

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
442	2 снизу	$\dots + \dots \frac{s_1 + f_{1i}}{s_{20}} \Big) +$	$\dots + \dots \frac{s_2 + f_{1i}}{s_{20}} \Big) +$
475	8 сверху	$\dots = \left(1 \pm \frac{\epsilon_2}{\eta^2 - \epsilon_1}\right)^2 \left[\dots \epsilon_3 \frac{\eta^4 \sin^{2\theta} \cos^{2\theta}}{(\eta^2 \sin^{2\theta} - \epsilon_3)^2} \dots \right] =$	$\dots = \left(1 \pm \frac{\epsilon_2}{\eta - \epsilon_1}\right)^2 \left[\dots \epsilon_3 \frac{\eta^4 \sin^{2\theta} \cos^{2\theta}}{(\eta^2 \sin^{2\theta} - \epsilon_3)^2} \dots \right]$
481	9 снизу	$\Delta = \operatorname{gn} [\zeta(1-v)]$	$\Delta = \operatorname{sgn} [\zeta(1-v)]$
482	8 сверху	$D_s'' = \dots e^{-z_s}$	$D_s'' = \dots e^{-z_s^2}$
490	13 сверху	$D_n(r) = C_n r^{2/3}$	$D_n(r) = C_n^2 r^{2/3}$
514	17 сверху	$ \mu_i ^2 = \dots$	$ \mu_{ij} ^2 = \dots$
545	2 сверху	$1 + \dots - \frac{(\omega')^2}{\Omega_{1,2}^2} \dots$	$1 + \dots + \frac{(\omega')^2}{\Omega_{1,2}^2} \dots$
555	1 снизу	\dots на частотах $35 \pm \kappa \text{гц}$	\dots на частотах $3 \pm 5 \text{ кгц}$
586	6 синзу	$\dots = \left[-i\omega\epsilon_0 A_x^M \frac{\partial A_y^3}{\partial z} \right]_{z=0} \dots$	$\dots = \left[-i\omega\epsilon_0 A_x^M - \frac{\partial A_y^3}{\partial z} \right]_{z=0} \dots$

СОДЕРЖАНИЕ

Кисляков А. Г., Саломонович А. Е. Радиоизлучение экваториальной области Луны в 4-мм диапазоне волн	431
Балклав А. Исследование спектра пространственных частот радиоинтерферометров высокой разрешающей способности при учете двухмерного характера диаграммы направленности	437
Барсуков К. А., Сучкин Г. Л. О ширине линии излучения в сложном эффекте Доплера	449
Арсенин В. В. О поглощении электромагнитной волны, падающей на полупространство, заполненное плазмой	457
Степанов Н. С. О параметрическом усилении поперечных электромагнитных волн в плазме с периодически изменяющейся электронной концентрацией	461
Ситенко А. Г., Кирочкин Ю. А. О рассеянии электромагнитных волн на флюктуациях в плазме при наличии магнитного поля	469
Алексин В. Ф., Степанов К. Н. Пространственная корреляция флюктуационных электромагнитных полей в плазме. II	480
Денисов Н. Г., Татарский В. И. О средней дифракционной картине в фокальной плоскости линзы	488
Малахов А. Н. К вопросу о флюктуациях амплитуды и фазы автогенератора	495
Малахов А. Н. Синхронизация генератора случайным квазимонохроматическим сигналом	501
Крупнов А. Ф., Скворцов В. А. О молекулярном генераторе 4-мм диапазона на пучке молекул формальдегида	513
Насонов В. С. Исследование эффективности оптической подкачки в парах натрия	518
Насонов В. С. Распределение населенности атомов натрия по подуровням основного состояния под действием оптической подкачки	529
Фрейдман Г. И. О зависимости структуры ударных электромагнитных волн в двухпроводных линиях передачи от дисперсионной характеристики системы в линейном приближении	536
Белянцев А. М., Богатырев Ю. К., Соловьева Л. И. Формирование ударных электромагнитных волн в линиях передачи с ненасыщенным ферритом	551
Белянцев А. М., Богатырев Ю. К., Соловьева Л. И. Стационарные ударные электромагнитные волны в линиях передачи с ненасыщенным ферритом	561
Седых В. М., Яцук Л. П. Параметры H -волновода с диэлектрическим заполнением	572
Кузьмин Н. А., Макаров Т. В. К вопросу о распространении волны квази- H_{31} в крестообразном волноводе	581
Чаплин А. Ф. Возбуждение импедансной полосы на бесконечном экране	585
Васильев Е. Н. Возбуждение цилиндра конечной длины диполем Герца	591
Лисицкая И. Н., Синицкий Л. А. Исследование генераторов с отрицательным сопротивлением при кусочно-линейной аппроксимации характеристики линейного элемента	608
Филиппов Л. И. Обработка сигналов космической радиолокации на цифровых машинах методом частотной фильтрации и накопления	616
Телесчин В. Р. К вопросу о распространении возбуждения в одномерной воздушной ткани	624
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Ласточкин В. П., Порфирьев В. А., Станкевич К. С., Троицкий В. С., Холодилов Н. Н., Цейтлин Н. М. Прецизионные измерения интенсивности радиоизлучения дискретных источников Кассиопея-А, Лебедь-А и Телец-А в дециметровом диапазоне	629
Ласточкин В. П., Планкин Э. С., Станкевич К. С. Прецизионное измерение потока радиоизлучения дискретного источника Кассиопея-А на $\lambda=3,2 \text{ см}$	631
Троицкий В. С. О природе вещества лунных морей и материков	631
Кротиков В. Д., Троицкий В. С. О потоке тепла из недр Луны	633
Железняков В. В. и Злотник Е. Я. О роли статического электрического поля при распространении электромагнитных волн в плазме	634
Арискин В. И. Выражение глубины модуляции интерференции для источников, имеющих форму эллипса	637
Силин В. П. О слабозатухающих колебаниях неоднородной плазмы	640
Цытович В. Н. Об ускорении заряженных частиц плазменными волнами	641
Марков Ал. А. Коды с коррекцией ошибок	644
Письмо в редакцию	646
Информация	
Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. III, № 1, 1963	647

РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ЛУНЫ В 4-ММ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН

А. Г. Кисляков, А. Е. Саломонович

Приводятся результаты измерений радиоизлучения экваториальной области Луны в 4-мм диапазоне волн, выполненных в марте—июне 1961 г. Обработка полученных распределений яркостной температуры позволила определить постоянную составляющую, амплитуды и фазы первой, второй и третьей гармоник переменной составляющей в центре диска и точках с долготами 32° и -47° на экваторе. Отношение амплитуды первой гармоники к постоянной составляющей оказалось в удовлетворительном согласии с теорией. Характер изменения амплитуды гармоник с увеличением их номера позволил независимым образом убедиться в справедливости широтного распределения поверхностной температуры Луны по закону

$\sqrt{\cos \psi}$, а также в высокой излучательной способности Луны

Радиоизлучение Луны в 4-мм диапазоне волн было предметом исследования в работах [1,2]. Автор первой из них получил (на радиотелескопе со сравнительно высокой разрешающей способностью — $6',7$) двухмерные распределения радиояркости по диску Луны для трех значений ее фаз. В [2] проведено детальное исследование фазового хода радиоизлучения Луны, но выполнено оно на инструменте с шириной диаграммы направленности порядка угловых размеров самой Луны. Целью настоящей работы было сравнение законов изменения яркостных температур отдельных участков лунной поверхности во время лунации, для чего необходимо было провести полный цикл наблюдений фазового хода радиоизлучения Луны на радиотелескопе с высокой разрешающей способностью. Как неоднократно указывалось [3—6], результаты таких исследований позволяют получить ряд ценных сведений о физическом состоянии лунной коры.

С марта по июнь 1961 г. на 22-метровом радиотелескопе [7] Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР велись наблюдения радиоизлучения Луны в 4-миллиметровом диапазоне волн. Ширина диаграммы направленности главного лепестка антенны, определенная из записей радиоизлучения Венеры [8], составляла около $1',6$ (по уровню 3 дБ). В задачу работы не ставилось получение двухмерных радиоизображений Луны. Чтобы увеличить надежность результатов измерений, было признано целесообразным уделить основное внимание исследованию узкой (соответственно ширине диаграммы направленности) полоски вдоль лунного экватора. Это позволило получить большое количество записей экваториального распределения яркостной температуры Луны, а затем воспользоваться методом их графического усреднения.

Наблюдения Луны велись, в основном, при ее оптической видимости. Скорости движения антенны радиотелескопа по высоте и азимуту подбирались таким образом, чтобы экваториальная область Луны была пройдена за $5 \div 7$ мин. Траектория прохождения контролировалась при этом с помощью оптического визира в кабине гида радиотелескопа. Когда Луна бывала закрыта облаками, наблюдения велись с неподвиж-

ной антенной, направленной по заранее рассчитанным координатам в точку прохождения центра Луны*.

В каждый из дней наблюдений делалось $15 + 25$ записей экваториальных прохождений Луны. Затем эти записи усреднялись путем наложения. Из усредненных записей экваториального распределения яркостной температуры** Луны находились яркостные температуры трех участков лунного диска: центрального и отстоящих от центра на $\pm 32^\circ$ и -47° по долготе.

На рис. 1 приводится ряд графиков распределения яркостной температуры Луны вдоль экватора. Как

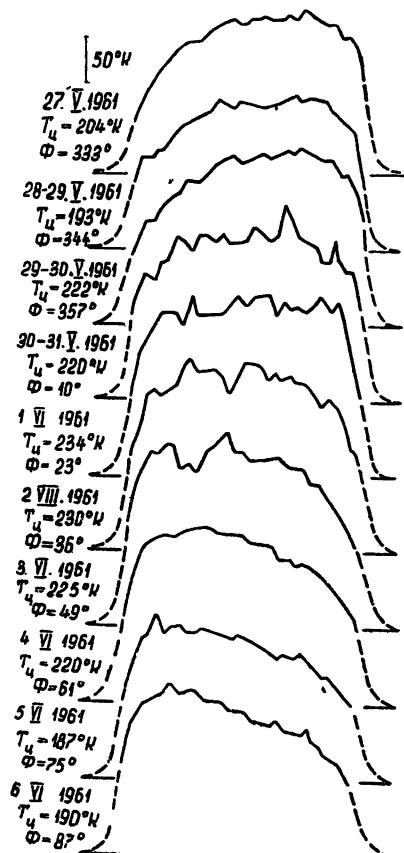


Рис. 1. Графики распределения яркостной температуры Луны вдоль экватора. Звездочкой помечены облачные дни, когда наблюдения велись с не- подвижной антенной.

и коэффициенты Фурье кривых зависимости относительных измерений

являются довольно гладкими и не обнаруживают достаточно сильных (по сравнению с уровнем флюктуаций) регулярных отклонений, которые могли бы быть истолкованы как следствие неоднородности верхнего покрова Луны в экваториальной области. Детальное сопоставление всех полученных графиков такого рода с аналогичными записями экваториальных прохождений Луны, полученными при наблюдениях на $\lambda = 8 \text{ м} \cdot \text{м}^{***}$, также не дало возможности выделить повторяющиеся особенности в распределениях радиояркости на обеих волнах. Не удалось и найти какое-то соответствие между видимыми особенностями экваториального пояса Луны и его радиоизображением. Как уже отмечалось ранее [10], экваториальный пояс Луны в отраженном солнечном свете выглядит довольно однородным.

На рис. 2 представлены кривые зависимости яркостной температуры упомянутых выше участков лунной поверхности от фазы Луны. Эти кривые построены по точкам, полученным в результате усреднения нескольких значений яркостной температуры, попадающих в интервал фазовых углов 10° . Каждая из кривых анализировалась с помощью электронной счетной машины. В результате анализа были найдены постоянные составляющие фазового хода (см. таблицу 1). Точность

* В случаях, когда позиционный угол Луны был слишком велик, приходилось снимать распределение яркостной температуры в некоторой полосе с таким расчетом, чтобы из построенных затем радиоизофот можно было найти распределение яркостной температуры вдоль экватора.

** Яркостная температура Луны определялась по антеннной температуре с помощью калибровочных процедур, аналогичных описанным в [2, 9]. Кроме того, предполагалось, что фактор рассеяния антенны радиотелескопа вне телесного угла Луны составляет $0,3 \pm 0,15$.

*** Эти наблюдения велись одновременно с наблюдениями на $\lambda = 4 \text{ м} \cdot \text{м}$.

первой гармоники не хуже соответственно 2% и 5%. Точность измерения абсолютных значений T_0 и T_1 около 15%.

Рассмотрим сначала кривую фазовой зависимости яркостной температуры центра Луны. Нетрудно видеть, что значения T_0 и T_1 , при-

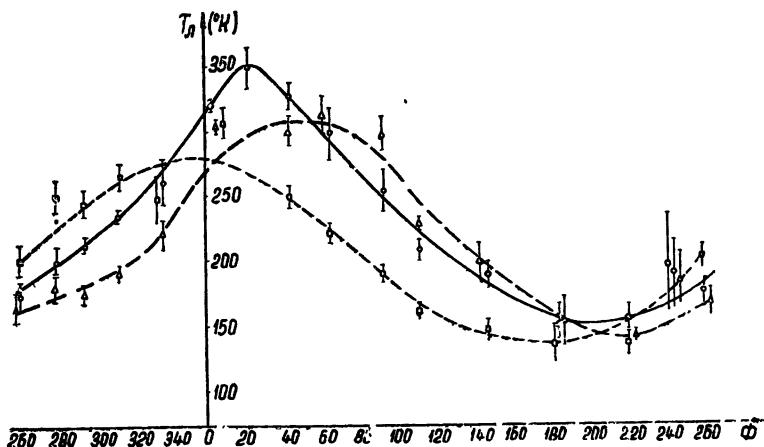


Рис. 2. Фазовый ход радиоизлучения различных участков на экваторе Луны:

—○— для $\varphi=0$, —△— для $\varphi=32^\circ$, —□— для $\varphi=-47^\circ$.

водимые в таблице, в пределах ошибки эксперимента совпадают с полученными в [2]: $T_0=230^\circ\text{K}$ и $T_1=73^\circ\text{K}$. То же самое можно сказать и о сдвиге фазы первой гармоники $\xi_1=27^\circ \pm 3^\circ$, совпадающим в пределах ошибки со значением $\xi_1=24^\circ \pm 3^\circ$, даваемом в [2]. Согласно [11],

Таблица 1

φ	T_0 ($^\circ\text{K}$)	$n=1$		$n=2$		$n=3$	
		T_1 ($^\circ\text{K}$)	ξ_1	T_2 ($^\circ\text{K}$)	ξ_2	T_3 ($^\circ\text{K}$)	ξ_3
0	228	85	-27°	16	-57°	9,0	$-76^\circ,5$
32	213	80	-49°	12	-111°	4,0	-99°
-47	200	72	$+7^\circ$	4	$+45^\circ$	$-2,0$	$+113^\circ$

$$\operatorname{tg} \xi_1 = \frac{\delta}{1 + \delta}, \quad (1)$$

где δ — отношение коэффициентов затухания тепловой и электрической волн в почве Луны. Воспользовавшись (1), можно найти, что $\delta=1 \pm 0,3$, а $\delta/\lambda=2,5 \pm 0,7$, тогда как по отношению T_0/T_1 , взятым из таблицы, можно получить [11], что $\delta/\lambda=1,7 \pm 0,2$. Таким образом, значения δ/λ , определенные двумя указанными выше способами, в пределах ошибки совпадают между собой. Вместе с тем значение δ/λ , найденное в настоящей работе по отношению T_0/T_1 , несколько меньше приводимого в [2]. Это может быть объяснено тем, что в [2] использовалась антenna со сравнительно широким лучом и поэтому амплитуда первой гармоники получалась несколько заниженной. По этой же причине в [2] не удалось обнаружить в фазовом ходе радиоизлучения Луны заметных высших гармонических составляющих, тогда как результаты настоящей работы говорят о существовании довольно сильных второй и третьей гармоник (см. таблицу 1). Амплитуды гармоник более высоких номеров

ров, чей третий, нельзя было определить с достаточной надежностью вследствие их малости.

Согласно [11, 12], для центра диска Луны отношение n -ой гармоники яркостной температуры к постоянной составляющей

$$\frac{T_n}{T_0} = \frac{a_n (T_d - T_h)}{[T_h + (a_0/2) (T_d - T_h)] \sqrt{1 + 2n\delta_1 + 2(n\delta_1)^2}}, \quad (2)$$

где $T_h = 127^\circ\text{K}$ — температура поверхности Луны в полночь, $T_d = 407^\circ\text{K}$ — максимальная температура поверхности в лунный полдень, a_0 и a_n — коэффициенты фурье-разложения функции широтного распределения поверхностной температуры $\eta(\psi)$.

В таблице 2 приведены значения T_0 , а также отношений T_1/T_0 , T_2/T_0 и T_3/T_0 , вычисленные из (2) при $\delta_1 = 0,7$ для различных $\eta(\psi)$, а также найденные экспериментально.

Таблица 2

$\eta(\psi)$	$T_0 (\text{°K})$	$T_1/T_0 (\%)$	$T_2/T_0 (\%)$	$T_3/T_0 (\%)$
$\cos \psi$	217	32,6	8,9	0
$\cos^{1/2} \psi$	233	36,5	6,5	2,5
$\cos^{1/4} \psi$	250	34,5	4,4	
const	267	42,0	0	6,8
Наблюдаемые значения	228	37,4	7	4

Характер изменения амплитуд гармоник с ростом их номера позволяет независимым образом убедиться в близости $\eta(\psi)$ к $\cos^{1/2} \psi$. При таком виде $\eta(\psi)$ наблюдаемая яркостная температура в центре диска оказывается ближе всего к температуре абсолютно черного тела, что указывает на малость коэффициента отражения лунной поверхности, а значит на близость эффективной диэлектрической проницаемости материала лунной породы к 1.

На рис. 3 представлены кривые зависимости отношения T_n/T_0 от селенографической долготы, построенные на основании соотношений,

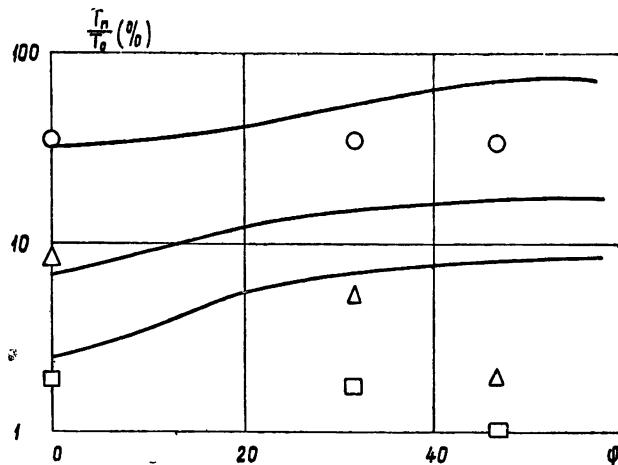


Рис. 3. Сплошная кривая — результат расчета согласно [11, 12] для $\delta = 0,7$:

○, Δ, □ — экспериментальные точки соответственно для $n=1, 2$ и 3.

имеющихся в [11, 12] при $\delta = 0,7$, а также нанесены экспериментальные точки для центральной и периферийных областей Луны. Как видно из графика, экспериментальные данные, относящиеся к центральной части Луны, находятся в хорошем согласии с теорией. Этого нельзя сказать об аналогичных данных, относящихся к периферийным участкам лунного диска. Наблюдаемое здесь расхождение эксперимента с теорией можно объяснить влиянием сильных боковых лепестков антенны радиотелескопа [8], в которые попадает более интенсивное излучение близких к центру областей Луны, что, в свою очередь, приводит к сглаживанию гармоник. Этот эффект проявляется тем сильнее, чем дальше исследуемая область от центра Луны. Другое существенное действие боковых лепестков заключается в том, что абсолютные значения фазовых сдвигов радиоизлучения периферийных участков лунного диска существенно меньше ожидаемых из теории [11, 13]. По этой причине нельзя воспользоваться рекомендуемым в [13] способом для определения диэлектрической проницаемости ϵ почвы Луны по разности фазовых сдвигов радиоизлучения отдельных участков на экваторе Луны. К тому же сами фазовые сдвиги могут быть определены с недостаточной точностью, в особенности для высших гармонических составляющих.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю признательность Н. В. Серову, Б. Я. Лосовскому и В. С. Лазаревскому, принимавшим участие в наблюдениях, и М. Р. Зелинской, А. Н. Иванниковой и Т. Т. Львовой, выполнившим большую работу по обработке результатов наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. J. Coates, *Astroph. J.*, **183**, 723 (1961).
2. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 433 (1961).
3. В. С. Троицкий, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 325.
4. В. С. Троицкий, Астрон. ж., **39**, 73 (1962).
5. Н. Л. Кайдановский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 40 (1961).
6. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., **39**, 79 (1962).
7. А. Е. Саломонович, Радиотехника и электроника, **4**, 12 (1959).
8. А. Г. Кисляков, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Астрон. ж., **39**, 410 (1962).
9. А. Е. Саломонович, Астрон. ж., **35**, 129 (1958).
10. А. Г. Кисляков, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 192 (1963).
11. В. С. Троицкий, Астрон. ж., **31**, 511 (1954).
12. В. С. Троицкий, Изв. ком. по физ. планет, изд. ХГУ, 1961, стр. 16.
13. В. С. Троицкий, Астрон. ж., **38**, 1001 (1961).

Физический институт им. П. Н. Лебедева

АН СССР,

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 августа 1962 г.

RADIATION OF EQUATORIAL REGION OF THE MOON IN 4 mm BAND

A. G. KISLJAKOV, A. E. SALOMONOVICH

Measurements results are set forth of radiation of equatorial region of the Moon in 4 mm band. Observations were carried out in March—June 1961. For the centre of the Moon disk and for the points with longitudes 32° and -47° on the equator the averaged component of brightness temperature was obtained as well as amplitudes and phases of its first, second and third harmonics. The ratio of amplitude of the first harmonic to the dc component was proved to be in good agreement with the theory. The law of variation of amplitudes of harmonics on their number allowed to give an independent confirmation of the latitudinal distribution law $\sqrt{\cos \phi}$ of surface temperature of the Moon and makes sure of high emissivity of the Moon.

Примечание при корректуре. При определении δ по фазовому сдвигу максимума радиоизлучения относительно момента максимума поверхностной температуры Луны следует учесть то обстоятельство, что последний наступает несколько позже полнолуния. Величину запаздывания момента максимума поверхностной температуры Луны относительно оптической фазы полнолуния $\Delta\xi$ можно найти в работе [1]. Предполагая, что диэлектрическая постоянная почвы Луны $\epsilon \approx 1,8$ [2], находим, что $\Delta\xi \approx 2^\circ$. Отсюда имеем, что $\xi_1' = 27^\circ - 2^\circ = 25^\circ$. Используя это значение ξ_1' и формулу (1) в тексте статьи, получаем, что $\delta = 0,88$ и $\delta/\lambda = 2,2 \pm 0,7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
 2. А. Г. Кисляков, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
-

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРОВ ВЫСОКОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПРИ УЧЕТЕ ДВУХМЕРНОГО ХАРАКТЕРА ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

A. Балклав

Исследуются спектры пространственных частот радиоинтерферометров высокой разрешающей способности, что необходимо знать для редукции результатов радиоастрономических наблюдений распределения радиояркости по небу. Учитывается двухмерный характер диаграммы направленности. Рассматривается возможность создания оптимальной диаграммы направленности радиоинтерферометров, которая позволяет без редукции получить истинное распределение радиояркости по небу с определенной степенью точности.

ВВЕДЕНИЕ

Отличие диаграмм направленности радиоинтерферометров $A(\varphi_1, \varphi_2)$ от $\delta(\varphi_1, \varphi_2)$ — функции Дирака при исследовании истинного распределения радиояркости по небу или по отдельному объекту $T(\varphi_1, \varphi_2)$ приводит к отличию результата исследования $T_a(\varphi_1, \varphi_2)$ от $T(\varphi_1, \varphi_2)$, так как

$$T_a(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\varphi_1 - \beta_1, \varphi_2 - \beta_2) T(\beta_1, \beta_2) d\beta_1 d\beta_2. \quad (1)$$

Иными словами, выражение (1) показывает, что в процессе исследования происходит искажение $T(\varphi_1, \varphi_2)$. В связи с этим возникает проблема исключения систематической ошибки, вносимой радиоинтерферометрами в результаты наблюдения (проблема редукции), что с математической точки зрения означает решение интегрального уравнения (1) относительно $T(\varphi_1, \varphi_2)$. Вообще говоря, пределы интегрирования в формуле (1) конечны, так как источники космического радиоизлучения $T(\varphi_1, \varphi_2)$ имеют конечную протяженность. Но, учитывая то обстоятельство, что достаточно направленные антенны (только такие будут в дальнейшем рассматриваться) принимают излучение только от малого участка небесной сферы, можно пределы интегрирования брать бесконечными (подробный вывод формулы (1) см. в [1]).

Наглядное представление степени искажения получается при рассмотрении спектра пространственных частот диаграмм направленности радиоинтерферометров. Эти спектры необходимо знать также для редукции результатов наблюдения.

Преобразование Фурье свертки (1) дается выражением

$$\bar{T}_a(s_1, s_2) = \bar{A}(s_1, s_2) \bar{T}(s_1, s_2), \quad (2)$$

где $\bar{T}_a(s_1, s_2)$ — спектр пространственных частот функции $T_a(\varphi_1, \varphi_2)$, определяемый выражением

$$\bar{T}_a(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_a(\varphi_1, \varphi_2) \exp [-2\pi j(\varphi_1 s_1 + \varphi_2 s_2)] d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Аналогично определяется $\bar{A}(s_1, s_2)$ и $\bar{T}(s_1, s_2)$. Выражение (2) показывает, что спектр $\bar{T}_a(s_1, s_2)$ создается произведением $\bar{A}(s_1, s_2)$ $\bar{T}(s_1, s_2)$; если $\bar{A}(s_1, s_2) \neq 1$, то $\bar{T}_a(s_1, s_2) \neq \bar{T}(s_1, s_2)$ и искажение амплитуд разных пространственных частот, т. е. интенсивностей источников разных угловых размеров, бывает различное. Из выражения (2) легко получается так называемое формальное решение уравнения (1):

$$T(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{T}_a(s_1, s_2)}{\bar{A}(s_1, s_2)} \exp [2\pi j (\varphi_1 s_1 + \varphi_2 s_2)] ds_1 ds_2.$$

Оно справедливо во всех точках, где $\bar{A}(s_1, s_2) \neq 0$.

Как показано в [2], реальные условия наблюдения ограничивают разрешающую способность* радиоинтерферометров, т. е. практически $\bar{A}(s_1, s_2)$ для высоконаправленных радиоастрономических антенн отлична от нуля только в ограниченной области σ в плоскости (s_1, s_2) и имеет вид

$$\bar{A}(s_1, s_2) \begin{cases} \neq 0 & \text{на } \sigma \\ = 0 & \text{вне } \sigma \end{cases}.$$

Область σ вообще может иметь различную форму (что зависит от формы апертуры антенны, см., например, [1]), но для простоты примем, что σ имеет форму прямоугольника. В этом случае для $\bar{A}(s_1, s_2)$ можно написать следующее выражение:

$$\bar{A}(s_1, s_2) \begin{cases} \neq 0, & \text{если } |s_1| < s_{10}, \quad |s_2| < s_{20} \\ = 0, & \text{если } |s_1| \geq s_{10}, \quad |s_2| \geq s_{20} \end{cases}. \quad (3)$$

Критические частоты s_{10} и s_{20} для высоконаправленных радиоастрономических антенн определяются апертурой антенны, т. е. ее линейными размерами. Случай высокой направленности имеет место, если линейные размеры антенны много больше длины волны λ , на которой ведутся наблюдения. Если размеры антенны соизмеримы с длиной волны λ , то из-за убывающего поля, локализованного в окрестности раскрыва, происходит кажущееся увеличение размеров антенны и может появляться сверхнаправленность (более подробно о сверхнаправленности см. [3]). В последнем случае $\bar{A}(s_1, s_2)$ может содержать даже очень высокие пространственные частоты, но этот случай не представляет интереса для радиоастрономии, так как, во-первых, он не может обеспечить достаточно высокую чувствительность, и, во-вторых, высокие пространственные частоты сильно искажены шумами в радиоаппаратуре.

Необходимо отметить, что и в теории при определении $A(\varphi_1, \varphi_2)$, т. е. решении дифракционной задачи в апертуре спектрального прибора (каким является радиотелескоп или радиоинтерферометр) по методу Кирхгофа, обычно делаются приближения, ведущие к представлению $A(\varphi_1, \varphi_2)$ функциями с ограниченными спектрами вида (3).

Из условия (3) и выражения (2) следует, что радиоинтерферометр вообще не позволяет передать в $T_a(\varphi_1, \varphi_2)$ частоты $|s_1| \geq s_{10}$ и $|s_2| \geq s_{20}$, имеющиеся в $T(\varphi_1, \varphi_2)$, а частоты $|s_1| < s_{10}$ и $|s_2| < s_{20}$ передает измененными в соответствии с формой $\bar{A}(s_1, s_2)$. Таким образом, в радиоастрономии можно найти только главное или основное решение уравнения (1), т. е. $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$, где

* Разрешающая способность здесь понимается в смысле Релея.

$$\bar{T}_0(s_1, s_2) = \begin{cases} \bar{T}(s_1, s_2), & \text{если } |s_1| < s_{10}, |s_2| < s_{20} \\ 0, & \text{если } |s_1| \geq s_{10}, |s_2| \geq s_{20} \end{cases}.$$

Чтобы получить $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$, можно пойти двумя путями.

1) Можно искать $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$ расчетным путем, восстанавливая амплитуды частот $|s_1| < s_{10}$ и $|s_2| < s_{20}$ содержащиеся в $\bar{T}_a(s_1, s_2)$ и измененные в соответствии со спектром $A(s_1, s_2)$, до их истинных величин. Этот путь удобен, когда $A(\varphi_1, \varphi_2)$ имеет сплошной спектр, т. е. когда $\bar{A}(s_1, s_2)$ не имеет нулей, нулевых линий и нулевых областей внутри области частот $|s_1| < s_{10}$ и $|s_2| < s_{20}$, и когда $\bar{A}(s_1, s_2)$ можно написать в виде:

$$\bar{A}(s_1, s_2) = \bar{A}_1(s_1) \bar{A}_2(s_2). \quad (4)$$

В этом случае можно без изменений перенести на двухмерный случай все приближенные методы редукции, разработанные для одномерного случая [4].

Если соотношение (4) не имеет силы, то редукция, т. е. получение $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$, может оказаться затруднительной.

Вообще, как показал Бэр [5], решение уравнения (1) является неустойчивым, так как $T_a(\varphi_1, \varphi_2)$ наблюдается с ошибками и в связи с этим приращения функции $T(\varphi_1, \varphi_2)$ с произвольно большими амплитудами соответствуют ненаблюдаемо малые приращения функции $T_a(\varphi_1, \varphi_2)$, если только приращение функции $T(\varphi_1, \varphi_2)$ происходит в интервалах, которые достаточно узки (т. е. на высоких пространственных частотах).

При нахождении $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$ редуцируются только те пространственные частоты $T_a(\varphi_1, \varphi_2)$, которые содержатся в $A(\varphi_1, \varphi_2)$ и мало исказены шумами в радиоаппаратуре (т. е. низкие пространственные частоты), причем производится фильтрация $T_a(\varphi_1, \varphi_2)$ от пространственных частот $|s_1| \geq s_{10}$ и $|s_2| \geq s_{20}$ (см., например, [1]), чтобы не загромождать картину распределения деталями малых угловых размеров, в правдивости которых не можем быть уверены и присутствие которых может оказаться ложным при исследовании $T(\varphi_1, \varphi_2)$ с более направленным радиотелескопом или радиоинтерферометром.)

Таким образом, $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$ является надежным результатом, так как исследование $T(\varphi_1, \varphi_2)$ с более направленным радиотелескопом или радиоинтерферометром не изменит содержания в ранее найденном распределении $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$ низких пространственных частот, а только прибавит к $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$ новые детали малых угловых размеров.

Необходимо отметить, что $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$ более точно представляет $T(\varphi_1, \varphi_2)$, чем $T_a(\varphi_1, \varphi_2)$, и с этой точки зрения нахождение $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$ является целесообразным и необходимым.

2) Можно создать при помощи электрических схем оптимальную диаграмму направленности радиоинтерферометра $A_{\text{опт}}(\varphi_1, \varphi_2)$, где

$$A_{\text{опт}}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\pi s_{10} \varphi_1)}{\varphi_1} \frac{\sin(\pi s_{20} \varphi_2)}{\varphi_2}. \quad (5)$$

Спектр функции $A_{\text{опт}}(\varphi_1, \varphi_2)$ имеет вид:

$$\bar{A}_{\text{опт}}(s_1, s_2) = \Pi\left(\frac{s_1}{s_{10}}, \frac{s_2}{s_{20}}\right) = \Pi\left(\frac{s_1}{s_{10}}\right) \Pi\left(\frac{s_2}{s_{20}}\right), \quad (6)$$

где

$$\Pi(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } |s| > 1/2 \\ 1, & \text{если } |s| < 1/2 \end{cases}.$$

Как следует из (2), при $\bar{A}(s_1, s_2)$ вида (6) все частоты $\bar{T}(s_1, s_2)$, находящиеся в области частот $|s_1| < s_{10}$ и $|s_2| < s_{20}$, без искажений передаются в результат наблюдения $T_a(\varphi_1, \varphi_2)$ и $T_0(\varphi_1, \varphi_2) = T_a(\varphi_1, \varphi_2)$. Другими словами, интерферометр позволяет получить истинную картину распределения радиояркости по небу с определенной точностью приближения, которую определяют граничные частоты s_{10} и s_{20} .

Из проделанного анализа видно, что знание спектра пространственных частот диаграммы направленности радиоинтерферометра $\bar{A}(s_1, s_2)$ позволяет решить вопрос об интенсивностях источников космического радиоизлучения различных угловых размеров, различимых при помощи данного радиоинтерферометра. Поэтому рассмотрим различные радиоинтерферометры, составим выражения для их диаграмм направленности и, исходя из этого, найдем их спектры пространственных частот $\bar{A}(s_1, s_2)$.

1. СПЕКТР ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРОВ БЕЗ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

Рассмотрим любое распределение антенн в плоскости и соединим их в интерферометр (см. рис. 1). Диаграмму направленности по мощ-

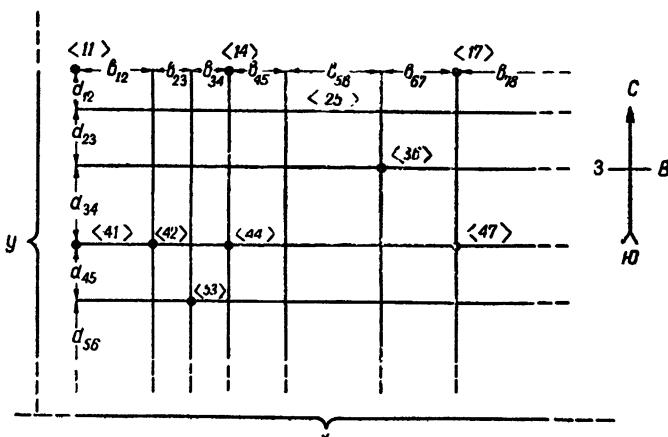


Рис. 1.

ности найдем, учитывая разности хода сигналов, попадающих в разные антенны. Если обозначить диаграмму направленности по полю антенны i -го ряда и k -ой колонны, т. е. антенны $\langle ik \rangle$ через $a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2)$ и расстояния между фазовыми центрами антенн $\langle 11 \rangle$ и $\langle ik \rangle$ по координате x через b_{1k} , а по координате y через d_{1i} , то, проделав несложные расчеты, найдем, что диаграмму направленности по мощности для радиоинтерферометра, показанного на рис. 1, можно выразить так:

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{i=1, k=1, p=1, q=1}^{MN MN} a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2) a_{pq}(\varphi_1, \varphi_2) \cos \frac{2\pi}{\lambda} (b_{1k}\varphi_1 + d_{1i}\varphi_2 - b_{1q}\varphi_1 - d_{1p}\varphi_2), \quad (7)$$

где $b_{1k} = \sum_{l=1}^{k-1} b_{1(l+1)}$, $d_{1i} = \sum_{l=1}^{i-1} d_{1(l+1)}$, $b_{11} = d_{11} = 0$, M — общее число рядов и N — общее число колонн. Как видно из рис. 1, некоторые антенны $\langle ik \rangle$ могут отсутствовать. В этом случае в выражении (7) данные $a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2)$ приравниваются нулю.

Надо отметить, что выражение (7) имеет силу только для малых φ_1 и φ_2 , т. е. когда $\sin \varphi_1 \approx \varphi_1$ и $\sin \varphi_2 \approx \varphi_2$, что справедливо примерно для $|\varphi_1|, |\varphi_2| \leq 20^\circ$. Так как для современных высоконаправленных антенн $a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2)$ имеет наибольшие значения при малых φ_1 и φ_2 , то упомянутое условие не является ограничением. Зная диаграмму направленности радиоинтерферометра $A(\varphi_1, \varphi_2)$, находим для спектра пространственных частот $\bar{A}(s_1, s_2)$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \bar{A}(s_1, s_2) = & \frac{1}{4\pi} \sum_{i, k, p, q=1}^{MN MN} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{a}_{ik}(s_1 - \nu_1 - e_{1k} + e_{1q}, s_2 - \nu_2 - f_{1i} + f_{1p}) + \\ & + \bar{a}_{ik}(s_1 - \nu_1 + e_{1k} - e_{1q}, s_2 - \nu_2 + f_{1i} - f_{1p})] \bar{a}_{pq}(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $e_{1k} = b_{1k}/\lambda$ и $f_{1i} = d_{1i}/\lambda$.

Если перенести результат, полученный в [6] для одномерного случая, на двухмерный случай, как это делается в [7], то для $\bar{a}_{ik}(s_1, s_2)$ можно написать следующее выражение:

$$\bar{a}_{ik}(s_1, s_2) \sim E_{ik} \left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda} \right), \quad (9)$$

где $E_{ik}(x/\lambda, y/\lambda)$ — распределение электрического поля по апертуре антенны $\langle ik \rangle$. Выражение (9) имеет большое значение для радиоастрономии, так как позволяет найти $\bar{a}_{ik}(s_1, s_2)$, если $E_{ik}(x/\lambda, y/\lambda) = E_{ik}(s_1, s_2)$ известно. Найти $E_{ik}(s_1, s_2)$ бывает легче, чем найти $a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2)$, чтобы потом при помощи преобразования Фурье найти $\bar{a}_{ik}(s_1, s_2)$.

Надо отметить, что выражение

$$a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{ik}(s_1, s_2) \exp[2\pi j(\varphi_1 s_1 + \varphi_2 s_2)] ds_1 ds_2$$

имеет силу только для малых φ_1 и φ_2 , т. е. при $\sin \varphi_1 \approx \varphi_1$ и $\sin \varphi_2 \approx \varphi_2$. Функция $E_{ik}(s_1, s_2)$ отлична от нуля только в определенной области, т. е.

$$E_{ik}(s_1, s_2) \begin{cases} \neq 0, & \text{если } |s_1| < s_{10}^{(ik)}, |s_2| < s_{20}^{(ik)} \\ = 0, & \text{если } |s_1| \geq s_{10}^{(ik)}, |s_2| \geq s_{20}^{(ik)}, \end{cases}$$

где $s_{10}^{(ik)}$ и $s_{20}^{(ik)}$ примерно равны размерам апертуры антенны $\langle ik \rangle$ по координатам x и y , деленным на λ — длину волны.

Основываясь на полученном результате (8), рассмотрим несколько примеров. При этом примем, что имеет место случай равномерно освещенной апертуры, который часто рассматривается в радиоастрономии из-за своей простоты. Тогда для $a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2)$ и $\bar{a}_{ik}(s_1, s_2)$ можно написать:

$$a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\pi s_{10}^{(ik)} \varphi_1)}{\varphi_1} \frac{\sin(\pi s_{20}^{(ik)} \varphi_2)}{\varphi_2}; \quad (10)$$

$$\bar{a}_{ik}(s_1, s_2) = \Pi \left(\frac{s_1}{s_{10}^{(ik)}}, \frac{s_2}{s_{20}^{(ik)}} \right). \quad (11)$$

Придание $a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2)$ и $\bar{a}_{ik}(s_1, s_2)$ формы (10), (11) позволит нагляднее представить полученные результаты. Это не является ограничением, так как все выводы, сделанные при анализе случая равномерно освещенной апертуры, с определенной точностью можно распространить

и на другие случаи (при условии, что $\bar{A}_{ik}(s_1, s_2)$ имеют не очень сложную форму), соответствующим образом выбрав расстояния между соседними антеннами.

Регулярный радиоинтерферометр. В этом случае все антенны одинаковы. Пусть справедливы выражения (10) и (11), а расстояния между антennами $b_{1k} = (k-1)s_{10}\lambda$ и $d_{1l} = (l-1)s_{20}\lambda$. Основываясь на выражении (8) и сделанных допущениях, можно написать:

$$\begin{aligned} \bar{A}(s_1, s_2) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i, k, p, q=1}^{MN MN} \left\{ \Lambda \left[\frac{s_1 - (k-1)s_{10} + (q-1)s_{10}}{s_{10}}, \frac{s_2 - (i-1)s_{20} + (p-1)s_{20}}{s_{20}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \Lambda \left[\frac{s_1 + (k-1)s_{10} - (q-1)s_{10}}{s_{10}}, \frac{s_2 + (i-1)s_{20} - (p-1)s_{20}}{s_{20}} \right] \right\}, \quad (12) \\ &= \frac{MN}{2\pi} \Lambda \left(\frac{s_1}{Ns_{10}}, \frac{s_2}{Ms_{20}} \right), \end{aligned}$$

где

$$\Lambda \left(\frac{s_1}{s_{10}}, \frac{s_2}{s_{20}} \right) = \Lambda \left(\frac{s_1}{s_{10}} \right) \Lambda \left(\frac{s_2}{s_{20}} \right) = \begin{cases} \left(1 - \left| \frac{s_1}{s_{10}} \right| \right) \left(1 - \left| \frac{s_2}{s_{20}} \right| \right), & \text{если } |s_1| < s_{10}, |s_2| < s_{20} \\ 0, & \text{если } |s_1| \geq s_{10}, |s_2| \geq s_{20} \end{cases}, \quad (13)$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod \left(\frac{s_1 - v_1}{s_{10}}, \frac{s_2 - v_2}{s_{20}} \right) \Pi \left(\frac{v_1}{s_{10}}, \frac{v_2}{s_{20}} \right) dv_1 dv_2 = \Lambda \left(\frac{s_1}{s_{10}}, \frac{s_2}{s_{20}} \right). \quad (14)$$

Как видно из (12) и (13), при расстояниях между соседними антennами, равных $s_{10}\lambda$ и $s_{20}\lambda$, спектр радиоинтерферометра получается сплошным — в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента. А это, как было отмечено, позволяет применить для редукции все методы, разработанные для одномерного случая.

Если расстояния между соседними антennами больше $s_{10}\lambda$ и $s_{20}\lambda$, то в спектре $\bar{A}(s_1, s_2)$ появляются нулевые линии и области.

Двухантенный радиоинтерферометр и апертурный синтез. Примем, что имеется двухантенный радиоинтерферометр с одинаковыми антennами $\langle 11 \rangle$ и $\langle ik \rangle$. Если диаграммы направленности по полю можно выразить с помощью (10), то из (8), (11) и (14) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11ik}(s_1, s_2) &= \Lambda \left(\frac{s_1}{s_{10}}, \frac{s_2}{s_{20}} \right) + \frac{1}{2} \Lambda \left(\frac{s_1 + e_{1k}}{s_{10}}, \frac{s_2 + f_{1l}}{s_{20}} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Lambda \left(\frac{s_1 - e_{1k}}{s_{10}}, \frac{s_2 - f_{1l}}{s_{20}} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

если расстояния между антennами равны $b_{1k} = e_{1k}\lambda$ и $d_{1l} = f_{1l}\lambda$, и

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11l-k}(s_1, s_2) &= \Lambda \left(\frac{s_1}{s_{10}}, \frac{s_2}{s_{20}} \right) + \frac{1}{2} \Lambda \left(\frac{s_1 - e_{1k}}{s_{10}}, \frac{s_1 + f_{1l}}{s_{20}} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Lambda \left(\frac{s_1 + e_{1k}}{s_{10}}, \frac{s_2 - f_{1l}}{s_{20}} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

если расстояния между антеннами равны $b_{1-k} = -e_{1k}\lambda$ и $d_{1l} = f_{1l}\lambda$.

Если антенну $\langle ik \rangle$ последовательно располагать в позициях антенн $\langle 12 \rangle, \langle 13 \rangle, \dots, \langle 1N \rangle, \langle 21 \rangle, \langle 22 \rangle, \dots, \langle 2N \rangle, \dots, \langle MN \rangle$ и $\langle 2-2 \rangle, \langle 2-3 \rangle, \dots, \langle 2-N \rangle, \dots, \langle M-N \rangle$, расстояния между которыми равны $b_{1k} = (k-1)s_{10}\lambda$, $b_{1-k} = -(k-1)s_{10}\lambda$, $d_{1l} = (i-1)s_{20}\lambda$ (см. рис. 2), и в каждой из этих позиций исследовать данный участок неба $T(\varphi_1, \varphi_2)$, то на основании (1), (2), (15), (16) и сделанных допущений можно написать:

$$\begin{aligned} \bar{A}_c(s_1, s_2) &= \sum_{i, k=1}^{MN} \bar{A}_{11 ik}(s_1, s_2) + \sum_{i, k=2}^{MN} \bar{A}_{11 i-k}(s_1, s_2) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \Pi \left[\frac{s_1}{2(N-1)s_{10}}, \frac{s_2}{2(M-1)s_{20}} \right] + \left[MN + (M-1)(N-1) + \frac{1}{2} \right] \bar{A}_{11}(s_1, s_2); \\ T_0(\varphi_1, \varphi_2) &\approx 2 \sum_{i, k=1}^{MN} T_a^{(11 ik)}(\varphi_1, \varphi_2) + 2 \sum_{i, k=2}^{MN} T_a^{(11 i-k)}(\varphi_1, \varphi_2) - \quad (17) \\ &- [2MN + 2(M-1)(N-1) + 1] T_a^{(11)}(\varphi_1, \varphi_2), \end{aligned}$$

где $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$ совпадает с $T(\varphi_1, \varphi_2)$ до $|s_1| = (N-1)s_{10}$ и $|s_2| = (M-1)s_{20}$.

Результат (17) показывает, как простым суммированием и вычитанием ординат соответствующих записей можно получить истинную картину распределения радиояркости по небу с определенной степенью приближения. Процедуру, рассмотренную в этом примере, можно называть синтезом оптимальной диаграммы направленности. Синтез апертуры другой формы был рассмотрен в [8].

Нерегулярный 16-антенный радиоинтерферометр. Идею нерегулярных радиоинтерферометров, предложенную Арсаком для получения оптимальной диаграммы в одномерном случае, можно обобщить и для двухмерного случая. Рассмотрим 16-антенный радиоинтерферометр с одинаковыми антennами, расстояния между которыми следующие: $b_{12} = s_{10}\lambda$, $b_{13} = 4s_{10}\lambda$, $b_{14} = 6s_{10}\lambda$, $d_{12} = s_{20}\lambda$, $d_{13} = 4s_{20}\lambda$, $d_{14} = 6s_{20}\lambda$. В этом случае на основании (8), (11) и (14) можно написать:

$$\begin{aligned} \bar{A}(s_1, s_2) &\approx \Pi \left(\frac{s_1}{12s_{10}}, \frac{s_2}{12s_{20}} \right) + 3 \sum_{i=1}^7 \Lambda \left(\frac{s_1}{s_{10}}, \frac{s_2 + (i-1)s_{20}}{s_{20}} \right) + \\ &+ 3 \sum_{i=1}^7 \Lambda \left(\frac{s_1}{s_{10}}, \frac{s_2 - (i-1)s_{20}}{s_{20}} \right) + 3 \sum_{k=1}^7 \Lambda \left(\frac{s_1 + (k-1)s_{10}}{s_{10}}, \frac{s_2}{s_{20}} \right) + \\ &+ 3 \sum_{k=1}^7 \Lambda \left(\frac{s_1 - (k-1)s_{10}}{s_{10}}, \frac{s_2}{s_{20}} \right) + 3 \Lambda \left(\frac{s_1}{s_{10}}, \frac{s_2}{s_{20}} \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$T_0(\varphi_1, \varphi_2) = T_a(\varphi_1, \varphi_2) - 3T_a^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2) - 3T_a^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2) + 9T_a^{(11)}(\varphi_1, \varphi_2). \quad (18)$$

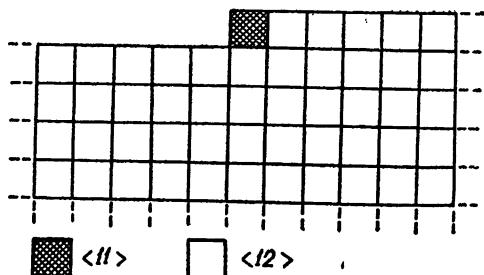


Рис. 2.

Здесь $T_0(\varphi_1, \varphi_2) = T(\varphi_1, \varphi_2)$ до $|s_1| = 6s_{10}$ и $|s_2| = 6s_{20}$, а $T_a^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2)$ и $T_a^{(2)}(\varphi_1, \varphi_2)$ — это результаты исследования данного участка неба с радиоинтерферометрами, составленными из антенн $\langle 11 \rangle, \langle 12 \rangle, \langle 13 \rangle, \langle 14 \rangle$ и $\langle 11 \rangle, \langle 21 \rangle, \langle 31 \rangle, \langle 41 \rangle$ соответственно.

На рис. 3 показана принципиальная схема 16-антенного нерегулярного радиоинтерферометра, позволяющая на выходе сразу получить $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$, данное выражением (18), если сигналы отдельных антенн разделить по независимым каналам. На рис. 3: У — антенные усилители, К — усилители в каналах, П — приемники. Сигналы на выходе всех усилителей К должны быть с одинаковыми амплитудами, сохраняя фазы, обусловленные расположением соответствующих антенн в радиоинтерферометре. Работа приемников П определяется коэффициентами в выражении (18).

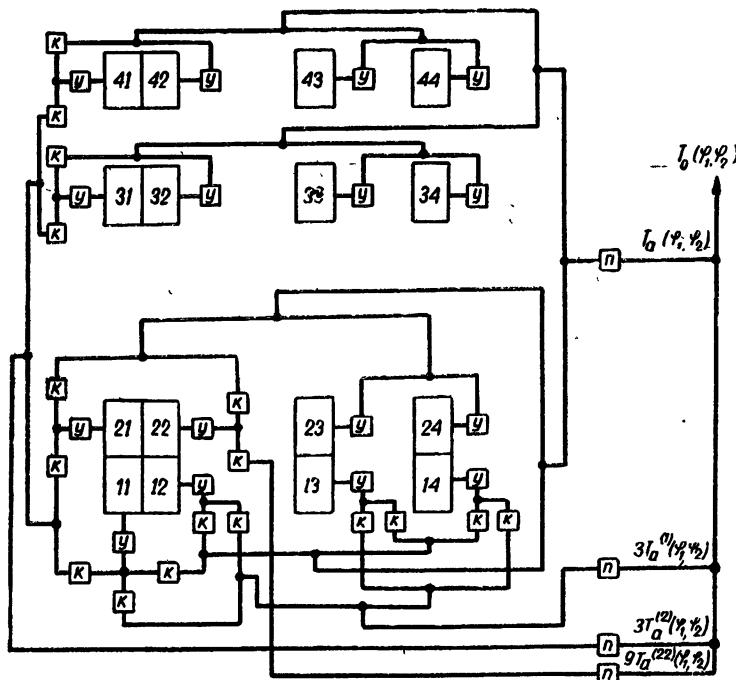


Рис. 3.

Как видно из проделанного анализа, 16-антенный нерегулярный радиоинтерферометр позволяет получить такую же информацию по разрешению о данном участке неба, как 49-антенный регулярный радиоинтерферометр с такими же антennами.

Можно составить нерегулярные радиоинтерферометры с общим числом антенн больше 4^2 , например, $5^2, 6^2$ и т. д., поступая так же, как в рассмотренном случае с 4^2 антennами, и используя полученные Арсаком данные о расстояниях между антennами [9]. Но при общем числе антenn $N > 4^2$ в спектре $\bar{A}(s_1, s_2)$ появляется много максимумов, подавление которых для создания оптимальной диаграммы очень усложняет электрическую схему радиоинтерферометра.

Регулярный Ц (П)-образный радиоинтерферометр. Разместим одинаковые антennы как показано на рис. 4а, т. е. выберем расстояния между соседними антennами в направлении С.—Ю., равными $s_{20}\lambda$, а в направлении З.—В., равными $s_{10}\lambda$. Если соединить антennы в ин-

терферометре так, как показано на рис. 4б, где У—антенные усилии, К—усилители в каналах, П—приемники, то нетрудно убедиться, основываясь на (8), (11) и схеме 4б, что на выходе получаем:

$$T_0(\varphi_1, \varphi_2) = T_a^{(L)}(\varphi_1, \varphi_2) + T_a^{(U)}(\varphi_1, \varphi_2) - T_a^{(M)}(\varphi_1, \varphi_2) - \\ - T_a^{(N)}(\varphi_1, \varphi_2) - T_a^{(M-1)}(\varphi_1, \varphi_2) - T_a^{(N-1)}(\varphi_1, \varphi_2) + T_a^{(1)}(\varphi_1, \varphi_2), \quad (19)$$

т. е. изображенная антенная система при данной электрической схеме имеет оптимальную диаграмму направленности.

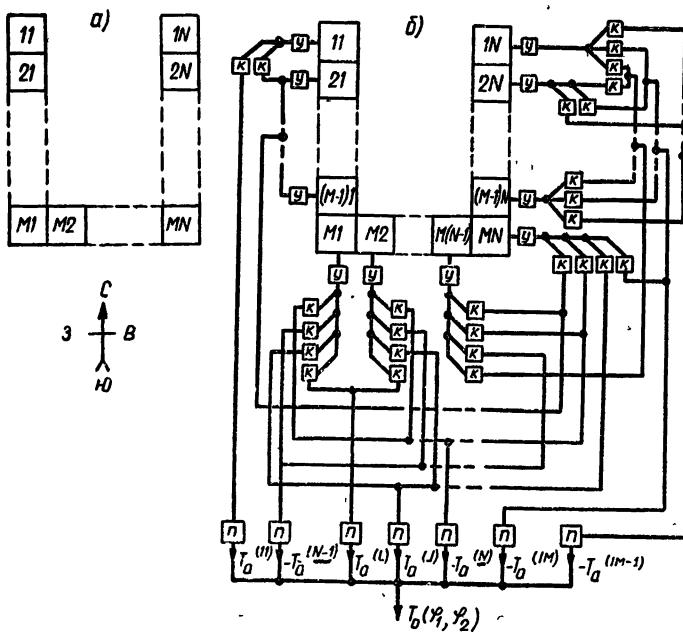


Рис. 4.

Функция $T_0(\varphi_1, \varphi_2)$, данная выражением (19), равна $T(\varphi_1, \varphi_2)$ до $|s_1|=(N-1)s_{10}$ и $|s_2|=(M-1)s_{20}$; $T_a^{(L)}(\varphi_1, \varphi_2)$, $T_a^{(U)}(\varphi_1, \varphi_2)$ и т. д.—это результаты исследования данного участка неба с различными радиоинтерферометрами, составленными из антенн $\langle 11 \rangle$, $\langle 21 \rangle$, ..., $\langle M1 \rangle$, $\langle M2 \rangle$, ..., $\langle MN \rangle$, $\langle (M-1)N \rangle$, ..., $\langle 1N \rangle$. Значение этих величин показано на рис. 4б.

2. СПЕКТР ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРОВ В СЛУЧАЕ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИИ

В случае фазовой модуляции в сигнале одной антенны или целой группы антенн с определенной частотой вводится и выводится дополнительный сдвиг по фазе, равный π . Учитывая разность хода сигналов, попадающих в разные антенны, как и в предыдущем случае можно убедиться, что после синхронного детектора, настроенного на частоту модуляции, диаграмма направленности радиоинтерферометра будет иметь вид:

$$A(\varphi_1, \varphi_2) = 2 \sum_{i, k=1}^{MN} a_{1i}(\varphi_1, \varphi_2) a_{ik}(\varphi_1, \varphi_2) \cos \frac{2\pi}{\lambda} (b_{1k}\varphi_1 + d_{1i}\varphi_2) - 2a_{11}^2(\varphi_1, \varphi_2), \quad (20)$$

если дополнительная разность фазы вводится, например, в сигнале антенны $\langle 11 \rangle$. Сходные выражения нетрудно получить и в случае модуляции фазы сигнала антенны $\langle pq \rangle$ или целой группы антенн.

Исходя из (20), легко получить спектр пространственных частот диаграммы направленности радиоинтерферометра, а именно:

$$\begin{aligned} \bar{A}(s_1, s_2) = & \frac{1}{2\pi} \sum_{l, k=1}^{MN} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{a}_{lk}(s_1 - \nu_1 - e_{1k}, s_2 - \nu_2 - f_{1l}) + \\ & + \bar{a}_{lk}(s_1 - \nu_1 + e_{1k}, s_2 - \nu_2 + f_{1l})] \bar{a}_{11}(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2 - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{a}_{11}(s_1 - \nu_1, s_2 - \nu_2) \bar{a}_{11}(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 d\nu_2. \end{aligned} \quad (21)$$

Основываясь на полученных результатах (20) и (21), рассмотрим два примера.

1) Двухмерный комнаунд-интерферометр. Идею, предложенную в [10] для трех антенн и развитую в [11] для N антенн в одномерном случае, можно обобщить и для двухмерного случая.

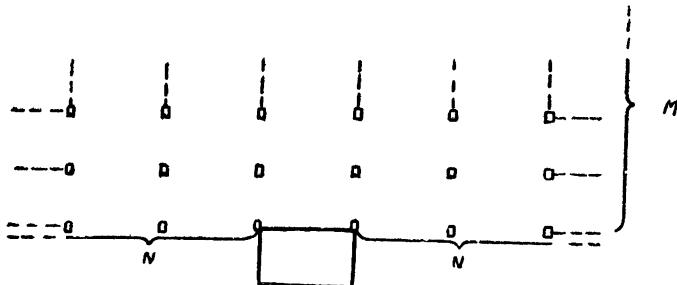


Рис. 5.

Рассмотрим действие антенной системы, показанной на рис. 5. Примем, что имеет место случай равномерно освещенной апертуры и что размер антенны $\langle 11 \rangle$ намного больше размеров остальных одинаковых антенн, т. е. $s_{16}=s_{10}\gg s_{1m}$ и $s_{26}=s_{20}\gg s_{2m}$. Из этого следует, что $a_{11}(\varphi_1, \varphi_2) a_{pq}(\varphi_1, \varphi_2) \approx (2/\pi) a_{11}(\varphi_1, \varphi_2)$. Если антенны размещены на расстояниях $b_{1k}=(1/2)(2k-1)s_{10}\lambda$, $d_{1l}=(1/2)(2l-1)s_{20}\lambda$ и $b_{1-k}=-(1/2)\times(2k-1)s_{10}\lambda$, то из (10) и (20) следует:

$$\begin{aligned} A(\varphi_1, \varphi_2) = & \frac{4}{\pi} \sum_{l, k=1}^{MN} \frac{\sin(\pi s_{10} \varphi_1)}{\varphi_1} \frac{\sin(\pi s_{20} \varphi_2)}{\varphi_2} \{ \cos[(2k-1)\pi s_{10} \varphi_1 + \\ & + (2l-1)\pi s_{20} \varphi_2] + \cos[-(2k-1)\pi s_{10} \varphi_1 + (2l-1)\pi s_{20} \varphi_2] \} = \\ & = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2N\pi s_{10} \varphi_1)}{\varphi_1} \frac{\sin(2M\pi s_{20} \varphi_2)}{\varphi_2}; \\ \bar{A}(s_1, s_2) = & \Pi \left(\frac{s_1}{2Ns_{10}}, \frac{s_2}{2Ms_{20}} \right), \end{aligned} \quad (22)$$

т. е. рассмотренный радиоинтерферометр имеет оптимальную диаграмму направленности.

Надо отметить, что проделанный анализ применим только для создания компаунд-интерферометров, если большая антenna имеет прямоугольную апертуру.

2) Регулярный радиоинтерферометр. Примем, что выполняется (11) и все антенны одинаковы. Если разместить антенны на расстояния $b_{1k} = (k-1)s_{10}\lambda$, $b_{1-k} = -(k-1)s_{10}\lambda$, $d_{1i} = (i-1)s_{20}\lambda$, то на основании (21) и (14) получаем:

$$\begin{aligned} \bar{A}(s_1, s_2) + 2\bar{A}^{(11)}(s_1, s_2) &= \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Lambda\left(\frac{s_1 - ks_{10}}{s_{10}}, \frac{s_2 - is_{20}}{s_{20}}\right) + \right. \\ &+ \Lambda\left(\frac{s_1 - ks_{10}}{s_{10}}, \frac{s_2 + is_{20}}{s_{20}}\right) + \Lambda\left(\frac{s_1 + ks_{10}}{s_{10}}, \frac{s_2 - is_{20}}{s_{20}}\right) + \\ &\left. + \Lambda\left(\frac{s_1 + ks_{10}}{s_{10}}, \frac{s_2 + is_{20}}{s_{20}}\right) \right] \simeq \Pi \left[\frac{s_1}{2(N-1)s_{10}}, \frac{s_2}{2(M-1)s_{20}} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где $\bar{A}^{(11)}(s_1, s_2)$ — спектр антенны <11>. Если сигнал антенны <11> разделить на две части и одну часть по независимому каналу подать на отдельный приемник, то, как видно из (23), можно создать оптимальную диаграмму направленности радиоинтерферометра.

Рассмотренные примеры не охватывают все разнообразие существующих типов радиоинтерферометров. Но они дают наглядное представление о том, какие пространственные частоты пропускаются радиоинтерферометрами как в отсутствие, так и при наличии фазовой модуляции, и как спектр пространственных частот, пропускаемый радиоинтерферометрами, зависит от распределения в них антенн. Полученные общие результаты (7), (8), (20) и (21) позволяют анализировать $A(\varphi_1, \varphi_2)$ и $\bar{A}(s_1, s_2)$ для радиоинтерферометров любой формы с самыми разнообразными апертурами составленных антенн, а также синтезировать радиоинтерферометры с данными характеристиками пространственных частот. Надо отметить, что результаты (7) и (20) получены на основе теории квадратичного детектирования.

При этом условии, как видно из проделанного анализа, разрешающая способность радиоинтерферометра или те граничные пространственные частоты, которые пропускаются, не могут быть больше размеров апертуры радиоинтерферометра по координатам x и y , деленных на λ .

В случае компаунд-интерферометра для того, чтобы пропустить граничные пространственные частоты $|s_1| = Ns_{10}$ и $|s_2| = Ms_{20}$, размер компаунд-интерферометра по направлению З.—В. должен быть $2Ns_{10}\lambda$, а по направлению С.—Ю.— $Ms_{20}\lambda$, или $Ns_{20}\lambda$ и $2Ms_{20}\lambda$ соответственно, как это видно из рис. 5 и выражения (22).

В случае креста Миллса граничные частоты s_1 и s_2 , пропускаемые радиоинтерферометром, равны только половине размеров креста в направлении З.—В и С.—Ю., деленных на λ .

Вообще, как показывает анализ, основанный на выражениях (8) и (21) или сходных с (21), справедливо следующее качественное утверждение: один и тот же радиоинтерферометр в случае отсутствия фазовой модуляции позволяет перекрывать большую площадь пространственных частот, чем при наличии таковой. Однако преимущества фазовой модуляции заключаются в том, что спектр пространственных частот при соответствующем выборе антенн и распределении их в радиоинтерферометре получается более гладким, чем в отсутствие фазовой модуляции, что позволяет обойтись без дополнительной редукции результатов наблюдения.

Из проделанного анализа вытекает, что метод разделения сигналов отдельных антенн и подача их по независимым каналам на отдельные приемники является хорошим средством создания радиоинтерферометра с оптимальной диаграммой направленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. N. Bracewell, Austr. J. Phys., **9**, 297 (1956).
2. А. Балклав, Изв. АН Латв. ССР, № 9, 73 (1962).
3. Г. Бруссо, Е. Спич, Зарубежная радиоэлектроника, № 3, 25 (1962).
4. А. Балклав, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 629 (1962).
5. E. J. Bugg, Austr. J. Phys., **8**, 30 (1955).
6. H. G. Booker, P. C. Clemmow, Proc. Instn. Electr. Engrs., III **97**, 11 (1950).
7. R. N. Bracewell, Stanford RAI Publication, № 4, 3 (1960).
8. M. Ryle, A. Hewish, Monthly Not. Roy. Astron. Soc., **120**, 220 (1960).
9. J. Arsac, Revue d'Optique, **35**, 65 (1956); **35**, 135 (1956); **35**, 396 (1956).
10. A. E. Covington, N. W. Broten, IRE Trans., AP-5, 247 (1957).
11. А. Балклав, Изв. АН Латв. ССР, № 8, 67 (1962).

Астрофизическая лаборатория
АН Латв. ССР

Поступила в редакцию
30 июля 1962 г.

INVESTIGATION OF SPACE FREQUENCIES OF THE HIGH RESOLUTION RADIO INTERFEROMETERS WITH TWO-DIMENSIONAL RADIATION PATTERN

A. Balklav

Spectra of space frequencies of the high resolution radio interferometers are analysed, the problem being necessary for reduction of results of radio astronomy observations of radio brightness distribution over the sky. The two-dimensional character of the radiation pattern is taken into account. The possibility is considered of the optimal radiation pattern forming which would enable one to obtain the true distribution of the radio brightness over the sky with prescribed accuracy without reduction.

О ШИРИНЕ ЛИНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛОЖНОМ ЭФФЕКТЕ ДОППЛЕРА

К. А. Барсуков, Г. Л. Сучкин

Показано, что условия разрешимости отдельных линий в сложном спектре излучения сводятся к известным условиям возникновения сложно-го спектрального состава для излучения с половинной интенсивностью. Подробно рассмотрены условия разрешимости для среды без потерь и особенности спектра при наличии малых потерь. Установлено, что в определенных условиях наблюдаемая ширина линии практически не зависит от длительности излучения и целиком определяется свойствами диспергирующей среды.

Известно, что при движении источника электромагнитных волн в диспергирующей среде возможно расщепление линии излучения по фиксированному направлению $\Theta = \text{const}$ (сложный эффект Допплера [1]). Вместе с тем в силу тех или иных причин каждая спектральная линия имеет конечную ширину. Поэтому возникает вопрос о возможности наблюдения близких расщепившихся линий при наличии такого уширения. В [1] приводятся оценки ширины линии в предположении, что поглощением можно пренебречь, а также возможности наблюдения отдельных линий вне полосы поглощения разреженных газов при положительной абсолютной температуре $T^\circ > 0$. В то же время, как отмечается в [1,2], в области наиболее сильной дисперсии положительное поглощение маскирует сложный спектральный состав излучения. Однако при $T^\circ < 0$ [3] отличное от нуля отрицательное поглощение в среде устраняет эту трудность. Поэтому целесообразно рассмотреть поведение отдельных линий в спектре излучения движущегося источника, характеризуя среду комплексным показателем преломления $n = -n_1(\omega) + j n_2(\omega)$ при $T^\circ \geq 0$ и $n_2 \geq 0$, тем более, что ранее рассмотренный случай $n_2 = 0$, вообще говоря, является исключительным, поскольку, например, за счет выравнивания населенностей энергетических уровней ($(T^\circ) \rightarrow \infty$) среда может терять дисперсионные свойства.

Ниже приводятся условия разрешимости, а также оценки влияния уширения допплеровских линий, обусловленные конечной длительностью излучения источника и наличием отличного от нуля поглощения.

Пусть произвольным образом ориентированный источник движется со скоростью v в изотропной однородной среде с показателем преломления n . Для простоты будем считать источник осциллятором с дипольным моментом $p_0 \cos(\omega_0 t)$, где p_0 и ω_0 измерены в неподвижной лабораторной системе отсчета.

Если источник излучает неограниченно долго, то при $T^\circ < 0$ интенсивность излучения в точке наблюдения может принимать такие большие значения, что становится необходимым учет нелинейных эффектов в среде, ограничивающих ее нарастание. Поэтому, чтобы не терять общности ($T^\circ \geq 0$) и в то же время оставаться в рамках линейного приближения, допустим, что излучение происходит в интервале $-2\tau_0$, удовлетворяющем условию $t_0 \ll 2\tau_0 \ll \tilde{t}$, где $t_0 = 2\pi/\omega_0$, $\tilde{t} = R_0/v$ (R_0 — расстояние до точки наблюдения), а величина n_2 достаточно мала,

чтобы среду в точке наблюдения можно было считать линейной.

Тогда, следуя [1], можно показать, что энергия, излучаемая осциллятором в направлении $\Theta = \text{const}$,

$$W_\Theta = \frac{p_0^2 \sin^2 \Theta}{\pi^2 c^3 R_0^2} \int_0^\infty \Psi(\omega) |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (1)$$

где $|F(\omega)|^2$ — спектральная интенсивность поляризационного потенциала Герца, а функция $\Psi(\omega)$, определяемая уравнениями поля вместе с требованием релятивистской инвариантности, зависит от ориентации диполя, его скорости и дисперсионных свойств среды.

Вид $\Psi(\omega)$ при $n_2(\omega)=0$ легко получить из сравнения с аналогичными (1) выражениями для W_Θ в [1]. Обобщение на случай $n_2(\omega) \neq 0$ не встречает затруднений; так, если $[p_0 v] = 0$, то при $|n_2| \ll n_1$, $n_2 > 0$ и $\frac{\omega}{c} n_1 R_0 \gg 1$

$$\Psi(\omega) = n_1(\omega) \exp \left(-2 \frac{\omega}{c} n_2 R_0 \right) \omega^4. \quad (2)$$

В окрестности допплеровских частот ω_i , определяемых при $n_2=0$ соотношениями

$$\omega_0 = \pm \omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta), \quad (3)$$

$|F(\omega)|^2$ имеет острые максимумы и может быть записан при $\beta n_2 \cos \Theta < \sqrt{2}\omega_0/\omega$ в виде:

$$|F(\omega)|^2 = \frac{\sin^2(\tau_0 \omega \beta n_2 \cos \Theta) + \sin^2[\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) - \omega_0] \tau_0}{\omega^2 \beta^2 n_2^2 \cos^2 \Theta + [\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) - \omega_0]^2} + \\ + \frac{\sin^2(\tau_0 \omega \beta n_2 \cos \Theta) + \sin^2[\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) + \omega_0] \tau_0}{\omega^2 \beta^2 n_2^2 \cos^2 \Theta + [\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) + \omega_0]^2}, \quad (4)$$

где первое слагаемое соответствует излучению нормальных, второе — излучению аномальных допплеровских частот [4].

Рассмотрим сначала случай среды без поглощения ($n_2 = 0$). Если потребовать, чтобы

$$\omega_0 \tau_0 \gg 1, \quad [\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) - \omega_0] \tau_0 \gg 1, \\ |\omega - \omega_i| > \Delta \omega, \quad (5)$$

то вид подынтегральной функции в (1) в окрестности частот, удовлетворяющих (3), определяется в основном быстро меняющейся функцией (4). Следовательно, полуширина линии излучения $\Delta\omega$ может быть найдена из условия, что в интервале частот $\Delta\omega$ $|F(\omega)|^2$ уменьшается в два раза. Отсюда имеем:

$$\pm \Delta\omega - \beta \cos \Theta [(\omega_i \mp \Delta\omega) n_1(\omega_i \mp \Delta\omega) - \omega_i n_1(\omega_i)] = \mp \frac{\alpha}{\tau_0}, \quad (6)$$

где ω_i — допплеровская частота, определяемая на основании (3), а $\alpha = \omega_0 \tau_0 \approx 1,39$.

Решение уравнения (6) легко находится из диаграммы Франка [2], если заметить, что заменой $\omega_0 \rightarrow \Omega_0^\pm = \omega_0 \pm \alpha/\tau_0$ уравнение (3) переводится в равносильное для излучения допплеровской частоты с поло-

винной интенсивностью. Действительно, графическое решение уравнения (3) определяется пересечениями прямой $y_1 = (\omega \mp \Omega_0)/v \cos \Theta$ и дисперсионной кривой $y_2 = k(\omega) = k_0 n_1(\omega)$, как показано для случая нормальных допплеровских частот на рис. 1. Частоты, излучаемые с половинной интенсивностью в том же направлении Θ , соответственно

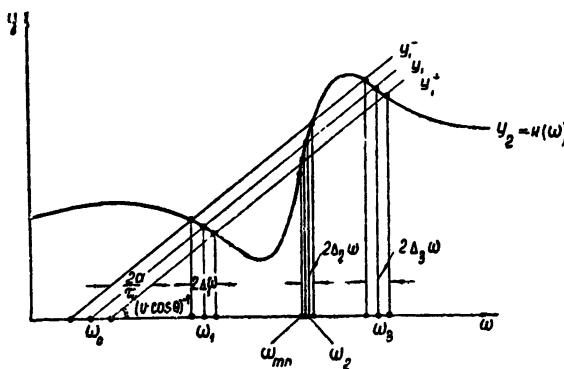


Рис. 1.

определяются пересечением параллельных y_1 прямых $y_1^\pm = (\omega \mp \Omega_0)/v \cos \Theta$ с y_2 .

Пусть время пролета τ_0 монотонно убывает; тогда прямые y_1^\pm отходят от прямой y_1 , оставаясь ей параллельными ($\cos \Theta = \text{const}$, $v = \text{const}$). При некотором значении τ_0 две точки пересечения y_1^- и y_2 совпадут, а прямая y_1^- будет иметь одну точку касания и всего лишь одну точку пересечения. При этом частоты ω_1 , ω_2 , ω_3 еще разрешаются. Вследствие дальнейшего убывания τ_0 окажутся неразрешенными частоты ω_2 , ω_3 . При $\tau_0 < \tau_{02}$, где τ_{02} соответствует касание прямой y_1^+ при $\omega < \omega_{mn}$ (ω_{mn} — собственная частота среды), все три частоты становятся неразрешенными.

Таким образом, при отсутствии поглощения существуют три возможности:

а) все три частоты сложного спектрального состава излучения разрешены;

б) разрешена одна частота, две другие остаются неразрешенными и образуют одну уширенную линию;

в) все три частоты неразрешены, наблюдается одна линия, форма которой может быть значительно искажена.

Отсюда следуют (на основании [2]) общие условия разрешимости линий излучения по направлению $\Theta = \text{const}$ в спектре излучения движущегося в диспергирующей среде источника: если условие возникновения сложного спектрального состава излучения $v \cos \Theta > W_{\text{гр}}(\omega_1)$ выполняется для обеих смещенных частот Ω_0^\pm , то разрешены все максимумы интенсивности излучения; если же оно выполняется для какой-нибудь одной из частот Ω_0^+ , Ω_0^- , либо не выполняется ни для одной из них, то соответствующие соседние пары линий совпадают и оказываются неразрешенными. Этот результат, лишь уточняющий основные выводы работы [1], строго говоря, справедлив при определенных предположениях относительно τ_0 (5) и n_2 . Физически это очевидно, поскольку ширина линии в рассматриваемой задаче определяется и источником, и средой.

Если при $\omega = \omega_1$

$$\frac{dk}{d\omega} > \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 k}{d \omega^2} + \frac{1}{3} \Delta \omega \frac{d^3 k}{d \omega^3} \right) \Delta \omega,$$

то из (6) следует, что полуширина линии излучения

$$\Delta \omega = \frac{\alpha_0}{\tau_0 [1 - v(dk/d\omega) \cos \Theta]_{\omega=\omega_1}}. \quad (7)$$

Выражение (7) справедливо, если в интервале $2\Delta\omega$ $k(\omega)$ мало отличается от прямой линии. Вблизи критических значений $v \cos \Theta = W_{\text{кр}}$ необходимо учесть высших производных $d^m k / d \omega^m$ ($m > 1$). Формула (7) следует также непосредственно из графика рис. 1, если заметить, что отрезок α/τ_0 оси Ox преобразуется прямыми y_1^+ , y_1 либо y_1^- , y_1 и касательной к y_2 в точке пересечения с y_1 в $\Delta\omega$ (с сокращением в $|1 - v(dk/d\omega) \cos \Theta|$ раз).

Производная $dk/d\omega$ определяется интенсивностью, частотой и шириной линии собственных колебаний диспергирующей среды. Если центральная частота ω_2 близка к $\omega_{\text{пп}}$, то $|dk/d\omega|_{\omega=\omega_2} > |dk/d\omega|_{\omega=\omega_1, \omega_3}$, а ширина центральной линии излучения всегда меньше ширины сателлитов. Это обстоятельство очевидным образом иллюстрируется рис. 1.

Формула (7) отличается множителем π/α_0 от соответствующей формулы Франка [1], поскольку ширина спектральной линии определялась нами на уровне половинной интенсивности.

В общем случае $n_2(\omega) \neq 0$ ограничимся исследованием нормальных допплеровских частот. Обобщение на случай аномальных частот очевидно. Выражение (4) удобно представить в виде

$$|F(\omega)|^2 = \Phi_1(\omega) \Phi_2(\omega), \quad (8)$$

где

$$\Phi_1(\omega) = \{\omega^2 \beta^2 n_2^2 \cos^2 \Theta + [\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) - \omega_0]^2\}^{-1};$$

$$\Phi_2(\omega) = \sin^2(\omega \beta n_2 \tau_0 \cos \Theta) + \sin^2[\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) - \omega_0] \tau_0.$$

Если $|n_2| < c/2\omega R_0$, то в окрестности допплеровских частот (3) спектральная интенсивность поляризационного потенциала Герца по-прежнему определяет в (1) основной вклад в ширину линии излучения. Нетрудно заметить, что Φ_1 зависит от частоты, скорости, угла Θ и свойств среды, а Φ_2 , кроме того, зависит и от τ_0 . Очевидно, всегда можно указать такие значения τ_0 , что $\Phi_2(\omega)$ практически не будет меняться в интервале $2\delta\omega$, включающем ширину линии $2\Delta_0 \omega$, определяемую $\Phi_1(\omega)$, и, наоборот, такие значения τ_0 , когда $\Phi_1(\omega)$ не будет меняться в интервале $2\Delta_1 \omega$, включающем ширину линии $2\delta_0 \omega$, определяемую $\Phi_2(\omega)$.

Для того, чтобы реализовалась первая из двух указанных выше возможностей, необходимо, чтобы при $\Delta_0 \omega \ll \omega$ выполнялось неравенство

$$\Delta_0 \omega < \delta \omega, \quad (9)$$

где $\delta \omega$ — наименьшая из двух величин:

$$\left| \beta \tau_0 \cos \Theta \left(n_2 + \omega \frac{dn_2}{d\omega} \right) \right|^{-1}, \quad \left| \tau_0 \left(1 - v \frac{dk}{d\omega} \cos \Theta \right) \right|^{-1}.$$

Если условие (9) выполнено, то $\Phi_2(\omega)$ можно включить в $\Psi(\omega)$ ($\Psi_1(\omega) = \Psi(\omega)\Phi_2(\omega)$), а ширина линии излучения будет целиком определяться

функцией $\Phi_1(\omega)$, которая достигает максимума, равного

$$\Phi_1(\omega_i)_{\max} = \frac{(1 - \beta[n_1 + \omega_i(dn_1/d\omega) \cos \Theta])^2}{\omega_i^2 \beta^2 n_2^2 \cos^2 \Theta [1 + \beta^2 \cos^2 \Theta [n_2 + \omega_i(dn_2/d\omega)]^2]}, \quad (10)$$

на частоте ω'_i , удовлетворяющей трансцендентному уравнению:

$$\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) - \omega_0 = - \frac{\omega n_2 \beta^2 \cos^2 \Theta (n_2 + \omega dn_2/d\omega)}{1 - \beta n_1 \cos \Theta (n_1 + \omega dn_1/d\omega)}. \quad (11)$$

Полуширина линии излучения $\Delta_{0\omega}$ определяется из уравнения

$$\beta^2 \cos^2 \Theta [\omega^2 n_2^2(\omega) - 2\omega_i^2 n_2^2(\omega_i)] = 2[\omega_i(1 - \beta n_1 \cos \Theta) - \omega_0]^2 - [\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) - \omega_0]^2$$

и составляет с учетом (11)

$$\Delta_{0\omega} |_{\omega=\omega'_i} = \omega n_2 \beta \cos \Theta \left(1 - v \frac{dk}{d\omega} \cos \Theta \right) G(\omega). \quad (12)$$

Здесь

$$G(\omega) = \langle \{(1 - v W^{-1} \cos \Theta)[(1 - v W^{-1} \cos \Theta)^2 + v^2 \cos^2 \Theta V^{-2}] \times \times \{(1 - v W^{-1} \cos \Theta)^3 + v^2 \cos^2 \Theta [V^{-2} + k_0 n_2 dV^{-1}/d\omega] \times \times (1 - v W^{-1} \cos \Theta) + v k_0 n_2 \cos \Theta (dW^{-1}/d\omega) V^{-1}\}^{-1} \rangle^{1/2},$$

$$W^{-1} = \frac{1}{c} (n_1 + \omega dn_1/d\omega), \quad V^{-1} = \frac{1}{c} (n_2 + \omega dn_2/d\omega).$$

Поэтому, если $\Delta_{0\omega}$ удовлетворяет (9), то ширина линии излучения допплеровской частоты ω'_i (11) практически целиком определяется дисперсионными свойствами среды.

Физически это означает, что вблизи ω_{mn} проявляются селективные свойства среды. Действительно, неравенство (9) заведомо выполняется при $\tau_0 \rightarrow 0$, когда спектр сторонней силы, возбуждающий колебания в среде, приближается к гладкому; в этом случае среда, а не излучатель формирует линию излучения. В какой-то степени аналогичная ситуация возникает при ударном возбуждении резонаторов, что дает некоторое основание для употребления понятия селективности по отношению к диспергирующей среде.

Выясним, как изменяется ширина линии $\Delta\omega \approx \delta\omega$, определяемая (6) в случае $n_2=0$, при $n_2 \ll 1$, когда при выполнении условия (9) появляется новая, более узкая линия $\Delta_{0\omega}$. Ограничиваясь в (4) членами порядка n_2^2 , получим трансцендентное уравнение

$$\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{1}{V^2} \left[1 - \frac{2(\alpha_1 + \omega_0 \tau_0)^2 \beta^2 n_2^2 \cos^2 \Theta}{\alpha_1^2 (1 - \beta n_1 \cos \Theta)^2 - 2(\alpha_1 + \omega_0 \tau_0)^2 \beta^2 n_2^2 \cos^2 \Theta} \right]^{1/2},$$

определенное новую величину $\alpha = \alpha_1$ в (6). Отсюда для $\beta^2 n_2^2 \ll 1$, $\beta < 1$, $\alpha_0 = 1,39$ и $\beta n_1 \cos \Theta \neq 1$ имеем:

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0 \approx 2 \left(1 + \frac{\omega_0 \tau_0}{\alpha_0} \right)^2 \beta^2 n_2^2 \cos^2 \Theta.$$

Подставляя α_1 вместо α_0 при $\omega = \omega_i$ в (7), замечаем, что уширение линии излучения $\Delta\omega$ за счет потерь любого знака мало. Поэтому уз-

кие линии излучения $\Delta_{0t}\omega$ (12) должны наблюдаться на фоне более широкой линии $\Delta_t\omega \approx \delta_0\omega$ (6).

Вторая из отмеченных выше возможностей осуществима, если вместо (9), например, при больших τ_0 выполняется неравенство:

$$\delta_0\omega < \Delta\omega < \Delta_0\omega. \quad (13)$$

Тогда в интервале $\Delta\omega$ $\Phi_1(\omega)$ — медленно меняющаяся функция частоты, которая может быть отнесена в (1) к Ψ ($\Psi_2(\omega) = \Psi(\omega)\Phi_1(\omega)$), а ширина линии в основном определяется $\Phi_2(\omega)$. Гиперболический синус $\text{sh}(\omega\beta n_2 \tau_0 \cos \Theta)$ — достаточно гладкая функция аргумента, поэтому он существенно меняется лишь в пределах полуширины линии среды $\tau \gg \delta_0\omega$, а быстрые изменения $\Phi_2(\omega)$ определяются вторым членом.

Согласно (8), $\text{sh}^2(\omega\beta n_2 \tau_0 \cos \Theta) \geq 2$ при $\tau_0 \geq \tilde{\tau}_{0,5} = 1,145/\beta\omega|n_2| \cos \Theta$. Если $\tau_0 > \tilde{\tau}_{0,5}$, то линии $\delta_0\omega$ вовсе не разрешаются на уровне половинной интенсивности.

Формулу для энергии излучения осциллятора в этом случае (например, при $n_2 > 0$ $[p_0 v] = 0$) можно получить непосредственно из (1), если заменить $F(\omega)$ выражением

$$F^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}[\omega_0 - \omega(1 - \beta n \cos \Theta)]} + \frac{1}{\sqrt{2}[\omega_0 + \omega(1 - \beta n \cos \Theta)]}, \quad (14)$$

которое получается путем усреднения на некотором малом промежутке $\Delta\omega' \gg \delta_0\omega$ $F(\omega)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$. Тогда полуширина линии излучения $\Delta\omega > \Delta\omega'$ определяется из (14). Ограничиваюсь линейными по $\Delta\omega$ членами, получим:

$$\Delta\omega = \omega n_2 \beta \cos \Theta \left\{ \left(1 \pm \beta \cos \Theta \frac{d(\omega n_1)}{d\omega} \right)^2 + 2\omega n_2 \beta^2 \cos \Theta \frac{d(\omega n_2)}{d\omega} \right\}^{-1/2} \Big|_{\omega=\omega_i}. \quad (15)$$

Последний член в фигурных скобках (15) становится существенным при $v \cos \Theta \approx W_{rp}$.

Ограничиваюсь допплеровскими частотами, достаточно удаленными от пороговых значений, имеем:

$$\Delta\omega = \frac{\omega n_2 \beta \cos \Theta}{1 \pm \beta \cos \Theta d(\omega n_1)/d\omega}. \quad (16)$$

Сравнение (15), (16) с (12) в случае нормальных допплеровских частот показывает, что оба выражения для $\Delta\omega$ дают ширину линии одного порядка и отличаются лишь тем, что в (12) учтено смещение допплеровской частоты ω_i (11) за счет конечного поглощения.

Таким образом, если $\tau_0 > \tilde{\tau}$, то ширина линии на уровне половинной интенсивности не зависит от длительности излучения и определяется только свойствами среды. Лишь при $\tau_0 < \tilde{\tau}$ линии излучения шириной $\delta_0\omega$, удовлетворяющие (13), оказываются разрешенными на уровне половинной интенсивности. Пренебрегая в $\Phi_2(\omega)$ медленно меняющимся членом $\text{sh}^2(\omega\beta n_2 \cos \Theta \tau_0)$, определим допплеровские частоты из условия:

$$\omega(1 - \beta n_1 \cos \Theta) - \omega_0 = \pm m\pi/2\tau_0 \quad (m=1, 3, 5, \dots);$$

тогда полуширина линии излучения определяется выражением

$$\delta_{lm}\omega = \frac{0,787}{\tau_0 [1 + \beta(n_1 + \omega dn_1/d\omega) \cos \Theta]_{\omega=\omega_{lm}}} \quad (17)$$

и с точностью порядка $\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial \omega} \delta_{0n} \omega \right)_{\omega=\omega_{im}}$ не зависит от поглощения в среде.

Из проведенного выше рассмотрения ясно, что при наличии конечного поглощения в среде ($n_2 \neq 0$) наблюдение сколь угодно узких линий на заданном уровне изменения интенсивности 0,5 за счет одного лишь увеличения длительности излучения τ_0 невозможно.

Предельное значение τ_0 на уровне интенсивности 0,5, как показано выше, составляет $1,145 (\beta \omega |n_2| \cos \Theta)^{-1}$. Поясним это обстоятельство при $n_2 > 0$ следующими простыми физическими соображениями. Нетрудно видеть, что в формировании поля излучения в волновой зоне будут участвовать главным образом лишь те „эквивалентные осцилляторы“ [1], которые находятся на отрезке длиной $l_{\text{эфф}}$, где $l_{\text{эфф}}$ определяется из условия, что на длине $l_{\text{эфф}} \cos \Theta$ поле затухает в e раз, т. е. $l_{\text{эфф}} \cos \Theta \approx c/\omega n_2$. Отсюда

$$\frac{l_{\text{эфф}}}{v} = \frac{c}{v \omega n_2 \cos \Theta} \approx (\tilde{\tau})_{0,5} .$$

Как показано выше, если $\tau_0 > (\tau_0)_{0,5}$ ($l > l_{\text{эфф}}$), то излучение на участках $(l - l_{\text{эфф}})/2$ не приводит к дальнейшему уменьшению $\delta_{im} \omega$, а лишь увеличивает фоновую интенсивность, определяемую в $\Phi_2(\omega)$ членом $\sin^2(\beta n_2 \omega \cos \Theta \tau_0)$. К аналогичному заключению можно прийти и при $n_2 < 0$, если заметить, что основной вклад в поле излучения вносят теперь как раз те „эквивалентные осцилляторы“ на пути $l = v \tau_0$, которые размещаются на расстоянии $l_{\text{эфф}}/2$ от его концов. Очевидно, и в этом случае так же, как и в предыдущем ($n_2 > 0$), излучение на участке $l - l_{\text{эфф}}$ не влияет на ширину линии на уровне половинной интенсивности.

Нетрудно проверить прямым расчетом, что повышение уровня интенсивности, на котором определяется ширина линии, например, от 0,5 до 0,95, увеличивает τ вдвое, а предельная разрешимая ширина линии, определяемая (17), соответственно уменьшается вдвое.

Поэтому для обнаружения в спектре сложного состава допплеровского излучения от источника, движущегося в диспергирующей среде с отличным от нуля поглощением ($n_2 \neq 0$), неограниченно узких линий путем увеличения длительности излучения τ_0 следует одновременно повышать относительный уровень интенсивности, на котором производится наблюдение.

Приведенный выше анализ показывает, что конечное поглощение существенно изменяет сложный состав допплеровского излучения в диспергирующей среде. Для краткости назовем $2\Delta\omega$, определяемое (6) (см. также [1, 2]), идеальной шириной допплеровской линии; $2\Delta_0\omega$ в (12)—допплеровской шириной линии среды, а $2\delta_{im}\omega$ —пролетной допплеровской шириной. Допустим, что поглощение исчезающе мало, и попытаемся качественно обрисовать характер излучения, которое будет фиксировать неподвижный наблюдатель в волновой зоне при различных значениях τ_0 .

Если $n_2=0$, то идеальные линии излучения определяются (6), (7), а их ширина при $\tau_0 \rightarrow \infty$ неограниченно убывает как τ_0^{-1} .

Пусть далее $|n_2| \ll 1$, но конечен; τ_0 настолько мало, что условия разрешимости для идеальных допплеровских линий шириной $2\Delta\omega$ не выполняется, зато имеет место (9). Тогда на пьедестале, образованном неразрешенными идеальными допплеровскими линиями, должны наблюдаться допплеровские линии среды $2\Delta_0\omega$, определяемые (12). После-

дующее увеличение τ_0 приводит к распаду пьедестала на отдельные линии, которые при некотором значении τ_{01} будут достаточно близки к идеальным допплеровским.

Если $\tau_0 > \tau_{01}$, то $\Delta_t \omega < \Delta_{0t} \omega$, а идеальная допплеровская линия на пьедестале, образованном на этот раз допплеровской линией среды, последовательно распадается на $2m$ пролетных допплеровских линий шириной $2\delta_{im} \omega$ (17), которые при $\tau_0 > (\tau)_{\xi_0}$ становятся неразрешимыми на уровне ξ_0 ; поэтому вновь наблюдается допплеровская линия среды $\Delta_{0t} \omega$.

Допплеровские пролетные линии при $\tau_0 > (\tau)_{\xi_0}$ не исчезают и могут быть разрешены на более высоком уровне интенсивности $\xi > \xi_{0n}$; однако при $\tau_0 \rightarrow \infty$ необходимые значения $\xi \rightarrow 1$. Таким образом, общий характер спектра допплеровского излучения в среде с поглощением определяется парами неравенств из $\Delta_t \omega \geq \Delta_{0t} \omega \geq \delta_{im} \omega$. Разумеется, приведенная выше картина имеет качественный характер в том смысле, что нами не рассматривались строго переходные области, когда каждая из пар значений $\Delta_t \omega$, $\Delta_{0t} \omega$, $\delta_{im} \omega$ одного порядка. Тем не менее, более детальный анализ в силу того, что рассмотренные выше случаи должны непрерывно переходить друг в друга, по-видимому, не может внести существенных изменений.

Изложенные результаты были получены для оценки возможности наблюдения сложного состава допплеровского излучения при тепловых скоростях [8] для очень узких линий в среде и послужили основой для более тщательного анализа.

В заключение мы пользуемся случаем выразить признательность И. М. Франку за постоянное внимание к рассматриваемому кругу вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ., 6, 3 (1942).
2. И. М. Франк, ЖЭТФ, 36, 823 (1959).
3. Г. Л. Сучкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 815 (1962).
4. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР, 56, 699 (1947).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
1 октября 1962 г.

ON THE RADIATION LINE WIDTH IN THE COMPLEX DOPPLER EFFECT

K. A. Barsukov, G. L. Suotchkin

It is shown that conditions of resolution of separate lines in complex radiation spectrum may be reduced to the well-known conditions of arising the complex spectral composition for radiation with half intensity. Conditions of resolution for the nondissipative medium and some peculiarities of the spectrum in the presence of small losses are examined in detail. It is stated that under the certain conditions the observed line width does not practically depend on the duration of radiation and is entirely defined by the properties of dispersive medium.

О ПОГЛОЩЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, ПАДАЮЩЕЙ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО, ЗАПОЛНЕННОЕ ПЛАЗМОЙ

B. B. Арсенин

Вычисляется поглощение обыкновенной электромагнитной волны, падающей на полупространство, заполненное магнитоактивной плазмой. Отражение электронов от границы предполагается упругим. Поглощению происходит в прилегающем к границе слое толщиной порядка среднего гирорадиуса.

Рассмотрим задачу об отражении электромагнитной волны от полупространства, заполненного плазмой. Пусть плазма занимает область $x > 0$; в плоскости $x = 0$ она ограничена стенкой, упруго отражающей электроны, а вдоль оси z приложено внешнее магнитное поле H_0 .

Пусть на плазму падает плоская электромагнитная волна $E = \{0, 0, E(x) e^{-i\omega t}\}$, поляризованная в плоскости xz , причем частота волны ω меньше ленгмюровской частоты $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^3 N/m}$. Электрическое поле в вакууме представляет собой сумму падающей и отраженной волн:

$$E = E_0 e^{ikx - i\omega t} + E_1 e^{-ikx - i\omega t}. \quad (1)$$

Требуется определить энергию $S = (c/8\pi)(|E_0|^2 - |E_1|^2)$, поглощаемую единицей поверхности плазмы в единицу времени.

Известно, что если частота волны меньше ленгмюровской, то от холодной плазмы она полностью отражается. Для случая, когда стенки нет, падение электромагнитной волны на заполненное плазмой полупространство с учетом конечности ларморовского радиуса изучалось Днестровским и Кастваровым [1]. При этом в работе [1] неоднородностью магнитного поля в переходном слое пренебрегается, так что проекции траекторий всех частиц на плоскость xy представляют собой окружности. В этом случае волна проникает в плазму без поглощения. Напротив, в присутствии стенки возможно поглощение волны в пристеночном слое толщины порядка среднего гирорадиуса частиц. В самом деле, частицы, испытывающие отражение от границы, в плоскости xy двигаются по дугам окружностей. В направлении x они совершают периодическое движение, причем частота этого движения у разных частиц разная: она меняется от циклотронной частоты $\omega_H = eH_0/mc$ у частиц, траектории которых едва касаются стенки, до бесконечности у частиц, траектории которых вытянуты вдоль границы (см. рис. 1). Если частота падающей электромагнитной волны ω превосходит ω_H , то частицы, колеблющиеся с той же частотой ω , будут поглощать энергию волны.

Отметим, что стенку, упруго отражающую электроны, можно рассматривать как идеализацию границы между плазмой и сильным магнитным полем, удерживающим ее. В переходном слое частота периодического движения частиц, двигающихся ближе к границе, где магнитное поле сильнее, больше, чем у частиц в глубине плазмы.

Будем описывать плазму системой уравнений, состоящей из уравнений Максвелла и кинетического уравнения с самосогласованным

полем для электронов. Столкновениями пренебрежем. Представим функцию распределения электронов в виде суммы

$$f = f_0 + f_1, \quad (2)$$

где f_0 — невозмущенная (максвелловская) функция распределения, а f_1 — связанная с волной поправка к ней, удовлетворяющая линеаризованному уравнению

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e}{m} E(x, t) \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = 0. \quad (3)$$

Решение его, удовлетворяющее условию $f_1=0$ при $t=-\infty$, есть

$$f_1 = - \frac{e}{m} \int_{-\infty}^t E(x(t'), t') \frac{\partial f_0}{\partial v_z} dt'. \quad (4)$$

Здесь $x(t')$ — положение в момент t' частицы, которая в момент t имеет координату x и скорость v . Величина $x(t')$ вычисляется без учета действия поля волны. Электрическое поле определяется из волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E = \frac{4\pi i \omega e}{c^2} \int v_z f_1 dv. \quad (5)$$

Рис. 1. Траектории частиц в пристеночном слое.



Поскольку $\omega < \omega_0$, волна проникает в плазму лишь на некоторую глубину. Ограничимся случаем, когда глубина проникновения много больше среднего ги-рорадиуса частиц $r_H = \omega^{-1} \sqrt{2T/m}$. Тогда на расстояниях, много больших r_H , электрическое поле экспоненциально затухает. Введем безразмерную величину $\xi = x/r_H$. В соответствии с вышеизложенным будем искать решение уравнения (5) в виде суммы

$$E(\xi) = E_2 \left[e^{-\frac{\omega}{c} |n| r_H \xi} + u(\xi) \right], \quad (6)$$

где n — показатель преломления для однородной плазмы, $u(\xi)$ — неизвестная, быстро убывающая при $\xi \rightarrow \infty$ функция, E_2 — неизвестная постоянная.

Подставляя (6) в (5) и проводя преобразования, аналогичные тем, которые делались в работе [1], получим следующее интегральное уравнение для определения функции $u(\xi)$:

$$u(\xi) = - \frac{\Omega i}{\pi} \beta L(u) - \frac{\Omega i}{\pi} \beta w(\xi), \quad (7)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega/\omega_H; \quad \beta = 8\pi NT/H_0^2; \\ L(u) &= \int_{\xi}^{\infty} d\sigma (\xi - \sigma) \int_0^{2\pi} d\delta \int_0^{\sigma/(1+\sin\delta)} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^{\infty} u(\sigma_1(\tau)) e^{i\Omega\tau} d\tau + \\ &+ \int_{\xi}^{\infty} d\sigma (\xi - \sigma) \int_0^{2\pi} d\delta \int_{\sigma/(1+\sin\delta)}^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^{\infty} u(\sigma_2(\tau)) e^{i\Omega\tau} d\tau; \end{aligned} \quad (8)$$

$$w(\xi) = - \int_{\xi}^{\infty} d\sigma (\xi - \sigma) \int_0^{2\pi} d\delta \int_{\sigma/(1+\sin\delta)}^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha \left[\int_0^{\infty} e^{-hr_H \sigma_1(\tau) + i\Omega\tau} d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} e^{-hr_H \sigma_2(\tau) + i\Omega\tau} d\tau \right]; \\ h = \frac{\omega}{c} |n|. \quad (9)$$

В выражениях (8) и (9) первые слагаемые относятся к частицам, не испытывающим отражения от стенки, так что

$$\sigma_1(\tau) = \sigma + \alpha \sin(\delta - \tau) - \alpha \sin \delta, \quad (10)$$

вторые слагаемые — к частицам, испытывающим отражение. У них закон движения сложнее:

$$\sigma_2(\tau) = \begin{cases} \sigma + \alpha \sin(\delta - \tau) - \alpha \sin \delta, & 0 < \tau < \delta + T - \pi/2 \\ \sigma + \alpha \sin(\delta - \tau + 2T) - \alpha \sin \delta, & \delta + T - \pi/2 < \tau < 2T \end{cases} \quad (11)$$

и далее периодически с периодом $2T = 2\arccos(-\sigma/\alpha + \sin \delta)$.

Будем считать в дальнейшем параметр β — отношение газового давления к давлению магнитного поля — малым. Тогда для решения интегрального уравнения (7) можно воспользоваться методом последовательных приближений. С точностью до членов второго порядка малости по β

$$u(\xi) = - \frac{\Omega i}{\pi} \beta w(\xi). \quad (12)$$

Найдем теперь поглощаемую энергию S . Используя для определения амплитуд E_1 и E_2 условий непрерывности поля и его производной на границе, находим, что

$$S = \frac{c}{8\pi} (|E_0|^2 - |E_1|^2) = \frac{c}{2\pi} |E_0|^2 \cdot \frac{kh}{k^2 + h^2} \left[\operatorname{Im} u(0) + \frac{\operatorname{Im} u'(0)}{hr_H} + O(\beta^2) \right]. \quad (13)$$

При вычислении значений $u(0)$ и $u'(0)$ удобно изменить в (9) порядок интегрирования по переменным σ и α и вместо σ ввести новую переменную $\varphi \equiv \arccos(-\sigma/\alpha + \sin \delta)$. Тогда получим следующие выражения:

$$w(0) = - \int_0^{\infty} \alpha^3 e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{\pi/2-\varphi}^{\pi/2+\varphi} (\sin \delta - \cos \varphi) \Phi(\varphi, \delta, \alpha) d\delta; \quad (14)$$

$$w'(0) = \int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2} d\alpha \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_{\pi/2-\varphi}^{\pi/2+\varphi} \Phi(\varphi, \delta, \alpha) d\delta, \quad (15)$$

где

$$\Phi(\varphi, \delta, \alpha) = \frac{\int_0^{\delta+\varphi-\pi/2} \exp \{-hr_H \alpha [\sin(\delta - \tau + 2\varphi) - \cos \varphi] + i\Omega\tau\} d\tau}{1 - e^{2i\Omega\varphi}} + \\ + \frac{\int_{\delta+\varphi-\pi/2}^{2\varphi} \exp \{-hr_H \alpha [\sin(\delta - \tau + 2\varphi) - \cos \varphi] + i\Omega\tau\} d\tau}{1 - e^{2i\Omega\varphi}} - \\ - \int_0^{\infty} \exp \{-hr_H \alpha [\sin(\delta - \tau) - \cos \varphi] + i\Omega\tau\} d\tau. \quad (16)$$

Ограничиваюсь при вычислении $w(0)$ двумя первыми членами разложения экспоненты в (14) в ряд по степеням hr_H , а при вычислении $w'(0)$ — тремя членами разложения, получим:

$$\operatorname{Im} u(0) = \frac{3\beta hr_H}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Omega^3}{(1-\Omega^2)^2} \operatorname{Im} \int_0^\pi \frac{\cos(\Omega\varphi)}{\sin(\Omega\varphi)} \sin^3 \varphi d\varphi; \quad (17)$$

$$\operatorname{Im} u'(0) = 0,$$

причем полюсы подынтегрального выражения обходятся снизу.

Мы видим, что поглощение существует только при $\Omega > 1$. Для $1 < \Omega < 2$ оно равно

$$S = \frac{3c}{8\sqrt{\pi}} |E_0|^2 \frac{kh}{k^2 + h^2} \beta r_H h \frac{\Omega^3}{(1-\Omega^2)^2} \sin^3 \frac{\pi}{\Omega}. \quad (18)$$

Автор благодарит В. И. Когана и В. Д. Шафранова за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1 Ю Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, 39, 845 (1960).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
22 сентября 1962 г.

ON THE ABSORPTION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE INCIDENT UPON
THE PLASMA HALFSPACE

V. V. Arsenin

The absorption is calculated of an ordinary electromagnetic wave incident upon the halfspace filled with the magnetoactive plasma. Elastic reflection of electrons from the boundary is supposed. Absorption takes place in the boundary layer which thickness is of the order of average gyroradius.

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УСИЛЕНИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ

Н. С. Степанов

Рассматривается распространение поперечной электромагнитной волны в изотропной плазме, концентрация электронов в которой периодически изменяется по закону бегущей волны. Показано, что при выполнении определенных резонансных условий в зависимости от соотношения между скоростью волны параметра и групповой скоростью падающей волны в плазме может возбуждаться как обратная (отраженная), так и прямая волна, распространяющаяся в одинаковом направлении с первичной. Взаимодействие между возбужденной и падающей волнами приводит к затуханию последней, если скорость волны параметра меньше, чем скорость света в среде в отсутствие плазмы (энергия сигнала при этом перекачивается на частоту возбужденной волны); в противном же случае обе волны усиливаются.

Известно, что в плазме, как и в некоторых других нелинейных средах, возможно нелинейное взаимодействие распространяющихся в ней радиоволн (см., например, [1]), которое может быть использовано для параметрического усиления колебаний. Два примера „резонансного“ усиления слабого сигнала в плазме при взаимодействии с более мощной волной „накачки“ обсуждаются в работе [2]. В первом случае и волна накачки, и усиливаемый сигнал должны иметь продольные составляющие электрического поля, а колебания электронов благодаря наложению внешнего магнитного поля бесконечно большой напряженности полагаются чисто продольными. Рассматривая же волны в отсутствие внешнего магнитного поля, автор по существу ограничился (хотя это и не оговаривается в [2]) приближением „заданного поля“, не учитывая обратного влияния электронных колебаний на вихревое электромагнитное поле. Вследствие этого в указанной работе учитывается лишь взаимодействие волн, связанное с нелинейностью уравнения движения электронов. Из результатов этой работы вытекает, например, что в отсутствие магнитного поля могут взаимодействовать лишь неоднородные по поперечному сечению волны, а поперечная волна с продольной (плазменной) вообще не взаимодействует. Однако хорошо известно [1], что вследствие изменения последней волной концентрации электронов такой эффект может иметь место, и притом уже в нерелятивистском приближении*.

В связи с этим в данной работе рассматривается задача о распространении плоской поперечной электромагнитной волны в плазме с электронной концентрацией:

$$N = N_0 [1 + p \cos(K\xi)], \quad (1)$$

где $\xi = z - at$, $0 < p \ll 1$. Подобное изменение величины N можно в принципе осуществить как при помощи специальной волны „накачки“

* Мы не будем учитывать соударений электронов, которые также приводят к нелинейному взаимодействию волн [1].

в неподвижной плазме (в частности, для этого может быть использована чисто продольная плазменная волна), так и в движущемся потоке плазмы; для подбора надлежащих значений скоростей волн в практических устройствах могут быть применены волноводные и замедляющие системы.

1. Обычно при анализе волн в системах с периодическими параметрами учитывают несколько взаимодействующих гармоник (чаще всего две), отбрасывая остальные [2,3]. Если в случае линии передачи такое предположение может быть оправдано тем, что нежелательные гармоники в принципе могут быть отфильтрованы, то для неограниченной плазмы справедливость его заранее не очевидна. Изменение же числа распространяющихся гармоник может существенным образом изменить характер решения, а в недиспергирующей и неотражающей линии вообще невозможно экспоненциальное усиление какой-либо гармоники сигнала [4–5]. Наличие дисперсии также может изменить физическую картину, однако ее роль в параметрическом усилении изучена недостаточно. Поэтому представляет интерес на примере простейшей модели плазмы более строго рассмотреть распространение волн в диспергирующей системе с переменными параметрами, не прибегая к предварительным предположениям о характере спектра сигнала.

Хотя изменение концентрации N эквивалентно изменению эффективной диэлектрической проницаемости среды, вследствие дисперсии здесь, строго говоря, исходную задачу невозможно свести к исследованию волн в среде с заданным в явном виде параметром $\epsilon_{\text{эфф}}(z, t)$. Мы воспользуемся уравнением для поперечного вектора-потенциала A , которое при некоторых упрощающих предположениях (в односкоростном приближении, в отсутствие внешнего магнитного поля и т. д.) может быть записано [6] в виде

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - n^2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} A, \quad (2)$$

где $\omega_p^2 = 4\pi^2 e N / m$, $n = \sqrt{\epsilon}/c$, ϵ —диэлектрическая проницаемость среды в отсутствие плазмы, e и m —заряд и масса электрона, причем в случае релятивистского потока плазмы здесь, разумеется, $m = m_0 (\sqrt{1 - v_0^2/c^2})^{-1}$, где v_0 —скорость потока*. Заменой [7]

$$A = \varphi(\xi) \exp \left[\frac{j\omega'}{1 - a^2 n^2} (t - a n^2 z) \right], \quad (3)$$

где ω' —произвольная постоянная, из равенств (1) и (2) легко получить уравнение Матье:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + x_0^2 [1 + p' \cos(K\xi)] \varphi = 0, \quad (4)$$

где

$$x_0^2 = \frac{\omega'^2}{c^2} \left[\frac{\epsilon}{(1 - a^2 n^2)^2} - \frac{\omega_{p0}^2}{(1 - a^2 n^2) \omega'^2} \right], \quad p' = p \frac{\omega_{p0}^2}{(1 - a^2 n^2) c^2 x_0^2}, \quad (5)$$

причем здесь $\omega_{p0}^2 = 4\pi e^2 N_0 / m$.

* Поправками порядка v_\perp/c , где v_\perp —поперечная скорость электронов, в уравнении (2) пренебрежено; тогда, как легко видеть, $\varphi_\perp = -(e/mc) A$, причем здесь $\operatorname{div} A = 0$. Напряженности полей определяются через потенциал из равенств $E = -(1/c) \partial A / \partial t$, $H = \partial A / \partial z$.

Ясно, что накапливающийся параметрический эффект соответствует „неустойчивым“ решениям уравнения (4), которые имеют место при условии

$$K \simeq \pm \frac{2\kappa_0}{r}, \quad (6)$$

где $r=1, 2, 3, \dots$ — номер „резонансной“ зоны. Поскольку точные выражения для $\varphi(\xi)$ как внутри, так и вне этих зон хорошо известны, здесь для краткости ограничимся случаем $r=1$, $0 < p' \ll 1$. При этом можно взять решение вида:

$$\varphi(\xi) = C_1 e^{\mu\xi} \sin\left(\frac{K\xi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C_2 e^{-\mu\xi} \sin\left(\frac{K\xi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(p'), \quad (7)$$

где $\mu \simeq (K/8)\sqrt{(p')^2 - 4(1-4x_0^2/K^2)^2}$ и через $O(p')$ обозначены поправки порядка p' и выше, которыми далее будем пренебречь; C_1 и C_2 — постоянные. В результате для потенциала A находим выражение

$$A(z, t) = \frac{j}{2} (C_1 e^{\mu\xi + i\pi/4} + C_2 e^{-\mu\xi - i\pi/4}) e^{i\Theta_+} - \frac{j}{2} (C_1 e^{\mu\xi - i\pi/4} + C_2 e^{-\mu\xi + i\pi/4}) e^{i\Theta_-}, \quad (8)$$

где

$$\Theta_{\pm} = \left(\frac{\omega'}{1-a^2n^2} \pm \frac{\Omega}{2} \right) t - \left(\frac{\omega' an^2}{1-a^2n^2} \pm \frac{K}{2} \right) z. \quad (9)$$

2. В этом приближении ($p' \ll 1$), таким образом, решение действительно представляет из себя две взаимодействующие квазимохроматические волны, удовлетворяющие условиям

$$\omega_+ - \omega_- = \Omega, \quad (10)$$

$$k_+ - k_- = K, \quad (10a)$$

где $\omega_{\pm} = \partial \Theta_{\pm} / \partial t$ и $k_{\pm} = -\partial \Theta_{\pm} / \partial z$ — соответствующие частоты и волновые числа (которые, заметим, могут иметь здесь отрицательные значения). Из выражения (9) следует, что частоты ω_- и ω_+ связаны соотношением

$$\frac{\omega_-}{\omega_+} = \frac{1-a/v(\omega_+)}{1-a/v(\omega_-)} = \frac{1+a^2n^2}{1-a^2n^2} \left[1 - \frac{2a}{v(\omega_+) (1+a^2n^2)} \right], \quad (11)$$

где $v(\omega_{\pm}) = \omega_{\pm}/k_{\pm}$ — фазовые скорости волн. Тогда резонансное условие (6) также можно выразить через частоту и скорость одной из взаимодействующих волн, например:

$$\Omega = \frac{2\omega_+}{1-a^2n^2} \left[\frac{a}{v(\omega_+)} - a^2n^2 \right]. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться, что групповые скорости этих волн по величине равны $|v_{gp}(\omega_{\pm})| = |1/n^2 v(\omega_{\pm})| = c \sqrt{\epsilon_{\text{эфф}}(\omega_{\pm})/\epsilon}$, где, как и следовало ожидать, $\epsilon_{\text{эфф}}(\omega_{\pm}) = \epsilon - 4\pi e^2 N_0/m\omega_{\pm}^2$. Что же касается направления их распространения, то знак постоянной ω' всегда можно выбрать так, чтобы член с фазой Θ_+ в (8) соответствовал прямой волне (т. е. $v_{gp}(\omega_+) > 0$), которую будем считать первичной („падающей“). Вели-

чины $v_{rp}(\omega_-)$ непосредственно связана с $v_{rp}(\omega_+)$ соотношением (см. (9))

$$v_{rp}(\omega_-) = - \frac{v_{rp}(\omega_+) - 2a/(1+a^2n^2)}{1 - v_{rp}(\omega_+) 2an^2 / (1 + a^2n^2)} \quad (13)$$

и может иметь как отрицательный (при $a < 0$ или $v_{rp}(\omega_+) > 2a/(1+a^2n^2)$), так и положительный знак (при $v_{rp}(\omega_+) < 2a/(1+a^2n^2)$, см. рис. 1). В первом случае имеет место явление, аналогичное резонансному отражению волн в периодической линии передачи [8], — прямая волна взаимодействует с обратной. Во втором же случае отражен-

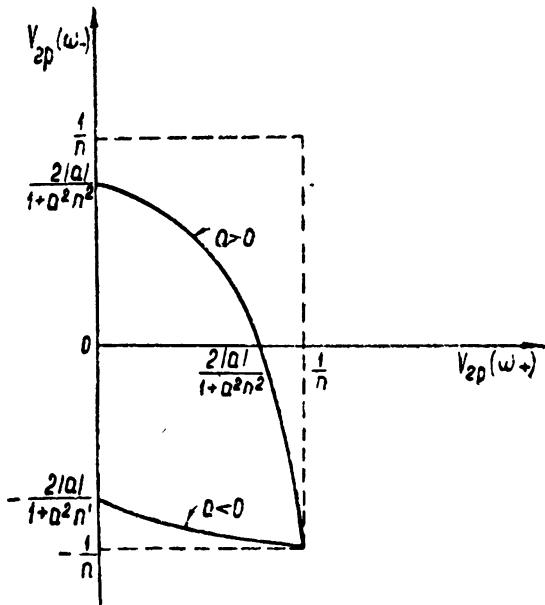


Рис. 1.

ной волны не возникает, и вследствие возмущения падающей волны периодической неоднородностью возбуждается другая („холостая“) волна частоты $\omega_- = \omega_+ - \Omega$, распространяющаяся в ту же сторону; последний эффект является специфичным для диспергирующей системы. Гармоники с иными частотами, не удовлетворяющие условиям (10), при малых p' (но не p) решающего влияния на характер решения не оказывают.

Для рассмотрения изменения энергии электромагнитной волны сначала предположим, что изменение $N(\xi)$ по закону (1) происходит в некотором движущемся слое $0 \leq \xi \leq l$ (вне которого $N = \text{const}$), причем локальное отражение от границ слоя отсутствует. Как ясно из выше-сказанного, в зависимости от соотношения между $v_{rp}(\omega_{\pm})$ и a направления падения волн на слой и соответственно структура их и вне и внутри него могут быть различными. Однако, определяя коэффициенты проникновения (усиления) по мощности K_p и преобразования (в частности, отражения) R_p по отношению к невозмущенной изменением параметра волне, при $a^2n^2 < 1$ из выражения (8) для всех случаев можно найти, что

$$K_p = \operatorname{sch}^2(\mu l), \quad R_p = \left| \frac{\omega_- k_-}{\omega_+ k_+} \right| \operatorname{th}^2(\mu l), \quad (14)$$

¶ при $a^2 n^2 > 1$

$$K_p = \operatorname{ch}^2(\mu l), \quad R_p = \left| \frac{\omega_- k_-}{\omega_+ k_+} \right| \operatorname{sh}^2(\mu l). \quad (14a)$$

В первом случае прямая волна по мере проникновения в слой затухает. При $a > 0$ здесь $|\omega_- k_-| < |\omega_+ k_+|$ и $R_p < 1$, т. е. полная энергия электромагнитной волны также уменьшается — частично переходит волне накачки или в кинетическую энергию потока электронов. Заметим, что из (10) и (11) здесь следует неравенство $\omega_- / \omega_+ > 0$, $\Omega < \max |\omega_{\pm}|$. Если же $a^2 n^2 > 1$, то, наоборот, частоты ω_+ и ω_- разного знака и $\Omega > |\omega_{\pm}|$ (такой случай, очевидно, не может быть реализован плазменной волной в неподвижной плазме, поскольку для нее $\Omega \approx \omega_p / V_e$ и при $\omega < \omega_p / V_e$ сигнал быстро затухает); здесь имеет место увеличение электромагнитной энергии на обеих частотах ω_+ и ω_- .

Отметим, что при $a = v(\omega_+)$, согласно (11), $\omega_- = -\omega_+$ и соответственно $v(\omega_-) = v(\omega_+) = a$, т. е. „холостая“ волна вырождается. Из условия (12) тогда следует $\Omega = 2\omega_+$; подобный случай наиболее часто рассматривается в литературе по параметрическим усилителям. Если скорость волны параметра приближается к групповой скорости сигнала ($a \rightarrow v_{gr}(\omega_+)$, $v(\omega_+) \rightarrow 1/a n^2$), то условие (12) формально дает $\Omega \rightarrow 0$. При этом, однако, выражения (7) и (8) уже неприменимы, поскольку условие малости p' перестает выполняться и для $p \ll 1$. Ситуация в последнем случае такая же, как и для неотражающей линии с медленно изменяющимися параметрами [5]: резонансные эффекты здесь отсутствуют, хотя энергия и частота сигнала могут быть существенно изменены нерезонансным образом, соответствующее решение уравнения (2) здесь можно найти в приближении геометрической оптики [6]. Резонансный эффект исчезает также при $a^2 n^2 \rightarrow 1$ (формально он здесь имеет место при $\Omega \rightarrow \infty$, когда, согласно (11), и $|\omega_-| \rightarrow \infty$; при этом, однако, теряет силу исходное уравнение (2)).

3. Далее, с точки зрения практического применения представляет интерес рассмотреть слой с неподвижными границами, когда изменение $N(z)$ по закону (1) имеет место в области $0 \leq z \leq l$. В этом случае, естественно, решение (8) уже не удовлетворяет соответствующим граничным условиям (вследствие малости p отражением от границ слоя пренебрегаем). Приближенное решение, однако, легко найти, используя полученные выше результаты и предполагая, что взаимодействуют лишь две гармоники с частотами ω_+ и ω_- , связанные соотношением (10). Будем искать решение в виде

$$A(z, t) = P_+(z, t) e^{j(\omega_+ + k_+ z)} + P_-(z, t) e^{j(\omega_- - k_- z)}, \quad (15)$$

где частоты ω_{\pm} и соответствующие групповые скорости распространения волн удовлетворяют условиям (11) и (13); соотношение же (10a) будем считать выполненным неточно:

$$k_+ - k_- = K + 2\delta, \quad (16)$$

где величина δ характеризует рассогласование волн. Считая множители $P_{\pm}(z, t)$ медленными функциями ($|\partial^2 P_{\pm}/\partial z^2| \ll |k_{\pm} \partial P_{\pm}/\partial z|$ и т. д.) и группируя члены с одинаковыми экспоненциальными множителями, из уравнения (2) тогда получаем систему с постоянными коэффициентами:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{rp}(\omega_{\pm}) \frac{\partial}{\partial z} \mp j\delta v_{rp}(\omega_{\pm}) \right) \tilde{P}_{\pm} = - \frac{p\omega_{p0}^2}{4j\omega_{\pm}\epsilon} \tilde{R}_{\mp}, \quad (17)$$

где $\tilde{P}_{\pm} = P_{\pm} e^{\pm j\delta z}$.

В частности, в установившемся режиме $\partial\tilde{P}_{\pm}/\partial t=0$, и решение уравнений (17) можно записать в виде

$$\begin{aligned} P_+(z) &= \frac{P_0}{1+q} e^{-j\delta z} (e^{\gamma z} + q e^{-\gamma z}), \\ P_-(z) &= \frac{\Gamma P_0}{1+q} e^{j\delta z} \left(e^{\gamma z} - q \frac{\gamma + j\delta}{\gamma - j\delta} e^{-\gamma z} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\gamma = \sqrt{-\left(\frac{p\omega_{p0}^2}{4c^2}\right)^2 \frac{1}{k_+ k_-} - \delta^2}, \quad \Gamma = \frac{4jk_+ c^2}{p\omega_{p0}^2} (\gamma - j\delta).$$

Как и ранее, положим $v_{rp}(\omega_+) > 0$; тогда постоянная P_0 в выражениях (18) определяет амплитуду падающей волны на входе слоя ($z=0$). Пусть также $v_{rp}(\omega_-) > 0$ (т. е. $v_{rp}(\omega_+) < 2a/(1+a^2n^2)$, см. рис. 1); граничным условием для определения другой постоянной q будет равенство $P_-(0)=0$, откуда $q=(\gamma-j\delta)/(\gamma+j\delta)$. Если $k_+ k_- < 0$ (а это условие будет выполнено при $\omega_+ \omega_- < 0$, $\Omega > |\omega_{\pm}|$, т. е., согласно (11), при $a^2n^2 > 1$) и рассогласование волн невелико ($\delta^2 < (p\omega_{p0}^2/4c^2)^2 |k_+ k_-|^{-1}$), имеет место экспоненциальное усиление волн в пространстве. В частности, при $\delta=0$ коэффициенты усиления и преобразования (на выходе слоя) равны $K_p = \text{ch}^2(\gamma l)$ и $R_p = |\omega_-/\omega_+| \text{sh}^2(\gamma l)$. В случае же $0 < a < 1/n$ γ — мнимая величина, и вдоль слоя происходит лишь периодическая перекачка энергии с частоты ω_+ на ω_- и обратно, причем при полном преобразовании ($\delta=0$) энергия сигнала изменяется пропорционально частоте.

Если взаимодействие происходит с отраженной волной ($v_{rp}(\omega_-) < 0$), то $P_-(l)=0$ и $q=[(\gamma-j\delta)/(\gamma+j\delta)] \exp(2\gamma l)$. Здесь действительным значениям γ соответствует $a^2n^2 < 1$; из решения (18) легко видеть, что прямая волна в этом случае затухает (при $\delta=0$, например, имеем $K_p = \text{sh}^2(\gamma l)$, как и для движущегося слоя; $R_p = |\omega_- k_- / \omega_+ k_+| P_-^2(0) / P_0^2 = = |\omega_- / \omega_+| \text{th}^2(\gamma l)$). Рассогласование уменьшает декремент затухания.

При мнимых $\gamma=j\gamma$ ($a^2n^2 > 1$, $\Omega > |\omega_{\pm}|$) имеет место явление регенерации: амплитуды как проходящей, так и отраженной волн здесь могут неограниченно усиливаться. Например, коэффициент проникновения здесь равен

$$K_p = [\cos^2(\tilde{\gamma}l) + (\delta^2/\gamma^2) \sin^2(\tilde{\gamma}l)]^{-1}. \quad (19)$$

При $\delta \rightarrow 0$ $K_p = \text{sc}^2(\tilde{\gamma}l)$; аналогично из выражения (18) легко найти, что $R_p = |\omega_- / \omega_+| \text{tg}^2(\tilde{\gamma}l)$. В достаточно длинном слое ($\tilde{\gamma}l > \pi/2$) поперечные волны в этом случае могут самовозбуждаться (аналогичный эффект для волн в линии передачи был рассмотрен в работе [8]).

4. Выше обсуждалась возможность нарастания монохроматического „входного“ возмущения при распространении вдоль слоя с переменной концентрацией. Возможна и несколько другая постановка

задачи: рассмотреть развитие некоторого слабого начального возмущения во времени и выяснить устойчивость системы по отношению к нему. Особенно просто это сделать для бесконечного слоя. Полагая на этот раз колебания гармоническими в пространстве, в уравнениях (17) теперь имеем $\partial \tilde{P}_\pm / \partial z = 0$; тогда решение их легко найти в виде

$$P_\pm = e^{\mp i \delta z} (C_{1\pm} e^{\alpha t} + C_{2\pm} e^{-\alpha t}),$$

где

$$\alpha = \frac{j \delta [v_{rp}(\omega_+) - v_{rp}(\omega_-)]}{2} \pm \sqrt{-\left(\frac{p \omega_{p0}^2}{4\epsilon}\right)^2 \frac{1}{\omega_+ \omega_-} - \frac{\delta^2}{4} [v_{rp}(\omega_+) + v_{rp}(\omega_-)]^2}. \quad (20)$$

Таким образом, при малых δ начальное возмущение может экспоненциально нарастать во времени, если $\omega_+ \omega_- < 0$, т. е., как ясно из предыдущего, при $a^2 n^2 > 1$, $\Omega > |\omega_\pm|$; иначе говоря, соответствующая волна накачки здесь является неустойчивой. Разумеется, выражения (18)–(20), так же, как и исходное уравнение (2), справедливы лишь при достаточно слабом по сравнению с волной накачки возмущении. Если же $\omega_+ \omega_- > 0$, вследствие неизбежных в реальной системе потерь после начального „толчка“ происходят медленно затухающие биения. В частности, продольная волна в неподвижной плазме в отсутствие внешнего магнитного поля (и изменяющих скорость волн волноводных систем) устойчива по отношению к таким возмущениям. В движущейся плазме поперечные волны с частотой $\omega < \Omega$ могут распространяться и продольная волна может оказаться неустойчивой.

Нетрудно показать, что в слое конечной длины l с неотражающими границами такая неустойчивость может появиться лишь при $v_{rp}(\omega_-) < 0$ (физически это понятно, поскольку в противном случае возмущение „рассасывается“ из слоя). Произвольное начальное возмущение здесь можно разложить на собственные волны с амплитудами $P_{k\pm} = e^{\alpha_k t} (C_{1k\pm} e^{\beta_{1k} z} + C_{2k\pm} e^{\beta_{2k} z})$, удовлетворяющие условиям $P_{k+}(0) = 0$, $P_{k-}(l) = 0$. Определяя из этих условий и уравнений

(17) коэффициенты α_k и β_k , можно найти, что при $\gamma l > \pi/2$ для основного типа $\text{Re} \alpha_1 > 0$ и колебания этого типа могут самовозбуждаться, несмотря на отсос энергии через границы слоя; с увеличением относительной длины последнего ($Kl \rightarrow \infty$) коэффициент α_1 стремится к предельному значению, определяемому соотношением (20). При больших значениях γl могут возбуждаться и высшие типы волн.

Представляется, что еще большие возможности с точки зрения параметрического усиления и преобразования волн в плазме имеют место при наличии магнитного поля; однако этот вопрос требует специального рассмотрения.

В заключение автор выражает признательность В. В. Железнякову за просмотр рукописи и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. G. S. Kipn, J. Appl. Phys., 31, 1449 (1960).
3. P. K. Tien, J. Appl. Phys., 29, 1347 (1958).

4. А. С. Тагер, Сб. 100 лет со дня рождения А. С. Попова, Юбилейная сессия, изд. АН СССР, М., 1960.
5. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 672 (1960).
6. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 293 (1961).
7. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 908 (1962).
8. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 656 (1961);

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 октября 1962 г.

ON THE PARAMETRIC AMPLIFICATION OF TRANSVERSE ELECTROMAGNETIC
WAVES IN PLASMA WITH PERIODICALLY VARYING ELECTRON
CONCENTRATION

N. S. Stepanov

The transverse electromagnetic wave propagation in the isotropic plasma is considered, the concentration of electrons varying periodically according to the traveling wave law. Under the certain resonant conditions depending on the ratio of the velocity of parameter wave and the group velocity of the incident wave, both the backward (reflected) and the direct wave (with respect to the direction of incident one) may be excited. Interaction between the excited wave and the incident one results in the attenuation of the latter, if the wave velocity of parameter is less than the velocity of light in the medium without plasma (in this case the signal energy is transferred to the excited wave); otherwise both waves are amplified.

О РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ФЛЮКТУАЦИЯХ В ПЛАЗМЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

A. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин

Рассмотрено рассеяние электромагнитных волн на тепловых флюктуациях в неизотермической плазме, находящейся во внешнем магнитном поле. Учтены флюктуации как плотности, так и скорости электронов и флюктуации магнитного поля. Определено спектральное распределение рассеянного излучения. Исследовано рассеяние волн на низкочастотных (альфеновских и магнитозвуковых) колебаниях в плазме.

1. Как известно, при распространении электромагнитных волн в плазме возможно рассеяние этих волн, обусловленное тепловыми флюктуациями плотности электронов. Поскольку в плазме флюктуационно могут возбуждаться собственные колебания, то кроме некогерентного рассеяния электромагнитных волн, которому отвечает основная линия в спектре рассеяния, возможно также комбинационное рассеяние, сопровождающееся комбинационным изменением частоты рассеянной волны. Хотя рассеяние происходит на флюктуациях плотности электронов (флюктуациями ионов можно пренебречь из-за большой массы ионов), допплеровское уширение основной линии определяется тепловой скоростью ионов, так как между электронами и ионами имеет место взаимодействие посредством самосогласованного поля. В сильно неизотермической плазме основная линия распадается на две симметрично расположенные относительно нулевого смещения частоты линии, отвечающие рассеянию волн на звуковых колебаниях в плазме.

Наличие внешнего магнитного поля в плазме приводит к расщеплению частоты плазменных колебаний, а также к появлению новых видов собственных колебаний в низкочастотной области спектра (альфеновских и магнитозвуковых волн). Поэтому в спектре рассеянного излучения в плазме при наличии магнитного поля возникают добавочные максимумы, связанные с рассеянием на альфеновских и магнитозвуковых колебаниях. Отметим, что при наличии магнитного поля рассеяние электромагнитных волн обусловлено не только флюктуациями плотности электронов, но также флюктуациями скорости электронов и флюктуациями магнитного поля.

Рассеяние электромагнитных волн в плазме рассматривалось в работах [1–6]. В настоящей статье на основе теории флюктуаций, развитой в работе [2], рассмотрено рассеяние электромагнитных волн на флюктуациях в неизотермической плазме при наличии магнитного поля, в частности, рассмотрено рассеяние на альфеновских и магнитозвуковых флюктуациях.

2. Электромагнитное поле в плазме в пренебрежении движением ионов определяется системой уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e n \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} —напряженности электрического и магнитного полей (\mathbf{H} включает также внешнее постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0), \mathbf{v} и n —скорость и плотность электронов плазмы (e и m —заряд и масса электрона).

Если плотность электронов n_0 постоянна, то, линеаризуя последнее из уравнений (1), систему (1) можно свести к волновому уравнению

$$\left(\delta_{ij} \Delta - \nabla_i \nabla_j - \frac{\epsilon_{ij}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_j = 0, \quad (2)$$

где ϵ_{ij} —тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & 0 \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix},$$

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_H}{\omega} \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}, \quad (3)$$

$$\omega_H = \frac{eH_0}{mc}, \quad \Omega^2 = \frac{4\pi n_0 e^2}{m}.$$

Решения уравнения (2), описывающие электромагнитные волны в плазме при наличии магнитного поля, имеют вид:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^\lambda E e^{i\mathbf{k}_\lambda \cdot \mathbf{r} - i\omega_\lambda t}, \quad k_\lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \eta_\lambda^2(\omega). \quad (4)$$

Здесь E —амплитуда волны, η_λ —показатель преломления, равный

$$\eta_{1,2}^2 = \frac{(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \vartheta + \epsilon_1 \epsilon_3 (1 + \cos^2 \vartheta) \pm \sqrt{(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_1 \epsilon_3)^2 \sin^4 \vartheta + 4\epsilon_2^2 \epsilon_3^2 \cos^2 \vartheta}}{2(\epsilon_1 \sin^2 \vartheta + \epsilon_3 \cos^2 \vartheta)} \quad (5)$$

(ϑ —угол между направлением распространения волны и направлением магнитного поля \mathbf{H}_0) и e^λ —комплексный вектор поляризации:

$$\mathbf{e}^\lambda = \left\{ 1; \quad i \frac{\epsilon_2}{\eta_\lambda^2 - \epsilon_1}; \quad \frac{\eta_\lambda^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\eta_\lambda^2 \sin^2 \vartheta - \epsilon_3} \right\}. \quad (6)$$

(Вектор \mathbf{e}^λ записан в системе координат, для которой ось z направлена вдоль магнитного поля \mathbf{H}_0 , и ось x лежит в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 .) Индексы $\lambda = 1, 2$ соответствуют обычновенной и необыкновенной волнам.

Пусть в плазме распространяется волна

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_0 E_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega_0 t}. \quad (7)$$

Вследствие наличия флюктуаций плотности электронов δn , скорости электронов $\delta \mathbf{v}$ и магнитного поля $\delta \mathbf{H}$ при распространении (7) в плаз-

ме возникают рассеянные волны, поле которых, согласно (1), будет определяться уравнением

$$\left\{ \delta_{ij}\Delta - \nabla_i\nabla_j - \frac{\epsilon_{ij}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} E_j = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j_i}{\partial t}, \quad (8)$$

где $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ —ток, обусловленный полем падающей волны и тепловыми флюктуациями в плазме. Пространственно-временная компонента Фурье тока $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)$ связана с соответствующими компонентами $\delta n(\mathbf{q}, \Delta\omega)$, $\delta\mathbf{v}(\mathbf{q}, \Delta\omega)$ и $\delta\mathbf{H}(\mathbf{q}, \Delta\omega)$ соотношением*

$$\begin{aligned} j_i(\mathbf{k}, \omega) = & -\frac{i\omega_0}{4\pi} \left\{ (\epsilon_{ij}^0 - \delta_{ij}) \frac{\delta n(\mathbf{q}, \Delta\omega)}{n_0} - i \frac{e}{mc} \frac{\omega}{\Omega^2} (\epsilon_{ik} - \delta_{ik}) \times \right. \\ & \times (\epsilon_{mj}^0 - \delta_{mj}) \epsilon_{kmn} \delta H_n(\mathbf{q}, \Delta\omega) + \frac{\omega}{\omega_0^2} [(\epsilon_{ik} - \delta_{ik}) k_k^0 \delta v_j(\mathbf{q}, \Delta\omega) - \\ & \left. - (\epsilon_{ij} - \delta_{ij}) k_k^0 \delta v_k(\mathbf{q}, \Delta\omega)] \right\} E_j^0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\epsilon_{ij}^0 = \epsilon_{ij}(\omega_0), \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\omega), \quad \mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0.$$

Решение уравнения (8) ищем в виде:

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d\mathbf{k}_\lambda}{(2\pi)^3} q_{\mathbf{k}_\lambda}(t) e^\lambda e^{i\mathbf{k}_\lambda \cdot \mathbf{r}}. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8) и используя условие ортогональности поляризаций для обыкновенной и необыкновенной волн заданной частоты $\epsilon_{ij} e_i^* e_j^1 = 0$, получим следующее выражение для компоненты Фурье коэффициента $q_{\mathbf{k}_\lambda}(t)$, входящего в разложение (10):

$$q_{\mathbf{k}_\lambda}(\omega) = i \frac{4\pi\omega}{\epsilon_{ij} e_i^* e_j^\lambda} \frac{1}{k_\lambda^2 c^2 / \eta_\lambda^2 - \omega^2} j_m(\mathbf{k}_\lambda, \omega) e_m^{\lambda*}. \quad (11)$$

Таким образом, между полем рассеянной волны $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ и вынуждающим током $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)$ имеет место следующее соотношение:

$$E_i(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\lambda=1,2} i \frac{4\pi\omega}{\epsilon_{ij} e_i^* e_j^\lambda} \frac{1}{k^2 c^2 / \eta_\lambda^2 - \omega^2} (j_m(\mathbf{k}, \omega) e_m^*) e_i^\lambda. \quad (12)$$

Приращение энергии поля рассеянных волн в единицу времени определяется выражением

$$I = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int d\mathbf{r} j^*(\mathbf{r}, t) E(\mathbf{r}, t). \quad (13)$$

Представляя $j(\mathbf{r}, t)$ и $E(\mathbf{r}, t)$ в виде интегралов Фурье и производя статистическое усреднение, найдем:

$$\langle I \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \operatorname{Im} \int d\mathbf{k} d\omega \frac{\omega}{\epsilon_{ij} e_i^* e_j^\lambda} \frac{\langle |je^{\lambda*}|^2 \rangle_{k\omega}}{k^2 c^2 / \eta_\lambda^2 - \omega^2}, \quad (14)$$

* Отметим, что в [2] в выражении для тока опущено слагаемое, связанное с флюктуациями скорости электронов. Это слагаемое определяет рассеяние электромагнитных волн на альфеновских флюктуациях в плазме.

где V —полный объем. Так как в (14) подынтегральное выражение существенно, то при интегрировании по модулю вектора \mathbf{k} вклад дают только полюса подынтегрального выражения. В результате для интенсивности рассеяния волн определенного типа λ получим следующую формулу:

$$dI^\lambda = \frac{V\eta_\lambda^3}{16\pi^2 c^3} \frac{\omega^2}{\epsilon_{ij} e_i^{\lambda*} e_j^\lambda} \langle |je^{\lambda*}|^2 \rangle_{k\omega} d\omega dO \quad (\lambda = 1, 2). \quad (15)$$

В (15) вектор \mathbf{k} и ω связаны соотношением $k^2 = \eta_\lambda^2 \omega^2 / c^2$ и поэтому \mathbf{k} и ω можно рассматривать как волновой вектор и частоту рассеянной волны.

Плотность потока энергии падающей волны S_0 определяется проекцией вектора Пойнтинга на вектор \mathbf{k}_0 :

$$S_0 = \frac{c}{8\pi} \eta_0 E_0^2 \left(|\mathbf{e}_0|^2 - \frac{|\mathbf{e}_0 \mathbf{k}_0|^2}{k_0^2} \right), \quad (16)$$

$$\mathbf{e}_0 = \left(1; i \frac{\epsilon_2^0}{\eta_0^2 - \epsilon_1^0}; \frac{\eta_0^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0}{\eta_0^2 \sin^2 \vartheta_0 - \epsilon_3^0} \right)$$

(ϑ_0 —угол между \mathbf{k}_0 и \mathbf{H}_0). Разделив интенсивность рассеяния (15) на плотность потока (16) и величину рассеивающего объема V , мы найдем дифференциальное сечение рассеяния (коэффициент рассеяния). Используя (9), для дифференциального сечения рассеяния электромагнитных волн в плазме при наличии магнитного поля получим следующую формулу:

$$d\Sigma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_0 \omega}{\Omega^2} \right)^2 R \left\{ |\xi|^2 \langle \delta n^2 \rangle_{q\Delta\omega} + \frac{n_0}{4\pi mc^2} \frac{\omega^2}{\Omega^2} A_i A_j^* \langle \delta H_i \delta H_j \rangle_{q\Delta\omega} + \right. \\ + \frac{n_0^2 \omega^2}{c^2 \omega_0^2} B_i B_j^* \langle \delta v_i \delta v_j \rangle_{q\Delta\omega} - 2 \frac{en_0}{mc} \frac{\omega}{\Omega^2} \operatorname{Im} (\xi A_i^* \langle \delta n \delta H_i \rangle_{q\Delta\omega}) + \\ + 2 \frac{n_0}{c} \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{Re} (\xi B_i^* \langle \delta n \delta v_i \rangle_{q\Delta\omega}) + \\ \left. + 2 \frac{en_0^2}{mc^2} \frac{\omega^2}{\omega_0 \Omega^2} \operatorname{Im} (A_i B_j^* \langle \delta H_i \delta v_j \rangle_{q\Delta\omega}) \right\} d\omega dO, \quad (17)$$

где введены следующие обозначения:

$$R = \eta^3 \left[\eta_0 \left(|\mathbf{e}_0|^2 - \frac{|\mathbf{e}_0 \mathbf{k}_0|^2}{k_0^2} \right) \epsilon_{ij} e_i^* e_j \right]^{-1},$$

$$\xi = (\epsilon_{ij}^0 - \delta_{ij}) e_i^* e_j^0,$$

$$A_i = (\epsilon_{kl} - \delta_{kl}) e_k^* \epsilon_{lmi} (\epsilon_{mj}^0 - \delta_{mj}) e_j^0, \quad (18)$$

$$B_i = (\epsilon_{kl} - \delta_{kl}) e_k^* \eta_0 \left(e_i^0 \frac{k_l^0}{k^0} - e_l^0 \frac{k_i^0}{k^0} \right),$$

$$\mathbf{e} = \left(\cos \varphi - i \frac{\epsilon_2}{\eta_1^2 - \epsilon_1} \sin \varphi; \sin \varphi + i \frac{\epsilon_2}{\eta_1^2 - \epsilon_1} \cos \varphi; \frac{\eta_1^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\eta_1^2 \sin^2 \vartheta - \epsilon_3} \right),$$

ϑ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 , φ — угол между плоскостями \mathbf{k}_0 , \mathbf{H}_0 и \mathbf{k} , \mathbf{H}_0 . Для упрощения записи мы опустили в (17) индекс λ .

3. Корреляционные функции флюктуаций плотности электронов, скорости электронов и магнитного поля, входящие в коэффициент рассеяния (17), могут быть выражены через корреляторы электронного и полного токов [2]. Используя уравнения Максвелла, можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} e^2 \langle \delta n^2 \rangle_{k\omega} &= \frac{k_i k_j}{\omega^2} \langle j_i^e j_j^e \rangle_{k\omega}, \\ e^2 \langle \delta v_i \delta v_j \rangle_{k\omega} &= \frac{1}{n_0^2} \langle j_i^e j_j^e \rangle_{k\omega}, \\ \langle \delta H_i \delta H_j \rangle_{k\omega} &= \left(\frac{4\pi}{ck} \right)^2 \frac{\eta^4}{(\eta^2 - 1)^2} \frac{k_m k_r}{k^2} \epsilon_{lmn} \epsilon_{jrs} (j_n j_s)_{k\omega}, \\ e^2 \langle \delta n \delta H_i \rangle_{k\omega} &= \frac{k_j}{n_0 \omega} \langle j_i^e j_j^e \rangle_{k\omega}, \\ e \langle \delta n \delta H_i \rangle_{k\omega} &= \frac{4\pi i}{c\omega} \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \frac{k_n k_j}{k^2} \epsilon_{lmn} \langle j_l^e j_m \rangle_{k\omega}, \\ e \langle \delta H_i \delta v_j \rangle_{k\omega} &= \frac{4\pi i}{cn_0 k^2} \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} \epsilon_{iml} k_m \langle j_l j_j^e \rangle_{k\omega}. \end{aligned} \quad (19)$$

Корреляторы электронного и полного токов в плазме непосредственно выражаются через электронную и полную восприимчивости x_{ij}^e и x_{ij} :

$$\begin{aligned} \langle j_i^e j_j^e \rangle_{k\omega} &= i\omega \sum_{a=e, l} T^a (x_{nm}^{a*} - x_{mn}^a) (\delta_{lm} \delta_{ea} - 4\pi x_{ik}^e \Lambda_{km}^{-1}) (\delta_{jn} \delta_{ea} - 4\pi x_{jp}^e \Lambda_{pn}^{-1})^*, \\ \langle j_i^e j_j \rangle_{k\omega} &= i\omega \sum_{a=e, l} T^a (x_{nm}^{a*} - x_{mn}^a) (\delta_{lm} \delta_{ea} - 4\pi x_{ik}^e \Lambda_{km}^{-1}) (\delta_{jn} - 4\pi x_{jp} \Lambda_{pn}^{-1})^*, \\ \langle j_i j_j \rangle_{k\omega} &= i\omega (\delta_{lm} - 4\pi x_{ik} \Lambda_{km}^{-1}) (\delta_{jn} - 4\pi x_{jp} \Lambda_{pn}^{-1})^* \times \\ &\quad \times \sum_{a=e, l} T^a (x_{nm}^{a*} - x_{mn}^a), \end{aligned} \quad (20)$$

где T^e и T^l — температуры электронов и ионов (плазма предполагается неизотермической) и Λ_{ij}^{-1} — тензор, обратный тензору

$$\Lambda_{ij} = \eta^2 \left(\frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \varepsilon_{ij}. \quad (21)$$

Корреляционные функции (20) имеют резкие максимумы вблизи значений ω и \mathbf{k} , удовлетворяющих дисперсионному уравнению для собственных колебаний в плазме $\Lambda(\mathbf{k}, \omega_s(\mathbf{k})) = 0$ (индекс s нумерует собственные колебания). Пренебрегая затуханием колебаний, корреляционные функции вблизи этих максимумов можно представить в виде

$$\langle j_i^a j_j^b \rangle_{k\omega} = \sum_s B_{ij}^{ab} (\mathbf{k}, \omega) \delta(\omega - \omega_s(\mathbf{k})),$$

$$B_{ij}^{ab}(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi^2 \omega \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{x_{im}^a x_{jn}^{b*} \Phi_{mn}}{\text{Im } \Lambda}, \quad (22)$$

$$\Phi_{ij} = 4\pi i \lambda_{lm} \lambda_{jn} \sum_{a=e, l} T^a (x_{nm}^{a*} - x_{mn}^a),$$

где $\lambda_{ij} \Lambda_{jk} = \Lambda \delta_{ik}$. Индексы a и b указывают на электронную или ионную часть тока или полную составляющую тока.

Отметим, что при рассмотрении флюктуаций в плазме использовать выражение (3) для ε_{ik} нельзя, так как пространственная дисперсия играет существенную роль. Приведем выражения для компоненты тензора диэлектрической восприимчивости плазмы x_{ik} с учетом пространственной дисперсии [7]:

$$x_{11} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2} \frac{z_0^{\alpha}}{\beta_{\alpha}} e^{-\beta_{\alpha}} \sum_n \frac{n^2}{z_n^{\alpha}} I_n(\beta_{\alpha}) \left[\varphi(z_n^{\alpha}) - i \sqrt{\pi} z_n^{\alpha} e^{-z_n^{\alpha 2}} \right],$$

$$x_{12} = -\frac{i}{4\pi} \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2} z_0^{\alpha} e^{-\beta_{\alpha}} \sum_n \frac{n}{z_n^{\alpha}} [I'_n(\beta_{\alpha}) - I_n(\beta_{\alpha})] \left[\varphi(z_n^{\alpha}) - i \sqrt{\pi} z_n^{\alpha} e^{-z_n^{\alpha 2}} \right],$$

$$x_{13} = -\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2} \frac{z_0^{\alpha}}{\sqrt{\beta_{\alpha}}} e^{-\beta_{\alpha}} \sum_n n I_n(\beta_{\alpha}) \left[\varphi(z_n^{\alpha}) - 1 - i \sqrt{\pi} z_n^{\alpha} e^{-z_n^{\alpha 2}} \right],$$

$$x_{22} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2} z_0^{\alpha} e^{-\beta_{\alpha}} \sum_n \frac{1}{z_n^{\alpha}} \left[\left(2\beta_{\alpha} + \frac{n^2}{\beta_{\alpha}} \right) I_n(\beta_{\alpha}) - 2\beta_{\alpha} I'_n(\beta_{\alpha}) \right] \times \\ \times \left[\varphi(z_n^{\alpha}) - i \sqrt{\pi} z_n^{\alpha} e^{-z_n^{\alpha 2}} \right], \quad (23)$$

$$x_{23} = \frac{i}{4\pi} \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2} z_0^{\alpha} \sqrt{2\beta_{\alpha}} e^{-\beta_{\alpha}} \sum_n [I'_n(\beta_{\alpha}) - I_n(\beta_{\alpha})] \left[\varphi(z_n^{\alpha}) - 1 - i \sqrt{\pi} z_n^{\alpha} e^{-z_n^{\alpha 2}} \right],$$

$$x_{33} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2} z_0^{\alpha} e^{-\beta_{\alpha}} \sum_n z_n^{\alpha} I_n(\beta_{\alpha}) \left[\varphi(z_n^{\alpha}) - 1 - i \sqrt{\pi} z_n^{\alpha} e^{-z_n^{\alpha 2}} \right],$$

$$x_{21} = -x_{12}, \quad x_{31} = x_{13}, \quad x_{32} = -x_{23},$$

где

$$\Omega_{\alpha} = \frac{4\pi n_0 e^2}{m_{\alpha}}, \quad \omega_H^{\alpha} = \frac{e_{\alpha} H_0}{m_{\alpha} c}, \quad s_{\alpha}^2 = \frac{3T_{\alpha}}{m_{\alpha}}, \quad \sqrt{\beta_{\alpha}} = \frac{k_{\perp} s_{\alpha}}{\sqrt{3} \omega_H^{\alpha}},$$

$$z_n^{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega - n\omega_H^{\alpha}}{|k_z| s_{\alpha}},$$

$$e_e = -e_i = e, \quad \varphi(z) = 2ze^{-z^2} \int_0^{z^2} e^{x^2} dx.$$

Электронная часть восприимчивости определяется электронным слагаемым в (23).

4. Основной вклад в сечение (17) дает первое слагаемое в фигурных скобках, описывающее рассеяние волн на флюктуациях плотности электронов. Пренебрегая рассеянием на флюктуациях скорости электронов и магнитного поля, сечение рассеяния можно записать в виде

$$d\Sigma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_0 \omega}{\Omega^2} \right)^2 \frac{\eta^3 |\epsilon_{ij}^0 e_i^* e_j^0 - e_i^* e_i^0|^2}{\eta_0 (|e_0|^2 - |e_0 k_0|^2 k_0^{-2}) \epsilon_{ij} e_i^* e_j} \langle \delta n^2 \rangle_{q_{\Delta\omega}} d\omega dO, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \delta n^2 \rangle_{q_{\Delta\omega}} &= \frac{i}{e^2 \Delta\omega} \{ T^e (\chi_{nm}^{e*} - \chi_{mn}^e) (q_m - 4\pi q_i \chi_{ik}^e \Lambda_{km}^{-1}) \times \\ &\times (q_n - 4\pi q_j \chi_{jp}^e \Lambda_{pn}^{-1})^* + 16\pi^2 T^i (\chi_{nm}^{i*} - \chi_{mn}^i) q_i \chi_{ik}^e \Lambda_{km}^{-1} q_j \chi_{jp}^{e*} \Lambda_{pn}^{-1*} \}. \end{aligned} \quad (25)$$

В частном случае распространения падающей волны вдоль магнитного поля сечение определяется выражением

$$d\Sigma^{\pm} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_0 \omega}{\Omega^2} \right)^2 \frac{\eta^3}{\eta_0} (1 - \epsilon_1^0 \pm \epsilon_2^0)^2 S^{\pm}(\omega, \vartheta) \langle \delta n^2 \rangle_{q_{\Delta\omega}} d\omega dO, \quad (26)$$

$$S^{\pm}(\omega, \vartheta) = \left(1 \pm \frac{\epsilon_2}{\eta^2 - \epsilon_1} \right)^2 \left[\epsilon_1 \frac{\epsilon_2^2}{(\eta^2 - \epsilon_1)^2} + \epsilon_1 + \epsilon_3 \frac{\eta^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\eta^2 \sin^2 \vartheta - \epsilon_1^2)^2} + \frac{2\epsilon_2^2}{\eta^2 - \epsilon_1} \right],$$

где знаки + и — относятся соответственно к правой и левой поляризациям падающей волны.

Если $q^2 c^2 / \Delta\omega^2 \gg 1$, то корреляционная функция флюктуаций плотности электронов и при наличии магнитного поля определяется таким же выражением, как для свободной плазмы:

$$\langle \delta n^2 \rangle_{q_{\Delta\omega}} = \frac{2q^2}{e^2 \Delta\omega |\epsilon|^2} \{ T^e |1 + 4\pi \chi^i|^2 \operatorname{Im} \chi^e + T^i |4\pi \chi^e|^2 \operatorname{Im} \chi^i \}. \quad (27)$$

При этом под χ и ϵ следует понимать продольные составляющие соответствующих тензоров, т. е. $\chi = \frac{q_i q_j}{q^2} \chi_{ij}$ и $\epsilon = \frac{q_i q_j}{q^2} \epsilon_{ij}$.

Корреляционная функция (27) обладает дельтаобразным максимумом при частотах, соответствующих ленгмюровским колебаниям плазмы в магнитном поле:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} (\Omega^2 + \omega_H^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Omega^2 + \omega_H^2)^2 - 4\Omega^2 \omega_H^2 \cos^2 \tilde{\vartheta}}, \quad (28)$$

где $\tilde{\vartheta}$ — угол между q и H_0 , связанный с углами ϑ_0 , ϑ и φ соотношением

$$\operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta} = \frac{k^2 \sin^2 \vartheta + k_0^2 \sin^2 \vartheta_0 - 2kk_0 \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi}{(k \cos \vartheta - k_0 \cos \vartheta_0)^2}. \quad (29)$$

Сечение рассеяния при смещениях частот $\Delta\omega$, близких к частотам ленгмюровских колебаний ω_{\pm} , имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} d\Sigma &= \frac{1}{2} n_0 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 a^2 q^2 R |\xi|^2 \left(\frac{\omega_0 \omega \Delta\omega}{\Omega^3} \right)^2 \frac{(\Delta\omega^2 - \omega_H^2)^2}{\Delta\omega^4 \sin^2 \tilde{\vartheta} + (\Delta\omega^2 - \omega_H^2)^2 \cos^2 \tilde{\vartheta}} \times \\ &\times \{ \delta(\Delta\omega - \omega_+) + \delta(\Delta\omega + \omega_+) + \delta(\Delta\omega - \omega_-) + \delta(\Delta\omega + \omega_-) \} d\omega dO. \end{aligned} \quad (30)$$

В случае изотермической плазмы ($T^e = T^i$) и $\omega_0 \gg \omega_+$ можно найти интегральный коэффициент рассеяния (в данный интервал углов), воспользовавшись дисперсионным соотношением для (27):

$$d\Sigma = \frac{1}{2} n_0 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right)^4 (R | \xi |^2)_{\omega=\omega_0} \frac{1 + a^2 q^2}{2 + a^2 q^2} dO, \quad a^2 = \frac{T}{4\pi n_0 e^2}. \quad (31)$$

Отметим, что относительный вклад комбинационного рассеяния (30) в интегральный коэффициент составляет величину порядка $a^2 q^2 \ll 1$.

Члены, отброшенные в (17), дают относительный вклад в интегральный коэффициент рассеяния порядка s_e^2/c^2 . Тем не менее, в дифференциальном коэффициенте рассеяния пренебрегать членами, связанными с рассеянием на флюктуациях скорости электронов и магнитного поля, нельзя, так как в узких областях частот, отвечающих альфвеновским и магнитозвуковым колебаниям, эти процессы могут оказаться существенными.

5. Рассмотрим подробнее рассеяние электромагнитных волн на альфвеновских и магнитозвуковых флюктуациях. Частоты альфвеновских и магнитозвуковых колебаний лежат в низкочастотной области спектра плазмы (область частот, меньших ионной циклотронной частоты $\omega_{Hi} = eH_0/Mc$). Поэтому для нахождения корреляционных функций, определяющих сечение рассеяния на альфвеновских и магнитозвуковых колебаниях, можно воспользоваться следующими выражениями для диэлектрической восприимчивости плазмы, справедливыми при $\Delta\omega \ll \omega_{Hi}$ и $qv_i \ll \omega_{Hi}$ [8]:

$$\begin{aligned} \chi_{11}^e &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{c^2}{v_A^2}, \\ \chi_{12}^e &= -\frac{i}{4\pi} \frac{c^2}{v_A^2} \frac{\omega_{Hi}}{\Delta\omega}, \\ \chi_{22}^e &= \frac{\mu}{4\pi} \frac{c^2}{v_A^2} - \frac{t}{6\pi} \frac{c^2}{v_A^2} \frac{q^2 s_i^2}{\Delta\omega^2} \sin^2 \tilde{\vartheta} (\varphi_e - i\alpha_e), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\chi_{23}^e = \frac{i}{4\pi} \frac{c^2}{v_A^2} \frac{\omega_{Hi}}{\Delta\omega} \operatorname{tg} \tilde{\vartheta} (\varphi_e - 1 - i\alpha_e),$$

$$\chi_{33}^e = -\frac{3}{4\pi t} \frac{c^2}{v_A^2} \frac{\omega_{Hi}^2}{q^2 s_i^2} \frac{1}{\cos^2 \tilde{\vartheta}} (\varphi_e - 1 - i\alpha_e),$$

$$\chi_{12}^e = -\chi_{21}^e, \quad \chi_{13}^e = \chi_{31}^e = 0, \quad \chi_{23}^e = -\chi_{32}^e;$$

$$\chi_{11} = \frac{1}{4\pi} \frac{c^2}{v_A^2},$$

$$\chi_{12} = \frac{i}{4\pi} \frac{c^2}{v_A^2} \left[\frac{\Delta\omega}{\omega_{Hi}} + \frac{q^2 s_i^2}{\Delta\omega \omega_{Hi}} \left(\frac{1}{3} \cos^2 \tilde{\vartheta} - \frac{1}{2} \sin^2 \tilde{\vartheta} \right) \right],$$

$$\chi_{22} = \frac{1}{4\pi} \frac{c^2}{v_A^2} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{q^2 s_i^2}{\Delta\omega^2} \sin^2 \tilde{\vartheta} (\varphi_i + t\varphi_e - i\alpha_i - it\alpha_e) \right], \quad (33)$$

$$\chi_{23} = -\frac{i}{4\pi} \frac{c^2}{v_A^2} \frac{\omega_{Hi}}{\Delta\omega} \operatorname{tg} \tilde{\vartheta} (\varphi_i - \varphi_e - i\alpha_i + i\alpha_e),$$

$$x_{33} = -\frac{3}{4\pi} \frac{c^2}{v_A^2} \frac{\omega_{Hi}^2}{q^2 s_i^2} \frac{1}{\cos^2 \tilde{\theta}} \left(\varphi_i - 1 + \frac{\varphi_e - 1}{t} - i\sigma_i - i \frac{\alpha_e}{t} \right),$$

$$x_{12} = -x_{21}, \quad x_{13} = x_{31} = 0, \quad x_{23} = -x_{32}, \quad \varphi_a \equiv \varphi(z_0^a), \quad \alpha_e = \sqrt{\pi} z_e e^{-z_e^2},$$

где $v_A^2 = H_0^2/4\pi n_0 M$ — альфвеновская скорость и $z_e \equiv z_0^e = \sqrt{3/2} \Delta\omega/q s_e \cos \tilde{\theta}$, $t = T^e/T^i$, $\mu = m/M$.

В случае альфвеновского рассеяния смещение частоты рассеянной волны равно $\Delta\omega = \pm q v_A \cos \tilde{\theta}$; при этом главный вклад в сечение дает третье слагаемое в (17), связанное с рассеянием волн на флюктуациях скорости. Отметим, что первое слагаемое в (17) не дает вклада в рассеяние на альфвеновских флюктуациях, так как альфвеновские колебания в плазме не сопровождаются изменением плотности. Используя (19), сечение рассеяния в этом случае можно выразить через коррелятор электронного тока:

$$d\Sigma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{\Omega^4} \frac{R}{e^2 c^2} B_i B_j^* \langle j_i^e j_j^e \rangle_{q\Delta\omega}. \quad (34)$$

Подставляя (32) и (33) в (20) и учитывая, что $\Delta\omega \ll \omega_{Hi}$, спектральное распределение корреляционной функции электронного тока вблизи альфвеновской частоты можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle j_i^e j_j^e \rangle_{q\Delta\omega} &= \frac{\pi}{9} n_0 e^2 v_A^2 \frac{s_i^4}{c^4} \times \\ &\times \frac{\alpha_e [(t\Phi_1 - \Phi_2)^2 + \Phi_2^2] + \alpha_i [(\Phi_1 + \Phi_2)^2 + \Phi_2^2]}{|ad - bc|} \times \\ &\times \Delta\omega \delta(\Delta\omega^2 - q^2 v_A^2 \cos^2 \tilde{\theta}) \delta_{ij} \delta_{lj}, \end{aligned} \quad (35)$$

где ось 2 перпендикулярна плоскости (q, H_0) и

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left(1 - \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \tilde{\theta} + 3 \frac{v_A^2}{s_i^2} \right) \left(\frac{\varphi_e - 1}{t} + \varphi_i - 1 \right) - \operatorname{tg}^2 \tilde{\theta} (\varphi_e - \varphi_i), \\ \Phi_2 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \tilde{\theta} + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{s_i^2} \right) (\varphi_e - \varphi_i) - \operatorname{tg}^2 \tilde{\theta} \left(t\varphi_e + \varphi_i + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{s_i^2} \right), \\ a &= \left(t\varphi_e + \varphi_i + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{s_i^2} \right) \left(\frac{\varphi_e - 1}{t} + \varphi_i - 1 \right) - \frac{1}{2} (\varphi_e - \varphi_i)^2, \\ b &= (t\alpha_e + \alpha_i) \left(\frac{\varphi_e - 1}{t} + \varphi_i - 1 \right) + \left(\frac{\alpha_e}{t} + \alpha_i \right) \left(t\varphi_e + \varphi_i + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{s_i^2} \right) - \\ &\quad - (\alpha_e - \alpha_i) (\varphi_e - \varphi_i), \\ c &= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \tilde{\theta} + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{s_i^2} \right)^2 \left(\frac{\varphi_e - 1}{t} + \varphi_i - 1 \right) - \\ &\quad - \operatorname{tg}^2 \tilde{\theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \tilde{\theta} + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{s_i^2} \right) (\varphi_e - \varphi_i) + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \tilde{\theta} \left(t\varphi_e + \varphi_i + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{s_i^2} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

$$d = \left(\frac{\alpha_e}{t} + \alpha_i \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta} + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{s_i^2} \right)^2 - \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta} (\alpha_e - \alpha_i) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta} + \frac{3}{2} \frac{v_A^2}{s_i^2} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \tilde{\vartheta} (t\alpha_e + \alpha_i).$$

Формулы (35) и (36) и определяют сечение рассеяния волн на альфвеновских флюктуациях.

Выражение для сечения (35) существенным образом упрощается, если сделать некоторые предположения относительно величины магнитного поля. Так, в предельных случаях $v_A \ll s_i$, $s_i \ll v_A \ll s_e$ и $s_e \ll v_A$ сечение рассеяния определяется формулой

$$d\Sigma = \frac{1}{2} n_0 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega_0^4}{\Omega^4} \frac{T^e}{Mc^2} \zeta(q) R \left| B \left[\frac{q}{q}, \frac{H_0}{H_0} \right] \right|^2 \times \\ \times [\delta(\Delta\omega - v_A q \cos \tilde{\vartheta}) + \delta(\Delta\omega + v_A q \cos \tilde{\vartheta})] d\omega dO, \quad (37)$$

где множитель $\zeta(q)$ в зависимости от величины магнитного поля равен

$$\zeta(q) = \begin{cases} \frac{1 + (s_i/s_e)t^2}{t + (s_i/s_e)t^2} & (v_A \ll s_i, t v_A^2/s_i^2 \ll 1); \\ (1 + \operatorname{tg}^4 \tilde{\vartheta}) \left| \operatorname{tg}^4 \tilde{\vartheta} - \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{3} \frac{s_i^2}{v_A^2} \right) \left[1 - \frac{s_i^2}{v_A^2} \left(1 + \frac{2}{3} t \right) \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta} \right] \right|^{-1} & (s_i \ll v_A \ll s_e, t s_i^2/v_A^2 \ll 1); \\ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9} \frac{s_e^4}{v_A^4} + \left(\frac{1}{3} \frac{s_e^2}{v_A^2} - \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta} \right)^2 \right] \left| \operatorname{tg}^4 \tilde{\vartheta} + \frac{2}{3} \frac{s_e^2}{v_A^2} \left(1 + \frac{1}{t} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{1}{2} \frac{s_i^2}{v_A^2} \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta} \right)^2 \right|^{-1} & (s_e \ll v_A, t s_e^2/v_A^2 \ll 1). \end{cases} \quad (38)$$

Нетрудно проверить, что суммарный вклад рассеяния на альфвеновских флюктуациях составляет величину порядка ms_e^2/Mc^2 по сравнению с (31).

В случае рассеяния электромагнитных волн на магнитозвуковых колебаниях главную роль играют флюктуации плотности электронов. Поэтому сечение рассеяния будет определяться формулой (24). Коррелятор плотности электронов связан с коррелятором электронного тока соотношением (25). Используя (35) и (36) и учитывая, что $\Delta\omega \ll \omega_{Hi}$, для спектрального распределения корреляционной функции флюктуаций плотности вблизи частот магнитозвуковых колебаний ($\Delta\omega = \pm qv_A$) получим выражение

$$\langle \delta n^2 \rangle_{q\Delta\omega} = 8\pi n_0 \frac{T^e}{Mv_A^2} \left(1 + t + \frac{1}{2} t^2 \right) \sin^2 \tilde{\vartheta} \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta} \Delta\omega \delta(\Delta\omega^2 - v_A^2 q^2) \\ (s_i \ll v_A \ll s_e, t \ll v_A^2/s_i^2). \quad (39)$$

Таким образом, для сечения рассеяния электромагнитных волн на магнитозвуковых флюктуациях получим формулу:

$$d\Sigma = 2n_0 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_0 \omega}{\Omega^2} \right)^2 \frac{T^i}{Mv_A^2} \left(1 + t + \frac{t^2}{2} \right) R |\xi|^2 \sin^2 \tilde{\vartheta} \operatorname{tg}^2 \tilde{\vartheta} \times \\ \times [\delta(\Delta\omega - v_A q) + \delta(\Delta\omega + v_A q)] d\omega dO. \quad (40)$$

Формула (40) справедлива при условии $\cos^2 \tilde{\vartheta} \gg v_A^2/s_e^2$.

Интегрируя (40) по смещениям частот и сравнивая с (31), легко видеть, что отношение сечения рассеяния на магнитозвуковых флюктуациях к (31)—порядка $s_i^2 v_A^{-2} (1 + t + t^2/2)$. В неизотермическом случае это отношение может быть больше единицы.

В сильно неизотермической плазме ($t \gg 1$) возможны также магнитозвуковые колебания с частотами $\Delta\omega = \pm v_s q \cos \tilde{\vartheta}$. Сечение рассеяния электромагнитных волн на флюктуациях, связанных с этими неизотермическими магнитозвуковыми колебаниями, определяется выражением

$$d\Sigma = \frac{1}{2} n_0 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_0 \omega}{\Omega^2} \right)^2 R |\xi|^2 [\delta(\Delta\omega - v_s q \cos \tilde{\vartheta}) + \\ + \delta(\Delta\omega + v_s q \cos \tilde{\vartheta})] d\omega dO, \quad (41)$$

$$v_s^2 = T^e/M, \quad t \ll v_A^2/s_i^2.$$

Отношение сечения (41), проинтегрированного по частотам, к (31)—порядка единицы.

Таким образом, в сильно неизотермической плазме основная линия в спектре рассеянного излучения расщепляется на четыре линии, связанные с рассеянием волн на магнитозвуковых флюктуациях.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Ахиезер, И. Прохода, А. Ситенко, ЖЭТФ, 33, 750 (1957).
- 2 А. Ахиезер, И. Ахиезер, А. Ситенко, ЖЭТФ, 41, 644 (1961).
- 3 J. Dougherty, D. Farley, Proc. Roy. Soc., A259, 79 (1960).
- 4 D. Farley, J. Dougherty, D. Barron, Proc. Roy. Soc., A263, 238 (1961).
- 5 E. Salpeter, Phys. Rev., 120, 1528 (1960).
- 6 E. Salpeter, Phys. Rev., 122, 1663 (1961).
- 7 А. Ситенко, К. Степанов, ЖЭТФ, 31, 642 (1956).
- 8 С. Брагинский, А. Казанцев, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, ИЛ, 4, М., 1958, стр. 24.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
7 июля 1962 г.

ON THE SCATTERING OF THE ELECTROMAGNETIC WAVES BY FLUCTUATING PLASMA IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

A. G. Sitenko, Yu. A. Kirochkin

The scattering of electromagnetic waves by the thermal fluctuations in nonisothermal magnetized plasma is considered. Density fluctuations as well as velocity of electrons and magnetic field fluctuations are taken into account. The spectral distribution of the scattered radiation is found. The scattering by the low-frequency oscillations in plasma is considered.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛЮКТУАЦИОННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЛАЗМЕ. II

B. F. Алексин, K. N. Степанов

Найдены корреляционные функции для фурье-компонент (по времени) для флюктуационных электрического и магнитного полей в магнитоактивной плазме в области плазменного резонанса, электронного и ионного гирорезонансов.

В работе [1] были получены общие выражения для пространственных корреляционных функций (к. ф.) для флюктуационных электрического и магнитного полей в магнитоактивной плазме. Эти выражения были использованы для вычисления к. ф. на больших расстояниях (в волновой зоне) в области прозрачности плазмы. Выражения для к. ф. в волновой зоне, полученные в [1], неприменимы вблизи плазменного резонанса ($\omega \approx \omega_{\pm}$) и вблизи электронного и ионного циклотронных резонансов ($\omega \approx |\omega_{He}|, \omega_{Hl}$).

В настоящей работе найдены к. ф. в области указанных резонансов.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ К. Ф. ВБЛИЗИ ПЛАЗМЕННОГО РЕЗОНАНСА

Как известно, показатель преломления плазмы n становится очень большим в области частот $\omega \approx \omega_{\pm}$, где

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Omega^2 + \omega_H^2 \pm \sqrt{(\Omega^2 + \omega_H^2)^2 - 4\Omega^2\omega_H^2 \cos^2 \Theta} \right]^{1/2} \quad (1)$$

—собственные частоты продольных колебаний плазмы в магнитном поле, Ω —электронная ленгмюровская частота, $\omega_H = -\omega_{He} > 0$ — гирочастота для электронов, Θ —угол между волновым вектором \mathbf{k} и внешним магнитным полем \mathbf{H}_0 . В этом случае при исследовании распространения электромагнитных волн (в частности, при исследовании корреляции флюктуационных полей) необходим последовательный учет теплового движения электронов плазмы [2].

К. ф. для флюктуационных электрических полей на больших расстояниях $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ вблизи частот ω_{\pm} можно получить, используя общие выражения (11) работы [1]:

$$\overline{E_i(\mathbf{r}_1, \omega) E_k(\mathbf{r}_2, \omega')} = \frac{T \omega \delta(\omega + \omega')}{\pi c^2 r} \sum_j \frac{|1 - u| a_{ik} \cos \Psi}{uvn_{\perp} \sin \chi \sqrt{|g|}} e^{-xr}, \quad (2)$$

где

$$a_{ik} = a_1 \delta_{ik} + a_2 \frac{x_i x_k}{r_{\perp}^2} + a_3 h_i h_k - i a_4 \varepsilon_{ikl} h_l + a_5 \frac{[\mathbf{r} \mathbf{h}]_i [\mathbf{r} \mathbf{h}]_k}{r_{\perp}^2} +$$

$$+ a_6 \frac{x_i h_k + x_k h_i}{r_{\perp}} - i a_7 \frac{h_i [rh]_k - h_k [rh]_i}{r_{\perp}} - \quad (3)$$

$$- i a_8 \frac{x_i [rh]_k - x_k [rh]_i}{r_{\perp}^2} - i a_9 \epsilon_{ikl} \frac{x_l}{r_{\perp}};$$

$$g = \frac{1-u-2v}{1-u} + \frac{3\beta^2 n_{\perp}^4 \zeta}{(1-u)(1-v) \cos^4 \chi_0};$$

$$\zeta = v \left[3 \sin^4 \chi (1-u) + \frac{6-3u+u^2}{(1-u)^2} \sin^2 \chi \cos^2 \chi + \frac{3 \cos^4 \chi}{1-4u} \right]; \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}^2 \chi_0 = \frac{u+v-1}{(1-u)(1-v)}.$$

Здесь χ — угол между векторами $r = r_1 - r_2$ и H_0 ,

$$r_{\perp} = r \sin \chi, \quad h = H_0 / H_0, \quad v = (\Omega/\omega)^2, \quad u = (\omega_H/\omega)^2, \quad \beta^2 = T/mc^2,$$

$$a_2 = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 (2\chi) a_3 = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} (2\chi) a_6 = \frac{n_{\perp}^4}{\cos^2 \chi},$$

$$a_1 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = a_9 = 0,$$

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{rn_{\perp}\omega}{c \cos \chi} \left[\frac{1}{2} \delta \sin \chi \cos \chi - (\chi - \chi_0) \right] + \frac{\pi}{4} (1 - \operatorname{sgn} g), \\ \delta &= \frac{1}{n_{\perp}^2 \operatorname{tg}^2 \chi} \left[\frac{1-u-2v}{1-u} + \frac{\beta^2 n_{\perp}^4 \zeta}{(1-u)(1-v) \cos^4 \chi} \right]. \end{aligned} \quad (3a)$$

Величина $n_{\perp} = n_{\perp j}$ определяется соотношением [3]

$$n_{\perp j}^2 = \sqrt{\frac{\cos^4 \chi (2v+u-1) |1-v|}{3\beta^2 |\zeta|}} \varphi_j(x), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= (x \pm \sqrt{x^2 + \Delta}) \operatorname{sgn} \zeta \quad (j=1, 2), \\ \Delta &= \operatorname{sgn} [\zeta (1-v)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$x = (\chi - \chi_0) \sqrt{\frac{(1-u)^2 |1-v| \cos^2 \chi \sin^2 \chi}{3\beta^2 |\zeta| (2v+u-1)}}.$$

Выражения (2)–(5) получены в предположении, что $n_{\perp j} \gg 1$ и $n_{\parallel} = n_{\perp} \operatorname{tg} \chi_0 \gg 1$ и кроме того имеют место неравенства

$$\mu = \left(\frac{\omega \beta n_{\perp}}{\omega_H} \right)^2 \ll 1, \quad |z_s| = \frac{|\omega - s\omega_H|}{\sqrt{2 \beta n_{\parallel} \omega}} \gg 1 \quad (s=0, 1, 2). \quad (7)$$

Эти условия выполняются, если угол χ близок к углу $\chi_0 = \chi_0(\omega)$. Последнее означает, что частота ω близка к частоте ω_{\pm} , определяемой формулой (1), в которой можно положить $\cos^2 \Theta = \sin^2 \chi$. Кроме того, необходимо, чтобы частота ω_{\pm} не была близка к $2\omega_H$ и значения ω_{\pm}

не были близки к ω_H (отметим, что ω_+ или ω_- может оказаться близким к ω только в исключительном случае $\chi \approx 0$).

Коэффициент затухания

$$\kappa = \frac{\omega \cos^2 \chi |1-u| D''}{2c uv \sin \chi n_{\perp}^3}, \quad (8)$$

где

$$D'' = D'_{\text{cr}} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} D'_s,$$

$$D'_{\text{cr}} = \frac{v n_{\perp}^4}{\omega} \left[\sin^2 \chi + \frac{1+u}{(1-u)^2} \right] (1 + \sin^2 \chi),$$

$$D'_s = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v (\beta n_{\perp})^{2|s|-3} n_{\perp}^4 (1 + \sin^2 \chi)}{2^{|s|} |s|! u^{|s|} |\operatorname{tg} \chi|} e^{-z_s}.$$

Слагаемое D'_{cr} обусловлено наличием „близких“ столкновений (v —эффективная частота столкновений электронов с ионами), D'_0 —черенковским поглощением волн электронами плазмы, D'_s —циклотронным поглощением электронами в условиях нормального эффекта Допплера ($s=1, 2, 3, \dots$) и в условиях аномального эффекта Допплера ($s=-1, -2, -3, \dots$).

Отметим, что, согласно неравенствам (7), величины D'_0 , D'_1 , D'_2 и $D'_{-|s|}$ экспоненциально малы.

Суммирование в (2) проводится для всех вещественных положительных значений $n_{\perp j}$, определяемых формулой (5), когда возможно распространение волн ($\varphi_j > 0$). Графики функций $\varphi_j(x)$ в этом случае приведены на рис. 1 ($\Delta = 1$) и на рис. 2 ($\Delta = -1$); сплошной кривой

показаны функции φ_j при $\zeta > 0$, пунктирной—при $\zeta < 0$. Как видно из рис. 1, при $\Delta = 1$ возможно распространение только одной волны (обыкновенной волны при $\omega \approx \omega_-$ и необыкновенной волны при $\omega \approx \omega_+$). Если же $\Delta = -1$, то возможно распространение двух волн: обычной ($\omega \approx \omega_-$) или необыкновенной ($\omega \approx \omega_+$) и плазменной. (Плазменной волной называем ту ветвь, для которой показатель преломления n_{\perp} увеличивается при увеличении $|x|$.)

Отметим, что выражения (5) для $n_{\perp j}^2$ неприменимы в области

больших значений $|x|$ для ветвей, где $|\varphi_j| \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. Область применимости (5) ограничена условиями (7), которые не выполняются для таких ветвей, если $|\chi - \chi_0| \geq 1$. В этом случае $x c / \omega \sim n_{\parallel} \sim n_{\perp} \sim 1/\beta$, и распространение соответствующей волны становится невозможным. Корреляция полей, обусловленная распространением этих волн, на больших расстояниях будет экспоненциально мала.

К. ф. для флюктуационных магнитных полей $\overline{H_i(r_1, \omega) H_k(r_2, \omega')}$

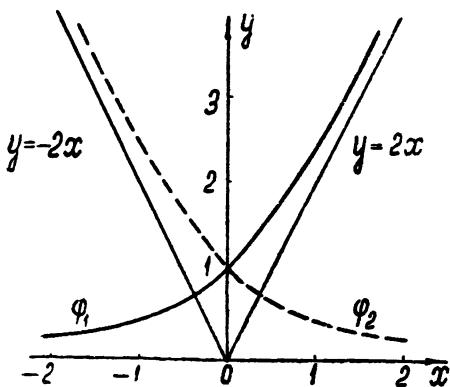


Рис. 1.

также определяется формулами (2) и (3), в которых необходимо сделать замену $a_{ik} \rightarrow b_{ik}$, $a_i \rightarrow b_i$. Величины b_i равны:

$$b_1 = -\frac{b_2}{\cos^2 \chi} = -\frac{\sin^2 \chi}{\cos^2(2\chi)} b_3 = -\frac{b_4}{\sqrt{u} \cos(2\chi)} =$$

$$= \frac{v-1}{u \cos^2 \chi} b_5 = \frac{\operatorname{tg} \chi}{\cos(2\chi)} b_6 = -\frac{b_9}{\sqrt{u} \sin \chi \cos \chi} = \frac{n_\perp^2 v (1-v)}{(1-u) \cos^2 \chi};$$

$$b_7 = b_8 = 0.$$

Если не учитывать теплового движения электронов, то при $\chi \rightarrow \chi_0$ n_\perp^2 стремится к бесконечности, как $|\chi - \chi_0|^{-1}$. В этом случае к. ф. для электрических полей стремится к бесконечности как $|\chi - \chi_0|^{-3/2}$, а к. ф. для магнитных полей увеличиваются как $|\chi - \chi_0|^{-1/2}$. При учете теплового движения n_\perp остается конечным при $\chi = \chi_0$ ($\omega = \omega_\pm$). В этом случае $n_\perp \propto \beta^{-1/2}$, а к. ф. для электрических полей пропорциональны $\beta^{-3/2}$, к. ф. для магнитных полей пропорциональны $\beta^{-1/2}$.

Для участков ветвей $n_{\perp j}$, для которых $n_{\perp j}$ убывает с ростом $|\chi - \chi_0|$, получим при $|x| \gg 1$

$$n_{\perp j}^2 = \frac{2v + u - 1}{2|1-u||\chi - \chi_0|}.$$

К. ф. в этом случае переходят в соответствующие выражения, полученные в [1].

2. КОРРЕЛЯЦИЯ ПОЛЕЙ ВБЛИЗИ ЭЛЕКТРОННОГО ГИРОРЕЗОНАСА

Рассмотрим корреляцию флюктуационных полей для частот, близких к гирочастоте электрона ω_H . Как известно [4–6], в этом случае сильно возрастает циклотронное затухание волн, приводящее к ослаблению корреляции на больших расстояниях. Кроме того, как будет показано ниже, при $\omega \approx \omega_H$ величина корреляции при данном r существенно определяется антиермитовскими частями тензора диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} , обусловленными наличием циклотронного затухания.

К. ф. для электрического поля в волновой зоне имеет при $\omega \approx \omega_H$ следующий вид:

$$\overline{E_i(r_1, \omega) E_k(r_2, \omega')} =$$

$$= \frac{T \omega \delta(\omega + \omega')}{\pi c^2 r} \sum \frac{\sqrt{n_\perp} (\xi a_{ik} \cos \Psi + a'_{ik} \sin \Psi)}{(2 - 2v - n_\perp^2) n_\parallel \sqrt{\sin \chi |\cos \chi d^2 n_\parallel / dn_\perp^2|}} e^{-xr}, \quad (9)$$

где a_{ik} , a'_{ik} определяются выражением (3) (величина a'_{ik} — с заменой в (3) a_i на a'_i):

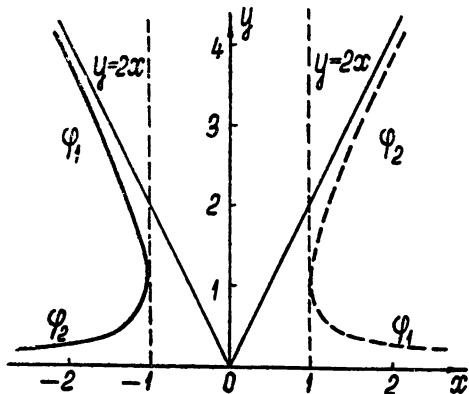


Рис. 2.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 - v - n_{\perp}^2 - pv \operatorname{tg}^2 \Theta, \\
a_2 &= a_5 = pv \operatorname{tg}^2 \Theta, \\
a_3 &= 1 - 2n_{\parallel}^2 + \frac{pv \operatorname{tg}^2 \Theta}{\cos^2 \chi} - 2\alpha n_{\parallel} n_{\perp} \operatorname{ctg} \chi, \\
a_4 &= 1 - v + pv \operatorname{tg}^2 \Theta, \\
a_6 &= -pv \operatorname{tg}^2 \Theta \operatorname{ctg} \chi + \alpha n_{\parallel} n_{\perp}, \\
a_7 &= -\operatorname{ctg} \chi (n_{\perp}^2 + pv \operatorname{tg}^2 \Theta) - \alpha n_{\parallel} n_{\perp}, \\
a_8 &= n_{\perp}^2 + pv \operatorname{tg}^2 \Theta, \\
a_9 &= a'_9 = 0, \\
a'_1 &= -a'_2 = -\cos^2 \chi a'_3 = -a'_4 = -a'_5 = \operatorname{tg} \chi a'_6 = \\
&= \operatorname{tg} \chi a'_7 = -a'_8 = qv \operatorname{tg}^2 \Theta.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \Theta &= n_{\parallel}/n_{\perp}, \\
p(z) &= 1 - 2z \int_0^z e^{t^2 - z^2} dt, \\
q(z) &= \sqrt{-\pi} ze^{-z^2}, \quad z = \frac{\omega - \omega_H}{\sqrt{2} \beta n_{\parallel} \omega}.
\end{aligned}$$

Фаза Ψ и коэффициент затухания κ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{r\omega}{c} (n_{\parallel} \cos \chi + \alpha n_{\perp} \sin \chi) - \frac{\pi}{4} \left(\alpha + \operatorname{sgn} \frac{d^2 n_{\parallel}}{dn_{\perp}^2} \cos \chi \right), \\
\kappa &= \frac{\omega_H \sqrt{2} \beta |Q \cos \chi|}{c \sqrt{\pi} v |n_{\perp}^2 - 2 + 2v|} f(z),
\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
Q &= (1 - v) n_{\parallel}^4 + \left[(1 - v) n_{\perp}^2 + \left(1 - \frac{v}{4} \right) (n_{\perp}^2 - 2 + 2v) \right] n_{\parallel}^2 + \\
&+ (1 - v - n_{\perp}^2) \left(1 - \frac{v}{2} - n_{\perp}^2 + n_{\perp}^2 \frac{v}{2} \right) + v n_{\perp}^2 (n_{\perp}^2 + n_{\parallel}^2 + v - 1) + \\
&+ \frac{1}{4} v^2 \operatorname{tg}^2 \Theta (n_{\perp}^2 + v - 2),
\end{aligned}$$

$$f(z) = e^{z^2} \left[\frac{4}{\pi} \left(\int_0^z e^{t^2} dt \right)^2 + 1 \right]^{-1}. \tag{10a}$$

Отметим, что при получении (10) учитывалось только циклотронное затухание волн. Вклад в коэффициент затухания „близких“ столкновений определяется выражениями, приведенными в [1].

Величина

$$n_{\parallel}^2 (n_{\perp}) = \frac{(n_{\perp}^2 - 1 + v) (n_{\perp}^2 - 2 + v)}{2 - 2v - n_{\perp}^2}, \quad (11)$$

а величина $n_{\perp} = n_{\perp j} (\chi)$ определяется одним из уравнений

$$\frac{dn_{\perp}}{dn_{\perp}} = \mp \operatorname{tg} \chi. \quad (12)$$

Далее, коэффициенты ξ и α задаются выражениями:

$$\xi = \operatorname{sgn} Q (n_{\perp}^2 - 2 + 2v), \quad \alpha = - \operatorname{sgn} \frac{dn_{\perp}}{dn_{\perp}}.$$

Суммирование в (9) проводится по всем вещественным положительным решениям $n_{\perp} = n_{\perp j} (\chi)$ уравнений (12), для которых $n_{\perp}^2 > 0$.

К. ф. для магнитных полей при $\omega \approx \omega_H$ также определяются формулой (9), в которой необходимо сделать замену $a_{ik} \rightarrow b_{ik}$, $a'_{ik} \rightarrow b'_{ik}$, $a_i \rightarrow b_i$, $a'_i \rightarrow b'_i$. Коэффициенты b_i и b'_i имеют вид:

$$\begin{aligned} b_1 &= (n_{\perp}^2 + n_{\parallel}^2) (1 - v - n_{\perp}^2 - pv \operatorname{tg}^2 \Theta), \\ b_2 &= n_{\perp}^2 \left(n_{\perp}^2 + v - 1 + \frac{pv}{\cos^2 \Theta} \right), \\ b_3 &= n_{\parallel}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \Theta \operatorname{ctg}^2 \chi) (n_{\perp}^2 + v - 1) + \frac{pv n_{\perp}^2}{\cos^2 \Theta \sin^2 \chi} - \\ &\quad - 2\alpha n_{\parallel} n_{\perp} (1 - v - n_{\perp}^2) \operatorname{ctg} \chi, \\ b_4 &= - n_{\parallel}^2 (1 - v + pv \operatorname{tg}^2 \Theta) (1 + \alpha \operatorname{tg} \Theta \operatorname{ctg} \chi), \\ b_5 &= n_{\perp}^2 + \frac{pv n_{\perp}^2}{\cos^2 \Theta}, \\ b_6 &= n_{\perp}^2 \left(1 - v - n_{\perp}^2 - \frac{pv}{\cos^2 \Theta} \right) \operatorname{ctg} \chi + \alpha n_{\parallel} n_{\perp} (1 - v - n_{\perp}^2), \\ b_7 &= pvn_{\perp}^2 (\operatorname{ctg} \chi - \alpha \operatorname{tg} \Theta), \\ b_8 &= - pvn_{\perp}^2, \\ b_9 &= \alpha n_{\parallel} n_{\perp} (1 - v + pv \operatorname{tg}^2 \Theta), \\ b'_1 &= - b'_2 = - b'_3 \sin^2 \chi = - b'_5 = b'_6 \operatorname{tg} \chi = \\ &= \frac{b'_8}{\cos^2 \Theta} = - \frac{\alpha b'_9}{\sin \Theta \cos \Theta} = \frac{qvn_{\perp}^2}{\cos^2 \Theta}, \\ b'_4 &= qvn_{\perp}^2 (1 + \alpha \operatorname{tg} \Theta \operatorname{ctg} \chi), \\ b'_7 &= qvn_{\perp}^2 (\alpha \operatorname{tg} \Theta - \operatorname{ctg} \chi). \end{aligned}$$

Характерной особенностью рассматриваемого случая является то, что к. ф. содержат слагаемые, пропорциональные $q(z) \sin \Psi$ и обусловленные циклотронным затуханием. При удалении частоты ω от ω_H

($|z| \rightarrow \infty$) эти слагаемые становятся экспоненциально малыми. К. ф. (9) переходит в этом случае в соответствующие выражения работы [1].

Подробный анализ выражений (11) и (12), определяющих показатели преломления n_{\parallel} и n_{\perp} в зависимости от угла и параметра $v = (\Omega/\omega_H)^2$ и число возможных волн, содержится в работе [7].

3. КОРРЕЛЯЦИЯ ПОЛЕЙ В БЛИЗИ ИОННОГО ЦИКЛОТРОННОГО РЕЗОНАНСА

Рассмотрим теперь корреляцию флюктуационных электромагнитных полей на больших расстояниях в случае, когда частота поля близка к ионной циклотронной частоте ω_{Hi} . Как известно [8], при $\omega = \omega_{Hi}$ в плазме распространяется только одна слабозатухающая волна, которая и обуславливает корреляцию полей на больших расстояниях. Распространение второй волны невозможно вследствие сильного затухания: она поглощается на расстоянии порядка [9]

$$\delta_a = (c^2 v_T / \Omega_i^2 \omega_{Hi})^{1/3},$$

где $v_T = \sqrt{T/M}$ — средняя тепловая скорость иона, Ω_i — ионная ленг-мюровская частота. Поэтому на расстояниях $r \gg \delta_a$ корреляция, связанная с этой волной, оказывается несущественной.

К. ф. для электрических и магнитных полей при $r \gg \bar{\lambda} \sim c/\Omega_i$ ($\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$, $\Omega_i \gg \omega_{Hi}$) и $\omega \approx \omega_{Hi}$ имеют следующий вид:

$$\overline{E_i(r_1, \omega) E_k(r_2, \omega')} = \frac{T \omega \delta(\omega + \omega')}{\pi c^2 r} \frac{a_{ik} \cos \Psi}{\sqrt{1 + \sin^2 \chi}} e^{-\kappa r}, \quad (13)$$

$$\overline{H_i(r_1, \omega) H_k(r_2, \omega')} = \frac{T \omega \delta(\omega + \omega')}{\pi c^2 r} \frac{\Omega_i^2 \cos^2 \chi b_{ik} \cos \Psi}{2 \omega_{Hi}^2 (1 + \sin^2 \chi)^{3/2}} e^{-\kappa r}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \delta_{ik} - h_i h_k + i \varepsilon_{ikl} h_l, \\ b_{ik} &= (1 + 4 \operatorname{tg}^2 \chi) \delta_{ik} - \frac{4 x_i x_k}{r_{\parallel}^2} - 9 h_i h_k - 3 i \varepsilon_{ikl} h_l - \\ &- \frac{4 [rh]_i [rh]_k}{r_{\parallel}^2} + 6 \frac{x_i h_k + x_k h_i}{r_{\parallel}} + 2 i \varepsilon_{ikl} \frac{x_l}{r_{\parallel}} \\ &(r_{\parallel} = r \cos \chi). \end{aligned}$$

Фаза Ψ и коэффициент затухания равны соответственно:

$$\Psi = \frac{r \Omega_i}{\sqrt{2} c} \sqrt{1 + \sin^2 \chi},$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{\pi} \omega \beta_i \Omega_i^2 |\cos \chi| \sin^4 \chi}{8 \sqrt{2} c \omega_{Hi}^2 (1 + \sin^2 \chi)^2} f(z_i),$$

$$z_i = \frac{(\omega - \omega_{Hi}) \sqrt{1 + \sin^2 \chi}}{\beta_i \Omega_i |\cos \chi|}, \quad \beta_i = \frac{v_T}{c},$$

где функция $f(z_i)$ определяется формулой (10a).

Выражения (13) и (14) получены в предположении, что магнитное давление значительно больше газокинетического давления плазмы и альфовеновская скорость значительно меньше скорости света: $\beta_i \ll \omega_{Hi}/\Omega_i \ll 1$. В этом случае показатель преломления — порядка Ω_i/ω_{Hi} , длина волны λ в плазме — порядка $2\pi c/\Omega_i$ и коэффициент затухания — порядка $\beta_i \Omega_i^2/\omega_{Hi} c$ при χ , не близком к нулю или $\pi/2$ и $|z_i| \ll 1$. При $|z_i| \gg 1$ циклотронное затухание становится очень малым. В этом случае необходимо учитывать вклад в к. ф. второй волны. Соответствующие выражения для к. ф. получены в [1].

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. И. Ахиезеру за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 297'1963).
2. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **24**, 659 (1953).
3. В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, ЖТФ, **33**, 437 (1963).
4. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **31**, 642 (1955).
5. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **38**, 912 (1960).
6. В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **38**, 1564 (1960).
7. В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, ЖТФ, **33**, 43 (1963).
8. В. Д. Шафранов, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, **4**, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 426.
9. К. Н. Степанов, ЖЭТФ, **38**, 265 (1960).

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
8 октября 1962 г.

SPACE CORRELATION OF RANDOM ELECTROMAGNETIC FIELDS IN PLASMA. II

V. F. Aleksin, K. N. Stepanov

Correlation functions are found for Fourier time-component of random electric and magnetic fields in magnetooactive plasma in the regions of plasma resonance as well as of electron and ion gyroresonances.

О СРЕДНЕЙ ДИФФРАКЦИОННОЙ КАРТИНЕ В ФОКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ЛИНЗЫ

Н. Г. Денисов, В. И. Татарский

Исследуется среднее распределение освещенности фокальной плоскости линзы в условиях, которые обычно имеют место при оптических наблюдениях излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере. Получены общие формулы, описывающие влияние флюктуаций излучения на свойства дифракционной картины за линзой. Рассчитана зависимость средней интенсивности излучения в фокусе линзы от отношения среднего квадрата флюктуаций угла прихода к ширине диаграммы направленности приемного устройства (линзы).

В последнее время появилось большое число работ, в которых исследуется средняя дифракционная картина поля за линзой при наличии случайных вариаций амплитуды и фазы в падающей волне. Однако в этих работах рассматривались обычно частные случаи этой задачи (прямоугольная диафрагма и гауссова функция корреляции случайных неоднородностей [1-4] или флюктуации малого светового потока [5]). В настоящей работе показывается, как при довольно общей постановке задачи описать общие свойства дифракционной картины за линзой в тех условиях, которые обычно имеют место при оптических наблюдениях излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ В ФОКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ЛИНЗЫ

При расчете средней дифракционной картины в фокальной плоскости линзы мы используем хорошо известные формулы, связывающие поле на входной поверхности линзы с полем в фокальной плоскости линзы [1]:

$$E(x', y') = \frac{ie^{-ikF}}{\lambda F} \int_{\Sigma} E_0(x, y) e^{i \frac{k}{F} (yy' + xx')} dx dy. \quad (1)$$

Здесь $k = \omega/c$ —волновое число, F —фокусное расстояние, Σ —освещенная поверхность линзы, $E_0(x, y)$ —распределение поля на этой поверхности. Интеграл, входящий в формулу (1), можно записать так:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} E_0(x, y) K(x, y) e^{i \frac{k}{F} (yy' + xx')} dx dy, \quad (2)$$

где функция $K(x, y)$ отлична от нуля (равна единице) только на освещенной поверхности линзы.

Найдем теперь средний квадрат поля $E(x', y')$:

$$\begin{aligned} |E(x', y')|^2 &= \frac{1}{\lambda^2 F^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \iint_{-\infty}^{+\infty} \overline{E_0(x_1, y_1)} E_0^*(x_2, y_2) \times \\ &\times K(x_1, y_1) K(x_2, y_2) e^{i \frac{k}{F} [(x_1 - x_2)x' + (y_1 - y_2)y']} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Считая далее, что корреляционная функция комплексного поля $\Gamma_{E_0}(\xi, \eta) = E_0(x_1, y_1) E_0^*(x_2, y_2)$ зависит только от разности $x_1 - x_2, y_1 - y_2$, и переходя в интеграле (3) к интегрированию по переменным

$$\xi = x_1 - x_2; \quad \eta = y_1 - y_2; \quad x_1, y_1,$$

найдем:

$$|\overline{E(x', y')}|^2 = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{E_0}(\xi, \eta) e^{i \frac{k}{F} (\xi x' + \eta y')} \Gamma_k(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (4)$$

где

$$\Gamma_k(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) K(x_1 - \xi, y_1 - \eta) dx dy \quad (5)$$

—корреляционная функция регулярного распределения освещенности на поверхности линзы. Для круглой диафрагмы радиуса r_0 эта функция равна [5]

$$\Gamma_k(r) = 2r_0^2 \left\{ \arccos x - x \sqrt{1 - x^2} \right\} \quad (x = r/2r_0). \quad (6)$$

Введем спектры функций $\Gamma_{E_0}(\xi, \eta)$ и $\Gamma_k(\xi, \eta)$

$$\Phi_{E_0}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{E_0}(\xi, \eta) e^{i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta; \quad (7)$$

$$\Phi_k(x_1, x_2) = \frac{1}{\Sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_k(\xi, \eta) e^{i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta.$$

Функция $\Phi_k(x_1, x_2)$ определяет дифракционную картину Фраунгофера. Для круглой диафрагмы радиуса r_0 она равна

$$\Phi_k(x_1, x_2) = \left[\frac{2J_1(xr_0)}{xr_0} \right]^2, \quad x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (8)$$

Подставляя выражения для спектров (7) в формулу (4), найдем:

$$|\overline{E(x', y')}|^2 = \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 F^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{E_0}(x_1, x_2) \Phi_k(x_1 - kx'/F, x_2 - ky'/F) dx_1 dx_2. \quad (9)$$

Формула (9) имеет простой физический смысл. Интенсивность излучения x', y' в фокальной плоскости линзы определяется угловым спектром излучения на входе приемной системы $\Phi_{E_0}(x_1, x_2)$ и функцией $\Phi_k(x_1 - kx'/F, x_2 - ky'/F)$, которую можно назвать пропускной способностью системы (фильтра). Последняя описывает дифракционную картину Фраунгофера в фокальной плоскости линзы в случае, когда на линзу падает плоская волна, имеющая горизонтальные компоненты волнового вектора $kx'/F, ky'/F$.

Функции $\Phi_{E_0}(x_1, x_2)$ или $\Gamma_{E_0}(\xi, \eta)$ могут быть найдены, если известна статистика случайного поля, падающего на линзу. Амплитудные и фазовые вариации волны, приходящей от удаленного источника, возникают в процессе распространения в среде со случайными неоднородностями показателя преломления. При этом обычно выполняются условия, при которых случайные отклонения логарифма амплитуды

и фазы волны распределены по нормальному закону. В таком случае корреляционная функция комплексного поля может быть выражена простой формулой [1]

$$\Gamma_{E_0}(\xi, \eta) = e^{-(1/2)D_\varphi(\xi, \eta)} = e^{-(1/2)[D_s(\xi, \eta) + D_A(\xi, \eta)]}, \quad (10)$$

где $D_\varphi(\xi, \eta)$ —структурная функция комплексной фазы, $\Phi = i\Delta s + \ln(A/A_0)$ (A_0 —амплитуда невозмущенной волны) и предполагается, что случайное поле $\varphi(x, y)$ локально однородно в плоскости $z = \text{const}$. Для волны, прошедшей через турбулентный слой, функция $D_\varphi(\xi, \eta)$ равна [5]

$$D_\varphi(r) = 2,91 k^2 L C_n^2 r^{5/3} = C_\varphi^2 r^{5/3}. \quad (11)$$

Здесь L —путь, пройденный волной в неоднородной среде; считается, что структурная функция флюктуаций показателя преломления среды определяется законом „двух третей“:

$$D_n(r) = C_n^2 r^{2/3} \quad (L_0 \gg r \gg l_0) \quad (12)$$

(l_0, L_0 —внутренний и внешний масштабы турбулентности).

При малых r ($r \ll l_0$) функция $D_\varphi(r)$ —квадратичная. Однако, учитывая, что степень $5/3$ близка к квадратичной и что для больших диаметров телескопа вклад малых r невелик, можно использовать функцию (11) при любых $r < L_0$.

2. СЛУЧАЙ МАЛЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ

Будем считать флюктуации малыми, если максимальное значение функции $D_\varphi(r)$ для точек на входной поверхности линзы много меньше единицы, т. е.

$$D_\varphi(2r_0) \ll 1. \quad (13)$$

Легко показать, что это условие означает малость среднего квадрата флюктуаций угла прихода $\bar{\delta^2}$ по сравнению с угловой шириной дифракционной картины

$$\bar{\delta^2} \ll \lambda^2/r_0^2 = \delta_0^2. \quad (14)$$

В таком случае функцию $\Gamma_{E_0}(r)$ можно разложить в ряд и приблизенно представить в виде

$$\Gamma_{E_0}(r) \simeq 1 - \frac{1}{2} D_\varphi(r). \quad (15)$$

При малых флюктуациях угла прихода дифракционная картина в фокальной плоскости линзы искажается слабо; поэтому здесь мы ограничимся лишь рассмотрением средней интенсивности в фокусе линзы. Последняя, очевидно, равна

$$\overline{E^2(0, 0)} = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_k(\xi, \eta) \left(1 - \frac{1}{2} D_\varphi(r) \right) d\xi d\eta \quad (16)$$

Для круглой диафрагмы и изотропного случайного поля найдем:

$$\begin{aligned} |\overline{E(0, 0)}|^2 &= \frac{4\pi r_0^2}{\lambda^2 F^2} \int_0^1 (2r_0)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} D_\varphi(2r_0 x) \right\} \times \\ &\times \left\{ \arccos x - x \sqrt{1-x^2} \right\} x dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Формула (17) получена путем введения полярных координат; здесь принято, что $r = 2r_0x$.

Определим интенсивность излучения в фокусе линзы при отсутствии флюктуаций:

$$I_0 = \frac{\pi (2r_0)^4}{\lambda^2 F^2} \int_0^1 \left\{ \arccos x - x \sqrt{1-x^2} \right\} x dx = \frac{\pi^2 r_0^4}{\lambda^2 F^2}. \quad (18)$$

Тогда можно ввести отношение, определяющее ослабление средней интенсивности в фокусе за счет флюктуаций в падающей волне и осредняющего действия линзы:

$$\frac{\bar{E}^2(0, 0)}{I_0} = 1 - \frac{8}{\pi} \int_0^1 D_\varphi(2r_0x) \left\{ \arccos x - x \sqrt{1-x^2} \right\} x dx. \quad (19)$$

Для функции

$$D_\varphi(2r_0x) = 2,91 k^2 L C_n^2 (2r_0x)^{5/3} = C_\varphi^2 (2r_0)^{5/3} x^{5/3}$$

имеем:

$$\frac{\bar{E}^2}{I_0} = 1 - \frac{8}{\pi} C_\varphi^2 (2r_0)^{5/3} \int_0^1 x^{5/3} \left\{ \arccos x - x \sqrt{1-x^2} \right\} x dx. \quad (20)$$

Интеграл, входящий в последнюю формулу, примерно равен 0,054. Полученный результат, естественно, годится при $(0,432/\pi) C_\varphi^2 (2r_0)^{5/3} \ll 1$.

Следовательно, приближенно можно записать:

$$\bar{I} = I_0 e^{-\alpha L}, \quad (21)$$

где

$$\alpha L = \frac{1,257}{\pi} k^2 C_n^2 L (2r_0)^{5/3} \quad (22)$$

и по порядку величины совпадает с отношением θ^2/θ_0^2 .

Коэффициент α можно истолковать как коэффициент ослабления принимаемого излучения. Это ослабление выражается в том, что, хотя при распространении излучения в неоднородной среде средняя интенсивность не изменяется (не зависит от пути L), средняя интенсивность в фокусе линзы зависит от L . Это объясняется тем, что приемное устройство имеет определенную угловую направленность и выделяет в пространственном спектре излучения только определенные угловые компоненты. С ростом L растут флюктуации комплексной фазы φ , угловой спектр приходящего излучения уширяется. Это приводит, в свою очередь, к уменьшению потока энергии, попадающего в приемное устройство. Уменьшение средней интенсивности в фокусе линзы имеет место, естественно, и при уменьшении угловых размеров регулярного дифракционного спектра (при увеличении r_0).

3. СЛУЧАЙ БОЛЬШИХ ФЛЮКТУАЦИЙ

Если структурная функция комплексной фазы $D_\varphi(2r_0) \gg 1$, мы будем говорить о больших флюктуациях излучения. В этом случае раствор диаграммы направленности приемного устройства будет значительно уже ширины углового энергетического спектра излучения ($\theta^2 \gg \theta_0^2$). Регулярная дифракционная картина при этом полностью

замывается шумами, и среднее распределение освещенности в фокальной плоскости линзы рассчитывается сравнительно просто. Это связано с тем, что функция $\Phi_k(x_1 - kx'/F, x_2 - ky'/F)$ имеет очень острый максимум при $x_1 \sim kx'/F$ и $x_2 \sim ky'/F$ и в формуле (9) плавную функцию $\Phi_{E_0}(x_1, x_2)$ можно вынести за знак интеграла. Распределение освещенности при этом будет пропорционально спектру корреляционной функции комплексного поля на входной поверхности линзы:

$$\begin{aligned} \overline{|E(x', y')|^2} &= \frac{\Sigma^2}{\lambda^2 F^2} \Phi_{E_0}(kx'/F, ky'/F) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(x_1 - kx'/F, x_2 - ky'/F) dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{(2\pi)^2 \Sigma}{\lambda^2 F^2} \Phi_{E_0}(kx'/F, ky'/F). \end{aligned} \quad (23)$$

Например, в случае, когда структурная функция комплексной фазы квадратична ($D_\varphi(r) \sim r^2$), корреляционная функция $\Gamma_{E_0}(r)$ будет гауссовой (см. формулу (10)). Согласно (23), распределение освещенности фокальной плоскости линзы будет также описываться гауссовой функцией.

Для структурной функции $D_\varphi(r) \sim r^{5/3}$ расчет $\overline{|E(x', y')|^2}$ более сложен, хотя характер распределения освещенности очевиден. В связи с этим мы приведем здесь выражение для интенсивности излучения в фокусе линзы. Из формулы (23) найдем:

$$\overline{|E(0, 0)|^2} = \frac{(2\pi)^2 \Sigma}{\lambda^2 F^2} \Phi_{E_0}(0, 0) = \frac{\Sigma}{\lambda^2 F^2} 2\pi \int_0^\infty \Gamma_{E_0}(r) r dr. \quad (24)$$

Для структурной функции $D_\varphi = C_\varphi^2 r^{5/3}$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Gamma_{E_0}(r) r dr &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} C_\varphi^2 r^{5/3}\right) r dr = \\ &= \left(\frac{1}{2} C_\varphi^2\right)^{-6/5} \frac{3}{5} \int_0^\infty e^{-x} x^{1/5} dx \end{aligned} \quad (25)$$

и, следовательно,

$$\overline{|E(0, 0)|^2} = \frac{2\pi\Sigma}{\lambda^2 F^2} \left(\frac{1}{2} C_\varphi^2\right)^{-6/5} \frac{3}{5} \int_0^\infty e^{-x} x^{1/5} dx. \quad (26)$$

Интеграл, входящий в формулу (25), равен 0,918; таким образом, средняя интенсивность на выходе приемного устройства убывает с расстоянием по закону $L^{-6/5}$.

Приведенные выше сравнительно простые результаты получены для предельно малых и очень больших флуктуаций амплитуды и фазы волны, падающей на линзу. Рассмотрение общего случая требует численных расчетов.

Рассмотрим интенсивность излучения в фокусе линзы. Из формулы (4) найдем:

$$\overline{|E(0, 0)|^2} = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{E_0}(\xi, \eta) \Gamma_k(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (27)$$

где для круглой диафрагмы $\Gamma_k(\xi, \eta)$ выражается формулой (6) и $\Gamma_{E_0}(\xi, \eta) = \exp\left(-\frac{1}{2} C_\varphi^2 r^{5/3}\right)$ ($r^2 = \xi^2 + \eta^2$). Тогда средняя интенсивность в фокусе линзы, отнесенная к интенсивности излучения в регулярной дифракционной картине I_0 (см. (19)), будет равна

$$G(a) = \frac{16}{\pi} \int_0^1 e^{-ax^{5/3}} \left\{ \arccos x - x \sqrt{1-x^2} \right\} dx, \quad (28)$$

где $x = r/2r_0$.

Функция $G(a)$ характеризует ослабление интенсивности в фокусе линзы, обусловленное флуктуациями амплитуды и фазы излучения. Заметим, что $G(a)$ представляется функцией одного параметра a , определяемого отношением среднего квадрата флуктуаций угла прихода к ширине „диаграммы направленности“ приемного устройства (линзы)

$$2a = C_\varphi^2 (2r_0)^{5/3} = 2,91 k^2 L C_n^2 (2r_0)^{5/3} = \frac{\theta^2}{4} (2kr_0)^2. \quad (29)$$

Функция $G(a)$ приведена на рис. 1 для значений параметра a в интервале от 1 до 10.

При малых a функция $G(a)$ хорошо аппроксимируется экспонен-

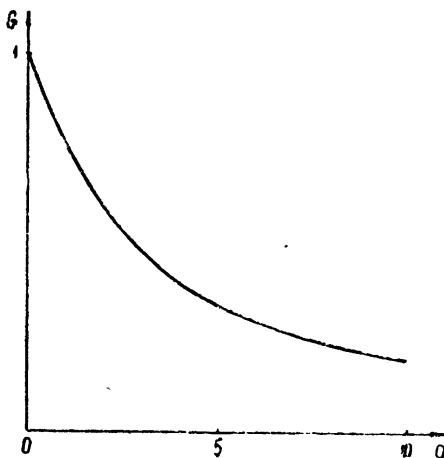


Рис. 1.

той, а при $a \gg 1$ — степенной функцией $a^{-6/5}$. Из рис. 1 видно, что осредняющее действие объектива проявляется тогда, когда средний квадрат флуктуаций угла прихода луча становится сравнимым с раствором диаграммы направленности приемного устройства. Зависимость интенсивности излучения в фокусе от расстояния L , проходимого волной в среде, также легко установить с помощью рис. 1, учитывая, что параметр a пропорционален L .

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
- М. А. Кром, Л. А. Чернов, Акустич. ж., 4, 341 (1958).
- Л. А. Чернов, М. Н. Кром, Труды совещания по исследованию мерцания звезд, изд. АН СССР, М.—Л., 1959.

4. Я. С. Шифрин, Акустич. ж., 7, 248 (1961).
5. В. И. Татарский, Флюктуационные явления при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 октября 1962 г.

ON THE AVERAGE DIFFRACTION PATTERN IN THE FOCAL PLANE OF A LENS

N. G. Denisov, V. I. Tatarskij

The average distribution of the illumination of the focal plane of a lens is investigated under the conditions which usually take place in the optical observations of the radiation propagating in turbulent atmosphere. General formulas describing the influence of the radiation fluctuations on the diffraction pattern behind the lens are obtained. The dependence of average radiation intensity in lens focus on ratio of mean square angle of arrival to the diagram width of the receiving device (lens) is calculated.

К ВОПРОСУ О ФЛЮКТУАЦИЯХ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ АВТОГЕНЕРАТОРА

A. H. Малахов

Получены нелинейные уравнения для флюктуаций амплитуды и фазы автогенератора, находящегося под воздействием произвольного шума.

1. Имеющиеся исследования флюктуаций амплитуды и фазы автогенераторов (см., например, [1–6]), находящихся под воздействием шума $E(t)$, рассматривают, как правило, случай достаточно широкого спектра $E(t)$. Однако в целом ряде задач, например, при исследовании синхронизации генератора узкополосным сигналом, спектр $E(t)$ может быть очень узким. Для этого случая дифференциальные уравнения амплитудных и фазовых флюктуаций, полученные в [1–6], не пригодны. Квазистатический метод [6] здесь также не всегда дает удовлетворительный результат. Поэтому представляет определенный интерес получение уравнений для флюктуаций амплитуды и фазы автогенератора, справедливых для любой ширины и формы спектра $E(t)$. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья.

2. Рассмотрим автогенератор, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E(t), \quad (1)$$

где $F(x, \dot{x})$ — малый член, включающий в себя потери и нелинейности, $E(t)$ — малая случайная функция времени.

Будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$x = R \cos \psi, \quad \dot{x} = -\omega_1 R \sin \psi, \quad \psi = \omega_1 t + \vartheta. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим следующие уравнения для R и ϑ :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{\omega_1} [F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) + \omega_1^2 E(t)] \sin \psi; \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{R \omega_1} [F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) + \omega_1^2 E(t)] \cos \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти уравнения являются точными и в общем случае достаточно сложными. Поскольку правые части (3) малы, то функции R и ϑ являются медленными функциями времени, и можно получить приближенные уравнения для них, пользуясь методом усреднения [7].

Ограничиваюсь первым приближением, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= M \left\{ -\frac{1}{\omega_1} [F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) + \omega_1^2 E(t)] \sin \psi \right\}; \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= M \left\{ -\frac{1}{R \omega_1} [F(R \cos \psi, -\omega_1 R \sin \psi) + \omega_1^2 E(t)] \cos \psi \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где M — оператор усреднения по периоду автоколебаний T , который мы для неавтономной системы (3) полагаем равным

$$M\{X(t)\} \equiv \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Если время t входит в подынтегральную функцию только через ψ , оператор усреднения принимает вид:

$$M\{Y(\psi)\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\psi-2\pi}^{\psi} Y(\xi) d\xi. \quad (6)$$

Раскрывая правые части (4) с учетом (5) и (6), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1} \Phi(\omega_1, R) - \frac{\omega_1}{T} \int_{t-T}^t E(\xi) \sin(\omega_1 \xi + \vartheta) d\xi; \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= -\frac{1}{2\omega_1 R} \Psi(\omega_1, R) - \frac{\omega_1}{TR} \int_{t-T}^t E(\xi) \cos(\omega_1 \xi + \vartheta) d\xi, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, R) &= \frac{1}{\pi} \int_{\psi-2\pi}^{\psi} F(R \cos \xi, -\omega R \sin \xi) \sin \xi d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos \xi, -\omega R \sin \xi) \times \\ &\quad \times \sin \xi d\xi; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Psi(\omega, R) = \frac{1}{\pi} \int_{\psi-2\pi}^{\psi} F(R \cos \xi, -\omega R \sin \xi) \cos \xi d\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(R \cos \xi, -\omega R \sin \xi) \cos \xi d\xi.$$

Уравнения (7) есть уравнения для R и ϑ , мало меняющихся на интервале времени $[t, t+T]$.

Амплитуду и фазу колебаний разобьем на регулярную и флюктуационную части:

$$R = R_p + r, \quad \vartheta = \vartheta_p + \varphi, \quad (9)$$

где регулярные слагаемые определяются уравнениями

$$\dot{R}_p = -\frac{1}{2\omega_1} \Phi(\omega_1, R_p), \quad \dot{\vartheta}_p = -\frac{1}{2\omega_1 R_p} \Psi(\omega_1, R_p). \quad (10)$$

Как известно, установившееся значение регулярной амплитуды R_0 и поправка на частоту $\Delta\omega$ находятся из уравнений

$$\Phi(\omega_1, R_0) = 0, \quad \dot{\vartheta}_p = \Delta\omega = -\frac{1}{2\omega_1 R_0} \Psi(\omega_1, R_0). \quad (11)$$

Отсюда следует, что частота автоколебаний равна $\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega$, а фаза принимает вид: $\vartheta = \Delta\omega t + \varphi$, $\psi = \omega_0 t + \varphi$.

Рассмотрим амплитудные и фазовые флюктуации только в установившемся режиме ($R_p = R_0$). Вводя относительные флюктуации ам-

плитуды $\alpha = \rho/R_0$ и ограничиваясь случаем $|\alpha| \ll 1$, получим (после подстановки (9) в (7) и учета (10)):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -p\alpha - \frac{\omega_1}{TR_0} \int_{t-T}^t E(\xi) \sin(\omega_0\xi + \varphi) d\xi; \\ \dot{\varphi} &= -q\alpha - \frac{\omega_1}{TR_0} \int_{t-T}^t E(\xi) \cos(\omega_0\xi + \varphi) d\xi,\end{aligned}\quad (12)$$

где

$$p = \frac{1}{2\omega_1} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right]_{R_0}, \quad q = \frac{R_0}{2\omega_1} \left[\frac{\partial (\Psi/R)}{\partial R} \right]_{R_0}.$$

Величина p есть прочность предельного цикла. Величину q можно назвать неизохронностью автогенератора. Это название оправдывается тем, что для изохронного автогенератора $q=0$.

Поскольку φ мало меняется на интервале $[t, t+T]$, ее можно вынести за знак интегралов в правых частях (12). Вводя обозначения

$$\begin{aligned}e_{\parallel} &= e_{\parallel}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2E(\xi) \cos(\omega_0\xi) d\xi, \\ e_{\perp} &= e_{\perp}(t) = -\frac{1}{T} \int_{t-T}^t 2E(\xi) \sin(\omega_0\xi) d\xi\end{aligned}\quad (13)$$

и учитывая малость поправки на частоту ($\Delta\omega \ll \omega_0$), уравнения (12) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -p\alpha + \frac{\omega_0}{2R_0} (e_{\perp} \cos \varphi - e_{\parallel} \sin \varphi); \\ \dot{\varphi} &= -q\alpha - \frac{\omega_0}{2R_0} (e_{\parallel} \cos \varphi + e_{\perp} \sin \varphi).\end{aligned}\quad (14)$$

Полученные уравнения (14) являются окончательными искомыми уравнениями, определяющими амплитудные и фазовые флюктуации автогенератора. Они являются корректными в том смысле, что левые и правые их части являются медленными функциями времени.

3. Отметим, что уравнения (14) являются линейными для амплитудных флюктуаций α и нелинейными для фазовых флюктуаций φ . Это и понятно, так как амплитудные флюктуации мы считали малыми, в то время как на фазовые флюктуации подобных ограничений не налагалось. Если ограничиться рассмотрением лишь малых фазовых флюктуаций ($|\varphi| \ll 1$), то из (14) легко получить линейные уравнения для α и φ :

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -p\alpha + \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\perp}(t); \\ \dot{\varphi} &= -q\alpha - \frac{\omega_0}{2R_0} e_{\parallel}(t).\end{aligned}\quad (15)$$

Эти уравнения являются очень простыми и легко решаются. Однако они не очень интересны. Дело в том, что, рассматривая, например, форму и ширину спектральной линии автогенератора, необходимо знать поведение $\varphi(t)$ при всех t , в том числе и при очень больших t . При этом φ может и не удовлетворять условию малости. Тем самым получается, что в общем случае для решения вопроса о спектральной линии генератора необходимо рассматривать уравнения (14).

Обратимся к переходным процессам генератора. Пусть $E(t) \equiv 0$, тогда $e_{\parallel} = e_{\perp} = 0$. Уравнения (14) переходят в

$$\dot{\alpha} = -p\alpha, \quad \dot{\varphi} = -q\alpha. \quad (16)$$

При начальных условиях $t=0$, $\alpha=\alpha_0$, $\varphi=\varphi_0$ решением уравнений (16) будет

$$\alpha = \alpha_0 e^{-pt}, \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{q}{p} \alpha_0 (1 - e^{-pt}).$$

Таким образом, процесс установления отклонений от стационарного режима в автогенераторе происходит по закону e^{-pt} , где p^{-1} называется временем релаксации. По своему смыслу p^{-1} есть время существования переходных процессов—постоянная времени автогенератора. С другой стороны, рассматривая (14), можно понять, что из всего спектра функций $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ существенный вклад в поведение α и φ дает лишь его низкочастотная часть, попадающая в полосу $0-p$. Поведение этого спектра вдали от полосы p мало влияет на α и φ . Тем самым, можно ввести понятие полосы автогенератора: она равна p —прочности предельного цикла.

4. Рассмотрим теперь некоторые характеристики случайных функций $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$. Пусть действующий на автогенератор шум $E(t)$ является стационарным процессом с нулевым средним значением и функцией корреляции $\Phi_E(\tau)$. Спектральную плотность $E(t)$, равную

$$S_E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_E(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (17)$$

считаем заданной. Обратимся к функциям корреляции для e_{\parallel} и e_{\perp} :

$$\begin{aligned} \Phi_{\parallel}(\tau) &= \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} e_{\parallel}(t) e_{\parallel}(t + \tau) dt; \\ \Phi_{\perp}(\tau) &= \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} e_{\perp}(t) e_{\perp}(t + \tau) dt; \\ \Phi_{\parallel\perp}(\tau) &= \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} e_{\parallel}(t) e_{\perp}(t + \tau) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (13) в (18), производя вычисления и учитывая стационарность $E(t)$, можно получить:

$$\Phi_{\parallel}(\tau) = \Phi_{\perp}(\tau) = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \Phi_E(\tau + y - x) \cos[\omega_0(\tau + y - x)] dx dy; \quad (19)$$

$$\Phi_{\parallel \perp}(\tau) = -\Phi_{\perp \parallel}(\tau) = -\frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^T \Phi_E(\tau+y-x) \sin[\omega_0(\tau+y-x)] dx dy.$$

Если $\Phi_E(\tau)$ в (19) выразить через $S_E(\omega)$, то будем иметь:

$$\Phi_{\parallel}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^0(\Omega) \frac{2}{\Omega^2 T^2} [1 - \cos(\Omega T)] \cos(\Omega\tau) d\Omega; \quad (20)$$

$$\Phi_{\parallel \perp}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^1(\Omega) \frac{2}{\Omega^2 T^2} [1 - \cos(\Omega T)] \sin(\Omega\tau) d\Omega,$$

где $S_E(\omega_0 + \Omega) \equiv \tilde{S}_E(\Omega)$; $\tilde{S}_E(\Omega) = \tilde{S}_E^0(\Omega) + \tilde{S}_E^1(\Omega)$ (индексы нуль и единица означают соответственно четную и нечетную функции аргумента). Вторая формула (20), кстати, показывает, что смешанная функция корреляции $\Phi_{\parallel \perp}(\tau)$ является нечетной функцией τ .

С другой стороны, рассматривая спектры функций $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$, равные

$$S_{\parallel}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\parallel}(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau;$$

$$S_{\parallel \perp}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\parallel \perp}(\tau) \sin(\Omega\tau) d\tau,$$

на основании (20) можно найти:

$$S_{\parallel}(\Omega) = S_{\perp}(\Omega) = 2\tilde{S}_E^0(\Omega) \frac{2}{\Omega^2 T^2} [1 - \cos(\Omega T)]; \quad (21)$$

$$S_{\parallel \perp}(\Omega) = 2\tilde{S}_E^1(\Omega) \frac{2}{\Omega^2 T^2} [1 - \cos(\Omega T)].$$

Принимая во внимание, что $pT \ll 2\pi$ ($p \ll \omega_0$) и что на α и φ влияет в основном поведение $S_{\parallel}(\Omega)$, $S_{\perp}(\Omega)$, $S_{\parallel \perp}(\Omega)$ в полосе p , а их значение для $\Omega \gg p$ не играет практически никакой роли, можно точные формулы (21) заменить приближенными:

$$S_{\parallel}(\Omega) = S_{\perp}(\Omega) = 2\tilde{S}_E^0(\Omega); \quad (22)$$

$$S_{\parallel \perp}(\Omega) = 2\tilde{S}_E^1(\Omega).$$

В этом случае точные выражения (20) для функций корреляции заменяются следующими:

$$\Phi_{\parallel}(\tau) = \Phi_{\perp}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^0(\Omega) \cos(\Omega\tau) d\Omega; \quad (23)$$

$$\Phi_{\parallel \perp}(\tau) = -\Phi_{\perp \parallel}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\tilde{S}_E^1(\Omega) \sin(\Omega\tau) d\Omega.$$

Заметим, что эта замена практически никак не отразится на Φ_{\parallel} , $\Phi_{\parallel \perp}$, если ширина спектра $S_E(\omega)$ сравнима с p или меньше p . Если же

ширина спектра $S_E(\omega)$ бесконечна, то эта замена эквивалентна замене шума e_{\parallel} , e_{\perp} , имеющего время корреляции, много меньшее p^{-1} , дельта-коррелированным шумом.

Таким образом, можно считать, что случайные процессы $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$, входящие в уравнения (14), являются стационарными и имеют функции корреляции и спектры, равные соответственно (23) и (22).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., **14**, 145 (1950).
2. С. М. Рытов, ЖЭТФ, **29**, 304 (1955).
3. Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, **1**, 1240 (1956).
4. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 1, 20 (1958).
5. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 2, 79 (1958).
6. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
7. Н. Н. Богоявленский, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
4 октября 1962 г.,
после переработки
28 декабря 1962 г.

ON THE AMPLITUDE AND PHASE FLUCTUATIONS OF AN AUTOOSCILLATOR

A. N. Malakhov

The nonlinear equations are obtained for amplitude and phase fluctuations of an autooscillator which undergoes an action of arbitrary noise.

СИНХРОНИЗАЦИЯ ГЕНЕРАТОРА СЛУЧАЙНЫМ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

A. H. Малахов

Изучается зависимость фазовых флюктуаций синхронизованного генератора от фазовых флюктуаций синхронизирующего сигнала.

1. Рассмотрим томсоновский генератор, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}), \quad (1.1)$$

где функция $F(x, \dot{x})$ включает в себя нелинейности и потери и является достаточно малой. Приближенное решение (1.1)

$$x = R_0 \cos(\omega_0 t), \quad (1.2)$$

где R_0 , ω_0 — амплитуда и частота автоколебания. Параметры R_0 и ω_0 , как известно (см., например, [1]), находятся из уравнений

$$\begin{aligned} R_0(\omega_1^2 - \omega_0^2) &= \Psi(\omega_0, R_0), \\ 0 &= \Phi(\omega_0, R_0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\Psi(\omega_0, R_0)$ и $\Phi(\omega_0, R_0)$ — коэффициенты Фурье функции $F(x, \dot{x})$:

$$F(R \cos(\omega t), -\omega R \sin(\omega t)) = \Psi(\omega, R) \cos(\omega t) + \Phi(\omega, R) \sin(\omega t) + \text{+ высшие гармоники.}$$

Пусть теперь на генератор действует внешний сигнал $E(t)$:

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = F(x, \dot{x}) + \omega_1^2 E(t), \quad (1.4)$$

спектр которого сосредоточен около частоты $\omega_c = \omega_0 + \Omega_0$ ($\Omega_0 \ll \omega_0$), причем ширина спектра много меньше ω_c . В этом случае сигнал удобно представить в форме

$$E(t) = e_{\parallel}(t) \cos(\omega_c t) - e_{\perp}(t) \sin(\omega_c t), \quad (1.5)$$

где функции $e_{\parallel}(t)$, $e_{\perp}(t)$ являются медленными по сравнению с $\cos(\omega_c t)$.

Решение уравнения (1.4) при сигнале (1.5) будем искать в виде

$$x(t) = (R_0 + \rho_t) \cos(\omega_c t + \varphi_t), \quad (1.6)$$

где ρ_t и φ_t также являются медленными функциями по сравнению с $\cos(\omega_c t)$.

Нетрудно найти уравнения для ρ_t и φ_t . Для этого необходимо подставить (1.6) в (1.4) и учесть медленность ρ_t и φ_t и малость функции $F(x, \dot{x})$. Полученные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_t \frac{\Psi(\omega_0, R_0)}{R_0} - \Psi(\omega_0, R_0 + \rho_t) + \Psi(\omega_0, R_0) - 2(R_0 + \rho_t)(\Omega_0 + \dot{\varphi}_t)\omega_0 &= \\ = \omega_0^2 [e_{\parallel}(t) \cos \varphi_t + e_{\perp}(t) \sin \varphi_t]; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$-\Phi(\omega_0, R_0 + \rho_t) - 2\omega_0 \dot{\rho}_t = \omega_0^2 [e_{\parallel}(t) \sin \varphi_t - e_{\perp}(t) \cos \varphi_t].$$

В том случае, когда воздействующий сигнал является строго синусоидальным, $e_{\parallel} = \text{const}$, $e_{\perp} = \text{const}$ и из (1.7) можно получить уравнения:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\Psi(\omega_0, R_0)}{R_0} - \Psi(\omega_0, R_0 + \rho_0) + \Psi(\omega_0, R_0) - 2\omega_0(R_0 + \rho_0)\Omega_0 = \\ = \omega_0^2 [e_{\parallel} \cos \varphi_0 + e_{\perp} \sin \varphi_0]; \\ -\Phi(\omega_0, R_0 + \rho_0) = \omega_0^2 [e_{\parallel} \sin \varphi_0 - e_{\perp} \cos \varphi_0], \end{aligned} \quad (1.8)$$

определяющие ρ_0 и φ_0 — параметры синхронизированного колебания генератора

$$x(t) = (R_0 + \rho_0) \cos(\omega_c t + \varphi_0). \quad (1.9)$$

Если же e_{\parallel} и e_{\perp} не постоянны, а представляют собой случайные функции времени, то (1.7) определяют случайную амплитудную ρ_t и фазовую φ_t модуляцию синхронизированного (не монохроматическим сигналом) колебания генератора (1.6).

2. Если при определении сигнала $E(t)$ ограничиться указанием лишь о форме его спектра, то это не определит однозначно статистические характеристики $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$. В самом деле, один и тот же узкополосный спектр, сосредоточенный около ω_c , может иметь и белый шум, прошедший через узкополосный фильтр, и квазимонохроматический сигнал

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_c t + \psi_t), \quad (2.1)$$

имеющий постоянную амплитуду и определенные фазовые флюктуации ψ_t . И тот и другой сигналы могут быть представлены в виде (1.5), но статистические характеристики $e_{\parallel}(t)$ и $e_{\perp}(t)$ будут для обоих сигналов существенно различными.

Задача о синхронизации генератора узкополосным шумом рассматривалась в [2]. В нашей статье мы рассмотрим задачу о синхронизации генератора сигналом (2.1), который может представлять (пренебрегая амплитудными флюктуациями) реальное автоколебание какого-то другого генератора. Возникает интересный вопрос о связи флюктуаций фазы синхронизированного колебания (1.6) с фазовыми флюктуациями синхронизирующего сигнала (2.1). Решению этого вопроса и посвящена настоящая статья.

3. Итак, сигнал, действующий на генератор, имеет вид (2.1), где ψ_t — заданные флюктуации фазы. Сравнивая (1.5) с (2.1), можно видеть, что

$$e_{\parallel}(t) = E_0 \cos \psi_t, \quad e_{\perp}(t) = E_0 \sin \psi_t. \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в правые части уравнений (1.7), найдем, что

$$\begin{aligned} e_{\parallel}(t) \cos \varphi_t + e_{\perp}(t) \sin \varphi_t &= E_0 \cos(\varphi_t - \psi_t), \\ e_{\parallel}(t) \sin \varphi_t - e_{\perp}(t) \cos \varphi_t &= E_0 \sin(\varphi_t - \psi_t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} H(\rho_t) &= \rho_t \frac{\Psi(\omega_0, R_0)}{R_0} - \Psi(\omega_0, R_0 + \rho_t) + \Psi(\omega_0, R_0) - 2\omega_0 \Omega_0 (R_0 + \rho_t), \\ B(\rho_t) &= -\Phi(\omega_0, R_0 + \rho_t), \\ C(\rho_t) &= -2\omega_0 (R_0 + \rho_t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

запишем уравнения (1.7) в виде

$$\begin{aligned} C(\rho_t) \dot{\varphi}_t + H(\rho_t) &= \omega_0^2 E_0 \cos(\varphi_t - \psi_t), \\ -2\omega_0 \dot{\rho}_t + B(\rho_t) &= \omega_0^2 E_0 \sin(\varphi_t - \psi_t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эти уравнения определяют ρ_t и φ_t по заданной функции ψ_t и являются в общем случае весьма сложными.

Рассмотрим сначала случай очень медленных флюктуаций ψ_t , таких, что зависящие от ψ_t функции ρ_t и φ_t являются в свою очередь настолько медленными, что их производными в уравнениях (3.4) можно пренебречь, т. е.

$$|C(\rho_t) \dot{\varphi}_t| \ll |H(\rho_t)|, \quad |2\omega_0 \dot{\rho}_t| \ll |B(\rho_t)|.$$

В этом случае (3.4) перейдут в уравнения:

$$\begin{aligned} H(\rho_t) &= \omega_0^2 E_0 \cos(\varphi_t - \psi_t), \\ B(\rho_t) &= \omega_0^2 E_0 \sin(\varphi_t - \psi_t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

дающие значения квазистатических ρ_t и φ_t и связь их с ψ_t . Из (3.5) легко получить:

$$H^2(\rho_t) + B^2(\rho_t) = \omega_0^4 E_0^2, \quad (3.6)$$

$$\varphi_t = \psi_t + \operatorname{arctg} B(\rho_t)/H(\rho_t). \quad (3.7)$$

В уравнение (3.6) функция ψ_t не входит; следовательно, оно имеет решение

$$\rho_t = \rho_0 = \text{const}. \quad (3.8)$$

Соответственно этому из (3.7) имеем:

$$\varphi_t = \psi_t + D, \quad D = \operatorname{arctg} B(\rho_0)/H(\rho_0). \quad (3.9)$$

Нетрудно убедиться, что (3.6) есть обычное уравнение для амплитуды (вернее для приращения амплитуды над R_0) синхронизованного колебания в зависимости от амплитуды внешнего сигнала E_0 и расстройки Ω_0 . Будем полагать, что его решение ρ_0 существует и является устойчивым.

Уравнение (3.9) говорит в свою очередь о том, что в условиях квазистатического воздействия фаза синхронизированного колебания с точностью до постоянного слагаемого совпадает с фазой синхронизирующего колебания. Вследствие этого флюктуации фазы φ_t совпадают с флюктуациями фазы ψ_t . При $\rho_0 = \text{const}$, т. е. при отсутствии амплитудных флюктуаций у $x(t)$ это приводит к тому, что форма и ширина спектральной линии синхронизированного колебания полностью совпадает с формой и шириной линии синхронизирующего сигнала*.

4. Рассмотрим теперь случай более быстрых флюктуаций ψ_t . В этом случае решения уравнений (3.4) можно искать в виде ряда по производным от ψ_t :

$$\begin{aligned} \varphi_t &= D + \psi_t + a_1 \dot{\psi}_t + a_2 \ddot{\psi}_t + \dots; \\ \rho_t &= \rho_0 + b_1 \dot{\psi}_t + b_2 \ddot{\psi}_t + \dots. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ограничивааясь для простоты поправками к первой производной, можно, как это показано в Приложении I, отыскать a_1 и b_1 :

* Заметим, что мы не рассматриваем каких-либо других источников флюктуаций в генераторе, кроме синхронизирующего сигнала.

$$a_1 = - \frac{C(\rho_0) [\partial B(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0}}{H(\rho_0) [\partial H(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0} + B(\rho_0) [\partial B(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0}}, \quad (4.2)$$

$$b_1 = - \frac{C(\rho_0) H(\rho_0)}{H(\rho_0) [\partial H(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0} + B(\rho_0) [\partial B(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0}}. \quad (4.3)$$

Тем самым приближенное решение уравнения (3.4) будет иметь вид:

$$\varphi_t = D + \psi_t + a_1 \dot{\psi}_t, \quad (4.4)$$

$$\rho_t = \rho_0 + b_1 \dot{\psi}_t. \quad (4.5)$$

Таким образом, имеем при синхронизирующем сигнале (2.1) синхронизованное колебание

$$x(t) = (R_0 + \rho_0 + b_1 \dot{\psi}_t) \cos(\omega_c t + D + \psi_t + a_1 \dot{\psi}_t). \quad (4.6)$$

Соотношение (4.4) выражает искомые фазовые флюктуации синхронизованного колебания через фазовые флюктуации внешнего сигнала $E(t)$.

Однако в этом случае можно пойти далее и исследовать форму спектральной линии синхронизованного колебания. Для этого рассмотрим подробнее (2.1). Флюктуации фазы ψ_t представим в виде

$$\psi_t = \int^t v_c(\xi) d\xi, \quad \dot{\psi}_t = v_c(t), \quad (4.7)$$

где $v_c(t)$ —заданные флюктуации частоты синхронизирующего сигнала; которые предположим стационарными и нормально распределенными (причем $\langle v_c \rangle = 0$, где скобки $\langle \rangle$ означают статистическое усреднение). В этом случае (2.1) и (4.6) примут вид:

$$E(t) = E_0 \cos \left(\omega_c t + \int^t v_c(\xi) d\xi \right), \quad (4.8)$$

$$x(t) = (R_0 + \rho_0) [1 + n v_c(t)] \cos[\omega_c t + D + \int^t v_c(\xi) d\xi + a_1 v_c(t)], \quad (4.9)$$

$$n = b_1/(R_0 + \rho_0). \quad (4.10)$$

Как показано в [3], колебание (1.6) обладает формой спектральной линии ($\Omega = \omega - \omega_c$)

$$W(\Omega) = W^0(\Omega) + W^1(\Omega), \quad (4.11)$$

где

$$W^0(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^0(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau, \quad (4.12)$$

$$W^1(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A^1(\tau) \sin(\Omega\tau) d\tau. \quad (4.13)$$

Здесь индексы нуль и единица означают соответственно четную и нечетную функции аргумента. Функции $A^0(\tau)$ и $A^1(\tau)$ для нормально распределенных флюктуаций ρ_t и φ_t имеют вид:

$$A^0(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \{1 + \Phi_\alpha(\tau) + [\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^0]^2 - [\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^1]^2\} \exp \left[-\frac{1}{2} \chi(\tau) \right], \quad (4.14)$$

$$A^1(\tau) = \frac{R_0^2}{2} \{2\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^1\} \exp\left[-\frac{1}{2} \chi(\tau)\right], \quad (4.15)$$

где $\Phi_\alpha(\tau) = \langle \alpha(t) \alpha(t+\tau) \rangle$ — функция корреляции относительных амплитудных флюктуаций $\alpha(t) = \rho_t/R_0$,

$$\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) = \Phi_{\alpha\Delta\varphi}^0(\tau) + \Phi_{\alpha\Delta\varphi}^1(\tau) = \langle \alpha(t) [\varphi_{t+\tau} - \varphi_t] \rangle, \quad (4.16)$$

$$\chi(\tau) \equiv \langle \Delta\varphi_\tau^2 \rangle = \langle (\varphi_{t+\tau} - \varphi_t)^2 \rangle. \quad (4.17)$$

В нашем случае, согласно (4.9), в (4.14), (4.15), (4.16) и (4.17) следует вместо R_0 подставить $R_0 + \rho_0$, вместо $\alpha(t)$ — величину $n v_c(t)$, а вместо φ_t — величину $D + \int_0^t v_c(\xi) d\xi + a_1 v_c(t)$. Проделав эту подстановку, можно получить (для $\tau > 0$):

$$\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^0(\tau) = -n a_1 [\Phi_{v_c}(0) - \Phi_{v_c}(\tau)], \quad (4.18)$$

$$\Phi_{\alpha\Delta\varphi}^1(\tau) = n \int_0^\tau \Phi_{v_c}(\xi) d\xi, \quad (4.19)$$

$$\chi(\tau) = 2 \int_0^\tau (\tau - \xi) \Phi_{v_c}(\xi) d\xi + 2a_1^2 [\Phi_{v_c}(0) - \Phi_{v_c}(\tau)], \quad (4.20)$$

$$\Phi_\alpha(\tau) = n^2 \Phi_{v_c}(\tau), \quad (4.21)$$

где $\Phi_{v_c}(\tau) = \langle v_c(t) v_c(t+\tau) \rangle$ — функция корреляции флюктуаций частоты синхронизирующего колебания.

Форма спектральной линии $E(t)$, разумеется, также определяется формулами (4.11)–(4.17), где теперь $R_0 = E_0$, $\alpha(t) \equiv 0$, $\varphi_t = \dot{\psi}_t = \int_0^t v_c(\xi) d\xi$. При этом

$$\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau) \equiv 0, \quad \Phi_\alpha(\tau) \equiv 0, \quad \chi(\tau) = 2 \int_0^\tau (\tau - \xi) \Phi_{v_c}(\xi) d\xi; \quad (4.22)$$

указанные значения, естественно, получаются и из (4.18)–(4.21) при $n=0$, $a_1=0$.

Сравним теперь форму спектральной линии $W_x(\Omega)$ синхронизованного колебания с формой линии $W_E(\Omega)$ синхронизирующего сигнала. Нетрудно видеть следующее.

При симметричной $W_E(\Omega)$ форма линии $W_x(\Omega)$ в общем случае несимметрична. Это ясно, поскольку для $E(t)$ $A^1(\tau) \equiv 0$ и, следовательно, на основании (4.13), нечетное несимметричное слагаемое $W_E^1(\Omega) \equiv 0$, тогда как для $x(t)$ $A^1(\tau) \neq 0$ и $W_x^1(\Omega) \neq 0$. Физически эта несимметрия $W_x(\Omega)$ связана с корреляцией между флюктуациями амплитуды и частоты для синхронизованного колебания (4.9).

Симметричная часть $W_x(\Omega)$ отличается от $W_E(\Omega)$. Это легко понять из различия $A^0(\tau)$ и $\chi(\tau)$ для $x(t)$ и для $E(t)$. Наиболее существенное влияние на это отличие оказывает, по-видимому, второе слагаемое в формуле (4.20), в то время как функции $\Phi_\alpha(\tau)$, $\Phi_{\alpha\Delta\varphi}(\tau)$ (не равные тождественно нулю для $x(t)$) оказывают меньшее влияние. Это связано с тем хорошо известным фактом, что форма спектральной линии колебания определяется главным образом флюктуациями частоты, а не амплитуды.

Таким образом, при очень медленных квазистатических флюктуациях фазы внешнего сигнала $E(t)$ формы линии $E(t)$ и $x(t)$ совпадают.

При более же быстрых флюктуациях фазы появляется существенное отличие формы линий (например, появляется несимметрия).

5. Рассмотрим теперь частный случай изохронного генератора. Пусть в уравнении (1.1)

$$F(x, \dot{x}) = p\dot{x} - q(\dot{x})^3. \quad (5.1)$$

Тогда из (1.4) нетрудно получить:

$$\Psi(\omega, R) \equiv 0, \quad \Phi(\omega, R) = -\omega pR + \frac{3}{4}q\omega^3R^3. \quad (5.2)$$

Из (1.3) видно, что параметры собственного колебания генератора

$$\omega_0 = \omega_1, \quad R_0^2 = 4p/3q\omega_0^2. \quad (5.3)$$

Формулы (3.3) дают:

$$\begin{aligned} H(\rho_t) &= -2\omega_0\Omega_0 R_0(1 + \rho_t/R_0), \\ B(\rho_t) &= -p\omega_0 R_0[2\rho_t/R_0 + 3(\rho_t/R_0)^2 + (\rho_t/R_0)^3], \\ C(\rho_t) &= -2\omega_0 R_0[1 + \rho_t/R_0]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

При этом уравнение (3.4) остается все еще достаточно сложным. Ограничимся случаем нулевой расстройки $\Omega_0=0$ (работа генератора в центре полосы синхронизации) и малого приращения амплитуды $|\rho_t| \ll R_0$. Последнее всегда будет иметь место при достаточно слабом внешнем сигнале $E(t)$. Тогда

$$H(\rho_t) \equiv 0, \quad B(\rho_t) = -2p\omega_0\rho_t, \quad C(\rho_t) = -2\omega_0 R_0$$

и уравнения (3.4) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_t &= \omega_0 k \cos(\varphi_t - \psi_t), \\ \dot{\alpha} + p\alpha &= \omega_0 k \sin(\varphi_t - \psi_t), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\alpha = \rho_t/R_0$, $k = -E_0/2R_0$.

Из (5.5) нетрудно найти необходимое условие малости внешнего сигнала:

$$|k| \ll p/\omega_0, \quad (5.6)$$

где p — прочность предельного цикла автоколебаний (это хорошо видно из второго уравнения (5.5)).

6. Поскольку $p/\omega_0 \ll 1$, условие (5.6) наводит на мысль искать решение уравнения (5.5) в виде ряда по степеням k . Поскольку форма линии колебания генератора определяется в основном фазовыми флюктуациями, то мы пренебрежем здесь в синхронизованном колебании амплитудными флюктуациями и будем исследовать только первое уравнение (5.5).

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$\varphi_t = \varphi_0 + k\varphi_{1t} + k^2\varphi_{2t} + \dots \quad (6.1)$$

Подставляя (6.1) в (5.5) и приравнивая члены при одинаковых степенях k , можно получить:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_0 &= 0, \\ \dot{\varphi}_{1t} &= \omega_0 \cos(\varphi_0 - \psi_t), \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\dot{\varphi}_{2t} = -\omega_0 \varphi_{1t} \sin(\varphi_0 - \psi_t),$$

• • • • • • • • •

Тогда имеем:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \text{const}, \\ \varphi_{1t} &= \omega_0 \int_0^t \cos(\varphi_0 - \psi_t) dt, \\ \varphi_{2t} &= -\omega_0 \int_0^t \varphi_{1t} \sin(\varphi_0 - \psi_t) dt,\end{aligned}\quad (6.3)$$

• • • • • • • • •

Тем самым, для фазовых флюктуаций φ_t получаем ряд:

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \varphi_0 + \omega_0 k \int_0^t \cos(\varphi_0 - \psi_x) dx - \\ &- \omega_0^2 k^2 \int_0^t \sin(\varphi_0 - \psi_x) \int_0^x \cos(\varphi_0 - \psi_y) dy dx + \dots.\end{aligned}\quad (6.4)$$

Будем также считать начальное значение φ_0 случайной величиной, равномерно распределенной в интервале $[0, 2\pi]$.

С помощью (6.3) можно оценить условие сходимости ряда (6.1). Вводя в рассмотрение ω_ψ — ширину спектра флюктуаций фазы ψ_t , после несложных вычислений можно получить, что последующий член в (6.1) будет по модулю много меньше предыдущего, если

$$|k| \ll \omega_\psi / \omega_0. \quad (6.5)$$

Объединяя (5.6) и (6.5), получаем общее условие, накладываемое на k для ряда (6.4) вообще и для ограничения первым приближением (первые два члена ряда) в частности:

$$|k| \ll \min \left\{ \frac{p}{\omega_0}, \frac{\omega_\psi}{\omega_0} \right\}. \quad (6.6)$$

Оценим величину ω_ψ . По своему смыслу $\omega_\psi^{-1} = \tau_0$, где τ_0 — время, в течение которого ψ_t меняется еще достаточно мало (по сравнению с единицей). Определим τ_0 соотношением:

$$\langle \Delta\psi_{\tau_0}^2 \rangle = \langle (\psi_{t+\tau_0} - \psi_t)^2 \rangle = \frac{1}{10}. \quad (6.7)$$

С другой стороны, $\langle \Delta\psi_{\tau_0}^2 \rangle$ определяет $\Delta\Omega$ — ширину спектральной линии синхронизирующего колебания. Согласно [4],

$$\Delta\Omega = \pi \left[\int_0^\infty \exp \left(-\frac{1}{2} \langle \Delta\psi_{\tau_0}^2 \rangle \right) d\tau \right]^{-1}. \quad (6.8)$$

Нетрудно найти связь между ω_ψ и $\Delta\Omega$. Пусть, например, $\langle \Delta\psi_{\tau_0}^2 \rangle = P\tau_0$. Тогда, на основании (6.7), имеем $\tau_0 = (10P)^{-1}$, а на основании (6.8) $\Delta\Omega = \pi P/2$. В этом случае имеем:

$$\omega_\psi = \frac{20}{\pi} \Delta\Omega.$$

Пусть теперь $\langle \Delta\phi_{\tau}^2 \rangle = Q\tau^2$. Аналогично будем иметь $\tau_0 = (10Q)^{-1/2}$, $\Delta\Omega = (2\pi Q)^{1/2}$ и

$$\omega_{\psi} = \left(\frac{10}{2\pi}\right)^{1/2} \Delta\Omega.$$

Поскольку для любого реального генератора $\langle \Delta\phi_{\tau}^2 \rangle$ лежит между двумя рассмотренными $\langle \Delta\phi_{\tau}^2 \rangle$, то можно в общем случае утверждать, что

$$\omega_{\psi} = n \Delta\Omega, \quad (6.9)$$

где

$$\left(\frac{10}{2\pi}\right)^{1/2} \leq n \leq \frac{20}{\pi}.$$

Таким образом, ω_{ψ} по порядку величины близка к ширине спектральной линии синхронизирующего генератора.

7. Ограничимся подробным рассмотрением лишь первого приближения

$$\varphi_t = \varphi_0 + \omega_0 k \int_0^t \cos(\varphi_0 - \psi_x) dx, \quad (7.1)$$

выражающего фазовые флюктуации синхронизованного колебания φ_t через фазовые флюктуации синхронизирующего сигнала ψ_t . Найдем некоторые характеристики φ_t . Рассмотрим приращение $\Delta\varphi_t = \varphi_{t+\tau} - \varphi_t$, которое играет основную роль в размытии спектральной линии колебания:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_t &= \omega_0 k \int_0^t \cos(\varphi_0 - \psi_x) dx = \\ &= \omega_0 k \cos \varphi_0 \int_0^t \cos \psi_x dx + \omega_0 k \sin \varphi_0 \int_0^t \sin \psi_x dx. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Нетрудно видеть из (7.2), что поскольку φ_0 и ψ_t независимы и φ_0 имеет равномерное распределение, $\langle \Delta\varphi \rangle = 0$. Интенсивность приращения флюктуаций фазы

$$\chi(t) = \frac{\omega_0^2 k^2}{2} \int_0^t \int_0^t [\langle \cos \psi_x \cos \psi_y \rangle + \langle \sin \psi_x \sin \psi_y \rangle] dx dy. \quad (7.3)$$

Можно показать (см. Приложение II), что для двух нормально распределенных величин x и y , таких, что $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$,

$$\langle \cos x \cos y \rangle = \operatorname{ch} \langle xy \rangle \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle \right], \quad (7.4)$$

$$\langle \sin x \sin y \rangle = \operatorname{sh} \langle xy \rangle \exp \left[-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle \right]. \quad (7.5)$$

Поэтому, предполагая флюктуации фазы синхронизирующего сигнала нормально распределенными и учитывая (7.4) и (7.5), после простых преобразований получаем:

$$\chi(t) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 \int_0^t \int_0^t \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \psi_x^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle \psi_y^2 \rangle + \langle \psi_x \psi_y \rangle \right] dx dy. \quad (7.6)$$

Предположим теперь, что флюктуации фазы ψ_t порождаются дельта-коррелированными флюктуациями частоты (синхронизирующее колебание имеет „естественную“ форму линии):

$$\psi_t = \int_0^t v_c(t) dt, \quad \Phi_{vc}(\tau) = P \delta(\tau). \quad (7.7)$$

В этом случае можно получить

$$\langle \psi_t^2 \rangle = P |t|, \quad \langle \psi_x \psi_y \rangle = P \min\{x, y\}. \quad (7.8)$$

Подставляя (7.8) в (7.6), имеем окончательно (для $\tau > 0$)

$$\chi(\tau) = 4\omega_0^2 k^2 P^{-2} \left[\frac{1}{2} P \tau - 1 + e^{-P\tau/2} \right]. \quad (7.9)$$

Если предположить, что флюктуации частоты v_c синхронизирующего сигнала являются очень медленными (синхронизирующее колебание имеет „техническую“ форму линии):

$$\Phi_{vc}(\tau) = Q, \quad (7.10)$$

то, как нетрудно убедиться,

$$\langle \psi_t^2 \rangle = Qt^2, \quad \langle \psi_x \psi_y \rangle = Qxy. \quad (7.11)$$

Для этого случая из (7.6) получаем:

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 \left[\sqrt{\frac{2\pi}{Q}} \tau \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{Q}{2}} \tau \right) - \frac{2}{Q} + \frac{2}{Q} e^{-Q\tau^2/2} \right], \quad (7.12)$$

где

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Сравнивая (7.9) и (7.12), можно обнаружить в этих формулах много общего. При достаточно малых τ

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 \tau^2 \quad (7.13)$$

для обеих формул. При достаточно больших τ для (7.9) и (7.12) имеем соответственно

$$\chi(\tau) = 2\omega_0^2 k^2 P^{-1} \tau, \quad (7.14)$$

$$\chi(\tau) = \omega_0^2 k^2 \sqrt{\pi/2Q} \tau. \quad (7.15)$$

Подобное поведение, а именно, пропорциональность τ^2 для малых τ и τ для больших τ характерна для интенсивности приращения флюктуаций фазы всех реальных генераторов. Оно также дает основание предполагать, что в общем случае форма спектральной линии синхронизованного генератора слабо зависит от формы линии синхронизирующего генератора.

8. Найдем, наконец, в первом приближении функцию корреляции флюктуаций частоты синхронизированного генератора. Дифференцируя (7.1), нетрудно видеть, что

$$v(t) = \omega_0 k \cos(\varphi_0 - \psi_t). \quad (8.1)$$

Отсюда простыми вычислениями получаем:

$$\Phi_v(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 \langle \cos(\Delta\psi_\tau) \rangle, \quad (8.2)$$

где $\Delta\psi_\tau = \psi_{t+\tau} - \psi_t$. Поскольку, по предположению, ψ_t нормально, то

$$\Phi_v(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \Delta\psi_\tau^2 \rangle \right]. \quad (8.3)$$

Для „естественных“ и „технических“ флюктуаций частоты синхронизирующего генератора получаем соответственно (см. (7.8) и (7.11)) (для $\tau > 0$):

$$\Phi_v(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 e^{-(P/2)\tau}, \quad (8.4)$$

$$\Phi_v(\tau) = \frac{1}{2} \omega_0^2 k^2 e^{-(Q/2)\tau^2}. \quad (8.5)$$

Таким образом, в то время как функции корреляции флюктуаций частоты синхронизирующего колебания изменяются очень сильно (от дельта функции (7.7) до постоянной (7.10)), функции корреляции (8.4), (8.5) флюктуаций частоты синхронизированного колебания изменяются не столь существенно, оправдывая предположение, приведенное в конце предыдущего пункта.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Рассмотрим систему двух уравнений, определяющих функции времени $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) \dot{x} + X(x, y) &= K(x, y, f(t)), \\ \beta(x, y) \dot{y} + Y(x, y) &= L(x, y, f(t)). \end{aligned} \quad (\Pi.1)$$

Функция $f(t)$ —достаточно медленная задающая функция. Пусть $f(t)$ является постоянной величиной. Нас интересует решение (П.1), также постоянное во времени; обозначим его через x_0 и y_0 . Нетрудно видеть, что x_0 и y_0 определяются уравнениями

$$X(x_0, y_0) = K(x_0, y_0, f), \quad (\Pi.2)$$

$$Y(x_0, y_0) = L(x_0, y_0, f).$$

Допустим, что решением уравнений (П.2) являются

$$x_0 = x_0[f], \quad y_0 = y_0[f]. \quad (\Pi.3)$$

Пусть теперь функция $f(t)$ является не постоянной, а переменной, но достаточно медленной. Требуется найти поправку к решению (9.3).

Решение уравнения (П.1) будем искать в виде

$$x = x_0 + a_1 \dot{f} + a_2 \ddot{f} + \dots, \quad (\Pi.4)$$

$$y = y_0 + b_1 \dot{f} + b_2 \ddot{f} + \dots,$$

где вторые, третьи и т. д. члены являются поправками к x_0 , y_0 , пропорциональными производным функции $f(t)$. Необходимо найти коэффициенты a_1 , a_2 , ...; b_1 , b_2 ,

Ограничимся здесь только отысканием членов первого приближения, т. е. нахождением коэффициентов a_1 и b_1 .

Подставляя (П.4) в (П.1), учитывая (П.2) и неравенства

$$|a_1 f| \ll |x_0|, \quad |b_1 f| \ll |y_0| \quad (\text{П.5})$$

и приравнивая, наконец, члены при f , получим два уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 x'_{0f} + X'_{x0} a_1 + X'_{y0} b_1 &= K'_{x0} a_1 + K'_{y0} b_1, \\ \beta_0 y'_{0f} + Y'_{x0} a_1 + Y'_{y0} b_1 &= L'_{x0} a_1 + L'_{y0} b_1. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \alpha(x_0, y_0); \quad X'_{x0} = [\partial X(x, y)/\partial x]_{x_0, y_0}; \\ \beta_0 &= \beta(x_0, y_0); \quad X'_{y0} = [\partial X(x, y)/\partial y]_{x_0, y_0}; \\ Y'_{x0} &= [\partial Y(x, y)/\partial x]_{x_0, y_0}; \\ Y'_{y0} &= [\partial Y(x, y)/\partial y]_{x_0, y_0}; \\ x'_{0f} &= dx_0[f]/df; \\ y'_{0f} &= dy_0[f]/df; \\ L'_{x0} &= [\partial L(x, y, f)/\partial x]_{x_0, y_0}; \\ L'_{y0} &= [\partial L(x, y, f)/\partial y]_{x_0, y_0}; \\ K'_{x0} &= [\partial K(x, y, f)/\partial x]_{x_0, y_0}; \\ K'_{y0} &= [\partial K(x, y, f)/\partial y]_{x_0, y_0}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Преобразовывая (П.6), получаем линейную систему двух уравнений для искомых a_1 и b_1 :

$$\begin{aligned} (X'_{x0} - K'_{x0}) a_1 + (X'_{y0} - K'_{y0}) b_1 &= -\alpha_0 x'_{0f}, \\ (Y'_{x0} - L'_{x0}) a_1 + (Y'_{y0} - L'_{y0}) b_1 &= -\beta_0 y'_{0f}. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Отсюда легко найти коэффициенты a_1 и b_1 :

$$a_1 = \frac{\beta_0 y'_{0f} (X'_{y0} - K'_{y0}) - \alpha_0 x'_{0f} (Y'_{y0} - L'_{y0})}{(X'_{x0} - K'_{x0}) (Y'_{y0} - L'_{y0}) - (X'_{y0} - K'_{y0}) (Y'_{x0} - L'_{x0})}, \quad (\text{П.9})$$

$$b_1 = \frac{\alpha_0 x'_{0f} (Y'_{x0} - L'_{x0}) - \beta_0 y'_{0f} (X'_{x0} - K'_{x0})}{(X'_{x0} - K'_{x0}) (Y'_{y0} - L'_{y0}) - (X'_{y0} - K'_{y0}) (Y'_{x0} - L'_{x0})}. \quad (\text{П.10})$$

Из приведенного расчета очевидно, что для справедливости последних двух формул достаточно потребовать дифференцируемости $x_0[f]$, $y_0[f]$ по f , дифференцируемости $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $L(x, y, f)$, $K(x, y, f)$ по x и по y и неравенства нулю определителя системы (П.8).

Рассмотрим уравнение (3.4). Сравнивая его с (П.1), нетрудно получить:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_t, \quad y = \rho_t, \quad \alpha_0 = C(\rho_0), \quad \beta_0 = -2\omega_0, \quad x'_{0f} = 1, \quad y'_{0f} = 0, \\ f(t) &= \psi_t, \quad X'_{x0} = 0, \quad X'_{y0} = [\partial H(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y'_{y0} &= [\partial B(\rho)/\partial \rho]_{\rho_0}, \quad Y'_{x0} = 0, \quad K'_{x0} = -B(\rho_0), \\ K'_{y0} &= 0, \quad L'_{x0} = H(\rho_0), \quad L'_{y0} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (П.9) и (П.10), получим искомые формулы (4.2) и (4.3).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Рассмотрим две нормально распределенные случайные величины x и y , такие, что $\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0$. Рассмотрим далее

$$\langle \cos x \cos y \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos(x-y) \rangle + \frac{1}{2} \langle \cos(x+y) \rangle.$$

Сумма и разность $x+y$ и $x-y$ также нормально распределены. Поскольку для нормально-распределенной величины, например, z , ($\langle z \rangle = 0$) $\langle \cos z \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \langle z^2 \rangle\right)$, то легко видеть, что

$$\begin{aligned} \langle \cos x \cos y \rangle &= \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{1}{2} \langle (x-y)^2 \rangle\right] + \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{1}{2} \langle (x+y)^2 \rangle\right] = \\ &= \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle - 2\langle xy \rangle + \langle y^2 \rangle)\right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\langle x^2 \rangle + 2\langle xy \rangle + \langle y^2 \rangle)\right\} = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle\right\} \left[\frac{1}{2} \exp \langle xy \rangle + \frac{1}{2} \exp \langle -xy \rangle \right] = \\ &= \operatorname{ch} \langle xy \rangle \exp\left\{-\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle y^2 \rangle\right\}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается и вторая формула (7.5).

Приношу искреннюю благодарность Р. В. Хохлову за полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 79 (1958).
2. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
3. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 912 (1961).
4. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 1295 (1957).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
27 сентября 1962 г.

SYNCHRONIZATION OF A GENERATOR BY THE RANDOM QUASISINUSOIDAL SIGNAL

A. N. Malakhov

The dependence of phase fluctuations of synchronized oscillator upon phase fluctuations of synchronizing signal is studied.

О МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ 4-ММ ДИАПАЗОНА НА ПУЧКЕ МОЛЕКУЛ ФОРМАЛЬДЕГИДА

A. F. Крупнов, B. A. Скворцов

Приводятся расчет и некоторые характеристики пучкового мазера на частоту 72838 мгц на переходе $1_{01}-0_{00}$, молекулы CH_2O . Отсутствие тонкой структуры у используемой линии и вид штарк-эффекта, по-видимому, благоприятны для получения повышенной стабильности частоты. Измерена мощность молекулярного генератора, равная по порядку величины 10^{-11} вт.

Круг веществ, используемых в пучковых молекулярных генераторах, ограничен. Это различные изотопные комбинации аммиака, атомарный водород и синильная кислота. Представляет интерес увеличение числа этих веществ и продвижение пучковых мазеров в более коротковолновый участок диапазона. Основная трудность при этом заключается в получении достаточного числа активных молекул. Нами проводились работы в этом направлении, которые завершились созданием молекулярного генератора на формальдегиде в 4-мм диапазоне [1, 2]. Ниже приводятся расчет и некоторые характеристики пучкового мазера на формальдегиде.

Молекула формальдегида $\text{C}^{12}\text{H}_2\text{O}^{16}$ — легкий вытянутый, слегка асимметричный волчок с довольно большим дипольным моментом $\mu_a = 2,31 \text{ дебая}$ (рис. 1а). Вращательные постоянные молекулы $A = 282106 \text{ мгц}$, $B = 38834 \text{ мгц}$ и $C = 34004 \text{ мгц}$; параметр асимметрии Рэя

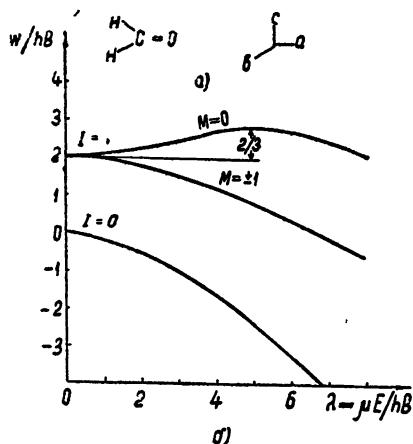


Рис. 1: а) молекула формальдегида, б) штарк-эффект линейной молекулы.

вращательных постоянных B и C формальдегида. Из рис. 1б следует, что вид штарк-эффекта рассматриваемых уровней благоприятен для осуществления сортировки молекул верхнего и нижнего уровней, а именно: „активные“ молекулы верхнего уровня с $M=0$ фокусируются обычными фокусирующими системами в резонатор, в то время как

$$\chi = \frac{2B - A - C}{A - C} \approx -0,961.$$

Использовался наименее вращательный переход молекулы $1_{01}-0_{00}$ с частотой $\sim 72838 \text{ мгц}$. Слабая асимметрия молекулы позволяет с хорошей точностью при рассмотрении штарк-эффекта этих уровней обращаться к эффекту Штарка для перехода $J=1 \rightarrow 0$, $K=0$ симметричного волчка. В свою очередь, штарк-эффект для уровней симметричного волчка с $K=0$ идентичен штарк-эффекту линейной молекулы [3], который приведен на рис. 1б. Разумеется, в качестве вращательной постоянной B линейной молекулы следует пользоваться средним из вра-

„пассивные“ молекулы нижнего уровня дефокусируются. Молекулы верхнего уровня с $M = \pm 1$ также дефокусируются.

Существует оптимальная для сортировки напряженность поля в сортирующей системе, соответствующая максимальной штарк-энергии активных молекул. Она равна примерно $150 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$, что соответствует примерно 15 кВ на использовавшейся нами системе. Наличие точки $\partial W/\partial E = 0$ позволит, по-видимому, резко уменьшить влияние изменений сортирующего напряжения на число активных молекул на выходе сортирующей системы, что должно благоприятно повлиять на стабильность частоты молекулярного генератора.

Угол захвата определялся, как обычно, из равенства энергии радиального движения молекулы и штарк-энергии. Максимальный угол захвата $\alpha \approx 3^\circ$. Следует отметить, что активные молекулы сортируются полем единообразно, так как отсутствует разброс по числам M . Матричный элемент дипольного момента определялся с помощью таблиц [4] с учетом того, что в нашем случае излучение линейно поляризовано. Оказалось, что $|\mu_i|^2 = 1,77 \text{ дебая}^2$.

Населенность δ уровня l_{01} с учетом того, что вращательная сумма $Q_{\text{вр}} = 1440$ при $T = 300^\circ\text{K}$, ядерный вес уровня $g = 1$, средний ядерный вес $g = 2$, равна 0,09%, а в состоянии $M=0$ находится $\delta_0 = 0,03\%$ молекул.

Весьма интересной особенностью рассматриваемого перехода является простота линии. Действительно, в молекуле CH_2O спины ядер С и О равны нулю, а спин ядра Н равен $1/2$, следовательно, отсутствует ядерная квадрупольная сверхтонкая структура [8]. Кроме того, рассматриваемый переход относится к состоянию, в котором суммарный спин ядер Н равен нулю, так что отсутствует и магнитная сверхтонкая структура линии. Указанное обстоятельство должно благоприятно повлиять на стабильность частоты молекулярного генератора на этой линии.

Представляет интерес оценка величины параметра возбуждения*

$$\eta = \frac{4\pi N_a Q |\mu_{ij}|^2 \tau^2}{\hbar s l}, \quad (1)$$

где Q —добротность резонатора, N_a —число активных молекул, влетающих в резонатор в секунду, $|\mu_{ij}|^2$ —квадрат матричного элемента дипольного момента перехода, τ —время пролета молекулой резонатора, s , l —сечение и длина резонатора.

Если считать, что верхний предел для N_a определяется столкновениями молекул в пучке, то условие равенства длины свободного пробега молекулы λ и длины пучка L даст значение N_a . Для длины свободного пробега молекул в пучке, пронизывающем сортирующую систему и резонатор, следует взять выражение

$$\lambda = b/V\sqrt{2}\sigma n,$$

где b —коэффициент, имеющий значение между 1 и 3 ($b = 1$ соответствует длине свободного пробега в газе, $b = 3$ —длине свободного пробега в одностороннем пучке молекул [7]), n —плотность молекул, σ —площадь поперечного сечения молекулы. Величина σ получается из радиоспектроскопических измерений; она учитывает соударения, при которых может измениться квантовое состояние молекулы [8], а следовательно, нарушается сортировка молекул. Из равенства $\lambda = L$,

* Условие $\eta \geq 1$ соответствует режиму генерации мазера [5, 6].

выражая плотность молекул n через поток N в виде $n = N/s_1 v$, где s_1 —сечение сортирующей системы, v —средняя скорость молекул, получим:

$$N = b s_1 v / \sqrt{2} \sigma L.$$

Так как число захваченных сортирующей системой молекул того или иного уровня пропорционально квадрату соответствующего угла захвата, доля активных молекул на выходе сортирующей системы будет отличаться от доли в равновесном состоянии δ_0 на множитель $2\alpha_3^2/\bar{\alpha}_3^2 \sim 1,9$, где черта означает усреднение по различным квантовым состояниям, а коэффициент 2 появляется из-за того, что половина молекул, попадающих в угол захвата, дефокусируется.

При вычислении $\bar{\alpha}_3^2$ принимался во внимание лишь штарк-эффект уровней K -удвоения, так как другие переходы P и R ветвей имеют значительно более высокую частоту. Следовательно,

$$N_a = \frac{b s_1 v}{\sqrt{2} \sigma L} 2\delta_0 \frac{\alpha_3^2}{\bar{\alpha}_3^2}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) и взяв $b = 2$, $s_1 = 0,03 \text{ см}^2$, $v = 5 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, $\sigma = 3 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$, $L = 7,5 \text{ см}$, $Q = 3500$, $\tau = 6 \cdot 10^{-5} \text{ сек}$, $sl = 0,2 \text{ см}^3$, получим $\eta \approx 7$.

Так как в приведенном расчете учитывалась только принципиальная трудность—соударения в пучке, то полученная оценка η является максимальной. Проведя аналогичные расчеты для генератора на линии $J=3$, $K=3$ аммиака, можно оценить отношение максимальных параметров возбуждения

$$\eta_{\text{NH}_3} / \eta_{\text{CH}_3\text{O}} \sim 15.$$

Блок-схема установки приведена на рис. 2. Пучковый мазер на формальдегиде имел ту же конструкцию, что и обычный аммиачный

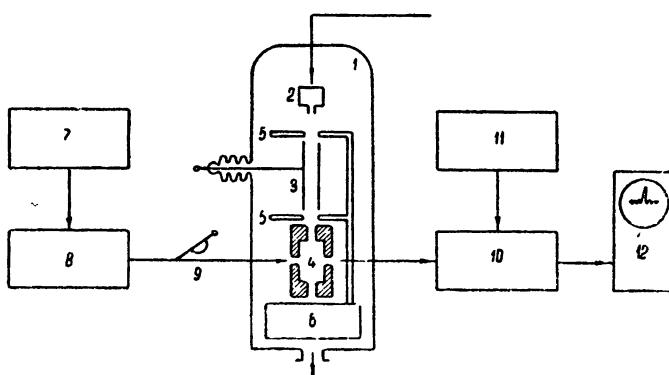


Рис. 2. Блок-схема установки:

1—вакуумный кожух, 2—источник пучка молекул, 3—сортирующая система, 4—проходной резонатор на модуле E_{010} , 5—холодные диафрагмы, 6—диафрагма с жидким азотом, 7—сигнальный клистрон 3-мм диапазона, 8—умножитель на 9, 9—аттенюатор, 10—супергетеродинный приемник, 11—гетеродинный клистрон, 12—осциллограф.

мазер. Разумеется, детали были уменьшены по величине. Использовался проходной резонатор на модуле E_{010} . Диафрагма между источником и сортирующей системой могла убираться. При этом срок непрерывной генерации мазера увеличивался до нескольких часов.

В качестве сигнала использовалась девятая гармоника клистрона, стабилизированного по кварцу с помощью схемы ФАП. Частота кварца могла перестраиваться в небольших пределах, а также качаться с частотой сети для наблюдения спектральной линии на экране осциллографа. В качестве гетеродина использовалась вторая гармоника 8-мм клистрона, стабилизированного по объемному резонатору (использовался стандартный волномер). Эта же схема использовалась для снятия резонансной кривой резонатора мазера для определения его добротности.

Супергетеродинный приемник имел полосу УПЧ 3 мгц. Величина шум-фактора всего приемника могла контролироваться путем подключения к его входу газоразрядной шумовой трубы (на блок-схеме не указана). Эквивалентная температура трубы определялась ранее по радиометру с тепловой калибровкой. Трубка использовалась также в качестве источника эталонного излучения при измерении мощности молекулярного генератора. Мощность, поступающая на приемник от молекулярного генератора, равнялась $2,6 \cdot 10^{-12}$ вт. Коэффициент связи резонатора определялся обычным путем по величине коэффициента прохождения по мощности и был порядка 0,1. Таким образом, мощность в резонаторе соответствовала примерно $3 \cdot 10^{-11}$ вт.

На рис. 3 приведена зависимость амплитуды генерации от напряжения на сортирующей системе. Наличие плоского участка в пре-

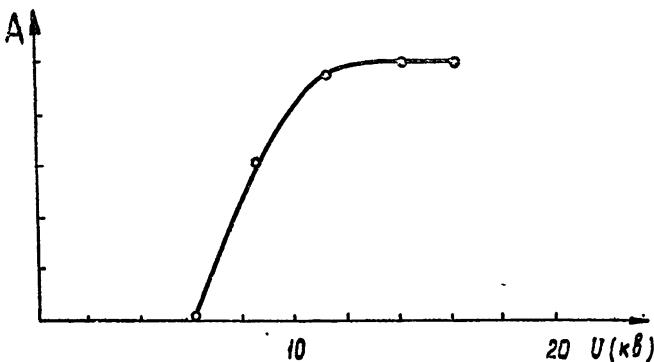


Рис. 3. Зависимость амплитуды генерации (в условных единицах) от напряжения на сортирующей системе.

делах $13 \div 16$ кв подтверждает сделанные выше выводы о виде штарк-эффекта.

Линия излучения наблюдалась на экране осциллографа как сингл-лет при соотношении сигнал/шум ~ 25 ; измеренная ширина ее была порядка 15 кгц, что согласуется с расчетом по времени пролета молекулой резонатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, 611 (1962).
2. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 820 (1962).
3. P. Thaddeus, J. Loubser, A. Javan, L. Krisher, H. Lecar, Quantum Electronics, New York, Columbia University Press, 1960, p. 47.
4. R. H. Schwendeman, V. W. Laurie, Tables of line strengths, Pergamon Press, 1957.

5. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 3, 1298 (1958).
6. Н. Г. Басов, Докторская диссертация, ФИАН, М., 1956.
7. В. С. Троицкий, ЖЭТФ, 41, 389 (1961).
8. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 августа 1962 г.

ON THE MOLECULAR GENERATOR IN 4 mm BAND WITH THE BEAM
OF FORMALDEHYDE MOLECULES

A. F. Krupnov, V. A. Skvortzov

The design and some characteristics of beam maser at the frequency 72838 Mc/s on transition $1_{01}-0_{00}$ of the molecule CH_2O are given. The lack of fine structure of the line as well as the peculiarities of the stark effect appear to be favourable for obtaining of the high frequency stability. The order of molecular generator power was proved to be equal to 10^{-11} w.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОПТИЧЕСКОЙ ПОДКАЧКИ В ПАРАХ НАТРИЯ

B. C. Насонов

Исследована эффективность оптической подкачки в парах натрия. Наблюдались переходы между сверхтонкими и зеемановскими подуровнями основного состояния. Изучена зависимость величины сигнала парамагнитного резонанса от интенсивности света подкачки и СВЧ мощности; сделана оценка разности населенностей между подуровнями, обусловленная оптической подкачкой.

Для повышения точности магнитометров и стабильности частоты атомных стандартов, использующих метод оптической индикации парамагнитного резонанса в парах щелочных металлов, существенное значение имеет эффективность оптической подкачки. Ниже излагаются некоторые экспериментальные результаты по исследованию эффективности оптической подкачки в парах натрия.

1. ОПТИЧЕСКАЯ ПОДКАЧКА

Распределение населенностей атомов по подуровням сверхтонкой структуры основного состояния атома натрия в результате оптической подкачки определяется релаксационными процессами, стремящимися восстановить равновесное распределение населенностей, интенсивностью и спектральным составом света подкачки, шириной линии поглощения и т. п. Изучению действия релаксационных процессов посвящен ряд работ [1–4, 14–16]. Влияние спектрального состава света на эффективность оптической подкачки в парах цезия и рубидия рассмотрено в работе [17]. Процесс оптической подкачки в парах щелочных металлов довольно подробно описан в [5–8]. Поэтому, не останавливаясь на детальном описании этого процесса, отметим только некоторые его стороны.

Для того, чтобы сверхтонкие уровни $F = 1$ и $F = 2$ основного состояния атома натрия, в частности, подуровни ($F = 1$, $m_F = 0$) и ($F = 2$, $m_F = 0$), переход между которыми используется для стандартов частоты, имели различную населенность, необходимо, чтобы свет подкачки содержал сверхтонкие компоненты линий D_1 и D_2 , соответствующие переходам ($^2S_{1/2}$, $F=2$)–($^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$) или ($^2S_{1/2}$, $F=1$)–($^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$). Обычно использующийся для оптической подкачки свет спектральных ламп содержит линии D_1 и D_2 , не имеющие разрешенной сверхтонкой структуры. Выделение из этих линий участков света, соответствующих сверхтонким компонентам, оптическими методами довольно сложно. Однако поскольку вероятность поглощения атомами натрия сверхтонких компонент ($^2S_{1/2}$, $F=2$)–($^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$) превышает вероятность поглощения компонент ($^2S_{1/2}$, $F=1$)–($^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$), необходимая фильтрация происходит непосредственно в ячейке с парами натрия, в которой наблюдается парамагнитный резонанс [9].

Разная населенность зеемановских подуровней, соответствующих

одному и тому же значению F , получается только в случае, когда свет подкачки поляризован по кругу.

Проведенный в работе [10] расчет показал, что в результате фильтрации и поглощения в парах натрия света подкачки, содержащего обе линии желтого дублета, разность населенностей между уровнями изменяется вдоль ячейки в направлении распространения света. Для слабой интенсивности света, когда $B/T < 1$ (B —коэффициент поглощения в см^2 , J —интенсивность света в $\text{квант}\cdot\text{см}^{-2}\cdot\text{сек}^{-1}$, T —время релаксации в сек), что практически всегда имеет место, разность населенностей сверхтонких подуровней $F=1$, $m_F=0$ и $F=2$, $m_F=0$ не зависит от поляризации света, а в случае использования света подкачки круговой поляризации почти всегда превышает разность населенностей зеемановских подуровней одного и того же сверхтонкого состояния.

Учитывая сказанное, в процессе эксперимента для наблюдения переходов между сверхтонкими уровнями основного состояния использовался неполяризованный свет, а для наблюдения зеемановских переходов, соответствующих одному и тому же сверхтонкому состоянию,—свет круговой поляризации. Круговая поляризация света осуществлялась посредством поляроида и перестраиваемой четвертьволной пластиинки [11].

2. ИСТОЧНИКИ СВЕТА ПОДКАЧКИ

Эффективность оптической подкачки находится в прямой зависимости от интенсивности света. Обычно оптическая подкачка в парах щелочных металлов осуществляется светом от газоразрядных спектральных ламп, содержащих исследуемый металл. Спектральная яркость натриевых спектральных ламп типа СНА-2 и ДНАС-18 не высока. Попытки увеличить ее путем повышения разрядного тока через лампу не приводят к успеху в силу того, что с увеличением разрядного тока наступает сильное самообращение излучаемых лампой резонансных линий. Кроме того, с увеличением плотности разрядного тока происходит уширение спектральных линий, что снижает чувствительность оптического метода индикации парамагнитного резонанса.

В настоящее время ведутся работы по созданию спектральных ламп повышенной яркости для целей оптической подкачки, в которых самообращение излучаемых линий было бы сведено к минимуму. Так, например, в [12] приводится описание безэлектродных спектральных ламп с парами щелочных металлов, обладающих довольно высокой яркостью. Нами были исследованы натриевые лампы подобной конструкции. Питание ламп осуществлялось от высокочастотного генератора; частота генерации—порядка 100 мгц.

Сравнительная оценка спектральных ламп с точки зрения использования их в качестве источников света подкачки может быть сделана по экспериментальным данным на рис. 1—3. На каждом из этих рисунков приведена зависимость интенсивности света подкачки (прошедшего через одну и ту же ячейку с парами натрия диаметром 60 мм и длиной 100 мм) и величины сигнала парамагнитного резонанса от изменения температуры ячейки, т. е. от эффективной толщины слоя паров натрия, через который проходит свет. Внешнее постоянное магнитное поле было полностью компенсировано катушками Гельмгольца, так что наблюдался только один переход. Из этих графиков следует, что спектральный состав излучаемых линий D_1 и D_2 у различных типов ламп, а также у различных экземпляров ламп одного и того же типа, не одинаков. Так, например, из сравнения характера

поглощения света и величины сигнала парамагнитного резонанса для ламп типа ДНАС-18 и, безэлектродной следует, что излучаемые лампой ДНАС-18 линии D_1 и D_2 в значительной степени самообращены и уширены. Отдельные экземпляры ламп типа СНА-2 по спектральным характеристикам близки к безэлектродным. Ширина резонансных линий, излучаемых безэлектродными лампами, согласно рис. 2, примерно на 30% превышает ширину линий поглощения.

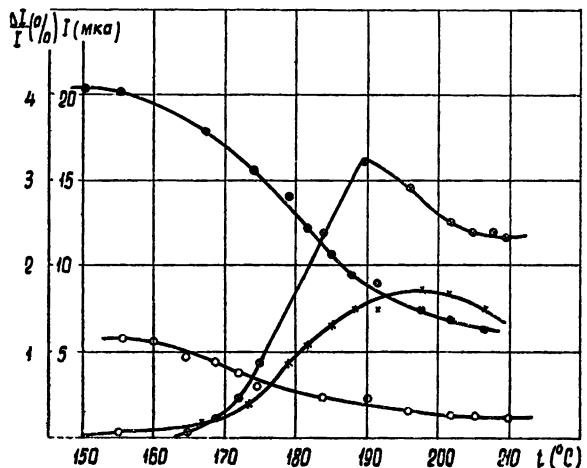


Рис. 1. Интенсивность света, прошедшего через ячейку с парами натрия (ток фотоэлемента), и величина сигнала парамагнитного резонанса $\Delta J/J$ в функции плотности паров натрия (температуры ячейки). Спектральная лампа типа СНА-2. Режим разряда идентичен для обоих экземпляров ламп. Переход $F=2-F=1$: ●●●— J , ×××— $\Delta J/J$; № 2—○○○— J , ⊕⊕⊕— $\Delta J/J$.

Рис. 2. Интенсивность света, прошедшего через ячейку с парами натрия (ток фотоэлемента), и величина сигнала парамагнитного резонанса $\Delta J/J$ в функции плотности паров натрия (температуры ячейки). Безэлектродная спектральная лампа. Переход $F=2-F=1$: ●●●— J , ×××— $\Delta J/J$.

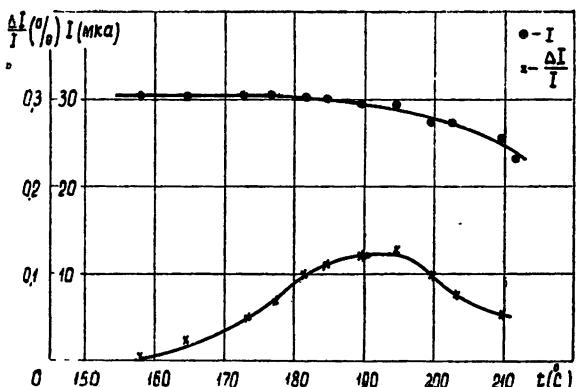
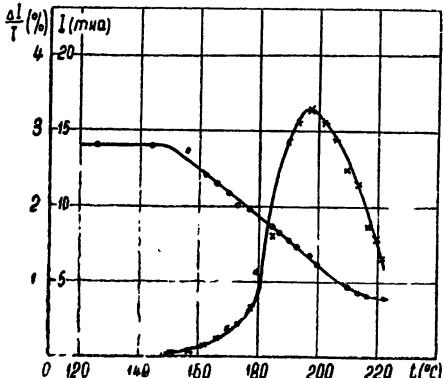


Рис. 3. Интенсивность света, прошедшего через ячейку с парами натрия (ток фотоэлемента), и величина сигнала парамагнитного резонанса $\Delta J/J$ в функции плотности паров натрия (температуры ячейки). Спектральная лампа типа ДНАС-18. Переход $F=2-F=1$: ●●●— J , ×××— $\Delta J/J$.

Оптический метод индикации парамагнитного резонанса предъявляет существенные требования к способам питания спектральных ламп. Так, например, использование переменного тока частоты 50 гц по вполне очевидным причинам не приемлемо. В случае питания спектральных ламп постоянным током трудно избежать возбуждения этих ламп. Даже в случае использования для питания спектральных ламп токов повышенной частоты (порядка 200 кгц) наблюдаются периоды неустойчивой работы, выражющиеся в возникновении в разряде относительно низкочастотных нестационарных колебаний в виде коротких импульсов. Некоторыми преимуществами в этом отношении обладают безэлектродные спектральные лампы, менее склонные к возбуждению. Однако, как показал эксперимент, у отдельных экземпляров безэлектродных ламп с аргоновым наполнением при определенном режиме питающего их высокочастотного генератора также наблюдались относительно низкочастотные нестационарные колебания в разряде.

Для оценки величины флюктуаций излучаемого спектральными лампами света были проведены сравнительные измерения шумов на выходе индицирующей системы при подаче на фотоэлемент света от спектральных ламп и света от лампы накаливания. Лампа накаливания питалась постоянным током, а спектральные лампы типа СНА-2 и ДНАС-18—переменным током частоты 200 кгц. Измерения шумов производились на частоте 22 гц в полосе 1 гц. Собственные шумы индицирующей системы составляли примерно 1/40 часть шумов, соответствующих случаю, когда на фотоэлемент подавался свет от лампы накаливания. Ток фотоэлемента был равен примерно 5 мка. Из десяти экземпляров обследованных ламп типа СНА-2 три имели шум, превышающий шум, обусловленный светом от лампы накаливания, в 30÷40 раз по напряжению, две—в 1,3 раза и остальные—в 2÷7 раз. Безэлектродные лампы давали превышение шума в 2÷3 раза.

3. ЯЧЕИКА С ПАРАМИ НАТРИЯ

Ячейки с парами натрия, в которых осуществлялась оптическая подкачка и наблюдался парамагнитный резонанс, имели цилиндрическую форму и были выполнены из молибденового стекла. Как известно, существенный вклад в релаксацию дает процесс дезориентации атомов при соударении их со стенками ячейки. Для того, чтобы в значительной степени устраниТЬ этот эффект, ячейку с парами натрия наполняют буферным газом, вероятность дезориентации при столкновении с атомами которого мала. Наличие буферного газа приводит к значительному увеличению интервала времени между столкновениями атомов натрия со стенками, т. е. увеличению времени жизни атома в том или ином состоянии. На рис. 4 приведена зависимость величины сигнала парамагнитного резонанса и ширины линии перехода ($F=2$, $m_F=0$)—($F=1$, $m_F=0$) в функции давления буферного газа (аргона) для цилиндрической ячейки диаметром 60 мм и длиной 100 мм. Из этого рисунка следует, что для давлений, меньших 10 мм рт. ст., существенным является процесс дезориентации при соударениях атомов натрия со стенками ячейки; при больших давлениях в основном играют роль соударения с атомами буферного газа.

Другой путь, позволяющий в значительной степени устраниТЬ эффект дезориентации атомов при соударении их со стенками ячейки,— это покрытие стенок пленками веществ, вероятность дезориентации при соударении с которыми мала. Известен целый ряд таких веществ [13]. Вследствие относительно высокой рабочей температуры ячейки

с натрием $150 \pm 200^\circ\text{C}$ были опробованы только диметилдихлорсилан и диэтилдихлорсилан. В случаях, когда внутренняя поверхность ячейки была обработана любым из этих веществ, наблюдался интенсивный сигнал парамагнитного резонанса, в то время как, например, в цилиндрических ячейках диаметром 30 мм , не подвергавшихся такой обработке, сигнал парамагнитного резонанса практически не был обнаружен. Кроме того, подобная обработка приводит к сужению линии парамагнитного резонанса. Так, в ячейках диаметром 30 мм , подвергнутых обработке диметилдихлорсиланом или диэтилдихлорсиланом, ширина линии перехода ($F=2, m_F=0$)—($F=1, m_F=0$) достигала 500 гц , в то время как в необработанной ячейке большего диаметра (60 мм) она была равна 1100 гц . Были исследованы также цилиндрические ячейки диаметром 20 мм , обработанные диметилдихлорсиланом; в них наблюдался достаточно интенсивный сигнал парамагнитного резонанса, и ширина линии перехода ($F=2, m_F=0$)—($F=1, m_F=0$) составляла 600 гц . Сигнал превышал уровень шумов более, чем на 20 дБ , при выходной полосе 1 гц .

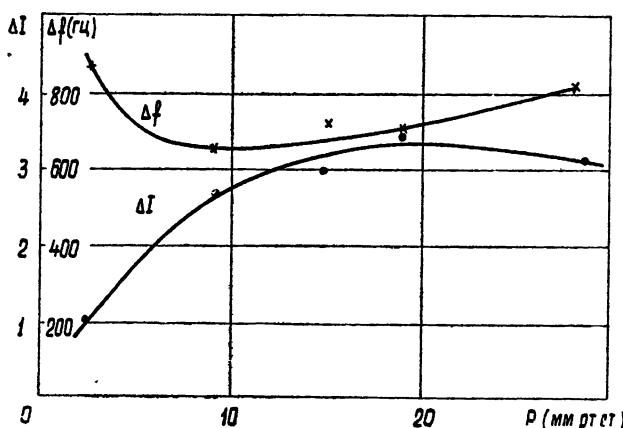


Рис. 4. Величина сигнала парамагнитного резонанса ΔJ и ширина линии перехода ($F=2, m_F=0$)—($F=1, m_F=0$) при изменении давления буферного газа (аргона), наполняющего ячейку с парами натрия.

Интересно отметить, что в цилиндрических ячейках длиной 100 мм , диаметром 30 мм и 20 мм , наполненных аргоном при давлении 20–30 мм рт. ст. и обработанных диметилдихлорсиланом или диэтилдихлорсиланом, наблюдалась затрудненная диффузия паров натрия вдоль ячейки. Именно, на том конце ячейки, где находился отросток с металлическим натрием, можно было наблюдать интенсивную флюоресценцию, в то время как на противоположном ее не было заметно. Причины этого явления, наблюдавшегося даже после продолжительной тренировки ячейки, остаются неясными.

4. НАБЛЮДЕНИЕ ПАРАМАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

а) *Зависимость величины сигнала парамагнитного резонанса от интенсивности света подкачки и СВЧ мощности.* Как было показано ранее [14], величина сигнала парамагнитного резонанса довольно сложным образом зависит от интенсивности света подкачки и мощности радиочастотного сигнала. В случае слабой интенсивности света и малой мощности радиочастотного сигнала, т. е. когда время жизни атомов на том или ином подуровне основного состояния определяется в основном только релаксационными процессами, величина сигнала парамагнитного резонанса ΔJ пропорциональна мощности радиочастотного сигнала и квадрату интенсивности света подкачки J . Приведен-

ные на рис. 5 экспериментальные данные подтверждают квадратичную зависимость ΔJ от J . Максимальное значение ΔJ на этом рисунке соответствовало интенсивности света на выходе ячейки примерно $10^{15} \text{ квант} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$.

Для получения больших значений ΔJ необходимо повышать интенсивность света подкачки. Однако значительное увеличение интенсивности света может привести к уширению линии парамагнитного резонанса, а следовательно, и к уменьшению ΔJ . Оптимальная с этой точки зрения величина интенсивности будет соответствовать условию $BJ \approx 1/T$, когда вклад во время жизни атомов на том или ином подуровне основного состояния, обусловленный релаксационными процессами и переводом атомов светом подкачки в возбужденное состояние, одного порядка. Для случая, приведенного на рис. 5, $BJ_{\max} \approx 16$. Таким образом, принимая во внимание, что время релаксации $T \approx 10^{-3} \text{ сек}$, интенсивность света подкачки может быть увеличена примерно в 60 раз; соответственно должно возрасти и значение ΔJ .

Для определения минимального уровня радиочастотного сигнала, который может быть обнаружен методом оптической индикации парамагнитного резонанса, и мощности, при которой наступает насыщение, была исследована зависимость величины сигнала парамагнитного резонанса от СВЧ мощности. Методика измерений была следующей. Ячейка с парами натрия помещалась в резонатор с добротностью порядка 1600, работающий на колебаниях типа TE_{011} . В резонатор подавался СВЧ сигнал от клистронного генератора, стабилизированного системой ФАП по кварцевому генератору. Частота кварцевого, а следовательно, и клистронного генератора могла изменяться посредством реактивной лампы. На сетку реактивной лампы подавалось небольшое переменное (частоты 22 Гц) и медленно изменяющееся пилообразное напряжения. При прохождении частоты клистронного генератора через резонанс интенсивность света на выходе ячейки с парами натрия оказывалась промодулированной с частотой 22 Гц. Сигнал этой частоты снимался с нагрузки фотоэлемента, усиливался, детектировался синхронным детектором и записывался самописцем. Пример записи приведен на рис. 6. Таким образом, на ленте самописца воспроизводилось значение производной от формы резонансной кривой соответствующего перехода. Наблюдался переход между сверхтонкими подуровнями ($F=2, m_F=0$) и ($F=1, m_F=0$) $^2S_{1/2}$ состояния.

На рис. 7 приведены результаты эксперимента. Ось абсцисс на рисунке соответствует значениям подводимой к резонатору СВЧ мощности, ось ординат— относительным изменениям света на выходе ячейки, соответствующим максимальному значению производной. Как следует из этих данных, при малых значениях подводимой к резонатору

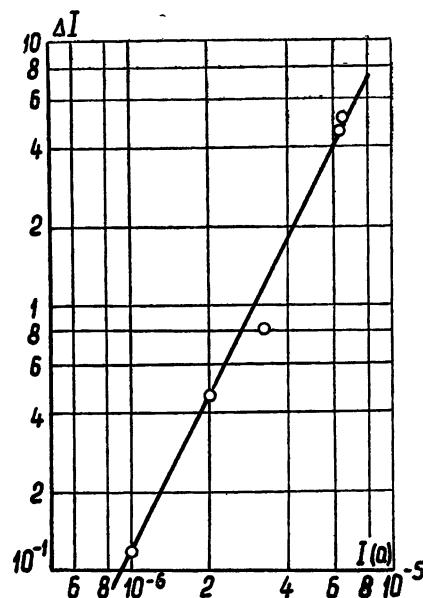


Рис. 5. Зависимость величины сигнала парамагнитного резонанса от интенсивности света подкачки (тока фотодиода). Переход $(^2S_{1/2}, F=2) - (^2S_{1/2}, F=1), H_z = 0$.

СВЧ мощности наблюдается линейная зависимость изменения интенсивности света от СВЧ мощности. Мощность, соответствующая отношению сигнал/шум, равному единице, составила примерно 10^{-7} вт при выходной полосе индицирующего устройства 0,25 гц. Согласно теоретической оценке, чувствительность такого метода индикации должна быть более, чем на порядок, выше. Это расхождение объясняется недостаточно полным согласованием резонатора с СВЧ генератором и значительным уровнем шумов спектральной лампы.



Рис. 6. Запись перехода ($F = 2, m_F = 0$)—($F = 1, m_F = 0$) основного состояния атома натрия.

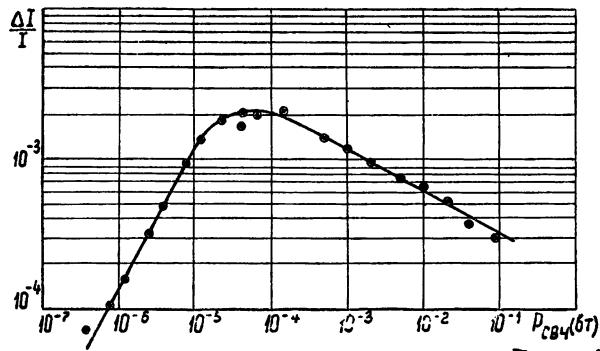


Рис. 7. Зависимость сигнала парамагнитного резонанса от величины СВЧ мощности. Переход ($F=2, m_F = 0$)—($F=1, m_F = 0$).

С увеличением СВЧ мощности наблюдается эффект насыщения, приводящий к уширению линии парамагнитного резонанса, в результате чего изменение интенсивности света с дальнейшим увеличением СВЧ мощности падает.

б) Наблюдение переходов между $F=2$ и $F=1$ уровнями в $^2S_{1/2}$ состоянии.

На рис. 8 приведена схема уровней основного состояния атома натрия и относительные вероятности радиочастотных переходов. Частота переходов между соответствующими подуровнями определяется формулой Брейта—Раби [15]. В частности, для слабых магнитных полей, учитывая члены разложения, содержащие H не выше, чем во второй степени, она может быть приведена к виду

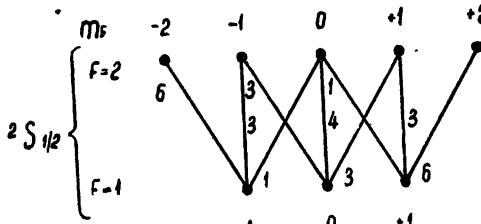


Рис. 8. Схема уровней и относительные вероятности переходов для основного состояния атома натрия.

$$\nu = 1771,6262 \cdot 10^6 + [699561 (m_F + m'_F) - 1126,6(m_F - m'_F)] H + \\ + 2209,9 \left[1 - \frac{1}{8} (m_F^2 + m'^2_F) \right] H^2.$$

Отсюда следует, что в магнитном поле должны наблюдаться семь переходов, соответствующих $\Delta m=0, \pm 1$. На рис. 9–12 приведены осциллограммы этих переходов. Рис. 9 соответствует линейной поляризации СВЧ поля, когда магнитная составляющая высокочастотного поля параллельна постоянному полю; наблюдаются три перехода, соответствующие $\Delta m=0$. Рис. 10 соответствует случаю, когда СВЧ поле имеет σ^+ и σ^- поляризации, т. е. направления магнитной составляющей СВЧ поля и постоянного взаимно перпендикулярны; наблюдаются переходы, соответствующие $\Delta m=\pm 1$. Рис. 11, где видны все семь переходов, соответствует смешанной поляризации СВЧ поля, когда направление магнитной составляющей СВЧ поля составляет угол около 45° с направлением постоянного магнитного поля. Случай, когда постоянное магнитное поле равно нулю и все переходы сливаются в один, примерно в семь раз больший по интенсивности, изображен на рис. 12. Для оптической подкачки использовался неполяризованный свет от спектральной безэлектродной лампы, содержащий обе линии (D_1 и D_2), примерно равные по интенсивности. Изменение интенсивности света на выходе ячейки, соответствующее максимальному значению резонансной кривой на рис. 12, составляет 4%.

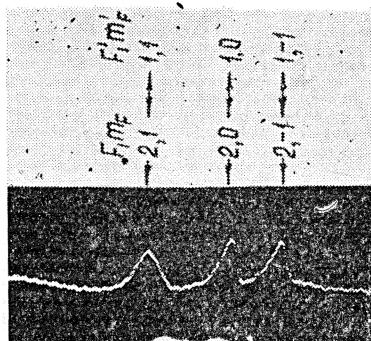


Рис. 9.

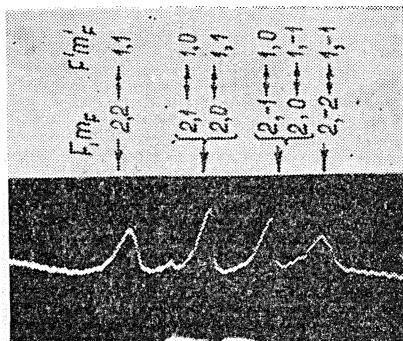


Рис. 10.

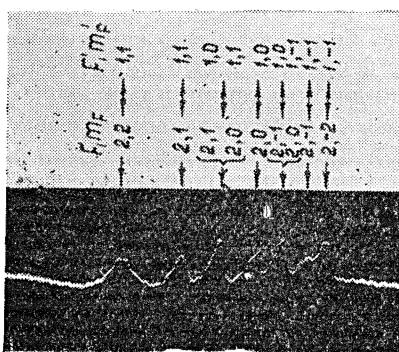
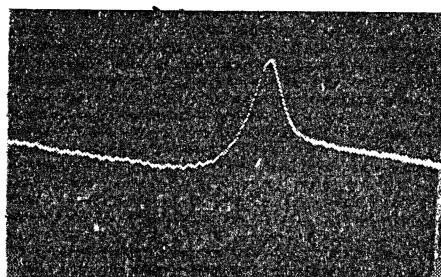


Рис. 11.

Рис. 12. $H=0$.

в) Наблюдение переходов между зеемановскими подуровнями с одним и тем же значением F в ${}^2S_{1/2}$ состоянии. Частота переходов между соответствующими зеемановскими подуровнями основного состояния для случая слабого магнитного поля, определяемая формулой Брейта–Раби, с точностью до членов, содержащих H во второй степени, равна для $F=2$

$$\nu = 698434,64 (m_F - m'_F) H - 276,24(m_F^2 - m'^2_F) H^2;$$

для $F=1$

$$\nu = 700687,96 (m_F - m'_F) H - 276,24 (m_F^2 - m_E'^2) H^2.$$

Запись переходов приведена на рис. 13, где видны шесть переходов, четыре из которых соответствуют значению $F=2$ и два значению $F=1$. Переходы наблюдались в магнитном поле 12,5 эрстед. Рис. 13 соответствует относительно слабой напряженности высокочастотного поля. При большей напряженности высокочастотного поля, кроме основных, наблюдаются также двухквантовые переходы, соответствующие $\Delta m=2$ (рис. 14).

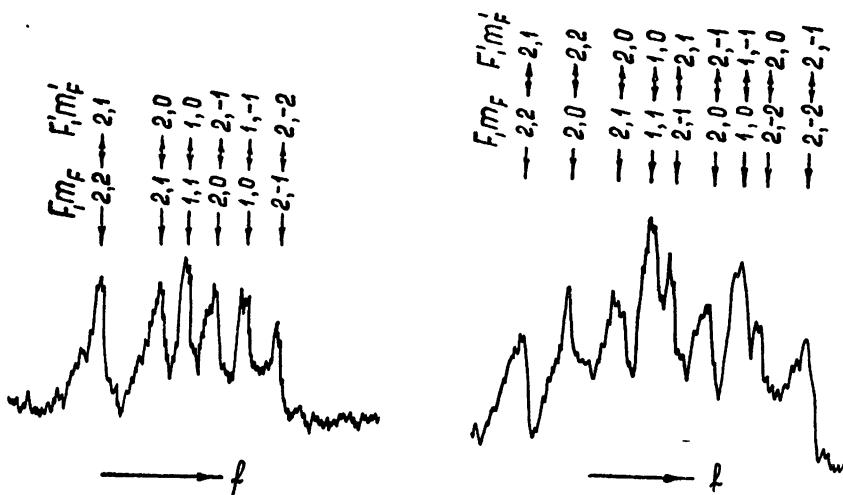


Рис. 13. $H = 12,5$ эрстед.

Рис. 14. $H = 18$ эрстед.

г) *Оценка разности населенностей между уровнями, обусловленной действием оптической подкачки.* Для точной оценки разности населенностей между теми или иными подуровнями, обусловленной оптической подкачкой, необходимо знать более детально спектральный состав света подкачки и учитывать тот факт, что распределение населенностей по подуровням изменяется по длине ячейки. Как показывает эксперимент, ширина линий, излучаемых спектральными лампами, значительно превышает ширину линий поглощения; однако теории явлений фильтрации и оптической подкачки широкой спектральной линией нет. Поэтому для приближенной оценки разности населенностей воспользуемся результатами расчета, приведенного в [10], справедливого, когда освещаящая линия уже линии поглощения. Заметим, однако, что полученные таким образом оценки будут меньше действительных значений разностей населенностей.

Уравнение (6) в [10] можно представить в виде

$$J_m = J_m(0) \exp \left(-B \sum_i \alpha_{im} \int_0^x a_i dx \right).$$

Населенности уровней a_i зависят от интенсивности сверхтонких компонент J_m и от величины высокочастотного поля. Поскольку интенсивность прошедшего света меняется слабо даже для высокочастотного сигнала, соответствующего условию насыщения, можно считать, что населенности всех уровней, кроме тех, между которыми наблю-

дается переход (a_l и a_k), остаются неизменными, а населенности a_l и a_k выравниваются. При этих допущениях

$$\frac{\Delta J_m}{J_m} = B \bar{a} x \frac{\alpha_{km} - \alpha_{lm}}{2},$$

где

$$\bar{a} = \frac{1}{x} \int_0^x (a_l - a_k) dx.$$

Пусть

$$\sum_m J_m : J_1 : J_2 : J_3 : J_4 = 1 : K_1 : K_2 : K_3 : K_4;$$

тогда

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\sum_m \Delta J_m}{\sum_m J_m} = B a_0 x \frac{\bar{a}}{a_0} \sum_m K_m \frac{\alpha_{km} - \alpha_{lm}}{2}$$

или

$$\frac{8 \bar{a}}{a_0} = \frac{\Delta J}{J} \left(\frac{1}{8} a_0 B x \sum_m K_m \frac{\alpha_{km} - \alpha_{lm}}{2} \right)^{-1},$$

Как следует из рис. 1, 2, максимальному значению сигнала паромагнитного резонанса соответствует уменьшение интенсивности света на выходе ячейки примерно на 50%. Из графиков, приведенных в [10], для не слишком малого времени релаксации это соответствует

$$a_0 B x = 0,5;$$

тогда для света любой поляризации имеем:

$$1 : K_1 : K_2 : K_3 : K_4 = 1 : 0,25 : 0,36 : 0,14 : 0,25.$$

Результаты расчета разности населенностей приведены в таблице 1.

Таблица 1

Относительная разность населенностей подуровней основного состояния атома натрия, обусловленная действием оптической подкачки ($a = \frac{1}{8} a_0$, где a_0 — число атомов натрия в единице объема)

Уровни F, m_F	$\Delta a/a$ С оптической подкачкой	$\Delta a/a$ Больцмановское распределение
2,2—2,1	$0,9 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$
2,1—2,0	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$
2,0—2,—1	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$
2,—1—2,—2	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$
1,0—2,0	$5 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$

При сравнении приведенных в таблице относительных разностей населенностей различных подуровней необходимо принимать во внимание, что интенсивность света подкачки в случае наблюдения сверхтонких переходов была примерно на 50% выше, чем при наблюдении зеемановских переходов.

1) Сравнительное исследование спектральных ламп показало, что наиболее эффективная оптическая подкачка имеет место при использовании в качестве источника света безэлектродных спектральных ламп. Отдельные экземпляры ламп типа СНА-2 по своим спектральным характеристикам близки к безэлектродным лампам. Лампы типа ДНАС-18 излучают в значительной степени уширенные и самообращенные резонансные линии. Величина сигнала парамагнитного резонанса с этими лампами почти на порядок меньше, чем при использовании безэлектродных спектральных ламп.

2) Избыточная населенность сверхтонкого подуровня $F=2$ по сравнению с населенностью подуровня $F=1$ в результате оптической подкачки достигает 3,5% при использовании света от безэлектродной спектральной лампы.

3) Обработка внутренней поверхности ячеек с парами натрия диметилхлорсиланом или диэтилдихлорсиланом для снижения эффекта дезориентации при соударении атомов натрия со стенками ячейки дает положительный результат.

4) Минимальная ширина линии перехода ($F=2, m_F = 0$)—($F=1, m_F = 0$), использующегося для стандартов частоты, достигала 500 гц.

В заключение автор выражает благодарность С. И. Боровицкому и М. Т. Греховой за внимание и помощь в проведении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. G. Dehmelt, Phys. Rev., **105**, 1487 (1957).
2. W. Franzen, Phys. Rev., **115**, 850 (1959).
3. W. B. Hawkins, Phys. Rev., **123**, 544 (1961).
4. Ван Юэ-Джу, Диссертация, ИРЭ АН СССР, 1960.
5. W. Franzen, A. G. Emslie, Phys. Rev., **108**, 1453 (1957).
6. A. Kastler, J. Opt. Soc. Am., **47**, 460 (1957).
7. A. L. Bloom, J. Phys. Radium, **19**, 881 (1958).
8. Г. В. Скроцкий, Т. Г. Изюмова, УФН, **22**, (1961).
9. W. E. Bell, A. L. Bloom, Phys. Rev., **109**, 219 (1958).
10. В. С. Насонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **6**, 529 (1963).
11. В. С. Насонов, Авт. свид. № 145366.
12. W. E. Bell, A. L. Bloom, J. Lynch, Rev. Sci. Instr., **32**, 82 (1961).
13. H. M. Goldenberg, D. Kerridge, N. F. Ramsey, Phys. Rev., **123**, 530 (1961).
14. W. E. Bell, A. L. Bloom, Phys. Rev., **107**, 1559 (1957).
15. P. T. Skalinski, J. Phys. Radium, **19**, 890 (1958).
16. L. W. Anderson, A. T. Ramsey, Phys. Rev., **124**, 1862 (1961).
17. M. Arditi, T. R. Carver, Phys. Rev., **124**, 800 (1961).

Поступила в редакцию
24 сентября 1962 г.

INVESTIGATION OF THE OPTICAL PUMPING EFFICIENCY IN Na VAPOUR

V. S. Nasonov

The efficiency of the optical pumping in Na vapours has been investigated. Transitions between superfine and Seeman sublevels of ground state have been observed. The dependence of signal power at paramagnetic resonance upon the pumping light intensity and VHF power has been studied. Estimation has been carried out of difference in populations of sublevels caused by optical pumping.

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАСЕЛЕННОСТИ АТОМОВ НАТРИЯ
ПО ПОДУРОВНИЯМ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ОПТИЧЕСКОЙ ПОДКАЧКИ**

B. C. Насонов

Исследовано распределение населенности атомов натрия по подуровням основного состояния под действием оптической подкачки. Расчет выполнен для круговой, линейной и эллиптической поляризаций света, содержащего линии D_1 и D_2 , в предположении, что линия поглощения имеет разрешенную сверхтонкую структуру.

Метод оптической индикации парамагнитного резонанса и метод оптической подкачки для получения веществ в неравновесном состоянии находят в настоящее время все более широкое применение. На их основе уже созданы высокостабильные и малогабаритные атомные стандарты частоты [1], высокочувствительные магнитометры [2], оптические генераторы и усилители [3], возможно осуществление высокочувствительных детекторов субмиллиметрового и инфракрасного диапазонов [4].

Теоретическое и экспериментальное исследование отдельных сторон процесса оптической подкачки в парах щелочных металлов выполнено в ряде работ [5]. Однако дальнейшее совершенствование, например, атомных стандартов частоты, использующих переход между сверхтонкими подуровнями основного состояния атомов щелочных металлов и оптический метод индикации этого резонанса, требует выяснения оптимальных условий процесса оптической подкачки с точки зрения получения максимального отношения сигнал/шум.

Величина сигнала парамагнитного резонанса определяется разностью населенностей между соответствующими подуровнями, которая, в свою очередь, зависит от целого ряда факторов, таких как релаксационные процессы, интенсивность и спектральный состав света подкачки, структура линии поглощения, геометрия ячейки с парами щелочных металлов, многократное поглощение переизлученных квантов света и диффузия атомов внутри ячейки, дезориентация атомов в возбужденном состоянии и т. д. Феноменологический расчет величины сигнала с учетом всех этих факторов даже для стационарного случая представляет собой довольно сложную задачу. В работе [6] приводится расчет величины сигнала парамагнитного резонанса для случая атомов рубидия и неполяризованного света подкачки при некоторых упрощающих предположениях, среди которых особенно существенным является предположение о наличии только одной спектральной компоненты дублета рубидия в свете подкачки.

Ниже приводятся некоторые результаты вычислений распределения населенности атомов натрия по подуровням основного состояния под действием оптической подкачки с учетом релаксационных процессов, спектрального состава и различной поляризации света подкачки, а также фильтрации его в парах натрия.

ФИЛЬТРАЦИЯ СВЕТА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАСЕЛЕННОСТИ АТОМОВ

Спин ядра атома натрия равен $3/2$ и его основное состояние расщеплено на два сверхтонких подуровня со значением $F=1$ и $F=2$. В слабом магнитном поле они расщепляются на восемь подуровней $(2,+2)$, $(2,+1)$, $(2,0)$, $(2,-1)$, $(2,-2)$, $(1,+1)$, $(1,0)$, $(1,-1)^*$. В дальнейшем будем различать эти подуровни, обозначая их цифрами от 1 до 8.

В обычном состоянии населенность уровней определяется больцмановским распределением. Оно нарушается под действием оптической подкачки—облучения атомов натрия желтым резонансным излучением, состоящим из линий D_1 и D_2 , которые отвечают переходам $(^2P_{1/2} - ^2S_{1/2})$ и $(^2P_{3/2} - ^2S_{1/2})$. Относительные вероятности поглощения этого излучения соответствующей поляризации атомами натрия, находящимися на том или ином подуровне основного состояния, приведены в таблице 1.

Таблица 1
Относительные вероятности α_{im} поглощения атомами натрия линий D_1 и D_2 , имеющих круговую и линейную поляризацию

<i>i</i>	<i>F, m_F</i>	<i>D</i> ₁			<i>D</i> ₂		
		σ^+	σ^-	π	σ^+	σ^-	π
1	2, +2	0	4	1	6	2	2
2	2, +1	1	3	1	5	3	2
3	2, 0	2	2	1	4	4	2
4	2, -1	3	1	1	3	5	2
5	2, -2	4	0	1	2	6	2
6	1, +1	3	1	1	3	5	2
7	1, 0	2	2	1	4	4	2
8	1, -1	1	3	1	5	3	2

Как отмечалось в [7], используя для подкачки свет, содержащий только линию D_1 круговой поляризации, можно получить почти полную заселенность зеемановского подуровня, не поглощающего свет.

Для стандартов частоты используется переход между подуровнями ($F=1, m_F=0$)—($F=2, m_F=0$), частота которого слабо зависит от внешних факторов, в частности, от внешнего магнитного поля. Однако вероятности поглощения света атомами, находящимися на этих подуровнях, равны для любой поляризации света. Следовательно, для того, чтобы процесс оптической подкачки приводил к различной населенности атомами именно этих подуровней, необходимо, чтобы свет содержал только одну из сверхтонких компонент линий D_1 и D_2 , соответствующую переходам атомов с подуровней $F=1$ или $F=2$ основного состояния.

Для оптической подкачки обычно используются спектральные лампы, излучение которых содержит одновременно обе линии D_1 и D_2 , примерно равные по интенсивности и не имеющие разрешенной сверхтонкой структуры. Фильтрация сверхтонких компонент этих линий посредством каких-либо оптических способов представляет собой довольно сложную задачу. Однако в качестве такого фильтра могут быть использованы сами атомы натрия [8], при условии, если сверхтонкая структура разрешена в линии поглощения.

Результаты расчета фильтрации сверхтонких компонент для неполяризованного света без учета релаксационных процессов, а также фильтрации линий D_1 и D_2 , поляризованных по кругу, без учета сверхтонкого расщепления основного состояния приведены в работе [9].

* Числа в скобках соответствуют F и m_F .

Для более детального выяснения процесса оптической подкачки, которое позволило бы уточнить, например, требования к спектральному составу света подкачки, представляет интерес расчет фильтрации и распределения населения атомов, в котором были бы учтены как релаксация, так и наличие сверхтонкой структуры в основном состоянии. Такой расчет был проделан для атомов натрия при следующих предположениях: 1) вероятность перехода атома из возбужденного состояния на любой подуровень основного состояния одинакова; 2) многократное поглощение переизлученных квантов света и диффузия атомов внутри рассматриваемого объема отсутствуют; 3) время жизни атомов в возбужденном состоянии пренебрежимо мало; 4) в основном состоянии действует процесс релаксации, стремящийся выравнивать населения подуровней и характеризующийся временем T ; 5) свет подкачки содержит две линии (D_1 и D_2); 6) ширина излучаемых оптических линий не превышает ширину линии поглощения; 7) линия поглощения имеет разрешенную сверхтонкую структуру.

Запишем уравнение подкачки с коэффициентами Эйнштейна в виде:

$$\dot{a}_i = -a_i p_i + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 a_j p_j + \frac{1}{T} \left(\frac{a_o}{8} - a_i \right); \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^8 a_i = a_o, \quad (2)$$

где $i = 1 \dots 8$, a_i —населенность i -го уровня, a_o —число атомов в единице объема, T —время релаксации. Считаем, что при отсутствии оптической подкачки все подуровни населены одинаково. Число поглощенных атомом квантов света за секунду

$$p_i = \sum_m p_{im}, \quad (3)$$

где

$$p_{im} = B J_m a_{im} \quad (4)$$

(B —постоянная поглощения резонансного излучения в парах натрия, a_{im} —относительная вероятность поглощения спектральной компоненты J_m света подкачки атомами, находящимися на i -ом уровне).

Изменение интенсивности компоненты J_m света подкачки в результате поглощения

$$\frac{dJ_m}{dx} = - \sum_{i=1}^8 a_i p_{im}, \quad (5)$$

x —расстояние от передней стенки ячейки с парами натрия вдоль распространения света.

Для стационарного случая ($\dot{a}_i = 0$) с учетом (2) уравнения (1) и (5) можно привести к виду:

$$\frac{dJ_m}{dx} = -J_m B \sum_{i=1}^8 a_i a_{im}; \quad (6)$$

$$a_i = \frac{C(x)}{B \sum_m a_{im} J_m + 1/T}, \quad (6a)$$

где

$$C(x) = \frac{a_0}{\sum_{l=1}^8 \left(B \sum_m a_{lm} J_m + 1/T \right)^{-1}}.$$

Эта система уравнений (6) была решена на электронной счетной машине для круговой, линейной и эллиптической поляризаций света.

Таблица 2

Относительные вероятности a_{lm} поглощения атомами натрия линий D_1 и D_2 , имеющих различную поляризацию, для случая, когда в линии поглощения разрешена сверхтонкая структура

Круговая поляризация				Линейная поляризация				Эллиптическая поляризация				
σ^+				$\frac{1}{2} \sigma^+ + \frac{1}{2} \sigma^-$				$\frac{3}{4} \sigma^+ + \frac{1}{4} \sigma^-$				
линия	D_1	D_2		D_1	D_2		D_1	D_2		D_1	D_2	
m	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0	0	6	0	2	0	4	0	1	0	5	0
2	1	0	5	0	2	0	4	0	3/2	0	9/2	0
3	2	0	4	0	2	0	4	0	2	0	4	0
4	3	0	3	0	2	0	4	0	5/2	0	7/2	0
5	4	0	2	0	2	0	4	0	3	0	3	0
6	0	3	0	3	0	2	0	4	0	5/2	0	7/2
7	0	2	0	4	0	2	0	4	0	2	0	4
8	0	1	0	5	0	2	0	4	0	3/2	0	9/2

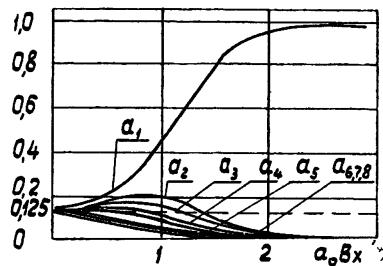
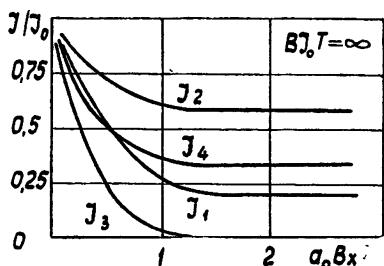
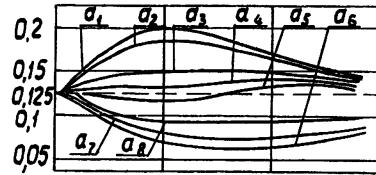
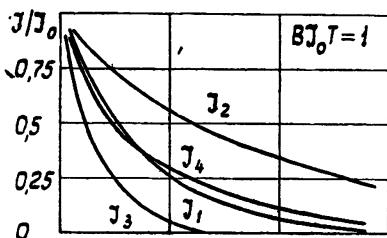
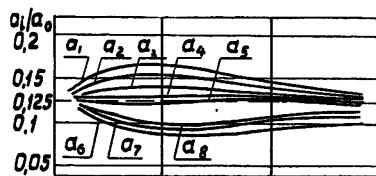
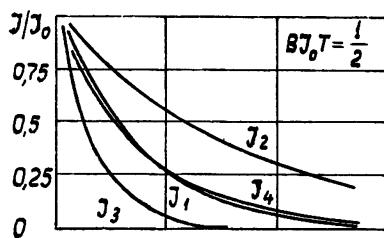


Рис. 1. Свет круговой поляризации (σ).

В таблице 2 приведены значения α_{lm} , использовавшиеся при расчете. Некоторые результаты расчета приведены на рис. 1—5, где приведены значения населенности уровней в функции $a_0 Bx$ для соответствующих значений поляризации света, времени релаксации и начального соотношения интенсивностей компонент света $J_m o$. Кроме того, рис. 1—3 иллюстрируют процесс фильтрации сверхтонких компонент J_m .

Как показывают вычисления, разность населенностей между уровнями является функцией x . В случае, если начальные интенсивности всех компонент света равны (рис. 1—3), то при малых значениях x разность населенностей, обусловленная оптической подкачкой, мала. Затем по мере фильтрации компонент света она увеличивается, причем наиболее населенными оказываются уровни с $F=2$, т. е. уровни, соответствующие большим значениям энергии. При дальнейшем увеличении x в случае конечного времени релаксации эффективность оптической подкачки снова падает, так как интенсивность света подкачки становится малой.

Несколько иное распределение населенностей имеет место при других соотношениях начальных интенсивностей сверхтонких компонент света подкачки. Так, например, в случае, изображенном на рис. 4а, в, $a_1 + a_5$ имеют разные значения при $x=0$ в результате действия оптической подкачки. Затем при некотором значении x они выравниваются, что соответствует выравниванию в результате фильтрации интенсивностей компонент света J_1 и J_3 ; при дальнейшем увеличении x

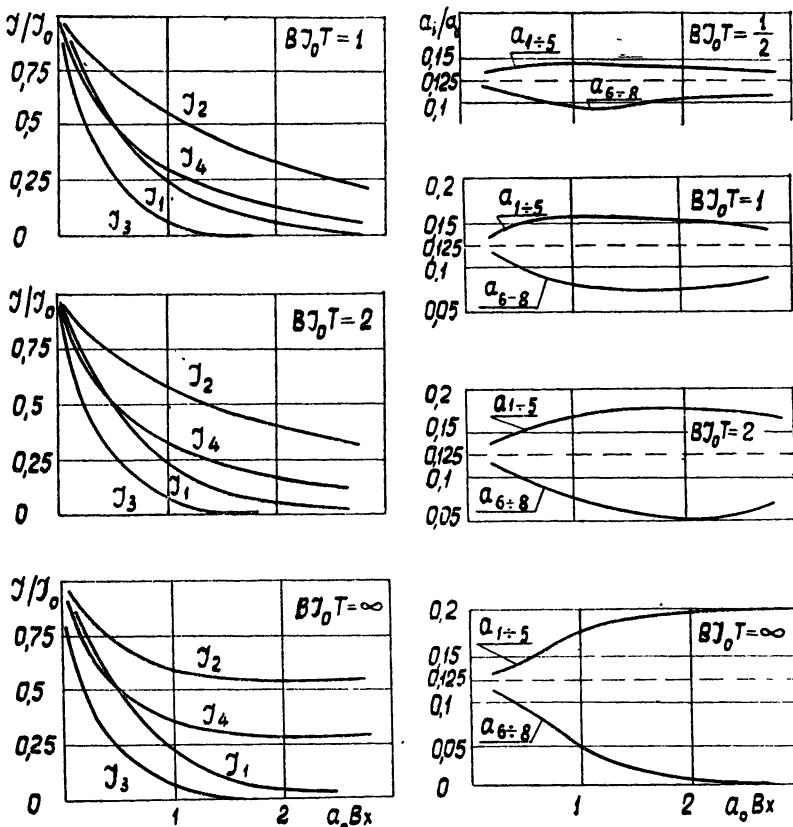


Рис. 2. Свет линейной поляризации (π).

вновь принимают разные значения. Аналогично ведут себя населенности подуровней $a_6 \div a_8$, но они принимают одинаковые значения при другом x , которому соответствует равенство интенсивностей сверхтонких компонент J_2 и J_4 . Интересно отметить, что разность населенностей между подуровнями a_3 и a_7 в этом случае практически не зависит от поляризации света.

Из сравнения a_3 и a_7 для случая $BJ_0 T = 1$ и разных соотношений интенсивностей сверхтонких компонент в излучении источника света подкачки следует, что наибольшая разность населенностей между этими двумя подуровнями при одной и той же суммарной интенсивности света подкачки получается, когда начальная интенсивность линии D_2 превышает интенсивность линии D_1 . Кроме того, заметная разность между a_3 и a_7 в этом случае наблюдается на большей длине ячейки. Однако в случае, когда интенсивность линии D_1 превышает D_2 , максимальная разность между a_3 и a_7 имеет место при меньших значениях x . Этот результат очевиден, если принять во внимание, что вероятность поглощения квантов, соответствующих линии D_2 , в два раза превышает соответствующую вероятность для линии D_1 . Разность населенностей между зеемановскими подуровнями получается наибольшей, когда в свете подкачки преобладает линия D_1 , а уровни оказываются населенными неодинаково, начиная с $x = 0$.

Таким образом, приведенные выше результаты могут быть использованы для определения оптимальной длины ячейки. Если размеры ячейки, находящейся в СВЧ поле, ограничены, например, размерами резонатора, то ячейка может быть разделена на фильтрующую, расположенную вне резонатора, и рабочую, находящуюся в СВЧ поле. В случае неразрешенной сверхтонкой структуры линии поглощения,

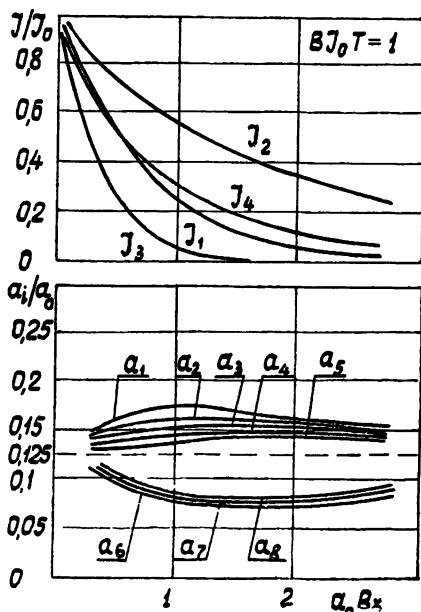


Рис. 3. Свет эллиптической поляризации

$$\left(\frac{3}{4} \sigma^+ + \frac{1}{4} \sigma^- \right).$$

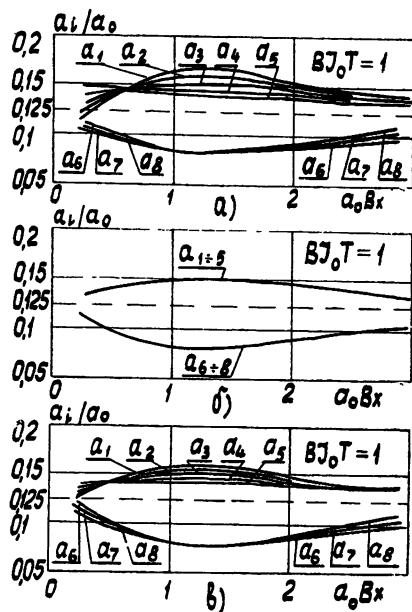


Рис. 4. а) Свет круговой поляризации; б) свет линейной поляризации; в) свет эллиптической поляризации. При $x=0$: $J_1=J_2=J_6$; $J_3=J_4=J_0/2$.

например, из-за допплеровского уширения, свет подкачки можно рассматривать состоящим из двух компонент—линий D_1 и D_2 . Коэффициенты α_{lm} в этом случае соответствуют значениям, приведенным в таблице 1. Результаты вычислений показывают, что действие оптической подкачки в этом случае может привести к различной населенности подуровней, имеющих равные значения F , при использовании света, поляризованного по кругу. Условия для получения различной населенности a_3 и a_7 в этом случае отсутствуют.

В заключение автор выражает благодарность С. И. Боровицкому и М. Т. Греховой за постоянный интерес и помочь в работе.

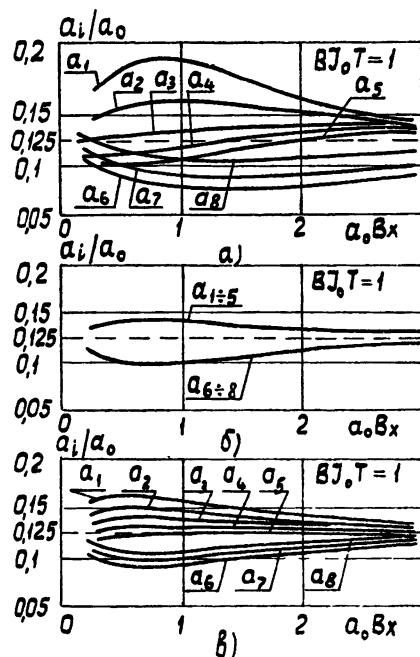


Рис. 5. а) Свет круговой поляризации; б) свет линейной поляризации; в) свет эллиптической поляризации. При $x = 0$
 $J_1 = J_2 = J_0$; $J_3 = J_4 = J_0/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Arditi, T. R. Carver, IRE Nat. Conv. Rec., 1, 3 (1958); Phys. Rev., 109, 1012 (1958). W. E. Bell, A. Bloom, R. W. Williams, IRE Trans. on MTT MTT-7, 95 (1959). M. Arditi, IRE Trans. Mil. El., MIL-4, 25 (1960). R. J. Carpenter, E. C. Beaty, P. L. Bender, S. Saito, R. O. Stone, Trans. IRE Instr., 1-9, 132 (1960).
2. Sy Vogel, L. H. Dulberger, Electronics, 34, 39 (1961).
3. T. L. Skillman, P. L. Bender, J. Geophys., 63, 513 (1958).
4. N. Bloembergen, Phys. Rev. Lett., 2, 84 (1959); А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 40, 1384 (1961).
5. W. B. Hawkins, Phys. Rev., 98, 478 (1955). H. G. Dehmelt, Phys. Rev., 105, 1924 (1957); 105, 1487 (1957). A. Kastler, J. Opt. Soc. Am., 47, 460 (1957). W. E. Bell, A. L. Bloom, Phys. Rev., 107, 1559 (1957). M. Skalinski, J. Phys. Radium, 19, 890 (1958). M. Arditi, J. Phys. Radium, 19, 873 (1958). W. Franzen, Phys. Rev., 115, 850 (1959). H. Boersch, W. Raith. M. Rehmet, Z. Phys., 163, 197 (1961). W. B. Hawkins, Phys. Rev., 123, 544 (1961). Т. Г. Изюмова, Тр. Уральского политехн. ин-та, № 11, 24 (1961).
6. J. M. Anders, D. J. Farmer, G. T. Inouye, IRE Trans. Mil. Electr., MIL-3, 178 (1959).
7. W. Franzen, A. G. Emslie, Phys. Rev., 108, 1453 (1957).
8. W. Bell, A. Bloom, Phys. Rev., 109, 219 (1958).
9. A. Bloom, J. Phys. Radium, 19, 881 (1958).

Поступила в редакцию
 12 июля 1962 г.

SUBLEVELS DISTRIBUTION OF NA ATOM POPULATION OF GROUND STATE UNDER THE EFFECT OF OPTICAL PUMPING

V. S. Nasonov

Sublevels distribution of Na atom population of ground state under the effect of optical pumping has been investigated. Calculation is carried out for circular, linear and elliptical polarization of light containing D_1 and D_2 lines supposing that superfine structure of the absorption line is resolved.

О ЗАВИСИМОСТИ СТРУКТУРЫ УДАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДВУХПРОВОДНЫХ ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ ОТ ДИСПЕРСИОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Г. И. Фрейдман

Показано, что длительность фронта ударной волны и закон приближения компонент поля к постоянным по обе стороны ее фронта - значениям определяется величинами, которые можно найти, исследуя дисперсионные характеристики системы, полученные в линейном приближении. Рассмотрены основные типы дисперсионных характеристик и соответствующая им структура фронта ударных волн.

Структура фронта стационарных ударных волн в двухпроводных линиях передачи, характеризуемых нелинейной связью намагнченности M и поляризации P с напряженностями магнитного (H) и электрического (E) полей, описывается уравнениями в обыкновенных производных лишь для некоторых ограниченных классов линий передачи [1-3]. Если же, с одной стороны, процессы в ударной волне протекают настолько быстро, что не могут быть описаны статической нелинейной зависимостью $M=M(H)$ (или $P=P(E)$), а, с другой стороны, конструкция линии передачи такова, что поле в области, где находится нелинейная среда, существенно неоднородно, для определения структуры фронта ударной волны необходимо решать полную систему уравнений Максвелла совместно с нелинейными и неквазистатическими уравнениями связи, а также граничными условиями на стенах линии передачи. Методы полного решения или даже строгого качественного исследования такой задачи неизвестны. Однако и в этом, весьма общем случае можно высказать определенные соображения о длительности фронта ударной волны и характере изменения электромагнитного поля в начале и конце перепада, представляющего собой ударную волну.

Дело в том, что, как показано в разделе 1, ударная волна, длительность фронта которой меньше некоторой величины, определенной из дисперсионной характеристики системы, полученной в линейном приближении, абсолютно неустойчива относительно волн, фазовая скорость которых близка к скорости ударной волны. Поскольку условие устойчивости ударной волны относительно волн малой частоты предполагается выполненным, эта величина, за исключением особых случаев, и определяет порядок длительности фронта ударной волны и некоторые характеристические особенности его структуры. В разделе 2 рассмотрены основные типы дисперсионных характеристик и соответствующая им структура фронта ударных волн. В разделе 3 на основе анализа дисперсионных характеристик коаксиально-спирального волновода с тонким слоем насыщенного феррита исследуются некоторые особенности структуры фронта ударных волн, распространяющихся в такой системе.

1. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПЕРЕД И ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ВОЛНАМ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ УЧЕТЕ ДИСПЕРСИИ

Рассмотрим распространение стационарной ударной волны в цилиндрической двухпроводной линии передачи, внутри которой находится нелинейная среда (например, феррит). Будем считать, что ударная волна распространяется в положительном направлении оси z . Перед фронтом ударной волны (область 1) и за ним (область 2), где отклонение вектора намагниченности ΔM , поляризации ΔP , напряженности магнитного ΔH и электрического ΔE полей от соответствующих постоянных во времени значений малы, можно пользоваться линеаризованными уравнениями связи между ΔM и ΔH , ΔP и ΔE . Отсюда следует, что переменные составляющие электромагнитного поля в этих областях можно представить в виде суперпозиции нормальных волн волновода, частично или полностью заполненного линейной средой с соответствующими (различными для областей 1 и 2) параметрами*. Например, электрическое поле может быть записано в виде

$$\Delta E_{1,2} = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} A_{1,2}^{(k)}(\omega) e_{1,2}^{(k)}(\mathbf{r}_\perp, \omega) \exp[-j(\omega t - \beta_{1,2}^{(k)}(\omega) z)] d\omega. \quad (1.1)$$

Здесь $e_{1,2}^{(k)}(\mathbf{r}_\perp, \omega)$ и $\beta_{1,2}^{(k)}(\omega)$ —электрическое поле и продольное волновое число k -ой нормальной волны, $A_{1,2}^{(k)}$ —амплитуды спектральных компонент этих волн.

Так как в стационарной ударной волне поле зависит от поперечных координат r и от $\xi = v_p t - z$, где $v_p = \text{const}$ —скорость ударной волны, в разложении (1.1) должны остаться только волны, для которых выполняется соотношение**

$$\beta_{1,2}^{(k)}(\omega_{1,2}^{(k,i)}) / \omega_{1,2}^{(k,i)} = 1/v_p, \quad (1.2)$$

где $\omega_{1,2}^{(k,i)}$ — i -ый корень соответствующего уравнения для k -ой волны. Это означает, что функции $A_{1,2}^{(k)}(\omega)$ должны иметь полюса в точках (1.2); при этом разложение (1.1) примет вид:

$$\Delta E_{1,2} = \sum_k \sum_i a_{1,2}^{(k,i)} \operatorname{Re} e_{1,2}^{(k)}(\mathbf{r}_\perp, \omega_{1,2}^{(k,i)}) \exp\{-j\omega_{1,2}^{(k,i)} \xi\}. \quad (1.3)$$

Амплитуды $a_{1,2}^{(k,i)}$ и фазы $\alpha_{1,2}^{(k,i)}$ (определяемые вычетами функций $A_{1,2}^{(k)}$) зависят от процессов в области фронта ударной волны, где существует нелинейность. Частоты и волновые числа $\beta_{1,2}^{(k)}(\omega_{1,2}^{(k,i)})$ могут быть комплексными или мнимыми. Поскольку вдали от фронта ударной волны отклонения компонент поля от постоянных значений должны стремиться к нулю, перед ударной волной возбуждаются волны, для которых

* Заметим, что в случаях, когда процессы в стационарной ударной волне описываются нелинейными дифференциальными уравнениями в обыкновенных производных, такая процедура соответствует исследованию малых колебаний в окрестности особых точек (положения равновесия) этой системы.

** Соотношение (1.2) может быть истолковано как условие равенства фазовой скорости волны k -го типа и скорости ударной волны. Однако надо иметь в виду, что $\omega^{(k,i)}$ и $\beta^{(k)}$ —величины, вообще говоря, комплексные, и их отношение, хотя и является в данном случае действительной величиной, не есть фазовая скорость волны в обычном смысле.

$$\operatorname{Im} \omega_1^{(k,i)} > 0, \quad (1.4)$$

а за ударной волной—волны с

$$\operatorname{Im} \omega_2^{(k,i)} < 0. \quad (1.4a)$$

Уравнения (1.2) имеют счетное множество корней, соответствующих различным нормальным волнам линии передачи. Однако нетрудно видеть, что длительность ударной волны определяется меньшими из величин $\omega_{1,2}^{(k,i)}$, так как волны с такими частотами будут, за исключением особых случаев, возбуждаться наименее интенсивно.

Покажем это на простом примере, допускающем наиболее полное исследование. Будем считать, что среди корней уравнений (1.2) имеются две частоты ω_1 и ω_2 , абсолютная величина которых много меньше модулей всех остальных частот $\omega_{1,2}^{(k,i)}$. Предположим также, что корни $\omega_{1,2}$ соответствуют основной волне (критическая частота которой равна нулю) *, т. е. являются наименьшими корнями уравнений

$$\beta_{1,2}(\omega)/\omega = 1/v_p, \quad (1.5)$$

где $\beta_{1,2}(\omega)$ —постоянная распространения основной волны.

Допустим, что длительность стационарной ударной волны τ много меньше $1/|\omega_{1,2}|$, и рассмотрим устойчивость такой ударной волны относительно возмущений, связанных с основной волной. Так как структура электромагнитного поля этих возмущений фиксирована (при данной частоте), можно ввести понятие возмущения тока i и напряжения u :

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= u_{1,2}^0 \exp \{-j[\tilde{\omega}_{1,2} t - \beta_{1,2}(\tilde{\omega}_{1,2}) z]\}; \\ i_{1,2} &= i_{1,2}^0 \exp \{-j[\tilde{\omega}_{1,2} t - \beta_{1,2}(\tilde{\omega}_{1,2}) z]\}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где амплитуды $i_{1,2}^0$ и $u_{1,2}^0$ связаны линейными соотношениями, которые можно записать в виде **

$$\begin{aligned} \beta_{1,2}(\tilde{\omega}_{1,2}) u_{1,2}^0 &= \tilde{\omega}_{1,2} L(I_{1,2}; \tilde{\omega}_{1,2}) i_{1,2}^0; \\ \beta_{1,2}(\tilde{\omega}_{1,2}) i_{1,2}^0 &= \tilde{\omega}_{1,2} C(\tilde{\omega}_{1,2}) u_{1,2}^0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь $I_{1,2}$ —постоянное значение тока перед фронтом ударной волны и за ним.

Для возмущений с частотами, много меньшими по абсолютной величине $1/\tau_p$, фронт ударной волны можно рассматривать как разрыв. Используя уравнения Максвелла в интегральной форме, нетрудно показать, что с точностью до величин второго порядка малости возмущения тока и напряжения по обе стороны разрыва связаны с возмущением скорости его движения δv , граничными условиями:

* Это предположение всегда выполняется для ударных волн достаточно малой амплитуды, так как $\omega_{1,2}$ стремится при уменьшении амплитуды к нулю, а остальные $\omega_{1,2}^{(k,i)}$ остаются конечными.

** Ниже предполагается, что нелинейной является только связь между намагнченностью и напряженностью магнитного поля. Окончательные результаты справедливы и в общем случае.

$$\begin{aligned} i_2 - i_1 &= v_p [C(\tilde{\omega}_2) u_2 - C(\tilde{\omega}_1) u_1] + \delta v_p C(U_2 - U_1); \\ u_2 - u_1 &= v_p [L(I_2; \tilde{\omega}_2) i_2 - L(I_1; \tilde{\omega}_1) i_1] + \delta v_p [\Phi(I_2) - \Phi(I_1)]; \\ v_p &= \frac{I_2 - I_1}{\Phi(I_2) - \Phi(I_1)} = \frac{I_2 - I_1}{C(U_2 - U_1)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $\Phi(I)$ —погонный поток, $U_{1,2}$ и $I_{1,2}$ —постоянные по обе стороны ударной волны напряжение и ток.

Легко показать, что общим видом возмущений (1.6), удовлетворяющих условиям (1.8), являются возмущения вида:

$$\begin{aligned} i_{1,2} &= i_{1,2}^0 \exp \{ \delta t - j [\beta_{1,2}(\omega_{1,2}) + \Delta_{1,2}] \xi \}; \\ u_{1,2} &= u_{1,2}^0 \exp \{ \delta t - j [\beta_{1,2}(\omega_{1,2}) + \Delta_{1,2}] \xi \}; \\ \delta v_p &= \delta v_p^0 \exp (\delta t), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где величины $\Delta_{1,2}$ связаны, очевидно, с величиной δ , характеризующей изменение амплитуды возмущений со временем, дисперсионным уравнением:

$$\beta_{1,2}[\omega_{1,2} + \Delta_{1,2} v_p - j \delta] = \beta_{1,2}(\omega_{1,2}) + \Delta_{1,2}. \quad (1.10)$$

При этом граничные условия (1.8) однозначно определяют связь между амплитудами волн по обе стороны разрыва и амплитудой возмущения его скорости δv_p^0 , а следовательно, не накладывают на величину δ никаких ограничений. Однако волны, излучаемые разрывом, должны, очевидно, затухать при удалении от него, вследствие чего величина δ ограничена неравенствами [4,5]:

$$\operatorname{Im} [\beta_1(\omega_1) + \Delta_1] > 0; \quad \operatorname{Im} [\beta_2(\omega_2) + \Delta_2] < 0. \quad (1.11)$$

Для волн, частота которых близка к $\omega_{1,2}$ *, уравнение (1.10) можно приближенно записать в виде

$$\Delta_{1,2} = \frac{j \delta}{v_p - v_{1,2}^0}, \quad (1.12)$$

где $v_{1,2}^0 = (d \beta_{1,2} / d \omega_{1,2})_{\omega_{1,2}}^{-1}$ **. Из (1.12), учитывая (1.4), (1.4a), легко видеть, что условия (1.11) удовлетворяются при любой достаточно малой положительной величине реальной части δ . Это значит, что ударная волна с длительностью фронта $\tau_p \ll 1/|\omega_{1,2}|$ будет абсолютно неустойчива относительно волн с частотами, близкими к $\omega_{1,2}$ ***. С другой стороны, ударная волна с длительностью фронта порядка $1/|\omega_{1,2}|$

* Условия устойчивости ударной волны относительно волн малых частот [6] ($v_1 < v_p < v_2$, где $v_{1,2}$ —скорость распространения волн при $\omega \rightarrow 0$) предполагаются выполнеными. Для волн же с частотами, много большими $1/\tau_p$ при сделанных выше предположениях о длительности фронта ударной волны нельзя пользоваться граничными условиями (1.8).

** Величина $v_{1,2}^0$, вообще говоря, комплексная и отличается от групповой скорости в общепринятом смысле, хотя в некоторых случаях, когда мнимая часть $\omega_{1,2}$ мала, и близка к ней.

*** Заметим, что, анализируя зависимость $\Delta_{1,2}$ от δ , можно оценить время установления стационарной структуры ударной волны, если в линии каким-нибудь образом был создан перепад с длительностью, много меньшей длительности фронта такой волны.

устойчива относительно волн с частотами, существенно меньшими $\omega_{1,2}$ *. Следовательно, частоты $\omega_{1,2}$ определяют наибольшие характерные для процессов в ударной волне промежутки времени.

Однако из результатов исследования ударных волн, структура которых описывается уравнениями в обыкновенных производных [2], следует, что в некоторых линиях в области фронта ударной волны могут возбуждаться процессы, характеризуемые существенно различными постоянными времени. При этом оказывается, что возбуждение быстрых процессов (характеризуемых малыми постоянными времени) происходит только тогда, когда при некоторых значениях тока I и напряжения U , лежащих в интервале между I_1 , I_2 и U_1 , U_2 , выполняется равенство

$$v^*(I; U) = v_p. \quad (1.13)$$

Здесь функция $v^*(I; U)$ определяет зависимость фазовой скорости волн бесконечной частоты, полученную при равенстве нулю постоянных времени, характеризующих быстрые процессы, от тока и напряжения в линии.

Если структура ударной волны не определяется уравнениями в обыкновенных производных, это утверждение нельзя доказать строго. Следует, однако, думать, что и в общем случае быстрые процессы интенсивно возбуждаются только при выполнении условия (1.13). Если оно не выполняется, то частоты $\omega_{1,2}$ полностью определяют закон приближения компонент поля к постоянным по обе стороны ударной волны значениям, а также наиболее характерные для фронта ударной волны промежутки времени (например, частоту колебаний, возникающих на фронте ударной волны, коэффициент затухания или нарастания этих колебаний и т. д.). Если же в ударной волне имеется область, где изменение поля происходит на интервалах времени, существенно меньших $1/|\omega_{1,2}|$, то кроме волн с частотами $\omega_{1,2}$ могут, очевидно, излучаться и волны с большими, чем $\omega_{1,2}$, частотами $\omega_{1,2}^{(k,i)}$. Когда затухание этих волн настолько мало, что $|Im \omega_{1,2}| \gg Im \omega_{1,2}^{(k,i)}$, то длительность ударной волны и закон приближения компонент поля к постоянным по обе стороны значениям определяется, очевидно, частотами $\omega_{1,2}^{(k,i)}$ с наименьшей по абсолютной величине мнимой частью. Однако изменение величин, усредненных по периоду быстрого изменения, по-прежнему должно определяться частотами $\omega_{1,2}$, так как для этих величин справедливо приведенное выше доказательство неустойчивости перепада с длительностью, меньшей чем $1/|\omega_{1,2}|$.

В тех случаях, когда среди корней уравнений (1.2) есть несколько частот $\omega_{1,2}^{(k,i)}$, сравнимых по абсолютной величине, длительность ударной волны определяется волнами, которые затухают наиболее медленно. Если таких волн несколько, то закон приближения компонент поля к постоянным по обе стороны фронта ударной волны значениям будет зависеть от соотношения амплитуд возбуждаемых волн, определять которое в общем случае не представляется возможным.

Проведенное выше рассмотрение справедливо только для „закрытых“ линий передачи, т. е. линий, поле в которых сосредоточено

* Это видно и непосредственно из приведенного выше рассмотрения. Например, когда диссиляция настолько мала, что $v_{1,2}^0$ можно считать действительными величинами, из результатов второго раздела видно, что $v_1^0 > v_p > v_2^0$ (это справедливо и в том случае, когда $\omega_{1,2}$ чисто мнимые). Тогда из (1.12), (1.9) следует, что амплитуды возмущений, затухающих при удалении от разрыва медленнее волн с частотами $\omega_{1,2}$ убывают с течением времени.

в ограниченной в поперечном сечении области пространства. Для открытых линий передачи необходимо учитывать волны со сплошным спектром, которые могут излучаться фронтом ударной волны.

Не останавливаясь на этом случае подробно, заметим лишь, что стационарной ударной волной могут излучаться только волны, удовлетворяющие условию, совпадающему с условием черенковского излучения. При этом излучение волн сплошного спектра будет оказывать существенное влияние на структуру ударной волны только в некоторых исключительных случаях (например, когда затухание волн в линии связано только с процессом излучения электромагнитной энергии).

До сих пор рассматривались ударные волны в линиях, однородных вдоль оси z . Если линия имеет периодическую структуру, то компоненты поля в стационарной ударной волне будут, кроме поперечных координат и переменной $\xi = v_p t - z$, зависеть также и от z . При этом зависимость поля от продольной координаты будет, очевидно, периодической с периодом, кратным периоду системы D . Отклонение компоненты поля от постоянных во времени значений перед фронтом ударной волны и за ним можно представить в виде*

$$\Delta E_{1,2} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_n e_{1,2}^{(n)}(r, \omega) e^{j\beta_{1,2}^{(n)} z} \right] e^{-j\omega t} A(\omega) d\omega; \\ \beta_{1,2}^{(n)} = \beta_{1,2}(\omega) + \frac{2\pi n}{D}. \quad (1.14)$$

Выражение (1.14) будет функцией ξ и периодической функцией z , если в нем есть только волны с частотами, удовлетворяющими уравнению

$$\beta_{1,2}^{(m)}(\omega)/\omega = 1/v_p. \quad (1.15)$$

Разложение (1.14) примет при этом вид:

$$\Delta E = \operatorname{Re} \sum_m \sum_i a_{1,2}^{(m,i)} \exp [-j\beta_{1,2}^{(m)}(\omega_{1,2}^{(m,i)}) \xi] \sum_n e(r_{\perp}; \omega_{1,2}^{(m,i)}) \times \\ \times \exp [j(\beta_{1,2}^{(n)} - \beta_{1,2}^{(m)}) z]. \quad (1.16)$$

Естественно, что так же, как и для однородных линий, структура ударной волны будет определяться наименьшими корнями $\omega_{1,2}$ уравнения (1.15). В этом случае отклонения компонент поля по обе стороны фронта ударной волны от соответствующих постоянных во времени значений можно записать в виде

$$\Delta E = \operatorname{Re} a_{1,2}^{(k)} \exp [-j\beta_{1,2}^{(k)}(\omega_{1,2})] \sum_n e_n(r_{\perp}; \omega_{1,2}) \exp [j(\beta_{1,2}^{(n)} - \beta_{1,2}^{(k)}) z]. \quad (1.17)$$

Заметим, что выражение (1.17) соответствует волне наименьшей частоты, фазовая скорость k -ой пространственной гармоники которой (если под этой величиной понимать отношение $\beta_{1,2}^{(k)}/\omega_{1,2}$) равна скорости ударной волны v_p .

2. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ИМ СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН

Конкретный вид дисперсионных характеристик для волн в двухпроводных линиях зависит как от дисперсии электрической и магнит-

* Ограничимся рассмотрением отклонения, соответствующего основной волне.

ной проницаемости среды, заполняющей линию, так и от конструкции линии, т. е. импедансных свойств ее стенок, однородности заполнения, периодичности и т. д. Однако для основной волны малой частоты, когда поле в линии близко к статическому, а дисперсия магнитной и диэлектрической проницаемости мала, дисперсионное уравнение можно, за исключением особых случаев *, представить в виде

$$\beta_{1,2} = \frac{\omega}{v_{1,2}} \left[1 + \frac{\omega^2}{\Omega_{1,2}^2} + j \frac{\omega}{\bar{\Omega}_{1,2}} \right], \quad (2.1)$$

где $v_{1,2}$ —скорость распространения малых сигналов при стремлении частоты к нулю, $\Omega_{1,2}$ —некоторая частота, характеризующая дисперсию и зависящая как от электрических и магнитных свойств среды, заполняющей линию, так и от конструкции последней; $\bar{\Omega}_{1,2}$ —частота, характеризующая затухание волн в линии из-за диэлектрических и магнитных потерь **.

Для большинства линий $\Omega_{1,2}^2 > 0$. Примером может служить полосковый волновод, заполненный намагниченным до насыщения ферритом [8], замедляющая линия, одна из стенок которой имеет вид гофрированной поверхности, коаксиальная спиральная линия [9] и т. д. Для дисперсионной характеристики (2.1) корни уравнения (1.3) в этом случае удобно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 &= j \Omega_1 \left[\sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2} + \left(1 - \frac{v_1}{v_p} \right)} - \frac{\Omega_1}{\bar{\Omega}_1} \right]; \\ \omega_2 &= -j \frac{\Omega_2^2}{\bar{\Omega}_2} + \Omega_2 \sqrt{\left(\frac{v_2}{v_p} - 1 \right) - \frac{\Omega_2^2}{\bar{\Omega}_2^2}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из этих равенств видно, что перед фронтом ударной волны компоненты поля экспоненциально нарастают, а за фронтом приближаются к постоянным значениям при $\xi \rightarrow \infty$, либо совершая затухающие колебания, либо апериодически (если подкоренное выражение во втором из равенств (2.2) отрицательно).

Ударная волна может иметь совершенно другой характер, если $\Omega_{1,2}^2 < 0$. Это условие может выполняться для волн в линиях с перекрестными индуктивными связями, а также для волн в замедляющих невзаимных системах ***. Выражение для $\omega_{1,2}$ можно в этом случае записать в виде:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= j \left| \frac{\Omega_1^2}{\bar{\Omega}_1} - \Omega_1 \right| \sqrt{\left(1 - \frac{v_1}{v_p} \right) - \frac{\Omega_1^2}{\bar{\Omega}_1^2}}; \\ \omega_2 &= -j |\Omega_2| \left[\sqrt{\left(\frac{v_2}{v_p} - 1 \right) + \frac{|\Omega_2|^2}{\bar{\Omega}_2^2}} - \frac{|\Omega_2|}{\bar{\Omega}_2} \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.3) видно, что при достаточно большой величине $\bar{\Omega}_1$, когда дисперсия волн в линии слабо связана с диссипативными процессами,

* Разложение (2.1) несправедливо, например, для спиральной коаксиальной линии с анизотропной проводимостью обеих стенок [7].

** Заметим, что для линий, заполненных ферритом, величины $\Omega_{1,2}$ и $\bar{\Omega}_{1,2}$ зависят, вообще говоря, не только от значений напряженности магнитного поля по обе стороны ударной волны, но и от знака $v_{1,2}$, т. е. направления распространения волны.

*** Это видно, например, из результатов раздела 3 настоящей работы.

перед фронтом ударной волны будут затухающие при удалении от него колебания. С уменьшением амплитуды, когда $v_p \rightarrow v_1$, частота колебаний уменьшается, и при достаточно малой амплитуде ударной волны изменение поля перед ее фронтом происходит апериодически. За фронтом отклонения компонент поля от постоянных при $\xi \rightarrow \infty$ значениях уменьшаются экспоненциально. В некоторых случаях (см., например, раздел 3) знак величины Ω^2 может быть различным по разные стороны фронта ударной волны. Если при этом $\Omega_1^2 < 0$, а $\Omega_2^2 > 0$, то при достаточно малой интенсивности диссипативных процессов квазигармонические колебания возбуждаются как перед фронтом, так и за ним.

Различный характер структуры ударной волны при разных знаках $\Omega_{1,2}^2$ имеет ясный физический смысл: в случае $\Omega_{1,2}^2 > 0$ групповая скорость квазигармонических волн меньше их фазовой скорости, а следовательно, и скорости ударной волны. Поэтому квазигармонические волны, возбуждаемые в области фронта, отстают от него. Если же $\Omega_{1,2}^2 < 0$, то, как нетрудно убедиться, групповая скорость больше скорости ударной волны, вследствие чего квазигармонические волны распространяются от ее фронта, затухая по мере распространения.

Легко видеть, что это правило выполняется и в общем случае. Действительно, пусть дисперсионное уравнение имеет вид $\beta(\omega) = \bar{\beta}(\omega) + j\delta(\omega)$, где $\delta(\omega)$ — коэффициент затухания. Допустим, что существует действительное решение уравнения $\bar{\beta}/\omega = 1/v_p$, равное ω . При $\delta(\omega) \ll \bar{\beta}(\omega)$ решение уравнения (1.5) можно искать методом возмущений в виде $\omega = \omega + \Delta\omega$, где $\Delta\omega \ll \omega$. Произведя несложные вычисления, получим:

$$\Delta\omega = j \frac{\delta(\bar{\omega}) v_{rp} \dot{v}_p}{v_{rp} - v_p}, \quad (2.4)$$

где $v_{rp} = (d\bar{\beta}/d\omega)^{-1}$. Нетрудно заметить, что произведение $\delta(\omega) v_{rp}$ должно быть всегда больше нуля. Тогда из условий (1.4), (1.4а) следует, что перед ударной волной может бежать квазигармоническая волна, если ее групповая скорость в этой области больше скорости ударной волны. За фронтом ударной волны квазигармонические колебания могут быть, если групповая скорость квазигармонических волн в этой области меньше v_p .

Величины $\Omega_{1,2}$ и $\Omega_{1,2}$, а также скорости v_p и $v_{1,2}$ зависят от амплитуды ударной волны в каждом конкретном случае по разному. Поэтому найти зависимость частот $\omega_{1,2}$ от амплитуды в общем виде невозможно. Можно лишь отметить, что при увеличении скорости ударной волны (амплитуда ее при этом тоже, очевидно, увеличивается) возрастает скорость нарастания компонент поля перед фронтом в случае (2.2) или частота колебаний в этой области, если справедливы выражения (2.3). При стремлении амплитуды ударной волны к бесконечности ее скорость стремится к некоторому конечному пределу. При этом, как следует из (2.2), (2.3), значение ω_1 стремится тоже к конечному пределу $\omega_{1\max}$. Однако это будет верно, если только разложение (2.1) при $\omega = \omega_{1\max}$ справедливо. Общим для всех линий свойством, которое вытекает из (2.2), (2.3), является то, что при стремлении амплитуды ударной волны к нулю (когда $v_p \rightarrow v_{1,2}$) длительность ее стремится к бесконечности.

Характер корней уравнения (1.5) во многих случаях удобно анализировать графически. Для этого заметим, что решения уравнения

(1.5) лежат в плоскости $\omega = \omega' + j\omega''$ на линиях, определяемых уравнением

$$\operatorname{Im} \beta_{1,2}/\omega = 0. \quad (2.5)$$

Вдоль этих линий величина β/ω действительна, поэтому ее зависимость от ω можно изобразить в виде трехмерной кривой в пространстве ω' , ω'' , β/ω . Величины $\omega_{1,2}$ будут, очевидно, соответствовать точкам пересечения этой кривой с горизонтальной плоскостью $\beta/\omega = 1/v_p$. В случае справедливости разложения (2.1) линии, определяемые уравнением (2.5), будут прямыми $\omega' = 0$; $\omega'' = -\Omega_{1,2}^2/2\Omega_{1,2}$, вдоль которых $\beta_{1,2}/\omega$ меняется по закону:

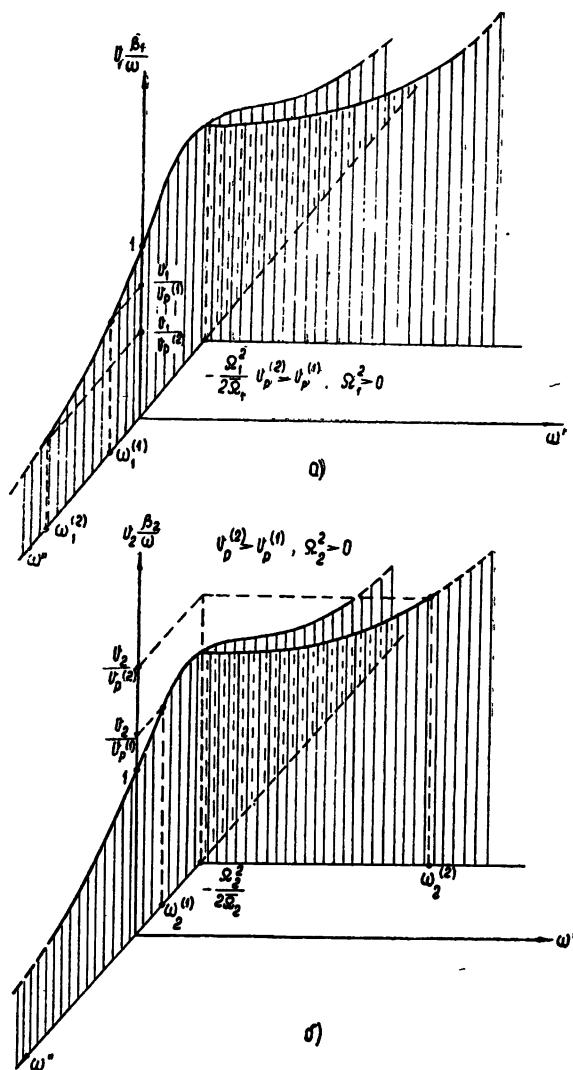


Рис. 1. Качественная зависимость β/ω , определяемая уравнением (2.1) при $\Omega_{1,2}^2 > 0$, вдоль кривых (2.5):
 а) перед фронтом ударной волны; б) за фронтом ударной волны,

$$\frac{\beta_{1,2}}{\omega} = \frac{1}{v_{1,2}} \begin{cases} 1 - \frac{(\omega'')^2}{\Omega_{1,2}^2} - \frac{\omega}{\bar{\Omega}_{1,2}} & \text{при } \omega' = 0 \\ 1 + \frac{\Omega_{1,2}^2}{4\bar{\Omega}_{1,2}^2} - \frac{(\omega')^2}{\Omega_{1,2}^2} & \text{при } \omega'' = -\Omega_{1,2}^2 / 2\bar{\Omega}_{1,2} \end{cases}, \quad (2.6)$$

Соответствующие зависимости качественно изображены на рис. 1 (при $\Omega_{1,2}^2 > 0$) и на рис. 2 (при $\Omega_{1,2}^2 < 0$).

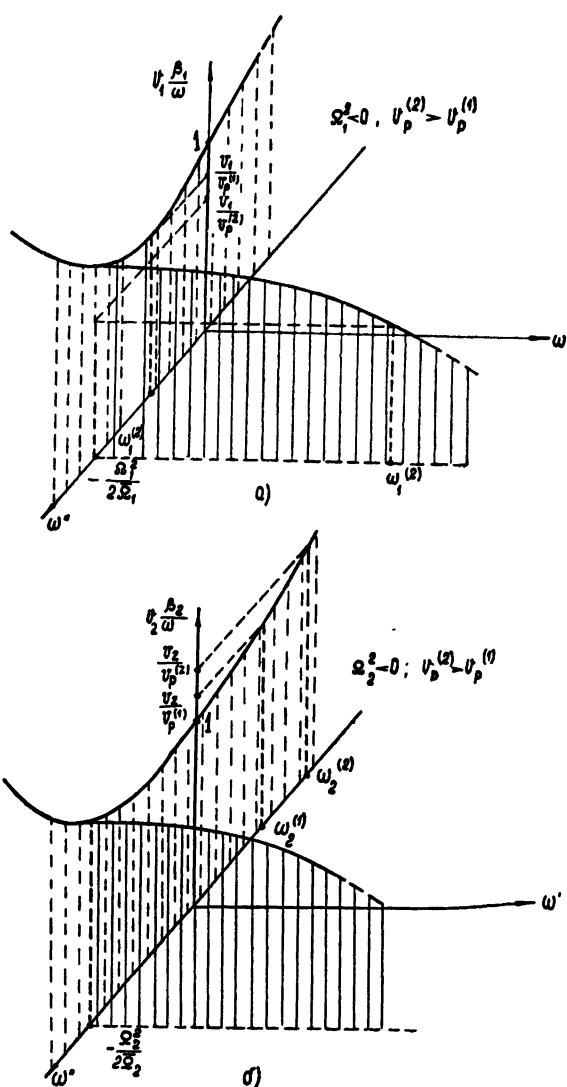


Рис. 2. Качественная зависимость β/ω , определяемая уравнением (2.1) при $\Omega_{1,2}^2 < 0$, вдоль кривых (2.5):
а) перед фронтом ударной волны; б) за фронтом ударной волны.

3. О СТРУКТУРЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В КОАКСИАЛЬНОЙ СПИРАЛЬНОЙ ЛИНИИ С ФЕРРИТОМ

В качестве примера, иллюстрирующего изложенный выше метод, рассмотрим некоторые особенности структуры фронта ударных волн, распространяющихся в коаксиальной спиральной линии (рис. 3), содер-

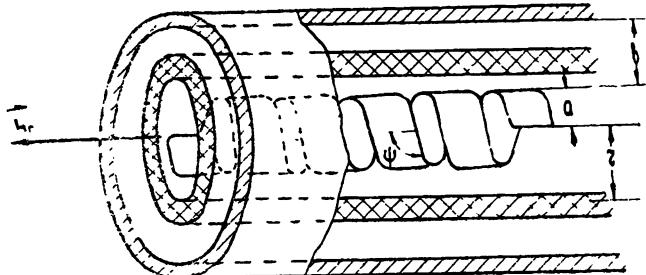


Рис. 3. Коаксиальная спиральная линия с ферритом.

жащей феррит. Она представляет собой спираль радиуса a с углом намотки ϕ , окруженную коаксиальным ей идеально проводящим экраном радиуса b , между которыми находится слой феррита. Феррит в дальнейшем будем предполагать намагниченным до насыщения постоянным магнитным полем H_0 . Диэлектрическую проницаемость диэлектрика, заполняющего остальную часть поперечного сечения линии, будем считать равной диэлектрической проницаемости феррита $\epsilon = \text{const}$. Если расстояние, на котором происходит существенное изменение компонент поля в области ударной волны, много больше шага намотки спирали, а толщина провода или ленты, из которой она изготовлена, достаточно мала, то спираль можно рассматривать как бесконечно тонкий цилиндр с анизотропной проводимостью [9]. Но даже при отсутствии феррита и сделанных выше упрощениях дисперсионная зависимость для волн в такой системе определяется трансцендентным уравнением [9], исследовать которое можно в общем случае лишь численными методами. Наличие же феррита в линии делает задачу еще более громоздкой. Поэтому рассмотрим упрощенный случай, когда слой феррита настолько тонок, что влияние его на дисперсионную зависимость можно учесть методом возмущений при квазистатической аппроксимации поля внутри феррита [10].

Для того, чтобы получить дисперсионную зависимость в виде, допускающем аналитическое исследование, ограничимся областью малых частот, когда в выражениях для компонент поля в спиральной линии без феррита, полученных в работе [9], можно ограничиться членами порядка $x_0^2 b^2$ (x_0 — поперечное волновое число). Тогда легко показать, что дисперсионное уравнение основной волны в коаксиальной спиральной линии с тонким слоем феррита имеет вид:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 \pm \frac{\omega c_0 \epsilon \ln f_1}{2c^2 \ln f} \left\{ (\mu_{\perp} - 1) F' + \frac{\mu_a \beta_0 r}{\mu} F'' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\omega^2 \epsilon (b^2 - r^2)}{f^4 c^2} \operatorname{tg}^2 \psi \right\} (1 + x_0^2 b^2 F); \\ \beta_0 &= \pm \frac{\omega}{c_0} \left(1 + \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь разные знаки соответствуют волнам, распространяющимся вдоль положительного и отрицательного направления оси z ; μ и μ_a — симметричная и антисимметрическая компоненты тензора магнитной проницаемости, $\mu_{\perp} = \mu - \mu_a^2/\mu$ и введены обозначения

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{\epsilon c_0^2} &= 1 + \operatorname{tg}^2 \psi \frac{f^2 - 1}{2f^2 \ln f}; \quad z_0^2 = \frac{\omega^2 \epsilon}{c_0^2} \left(\frac{c}{\epsilon c_0^2} - 1 \right); \\ \frac{1}{\Omega_0^2} &= \frac{c_0^2 \epsilon}{c^4} a^2 \operatorname{tg}^4 \psi \frac{f^4 - 1}{2f^4 \ln f} \left[\frac{f^2 - (1 + \ln f)}{8 \ln f} - \frac{f^2 \ln f}{4(f^2 - 1)} \right]; \\ F' &= \cos \Theta + \frac{r^2}{b^2} \sin^2 \Theta \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{f^2} - \frac{r}{b} \sin 2\Theta \frac{\operatorname{tg} \psi}{f}; \quad (3.2) \\ F'' &= \frac{b^2 - r^2}{b_2^2} \left[\cos \Theta \frac{r \operatorname{tg} \psi}{af} - \sin \Theta \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{f^2} \right]; \\ F &= \left(\frac{f^2 - 1}{2f^2 \ln f} - 1 \right) \left(\frac{\ln f}{f^2 - 1} + \frac{f^2 + 1}{2f^2} \right), \end{aligned}$$

где $f = b/a$, Θ — угол между вектором намагниченности и осью z , r — средний радиус слоя феррита, f_1 — отношение его внешнего и внутреннего радиусов, c_0 — скорость распространения волн в линии без феррита при $\omega \rightarrow 0$.

Для анализа структуры ударной волны необходимо знать также зависимость ее скорости от амплитуды, которая определяется граничными условиями на ударной волне [2]. В общем случае эта зависимость сложна; поэтому будем считать угол поворота вектора намагниченности Θ_2 за фронтом ударной волны малым, так что $\operatorname{tg} \Theta_2 \approx \Theta_2$. Тогда легко получить, что скорость ударной волны, распространяющейся в область с равными нулю поперечными составляющими магнитного поля, приближенно определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{c_0}{v_p} &= \mp \left[1 + \frac{c_0^2 \epsilon}{2c^2} \frac{4\pi M}{H_{2z}} \frac{\ln f_1}{\ln f} \left(1 - \frac{r}{2b} \frac{\operatorname{tg} \psi}{f} \Theta_2 \right) \right]; \\ H_{2\varphi}(r) &= H_{2z} \Theta_2 = H_0 \left\{ 1 + \left[\frac{4\pi M}{H_0} \left(\frac{r}{b} \right)^2 \ln f_1 \Theta_2^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{r}{b} \frac{\operatorname{tg} \psi}{f} \Theta_2 \right] \left[1 - \frac{r}{b} \frac{\operatorname{tg} \psi}{f} \right]^{-1} \right\}, \quad (3.3) \end{aligned}$$

где M — намагниченность насыщения феррита.

Из выражений (3.1) — (3.3) видно, что структура ударной волны в спиральной коаксиальной линии зависит не только от абсолютной величины амплитуды ударной волны, но и от ее знака, а также направления распространения ударной волны. Зависимость структуры ударной волны от знака ее амплитуды связана с тем, что от направления поворота вектора намагниченности зависит как скорость ударной волны, так и дисперсионное соотношение за ее фронтом*. Зависимость

* Следует заметить, что при $\Theta \operatorname{tg} \psi < 0$ скорость простых волн, совпадающая с фазовой скоростью, определяемой выражением (3.1) при $\omega \rightarrow 0$, не монотонная функция тока в линии. Согласно результатам работы [1], абсолютная величина амплитуды ударной волны, распространяющейся в область, где поперечные составляющие поля равны нулю, в этом случае не может быть меньше определенной величины. При этом может нарушиться условие применимости (3.1). Поэтому в дальнейшем принято $\Theta_2 \operatorname{tg} \psi > 0$.

же структуры ударной волны от направления распространения связана только с тем, что феррит является гиротропной средой, вследствие чего постоянные распространения волн, распространяющихся в разных направлениях, могут быть разными, что и наблюдается в данном случае.

Не исследуя детально этот эффект, заметим только, что при некотором соотношении параметров линии, феррита и величины постоянного поля H_0 характер дисперсии в области малых частот может быть различным для волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы в разложении правой части выражения (3.1) по степеням частоты слагаемое, пропорциональное $\mu_a \theta_0$, было больше остальных слагаемых, зависящих от ω . В соответствии с этим при изменении направления распространения ударной волны могут меняться не только параметры, определяющие длительность ее фронта, но и характер структуры ударной волны.

Действительно, нетрудно заметить, что в разложении (2.1) для волн, распространяющихся вдоль направления магнитного поля H_0 ($v_{1,2} > 0$), величина Ω_1^2 всегда положительна (при $\operatorname{tg}\phi > 0$), в то время как для волн, распространяющихся в противоположном направлении, Ω_1^2 может быть в некоторых случаях и отрицательной. Поэтому, если в первом случае квазигармонические колебания могут возникать только за фронтом ударной волны, то во втором колебания могут быть как перед фронтом, так и за ним (см. предыдущий раздел). Следует, однако, отметить, что этот эффект может наблюдаться только при специальном выборе параметров феррита и линии и достаточно малой величине диссипации в феррите.

Рассмотрим более подробно случай, когда $r=b$, т. е. слой феррита расположен около внешнего экрана, а $\Omega_0^2 \ll \gamma H_0$, т. е. дисперсия определяется в основном не свойствами феррита, а геометрией линии (речь идет, разумеется, об области частот, в которой выполняется условие применимости уравнения (3.1)). Уравнение (3.1) при этом можно приближенно записать в виде

$$\frac{\theta_{1,2}}{\omega} = \pm \frac{1}{c_0} \left\{ 1 + \frac{c_0^2 \epsilon}{2c^2} \frac{4\pi M}{H_{z,1,2}} \frac{\ln f_1}{\ln f} F_{1,2} + \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} - j \alpha \frac{c_0^2 \epsilon}{2c^2} \frac{4\pi M}{H_{z,1,2}} \frac{\ln f_1}{\ln f} \frac{\omega}{\gamma(4\pi M + |H_{1,2}|)} \right\}. \quad (3.4)$$

В этом случае структура ударной волны не зависит от направления ее распространения.

Из уравнений (2.2), (3.3) и (3.4) следует, что выражения для коэффициента нарастания поля перед ударной волной и частоты ω_2 , характеризующей процесс изменения поля за ее фронтом, имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \Omega \frac{c_0 V \epsilon}{c} \left\{ \left(\frac{\ln f_1}{2 \ln f} \left[\frac{4\pi M}{H_0} - \frac{4\pi M}{H_{z,2}} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \phi}{2f} \theta_2 \right) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\alpha \frac{\ln f_1}{\ln f} \right)^2 \frac{\Omega_0^2 \omega_M^2}{16 \omega_{H1}^2 \omega_{B1}^2} \frac{c_0^2 \epsilon}{c^2} \right)^{1/2} - \alpha \frac{\ln f_1}{\ln f} \frac{\Omega_0 \omega_M}{4 \omega_{H1} \omega_{B1}} \frac{c_0 V \epsilon}{c} \right\}, \end{aligned}$$

$$\omega_2 = \Omega_0 \frac{c_0 V_{\varepsilon}}{c} \left\{ j \alpha \frac{\ln f_1}{\ln f} \frac{\Omega_0 \omega_M}{4 \omega_{H2} \omega_{B2}} \frac{c_0 V_{\varepsilon}}{c} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{4\pi M}{2H_{z,2}} \frac{\ln f_1}{\ln f} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \psi}{2f} \Theta_2 - F'_2 \right] - \left(\alpha \frac{\ln f_1}{\ln f} \frac{\Omega_0 F'_2 \omega_M}{4 \omega_{H2} \omega_{B2}} \frac{c_0 V_{\varepsilon}}{c} \right)^2} \right\}, \quad (3.5)$$

где $\omega_M = 4\gamma\pi M$, $\omega_H = \gamma|H|$, $\omega_B = \omega_H + \omega_M$, γ — абсолютная величина гиромагнитного отношения, α — величина, характеризующая диссипацию в феррите.

Из формул (3.5) видно, что при очень малых амплитудах ударной волны, когда $H_{z,2} \approx H_0$, инкремент δ_1 увеличивается пропорционально амплитуде ударной волны. При больших амплитудах, когда $H_{z,2} \gg H_0$, δ_1 стремится к постоянной величине, тем меньшей, чем меньше скорость c_0 . Частота ω_2 при очень малых амплитудах — мнимая, т. е. компоненты поля в этом случае апериодически приближаются к постоянным значениям за фронтом ударной волны. Однако область амплитуд, где изменение поля носит такой характер, при соответствующем угле намотки спирали можно сделать очень узкой. Действительно, для того, чтобы за фронтом ударной волны происходили слабо затухающие колебания компонент поля около соответствующих постоянных значений, а не апериодическое приближение к этим значениям, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{4\pi M}{2H_{z,2}} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \psi}{2f} \Theta_2 - F'_2 \right] > \frac{\ln f_1}{\ln f} \left(\alpha \frac{\Omega_0 \omega_M}{4 \omega_{H2} \omega_{B2}} \frac{c_0 V_{\varepsilon}}{c} \right)^2. \quad (3.6)$$

При малых амплитудах (3.6) с точностью до величин, пропорциональных Θ_2^2 , можно записать в виде

$$\frac{3}{4} \frac{\operatorname{tg} \psi}{f} \Theta_2 > \alpha^2 \frac{\ln f_1}{\ln f} \frac{\Omega_0^2 \omega_M}{\omega_{H2} \omega_{B2}} \frac{c_0^2 \varepsilon}{c^2}. \quad (3.6a)$$

Правая часть этого неравенства пропорциональна, как нетрудно заметить, $\operatorname{tg}^{-4} \psi$. Поэтому, если увеличивать $\operatorname{tg} \psi$, неравенство (3.6) будет выполняться при все меньших и меньших значениях Θ_2 . При этом уменьшается и действительная часть ω_2 , но отношение частоты колебаний к декременту затухания увеличивается.

В заключение пользуясь случаем выразить признательность А. В. Гапонову за внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 6, 324, 338 (1963).
- А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
- Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 680 (1961).
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
- С. И. Сыроватский, ЖЭТФ, 24, 622 (1953).
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
- Я. Д. Ширман, З. А. Вайнорис, Радиотехника и электроника, 4, 1485 (1959).
- Г. Сул, Л. Уокер, Вопросы волноводного распространения электромагнитных волн в гиротропных средах, ИЛ, М., 1955.

9. Л. Н. Лошаков, Е. Б. Ольдерогге, Радиотехника, 3, 11 (1948).
10. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
11. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 116 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 июля 1962 г.

ON THE DEPENDENCE OF THE ELECTROMAGNETIC SHOCK WAVES
STRUCTURE IN TWO-WIRE TRANSMISSION LINES UPON THE DISPERSION
OF THE SYSTEM IN THE LINEAR APPROXIMATION

G. I. Freidman

It was shown that front duration of the shock wave as well as the asymptotic behaviour of the field on both sides of the front are determined by values, which can be obtained on the base of dispersion law of the system, under linear approximation. Basic types of dispersion curves and corresponding front structures of the shock waves were considered.

ФОРМИРОВАНИЕ УДАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С НЕНАСЫЩЕННЫМ ФЕРРИТОМ

А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева

Приводятся результаты экспериментального исследования образования и развития ударных электромагнитных волн в линиях передачи с ненасыщенным ферритом. Показано, что при медленном (статическом) изменении намагниченности феррита образование ударной волны происходит в основном в результате эволюции квазистатической волны. При быстром (динамическом) изменении намагниченности феррита существенную роль в процессе образования и развития ударной волны играет диссипация энергии, связанная с перемагничиванием феррита. Исследуется влияние параметров феррита на скорость образования и развития ударной волны.

Теоретическое исследование образования и развития ударных электромагнитных волн в линиях передачи с ненасыщенным ферритом в общем случае сопряжено с трудностью описания изменения намагниченности феррита относительно простыми и в то же время достаточно точными макроскопическими уравнениями. Когда магнитное поле меняется достаточно медленно и необратимые процессы несущественны, изменение намагниченности ненасыщенного феррита может быть описано квазистатическим уравнением

$$B = B(H). \quad (1)$$

В том случае, когда магнитное поле изменяется на величину, превышающую коэрцитивную силу, за время, меньшее периода свободных колебаний границ доменов, перемагничивание феррита происходит в основном некогерентно [3,4] и может быть приближенно описано уравнением

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{\alpha\gamma}{(1 + \alpha^2) M} (M^2 - M_z^2) (H - H_0), \quad (2)$$

где z — направление магнитного поля H , γ — абсолютная величина гиромагнитного отношения, α — коэффициент диссипации, H_0 — стартовое поле ($H_0 \sim 1$ эрстед), M_z — средняя намагниченность по оси z .

Для большинства ферритов [5] период свободных колебаний границ доменов лежит в пределах $10^{-7} \div 10^{-9}$ сек, а коэрцитивная сила — порядка одного эрстеда. Следовательно, если скорость изменения магнитного поля внутри феррита превышает $10^7 \div 10^9$ эрстед·сек $^{-1}$, а $H > H_c$, то процесс перемагничивания ненасыщенного феррита может быть описан уравнением (2). Верхний предел значений магнитных полей, при которых справедливо уравнение (2), указать трудно.

Для этих предельных случаев в работах [1,2] проведено теоретическое исследование процессов образования и развития слабых ударных электромагнитных волн в линиях с ненасыщенным ферритом. Если изменение намагниченности феррита может быть описано уравнением (1), то в линии передачи с ненасыщенным ферритом возможны простые волны и, следовательно, в течение конечного времени (до образования ударной волны) возможно увеличение крутизны отдельных участков

профиля волны без диссипации энергии [1,9]. Когда перемагничивание некогерентно и изменение намагнченности может быть описано уравнением (2), увеличение крутизны фронта электромагнитной волны происходит в основном за счет диссипации энергии, обусловленной перемагничиванием феррита [2].

Естественно, что образование ударной волны в линии передачи с ненасыщенным ферритом в общем случае нельзя объяснить только эволюцией простой волны или диссипацией энергии. В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования процессов образования и развития ударных электромагнитных волн в LC -линиях передачи, индуктивности звеньев которых выполнены в виде торOIDальных катушек с ферритовым заполнением.

1. КВАЗИПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

В линиях передачи с сосредоточенными параметрами при медленном перемагничивании феррита (на фронте волны $dH/dt \leq 10^7 \div 10^8$ эрстед·сек $^{-1}$) из-за пространственной дисперсии (линия является периодической структурой) строго простых волн быть не может. Однако, как уже отмечалось в работе [7], в LC -линиях задержки, катушки которых содержат ферритовые сердечники, могут существовать волны, по своим свойствам близкие к простым (квазипростые волны). Если $B(H)$ —монотонная функция H и $dH/dt > 0$, то в простой волне при ее распространении по линии длительность фронта уменьшается, а длительность спада увеличивается пропорционально длине линии. Когда $B(H)$ —однозначная (монотонная или не монотонная) функция H , то длительность простой волны на всех уровнях сохраняется постоянной. В случае гистерезиса волна может быть квазипростой*, однако длительность ее на всех уровнях не будет сохраняться постоянной.

Экспериментальное исследование формирования ударных электромагнитных волн в нелинейных линиях с сосредоточенными параметрами проводилось на установке, блок-схема которой показана на рис. 1.

Использовались линии, звенья которых состояли из стандартных керамических или слюдяных конденсаторов соответствующей емкости и ферритовых колец с одно- или многослойной намоткой. Типичная конструкция такой линии приведена на рис. 10 г.

На вход линии поступал импульс с длительностью фронта порядка 30 мксек. Длительность его спада зависела от амплитуды и составляла 180 мксек (при $I_a \approx 3a$, что соответствовало $H_a \approx 42$ эрстед), 280 мксек ($H_a \approx 26$ эрстед) и 490 мксек ($H_a \approx 13$ эрстед).

На рис. 2а, б приведены графики изменения длительности фронта и спада импульса (волны) тока по длине линии** при различных амплитудах импульса

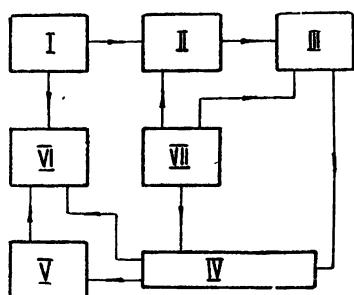


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

I — генератор синхронизирующих импульсов, II — импульсный усилитель, III — генератор импульсов тока, IV — исследуемая линия, V — высокоомный делитель напряжения, VI — скоростной импульсный осциллограф, VII — блок подмагничивания.

* Имеется в виду, что потери на гистерезис малы.

** Параметры линии (марка феррита, размеры тороида, постоянные ячейки τ_0 и волновое сопротивление Z_0 линий без феррита, число витков катушки индуктивности w и число ячеек линии N) приводятся в подписи к рисунку.

(n —порядковый номер ячейки)*. Из графиков рис. 2 видно, что длительность фронта и спада пропорциональны длине (числу ячеек) линии. Там же нанесены и теоретические графики (пунктирные линии), соответствующие изменению фронта и спада в простой волне. Значе-

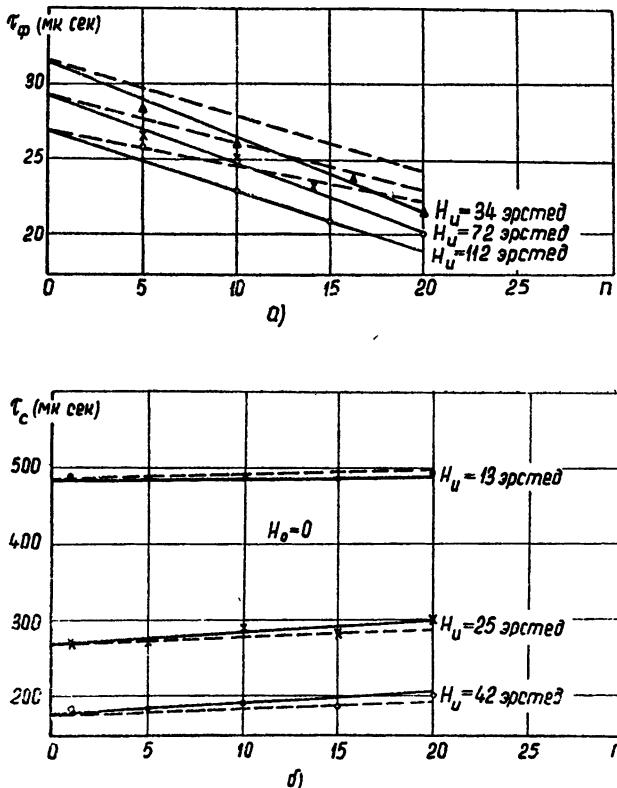


Рис. 2. Изменение длительностей фронта τ_ϕ и спада τ_c импульса по длине линии:

феррит марки $\Phi_{\text{оп}}=600$ ($20 \times 15 \times 6$), $\tau_0=30$ нсек, $Z_0=75$ ом, $w=48$, $H_0=1,5$ эрстед, $B_s=3400$ гс, $B_r=1550$ гс, $H_c=4,5$ эрстед.

ния магнитной проницаемости определялись по кривой намагничивания рис. 3, близкой к статической и полученной при перемагничивании тороидального ферритового сердечника аналогичными по величине и скорости нарастания импульсными полями.

Ожидаемое укорочение фронта несколько меньше наблюдаемого экспериментально. Это, очевидно, связано с диссипацией энергии при перемагничивании феррита, благодаря которой образование ударной волны ускоряется. Соответствие теоретических и экспериментальных данных по измерению длительности спада импульса вполне удовлетворительное. Из-за дисперсии линии с сосредоточенными параметрами наблюдаемое удлинение спада больше теоретического. Таким образом, можно считать, что пока магнитное поле волны меняется достаточно медленно ($dH/dt \ll 10^7 \div 10^8$ эрстед·сек $^{-1}$) волна в линии с ненасыщенным ферритом является квазипростой.

* Начальная рабочая точка задается отрицательным импульсом, следующим за положительным (исследуемым), и постоянным полем (током) подмагничивания.

2. ОБРАЗОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ УДАРНЫХ ВОЛН

Экспериментальное исследование образования и развития ударных электромагнитных волн в LC -линиях с ненасыщенным ферритом при быстром изменении намагниченности проводилось с импульсами, ско-

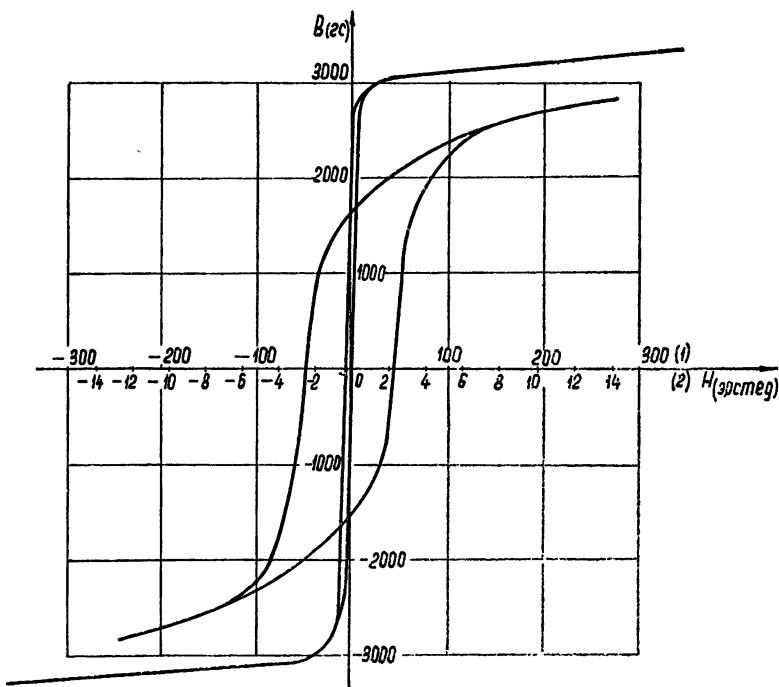


Рис. 3. Импульсные кривые намагничивания феррита марки $\Phi_{оп}$ -600.

рость изменения фронта которых между уровнями ($0,1 \pm 0,9$) H_i (H_i — амплитуда импульса, $H_i \gg H_c$) была не меньше 10^9 эрстед·сек $^{-1*}$. Импульс подавался на вход линии, конструктивно выполненной следующим образом: на латунную плату накладывалась в один или несколько слоев (в зависимости от действующего импульсного напряжения) тefлоновая пленка, затем жесткая плата из тefлона, органического стекла или другого диэлектрика. К внутренней (прилегающей к тefлоновой пленке) стороне этой платы крепились прямоугольные латунные пластинки (см. рис. 10б), каждая из которых имела два вывода на внешнюю сторону платы. Емкости образовавшихся при этом плоских конденсаторов с обкладками пластинки — латунная основа (плата) являлись емкостями ячеек линии. Между выводами соседних пластин припаивались концы обмотки ферритовых колец, т. е. по существу концы катушки индуктивности ячейки. Вся система плотно стягивалась боковыми винтами. Общий вид типичных конструкций построенных таким образом линий приведен на рис. 10 а, в. Естественно, что такая конструкция линии вызвана необходимостью иметь малую постоянную времени ячейки линии $\tau_0 \sim (0,1 \pm 1) \cdot 10^{-9}$ сек и, в основном, наличием больших (порядка 5 ± 20 кв) действующих импульсных напряжений. Для устранения электрического пробоя между витками катушки ин-

* Как известно, перемагничивание феррита импульсами с такими параметрами будет быстрым (динамическим), т. е. изменение индукции будет определяться величиной поля, скоростью его изменения и т. п.

дуктивности и уменьшения ионизационных потерь линии помещались в ванночку с жидким диэлектриком (трансформаторным маслом).

На рис. 4 показаны совмещенные осциллограммы импульса, снятые соответственно на входе, во 2-ой, 4-ой и 32-ой ячейках линии. Из осциллограмм видно, что ударная волна образуется на первых ячейках линии. При этом форма импульса вне фронта остается неизменной. В дальнейшем амплитуда ударной волны (величина скачка) растет, а ее длительность (ширина фронта) уменьшается. Развитие ударной волны сопровождается значительной диссипацией энергии, что особенно наглядно видно из совмещенных осциллограмм рис. 4. По осциллограммам нетрудно найти и распределение тока или напряжения по линии в фиксированные моменты времени (рис. 5). Интересно отметить, что после прохождения импульсом первых $5 \div 10$ ячеек линии фронт его укладывается на одной-двух ячейках. Очевидно, что, начиная с этого момента, на формирование ударной волны и ее структуру заметное влияние будет оказывать дискретность параметров линии [6].

Изменение длительностей импульса,

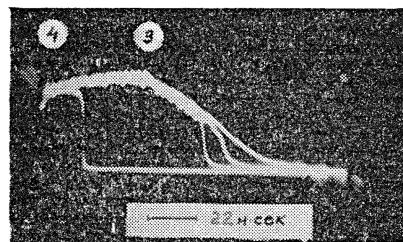


Рис. 4. Совмещенные осциллограммы импульса:

1 — на входе, 2 — во второй, 3 — в четвертой и 4 — тридцать второй (на выходе) ячейках линии ($\Phi_{\text{оп}}=100$ ($10 \times 6 \times 5$), $\tau_0=1$ нсек, $Z_0=50$ ом, $\omega=5$, $N=32$, $H_i=250$ эрстед).

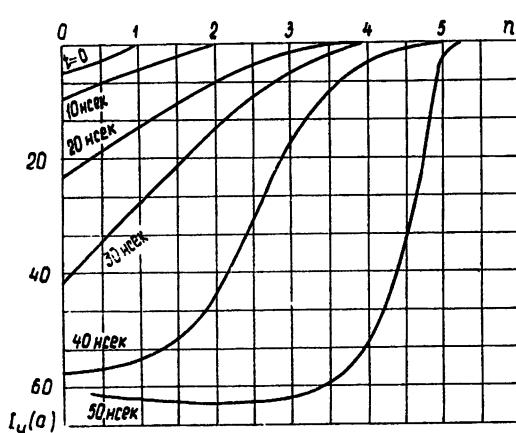


Рис. 5. Распределение амплитуды тока по длине линии в фиксированные моменты времени:

$\Phi_{\text{оп}}=100$ ($10 \times 6 \times 5$), $\tau_0=1$ нсек, $Z_0=75$ ом, $\omega=5$, $N=32$, $B_s=4000$ гс, $B_r=1600$ гс, $H_c=2$ эрстед.

удлинения спада. Расплывание спада в основном связано с отражениями от разрыва и дисперсией линии. С уменьшением амплитуды импульса (см. рис. 6б) длительность его фронта начинает расти.

Зависимости относительной амплитуды разрыва I_p/I_n от порядкового номера ячейки линии ($n=0$ — вход линий) для идентичных линий с четырьмя марками феррита приведены на рис. 7. Развитие (формирование) ударной волны в линии с ферритом $\Phi_{\text{оп}}=100^*$ происходит

* Ферриты с параметрами, отличными от стандартных (опытные партии), помечены значком „оп“. Измерение параметров ферритов проводилось на частотах $35 \pm$ кгц

несколько быстрее, чем в линиях с ферритами $\Phi_{оп}-400$, $\Phi_{оп}-600$, $K_{оп}-65$. Как видно из графиков рис. 7, для формирования ударной волны с амплитудой 0,9 I_u линия с ферритом $K_{оп}-65$ должна содержать примерно в полтора раза больше ячеек, чем линия с ферритом $\Phi_{оп}-100$. Теоре-

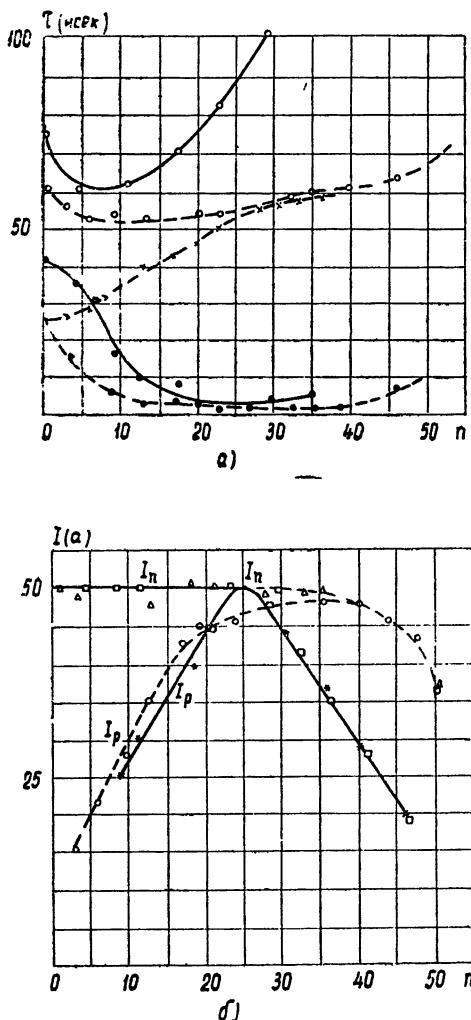


Рис. 6. Изменение основных параметров импульса при распространении по линии:
а) $\circ\circ\circ - \tau_u$, $\bullet\bullet\bullet - \tau_\Phi$, $\times\times\times - \tau_c$; б) Δ , $\square - I_u$,
 $\circ, * - I_p$; $\Phi_{оп}-100$ ($8 \times 4 \times 2$), $\tau_0 = 1,8$ нсек, $Z_n = 75$ ом,
 $w = 4$, $N = 50$.

тически показано [2], что образование ударной волны происходит тем быстрее, чем большее индукция насыщения B_s и меньше остаточная индукция B_r . Это хорошо подтверждает эксперимент, результаты которого приведены на рис. 7.

Оптимальное число ячеек линии, т. е. число ячеек, при котором I_p становится равным 0,9 I_u , в случае сильной нелинейности приближенно равно [2]

$$n_{опт} \simeq \frac{\tau_\Phi}{\tau_0} \frac{H_u}{\eta B_s (1 - m_0)}, \quad (3)$$

где η — коэффициент заполнения линии ферритом ($0 < \eta < 1$), учитывающий поток рассеивания (поток вне феррита). В данном случае (рис. 4) длительность фронта на входе линии $\tau_\phi = 50$ нсек, постоянная времени ячейки $\tau_0 \approx 1$ нсек, амплитуда магнитного поля $H_u = 400$ эрстед, коэф-

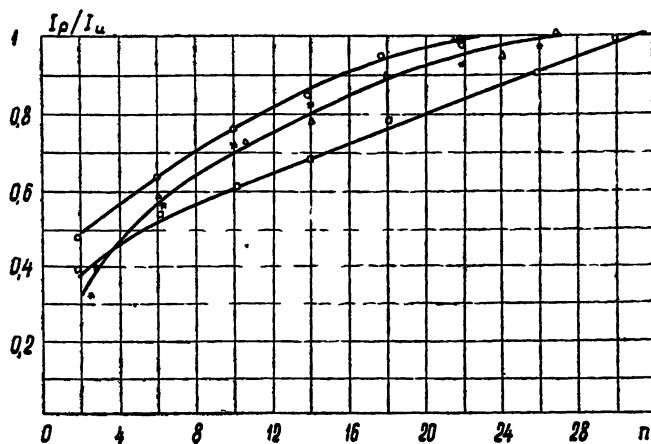


Рис. 7. Изменение относительной амплитуды разрыва I_p по линии:

○○○— $\Phi_{\text{оп}}=100$ ($10 \times 6 \times 5$); ***— $\Phi_{\text{оп}}=600$ ($10 \times 6 \times 5$); $\triangle\triangle\triangle$ — $\Phi_{\text{оп}}=400$ ($10 \times 6 \times 5$);
 □□□— $K_{\text{оп}}=65$ ($10 \times 6 \times 5$); $I_u=170$ а, $\tau_0=1$ нсек, $Z_0=50$ ом, $w=5$, $N=32$;
 $\Phi_{\text{оп}}=600$, $B_s=3400$ гс, $B_r=1500$ гс, $H_c=0,5$ эрстед; $\Phi_{\text{оп}}=400$, $B_s=2600$ гс,
 $B_r=1000$ гс, $H_c=0,6$ эрстед; $K_{\text{оп}}=65$, $B_s=3300$ гс, $B_r=2300$ гс, $H_c=1$ эрстед.

фициент заполнения* $\eta \approx 0,6$. Найденное теоретически оптимальное число ячеек линии формирования удовлетворительно совпадает с полученным экспериментально (см. таблицу 1).

Таблица 1

Марка феррита	$\Phi_{\text{оп}}=100$	$\Phi_{\text{оп}}=400$	$\Phi_{\text{оп}}=600$	$K_{\text{оп}}=65$
$n_{\text{опт}}^{\text{теор}}$	14	22	19	35
$n_{\text{опт}}^{\text{эксп}}$	16	19	19	26

Отметим, что оптимальное число ячеек линии $n_{\text{опт}}$ существенно зависит от величины относительной начальной намагниченности феррита, характеризуемой параметром m_0 . Величина $n_{\text{опт}}$ меньше при малых m_0 . Уменьшение параметра m_0 , а следовательно, и $n_{\text{опт}}$ нетрудно осуществить, например, путем соответствующего выбора рабочей точки на квазистатической кривой намагничения с помощью постоянного поля (тока) подмагничивания. При токе подмагничивания, равном нулю, $m_0 \approx B_r/B_s$.

*. Об измерении коэффициента заполнения η см. работу [8].

На рис. 8 показано изменение относительной амплитуды разрыва по длине линии для различных токов подмагничивания. Из этих графиков видно, что оптимальное число ячеек линии с ферритом $\Phi_{\text{оп}}=100$ при формировании ударной волны с амплитудой тока порядка 100 а при изменении подмагничивающего тока от 1,6 а до -1,6 а уменьшается примерно в пять раз. Такое эффективное формирование связано с увеличением диссипации энергии при динамическом перемагничивании феррита на больший угол (из начального состояния с $m=m_0$ в состояние $m \approx 1$). Это видно из осциллограмм рис. 9.

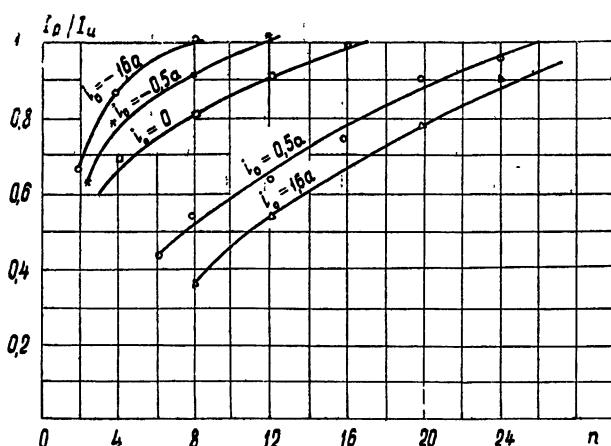


Рис. 8. Изменение относительной амплитуды разрыва I_p по линии для различных значений тока подмагничивания i_0 :

$\Phi_{\text{оп}}=100$ ($10 \times 6 \times 3$), $\tau_0=1$ нсек, $Z_0=50$ ом, $w=5$, $N=32$, $I_u=100$ а.

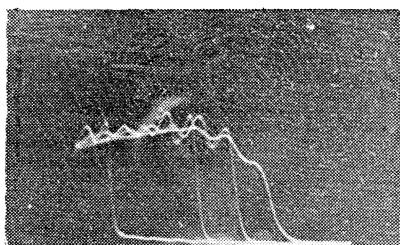


Рис. 9. Осциллограммы импульса на выходе линии ($\Phi_{\text{оп}}=600$ ($10 \times 6 \times 5$), $\tau_0=1$ нсек, $Z_0=50$ ом, $w=5$, $N=32$) при токах подмагничивания:

1— $i_0=0$, 2— $i_0=0,13$ а, 3— $i_0=0,5$ а, 4— $i_0=1,8$ а ($I_u=75$ а) (номера осциллограмм слева направо).

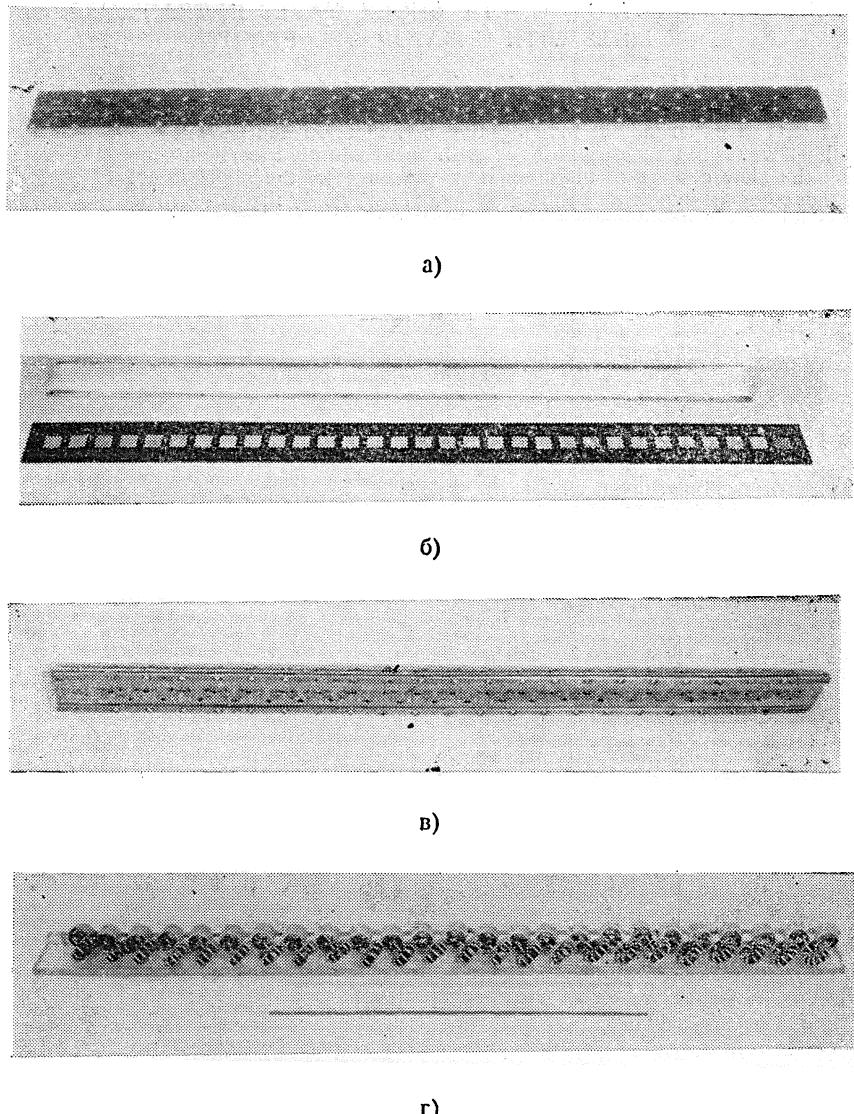


Рис. 10. Внешний вид типичных конструкций исследуемых линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 36, 3, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 79 (1960).
2. Л. А. Островский, ЖТФ (в печати).
3. Л. Н. Булаевский, В. М. Файн, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 39, 836 (1960).
4. Е. М. Суогуу, J. Appl. Phys., 29, 233 (1958).
5. А. В. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
6. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 5, 1130 (1962).
7. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 116 (1962).
8. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 561 (1963).
9. И. Г. Катаев, Вопросы радиоэлектроники, сер. 6, № 2, 61 (1959).

**FORMING ELECTROMAGNETIC SHOCK WAVES IN TRANSMISSION
LINES WITH UNSATURATED FERRITE***A. M. Belantsev, Yu. K. Bogatyryov, L. I. Solovieva*

Results of experimental investigation of formation and development of electromagnetic shock waves in transmission lines with an unsaturated ferrite are given. It was shown that by the slow change of magnetization the onset of the shock wave is descended in consequence of the evolution of the quasi-simple wave. By the quick change of magnetization the onset and development of the shock wave is determined by energy dissipation due to fluxreversal. The influence of ferrite parameters on the rate of onset and development of the shock wave is investigated.

СТАЦИОНАРНЫЕ УДАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С НЕНАСЫЩЕННЫМ ФЕРРИТОМ

А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева

Приводятся результаты экспериментального изучения стационарных ударных электромагнитных волн в линиях передачи с ненасыщенным ферритом. В результате исследования структуры фронта ударных волн выяснено влияние параметров линии и феррита на структуру стационарной волны. Предлагаются способы измерения коэффициента заполнения линии ферритом и начальной намагниченности феррита.

Область быстрого бегущего скачка поля, как известно, можно рассматривать как ударную волну в том случае, когда некоторые из процессов, незначительные вне области скачка, становятся существенными при быстром изменении поля. Математически это выражается в повышении порядка уравнений, описывающих волну в области быстрого изменения поля, по сравнению с уравнениями вне ее. Процессы в области скачка определяются значениями полей на его „границах“ и практически не зависят от скорости изменения полей за пределами быстрого перепада. Поэтому структура поля в области быстрого нестационарного скачка будет в основном такая же, как и в стационарной ударной волне. Это обстоятельство значительно облегчает как теоретическое, так и экспериментальное исследование ударных электромагнитных волн. В данной работе экспериментально исследуются ударные электромагнитные волны в линиях передачи с ненасыщенным ферритом*. Исследуется зависимость скорости распространения ударной волны и ее импеданса от величины скачка поля и начальных условий, а также влияние параметров линии и феррита на структуру ударной волны.

1. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ИМПЕДАНС УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Скорость распространения ударной волны и отношение скачка напряжения к скачку тока (импеданс ударной волны) теоретически могут быть найдены из граничных условий [1]. Нетрудно показать, что граничные условия на разрыве, полученные из телеграфных уравнений, сохраняются, если даже условия применимости телеграфных уравнений внутри разрыва нарушаются. Поэтому в линии с сосредоточенными параметрами скорость распространения ударной волны (или время задержки на одну ячейку линии τ_s) и импеданс разрыва Z_p (ударной волны) не зависят от дисперсии, связанной с дискретностью параметров линии [2].

Граничные условия запишем в виде [1, 3]

$$\begin{aligned} I^{(2)} - I^{(1)} &= v_p C_0 (V^{(2)} - V^{(1)}); \\ V^{(2)} - V^{(1)} &= v_p (\Phi^{(2)} - \Phi^{(1)}), \end{aligned} \quad (1)$$

где I , V — ток и напряжение в линии, v_p — скорость разрыва, C_0 — погонная емкость, Φ — погонный поток магнитной индукции, $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ — значения соответствующих величин перед скачком и за ним.

* Использовалась та же экспериментальная установка, что и при исследовании образования ударных волн [4]. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 1 статьи [4].

Для линий с тороидальными катушками при равномерной намотке* поток магнитной индукции приближенно равен

$$\Phi \simeq L_0 \left(I + 4\pi\eta \frac{M_z}{p} \right),$$

где L_0 —погонная индуктивность линии без феррита, M_z —проекция вектора намагниченности на направление магнитного поля, p —число витков на единицу длины тороида, η —коэффициент заполнения линии ферритом, учитывающий поток рассеивания (поток вне феррита). Из граничных условий (1) нетрудно найти уравнение для импеданса разрыва и времени задержки, аналогичное уравнению ударной адиабаты в газодинамике:

$$Z_p/Z_0 = \tau_3/\tau_0 = \left[1 + \frac{4\pi M \eta (1 - m_0)}{H_p} \right]^{1/2}, \quad (2)$$

где $Z_p = V_p/I_p$, V_p , I_p —величины скачка напряжения и тока ($V^{(1)} = I^{(1)} = 0$), $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ —волновое сопротивление линии без феррита, $\tau_0 = \sqrt{L_0 C_0}$ —постоянная времени ячейки линии, M —намагниченность насыщения ($4\pi M = B_s$), $m_0 = M_z^{(1)}/M_z^{(2)} = M_{0z}/M$ —относительная начальная намагниченность феррита, H_p —величина скачка магнитного поля**.

На рис. 1 показана зависимость времени задержки разрыва на ячейку линии τ_3 от порядкового номера ячейки ($n=0$ —вход линии ***).

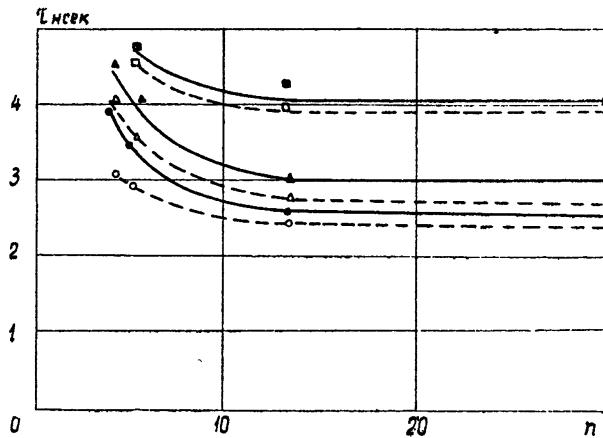


Рис. 1. Изменение времени задержки τ_3 и длительности фронта τ_p импульса по линии:

— τ_p ; — τ_3 ; ● $I_p = 120$ а; ▲ $I_p = 70$ а; ■ $I_p = 30$ а;
 $\Phi_{оп} = 100 (10 \times 6 \times 5)$, $B_s = 4000$ гс, $B_r = 1600$ гс, $H_c = 2$ эрстед, $\tau_0 = 1$ нсек,
 $Z_0 = 50$ ом, $\omega = 5$, $N = 32$.

для импульсов с различными амплитудами. С увеличением n растет амплитуда разрыва [4] и уменьшается время задержки τ_3 ударной волны. После того, как величина скачка сравняется с амплитудой импульса****, скорость распространения ударной волны практически остается постоянной, ударная волна становится стационарной.

* Имеется в виду, что $d_2 - d_1 \ll d_1 d_2$, где d_1 и d_2 —внешний и внутренний диаметры тороида.

** Магнитное поле H_p связано с I_p известным соотношением $H_p = 1,256 p I_p$ эрстед (p в вит. \cdot см $^{-1}$, I_p в а).

*** Параметры линии: марка феррита, размеры тороидального сердечника, Z_0 , τ_0 , число витков ω , число ячеек линии N , η , m_0 указаны в подписи к рисунку. Здесь же приведены данные об импульсе и токе (поле) подмагничивания.

**** Импульс имеет плоскую вершину.

Интересно отметить, что время задержки стационарной ударной волны на ячейку и длительность ее фронта (сплошные линии) — одного порядка.

На рис. 2 приведены теоретические кривые $\tau_3/\tau_0 = Z_p/Z_0$ от $H_p/M = h$ при различных значениях $m'_0 = 1 - \eta + \eta m_0$. На этом же рисунке аннексены экспериментальные точки*, которые хорошо ложатся на теоретические кривые.

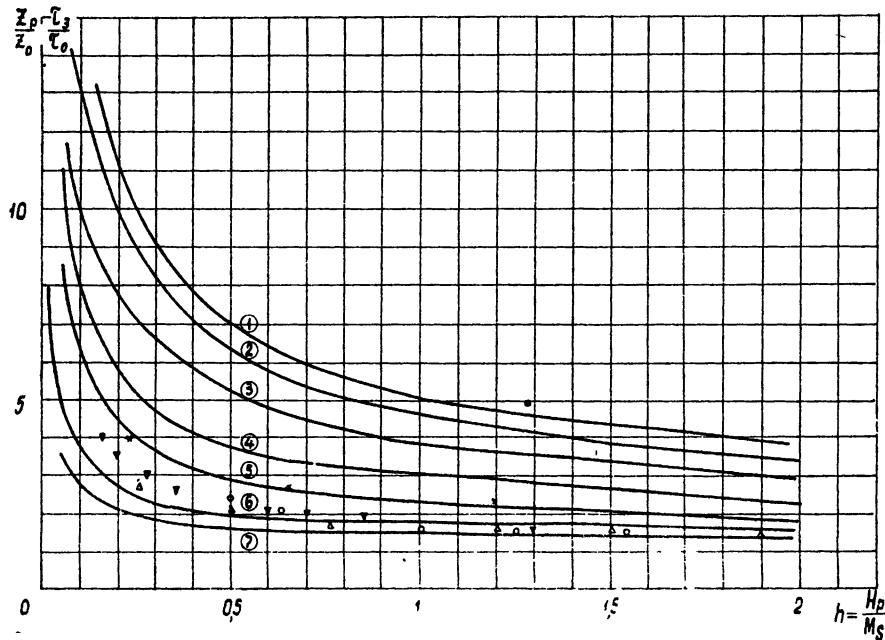


Рис. 2. Теоретически рассчитанные кривые Z_p/Z_0 и τ_3/τ_0 как функции $h = H_p/M$:
 $\Delta\Delta\Delta - Z_p/Z_0, K_{оп}-65 (10 \times 6 \times 5)$; $\circ\circ\circ - \tau_3/\tau_0, \tau_0 = 1,5 \text{ мсек}, Z_0 = 75 \text{ ом}, w = 5, N = 32$; $*** - \tau_3/\tau_0$
 $\Phi_{оп}-100 (10 \times 6 \times 5), \tau_0 = 1 \text{ мсек}, Z_0 = 50 \text{ ом}, w = 5, N = 32, \eta = 0,6$; $\blacktriangledown\blacktriangledown\blacktriangledown - \tau_3/\tau_0, K_{оп}-65 (10 \times 6 \times 5)$,
 $\tau_0 = 1 \text{ мсек}, Z_0 = 50 \text{ ом}, w = 5, N = 32, \eta = 0,6$; $1 - m'_0 = -0,9; 2 - m'_0 = -0,5; 3 - m'_0 = 0; 4 -$
 $m'_0 = +0,5; 5 - m'_0 = +0,7; 6 - m'_0 = +0,9; 7 - m'_0 = 0,95; m'_0 = 1 - \eta + \eta m_0$.

Экспериментальными и теоретическими данными о времени задержки и импедансе ударной волны можно воспользоваться для определения коэффициента заполнения линии η или средней начальной намагниченности феррита M_0 (m_0). Знание этих величин необходимо при расчете формирующей линии: оценке оптимальной длины линии и длительности фронта ударной волны, оценке влияния дисперсии на структуру фронта и т. д. [5].

Так как при работе с однополярными импульсами и токе подмагничивания, равным нулю, начальная намагниченность близка к остаточной M_r ($m_0 \approx M_r/M \approx B_r/B_s$), то по определенной из эксперимента величине $m'_0 = 1 - \eta + \eta m_0$ легко найти коэффициент заполнения η . При известном коэффициенте заполнения η и данным измерениям Z_p или τ_3 не представляет труда найти среднюю начальную намагниченность феррита при различных токах подмагничивания. На рис. 3 при-

* В эксперименте использовались линии типа приведенных на рис. 10 статьи [1]. Ток измерялся с помощью включенного в разрыв базисного (находящегося под нулевым потенциалом) провода малого безындукционного сопротивления. Последнее изготавливалось в виде отрезка коаксиальной линии, заполненного сопротивлениями.

ведены экспериментальные и теоретические данные измерения Z_p/Z_0 в зависимости от величины скачка тока $I_p(H_p)$ при различных токах подмагничивания. Здесь же приведены значения эффективной начальной намагниченности феррита, соответствующие различным токам подмагничивания.

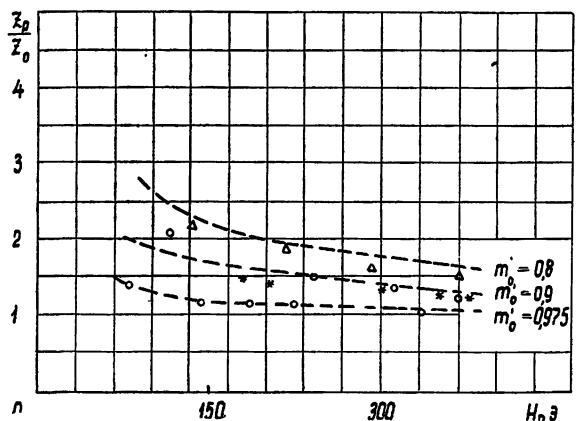
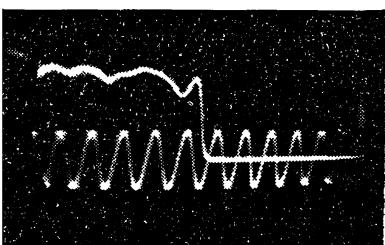


Рис. 3. Изменение относительного импеданса разрыва Z_p от величины поля импульса H_p при различных полях подмагничивания:

$H_0 = 0 (i_0 = 0); H_0 = 0,8$ эрстед ($i_0 = 0,25$ а); $H_0 = 4$ эрстед ($i_0 = 1,2$ а); $\Phi_{оп} = 600$ ($8 \times 4 \times 2$), $\tau_0 = 0,6$ нсек, $Z_0 = 30$ ом, $w = 5$, $N = 32$; $\triangle\Delta\Delta - i_0 = -0,25$ а, $m_0 = 0$; $\bullet\bullet\bullet - i_0 = 0$, $m_0 = 0,57$, $\eta \approx 0,2$; $*** - i_0 = 0,25$ а, $m_0 = 0,6$; $\circ\circ\circ - i_0 = 1,2$ а, $m_0 = 0,9$.

рыв) незначительно, если скорость изменения много меньше, чем на фронте ударной волны. На рис. 4б показана зависимость длительности разрыва от величины скачка тока для трех различных по форме импульсов (рис. 4в). Экспериментальные точки во всех трех случаях, как и следовало ожидать, хорошо ложатся на одну кривую, что свидетельствует о том, что длительность разрыва определяется только величиной поля на скачке.



a)

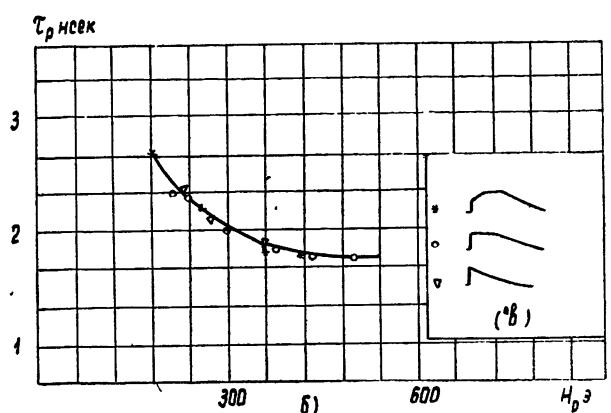


Рис. 4. Зависимость $t_p = f(H_p)$ для импульсов различной формы:

$\Phi_{оп} = 600$ ($8 \times 4 \times 2$), $\tau_0 = 0,6$ нсек, $Z_0 = 30$ ом, $w = 5$, $N = 32$, $B_s = 3400$ гс, $B_r = 1500$ гс, $H_c = 0,6$ эрстед.

2. СТРУКТУРА ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Структура фронта ударной волны в линии с сосредоточенными параметрами, согласно [2-4], в основном зависит от параметров ячейки линии (τ_0 , η), феррита (α , M) и состояния его начальной намагниченности (m_0). Очевидно, что для экспериментального исследования влияния одного из параметров линии или феррита необходимо фиксировать все остальные или, в лучшем случае, исключить влияние некоторых из них. Так, например, влияние параметров феррита на длительность фронта ударной волны целесообразно исследовать в линиях с малыми (по отношению к длительности фронта стационарной ударной волны) постоянными времени ячейки τ_0 . Влияние пространственной дисперсии в такой линии незначительно и ее в первом приближении можно рассматривать как линию с распределенными параметрами. В этом случае для принятой нами (см. [4]) некогерентной модели перемагничивания феррита длительность фронта стационарной ударной волны между уровнями $(0,1 \div 0,9) H_u$ [3]

$$\tau_p \simeq \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha\gamma H_p} \frac{1}{1 + m_0} \left[2,2(3 + m_0) - (1 - m_0) \ln \frac{0,1 + 0,9 m_0}{0,9 + 1,1 m_0} \right], \quad (3)$$

где $\gamma = 1,76 \cdot 10^7$ эрстед $^{-1} \cdot$ сек $^{-1}$ —абсолютная величина гиромагнитного отношения для электрона, H_p —скакок магнитного поля.

Из (3) видно, что длительность разрыва τ_p (как и время перемагничивания феррита), минимальная при коэффициенте диссипации $\alpha=1$ и обратно пропорциональная величине магнитного поля, монотонно растет с уменьшением m_0 и не зависит от намагниченности насыщения. Зависимость τ_p от H_p и m_0 проверяется довольно просто. Выяснить же влияние параметра α на τ_p экспериментально затруднительно, во-первых, потому, что значение α в „паспортных“ данных феррита не приводится и для его определения необходимо ставить эксперименты по импульсному перемагничиванию феррита в сильных полях* (см. [6, 11]), во-вторых, для большинства исследованных марок феррита (см. [6, 11]) значения α лежат в пределах $0,3 \div 1$, а значения коэффициента $1 + \alpha^2/\alpha$, пропорционального τ_p , изменяются при этом в пределах $2 \div 3,6$, т. е., вообще говоря, незначительно.

Для оценки влияния параметров τ_0 и η на длительность фронта ударной волны** в линии с сосредоточенными параметрами при некогерентном перемагничивании ненасыщенного феррита можно воспользоваться результатами работы [2]. Приближенно можно считать, что длительность фронта ударной волны τ_p равна

$$\tau_p \simeq T_1 + T_2 + T_{\max}, \quad (4)$$

где $1/T_1$ —инкремент нарастания тока в передней части фронта волны, $1/T_2$ —декремент затухания или частота осцилляций за ее фронтом, T_{\max} —максимальная из T_1 и T_2 . Если T_1 и T_2 —одного порядка, то, как это принято при исследовании переходных процессов в линейных цепочках с дискретными параметрами, при оценке τ_p можно считать

$$\tau_p \simeq (2,5 \div 4) T. \quad (5)$$

Инкремент нарастания $1/T_1$ и период осцилляций T_k можно найти из соотношений (см. [2])

* Для некоторых марок ферритов α может быть найден из экспериментов по ферромагнитному резонансу.

** Строго говоря, под ударной волной следует понимать весь переходный процесс от основания импульса до его вершины; однако здесь мы будем разделять собственно фронт ударной волны (его длительность τ_p) и осцилляции за фронтом.

$$\operatorname{sh}^2(\tau_3/2T_1) = (\tau_0/4T_1)(\tau_0/T_1 + q'), \quad (6)$$

$$2 \sin(\pi\tau_3/T_k) = \pi\tau_0/T_k, \quad (7)$$

где τ_3 — время задержки на ячейку (2),

$$q' = \frac{4\pi M \alpha \gamma}{1 + \alpha^2} (1 - m_0^2) \tau_0.$$

Как нетрудно видеть из (6), инкремент нарастания $1/T_1$ стремится к своему максимальному значению и длительность фронта становится минимальной при $H_p \rightarrow \infty$ ($\tau_3 \rightarrow \tau_0$). При этом минимальная длительность фронта ударной волны тем ближе к τ_0 , чем больше величина q'/τ_0 . Последняя имеет максимум при $m_0 = 0$ и $\alpha = 1$ и монотонно растет с увеличением η ($0 < \eta < 1$) и M .

Влияние параметров линии и начальной намагниченности феррита на структуру фронта ударной волны. На рис. 5 приведена зависимость $1/\tau_p$ от H_p для ударных волн в трех LC-линиях с ферри-

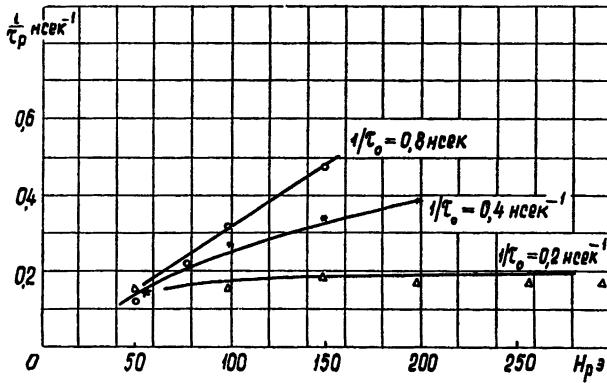


Рис. 5. Зависимость $1/\tau_p = f(H_p)$ для линий с различными постоянными временем звена τ_0 :

○○○ — $\Phi_{оп}-600$ ($20 \times 15 \times 6$), $Z_0 = 75 \text{ ом}$, $w = 4$, $N = 50$; *** — $\Phi_{оп}-600$ ($20 \times 15 \times 6$), $Z_0 = 75 \text{ ом}$, $w = 7$, $N = 50$; △△△ — $\Phi_{оп}-600$ ($20 \times 15 \times 6$), $Z_0 = 75 \text{ ом}$, $w = 11$, $N = 20$, $B_s = 4000 \text{ гс}$, $B_r = 1550 \text{ гс}$, $H_c = 4,5 \text{ эрстед}$.

том марки $\Phi_{оп}-600$, имеющих различные постоянные времени ячейки τ_0 . Все три линии имели коэффициент заполнения, близкий к единице*. Как и следовало ожидать, при больших значениях коэффициента q' ($\eta \approx 1$, $m_0 \approx 0,6$, $4\pi M = 3500 \text{ гс}$, $\alpha \approx 1$) в линиях с $\tau_0 = 5 \text{ нсек}$ и $\tau_0 \approx 2,5 \text{ нсек}$ минимальная длительность фронта τ_{\min} примерно равна τ_0 и достигается при сравнительно небольших полях (порядка 200 эрстед). При поле того же порядка с меньшей постоянной времени $\tau_0 = 1,25 \text{ нсек}$ „насыщение“, а следовательно, и минимальная длительность фронта не достигается.

В линиях с малым коэффициентом заполнения или слабой нелинейностью при наличии пространственной дисперсии естественно ожидать, что минимальная длительность фронта ударной волны будет значительно больше постоянной времени ячейки. На рис. 6 приведена зависимость $1/\tau_p$ от H_p для ударных волн в линии с коэффициентом заполнения $\eta \approx 0,2$. При токе подмагничивания, равном нулю, $m_0 \approx 0,57$

* Катушки линий намотаны равномерно на тороидальных ферритовых сердечниках с большим сечением, поэтому поток рассеивания в данном случае мал по сравнению с потоком внутри тороида. Индуктивность базисного провода также мала по сравнению с индуктивностью катушки.

и $\tau_{\min} = 1,3 \tau_0$. С изменением тока подмагничивания, т. е. с изменением m_0 (см. рис. 6), меняется и минимальная длительность фронта ударной волны. На рис. 6 приведен теоретический график $1/4T_1$ от H_p для случая $m_0 \approx 0,57$ (пунктирная линия); здесь же указаны теоретические минимальные длительности фронта ударной волны ($1/4T_{\min}$) при различной начальной намагниченности феррита.

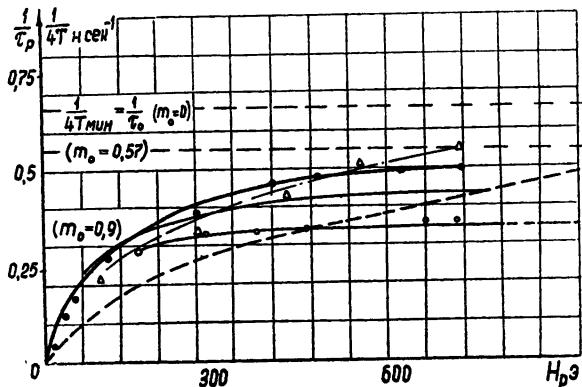


Рис. 6. Теоретически рассчитанные и экспериментально полученные зависимости $1/\tau_p = f(H_p)$ при различных полях подмагничивания ($H_0=0$ ($i_0=0$); $H_0=0,8$ эрстед ($i_0=0,25$ а); $H_0=4$ эрстед ($i_0=1,2$ а>):

$\Phi_{\text{оп}}=600$ ($8 \times 4 \times 2$), $\tau_0=1,5$ нсек, $Z_0=75$ ом, $w=5$, $N=32$;
 $\Delta\Delta\Delta - i_0 = -0,25$ а; $\bullet\bullet\bullet - i_0 = 0$; $*** - i_0 = 0,25$ а; $\circ\circ\circ - i_0 = 1,2$ а.

Интересно отметить, что в области больших полей $1/\tau_p$ приближается к $1/\tau_{\min}$ медленно. Поэтому в некотором интервале полей кривая $1/\tau_p$ от H_p с большой степенью точности может быть аппроксимирована прямой (см., например, рис. 7). Наклон такой прямой будет определяться релаксационными свойствами феррита и дисперсией линии. Очевидно, что если продолжение отрезка прямой $1/\tau_p$ от H_p в область меньших полей дает точку пересечения оси $1/\tau_p=0$ при отрицательных полях, то имеет место уширение фронта ударной волны, обусловленное дисперсией, связанной с дискретностью параметров линии. При этом в линиях с различной дисперсией стационарные разрывы одинаковой величины будут иметь различную длительность (см. рис. 7).

Наличие пространственной дисперсии в линии приводит к появлению осцилляций за фронтом ударной волны [2, 8, 9]. Значительные осцилляции наблюдаются при медленном и меньшие —

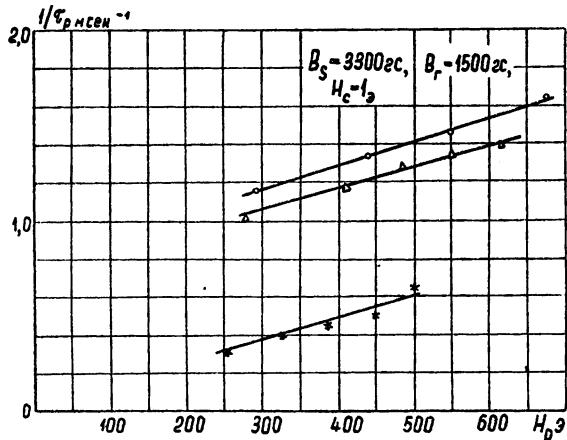


Рис. 7. Зависимость $1/\tau_p = f(H_p)$ для линий с различными постоянными временем звена τ_0 :

$\circ\circ\circ - K_{\text{оп}}=65$ (2×1 ; 3×1), $\tau_0 = 0,1$ нсек, $Z_0 = 25$ ом, $w = 3$, $N = 42$; $\Delta\Delta\Delta - K_{\text{оп}}=65$ ($3 \times 2 \times 1$), $\tau_0 = 0,3$ нсек, $Z_0 = 35$ ом, $w = 3$, $N = 42$; $*** - K_{\text{оп}}=65$ ($10 \times 6 \times 5$), $\tau_0 = 1$ нсек, $Z_0 = 50$ ом, $w = 5$, $N = 32$, $B_s = 3300$ гс, $B_r = 1500$ гс, $H_c = 1$ эрстед.

при быстром перемагничивании феррита. То, что относительная величина I_k/I_i (I_k —максимальная амплитуда колебаний за фронтом волны) при медленном перемагничивании феррита больше, чем при быстром для одинаковых значений отношения τ_p/τ_0 , указывает на большую диссипацию энергии, имеющую место на фронте волны при быстром перемагничивании феррита.

В импульсной технике осцилляции на вершине импульса, как правило, нежелательны. Их можно погасить, если ввести дополнительные высокочастотные потери. Осцилляции эффективно гасятся, если в последние ячейки линий включить сопротивления по одной из схем, показанных на рис. 8а, б. На рис. 9а, б, в показаны осциллограммы

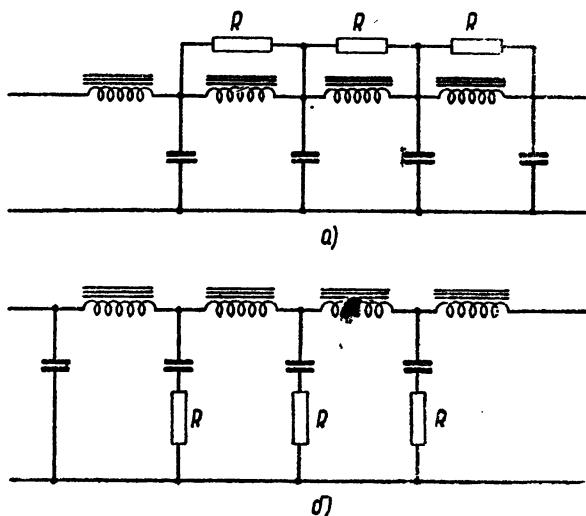
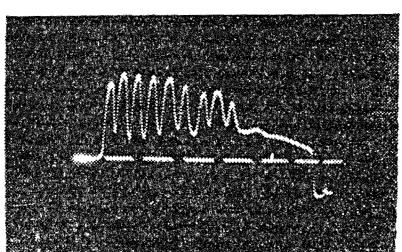
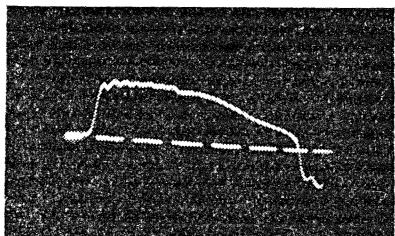


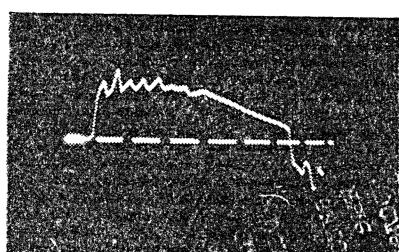
Рис. 8. Принципиальные схемы включения демпфирующих сопротивлений.



а)



б)



в)

Рис. 9. Осциллограммы импульса в линии ($\Phi_{оп} = 600$ ($32 \times 26 \times 7$), $\tau_0 = 2,5 \cdot 10^3$ нсек, $Z_0 = 75$ ом, $w = 400$, $N = 15$) с демпфирующими сопротивлениями:
а) $R = 0$, б) $R = 50$ ом, в) $R = 1,3$ ком.

импульсов на выходе линии соответственно при $R=0$, $R=50$ ом и $R=1,3$ ком. Как видно из осциллограмм, с ростом сопротивления (сопротивление R включалось по схеме рис. 8б) амплитуда осцилляций значительно уменьшается, длительность же фронта при компромиссном подборе R увеличивается незначительно. Утечка емкости и сопротивление проводов также способствуют гашению осцилляций; однако они существенно ухудшают и фронт и форму импульса, а также приводят к уменьшению его амплитуды.

Отметим, что ударные электромагнитные волны в линиях с дисперсией могут быть использованы для генерации высокочастотных колебаний. Причем для получения осцилляций с $I_k \sim I_n$ необходимо, чтобы диссипация энергии на разрыве при перемагничивании феррита была мала. Поэтому очевидно, что линии с ферритом для получения высокочастотных колебаний мало пригодны. Подходящими для этой цели могут оказаться линии с полупроводниками.

Влияние параметров феррита на структуру фронта ударной волны. Полного исследования влияния свойств феррита на длительность фронта ударной волны и ее структуру в связи с вышепомеченными сложностями в данной работе не проводилось. В этом направлении был поставлен эксперимент, заключавшийся в сравнении имеющихся в нашем распоряжении в достаточном количестве образцов. Для этой цели были изготовлены идентичные по конструкции линии с различными марками феррита. На рис. 10 приведены графики

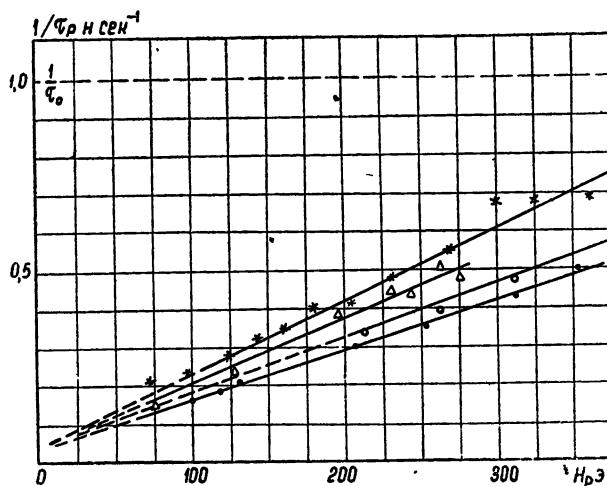


Рис. 10. Зависимость $1/\tau_p = f(H_p)$ в линиях с разными марками феррита:

●●● — $\Phi_{\text{оп}}=100$ ($10 \times 6 \times 5$), $B_s = 4000$ гс, $B_r = 1600$ гс, $H_c = 2$ эрстед;
 $\triangle\triangle\triangle$ — $\Phi_{\text{оп}}=400$ ($10 \times 6 \times 5$), $B_s = 2600$ гс, $B_r = 1000$ гс, $H_c = 0,6$ эрстед;
*** — $\Phi_{\text{оп}}=600$ ($10 \times 6 \times 5$), $B_s = 3400$ гс, $B_r = 1500$ гс, $H_c = 0,5$ эрстед;
○○○ — $K_{\text{оп}}=65$ ($10 \times 6 \times 5$), $B_s = 3300$ гс, $B_r = 2300$ гс, $H_c = 1$ эрстед, $\tau_0 = 1$ нсек,
 $Z_0 = 50$ ом, $w = 5$, $N = 32$.

ки зависимости $1/\tau_p$ от H_p для ударных волн в линиях с ферритом марки $\Phi_{\text{оп}}=100$, $\Phi_{\text{оп}}=400$, $\Phi_{\text{оп}}=600$, $K_{\text{оп}}=65$. По-видимому, феррит марки $\Phi_{\text{оп}}=600$ по всей совокупности параметров* (α , M , m_0 ($i_0=0$)) немно-

* Для линий с ферритом марки $\Phi_{\text{оп}}=100$, $\Phi_{\text{оп}}=400$, $K_{\text{оп}}=65$ при m_0 ($i_0=0$) = B_r/B_s коэффициент заполнения, найденный экспериментально, равен 0,6. Поскольку линия с ферритом марки $\Phi_{\text{оп}}=600$ должна иметь (в силу идентичности конструкции) тот же коэффициент заполнения, что и другие, приходится полагать m_0 ($i_0=0$) = 0,8, т. е. больше B_r/B_s , найденное из статистической кривой намагничивания. Это непонятное исключение из общего правила наблюдалось только для ферритов марки $\Phi=600$ и $\Phi_{\text{оп}}=600$.

го лучше для получения крутых фронтов, чем остальные опытные ферриты. Хотя зависимость $1/\tau_p$ от H_p в данном случае близка к линейной, влияние дисперсии линии на длительность фронта ударной волны значительно (продолжение прямой $1/\tau_p$ от H_p пересекает ось при отрицательных H_p).

На рис. 11 приведена зависимость $1/\tau_p$ от H_p для ударных волн в одинаковых LC -цепочках с ферритами ВТ-5, К-40 и $\Phi_{оп}$ -600. Для

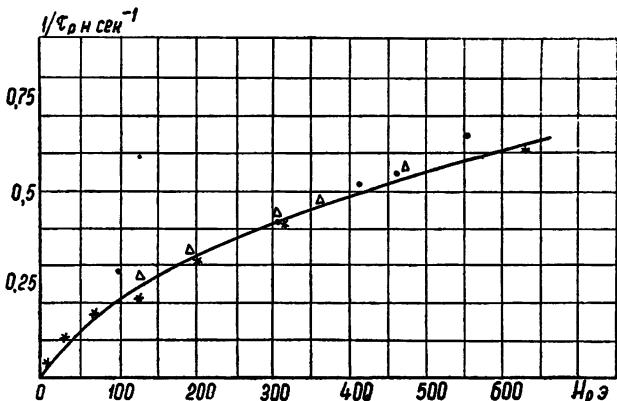


Рис. 11. Зависимость $1/\tau_p = f(H_p)$ в линиях с разными марками феррита:

***—ВТ-5 ($8 \times 4 \times 2$), $B_s = 2800$ гс, $B_c = 2300$ гс, $H_c = 0,15$ эрстед;
●●●—К_{оп}-65 ($8 \times 4 \times 2$); △△△— $\Phi_{оп}$ -600 ($8 \times 4 \times 2$), $\tau_0 = 0,6$ нсек, $Z_0 = 30$ ом,
 $w = 5$, $N = 32$.

всех трех линий зависимость $1/\tau_p$ от H_p практически одинакова. Если ввести коэффициент пропорциональности между $1/\tau_p$ и H_p , $S_w = \tau_p H_p$ (как это делается в работах по перемагничиванию) для области малых и больших полей, то, как нетрудно видеть, в области малых полей коэффициент $S_w \approx 0,3$ эрстед·мксек, т. е. в три-четыре раза меньше, чем в области больших полей, где существенную роль играет дисперсия. Чтобы уменьшить влияние дисперсии на длительность фронта ударной волны в линии с сосредоточенными параметрами, необходимо брать линию с малой постоянной времени ячейки ($\tau_0 \ll \tau_p$).

Таким образом, когда влияние дисперсии, обусловленное дискретностью параметров линии, на длительность фронта ударной волны велико, но τ_p еще значительно больше $\tau_{p\min}$, все исследованные ферриты обеспечивают примерно одинаковую длительность фронта. Исследование влияния отдельных параметров феррита на длительность фронта ударной волны в линиях передачи с распределенными параметрами не проводилось.

Авторы весьма признательны А. В. Гапонову, Л. А. Островскому и Г. И. Фрейдману за советы и просмотр рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 36, 3, 957 (1959); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 79 (1960).
2. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1130 (1962).
3. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Радиотехника и электроника (в печати).
4. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 551 (1963).
5. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника (в печати).
6. Е. М. G u o g g y, J. Appl. Phys., 29, 283 (1958).

7. Л. Н. Булаевский, В. М. Файи, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 39, 836 (1960).
8. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Э. Я. Дауме, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ (в печати).
9. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 860 (1961).
10. И. Г. Катаев, Вопросы радиоэлектроники, сер. 6, № 2, 61 (1959).
11. Ферриты, изд. АН БССР, Минск, 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 июля 1962 г.

STATIONARY SHOCK ELECTROMAGNETIC WAVES IN TRANSMISSION LINES WITH UNSATURATED FERRITE

A, M. Belyantsev, Yu. K. Bogatyryov, L. I. Solovieva

Results of an experimental investigation of stationary shock electromagnetic waves in transmission lines with an unsaturated ferrite are given. Basing on the investigation of the front structure of shock waves, the influence of parameters of line and ferrite on the structure of the stationary wave is found out. Methods of measurement of line ferrite filling factors and initial magnetization of ferrite are suggested.

ПАРАМЕТРЫ *H*-ВОЛНОВОДА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

B. M. Седых, Л. П. Яцук

Определены основные параметры *H*-волновода с диэлектрическим заполнением. Показано, что с практической точки зрения наиболее интересным является случай заполнения диэлектриком зазора *H*-волновода, так как при этом рабочая полоса частот волновода расширяется, а характеристическое сопротивление уменьшается, слабее изменяясь в большей полосе частот.

Благодаря целому ряду преимуществ *H*-волноводы находят все более широкое применение. Так, в последние годы появились работы [1-3], посвященные описанию различных узлов высокочастотных трактов на *H*-волноводах. Одним из основных преимуществ *H*-волновода по сравнению с прямоугольным волноводом тех же внешних размеров является возможность получения довольно низких значений характеристического сопротивления, мало меняющегося в широкой полосе частот. В настоящее время в технике сверхвысоких частот нередко приходится применять волноводы с характеристическим сопротивлением $15 \div 150 \text{ ом}$. При таких значениях характеристического сопротивления некоторые размеры *H*-волновода получаются очень малыми, что может вызвать известные затруднения при их изготовлении и эксплуатации. Из общих соображений следует, что заполнение диэлектриком *H*-волновода уменьшает характеристическое сопротивление и, следовательно, позволяет увеличить соответствующие размеры волновода. Кроме того, можно ожидать, что заполнение зазора волновода диэлектриком еще более увеличит рабочий диапазон волн *H*-волновода.

В настоящей статье приводится расчет основных параметров *H*-волновода, частично заполненного диэлектриком*.

1. ДИСПЕРСИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Рассмотрим распространение основной волны H_{10} в *H*-волноводе, в центральный зазор которого помещается идеальный диэлектрик симметрично относительно центральной оси волновода (см. рис. 1).

В предположении, что изменение поля вдоль волновода подчиняется закону $e^{-j\gamma z}$, волновое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -(\omega^2 \epsilon \mu - \gamma^2) H, \quad (1)$$

где $H = H_z(x, y)$ — продольная составляющая магнитного поля, ϵ, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости в точке x, y .

Отметим сразу же, что распределение электрического и магнитного полей по поперечному сечению волновода не остается неизменным с изменением частоты, поскольку на всех частотах должно выполняться равенство

* Об исследовании прямоугольных волноводов с диэлектриком см. [4, 5].

$$\omega^2 \epsilon \mu - q_e^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - q_0^2,$$

необходимое для того, чтобы постоянная распространения γ была общей для всего волновода. Здесь введены следующие обозначения:

$$q_e^2 = \omega^2 \epsilon \mu_0 - \gamma^2,$$

$$q_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \gamma^2,$$

ϵ и ϵ_0 — соответственно диэлектрические проницаемости вставленного в волновод диэлектрика и воздуха.

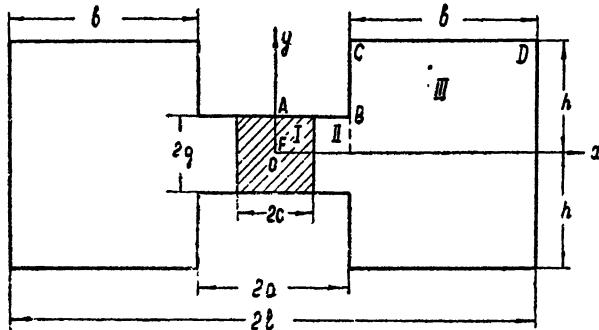


Рис. 1. Поперечное сечение H -волновода с диэлектриком в центральном зазоре.

Совершенно очевидно, что, как и в случае пустого волновода [6,7], достаточно рассмотреть лишь четвертую часть поперечного сечения (рис. 1); ее мы разобьем на три простые области I, II, III, в каждой из которых переменные легко разделяются. Продольная составляющая магнитного поля волны H_{10} на сложном контуре $ABCDEF$ должна удовлетворять условию $\partial H / \partial n = 0$, а на линии AF — условию $H = 0$. С учетом этих граничных условий поля в I, II, III областях запишутся соответственно в виде

$$H_I = \sum_{n=0}^{\infty} C_{I,n} \sin(p_{en}x) \cos(s_n y);$$

$$H_{II} = \sum_{m=0}^{\infty} [A_{II,m} \sin(p_m x) + B_{II,m} \cos(p_m x)] \cos(s_m y); \quad (2)$$

$$H_{III} = \sum_{t=0}^{\infty} C_{III,t} \cos[q_t(l-x)] \cos(r_t y).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$s_n = \pi n / g; \quad p_{en} = \sqrt{q_e^2 - s_n^2};$$

$$s_m = \pi m / g; \quad p_m = \sqrt{q_0^2 - s_m^2};$$

$$r_t = \pi t / h; \quad q_t = \sqrt{q_0^2 - r_t^2}.$$

В выражения для полей входит неизвестный параметр γ — постоянная распространения вдоль волновода. Условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического (E_y) и магнитного (H_z) полей на границах раздела I и II, а также II и III областей позволяют методом

дом неопределенных коэффициентов [7] получить следующее уравнение для определения γ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q_0} \left[\operatorname{tg}(q_0 a) + \frac{(q_\epsilon / q_0) \operatorname{tg}(q_\epsilon c) - \operatorname{tg}(q_0 c)}{(q_\epsilon / q_0) \operatorname{tg}(q_\epsilon c) \operatorname{tg}(q_0 c) + 1} \right] \times \\ & \times \left[1 - \frac{(q_\epsilon / q_0) \operatorname{tg}(q_\epsilon c) - \operatorname{tg}(q_0 c)}{(q_\epsilon / q_0) \operatorname{tg}(q_\epsilon c) \operatorname{tg}(q_0 c) + 1} \operatorname{tg}(q_0 a) \right]^{-1} = \\ & = \frac{g}{h} \frac{\operatorname{ctg}(q_0 b)}{q_0} + \frac{2}{gh} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg}(q_t b)}{q_t} \left[\frac{\sin(r_t g)}{r_t} \right]^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Этим уравнением описываются дисперсионные свойства волновода, частично заполненного диэлектриком. Как показал расчет, дисперсионная характеристика H -волновода, центральный зазор которого полностью заполнен полистиролом ($\epsilon = 2,57$), идет гораздо более полого, чем у соответствующего пустого волновода (см. рис. 2)*.

Благодаря замедляющему действию диэлектрика на высоких частотах длина волны в волноводе может

оказаться короче длины волны в свободном пространстве $\epsilon = 1$; по мере приближения к критической частоте она растет, стремясь к бесконечности. При каком-то промежуточном значении частоты длина волны в волноводе λ_g становится равной длине волны в свободном пространстве λ_0 . Предельный переход $\gamma = 2\pi/\lambda_g \rightarrow 2\pi/\lambda_0$ в выражении (3) позволяет получить формулу для определения этой частоты:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon - 1} \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon - 1} c \right) = \\ & = \frac{g}{hb + g(a - c)}. \end{aligned} \quad (4)$$

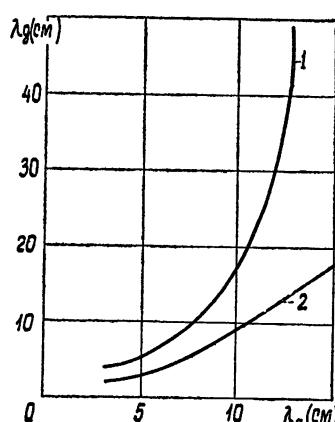
Рис. 2. Дисперсионные характеристики H -волновода:

1—при воздушном заполнении, 2—зазор волновода целиком заполнен полистиролом ($\epsilon = 2,57$).

Уравнение для определения критической длины волны H_{10} в таком волноводе может быть найдено непосредственно из уравнения (3). Для этого достаточно положить в нем $\gamma = 0$. Наименьший корень $k = 2\pi/\lambda_c$ полученного таким образом уравнения и даст значение критической длины волны λ_c .

Совершенно аналогичным образом можно получить уравнение для определения критической длины волны H_{20} в зависимости от размеров волновода и помещаемого в зазор диэлектрика. Только при записи полей в различных областях (рис. 1) следует учесть, что условие $\partial H / \partial t = 0$ выполняется уже на всем контуре $ABCDEF$, что связано с особенностями конфигурации волны H_{20} . Сшивая H_{zI} и H_{zII} , E_{yI} и E_{yII} , а также H_{zII} и H_{zIII} , E_{yII} и E_{yIII} на соответствующих границах раздела областей, получаем следующее уравнение для определения критической длины волны H_{20} :

* Расчет был проведен для волновода со следующими размерами (рис. 1): $2l = 34$ мм, $2h = 16$ мм, $2a = 8,5$ мм, $2g = 3$ мм, $b = 12,75$ мм.



$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \left[\frac{\operatorname{tg}(kc) - (1/\sqrt{\epsilon}) \operatorname{tg}(\sqrt{\epsilon} kc)}{1 + (1/\sqrt{\epsilon}) \operatorname{tg}(\sqrt{\epsilon} kc) \operatorname{tg}(kc)} \operatorname{tg}(ka) + 1 \right] \times \\ & \times \left[\frac{\operatorname{tg}(kc) - (1/\sqrt{\epsilon}) \operatorname{tg}(\sqrt{\epsilon} kc)}{1 + (1/\sqrt{\epsilon}) \operatorname{tg}(\sqrt{\epsilon} kc) \operatorname{tg}(kc)} - \operatorname{tg}(ka) \right]^{-1} = \\ & = \frac{g}{h} \frac{\operatorname{ctg}(kb)}{k} + \frac{2}{gh} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg}(q_t b)}{q_t} \left[\frac{\sin(r_t g)}{r_t} \right]^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\gamma = 0$, $k = 2\pi/\lambda_c$, λ_c — критическая длина волны H_{20} . Предельный переход $\epsilon \rightarrow 1$ или $c \rightarrow 0$ в формулах (3) и (5) приводит к соответствующим выражениям для пустого волновода, полученным ранее [8].

Расчет критических длин волн H_{10} и H_{20} для H -волновода с помещенным в зазор диэлектриком подтверждает предположение о том, что критическая длина волны H_{10} должна возрастать с увеличением толщины пластины, а λ_c волны H_{20} оставаться почти неизменной. Результаты расчета для указанного волновода приведены на рис. 3. Оптимальной в смысле полосы пропускаемых частот оказалась ширина диэлектрической пластины, равная приблизительно $0,7 \div 1,0$ ширины выступа H -волновода.

Задача о распространении волн H_{10} и H_{20} при симметричном помещении диэлектрика в боковые секции волновода (см. рис. 4) решается совершенно аналогично. Дисперсионное уравнение для волны H_{10} в этом случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg}(q_0 a)}{q_0} &= \frac{g}{h} \frac{\varphi_0}{q_0} + \frac{2}{gh} \times \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m}{q_m} \left[\frac{\sin(r_m g)}{r_m} \right]^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\varphi_m = \left\{ 1 - \frac{q_0^2 q_{\epsilon m}}{q_{\epsilon}^2 q_m} \operatorname{tg}[q_{\epsilon m}(b-c)] \operatorname{tg}(q_m c) \right\} \times$$

$$\left\{ \operatorname{tg}(q_m c) + \frac{q_0^2 q_{\epsilon m}}{q_{\epsilon}^2 q_m} \operatorname{tg}[q_{\epsilon m}(b-c)] \right\}^{-1};$$

$$r_m = \pi m / h; \quad q_m = \sqrt{q_0^2 - r_m^2}; \quad q_{\epsilon m} = \sqrt{q_{\epsilon}^2 - r_m^2}.$$

Остальные обозначения прежние.

Уравнение для определения критической длины волны H_{20} :

$$-\frac{\operatorname{ctg}(ka)}{k} = \frac{g}{h} \frac{\varphi'_0}{k} + \frac{2}{gh} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi'_n}{q_n} \left[\frac{\sin(r_n g)}{r_n} \right]^2;$$

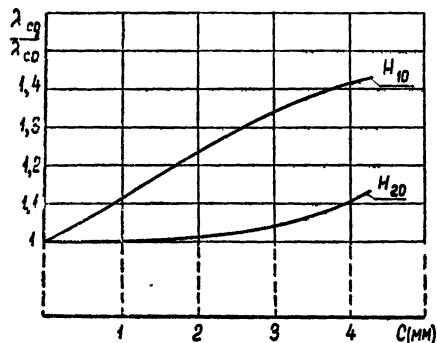


Рис. 3. Зависимость критических длин волн λ_c в волноводе с диэлектриком от ширины помещаемого в центральный зазор диэлектрика ($\epsilon = 2,57$). В пустом волноводе λ_{c0} волны H_{10} равна 13,1 см,

λ_{c0} волны H_{20} равна 2,91 см.

$$\begin{aligned}\varphi'_n = & \left\{ 1 - \frac{q_{en}}{\epsilon q_n} \operatorname{tg} [q_{en}(b - c)] \operatorname{tg}(q_n c) \right\} \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{q_{en} \operatorname{tg} [q_{en}(b - c)]}{\epsilon q_n \operatorname{tg}(q_n c)} \right\}^{-1} \frac{1}{\operatorname{tg}(kc)} ; \\ k = & 2\pi/\lambda_c; \quad \tau_n = \pi n/h; \quad q_n = \sqrt{k^2 - r_n^2}; \quad q_{en} = \sqrt{k^2\epsilon - r_n^2}.\end{aligned}\quad (7)$$

В этом случае по вполне ясным физическим соображениям разнос между критическими частотами модов H_{10} и H_{20} уменьшается по срав-

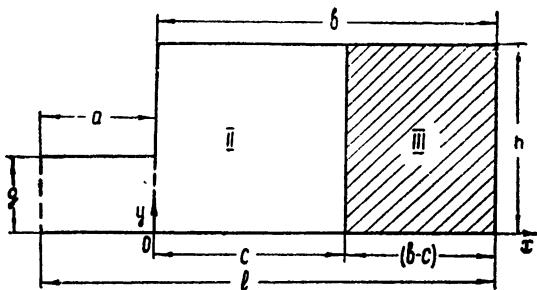


Рис. 4. Разбиение поперечного сечения H -волно-вода с диэлектриком в боковых секциях на про-стейшие области.

нению с пустым волноводом, так как λ_c волны H_{20} значительно возрастают при увеличении толщины помещаемой пластины, тогда как λ_c волны H_{10} остается почти неизменной (см. рис. 5).

Полученные результаты легко объяснить, если учесть, что основная энергия волны H_{10} сосредоточена в зазоре выступа H -волновода, а энергия волны H_{20} переносится в основном по его боковым секциям.

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ВОЛНЫ H_{10}

Из всех параметров рассматриваемого волновода наибольший интерес представляет собой характеристическое сопротивление, величину которого нужно знать при согласовании волноводных трактов. Характеристическое сопротивление волновода с диэлектриком определяется как отношение квадрата эффективного напряжения между стенками волновода в центре выступа к значению средней мощности W , проходящей через поперечное сечение волновода:

$$Z = V_{\text{эфф}}^2/W = V^2/2W. \quad (8)$$

Здесь V —амплитуда напряжения в указанной точке, которая, на основании (2), может быть представлена так:

$$V = E_y u 2g = C_{10} \frac{\omega \mu}{q_e} 2g. \quad (9)$$

Здесь и в дальнейших расчетах мы ограничиваемся первым приближением, т. е. только нулевыми членами в разложении полей (2).

Проходящая мощность W может быть найдена интегрированием продольной составляющей вектора Умова—Пойнтинга по площади поперечного сечения волновода:

$$W = \frac{1}{2} \int \operatorname{Re} [EH^*]_z ds. \quad (10)$$

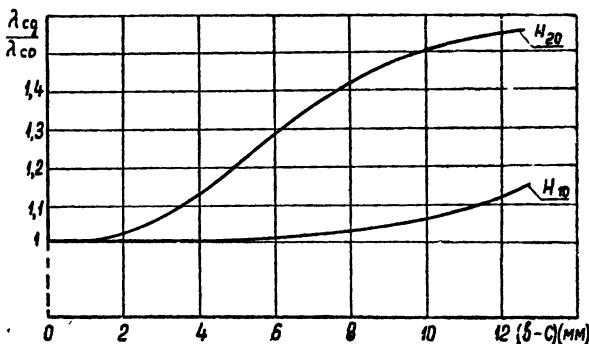


Рис. 5. Зависимость критических длин волн λ_{cg} в волноводе с диэлектриком от ширины $(b-c)$ помещаемого в боковые секции диэлектрика ($\epsilon=2,57$). В пустом волноводе λ_{c0} волны H_{10} равна 13,1 см, λ_{cg} волны H_{20} равна 2,91 см.

В нашем случае для Г-образной области $ABCDEF$ (см. рис. 1)

$$\frac{1}{4} W = W_\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} E_y H_x^* ds = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\omega \mu_0 \gamma}{[\omega^2 \epsilon \mu - \gamma^2]^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 ds, \quad (11)$$

где ϵ соответствует диэлектрической проницаемости в каждой точке интегрирования.

При помещении диэлектрика в центральный зазор волновода получаем после интегрирования следующее выражение для проходящей мощности:

$$W = 4 W_\Gamma = \frac{\omega \mu \gamma}{q_e^2} C_{10}^2 \left\{ g [I] + \frac{q_e^2}{q_0^2} S_{11}^2 g [II] + \frac{q_e^2}{q_0^2} \Phi_{11}^2 h [III] \right\} \quad (12)$$

и окончательно для характеристического сопротивления:

$$Z = \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_0} \right) \frac{2 \eta g^2}{\{ g [I] + (q_e^2/q_0^2) S_{11}^2 g [II] + (q_e^2/q_0^2) \Phi_{11}^2 h [III] \}}, \quad (13)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$[I] = c + \frac{\sin(2q_e c)}{2q_e};$$

$$[II] = (a - c) (1 + \psi_0^2) + (1 - \psi_0^2) \frac{\sin(2q_0 a) - \sin(2q_0 c)}{2q_0} + \\ + 2\psi_0 \frac{\cos(2q_0 a) - \sin(2q_0 c)}{2q_0};$$

$$[III] = b - \frac{\sin(2q_0b)}{2q_0}; \quad (14)$$

$$\psi_0 = \frac{B_{II0}}{A_{II0}} = \frac{(q_\epsilon/q_0) \operatorname{tg}(q_\epsilon c) - \operatorname{tg}(q_0c)}{(q_\epsilon/q_0) \operatorname{tg}(q_\epsilon c) \operatorname{tg}(q_0c) + 1};$$

$$S_{II} = \frac{A_{II0}}{C_{I0}} = \frac{\sin(q_\epsilon c)}{\sin(q_0c) + \psi_0 \cos(q_0c)};$$

$$\Phi_{II} = \frac{C_{III0}}{C_{I0}} = \frac{g}{h} \frac{\cos(q_0a) - \psi_0 \sin(q_0a)}{\sin(q_0b)} \frac{\sin(q_\epsilon c)}{\sin(q_0c) + \psi_0 \cos(q_0c)};$$

$\eta = 377 \text{ ом}$ — характеристическое сопротивление свободного пространства с $\epsilon_0 = 1$ и $\mu_0 = 1$.

При помещении диэлектрика в боковые секции выражение для характеристического сопротивления имеет следующий вид:

$$Z = \left(\frac{\lambda g}{\lambda_0} \right) \frac{2\eta g^2}{\{g [I] + S_6^2 h [II] + (q_0^2/q_\epsilon^2) \Phi_6^2 h [III]\}}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} [I] &= a + \frac{\sin(2q_0a)}{2q_0}; \\ [II] &= (1 + \varphi_0^2)c + (1 - \varphi_0^2) \frac{\sin(2q_0c)}{2q_0} + \varphi_0 \frac{\cos(2q_0c) - 1}{q_0}; \\ [III] &= (b - c) - \frac{\sin[2q_\epsilon(b - c)]}{2q_\epsilon}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{g}{h} \cos(q_0a); \quad \Phi_6 = \frac{g}{h} \frac{\cos(q_0a)}{\cos[q_\epsilon(b - c)]} [\sin(q_0c) + \varphi_0 \cos(q_0c)]; \\ \varphi_0 &= \frac{1 - (q_0/q_\epsilon) \operatorname{tg}[q_\epsilon(b - c)] \operatorname{tg}(q_0c)}{\operatorname{tg}(q_0c) + (q_0/q_\epsilon) \operatorname{tg}[q_\epsilon(b - c)]}. \end{aligned}$$

В приведенные выше формулы входят символы q_ϵ , q_0 , содержащие неизвестную величину γ , которую следует находить для каждого значения частоты из уравнения (3). Рассчитанная таким образом зависимость от частоты характеристического сопротивления волновода с указанными выше размерами, зазор которого полностью заполнен полистиролом, представлена на рис. 6. Ход кривой по характеру своему несколько отличается от такового для соответствующего пустого волновода, а именно: кривая имеет минимум в средней части диапазона, тогда как характеристическое сопротивление пустого волновода монотонно возрастает с увеличением длины волны. Этот факт легко объясняется перераспределением поля по сечению волновода с изменением частоты. В результате этого характеристическое сопротивление остается практически неизменным в большей полосе частот, чем в случае соответствующего пустого волновода.

3. ПРЕДЕЛЬНАЯ МОЩНОСТЬ ДЛЯ ОСНОВНОЙ ВОЛНЫ H_{10}

Пределное значение мощности, т. е. мощности, при которой может наступить пробой в волноводе с диэлектриком, подсчитываем аналогично тому, как это делалось в случае пустого волновода [8].

Если диэлектрик полностью заполняет зазор волновода, то максимум электрического поля, как и в случае пустого волновода [8], находится в центре зазора при $x=0$, будучи равен

$$E = C_{10} \omega \mu / q_e . \quad (17)$$

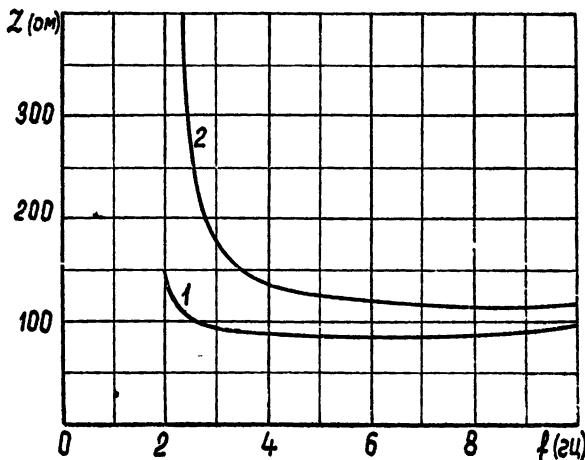


Рис. 6. Зависимость характеристического сопротивления от частоты. Кривая 1 соответствует H -волноводу, зазор которого целиком заполнен полистиролом, кривая 2 — соответствующему пустому волноводу.

Если напряженность поля в этом месте достигает величины $\hat{E} = 2,9 \text{ кв} \cdot \text{мм}^{-1}$ (в диэлектрике могут иметься пузырьки воздуха), возможен пробой диэлектрика. Эта величина и определит в нашем случае предельную мощность:

$$\hat{W} = \frac{\hat{E}^2}{\eta} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g} \right) \left\{ g \text{ [I]} + \frac{q_e^2}{q_0^2} S_{\text{u}}^2 g \text{ [II]} + \frac{q_e^2}{q_0^2} \Phi_{\text{u}}^2 h \text{ [III]} \right\} . \quad (18)$$

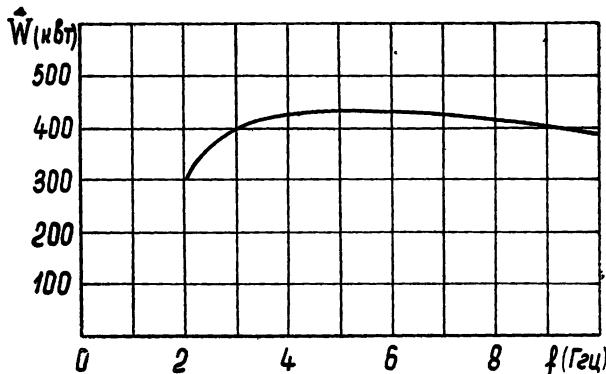


Рис. 7. Зависимость от частоты предельной мощности H -волновода, зазор которого полностью заполнен полистиролом. Размеры волновода:

$2l=34 \text{ мм}$, $2h=16 \text{ мм}$, $2a=8,5 \text{ мм}$, $2g=3 \text{ мм}$, $b=12,75 \text{ мм}$.

Обозначения здесь те же, что и в (14). Результаты расчета по формуле (18) приведены на рис. 7.

Если диэлектрик поместить в боковые секции волновода, выражение для предельной мощности принимает вид:

$$\hat{W} = \frac{\hat{E}^2}{\eta} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g} \right)^2 \left\{ g [I] + S_0^2 h [II] + \frac{q_0^2}{q_e^2} \Phi_0^2 h [III] \right\}. \quad (19)$$

Итак, мы получили формулы для определения основных параметров *H*-волновода с диэлектрическим заполнением: критических частот волн H_{10} и H_{20} , а также формулы для характеристического сопротивления и критической мощности в случае основной волны H_{10} .

Показано, что наибольший практический интерес представляет собой помещение диэлектрика в зазор *H*-волновода, так как при этом рабочая полоса частот волновода расширяется, а волновое сопротивление уменьшается, слабо изменяясь в большей полосе частот, чем у соответствующего пустого волновода.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Anderson, Trans. IRE, MTT-4, 201 (1956).
2. Техника сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1952.
3. В. Г. Калина, Электроника, научно-техн. сб., № 9, 138 (1958).
4. Н. Н. Малов, ЖТФ, 20, 1509 (1950).
5. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.
6. Л. Н. Дерюгин, Радиотехника, 3, № 6, 49 (1948).
7. Н. Ф. Фунтов, Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина, 88, 67 (1954).
8. В. М. Седых, А. Ф. Зоркин, В. М. Дмитриев, Н. В. Ляпунов и Л. П. Яцук, ЖТФ, 31, 699 (1961).

Харьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
10 июля 1962 г.

H-SHAPED WAVEGUIDE PARAMETERS WITH DIELECTRIC FILLING

V. M. Sedykh, L. P. Yazoob

Basic parameters of *H*-shaped waveguide with dielectric filling are determined. Dielectric filling of the gap in *H*-shaped waveguide is shown to be most advantageous. It yields a broadening of the frequency band as well as a decreasing of intrinsic impedance the frequency dependence of which becomes to be more levelled in wider frequency band.

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ КВАЗИ- H_{01} В КРЕСТООБРАЗНОМ ВОЛНОВОДЕ

Н. А. Кузьмин, Т. В. Макаров

Методом Ритца найдено второе приближение к собственному значению и собственной функции волны квази- H_{01} в крестообразном волноводе, составленном из секторов. Определено оптимальное с точки зрения «чистоты» поля волны H_{01} поперечное сечение волновода. Приведены численные результаты.

В работе [1] методом Ритца для любых значений $\mu = b/a$ и Θ получены первые приближения к собственным значениям и собственным

функциям первых номеров магнитных и электрических волн прямолинейных крестообразных волноводов, составленных из секторов (рис. 1). Так как такие крестообразные волноводы могут быть использованы для крутых изгибов, преобразователей типов волн и других целей, то очень важно знать изменение структуры поля волны квази- H_{01} с изменением параметров μ и Θ . Полученное в [1] первое приближение к собственной функции волны квази- H_{01} не дает возможности судить о степени

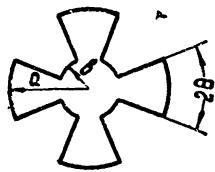


Рис. 1.

возмущения поля этой волны в зависимости от μ и Θ . Второе приближение уже даст возможность определить такие параметры μ и Θ , при которых волна H_{01} круглого волновода будет проходить через крестообразный волновод с минимальным возмущением, а также уточнить собственное значение этой волны.

Ввиду симметрии поперечного сечения волновода координатные функции, удовлетворяющие краевому условию $\partial\psi/\partial n=0$ на части контура поперечного сечения волновода, согласно методу Ритца, можно выбрать в виде (здесь сохранены те же обозначения, что и в [1]):

$$\varphi_1 = J_0 \left(\frac{3.83r}{a} \right), \quad \varphi_2 = J_0 \left(\frac{7.02r}{a} \right).$$

Тогда второе приближение к собственной функции волны квази- H_{01} можно записать в виде

$$\tilde{\psi} = a_1 J_0 \left(\frac{3.83r}{a} \right) + a_2 J_0 \left(\frac{7.02r}{a} \right). \quad (1)$$

Здесь второй член определяет степень возмущения волны H_{01} в крестообразном волноводе. Второе приближение к собственному значению этой волны определится из равенства нулю детерминанта второго порядка, полученного из первых двух строк и столбцов детерминанта (8) из [1], где элементы его с учетом аппроксимаций

$$\left[J_0 \left(\frac{3.83r}{a} \right) \right]'_{(r)} \left[J_0 \left(\frac{7.02r}{a} \right) \right]'_{(r)} \simeq \frac{15.66}{a^2} \sin \frac{\pi r}{a} \sin \frac{2\pi r}{a};$$

$$J_0\left(\frac{3,83r}{a}\right) J_0\left(\frac{7,02r}{a}\right) \simeq e^{-\frac{0,91r}{a}} \cos \frac{\pi r}{a} \cos \frac{2\pi r}{a}.$$

запишется в виде

$$(\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1) = 3,83^2 \left\{ (2\pi - 8\Theta) \frac{\mu^2}{2} [J_1^2(3,83\mu) - J_0(3,83\mu) J_2(3,83\mu)] + 8\Theta \cdot 0,0811 \right\};$$

$$(\varphi_1, \varphi_1) = a^2 \left\{ (2\pi - 8\Theta) \frac{\mu^2}{2} [J_0^2(3,83\mu) - J_1^2(3,83\mu)] + 8\Theta \cdot 0,0811 \right\};$$

$$(\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2) = (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_1) = 7,83 \left\{ (2\pi - 8\Theta) \left[\frac{\mu}{\pi} \sin(\pi\mu) - \frac{\mu}{3\pi} \sin(3\pi\mu) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\pi^2} \cos(\pi\mu) - \frac{1}{9\pi^2} \cos(3\pi\mu) - 0,09 \right] - 8\Theta \cdot 0,18 \right\};$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1) = \frac{a^2}{2} \langle (2\pi - 8\Theta) \{ 0,0935 \mu e^{-0,91\mu} [\pi \sin(\pi\mu) - \\ - 0,91 \cos(\pi\mu)] + 0,011 e^{-0,91\mu} [3\pi \sin(3\pi\mu) - 0,91 \cos(3\pi\mu)] + \\ + e^{-0,91\mu} [0,05 \sin(\pi\mu) + 0,0007 \sin(3\pi\mu)] + 0,079 \cos(\pi\mu) + \\ + 0,011 \cos(3\pi\mu) - 0,09 \} - 8\Theta \cdot 0,0773 \rangle;$$

$$(\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2) = 24,65 \left\{ (2\pi - 8\Theta) \left[\mu^2 + \frac{1}{8\pi^2} - \frac{1}{8\pi^2} \cos(4\pi\mu) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mu}{2\pi} \sin(4\pi\mu) \right] + 8\Theta \right\};$$

$$(\varphi_2, \varphi_2) = \frac{a^2}{4} \left\{ (2\pi - 8\Theta) \left[\mu^2 - \frac{1}{8\pi^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8\pi^2} \cos(4\pi\mu) + \frac{\mu}{2\pi} \sin(4\pi\mu) \right] + 8\Theta \right\}.$$

Неизвестные коэффициенты a_1 и a_2 собственной функции (1) определяются из следующей системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^2 a_i [(\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) - \tilde{x}^2 (\varphi_i, \varphi_j)] = 0 \quad (j = 1, 2).$$

На рис. 2 представлена зависимость второго приближения к собственному значению волны квази- H_{01} от параметров μ и Θ , где сплошными линиями указана зависимость $\alpha \tilde{x}$ от параметра μ при постоянных Θ , а пунктирными—зависимость $\alpha \tilde{x}$ от Θ при постоянных μ . Отсюда следует, что при $\mu=1$ либо $\mu=0$ собственное значение этой волны не зависит от Θ и равно 3,83. При этих значениях μ поле волны H_{01} не претерпевает никакого возмущения (см. рис. 3). Напомним, что при $\mu=0$ крестообразный волновод распадается на четыре отдельных секториальных волновода, для которых известны точные собственные значения [2]: собственное значение волны H_{01} в секториальных волноводах также равно 3,83 независимо от угла раскрытия сектора.

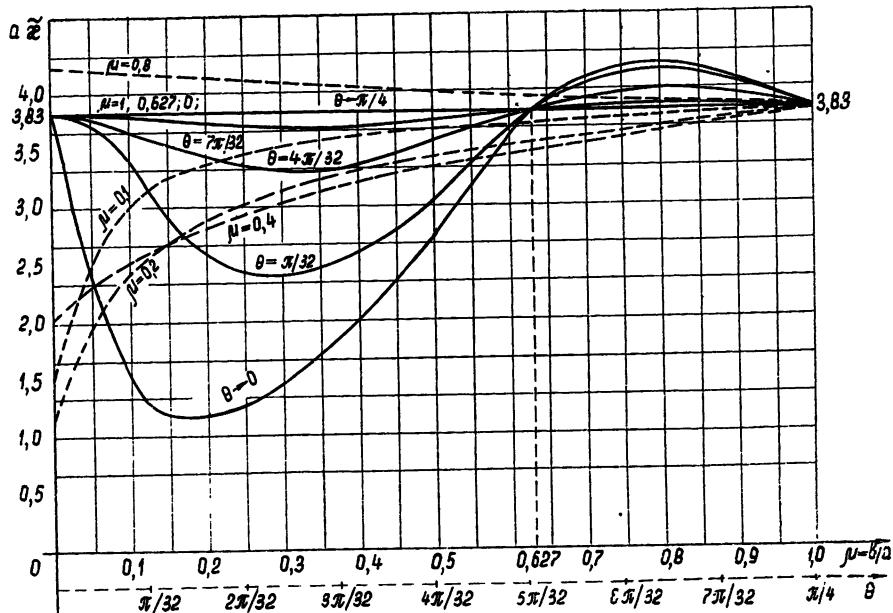


Рис. 2. Зависимость $\tilde{\alpha} = f_1(\mu)$ при $\Theta = \text{const}$ (сплошная линия), $\tilde{\alpha} = f_2(\theta)$ при $\mu = \text{const}$ (пунктир).

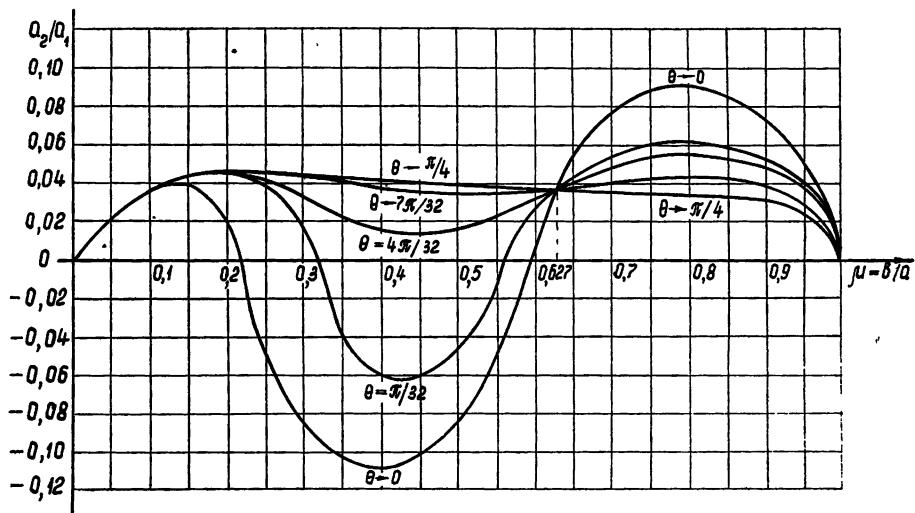


Рис. 3.

Некоторое возрастание $\tilde{\alpha} \times$ в области $0,627 < \mu < 1$ объясняется индуктивным характером образовавшихся продольных пазов. При $\mu \approx 0,627$ для всех значений угла Θ радиальная глубина пазов

$$(a - b) = \frac{\tilde{\alpha} \lambda_k}{2\pi} (1 - \mu) \approx \frac{\lambda_k}{4}, \quad (2)$$

где $\lambda_k = 2\pi a / \tilde{\alpha}$. Поэтому входное сопротивление пазов $Z \rightarrow \infty$ и поле

волны вытесняются из пазов в центральную часть волновода, сосредоточиваясь, в основном, на входящих углах, благодаря чему структура поля волны квази- H_{01} приближается к структуре поля волны H_{01} круглого волновода.

При $\mu < 0,627$ вершины входящих углов крестообразного волновода увлекают за собой пучности электрического поля волны H_{01} , смещающая их от нормального расположения в поперечном сечении „невозмущенного“ круглого волновода ($\mu = 1$), что проявляется в виде возмущения поля (см. рис. 3). При дальнейшем уменьшении μ ($0,2 < \mu < 0,4$) поле волны H_{01} постепенно очищается от паразитных составляющих. Однако при μ , меньших примерно 0,3, наблюдается снова положительный всплеск паразитной составляющей поля, что объясняется также возникновением резонансных условий типа (2) в пазах.

По рис. 3 легко найти оптимальное с точки зрения „чистоты“ поля волны H_{01} поперечное сечение крестообразного волновода. Хотя омические потери этой волны в крестообразном волноводе будут больше, чем в круглом волноводе [3], однако благодаря отсутствию вырождения в крестообразном волноводе между волнами квази- H_{01} и квази- E_{11} [1] такие волноводы являются весьма эффективными для создания крутых изгибов для передачи по ним волны H_{01} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Кузьмин, Т. В. Макаров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 1039 (1961).
2. N. Kusmin, Congresso Scientifico-Sezione Electronica, Roma, 1, № 4, 1959, p. 47.
3. Т. В. Макаров, Радиотехника и электроника, 7, 99 (1962).

Поступила в редакцию
30 июля 1962 г.

TO THE PROPAGATION OF QUASI- H_{01} WAVE IN CROSS-SHAPED WAVEGUIDE

N. A. Kusmin, T. V. Makarov

By the Ritz method the second approximation was found for eigenvalue and eigenfunction of quasi- H_{01} -wave in the cross-shaped waveguide. The optimum cross-section of the waveguide was determined under criteria of „purity“ of the field in H_{01} wave. The numerical results were given.

ВОЗБУЖДЕНИЕ ИМПЕДАНСНОЙ ПОЛОСЫ НА БЕСКОНЕЧНОМ ЭКРАНЕ

А. Ф. Чаплин

Рассматривается задача о возбуждении произвольным распределением источников полосы с переменным поверхностным импедансом. Полоса вписана в бесконечный идеально проводящий экран. С помощью функций Грина для полупространства записаны интегральные уравнения для функций распределения электрических и магнитных токов на поверхности полосы. Решение интегральных уравнений производится численно методом Крылова—Боголюбова. Представлены результаты расчета для полос с постоянным, меняющимся линейно и по гармоническому закону импедансом.

Структуры с переменным поверхностным импедансом используются в настоящее время в качестве антенн и развязывающих устройств. Вопросам возбуждения некоторых частных видов подобных систем посвящены работы [1—3], где импедансная плоскость предполагается бесконечной. Однако на практике импедансная структура имеет конечные размеры и располагается, как правило, на большом по сравнению с длиной волны металлическом экране. Ниже излагается приближенный метод расчета, учитывающий конечную длину плоской структуры с переменным поверхностным импедансом.

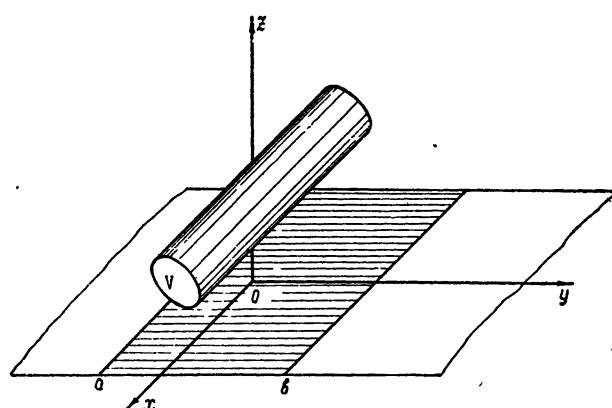


Рис. 1. Система координат.

ские и магнитные токи. Предположим, что распределение сторонних источников и параметры импедансной полосы не зависят от координаты x , т. е. будем рассматривать двухмерную задачу. Если поле сторонних токов в свободном пространстве имеет характер ТМ-волн относительно оси z , граничное условие (1) запишется в виде

$$Z(y) = \frac{E_y(y)}{H_r(y)} = \frac{I_x^m(y)}{I_y^s(y)}, \quad (2)$$

Пусть в плоскости $z=0$ (рис. 1) расположен идеально проводящий экран бесконечных размеров. В пределах $a \leq y \leq b$ в экран вписана полоса, на которой выполняются импедансные граничные условия

$$Z(y) = \frac{E_t}{[i_z H_t]}. \quad (1)$$

В объеме V' над экраном имеются стороныние электрические и магнитные поля.

где I_x^M и I_y^B — электрический и магнитный поверхностные токи соответственно.

Введем в рассмотрение электрический и магнитный векторные потенциалы, которые в данном случае будут иметь по одной компоненте и определятся выражениями:

$$A_x^M = \int_{S'} j^M(y', z') G_1(y, y'; z, z') ds', \quad (3)$$

$$A_y^B = \int_{S'} j^B(y', z') G_2(y, y'; z, z') ds'. \quad (4)$$

Здесь j^M и j^B — объемные плотности электрического и магнитного токов соответственно, S' — поперечное сечение объема V' , G_1 и G_2 — двухмерные функции Грина для уравнения Гельмгольца, удовлетворяющие условиям излучения на бесконечности и граничным условиям на идеально проводящем экране: функция G_1 удовлетворяет граничным условиям задачи Неймана при $z=0$ ($\partial G_1 / \partial z|_{z=0} = 0$), а функция G_2 удовлетворяет граничным условиям задачи Дирихле при $z=0$ ($G_2|_{z=0} = 0$). Таким образом, функции G_1 и G_2 будут определяться известными выражениями [4]:

$$G_1(y, y'; z, z') = -\frac{i}{4} [H_0^{(2)}(k \sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2}) + H_0^{(2)}(k \sqrt{(y-y')^2 + (z+z')^2})], \quad (5)$$

$$G_2(y, y'; z, z') = -\frac{i}{4} [H_0^{(2)}(k \sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2}) - H_0^{(2)}(k \sqrt{(y-y')^2 + (z+z')^2})]. \quad (6)$$

Зависимость от времени принята в форме $e^{i\omega z}$.

Имея в виду, что в выражениях (3) и (4) объемные токи складываются из сторонних токов и токов, наведенных на экране и на импедансной полосе, т. е.

$$j_x^{M, B}(y', z') = j_{ct}^{M, B}(y', z') + j_{nav}^{M, B}(y', z'), \quad (7).$$

$$j_{nav}^{M, B}(y', z') = I^M(y') \delta(z' - 0), \quad (8)$$

запишем выражение для полного электрического поверхностного тока на плоскости $z=0$ в виде

$$I_y^B(y) = \left[-i\omega\epsilon_0 A_x^M \frac{\partial A_y^B}{\partial z} \right]_{z=0} = -i\omega\epsilon_0 \int_{S'} j_x^M(y', z') G_1(y, y'; 0, z') ds' - i\omega\epsilon_0 \int_a^b I_x^M(y') G_1(y, y') dy' - \int_{S'} j_{y, ct}^B(y', z') \frac{\partial}{\partial z} G_2(y, y'; z, z')|_{z=0} ds'. \quad (9)$$

Далее, используя (5), (6) и граничное условие (2), получим интегральное уравнение для электрического поверхностного тока, текущего на экране и на импедансной полосе:

$$I_y^B(y) = -\frac{\omega\epsilon_0}{2} \int_a^b I_y^B(y') Z(y') H_0^{(2)}(k |y - y'|) dy' -$$

$$-\frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_{S'} j_x^m(y', z') H_0^{(2)}(k \sqrt{(y-y')^2 + z'^2}) ds' - \\ - \frac{ik}{2} \int_{S'} j_y^m(y', z') \frac{z' H_1^{(2)}(k \sqrt{(y-y')^2 + z'^2})}{\sqrt{(y-y')^2 + z'^2}} ds'. \quad (10)$$

Аналогичным образом можно получить интегральное уравнение для магнитного поверхностного тока, существующего лишь в пределах импедансной полосы:

$$I_x^m(y) = -\frac{\omega \epsilon_0}{2} Z(y) \int_a^b I_x^m(y') H_0^{(2)}(k |y - y'|) dy' - \\ - \frac{\omega \epsilon_0}{2} Z(y) \int_{S'} j_x^m(y', z') H_0^{(2)}(k \sqrt{(y-y')^2 + z'^2}) ds' - \quad (11) \\ - \frac{ik}{2} Z(y) \int_{S'} j_y^m(y', z') \frac{z' H_1^{(2)}(k \sqrt{(y-y')^2 + z'^2})}{\sqrt{(y-y')^2 + z'^2}} ds'.$$

Уравнения (10) и (11) являются неоднородными интегральными уравнениями Фредгольма 2-го рода относительно неизвестных функций $I_y^m(y)$ и $I_x^m(y)$ соответственно. Для определения поля в произвольной точке над экраном достаточно решить любое из этих уравнений; однако представляется более выгодным решать уравнение (10), поскольку при изменении импеданса распределение электрического тока оказывается более медленно меняющейся функцией, чем распределение магнитного тока, что может быть доказано с помощью уравнений Максвелла и импедансного граничного условия (2) и подтверждается результатами расчетов. Из уравнения (10) находится распределение электрического поверхностного тока в пределах импедансной полосы, которое затем умножается на функцию $Z(y)$. В результате мы получаем распределение магнитного тока на импедансной полосе, с помощью которого можем найти поле в любой точке верхнего полупространства. При этом, согласно теореме единственности решения уравнений Максвелла, можно не учитывать поле электрических токов, распределенных по всему экрану.

Уравнение (10) не решается в замкнутой форме и может быть решено лишь приближенными методами. При выборе приближенного метода решения необходимо учитывать, что ядро уравнения (10) имеет логарифмическую особенность при $|y-y'| \rightarrow 0$. В данной работе использовался метод Крылова — Боголюбова [5], в котором решение интегрального уравнения сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Исследовался частный случай рассматриваемой задачи: возбуждение полосы с чисто реактивным импедансом нитью магнитного тока, лежащей на краю полосы. В этом случае уравнение (10) запишется в виде

$$I_y^m(y_1) = -\frac{i}{2} \int_{ka}^{kb} I_y^m(y'_1) X_1(y'_1) H_0^{(2)}(|y_1 - y'_1|) dy'_1 - \frac{\omega \epsilon_0}{2} I_x^m H_0^{(2)}(y_1), \quad (12)$$

где $y_1 = ky$, $X_1(y) = -iZ(y)/W_0$ ($W_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$), I_x^m — амплитуда стороннего магнитного тока в вольтах. В дальнейшем для удобства опустим индекс „1“ у переменной y_1 .

Согласно методу Крылова—Боголюбова, интегральное уравнение (12) заменяется системой линейных алгебраических уравнений:

$$I_y^3(y_s) = -\frac{i}{2} \sum_{l=1}^m I_y^3(y_l) X_1(y_l) \int_{y_l-\Delta y/2}^{y_l+\Delta y/2} H_0^{(2)}(|y_l-y'|) dy' - \frac{\omega \epsilon_0}{2} I_x^m H_0^{(2)}(y_s) \quad (13)$$

$(s = 1, 2, 3, \dots, m),$

где для функций $I_y^3(y)$ и $X_1(y)$ применяется кусочно-постоянная аппроксимация. Последнее при реализации импедансной плоскости с помощью ребристой структуры оказывается точным в пределах точности усредненных по периоду импедансных граничных условий, если интервал Δy выбран равным расстоянию между ребрами. Интегралы от функций Ханкеля в (13) для недиагональных элементов матрицы вычислялись путем линейной аппроксимации подынтегральной функции, что дает удовлетворительную точность при малых Δy , а для диагональных элементов—более точно с использованием асимптотического представления функции Ханкеля через логарифм. Для решения системы (13) использовался метод ортогонализации. Расчеты выполнялись на электронной вычислительной машине.

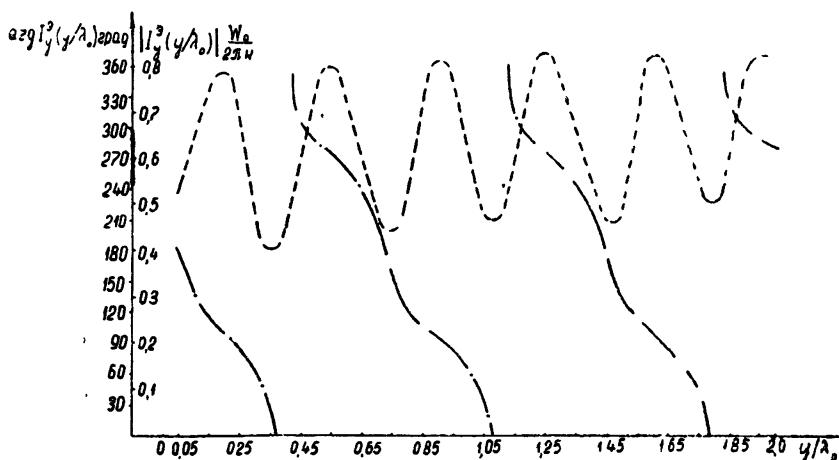


Рис. 2. Распределение электрического тока на полосе с постоянным реактаном $X_1=1$: — модуль, -·- фаза.

Ниже приведены некоторые результаты расчетов для импедансной полосы шириной $2\lambda_0$ (λ_0 —длина волны в свободном пространстве), на левом краю которой расположена нить стороннего магнитного тока. Значения электрических и магнитных токов определялись в 20 точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $0,1\lambda_0$. На рис. 2 представлены распределения модуля и фазы нормированного электрического тока на полосе с постоянным реактаном $X_1 = 1,0$. На рис. 3 изображены распределения модулей электрического и магнитного токов на полосе с линейно нарастающим реактаном, а на рис. 4—на полосе с линейно спадающим реактаном; угловой коэффициент линейного изменения реактанса в обоих случаях равен $0,2\pi$. На рис. 5 даны распределения модулей электрического и магнитного токов на полосе с гармонической модуляцией импеданса $X_1(y)=0,1+0,01 \sin y$.

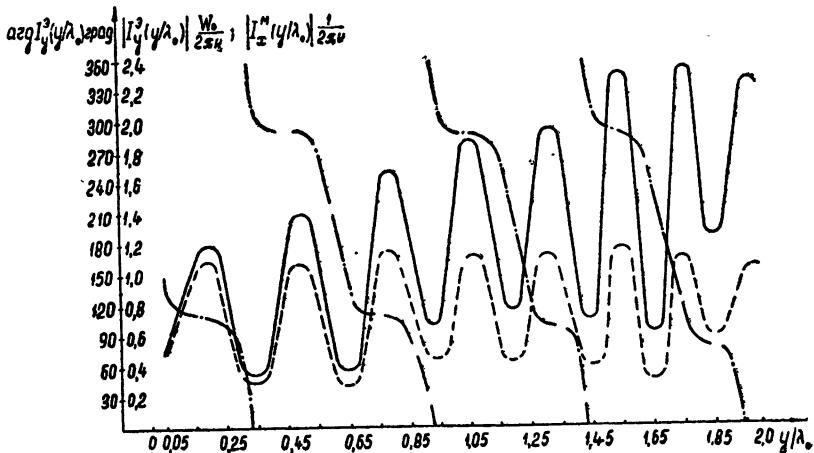


Рис. 3. Распределения токов на полосе с реактаном $X_1(y) = 1 + 0,2\pi y$:
— модуль магнитного тока, — — — модуль электрического тока,
— · — фаза электрического тока.

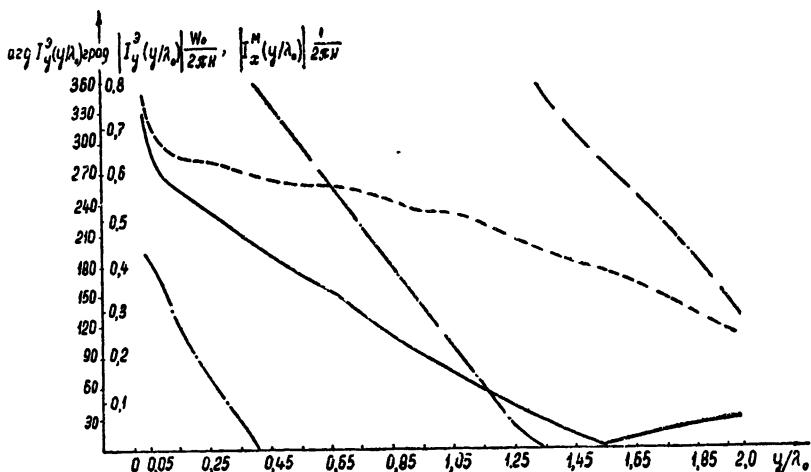


Рис. 4. Распределения токов на полосе с реактаном $X_1(y) = 1 - 0,2\pi y$
(обозначения те же, что и на рис. 3).

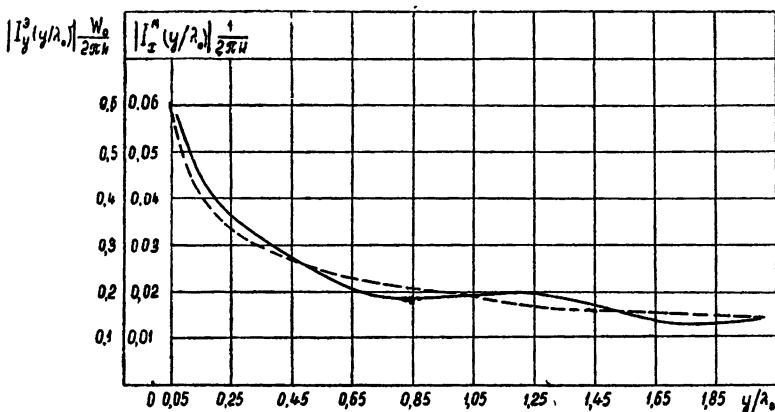


Рис. 5. Распределения токов на полосе с реактаном $X_1(y) = 0,1 - 0,01 \sin y$:
— модуль магнитного тока, — — — модуль электрического тока.

Необходимо отметить, что рассматриваемый метод решения может быть использован без больших затрат машинного времени лишь для полос шириной до $(8 \div 10) \lambda_0$. Для расчета более широких импедансных полос, применяемых в качестве остронаправленных антенн, следует обратиться к другим способам решения данной задачи.

В заключение автор выражает благодарность Г. Т. Маркову и Е. Н. Васильеву за помощь в работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1065 (1961).
2. О. Н. Терешин, Радиотехника и электронника, 5, 1944 (1960).
- 3 О. Н. Терешин, А. С. Белов, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 3, 359 (1960)
- 4 Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 2, ИЛ, М., 1958.
5. Л. В. Капторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИТТЛ, М—Л., 1950.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
26 июля 1962 г.

THE EXCITATION OF IMPEDANCE STRIP ON THE INFINITE PLANE

A. F. Chaplin

The problem on the excitation of strip with the varying surface impedance by the arbitrary distribution of sources is considered, the strip being inserted in the perfectly conductive infinite plane. The integral equations for distribution functions of electric and magnetic currents on the surface of the strip are derived by means of Green's function. The solution of integral equations is given numerically by Krylov—Bogoljubov's method. The results are presented for the strips with constant impedance, as well as for that with linear and sinusoidal variation of the impedance.

ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ДИПОЛЕМ ГЕРЦА

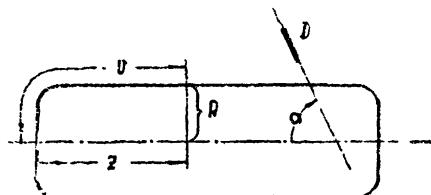
E. H. Васильев

Приводятся результаты расчета распределения плотности тока на цилиндре конечной длины при возбуждении его осевым и радиальным диполем Герца.

В работе [1] был предложен метод расчета распределения тока на идеально проводящем теле вращения при возбуждении его произвольными источниками. В [1,2] этим методом рассчитывалось распределение тока для случая осесимметричного возбуждения цилиндра конечной длины. Здесь будет рассмотрено неосесимметричное возбуждение цилиндра конечной длины. В качестве первичных источников берутся осевой и радиальный диполи Герца.

Основой метода, предложенного в [1], является сведение граничной задачи к серии независимых интегральных уравнений для азимутальной

Рис. 1. К определению величины z , R , α и v (D —возбуждающий диполь).



тальных гармоник плотности поверхностного электрического тока. Это делается следующим образом. На теле вращения вводятся две координаты: меридианальная v (рис. 1) и азимутальная φ . Искомая плотность тока представляется в виде

$$\mathbf{j}(v, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} j_m(v) e^{im\varphi}.$$

Затем составляется интегральное уравнение для вектора $j_m(v)$:

$$j_m(v) = 2j_m^{\text{перв}}(v) - \int_{(v')} P_m(v, v') j_m(v') dv', \quad (1)$$

где $j_m(v)$ —амплитуда m -ой азимутальной гармоники искомой плотности тока, имеющая две составляющие—меридианальную j_{vm} и азимутальную $j_{\varphi m}$, $j_m^{\text{перв}}(v)$ —амплитуда m -ой азимутальной гармоники вектора $[nH^{\text{перв}}]$ (n —вектор внешней нормали к телу, $H^{\text{перв}}$ —первичное магнитное поле). Поскольку уравнение (1) векторное, его ядро $P_m(v, v')$ является матрицей со следующими элементами:

$$P_{m11} = \left[\cos \Theta' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_{m+1} + S_{m-1}}{2} \right) + \sin \Theta' \frac{\partial S_m}{\partial R} \right] R';$$

$$\begin{aligned}
 P_{m12} &= R' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_{m-1} - S_{m+1}}{2i} \right); \\
 P_{m21} &= \left[\frac{\cos \Theta \sin \Theta'}{R} - \frac{\cos \Theta' \sin \Theta}{R'} - \frac{z-z'}{RR'} \cos \Theta \cos \Theta' \right] im S_m R'; \\
 P_{m22} &= \left[\cos \Theta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_{m+1} + S_{m-1}}{2} \right) - \sin \Theta \frac{\partial S_m}{\partial R'} \right] R'. \tag{2}
 \end{aligned}$$

В последних формулах z и R — цилиндрические координаты (ось z совпадает с осью вращения, рис. 1), Θ — угол между направлением вектора внешней нормали и положительным направлением оси z . Штрихами обозначены величины, относящиеся к точке интегрирования; величины, относящиеся к точке наблюдения, оставлены без штрихов. Функция S_m определяется интегралом

$$S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-i\sqrt{(z-z')^2 + R^2 + (R')^2 - 2RR' \cos \psi} - im\psi)}{\sqrt{(z-z')^2 + R^2 + (R')^2 - 2RR' \cos \psi}} d\psi.$$

Вектор $j_m^{\text{перв}}$ в интегральном уравнении (1) определяется из общих формул работы [1]. Для случая диполя, лежащего в меридиональной плоскости, составляющие вектора $j_m^{\text{перв}}$ выражаются так:

$$j_{m\alpha}^{\text{перв}} = \frac{Il}{2} \left[\sin \alpha \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S_{m+1} + S_{m-1}}{2} \right) - \cos \alpha \frac{\partial S_m}{\partial R} \right] R'; \tag{3}$$

$$j_{m\varphi}^{\text{перв}} = \frac{-Il}{2} \left[\frac{\cos \Theta \cos \alpha}{R} + \frac{\sin \Theta \sin \alpha}{R'} + \frac{z-z'}{RR'} \cos \Theta \sin \alpha \right] im S_m R',$$

где α — угол между направлением диполя и осью вращения (рис. 1). Штрихами обозначены координаты диполя. Остальные обозначения в (3) те же, что и в (2).

Уравнение (1) может быть решено численно путем замены интегрального уравнения системой линейных алгебраических уравнений. Ниже приводятся результаты его приближенного решения.

1. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ОСЕВЫМ ДИПОЛЕМ

Диполь возбуждает на цилиндре все азимутальные гармоники. Однако излучающими являются гармоники с номером, не превышающим $2ka$ (a — радиус цилиндра, k — волновое число). Здесь будет рассмотрено распределение плотности тока азимутальных гармоник с номерами $m=0 \div 3$ для цилиндров радиуса $ka=1$ и $ka=2$.

На цилиндре бесконечной длины осевой диполь возбуждает только ТМ-волны [3] и, следовательно, только продольные токи для всех номеров гармоник. В случае нулевой гармоники и на конечном цилиндре существуют только продольные токи. Соответствующий график модуля и фазы тока приведен на рис. 2. По оси абсцисс на этом рисунке отложена длина дуги меридиональной линии v , умноженная на волновое число. Вертикальными пунктирными линиями отмечены точки перехода от цилиндрической части к торцовой. В правом верхнем углу рисунка показано положение возбуждающего диполя отно-

сительно цилиндра. Аналогичный способ изображения кривых использован и на других рисунках. Диполь в рассматриваемом случае расположен почти в середине цилиндра, на высоте $h=0,05 \lambda$ над его поверхностью.

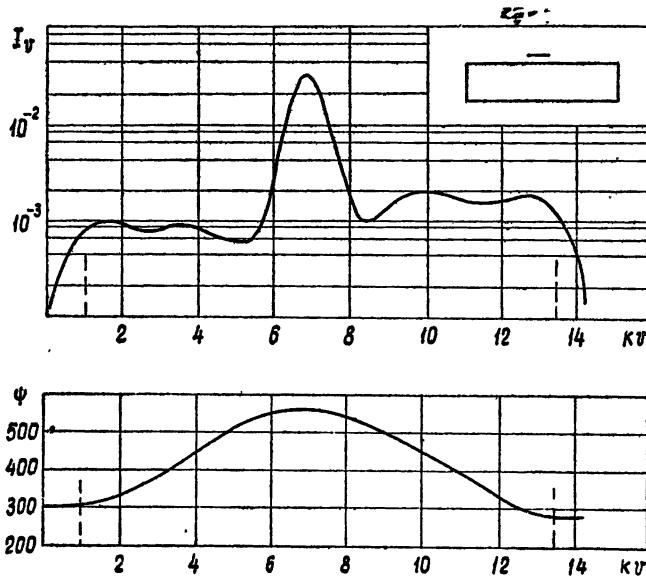


Рис. 2. Распределение амплитуды и фазы плотности тока нулевой гармоники на цилиндре радиуса $ka=1$.

Непосредственно под диполем имеется резкий выброс плотности продольного тока, поскольку диполь находится низко над поверхностью цилиндра. Отраженная от торцов цилиндра волна выражена очень слабо. Фаза плотности тока имеет максимум в точке расположения диполя и убывает к концам цилиндра. Это указывает на то, что от диполя в обе стороны распространяются волны.

Распределение тока первой гармоники носит иной характер (рис. 3). Плотность продольного тока распределена примерно так же, как и в случае нулевой гармоники. Однако, кроме продольного, появляется и азимутальный ток. На кромке, соответствующей переходу от цилиндрической части к торцовой, нарушается однородность цилиндра; здесь энергия ТМ-волны переходит к ТЕ-волне. На кромке плотность продольного тока имеет минимум, а плотность азимутального тока — резкий максимум. В рассматриваемом случае переход от цилиндрической части к торцовой делался плавным; поэтому азимутальный ток на кромке в бесконечность не обращается, как это было бы на „острой“ кромке. Магнитная волна возбуждает на цилиндре как азимутальную, так и продольную составляющие плотности тока, причем азимутальный ток соответствует только магнитной волне.

Из графика распределения фазы плотности азимутального тока видно, что от обеих кромок к середине цилиндра распространяются две волны, которые по пути сильно затухают. Эти волны возбуждаются на левой и правой кромках с противоположной фазой и, распространяясь навстречу, интерферируют, что объясняет наличие трех минимумов плотности азимутального тока.

Распределение плотности тока нулевой гармоники на более толстом цилиндре $ka=2$, изображенное на рис. 4, сходно с приведенным на рис. 2.

Данное на рис. 5 распределение плотности тока первой гармоники на цилиндре радиуса $ka = 2$ несколько отличается от распределения плотности тока той же гармоники, приведенного на рис. 3. ТЕ-волна,

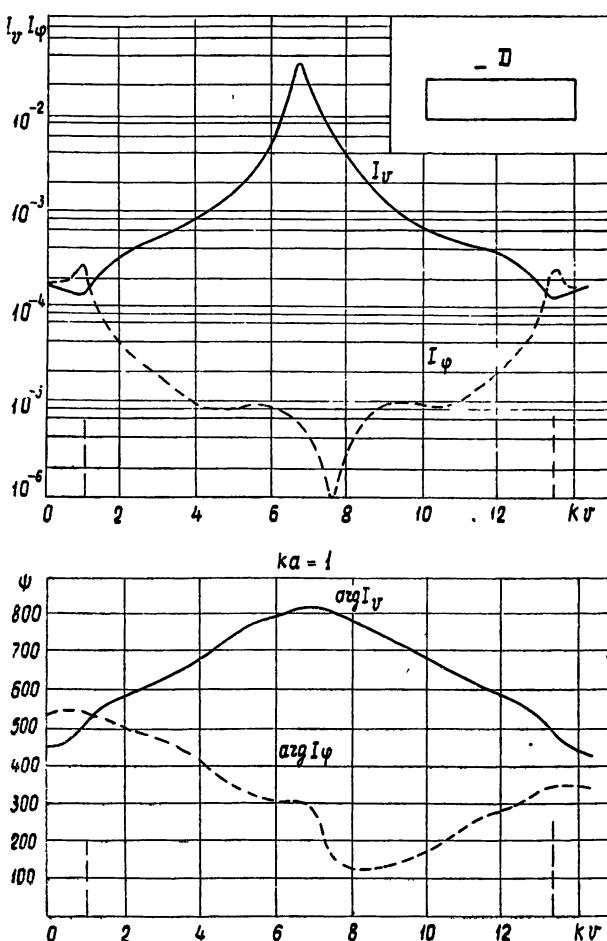


Рис. 3. То же для первой гармоники.

возникшая на кромках цилиндра, слабо затухает при распространении вдоль цилиндра; поэтому на рис. 5 все минимумы плотности азимутального тока резко выражены.

На рис. 6, 7 и 8 даны распределения плотности тока азимутальных гармоник с более высокими номерами. Закономерности здесь остаются теми же, что и для первой азимутальной гармоники, с той лишь разницей, что на оси цилиндра плотность тока этих гармоник обращается в нуль. Следует обратить внимание на то, что скорость убывания тока с увеличением расстояния от источника увеличивается с увеличением параметра m/ka .

Распределения плотности тока различных азимутальных гармоник в случае расположения диполя около кромки приведены на рис. 9—13. В этом случае генерация ТЕ-волны происходит непосредственно под диполем на кромке, и от нее распространяются как ТЕ, так и ТМ-волны.

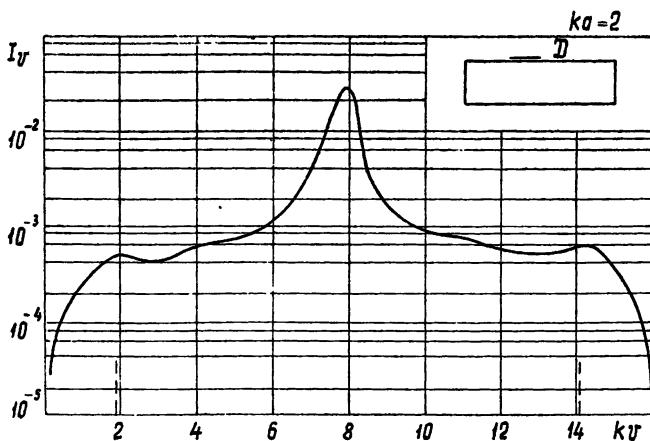


Рис. 4. Распределение амплитуды и фазы плотности тока пульсовой гармоники на цилиндре радиуса $ka=2$.

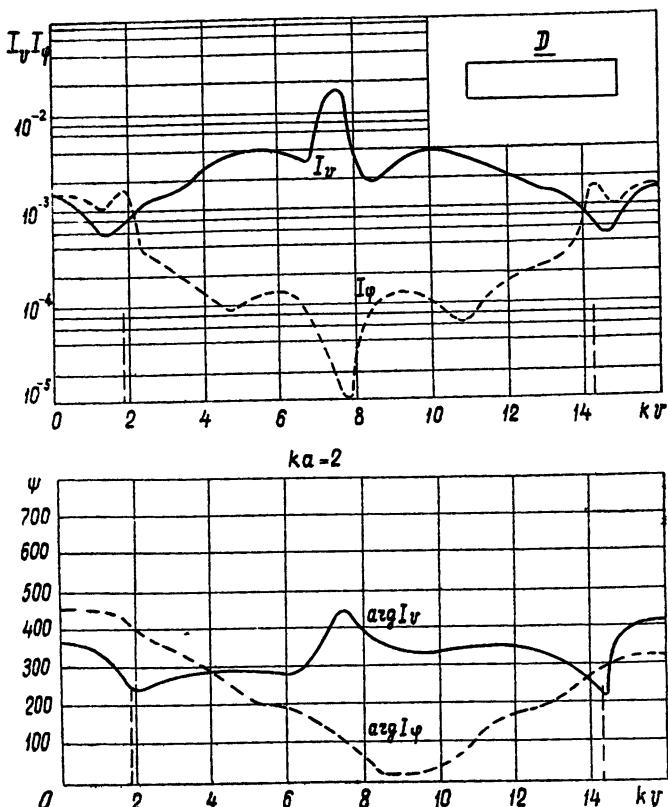


Рис. 5. То же для первой гармоники.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЦИЛИНДРА КОНЧНОЙ ДЛИНЫ РАДИАЛЬНЫМ ДИПОЛЕМ

Радиальный диполь возбуждает азимутальные гармоники всех номеров, но в отличие от осевого радиальный диполь на бесконечном цилиндре возбуждает как ТМ, так и ТЕ-волны. Исключение состав-

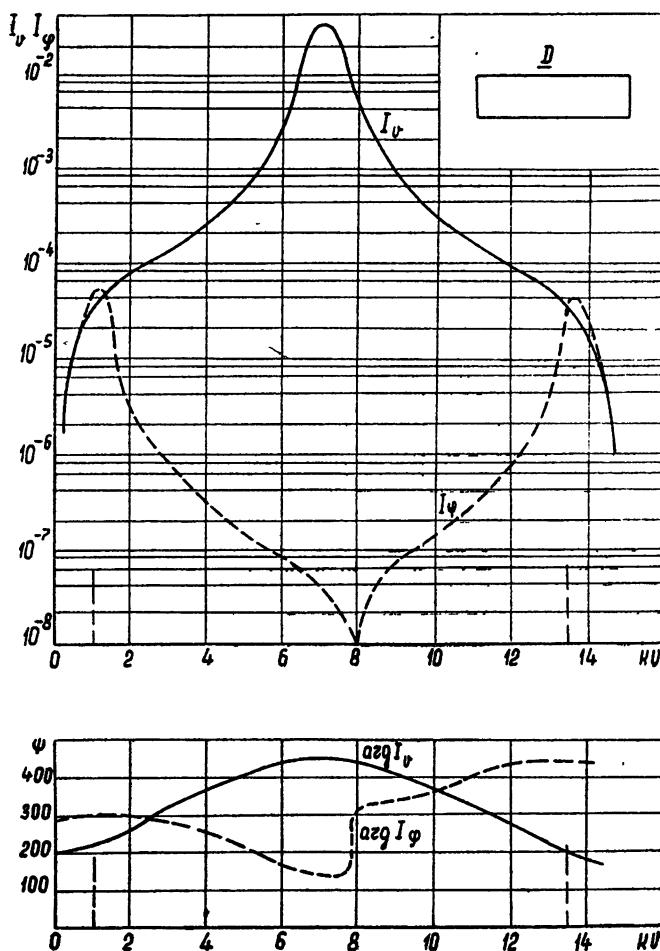


Рис. 6. Распределение амплитуды и фазы плотности тока второй гармоники на цилиндре радиуса $ka=1$.

ляет поле нулевой гармоники (рис. 14), в котором отсутствует ТЕ-волну.

На рис. 15 приведено распределение плотности тока первой азимутальной гармоники на цилиндре радиуса $ka = 1$ при расположении диполя вблизи середины цилиндра на небольшой высоте. Кривая распределения фазы показывает, что и продольная, и азимутальная составляющие плотности тока соответствуют волнам, бегущим от диполя к торцам цилиндра. Как и в случае нулевой гармоники, на кривой распределения фазы имеется скачок, который связан с тем, что первичное магнитное поле слева и справа от диполя направлено в разные стороны.

Плотность азимутального тока затухает значительно сильнее плотности продольного тока. Как и при возбуждении продольным диполем, на кромке цилиндра имеется максимум плотности азимутального тока. На цилиндрической части рядом с кромкой имеется

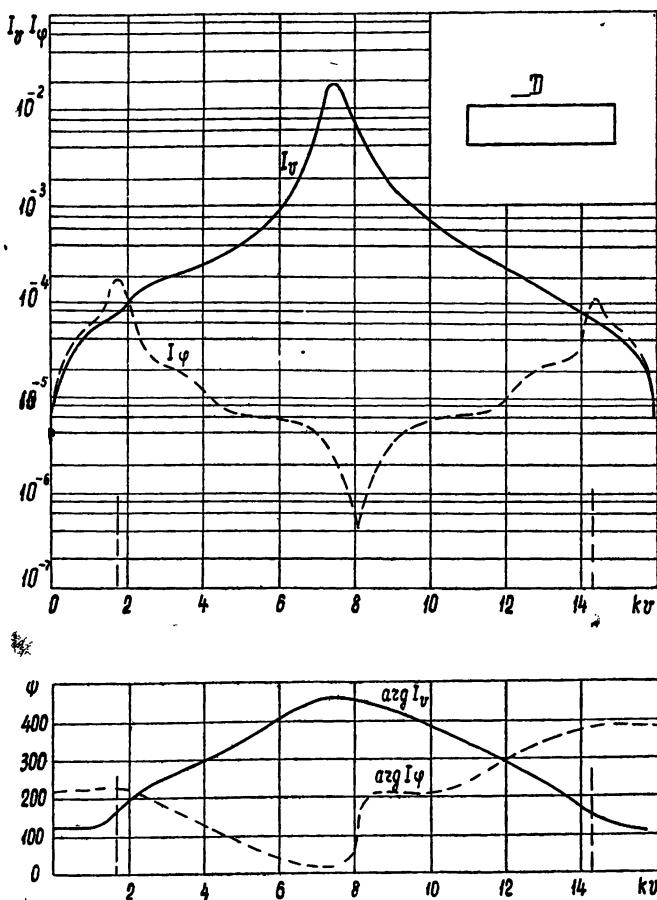


Рис. 7. То же на цилиндре радиуса $ka = 2$.

резкий минимум плотности этого тока, наличие которого можно объяснить тем, что на кромке за счет энергии электрической волны создается волна магнитного типа, фаза которой в точке минимума противоположна фазе магнитной волны, возбужденной непосредственно диполем.

На рис. 16 изображены распределения плотности тока первой гармоники на более толстом цилиндре ($ka=2$) при расположении диполя на оси цилиндра. Соответствующие графики для гармоник более высоких номеров даны на рис. 17, 18 и 19. При расположении радиального диполя вблизи кромки дна цилиндра распределения плотности тока очень мало отличаются от аналогичного распределения для осевого диполя и потому не приводятся,

В заключение автор выражает глубокую благодарность Л. Н. Покровской, принимавшей активное участие в расчетах, и Ю. П. Никитину, который провел большую работу по программированию задачи.

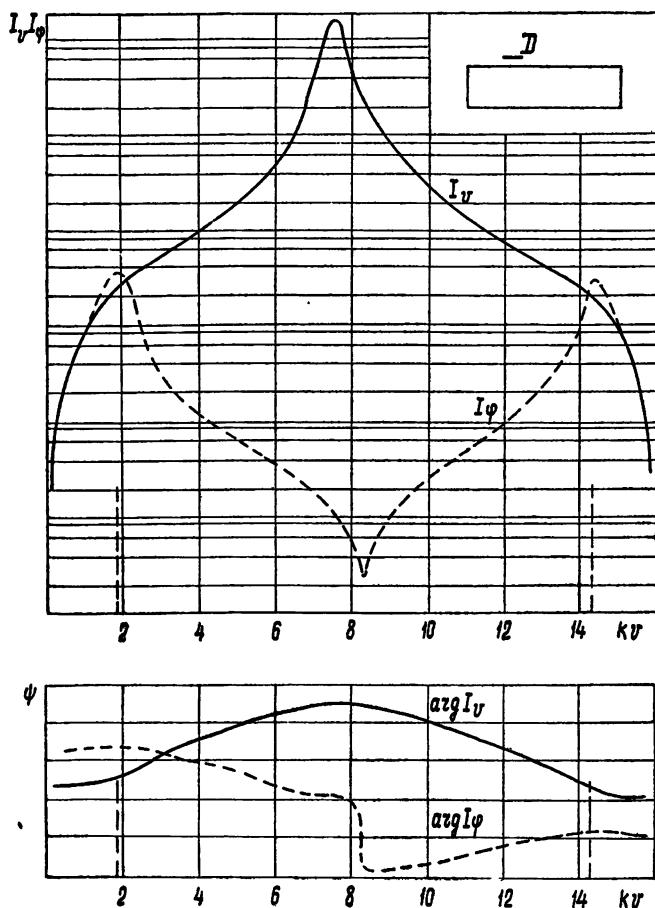


Рис. 8. Распределение амплитуды и фазы плотности тока третьей гармоники на цилиндре радиуса $ka=2$.

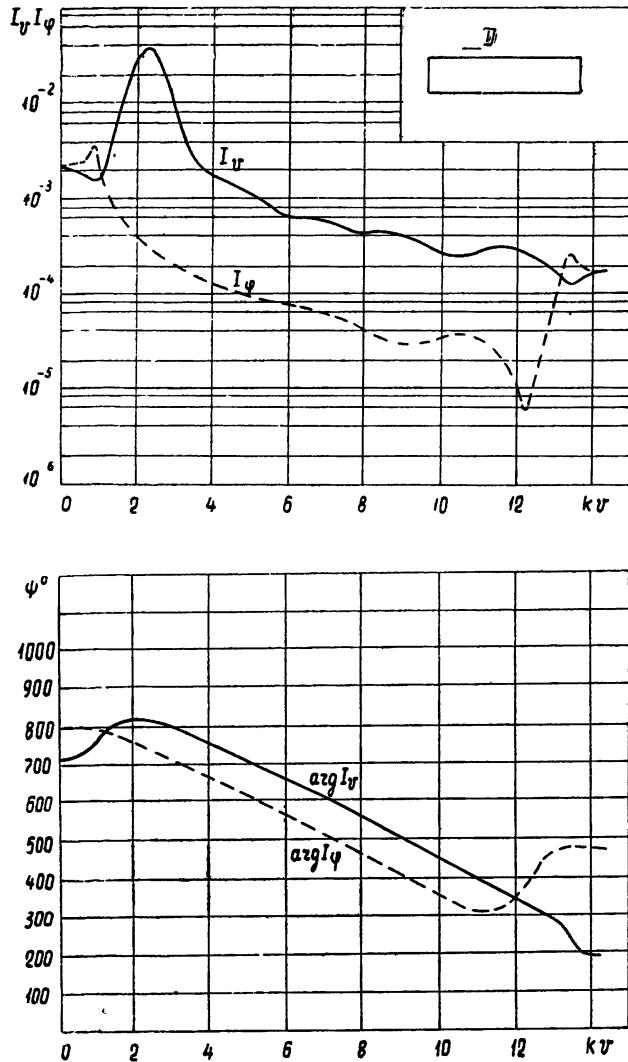


Рис. 9. Распределение амплитуды и фазы плотности тока первой гармоники на цилиндре радиуса $ka=1$ при расположении диполя вблизи кромки.

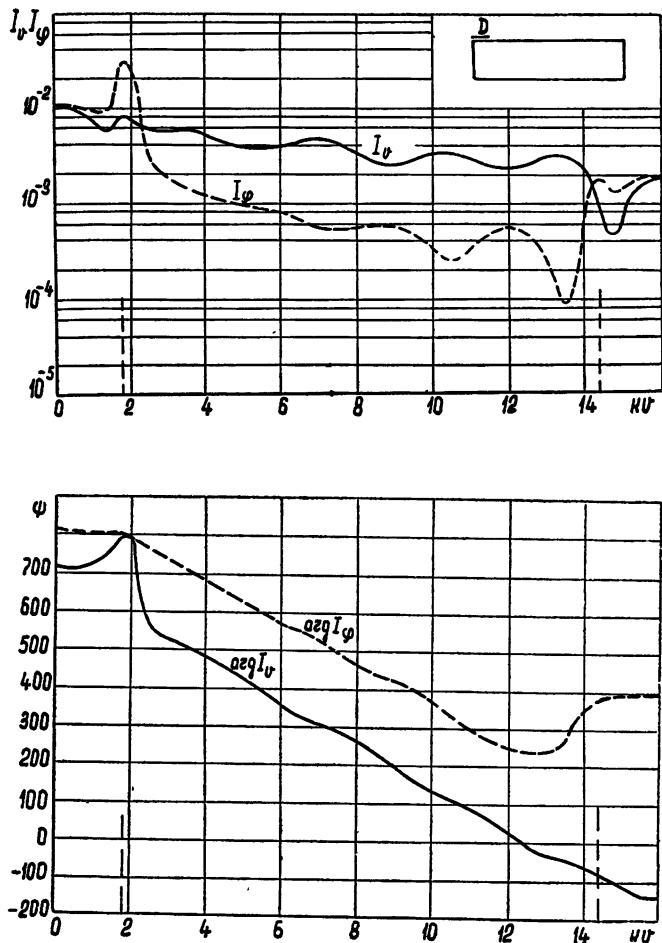


Рис. 10. То же на цилиндре радиуса $ka=2$.

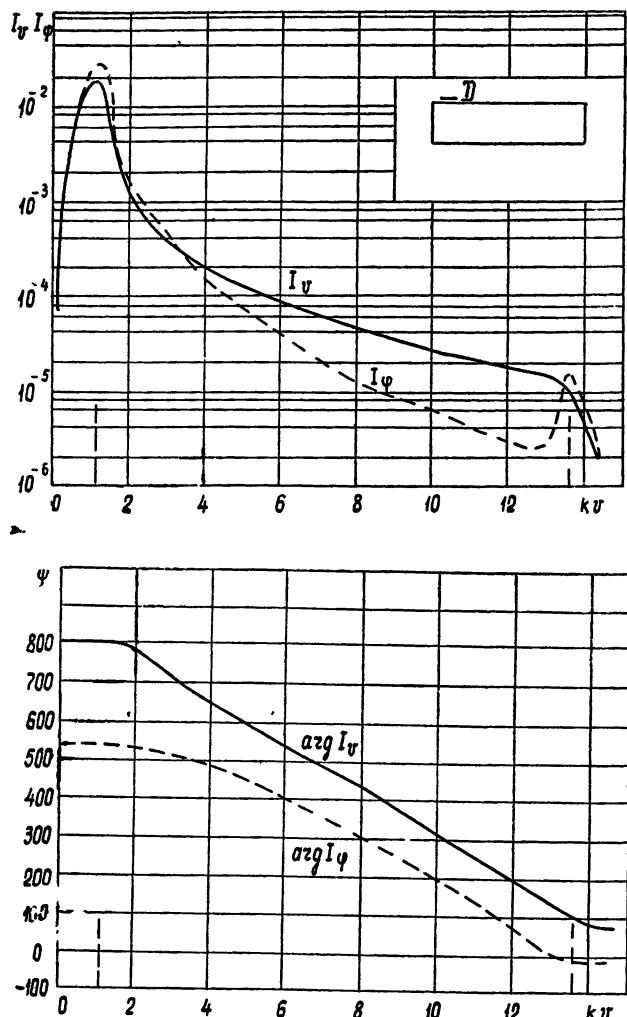


Рис. 11. Распределение амплитуды и фазы плотности тока второй гармоники на цилиндре радиуса $ka=1$ при расположении диполя вблизи кромки.

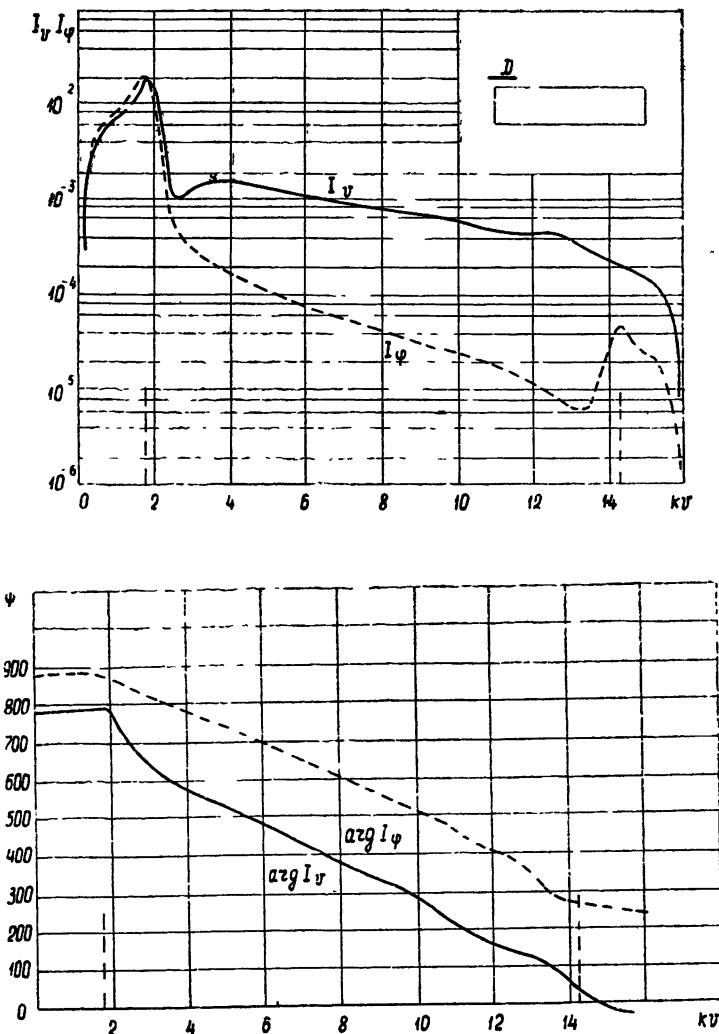


Рис. 12. То же на цилиндре радиуса $ka=2$.

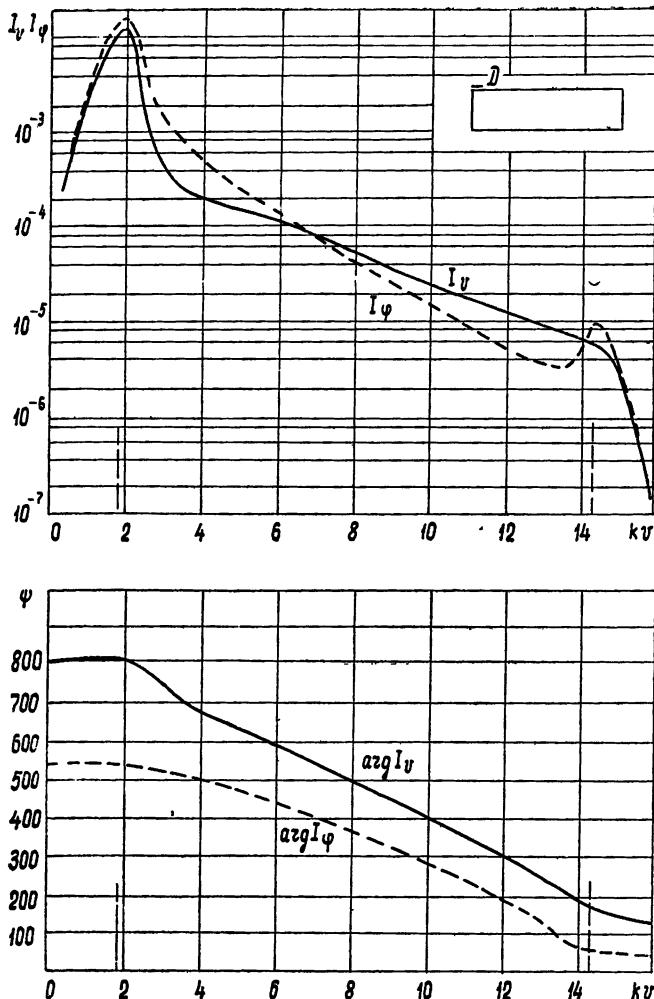


Рис. 13. Распределение амплитуды и фазы плотности тока третьей гармоники на цилиндре радиуса $ka=2$ при расположении диполя вблизи кромки.

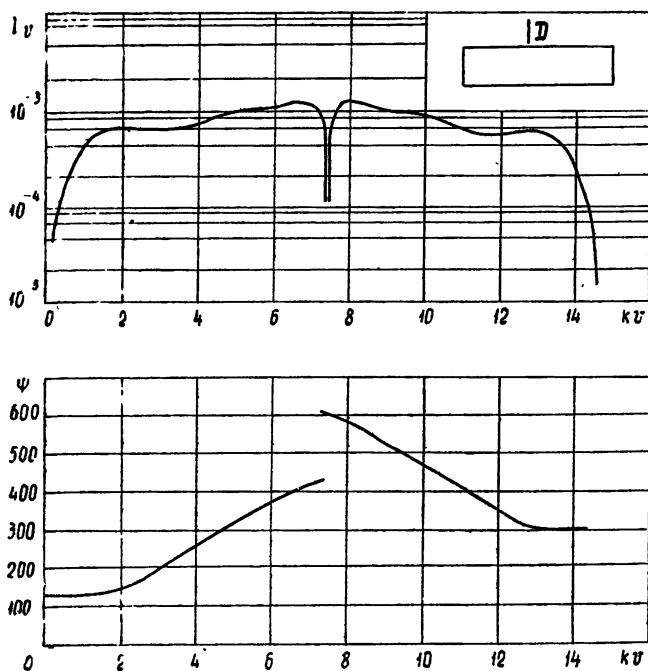


Рис. 14. Распределение амплитуды и фазы плотности тока нулевой гармоники на цилиндре радиуса $ka=1$.

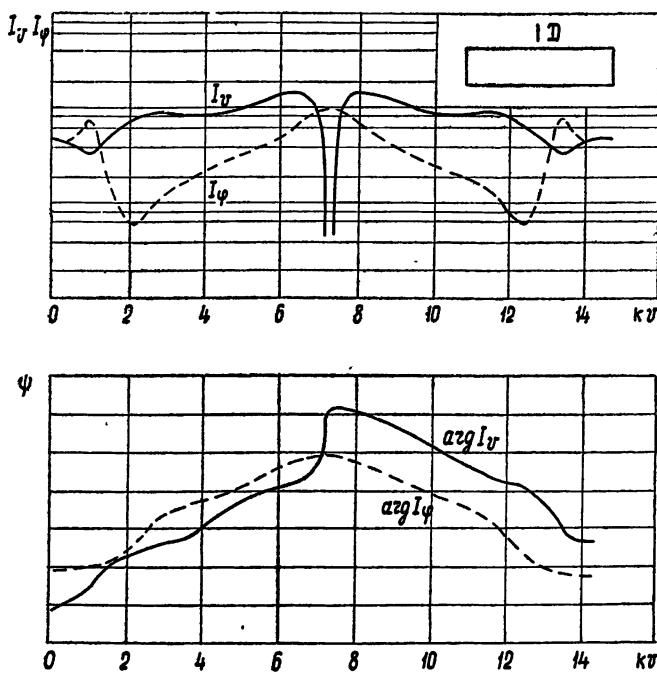


Рис. 15. То же для первой гармоники.

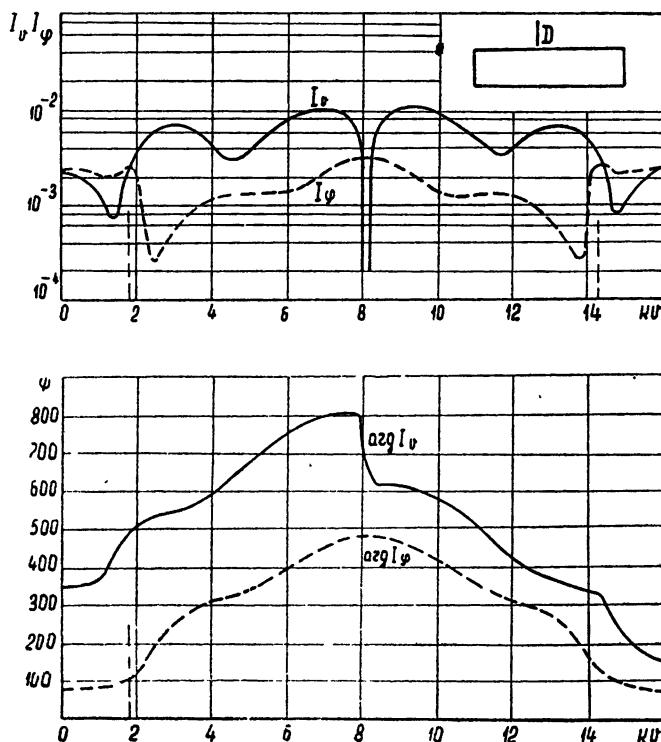


Рис. 16. Распределение амплитуды и фазы плотности тока первой гармоники на цилиндре радиуса $ka=2$.

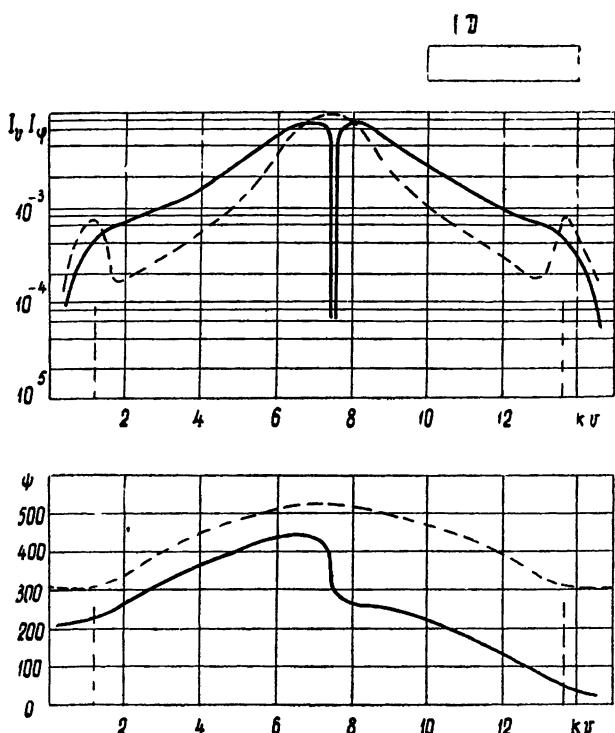


Рис. 17. То же для второй гармоники на цилиндре радиуса $ka=1$.

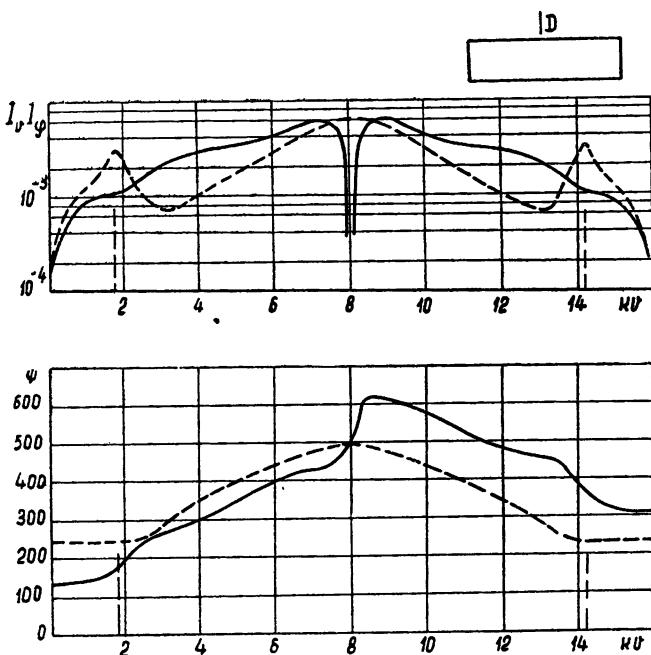


Рис. 18. Распределение амплитуды и фазы плотности тока второй гармоники на цилиндре радиуса $ka=2$.

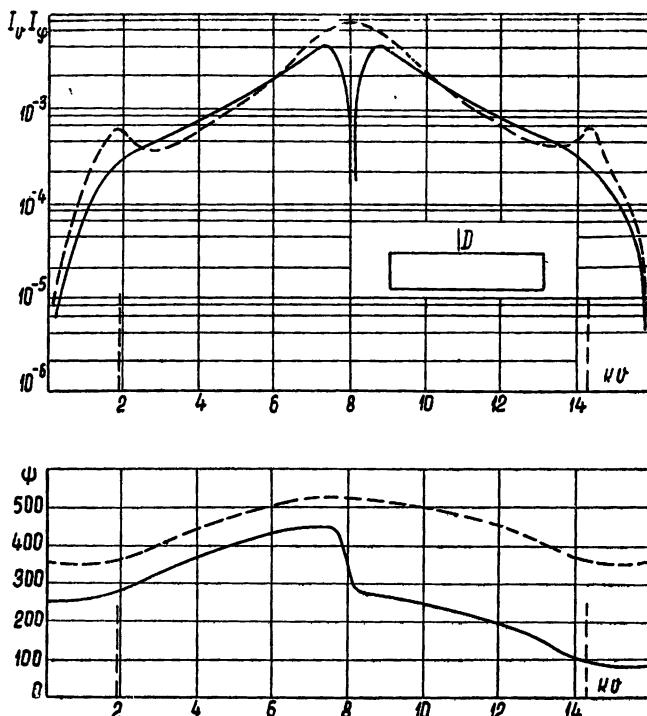


Рис. 19. То же для третьей гармоники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Н. Васильев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 588 (1959).
2. Е. Н. Васильев, А. Р. Серегина, Тр. Московского энерг. ин-та, Радиотехника и электроника, 34, 212 (1961).
3. Г. Т. Марков, ЖТФ, 22, 747 (1952).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
5 октября 1962 г.

THE EXCITATION OF THE FINITE CYLINDER BY HERTZ' DIPOLE

E. N. Vasiljev

Current density distributions along the finite cylinder excited by both axial and radial Hertz' dipoles are calculated.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕНЕРАТОРОВ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ПРИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЕМЕНТА

И. Н. Лисицкая, Л. А. Синицкий

Анализируются генераторы с отрицательным сопротивлением при кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента. Приведены графики, позволяющие определить амплитуду колебаний и отклонение частоты генератора от собственной частоты контура, определить период в области резко несинусоидальных колебаний и оценить влияние формы вольтамперной характеристики на величину периода.

В последнее время широкое применение в радиотехнических устройствах находят элементы с падающим участком статической вольтамперной характеристики (диоды туннельные, четырехслойные, с двойной базой и т. п.). В сочетании с колебательным контуром они используются для построения генераторов незатухающих колебаний.

При анализе процессов в таких схемах выбор рациональной аппроксимации характеристики нелинейного элемента имеет существенное значение как для упрощения расчета, так и для возможности истолкования конечных результатов. В этом смысле достаточно удобной является кусочно-линейная аппроксимация характеристики нелинейного элемента, плодотворность применения которой была проиллюстрирована в работах Андронова и его учеников [1]. Необходимо отметить, что кусочно-линейная аппроксимация не всегда удовлетворительно отображает реальные свойства нелинейных элементов. Однако при расчете обычно приходится использовать некоторую расчетную характеристику, учитывающую сопротивление нагрузки, для которой применение кусочно-линейной аппроксимации гораздо более обосновано.

В статье анализируется схема генератора с нелинейным сопротивлением при кусочно-линейной аппроксимации его характеристики. Схема генератора представлена на рис. 1а, а ее уравнение имеет вид:

$$LC \frac{d^2U}{dt^2} + (R + R_0) C \frac{dU}{dt} + U + RLC \frac{d^2I}{dt^2} + RR_0C \frac{dI}{dt} + RI = E, \quad (1)$$

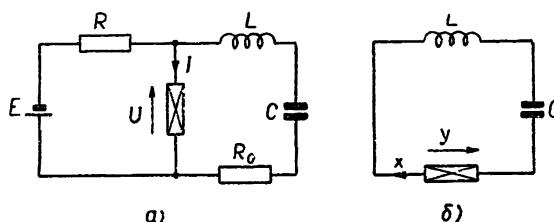


Рис. 1.

где R_0 —сопротивление нагрузки, U —напряжение нелинейного элемента, являющееся однозначной функцией тока I . Характеристика нелинейного элемента $U=f(I)$ аппроксимирована тремя прямолинейными отрезками (рис. 2). Для упрощения расчета точка 1 статического равновесия схемы (U_p, I_p) расположена в середине второго участка характеристики и дифференциальные сопротивления первого и третьего участков одинаковы.

Переносом начала координат U, I в точку 1 (U_p, I_p) характеристики и последовательной заменой переменных схема рис. 1а может быть сведена к схеме рис. 1б, уравнения которой

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \frac{CU_p}{x_1} \frac{dy}{dt} = 0, \quad y = \varphi(x), \quad (2)$$

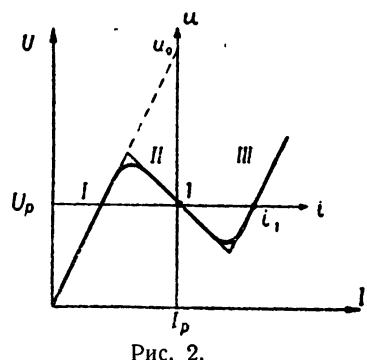


Рис. 2.

где x и y —безразмерные ток и напряжение эквивалентного нелинейного сопротивления. Первоначальные переменные I и U связаны с x и y следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} I &= I_p + \left(1 + \frac{R_0}{R}\right) \tilde{x}_1 x - \frac{U_p}{R} y, \\ U &= U_p + U_p y - R_0 \tilde{x}_1 x. \end{aligned} \quad (3)$$

Величина \tilde{x}_1 введена для удобства дальнейшего расчета и связана с током i_1 , определенном при равном нулю напряжении ($i_1 \neq 0$), формулой:

$$\tilde{x}_1 = \frac{i_1}{1 + R_0(R + r)/Rr}, \quad (4)$$

где r —значение дифференциального сопротивления первого и третьего участков вольтамперной характеристики.

Обозначим через ρ значение дифференциального сопротивления второго участка и введем обозначения:

$$\begin{aligned} r/R &= a, \quad \rho/R = b, \quad 1/LC = \omega_0^2, \quad \tau = \omega_0 t, \quad R\omega_0 C = \lambda, \\ R_0\omega_0 C &= \lambda_0, \quad \lambda_0 + \frac{a}{1+a} \lambda = 2a, \quad \frac{b}{1-b} \lambda - \lambda_0 = 2\gamma. \end{aligned}$$

Тогда уравнения (2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} + x + \frac{\omega_0 C}{\tilde{x}_1} U_p \frac{dy}{d\tau} &= 0; \\ y &= \frac{2a}{\omega_0 C} \frac{\tilde{x}_1}{U_p} (x + 1) \quad \text{для } x < -x_2, \\ y &= -\frac{2\gamma}{\omega_0 C} \frac{\tilde{x}_1}{U_p} x \quad \text{для } -x_2 < x < x_2, \\ y &= \frac{2a}{\omega_0 C} \frac{\tilde{x}_1}{U_p} (x - 1) \quad \text{для } x > x_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь x_2 —это значение тока, при котором изображающая точка переходит с первого (второго) на второй (третий) участок характеристики; оно определяется простым соотношением:

$$|x_2| = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}. \quad (6)$$

Уравнения, описывающие процесс в пределах каждого из аппроксимирующих участков эквивалентного нелинейного сопротивления, имеют вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad \text{при } |x| > x_2, \quad (7)$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\gamma \frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad \text{при } |x| < x_2. \quad (7a)$$

По полученным уравнениям (7) методом припасовывания были рассчитаны период T и амплитуда x_0 для рассматриваемой схемы гене-

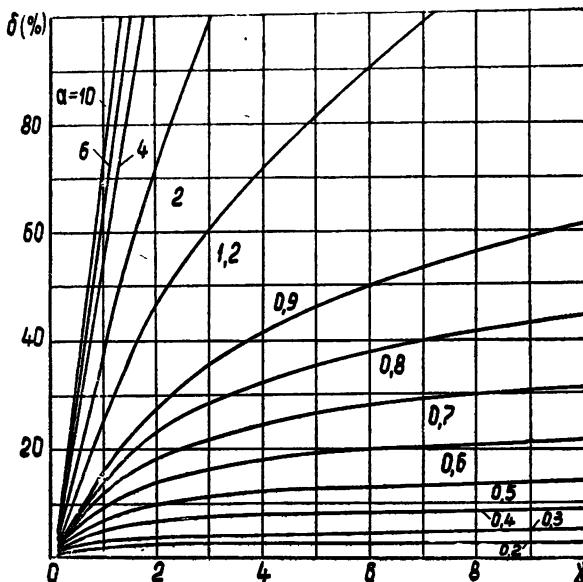


Рис. 3.

ратора. Расчеты производились с погрешностью, не превышающей $\pm 2\%$. На рис. 3 графически представлена зависимость поправки на период

$$\delta = \frac{T - T_0}{T_0}$$

(здесь $T_0 = 6,283$) в зависимости от параметра γ при различных значениях α . Начальный участок рисунка, относящийся к почти синусоидальным колебаниям, представлен отдельно на рис. 4.

Выясним физический смысл параметров α и γ . Учитывая, что в выражениях для α и γ величина $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, получим выражения

$$2\alpha = \left(\frac{R_0}{r} + \frac{R}{R+r} \right) r \frac{1}{V\sqrt{L/C}}, \quad (8)$$

$$2\gamma = \left(\frac{R}{R-\rho} - \frac{R_0}{\rho} \right) \rho \frac{1}{V\sqrt{L/C}},$$

представляющие отношение некоторого эквивалентного сопротивления для соответствующих участков к характеристическому сопротивлению контура, равному $V\sqrt{L/C}$. Эти величины являются коэффициентами затухания контура и обратно пропорциональны его добротности.

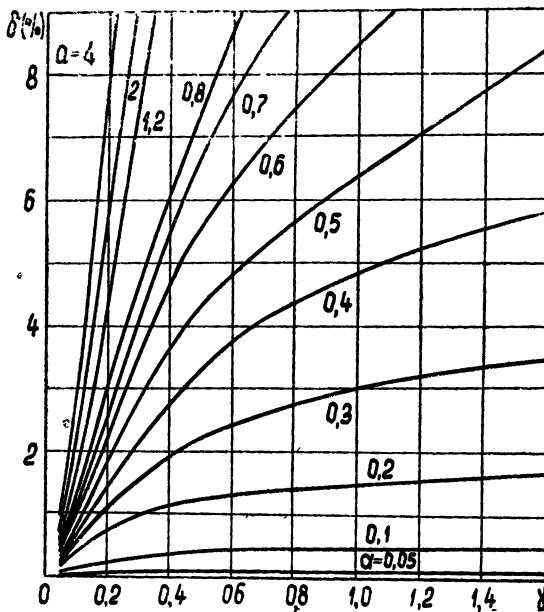


Рис. 4.

Из рассмотрения кривых рис. 4 видно, что поправка на период мала при малых α и γ . Это соответствует наличию в схеме контура с достаточной добротностью, при этом частота генератора определяется собственной частотой контура и колебания близки к синусоидальным. С увеличением α и γ поправка на период растет. Если параметры схемы соответствуют малому значению α ($\alpha < 0,3 \div 0,4$), то поправка на период, начиная с некоторого значения γ , мало зависит от его величины. Так, при добротности контура, равной 5 ($\alpha=0,1$), отклонение частоты от резонансной не превышает 0,5%; при добротности 2,5 ($\alpha=0,2$) отклонение частоты не превышает 2,0%. При этом величина γ может быть сколь угодно велика.

В ряде практических случаев желательно обеспечить малую зависимость частоты генерации от изменения нагрузки. Из выражений (8) видно, что это условие обеспечивается при больших значениях r и ρ . Однако, несмотря на то, что это условие выполняется не всегда, определенным подбором α и γ можно все же уменьшить зависимость частоты генерации от сопротивления нагрузки. Действительно, при увеличении R_0 величина α возрастает, а γ уменьшается; пользуясь этим, можно так подобрать параметры генератора, что изменение R_0 будет мало влиять на его частоту.

Зависимость периода колебаний от величины α для различных γ для параметров схемы, при которой колебания резко несинусоидальны, представлена на рис. 5. Из рисунка видно, что в области резко несинусоидальных колебаний период в основном зависит от параметра γ .

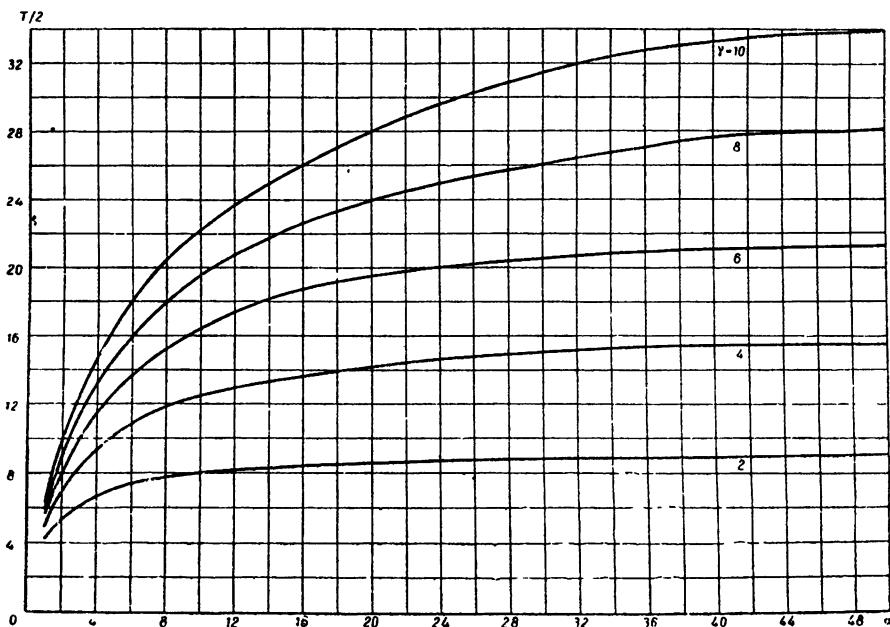


Рис. 5.

Расчеты показали, что амплитуда колебаний x_0 определяется главным образом отношением α/γ . Эта зависимость представлена на

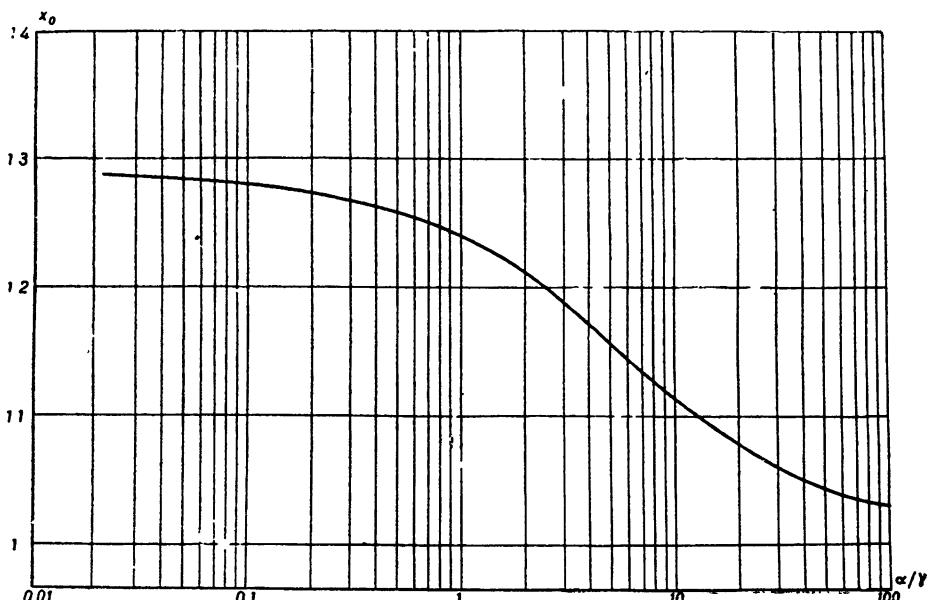


Рис. 6.

рис. 6. Для значений параметров, при которых δ не превышает 50%, x_0 определяется по кривой рис. 6 с погрешностью, не превышающей $\pm 1,5\%$. При увеличении δ погрешность определения x_0 увеличивается, но даже при $\delta > 120\%$ не превышает 10%. С точки зрения стабильности амплитуды наиболее благоприятно отношение $\alpha/\gamma < 1$.

Все результаты и выводы расчета остаются справедливыми и для схемы генератора с параллельным резонансным контуром, включенным последовательно с нелинейным сопротивлением, управляемым напряжением. Легко показать, что если при этом ввести обозначения

$$R/r=a, \quad R/\rho=b, \quad 1/\omega_0 CR_0=\lambda_0, \quad 1/\omega_0 CR=\lambda,$$

$$\lambda_0 + \frac{a}{1+a}\lambda = 2\alpha, \quad \frac{b}{1-b}\lambda - \lambda_0 = 2\gamma,$$

то уравнения (7) (где x —безразмерное напряжение) остаются теми же, но величины α и γ будут равны

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R+r} \right) \frac{1}{\sqrt{C/L}}, \\ 2\gamma &= \left(\frac{1}{\rho-R} - \frac{1}{R_0} \right) \frac{1}{\sqrt{C/L}}. \end{aligned} \quad (9)$$

С целью определения влияния формы вольтамперной характеристики нелинейного элемента на период колебания расчеты, полученные выше методом припасовывания, сравнивались с данными, получающимися при решении задачи асимптотическими методами. Для этого характеристика нелинейного элемента аппроксимировалась полиномом вида

$$y = -a_0(x - x^3). \quad (10)$$

Заметим, что применение аппроксимации (10) возможно лишь для вольтамперных характеристик вполне определенного типа, для которых отношение дифференциальных сопротивлений в точках $y=0$ ($x=0$, $x=\pm 1$) равно или близко к 2, так как

$$\left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = a_0, \quad \left| \frac{dy}{dx} \right|_{x=\pm 1} = 2a_0.$$

В случае аппроксимации (10) уравнение схемы (5) легко сводится к уравнению Ван-дер-Поля, в котором роль параметра выполняет величина

$$2\beta = a_0 \frac{\omega_0 C U_p}{\tilde{x}_1}.$$

Для этого уравнения известны асимптотические решения как для малого, так и для большого значения параметра [2].

На рис. 7 приведены кривые зависимости периода колебаний от величины β . Для $2\beta \gg 1$ период колебаний рассчитан по формуле Дородницына [3]. Кривая I соответствует кубической аппроксимации характеристики элемента, кривая II относится к кусочно-линейной аппроксимации, при которой значения дифференциальных сопротивлений соответствующих участков совпадают со значениями дифференциальных сопротивлений при кубической аппроксимации в точках $x=0$, $y=0$ и $x=\pm 1$, $y=0$:

$$\left| \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = a_0 = 2\gamma \frac{\tilde{x}_1}{\omega_0 C U_p}, \quad \left| \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=\pm 1 \\ y=0}} = 2a_0 = 2\alpha \frac{\tilde{x}_1}{\omega_0 C U_p}.$$

Отсюда $\gamma = \beta$, $\alpha = 2\beta$. Для кусочно-линейной аппроксимации, проведенной через вершину кубической параболы и точки $x = \pm 1$, $y = 0$ (при этом, как нетрудно показать, $\gamma = 2\beta/3$, $\alpha = 2\beta/3(\sqrt{3} - 1)$), значения периода колебаний представлены кривой III.

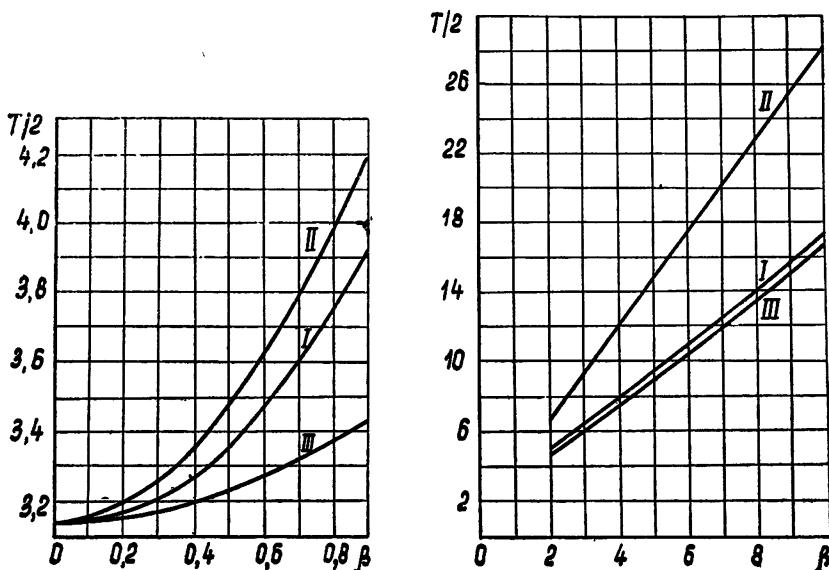


Рис. 7.

Из рис. 7 ясно, что наилучшее совпадение результатов расчета в области синусоидальных колебаний дают кривые I и II, причем расхождение результатов расчета не превышает 10%. В области резко несинусоидальных колебаний наилучшее совпадение дают кривые I и III; при этом расхождение результатов расчета не превышает 15%. Очевидно, кривые рис. 7 позволяют оценить влияние формы вольт-амперной характеристики нелинейного элемента на период генерации, которое особенно существенно в области релаксационных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Гостехтеориздат, М., 1955.
3. M. Urabe, IRE Trans., CT-7, 382 (1960).

THE INVESTIGATION OF OSCILLATORS WITH NEGATIVE RESISTANCE UNDER
THE PIECEWISE-LINEAR APPROXIMATION OF THE NONLINEAR ELEMENT*I. N. Lisitskaja, L. A. Sinitskij*

The oscillators with negative resistance under the piecewise-linear approximation of nonlinear element are analysed. The diagrams are given which permit to determine the amplitude of oscillations and deviation of oscillator frequency from the circuit frequency, as well as both to find out the period in the region of extremely non-sinusoidal oscillations and to clear up the influence of the form of currentvoltage curve on the magnitude of period.

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ КОСМИЧЕСКОЙ РАДИОЛОКАЦИИ НА ЦИФРОВЫХ МАШИНАХ МЕТОДОМ ЧАСТОТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И НАКОПЛЕНИЯ

Л. И. Филиппов

В статье рассмотрена возможность применения электронных цифровых вычислительных машин для обработки колебаний при весьма малом отношении сигнал/шум. Указано целесообразное распределение операций между аналоговыми устройствами и электронными цифровыми вычислительными машинами. Рассмотрены методы реализации на машине узкополосной фильтрации, получения огибающей (детектирования) и накопления сигналов. Произведено сравнение различных методов фильтрации. Вычислен выигрыш в отношении сигнал/шум после обработки.

Реальным результатом радиолокационного исследования космоса является в настоящее время уточнение основной астрономической единицы путем радиолокации планеты Венера. Ждут своего решения ряд других вопросов, в частности, снятие отражательных карт планет, определение периода вращения и наклона оси (в первую очередь Венеры, покрытой непрозрачным облачным слоем), а также дальнейшее уточнение расстояний в солнечной системе.

Принимаемые отраженные сигналы чрезвычайно слабы. Так при облучении Венеры и Марса при помощи передатчика со средней мощностью 100 квт и антенны с усилением до 10^5 (в середине дециметрового диапазона) отношение мощности сигнала к мощности шума на входе приемника составляет $10^{-3} \div 10^{-2}$. Обнаружение столь слабых сигналов требует реализации оптимальных методов приема и построения сложных приемо-индикаторных устройств. При этом на определенном этапе оказывается целесообразным переход к цифровой обработке отраженных сигналов на электронных вычислительных машинах, позволяющих быстро изменять метод обработки (путем изменения программы) или варьировать параметры индикаторной системы.

Согласно критерийному принципу, апостериорное распределение $p_{\text{апс}}(\tau)$ параметра τ при дискретном представлении и несущественных ограничениях имеет вид:

$$p_{\text{апс}}(\tau) = kp_{\text{апр}}(\tau) e^{\frac{\sum \log I_0(Qn)}{n}}, \quad (1)$$

т. е. оптимальный приемник должен создавать сумму выборочных значений на выходе детектора с бесселевой характеристикой $\log I_0$. Таким образом, основными операциями, совершамыми оптимальным приемником, должны быть, помимо фильтрации по частоте, детектирование специальным детектором (хорошо аппроксимирующимся квадратичным) и интегрирование (накопление) сигнала.

1. СПЕЦИФИКА ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ КОСМИЧЕСКОЙ РАДИОЛОКАЦИИ И РАЦИОНАЛЬНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Особенностями применения радиолокации при исследовании космических тел, помимо отмеченного выше малого отношения сигнал/шум, являются возможность сравнительно длительного (до десятков минут)

накопления энергии, возможность разрешения участков облучаемых поверхностей по дальности (вдоль луча), обусловленная значительной протяженностью объектов, а также разрешения в нормальном к лучу и оси вращения направлении вследствие сравнительно больших допплеровских смещений частоты, вызванных вращением вокруг собственной оси. Узкополосная фильтрация (единицы и доли герц) и длительное накопление (десятки минут), легко реализуемые на вычислительных машинах, практически не выполнимы аналоговыми методами. Важным преимуществом машины является „абсолютная стабильность“ параметров реализуемых на машине устройств, позволяющая в ряде случаев обойтись без применения „радиометрирования“ при обработке.

Следует отметить также некоторые специфические особенности оперирования дискретными данными сигналов в электронных вычислительных машинах.

а) Ограниченнaя скорость ввода данных, обусловленная быстродействием считающего устройства. Это обстоятельство может приводить к необходимости записи аналоговых данных на магнитофон с последующим замедленным считыванием.

б) Диспропорция между скоростью ввода данных и скоростью выполнения арифметических операций. Это обстоятельство при анализе сравнительно узкополосных сигналов приводит к возможности анализа (обработки) сигнала в процессе его ввода.

в) Необходимость ввода данных ограниченными группами (порядка 4000 кодов), обусловленная емкостью МОЗУ и структурой машины. Это обстоятельство приводит к усложнению аналого-цифровых преобразователей, которые должны содержать логические элементы и счетчики.

г) Ограниченнaя емкость долговременного запоминающего устройства. Это диктует требование такого разделения операций по обработке между аналоговыми устройствами и электронными вычислительными машинами, при котором количество вводимых данных не превышает емкости памяти.

д) Большая значность представления цифр в электронной вычислительной машине, значительно превышающая необходимую точность представления входных данных. Так, если исходить из требования, чтобы шум квантования смеси слабого сигнала и шума не превышал 1/100 исходного шума, то число уровней квантования

$$N_{\text{кв}} = \frac{U_{\text{макс}}}{\Delta} = 5k_n, \quad (2)$$

где k_n — пикфактор смеси, равный 1,5–5. Таким образом, достаточным является четырех-пятизначный код для представления выборок. Последнее обстоятельство позволяет ценою некоторого усложнения программы значительно (до 10 и более раз) повысить емкость запоминающих устройств путем помещения в одну многоразрядную ячейку нескольких малоразрядных чисел.

На основании изложенного представляется целесообразным следующее разделение операций между аналоговыми устройствами и электронными цифровыми машинами.

Аналоговые устройства	Цифровые вычислительные машины
1. Усиление	Узкополосная фильтрация
2. Генерирование	Вычисление огибающей
3. Коррелирование	Длительное накопление
4. Широкополосная фильтрация	Стробирование (иногда)
5. Стробирование (иногда)	Коррелирование (иногда)

Общая блок-схема устройства обработки представляется в виде рис. 1*.

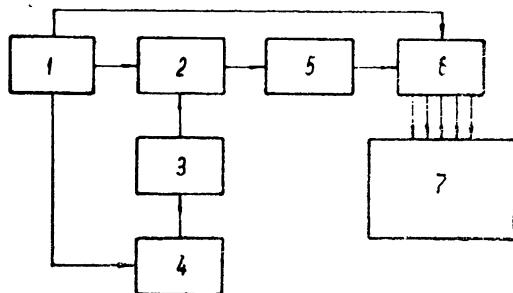


Рис. 1. Блок-схема устройства для обработки слабых сигналов с использованием электронно-вычислительной машины:

1—первичная запись (магнитофон), 2—корректор, 3—регулируемая задержка, 4—генератор опорных сигналов, 5—широкополосный фильтр, 6—аналого-цифровой преобразователь, 7—электронно-вычислительная машина (узкополосная фильтрация, вычисление огибающей, накопление).

2. РЕАЛИЗАЦИЯ УЗКОПОЛОСНОЙ ЧАСТОТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА ЭЛЕКТРОННОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ

Частотная фильтрация смеси сигнала с шумом набором „допплеровских“ фильтров может быть реализована в машине несколькими способами:

а) путем образования свертки смеси $u(t)$ с переходной функцией $h_i(t)$ заданного фильтра:

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) h_i(\tau) d\tau; \quad (3)$$

б) путем разложения смеси в ряд Фурье на некотором интервале наблюдения и вычисления коэффициентов C_k и S_k :

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_k \cos(k \Omega t) + S_k \sin(k \Omega t)]; \quad (4)$$

в) путем образования взаимно-корреляционной функции смеси сигнала и шума с гармоническими функциями заданной частоты.

Ниже показано, что второй метод можно рассматривать как частный случай фильтрации путем свертки при фильтре с частотной характеристикой вида

$$K(\omega) = B_0 \frac{\sin[(\omega - \omega_0)T]}{(\omega - \omega_0)T}. \quad (5)$$

Третий метод эквивалентен методу разложения в ряд Фурье.

Характеристика (5) соответствует переходной характеристики:

$$h(t) = \begin{cases} B_0 \cos(\omega_0 t) & (0 < t < T) \\ 0 & (\text{при других } t) \end{cases}. \quad (6)$$

В соответствии с (3) выходное напряжение фильтра (5)

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= B_0 \int_0^t u(t-\tau) \cos(\omega_0 \tau) d\tau = \\ &= -B_0 \int_t^0 u(t') \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t') dt' - B_0 \int_t^0 u(t') \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t') dt'. \end{aligned}$$

* Существенная при КРЛ операция точного ввода допплеровской поправки на несущую частоту может осуществляться и в машине (путем медленного изменения программы) и аналоговыми методами (при излучении или приеме).

Производя соответствующие преобразования и обозначая среднюю частоту фильтра $\omega_0 = k\Omega$, получим напряжение на выходе k -го фильтра:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \left[B_0 \int_0^t u(t') \cos(k\Omega t') dt' \right] \cos(k\Omega t) + \\ &+ \left[B_0 \int_0^t u(t') \sin(k\Omega t') dt' \right] \sin(k\Omega t). \end{aligned} \quad (7)$$

Величины в квадратных скобках пропорциональны величинам C_k и S_k . Следовательно,

$$u_{\text{вых}_k}(t) \equiv C_k \cos(k\Omega t) + S_k \sin(k\Omega t).$$

Фильтр с характеристикой (5) мы в дальнейшем будем называть фильтром Фурье.

Так как для реализации фильтра на электронной вычислительной машине требование физической осуществимости не обязательно, то операция свертки (3) позволяет реализовать на машине идеальный фильтр. При этом

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t u(t-\tau) h(\tau) d\tau, \quad (8)$$

т. е. для вычисления напряжения в момент t необходимо знание всех, в том числе последующих, выборок. Для идеального фильтра

$$K(\omega) = \begin{cases} K_0 & (\omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega) \\ 0 & (\text{при других } \omega) \end{cases}. \quad (9)$$

Этому коэффициенту передачи соответствует переходная характеристика

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{2K_0 \Delta\omega}{\pi} \frac{\sin(\Delta\omega t)}{\Delta\omega t} \cos(\omega_0 t). \quad (10)$$

Аналогично определяются переходные характеристики некоторых других фильтров. Например, для колоколообразного

$$h_k(t) = A_1 \exp \left\{ -\left(\frac{\Delta\omega}{2} \right)^2 t^2 \right\} \cos(\omega_0 t), \quad (11)$$

для одиночного резонансного контура

$$h_p(t) = A_2 \exp \{-\Delta\omega t\} \cos(\omega_0 t) \quad (12)$$

($2\Delta\omega$ —полоса пропускания фильтров по уровню $1/\sqrt{2}$).

Выходное напряжение фильтра может быть записано в виде

$$u_{\text{вых}}(t) = A_l \int_0^t u(t-\tau) e^{\xi(\tau)} \cos(\omega_0 \tau) d\tau, \quad (12a)$$

где $\xi(\tau)$ изменяется в зависимости от фильтра. При дискретном представлении данных l -ая выборка на выходе i -го фильтра (рис. 2) выражается так:

$$u_i(l) = \frac{A}{2F_B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(l-k) h_i(k) \quad (13)$$

(F_B —высшая частота, содержащаяся в сигнале).

Из сравнения выражений (10)–(13) видно, что при фильтрации длинных последовательностей с конечной точностью (при отбрасывании малых составляющих h_i) время фильтрации различно для различных фильтров. Если не учесть выборки h_i , составляющие меньше $p\%$ максимальной, то времена вычисления $u_i(l)$ (заданной выборки) соответственно равны

$$\tau_{\text{ид}} = 200/\Delta\omega p\% \text{ для идеального фильтра,}$$

$$\tau_{\text{од}} = (4,6 - \ln p\%)/\Delta\omega \text{ для одиночного резонансного,} \quad (14)$$

$$\tau_{\text{к}} = 2\sqrt{4,6 - \ln p\%}/\Delta\omega \text{ для колоколообразного фильтра.}$$

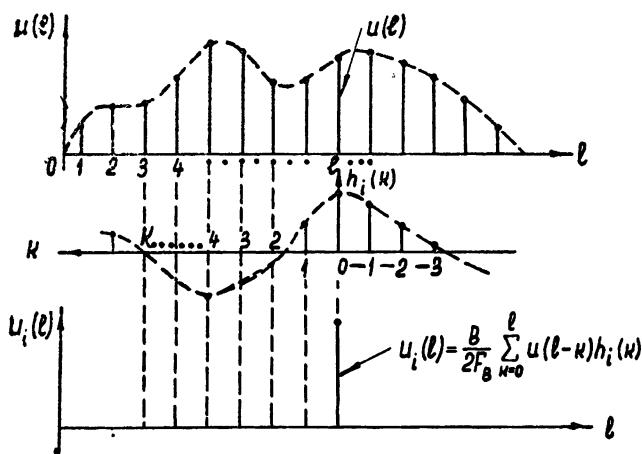


Рис. 2. К выражению алгоритма фильтрации при дискретном представлении сигналов.

Соответствующие кривые приведены на рис. 3 при полосах пропускания фильтров $2\Delta f=0,5; 1$ и 2 гц.

Наиболее трудоемкой является операция „идеальной“ фильтрации (Π -образным фильтром). Одиночный резонансный и колоколообразный фильтры эквивалентны при $p=1,8\%$ и требуют значительно меньшего времени на фильтрацию. При $p < 1,8\%$ резонансный фильтр требует большего времени, чем колоколообразный, при $p > 1,8\%$ соотношение обратное. Наименьшего времени требует фильтрация путем разложения в ряд Фурье. Принимая в качестве полосы пропускания фильтра ширину первого максимума (5), получаем для фильтра Фурье

$$\tau_{\phi} = \pi/\Delta\omega \quad (15)$$

независимо от величины p .

3. НАКОПЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ СИГНАЛА И ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ

В соответствии с алгоритмом оптимальной обработки энергия на выходе фильтров должна быть подвергнута накоплению за время длительности сигнала (сеанса облучения)*. Возможна накопление с „радиометрированием“ (образование разности энергии в каналах, со-

* Возможно накопление и за несколько сеансов, если оно не противоречит требованию разделения энергии от отдельных допплеровских полос и колец дальности, перемещающихся из-за вращения планеты.

держащих сигнал + шум и только шум) и без „радиометрирования“. В первом случае после каждого фильтра i образуется величина

$$\bar{\Theta}_i^c = \bar{\Theta}_i^{c+w} - \bar{\Theta}_i^w = \sum_{l=1}^L |u_i(l)|^{c+w} - \sum_{l=1}^L |u_i(l)|^w, \quad (16)$$

где $|u_i(l)|^{c+w}$ — l -ая выборка огибающей смеси сигнала и шума на выходе i -го фильтра, $|u_i(l)|^w$ — l -ая выборка огибающей шума, L — полное количество выборок за время накопления. При отсутствии радиометрирования образуется величина

$$\bar{\Theta}_i = \sum_l |u_i(l)|^{c+w}. \quad (17)$$

При этом операцию (16) целесообразно производить путем образования разности на каждом шаге накопления (это уменьшает числа, хранящиеся в процессе накопления, так как $\bar{\Theta}_i^c \ll \bar{\Theta}_i^{c+w}$):

$$\bar{\Theta}_i^c = \sum_l [|u_i(l)|^{c+w} - |u_i(l)|^w]. \quad (16a)$$

На основании теоремы о сумме большого количества случайных величин величина $\bar{\Theta}_i^c$ будет иметь приближенно нормальное распределение:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_i^c &= L_n \overline{v_i(l)} + \sqrt{L_n [\overline{v_i(l)} - \overline{v_i(l)}]^2} \Theta_i = \\ &= \bar{\Theta}_i^c + D(\bar{\Theta}_i^c) \Theta_i, \end{aligned} \quad (18)$$

где $v_i(l) = |u_i(l)|^{c+w} - |u_i(l)|^w$, Θ_i — нормальная случайная величина, L_n — число независимых выборок.

Отношение сигнал/шум после накопления определим в виде:

$$(\text{сигнал}/\text{шум})_{\text{вых}} = \frac{\bar{\Theta}_i^c}{D(\bar{\Theta}_i^c)} \approx \frac{\bar{\Theta}_i^c}{D(\bar{\Theta}_i^w)}. \quad (19)$$

Находя среднее значение и дисперсию величины (18), получаем:

$$(\text{сигнал}/\text{шум})_{\text{вых}} = 2 \sqrt{L_n} \frac{\overline{|u_i(l)|^{c+w}} - \overline{|u_i(l)|^w}}{D(|u_i(l)|^w)}. \quad (19a)$$

Входящие сюда средние значения и дисперсия определяются через распределения соответствующих выборок. Принимая нормальное распределение выборок и учитывая, что

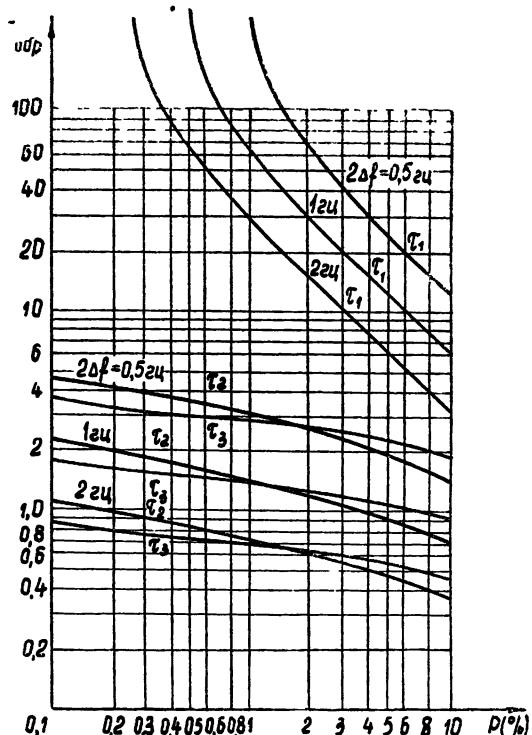


Рис. 3. Время обработки одной выборки выходного напряжения при различных фильтрах (τ_1 — идеальный фильтр, τ_2 — одиночный, τ_3 — колоколообразный).

$$L_h = \frac{t_c}{\Delta t_{kv}} = 2F_b t_c \quad (20)$$

(Δt_{kv} —шаг временного квантования сигнала, t_c —его длительность), получаем:

$$(\text{сигнал}/\text{шум})_{\text{вых}} = \left(\frac{p_c}{p_{\text{ш}}} \right)_{\text{вх}} V \sqrt{2F_b t_c} . \quad (20a)$$

Для получения огибающей выходного напряжения при фильтрации методом свертки необходимо вычислить мгновенные значения выходного напряжения в моменты времени, отстоящие на четверть периода средней частоты фильтра. Если

$$u(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $A(t)$ —медленно меняющаяся огибающая, то

$$u(t_1) = A(t_1) \cos(\omega_0 t_1 + \varphi_0),$$

$$u(t_2) = A(t_2) \cos[\omega_0(t_1 + T/4) + \varphi_0] , \quad (21)$$

$$A^2(t) = [u(t_1)]^2 + [u(t_2)]^2.$$

Соответствующие моментам t_1 и t_2 свертки будут

$$u_{\text{вых}}(t_1) = \int_0^{t_1} u(t_1 - \tau) a(\tau) \cos(\omega_0 \tau) d\tau , \quad (22)$$

$$u_{\text{вых}}(t_2) = \int_0^{t_2} u(t_2 - \tau) a(\tau) \cos(\omega_0 \tau) d\tau ,$$

где $a(\tau)$ —огибающая переходной функции. Для узкополосных фильтров $2\Delta\omega \ll \omega_0$. При этом, как видно из рис. 4,

$$u_{\text{вых}}(t_2) \approx \int_0^{t_1} u(t_1 - \tau) a(\tau) \sin(\omega_0 \tau) d\tau . \quad (23)$$

Таким образом, для образования огибающей необходимо вычисление сверток

$$u_1(t) = \int_0^t u(t - \tau) a(\tau) \cos(\omega_0 \tau) d\tau , \quad (24)$$

$$u_2(t) = \int_0^t u(t - \tau) a(\tau) \sin(\omega_0 \tau) d\tau .$$

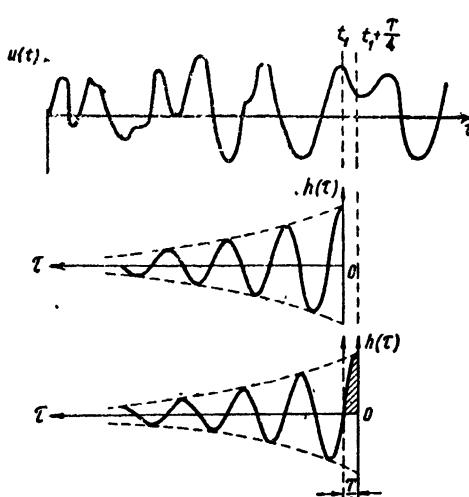
Накоплению должна подвергаться величина

$$|u(t)|^2 = |u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2 .$$

При вычислении огибающей выходного напряжения узкополосного фильтра нет необходимости вычислять на каждом шаге l мгновенные значения

$$u_i(l) = \frac{B}{2F_b} \sum_k u(l - k) h_i(k) . \quad (25)$$

Рис. 4.



В соответствии с теоремой Котельникова, для вычисления огибающей достаточно определять выборки в соответствии с полосой пропускания фильтра. Так, в (25) следует полагать

$$l = \frac{2F_b}{2(2\Delta f)} m \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (26)$$

где F_b — высшая частота напряжения на входе фильтра ($2F_b$ — частота выборок), $2\Delta f$ — полоса фильтра, после которого производится накопление.

В случае частотной фильтрации путем разложения колебаний в ряд Фурье на отрезке T накоплению подвергается величина амплитуды гармоник

$$\mathfrak{E}_i^c = \sum_k A_i^{c+\text{ш}}(T_k) - \sum_k A_i^{\text{ш}}(T_k) \quad (27)$$

(k — номер интервала разложения T).

Величины $A_i^{\text{ш}}$ образуются путем разложения в ряд шумового напряжения с выхода фильтра, реализованного в машине. При отсутствии „радиометрирования“ вторая сумма в (27) отсутствует. Интервал разложения T не должен превышать интервал когерентности сигнала,

Численный эксперимент, проведенный на БЭСМ-2 путем искусственного замешивания в числовой форме известного сигнала в шум с известными параметрами, показал, что процессы фильтрации и накопления происходят в соответствии с теорией.

Возможность реальной работы определяется стабильностью записи и считывания первичной информации, быстродействием аналого-цифрового преобразователя и емкостью запоминающих устройств (в основном оперативного).

При рациональном распределении операций по обработке слабых сигналов между аналоговыми устройствами и электронной вычислительной машиной применение вычислительных машин, как универсальных, так и специализированных, может быть весьма успешным.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР

Поступила в редакцию
18 сентября 1962 г.

THE SIGNAL PROCESSING OF COSMIC RADAR BY DIGITAL COMPUTER USING THE METHOD OF FREQUENCY FILTRATION AND STORAGE

L. I. Philippov

The possibility of application of electronic digital computers for processing of the oscillations with small signal to noise ratio is considered. The expedient distribution of operations between the analog and digital computers is suggested. Methods of performance the narrow-band filtration, envelope recording (detection) and signal storage by means of computer are considered. The different methods of filtration are compared. The gain in signal to noise ratio after the processing is calculated.

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ ВОЗБУДИМОЙ ТКАНИ

B. P. Телеснин

Рассматривается распространение возбуждения в кольце из однородной возбудимой ткани при немонотонной зависимости скорости этого распространения.

В работе [1] рассматривалось распространение импульсов в кольце из ждущих мультивибраторов. В последние годы в ряде работ изучались вопросы, связанные с математическим описанием распространения мгновенного возбуждения по непрерывным средам, в частности, по возбудимым тканям [2, 3]. Некоторые результаты этих исследований совпадают с результатами, полученными нами на электронных моделях. Однако в этих работах (как и в [1]) были изучены лишь случаи монотонной зависимости скорости распространения возбуждения от фазы точек среды. В ряде приложений (физиология и некоторые другие) представляют интерес случаи, где эта зависимость немонотонна. Изучению этих случаев и посвящена настоящая статья.

Следуя терминологии работы [2], мы будем называть возбудимой тканью среду, обладающую следующими свойствами.

1) Каждая точка среды способна к возбуждению, которое является мгновенным. Возбуждение может распространяться по одномерной ткани только в одном направлении. Назовем фазой точки x величину $\tau(x, t)$ — время, прошедшее с момента последнего возбуждения точки x до момента t .

2) Скорость $c(x, t)$ распространения возбуждения в данной точке среды является функцией фазы этой точки:

$$c(x, t) = \Phi[\tau(x, t)].$$

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться величиной, обратной скорости

$$c^{-1}(x, t) = \varphi[\tau(x, t)].$$

Простейшим здесь является случай, когда $\varphi(\tau)$ является монотонно убывающей функцией. Этот случай, по существу, изучался на моделях [1], а затем был подробно рассмотрен в работе [3]. Ниже описываются процессы, происходящие при распространении возбуждения в кольце из однородной возбудимой ткани при условии, что функция $\varphi(\tau)$ имеет один минимум и асимптотически стремится к φ_0 при $\tau \rightarrow \infty$ (рис. 1).

Рассмотрим случай, когда по кольцу циркулируют два импульса. Обозначим через $t_1(x)$ и $t_2(x)$ моменты возбуждения точки x соответствующими импульсами. Тогда процессы в кольце описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dt_1}{dx}(x) = \varphi[t_1(x) - t_2(x - l)]; \quad (1)$$

$$\frac{dt_2}{dx}(x) = \varphi [t_2(x) - t_1(x)],$$

где l — длина кольца. Пусть режим стационарный, т. е. оба импульса распространяются с одинаковой постоянной скоростью. Такой режим соответствует решению вида

$$t_1(x) = c_1 x - c_2; \quad t_2(x) = c_1 x. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует:

$$c_1 = \varphi(c_1 l - c_2); \quad c_1 = \varphi(c_2).$$

Очевидно, что $c_1 l - c_2$ является фазой $t_1(x)$ любой точки кольца в момент возбуждения ее первым импульсом, а c_2 — фазой $t_2(x)$ той же точки в момент возбуждения ее вторым импульсом.

Рассмотрим сначала случай эквидистантной расстановки импульсов ($\tau_1 = \tau_2$). Тогда τ_1 определяется равенством $2\tau_1/l = \varphi(\tau_1)$ (рис. 1б). В зависимости от длины кольца возможны следующие решения.

1) В случае короткого кольца $2\tau/l$ пересекает только ветвь кривой $\varphi(\tau)$, лежащую слева от минимума (точка 1 на рис. 1б). Такая расстановка импульсов соответствует случаю монотонно убывающей функции $\varphi(\tau)$ и является устойчивой.

2) При большей длине кольца $2\tau/l$ может пересечь $\varphi(\tau)$ в трех точках (2, 3, 4 на рис. 1б), из которых 3 и 4 лежат на правой ветви кривой $\varphi(\tau)$ и соответствуют неустойчивой расстановке импульсов, а точка 2 находится на левой ветви $\varphi(\tau)$.

3) При достаточно большой длине кольца $2\tau/l$ пересекает только правую ветвь $\varphi(\tau)$. При этом эквидистантная расстановка неустойчива.

Пусть теперь расстановка импульсов неэквидистантная ($\tau_1 \neq \tau_2$). Из (1) и (2) имеем:

$$\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2) = \frac{\tau_1 + \tau_2}{l}.$$

Для нахождения решения выполним следующее построение: каждая точка A правой ветви кривой $\varphi(\tau)$ сдвигается вправо на величину, равную абсциссе точки A' левой ветви $\varphi(\tau)$ (рис. 2а). Пересечение полученной таким образом кривой $\varphi(\tau)$ с прямой τ/l дает точку с координатами $\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{l}, \varphi(\tau_1)\right)$. Теперь нетрудно найти τ_1 и τ_2 . Найденная расстановка будет устойчивой при $\varphi(\tau_1) + \varphi(\tau_2) < 0$.

Все возможные расстановки пары импульсов в кольце таковы:

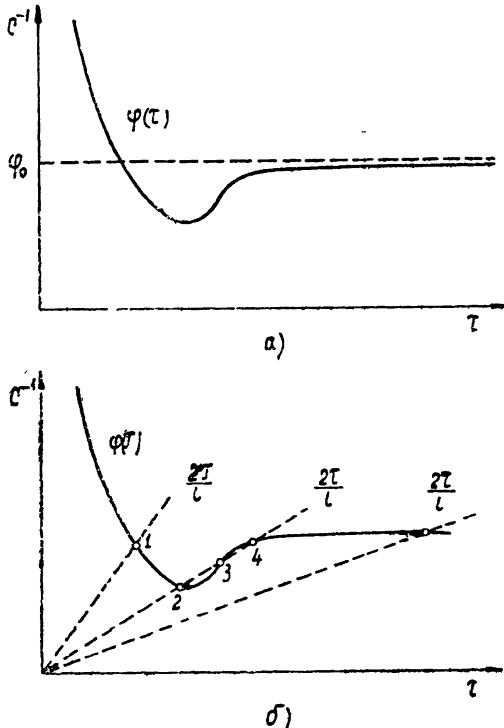


Рис. 1.

а) τ/l не пересекает кривой $\psi(\tau)$, $2\tau/l$ пересекает левую ветвь $\varphi(\tau)$ (рис. 2б); при этом существует только устойчивая эквидистантная расстановка импульсов;

б) τ/l пересекает $\psi(\tau)$ в двух точках, $2\tau/l$ пересекает левую ветвь $\varphi(\tau)$ (рис. 2в); при этом система (1) имеет 3 решения; при дальнейшем увеличении длины кольца $2\tau/l$ будет пересекать $\varphi(\tau)$ в трех точках, что добавит еще две неустойчивые эквидистантные расстановки;

в) τ/l пересекает $\psi(\tau)$ в одной точке, $2\tau/l$ пересекает только правую ветвь $\varphi(\tau)$ (рис. 2г); при этом может быть реализована только неэквидистантная расстановка импульсов.

в) τ/l пересекает $\psi(\tau)$ в одной точке, $2\tau/l$ пересекает только правую ветвь $\varphi(\tau)$ (рис. 2г); при этом может быть реализована только неэквидистантная расстановка импульсов.

Рассмотрим стационарный режим распространения в кольце произвольного числа импульсов (больше двух). Процессы, происходящие в кольце при циркуляции по нему n импульсов, можно описать следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dt_1}{dx}(x) &= \varphi[t_1(x) - t_n(x-l)] ; \\ \frac{dt_2}{dx}(x) &= \varphi[t_2(x) - t_1(x)] ; \\ &\dots \\ &\dots \\ \frac{dt_n}{dx}(x) &= \varphi[t_n(x) - t_{n-1}(x)] , \end{aligned} \quad (3)$$

где $t_j(x)$ — время возбуждения точки x импульсом с номером j . Введя $u_j(x) = t_j(x) - t_{j-1}(x)$, можно записать систему (3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx}(x) &= \varphi[u_1(x)] - \varphi[u_n(x-l)] ; \\ \frac{du_2}{dx}(x) &= \varphi[u_2(x)] - \varphi[u_1(x)] ; \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{du_n}{dx}(x) = \varphi[u_n(x)] - \varphi[u_{n-1}(x)].$$

Стационарный режим соответствует решению вида:

$$\begin{aligned} t_1(x) &= c_1 x + a_1; & u_1(x) &= u_1 = c_1 l + a_1 - a_n; \\ t_2(x) &= c_1 x + a_2; & u_2(x) &= u_2 = a_2 - a_1; \\ &\dots & &\dots \\ t_n(x) &= c_1 x + a_n; & u_n(x) &= u_n = a_n - a_{n-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (3) и (5) имеем:

$$\frac{1}{l} \sum_{j=1}^n u_j = \varphi(u_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Расстановку импульсов, в которой k временных интервалов между импульсами соответствуют левой ветви $\varphi(\tau)$, а $n-k$ — правой ветви, будем обозначать $(k, n-k)$.

Для определения возможных расстановок в кольце n импульсов способом, описанным выше, строится ряд кривых $\psi_i(\tau)$, соответствующих расстановкам $(n-i, i)$ (рис. 3). Тогда расстановка $(k, n-k)$ определяется пересечением прямой $(n-k)\tau/l$ с $\psi_k(\tau)$. Неустойчивость расстановки $(n-2, 2)$ очевидна. Так же неустойчивы все расстановки $(k, n-k)$ при $n-k \geq 2$, но строгое аналитическое доказательство этого весьма громоздко.

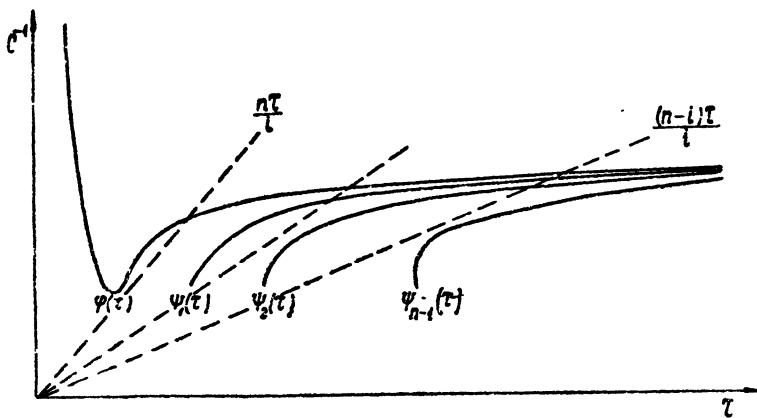


Рис. 3.

Таким образом, в кольце может быть либо эквидистантная расстановка импульсов $(n, 0)$, либо расстановка вида $(n-1, 1)$. Если длина кольца l настолько мала, что $n\tau/l$ пересекает левую ветвь $\varphi(\tau)$, а τ/l не пересекает $\psi_{n-1}(\tau)$, то может быть реализована только эквидистантная расстановка импульсов. При достаточно большой длине кольца, когда $n\tau/l$ пересекает только правую ветвь $\varphi(\tau)$, реализуется только расстановка $(n-1, 1)$. При промежуточных значениях l может существовать либо расстановка $(n, 0)$, либо расстановка $(n-1, 1)$ в зависимости от начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Ф. Иванов, В. Р. Телеснин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, 125 (1959).
- 2 И. М. Гельфанд, М. Л. Цетлин, ДАН СССР, 131, 1242 (1960).
- 3 С И Гельфанд, Д. А. Каждан, ДАН СССР, 141, 527 (1961).

Математический институт
им. В. А Стеклова АН СССР

Поступила в редакцию
2 июля 1962 г.

TO THE PROPAGATION OF EXCITATION IN ONEDIMENSIONAL EXCITABLE
TISSUE

V. R. Telesnin

The propagation of excitation along the ring of the homogeneously excitable tissue
with nonmonotonous variation of velocity is considered.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ПРЕЦИЗИОННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ КАССИОПЕЯ-А, ЛЕБЕДЬ-А И ТЕЛЕЦ-А В ДЕЦИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ*

*В. П. Ласточкин, В. А. Порфирьев, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий,
Н. Н. Холодилов, Н. М. Цейтлин*

Прием радиоизлучения дискретных источников на волнах 25,2 см, 34,2 см, 42,4 см и 54,3 см производился с помощью 8-метровой параболической антенны, диаграммы направленности которой, измеренные по радиоизлучению Солнца на этих длинах волн, имеют ширины на уровне половинной мощности, соответственно равные 150', 200', 240' и 300'.

В качестве приемника использовался диапазонный модуляционный измеритель слабых сигналов, имевший чувствительность $0,3 \pm 0,4^{\circ}\text{K}$ при постоянной времени 16 сек. Для компенсации сигнала, вызванного разностью температуры антенн и опорного холодного эталона, в антеннное плечо через направленный ответвитель вводился шумовой сигнал от газоразрядной трубки; величина компенсирующего сигнала подбиралась для каждого единичного измерения.

Наведение и сопровождение источников проводилось по координатам, при этом ошибка не превышала $\pm 5'$. Правильность наведения антенной системы при всех измерениях контролировалась с помощью оптической трубы, сопряженной с электрической осью антенны. Для этого в окрестности дискретного источника выбиралась характерная группа видимых звезд, по отношению к которым определялось положение источника, и в дальнейшем поле зрения панорамы привязывалось к этой группе. Визуальный метод контроля позволяет делать проверку наведения с погрешностью порядка $\pm 0,5'$.

Для определения уровня нулевого отсчета, относительно которого отсчитывалась интенсивность радиоизлучения дискретного источника, вблизи него выбиралась опорная область. Положение опорной области определялось таким образом, чтобы одну и ту же область можно было использовать на всех указанных выше волнах; при этом угловые расстояния между источником и опорной областью задавались шириной диаграммы направленности на уровне нескольких долей процента для наибольшей длины волны.

Для определения потока от дискретного источника в измеряемую величину вносились коррекции, учитывавшая разность интенсивностей непрерывного космического излучения в районе опорной области и дискретного источника. При выборе опорной области принималось во внимание, чтобы эта разность была минимальной. Величина ее определялась по изофотам на волнах 22 см [1], 31,2 см [2] и 75 см [3] с пересчетом на заданную длину волны с помощью спектрального индекса, равного — 2,7 [4]. Координаты источников и опорных областей приведены в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Источник	Координаты источника	Координаты опорной области
Кассиопея-А	$\alpha = 23^{\text{h}}21^{\text{m}}42^{\text{s}}$; $\delta = 58^{\circ}36', 4$	$\alpha = 22^{\text{h}}21^{\text{m}}42^{\text{s}}$; $\delta = 58^{\circ}36', 4$
Лебедь-А	$\alpha = 19^{\text{h}}58^{\text{m}}17^{\text{s}}$; $\delta = 40^{\circ}37', 8$	$\alpha = 19^{\text{h}}40^{\text{m}}$; $\delta = 32^{\circ}$
Телец-А	$\alpha = 5^{\text{h}}32^{\text{m}}13^{\text{s}}$; $\delta = 22^{\circ}$	$\alpha = 5^{\text{h}}50^{\text{m}}$; $\delta = 32^{\circ}$

* Измерения интенсивности Кассиопеи-А и Лебедя-А проведены В. П. Ласточкиным, К. С. Станкевичем и В. С. Троицким, Тельца-А—В. А. Порфирьевым, В. С. Троицким и Н. М. Цейтлиным. При измерениях использовался радиометр, разработанный Н. Н. Холодиловым.

Калибровка принимаемых сигналов осуществлялась путем сравнения их с собственным излучением абсолютно черного диска, находящегося во фраунгоферовой зоне антенны, согласно методу, разработанному в [4] (метод искусственной Луны). Для уменьшения дифракционной поправки к температуре радиоизлучения диска он устанавливался на высоте 26° над горизонтом. Угловые размеры диска были равны 56'34,2.

Температура антенны от излучения диска в зависимости от длины волны изменилась от 12°К до 3°К. Температура антенны от излучения источников находилась в пределах 4 ± 20°К.

Наблюдения проводились во время, когда источники имели высоту 35° ± 60° над горизонтом и азимутальные скорости источников и опорной области были примерно одинаковы. Кроме того, через направление на калибровочный диск в это время проходили высокие галактические широты, что обеспечивало малость интенсивности космического излучения за диском. Единичные записи, включавшие регистрацию нулевого и принимаемого сигналов, продолжались по 10 минут, в течение которых источник и опорная область сопровождались по координатам. Наибольшая погрешность единичного измерения, обусловленная флюктуациями, имела место при наблюдениях Тельца (до 10%). Для других источников погрешность была меньше. Поэтому, чтобы получить случайную ошибку измерений, меньшую 2%, требовалось около 25 записей.

При определении потоков учитывались систематические поправки к измеряемым величинам, обусловленные отмеченной выше разностью интенсивности космического радиоизлучения в направлении источника и опорной области, изменением температуры антенны из-за излучения атмосферы при повороте антенн по высоте во время сопровождения источника, а также дифракционными явлениями на диске. Погрешности измерений определялись неточностями введения поправок и погрешностью в определении температуры и телесного угла диска.

В таблице 2 приведены потоки S дискретных источников Кассиопея-А, Лебедь-А и Телец-А, измеренные летом 1962 г., а также разность потоков в направлении источников и опорных областей ΔS . Здесь же указаны суммарные (случайные и систематические) среднеквадратичные ошибки в определении соответствующих потоков источников.

Таблица 2

λ (см)	Кассиопея-А			Лебедь-А			Телец-А		
	$\Delta S \cdot 10^{24}$ $\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$	$S \cdot 10^{24}$ $\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$	по- греш- ность (%)	$\Delta S \cdot 10^{24}$ $\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$	$S \cdot 10^{24}$ $\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$	по- греш- ность (%)	$\Delta S \cdot 10^{24}$ $\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$	$S \cdot 10^{24}$ $\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$	по- греш- ность (%)
25,2	30,0	30,5	± 4	—	—	—	10,25	9,8	± 7,0
34,25	—	—	—	28,6	25,1	± 5	10,46	10,0	± 3
34,9	33,15	33,65	± 2,5	—	—	—	10,16	10,16	± 10,5
42,4	40,46	41,7	± 2,5	33,2	29,6	± 6	9,86	9,10	± 5
53,4	47,7	49,6	± 3	46,5	37,3	± 8	13,9	11,1	± 6

Более подробно приведенные результаты будут рассмотрены и обсуждены в отдельной статье.

Авторы глубоко благодарны Я. М. Парнасу и Т. В. Шикиной, под руководством которых было разработано и изготовлено покрытие для черного диска.

ЛИТЕРАТУРА

- Дж Вестерхарт, Парижский симпозиум, ИЛ, М., 1961.
- R. W. Wilson, J. G. Bolton, PASP, **72**, 331 (1960).
- C. L. Seeger, F. L. H. M. Stumpers, H. Hugck, Phil. Tec Rev., **21**, 317 (1960).
- В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 1004 (1961).

ПРЕЦИЗИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ПОТОКА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ИСТОЧНИКА КАССИОПЕЯ-А НА $\lambda=3,2$ см

В. П. Ласточкин, Э. С. Планкин, К. С. Станкевич

Для проверки результатов, полученных в [1] при прецизионных измерениях интенсивности дискретного источника Кассиопея-А, а также выяснения влияния внешних условий на точность калибровки принимаемого излучения по методу „искусственной Луны“ [2], осенью 1962 г. были повторены измерения потока этого источника на $\lambda = 3,2$ см.

Аппаратура и методика измерений были такими же, как и в работе [1]. Калибровка принимаемых сигналов осуществлялась путем сравнения их с собственным излучением абсолютно черного диска, находящегося во фраунгоферовой зоне антennы. Диск имел угловые размеры 8',8 и для исключения дифракционных поправок устанавливался на высоте 22°.

В результате 80 измерений на $\lambda = 3,2$ см найден поток, равный $S = 5,14 \cdot 10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{гц}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$. Общая ошибка при квадратичном суммировании не превосходит 5%. Это значение потока хорошо совпадает (с точностью 1%) с результатами прошлогодних измерений, выполненных при других внешних условиях, что подтверждает возможность измерений с большой точностью по предлагаемой методике.

Используя результаты измерений [3] на 10,26 см, можно вычислить спектральный индекс в сантиметровом диапазоне для источника Кассиопея-А, который оказался равным -0,87, что также совпадает с величиной, полученной в [1], и отличается от принятого ранее значения -0,8 [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Станкевич, Астрон. ж., 39, 610 (1962).
2. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 759 (1961).
3. В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 398 (1963).
4. Д. Р. Уитфилд, Радиоастрономия, Парижский симпозиум, ИЛ, М., 1961, стр. 291.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 января 1963 г.

О ПРИРОДЕ ВЕЩЕСТВА ЛУННЫХ МОРЕЙ И МАТЕРИКОВ

В. С. Троицкий

Резкое отличие в видимом свете лунных материков и морей побуждало исследователей выдвигать гипотезы о резко различной природе образующего их вещества. Было распространено мнение, что моря сложены из базальтовых пород, а более светлые материки—из гранитных. Существуют и другие гипотезы.

В настоящее время представляется реальная возможность путем исследования радиоизлучения лунных морей и материков сделать некоторые более определенные заключения о природе их вещества. По крайней мере можно будет совершению однозначно и определенно ответить на вопрос: одинаковы или различны породы материков и морей. Настоящая заметка посвящена рассмотрению этой возможности, в результате чего предлагается и обосновывается соответствующий метод, а из имеющихся данных о радиоизлучении делается предварительное заключение о тождественности природы вещества морей и материков.

Метод. Как показано в [1], измерение амплитуды колебаний интенсивности радиоизлучения Луны и знание величины теплового параметра $\gamma = (kpc)^{-1/2}$ позволяют определить удельный тангенс угла потерь (удельные потери) $\operatorname{tg} \Delta/\rho$ лунного вещества (ρ —плотность вещества, β —его теплопроводность и теплоемкость). В этой же работе отмечалось, что величина $\operatorname{tg} \Delta/\rho$ определяется химической природой вещества и поэтому позволяет путем ее сравнения с измеренным значением $\operatorname{tg} \Delta/\rho$ для различных земных пород сделать заключения о вероятном минералогическом и химическом составе вещества Луны. В работе [2] приведены обширные данные о величине удельных потерь для земных пород, а также найдена группа земных пород, соответствующая среднему лунному веществу. Величина $\operatorname{tg} \Delta/\rho$ для различных пород различна; например, для базальта она в 3 раза больше, чем для гранита.

Отсюда ясно, что, измеряя эту величину отдельно для лунных морей и материков,

можно решить, одинаковы или различны породы, образующие моря и материков; если различны, то каким земным породам их вещество лучше соответствует. Однако при этом должны быть известны тепловые параметры вещества материков и морей и их тепловой режим.

В настоящее время на основании работ [3,4] можно считать, что величина $\gamma = (kpc)^{-1/2}$, определяющая тепловой режим, практически (с точностью $\pm 20 \div 25\%$) одинакова как для морей, так и для материков. Следовательно, постоянная составляющая и амплитуда первой гармоники температуры поверхности для них также практически одинаковы. Величина глубины проникания температурной волны в лунном веществе, согласно [5], благодаря его пористости не зависит от ρ , а также и от типа силикатных пород. В случае одинаковой структуры вещества (сыпучее, пепистое, пылевое) эти данные говорят о достаточной близости тепловых свойств и плотности вещества материков и морей.

Поскольку при этом амплитуда колебаний радиотемпературы определяется лишь величиной $\lg \Delta/\rho$, то различия в природе вещества будут проявляться в величине амплитуды и фазы отставания переменной части радиоизлучения. Тем самым, для определения природы покрова материков и морей должен быть измерен фазовый ход их радиоизлучения.

Если породы одинаковые, то и амплитуды колебаний интенсивности будут одинаковы. Если моря сложены из базальта, а материка из гранита, то амплитуда колебаний интенсивности для морей будет значительно больше. Найдем оптимальные условия измерений соотношения между величинами $\lg \Delta/\rho = \xi$ для морей и материков. Обозначим отношение постоянной составляющей к амплитуде переменной составляющей радиотемпературы для морей через M_1 , а материков через M_2 ; тогда их отношение

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\sqrt{1 + 2\delta_1 + \delta_1^2}}{\sqrt{1 + 2\delta_2 + \delta_2^2}} \approx \frac{1 + 1,4\delta_1}{1 + 1,4\delta_2},$$

где $\delta = \frac{\lambda \gamma c}{2\pi \zeta \sqrt{\epsilon}} \sqrt{\frac{\Omega}{2}} \cos r'$ (ϵ —диэлектрическая постоянная вещества материков

и морей, Ω —угловая частота вращения Луны, r' —угол направления излучения внутри вещества Луны с нормалью к поверхности, зависящий от координат выбранного участка моря или материка). Из соотношения видно, что наиболее сильное влияние величины потерь на амплитуду колебаний будет иметь место при $\delta_{1,2} > 2$, когда

$$\frac{M_1}{M_2} \approx \frac{\delta_1}{\delta_2} \approx \frac{\sqrt{\epsilon_2} \zeta_2 \gamma_1 \cos r'_1}{\sqrt{\epsilon_1} \zeta_1 \gamma_2 \cos r'_2}.$$

При этом отношение амплитуд практически пропорционально отношению удельных потерь, так как в силу ожидаемого примерного равенства плотностей вещества материков и морей $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$. Поскольку в среднем $\delta = 2\lambda$ [1], то, следовательно, наблюдения должны вестись на волнах $\lambda \geq 1 \text{ см}$. Учитывая, что с увеличением длины волн амплитуда колебаний падает и точность ее измерений ухудшается, наиболее оптимальным диапазоном является $1 \text{ см} \leq \lambda \leq 3 \text{ см}$. Наилучшая разрешающая сила может быть получена на миллиметровых волнах, где, однако, $\delta \approx 1$. В этом случае наиболее чувствительна к величине потерь будет не амплитуда, а отставание ξ фазы колебаний интенсивности. Действительно, при $\delta \ll 0,5$, что соответствует волне $\lambda \approx 0,25 \text{ см}$, $\xi = \arctg \delta/(1 + \delta)$ и $\xi_1/\xi_2 \approx \delta_1/\delta_2$. Однако в силу невысокой точности измерения фазы амплитудный метод является предпочтительным.

Результаты. В работе [6] измерена фазовая зависимость интенсивности радиоизлучения на волне $0,4 \text{ см}$ для трех участков на лунном экваторе с долготами $\varphi = 32^\circ; 0^\circ; -47^\circ$ и размерами порядка одной-двух угловых минут (ширина диаграммы антennы $1'$). Различия в фазе отставания хотя и велики, однако не систематичны и, по-видимому, укладываются в интервал возможных ошибок ее определения. Точность относительных измерений амплитуды следует ожидать не хуже нескольких единиц процентов. Наблюдаемое расхождение между значением для $\varphi = -47^\circ$ и $\varphi = 0^\circ$ составляет $4 \div 5\%$ (для центра диска амплитуда больше). Нетрудно найти из приведенных соотношений, что если и есть различие в величине потерь, то оно не превосходит $6 \div 7\%$, причем в районе морей удельные потери меньше, чем около центра диска. Не исключена и возможность, что наблюдаемое различие амплитуд связано с ошибкой измерений или разницей в величинах γ в том же порядке. Полученный результат позволяет думать о большой степени однородности природы вещества по лунной поверхности.

Измерения распределения радиоизлучения по диску Луны на волнах $\lambda = 0,8$ и 2 см , выполненные в [7,8], указывают (по характеру изофот) на отсутствие значительных отличий в амплитуде колебаний радиотемпературы для лунных морей и материков, что говорит о тождественности электрических свойств их вещества. Имеющиеся в на-

стоящее время данные говорят в пользу большой однородности природы и свойств вещества по всему диску Луны при усреднении по площади в 1 ± 3 угловых минуты. Значительной разницы в свойствах вещества морей и материков пока не обнаруживается. Для точных количественных определений электрических свойств вещества лунных морей и континентов необходимо проведение специальных измерений фазового хода их радиоизлучения и величины γ .

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. С. Троицкий, Астрон. ж., 39, 73 (1962); Изв. Комиссии по физике планет, № 3, 1961.
- 2 В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, 1057 (1962).
- 3 J. J. Gilvaragi, Astroph. J., 127, 751 (1958).
- 4 В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, 885 (1962).
- 5 J. M. Saage, R. W. Shorthill, Boeing Scient. Res. Lab., July, 1962.
- 6 А. Г. Кисляков, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 6, 431 (1963).
- 7 А. Е. Саломонович, Астрон. ж., 39, 79 (1962).
- 8 А. Е. Саломонович, В. Н. Кащенко, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 4, 591 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 февраля 1963 г

О ПОТОКЕ ТЕПЛА ИЗ НЕДР ЛУНЫ

В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий

В 1961—62 гг. в НИРФИ на основании разработанного метода [1] проведены прецизионные измерения радиоизлучения Луны на волнах 0,4 см [2], 1,6 см [3], 3,2 см [1,4], 10 см [5], 35 см [6]. Полученные экспериментальные результаты показывают систематический, почти линейный, рост средней по диску эффективной температуры с длиной волны, существенно превосходящий ошибки измерений (например, на волне 3,2 см $\bar{T}_L = 211^\circ\text{K}$, а на волне 35 см $\bar{T}_L = 237^\circ\text{K}$). Поскольку с ростом длины волны растет толщина излучающего слоя, то рост эффективной температуры с длиной волны свидетельствует о наличии роста температуры вглубь Луны. Другие причины, как показал анализ, не могут объяснить полученные результаты. На основании расчета [7] и полученных точных данных радиотемпературы проведены оценки плотности потока тепла из недр Луны. Оказалось, что

$$q = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ кал см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Это соответствует градиенту температуры

$$\text{grad } T(y) = 1,6 \text{ град} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Полученное значение плотности потока тепла почти в 5 раз превышает существующие теоретические оценки [8,9] и свидетельствует о более высокой радиоактивности лунных пород, чем принималось в соответствующих расчетах [8,9], исходивших из хондритного состава лунных пород.

Полный поток тепла за год, как нетрудно найти, равен

$$Q = 1,6 \cdot 10^{19} \text{ кал} \cdot \text{год}^{-1}.$$

Если предположить, что все выделяющееся количество тепла обусловлено распадом радиоактивных элементов, то на один грамм вещества Луны выделяется $2,2 \cdot 10^{-7} \text{ кал} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{год}^{-1}$ радиогенного тепла. Эта величина соответствует в 4 ± 5 раз более высокой концентрации радиоактивных элементов, чем в каменных метеоритах. Предполагая, что на Луне, как и на Земле, основная масса радиоактивных элементов сосредоточена в поверхностном слое, толщиной $5 \pm 60 \text{ км}$, можно определить, что температура на этой глубине должна быть около 1000°K . Глубже температура, очевидно, меняться не будет. Более равномерному распределению радиоактивных изотопов по объему Луны соответствует более высокая температура ее недр. Подробные результаты этой работы будут изложены нами позднее [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1004 (1961).
2. А. Г. Кисляков, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
3. С. А. Каменская, Б. И. Семенов, В. С. Троицкий, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 882 (1962).
4. Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, В. А. Порфириев, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 802 (1962).
5. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 604 (1962).
6. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 242 (1963).
7. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 602 (1962).
8. G. I. T. Mc Donald, J. Geophys. Res., 64, 1967 (1959).
9. Б. Ю. Левин, С. В. Маева, ДАН СССР, 133, 44 (1960).
10. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж. (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 февраля 1963 г

О РОЛИ СТАТИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

B. B. Железняков и E. Я. Злотник

В статье [1] было рассмотрено в гидродинамическом приближении взаимодействие электромагнитных и плазменных волн в изотропной плоскостной плазме. Исходными при этом являются, как известно, уравнения Максвелла и уравнения движения электронов:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}; \quad \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \text{div} (N\dot{\mathbf{r}}) = 0; \quad (1)$$

$$mN\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa T_V N + eN\mathbf{E} - mNv_{\text{эфф}}\dot{\mathbf{r}} \quad (2)$$

(здесь и везде ниже обозначения те же, что и в [1]). В случае, когда волны отсутствуют, уравнение (2) описывает статические поля в плазме:

$$\kappa T_V N_0 = eN_0\mathbf{E}_0, \quad (3)$$

где \mathbf{E}_0 — внешнее статическое поле, которое создает распределение электронов $N_0(z)$.

В статье [1] и ряде других работ [2—5], однако, поле \mathbf{E}_0 не принималось во внимание при исследовании распространения волны в плазме*. В настоящей заметке мы рассмотрим уравнения с учетом этого поля и проанализируем под таким углом зрения результаты работ [1, 5].

Обозначая волновые компоненты поля и концентрации через \mathbf{E}' и N' и считая их малыми по сравнению с \mathbf{E}_0 и N_0 , получим из (2) линеаризованное уравнение:

$$mN_0\ddot{\mathbf{r}} + \kappa T_V N' - eN'\mathbf{E}_0 - eN_0\mathbf{E}' + mN_0v_{\text{эфф}}\dot{\mathbf{r}} = 0. \quad (4)$$

Член $eN'\mathbf{E}_0$ учитывает работу, совершающую колеблющимся под действием волны электроном против статического поля \mathbf{E}_0 .

Ограничивааясь исследованием волн с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения, можно показать, что система (1) сводится к следующей:

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \frac{de'/dz}{\epsilon' - q_0^2} \left(1 + \frac{q_0^2}{1 - \epsilon'} \right) \frac{dW}{dz} + k_0^2 \left(\epsilon' - \frac{q_0^2}{\beta_T^2} \right) W =$$

$$= \frac{q_0\beta_T}{\epsilon' - q_0^2} \frac{de'/dz}{1 - \epsilon'} \frac{dU}{dz}; \quad (5)$$

* Правильные уравнения для электромагнитных и плазменных волн в неоднородной плазме были получены в статье Тидмана [6]. На это обстоятельство обратил наше внимание А. А. Андронов.

$$\begin{aligned} \beta_T^2 \frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{\epsilon' \beta_T^2}{1 - \epsilon'} \frac{d\epsilon'/dz}{\epsilon' - q_0^2} \frac{dU}{dz} + k_0^2 (\epsilon' - q_0^2) U = \\ = - \frac{q_0 \beta_T}{\epsilon' - q_0^2} \frac{d\epsilon'/dz}{1 - \epsilon'} \frac{dW}{dz} - k_0^2 \frac{q_0}{\beta_T} W. \end{aligned} \quad (6)$$

Соотношения (5)–(6) представляют собой систему связанных уравнений второго порядка, которые при нормальном падении ($q_0 = 0$) разделяются и описывают электромагнитную и плазменную волны, распространяющиеся независимо одна от другой.

Необходимо отметить, что в этом случае (при продольном распространении) уравнение для плазменной волны, в отличие от [1–5], имеет вид:

$$\frac{d^2 U}{dz^2} + \frac{d\epsilon'/dz}{1 - \epsilon'} \frac{dU}{dz} + \frac{k_0^2 \epsilon'}{\beta_T^2} U = 0. \quad (7)$$

Решение этого уравнения в приближении геометрической оптики выглядит следующим образом:

$$U = \text{const} \frac{(1 - \epsilon')^{1/2}}{(\epsilon')^{1/4}} e^{\pm i k_0 \int (V_{\epsilon} / \beta_T) dz}. \quad (8)$$

Согласно [1], в квазигидродинамическом приближении средняя плотность потока энергии в плазменной волне, имеющей амплитуду электрического поля E_0 пл.,

$$\bar{S}_{\text{пл}} = \frac{c \sqrt{\epsilon'}}{8\pi} \frac{\beta_T}{1 - \epsilon'} E_0^2 \text{ пл.}$$

Подставляя сюда в качестве E_0 пл выражение (8) для U , легко убедиться, что плотность потока энергии не зависит от координаты, в то время как уравнения работ [1–5] приводили к отсутствию множителя $(1 - \epsilon')^{1/2}$ в (8) и к невыполнению закона сохранения энергии.

Уравнение (5) отличается от соответствующего уравнения (1.4) в [1] только членом $\frac{d\epsilon'/dz}{\epsilon' - q_0^2} \frac{q_0^2}{1 - \epsilon'} \frac{dW}{dz}$ и множителем $(1 - \epsilon')^{-1}$ в правой части. Но в приближении статьи [1] $\epsilon' \ll 1$, $q_0^2 \ll 1$ и указанные члены фактически не влияют на решение уравнения (5). Появление в уравнении (6) членов $\frac{\epsilon' \beta_T^2}{1 - \epsilon'} \frac{d\epsilon'/dz}{\epsilon' - q_0^2} \frac{dU}{dz}$ и $-\frac{q_0 \beta_T}{\epsilon' - q_0^2} \frac{d\epsilon'/dz}{1 - \epsilon'} \frac{dW}{dz}$,

которые становятся большими при ϵ' , близком к q_0^2 , может, вообще говоря, существенно изменить поведение решения, особенно в окрестности точки $\epsilon' = q_0^2$.

Нетрудно показать, однако, что наличие поглощения в плазме может привести к тому, что влиянием указанных членов на поведение решения можно пренебречь. В самом деле, рассматривая линейный слой ($\epsilon' = -a_0 z - is$) и производя замену переменного $\xi = a_0 z + is + q_0^2$, преобразуем уравнение (6) к виду:

$$\beta_T^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} + \frac{\beta_T^2}{\xi} \frac{q_0^2 - \xi}{1 - q_0^2 + \xi} \frac{dU}{d\xi} - \rho^2 \xi U = - \frac{q_0 \beta_T}{1 - q_0^2 + \xi} \frac{dW}{d\xi} - \rho^2 \frac{q_0}{\beta_T} W. \quad (9)$$

Для того, чтобы решение уравнения (9) без правой части выражалось, как и в [1], через функции Эйри $u(\zeta)$ и $v(\zeta)$ ($\zeta = (\rho/\beta_T)^{2/3} \xi$), необходимо выполнение следующего неравенства:

* То обстоятельство, что дополнительные члены мало влияют на решение уравнения (5), описывающего поперечное поле, и существенно изменяют вид уравнения (6), которому подчиняется продольная компонента электрического поля, довольно очевидно из физических соображений.

$$\left| \frac{\beta_T^2}{\xi} \frac{q_0^2 - \xi}{1 - q_0^2 + \xi} \frac{dv(\zeta)}{d\xi} \right| \ll |\rho^2 \xi v(\zeta)|. \quad (10)$$

Если подставить сюда $\xi \sim is$, при котором левая часть максимальна, и учесть, что $dv(\zeta)/d\xi \sim v(\zeta)$, то получим:

$$\sqrt{\frac{s^2}{q_0^4 + s^2}} \gg \left(\frac{\beta_T}{\rho} \right)^{4/3}. \quad (11)$$

В условиях солнечной короны ($\omega \sim 2\pi 10^8$ сек $^{-1}$, $\rho \sim 10^8$ и $\beta_T \sim 10^{-2}$) указанное неравенство выполняется при $s \gg 10^{-10}$ (при оценках величина q_0 определяется соотношением $\rho q_0^3 \beta_T^{-3} \sim 1$; именно такие углы обеспечивают эффективную трансформацию волн). Можно показать, что при таком поглощении полученные в [1] пределы применимости приближенных решений также остаются верными.

Следует оговориться, что поглощение не может быть и очень большим ($s \ll 2 \cdot 10^{-7}$), так как в противном случае приближение геометрической оптики для плазменной волны не нарушается ни в одной точке на действительной оси в плоскости ϵ' . Таким образом, в условиях солнечной короны при $s \sim 10^{-8}$ ($\gamma_{\text{эфф}} \sim 6$ сек $^{-1}$) учет статического поля не меняет характера и величины взаимодействия плазменных и электромагнитных волн.

В статье [5], посвященной взаимодействию нормальных волн в неоднородной магнитоактивной плазме, учет статического поля также приведет к изменению амплитуды волны в приближении геометрической оптики. Опуская промежуточные выкладки, запишем линеаризованную систему для функций F_1 , F_2 и F_3 (смысл всех обозначений см. в [5]):

$$\begin{aligned} F'_1 + \rho^2 (PF_1 - QF_2 + KF_3) &= 0; \\ F'_2 + \rho^2 (PF_2 - QF_1 + VF_3) &= 0; \\ \beta_T^2 F'_3 + \beta_T^2 (1 - \epsilon)^{-1} F'_3 + \rho^2 [LF_3 + (1 - \epsilon) KF_1 + (1 - \epsilon) VF_2] &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Эта система отличается от соответствующей системы (1.10) в [5] только членом $\beta_T^2 (1 - \epsilon)^{-1} F'_3$ в последнем уравнении.

Отыскивая решение в виде $F_1 = e^{i\rho \int n d\epsilon + R}$, вместо (1.22) [5] получим:

$$R' = -\frac{n'}{2n} + \frac{T'_{11}}{2T_{11}} - \frac{T'_{11} + T'_{22} + \beta_T^2 T'_{33}}{2(T_{11} + T_{22} + \beta_T^2 T_{33})}. \quad (13)$$

Однако при рассмотрении взаимодействия волн методом фазовых интегралов интерес представляет только интеграл от R' по контуру, охватывающему точку неприменимости геометрической оптики. Интеграл от дополнительного слагаемого, которое фигурировало в соотношении (1.22) [5], равен нулю, и, следовательно, указанное изменение амплитуды волны совершенно не скажется на результатах статьи [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков и Е. Я. Злотник, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, 644 (1962).
2. Н. Г. Денисов, Диссертация, Горький, ГГУ, 1954.
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
4. В. В. Железняков, Радиотехника и электроника, 1, 840 (1956).
5. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 4, 32 (1958).
6. D. A. Tidman, Phys. Rev., 117, 866 (1960).

ВЫРАЖЕНИЕ ГЛУБИНЫ МОДУЛЯЦИИ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ДЛЯ ИСТОЧНИКОВ, ИМЕЮЩИХ ФОРМУ ЭЛЛИПСА

B. I. Арискин

В радиоастрономических исследованиях широкое применение находит радиоинтерференционный метод [1,2]. С его помощью исследуются диаметры источников радиоизлучения [3–5], изучается распределение радиояркости по диску Солнца, определяются размеры радиогалактик, исследуется сверхкорона Солнца [6,7] и т. д. При этом измерения дают величину MJ , где M —глубина модуляции, а J —интенсивность источника. Для получения по этим данным размера источника необходимо задаться определенной формой распределения радиояркости по источнику. До настоящего времени соответствующие зависимости размера от величины M были рассчитаны для полоски, кольца и диска с равномерным распределением интенсивности [1]. Однако в практике работ ощущается потребность по данным наблюдений оценить не один, а несколько параметров. В частности, представляется целесообразным рассмотреть вопрос о связи глубины модуляции с размерами в случае источника, имеющего эллиптическое распределение радиояркости. В настоящей заметке рассматривается указанный вопрос.

Если исследуемый радиоисточник имеет форму эллипса и распределение радиояркости по нему характеризуется законом $e^{-(x^2/a^2+y^2/b^2)}$, то функцию распределения радиояркости, зависящую от большой и малой полуосей эллипса a, b , а также от угла наклона базы интерферометра относительно осей эллипса ψ , можно представить в виде

$$B(x', a, b, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x' \cos \psi - y' \sin \psi)^2}{a^2} - \frac{(x' \sin \psi + y' \cos \psi)^2}{b^2} \right] dy'. \quad (1)$$

Интегрируя (1), находим

$$B(x', a, b, \psi) = \left(\frac{\pi a^2 b^2}{b^2 \sin^2 \psi + a^2 \cos^2 \psi} \right)^{1/2} e^{-x'^2 / (b^2 \sin^2 \psi + a^2 \cos^2 \psi)}. \quad (2)$$

Если источник протяженный, то для интерференционных систем, состоящих из двух антенн, можно считать, что в пределах протяженности наблюдаемого объекта по одному из направлений диаграмма не изменяется. Тогда мощность поступающая на вход радиоприемного устройства,

$$P(x) = \int B(x') F(x' + x) dx', \quad (3)$$

где $B(x')$ —функция распределения радиояркости по направлению x' , $F(x' + x)$ —диаграмма по мощности, которую при синусоидальном виде можно представить так:

$$F(x') = 1 + \cos \left(2\pi \frac{x'}{\Delta\varphi} \right). \quad (4)$$

В соответствии с (4), мощность на входе будет иметь вид

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(x') dx' + \int_{-\infty}^{\infty} B(x') \cos \left(2\pi \frac{x' + x}{\Delta\varphi} \right) dx'. \quad (5)$$

Подставляя в (5) значение функции распределения яркости, проинтегрированной по одному направлению (2), и интегрируя, получим:

$$P(x) = \pi ab \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi x}{\Delta\varphi} \exp \left[-\frac{\pi^2}{\Delta\varphi^2} (b^2 \sin^2 \psi + a^2 \cos^2 \psi) \right] \right\}. \quad (6)$$

Исходя из выражения глубины модуляции

$$M = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{P_{\max} + P_{\min}} \quad (7)$$

и учитывая, что

$$P_{\max} = \pi ab \left\{ 1 + \exp \left[-\frac{\pi^2}{\Delta\varphi^2} (b^2 \sin^2 \psi + a^2 \cos^2 \psi) \right] \right\};$$

$$P_{\min} = \pi ab \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{\pi^2}{\Delta\varphi^2} (b^2 \sin^2 \psi + a^2 \cos^2 \psi) \right] \right\}, \quad (8)$$

получим:

$$M = \exp \left\{ -\pi^2 \left[\frac{b^2 \sin^2 \psi}{\Delta\varphi^2} + \frac{a^2 \cos^2 \psi}{\Delta\varphi^2} \right] \right\}. \quad (9)$$

В частном случае, когда эллипс представляет собой окружность, глубина модуляции

$$M = e^{-\pi^2 a^2 / \Delta\varphi^2}. \quad (10)$$

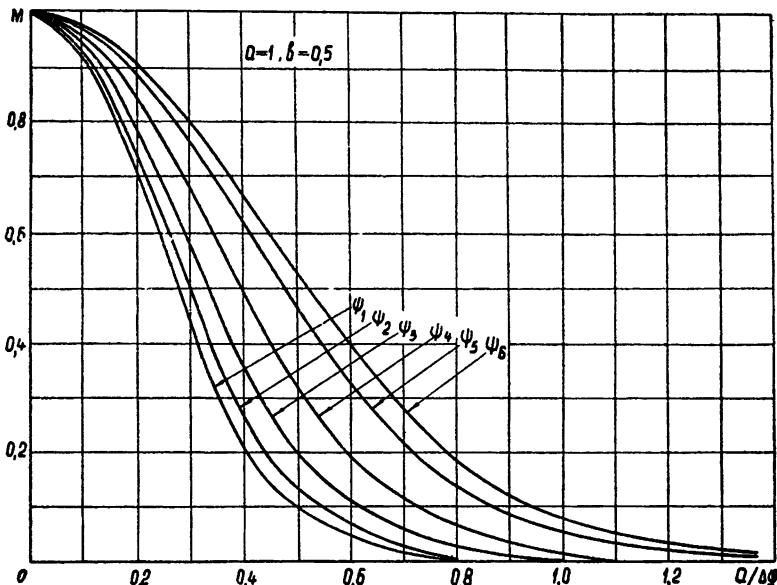


Рис. 1. $\psi_1 = 15^\circ$, $\psi_2 = 30^\circ$, $\psi_3 = 45^\circ$, $\psi_4 = 60^\circ$, $\psi_5 = 75^\circ$, $\psi_6 = 90^\circ$.

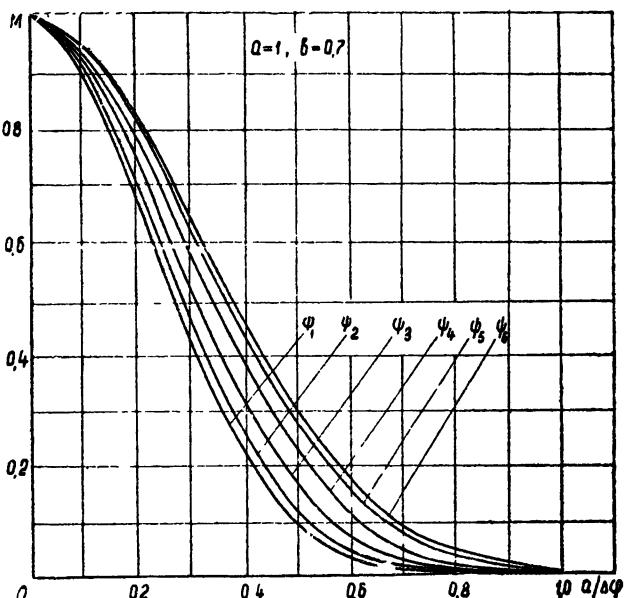


Рис. 2. Значения $\psi_1 \div \psi_6$ — те же, что и на рис. 1.

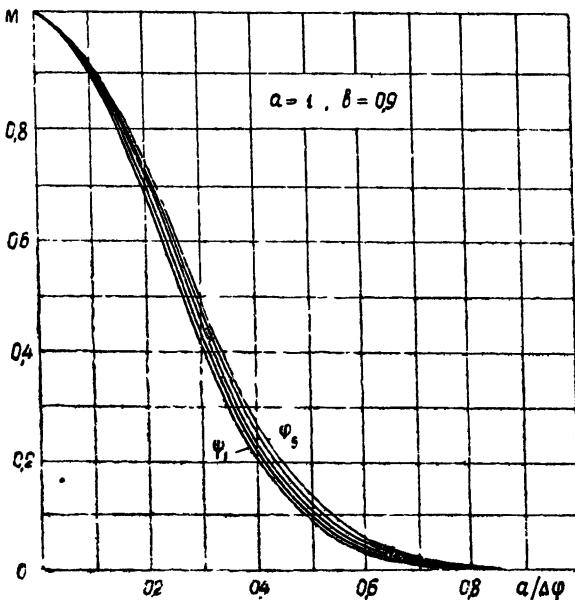
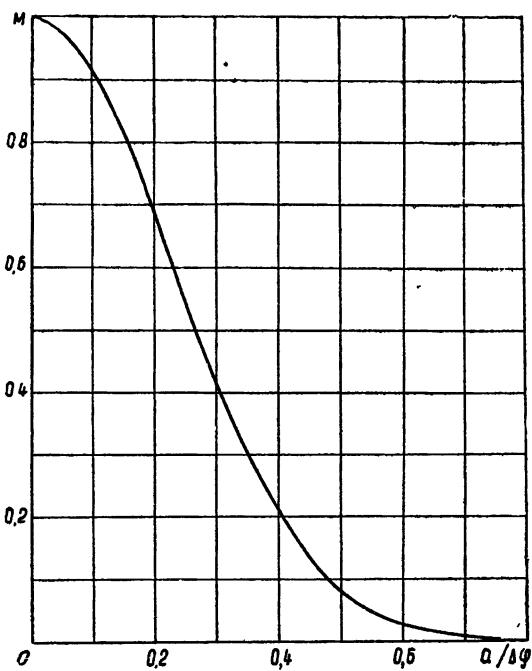
Рис. 3. Значения $\psi_1 \div \psi_6$ — те же, что и на рис. 1.

Рис. 4.

График зависимости (10) приводится на рис. 4. На рис. 1—3 даны графики зависимости глубины модуляции от ширины лепестка интерференции и угла наклона базы интерферометра при трех размерах эллипса. При этом ширина лепестка берется в отношении одной из полуосей эллипса (большой полуоси a), принятой здесь за единицу.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Виткевич, Астрон. ж., 29, 450 (1952).
2. M. Rytle, Vistas in Astronomy, 1, London—New-York, 1955, p. 532.
3. В. В. Виткевич, Астрон. ж., 34, 349 (1957).
4. R. N. Bales, Proc. IRE, 46, 97 (1958).
5. M. Rytle, P. A. G. Scheeleg, Proc. Roy. Soc., 230, 1183 (1955).
6. В. В. Виткевич, ДАН СССР, 101, 429 (1955).
7. В. В. Виткевич, Астрон. ж., 35, 52 (1958).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
26 ноября 1962 г.

О СЛАБОЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

В. П. Силин

Важная особенность плазмы, отличающая ее от обычных газов, проявляется в существовании бесстолкновительных диссипативных процессов, связанных с испусканием и поглощением волн. В плазме без сильных полей такие процессы связаны с черенковским поглощением. Влияние черенковского поглощения оказывается существенным для кинетики плазмы. На черенковском поглощении базируются попытки построения теории турбулентности плазмы.

С другой стороны, обычно рассматривается теория поглощения плазменных колебаний лишь для пространственно однородного случая. Реальная плазма практически всегда пространственно неоднородна. В связи с этим в настоящем сообщении изложены результаты теории слабозатухающих собственных колебаний неоднородной плазмы.

В условиях, когда характерный размер неоднородности велик по сравнению с «длиной волны», применимо приближение геометрической оптики. Особенно прост случай одномерной неоднородности (вдоль оси x) и волн, распространяющихся в направлении неоднородности. Тогда для высокочастотных ленгмюровских волн максвелловской плазмы, пренебрегая поглощением, имеем уравнение второго порядка, спектр которого определяется квазиклассическим правилом квантования

$$\int dx k_x(\omega, x) = \pi n. \quad (1)$$

Здесь n —целое число, значительно превышающее единицу,

$$k_x^2(\omega, x) = \frac{\epsilon}{3x}, \quad \epsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2(x)}{\omega^2}, \quad \alpha = \frac{\omega_{Le}^2(x)}{\omega^4} \frac{x T_e(x)}{m}, \quad \omega_{Le}^2 = \frac{4\pi e^2 N_e(x)}{m},$$

а интегрирование ведется по области прозрачности, где $k_x^2 > 0$.

Рассматривая диссипативные эффекты как малые и развивая соответствующую теорию возмущений, получаем для коэффициента затухания ленгмюровских колебаний следующее выражение *:

$$\gamma = - \left[\int dx \frac{\partial k_x(\omega, x)}{\partial \omega} \right]^{-1} 2(\pi e)^2 \omega \int dx \int dp \frac{\partial f_0(x, E)}{\partial E} \frac{\delta(\omega - k_x(\omega, x)v_x)}{k_x(\omega, x) \epsilon(\omega, x)} \quad (2)$$

($f_0(x, E)$ —равновесная функция распределения, зависящая от координат и энергии E частиц). В частности, для плазмы с однородной температурой и плотностью, меняющейся в малой области вблизи $x=0$ по закону $N(x)=N(0)[1+(x/d)^2]$, где $x \ll d$, формулы (1) и (2) дают:

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2(0) \left[1 + \sqrt{3} \frac{r_D(0)}{d} (2n+1) \right], \quad (3)$$

* При этом в качестве нулевого приближения используются собственные функции уравнения

$$\epsilon E^l + 3 \frac{d^2}{dx^2} (\alpha E^l) \equiv 0.$$

$$\gamma = \omega \frac{3\sqrt{3}d}{2r_D(0)(2n+1)} \exp \left\{ -\frac{\sqrt{3}d}{2r_D(0)(2n+1)} - \frac{3}{2} \right\},$$

где $r_D(0) = \sqrt{\kappa T_e(0)/4\pi e^2 N(0)}$ и $d \gg (2n+1)r_D(0)$. Аналогично для неизотермической плазмы с температурой электронов T_e , много большей температуры ионов T_i , спектр низкочастотных колебаний определяется формулой (1) лишь с иным k_x , а именно:

$$k_x^2(\omega, x) = \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2(x) - \omega^2} \frac{1}{r_D^2(x)}.$$

Для получения соответствующего декремента можно использовать формулу (2), заменив в ней k_x , а также подставить вместо ϵ величину $1 - \omega_{Li}^2/\omega^2$ и просуммировав по электронам и ионам (ср. формулу (5)). Заметим, что для звукового спектра ($\omega^2 \ll \omega_{Li}^2$) из формулы (1) следует:

$$\omega^2 = (\pi n)^2 \left[\int dx / V_s(x) \right]^{-2}, \quad (4)$$

где $V_s(x)$ — локальная скорость звука ($V_s^2(x) = |e_i/e| \kappa T_e(x) / M_i$).

Для волн, распространяющихся под углом к направлению неоднородности, математическая сторона дела несколько усложняется. Однако получающиеся результаты во многом аналогичны изложенным. Так, для высокочастотных ленгмюровских колебаний снова можно пользоваться формулами (1) и (2), полагая в них $k_x = \sqrt{(\epsilon/3x) - k_\perp^2}$, где $k_\perp^2 = k_y^2 + k_z^2$. Кроме того, в формуле (2) в аргументе δ -функции вместо $k_x v_x$ должно быть $k \mathbf{v}$. В случае низкочастотных колебаний неизотермической плазмы спектр определяется соотношением (1), в котором

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{\omega_{Li}^2(x) - \omega^2} \frac{1}{r_D^2(x)} - k_\perp^2,$$

Для коэффициента затухания имеет место формула:

$$\gamma = - \left[\int dx \frac{\partial k_x}{\partial \omega} \right]^{-1} \int \frac{dx}{k_x} \frac{2\pi^2 \omega^3}{\omega_{Li}^2 - \omega^2} \sum e^2 \int dp \frac{\partial f_0(x, E)}{\partial E} \delta(\omega - k \mathbf{v}). \quad (5)$$

Для звукового спектра ($\omega^2 \ll \omega_{Li}^2$) из (1) получаем:

$$\int dx \sqrt{[\omega/V_s(x)]^2 - k_\perp^2} = \pi n. \quad (6)$$

Отсюда вытекает анизотропия скорости звука в плазме. Для звука и в условиях, когда электронное поглощение является основным, отношение коэффициента затухания к частоте оказывается не зависящим от неоднородности и равным $\sqrt{(\pi/8)|e_i/e|(m/M)}$.

Из формул (2), (5) видно, что поскольку в разных точках неоднородной плазмы „фазовая скорость“ волн оказывается различной, то в каждой точке волна „отыскивает“ подходящие резонансные частицы, способные поглощать колебания.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
30 ноября 1962 г.

ОБ УСКОРЕНИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПЛАЗМЕНИМИ ВОЛНАМИ

B. N. Цытович

В работах [1,2] (см. также [3]) показано, что при наличии плазменных волн изменение начальной функции распределения частиц плазмы приводит к появлению квазиравновесного „плата“. Этот результат следует из одномерной модели. Мы хотим здесь обратить внимание на то обстоятельство, что в трехмерном случае ситуация может быть существенно иной. В частности, могут отсутствовать квазиравновесные состояния, а „хвост“ начального распределения будет ускоряться плазменными волнами.

Качественно это можно пояснить, пользуясь черенковским условием $\omega = kv \cos \Theta$ или $v = v_\Phi / \cos \Theta$. В одномерном случае $\Theta=0$ и с плазменными волнами взаимодействуют лишь те частицы, скорости которых равны v_Φ . Если плазменные волны присутствуют в интервале $v_{\Phi_1} < v < v_{\Phi_2}$, то лишь в этом интервале деформируется функция распределения и образуется плато. В трехмерном случае с волнами v_Φ взаимодействуют все частицы, имеющие $v > v_\Phi$, т. е. волны видоизменяют весь хвост функции распределения.

Рассмотрим следующий конкретный пример. Функция распределения частиц f зависит лишь от v^2 или $\epsilon = m(1-v^2)^{-1/2}$; функция распределения плазменных волн N зависит лишь от модуля k и начальный момент не равна нулю лишь в интервале $v_{\Phi_1} < \omega/k < 1$, таком, что декремент затухания волн $\gamma_k \ll \omega$. Изменения N и f во времени описываются уравнениями*:

$$\frac{\partial f(\epsilon, t)}{\partial t} = \frac{1}{v\epsilon^2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[v \epsilon^2 D(v) \frac{\partial f(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} \right]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial N(v_\Phi, t)}{\partial t} = -\gamma(v_\Phi, t) N(v_\Phi, t) + q(v_\Phi, t), \quad (1a)$$

где $D=0$ при $v < v_{\Phi_1}$, а при $v > v_{\Phi_1}$

$$D(v) = \frac{e^2 \omega_0^3}{v} \int_{v_{\Phi_1}}^v N(v_\Phi, t) \frac{dv_\Phi}{v_\Phi}; \quad (2)$$

$$\gamma(v_\Phi, t) = -\frac{e^2}{\omega_0} v_\Phi^3 \int_{\epsilon_\Phi}^\infty \frac{\partial f(\epsilon, t)}{\partial \epsilon} \epsilon^2 d\epsilon; \quad \epsilon_\Phi = \sqrt{\frac{m}{1-v_\Phi^2}} \quad (3)$$

($\omega_0^2 = 4\pi ne^2/m$; $q(v_\Phi, t)$ —внешний источник плазменных волн). Уравнения (1)–(3) получены в общем случае и для релятивистских скоростей частиц при условии $v_\Phi \gg v_T$ — средней тепловой скорости электронов. Из (1)–(3) следует закон сохранения энергии:

$$4\pi \int v \epsilon^3 f(\epsilon, t) d\epsilon + 4\pi \int_{v_{\Phi_1}}^{\omega_0^4/v_\Phi^4} N(v_\Phi, t) dv_\Phi = W_\epsilon + W_{\text{кол}} = \text{const}. \quad (4)$$

Выделим группу частиц с энергией от ϵ_Φ до $\epsilon_\Phi + \Delta\epsilon$, причем $\Delta\epsilon$ порядка ϵ_Φ . Характерное время ускорения этой группы, согласно (1), $\tau = \epsilon_\Phi^2/D$. Время затухания волн на этой группе

$$\tau' \sim \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{T}{\epsilon_\Phi} \right)^{3/2} e^{\epsilon_\Phi / T}.$$

Тогда $\tau' \gg \tau$ при $v_\Phi \sim 5v_T$, если $W_{\text{кол}} \approx 0.1 W_T$. Это значит, что заметное ускорение возможно уже при $v_{\Phi_1} > v_T$, но не очень больших по сравнению с v_T , причем N можно практически считать независящим от времени в течение ускорения **. Для нерелятивистских скоростей уравнение (1) с учетом кулоновских соударений и фермиевского ускорения имеет вид (см. [?]):

* Уравнения (1) легко получить, учитывая возможные процессы индуцированного черенковского излучения и поглощения волн [4] (см. также [1,5]), если для вероятности излучения плазмон воспользоваться выражением [6] ($c = 1$).

** При экспоненциально малом затухании достаточно очень слабого источника $q(v_\Phi, t)$ для поддержания N на неизменном уровне. Такими источниками могут служить разного рода неустойчивости плазмы, а также трансформация поперечных волн в продольные.

$$\frac{\partial f(u, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(u^{2\alpha_\Phi}(u) \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1+\alpha_{\text{пл}}(u)}{u} \frac{\partial f}{\partial u} + f \right), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} u &= v/v_T; \quad v_T = \sqrt{T/m}; \quad \tau = t v_0; \quad \alpha_\Phi(u) = \alpha_0^\Phi u; \\ u_\Phi &= \frac{v_\Phi}{v}; \quad \alpha_v^\Phi = \frac{2}{3} \frac{v_0^2}{v_0 L v_T}; \quad v_0 = \frac{e^2 \omega_0^2}{mv_T^3} \ln \frac{TD'}{e^2}; \\ \alpha_{\text{пл}} &= \frac{e^2 \omega_0^3}{m v_0 v_T^5} \int_{u_{\Phi_1}}^u N(u_\Phi, t) \frac{du_\Phi}{u_\Phi}, \end{aligned} \quad (6)$$

причем $\alpha_{\text{пл}}=0$ при $u < u_{\Phi_1}$. Если $\alpha_\Phi=0$, имеется равновесное решение

$$f = \begin{cases} n \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-u^2/2} & \text{при } u < u_{\Phi_1} \\ n \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-u_{\Phi_1}^2/2} \exp \left\{ - \int_{u_{\Phi_1}}^u \frac{u du}{1 + \alpha_{\text{пл}}(u)} \right\} & \text{при } u > u_{\Phi_1} \end{cases}. \quad (7)$$

Здесь использована нормировка $\int_0^\infty f u^2 du = n$ и учтено, что в силу $u_{\Phi_1} \gg 1$ основной вклад в нормировочный интеграл дают $u < u_{\Phi_1}$.

Существенно, что ускорение плазменными волнами не искажает максвелловского распределения при $u < u_{\Phi_1}$. Наличие стационарного состояния при ускорении обусловлено тем, что темп ускорения падает с ростом скорости и при определенных скоростях столкновения начинают доминировать. При $u > u_{\Phi_1}$ характер спектра определяется $N=N(u_\Phi)$; при $N(u_\Phi) \sim u_\Phi^2$ спектр частиц становится степенным. Если спектр плазменных волн обрывается при $u=u_{\Phi_2}$, то при $u > u_{\Phi_2}$ имеем:

$$\begin{aligned} f &= n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left\{ - \frac{u_{\Phi_1}^2}{2} - \int_{u_{\Phi_1}}^{u_{\Phi_2}} \frac{u du}{1 + \alpha_{\text{пл}}(u)} - \frac{u^2}{2(1+\alpha)} \right\}; \\ \alpha &= \frac{e^2 \omega_0^3}{m^2 v_0 v_T^5} \int_{u_{\Phi_1}}^{u_{\Phi_2}} N(u_\Phi) \frac{du_\Phi}{u_\Phi} \simeq \frac{\omega_0}{T \ln(TD/e^2)} \int_{u_{\Phi_1}}^{u_{\Phi_2}} N(u_\Phi) \frac{du_\Phi}{u_\Phi}. \end{aligned}$$

Если $\Delta u_\Phi = u_{\Phi_2} - u_{\Phi_1}$ порядка u_Φ и можно $N(u_\Phi)$ считать примерно постоянным в этом интервале фазовых скоростей, то, полагая $N(u_\Phi) = T_{\text{эфф}}/\omega_0$, получим $\alpha \simeq T_{\text{эфф}}/\omega_0$. Другими словами, при $u > u_{\Phi_2}$ получим максвелловское распределение с $T \simeq T_{\text{эфф}}$ ($1 \ll T_{\text{эфф}}/T \ll n v_\Phi^3 / 4\pi \omega_0^3$).

При действии фермиевского ускорения $\alpha_\Phi \neq 0$ и появляется поток убегающих частиц. Его значение при наличии ускорения плазменными волнами будет существенно иным (см. [7]):

$$\frac{dn}{dt} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} n v_0 \exp \left\{ - \frac{\pi}{4 \sqrt{\alpha_{\text{пл}} \alpha_0^\Phi}} \right\}; \quad \alpha_{\text{пл}} \alpha_0^\Phi \ll 1; \quad \alpha_{\text{пл}} \gg 1; \quad \alpha_0^\Phi u_{\Phi_1}^2 \ll 1. \quad (8)$$

Эта формула получена также в предположении $\alpha_{\text{пл}}=0$ при $u < u_{\Phi_1}$, и $\alpha_{\text{пл}} = \text{const}$ при $u > u_{\Phi_1}$. Она правильно описывает поток dn/dt в случае, когда волны присутствуют в некоторой окрестности Δu_{Φ} около u_{Φ_1} и $\Delta u_{\Phi} \ll u_{\Phi_1}$. Наличие плазменных волн существенно увеличивает поток убегающих частиц.

Полученные результаты могут иметь приложение к ряду проблем. В качестве примера укажем на хромосферные вспышки (особенно вспышку 23 февраля 1958 г. *).

В случае релятивистских частиц в уравнении (1) можно выделить систематическое и флюктуационное ускорение плазменными волнами. Вводя $n(\epsilon, t)$ из $n(\epsilon, t) d\epsilon = f(\epsilon, t) \times 4\pi r^2 dp$, $f(\epsilon, t) \approx n(\epsilon, t) / 4\pi \epsilon^2$, имеем:

$$\frac{\partial n(\epsilon, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(\epsilon, t)}{\partial \epsilon^2} - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{2D}{\epsilon} n(\epsilon, t); \quad D = e^2 \omega_0^3 \int_{v_{\Phi_1}}^1 N(v_{\Phi}) \frac{dv_{\Phi}}{v_{\Phi}}. \quad (9)$$

В [4,6] рассматривалось систематическое ускорение, т. е. коэффициент диффузии в уравнении типа (1).

Автор признателен В. П. Силину и А. В. Гуревичу за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Веденов, Атомная энергия, 13, 5 (1962).
2. А. А. Веденов, Е. Л. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 82 (1961).
3. Ю. Л. Климонтович, ДАН СССР, 144, 1022 (1962).
4. В. Н. Цытович, ДАН СССР, 142, 319 (1962).
5. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ, 42, 552 (1962).
6. В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 42, 803 (1962).
7. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 38, 1597 (1960).
8. Л. И. Дорман, Вариации космических лучей, Гостехиздат, М., 1957.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
29 января 1963 г.

КОДЫ С КОРРЕКЦИЕЙ ОШИБОК

Ал. А. Марков

В этой заметке приводятся некоторые результаты исследования неравномерных кодов, имеющих свойство коррекции ошибок. Пусть слова в алфавите $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, представляющие собой сообщения, порождаемые некоторым источником, кодируются с помощью системы слов $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ в алфавите $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$. Преобразование $K(x)$ слов в алфавите X в слова в алфавите Y состоит в замене каждой буквы $x_i \in X$ в каждом ее вхождении в кодируемое сообщение x словом $u_i \in U$. Предположим, что при передаче возможны ошибки, заключающиеся в том, что одна или несколько букв кода сообщения переданы неправильно. В этом случае в задачу декодирующего устройства входит обнаружение и исправление ошибок в полученном коде. Нас будет интересовать вопрос, при каком условии система слов U допускает реализацию обратного преобразования K^{-1} в виде конечно-детерминированного оператора [1]. При этом предполагается, что задано некоторое число T , такое, что расстояние между двумя соседними ошибками в полученном коде не может быть меньше T (под расстоянием между буквами a_{i_k} и a_{i_l} в слове $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ понимается число $|l-k|$).

Множество всех слов в алфавите Y обозначим через $F(Y)$, множество всех слов, представимых в виде соединения слов из U , — через $F_U(Y)$, а префиксное множество

* Полагая, что плотность энергии плазменных волн $0,1 nkT$, для $u_{\Phi_1}=10$ получим $dn/dt \sim 10^3 + 10^4$, что соответствует наблюдениям. Одно лишь фермиевское ускорение дает $dn/dt \sim 10^{-1000}$. В связи с этим в [8] было предположено, что существенную роль может играть эффект Ферми первого порядка. Приведенная оценка показывает, что ускорение плазменными волнами также может быть привлечено для объяснения наблюдаемого dn/dt .

для $F_U(Y)$ (т. е. множество всех начальных отрезков слов из $F_U(Y)$)—через $prF_U(Y)$. Для слов $Y_1 = y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$ и $Y_2 = y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}$ одинаковой длины (длину слова Z в дальнейшем будем обозначать через $l(Z)$) определяем расстояние между ними:

$$d(Y_1, Y_2) = \sum_{s=1}^k \varphi(y_{i_s}, y_{j_s}),$$

где

$$\varphi(y_{i_s}, y_{j_s}) = \begin{cases} 1 & (y_{i_s} \neq y_{j_s}) \\ 0 & (y_{i_s} = y_{j_s}) \end{cases}.$$

Порядком независимости $H(U)$ системы слов U назовем наименьшее из чисел h , таких, что для некоторых слов $Y_1, Y_2 \in F_U(Y)$, допускающих различные представления в виде соединения слов из U , имеет место равенство $d(Y_1, Y_2) = h$. В работе [2] было установлено необходимое и достаточное условие, при котором $H(U) > 0$. Ниже дается эффективный способ нахождения $H(U)$, обобщающий упомянутый критерий.

Построение по заданной системе слов U конечного ориентированного взвешенного графа*, вершинами которого являются слова в алфавите Y , определяется следующими правилами.

1) Исходной вершиной является пустое слово Λ .

2) Вершина Λ соединяется с вершиной y ребром (Λ, y) , которому приписан вес r , в том и только в том случае, если для некоторых слов $u_i, u_j \in U$ и некоторого слова y' имеет место соотношение $u_i = y'u'$, причем $d(y', u_j) = r$.

3) Пусть из вершины Λ построен путь в вершину y . Вершину y соединяем с вершиной y' ребром (y, y') , которому приписан вес r , в том и только в том случае, если для некоторого слова y'' имеет место соотношение $y''y' = u_{i_1}, \dots, u_{i_p}$, где $l(y') < l(u_{i_p})$ и $d(y, y'') = r$.

Нетрудно убедиться, что число вершин графа, который мы обозначим через $G(U)$,

не превосходит $n - m + 1$, где $n = \sum_{i=1}^m l(u_i)$. Под весом пути в графе $G(U)$ понимается сумма всех весов ребер в последовательности, образующей путь. Вес пути S

будем обозначать через $w(S)$. Пусть $C_\Lambda(U)$ — множество всех циклов, проходящих через вершину Λ в графе $G(U)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.

$$H(U) = \min_{S \in C_\Lambda(U)} \{w(S)\}.$$

Возможен следующий подход к рассматриваемому вопросу. Систему слов U назовем инвариантной по отношению к h ошибкам, если $H(U) > 2h$. В этом случае h ошибок в коде сообщения всегда могут быть устраниены. Неудобство систем слов, имеющих это свойство, может заключаться в том, что допустимое число ошибок зависит для сообщения в целом, независимо от того, какова его длина. Кроме того, декодирование в этом случае, вообще говоря, не может быть реализовано с помощью конечно-детерминированного оператора. Описываемый ниже класс систем слов лишен обоих этих недостатков.

Скажем, что система слов U имеет свойство исправления ошибок с задержкой $T_{(U)}$, если 1) $H(U) \geq 3$; 2) ни одно из слов системы U не является началом другого слова из U ; 3) для любого слова вида $Y_1 y_i Y_2 y_j Y_3 \in prF_U(Y)$, такого, что $l(y_i Y_2 y_j Y_3) \geq T_{(U)}(Y_1, Y_2, Y_3 \in F(Y); y_i, y_j \in Y)$, при любых y_k и y_l ($k \neq i$) слово $Y_1 y_k Y_2 y_l Y_3 \in \partial prF_U(Y)$.

Теорема 2. Если система слов U имеет свойство исправления ошибки с задержкой $T_{(U)}$, то декодирование с исправлением ошибок (при условии, что расстояние между любыми двумя ошибками не меньше $T_{(U)}$) может быть осуществлено с помощью

конечно-детерминированного оператора, вес которого меньше или равен $N^{T_{(U)}}$.

Теорема 3. Пусть система слов U имеет свойство префикса и $H(U) \geq 3$. Для того, чтобы U имела свойство исправления ошибки с конечной задержкой, необходимо и достаточно, чтобы граф $G(U)$ не содержал ни одного цикла веса ноль, в который из вершины Λ возможен путь веса < 2 .

* Т. е. графа, ребрам которого приписаны некоторые числовые значения, называемые их весами.

Пусть Ω —множество всех путей в графе $G(U)$ с весом ≤ 2 , имеющих начало в вершине A . Легко видеть, что если U имеет свойство исправления ошибки с конечной задержкой, то множество Ω конечно.

Теорема 4. Если система U имеет свойство исправления ошибок с конечной задержкой, то

$$T_{(U)} \leq \max_{\{(s_1, s_2), \dots, (s_{k-1}, s_k)\} \in \Omega} \{l(s_1, s_2, \dots, s_k)\} + \max_{u_i, u_j \in U} |l(u_i) - l(u_j)|.$$

Опишем один прием, позволяющий строить большие системы слов со свойством исправления ошибок с конечной задержкой на базе небольших систем слов с этим свойством. Рассмотрим систему слов $U^n = \{v_{i_1, i_2, \dots, i_n} \mid 1 \leq i_s \leq m; 1 \leq s \leq n\}$, где $v_{i_1, i_2, \dots, i_n} = u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n}$. Система U^n содержит m^n слов. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Если система U имеет свойство исправления ошибки с конечной задержкой, то это же свойство имеет и система слов U^n , причем $T_{(U^n)} \leq T_{(U)} + \max_{u_i \in U} \{l(u_i)\} n - 1$.

Отметим, что к описанному классу кодов относятся и обычные равномерные коды с коррекцией ошибок [3]. Сравнение возможностей тех и других представляет собой пока нерешенную проблему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Глебский, Сб. Проблемы кибернетики, № 7, 127 (1962).
2. Ал. А. Марков, ДАН СССР, 132, 521 (1960).
3. Сб. Коды с обнаружением и исправлением ошибок, ИЛ, М., 1956.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 октября 1962 г.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

К. А. Барсуков любезно обратил внимание автора на ошибку в статье Н. А. Митякова „О частоте поля осциллятора, движущегося в анизотропной среде“, опубликованной в № 5 журнала за 1962 г. (стр. 892). В выражении для фазы волны осциллятора в анизотропной среде ошибочно предположено, что волновой вектор \mathbf{k} и радиус-вектор точки наблюдения \mathbf{r} параллельны (формула (1) статьи). Однако в анизотропной среде по \mathbf{r} направлен не вектор \mathbf{k} , а групповая скорость $d\omega/d\mathbf{k}$. Именно поэтому для частоты поля в точке наблюдения получается обычная формула Допплера без поправки $\frac{\partial n}{\partial \theta} \beta \sin \theta$, т. е.

$$\omega' \sqrt{1 - \beta^2} = \omega \left(1 - n \frac{V}{c} \cos \theta \right).$$

Величина $V \cos \theta$, входящая в эту формулу, является проекцией скорости наблюдателя на направление вектора \mathbf{k} .

Представляется уместным отметить, однако, следующее обстоятельство. Практически при анализе свойств среды по эффекту Допплера удобнее пользоваться составляющими скорости V в полярной системе координат r, φ , а именно, $V_r = V \cos \varphi$, $V_\varphi = V \sin \varphi$ (эти величины имеют простейшую зависимость от времени). Если, кроме

того, ввести величину $m = n \cos \alpha$ (α — угол между \mathbf{k} и $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$), то

$$\omega' \sqrt{1 - \beta^2} = \omega \left(1 - m \frac{V}{c} \cos \varphi + \frac{\partial m}{\partial \varphi} \frac{V}{c} \sin \varphi \right).$$

Это выражение по виду совпадает с формулой (3) статьи и наглядно показывает существенную разницу эффекта Допплера в анизотропной и изотропной средах. Например, в анизотропной среде имеется эффект Допплера первого порядка (относительно V/c) даже при $V \perp \mathbf{r}$.

Н. А. Митяков.

Поступило в редакцию
10 мая 1963 г.