МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОФИЗИКА

Том VI

ИЗДАНИЕ ГОРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1963

О РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА ПО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ В ВОЛНОВОДЕ

В. К. Юлпатов

В работе [1] рассмотрено влияние поля излучения на характер движения заряженной частицы, перемещающейся (при отсутствии реакции излучения) по прямолинейной траектории с периодически меняющейся скоростью в прямоугольном волноводе, заполненном анизотропным диэлектриком. Показано, что как и при движении осциллирующей частицы в среде, заполняющей свободное пространство (см., например, [2,3]), возможность излучения аномальных допплеровских частот приводит к уменьшению торможения колебаний частицы. В некоторых случаях может наступить даже раскачка колебаний. Эти результаты могут быть легко обобщены на случай движения частицы по произвольной периодической траектории в любом волноводе без потерь с анизотропным (негиротропным) заполнением и импедансными стенками.

Будем считать, что средняя скорость частицы, величина которой равна v_0, направлена вдоль волновода и совпадает с направлением координатной оси z. Представляя электромагнитное поле в виде интеграла Фурье, запишем работу, совершаемую полем излучения над частицей за период движения T, в форме

$$W = e \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{T} \boldsymbol{v} \boldsymbol{E}(\omega)\, e^{i\omega t}\, dt, \tag{1}$$

где e—заряд частицы, $\boldsymbol{v}$—ее скорость, $\boldsymbol{E}(\omega)$—компонента Фурье электрического поля. Выражение для изменения энергии поступательного движения частицы [2,3]

$$W_{\parallel} = e \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{0}^{T} v_0 \boldsymbol{z}_0 \left\{ \boldsymbol{E}(\omega) + \left[\frac{\boldsymbol{v}}{c}\, \boldsymbol{B}(\omega) \right] \right\} e^{i\omega t}\, dt$$

с помощью тождества

$$\boldsymbol{z}_0 \boldsymbol{E} e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dt} \left\{ \boldsymbol{z}_0 \boldsymbol{E} e^{i\omega t} \right\} - \frac{i}{\omega} \boldsymbol{v} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z} e^{i\omega t} + \frac{i}{\omega} \boldsymbol{v} \left[\boldsymbol{z}_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \right] e^{i\omega t},$$

в котором $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\omega)$ заменим на $-(i\omega/c)\,\boldsymbol{B}(\omega)$ (c—скорость света в вакууме), нетрудно преобразовать к виду:

$$W_{\parallel} = e\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{0}^{T} \frac{iv_0}{\omega}\,\boldsymbol{v}\,\frac{\partial \boldsymbol{E}(\omega)}{\partial z}\,e^{i\omega t}dt. \qquad (2)$$

Изменение энергии колебательного движения $W_{\sim}$ можно найти как разность W и $W_{\parallel}$.

Компонента Фурье электрического поля, возбуждаемого в волноводе произвольным током, может быть найдена как [4]*

$$\boldsymbol{E}(\omega) = \sum_s \{C_s\boldsymbol{E}_s + C_{-s}\boldsymbol{E}_{-s}\}. \qquad (3)$$

Коэффициенты этого ряда $C_{\pm s}$ определяются из уравнений

$$\frac{dC_{\pm s}}{dz} = \pm\frac{1}{N_s}\int_{S_\perp} \boldsymbol{j}(\omega)\,\boldsymbol{E}_{\mp s}dS_\perp, \qquad (4)$$

где

$$N_s = \frac{c}{4\pi}\int_{S_\perp}\{[\boldsymbol{E}_s\boldsymbol{H}_{-s}]-[\boldsymbol{E}_{-s}\boldsymbol{H}_s]\}\boldsymbol{z}_0 dS_\perp,\quad \boldsymbol{E}_{\pm s}=\boldsymbol{E}^0_{\pm s}(\boldsymbol{r}_\perp)\,e^{\mp ih_s z},\quad \boldsymbol{H}_{\pm s}=\boldsymbol{H}^0_{\pm s}(\boldsymbol{r}_\perp)\times e^{\mp ih_s z}$$

— собственные волны данного волновода, $\boldsymbol{r}_\perp$ — координаты в поперечном сечении волновода $S_\perp$, $\boldsymbol{j}(\omega)$—компонента Фурье плотности тока. Сразу заметим, что при действительных ω и h_s (распространяющиеся волны) имеют место соотношения $\boldsymbol{E}_{-s}=\boldsymbol{E}_s^{*}$, $\boldsymbol{H}_{-s} = -\boldsymbol{H}_s^{*}$ и $N_s = -4P_s$ (P_s—поток мощности в волне данного типа) [5].

Плотность тока частицы, перемещающейся по произвольной периодической траектории, представим в виде [6]

$$\boldsymbol{j} = e\,\frac{\boldsymbol{v}}{v}\,\delta(\boldsymbol{r}_\perp - \boldsymbol{r}_\perp(z))\,\delta\left(t - \int_0^z \frac{d\xi}{v}\right), \qquad (5)$$

причем v—проекция скорости частицы на ось z и $\boldsymbol{r}_\perp(z)$—координаты частицы в поперечном сечении волновода—являются периодическими функциями z с периодом L, а следовательно, и периодическими функциями времени с периодом T. Находя из (5) $\boldsymbol{j}(\omega)$ и подставляя в (4), разложим правую часть (4) в ряд Фурье по z:

$$\frac{dC_{\pm s}}{dz} = \pm\frac{e}{2\pi N_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} A^{-\omega}_{\mp s-n}\,e^{-ih_n z \pm ih_s z}. \qquad (6)$$

Здесь $h_n = \omega/v_0 + 2\pi n/L$** и

$$A^{-\omega}_{\mp s-n} = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\boldsymbol{v}}{v}\,\boldsymbol{E}^0_{\mp s}\,e^{-i\omega\int_0^z \frac{d\xi}{v} + ih_n z}dz = \frac{1}{L}\int_0^T \boldsymbol{v}\boldsymbol{E}^0_{\mp s}\,e^{-i\omega t + ih_n z}\,dt. \qquad (7)$$

Проводя интегрирование в (6) и подставляя $C_{\pm s}$ в (3), найдем $\boldsymbol{E}(\omega)$, после чего из (1) и (2) нетрудно получить:

$$W = \frac{e^2L}{2\pi i}\sum_{s,n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{N_s}\left\{\frac{A^{-\omega}_{-s-n}A^{\omega}_{s\,n}}{h_s - h_n} + \frac{A^{-\omega}_{s-n}A^{\omega}_{-s\,n}}{h_s + h_n}\right\}d\omega;$$

---

* В (3) опущен член, пропорциональный продольной составляющей плотности тока, поскольку он не имеет отношения к полю излучения.

** В [6] $h_n = \omega\,\overline{(1/v)} + 2\pi n/L$, где $\overline{(1/v)} = (1/L)\int_0^L dz/v$. Но легко видеть, что $\overline{(1/v)} = T/L$, а $v_0 = (1/T)\int_0^T v\,dt = L/T$. Поэтому $\overline{(1/v)} = 1/v_0$.

$$W_{\parallel} = \frac{e^2 L}{2\pi i} \sum_{s,n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_n v_0}{\omega N_s} \left\{ \frac{A_{-s-n}^{-\omega} A_{s\,n}^{\omega}}{h_s - h_n} + \frac{A_{s-n}^{-\omega} A_{-s\,n}^{\omega}}{h_s + h_n} \right\} d\omega. \tag{8}$$

В этих выражениях $A_{\pm s\,n}^{\omega}$ отличаются от (7) только знаком перед h_n.

Интегралы в (8) понимаются в смысле их предельного значения при исчезающе малом затухании электромагнитных волн [7]. При внесении в волновод поглощения волновые числа распространяющихся волн h_s приобретают мнимую часть, причем если $\omega P_s > 0$, то при $\omega > 0$ $\operatorname{Im} h_s < 0$, а при $\omega < 0$ $\operatorname{Im} h_s > 0$; если же $\omega P_s < 0$ (обратные волны), то знак $\operatorname{Im} h_s$ меняется на обратный. Кроме того, необходимо учесть, что если $\boldsymbol{E}_s(-\omega) = \boldsymbol{E}_s(\omega)$, то $\boldsymbol{H}_s(-\omega) = -\boldsymbol{H}_s(\omega)$ и, следовательно, $N_s(-\omega) = -N_s(\omega)$. Используя все это, из (8) окончательно получим:

$$\begin{gathered} W = \sum_{s,n} \{ W_{s\,n} + W_{-s\,n} \}, \quad W_{\parallel} = \sum_{s,n} \left\{ \frac{h_n v_0}{\omega} W_{s\,n} + \frac{h_n v_0}{\omega} W_{-s\,n} \right\}, \\ W_{\sim} = W - W_{\parallel} = -\sum_{s,n} \left\{ \frac{2\pi n}{\omega T} W_{s\,n} + \frac{2\pi n}{\omega T} W_{-s\,n} \right\}, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$W_{\pm s\,n} = \frac{-e^2 L \, |A_{\pm s\,n}^{\omega}|^2}{\left| N_s \left(\frac{\partial h_s}{\partial \omega} \mp \frac{1}{v_0} \right) \right|}.$$

В W, $W_{\parallel}$ и $W_{\sim}$ частота в первых слагаемых определяется как положительный корень уравнения

$$h_s - h_n = 0, \tag{10}$$

а во вторых—как положительный корень уравнения

$$h_s + h_n = 0. \tag{10a}$$

Первый член в W определяет изменение энергии частицы за период, связанное с излучением электромагнитных волн, фазовая скорость которых совпадает по направлению со средней скоростью частицы ($v_ф > 0$); второй член связан с волнами, у которых $v_ф < 0$. Из выражения для $W_{\parallel}$ видно, что излучение волн с $v_ф > 0$ уменьшает энергию поступательного движения частицы, а волн с $v_ф < 0$—увеличивает ее.

Постоянные распространения излучаемых волн равны $h = \pm h_s(\omega)$ (частота определяется формулами (10) и (10a)). Из последних легко получить: $\omega - h v_0 = -2\pi n / T$. Это означает, что излучению нормальных допплеровских частот соответствуют $n < 0$, а аномальных допплеровских частот—$n > 0$. Черенковское излучение может иметь место при $n = 0$ [8]. Излучение нормальных допплеровских частот, как следует из выражения для $W_{\sim}$, уменьшает колебательную энергию частицы, в то время как излучение аномальных допплеровских частот увеличивает ее, что находится в полном соответствии с общей теорией излучения движущихся осцилляторов [8].

В [1] показано, что в прямоугольном волноводе с $\varepsilon_{\parallel} < 0$, $\varepsilon_{\perp} > (c/v_0)^2$ частица, перемещающаяся по прямолинейной траектории с достаточно малой амплитудой осцилляций, в некоторых случаях излучает лишь аномальные допплеровские частоты и поэтому происходит раскачка колебаний частицы. Этот вывод с помощью (9) обобщается на случай волноводов с произвольным поперечным сечением, поскольку для любых волноводов с различными $\varepsilon_{\parallel}$ и $\varepsilon_{\perp}$ ТМ-волны имеют $h_s = \left\{ \varepsilon_{\perp} (\omega/c)^2 - (\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_{\parallel}) \varkappa_s^2 \right\}^{1/2}$ ($\varkappa_s$—поперечное волновое число).

Считаю приятным долгом выразить признательность А. В. Гапонову, обратившему мое внимание на эту задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Коробков, В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **5**, 122 (1962).
2. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **36**, 1823 (1959).
3. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **2**, 331 (1959).
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957, стр. 436, 448.

5. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 27, 2340 (1957).
6. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Радиотехника и электроника, 5, 1100 (1960).
7. М. И. Каганов, ЖТФ, 23, 505 (1953).
8. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР, 56, 583 (1947).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 сентября 1962 г.