = a/m$ —свободны. При наличии у чисел n и a общего делителя, в свою очередь, интересно рассмотреть три частных случая.

1) $n > a$ и n/a —целое натуральное число. При этом $m = a$; $\beta_1 = n/a$; $\beta_2 = 1$ и $\beta = n/a + 1$.

2) $n < a$ и a/n —целое натуральное число. Тогда $m = n$; $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = a/n$ и $\beta = 1 + a/n$.

3) $n = a$ —целое натуральное число. Плоскость переходов имеет $m = n = a$ замкнутых траекторий, в каждой из которых по две вершины ($\beta = 2$ при $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 1$).

Примеры различных видов плоскостей переходов в зависимости от параметров n и a даны на рис. 1. На каждом из рисунков записаны величины n и a , а также указано,

* Все обозначения и принцип работы схем даны в работе [1].

к какому из указанных выше случаев следует отнести рисунок. Во всех случаях предполагается, что первоначально пустые запоминающие элементы имеют номера с $n+1$ по $n+a$.

Возможность получения в плоскости переходов ряда отдельных траекторий, опреде-

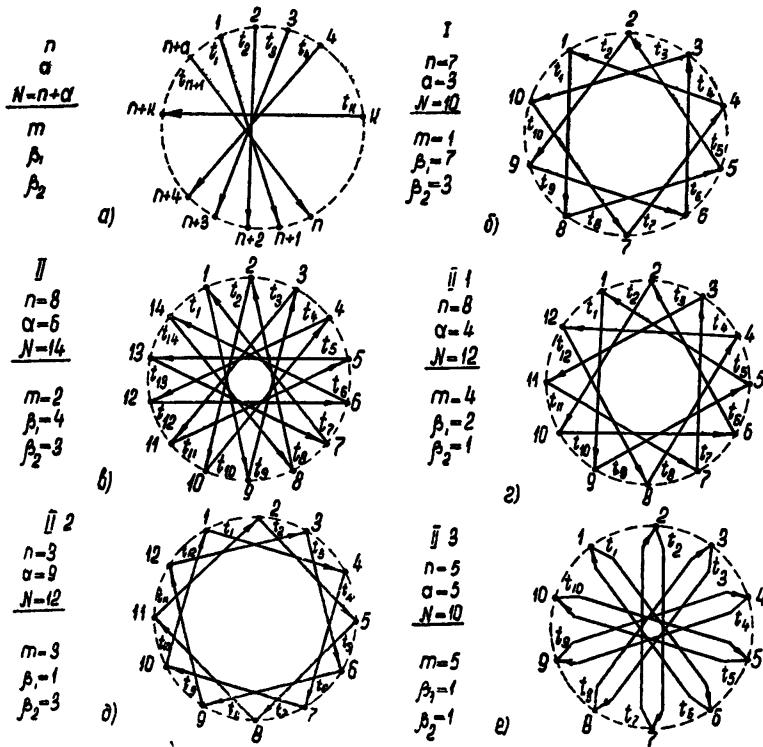


Рис. 1.

ляющих коммутацию запоминающих элементов в реальных физических устройствах, например, магнитных, дает существенное снижение взаимного влияния отдельных запоминающих ячеек друг на друга путем группировки считающих цепей устройств по отдельным траекториям, дизъюнктивно складывая их на входе активного элемента регистра или задержки. Кроме того, она ведет к упрощению монтажа групп запоминающих элементов, соответствующих отдельным замкнутым траекториям, а также к упрощению сборки различных устройств из стандартных групп запоминающих элементов, образующих отдельные траектории. Случай $n = a$ позволяет синтезировать регистры, задержки и динамические триггеры с производительностью m из простейших стандартных элементов, каждый из которых представляет из себя запоминающую группу динамического триггера. Эта группа может быть выполнена с элементами получения инверсной информации.

Может быть также выполнен вариант рециркуляционного регистра, когда каждая замкнутая траектория имеет активный усилительный элемент. В этом случае выход представляется из себя дизъюнктивное сложение сигналов отдельных m траекторий, которое производится после усилителей, а запись выполняется по единой цепи, проходящей через все запоминающие элементы. Это дает возможность снизить в m раз рассеиваемую на каждом из активных элементов мощность, а также их рабочую частоту.

В случае отдельных замкнутых траекторий, имеющих $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 1$, при моделировании их на элементах с прямоугольной петлей гистерезиса и кристаллических триодах перевод запоминающих элементов из одного устойчивого состояния в другое может быть выполнен полными токами I , как это показано, например, на рис. 2. На рисунке направление стрелок справа налево—запись, слева направо—считывание информации с ферритов. Для упрощения рисунка на нем не показаны цепи записи внешней информации на элемент динамического триггера. Ферриты I и II служат для хранения прямого кода информации x , ферриты III и IV—для образования обратного кода x этой же информации.

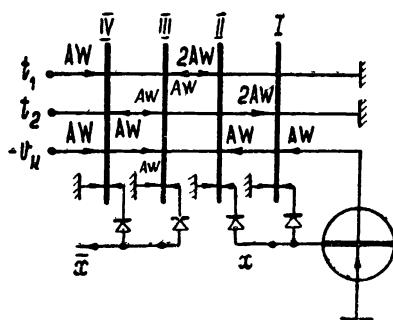


Рис. 2.

В заключение считаю своим прямым долгом выразить благодарность Ю. С. Березину и Э. П. Дзисяк за экспериментальную проверку работы рассмотренных схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1027 (1962).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
25 января 1963 г.

ИНФОРМАЦИЯ

IV ВСЕСОЮЗНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО РАДИОАСТРОНОМИИ

Четвертая Всесоюзная научная конференция по вопросам радиоастрономии была созвана Координационным Советом Академии Наук СССР по комплексной проблеме «Радиоастрономия» и Научно-исследовательским радиофизическим институтом при Горьковском государственном университете им. Н. И. Лобачевского и проходила с 26 февраля по 2 марта 1963 г. в г. Горьком.

Работа конференции охватила все стороны радиоастрономии, развивающиеся в СССР, причем много внимания было уделено дальнейшему развитию этой науки, в частности, вопросам, связанным со строительством крупных радиотелескопов.

Всего в работе конференции принимали участие более 300 делегатов. Было прочитано 120 докладов, многие из которых вызвали оживленные дискуссии. Делегаты конференции также ознакомились с работами по радиоастрономии, проводимыми в НИРФИ.

Пленарное заседание (26.II.1963). После открытия конференции с воспоминаниями о М. А. Бонч-Бруевиче выступил Д. В. Агеев. Вопросам метагалактической радиоастрономии был посвящен доклад В. Л. Гинзбурга и С. И. Сыроватского. О последних достижениях в исследовании радиогалактик сообщил И. С. Шкловский. В докладе С. Э. Хайкина и Ю. Н. Парийского был рассмотрен существенный для проблемы создания больших радиотелескопов вопрос об «эффекте насыщения».

Секция «Космическое радиоизлучение и источники»

На первом заседании (26.II.1963) был продолжен доклад В. Л. Гинзбурга и С. И. Сыроватского, в котором рассматривалась проблема метагалактических космических лучей и магнитных полей. Авторы привели ряд аргументов против гипотез Бербиджа и Шамма об обмене космическими лучами между Галактикой и Местной группой галактик. Метагалактическое происхождение космических лучей также представляется неприемлемым. Это следует, в частности, из того, что не удалось обнаружить гамма-излучение Метагалактики, что накладывает верхний предел на плотность космических частиц. Авторы вычислили спектр релятивистских электронов, решая кинетическое уравнение на основе гипотезы об их вторичном происхождении из π -мезонов. Удается объяснить изменение спектрального индекса на 0,2 в наблюдаемом интервале частот. В дискуссии В. А. Разин заметил, что согласно работе Балдина это изменение больше: от 0,35 до 0,8.

В сообщении И. С. Шкловского «Радиозвезды» были приведены данные об обнаружении источников с угловыми размерами порядка нескольких секунд, совпадающими в пределах ошибок по положению с пекуллярными слабыми звездами, имеющими максимум излучения в ультрафиолетовой области. Высказывается предположение, что эти источники—звездообразные остатки сверхновых. Приводятся последние данные о поляризационных оптических наблюдениях Крабовидной туманности, из которых следует, что звезда—остаток сверхновой—время от времени выбрасывает облака релятивистских электронов, наблюдавшихся по смещению видимых «жгутов» синхротронного излучения. Любопытно, что вблизи этой звезды есть яркая деталь, положение которой почти не изменилось за 20 лет.

В сообщении Г. Б. Шоломикого «Наблюдательная проверка космологических теорий» обсуждались возможности проверки различных моделей радиоастрономическими методами. Трудности такого сопоставления связаны с неопределенностью учета эволюционных факторов (изменения светимости и размеров галактик со временем). Автор полагает, что открытые модели лучше соответствуют наблюдениям. По его оценке температура общего метагалактического фона составляет $100 \pm 40^{\circ}\text{K}$.

В докладе В. Н. Цытова «Ускорение электронов плазменными и электромагнитными волнами» рассматривался статистический механизм ускорения электронов хаотическими плазменными волнами и длинноволновым электромагнитным излучением. Большая подвижность и неустойчивость плазмы приводят к тому, что в ней должна образоваться турбулентность на плазменных частотах, энергия которой сравнима с плотностью энергии магнитного поля или тепловой энергией. При увеличении амплитуды колебаний этот механизм переходит в известный механизм Ферми. Ускорение на

плазменных волнах наиболее эффективно для электронов небольших энергий. Длинноволновое радиоизлучение может также приводить к ускорению частиц, если показатель предломления больше единицы.

На втором заседании (27.II.1963) были заслушаны доклады по исследованию радиоизлучения в линии 21 см . В докладе Н. Ф. Рыжкова, Т. М. Егоровой, И. В. Госачинского, Н. В. Быстровой «Наблюдения центра Галактики в непрерывном спектре на частоте 1420 мГц и в линии нейтрального водорода» приведены результаты исследования источника Стрелец-А с большой разрешающей способностью. Определены спектральные индексы отдельных деталей, причем две из них, в том числе и центральная, не являются, по-видимому, тепловыми. Южная и северная часть кольца Дрейка расположены по разные стороны от расширяющегося рукава на расстоянии 3 кpc от центра.

В сообщении Т. М. Егоровой «Наблюдения центра на больших положительных и отрицательных скоростях» приведены результаты записи источника Стрелец-А на частотах, соответствующих отрицательным скоростям— $-78, -85, -148\text{ км}\cdot\text{сек}^{-1}$, а также ряду положительных скоростей. Центральная деталь наблюдается в поглощении только при скорости $-78\text{ км}\cdot\text{сек}^{-1}$ и не наблюдается в поглощении при скорости $-85\text{ км}\cdot\text{сек}^{-1}$ или при положительных скоростях. Этот результат можно было бы объяснить, предположив, что указанная деталь расположена не в самом центре Галактики, а ближе к Солнцу, между частями нейтрального газа, скорости расширения которых находятся между 78 и $85\text{ км}\cdot\text{сек}^{-1}$.

Затем состоялась дискуссия по проблеме центра Галактики. Ю. Н. Парийский сообщил, что центральная деталь Стрельца-А, возможно, имеет нетепловой характер, хотя спектральный индекс определить еще не удалось. По мнению Н. С. Кардашева, отсутствие поглощения на частоте, соответствующей $-85\text{ км}\cdot\text{сек}^{-1}$, можно объяснить тем, что в центральной части газ движется внутрь, а не наружу. Возможно, что отсутствие поглощения объясняется и клочковатой структурой газа. По мнению всех выступавших, проблема центра Галактики очень важна и требует исследования этой области с наибольшей разрешающей способностью.

В докладе Р. Л. Сороченко и В. И. Аристкина «Исследование распределения нейтрального водорода в области γ -Лебедя по наблюдениям на волне $\lambda = 21\text{ см}$ » приводятся данные об изофотах и расположении водорода в этой области.

В докладе Н. С. Кардашева, Т. А. Лозинской и Е. Слепцовой «Некоторые результаты наблюдений космического радиоизлучения в водородной линии 21 см » приводятся результаты обработки как собственных наблюдений авторов, так и всех предыдущих наблюдений на $\lambda = 21\text{ см}$ с целью определения положения, распределения и толщины слоя нейтрального водорода. Подтверждено искривление и утолщение диска к краям. Предполагается, что это искривление связано с переходом на краях магнитного поля Галактики в метагалактическое поле. Согласно этим же данным, наша Галактика имеет вид двухходовой спирали с углом раскручивания 85° . Скорость радиального движения в Галактике при переходе от центра к периферии меняет знак. У центра—расширение, в направлении на антицентр—сжатие. В дискуссии обсуждалась модель Миллса ступенчатого распределения интенсивности нетепловой составляющей и возможности определения скоростей втекания и растекания.

В сообщениях Р. Д. Дейвиса, Г. М. Товмасяна «Исследование некоторых звездных скоплений на волне 21 см » и «Исследование области Лебедя-Х на волне 21 см » приведены результаты, полученные авторами при наблюдениях на радиотелескопе Джодрел Бэнк. Были определены массы водорода в пяти скоплениях, связанных с ассоциациями О и В типов. Во всех случаях масса водорода невелика по сравнению со звездными массами. В трех случаях наблюдаются разлетающиеся оболочки. Г. М. Товмасян полагает, что относительно небольшое количество водорода в ассоциациях противоречит гипотезе об образовании звезд из межзвездной среды; однако в дискуссии было отмечено, что противоречия здесь нет, поскольку наблюдаются расширяющиеся оболочки и, следовательно, газ после образования звезд разбрасывается. Б. В. Кукarkin рекомендовал пронаблюдать старое скопление этим же методом. В исследуемой области Лебедя-Х обнаружено 8 отдельных облаков, расположенных на расстоянии около 4 kpc , что не соответствует расстоянию в $1,5\text{ kpc}$ до источника Лебедь-Х.

В сообщении Г. М. Товмасяна, В. А. Санамяна и А. М. Асланяна «Новые данные о радиоизлучении от области шпоры $\ell^{II} = 30^\circ$ » показывается, что эта область простирается дальше на юг и образует кольцо, что может служить подтверждением гипотезы Брауна о том, что это образование—остаток сверхновой.

Третье заседание (28.II.1963) было посвящено в основном поляризационным исследованиям. В докладе В. Я. Гольнева и Н. С. Соболовой «Распределение поляризованного и неполяризованного радиоизлучения Крабовидной туманности на волне $3,2$ и $6,3\text{ см}$ » показано, что области поляризованного излучения меньше и они сильно отличаются от областей, видимых в оптическом излучении. Есть места, где поляризация радиоизлучения больше поляризации оптического излучения. По смещению поляризационного угла получено значение $NHI \approx 10^{14}$ на пути от Солнца до Кра-

бовидной туманности. В дискуссии обсуждалась возможность того, что различие значений степени поляризации связано с высыпыванием электронов.

В сообщениях В. А. Разина «К методике измерений линейной поляризации космического радиоизлучения» и «Некоторые результаты измерения поляризации космического радиоизлучения на частоте 207 мгц» описываются методы исследования поляризации фона космического излучения, в частности, метод использования Луны для экранирования главного луча антенны и показывается, что поляризованное излучение фона возникает на расстояниях не выше 100 pc. В дискуссии В. А. Разина рекомендовал для поляризационных исследований использовать диапазон 30 ± 150 см.

В сообщении В. Л. Гинзбурга и В. В. Писаревой «О поляризации космического радиоизлучения» рассматривался вопрос о том, какие сведения можно извлечь из анализа поляризации космического и метагалактического радиоизлучения. Авторы пришли к выводу, что этот анализ, по-видимому, не сможет определить характеристики межгалактической среды. В дискуссии было, однако, отмечено, что исследование поляризации метагалактического радиоизлучения может привести к ряду существенных результатов, поскольку здесь меньшую роль играют эволюционные факторы. Например, при наблюдении удаленных галактик, разлетающихся со скоростью, сравнимой со скоростью света, влиянием эффекта Фарадея в самих галактиках можно пренебречь (там длина волны заметно меньше принимаемой). Здесь также меньше оказывается эволюционное изменение размеров и светимости галактик.

В сообщении А. Д. Кузьмина, А. Е. Саломоновича и В. А Удальцова «К вопросу о поляризации Крабовидной туманности» сообщается об измерении поляризации на волнах $\lambda = 3$ см и $1,6$ см. Степень поляризации составляет 6,8% и 6,6% соответственно.

В докладе Г. М. Айвазяна «О поляризации непрерывной эмиссии и радиоизлучения Крабовидной туманности» ставится под сомнение применимость синхротронного механизма в этом случае. В последующей дискуссии было показано, что эти сомнения не обоснованы и что отмеченные автором трудности могут быть разрешены в рамках синхротронного механизма.

Сообщение В. И. Мороза «Спектр синхротронного излучения Крабовидной туманности» было зачитано Г. С. Хромовым. Сопоставляя оптические и радиоизмерения потока с собственными инфракрасными измерениями, автор построил спектр излучения этой туманности с изломом вблизи $\lambda = 5$ м. В инфракрасной области спектральный индекс равен $-1,5 \pm 0,2$.

В последнем сообщении В. Н. Цытова «Ускорение электронов в Крабовидной туманности» предложенный автором механизм ускорения на плазменных волнах был применен к случаю этой туманности. В дискуссии было замечено, что, по-видимому, плазменная турбулентность возникает только в источниках, расширяющихся с большой скоростью, так как в обычных зонах НП этот механизм ускорения электронов не действует.

На четвертом заседании (1.III.1963) обсуждались различные вопросы, связанные с исследованием дискретных источников. В докладе Н. Л. Кайдановского, Д. В. Королькова, Ю. Н. Парийского и В. А. Прозорова «Тонкая структура радиоисточников по наблюдениям в Пулкове на волне 3,2 см» приведены результаты исследования ряда источников с большой разрешающей силой (Крабовидная туманность, туманности Ориона и Омеги, область галактического центра, источники Лебедь-А и Дева-А). Показано возрастание спектрального индекса от центра к краю у Крабовидной туманности, наличие острого максимума эмиссионной способности в центральных частях туманностей Омеги и Ориана, а также у детали № 1 в галактическом центре. Плотность звезд в центре Галактики $\sim 10^6$ pc⁻³. У Лебедя-А компоненты асимметричны, причем с уменьшением длины волны расстояние между центрами тяжести компоненты увеличивается, а интенсивность излучения между компонентами уменьшается. Угол между осью Галактики, источником Лебедь-А и линией, соединяющей максимумы излучения, также поворачивается с изменением длины волны (при переходе от 2,4 м до 3 см — почти на 30°). Передние фронты источников, по-видимому, достаточно круты. Центральный источник Девы-А имеет размер не более 20" дуги, причем он лежит близко к оптическому центру. Двойственность этого источника не обнаружена. В дискуссии было отмечено, что область между компонентами в Лебеде-А должна излучать тепловой спектр, так как оценка по наблюдаемому излучению в $\lambda = 3727$ дает меру эмиссии, равную примерно 10^4 (Н. С. Кардашев); поэтому источник Лебедь-А должен был бы иметь повышенное излучение на сантиметровых волнах, что противоречит данным наблюдений.

В докладе Н. С. Соболевой и Г. М. Тимофеевой «Поляризационные наблюдения источника Лебедь-А на Большом пулковском телескопе на волне $\lambda = 3,02$ см» показано, что меньшая область поляризована больше (до 23%), чем большая по яркости и размерам область. Углы поляризации несколько развернуты (158° и 142° соответственно). При изменении длины волны от 3,02 до 3,47 см угол меняется от 146° до 114°; отсюда следует, что параметр N HI $\approx 6 \cdot 10^{14}$.

В кратком сообщении В. Н. Цытова указан на возможность слабого взаимодействия радиоволн с нейтрино в области, где диэлектрическая постоянная больше единицы.

В двух сообщениях «Новое отождествление космических источников» и «О природе двойных радиогалактик» А. Т. Каллоглян и Г. М. Томасян доложили о работах, опубликованных под теми же названиями в трудах Бюраканской обсерватории.

Доклад Ю. П. Псковского «Спектральные индексы дискретных радиоисточников» состоял из двух частей. Сначала обсуждалось разделение сверхновых на I и II типы. По мнению автора, сверхновая Тихо-Кеплера относится к первому типу. Сверхновая, давшая Крабовидную туманность, принадлежит, по-видимому, к особому типу. Во второй части доклада построена диаграмма радиосветимость—спектральный индекс (в области частоты 440 мгц). Большинство источников укладывается с большим разбросом на линию, соответствующую главной последовательности, но есть пять источников типа Лебедь-А, которые выпадают из этой последовательности. Все они имеют излом в спектре; если же взять значение спектрального индекса, соответствующее более пологой части, то они тоже попадут на эту последовательность. Зависимость светимость—угловые размеры обладает теми же особенностями. Источники типа Лебедь-А—молодые, сверхгиганты по светимости (но не по размерам), причем с ростом светимости растет и спектральный индекс. Поверхностная яркость объектов главной последовательности не зависит от спектрального индекса. Большой разброс точек связан с неправильными отождествлениями. В дискуссии обсуждались свойства сверхновых.

В докладе Ю. Н. Ветухновской и А. Д. Кузьмина «Некоторые дискретные источники радиоизлучения на волне 9.6 см » дан обзор 23 источников (из них 7 нетепловых), наблюдаемых с диаграммой 17. Некоторые из тепловых источников не наблюдаются в оптической области. Определены спектры, оценены массы и расстояния до источников.

Последним на этом заседании был зачитан доклад Л. Л. Базеляна, С. Я. Брауде, Ю. М. Брука, Н. Н. Жука, В. Н. Лановского, А. В. Меня, Б. Н. Рябова, Л. Г. Содина, Н. К. Шарыкина «Измерение абсолютных значений потоков излучения дискретных источников Кассиопея-А, Лебедь-А, Дева-А, Телец-А в диапазоне $12 \pm 40 \text{ мгц}$. Авторы обнаружили у трех первых источников завал спектра в указанной области частот, объясняемый поглощением в межзвездной среде. Отношение потоков от источника в Лебеде к потоку от Кассиопеи-А уменьшается с увеличением длины волны. В спектре Телец-А этого завала не обнаружено, что трудно объяснить, так как поглощение на пути до этого источника должно быть значительным. Погрешность определения потоков в этой области спектра около $20 \pm 25\%$. В дискуссии было отмечено, что проверить механизм завала спектра при низких частотах можно путем определения изменения спектра со временем.

Последнее, пятое заседание секции (27.II.1963) было посвящено работам НИРФИ по абсолютным измерениям потоков от источников. В вводном докладе В. С. Троицкого «Задачи и метод составления каталога спектров дискретных источников на СВЧ» сообщалось, что в течение трех лет предполагается составить каталог спектров всех наиболее мощных источников в диапазоне сантиметровых волн с точностью определения потоков до $1 \pm 2\%$. При измерениях будет использован метод «искусственной Луны». Основные ошибки метода—дифракция на диске «искусственной Луны» и нечернота этого диска—могут быть сделаны меньше 1%.

В сообщении В. В. Хрулева «Измерение интенсивности дискретных источников на волне $10,26 \text{ см}$ » приведены данные для потоков Кассиопея-А и Лебедь-А. В сообщении В. А. Разина и В. Т. Федорова «Интенсивности радиоизлучения ряда дискретных источников на частоте 925 мгц » приведены результаты измерения для Кассиопеи-А, Лебедя-А, Стрельца-А и ряда других источников. Точность определения потоков $3 \pm 5\%$.

В объединенном докладе группы сотрудников НИРФИ, зачитанном К. С. Станкеевичем, «Прецизионные измерения потоков радиоизлучения ряда источников в сантиметровом диапазоне» приводится обзор полученных результатов по исследованию спектров этих источников. Более подробно рассмотрен источник Кассиопея-А. В диапазоне $3-10 \text{ см}$ спектральный индекс $\alpha = 0,87$ и в диапазоне $10-20 \text{ см}$ спектральный индекс $1,18 \pm 1,08$. Обсуждается возможность образования ступенек в спектре. Эффект нестационарности приводит к увеличению спектрального индекса; здесь же наблюдается его уменьшение. В дискуссии обращено внимание на необходимость учета структуры источников, так как спектральный индекс является лишь средней характеристикой. Для эталонирования лучше выбирать точечные источники—это позволит использовать полученные здесь данные и на антенных с большой разрешающей способностью.

Секция «Солнце»

На первом заседании секции (27.II.1963) был заслушан доклад В. В. Железнякова «О частотном спектре медленно меняющейся компоненты солнечного радиоизлучения». В докладе дается теоретическое объяснение наблюдаемого частотного спектра медленно меняющейся компоненты, как результата совместного действия тормозного и магнитотормозного механизмов в областях повышенной плотности над центром

активности. Возможные механизмы радиоизлучения локальных источников обсуждались также в сообщении А. П. Молчанова и А. С. Гребинского «О некоторых характеристиках источников радиоизлучения на Солнце, связанных с группами пятен».

Рассмотрению общей схемы развития оптических и радиоявлений, определяемых локальным магнитным полем, в изменяющейся активной области посвящен доклад С. Т. Акиньина и Э. И. Могилевского «Неравновесное радиоизлучение Солнца в метровом диапазоне, связанное с активными областями на Солнце». В докладе рассмотрены некоторые свойства повышенного радиоизлучения активных областей Солнца и связь этого излучения с радиовсплесками II, III, и IV типов, а также с геомагнитными возмущениями.

В докладе И. Г. Моисеева «О размерах и структуре агента, возбуждающего медленно дрейфующие всплески радиоизлучения Солнца» по динамическому спектру II типа всплесков радиоизлучения определяется размер агента в радиальном направлении (80—300 тыс. км).

Возможные механизмы всплесков радиоизлучения Солнца в диапазоне сантиметровых волн рассматривались в докладах А. Ф. Дравских «Спектр и механизмы излучения всплесков радиоизлучения Солнца в диапазоне сантиметровых волн» и Г. Б. Гельфрейха «Тепловая модель всплеска в сантиметровом диапазоне». А. Ф. Дравских привел экспериментальные кривые, показывающие распространенность частотного спектра излучения вида $f^{-0.75}$. Такой спектр может быть объяснен синхротронным излучением релятивистских электронов при напряженности магнитного поля менее 1000 Гц; при большем магнитном поле возможно и тепловое излучение плазмы. Г. Б. Гельфрейх сделал попытку интерпретировать полученные в ГАО записи поляризации и интенсивности всплесков радиоизлучения Солнца на волне 2,2 см для нахождения динамических характеристик излучающей области. Предполагается, что всплеск обусловлен тепловым излучением расширяющейся конденсации горячего вещества короны в постоянном магнитном поле.

Сверхкороне Солнца были посвящены доклады В. В. Виткеевича «Двухкомпонентная модель сверхкороны Солнца», В. И. Бабая, В. В. Виткеевича, М. В. Гореловой, А. Г. Сухова «О динамике неоднородностей в сверхкороне Солнца (по данным 1962 г.)» и В. Я. Гольнева, Ю. Н. Парийского, Н. С. Соболевой «Поляризационные наблюдения покрытия Крабовидной туманности сверхкороной Солнца на волне 6,3 см», зачитанные на втором заседании секции.

На основании оптических данных о средней электронной концентрации и скорости убывания функции рассеяния радиоволн в сверхкороне Солнца В. В. Виткеевичем предлагается следующая модель сверхкороны: внутренняя сверхкорона имеет большое число электронов, распределенных равномерно и не создающих рассеяния; внешняя сверхкорона в основном состоит из неоднородностей.

В. И. Бабай и др. по данным наблюдения покрытия Крабовидной туманности сверхкороной Солнца в июне 1962 г. на волне 5 м отмечают изменения в ориентации, форме эллипса рассеяния и его координатах за время порядка получаса. В. Г. Гольнев и др. отметили, что, поскольку влияние околосолнечного пространства на плоскость поляризации ($\lambda = 6,3 \text{ см}$) не превосходило погрешности измерений ($\pm 8^\circ$), это определяет верхний предел для продольной компоненты магнитного поля Солнца в $(2 \pm 8) \cdot 10^{-3} \text{ эрстед}$ для общего поля на расстояниях в 5–6 радиусов Солнца.

А. Р. Аббасов в сообщении «О связи между площадью группы пятен и потоком источников» привел результаты обработки измерений ГАО и показал, что поток источников изменяется приблизительно, как квадрат площади группы пятен.

В докладе В. И. Шитова «О магнитных полях межпланетного пространства» по данным радиоастрономии и вариациям космических лучей принимается, что межпланетное магнитное поле состоит из двух компонент: радиального, несколько закрученного поля и магнитных неоднородностей. В работе дается оценка величины радиальной компоненты магнитного поля.

А. Г. Кисляков, В. Н. Никонов, В. М. Плечков в сообщении «О спектре радиоизлучения Солнца в миллиметровом диапазоне волн» привели результаты измерений спектра в диапазоне 3–7 мм, полученные летом 1962 г. Памирской экспедицией НИРФИ. Полученные интенсивности излучения соответствуют температуре Солнца 7300°К на 4 мм, 5800°К на 6 мм и 9000°К на 7 мм.

О наблюдении излучения Солнца в субмиллиметровом диапазоне волн сообщили В. Я. Рядов, Н. И. Фуршов, Г. А. Шаронов. Наблюдения проводились с помощью радиотелескопа с дифракционными решетками и оптико-акустическим приемником в диапазоне 0,6–1,4 мм Памирской экспедицией НИРФИ на высоте 3860 м.

Наблюдения во время солнечных затмений были посвящены сообщения А. П. Молчанова «Некоторые результаты наблюдения солнечного затмения 31.VII.1962 г.» и Л. И. Матвеенко, Р. Л. Сороченко «Наблюдения полного солнечного затмения 15.II.1961 г. на волнах 22 и 83 см». В первом из этих сообщений приводились предварительные результаты наблюдений, выполненных в Республике Мали на волнах 3,2 и 4,5 см. Во втором сообщении приведены данные Крымской станции ФИАН об остаточной интенсивности радиоизлучения в момент полной фазы затмения, построены радиоизображения Солнца и определены параметры «радиопятен».

А. П. Молчанов, Г. С. Вейсиг, В. Н. Боровик доложили об определении эллиптичности Солнца на волне 3,2 см путем измерения второй гармоники сигнала при сканировании.

Совместно с секцией «Солнца» было проведено заседание подсекции Солнца Координационного Совета АН СССР по проблеме «Радиоастрономия». На этом заседании было заслушано сообщение М. М. Кобрина и О. И. Юдина «О радиослужбе Солнца в СССР».

Секция „Луна и планеты“

Два первых заседания этой секции (27.II и 28.II.1963) были посвящены в основном обсуждению результатов экспериментальных и теоретических исследований радиоизлучения Луны и природы ее поверхности. Работа секции была начата вступительным докладом В. С. Троицкого, который кратко охарактеризовал общее направление работ и выделил некоторые основные задачи в исследованиях Луны, проводимых в НИРФИ. Одному из результатов этих исследований был посвящен следующий доклад В. Д. Кротикова и В. С. Троицкого «Обнаружение горячих недр Луны». В докладе сообщалось, что прецизионные измерения яркостной температуры Луны, выполненные в диапазоне волн $3 \div 50$ см, позволили установить систематическое увеличение температуры вглубь Луны. Характер роста температуры указывает на однородность тепловых свойств поверхностного слоя Луны до глубины порядка 20 м, а сам градиент температуры таков, что заставляет предположить существование горячего ядра у Луны. По оценкам температура в недрах Луны на глубине $50 \div 60$ км составляет порядка 10^3 К.

В ряде докладов сообщались результаты исследования радиоизлучения Луны в дециметровом и миллиметровом диапазонах волн. В. Д. Кротиков в докладе «Прецизионные измерения радиоизлучения Луны в дециметровом диапазоне волн» сообщил результаты измерений радиоизлучения Луны на волнах $35 \div 36$ см и 50 см. Измерения проведены методом сравнения излучения Луны с излучением эталонного диска, изготовленного из абсолютно черного материала. Аналогичный метод был использован при наблюдениях радиоизлучения Луны в 4-мм диапазоне волн. Доклад об этих наблюдениях, выполненных Памирской экспедицией НИРФИ, был сделан А. Г. Кисляковым и В. М. Плечковым. Памирской экспедицией НИРФИ были проведены также первые систематические наблюдения фазового хода радиоизлучения Луны на волнах 1,8 мм (доклад А. И. Наумова) и 1,3 мм (доклад Л. И. Федосеева). Результаты прецизионных измерений фазового хода радиоизлучения Луны в 4-мм диапазоне волн указывают на тенденцию к уменьшению излучательной способности лунной поверхности по сравнению с ее излучательной способностью в сантиметровом диапазоне волн. К такому выводу можно прийти, сопоставляя эти результаты с данными о радиоизлучении Луны на волне 1,6 см, которые были предметом сообщения в докладе Д. А. Дмитренко, С. А. Каменской и В. Л. Рахлина, а также с результатами ранее опубликованных работ.

Доклад М. Р. Зелинской, Г. К. Карповой, В. Д. Кротикова, К. М. Стрежневой и С. А. Шмулевича содержал в себе результаты лабораторных исследований ряда электрических параметров различных земных пород. Как было сообщено докладчиками, эти исследования в совокупности с данными о радиоизлучении Луны позволили прийти к выводу, что лунные породы, по-видимому, аналогичны земному базальту, дуниту или габбро, а не вулканическим туфам, как это полагалось ранее.

Выступавшие в дискуссии В. А. Котельников, А. В. Марков, А. Е. Саломонович и др. отметили важность и большой интерес, как представленных материалов исследований Луны, так и сделанных на их основе выводов. Они подчеркивали также необходимость дальнейшего развития методов исследования Луны с тем, чтобы сделать возможным изучение физических свойств отдельных участков лунной поверхности, а также увеличить надежность получаемых данных. Решение этих двух задач облегчится, если исследование Луны примет комплексный характер, когда богатые радиометрические результаты можно будет более широко сопоставлять с результатами оптических и радиолокационных исследований.

Л. И. Филипов в докладе «О возможности получения отражательных карт ближайших планет» предложил метод получения отражательных карт по виду зондирующих сигналов, а также проанализировал техническую возможность постановки такого эксперимента для ближайших к Земле планет солнечной системы. В дискуссии по этому докладу В. А. Котельников в подчеркнул, что характер временных вариаций отражательных карт планет позволяет определить, создается ли отражение радиоволн ионосферой планеты или ее твердой поверхностью; в последнем случае станет возможным получение отражательной карты поверхности планеты.

На втором заседании (28.II.1963) В. Д. Кротиков и О. Б. Щуко сообщили о результатах расчета теплового режима лунной поверхности для различных фаз Луны и затмений 6.VII и 30.XII.1963 г. Они рассчитали также временную зависимость интегрального радиоизлучения Луны для лунций и затмений в широком диапазоне радиоволн от миллиметровых до дециметровых.

Большинство остальных докладов, сделанных на этом заседании, было посвящено результатам исследования Луны на инструментах с высокой разрешающей способностью. На 22-х метровом радиотелескопе Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР, совместно с НИРФИ были проведены исследования радиоизлучения отдельных участков лунной поверхности на волнах 4 м.м и 8 м.м. В докладе А. Г. Кислякова, Б. Я. Лосовского и А. Е. Саломоновича «Обнаружение различий яркостной температуры излучения лунных «морей» и «материков» в миллиметровом диапазоне волн» сообщалось, что в радиоизлучении этих образований в период наблюдений обнаружилась систематическая разница («моря» теплее «материков» примерно на 8°K), которая отчетливо проявилась на обеих волнах (4 м.м и 8 м.м). А. Г. Кисляков и А. Е. Саломонович провели также детальное исследование радиоизлучения экваториальной области Луны в 4-мм диапазоне волн, основным результатом которого, как следует из доклада, явилось независимое (по соотношению амплитуд гармоник и постоянной составляющей яркостной температуры в центре диска Луны) заключение о справедливости закона $\sqrt{\cos \Phi}$ для широтного распределения поверхностной температуры Луны.

Исследованию поверхностной температуры в отдельных участках Луны были посвящены также доклады М. Н. Маркова, В. Л. Хоковой, А. И. Цугулиевой «Изучение теплового излучения отдельных деталей на поверхности Луны в диапазоне $8 \div 20 \mu$ » и А. В. Маркова «Об итогах радиометрических промеров температуры участков Луны». Первый из докладов оригинален, второй имеет обзорный характер. Авторы первого доклада обнаружили, что некоторые кратеры (наиболее отчетливо кратер Аристарх), находясь на дневной стороне Луны, остаются холоднее окружающих их областей. Это явление не удалось объяснить простой разницей в альбедо; возможно, что замеченный эффект нужно толковать как проявление неоднородности тепловых свойств лунной поверхности.

Исследованием Луны в диапазоне инфракрасных волн занимались также В. Я. Рядов, Н. И. Фуршов и Г. А. Шаронов (НИРФИ). В их совместном докладе «Об инфракрасном излучении Луны» содержатся результаты измерений интегрального излучения Луны в диапазоне $8 \div 20 \mu$. Совпадение полученных авторами результатов с теоретическим расчетом интегрального излучения Луны на инфракрасных волнах позволило убедиться в правильности общепринятых предпосылок о тепловом режиме на поверхности Луны.

Большой интерес вызвал доклад В. Я. Гольнева и Н. С. Соболевой «Поляризация теплового радиоизлучения Луны». Авторам удалось с помощью Большого пулковского радиотелескопа обнаружить поляризацию собственного радиоизлучения Луны на волнах 3,2 см и 6,3 см. На основании анализа полученных распределений поляризованного радиоизлучения по диску Луны оказалось возможным оценить диэлектрическую проницаемость почвы Луны, а также установить, что в образовании поляризованного радиоизлучения Луны существенную роль играют как большие неоднородности на поверхности Луны (с наклоном $\sim 20^{\circ}$), так и мелкие, размером порядка нескольких миллиметров.

В дискуссии по представленным на заседании докладам отмечались актуальность и большой интерес выполненных исследований радиоизлучения Луны на инструментах с высокой разрешающей способностью. Один из важнейших результатов этих исследований как было отмечено В. С. Троицким, заключается в том, что они говорят о радиометрической однородности поверхности Луны. Области, где замечаются сравнительно резкие тепловые контрасты, малы по своим угловым размерам (кратеры) и занимают относительно малую часть всей поверхности Луны. Для выявления тонких различий в физических свойствах поверхностного слоя Луны нужны детальные исследования радиоизлучения отдельных участков ее поверхности в диапазонах миллиметровых и субмиллиметровых волн.

Интересная возможность исследования широтного распределения поверхностной температуры Луны была отмечена А. Е. Саломоновичем. Она появилась благодаря тому, что с помощью высоконаправленного радиотелескопа миллиметрового (или субмиллиметрового) диапазона волн можно надежно измерить амплитуды нескольких гармоник фазового хода радиоизлучения центральной области Луны, определить по ним закон спадания амплитуды гармоник с ростом номера и тем самым узнат закон широтного распределения температуры на поверхности.

На третьем заседании (1.III.1963) были представлены доклады, освещающие как экспериментальные исследования радиоизлучения планет, так и теоретические работы, касающиеся интерпретации известных данных о радиоизлучении планет.

В докладе Д. Я. Мартынова было проведено сопоставление имеющегося экспериментального материала, полученного при исследовании планет оптическими и радиометодами. Наибольшее внимание автор уделяет Венере, так как в данных о температуре на этой планете, полученных оптическими и радиометодами, имеется существенное расхождение. Отмечая трудности в интерпретации этих данных, докладчик подчеркнул необходимость, с одной стороны, дальнейших радионаблюдений Венеры и, с другой стороны, разработки теорий образования молекулярных полос при прохождении света через толщу атмосферы.

Широкие исследования ночной стороны Венеры провели Ю. Н. Ветухнов-

ская, А. Д. Кузьмин, Б. Г. Кутуза, Б. Я. Лосовский и А. Е. Саломонович. Ими был получен (во время соединения 1962 г.) спектр радиоизлучения ночной стороны Венеры в диапазоне волн от 0,8 см до 9,6 см. Особенностью этого спектра является наличие перегиба в области волн около 1,6 см. На волнах короче 0,8 и длинее 9,6 см яркостная температура ночной стороны Венеры, по-видимому, постоянна или зависит от длины волны значительно слабее, чем в области перегиба.

Д. В. Корольков, Ю. Н. Парийский, Г. М. Тимофеева и С. Э. Хайкин также получили интересные данные о радиоизлучении Венеры во время нижне-го соединения 1962 г. С помощью Большого пулковского радиотелескопа они определили радиодиаметр планеты на волне 3,2 см и на основании этого измерения пришли к заключению, что у Венеры нет радиационных поясов, подобных имеющимся у Юпитера, или чрезвычайно мощной и протяженной ионосферы. Фазовый ход радиоизлучения Венеры на волне 3,2 см не был обнаружен.

В докладах А. Е. Саломоновича «К вопросу об обнаружении воды в атмосфере Венеры», А. Д. Кузьмина «Об ионосферной модели Венеры» и А. Д. Данилова и С. П. Яценко «Об ионосферной интерпретации радионаблюдений Венеры» были рассмотрены возможные модели атмосферы планеты, на основе которых можно объяснить совокупность наблюдательных данных.

Выступавшие в дискуссии по этой группе докладов В. А. Котельников, В. С. Троицкий, А. Е. Саломонович и др. отметили, что в области исследования радиоизлучения Венеры имеется существенный прогресс, но интерпретация имеющихся теперь данных по-прежнему затруднительна. Предлагаемые модели атмосферы Венеры пока неудовлетворительны.

В заключение заседания были заслушаны доклады о радиоизлучении Юпитера. А. А. Корчак в докладе «О синхротронном излучении заряженных частиц в дипольном магнитном поле» изложил результаты расчета параметров Стокса для такого излучения и показал, что, зная эти параметры, можно определить локализацию излучающих частиц, их угловое и энергетическое распределение. В докладе «О циклотронном излучении заряженных частиц в дипольном магнитном поле» А. А. Корчак и Н. А. Лотова рассмотрели другой механизм радиоизлучения Юпитера и определили его особенности, которые в принципе дают возможность отличить его от синхротронного механизма излучения. В. Н. Цытович сделал доклад «Об ускорении электронов в радиационных поясах Земли». Аналогичные радиационные пояса обнаружены, как известно, и у Юпитера.

В дискуссии по последней группе докладов выступил В. В. Железняков. Он привел два аргумента в пользу того, что дециметровое радиоизлучение Юпитера не генерируется нерелятивистскими электронами. Чтобы объяснить радиоизлучение Юпитера излучением нерелятивистских электронов, нужно предположить, что планета имеет большое (до $3 \cdot 10^4$ gauss) магнитное поле. Однако при этом будет сильный эффект Фарадея, который приведет к деполяризации дециметрового радиоизлучения Юпитера. Кроме того, столь сильные поля не согласуются с современными представлениями о механизме всплесков радиоизлучения Юпитера на декаметровых волнах.

Секция „Радиоастрономическая аппаратура“

На пяти заседаниях секции радиоастрономической аппаратуры было заслушано около 30 докладов и сообщений, в которых рассматривались в основном вопросы, связанные с антенной техникой в радиоастрономии (главным образом, проблемы и перспективы создания крупных радиотелескопов), и специфически аппаратурные вопросы.

Обсуждение основных проблем радиоастрономической антенной техники началось на пленарном заседании в связи с докладом Ю. Н. Парийского и С. Э. Хайкина «Эффект насыщения и большие радиотелескопы», в котором было показано, что использование высокочувствительных приемных систем приводит к тому, что при исследовании излучения нетепловых дискретных источников необходимо существенное повышение разрешающей способности радиотелескопа (без соответствующего увеличения усиления антенны). Использование для этих задач весьма крупных зеркальных антенн приводит к избыточному усилиению, поскольку в этих антенных увеличение разрешающей способности сопровождается одновременным повышением усиления. В связи с этим делается вывод о том, что для исследования дискретных источников более целесообразны антенны, имеющие «избыточное» разрешение, т. е. антенны переменного профиля, апертурного синтеза и крестообразные системы.

Дискуссия по вопросам, затронутым в докладе Ю. Н. Парийского и С. Э. Хайкина, развернулась на заседаниях секции, особенно после доклада П. М. Геруни «К вопросу о создании больших радиотелескопов», отстаивающего преимущества зеркальных антенн. Принявшие участие в дискуссии В. А. Котельников, И. С. Шкловский, А. А. Пистолькорс, Л. Д. Бахрах, В. В. Виткевич, Н. П. Кайдановский, Ю. Н. Парийский, Г. М. Томасян, Р. Л. Сороченко, П. М. Геруни и др. всесторонне обсудили преимущества и недостатки различных типов антенных систем при решении тех или иных задач радиоастрономии.

В докладе П. Д. Калачева «О конструктивных возможностях создания «жесткого» параболического рефлектора большого диаметра» подробно рассмотрены возмож-

ности создания и конструктивные особенности больших зеркал и предложены некоторые специальные конструктивные схемы для уменьшения прогиба и увеличения подвижности больших рефлекторов. В докладе Л. Д. Бахраха и К. И. Могильниковой рассмотрены принципиальные и конструктивные возможности и особенности построения, а также основные характеристики радиотелескопов, имеющих многозеркальную систему.

Ряд докладов был посвящен методам и результатам исследования точности изготавления и возможных деформаций формы поверхности больших антенн (докладчики Б. Г. Кузнецов, Ю. Л. Шахbazян, Н. А. Есепкина, В. Ю. Петрунькич и В. Н. Умецкий), а также проектам создания и результатам технической разработки и эксплуатации крупных радиотелескопов и интерферометров (докладчики А. Г. Соколова, В. И. Бабий, Л. И. Матвеенко, М. А. Овсянник, А. И. Сухановский и Ю. С. Русаков, В. М. Вяткина и А. П. Молчанов, С. Я. Брауде, Л. Л. Базелян, Ю. М. Брук, Н. Н. Жук, А. В. Мень и Н. К. Шарыкин, А. Н. Ханбердиев, В. В. Виткевич). И. В. Вавилова и Г. К. Галимов сообщили о разработанном ими совмещенном облучателе на волны 0,8 см, 1,35 см, 1,6 см, 3,3 см, 10 см и 22 см для 22-метрового радиотелескопа ФИАН. В докладе Ю. Н. Парийского и О. Н. Шиврик показана возможность увеличения разрешающей способности Большого радиотелескопа в ГАО (Пулково) примерно в 4 раза на волне 8 мм при сохранении эффективной площади (за счет изменения формы отражающих элементов радиотелескопа и повышения точности их установки).

В докладе Д. В. Королькова и Г. М. Тимофеевой «О реализации предельной чувствительности радиометра» было обращено внимание на возможность ограничения реальной чувствительности модуляционного радиометра с параметрическим усилителем в результате паразитной модуляции собственных шумов параметрического усилителя. На основании проведенных оценок величин паразитных сигналов установлены необходимые для реализации предельной чувствительности требования к элементам и параметрам радиометра. Ряд докладов был посвящен рассмотрению конкретных схем, а также конструктивных и принципиальных особенностей радиометров и обсуждению их параметров (докладчики В. В. Хрулев, Д. В. Корольков и Г. М. Тимофеева, В. С. Аблязов, Е. И. Попов и В. Г. Галин, Т. М. Егорова и Н. Ф. Рыжков и др.). Кроме того, в нескольких докладах и сообщениях рассматривались отдельные элементы радиометров и радиотелескопов (модуляторы, фазовый фильтр с самонастройкой, часовой механизм для гидрования (докладчики Д. В. Корольков и Г. М. Тимофеева, Л. В. Ксанфомалити, А. Ф. Дравских).

В докладах Л. И. Филиппова, А. Э. Балклава, С. Э. Бурунсузыяна было рассмотрено применение электронных счетных машин для обработки результатов радиоастрономических измерений.

С. А. Каплан,
В. В. Зайцев,
А. Г. Кисляков,
М. М. Кобрин,
Н. М. Цейтлин.