

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
223	15 снизу	$\dots \overline{(R_1(0)^2 + R_2(0)^2)}$	$\dots \overline{(R_1(0)^2 + R_2(0)^2)}$
317	17 сверху	$\dots 2\lambda_{(k)} = 1 \dots$	$\dots 2\lambda_{(l)} = 1 \dots$

Ошибки в № 5, 1962 г., допущенные автором

1003	13 сверху	$\dots = \left(\frac{-v_2}{v_1 - v_2} w_1 - \frac{v - \sigma}{v_1 - v_2} \right) \dots$	$\dots = \left(\frac{-v_2}{v_1 - v_2} w_1 + \frac{v - \sigma}{v_1 - v_2} \right) \dots$
	14 сверху	$\dots + \left(\frac{v_1}{v_1 - v_2} w_1 + \frac{v - \sigma}{v_1 - v_2} \right) \dots$	$\dots + \left(\frac{v_1}{v_1 - v_2} w_1 - \frac{v - \sigma}{v_1 - v_2} \right) \dots$
	19 сверху	$\frac{-v + \sigma - \dots}{v_1 - v_2} \dots +$	$\frac{v - \sigma - \dots}{v_1 - v_2} \dots -$
	20 сверху	$\dots + \frac{v - \sigma - \dots}{v_1 - v_2} \dots$	$\dots - \frac{v - \sigma - \dots}{v_1 - v_2} \dots$
1006	14 снизу	\dots близким к r .	\dots близким к r^2 .
	4 снизу	$\dots - \frac{v + \sigma(v_2 \tau_1 - 1)}{v_1 - v_2} \dots$	$\dots - \frac{v - \sigma(v_1 \tau_1 + 1)}{v_1 - v_2} \dots$
	3 снизу	$\dots + \frac{v + \sigma(v_1 \tau_1 - 1)}{v_1 - v_2} \dots$	$\dots + \frac{v - \sigma(v_2 \tau_1 + 1)}{v_1 - v_2} \dots$

СОДЕРЖАНИЕ

Файн В. М. Индуцированное и спонтанное излучения (Обзор)	207
Кротиков В. Д., Порфириев В. А. Прецизионное измерение радиоизлучения Луны на волнах 35 и 36 см	242
Калинин Ю. К., Родионов Я. С. Моделирование процесса распространения земной волны в сантиметровом диапазоне	246
Тамойкин В. В. Излучение заряда в неоднородной среде с пространственной дисперсией	257
Овандер Л. Н. К теории эффекта удвоения частоты в ферритах	267
Цареградский В. Б. Взаимодействие молекулярного пучка с электромагнитным полем резонатора. I. Поляризация молекулярного пучка в заданном неоднородном электрическом поле резонатора	275
Басс Ф. Г., Вербицкий И. Л. О частотном спектре электромагнитных волн, рассеянных статистически неровной поверхностью	290
Алексин В. Ф., Степанов К. Н. Пространственная корреляция флюктуационных электромагнитных полей в плазме. I	297
Аптэк Ю. Э., Гершт А. М. К вопросу о крыльях спектра квазигармонического сигнала	311
Фрейдман Г. И. Об ударных волнах в линиях передачи с тонким слоем феррита. I	324
Фрейдман Г. И. Об ударных волнах в линиях передачи с тонким слоем феррита. II	338
Татаренко А. С. Многорядная встречно-штыревая замедляющая система со сдвигом рядов на половину периода	348
Третьяков О. А., Шестопалов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоской металлической решетке, лежащей на диэлектрическом слое	353
Третьяков О. А., Хорошун Д. В., Шестопалов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоской экранированной решетке (случай нормального падения)	364
Иванов В. Н., Харченко Е. Т. О дисперсии волн в спирали прямоугольного по-перечного сечения	373
Рубник В. П., Кравченко З. Л. О влиянии запаздывания сил связи на процессы затягивания в сложных автоколебательных системах	380
Прокофьев Е. В., Хохлов Ю. Я. Применение время-импульсной модуляции для моделирования переменного запаздывания на магнитной ленте	392
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Хрулев В. В. Результаты измерения интенсивности радиоизлучения дискретных источников Кассиопея-А и Лебедь-А на волне $\lambda = 10,26 \text{ см}$	398
Калачев П. Д. Некоторые конструктивные возможности создания жесткой параболической антенны большого диаметра	398
Рухадзе А. А. Об одном виде неустойчивости пучков в плазме	401
Степанов К. Н. О поглощении электромагнитных волн при квазипродольном распространении	403
Городинский Г. В., Эйдман В. Я. Об излучении заряда, налетающего на металлический шар	405
Басс Ф. Г., Ханкина С. И. Энергетические потери заряда, движущегося над периодически неровной поверхностью	407
Юллатов В. К. О реакции излучения при движении заряда по периодической траектории в волноводе	410
Островский Л. А. Отражение ударных электромагнитных волн от короткозамкнутого конца линии передачи с ферритом	413
Адонина А. И. Дифракция электромагнитных волн на плоской металлической решетке с экраном и диэлектриком (случай наклонного падения)	416
Маркелов В. А. Об одном способе вычисления ширины линий автогенератора	418
Информация	
Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. II, № 6, 1962	421

ИНДУЦИРОВАННОЕ И СПОНТАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

B. M. Файн

(Обзор)

Как известно, понятия спонтанного и индуцированного излучений играют важную роль в квантовой радиофизике. Однако обычно при изложении этих понятий мало акцентируется внимание на ряде важных для понимания вопросов. К числу таких вопросов относятся связь с классикой, фазовые соотношения, диаграмма направленности, роль нулевых флюктуаций и т. п.

Цель настоящего обзора заключается в том, чтобы в какой-то мере компенсировать указанный пробел.

В первом разделе вводится понятие о процессах спонтанного и индуцированного излучений и кратко излагается теория Эйнштейна, который впервые ввел эти понятия в квантовую теорию.

Во втором разделе приводятся результаты классического рассмотрения индуцированного и спонтанного излучений.

В разделе 3 строится квантовая теория этих процессов. В отличие от обычного изложения с помощью вероятностей переходов в единицу времени здесь используются квантовые уравнения движения. Это дает возможность проводить подробное сопоставление с классикой, учитывать фазовые соотношения и решать ряд других вопросов.

Подробное обсуждение этих вопросов и установление принципа соответствия проведено в разделе 4.

Пятый раздел посвящен вопросу об индуцированном и спонтанном излучениях в системе, уровни которой образуют непрерывный спектр.

В разделе 6 проводится краткое изложение теории индуцированного и спонтанного излучений в свободном пространстве.

Последний, седьмой раздел посвящен вопросу об излучении в резонаторе и состоит из следующих подразделов: 1) исходные уравнения, 2) свободное движение (без внешнего поля); 3) индуцированное излучение в реальном резонаторе; 4) спонтанное излучение в резонаторе; 5) индуцированное и спонтанное излучения в мазерах.

1. ПОНЯТИЕ О СПОНТАННОМ И ИНДУЦИРОВАННОМ ИЗЛУЧЕНИЯХ

Понятия о спонтанном и индуцированном излучениях в квантовой теории были введены Эйнштейном при рассмотрении равновесного излучения [1] задолго до создания полной квантовой электродинамики.

Пусть Z_m и Z_n — два возможных стационарных состояния некоторой квантовой системы (предполагается, что это „невозмущенные“ состояния, т. е. состояния без учета взаимодействия с полем излучения). Пусть далее E_m и E_n ($E_m > E_n$) — энергии этих состояний. Эйнштейн постулировал возможность следующих элементарных процессов излучения.

a) *Спонтанное излучение.* Если система находится в возбужденном состоянии E_m , то имеется вероятность перехода из состояния Z_m в состояние Z_n за время dt с излучением фотона

$$dW_s = A_m^n dt, \quad (1.1)$$

где A_m^n не зависит от времени и от поля излучения. Такое излучение, которое происходит и в отсутствие внешнего поля излучения, носит название спонтанного. Коэффициент A_m^n , имеющий смысл вероятности (в единицу времени) того, что квантовая система при переходе $m \rightarrow n$ излучит фотон, называется коэффициентом Эйнштейна для спонтанного излучения. Можно также ввести дифференциальные коэффициенты Эйнштейна $a_m^n(\Omega)$ для спонтанного излучения фотона с заданными свойствами (направлением распространения в телесном угле $d\Omega$ и с заданным направлением поляризации α)

$$dA_m^n = a_{m\alpha}^n(\Omega) d\Omega, \quad (1.2)$$

где α — индекс, отмечающий два возможных независимых направления поляризации фотона. Согласно правилу частот Бора, частота излучения

$$\omega = \frac{E_m - E_n}{\hbar}.$$

Отметим очевидное равенство:

$$A_m^n = \sum_{\alpha=1}^2 \int a_{m\alpha}^n d\Omega.$$

б) Индуцированное излучение и поглощение. Если квантовая система находится в электромагнитном поле, имеющем плотность энергии излучения

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^2 \int d\omega \int d\Omega \rho_{\alpha}(\omega, \Omega) d\omega d\Omega,$$

то под действием этого поля квантовая система может перейти из более высокого энергетического состояния E_m в более низкое с вероятностью

$$dw_i = b_{m\alpha}^n \rho_{\alpha}(\omega, \Omega) d\Omega dt \quad (1.3)$$

и при этом излучить фотон частоты $\omega = (E_m - E_n)/\hbar$ с поляризацией α и направлением распространения в телесном угле $d\Omega$. Такое излучение носит название индуцированного испускания. Полная вероятность индуцированного испускания при переходе $m \rightarrow n$ за время dt

$$dW_i = \sum_{\alpha=1}^2 \int d\Omega b_{m\alpha}^n \rho_{\alpha}(\omega, \Omega) dt.$$

Спонтанное и индуцированное излучения суть два независимых процесса и полная вероятность излучения фотона при переходе $m \rightarrow n$ равна $dW_s + dW_i$.

Если квантовая система находилась первоначально в состоянии n , то под действием поля излучения возможен переход в более высокое энергетическое состояние m с поглощением энергии фотона частоты $\omega = (E_m - E_n)/\hbar$. Вероятность такого процесса за время dt равна

$$dw_r = b_{n\alpha}^m \rho_{\alpha}(\omega, \Omega) d\Omega dt. \quad (1.4)$$

Такой процесс называется поглощением. Коэффициенты $b_{m\alpha}^n$, $b_{n\alpha}^m$ суть дифференциальные коэффициенты Эйнштейна (или просто коэффи-

циенты Эйнштейна) соответственно для индуцированного излучения и поглощения. Коэффициенты Эйнштейна зависят только от характеристик рассматриваемой квантовой системы и не зависят от поля излучения. Между коэффициентами Эйнштейна имеется связь, которую, в частности, можно вывести при рассмотрении равновесного состояния [1].

Постулированная Эйнштейном зависимость процессов излучения от поля и от времени (1), (3), (4) нашла свое подтверждение в современной квантовой теории излучения [2]. Прежде чем переходить к изложению квантовой теории процессов спонтанного и индуцированного излучений и поглощения, мы приведем результаты классического рассмотрения этих процессов. Это дает возможность лучше понять суть этих процессов и, в частности, выяснить, что является в этих процессах специфически квантовым и что имеет классическое происхождение.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Рассмотрим сначала взаимодействие одномерного классического осциллятора с полем излучения. Классическая функция Гамильтона системы, состоящей из осциллятора, взаимодействующего с полем излучения, имеет вид (см., например, [2]):

$$H = \frac{1}{2m} \left[p - \frac{e}{c} A(x) \right]^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} \sum (P_v^2 + Q_v^2), \quad (2.1)$$

где p и x — импульс и координата осциллятора, P_v , Q_v — канонические переменные, описывающие поле излучения. Вектор-потенциал выражается через Q_v в виде разложения

$$\mathbf{A} = \sum Q_v(t) \mathbf{A}_v(x),$$

где $\mathbf{A}_v(x)$ — нормированная собственная функция, описывающая поле излучения. Величина P_v канонически сопряжена Q_v .

Далее будем считать осциллятор точечным (его размеры много меньше длины волн поля излучения*) и ограничимся дипольным приближением. В этом приближении можно пренебречь зависимостью $\mathbf{A}_v(x)$ от координаты x и заменить $\mathbf{A}_v(x)$ на $\mathbf{A}_v(0)$ (предполагая, что центр тяжести осциллятора находится в начале координат). Канонические уравнения Гамильтона ($\dot{p} = -\partial H/\partial q$; $\dot{q} = \partial H/\partial p$), следующие из функции Гамильтона (2.1), имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_v &= P_v; \quad \dot{P}_v = -\omega_v^2 Q_v + \frac{e}{mc} \left(p - \frac{e}{c} A \right) \mathbf{A}_v(0); \\ \dot{p}_x &= -m\omega_0^2 x; \quad \dot{x} = \frac{1}{m} p_x - \frac{e}{mc} A_x; \quad \dot{p}_y = \dot{p}_z = 0; \\ \dot{y} &= \frac{1}{m} p_y - \frac{e}{mc} A_y; \quad \dot{z} = \frac{1}{m} p_z - \frac{e}{mc} A_z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эти уравнения мы будем решать методом последовательных приближений, считая малым параметром величину, пропорциональную заряду e . Уравнения (2.2) удобно переписать в интегральной форме:

* Точнее, размеры осциллятора много меньше длины волн всех тех мод поля излучения, влиянием которых нельзя пренебречь.

$$\begin{aligned}
Q_v &= Q_v^{(0)}(t) + \frac{e}{mc\omega} \int_0^t A_v(0) p(t_1) \sin [\omega_v(t-t_1)] dt_1 - \\
&\quad - \frac{e^2}{mc^2\omega_v} \sum_{\lambda} A_v(0) A_{\lambda}(0) \int_0^t Q_{\lambda}(t_1) \sin [\omega_v(t-t_1)] dt_1; \\
P_v &= P_v^{(0)}(t) + \frac{e}{mc} \int_0^t A_v(0) p(t_1) \cos [\omega_v(t-t_1)] dt_1 - \\
&\quad - \frac{e^2}{mc^2} \sum_{\lambda} A_v(0) A_{\lambda}(0) \int_0^t Q_{\lambda}(t_1) \cos [\omega_v(t-t_1)] dt_1; \\
p_x &= p_x^{(0)}(t) + \frac{\omega_0 e}{c} \int_0^t A_x(t_1) \sin [\omega_0(t-t_1)] dt_1; \\
p_y = p_z &= 0; \quad y = -\frac{e}{mc} \int_0^t A_y(t_1) dt_1; \quad z = -\frac{e}{mc} \int_0^t A_z(t_1) dt_1.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь индексом 0 обозначены решения в отсутствие взаимодействия между осциллятором и полем излучения:

$$\begin{aligned}
Q_v^{(0)} &= Q_v^{(0)} \cos (\omega_v t) + \frac{P_v(0)}{\omega_v} \sin (\omega_v t); \\
P_v^{(0)} &= -\omega_v Q_v(0) \sin (\omega_v t) + P_v(0) \cos (\omega_v t); \\
p_x^{(0)} &= p(0) \cos (\omega_v t) - \omega_0 m x(0) \sin (\omega_0 t); \\
x^{(0)} &= x^{(0)} \cos (\omega_0 t) + \frac{p(0)}{m\omega_0} \sin (\omega_0 t),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $Q_v(0)$, $P_v(0)$, $p(0)$, $x(0)$ —соответствующие значения поля и координат осциллятора в момент времени $t=0$. Нетрудно теперь найти решения уравнений (2.3) в первом и втором приближении по степеням заряда e :

$$\begin{aligned}
P_v^{(1)} &= \frac{e}{mc} A_{v,x} \int_0^t p_x^{(0)}(t_1) \cos [\omega_v(t-t_1)] dt_1 \approx \frac{e}{mc} A_{v,x} \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_v)t]}{2(\omega_0 - \omega_v)} \times \\
&\quad \times [p(0) \cos (\omega_v t) - \omega_0 m x(0) \sin (\omega_v t)]; \\
Q_v^{(1)} &= \frac{e A_{v,x}}{\omega_v mc} \int_0^t p_x^{(0)}(t_1) \sin [\omega_v(t-t_1)] dt_1 \approx \frac{e}{\omega_v mc} A_{v,x} \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_v)t]}{2(\omega_0 - \omega_v)} \times \\
&\quad \times [p(0) \sin (\omega_v t) + \omega_0 m x(0) \cos (\omega_v t)];
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 p_x^{(1)} &= \frac{e}{c} \omega_0 \sum_{\lambda} A_{\lambda x} \int_0^t Q_{\lambda}^{(0)}(t_1) \sin [\omega_0(t-t_1)] dt_1 \approx \\
 &\approx \frac{e \omega_0}{c} \sum_{\lambda} A_{\lambda x} \left[Q_{\lambda}(0) \sin (\omega_0 t) - \frac{P_{\lambda}(0)}{\omega_{\lambda}} \cos (\omega_0 t) \right] \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_{\lambda}) t]}{2(\omega_0 - \omega_{\lambda})}; \\
 Q_y^{(2)} &= \frac{e A_{yx}}{mc \omega_y} \int_0^t p_x^{(1)}(t_1) \sin [\omega_y(t-t_1)] dt_1 - \frac{e^2}{mc^2 \omega_y} \times \\
 &\times \sum_{\lambda} A_y A_{\lambda} \int_0^t Q_{\lambda}^{(0)}(t_1) \sin [\omega_y(t-t_1)] dt_1; \\
 P_y^{(2)} &= \dot{Q}_y^{(2)}.
 \end{aligned}$$

(Приближенные равенства написаны в предположении $\omega_0 t \gg 1$.)

Используя эти выражения, мы можем найти поле излучения с точностью e^2 :

$$E = -\frac{1}{c} A = -\frac{1}{c} \sum_y P_y(t) A_y(r); \quad H = \text{rot } A = \sum_y Q_y(t) \text{rot } A_y(r).$$

Таким образом, P_y определяет электрическое поле, Q_y — магнитное поле.

Нетрудно сообразить, что $Q_y^{(1)}$, $P_y^{(1)}$ определяют поле спонтанного излучения, а $Q_y^{(2)}$, $P_y^{(2)}$ — поле излучения, вызванное „невозмущенным“ полем $Q_y^{(0)}$, $P_y^{(0)}$. В самом деле, $Q_y^{(1)}$ и $P_y^{(1)}$ не зависят от $Q_y^{(0)}$ и $P_y^{(0)}$ и, в частности, отличны от нуля даже в том случае, когда в начальный момент $t = 0$ поля излучения нет. С другой стороны, $Q_y^{(2)}$, $P_y^{(2)}$ зависят от амплитуд $Q_{\lambda}(0)$, $P_{\lambda}(0)$ и обращаются в нуль вместе с ними. Следовательно, $Q_y^{(2)}$ и $P_y^{(2)}$ представляют поле индуцированного испускания и поглощения.

Это поле, складываясь с полем $Q_y^{(0)} + Q_y^{(1)}$, $P_y^{(0)} + P_y^{(1)}$, приводит к тому, что общая энергия поля излучения увеличивается (индуцированное излучение) или уменьшается (поглощение). Из выражений (2.5) видно, что поле индуцированного испускания и поглощения $Q_y^{(2)}$, $P_y^{(2)}$ (будем называть его индуцированным полем — оно индуцировано „невозмущенным“ полем $Q_y^{(0)}$, $P_y^{(0)}$ и пропорционально ему) по частоте близко полю $Q_y^{(0)}$, $P_y^{(0)}$, но имеет другое направление распространения и поляризацию. Или, вообще говоря, данная мода невозмущенного поля индуцирует разные моды поля излучения (в том числе и данную моду). Это обстоятельство всегда связано с ограниченностью размеров нашей системы (в разбираемом случае размеры системы бесконечно малы). В самом деле, пусть система имеет размеры порядка a . Тогда электромагнитное поле индуцирует в системе некоторое распределение зарядов (или дипольных моментов) — член $p_x^{(1)}$, которое, в свою очередь, вызывает электромагнитное поле $Q_y^{(2)}$, $P_y^{(2)}$. Это распределение зарядов характеризуется набором волновых векторов в интервале порядка

$$|\Delta k| \geq 1/a.$$

Отсюда и появляются в поле излучения различные волновые векторы k (с одним и тем же модулем k , который определяется частотой излу-

нения). Как мы убедимся ниже, общая энергия полного поля излучения, представляемого величинами $Q_v^{(0)} + Q_v^{(1)} + Q_v^{(2)}$ и $P_v^{(0)} + P_v^{(1)} + P_v^{(2)}$, может увеличиваться (спонтанное и индуцированное излучение).

Таким образом, индуцированное поле по необходимости должно иметь различные направления распространения даже в том случае, когда возмущенное поле представляет плоскую волну с определенным волновым вектором.

Заметим, что разложение A по плоским (бегущим или стоячим) волнам, вообще говоря, не имеет места в резонаторе произвольной формы, и в этих случаях нельзя ввести волновые векторы. Однако общий вывод о том, что поле данной моды λ индуцирует поля различных мод v , остается в силе. В том случае, когда эти другие моды достаточно сильно разнесены по частоте (как это имеет место вблизи основной частоты резонатора), можно учитывать только данную моду v частоты ω . Если при этом частота ω совпадает с частотой осциллятора ω_0 , то множитель $\sin [(\omega_0 - \omega)v t]/(\omega_0 - \omega)$ переходит в t , т. е. поле спонтанного излучения растет пропорционально времени. Индуцированное поле будет нарастать линейно по t^2 , если невозмущенное поле по частоте совпадает с частотой осциллятора. В том же случае, когда частоты ω , образуют непрерывный спектр, необходимо производить суммирование по различным модам; при этом суммировании $\sin [(\omega - \omega_0)v t]/\pi(\omega - \omega_0)$ переходит в дельта-функцию $\delta(\omega - \omega_0)$, если $t \gg 1/\delta\omega$, где $\delta\omega$ — характерный масштаб неоднородности непрерывного спектра.

Рассмотрим теперь важный вопрос о том, как происходит изменение энергии поля. Воспользуемся каноническим формализмом. Пусть H — энергия v -ой моды поля излучения

$$H_v = \frac{1}{2} (P_v^2 + \omega_v^2 Q_v^2);$$

тогда производная H_v равна

$$\frac{dH_v}{dt} = \{H, H_v\} = \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial H}{\partial P_{\lambda}} \frac{\partial H_v}{\partial Q_{\lambda}} - \frac{\partial H}{\partial Q_{\lambda}} \frac{\partial H_v}{\partial P_{\lambda}} \right),$$

где $\{H, H_v\}$ — классическая скобка Пуассона (см., например, [3]). После простых преобразований находим:

$$\begin{aligned} \frac{dH_v}{dt} &= \frac{e}{mc} (p A_v) P_v - \frac{e^2}{mc^2} (A A_v) P_v = \\ &= \frac{e}{c} (\dot{x} A_v) P_v = -e (\dot{x} E(v)), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\dot{x} = \frac{p}{m} - \frac{e}{mc} A$, а $E(v) = -\frac{1}{c} A_v P_v$ — электрическое поле v -ой

моды. Подставим в (2.6) решение (2.4) — (2.5), оставляя члены не выше второго порядка по e :

$$\begin{aligned} \frac{dH_v}{dt} &= \frac{e}{mc} A_{v,x} p_x^{(0)} P_v^{(0)} + \frac{e A_{v,x}}{mc} p_x^{(1)} P_v^{(0)} - \frac{e^2}{mc^2} A_v \sum_{\lambda} A_{\lambda} Q_{\lambda}^{(0)} P_v^{(0)} + \\ &+ \frac{e A_{v,x}}{mc} p_x^{(0)} P_v^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Выражение (2.7) представляет собой интенсивность спонтанного и индуцированного излучений и поглощения. Обычно интересуются усредненным по времени значением этой величины на время, много большее периода излучения: $t \gg 1/\omega_0$. Первые три члена зависят от амплитуд невозмущенного поля $P_v(0)$, $Q_v(0)$ и после усреднения по времени могут принимать положительное (индукцированное излучение) или отрицательное (поглощение) значения.

Рассмотрим сначала индуцированное излучение и поглощение. Здесь можно выделить два случая: а) поле излучения или осциллятор имеют случайные фазы и б) поле излучения и осциллятор имеют определенные фазы.

В последнем случае среднее значение по времени первого члена (существенно отличное от нуля при $\omega_v \approx \omega_0$) равно

$$\left(\overline{\frac{dH_v}{dt}} \right)_1 = \frac{1}{2} \frac{e}{mc} A_{v,x} [p(0) P_v(0) + \omega_0^2 m x(0) Q_v(0)]. \quad (2.8)$$

Когда (2.8) отлично от нуля, интенсивность излучения определяется этим членом, так как остальные члены в правой части (2.7)—второго порядка по e . Этот член зависит от соотношения между фазами осциллятора и поля и может принимать как положительные, так и отрицательные значения, т. е. давать соответственно индуцированное испускание и поглощение. Если фазы поля или фаза осциллятора принимают случайные значения, то для ряда задач представляет интерес усредненное по распределению фаз значение интенсивности излучения.

Если фаза осциллятора совершенно случайна, т. е. $\overline{p(0)} = \overline{x(0)} = 0$, то среднее значение (2.8) обращается в нуль. Аналогичная ситуация имеет место, если фаза поля случайна, т. е. $\overline{P_v(0)} = \overline{Q_v(0)} = 0$. В этом случае среднее значение (2.8) также равно нулю.

Перейдем к расчету средних по времени и фазам остальных членов в правой части (2.7). При усреднении (2.7) мы будем пользоваться соотношениями

$$\overline{P_\lambda^{(0)} Q_v^{(0)}} = 0; \quad \overline{P_v(0) P_\lambda(0)} = \delta_{v,\lambda} \overline{P_v^2(0)}; \quad \overline{Q_v(0) Q_\lambda(0)} = \delta_{v,\lambda} \overline{Q_v^2(0)}$$

(далее черта будет означать двойное усреднение по времени и фазам). Эти равенства имеют место, если средние значения $\overline{Q_v(0)}$ и $\overline{P_v(0)}$ равны нулю или равны нулю $\overline{Q_v(0)}$ и $\overline{P_v(0)}$ для всех мод кроме одной. После усреднения находим*:

$$\begin{aligned} \left(\overline{\frac{dH_v}{dt}} \right)_2 &= -\frac{e^2}{2mc^2} A_{v,x}^2 H_v(0) \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_v) t]}{(\omega_0 - \omega_v)} + \\ &+ \frac{e^2}{2mc^2} A_{v,x}^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overline{p^2(0)}}{m} + m \omega^2 \overline{x^2(0)} \right\} \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_v) t]}{(\omega_0 - \omega_v)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Первый член в этом выражении отрицателен и означает поглощение. Таким образом, после усреднения по совершенно случайным фазам поля для классического линейного осциллятора получается только поглощение, а индуцированного испускания нет. Мы увидим ниже, что усредненное по фазе поля отрицательное поглощение или индуцированное испускание возможно только при наличии нелинейности в си-

* В результате усреднения третий член в правой части (2.7) обратился в нуль. Это служит обоснованием отбрасывания члена $e^2 A_{v,x}/mc^2$ в энергии взаимодействия между осциллятором и полем при рассмотрении процессов спонтанного и индуцированного излучений и поглощения..

стеме, т. е. в том случае, когда осциллятор нелинеен или когда сила, действующая на осциллятор (электрическое поле), зависит от координаты осциллятора (приближение, учитывающее более высокие мультиполи, кроме диполя). Аналогичная ситуация имеет место (как будет показано ниже) в квантовой теории. Второй член в (2.9) дает интенсивность спонтанного излучения. Эта интенсивность пропорциональна среднему значению энергии осциллятора и равна нулю, если осциллятор невозбужден. Заметим, что в том случае, когда фаза осциллятора случайна и средние значения $\bar{p}(0) = \bar{x}(0) = 0$, интенсивность спонтанного излучения отлична от нуля и пропорциональна средним квадратичным флюктуациям $p(0)$ и $x(0)$. В этом случае поле спонтанного излучения в среднем равно нулю и спонтанное излучение носит шумовой характер. То же можно сказать об индуцированном поле, которое в среднем равно нулю при $\bar{P}_v(0) = \bar{Q}_v(0) = 0$, а интенсивность поглощения поля пропорциональна средним квадратичным флюктуациям поля или средней энергии поля.

В том случае, когда осциллятор взаимодействует с одной модой поля излучения $\omega_v = \omega_0$, множитель

$$\sin \frac{[(\omega_0 - \omega_v) t]}{(\omega_0 - \omega_v)} = t$$

и энергия поля изменяется пропорционально t^2 . Если же поле излучения имеет непрерывный спектр, то $\sin [(\omega_0 - \omega_v) t]/(\omega_0 - \omega_v)$ можно заменить на $\pi \delta(\omega_0 - \omega_v)$ и просуммировать по всем модам. Такое суммирование сводится к интегрированию. Для излучения в свободное пространство — это интегрирование по частотам, углам распространения и суммирование по поляризациям. Число мод в заданном интервале $d\omega$, с заданной поляризацией α и направлением распространения внутри телесного угла $d\Omega$ равно (см., например, [2]):

$$dZ = \frac{\omega^2 d\omega, d\Omega}{(2\pi c)^3} L^3.$$

Полная интенсивность спонтанного излучения равна:

$$\begin{aligned} I_{\text{сп}} &= \frac{e^2}{2mc^2} \int_{4\pi} \frac{d\Omega A_{v,x}^2 \omega_0^2 L^3}{(2\pi c)^3} \left\{ \frac{\bar{p}^2(0)}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} \bar{x}^2(0) \right\} = \\ &= \frac{e^2 \omega^4 \{ \bar{x}^2(0) + \bar{p}^2(0)/m^2 \omega_0^2 \}}{3c^3}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) совпадает с классическим выражением интенсивности спонтанного излучения

$$I = \frac{2}{3c^3} \overline{(d)^2},$$

усредненным по времени. В самом деле, для осциллятора

* Необходимо заменить $A_{v,x} = A_v \cos \theta$, где θ — угол между направлением осциллятора (ось x) и A_v , а затем произвести суммирование по направлениям поляризации, что сводится к замене $\cos^2 \theta$ на $\sin^2 \theta$ (θ — угол между осциллятором и направлением распространения). Элемент телесного угла имеет вид: $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. После интегрирования по половине направлений распространения θ от 0 до $\pi/2$ и φ от 0 до 2π (стоячие волны) и замены $A_v = \sqrt{8\pi/L^3}$ мы приходим к формуле (2.10).

$$d = d_0 \sin(\omega_0 t + \theta); \quad \bar{I} = \frac{2\omega_0^4}{3c^3} d_0^2 \overline{\sin^2(\omega_0 t + \theta)} = \frac{\omega_0^4}{3c^3} d_0^2,$$

а в выражении (2.10) $e^2 [\bar{x}(0)^2 + \bar{p}(0)^2/m^2\omega_0^2]$ есть не что иное, как средний квадрат амплитуды дипольного момента.

Как уже отмечалось выше, в случае гармонического осциллятора (в однородном поле) невозможно отрицательное поглощение, не зависящее от соотношения фаз между полем и осциллятором. Это можно понять из общих соображений [4]. Согласно (2.6), изменение энергии ν -ой моды поля равно с обратным знаком работе поля ν -ой моды над системой

$$\frac{dH_\nu}{dt} = -e(xE(\nu)).$$

Далее x можно разбить на две части—свободную x_0 и индуцированную полем x_1 :

$$x = x_0 + x_1.$$

Работа, совершаемая полем над первой частью ($-x_0$), зависит от соотношения фаз. Индуцированная полем часть x_1 в силу линейности уравнения движения осциллятора будет одной и той же как в случае возбужденного, так и в случае невозбужденного осциллятора. Однако очевидно, что в последнем случае индуцированного излучения не может быть*, следовательно, его и вообще не может быть для линейной системы.

Иная ситуация имеет место для нелинейных систем. В этом случае x_1 существенно зависит от степени возбуждения системы и независящее от соотношения фаз индуцированное излучение возможно. В работе [4] приведено общее рассмотрение поведения нелинейных осцилляторов под действием внешнего поля и показано, что интенсивность индуцированного излучения таких осцилляторов пропорциональна величине

$$M = d \ln \omega_0(E)/dE,$$

где $\omega_0(E)$ —частота осциллятора, зависящая от энергии E . В случае гармонического осциллятора эта величина равна нулю.

В заключение этого раздела заметим, что разделение на спонтанное и индуцированное излучения, вообще говоря, имеет место в приближении теории возмущений для малого интервала времени. Через достаточно большой промежуток времени нарастает поле спонтанного излучения и в свою очередь индуцирует излучение, которое уже нельзя отнести ни к индуцированному, ни к спонтанному. Такая ситуация, например, имеет место для излучения осциллятора в резонаторе, настроенном на частоту осциллятора. С другой стороны, в свободном пространстве (и в достаточно большом резонаторе) можно пренебречь обратным действием собственного излучения и проводить разделение на индуцированное и спонтанное излучение практически в любой момент времени.

3. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПОНТАННОГО И ИНДУЦИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЙ (СИСТЕМА ДВУХУРОВНЕВЫХ МОЛЕКУЛ)

Теперь мы переходим к построению квантовой теории спонтанного и индуцированного излучений.

* За исключением случая, когда скорость осциллятора $v > c_n$ —фазовой скорости света в среде.

В этом разделе мы будем рассматривать излучение совокупности не взаимодействующих между собой (в отсутствие поля излучения) квантовых объектов (для определенности будем говорить—молекул). Если уровни молекул неэквидистантны, то в ряде задач, связанных с излучением, оказывается возможным учитывать только два энергетических уровня (которые мы далее будем считать невырожденными). Поэтому удобно ввести идеализацию молекулы с двумя уровнями*. Все операторы, относящиеся к двухуровневой молекуле, представляются двухрядными и двухстрочными матрицами. Такие матрицы, если на них еще наложить условие эрмитовости, могут быть представлены в виде линейной комбинации спиновых операторов \hat{r}_i и единичного оператора

$$\hat{Q} = a\hat{I} + b\hat{r}_1 + c\hat{r}_2 + d\hat{r}_3,$$

где a, b, c, d —постоянные коэффициенты. Операторы \hat{r}_i в представлении, в котором \hat{r}_3 диагонален, имеют вид:

$$\hat{r}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{r}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{r}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следует подчеркнуть, что \hat{r}_i , вообще говоря, не совпадает с обычным спином $1/2$, представляющим собственный момент количества движения. В работе [6] этот спин назван (в отличие от обычного) энергетическим. В частности, можно показать [6], что энергия взаимодействия одной молекулы с полем излучения в дипольном приближении имеет вид**:

$$V_j = -\hat{\mathbf{A}}(j)(\mathbf{e}_1\hat{r}_{1j} + \mathbf{e}_2\hat{r}_{2j}),$$

где $\hat{\mathbf{A}}(j)$ —оператор вектор-потенциала электромагнитного поля, \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 —константы, характеризующие молекулу. Дипольный момент молекулы выражается через \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \hat{r}_1 и \hat{r}_2 в виде [6]:

$$\frac{1}{c}\hat{\mathbf{d}}_j = \mathbf{e}_1\hat{r}_{1j} + \mathbf{e}_2\hat{r}_{2j}.$$

Из этого соотношения, в частности, находим, что

$$\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2 = \frac{2i\omega_0}{c}\hat{\mathbf{d}}_{21}; \quad \mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2 = -\frac{2i\omega_0}{c}\hat{\mathbf{d}}_{12}.$$

Нетрудно видеть, что энергия j -ой молекулы может быть выражена как

$$\hat{E}_j = \hbar\omega_0\hat{r}_{3j}.$$

Мы далее будем считать, что все молекулы имеют одинаковую разность энергетических уровней, равную $\hbar\omega_0$. В том случае, когда размеры системы молекул много меньше длины волны (для простоты из-

* Следует иметь в виду, что возможность введения такой идеализации, вообще говоря, связана с квантовыми свойствами системы. В самом деле, квазиклассические системы обладают квазиэквидистантным спектром (см., например, [3]).

** Здесь отброшен член энергии взаимодействия с $\hat{\mathbf{A}}^2$ (см. по этому поводу сноску на стр. 213).

ложеия мы пока ограничиваемся этим случаем дипольного приближения), гамильтониан системы молекул, которая взаимодействует с полем излучения, запишется в виде*:

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 \hat{R}_3 + \frac{1}{2} \sum (\hat{P}_v^2 + \omega_v^2 \hat{Q}_v) - (A e_1) \hat{R}_1, \quad (3.1)$$

где оператор \hat{R}_1 есть суммарный энергетический спин**:

$$\hat{R}_1 = \sum_j \hat{r}_{1j}; \quad \hat{R}_2 = \sum_j \hat{r}_{2j}; \quad \hat{R}_3 = \sum_j \hat{r}_{3j}.$$

Квантовые уравнения движения, следующие из этого гамильтониана, имеют вид***:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{P}}_v &= -\omega_v^2 \hat{Q}_v + (e A_v) \hat{R}_1; & \dot{\hat{Q}}_v &= \hat{P}_v; \\ \dot{\hat{R}}_1 &= -\omega_0 \hat{R}_2; & \dot{\hat{R}}_2 &= \omega_0 \hat{R}_1 + \frac{(A e_1)}{\hbar} \hat{R}_3; & \dot{\hat{R}}_3 &= -\frac{1}{\hbar} (A e) \hat{R}_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так же, как и в классическом случае (см. раздел 2), будем решать эти операторные уравнения в приближении теории возмущения, считая e малым параметром. Для этого перейдем к соответствующим интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} \hat{P}_v &= \hat{P}_v^{(0)} + (A, e_1) \int_0^t \hat{R}_1(t_1) \cos [\omega_v(t-t_1)] dt_1; \\ \hat{Q}_v &= \hat{Q}_v^{(0)} + \frac{1}{\omega_v} (A, e_1) \int_0^t \hat{R}_1(t_1) \sin [\omega_v(t-t_1)] dt_1; \\ \hat{R}_1 &= \hat{R}_1^{(0)} - \frac{e_1}{\hbar} \int_0^t \hat{A}(t_1) \hat{R}_3(t_1) \sin [\omega_0(t-t_1)] dt_1; \\ \hat{R}_2 &= \hat{R}_2^{(0)} + \frac{e_1}{\hbar} \int_0^t \hat{A}(t_1) \hat{R}_3(t_1) \cos [\omega_0(t-t_1)] dt_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

* Для простоты мы положили $e_2 = 0$, что соответствует линейной поляризации дипольного момента молекулы.

** Заметим, что в том случае, когда двухуровневая система есть обычный спин в постоянном магнитном поле, энергетический спин совпадает с ним. Уравнения (3.2) при этом переходят в уравнения, описывающие прецессию магнитного момента в постоянном магнитном поле и в переменном электромагнитном поле. Для наглядности можно всегда иметь в виду именно этот случай. Заметим также, что R_3 имеет смысл половины разности населенностей верхнего и нижнего уровней молекулы. В случае магнитной системы R_3 пропорционально z -компоненте магнитного момента (ось z направлена по внешнему полю).

*** Напомним, что уравнения движения записываются для операторов в гайзенберговском представлении, которым мы сейчас пользуемся. Производная оператора A находится по правилу $\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H} \hat{A}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$. Это соотношение, а также перестановочные соотношения для компонент спина и операторов поля $[\hat{R}_1, \hat{R}_2] = i\hat{R}_3$; $[\hat{R}_2, \hat{R}_3] = i\hat{R}_1$; $[\hat{R}_3, \hat{R}_1] = i\hat{R}_2$; $[P_v, Q_\lambda] = -i\hbar \delta_{v\lambda}$ позволяют вывести уравнения (3.2).

Так же, как и в классическом случае, нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что уравнения (3.3), (3.4) удовлетворяют исходным уравнениям (3.2). В „нулевом“ приближении (в отсутствие взаимодействия) решения уравнений (3.2) имеют вид:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_v^{(0)} &= \hat{Q}_v(0) \cos(\omega_v t) + \frac{\hat{P}_v(0)}{\omega_v} \sin(\omega_v t); \\ \hat{P}_v^{(0)} &= \hat{P}_v(0) \cos(\omega_v t) - \omega_v \hat{Q}_v(0) \sin(\omega_v t); \\ \hat{R}_1^{(0)} &= \hat{R}_1(0) \cos(\omega_0 t) - \hat{R}_2(0) \sin(\omega_0 t); \\ \hat{R}_2^{(0)} &= \hat{R}_1(0) \sin(\omega_0 t) + \hat{R}_2(0) \sin(\omega_0 t); \quad \hat{R}_3^{(0)} = \hat{R}_3(0),\end{aligned}\tag{3.5}$$

в чем также можно убедиться прямой подстановкой. В первом приближении

$$\begin{aligned}\hat{Q}_v^{(1)} &= \frac{(\mathbf{A}_v, \mathbf{e}_1)}{\omega_v} \int_0^t \hat{R}_1^{(0)}(t_1) \sin[\omega_v(t - t_1)] dt_1 \approx \frac{(\mathbf{A}_v, \mathbf{e}_1)}{2\omega_v} \frac{\sin[(\omega_v - \omega_0)t]}{(\omega_v - \omega_0)} \times \\ &\quad \times [\hat{R}_1(0) \sin(\omega_v t) + \hat{R}_2(0) \cos(\omega_v t)]; \\ \hat{P}_v^{(1)} &= (\mathbf{A}_v, \mathbf{e}_1) \int_0^t \hat{R}_1^{(0)}(t) \cos[\omega_v(t - t_1)] dt_1 \approx \frac{(\mathbf{A}_v, \mathbf{e}_1)}{2} \frac{\sin[(\omega_v - \omega_0)t]}{(\omega_v - \omega_0)} \times \\ &\quad \times [\hat{R}_1(0) \cos(\omega_v t) - \hat{R}_2(0) \sin(\omega_v t)]; \\ \hat{R}_1^{(1)} &= -\frac{\mathbf{e}_1}{\hbar} \hat{R}_3(0) \sum_{\lambda} \mathbf{A}_{\lambda} \int_0^t \hat{Q}_{\lambda}^{(0)}(t_1) \sin[\omega_0(t - t_1)] dt_1; \\ \hat{R}_2^{(1)} &= -\frac{1}{\omega_0} \dot{\hat{R}}_1^{(1)}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Электромагнитное поле во втором приближении имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{Q}_v^{(2)} &= -\frac{(\mathbf{A}_v, \mathbf{e}_1)}{\hbar \omega_v} \hat{R}_3(0) \sum_{\lambda} (\mathbf{e}_1 \mathbf{A}_{\lambda}) \int_0^t dt_1 \sin[\omega_v(t - t_1)] \times \\ &\quad \times \int_0^t dt_2 \hat{Q}_{\lambda}^{(0)}(t_2) \sin[\omega_0(t_2 - t_1)]; \\ \hat{P}_v^{(2)} &= -\frac{(\mathbf{A}_v, \mathbf{e}_1)}{\hbar} \hat{R}_3(0) \sum_{\lambda} (\mathbf{e}_1 \mathbf{A}_{\lambda}) \int_0^t dt_1 \cos[\omega_v(t - t_1)] \times \\ &\quad \times \int_0^t dt_2 \hat{Q}_{\lambda}^{(0)}(t_2) \sin[\omega_0(t_2 - t_1)].\end{aligned}\tag{3.7}$$

Прежде, чем перейти к обсуждению полученных решений, найдем изменение во времени оператора энергии электромагнитного поля ν -ой моды:

$$\hat{H}_\nu = \frac{1}{2} (\hat{P}_\nu^2 + \omega_\nu^2 \hat{Q}_\nu^2).$$

Производная этой величины находится обычным образом с помощью квантовых скобок Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{H}_\nu}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{H}_\nu] = \frac{i}{\hbar} \hat{R}_1 \left[-\sum (e_i A_\lambda) \hat{Q}_\lambda, \hat{H}_\nu \right] = \\ &= -\frac{i}{\hbar} (e_i A_\nu) \hat{R}_1 \frac{1}{2} [\hat{Q}_\nu, \hat{P}_\nu] = (e_i A_\nu) \hat{R}_1 \hat{P}_\nu. \end{aligned} \quad (3.8)$$

С точностью до членов второго порядка малости включительно находим:

$$\frac{d\hat{H}_\nu}{dt} = (e_i A_\nu) \hat{R}_1^{(0)} \hat{P}_\nu^{(0)} + (e_i A_\nu) \hat{R}_1^{(1)} \hat{P}_\nu^{(0)} + (e_i A_\nu) \hat{R}_1^{(0)} \hat{P}_\nu^{(1)}. \quad (3.9)$$

Таким образом, мы нашли изменение во времени как операторов поля \hat{P}_ν и \hat{Q}_ν , так и операторов \hat{H}_ν энергии поля. Однако операторы не имеют непосредственного физического смысла. Физический смысл имеют различные средние значения этих операторов, взятые в соответствующем квантовом ансамбле. Для того, чтобы найти зависимость от времени этих средних значений, необходимо задать начальное квантовое состояние поля излучения и молекул. Это означает, что необходимо задать волновую функцию (или матрицу плотности) начального состояния.

Будем предполагать, что волновая функция (матрица плотности) начального состояния известна. Часть решений (3.5)–(3.7) зависит линейно от операторов поля и молекул. Усреднение таких решений сводится просто к замене операторов их средними значениями. Так, например, среднее значение невозмущенного поля равно

$$\overline{\hat{Q}_\nu^{(0)}}(t) = \overline{Q_\nu(0)} \cos(\omega_\nu t) + \frac{\overline{P_\nu(0)}}{\omega_\nu} \sin(\omega_\nu t);$$

$$\overline{\hat{P}_\nu^{(0)}} = \overline{P_\nu(0)} \cos(\omega_\nu t) - \omega_\nu \overline{Q_\nu(0)} \sin(\omega_\nu t)$$

и т. п.

Для того, чтобы определить среднее значение величин типа $\hat{R}_3(0) \hat{Q}_\nu(0)$, входящих в правую часть (3.6), (3.7), сделаем дополнительное предположение о том, что в момент времени $t = 0$ волновая функция системы (или матрица плотности системы) разбивается на произведение волновых функций (матриц плотности) молекул и поля. Другими словами, сделаем предположение о статистической независимости поведения молекул и поля в момент времени $t = 0$. В этом случае

$$\overline{\hat{R}_3(0) \hat{Q}_\nu(0)} = \overline{R_3(0)} \overline{Q_\nu(0)}; \quad \overline{\hat{R}_3(0) \hat{P}_\nu(0)} = \overline{R_3(0)} \overline{P_\nu(0)}. \quad (3.10)$$

Пользуясь этими соотношениями, мы можем выразить все средние величины через начальные значения этих средних величин. Если сред-

ние значения $\overline{R_1(0)}$ и $\overline{R_2(0)}$ отличны от нуля, то средние значения $\overline{Q_v^{(1)}}$ и $\overline{P_v^{(1)}}$, представляющие поле спонтанного излучения, также отличны от нуля. Далее, если отличны от нуля средние значения $\overline{P_v(0)}$ и $\overline{Q_v(0)}$, то отлично от нуля среднее индуцированное поле $\overline{Q_v^{(2)}}$ и $\overline{P_v^{(2)}}$. В этом случае (когда среднее поле излучения не равно нулю) о характере поля излучения (точнее, о среднем значении) можно повторить все, что было сказано о поле спонтанного и индуцированного излучения в классическом случае (см. раздел 2).

С другой стороны, если молекулы и поле в начальный момент $t = 0$ находились в стационарном состоянии (соответствующем невозмущенному гамильтониану), то средние значения

$$\overline{R_1(0)} = \overline{R_2(0)} = 0; \quad \overline{P_v(0)} = \overline{Q_v(0)} = 0;$$

то же будет, если система описывается матрицей плотности, диагональной в энергетическом представлении*. В этом случае среднее поле спонтанного и индуцированного излучений равно нулю. Конечно, при этом средние квадраты полей и энергия поля отличны от нуля. Это поле имеет чисто шумовой флюктуационный характер; его классическим аналогом является поле с совершенно случайной фазой, рассмотренное во втором разделе. Обычно при квантовом рассмотрении спонтанного и индуцированного излучений [2] предполагают, что в начальный момент атом (молекула) находится в определенном энергетическом состоянии, а в поле излучения находится определенное число фотонов. Очевидно, что это и есть тот случай, когда среднее поле равно нулю.

Рассмотрим изменение энергии поля излучения. Среднее значение члена первого порядка малости в правой части (3.9) отлично от нуля, если отличны от нуля средние значения $\overline{R_1^{(0)}}$ и $\overline{P_v^{(0)}}$. Производя указанное выше (в разделе 2) усреднение по времени, получаем выражение, аналогичное классическому выражению (2.8):

$$\left(\frac{dH_v}{dt_1} \right)_1 = (e_1 A_v) (\overline{R_1(0)} \overline{P_v(0)} + \omega_v \overline{R_2(0)} \overline{Q_v(0)}). \quad (3.11)$$

Это выражение, как и в классической теории, может принимать положительное и отрицательное значения в зависимости от соотношения между фазами $\overline{R_1^{(0)}}(t)$ и $\overline{P_v^{(0)}}(t)$ (или, что же самое, в зависимости от средних значений начальных амплитуд $\overline{R_1(0)}$, $\overline{R_2(0)}$, $\overline{P_v(0)}$ и $\overline{Q_v(0)}$).

Если среднее значение поля $\overline{Q_v(0)}$, $\overline{P_v(0)}$ равно нулю (или равны нулю средние амплитуды всех мод, кроме одной), то

$$\overline{P_v(0)} \overline{P_\lambda(0)} = \delta_{v\lambda} \overline{P_v^2(0)}; \quad \overline{Q_v(0)} \overline{Q_\lambda(0)} = \delta_{v\lambda} \overline{Q_v^2(0)}. \quad (3.12)$$

* В этом легко убедиться непосредственно, если учесть, что в стационарном состоянии (с определенной энергией) диагональные матричные элементы величины R_1 , R_2 , P_v и Q_v равны нулю (эти диагональные элементы равны средним значениям этих величин). Это утверждение остается в силе и для состояния с матрицей плотности ρ , диагональной в энергетическом представлении:

$$\overline{Q_v} = \sum \rho_{nn} Q_{vn} = 0; \quad \overline{P_v} = \sum \rho_{nn} P_{vn} = 0$$

Чтобы получить интенсивность излучения (на ν -ой моде), нужно усреднить выражение (3.9) по квантовому ансамблю и времени. Используя соотношения (3.12), в результате усреднения получаем (учитывая второй и третий члены [3,5]):

$$\left(\frac{d\bar{H}_\nu}{dt} \right)_2 = \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_\nu) t]}{(\omega_0 - \omega_\nu)} \frac{(e_1 A_\nu)^2}{4} \left[\overline{R_1^2(0)} + \overline{R_2^2(0)} + \right. \\ \left. + \frac{\overline{R_3(0)}}{\hbar \omega_\nu} (\overline{P_\nu^2(0)} + \omega_\nu^2 \overline{Q_\nu^2(0)}) \right]. \quad (3.13)$$

Обсудим это выражение. Так же, как и в классическом случае, если молекулярная система взаимодействует только с одной модой резонатора (а остальные достаточно далеко разнесены по частоте), то при $\omega_\nu = \omega_0$

$$\frac{\sin [(\omega_0 - \omega_\nu) t]}{(\omega_0 - \omega_\nu)} = t;$$

интенсивность излучения пропорциональна t , а энергия излучения возрастает как t^2 . Если же поле излучения образует непрерывный спектр, то полная интенсивность излучения получается суммированием $d\bar{H}_\nu/dt$ по различным модам, что сводится, в частности, к интегрированию по частотам. При этом можно $\sin [(\omega_0 - \omega_\nu) t]/(\omega_0 - \omega_\nu)$ заменить на $\pi \delta(\omega_0 - \omega_\nu)$. В результате полная интенсивность излучения оказывается не зависящей от времени, а энергия поля возрастает пропорционально t .

Выделим из выражения (3.13) интенсивность спонтанного излучения. Последняя получается при условии, что в начальный момент времени поле излучения находилось в состоянии вакуума. Это отнюдь не означает, что энергия поля излучения

$$\bar{H}_\nu(0) = \frac{1}{2} [\overline{P_\nu^2(0)} + \omega_\nu^2 \overline{Q_\nu^2(0)}] \quad (3.14)$$

обращается в нуль. В самом деле, средняя энергия поля излучения ν -ой моды имеет вид (см., например, [2])

$$\bar{H}_\nu(0) = \left(\bar{n}_\nu + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_\nu, \quad (3.15)$$

где \bar{n}_ν — среднее число фотонов ν -ой моды. Член $\hbar \omega_\nu / 2$ есть так называемая нулевая энергия осциллятора поля. При данном выборе гамильтонiana нулевая энергия поля может служить мерой нулевых флюктуаций поля, т. е. величин $\overline{P_\nu^2(0)}$ и $\overline{Q_\nu^2(0)}$. Вообще же говоря, нулевая энергия поля не связана с флюктуациями вакуума. В самом деле, можно произвести преобразование гамильтонiana поля

$$H'_\nu = H_\nu - \frac{1}{2} \hbar \omega_\nu.$$

В результате такого преобразования уравнения движения остаются неизменными, а нулевая энергия исчезает. Используя (3.13), (3.14) и (3.15), находим для интенсивности спонтанного излучения выражение:

$$I_s^s = \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_s) t]}{(\omega_0 - \omega_s)} \frac{(e_1 A_s)}{4} [\overline{R_1^2(0)} + \overline{R_2^2(0)} + \overline{R_3^2(0)}]. \quad (3.16)$$

Оставшаяся часть интенсивности излучения (3.13) обязана индуцированному испусканию или поглощению:

$$I_s^i = \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_s) t]}{(\omega_0 - \omega_s)} \frac{(e_1 A_s)}{4} n \overline{R_3(0)}. \quad (3.17)$$

В зависимости от знака $\overline{R_3(0)}$ — величины, имеющей смысл половины разности населеностей верхнего и нижнего уровней молекулы, будет иметь место индуцированное испускание или поглощение. Более подробное обсуждение формул спонтанного и индуцированного испускания, а также связь этих выражений с соответствующими классическими соотношениями мы перенесем в следующий раздел.

4. ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ

Как известно, переход от квантовой теории к классике осуществляется при больших квантовых числах. Однако, вообще говоря, движение, описываемое волновой функцией, не переходит при этом в движение по определенной траектории. Только для специального вида волновых функций, представляющих волновой пакет, размеры которого стремятся к нулю в формальном пределе $\hbar \rightarrow 0$, имеет место переход к классической траектории. В общем случае можно только утверждать, что в классическом пределе распределение вероятностей различных значений величин будет изменяться по законам классической механики*. Величины $Q(0)$ и $P(0)$ подчиняются соотношению неопределенностей

$$\Delta Q(0) \Delta P(0) \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (4.1)$$

Если поле находится в стационарном состоянии с энергией $\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_s$, то между неопределенностями ΔQ и ΔP имеет место соотношение (см., например, [7]):

$$\Delta Q(0) \Delta P(0) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar. \quad (4.2)$$

Нетрудно получить, что в таком состоянии фаза излучения совершенно не определена. Однако при большом n (классический предел) достаточно точное измерение $\Delta Q(0)$ и $\Delta P(0)$ приводит к состоянию с хорошо определенной фазой и амплитудой (удовлетворяющим соотношению (4.1), а не (4.2)). Поэтому можно сказать, что рассматриваемое состояние эквивалентно ансамблю классических полей со случайными фазами. Усреднение с помощью волновой функции (матрицы плотности) соответствует усреднению по этому классическому ансамблю.

После этих замечаний перейдем к сравнению классических и квантовых выражений для интенсивности излучения, т. е. к установлению

* В классической механике вероятность можно определить как плотность распределения фазовых точек системы. Каждая точка при этом перемещается согласно уравнениям классической динамики.

принципа соответствия. Прежде всего произведем разделение полной интенсивности излучения (3.9), (3.11) и (3.13) на флюктуационную (шумовую) и регулярную части. Шумовой частью излучения мы будем называть часть, связанную с флюктуациями поля излучения и пропорциональную средним квадратичным флюктуациям поля и дипольного момента. Остальную часть излучения, связанную с отличными от нуля средними значениями дипольного момента и поля, будем называть регулярной частью излучения:

$$\begin{aligned} I_v &= I_v^{\text{шум}} + I_v^{\text{рег}} ; \\ I_v^{\text{шум}} &= \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_v) t]}{(\omega_0 - \omega_v)} \frac{(e_1 A_v)^2}{4} \left[\overline{\Delta R_1^2} + \overline{\Delta R_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\overline{R_3(0)}}{\hbar \omega_v} (\overline{\Delta P_v^2(0)} + \omega_v^2 \overline{\Delta Q_v^2(0)}) \right] ; \\ I_v^{\text{рег}} &= (e_1 A_v) (\overline{R_1(0)} \overline{P_v(0)} + \omega_v \overline{R_2(0)} \overline{Q_v(0)}) + \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_v) t]}{(\omega_0 - \omega_v)} \times \\ &\quad \times \frac{(e_1 A_v)}{4} \left[\overline{R_1(0)^2} + \overline{R_2(0)^2} + \frac{\overline{R_3(0)}}{\hbar \omega_v} (\overline{P_v(0)^2} + \omega_v^2 \overline{Q_v(0)^2}) \right] , \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\overline{\Delta R_i^2} = \overline{R_i^2} - \overline{R_i}^2$ и т. д.

Когда молекулы и поле в начальный момент находятся в невозмущенных стационарных состояниях, регулярная часть излучения равна нулю. Полное излучение обращается в нуль, если молекулы и поле находятся в основном состоянии. Нетрудно убедиться, что интенсивность регулярного спонтанного излучения

$$I_v^{\text{рег}} = \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_v) t]}{(\omega_0 - \omega_v)} \frac{(e_1 A_v)}{4} (\overline{R_1(0)^2} + \overline{R_2(0)^2}) \quad (4.4)$$

совпадает с классической интенсивностью спонтанного излучения осциллирующего дипольного момента. Для этого воспользуемся формулой, связывающей R_1 , R_2 с дипольным моментом ($e_2 = 0$),

$$\frac{1}{c} \ddot{d} = e_1 R_1 = e_1 [\overline{R_1(0)} \cos(\omega_0 t) - \overline{R_2(0)} \sin(\omega_0 t)]. \quad (4.5)$$

После подстановки этой формулы в выражение для классической интенсивности спонтанного излучения v -ой моды мы получаем формулу (4.4). Такое полное соответствие классической и квантовой формул связано с линейностью уравнений Максвелла (3.3) с заданными источниками.

Рассмотрим случай одной двухуровневой молекулы:

$$R_1^2 = \frac{1}{4}; \quad R_2^2 = \frac{1}{4}; \quad R_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Если молекула находится на верхнем уровне, то $R_3 = 1/2$, все спонтанное излучение молекулы есть шумовое излучение, $I_v^{\text{рег}} = 0$ и шумовая часть из (4.3) принимает вид:

$$I_v^{\text{шум}} = I_{v0}^s \left[\frac{1}{2} + R_3 \frac{\overline{P_v^2(0)} + \omega_v^2 \overline{Q_v^2(0)}}{\hbar \omega_v} \right] = I_{v0}^s.$$

В этом случае нулевые флюктуации поля $\hbar\omega_v/2$ индуцируют ровно половину излучения, другая половина связана с нулевыми флюктуациями дипольного момента $R_1^2 + R_2^2 = 1/2$. Если молекула находится на нижнем уровне ($R_3 = -1/2$), нулевые флюктуации поля вызывают поглощение, которое как раз компенсирует излучение, связанное с нулевыми флюктуациями дипольного момента. Следует подчеркнуть, что иногда спонтанное излучение приписывают целиком нулевым флюктуациям поля (см., например, [8]). Критика такого утверждения содержится в работе [9]; однако в этой работе не принято во внимание то обстоятельство, что нулевые флюктуации поля все же участвуют в создании спонтанного излучения.

Продолжим обсуждение принципа соответствия.

Проведем сравнение формул для интенсивности полного излучения гармонического осциллятора в квантовом и классическом случае. Для того, чтобы получить излучение квантового осциллятора, заметим, что квантовые уравнения (3.2) переходят в соответствующие уравнения для квантового осциллятора, взаимодействующего с полем излучения, если произвести следующую замену:

$$\begin{aligned} \hat{R}_3 &\rightarrow \overline{R_3(0)}; \quad \hat{R}_1 \longleftrightarrow \sqrt{\frac{-R_3(0)}{m\hbar\omega_0}} \hat{p}_x; \quad R_2 \rightarrow \sqrt{-\frac{\overline{R_3(0)m\omega_0}}{\hbar}} \hat{x}; \\ e_1 &\rightarrow \frac{e}{c} \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{-m\overline{R_3(0)}}} i. \end{aligned}$$

При этом для эрмитовости операторов \hat{R}_1 , \hat{R}_2 , \hat{p}_x и \hat{x} необходимо, чтобы $\overline{R_3(0)}$ было отрицательным.

Такая замена есть, по существу, линеаризация уравнений (3.2) относительно состояния с $\overline{R_3(0)} < 0$. Из таких линеаризированных уравнений будут вытекать все последующие соотношения и, в частности, выражение для интенсивности излучения (3.13). Производя в этом выражении ту же замену, находим:

$$\begin{aligned} \frac{dH_v}{dt} &= \frac{e^2}{2mc^2} A_{v,x}^2 \frac{\sin[(\omega_0 - \omega_v)t]}{(\omega_0 - \omega_v)} \left\{ \left[\frac{\overline{p_x^2(0)}}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} \overline{x^2(0)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\overline{P_v^2(0)} + \omega_v^2 \overline{Q_v^2(0)}] \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

что совпадает с классическим выражением (2.9) с точностью до того, что в формуле (4.6) черта означает квантово-механическое усреднение. Такое усреднение автоматически приводит к учету нулевых флюктуаций поля и осциллятора, о чем уже говорилось выше.

Классическое выражение для интенсивности спонтанного излучения (2.10) не учитывает нулевые флюктуации поля и поэтому не применимо для слабовозбужденных состояний осциллятора, когда его энергия сравнима с $\hbar\omega_0$. С этим связано то обстоятельство, что при обычной формулировке принципа соответствия [2] появляется множитель $1/2$ (не учтена другая половина вклада в спонтанное излучение—ну-

левые флюктуации поля). Заметим, что если воспользоваться классическим выражением для интенсивности излучения (2.9), но учесть нулевые флюктуации поля и дипольного момента, то при таком полу-классическом подходе получается правильное выражение и в квантовой области.

Из квантового выражения (4.6) следует, что индуцированное испускание, вызываемое полем со случайной фазой $\bar{P}_s(0)=\bar{Q}_s(0)$, невозможно для линейного осциллятора. Это связано с тем, что линейному осциллятору соответствует случай $\bar{R}_3(0) < 0$. Возможность отрицательного поглощения для системы, описываемой энергетическим спином (при $\bar{R}_3(0) > 0$), связана как раз с нелинейными свойствами такой системы. Система, описываемая энергетическим спином, имеет ограниченное число эквидистантных уровней, равное $2R+1$, в отличие от линейного осциллятора, который имеет эквидистантный спектр с неограниченным числом уровней. В частности, при $R = 1/2$ молекула имеет всего два уровня. Это приводит к ограниченности амплитуды (в то время как амплитуда гармонического осциллятора не ограничена). Если гармонический осциллятор находится на каком-то заданном энергетическом уровне, то всегда имеется уровень, расположенный выше этого уровня, причем вероятность перехода на высокий уровень под действием поля излучения больше, чем вероятность перехода на нижний уровень. С другой стороны, если двухуровневая, к примеру, система находится на верхнем уровне, то имеется только вероятность перехода на нижний уровень, т. е. отрицательное поглощение (при любом соотношении фаз).

Остановимся коротко на вопросе о фазовых соотношениях между индуцированным и индуцирующим полем. В классическом случае, как это видно из решений (2.5), между индуцирующим („невозмущенным“) полем и полем индуцированного излучения имеются определенные фазовые соотношения — $\bar{Q}^{(2)}$ связано с $\bar{Q}^{(0)}$. В квантовой теории ситуация несколько сложнее, так как поле излучения может не иметь определенной фазы. Однако при достаточно большой амплитуде поля излучения фазу можно считать хорошо определенной, и в этом случае решение (3.7) приводит к соотношениям, аналогичным классическим соотношениям (2.5). (Отличие может состоять в знаке $R_3(0)$.)

В заключение настоящего раздела отметим, что имеется гораздо большее соответствие между классическим и квантовым спонтанным и индуцированным излучениями, чем это обычно отмечается. В частности, регулярные части излучения подчиняются одним и тем же соотношениям. С другой стороны, часто, когда говорят о классическом аналоге индуцированного испускания, приводят пример с осциллятором, который находится в определенном фазовом отношении с полем (см., например, [2]). В то же время это излучение сравнивают с квантовой формулой, которая уже усреднена по фазам. Конечно, и в классической теории имеется независящее от фаз индуцированное испускание, но оно, как и в квантовом случае, связано с нелинейностью.

5. ИЗЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ, УРОВНИ КОТОРОЙ ОБРАЗУЮТ НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

До сих пор мы рассматривали, излучение систем с дискретным энергетическим спектром и в дипольном приближении. Сейчас мы избавимся от этих ограничений и перейдем к рассмотрению излучения произвольной системы (которую мы условно будем продолжать называть молекулой). Гамильтониан молекулы, взаимодействующей с излучением, запишем в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{1}{2} \sum_v (\hat{P}_v^2 + \omega_v^2 \hat{Q}_v^2) - \sum_v \hat{B}_v \hat{Q}_v, \quad (5.1)$$

где \hat{H}_0 — гамильтониан невозмущенной молекулы,

$$\hat{A}_v = \sum_{s=1}^n \frac{e_s}{m_s c} (\hat{p}_s A_v(s)),$$

e_s , m_s , p_s — соответственно заряд, масса и импульс s -ой частицы молекулы, $A_v(s)$ — значение собственного вектора A_v v -ой моды в месте нахождения s -ой частицы. Так же, как и в предыдущем разделе, находим оператор производной энергии v -ой моды поля излучения

$$\frac{d\hat{H}_v}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{H}_v] = \hat{B}_v \hat{P}_v. \quad (5.2)$$

Далее мы найдем среднее значение этой величины. Для этого воспользуемся уравнением Неймана для матрицы плотности в представлении взаимодействия:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{V}, \hat{\rho}].$$

Решение этого уравнения в первом приближении теории возмущений имеет вид^{*}:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [\hat{V}(t_1), \hat{\rho}(0)] dt_1. \quad (5.3)$$

Среднее значение интенсивности излучения с точностью до членов второго порядка малости равно^{**}:

$$\frac{d\overline{H_v}}{dt} = \overline{B_v(t) P_v(t)} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \text{Sp} [\hat{V}(t_1), \hat{\rho}(0)] \hat{B}_v(t) \hat{P}_v(t) dt_1. \quad (5.4)$$

Воспользовавшись свойством шпура произведения операторов

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Sp}(\hat{B}\hat{A}),$$

а также тем, что в нашем случае

$$\hat{V} = - \sum_\lambda \hat{B}_\lambda \hat{Q}_\lambda,$$

* Здесь, так же как и в предыдущем разделе, мы находим изменение энергии с точностью до второго приближения теории возмущений, а для этого достаточно знать матрицу плотности в первом приближении.

** Так же, как и раньше, мы предполагаем, что в начальный момент времени $t=0$ матрица плотности имеет вид:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_m(0) \hat{\rho}_f,$$

где $\hat{\rho}_m$ и $\hat{\rho}_f$ — соответственно матрицы плотности молекулы и поля.

после несложных преобразований приходим к следующему выражению для второго члена в правой части (5.4):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dH_v}{dt} \right)_2 = & \frac{i}{\hbar} \sum_{\lambda} \int_0^t \overline{\{B_v(t) B_{\lambda}(t_1) P_v(t) Q_{\lambda}(t_1)\}} - \\ & - \overline{\{B_{\lambda}(t_1) B_v(t) Q_{\lambda}(t_1) P_v(t)\}} dt_1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где черта означает усреднение с помощью матрицы плотности $\hat{\rho}(0)$. В представлении взаимодействия, которым мы здесь пользуемся, зависимость от времени определяется оператором Гамильтона невозмущенной системы. Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{P}_v(t) &= \hat{P}_v(0) \cos(\omega_v t) - \omega_v \hat{Q}_v(0) \sin(\omega_v t); \\ \hat{Q}_v(t) &= \hat{Q}_v(0) \cos(\omega_v t) + \frac{\hat{P}_v(0)}{\omega_v} \sin(\omega_v t); \\ \hat{B}_v(t) &= e^{i\hat{H}_0 t / \hbar} \hat{B}_v(0) e^{-i\hat{H}_0 t / \hbar}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Отсюда находим (по определению среднего)

$$\begin{aligned} \overline{\{B_v(t) B_{\lambda}(t_1)\}} &= \sum_n \left\{ e^{i\hat{H}_0 t / \hbar} \hat{B}_v(0) e^{i\hat{H}_0(t-t_1) / \hbar} \hat{B}_{\lambda}(0) e^{-i\hat{H}_0 t_1 / \hbar} \hat{\rho}(0) \right\}_{nn} = \\ &= \sum_{nkl} B_{vnk} B_{\lambda kl} \rho_{ln} e^{i(\omega_n k t + \omega_k l t)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

и аналогично

$$\overline{\{B_{\lambda}(t_1) B_v(t)\}} = \sum_{nkl} B_{\lambda nk} B_{vn l} \rho_{ln} e^{i(\omega_n k t_1 + \omega_l t)} \quad (5.8)$$

(для простоты мы опустили аргумент $t = 0$).

В выражениях (5.7), (5.8) под ρ нужно понимать матрицу плотности молекулы. Полное изменение энергии поля v -ой моды имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dH_v}{dt} = & \overline{\{B_v(t) P_v(t)\}} + \frac{i}{\hbar} \sum_{\lambda} \int_0^t \overline{\{B_v(t) B_{\lambda}(t_1) P_v(t) Q_{\lambda}(t_1)\}} - \\ & - \overline{\{B_{\lambda}(t_1) B_v(t) Q_{\lambda}(t_1) P_v(t)\}} dt_1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Это выражение связывает средние значения невозмущенных полей и молекулы с изменением энергии поля из-за взаимодействия. Первый член в этом выражении аналогичен члену (3.11) и зависит от соотношения фаз между дипольным моментом (или более общей характеристикой молекулы B_v) и полем излучения v -ой моды. Второй член дает изменение энергии поля, обусловленной флюктуационными характеристиками молекулы и поля — корреляциями $\overline{B_v(t) B_{\lambda}(t_1)}$, $\overline{Q_{\lambda}(t_1) P_v(t)}$ и др.

Далее мы рассмотрим частный случай, когда матрица плотности молекулы (при $t=0$) диагональна, а флюктуации поля удовлетворяют условию

$$\bar{P}_v(t) \bar{Q}_\lambda(\bar{t}_1) = \delta_{v\lambda} \bar{P}_v(t) Q_v(t_1); \quad \bar{Q}_\lambda(t_1) \bar{P}_v(\bar{t}) = \delta_{v\lambda} \bar{Q}_v(t_1) P_v(t) \quad (5.10)$$

(последнее, в частности, имеет место, если средние поля всех мод за исключением может быть одной равны нулю). В этом случае, проводя преобразования, аналогичные проделанным в предыдущих разделах, после усреднения по времени, много большему периода излучения $2\pi/\omega_v$, получаем:

$$I_v = \frac{dH_v}{dt} = \pi \sum_{nk} |B_{v,nk}|^2 \delta(\omega_{nk} - \omega_v) \left\{ \frac{1}{2} \frac{\bar{P}_v^2 + \omega_v^2 \bar{Q}_v^2}{\hbar \omega_v} (\rho_n - \rho_k) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\rho_n + \rho_k) \right\} = \pi \sum_{nk} |B_{v,nk}|^2 \delta(\omega_{nk} - \omega_v) \{ \bar{n}_v (\rho_n - \rho_k) + \rho_n \}. \quad (5.11)$$

Здесь $\rho_n = \rho_{nn}(0)$ — населенность уровня n ; \bar{n}_v — среднее число фотонов частоты ω_v .

Если частоты поля ω_v или уровни энергии молекулы образуют непрерывный спектр, то под $\delta(\omega_{nk} - \omega_v)$ нужно понимать дельта-функцию, в противном случае (когда спектры частот поля и уровней молекулы дискретны) необходимо заменить $\delta(\omega_{nk} - \omega_v)$ на $\sin[(\omega_{nk} - \omega_v)t]/\pi \times \times (\omega_{nk} - \omega_v)$. Интенсивность спонтанного излучения, согласно (5.11), имеет вид:

$$I_v^s = \pi \sum_{nk} |B_{v,nk}|^2 \delta(\omega_{nk} - \omega_v) \rho_n. \quad (5.12)$$

Эту же формулу легко получить, воспользовавшись выражением для вероятности перехода в единицу времени для системы молекула+поле, предполагая, что последнее находится в состоянии вакуума. Интенсивность индуцированного излучения (или поглощения) имеет вид:

$$I_v^i = \pi \sum_{nk} |B_{v,nk}|^2 \delta(\omega_{nk} - \omega_v) \bar{n}_v (\rho_n - \rho_k). \quad (5.13)$$

Эта интенсивность может принимать в зависимости от знака $\rho_n - \rho_k$ положительные (индуцированное испускание) и отрицательные (поглощение) значения.

Покажем, что в случае линейного гармонического осциллятора возможно только поглощение. Для этого перепишем выражение (5.13) в виде

$$I_v^i = \pi \sum_{nk} \rho_n \bar{n}_v |B_{v,nk}|^2 [\delta(\omega_{nk} - \omega_v) - \delta(\omega_{nk} + \omega_v)].$$

Последнее выражение для гармонического осциллятора частоты ω_0 можно переписать в виде:

$$I_v^i = \pi \sum_n \rho_n \bar{n}_v \delta(\omega_0 - \omega_v) [|B_{v,n-1}|^2 - |B_{v,n+1}|^2].$$

Нетрудно убедиться, что выражение в квадратных скобках для линейного осциллятора (в дипольном приближении) пропорционально (с положительным коэффициентом) $|x_{n,n-1}|^2 - |x_{n,n+1}|^2 = -\hbar/2m\omega$. Следовательно, в этом случае $I_v^i < 0$ и возможно только поглощение.

В заключение сравним поведение систем с дискретным и непре-

рывным спектрами энергий. И в том, и в другом случае излучение характеризуется функцией $\sin [(\tilde{\omega}_0 - \omega_v) t]/\pi (\tilde{\omega}_0 - \omega_v)$. Пусть частоты ω_0 образуют непрерывный спектр, распределение частот в котором характеризуется величиной $\Delta\omega$ ($\omega_0 - \Delta\omega < \omega_0 < \omega_0 + \Delta\omega$). Тогда в течение времени $t \ll 1/\Delta\omega$ можно приближенно положить:

$$\frac{\sin [(\tilde{\omega}_0 - \omega_v) t]}{\pi (\tilde{\omega}_0 - \omega_v)} = \frac{\sin [(\omega_0 - \omega_v) t]}{\pi (\omega_0 - \omega_v)},$$

а при $t \gg 1/\Delta\omega$

$$\frac{\sin [(\tilde{\omega}_0 - \omega_v) t]}{\pi (\tilde{\omega}_0 - \omega_v)} = \delta(\omega_0 - \omega_v).$$

Таким образом, в течение времени $t \ll 1/\Delta\omega$ можно не учитывать непрерывность спектра, и, в частности, если система обладает двумя размытыми уровнями, то в течение времени $t \ll 1/\Delta\omega$ ее можно описывать энергетическим спином. Непрерывность спектра начинает сказываться при $t > 1/\Delta\omega$.

6. ИЗЛУЧЕНИЕ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим излучение системы в свободном пространстве. Поле излучения в свободном пространстве обладает непрерывным спектром. Суммирование по модам свободного пространства мы уже проводили при получении формулы (2.10). Проводя аналогичное суммирование в формулах (3.16) и (3.17), мы получаем интенсивность спонтанного и индуцированного излучений в свободном пространстве:

$$I_s = I_s^0 (\bar{R}_1^2 + \bar{R}_2^2 + \bar{R}_3(0)); \quad (6.1)$$

$$I_i = I_i^0 2\bar{R}_3(0), \quad (6.2)$$

где I_s^0 и I_i^0 — интенсивности спонтанного и индуцированного излучений одной изолированной молекулы. Как и следовало ожидать, интенсивность индуцированного излучения пропорциональна $2\bar{R}_3(0)$ — разности населенности верхнего и нижнего уровней (если $2\bar{R}_3(0) < 0$, то имеет место поглощение).

Интенсивность спонтанного излучения, как видно из (6.1), вообще говоря, не пропорциональна числу частиц на верхнем уровне; в частности, она может быть пропорциональной квадрату числа частиц. Это обстоятельство, подмеченное впервые Дики [¹⁰], связано с когерентностью между излучениями отдельных молекул, когда размеры системы молекул меньше длины излучаемой волны. Каждая молекула при этом находится в собственном поле излучения остальных молекул. Мы сейчас не будем приводить рассуждения Дики, основные формулы (6.1) нами уже получены, а придем к тем же результатам другим путем. Как уже отмечалось, уравнения движения энергетического спина в частном случае переходят в уравнения движения магнитного момента в магнитном поле. Эти уравнения, как известно, имеют вид:

$$\dot{M} = \gamma [M, H + h], \quad (6.3)$$

где $\hbar = -\sum \omega_i H_i Q_i$, — собственное магнитное поле (поле спонтанного излучения), которое подчиняется уравнениям Максвелла:

$$\ddot{Q}_i + \omega_i^2 Q_i = -\omega_i \int H_i(x) M(x, t) dV \quad (6.4)$$

($H_i(x)$ — собственная мода магнитного поля). Когда размеры системы много меньше длины волны, исключение собственного поля излучения из уравнений (6.3)–(6.4) в свободном пространстве приводит к уравнению [11]

$$\dot{M} = \gamma [M, H] - \frac{4\omega_m \gamma}{3\pi c^3} [M, \dot{M}] + \frac{2\gamma}{3c^3} [M, \ddot{M}], \quad (6.5)$$

где γ — гиromагнитное отношение, $\omega_m = c/l$, l — величина порядка линейных размеров системы. Третий член в правой части уравнения (6.5) — диссипативный и соответствует радиационному трению магнитного момента. С этим членом связана естественная ширина линии излучения. Можно показать [12, 13], что ширина линии имеет вид:

$$\Delta\omega = \alpha \gamma_0 R, \quad (6.6)$$

где γ_0 — естественная ширина линии изолированной молекулы, $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2}$ (в магнитном случае это величина разности населенностей, соответствующей полному магнитному моменту), α — множитель порядка 1, зависящий от начального состояния системы (от угла между магнитным моментом и магнитным полем). Второй член в правой части (6.5) — консервативный; нетрудно видеть, что при достаточно большой частоте $\omega_0 = \gamma H_0$ второй член приводит к сдвигу частоты [14]

$$\Delta_1 \omega = \frac{4\omega_m \omega_0^2}{3\pi c^3} \gamma M_z \quad (6.7)$$

или в случае электрического дипольного перехода

$$\Delta_1 \omega = \frac{4\omega_m \omega_0^2}{3\pi c^3 \hbar} |d_{1,2}|^2 2R_3, \quad (6.7a)$$

где $d_{1,2}$ — матричный элемент дипольного момента. Как видно из формул (6.6)–(6.7), спонтанное излучение системы отличается от спонтанного излучения одной молекулы не только интенсивностью, но и шириной линии, и частотой.

Перейдем теперь к рассмотрению излучения системы, размеры которой больше длины волны. Излучение такой системы существенно зависит от распределения зарядов или дипольных моментов. Ограничивааясь для простоты магнитным случаем, мы воспользуемся уравнением (6.4). Это уравнение является уравнением для средних значений поля Q и намагниченности $M(x, t)$. Поэтому интенсивность излучения и поле излучения, найденные с помощью этого уравнения, относятся к регулярной части излучения. Отыскивая решение уравнения (6.4) для распределения намагниченности в виде стоячей волны

$$M(x, t) = M_0 \cos(k_0 z) \cos(\omega_0 t); \quad k_0 = \omega_0/c,$$

мы получаем интенсивность спонтанного излучения в свободном пространстве в интервале телесных углов $d\Omega$ [15]

$$dS = \frac{\pi}{4} \frac{\omega_0^2}{(2\pi c)^3} b_v^2 d\Omega, \quad (6.8)$$

где

$$b_v^2 = \omega_0^2 (\mathbf{e}_v^s \mathbf{M}_0)^2 2\pi \left\{ \frac{\sin(k_x A/2)}{k_x A/2} \right\}^2 \left\{ \frac{\sin(k_y B/2)}{k_y B/2} \right\}^2 \left\{ \frac{\sin[(k_z - k_0)C/2]}{(k_z - k_0) C/2} \right\}^2 A^2 B^2 C^2,$$

A, B, C —размеры молекулярной системы по осям x, y, z (много большие длины волны), \mathbf{e}_v^s —единичный вектор поляризации магнитного поля. Из (6.8) следует, что при $A \sim B \sim C$ диаграмма направленности

$$\Delta\Theta \sim \lambda/A.$$

В общем случае уравнения, описывающие спонтанное и индуцированное излучение системы двухуровневых молекул в свободном пространстве, приведены в работе [16]. В этой же работе выведены уравнения баланса населенностей с коэффициентами Эйнштейна.

7. ИЗЛУЧЕНИЕ В РЕЗОНАТОРЕ

1) *Исходные уравнения.* Для исследования поведения системы молекул в резонаторе мы примем ряд упрощающих предположений, которые дадут нам возможность избежать сложных математических расчетов и в то же время помогут сконцентрировать внимание на выяснении основных особенностей поведения поля и молекул. Прежде всего мы будем предполагать, что существенно взаимодействие системы молекул только с одной модой резонатора, частота которой ω , близка к частоте молекулярного перехода ω_0 . Далее мы будем предполагать, что размеры системы молекул много меньше длины волны в резонаторе или, точнее, молекулы расположены на столь малом участке резонатора, что изменением поля $A_v(x)$ в пределах этого участка можно пренебречь (дипольное приближение). В этом приближении поведение системы молекул полностью определяется вектором энергетического спина (R_1, R_2, R_3), и гамильтониан системы молекул, взаимодействующих с полем излучения, запишется в виде:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hbar\omega_0 \hat{R}_3 + \frac{1}{2} (\hat{P}_v^2 + \omega_v^2 \hat{Q}_v^2) - (\mathbf{e}_v \mathbf{A}_v) \hat{R}_1 (\hat{Q}_v + Q_{v0} \sin(\omega t + \theta)) \equiv \\ &\equiv \hbar\omega_0 R_3 + \frac{1}{2} \hbar\omega_v (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) - (\mathbf{e}_v \mathbf{A}_v) \hat{R}_1 (\hat{Q}_v + Q_{v0} \sin(\omega t + \theta)). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь введены так называемые операторы „смерти“ и „рождения“

$$\begin{aligned} \hat{Q}_v &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_v}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger); \\ \hat{P}_v &= i \sqrt{\frac{\hbar\omega_v}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}); \end{aligned} \quad (7.2)$$

\mathbf{A}_v —значение собственной функции $\mathbf{A}_v(\mathbf{r})$ в месте нахождения центра системы молекул, Q_{v0} —амплитуда внешнего электрического поля, которое мы считаем заданной функцией времени,

$$\mathbf{E}(t) = -\frac{1}{c} \mathbf{A}, \dot{Q}_{v0}(t) = -\frac{\omega}{c} \mathbf{A}, Q_{v0} \cos(\omega t + \theta). \quad (7.3)$$

Итак, внешнее поле излучения мы задаём классическим образом. Это возможно при достаточно большой амплитуде внешнего поля, когда можно пренебречь квантовыми флюктуациями этого поля.

В гамильтониане (7.1) не учтены релаксационные процессы. Такие процессы могут быть связаны с диссипацией в стенках резонатора и с диссипацией в самой молекулярной системе. Мы будем учитывать эти процессы с помощью формализма, развитого в работах [16–19]. Из этих работ следует, что уравнения, определяющие изменение во времени среднего значения величины \hat{O} с учетом диссипативных процессов, имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle O \rangle}{dt} = & \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{O}] \rangle + \Phi^+ \langle \hat{a} [\hat{O}, \hat{a}^+] + [\hat{a}, \hat{O}] \hat{a}^+ \rangle + \\ & + \Phi^- \langle \hat{a}^+ [\hat{O}, \hat{a}^+] + [\hat{a}^+, \hat{O}] \hat{a} \rangle + \Phi^{+-} \sum_i \langle \hat{r}_i^- [\hat{O}, \hat{r}_i^+] + \\ & + [\hat{r}_i^-, \hat{O}] \hat{r}_i^+ \rangle + \Phi^{-+} \sum_i \langle \hat{r}_i^+ [\hat{O}, \hat{r}_i^-] + [\hat{r}_i^+, \hat{O}] \hat{r}_i^- \rangle + \\ & + \Phi^{00} \sum_i \langle \hat{r}_{3i}^- [\hat{O}, \hat{r}_{3i}^+] + [\hat{r}_{3i}^-, \hat{O}] \hat{r}_{3i}^+ \rangle, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $\hat{r}_i^\pm = \hat{r}_{1i} \pm \hat{r}_{2i}$, \hat{r}_{3i} — операторы энергетического спина отдельных молекул. При написании (7.4) предположено, что релаксации отдельных спинов происходят независимо; Φ^{+-} , Φ^{-+} и Φ^{00} — коэффициенты, характеризующие релаксацию отдельного спина, Φ^\pm — коэффициенты, характеризующие диссипацию в резонаторе*. Между коэффициентами Φ в том случае, когда диссипативная система (в частности, стеки резонатора, решетка при спин-решеточной релаксации) находится в термодинамическом равновесии, имеется связь:

$$\Phi^+ = \Phi^- e^{-\hbar\omega_v/kT}; \quad \Phi^{+-} = \Phi^{-+} e^{-\hbar\omega_0/kT}. \quad (7.5)$$

Нас будут интересовать уравнения для средних величин \hat{R}_1 , \hat{R}_2 , \hat{a}^+ , \hat{a} и их квадратичных комбинаций (последние описывают флюктуации). Подставляя в (7.4) вместо \hat{O} операторы R , \hat{a}^+ и \hat{a} и пользуясь перестановочными соотношениями для этих операторов, находим:

$$\frac{da}{dt} = -i\omega_v a + i\alpha R_1 - \gamma a; \quad (7.6)$$

$$\frac{da^+}{dt} = i\omega_v a^+ - i\alpha R_1 - \gamma a^+; \quad (7.7)$$

* Кроме того, в уравнениях (7.4) пренебрежено сдвигом частот из-за релаксационных процессов.

$$\frac{dR_1}{dt} = -\omega_0 R_2 - \frac{R_2}{T_2}; \quad \frac{dR_2}{dt} = \omega_0 R_1 - \frac{R_2}{T_2} + \alpha \langle \hat{R}_3 (\hat{a}^+ + \hat{a}) \rangle + \\ + \alpha R_3 (a_1^+ + a_1) \sin(\omega t + \theta), \quad (7.8)$$

где a , a^+ , R_1 , R_2 , R_3 суть средние значения соответствующих операторов и введены следующие обозначения:

$$a_1^+ + a_1 = \sqrt{\hbar/2\omega_0} Q_{>0}; \quad \alpha = e_1 A_0 / \sqrt{2\hbar\omega_0}; \\ \frac{1}{T_2} = \Phi^{00} + \Phi^{+-} + \Phi^{-+}; \quad \gamma = \Phi^- - \Phi^+. \quad (7.9)$$

Если можно пренебречь квантовыми флюктуациями R_3 (или a^+ и a), то в правой части второго уравнения (7.8) можно заменить $\langle \hat{R}_3 (\hat{a}^+ + \hat{a}) \rangle$ на $R_3 (a^+ + a)$. В обычных условиях R_3 —достаточно большая величина (порядка числа молекул), поэтому такая замена может быть произведена с огромной точностью. Если R_3 задано, то с учетом последнего замечания (7.6), (7.8) представляет замкнутую систему уравнений для определения средних полей (a , a^+) и среднего дипольного момента R_1 , R_2 . Вообще же говоря, изменение R_3 зависит от \hat{a} , \hat{a}^+ , \hat{R}_1 и \hat{R}_2 ; поэтому систему (7.6)–(7.8) необходимо дополнить системой уравнений, определяющей R_3 . Эти уравнения, как мы увидим, суть уравнения для квадратичных величин $\langle a^+ a \rangle$, $\langle R^+ a \rangle$ и т. д. В отличие от величин a , a^+ , R_1 и R_2 , которые изменяются быстро с частотой ω_0 (или $\omega \approx \omega_0$), R_3 состоит из двух частей, одна из которых меняется медленно (за время $2\pi/\omega_0$), а другая часть изменяется с частотой $2\omega_0$ и более высокими частотами. Как нетрудно видеть, вкладом высокочастотной части R_3 можно пренебречь при решении уравнений (7.6)–(7.8), если параметр α достаточно мал, что обычно имеет место. Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться значением R_3 , усредненным за время $2\pi/\omega_0$, а также усредненными за это время значениями других квадратичных величин.

Из выражений (7.1) и (7.8) после несложных преобразований находим:

$$\frac{dR_3}{dt} = -\alpha \langle R_2 (a + a^+) \rangle - \sigma (a_1 + a_1^+) \overline{R_2 \sin(\omega t + \theta)} - \frac{R_3 - R_3^0}{T_1}, \quad (7.10)$$

где черта означает усреднение по времени и введены обозначения:

$$T_1^{-1} = 2 (\Phi^{+-} + \Phi^{-+}); \quad R_3^0 = \frac{N}{2} \frac{\Phi^{+-} - \Phi^{-+}}{\Phi^{+-} + \Phi^{-+}} \quad (7.11)$$

(N —полное число молекул).

Введем новые переменные

$$R_\pm = R_1 \pm iR_2; \quad R_1 = \frac{1}{2} (R_+ + R_-); \quad R_2 = \frac{1}{2i} (R_+ - R_-) \quad (7.12)$$

и запишем в этих переменных выражение

$$\langle \hat{R}_2 (\hat{a} + \hat{a}^+) \rangle = \frac{1}{2i} \langle \hat{R}_+ \hat{a} - \hat{R}_- \hat{a}^+ + \hat{R}_+ \hat{a}^+ - \hat{R}_- \hat{a} \rangle.$$

При $\alpha = 0$ средние значения $\langle \overline{R_+ a^+} \rangle$, $\langle \overline{R_- a^-} \rangle$ в точности равны нулю. В этом легко убедиться, написав уравнения для этих величин. Считая параметр α малым, мы будем пренебрегать этими средними, так же, как и средними $\langle \overline{R_+^2} \rangle$, $\langle \overline{R_-^2} \rangle$, $\langle \overline{a^{+2}} \rangle$, $\langle \overline{a^2} \rangle$, если они стоят в выражениях, которые сами пропорциональны α , как это имеет место в правой части (7.10). В этом приближении после ряда преобразований (полагая $\omega_0 = \omega$) получаем систему уравнений

$$\dot{R}_3 = U - \frac{1}{T_1} (R_3 - R_3^0) - \alpha (a_1 + a_1^+) \overline{R_2 \sin(\omega t + \theta)} ; \quad (7.13)$$

$$\dot{n} = -U - 2\gamma (n - n_0); \quad (7.14)$$

$$U = -\frac{\alpha^2}{2} (\overline{R_1^2} + \overline{R_2^2} + R_3 + 2nR_3) - \frac{\alpha^2}{2} (a_1^+ + a_1) R_3 \overline{(a^+ + a) \sin(\omega t + \theta)} - \\ - \left(\gamma + \frac{1}{T_2} \right) U; \quad (7.15)$$

$$\frac{d}{dt} (\overline{R_1^2} + \overline{R_2^2}) = -2R_3 U + \alpha (a_1 + a_1^+) \overline{R_2 \sin(\omega t + \theta)} - \\ - \frac{2}{T_2} \left\{ \overline{R_1^2} + \overline{R_2^2} - \frac{N}{2} - \frac{T_2}{T_1} (R_3^0 - R_3) \right\}, \quad (7.16)$$

где $n = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ — среднее число фотонов (средняя энергия поля излучения равна $\left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$); n_0 — равновесное значение n , через U обозначена величина

$$U = \frac{i\alpha}{2} \langle \overline{R_+ a} - \overline{R_- a^+} \rangle.$$

Уравнения (7.6)–(7.8), (7.13)–(7.16) суть исходные уравнения при всех дальнейших рассмотрениях поведения системы молекулы+поле излучения в резонаторе. Эта система уравнений дает возможность определить не только средние значения полей R_1 , R_2 , а также и их квадратичные флюктуации.

2) *Свободное движение (без внешнего поля).* Теперь мы перейдем к исследованию различных решений исходных уравнений (7.6)–(7.8) и (7.13)–(7.16). Прежде всего мы рассмотрим свободное (без внешней силы) решение этих уравнений. Для простоты будем иметь в виду случай $T_1 = T_2 = \infty$. Это означает, что искомые решения будут справедливы при $t \ll T_1, T_2$. Далее, мы будем предполагать, что можно пренебречь квантовыми флюктуациями a , a^+ , R_+ и R_- . Как уже отмечалось, это возможно сделать, если эти величины достаточно велики. Квантовые флюктуации этих величин в резонаторе будут рассматриваться особо. Пользуясь малостью параметра α , ищем решение уравнений (7.6)–(7.8) и (7.13) в виде

$$a = a_0 e^{-i\omega t}; \quad a^+ = a_0^+ e^{i\omega t}; \quad R_\pm = r_\pm e^{\pm i\omega t}, \quad (7.17)$$

где a_0 , a_0^+ , r_\pm — медленные (по сравнению с $e^{i\omega t}$) функции времени, а $\omega = \omega_0 = \omega$. Подставляя (7.17) в (7.6)–(7.8), (7.13) и используя определение U , мы приходим к следующим приближенным уравнениям:

$$\dot{r}_+ = i\alpha R_3 a_0^+; \quad \dot{r}_- = -i\alpha R_3 a_0^-; \quad (7.18)$$

$$\dot{a}_0 = -\gamma a + \frac{i\alpha}{2} r_-; \quad \dot{a}_0^+ = -\gamma a - \frac{i\alpha}{2} r_+; \quad (7.19)$$

$$\dot{R}_3 = \frac{i\alpha}{2} (r_+ a_0 - r_- a_0^+). \quad (7.20)$$

Подберем фазу поля P_3 , Q_3 таким образом, чтобы $a_0 = a_0^+$. Легко видеть, что это не нарушает общности рассуждений. Продифференцируем правую и левую части равенства (7.20) и воспользуемся уравнениями (7.18) и (7.19). В результате получим

$$\ddot{R}_3 + \frac{\alpha^2 a_0^2}{2} R_3 - \frac{\dot{a}_0}{a_0} \dot{R}_3 = 0. \quad (7.21)$$

Общее решение этого уравнения, как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, имеет вид

$$R_3 = R \cos \theta; \quad \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \int_0^t a_0(t_1) dt_1 + \theta_0. \quad (7.22)$$

Из уравнений (7.13) и (7.14) получаем соотношение

$$\dot{R}_3 + \dot{n} + 2\gamma(n - n_0) = 0, \quad (7.23)$$

которое выражает баланс энергии системы молекулы+поле.

Для простоты рассмотрим случай $n \gg n_0$ —равновесного значения числа фотонов. В этом случае из (7.22) и (7.23) получаем уравнение для угловой переменной θ [6]:

$$\ddot{\theta} - \frac{\alpha^2}{4} R \sin \theta + 2\gamma \dot{\theta} = 0; \quad a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \dot{\theta}. \quad (7.24)$$

Это уравнение физического маятника с вязким трением. (Для приведения его к обычной форме нужно произвести замену $\theta = \theta_1 + \pi$.) Если молекулы в начальный момент времени находятся в возбужденном состоянии ($\theta \neq \pi$), то затем молекулы переходят в состояние равновесия ($\theta = \pi$) и возбуждают поле в резонаторе, поле, в свою очередь, возбуждает молекулы и т. д., пока весь процесс не затухнет. Если в начальный момент в резонаторе возбуждено достаточно мощное поле, то вектор R , помимо прецессии около направления 3, будет совершать вращение, определяемое углом θ [20]. Выражения (7.22) и (7.24) дают полное решение задачи о поведении системы молекул, взаимодействующих с полем излучения за время $t \ll T_2, T_1$, при условии, что частота молекулярного перехода совпадает с частотой поля.

Теперь перейдем к рассмотрению малых колебаний поля и дипольного момента относительного равновесного состояния системы молекулы+поле (в отсутствие внешней силы). Для этого линеаризуем уравнения (7.6)—(7.8) относительно состояния с заданным R_3 . Это можно сделать, так как изменение R_3 пропорционально α^2 и, следовательно, есть малая величина второго порядка по параметру малости α .

Переходя к переменным a_0 , a_0^+ , r и r_- , получаем аналогично (7.18)–(7.19) приближенную систему уравнений

$$\dot{r}_+ = -\frac{1}{T_2} r_+ + i\alpha R_3 a_0^+; \quad \dot{r}_- = -\frac{1}{T_2} r_- - i\alpha R_3 a_0; \quad (7.18a)$$

$$a_0^+ = -\gamma a_0^+ - \frac{i}{2} \alpha r_+; \quad \dot{a}_0 = -\gamma a_0 + \frac{i\alpha}{2} r_- . \quad (7.19a)$$

Исключая из этой системы величины r_\pm , приходим к линейным уравнениям второго порядка для величин a_0 и a_0^+ :

$$\begin{aligned} a_0 + \left(\gamma + \frac{1}{T_2}\right) \dot{a}_0 + \left(\frac{\gamma}{T_2} - \frac{\alpha^2}{2} R_3\right) a_0 &= 0; \\ \dot{a}_0^+ + \left(\gamma + \frac{1}{T_2}\right) \dot{a}_0^+ + \left(\frac{\gamma}{T_2} - \frac{\alpha^2}{2} R_3\right) a_0^+ &= 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Общее решение этих уравнений имеет вид:

$$a_0 = c_1 e^{\beta_1 t} + c_2 e^{\beta_2 t}; \quad a_0^+ = c_1 e^{\beta_1 t} + c_2^+ e^{\beta_2 t}, \quad (7.26)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{T_2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{T_2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{T_2} - \frac{\alpha^2}{2} R_3\right)}; \\ \beta_2 &= -\frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{T_2}\right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{T_2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{T_2} - \frac{\alpha^2}{2} R_3\right)}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Легко видеть, что состояние с заданным R_3 устойчиво (уравнения (7.18)–(7.19) не имеют экспоненциально нарастающих решений), если выполнено условие

$$\eta = \frac{\alpha^2 R_3 T_2}{2\gamma} < 1. \quad (7.28)$$

В противном случае, когда выполнено условие самовозбуждения $\eta > 1$ система переходит в состояние, которое характеризуется в стационарном состоянии отличными от нуля амплитудами поля a_0 и a_0^+ . Это состояние генерации. Мы сейчас не будем останавливаться на характеристиках этого состояния.

Заметим, что условие устойчивости (7.28) всегда выполняется, если $R_3 < 0$ (что, в частности, имеет место в состоянии термодинамического равновесия). Если же $R_3 > 0$, то η также может быть меньше 1; в этом случае, как мы увидим ниже, система молекул в резонаторе может усиливать внешнее поле. Если выполнено условие (7.28), то β_1 , β_2 меньше нуля и по истечении достаточного времени ($t \gg 1/\beta_1$, $1/\beta_2$) амплитуды поля излучения и дипольного момента станут равными нулю. Однако квадратичные характеристики поля и молекул (в частности энергия поля), которые характеризуют флуктуации поля и дипольного момента, отличны от нуля.

Перейдем к вычислению этих величин. Для этого воспользуемся системой уравнений (7.13)–(7.16). В стационарном состоянии (при $t \gg 1/\beta_1$, $1/\beta_2$) производные

$$\dot{R}_3 = 0; \quad n = 0; \quad \dot{U} = 0; \quad \frac{d}{dt} (\bar{R}_1^2 + \bar{R}_2^2) = 0$$

и система (7.13)–(7.16) превращается в алгебраическую систему уравнений для определения величин R_3 , n и U . Если система находится в состоянии термодинамического равновесия, то

$$\bar{R}_1^2 + \bar{R}_2^2 = N/2. \quad (7.29)$$

То же соотношение имеет место, если состояния отдельных молекул не коррелированы. В самом деле, рассмотрим, например,

$$\bar{R}_1^2 = \langle (\sum r_{1i})^2 \rangle = \sum_{ij} \langle r_{1i} r_{1j} \rangle = \sum_i \langle r_{1i}^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle r_{1i} r_{1j} \rangle = N/4.$$

(Мы воспользовались тем, что $\langle r_{1i} r_{1j} \rangle = \delta_{ij} \frac{1}{4}$.) Если R_3^0 и n_0 соответствуют состоянию термодинамического равновесия при температуре T , то, как нетрудно убедиться*,

$$N/2 + R_3^0 (2n_0 + 1) = 0$$

и уравнения (7.13)–(7.16) удовлетворяются этими значениями R_3^0 и n_0 . В общем случае R_3^0 может иметь равновесное значение при другой температуре, чем n_0 (в частности, может быть $R_3^0 > 0$). Тогда из (7.13)–(7.16) находим (считая α^2 малым):

$$U = -\frac{\alpha^2}{(\gamma + 1/T_2)} \left\{ \frac{N}{2} + R_3^0 (2n_0 + 1) \right\}; \quad (7.30)$$

$$n = n_0 + \frac{\alpha^2}{2\gamma (\gamma + 1/T_2)} \left\{ \frac{N}{2} + R_3^0 (2n_0 + 1) \right\}; \quad (7.31)$$

$$R_3 = R_3^0 - \frac{\alpha^2 T_1}{(\gamma + 1/T_2)} \left\{ \frac{N}{2} + R_3^0 (2n_0 + 1) \right\}. \quad (7.32)$$

Если $R_3^0 > 0$ (отрицательная температура), то $0 < \gamma < 1$ и система может усиливать внешний сигнал (см. ниже).

Выражение (7.31) может быть использовано для оценки шумов усилителя. Энергия поля излучения в резонаторе имеет вид:

$$H_s = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 + \frac{\hbar \omega_0}{e^{\hbar \omega_0/kT} - 1} + \\ + \frac{\alpha^2 \hbar \omega_0}{2\gamma (\gamma + 1/T_2)} \left\{ \frac{N}{2} + R_3^0 (2n_0 + 1) \right\}.$$

Первый член в этом выражении представляет нулевые флюктуации вакуума в пустом резонаторе, второй член — тепловые флюктуации поля излучения, третий член представляет энергию флюктуаций спонтанного излучения молекул и излучения, индуцированного тепловыми флюктуациями поля (член, пропорциональный n_0).

* Напомним, что

$$R_3^0 = -\frac{N}{2} \frac{e^{\hbar \omega/kT} - 1}{e^{\hbar \omega/kT} + 1}; \quad n_0 = \frac{1}{e^{\hbar \omega/kT} - 1}.$$

3) *Индукционное излучение в реальном резонаторе.* Перейдем к рассмотрению влияния внешнего поля (7.3). В принятом приближении уравнения для амплитуд собственного поля резонатора a_0 , a_0^+ и амплитуд дипольного момента r_{\pm} принимают вид:

$$\dot{r}_+ + \frac{1}{T_2} r_+ - i\alpha R_3 a_0^+ = \frac{\alpha}{2} R_3 (a_1^+ + a_1) e^{i\theta}; \quad (7.186)$$

$$\dot{r}_- + \frac{1}{T_2} r_- + i\alpha R_3 a_0 = \frac{\alpha}{2} R_3 (a_1^+ + a_1) e^{-i\theta};$$

$$\dot{a} + \gamma a_0 - i \frac{\alpha}{2} r_- = 0; \quad \dot{a}_0^+ + \gamma a_0^+ + i \frac{\alpha}{2} r_+ = 0. \quad (7.196)$$

Исключая из этих уравнений r_+ и r_- , приходим к уравнениям только для амплитуд a_0 и a_0^+ :

$$\ddot{a}_0 + \left(\gamma + \frac{1}{T_2} \right) \dot{a}_0 + \left(\frac{\gamma}{T_2} - \frac{\alpha^2}{2} R_3 \right) a_0 = \frac{i\alpha^2 R_3}{4} (a_1^+ + a_1) e^{-i\theta}; \quad (7.25a)$$

$$a_0^+ + \left(\gamma + \frac{1}{T_2} \right) \dot{a}_0^+ + \left(\frac{\gamma}{T_2} - \frac{\alpha^2}{2} R_3 \right) a_0^+ = - \frac{i\alpha^2 R_3}{4} (a_1^+ + a_1) e^{i\theta}.$$

Пользуясь выражениями (7.26) и (7.28), получаем общее решение неоднородных уравнений (7.25а) в виде:

$$a_0 = c_1 e^{\beta_1 t} + c_2 e^{\beta_2 t} + \frac{i}{2} \frac{\eta}{1-\eta} (a_1^+ + a_1) e^{-i\theta}; \quad (7.26a)$$

$$a_0^+ = c_1^+ e^{\beta_1 t} + c_2^+ e^{\beta_2 t} - \frac{i}{2} \frac{\eta}{1-\eta} (a_1^+ + a_1) e^{i\theta}.$$

Далее мы будем рассматривать случай $\eta < 1$. В этом случае $\beta_1, \beta_2 < 0$ и по истечении времени $t \gg 1/\beta_1, 1/\beta_2$ экспонентами $e^{\beta_1 t}, e^{\beta_2 t}$ можно пренебречь. Таким образом, амплитуды стационарного поля в резонаторе имеют вид:

$$a_0 = \frac{i}{2} \frac{\eta (a_1^+ + a_1)}{1-\eta} e^{-i\theta}; \quad a_0^+ = - \frac{i}{2} \frac{\eta (a_1^+ + a_1)}{1-\eta} e^{i\theta}. \quad (7.26b)$$

Полное стационарное поле (собственное и внешнее) принимает вид:

$$Q_v + Q_{v0} \sin(\omega t + \theta) = Q_{v0} \frac{1}{1-\eta} \sin(\omega t + \theta). \quad (7.33)$$

При $\eta < 0$ ($R_3 < 0$) полное поле уменьшается (имеет место поглощение): при $\eta > 0$ полное поле увеличивается и имеет место усиление поля. Заметим, что усиленное поле находится в той же фазе, что и внешнее поле. Коэффициент усиления поля в резонаторе

$$k = 1/(1-\eta). \quad (7.34)$$

Рассмотрим теперь установление поля излучения в резонаторе. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ собственное поле отсутствует, а амплитуды дипольного момента r_+, r_- равны нулю. Тогда, используя уравнения (7.196), приходим к следующим начальным условиям:

$$a_0(0) = 0; \quad \dot{a}_0(0) = 0; \quad a_0^+(0) = 0; \quad \dot{a}_0^+(0) = 0. \quad (7.35)$$

Решение (7.26а), удовлетворяющее этим начальным условиям, как нетрудно убедиться, имеет вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{i}{2} \frac{\eta}{1-\eta} \left\{ 1 + \frac{-\beta_2 e^{\beta_1 t} + \beta_1 e^{\beta_2 t}}{\beta_2 - \beta_1} \right\} e^{-i\theta} (a_1^+ + a_1); \\ a_0^+ &= -\frac{i}{2} \frac{\eta}{1-\eta} \left\{ 1 + \frac{-\beta_2 e^{\beta_1 t} + \beta_1 e^{\beta_2 t}}{\beta_2 - \beta_1} \right\} e^{i\theta} (a_1^+ + a_1). \end{aligned} \quad (7.36)$$

При $t \ll \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}$ эти выражения принимают вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{i}{2} \frac{\gamma\eta}{T_2} t^2 e^{-i\theta} (a_1^+ + a_1) = \frac{i}{4} \alpha^2 R_3 t^2 e^{-i\theta} (a_1^+ + a_1); \\ a_0^+ &= -\frac{i}{4} \alpha^2 R_3 t^2 e^{i\theta} (a_1^+ + a_1). \end{aligned} \quad (7.37)$$

Таким образом, при $R_3 > 0$ мы имеем дело с обычным индуцированным испусканием (ср. формулы (3.7)). Как уже отмечалось, разделение на спонтанное и индуцированное излучения, вообще говоря, однозначно только при малых временах t , в приближении теории возмущения.

Однако часто можно выделить излучение, обусловленное внешним полем. Такое излучение также можно называть индуцированным. Таково излучение, представляемое формулами (7.36). Это излучение пропорционально амплитуде внешнего поля и обращается в нуль вместе с внешним полем. Остальное излучение (которое остается после зануления внешнего поля) можно назвать спонтанным. Следует при этом иметь в виду, что при больших временах и, в частности, в стационарном случае таким образом определенное спонтанное излучение включает в себя также индуцированное излучение под действием собственного поля излучения (которое первоначально возникло спонтанно).

Среднее поле спонтанного излучения при выбранных начальных условиях равно нулю. Энергия спонтанного излучения нарастает согласно уравнениям (7.13)–(7.16). В частности, стационарное значение энергии поля спонтанного излучения дается выражением (7.31).

4) *Спонтанное излучение в резонаторе.* Обсудим вопрос об интенсивности спонтанного излучения в резонаторе [6, 21, 22]. Здесь следует различать разные временные сигналы (после „включения“ взаимодействия с полем резонатора).

Пусть $t \ll 1/\gamma; T_2; T_1$; тогда из уравнений (7.13)–(7.15) находим:

$$\frac{dH_s}{dt} = \hbar\omega_0 \dot{n} = -U = \frac{\alpha^2}{2} \{ \overline{R}_1^2 + \overline{R}_2^2 + R_3 \} t, \quad (7.38)$$

что совпадает с (3.16).

Рассмотрим далее интервал времени

$$T_1 \ll t \ll 1/\beta_1; \quad 1/\beta_2$$

(такое неравенство возможно, если $T_1 \gg T_2$, что часто выполняется). В этом случае n можно считать постоянным, и, строго говоря, интенсивность спонтанного излучения равна нулю. Однако из уравнений (7.13)–(7.15) следует, что изменение энергии молекул (в единицу времени) равно

$$\hbar\omega_0 \dot{R}_3 = \hbar\omega_0 U = - \frac{\hbar\omega_0 \alpha^2}{(\gamma + 1/T_2)} \left\{ \frac{N}{2} + R_3 \right\} = - \frac{\hbar\omega_0 \alpha^2}{(\gamma + 1/T_2)} N_+, \quad (7.39)$$

где N_+ — число молекул на верхнем уровне.

Эту величину обычно принимают [21–23] за интенсивность спонтанного излучения. Как видно из (7.14) (при $\dot{n} = 0$), эта интенсивность как раз уходит на компенсацию потерь в стенах резонатора (и на излучение из резонатора). Это обстоятельство позволяет считать выражение в правой части (7.39) интенсивностью спонтанного излучения и при $t > T_1$; $1/\beta_1$; $1/\beta_2$, когда $\dot{R}_3 = 0$. Однако следует иметь в виду условный смысл этого выражения.

В работах [22, 23] не введено затухание молекул, однако принимается, что частоты молекул образуют непрерывный спектр шириной $\Delta\omega$. Соответствующие формулы этих работ переходят в (7.39) с точностью до коэффициента порядка 1, если заменить $\Delta\omega$ на T_2^{-1} *. Такое совпадение, конечно, не случайно, так как и в том и в другом случае уровни энергии размыты на одну и ту же величину (при $\Delta\omega = T_2^{-1}$).

5) Индуцированное и спонтанное излучение в мазерах. Остановимся кратко на вопросе об индуцированном и спонтанном излучении в квантовых усилителях и генераторах. Как уже отмечалось, при $0 < \eta < 1$ резонатор с активными молекулами работает как квантовый усилитель. Поэтому все проведенное выше обсуждение относится к квантовому усилителю. При этом индуцированное излучение служит для усиления сигнала, а спонтанное излучение дает вклад в шумы и определяет предельную чувствительность усилителя.

Когда параметр возбуждения $\gamma > 1$, система молекул в резонаторе может работать как генератор. В этом случае и в отсутствие внешнего сигнала в резонаторе возникает отличное от нуля среднее поле с постоянной амплитудой a_0 . Это поле уже, строго говоря, нельзя считать ни индуцированным, ни спонтанным. Можно сказать, что это поле индуцировано полем спонтанного излучения. Однако очевидно, что в создании этого поля основную роль играет наличие в системе отрицательного поглощения (или индуцированного испускания).

Следует отметить, что хотя мы и не можем отделять спонтанное излучение от индуцированного в режиме генерации, тем не менее можно провести разделение на шумовую и регулярную части (см. раздел 4). При этом шумовая часть является источником квантовых шумов в генераторе.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein, Phys. Zeitschr., 18, 121 (1917).
2. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, Физматгиз, М., 1958.
4. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ГИТТЛ, М., 1948.
6. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 167 (1959).
7. Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, М., 1957
8. V. Weisskopf, Naturwissenschaften, 23, 631 (1935)
9. В. Л. Гинзбург, ДАН СССР, 24, 130 (1939)
10. R. H. Dicke, Phys. Rev., 93, 99 (1954).
11. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 13, 33 (1943); J. Phys. USSR, 8, 33 (1944).
12. В. М. Файн, УФН, 64, 273 (1958).
13. В. М. Файн, ЖЭТФ, 32, 607 (1957).
14. В. М. Файн, ЖЭТФ, 36, 798 (1959).

* Член с T_2^{-1} характеризует диссплативные свойства системы. Соответствующая ширина линии порядка T_2^{-1} .

15. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Э. Г. Ящин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 697 (1962).
16. В. М. Файн, УФН, 79, № 4 (1963).
17. F. Bloch, Phys. Rev., 105, 1206 (1957).
18. В. М. Файн, ЖЭТФ, 42, 1075 ((1962)).
19. В. Н. Генкин, В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1117 (1962).
20. В. М. Файн, ЖЭТФ, 29, 878 (1955); 33, 416 ((1957)).
21. N. Bloemberger, R. Pound, Phys. Rev., 95, 8 (1954).
22. Ф. В. Бункин, А. Н. Ораевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 181 (1959).
23. I. R. Senitzky, Phys. Rev., 111, 3 (1958); 115, 227 (1959); 119, 1807 (1960); 123, 1525 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 ноября 1962 г.

ПРЕЦИЗИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНАХ 35 и 36 см

В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев

Методом „искусственной Луны“ проведены точные измерения радиоизлучения Луны на волнах 35 и 36 см. Средняя по диску эффективная температура на волне 35 см оказалась равной $236^{\circ} \text{K} \pm 10^{\circ}$, а на волне 36 см — $237^{\circ} \text{K} \pm 7,5^{\circ}$. Сравнение полученных результатов с результатами точных измерений на более коротких волнах показывает систематическое увеличение эффективной температуры с длиной волны, которое свидетельствует о росте температуры вглубь Луны.

Прецизионные измерения радиоизлучения Луны, проведенные в сантиметровом диапазоне волн [1—4] с помощью метода „искусственной Луны“, разработанного в [3], свидетельствуют о некотором росте средней по диску постоянной составляющей радиотемпературы с длиной волны, который может быть вызван наличием температурного градиента внутрь Луны. Однако для более определенных суждений о наличии роста температуры необходимо точное измерение радиоизлучения Луны на волнах дециметрового диапазона. С этой целью в июне—августе 1962 г. были проведены прецизионные измерения средней по диску радиотемпературы Луны на волнах 35 и 36 см. Наблюдения проводились, когда Луна находилась в высоких галактических широтах. В этих условиях влияние фона космического излучения на волнах 35 и 36 см пренебрежимо мало.

Измерения радиоизлучения Луны осуществлялись на вертикальной поляризации с помощью радиотелескопа, состоящего из восьмиметрового параболического рефлектора, облучаемого логарифмической антенной, и модуляционного радиометра с флюктуационным порогом чувствительности $0,4^{\circ}$ при постоянной времени 16 сек. Ширина диаграммы на половинном уровне мощности равна $3,1^{\circ}$. Ордината диаграммы на лимбе Луны составляла 0,98, так что измеряемая температура практически совпадала с усредненной по диску яркостной температурой.

Согласно [3], излучение Луны сравнивалось с тепловым излучением эталона-диска, покрытого поглощающим материалом. Процесс измерений заключался в следующем: антенна наводилась в опорную область, расположенную на высоте Луны и отстоящую к востоку от ее центра на угловое расстояние по большой дуге, равное 6° (по азимуту на $6^{\circ}/\cos h$, h — угол места Луны). Эта область сопровождалась в течение $2 \frac{1}{2}$ минут по азимуту и углу места со скоростью движения Луны. Затем антенна наводилась на Луну, которая сопровождалась также в течение $2 \frac{1}{2}$ минут, после чего антенна отводилась по азимуту в западном направлении на расстояние $6^{\circ}/\cos h$, и эта точка небосвода сопровождалась с соответствующими скоростями.

Как показал анализ, подобная методика особенно целесообразна при измерении слабых сигналов (температура антенны от Луны, определенная по горячей калибровке, равна $1,5^{\circ}\text{K}$), так как позволяет исключить влияние неоднородности фона излучения Земли и собствен-

ногого излучения атмосферы. Дело в том, что за время одной записи Луна несколько перемещается по высоте. В связи с этим незначительно изменяется собственное излучение атмосферы при записи левого и правого нуля. Нетрудно видеть, что если осуществляется сопровождение опорных областей, то при усреднении левого и правого нуля сигнал от Луны определяется на фоне излучения атмосферы, находившейся в момент измерения непосредственно перед Луной. Наблюдения проводились по возможности вблизи кульминации, где перемещение Луны по высоте незначительно. После двух-трех записей Луны антenna наводилась на эталон излучения, который располагался во фраунгоферовой зоне антенны на определенном угле места. Нулевой уровень записывался в отсутствие эталона, сигнал—при его установке в зону диаграммы антенны.

В результате получалась серия чередующихся записей (Луна—диск), из которых радиотемпература Луны определялась по формуле (см. [3, 5])

$$\bar{T}_L = \frac{n_L}{n_d} T_0 \alpha (1 + \xi - \eta) e^{-\Delta r},$$

где $\bar{T}_L = \int T F^2 d\Omega / \int F^2 d\Omega$ —средняя по диску радиотемпература Лу-

ны при наблюдении вне атмосферы Земли, n_L —отклонение выходного прибора при наведении антенны на Луну, n_d —отклонение выходного прибора при наведении антенны на эталонный диск, T_0 —температура эталона в градусах Кельвина, $\alpha = \int F^2 d\Omega / \int F^2 d\Omega$ —коэффициент, учитывающий разницу в угловых размерах Луны и диска, $e^{-\Delta r}$ —коэффициент, учитывающий поглощение в атмосфере, ξ —поправка, обусловленная дифракцией радиоизлучения Земли на „искусственной Луне“, определяемая расчетным путем, η —поправка на отличие материала от абсолютно черного тела, определяемая по излучению и в лаборатории. При определении коэффициента α вершина диаграммы в пределах угловых размеров диска аппроксимировалась параболой.

Было проведено две серии измерений в существенно разных условиях и с разными эталонными дисками. В первой серии измерений Луна наблюдалась с 5 по 13 июня вблизи первой четверти. В течение дня осуществлялось $10 \div 12$ записей Луны, $6 \div 7$ записей диска. Для компенсации излучения фона использовался опорный облучатель, направленный в зенит. Во второй серии измерений наблюдения Луны велись с 13 по 22 августа для фазовых углов примерно от полнолуния до последней четверти. В течение дня осуществлялось около 20 записей Луны и $8 \div 10$ записей диска. Для компенсации излучения фона использовался шумовой сигнал от газоразрядной трубки, вводимый через направленный ответвитель в тракт антенны.

Условия измерений и численные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Серия измерений	λ (см)	угол места диска	Линейный размер диска (см)	Угловой размер диска	Число записей Луны	$T_{a,L}$ ($^{\circ}$ К)	$T_{a,d}$ ($^{\circ}$ К)	α	ξ (%)	η (%)	$\bar{T}_{a,L}$ ($^{\circ}$ К)
1	35	15°	180	$40',5$	100	1,5	3	$0,99 d_d^2 / d_L^2$	4	8,5	236
2	36	26°	380	$56',57$	150	1,5	6	$0,975 d_d^2 / d_L^2$	0	2,5	237

Обе серии измерений привели к одинаковому результату. Температура Луны, измеренная на 35 и 36 см, получалась выше, чем на волнах сантиметрового диапазона.

Произведем оценку точности измерений. Случайная ошибка, определяемая в основном собственными шумами аппаратуры и уходами нуля, в первом случае равна 2,5%, во втором 1,5%. Наибольшая систематическая ошибка возникает за счет неопределенности точки отсчета расстояния от радиотелескопа до диска. В первом случае она равна $\pm 2\%$, во втором 1,5%. Неточность определения величины α , по нашим оценкам, может привести к систематической ошибке $\pm 1,5\%$. На волнах 35 и 36 см поглощение в атмосфере мало, и поэтому ошибка, возникающая за счет неточности учета метеоусловий, не превышает $\pm 0,5\%$. Для первой серии измерений дифракционная поправка составляла $+8,5\%$; неточность ее учета может привести к систематической ошибке $\pm 1,5\%$. Для второй серии измерений дифракционная поправка была $+2,5\%$, а ее ошибка—не более $\pm 0,5\%$. Систематическая ошибка, возникающая за счет учета „нечерноты“ поглощающего материала, в первом случае не превосходит $\pm 1\%$, а во втором случае отсутствует, так как диск является абсолютно черным. Полная среднеквадратичная ошибка при квадратичном суммировании в первом случае равна $\pm 4\%$, во втором случае $\pm 3\%$.

Таким образом, средняя по диску эффективная температура Луны на волне 35 см

$$\bar{T}_L = 236 \pm 10^\circ\text{K},$$

а на волне 36 см

$$\bar{T}_L = 237 \pm 7,5^\circ\text{K}.$$

Сравнение полученных результатов со значениями на волнах 1,6, 3,2 и 9,6 см, полученными в работах [1–4] с использованием „искусственной Луны“, показывает систематическое увеличение температуры с длиной волны. Поскольку с ростом длины волны растет толщина излучающего слоя Луны, то полученное увеличение температуры с длиной волны свидетельствует о росте температуры вглубь Луны.

В заключение приносим глубокую благодарность В. С. Троицкому за руководство работой. Пользуемся также случаем поблагодарить В. А. Закатова, В. Н. Сысоева за помощь в эксперименте и А. Н. Иванникову за участие в обработке экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Каменская, Б. И. Семенов, В. С. Троицкий, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 882 (1962).
2. Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, В. А. Порфириев, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 802 (1962).
3. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 100 (1961).
4. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 604 (1962).
5. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 600 (1961).

PRECISE MEASUREMENT OF LUNAR RADIO EMISSION AT 35 AND 36 cm
WAVELENGTHS*V. D. Krotikov, V. A. Porfiriev*

The precise measurement of lunar radio emission at 35 and 36 cm wavelengths is carried out by the method of "artificial Moon". An effective temperature averaged over the disk is proved to be equal to $236^{\circ}\text{K} \pm 10^{\circ}$ at 35 cm wavelength and to $237^{\circ}\text{K} \pm 7,5^{\circ}$ at 36 cm wavelength. Comparison of the results obtained with those of precise measurements at shorter waves reveals a systematic increase of the effective temperature with wavelength which testifies the temperature increase deep into the Moon.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗЕМНОЙ ВОЛНЫ В САНТИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ

Ю. К. Калинин, Я. С. Родионов

С помощью моделирующей установки на $\lambda = 3,2$ см экспериментально исследуются неоднородные трассы различной конфигурации. Большое внимание уделяется роли подъема корреспондирующих пунктов над трассой. Отдельные эксперименты сопоставляются с теоретическими формулами. Хорошее согласие между теорией и экспериментом позволяет использовать моделирующую установку для решения ряда задач, представляющих интерес в практических приложениях.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование распространения земной волны в сантиметровом диапазоне представляет интерес во многих отношениях. Математические трудности „строгих“ и „приближенных“ теорий [1], сложность прямого эксперимента в длинно- и средневолновом диапазоне — все это повышает интерес к моделированию на сантиметровых волнах.

Установка для моделирования в сантиметровом диапазоне, использующая стандартную аппаратуру, была описана в работе [2]. С помощью этой установки производилось описанное ниже исследование процесса распространения земной волны вдоль неоднородной трассы.

Как известно, в эксперименте, моделирующем монохроматические процессы, описываемые обычными уравнениями Максвелла, необходимо соблюдать критерии подобия, которые могут быть представлены в виде:

$$\varepsilon = \text{const}; \quad \lambda\sigma/\varepsilon = \text{const}; \quad l/\lambda = \text{const}. \quad (1)$$

Эти условия означают необходимость сохранения диэлектрической постоянной, тангенса угла потерь и характеристических размеров, измеренных в длинах волн. Использование сантиметрового диапазона позволяет моделировать „длинные“ трассы на небольшой модели. Первое условие (1) также может быть легко выполнено. Значительно труднее оставить неизменным тангенс угла потерь. Однако даже в случае невыполнения этого условия существуют известные возможности для воспроизведения реальных процессов распространения. Это связано с тем, что распространение земной волны, как отмечено в работе [3], относится к явлениям, которые физически одинаковы на различных частотах. Зависимость от частоты не имеет „резонансных“ экстремумов и связана лишь с „масштабными“ изменениями, описываемыми формулами (1).

1. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

Одним из наиболее распространенных методов решения ряда задач, связанных с распространением земной волны, является использование теоремы Грина в сочетании с приближенными граничными условиями [4—6]. Таким путем удается получить относительно простые формулы для кусочно-однородной трассы как с учетом сферичности, так и без него [7, 8]. Обычный путь решения таков. В соотношение

$$E = E_0 + \frac{1}{4\pi} \int_s \left[\frac{\partial E}{\partial n} E_0 - E \frac{\partial E_0}{\partial n} \right] ds$$

подставляются приближенные граничные условия на поверхности $z=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial n} &= \frac{ik}{\sqrt{\varepsilon'}} E; \\ \frac{\partial E_0}{\partial n} &= \frac{ik}{\sqrt{\varepsilon'_0}} E_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Поле E представляется в виде $E = \frac{e^{ikr}}{r} W(r)$ и в пределах области,

существенной при интегрировании, полагается $r \approx x$ везде, кроме экспоненты, где $r = x + y^2/2x$. Интегрирование по y позволяет перейти к интегральному уравнению для функции ослабления W . Ниже приводятся некоторые следствия из теории, которые затем будут сравнены с экспериментом.

В случае плоской границы раздела для трассы, состоящей из двух участков, получается формула [7]

$$W = y(s_2) + i \sqrt{\frac{D}{\pi}} (\sqrt{s_1} - \sqrt{s_2}) \int_0^{D_1} \frac{y(s_1 x) y(s_2(D-x))}{\sqrt{x(x_A-x)}} dx, \quad (3)$$

где $s_j = ik/2\varepsilon'_j$, $\varepsilon'_j = \varepsilon_j + i 4\pi\sigma_j/\omega$, D —длина трассы, D_1 —длина первого участка. При выводе (3) становится ясно, что отсутствие ортогональности границы раздела и нормали к фронту волны ($\beta \neq \pi/2$) для не слишком малых β проявляется в виде поправки более высокого порядка малости, т. е.

$$|W(\beta) - W(0)| \ll W(0) \quad (\pi/6 \leq \beta \leq \pi/2). \quad (4)$$

В случае трассы, состоящей из трех участков типа „море—суша—море“, для не слишком короткой трассы применима следующая формула [7]:

$$\begin{aligned} W = & -\frac{1}{2s_2 D} + \frac{i}{\sqrt{\pi s_2 D}} \left(\sqrt{\frac{x_1}{D-x_1}} + \sqrt{\frac{D-x_2}{x_2}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{(x_2-x_1) D - x_1(D-x_2)}{x_2(D-x_1)} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где x_1 и x_2 —координаты границ участков. Квазиперечный по отношению к границам раздела случай распространения радиоволн исследован достаточно полно и теоретически и экспериментально [7–9].

В случае квазипродольного распространения не удается получить формулу типа (3), поскольку итерационное решение уравнения Грина не удается ни суммировать, ни мажорировать. Для квазипродольного случая получены следующие результаты [8]. В пределах точности метода возмущений для корреспондентов, находящихся на береговой линии,

$$W(s_1, s_2) = y \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'}} \right), \quad (6)$$

где

$$\frac{1}{V^{\varepsilon'}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V^{\varepsilon'_1}} + \frac{1}{V^{\varepsilon'_2}} \right).$$

Далее,

$$\frac{\partial W(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2)}{\partial \operatorname{tg} \chi} = + \frac{i k D}{4} \left(\frac{1}{V^{\varepsilon'_1}} - \frac{1}{V^{\varepsilon'_2}} \right) \left[y \left(\frac{1}{V^{\varepsilon'}}, \frac{D}{2} \right) \right]^2, \quad (7)$$

где χ — угол между береговой линией и трассой распространения. Следует отметить, что вторая поправка к формулам (6) и (7) равна нулю и третья может быть оценена по абсолютной величине. Таким образом, формулы (6) и (7) позволяют в исследовании вопроса продвинуться несколько дальше, чем это дает обычно метод возмущений, хотя общего решения задачи найти не удается. Тем более интересны результаты сопоставления приближенных формул с данными эксперимента.

Теоретическое рассмотрение влияния высот подъема корреспондирующих точек в случае трассы, состоящей из трех участков, по крайней мере, в принципе не представляет трудностей. Соответствующие формулы для плоской суши были получены в работе [5]. В статье [8] было показано, что такие же формулы более просто могут быть получены и с помощью приближенных граничных условий. Однако конечное выражение работы [5] все еще слишком сложно для практических применений.

2. МОДЕЛИРУЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО

Моделирующая установка состояла из ящика, сделанного из листового винипласти толщиной 6 мм. Размеры ящика по внутренним обводам 460×200 мм. Источником радиоволн служил генератор, настроенный на волну $\lambda = 3,2$ см. В качестве передающей антенны использовался открытый конец волновода сечением 29×13 мм*. Приемной антенной служил открытый конец изогнутого волновода сечением 22×10 мм, другой конец которого присоединялся к детекторной секции. В качестве индикатора был взят вольтметр, измерявший продетектированное напряжение. Изменения проводились в импульсном режиме генератора.

Детекторная характеристика снималась с помощью измерительной линии по методу, изложенному в [10]. Пример характеристики представлен на рис. 1. С ее помощью можно судить о степени квадратичности детектора в динамическом диапазоне измерений. На рис. 1 изображен график функции $n(\alpha)$, которая определяется уравнением детектирования

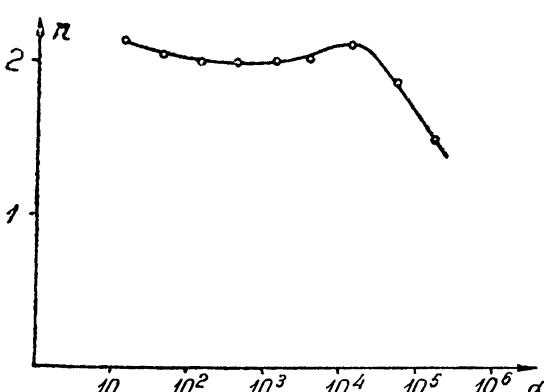


Рис. 1. Зависимость показателя детекторной характеристики n от показаний прибора α .

* Такой источник практически может считаться точечным на расстояниях, превышающих несколько сантиметров.

$$\alpha = AE^{n(\alpha)}, \quad (8)$$

где α — показания прибора, E — напряженность поля в точке наблюдения, n — показатель степени, A — коэффициент пропорциональности. В пределах $\alpha=10 \div 5 \cdot 10^4$ детекторная характеристика может считаться практически квадратичной и показания прибора пропорциональными мощности.

Расстояние между антеннами во время измерений составляло не меньше 5λ , что соответствует дальней зоне [7, 9].

Поскольку проводимые эксперименты не ставили своей целью моделирование какой-либо конкретной трассы, участки с различными проводимостями выбирались без реализации каких-либо коэффициентов подобия. Так, вместо „плохого“ проводника был выбран сухой песок, а вместо „хорошего“ — металлические пластинки.

Для определения электрических характеристик песка проводились следующие эксперименты. Измерялось затухание радиоволн над металлической трассой и над трассой, состоящей из песка. Отношение измеряемых величин в этих двух случаях должно быть равно квадрату функции ослабления Зоммерфельда

$$y = 1 - 2 \sqrt{\epsilon} e^{-\rho} \int_{-\infty}^{\sqrt{\rho}} e^{w^2} dw. \quad (9)$$

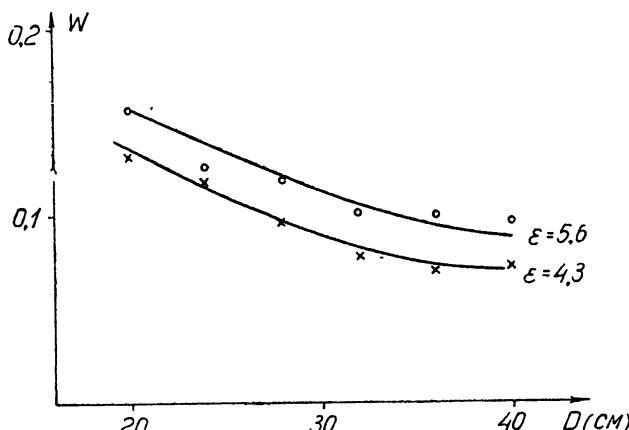


Рис. 2. К определению диэлектрической пропицаемости почвы ϵ по закону распространения над плоской полупроводящей поверхностью.

На рис. 2 приведены экспериментальные точки, по которым из семейства кривых $y(\epsilon')$ была выбрана кривая, соответствующая $\epsilon = \text{Re}\epsilon' = 5.6$. Опыты с поглощением волны, проходящей через слой песка, позволили определить, что $\sigma = 1.9 \cdot 10^9 \text{ CGSE}$. Общий характер изменения поля, продемонстрированный на рис. 2, позволяет говорить об адекватности моделирования процесса распространения вдоль плоской поверхности реальным условиям.

В случае моделирования процесса распространения вдоль плоской поверхности песок и металлические пластинки располагались вровень с краями ящика. При моделировании процесса распространения над сферой песок выступал над краями ящика и измерение расстояний производилось вдоль дуг. О возможности такого представления сферы свидетельствует эксперимент, в котором исследовалась зависимость

интенсивности сигнала от высоты. Эта зависимость, представленная на рис. 3, имеет хорошо известный вид высотного множителя.

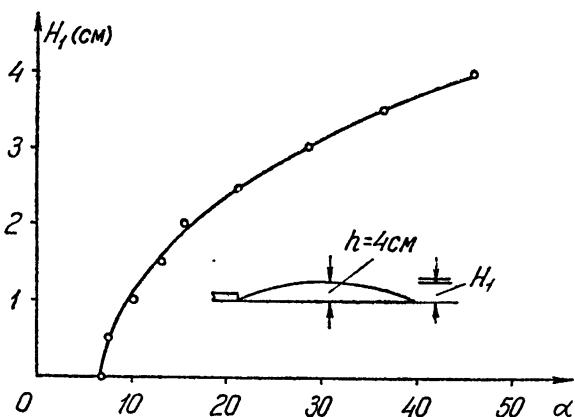


Рис. 3. Влияние подъема приемной антенны над плохо проводящей цилиндрической поверхностью.

3. ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ТРАССАМИ, СОСТОЯЩИМИ ИЗ ДВУХ УЧАСТКОВ С РАЗЛИЧНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

1. *Распространение вдоль границы раздела.* Результаты измерений, исправленные в соответствии с рис. 1 на отклонение от квадратичности (замена α на α_1), представлены на рис. 4. В этом эксперименте линия трассы была параллельна линии раздела „песок—металл“.

Расстояние между параллельными прямыми $d_1 = (d-10)$ изменялось от -10 см до $+10 \text{ см}$ ($d=10 \text{ см}$ соответствует нахождению корреспондентов на береговой линии).

Поскольку в данном случае ширина зоны Френеля $l \sim \sqrt{\lambda D}$ равна 10 см , ясно, что кривые $\tilde{W}^2(d)$ должны иметь характер переходного процесса от величины $y^2(1/\sqrt{\epsilon_n})$ к величине 1. В логарифмическом масштабе перепад составляет $2 \ln |y(1/\sqrt{\epsilon_n})|$. Согласно данным графика на рис. 2, $\ln |y(1/\sqrt{\epsilon_n})| = -1,07$. Расчетная величина логарифма по формуле для y равна $-1,097$, а величина логарифма, измеренная в данном эксперименте, есть $-1,15$. Расчетное значение логарифма по таблицам в [7] для случая $(\epsilon+1)\omega/4\pi\sigma \gg 1$ равно $1,14$. Таким образом, мы получаем еще одно экспери-

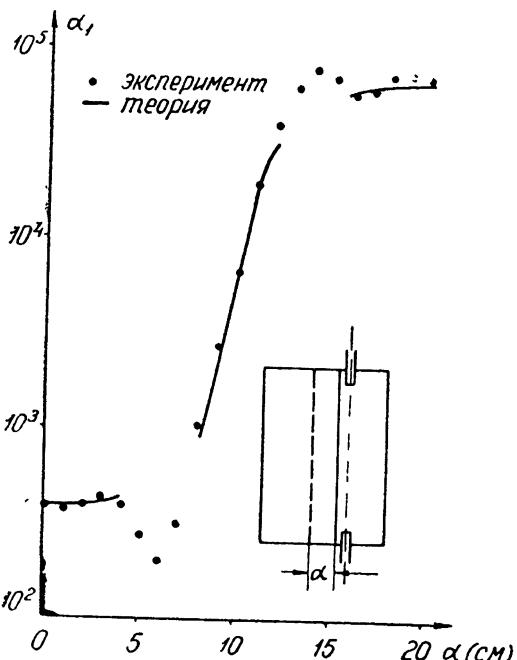


Рис. 4. Влияние близости границы раздела при распространении волны вдоль нее.

ментальное подтверждение известного факта: если неоднородности располагаются вне области, существенной при распространении, их влияние ничтожно.

Далее, согласно формуле (6), на границе неоднородности $W(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2) = y\left(\frac{1}{V\varepsilon'}\right)$. Так как над металлом $1/V\varepsilon' = 0$, то это означает изменение ε' в 4 раза и (в пределах точности асимптотической формулы для y) увеличение $|y(1/V\varepsilon')|$ в четыре раза. Таким образом, перепад уровней от $d=-10$ к $d=0$ должен быть равен $2\ln y = 1,24$. Экспериментально наблюдается перепад 1,26. И, наконец, вычисления по формуле (7) позволяют определить величину

$$\frac{\partial \lg \alpha}{\partial d} \simeq \frac{1}{2} n 2,23 \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial \chi} \frac{1}{D}. \quad (10)$$

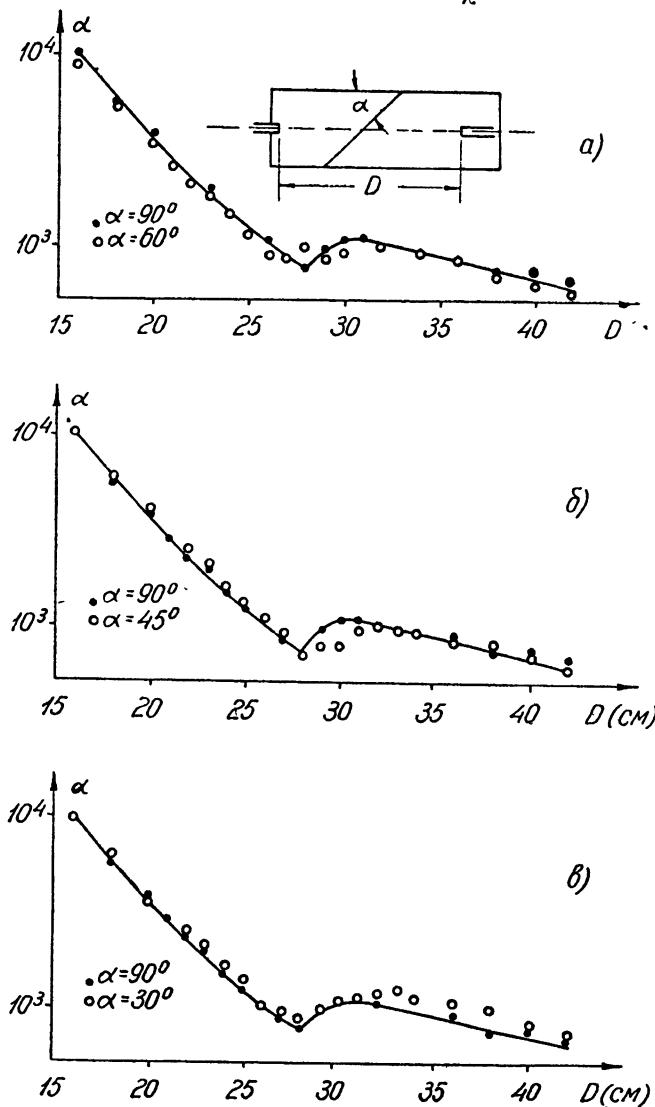


Рис. 5. Влияние границы раздела при косом падении на нее волны.

Формула (10) получается в результате дифференцирования уравнения (8), а также использования соотношения $\partial/\partial d = (1/2D)(\partial/\partial \chi)$. Вычисления дают теоретическую величину $\partial \lg a / \partial d = 0,97 \text{ см}^{-1}$, а эксперимент — $1,0 \text{ см}^{-1}$. Таким образом, в данном опыте отмечается довольно хорошее согласие между экспериментом и теорией.

2. Распространение под углом к береговой линии. На рис. 5 и рис. 6 приводятся результаты измерений вдоль неоднородной трассы в случае, когда границы неоднородности располагаются над различными углами к трассе. Рис. 5 относится к случаю нулевого подъема корреспондирующих точек, на рис. 6 показан случай подъема приемной точки на высоту $\sim \lambda/3$. Как и следовало ожидать на основании формулы (4), существенной зависимости величины $|W|$ от угла α не наблюдается. Небольшие локальные возмущения поля, занимающие область шириной $\sim 2\lambda$, могут быть рассчитаны с помощью методов, разработанных в [4, 8].

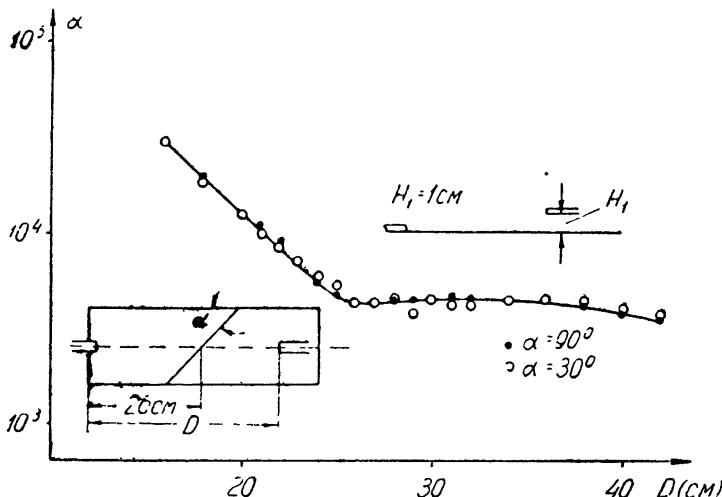


Рис. 6. Влияние границы раздела при косом падении на путь волн и поднятой приемной антенне.

Сопоставление рис. 5 и рис. 6 позволяет заметить представляющееся естественным ослабление recovery-эффекта по мере подъема одной из корреспондирующих точек.

4. НЕОДНОРОДНЫЕ ТРАССЫ, СОСТОЯЩИЕ ИЗ ТРЕХ УЧАСТКОВ (ВЗЛЕТНЫЕ И ПОСАДОЧНЫЕ ПЛОЩАДКИ)

1. Изменение радиуса кривизны. На рис. 7 приводятся результаты измерений в случае различного процентного заполнения трассы металлом β . При этом, как обычно [4–8], рассматриваются два случая. Случай „а“ соответствует симметричному заполнению середины трассы металлом („песок — металл — песок“). Случай „б“ соответствует симметричному концевому заполнению трассы металлом („металл — песок — металл“). Измерения проводились для трех значений стрелы сегмента $h=0, 2, 4 \text{ см}$, что соответствует радиусам закругления ∞ , 101 см и 52 см .

Спецификой рассмотренных случаев является тот факт, что $A\vartheta \sim \sim 1$ и $|q| \sim 2$, т. е. здесь реализуется самый неблагоприятный для теории случай, когда ряды для W , сходятся медленно, а переход к квазиплоскому случаю осуществить не удается. Единственное, что

можно рассчитать в данном случае, это величину W_3 при $h=0$, $\beta=0,5$ (формула (5)). Согласно этой формуле, $\lg |W_3| = 0,3$, а экспериментальная величина $\lg |W_3|$ равна 0,29. Далее, при $\beta=0,5$ и $h=4 \text{ см}$ логарифм отношения функций ослабления в случае „б“ и в случае „а“ равен 0,31 (экспериментальное значение). Поскольку общее затухание в этом случае достаточно велико (в отличие от случая $h=2 \text{ см}$), представляется возможным использовать теоретическую формулу (2.8) из работы [8], справедливую для случая относительно протяженной трассы. Согласно этой формуле,

$$\cdot \frac{W_3^{(6)}}{W_3^{(4)}} = \frac{t_1(q_n) - q_n^2}{t_1(0)}.$$

Численные расчеты приводят к значению $\lg |W_3^{(6)}/W_3^{(4)}| = 0,31$. Разумеется, точное совпадение этих двух цифр в известной мере случайно, так как теоретические значения определяются с точностью, не превышающей 20%. Достаточно сказать, что аналогичный расчет для случая $h=2$ дает 0,5, тогда как на опыте получается 0,32. Однако разница и в этом случае не выходит за пределы точности теоретических расчетов, которые здесь не превышают 50%.

Поскольку в экспериментах, результаты которых представлены на рис. 7, при всех значениях D и h величина чисто дифракционного затухания невелика (значение α при $\beta=1$), специфика влияния „взлетных“ и „посадочных“ площадок, характерная для плоского случая, сохраняется. Для изменения этой специфики следовало бы выбрать большие величины D и меньшие величины h (так, чтобы $r/\lambda > 100 \div 1000$, а $D/\lambda > 10 \div 100$).

2. Подъем приемной антенны. На рис. 8 изображены аналогичные экспериментальные графики для плоской трассы, когда высота приемной антенны принимает последовательные значения $H=0; 1; 1,5; 3,0 \text{ см}$. Графики позволяют проследить исчезновение трассы металлом по мере подъема антенны. Теоретический расчет в данном случае очень громоздок. Поэтому при соблюдении коэффициентов подобия таким способом можно определить поле на реальных трассах.

3. Одновременный подъем приемной и передающей антенн. На рис. 9 приведены результаты измерений в случае одновременного подъема обеих корреспондирующих точек. Высоты подъема принимают

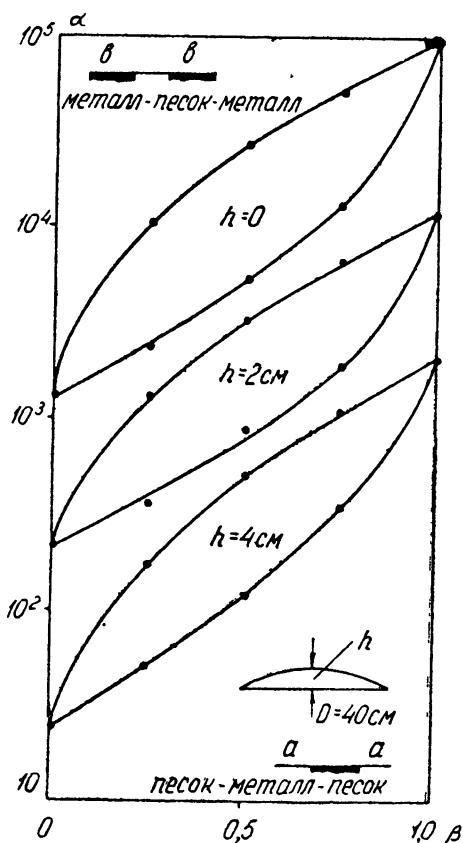


Рис. 7. Влияние „взлетно-посадочных“ площадок и коэффициента заполнения трассы z на поле при различной кривизне поверхности.

значения 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 2,5; 4,0; 5,0 см. Переход от $H=0$ к $H=1$ см более или менее аналогичен такому же переходу в случае 2. Кривые для $H=1$ см располагаются примерно посередине между кривыми $H=1,5$ см и $H=3,0$ см в случае 2. Это означает, что подъем одной антенны на 2 см даже в случае неоднородной трассы примерно эквивалентен подъему каждой из антенн на 1 см.

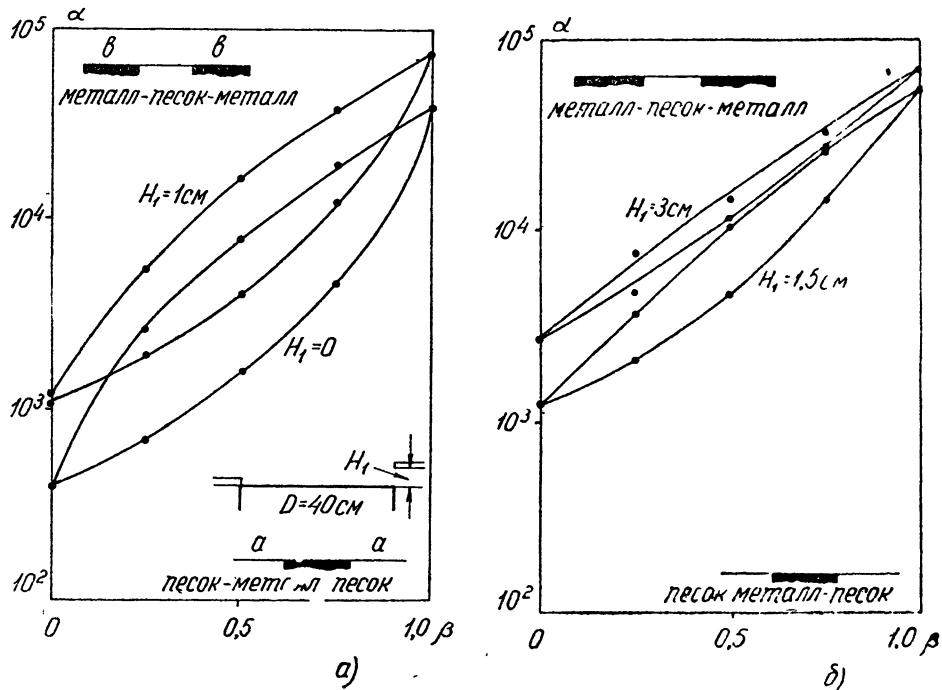


Рис. 8. Влияние „взлетно-посадочных“ площадок и коэффициента заполнения трассы β на поле при поднятой приемной антенне.

Таким образом, эксперимент свидетельствует о справедливости известного утверждения [11] о неизменности величины поля, если сумма высот приемника и источника постоянна, и в случае неоднородных трасс по крайней мере для высот, много меньших длины волн.

Дальнейшее увеличение высоты антенны приводит к сложному характеру изменения функции ослабления, поскольку здесь влияют несколько факторов: неоднородность трассы и интерференция между двумя лучами, описываемая в однородном случае отражательными формулами. Представление о взлетных и посадочных площадках становится бессодержательным в связи с интерференционным характером поля. Так, на рис. 9 ($H=1,5$ см) кривая типа „песок—металл—песок“ проходит выше, чем „металл—песок—металл“. Последовательные расчеты, содержащие функции ослабления для трасс, состоящих из трех участков с промежуточными величинами численных расстояний и высотами подъема порядка λ , очень громоздки. Соответствующие формулы, приведенные в [3], очень сложны.

В настоящей работе приведены результаты серий экспериментов по моделированию на $\lambda=3,2$ см процессов распространения земной волны. Эксперименты сводились к измерению амплитуды на трассах

сложной конфигурации. Сопоставление с теорией, особенно плодотворное в случае распространения „вдоль берега“, позволяет говорить о надежности используемого моделирующего устройства, об адекватности процессов, происходящих в нем, действительным условиям распространения радиоволн других диапазонов. Поскольку моделирующее устройство состоит из простых элементов и экономически выгодней других моделирующих устройств, представляется возможным рекомендовать его для широкого использования при решении как научных, так и учебно-методических задач.

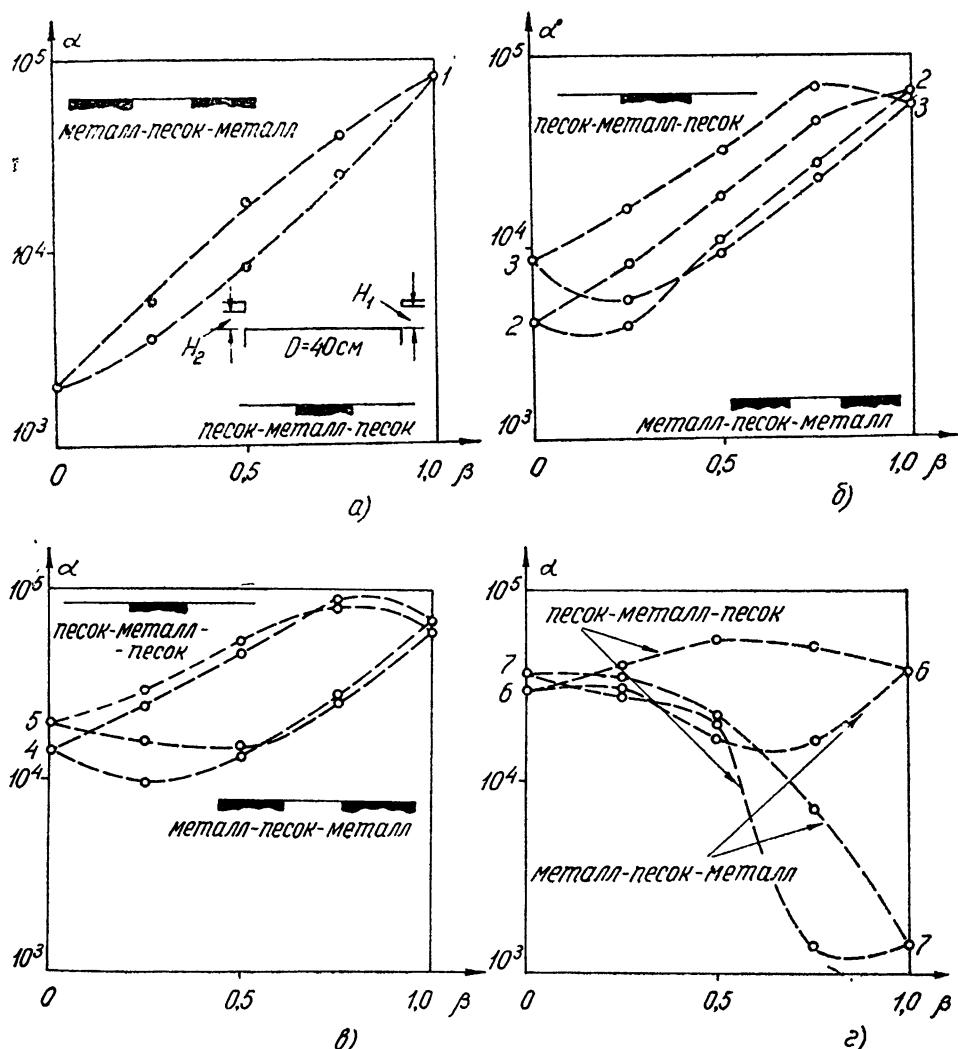


Рис. 9. Влияние „взлетно-посадочных“ площадок и коэффициента заполнения трассы β на поле при поднятой приемной и передающей антеннами:

1. $H_1=H_2=1,0 \text{ см}$;
2. $H_1=H_2=1,5 \text{ см}$;
3. $H_1=H_2=2,0 \text{ см}$;
4. $H_1=H_2=2,5 \text{ см}$;
5. $H_1=H_2=3,0 \text{ см}$;
6. $H_1=H_2=4,0 \text{ см}$;
7. $H_1=H_2=5,0 \text{ см}$.

Авторы благодарны Е. Л. Фейнбергу за обсуждение результатов работы и ценные советы. Они также выражают большую признательность С. В. Борисову, принимавшему участие в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
2. Я. С. Родионов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 4, 160 (1958).
3. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
4. Е. Л. Фейнберг, Исследования по распространению радиоволн, ч. II, изд. АН СССР, М., 1948.
5. K. Furutsu, J. Rad. Res. Lab. Japan, 2, 1 (1955).
6. Ю. К. Калинин, Е. Л. Фейнберг, Радиотехника и электроника, 3, 1122 (1958).
7. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953.
8. Ю. К. Калинин, Тр. ИЗМИРАН, 17, 50 (1960).
9. Антенны сантиметровых волн, 1, изд. Сов. радио, М., 1950.
10. Антенны сантиметровых волн, 2, изд. Сов. радио, М., 1950.
11. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.

Поступила в редакцию
5 февраля 1962 г.

SIMULATION OF THE GROUND WAVE PROPAGATION IN CM BAND

Yu. K. Kalinin, Ya. S. Rodionov

The inhomogeneous paths of different profiles are investigated experimentally by means of the modelling system at 3.2 cm wavelength. A great attention is paid to the effect of height of corresponding points over the paths. Some results of experiments are compared with the theoretical formulas. A good agreement of experiment with theory enables one to apply the modelling system for solution of some problems associated with practical application.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯДА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

B. B. Тамойкин

Рассмотрено излучение равномерно движущимся зарядом поперечных и продольных волн в статистически неоднородной плазме со слабой пространственной дисперсией. Получены выражения для интенсивности и углового распределения флюктуационного излучения поперечных (электромагнитных) волн, а также продольных (плазменных) волн до порога и за порогом черенковского излучения последних.

Излучение электромагнитных волн зарядом, движущимся в статистически неоднородной среде, рассматривалось в работах [1,2]. Для решения этой задачи в [1] используется метод, основанный на предположении о дипольном излучении рассеивателей. В работе [2] такого же рода излучение рассчитано на основе уравнений Максвелла с использованием метода малых возмущений.

Результаты, полученные в [1,2], справедливы, в частности, для изотропной плазмы. Однако в этих работах не учитывалась пространственная дисперсия. В применении к плазме это соответствует пре-небрежению тепловым движением электронов. Учет же пространственной дисперсии для плазмы может оказаться весьма существенным. Достаточно указать на возможность генерации плазменных волн, не существующих в холодной плазме (мы не рассматриваем плазменные колебания с $\omega = \omega_0$, для которых групповая скорость распространения равна нулю). В настоящей статье приводятся результаты расчета интенсивности и углового распределения флюктуационного излучения электромагнитных и плазменных волн при равномерном движении заряда в статистически неоднородной плазме со слабой пространственной дисперсией. Заметим, что полученные в статье результаты могут оказаться полезными при рассмотрении спорадического радиоизлучения Солнца [3], радиоизлучения радиационных поясов Земли [4] и т. д.

1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

Рассмотрим безграничное пространство, заполненное плазмой, в которой вдоль оси x движется заряженная частица с постоянной скоростью \mathbf{v}_0 . При своем движении частица пересекает некоторый ограниченный слой плазмы со случайными флюктуациями плотности электронов.

Уравнения поля, создаваемого движущейся частицей, запишем в виде [5]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} e \mathbf{v}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}' = 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}_0 t).$$

При учете теплового движения электронов плазмы последняя обладает пространственной дисперсией. Здесь мы ограничимся случаем слабой пространственной дисперсии [5, 6], когда для гармонических полей связь между электрической индукцией $D'(\omega)$ и напряженностью электрического поля $E(\omega)$ можно записать в виде:

$$D'(\omega) = \epsilon(\omega) E + L_1^2 \nabla \operatorname{div} E + L_2^2 \Delta E; \quad (2)$$

$$L_1^2 = \frac{2\pi T}{m} \frac{\omega_0^2}{\omega^4}; \quad L_2^2 = \frac{\pi T}{m} \frac{\omega_0^2}{\omega^4}; \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \quad (3)$$

При наличии в среде малых флюктуаций плотности можно считать, что

$$N = N_0 + \Delta N(r), \quad E = E_0 + E', \quad B = B_0 + B',$$

где N_0 , E_0 , B_0 — средняя концентрация и поля, являющиеся решением уравнений (1) в отсутствие флюктуаций, а $\Delta N(r)$, E' , B' — флюктуационные отклонения концентрации и рассеянные поля.

Решая эту задачу методом возмущений, легко показать, что система уравнений для поля рассеяния запишется в виде:

$$\operatorname{rot} E' = \frac{i\omega}{c} B'; \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} B' = -\frac{i\omega}{c} [\epsilon_0(\omega) E' + L_1^2 \nabla \operatorname{div} E' + L_2^2 \Delta E'] - \frac{i\omega}{c} [\epsilon_0 - 1] \frac{\Delta N}{N_0} E_0.$$

В уравнениях (4) мы пренебрегаем членами $-(i\omega/c)L_1^2(\Delta N/N_0)\nabla \operatorname{div} E_0$ и $-(i\omega/c)L_2^2(\Delta N/N_0)\Delta E_0$ ввиду их малости по сравнению с членом $-(i\omega/c)\Delta\epsilon(r)E_0$. Если R — расстояние, на котором существенно изменяется поле движущегося заряда E_0 , то эти члены можно не учитывать при выполнении условий L_1^2/R^2 , $L_2^2/R^2 \ll 1$, т. е. в случае среды со слабой пространственной дисперсией.

Выполним операцию rot над первым уравнением системы (4). В результате получим:

$$\Delta E' - \nabla \operatorname{div} E' + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 E' + \frac{\omega^2}{c^2} L_1^2 \nabla \operatorname{div} E' + \frac{\omega^2}{c^2} L_2^2 \Delta E' = -\frac{\omega^2}{c^2} \Delta\epsilon(r) E_0. \quad (5)$$

Так как учет пространственной дисперсии несущественен для поперечных волн [7], то мы можем положить

$$\frac{\omega^2}{c^2} L_2^2 \Delta E' = \frac{\omega^2}{c^2} L_2^2 \nabla \operatorname{div} E'. \quad (6)$$

Тем самым будет автоматически проведен учет пространственной дисперсии лишь для продольных волн, для которых он существенен уже хотя бы потому, что продольные волны с $\omega \neq \omega_0$ отсутствуют в холодной плазме ($v_T = 0$). В результате, учитывая (6), запишем уравнение (5) в виде:

$$\Delta E' - \nabla \operatorname{div} E' a + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 E' = -\frac{\omega^2}{c^2} \int \delta(r - r') \Delta\epsilon(r') E_0(r') dr'. \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$a = 1 - \frac{\omega^2}{c^2} L_2^2; \quad L^2 = L_1^2 + L_2^2 = \frac{3\pi T}{m} \frac{\omega_0^2}{\omega^4}. \quad (8)$$

Уравнение (7) легко решается путем разложения обеих его частей в пространственный интеграл Фурье. В результате электрическое поле рассеяния

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' = & \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{4\pi} \int \Delta\epsilon \mathbf{E}_0 \frac{\exp ik_1 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} d\mathbf{r}_1 + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \int \Delta\epsilon(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \frac{\exp ik_1 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} d\mathbf{r}_1 - \\ & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \operatorname{div}_{\mathbf{r}} \int \Delta\epsilon(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) \frac{\exp ik_2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} d\mathbf{r}_1. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{L^2}}. \quad (10)$$

При подсчете потока излучения мы можем выбрать точку наблюдения достаточно далеко от рассеивающего объема так, чтобы выполнялось приближенное равенство

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \approx r - m\mathbf{r}_1, \quad (11)$$

где \mathbf{m} — единичный вектор в направлении на точку наблюдения. Тогда рассеянное поле можно приближенно записать в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' = & \frac{\omega^2}{4\pi c^2} \frac{\exp ik_1 r}{r} \int \Delta\epsilon \mathbf{E}_0 \exp(-ik_1 m\mathbf{r}_1) d^3 r_1 - \\ & - \frac{\omega^2}{4\pi c^2} \frac{\exp ik_1 r}{r} \int \Delta\epsilon \mathbf{m}(m\mathbf{E}_0) \exp(-ik_1 m\mathbf{r}_1) d^3 r_1 + \\ & + \frac{1}{4\pi L^2} \frac{\exp ik_2 r}{r} \int \Delta\epsilon \mathbf{m}(m\mathbf{E}_0) \exp(-ik_2 m\mathbf{r}_1) d^3 r_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, это выражение справедливо при выполнении следующих неравенств:

$$k_1 \rho_{\max}^2 / r \ll 1, \quad k_2 \rho_{\max}^2 / r \ll 1, \quad (13)$$

где ρ_{\max} — максимальный размер рассеивающего слоя. Первые два члена в (12) соответствуют электромагнитной волне, в то время как третий член связан с излучением плазменной волны.

2. СРЕДНЯЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ФЛЮКТУАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

Интенсивность излучения электромагнитных волн в телесный угол $\Delta\Omega$ в интервале частот ω , $\omega+d\omega$ равна

$$S_{\omega}^{\perp} = \frac{c \sqrt{\epsilon_0}}{2} |\mathbf{E}'_{\perp}|^2 r^2 d\Omega d\omega. \quad (14)$$

Подставляя сюда выражение для поперечного поля рассеяния, получим:

$$\begin{aligned} dS_{\omega}^{\perp} = & \frac{\omega^4 \sqrt{\epsilon_0}}{(4\pi)^2 c^3} \iint \overline{\Delta\epsilon(\mathbf{r}_1)} \overline{\Delta\epsilon(\mathbf{r}_2)} [\mathbf{E}_0 - \mathbf{m}(m\mathbf{E}_0)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_1} \times \\ & \times [\mathbf{E}_0 - \mathbf{m}(m\mathbf{E}_0^*)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2} \exp[-ik_1 \mathbf{m}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\Omega d\omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Невозмущенное поле движущейся частицы E_0 легко найти из уравнений Максвелла. Здесь мы используем хорошо известное выражение для спектра поля движущейся частицы [5]:

$$\begin{aligned} E_0(z, x) = & -\frac{ei}{2\pi^2 v_0} \left[\frac{k}{(z^2 + \omega^2/v_0^2)(\epsilon_0 - L^2\omega^2/v_0^2 - L^2z^2)} \right. \\ & \left. - \omega \left(v_0 - \frac{k\omega}{z^2 + \omega^2/v_0^2} \right) c^{-2} \left(z^2 + \frac{\omega^2}{v_0^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \right)^{-1} \right] e^{i(\omega/v_0)x}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$k_x = \omega/v_0, \quad z^2 = k_y^2 + k_z^2. \quad (17)$$

При $\epsilon_0 > L^2\omega^2/v_0^2$ возможно черенковское излучение плазменных волн. В этом случае нужно положить

$$\frac{1}{(\epsilon_0 - L^2\omega^2/v_0^2 - L^2z^2)} = \frac{\text{P. V.}}{(\epsilon_0 - L^2\omega^2/v_0^2 - L^2z^2)} - i\pi\delta(\epsilon_0 - L^2\omega^2/v_0^2 - L^2z^2), \quad (18)$$

где символ Р. В. означает, что интеграл берется в смысле главного значения.

Тогда поле

$$E_0(r, \omega) = \int E_0(z, x) e^{iz\rho} dx, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{x} = \{k_y, k_z\}, \quad \rho = \{y, z\}. \quad (20)$$

Подставляя (16) и (18) в (15), получим:

$$\begin{aligned} dS_\omega^\perp = & \frac{\omega^4 \sqrt{\epsilon_0} \Delta\epsilon^2}{(4\pi)^2 c^3} \iint [E_0 - \mathbf{m}(mE_0)]_{\rho=\rho_1} [E_0 - \mathbf{m}(mE_0)]_{\rho=\rho_2} \times \\ & \times B_{\Delta\epsilon}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) e^{-ik_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + i(\omega/v_0)(x_1 - x_2)} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\Omega d\omega, \end{aligned} \quad (21)$$

где $k_1 = k_1 \mathbf{m}$ и $B_{\Delta\epsilon}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ — коэффициент корреляции флюктуаций диэлектрической проницаемости. В случае, если поле случайных флюктуаций диэлектрической проницаемости однородно, функция $B_{\Delta\epsilon}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ зависит лишь от разности $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

Если далее предположить, что расстояние R , на котором существенно изменяется поле движущегося заряда в направлении, перпендикулярном направлению этого движения, много больше радиуса корреляции флюктуаций $\Delta\epsilon(r)$ ($R \gg l$), то при выполнении условий

$$\frac{\omega}{v_0} \left(1 - \frac{v_0}{c} \sqrt{\epsilon_0} \cos \Theta \right) l \ll 1, \quad (22)$$

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_0} l \sin \Theta \ll 1 \quad (23)$$

выражение (20) существенно упрощается и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} dS_\omega^\perp = & \frac{\omega^4 \sqrt{\epsilon_0} d\Delta\epsilon^2}{(4\pi)^2 c^3} \iint \iint [E_0(\mathbf{x}_1) - \mathbf{m}(mE_0(\mathbf{x}_1))] [E_0(\mathbf{x}_2) - \mathbf{m}(mE_0(\mathbf{x}_2))] \times \\ & \times e^{i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\rho} d\rho \int B_{\Delta\epsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\Omega d\omega d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь d — путь, проходимый в направлении x . При этом выражение для углового распределения флюктуационного излучения электромаг-

нитных волн, приходящееся на единичный путь, проходимый частицей, записывается в следующем виде:

$$dS_{\omega}^{\perp}(\Theta) = \frac{\omega^4 V \varepsilon_0 \Delta \varepsilon^2}{16 \pi^2 c^3} \int \int \int [2 \sin^2 \Theta E_{0r}(\mathbf{x}_1) E_{0x}(\mathbf{x}_2) + \\ + (1 + \cos^2 \Theta) E_{0p}(\mathbf{x}_1) E_{0p}(\mathbf{x}_2)] e^{i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \rho} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\rho \int B_{\Delta \varepsilon}(\mathbf{r}) dr d\omega. \quad (25)$$

Рассмотрим случай $\varepsilon_0 < L^2 \omega^2 / v_0^2$, когда черенковское излучение плазменных волн отсутствует. Здесь (24) удобно проинтегрировать сначала по переменной ρ , что дает $(2\pi)^2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. Дальнейшее интегрирование не составляет труда, и в результате получаем:

$$S_{\omega}^{\perp}(\Theta) = \frac{\omega^4 e^2 \Delta \varepsilon_0^2}{16 \pi^2 c^3 v_0^2 \varepsilon_0^{3/2}} \left\{ 2 \sin^2 \Theta \left[1 - \varepsilon_0 \beta^2 + \frac{L^2 \omega^2 / v_0^2}{L^2 \omega^2 / v_0^2 - \varepsilon_0} + \right. \right. \\ + \frac{2 L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \varepsilon_0 \beta^2)}{\varepsilon_0 (1 - \omega^2 L^2 / c^2)} \ln \left| \frac{4}{(\omega^2 / v_0^2) \rho_{\min}^2 (1 - \varepsilon_0 \beta^2)} \right| - \frac{2 L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \varepsilon_0 \beta^2)}{\varepsilon_0 (1 - \omega^2 L^2 / c^2)} \times \\ \times \ln \left| \frac{4 L^2}{\rho_{\min}^2 (L^2 \omega^2 / v_0^2 - \varepsilon_0)} \right| + (1 + \cos^2 \Theta) \left[\frac{L^2 (\omega^2 / v_0^2) (\varepsilon_0 \beta^2 - 2) + \varepsilon_0}{\varepsilon_0 (1 - \omega^2 L^2 / c^2)} \times \right. \\ \times \ln \left| \frac{4}{(\omega^2 / v_0^2) \rho_{\min}^2 (1 - \varepsilon_0 \beta^2)} \right| + \frac{L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \varepsilon_0 \beta^2) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0 (1 - \omega^2 L^2 / c^2)} \times \\ \left. \left. \times \ln \left| \frac{4 L^2}{\rho_{\min}^2 (L^2 \omega^2 / v_0^2 - \varepsilon_0)} \right| - 2 \right] \right\} \int B_{\Delta \varepsilon}(\mathbf{r}) dr. \quad (26)$$

Полная спектральная плотность флюктуационной энергии, излученной зарядом на единице длины пути, получается интегрированием (25) по всем углам Θ от 0 до π^* :

$$S_{\omega}^{\perp} = \frac{\omega^4 e^2 \Delta \varepsilon_0^2}{6 \pi^2 c^3 v_0^2 \varepsilon_0^{3/2}} \left\{ \ln \left| \frac{1 - \varepsilon_0 v_0^2 / 3 v_T^2}{1 - \varepsilon_0 \beta^2} \right| - \varepsilon_0 \beta^2 + \frac{\varepsilon_0 v_0^2 / 3 v_T^2}{(1 - \varepsilon_0 v_0^2 / 3 v_T^2)} \right\} \int B_{\Delta \varepsilon}(\mathbf{r}) dr. \quad (27)$$

Появление ρ_{\min} в (25) определяется условиями применимости макроскопической электродинамики. Однако в выражении (26) для полной спектральной плотности флюктуационного излучения зависимость от ρ_{\min} исчезает. Известно, что при вычислении потерь энергии заряда, движущегося в среде, аналогичная зависимость от ρ_{\min} исчезает при учете парных столкновений. Очевидно, в нашем случае учет пространственной дисперсии среды в этом смысле играет такую же роль, как и учет близких соударений.

Из (26) видно, что хотя первый член при $v_0^2 \rightarrow 3 v_T^2 / \varepsilon_0$ стремится логарифмически к минус бесконечности, однако более быстрый рост третьего члена приводит к тому, что излучение заряда на случайных флюктуациях концентрации электронов плазмы при учете их теплового движения сильно возрастает с приближением к черенковскому порогу.

* В работе [1] в формулах (3)–(6) есть неточности в коэффициентах. Например, формулу (5) надо записать так:

$$J_{\omega yz} = \frac{e^2 s}{\pi c \beta^2 \varepsilon_0^{3/2}} \left[\ln \frac{P_{\infty}^2 v_0^2}{\omega^2 (1 - \varepsilon_0 \beta^2)} - 1 \right].$$

излучения плазменных волн.

Необходимо заметить, что аналогичный рост излучения наблюдается для среды без пространственной дисперсии при приближении к черенковскому порогу излучения электромагнитных волн; однако это возрастание лишь логарифмическое, т. е. более медленное [1, 2]. Последнее связано с тем, что невозмущенное поле движущегося заряда более слабо возрастает при $v_0^2 \rightarrow c^2/\epsilon_0$, чем при $v_0^2 = 3v_T^2/\epsilon_0$.

Разумеется, на самом пороге ($v_0^2 = 3v_T^2/\epsilon_0$) пользоваться формулами (25) и (26) нельзя. Во-первых, нарушается метод малых возмущений, который был использован при расчете поля рассеяния; во-вторых, при $v_0^2 = 3v_T^2/\epsilon_0$ невозмущенное поле движущегося заряда имеет логарифмическую особенность и в области сильного поля теряет смысл понятие обычной диэлектрической пропицаемости, так как среда становится нелинейной.

Аналогично можно вычислить интенсивность флюктуационного излучения электромагнитных волн при $v_0^2 > 3v_T^2/\epsilon_0$, т. е. при наличии черенковского излучения плазменных волн. В этом случае, очевидно, в энергию электромагнитных волн, переизлучаемых неоднородностями, кроме ближнего кулоновского поля заряда, будут вносить вклад и черенковские плазменные волны. При этом в (25) интеграл по ρ необходимо обрезать на ρ_{\max} , где ρ_{\max} — максимальный поперечный размер рассеивающего слоя. Тогда интегрирование в (25) удается провести до конца в двух предельных случаях:

$$\frac{\omega}{v_0} \rho_{\max} \sqrt{\frac{\epsilon_0 v_0^2}{3v_T^2} - 1} \gg 1; \quad \frac{\omega}{v_0} \rho_{\max} \sqrt{\frac{\epsilon_0 v_0^2}{3v_T^2} - 1} \ll 1. \quad (28)$$

В первом случае для углового распределения рассеянного излучения поперечных волн в единичном интервале частот на единице длины пути заряда получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} S_\omega^\perp(\Theta) = & \frac{\omega^4 e^2 \Delta \epsilon^2}{16 \pi^2 c^3 v_0^2 \epsilon_0^{3/2}} \left\{ 2 \sin^2 \Theta \left[1 - \epsilon_0 \beta^2 + \frac{L^2 \omega^2 / v_0^2}{\epsilon_0 - L^2 \omega^2 / v_0^2} + \right. \right. \\ & + \frac{2L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \epsilon_0 \beta^2)}{L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \epsilon_0 \beta^2) - (\epsilon_0 - L^2 \omega^2 / v_0^2)} \ln \left| \frac{4}{(\omega^2 / v_0^2) \rho_{\min}^2 (1 - \epsilon_0 \beta^2)} \right| - \\ & - \frac{2L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \epsilon_0 \beta^2)}{L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \epsilon_0 \beta^2) - (\epsilon_0 - L^2 \omega^2 / v_0^2)} \ln \left| \frac{4L^2}{\rho_{\min}^2 (L^2 \omega^2 / v_0^2 - \epsilon_0)} \right| + \\ & \left. \left. + \frac{\pi \rho_{\max} L \omega^2 / v_0^2}{2 \sqrt{\epsilon_0 - L^2 \omega^2 / v_0^2}} \right] + (1 + \cos^2 \Theta) \left[\frac{\epsilon_0 (1 - \omega^2 L^2 / c^2)}{L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \epsilon_0 \beta^2) - (\epsilon_0 - L^2 \omega^2 / v_0^2)} \times \right. \right. \\ & \times \ln \left| \frac{4L^2}{\rho_{\min}^2 (\epsilon_0 - L^2 \omega^2 / v_0^2)} \right| - 2 + \frac{\pi \rho_{\max} \sqrt{\epsilon_0 - L^2 \omega^2 / v_0^2}}{2L} \right\} \int B_{\Delta \epsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (29)$$

Интегрируя (29) по всем углам Θ от 0 до π , найдем полную интенсивность рассеянного излучения электромагнитных волн

$$\begin{aligned} S_\omega^\perp = & \frac{\omega^4 e^2 \Delta \epsilon^2}{6 \pi^2 c^3 v_0^2 \epsilon_0^{3/2}} \left\{ \ln \left| \frac{\epsilon_0 v_0^2 / 3v_T^2 - 1}{1 - \epsilon_0 \beta^2} \right| - \epsilon_0 \beta^2 - 1 + \frac{1}{(\epsilon_0 v_0^2 / 3v_T^2 - 1)} + \right. \\ & + \left. \frac{\pi \rho_{\max} \epsilon_0 \omega / v_0}{\sqrt{\epsilon_0 v_0^2 / 3v_T^2 - 1} 3v_T^2 / v_0^2} \right\} \int B_{\Delta \epsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (30)$$

Появление члена $\pi \rho_{\max} (\omega/v_0) (2\sqrt{\varepsilon_0 v_0^2/3v_T^2 - 1} 3v_T^2/\varepsilon_0 v_0^2)^{-1}$ в (30) связано с рассеянием черенковской плазменной волны на флюктуациях концентрации плазмы. Его сопоставление с наибольшим из членов, обусловленных поляризацией среды ближним кулоновским полем при приближении к черенковскому порогу излучения плазменных волн, показывает, что он в $(\omega/v_0) \rho_{\max} \sqrt{\varepsilon_0 v_0^2/3v_T^2 - 1}$ раз больше, чем член $(\varepsilon_0 v_0^2/3v_T^2 - 1)^{-1}$.

Таким образом, черенковская плазменная волна, излучаемая движущимся зарядом, при выполнении условия $(\omega/v_0) \rho_{\max} \sqrt{\varepsilon_0 v_0^2/3v_T^2 - 1} \gg 1$ вносит больший вклад в интенсивность рассеянного электромагнитного излучения, чем кулоновское поле движущегося заряда. Это ясно из следующих соображений. Плазменная волна спадает с расстоянием по закону $1/\sqrt{r}$. В то же время кулоновское поле резко спадает уже на расстоянии порядка $v_0/\omega \sqrt{\varepsilon_0 v_0^2/3v_T^2 - 1}$. Поэтому эффективный объем рассеяния для кулоновского поля оказывается значительно меньшим, чем для черенковской плазменной волны.

Рассмотрим теперь случай

$$(\omega/v_0) \rho_{\max} \sqrt{\varepsilon_0 v_0^2/3v_T^2 - 1} \ll 1. \quad (31)$$

При этом в (25) удобно провести интегрирование сначала по переменным x_1 и x_2 . В результате, считая выполненным условие

$$(\omega/v_0) \rho_{\max} \gg 1, \quad (32)$$

для углового распределения рассеянного излучения получим следующее выражение:

$$S_\omega^\perp(\Theta) = \frac{\omega^6 e^2 \Delta \varepsilon^2 \rho_{\max}^2}{16 \pi^2 c^3 v_0^4 \varepsilon_0^{3/2}} \ln^2 \left| \frac{\omega}{v_0} \rho_{\max} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 v_0^2}{3v_T^2} - 1} \right| \sin^2 \Theta. \quad (33)$$

В (33) мы оставили лишь один член, связанный с рассеянием кулоновского поля на неоднородностях среды, который при выполнении условий (31) и (32) оказывается значительно больше всех других членов, входящих в выражение для $S_\omega^\perp(\Theta)$. Из выражения (33) видно, что максимум рассеянного излучения совпадает с направлением, перпендикулярным направлению движения заряда. Это станет вполне понятно, если учесть, что x -компоненты электрического поля движущегося заряда при условии (31) является преобладающей. Γ

Проинтегрировав (33) по углам Θ от 0 до π , получим выражение для спектральной плотности флюктуационной энергии электромагнитных волн:

$$S_\omega^\perp = \frac{\omega^6 e^2 \Delta \varepsilon^2 \rho_{\max}^2}{12 \pi^2 c^3 v_0^4 \varepsilon_0^{3/2}} \ln^2 \left| \frac{\omega}{v_0} \rho_{\max} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 v_0^2}{3v_T^2} - 1} \right|. \quad (34)$$

Таким образом, при выполнении условия (31) черенковская плазменная волна вносит меньший вклад в рассеянное излучение, чем кулоновское поле движущегося заряда. Это связано с тем, что в этом случае кулоновское поле движущегося заряда в любой точке рассеивающего объема большее амплитуды излучаемой зарядом плазменной волны. В то же время эффективные объемы рассеяния для них совпадают. Сравнение (34) и (30) показывает, что в этом случае интенсивность рассеяния может быть значительно больше, чем в случае $(\omega/v_0) \rho_{\max} \sqrt{\varepsilon_0 v_0^2/3v_T^2 - 1} \gg 1$.

В заключение заметим, что переход в формулах (29) и (30) к случаю среды без пространственной дисперсии нетривиален, так как при $v_T \rightarrow 0$ (29) и (30) формально стремятся к бесконечности. Легко видеть, однако, что наше рассмотрение в этом случае становится несправедливым. Действительно, выше мы всюду считали среду прозрачной, что было бы оправдано в случае малого затухания. Однако это не всегда так. Хотя декремент затухания Ландау во времени τ для продольного поля на частоте ω не зависит от T , но $\mu = \gamma dk/d\omega \sim 1/v_T$, где μ — коэффициент затухания продольных колебаний в пространстве. Следовательно, при $v_T \rightarrow 0$ коэффициент $\mu \rightarrow \infty$. Если корректно учесть этот факт и положить $B_{\Delta\varepsilon}(\mathbf{r}) = l^3 \delta(\mathbf{r})$, где $\delta(\mathbf{r})$ — дельта-функция Дирака, а l — размер неоднородностей, то мы придем к формуле, полученной Капицей [1] для плазмы, не обладающей пространственной дисперсией.

3. СРЕДНЯЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ ФЛЮКТУАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Средняя интенсивность рассеянного излучения продольных волн в интервале частот $d\omega$ в телесный угол $d\Omega$ определяется формулой

$$dS''_\omega = \sqrt{3} v_T \sqrt{\varepsilon_0} |E_l|^2 r^2 d\Omega d\omega, \quad (35)$$

где величина $\sqrt{3} v_T \sqrt{\varepsilon_0}$ представляет собой групповую скорость распространения продольных волн в плазме. Подставляя в (35) выражение для продольного поля рассеяния, найдем:

$$\begin{aligned} dS''_\omega = & \frac{\omega^4 \sqrt{\varepsilon_0} \Delta\varepsilon^2}{24 \sqrt{3} \pi^2 v_T^3} \iint (\mathbf{m} E_0)_\rho = \rho_1 (\mathbf{m} E_0^\dagger)_\rho = \rho_2 \times \\ & \times e^{-ik_2(r_1 - r_2) + i(\omega/v_0)(x_1 - x_2)} B_{\Delta\varepsilon}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) dr_1 dr_2 d\Omega d\omega. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $\mathbf{k}_2 = k_2 \mathbf{m}$. Если далее полагать, что поле движущегося заряда в направлении, перпендикулярном направлению движения заряда, мало изменяется на расстоянии порядка радиуса корреляции l флюктуаций концентрации плазмы, и считать выполненным условие

$$\frac{\omega}{v_0} \left(1 - \frac{v_0}{\sqrt{3} v_T} \sqrt{\varepsilon_0} \cos\Theta \right) l \ll 1, \quad (37)$$

$$\frac{\omega}{\sqrt{3} v_T} \sqrt{\varepsilon_0} \sin\Theta l \ll 1, \quad (38)$$

то для углового распределения рассеянного излучения продольных волн на единичном пути частицы в единичном интервале частот получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} S''(\Theta) = & \frac{\omega^4 \sqrt{\varepsilon_0} \Delta\varepsilon^2}{24 \sqrt{3} \pi^2 c^3 \beta_T^3} \iiint [2 \cos^2 \Theta E_{0r}(\mathbf{x}_1) E_{0x}(\mathbf{x}_2) + \\ & + \sin^2 \Theta E_{0p}(\mathbf{x}_1) E_{0p}^*(\mathbf{x}_2)] e^{i(x_1 - x_2)\rho} d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\rho \int B_{\Delta\varepsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\beta_T = v_T/c$.

Здесь наиболее интересен случай, когда черенковское излучение плазменных волн отсутствует. В этом случае, однако, потери энергии заряда на излучение плазменных волн будут отличны от нуля из-за

рассеяния кулоновского поля заряда на неоднородностях среды. Тогда угловое распределение при $v_0^2 < 3v_T^2/\varepsilon_0$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned} S_{\omega}(\Theta) = & \frac{\omega^4 e^2 \Delta \varepsilon_0^2}{24 \sqrt{3} \pi^2 c^3 v_0^2 \beta_T^3 \varepsilon_0^{3/2}} \left\{ 2 \cos^2 \Theta \left[1 - \varepsilon_0 \beta^2 + \frac{L^2 \omega^2 / v_0^2}{L^2 \omega^2 / v_0^2 - \varepsilon_0} + \right. \right. \\ & + \frac{2 L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \varepsilon_0 \beta^2)}{\varepsilon_0 (1 - \omega^2 L^2 / c^2)} \ln \left| \frac{4}{(\omega^2 / v_0^2) \rho_{\min}^2 (1 - \varepsilon_0 \beta^2)} \right| - \frac{2 L^2 (\omega^2 / v_0^2) (1 - \varepsilon_0 \beta^2)}{\varepsilon_0 (1 - \omega^2 L^2 / c^2)} \times \\ & \times \ln \left| \frac{4 L^2}{\rho_{\min}^2 (L^2 \omega^2 / v_0^2 - \varepsilon_0)} \right| \left. \right] + \sin^2 \Theta \left[\frac{L^2 (\omega^2 / v_0^2) (\varepsilon_0 \beta^2 - 2) + \varepsilon_0}{\varepsilon_0 (1 - \omega^2 L^2 / c^2)} \times \right. \\ & \times \ln \left| \frac{4}{(\omega^2 / v_0^2) \rho_{\min}^2 (1 - \varepsilon_0 \beta^2)} \right| - 2 + \frac{L^2 (\omega^2 / v_0^2) (2 - \varepsilon_0 \beta^2) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0 (1 - \omega^2 L^2 / c^2)} \times \\ & \left. \left. \times \ln \left| \frac{4 L^2}{\rho_{\min}^2 (L^2 \omega^2 / v_0^2 - \varepsilon_0)} \right| \right] \right\} \int B_{\Delta \varepsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (40)$$

Полная интенсивность рассеянного излучения плазменных волн получается интегрированием (40) по углам Θ . Как легко видеть из условий (37) и (38), при $(\omega/v_0) l \ll 1$ пределы интегрирования по Θ нужно взять от 0 до π . В результате имеем:

$$S_{\omega} = \frac{\omega^4 e^2 \Delta \varepsilon_0^2}{18 \sqrt{3} \pi^2 c^3 v_0^2 \beta_T^3 \varepsilon_0^{3/2}} \left\{ \ln \left| \frac{1 - \varepsilon_0 v_0^2 / 3v_T^2}{1 - \varepsilon_0 \beta^2} \right| - \varepsilon_0 \beta^2 + \frac{\varepsilon_0 v_0^2 / 3v_T^2}{1 - \varepsilon_0 v_0^2 / 3v_T^2} \right\} \int B_{\Delta \varepsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (41)$$

Сопоставление (41) и (27) показывает, что интенсивность излучения продольных волн в неоднородной плазме на частотах ω , близких к плазменной частоте ω_0 , в $1/3\sqrt{3}\beta_T^3$ раз больше энергии излучения электромагнитных волн. В конечном счете это связано с тем, что энергия плазменных волн, излучаемых одним осциллятором в пространственно-диспергирующей плазме, оказывается значительно больше энергии излучения электромагнитных волн [8, 9]. В нашем случае отличие от [8, 9] лишь в том, что мы имеем дело с коллективным эффектом излучения всеми неоднородностями, расположенными в рассеивающем слое плазмы. При $(\omega/\sqrt{3}v_T)\sqrt{\varepsilon_0}l \gg 1$ совместное выполнение условий (37) и (38) возможно при $\Theta \ll 1$ и $v_0 \approx \sqrt{3}v_T/\sqrt{\varepsilon_0}$. В этом случае пределы интегрирования по Θ будут от 0 до $\Theta_{\max} \approx \sqrt{3}v_T/\omega\sqrt{\varepsilon_0}l$. Интенсивность излучения плазменных волн, однако, в этом случае мала по сравнению со случаем $(\omega/v)l \ll 1$, и мы не будем приводить соответствующего выражения.

Из (39) легко также получить выражение для углового распределения рассеянного излучения продольных волн при $v_0^2 > 3v_T^2/\varepsilon_0$. При этом говорить о величине энергии флюктуационного излучения продольных волн вряд ли имеет смысл, поскольку этот эффект становится незначительным по сравнению с возникающим в этом случае черенковским эффектом на плазменных волнах. Однако флюктуационное излучение продольных волн в этом случае, возможно, может представить интерес с точки зрения углового размытия черенковского излучения, поскольку последнее возбуждается движущимся зарядом лишь под определенным углом Θ , удовлетворяющим соотношению

$$\cos \Theta = c/n_0 v_0, \quad (42)$$

где $n_3^2 = \epsilon_0(\omega)/3\beta_T^2$ — показатель преломления для плазменных волн. В то же время флюктуационное излучение плазменных волн присутствует в любом направлении (в частности, при $\Theta = \pi/2$).

Автор благодарен В. Л. Гинзбургу, Н. Г. Денисову и В. В. Железнякову за обсуждения и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Капица, ЖЭТФ, 39, 1367 (1960).
2. М. Л. Тер-Микаелян, Изв. АН Арм. ССР, 14, 103 (1961).
3. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, Астрон. ж., 35, 699 (1958).
4. Е. А. Бенедиктов, В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 253 (1961).
5. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.
6. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 34, 1593 (1958).
7. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
8. А. А. Андронов, Г. В. Городинский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 234 (1962).
9. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 41, 1971 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 мая 1962 г.

RADIATION OF A CHARGE IN NON-UNIFORM MEDIUM WITH SPACE DISPERSION

V. V. Tamoikin

The radiation of transverse and longitudinal waves by an uniformly moving charge in statistically non-uniform plasma with a weak space dispersion. The expressions are obtained for the intensity and angular distribution of the fluctuational radiation of transverse (electromagnetic) waves as well as the longitudinal (plasma) waves below and above the threshold of Cherenkov radiation of the latters.

К ТЕОРИИ ЭФФЕКТА УДВОЕНИЯ ЧАСТОТЫ В ФЕРРИТАХ

Л. Н. Овандер

Рассматривается процесс удвоения частоты в ферритах в рамках модели спиновых волн. Найдена зависимость интенсивности излучения удвоенной частоты от частоты ω_0 падающего излучения. Оказалось, что для получения максимальной интенсивности излучения с частотой $2\omega_0$ необходимо направлять падающие потоки с частотой ω_0 так, чтобы между их волновыми векторами был небольшой угол.

Настоящая работа посвящена теории следующего хорошо известного (см., например, [1]) явления: на ферритовый кристалл падает электромагнитное излучение с частотой ω_0 , в результате взаимодействия излучения с кристаллом получается излучение с частотой $2\omega_0$. Существующая теория этого явления базируется на феноменологическом уравнении [2]. Нам представляется целесообразным рассмотреть этот же эффект, пользуясь представлениями о спиновых волнах, с помощью которых осуществляется наиболее последовательное описание ферритового кристалла.

Удвоение частоты будет рассмотрено здесь по следующей схеме. В результате взаимодействия электромагнитных и спиновых волн в кристалле возникают смешанные состояния, аналогичные так называемым поляритонам [3] или светоэкситонам [4]. Следуя работе [5], которая предлагает вернуться к старому названию „экситон“ для элементарных возбуждений в кристалле, мы будем возбужденные состояния в ферритовом кристалле называть старым термином „ферромагнон“. Когда на ферритовый кристалл падает электромагнитное излучение с частотой ω_0 , на границе кристалл—вакуум возникает электрическое поле такой же частоты. Оно возбуждает в кристалле поток ферромагнонов, которые характеризуются такой же частотой ω_0 . Понятно, что не все кванты, падающие на кристалл из вакуума, проникнут в кристалл, часть из них отразится. Для решения вопроса о том, какая часть отразится, а какая пройдет, необходимо специальное исследование, которое в данной работе не делается. В настоящей работе мы ограничимся следующей задачей: дан поток ферромагнонов энергии $\hbar\omega_0$; требуется найти поток ферромагнонов энергии $2\hbar\omega_0$.

1. ЗАПИСЬ ИСХОДНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Полный гамильтониан системы состоит из трех слагаемых:

$$H = H_I + H_{II} + H_{III}, \quad (1)$$

где H_I — гамильтониан кристалла, H_{II} — гамильтониан поперечных фотонов, H_{III} — оператор взаимодействия между полем фотонов и кристаллом.

Рассмотрим вначале H_I , который описывает поведение кристалла в постоянном магнитном поле H_0 , направленном по оси z :

$$H_I = -\frac{1}{2} \sum_{lm} J(r_{lm}) (s_l s_m) - 2\mu_0 \sum_l H_0 s_{zl}, \quad (2)$$

где s_p —спиновый оператор p -ой частицы, $J(\mathbf{r}_{lm})$ —обменный интеграл, зависящий от расстояния \mathbf{r}_{lm} , μ_0 —магнетон Бора. Введем циркуляционные переменные

$$\begin{aligned}s_l^+ &= s_{lx} + is_{ly}; \\ s_l^- &= s_{lx} - is_{ly},\end{aligned}\tag{3}$$

от которых, в свою очередь, перейдем к переменным

$$\begin{aligned}s_l^+ &= (2s)^{1/2} d_l; \\ s_l^- &= (2s)^{1/2} d_l^+; \\ s_{lz} &= s - d_l^+ d_l,\end{aligned}\tag{4}$$

являющимся операторами Бозе [6, 7]. В формулах (4) отброшены старшие степени операторов d , что можно делать в случае рассмотрения состояний, близких к основному [6, 7]. Далее перейдем к кристаллическим переменным по формулам

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_k &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l d_l e^{-ik\mathbf{r}_l}; \\ \mathbf{b}_k^+ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_l d_l^+ e^{ik\mathbf{r}_l},\end{aligned}\tag{5}$$

где N —число частиц в кристалле, который, как обычно, подчиняется условиям цикличности. Выполнив замены (3)–(5), получим для гамильтониана кристалла (2) выражение

$$H_I = \sum_k E(\mathbf{k}) b_k^+ b_k + C, \tag{6}$$

где

$$E(\mathbf{k}) = \sum_h 2sJ(\mathbf{r}_h) (1 - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_h}) + 2\mu_0 H_0;$$

$$C = - \sum_{lm} J(\mathbf{r}_{lm}) s^2 - 2\mu_0 sNH_0.$$

Гамильтониан поля излучения дается выражением

$$H_{II} = \sum_{qj} \hbar q c a_{qj}^+ a_{qj}, \tag{7}$$

где c —скорость света, \mathbf{q} —волновой вектор, a_{qj}^+ , a_{qj} —операторы рождения и уничтожения поперечных фотонов. Оператор взаимодействия излучения с кристаллом записывается

$$H_{III} = -2\mu_0 \sum_l (\mathbf{H}_l, \mathbf{s}_l), \tag{8}$$

где \mathbf{H}_l —магнитное поле в точке \mathbf{r}_l . Магнитное поле следует записать через операторы a_{qj}^+ , a_{qj} , что достигается с помощью формулы

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_l) = \sum_{qj} \mathbf{e}_{qj} \gamma(q) (a_{qj} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_l} + a_{qj}^+ e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_l})$$

—векторный потенциал, e_{qj} — единичный вектор, определяющий поляризацию соответствующего кванта, V —объем кристалла, $\gamma = \sqrt{2\pi\hbar c/V_q}$.

Теперь необходимо (8) записать через переменные a_{qj}^+ , a_{qj} , b_q^+ , b_q . В результате в полный гамильтониан (1) войдут слагаемые как второго, так и третьего порядка по указанным переменным. Слагаемые высшего порядка нами не учитываются, а слагаемых первого порядка гамильтониан (1) не содержит.

2. КВАДРАТИЧНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН

В настоящем разделе рассматриваются слагаемые второго порядка. Они возникают из выражений (6)–(8) (из (6) и (7) возникают лишь слагаемые второго порядка, а из (8)—второго и третьего порядка). Возникающие из (8) слагаемые второго порядка записываются так:

$$\begin{aligned} H_{\text{III}}^{(2)} = & \sum_{qj} \left\{ T_1(qj) [b_q^+ a_{qj} + b_{-q} a_{qj} - b_q^+ a_{-qj}^+ - b_q^+ a_{qj}^+] + \right. \\ & \left. + T_2(qj) [b_q^+ a_{qj} + b_q^+ a_{qj}^+ - b_{-q} a_{qj} - b_{-q} a_{qj}^+] \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$T_1(qj) = i(2s)^{1/2} \mu_0 \sqrt{N} \gamma(q) [e_{qj} q]_x;$$

$$T_2(qj) = (2s)^{1/2} \mu_0 \sqrt{N} \gamma(q) [e_{qj} q]_y.$$

Сумма (6), (7) и (10) диагонализуется с помощью замены [8]

$$\begin{aligned} b_q = & \sum_p [\xi_p(q) u_p(q) + \xi_p^+(-q) v_p^*(-q)]; \\ a_{qj} = & \sum_p [\xi_p(q) u_{jp}(q) + \xi_p^+(-q) v_{jp}^*(-q)], \end{aligned} \quad (11)$$

где коэффициенты u и v определяются из системы:

$$\begin{aligned} & [E(q) - E_p] u(q) + \sum_j \{ T_1(j) [u_j(q) + v_j(-q)] + \\ & + T_2(j) [u_j(q) + v_j(-q)] \} = 0; \\ & [E(q) + E_p] v_j(-q) + \sum_j \{ T_1(j) [u_j(q) + v_j(-q)] - \\ & - T_2(j) [u_j(q) + v_j(-q)] \} = 0; \\ & (\hbar qc - E_p) u_j(q) - T_1(j) [u_j(q) + v_j(-q)] + \\ & + T_2(j) [u_j(q) - v_j(-q)] = 0; \\ & (\hbar qc + E_p) v_j(-q) - T_1(j) [u_j(q) + v_j(-q)] + \\ & + T_2(j) [u_j(q) - v_j(-q)] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

После замены (11) квадратичная часть гамильтониана, т. е. сумма (6), (7) и (10), может быть представлена в виде:

$$H^{(2)} = \sum_{qp} E_p(q) \xi_p^+(q) \xi_p(q), \quad (13)$$

где $E_p(q)$ — корни векового уравнения системы (12).

Рассмотрим спектр элементарных возбуждений для некоторых направлений волнового вектора. Пусть q направлено по оси z . Тогда

$$\begin{aligned} j = x, y; \quad T_1(x) = 0; \quad T_1(y) = iT; \\ T_2(x) = T; \quad T_2(y) = 0. \end{aligned}$$

Для простоты ограничимся случаем, когда

$$\frac{E - \hbar qc}{E + \hbar qc} \ll 1.$$

В этом случае вековое уравнение, отвечающее системе (12), упрощается и его решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} E_1 &= \hbar qc, \\ E_{2,3} &= \frac{E + \hbar qc}{2} \pm \sqrt{\frac{(E - \hbar qc)^2}{4} + 2T^2}. \end{aligned}$$

Первому корню E_1 отвечает решение

$$u = 0, \quad u_x = iu_y, \quad (14)$$

которое дает волну, поляризованную по кругу; она вращается по часовой стрелке и не взаимодействует с кристаллом. Второй и третий корни дают соответственно при $E = \hbar qc$

$$u_x = u/\sqrt{2}, \quad u_y = iu/\sqrt{2} \quad (15)$$

и

$$u_x = -u/\sqrt{2}, \quad u_y = -iu/\sqrt{2}. \quad (15a)$$

Оба эти корня дают волны с поляризацией против часовой стрелки. Расположение ветвей приведено на рис. 1.

Приведенные выше сведения о ходе $E(q)$ можно сопоставить с данными работы [9]. Если в первом разделе работы [9] пренебречь пространственной дисперсией спиновых волн, то получаются результаты, совпадающие с полученными выше. Учет же пространственной дисперсии для эффекта удвоения частоты не играет существенной роли.

Направим теперь q по оси x . Легко видеть, что здесь будут три волны, которые также иллюстрируются рис. 1. Ветвь 1 на этом рисунке отвечает отличным от нуля u_y и v_y ; u_z , v_z , u , v равны нулю. Ветви 2 и 3, наоборот, характеризуются равными нулю u_y и v_y и отличными от нуля u_z , v_z , u , v . Это означает, что волна, магнитный вектор которой имеет одну лишь z -компоненту, с кристаллом не взаимодействует.

Имея в виду дальнейшие применения, рассмотрим два частных

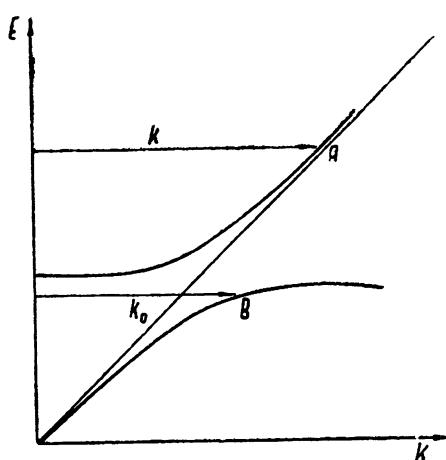


Рис. 1. Зависимость энергии ферромагнов от волнового вектора.

случае: ферромагнон в области A (область прозрачности, энергия ферромагнона $E_p \approx 2E$) и ферромагнон в области B (область вблизи полосы поглощения, энергия ферромагнона $E_p \approx E$). Для случая, когда ферромагнон находится в области A , приближенное решение системы (11) записывается в виде:

$$\begin{aligned} u_z &= 1, & v_z &= \frac{T^2}{6E^2}, \\ u &= -\frac{T}{E}, & v &= -\frac{T}{3E}, \end{aligned} \quad (16)$$

для случая же, когда ферромагнон находится в области B , — в виде:

$$\begin{aligned} u &= \frac{T}{\sqrt{(\hbar qc - E)^2 + T^2}} \sim \frac{T}{\hbar qc - E}, & v &= \frac{T}{\hbar qc + E}, \\ u_z &= \frac{\hbar qc - E}{\sqrt{(\hbar qc - E)^2 + T^2}} \simeq 1, & v_z &= \frac{\hbar qc - E}{\hbar qc + E} u_z. \end{aligned} \quad (17)$$

3. СЛАГАЕМЫЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Эффект удвоения частоты следует трактовать как появление одного ферромагнона в результате исчезновения двух ферромагнонов. Подобного рода процесс осуществляется за счет слагаемых третьего порядка по операторам ξ , ξ^+ , которые возникают из (8) и записываются в виде:

$$H_{III}^{(3)} = 2\mu i \sum_{jk'k} [e_{k-k',j}, (\mathbf{k} - \mathbf{k}')]_z \{a_{k-k',j} b_k^+ b_{k'} + a_{k'-k,j}^+ b_k^+ b_{k'}\}. \quad (18)$$

Получим формулу для интенсивности получающегося потока ферромагнонов. Поток энергии, переносимый квазичастицами, обозначим буквой Q . Нам необходимо найти связь между $I = dQ/d\Omega$ — потоком в телесном угле $d\Omega$ и $I_0 = dQ/dS$ — потоком через единицу площади, Число квазичастиц \tilde{N} , возникающих в процессе удвоения частоты, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tilde{N}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} N_1 N_2 \delta(E' - E'') |\tilde{H}|^2, \quad (19)$$

где N_1, N_2 — число частиц в первоначальных потоках; в случае одного потока $N_1 = N_2$ и произведение $N_1 N_2$ заменяется на N_1^2 . Через \tilde{H} здесь обозначен матричный элемент перехода, E' — энергия начального состояния, E'' — энергия конечного состояния. Предполагая, что объем кристалла равен единице, можно записать: $I_0 = \hbar \omega v n$, где v — групповая скорость. Тогда поток возникающих квазичастиц дается формулой:

$$I = \frac{2\omega}{\pi^2 \hbar^3} \frac{|\tilde{H}|^2}{v^2(\omega) v^3(2\omega)} I_{01} I_{02}. \quad (20)$$

Теперь следует найти матричный элемент перехода из начального состояния в конечное от оператора (18). Начальное состояние представляет собой два ферромагнона с волновыми векторами \mathbf{k}_0 , \mathbf{k}'_0 и ча-

стотой ω_0 . Конечное состояние представляет один ферромагнон с волновым вектором \mathbf{k} и частотой $2\omega_0$.

Для нахождения матричного элемента от (18) для указанных состояний нужно записать его через операторы ξ , ξ^+ , которые характеризуют поведение ферромагнонов в кристалле. Эта замена производится по формулам (11), причем в выражение $H_{III}^{(3)}$ войдут различные комбинации третьего порядка операторов $\xi \xi^+$. Для интересующего нас перехода будут существенны лишь слагаемые типа $\xi^+ \xi \xi$; опустив в $H_{III}^{(3)}$ остальные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{III}^{(3)} = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 &= \sum_{\rho \rho' \rho''} \sum_{\mathbf{k} \mathbf{k}' \mathbf{k}'} 2i\mu_0 [e_{qj} q]_z \times \\ &\times \{ u_{j\rho}(q) u_{\rho'}^*(k) u_{\rho''}(k') \xi_{\rho'}^+(k) \xi_{\rho}(q) \xi_{\rho''}(k') + \\ &+ u_{j\rho}(q) v_{\rho'}(-k) v_{\rho''}^*(-k') \xi_{\rho'}^+(-k) \xi_{\rho}(q) \xi_{\rho''}(-k') + \\ &+ u_{j\rho}^*(q) v_{\rho'}(-k) u_{\rho''}(k) \xi_{\rho}^+(q) \xi_{\rho'}(-k) \xi_{\rho''}(k') + \\ &+ v_{j\rho}^*(-q) v_{\rho'}(-k) u_{\rho''}(k) \xi_{\rho}^+(-q) \xi_{\rho'}(-k) \xi_{\rho''}(k') + \\ &+ v_{j\rho}(-q) v_{\rho'}^*(-k) v_{\rho''}^*(-k') \xi_{\rho}(-q) \xi_{\rho'}^*(-k) \xi_{\rho''}^*(-k') \} \\ &(q = k - k'). \end{aligned} \quad (21)$$

Из шести сумм (21) целесообразно выделить наибольшие. Для этого проведем сравнительную оценку различных слагаемых в (21). В качестве малых параметров возьмем

$$\zeta = \frac{T}{E - \hbar qc}, \quad \eta = \frac{E - \hbar qc}{E + \hbar qc},$$

причем $\eta < \zeta$, поскольку $T \ll E$. Тогда для области A получаем:

$$u_z = 1, \quad v_z \sim \eta^2 \zeta^2, \quad u \sim \eta \zeta, \quad v \sim \eta \zeta,$$

а для области B

$$u_z = 1, \quad v_z \sim \eta \zeta^2, \quad u \sim \zeta, \quad v \sim \eta \zeta.$$

Предположим для определенности, что волновой вектор \mathbf{q} направлен по оси x . Тогда отличный от нуля результат получится при e_{qj} , направленном по оси y . Кроме того, поскольку v_y обращается в нуль, то $H_4 = H_5 = H_6 = 0$, а $H_1 \sim \zeta^2 \eta$, $H_2 \sim \eta^2 \zeta^2$, $H_3 \sim \zeta^2 \eta$. Следовательно, необходимо учитывать лишь H_1 и H_3 .

Рассмотрим сначала случай, когда оба ферромагнона первоначального потока будут иметь различные поляризации: один имеет электрический вектор, направленный по оси y , второй—по оси z . Результирующее излучение будет иметь отличный от нуля электрический вектор, направленный по оси y . Зависимость интенсивности результирующего излучения от интенсивностей падающих потоков дается формулой

$$I_z = D \frac{T^2}{(\hbar\omega_0 - E)^2 + T^2} I_{10} I_{20}, \quad (22)$$

которая получается после подстановки H_1 в (20) и учета формул (16) и (17). Здесь постоянная D объединяет все сомножители, которые не зависят или слабо зависят от ω_0 и интенсивностей $I_{10} I_{20}$ (I_{10} —интен-

сивность падающего излучения, поляризованного по оси y , I_{20} — то же самое по отношению к оси z). Формула (22) справедлива вблизи области ферромагнитного резонанса $|\hbar\omega_0 - E| > T$, но не охватывает область $\hbar\omega_0 - E \sim T$, где явление усложнено наличием затухания, которое в данной работе не рассматривается.

Рассмотрим теперь случай, когда оба падающих ферромагнона имеют одинаковую поляризацию (по оси z); результирующий ферромагнон поляризован по оси y . Зависимость результирующего излучения от интенсивности падающего дается формулой

$$I_y = D \frac{T^2}{(\hbar\omega_0 - E)^2 + T^2} I_{20}^2, \quad (23)$$

где использованы те же обозначения, что и при записи (22); постоянная D имеет точно такое же численное значение.

Из сопоставления (22) и (23) ясно, что для обоих случаев получаются одинаковые значения интенсивности. Однако необходимо иметь в виду, что в полосе поглощения (22) даст более сильный эффект, чем (23). Это связано с тем, что излучение I_{10} не испытывает поглощения, а I_{20} поглощается. Обращает на себя внимание следующее обстоятельство. Из рис. 1 следует, что для плоской картины не наблюдается сохранения волнового вектора ($2k_0$ превосходит k). Поэтому ясно, что для выполнения закона сохранения волнового вектора необходимо k'_0 и k''_0 расположить несколько под углом, как показано на рис. 2.

Интересно отметить, что элементарная теория [1] не дает зависимости эффекта от направления волнового вектора падающего излучения. Из формулы (21) следует, что такая зависимость имеется. Мы ее здесь не находим (это будет сделано в отдельной работе); отметим, однако, что максимальная интенсивность излучения с удвоенной частотой достигается (при прочих равных условиях), когда волновой вектор падающего излучения направлен перпендикулярно оси z . Эффект будет отсутствовать, когда волновой вектор направлен по оси z .

Следует отметить, что в теории [1] эффект будет и при условии распространения излучения в направлении z (хотя определение волнового вектора в теории [1] вообще не фигурирует, о направлении распространения электромагнитных волн можно судить по направлению поляризации). Это связано с тем, что в [1] неявно подразумевается малость ферритового образца по сравнению с длиной волны. В нашей же модели, как и в моделях [6, 7], предполагается, что длина кристалла намного превосходит длину волны.

В заключение автор благодарит К. Б. Толпого, И. А. Дерюгина и А. М. Федорченко за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
2. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Sow. Phys., 8, 153 (1935).
3. В. М. Агранович, УФН, 71, 141 (1960).

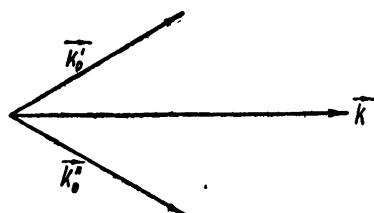


Рис. 2. Положение k'_0 и k''_0 , отвечающее максимальной интенсивности результирующего излучения.

4. С. И. Пекар, ЖЭТФ, 38, 1778 (1960).
5. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, ФТТ, 3, 1835 (1961).
6. Т. Holstein, Н. Primakoff, Phys. Rev., 58, 1098 (1940).
7. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, М. И. Каганов, УФН, 71, 533 (1960).
8. В. М. Агранович, ЖЭТФ, 37, 430 (1959).
9. М. А. Гинцбург, ФТТ, 2, 913 (1960).

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию
24 апреля 1962 г.

TO THE THEORY OF DOUBLING FREQUENCY EFFECT IN FERRITES

L. N. Ovander

The method of spin waves is applied to the analysis of the doubling frequency process in ferrites. The dependence is obtained of double frequency intensity upon the frequency of the original radiation. The intensity of radiation with the frequency $2\omega_0$ is proved to be maximum if the angle between the wave vectors of incident beams of the frequency ω_0 is sufficiently small.

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПУЧКА
С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ РЕЗОНАТОРА.
I. ПОЛЯРИЗАЦИЯ МОЛЕКУЛЯРНОГО ПУЧКА В ЗАДАННОМ
НЕОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ РЕЗОНАТОРА**

B. B. Цареградский

Исследуется взаимодействие монокинетического пучка молекул с заданным электромагнитным полем резонатора. Рассмотрение ограничено случаем синусоидального изменения вектора электрического поля вдоль движения пучка. Найдены приближенные выражения для амплитуд вероятности распределения молекул по рассматриваемым уровням и поляризация пучка. Строгое решение для случая, когда частота поля совпадает с частотой перехода между уровнями молекулы, приводит к ранее полученным результатам [6]. В заключение анализируется выражение для поляризации пучка при различных параметрах задачи.

В настоящее время в качестве стандартов частоты используются молекулярные генераторы. Принцип работы молекулярного генератора основан на взаимодействии пучка возбужденных молекул с электромагнитным полем резонатора. В результате такого взаимодействия первоначально возбужденные молекулы отдают свою энергию электромагнитному полю и переходят в основное состояние. В установившемся режиме возникает стационарное распределение молекул по уровням, которое характеризуется соответствующими амплитудами вероятности.

Зависимость амплитуд вероятности от электрического поля чрезвычайно сложна и до последнего времени удовлетворительно определена лишь для случая однородного поля. На практике этот случай является наиболее предпочтительным и распространенным. Последнее нетрудно объяснить, если учесть, что у молекул, движущихся в однородном поле, отсутствует доплеровское уширение спектральной линии.

С переходом в область миллиметровых и субмиллиметровых длин волн становится затруднительным использовать простейшие типы колебаний резонатора, поскольку его линейные размеры в указанном диапазоне малы, а добротности низки. В силу этого обстоятельства в области короче нескольких миллиметров приходится иметь дело с резонаторами на высших модах, где поле заведомо отлично от однородного.

В настоящее время для целей молекулярного усиления и генерации в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах все большее применение находит резонатор в виде двух параллельных пластин [1]. Проведенные исследования в работе [2] показывают, что конфигурация электрического поля основной моды такого резонатора не является однородной. Поэтому представляет интерес рассмотреть задачу о поведении пучка молекул в неоднородном высокочастотном электромагнитном поле резонатора. Впервые постановка этой задачи в неявной форме содержится в работе [6]. В работе [3] она была сформулирована и изучалась для синусоидального в пространстве и времени электрического поля. Однако виду очень приближенного характера ее решения нам кажется целесообразным вновь остановиться на этой задаче

с тем, чтобы дать более строгое решение, годное для широкой области изменения параметров, и подробно обсудить физический смысл полученных результатов*.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим монокинетический пучок молекул, пронизывающий резонатор с заданным электромагнитным полем. Состояние отдельной молекулы пучка характеризуется волновой функцией Ψ . В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением двух энергетических уровней молекулы E_1 и E_2 , причем для определенности положим $E_2 > E_1$. Будем считать, что молекулы обладают электрическим дипольным моментом, оператор которого \hat{d} . Тогда уравнение Шредингера для функции Ψ запишется в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\hat{H}_0 + \hat{d}E(x_t, y_t, z_t, t)] \Psi, \quad (1)$$

где \hat{H}_0 —невозмущенный гамильтониан молекулы, $\hat{d}E$ —оператор энергии взаимодействия молекулы с электрическим полем резонатора, x_t, y_t, z_t —координаты движущейся молекулы в резонаторе в момент времени t , \hbar —постоянная Планка.

В теории молекулярного генератора обычно предполагается, что диполь-дипольное взаимодействие молекул мало и им можно пренебречь. При написании уравнения (1) мы тоже следовали этому, поскольку учет взаимодействия молекул друг с другом приводит к кругу вопросов, выходящих за рамки данной статьи.

Волновую функцию молекулы будем искать в виде разложения

$$\Psi = T_1(x_t, y_t, z_t, t) \Psi_1(g) e^{-iE_1 t/\hbar} + T_2(x_t, y_t, z_t, t) \Psi_2(g) e^{-iE_2 t/\hbar} \quad (2)$$

по ортонормированной системе собственных функций невозмущенного гамильтониана

$$\hat{H}_0 \Psi_n(g) = E_n \Psi_n(g) \quad (n=1, 2);$$

g —полный набор внутренних переменных молекулы. Подставим выражение (2) в уравнение (1). Полагая постоянный дипольный момент в состоянии $n=1, 2$ равным нулю и пользуясь ортонормированностью функций Ψ_n

$$\int \Psi_i^* \Psi_k d\mathbf{g} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0; & i \neq k \\ 1; & i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2),$$

сведем (1) к системе:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial T_1}{\partial t} &= -d_{12} E(x_t, y_t, z_t, t) e^{-i\omega_{21}t} T_2; \\ i\hbar \frac{\partial T_2}{\partial t} &= -d_{21} E(x_t, y_t, z_t, t) e^{i\omega_{21}t} T_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$ —резонансная частота молекулы, $d_{ik} = \int \Psi_i^* \hat{d} \Psi_k d\mathbf{g}$ —матричный элемент дипольного момента. Из последнего равенства соответствующим выбором фазы функций Ψ_i можно получить $d_{21} = d_{12} = d$.

* Аналогичную задачу для частного случая (нерезонансные области расстроек) рассматривал Сушкин [7]. Однако полученные им результаты не удается сравнить с нашими из-за иного выбора распределения поля вдоль пучка.

Ограничиваюсь в дальнейшем случаем синусоидального изменения электрического поля со временем, удобно представить поле в виде:

$$E(x_t, y_t, z_t, t) = E_0 f(x_t, y_t, z_t) \cos(\omega t), \quad (4)$$

где E_0 и ω —амплитуда и частота поля, а $f(x, y, z)$ —функция распределения этого поля по резонатору, причем $|f(x, y, z)| \leq 1$.

Если в правых частях (3) пренебречь быстро меняющимися со временем членами (частоты которых $\omega_{21} + \omega$) и произвести замену

$$T_1 = C_1 e^{-i(\omega_{21} - \omega)t/2}; \quad T_2 = C_2 e^{+i(\omega_{21} - \omega)t/2}, \quad (5)$$

то после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial t} &= \frac{i(\omega_{21} - \omega)}{2} C_1 + i \frac{dE_0}{2\hbar} f(x_t, y_t, z_t) C_2; \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} &= -\frac{i(\omega_{21} - \omega)}{2} C_2 + i \frac{dE_0}{2\hbar} f(x_t, y_t, z_t) C_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Для простоты будем считать пучок достаточно тонким, так что изменением поля по его сечению можно пренебречь. Предположим далее, что, как и в большинстве реальных случаев, поле зависит от координат в области, занятой пучком, по закону $f(x, y, z) = \sin(\pi l z / L)$, где $l = 1, 2, 3, \dots, n$ —число полуволн вдоль пучка, L —длина резонатора. Введем следующие обозначения: v —скорость молекулы, t_0 —момент ее влета в резонатор, $\alpha = (\omega_{21} - \omega) / \omega_g$ —относительная расстройка частоты

$$\gamma = dE_0 / \hbar \omega_g, \quad \omega_g = \pi l v / L, \quad (7)$$

$\xi = \pi l z_t / L$ —безразмерная координата. С учетом этих обозначений и равенства

$$z_t = v(t - t_0)$$

систему (6) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial \xi} &= i \frac{\alpha}{2} C_1 + i \frac{\gamma}{2} \sin \xi C_2; \\ \frac{\partial C_2}{\partial \xi} &= -i \frac{\alpha}{2} C_2 + i \frac{\gamma}{2} \sin \xi C_1, \end{aligned} \quad (8)$$

откуда нетрудно заключить, что амплитуды вероятности C_1 и C_2 зависят только от координаты z_t .

Система (8) является системой линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Решая ее, найдем C_1 и C_2 , а вместе с тем из (2), (5) получим и волновую функцию молекулы:

$$\Psi = e^{-i(E_2 + E_1)t/2\hbar} [C_1(z_t)\Psi_1(g)e^{i\omega t/2} + C_2(z_t)\Psi_2(g)e^{-i\omega t/2}]. \quad (9)$$

Для анализа работы молекулярного генератора и усилителя и определения их характеристик необходимо знать поляризацию пучка. С этой целью подставим выражение (9) в известную формулу для dipольного момента молекулы:

$$d(z_t, t) = \int \Psi^*(z_t, g, t) \hat{d}\Psi(z_t, g, t) dg.$$

Тогда получим:

$$d(z_t, t) = d [C_2^*(z_t) C_1(z_t) e^{i\omega t} + C_1(z_t) C_2(z_t) e^{-i\omega t}]. \quad (10)$$

Пусть в резонатор с сечением отверстия s в единицу времени попадает N_0 возбужденных молекул; их плотность и поляризация пучка в точке z равны соответственно

$$D_0 = N_0/sv; \quad (11)$$

$$P(z, t) = \frac{N_0}{sv} d(z, t). \quad (12)$$

Используя (10), последнее выражение удобно представить в виде:

$$P(z, t) = P_1(z) \cos(\omega t) + P_2(z) \sin(\omega t), \quad (13)$$

где

$$P_1(z) = \frac{N_0}{sv} [C_2^*(z) C_1(z) + C_1^*(z) C_2(z)] d;$$

$$P_2(z) = \frac{N_0}{sv} [C_2^*(z) C_1(z) - C_1^*(z) C_2(z)] id. \quad (14)$$

Первый член (13) колеблется в фазе с приложенным полем и влияет на частоту молекулярного генератора. Второй член (13) находится в квадратуре с полем (4) и соответствует излучению (поглощению) молекулами электромагнитной энергии в резонаторе. Его зависимость от координаты $P_2(z)$ указывает на степень излучения (поглощения) различных участков пучка.

Заметим, что переход от (10) к (13) полностью аналогичен известной ситуации в гидродинамике, когда от описания движущейся точки жидкости (газа) переходят к описанию неподвижного объема, через который протекает эта жидкость (газ).

2. РЕШЕНИЕ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Перейдем к решению исходной системы уравнений и, прежде всего, остановимся на случае, когда частота поля равна резонансной частоте молекул ($\alpha=0$). Сделав замену переменного

$$\eta = 1 - \cos \xi, \quad (15)$$

приведем систему (8) к системе с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial C_1}{\partial \eta} = i \frac{\gamma}{2} C_2; \quad \frac{\partial C_2}{\partial \eta} = i \frac{\gamma}{2} C_1, \quad (16)$$

решением которой служат функции

$$C_1 = i \sin \left[\frac{\gamma}{2} (1 - \cos \xi) \right]; \quad C_2 = \cos \left[\frac{\gamma}{2} (1 - \cos \xi) \right]. \quad (17)$$

При этом предполагается, что в момент влета в резонатор молекула находится на уровне E_2 , т. е. при $z_t=0$

$$C_1(0) = 0; \quad C_2(0) = 1.$$

Подставим полученное решение (17) в (14). Опуская промежуточные выкладки, будем иметь*:

$$P_1(z) = 0; \quad P_2(z) = -\frac{N_0 d}{sv} \sin \left\{ \gamma \left[1 - \cos \left(\frac{\pi l}{L} z \right) \right] \right\}; \quad (18)$$

$$P(z, t) = -\frac{N_0 d}{sv} \sin \left\{ \gamma \left[1 - \cos \left(\frac{\pi l}{L} z \right) \right] \right\} \sin(\omega t).$$

* Этот же результат следует из работы [6]. Действительно, если в выражении (2.5) [6] положить амплитуду поля $E_0(t)$ равной $E_0(t) = E_0 \sin[\omega_g(t-t_0)]$, то последнее совпадает с (18).

Рассмотренный выше случай $\alpha = 0$ является единственным, когда удается точно решить систему (8). В общем случае мы имеем приближенное решение, которое ищется в виде разложения по параметру $\gamma/2$. Сделаем оценки. Согласно (7)

$$\gamma = dE_0 L / \pi l \hbar v. \quad (19)$$

Подставляя сюда значения $d = 10^{-18}$ ед. CGSE, $\hbar = 10^{-27}$ эрг·сек, $v \approx 4 \cdot 10^4$ см·сек⁻¹, получим:

$$\gamma \approx 10^4 E_0 L / l. \quad (20)$$

Для существующих генераторов на аммиаке $L \approx 10$ см, $E_0 \approx 10^{-5}$ ед. CGSE и, следовательно,

$$\gamma \approx 1/l. \quad (21)$$

Если положить в (21) $l > 2$, то тем самым будет обеспечена достаточно хорошая сходимость рядов в методе малого параметра*.

В режиме молекулярного усиления слабых сигналов поле E_0 значительно меньше 10^{-5} ед. CGSE, и поэтому можно считать $\gamma \ll 1$. Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} i \frac{\alpha}{2}; & 0 \\ 0; & -i \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}; \quad B = i \sin \xi \begin{pmatrix} 0; & 1 \\ 1; & 0 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Тогда система уравнений (8) может быть записана в виде одного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{d\xi} = \left[C + \frac{\gamma}{2} B \right] x. \quad (23)$$

Удобнее, однако, пользоваться вместо x интегральной матрицей

$$X = \begin{pmatrix} C_{11}; & C_{12} \\ C_{21}; & C_{22} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

столбцами которой являются линейно независимые решения системы (8). Так как каждый столбец удовлетворяет уравнению (23), то и интегральная матрица X удовлетворяет тому же уравнению

$$\frac{dX}{d\xi} = \left[C + \frac{\gamma}{2} B \right] X. \quad (25)$$

Решение уравнения (25) ищется в виде [4]:

$$X\left(\xi, \frac{\gamma}{2}\right) = \Theta\left(\xi, \frac{\gamma}{2}\right) e^{K(\gamma/2)\xi}, \quad (26)$$

где

$$\Theta\left(\xi, \frac{\gamma}{2}\right) = I + \frac{\gamma}{2} \Theta_1(\xi) + \frac{\gamma^2}{4} \Theta_2(\xi) + \dots,$$

$$I = \begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{pmatrix}, \quad K\left(\frac{\gamma}{2}\right) = C + \frac{\gamma}{2} K_1 + \frac{\gamma^2}{4} K_2 + \dots$$

—аналитические функции $\gamma/2$ при $\gamma/2 \rightarrow 0$, $\Theta_j(\xi) — 2\pi$ —периодические непрерывные матрицы.

* На первый взгляд может показаться, что при большом числе полуволн l решение задачи можно получить из формул (4.4), (4.8)—(4.10) работы [6]. Но, как показывает рассмотрение, они дают нулевой эффект для рассматриваемого типа поля.

В работе [4] доказывается следующая лемма. Предположим, что матрица $X(\xi, \gamma/2)$, определенная (26), является аналитической функцией $\gamma/2$ при $\gamma/2=0$, $X_0=e^{C\xi}$ и матрица C не имеет различных сравнимых по модулю i собственных значений λ_1, λ_2 :

$$\lambda_1 - \lambda_2 \neq ni \quad (i = \sqrt{-1}; \quad n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots). \quad (27)$$

В этом случае в окрестности матрицы X_0 можно определить функцию $\ln X$, причем 1) $\ln X(\xi, \gamma/2)$ — аналитическая функция при $\gamma/2=0$ и 2) $\ln X(0, \gamma/2) = \ln X_0 = C\xi$.

В [4] также сделано следующее замечание. Существуют матрицы C (для которых не выполнено условие (27)), такие, что в окрестности X_0 нельзя определить функцию $\ln X$, чтобы $\ln X_0 = \ln e^{C\xi} = C\xi$ и функция X была непрерывной в точке X_0 . Другими словами, при $\lambda_1 - \lambda_2 = ni$ характеристический показатель $K(\gamma/2)$ уравнения (25) не всегда сходится при $\gamma/2 \rightarrow 0$ к матрице C .

Рассмотрим матрицу C конкретного вида (22). Ее характеристические корни

$$\lambda_1 = i\alpha/2, \quad \lambda_2 = -i\alpha/2 \quad (28)$$

при целом α различаются на величину

$$\lambda_1 - \lambda_2 = ni \quad (n = \pm 1; \pm 2; \pm 3). \quad (29)$$

Как будет показано ниже, область расстроек вблизи $\alpha = \pm 1$ является наиболее интересной в данной задаче. Однако именно здесь не выполняются условия (27) леммы, которую мы намерены применить. Поэтому рассмотрим сначала, как этот случай свести к случаю, когда соотношения (29) не имеют места.

Введем новые функции

$$\delta_a^n = \begin{cases} 1 & \text{при } ||\alpha| - |n|| < \gamma/2, \quad \gamma < 1, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 0 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}; \quad (30)$$

$$n\delta_a^n = \begin{cases} n & \text{при } ||\alpha| - |n|| < \gamma/2, \quad \gamma < 1, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 0. & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}. \quad (31)$$

Из определения (30) следует, что при аргументе α , принимающим только целые значения m , функция δ_a^n совпадает с символом Кронекера δ_m^n . С помощью этих функций в уравнении (25) сделаем замену искомой матрицы

$$X = e^{C\xi} Y; \quad C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -in\delta_a^n \end{pmatrix} \quad (32)$$

и после несложных преобразований получим:

$$\frac{dY}{d\xi} = \left[K_0 + \frac{\gamma}{2} D(\xi) \right] Y, \quad (33)$$

где

$$K_0 = \begin{pmatrix} i\alpha/2 & 0 \\ 0 & i(n\delta_a^n - \alpha/2) \end{pmatrix}; \quad (34)$$

$$D(\xi) = i \sin \xi \begin{pmatrix} 0 & e^{-in\delta_a^n \xi} \\ e^{in\delta_a^n \xi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Из формул (34)–(35) нетрудно заключить, что полученное уравнение (33) является уравнением с периодическими коэффициентами. В отличие от (25), характеристические числа матрицы K_0 уравнения (35)

$$\lambda_1 - \lambda_2 = i(\alpha - n_0^{\delta n})$$

при $\alpha = n$ равны между собой ($\lambda_1 = \lambda_2$). Следовательно, для уравнения (35) во всем диапазоне расстроек α выполнены условия вышеизложенной леммы и его решение можно искать в виде (26).

В дальнейшем при решении уравнения (33) мы воспользуемся методом, развитым в работе [4]. Будем искать решение (33) в виде:

$$Y(\xi, \gamma/2) = \Theta(\xi, \gamma/2) e^{K(\gamma/2)\xi}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \gamma/2) &= I + \frac{\gamma}{2} \Theta_1(\xi) + \frac{\gamma^2}{4} \Theta_2(\xi) + \dots; \\ K(\gamma/2) &= K_0 + \frac{\gamma}{2} K_1 + \frac{\gamma^2}{4} K_2 + \dots. \end{aligned} \quad (37)$$

Дифференцируя (36) по ξ , для $\Theta(\xi, \gamma/2)$ получим уравнение

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = \left[K_0 + \frac{\gamma}{2} D \right] \Theta - \Theta K. \quad (38)$$

Подставим ряды (37) в (38); тогда

$$\frac{d\Theta_n}{d\xi} = K_0 \Theta_n - \Theta_n K_0 + D \Theta_{n-1} - (\Theta_{n-1} K_1 + \dots + \Theta_1 K_{n-1}) - K_n. \quad (39)$$

Пусть теперь $Y(\xi, \gamma/2)$ – матрица фундаментальной системы решений уравнения (33) – такая, что

$$Y\left(0, \frac{\gamma}{2}\right) = V\left(0, \frac{\gamma}{2}\right) = I + \frac{\gamma}{2} V_1 + \frac{\gamma^2}{4} V_2 + \dots. \quad (40)$$

Согласно (36), (37), это дает ряд граничных условий

$$\Theta_n(0) = V_n \quad (n > 0),$$

где V_n являются пока произвольными величинами. Распорядимся последними так, чтобы в уравнении (39)

$$K_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [D \Theta_{n-1} - (\Theta_{n-1} K_1 + \dots + \Theta_1 K_{n-1})] d\xi. \quad (41)$$

Разлагая далее величины $\Theta_n(\xi)$ и $D(\xi)$, имеющие период 2π , в ряды Фурье

$$\Theta_n(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Theta_n^{(m)} e^{im\xi}; \quad D(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D^{(m)} e^{im\xi} \quad (42)$$

и подставляя их в (39) и (41), получим расчетные формулы:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D(\xi) d\xi = D^{(0)}; \quad \Theta_1(\xi) = \sum_{m \neq 0} W_m(D^{(m)}) e^{im\xi}; \\ K_2 &= \sum_{m \neq 0} D^{(-m)} W_m(D^{(m)}); \quad F^{(m)} = \sum_{k+l=m} [D^{(l)} W_k(D^{(k)})] - W_m(D^{(m)}) K_1; \end{aligned} \quad (43)$$

$$\Theta_2(\xi) = \sum_{m \neq 0} W_m(F^{(m)}) e^{im\xi},$$

где матрица

$$W_m(G) = \begin{pmatrix} \frac{g_{11}}{im}; & \frac{g_{12}}{i(m+n\delta_a^n - \alpha)} \\ \frac{g_{21}}{i(m+\alpha-n\delta_a^n)}; & \frac{g_{22}}{im} \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} g_{11}; & g_{12} \\ g_{21}; & g_{22} \end{pmatrix} \quad (44)$$

определяется уравнением

$$imW_m = K_0 W_m - W_m K_0 + G. \quad (45)$$

Как следует из формул (43)–(45), для отыскания решения (33) необходимо знать фурье-компоненты функции $D(\xi)$. С этой целью разложим (35) в ряд Фурье:

$$D(\xi) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0; 1 \\ 0; 0 \end{pmatrix} e^{i(1-n\delta_a^n)\xi} + \begin{pmatrix} 0; -1 \\ 0; 0 \end{pmatrix} e^{-i(1+n\delta_a^n)\xi} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} 0; 0 \\ 1; 0 \end{pmatrix} e^{i(1+n\delta_a^n)\xi} + \begin{pmatrix} 0; 0 \\ -1; 0 \end{pmatrix} e^{-i(1-n\delta_a^n)\xi} \right]. \quad (46)$$

Полученные матрицы $D^{(m)}$ затем последовательно подставляем вместо матрицы G в равенство (44) и, опустив промежуточные преобразования, найдем:

$$W_{1-n\delta_a^n}(D^{(1-n\delta_a^n)}) = \begin{pmatrix} 0; \frac{1}{2i} \frac{1}{1-\alpha} \\ 0; 0 \end{pmatrix}; \quad W_{1+n\delta_a^n}(D^{(1+n\delta_a^n)}) = \begin{pmatrix} 0; 0 \\ \frac{1}{2i} \frac{1}{1+\alpha}; 0 \end{pmatrix}; \\ W_{-(1-n\delta_a^n)}(D^{-(1-n\delta_a^n)}) = \begin{pmatrix} 0; 0 \\ \frac{1}{2i} \frac{1}{1-\alpha}; 0 \end{pmatrix}; \quad (47) \\ W_{-(1+n\delta_a^n)}(D^{-(1+n\delta_a^n)}) = \begin{pmatrix} 0; \frac{1}{2i} \frac{1}{1+\alpha} \\ 0; 0 \end{pmatrix}.$$

Применимально к поставленной задаче удобно переписать формулы (43) в несколько ином виде. Воспользуемся свойствами функции δ_a^n и введем под знак суммирования по индексу m множитель

$$1 - \delta_m^0 = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 0 \\ 1 & \text{при } m \neq 0 \end{cases}.$$

Тогда имеют место соотношения:

$$\Theta_1(\xi) = \sum_{m \neq 0} W_m(D^{(m)}) e^{im\xi} = \Sigma_m W_m(D^{(m)}) e^{im\xi} (1 - \delta_m^0);$$

$$\Theta_2(\xi) = \sum_{m \neq 0} W_m(F^{(m)}) e^{im\xi} = \Sigma_m W_m(F^{(m)}) e^{im\xi} (1 - \delta_m^0); \quad (48)$$

$$K_2 = \sum_{m \neq 0} D^{(-m)} W_m(D^{(m)}) = \Sigma_m D^{(-m)} W_m(D^{(m)}) (1 - \delta_m^0).$$

Используя далее (43), (46)–(48), получим:

$$K_1 = D^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0; & \delta_a^1 - \delta_a^{-1} \\ \delta_a^{-1} - \delta_a^1; & 0 \end{pmatrix}; \quad (49)$$

$$\begin{aligned} K_2 = D^{-(1-n\delta_a^n)} W_{1-n\delta_a^n} \left(D^{(1-n\delta_a^n)} \right) (1-\delta_a^1) + D^{(1-n\delta_a^n)} W_{-(1-n\delta_a^n)} \times \\ \times \left(D^{-(1-n\delta_a^n)} \right) (1-\delta_a^1) + D^{(1+n\delta_a^n)} W_{-(1+n\delta_a^n)} \left(D^{-(1+n\delta_a^n)} \right) (1-\delta_a^{-1}) + \\ + D^{-(1+n\delta_a^n)} W_{1+n\delta_a^n} \left(D^{(1+n\delta_a^n)} \right) (1-\delta_a^{-1}) = \end{aligned} \quad (50)$$

$$= \frac{i}{4} \begin{pmatrix} \frac{1-\delta_a^{-1}}{1+\alpha} - \frac{1-\delta_a^1}{1-\alpha}; & 0 \\ 0; & \frac{1-\delta_a^1}{1-\alpha} - \frac{1-\delta_a^{-1}}{1+\alpha} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \Theta_1(\xi) = W_{1-n\delta_a^n} \left(D^{(1-n\delta_a^n)} \right) e^{i(1-n\delta_a^n)\xi} (1-\delta_a^1) + W_{1+n\delta_a^n} \left(D^{(1+n\delta_a^n)} \right) \times \\ \times e^{i(1+n\delta_a^n)\xi} (1-\delta_a^{-1}) + W_{-(1-n\delta_a^n)} \left(D^{-(1-n\delta_a^n)} \right) e^{-i(1-n\delta_a^n)\xi} (1-\delta_a^1) + \\ + W_{-(1+n\delta_a^n)} \left(D^{-(1+n\delta_a^n)} \right) e^{-i(1+n\delta_a^n)\xi} (1-\delta_a^{-1}) = \end{aligned} \quad (51)$$

$$= \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0; & \frac{1-\delta_a^1}{1-\alpha} e^{i(1-n\delta_a^n)\xi} + \frac{1-\delta_a^{-1}}{1+\alpha} e^{-i(1+n\delta_a^n)\xi} \\ \frac{1-\delta_a^{-1}}{1+\alpha} e^{i(1+n\delta_a^n)\xi} + \frac{1-\delta_a^1}{1-\alpha} e^{-i(1-n\delta_a^n)\xi}; & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Theta_2(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{[i(\alpha + \delta_a^{-1} - \delta_a^1) \sin(2\xi) - (1 - \delta_a^1 - \delta_a^{-1}) \cos(2\xi)]}{4(1 - \alpha^2)}; & 0 \\ 0; & -\frac{[i(\alpha + \delta_a^{-1} - \delta_a^1) \sin(2\xi) + (1 - \delta_a^1 - \delta_a^{-1}) \cos(2\xi)]}{4(1 - \alpha^2)} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Из приведенных выражений наиболее трудоемким в вычислении оказывается $\Theta_2(\xi)$. Расчетная формула для этой величины очень громоздка и поэтому в (52) опущена.

Общее решение уравнения (25) с граничными условиями $\xi=0$; $X(\xi=0)=X(0)$, согласно (32), (36), имеет вид:

$$X = e^{C\xi} \Theta(\xi, \gamma/2) e^{K(1/2)\xi} \Theta^{-1}(0, \gamma/2) X(0), \quad (53)$$

где обратная матрица $\Theta^{-1}(0, \gamma/2)$ определяется из соотношения

$$\Theta(0, \gamma/2) \Theta^{-1}(0, \gamma/2) = I = \begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Принимая во внимание (37), (49)–(52), нетрудно найти с точностью до членов порядка $\gamma^3/8$

$$\Theta\left(\xi, \frac{\gamma}{2}\right) = \begin{cases} 1 + \frac{\gamma^2}{16} \frac{[i(\alpha + \delta_a^{-1} - \delta_a^1) \sin(2\xi) - (1 - \delta_a^{-1} - \delta_a^1) \cos(2\xi)]}{1 - \alpha^2}; \frac{\gamma}{4i} \times \\ \quad \times \left[\frac{1 - \delta_a^1}{1 - \alpha} e^{i(1 - n\delta_a^n)\xi} + \frac{1 - \delta_a^{-1}}{1 + \alpha} e^{-i(1 + n\delta_a^n)\xi} \right]; \\ \frac{\gamma}{4i} \left[\frac{1 - \delta_a^{-1}}{1 + \alpha} e^{i(1 + n\delta_a^n)\xi} + \frac{1 - \delta_a^1}{1 - \alpha} e^{-i(1 - n\delta_a^n)\xi} \right]; \quad 1 - \frac{\gamma^2}{16} \times \\ \quad \times \frac{[(1 - \delta_a^1 - \delta_a^{-1}) \cos(2\xi) + i(\alpha + \delta_a^{-1} - \delta_a^1) \sin(2\xi)]}{1 - \alpha^2} \end{cases}; \quad (55)$$

$$K\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \begin{pmatrix} i \frac{\alpha}{2} + i \frac{\gamma^2}{16} \left(\frac{1 - \delta_a^{-1}}{1 + \alpha} - \frac{1 - \delta_a^1}{1 - \alpha} \right); & \frac{\gamma}{4} (\delta_a^1 - \delta_a^{-1}) \\ \frac{\gamma}{4} (\delta_a^{-1} - \delta_a^1); & i \left(n\delta_a^n - \frac{\alpha}{2} \right) + i \frac{\gamma^2}{16} \left(\frac{1 - \delta_a^1}{1 - \alpha} - \frac{1 - \delta_a^{-1}}{1 + \alpha} \right) \end{pmatrix}, \quad (56)$$

а из соотношений (54) и (55) вывести

$$\Theta^{-1}\left(0, \frac{\gamma}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma^2}{16} \frac{(1 - \delta_a^1 - \delta_a^{-1})}{1 - \alpha^2}; & \frac{i\gamma}{4} \left(\frac{1 - \delta_a^1}{1 - \alpha} + \frac{1 - \delta_a^{-1}}{1 + \alpha} \right) \\ \frac{i\gamma}{4} \left(\frac{1 - \delta_a^{-1}}{1 + \alpha} + \frac{1 - \delta_a^1}{1 - \alpha} \right); & 1 - \frac{\gamma^2}{16} \frac{(1 - \delta_a^1 - \delta_a^{-1})}{1 - \alpha^2} \end{pmatrix} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\gamma^2}{16} \left[\frac{1 - \delta_a^{-1}}{(1 + \alpha)^2} + \frac{1 - \delta_a^1}{(1 - \alpha)^2} \right] \right\}^{-1}. \quad (57)$$

Вычислим входящие в (53) функции от матриц $e^{K(\gamma/2)\xi}$ и $e^{\tilde{C}_0\xi}$. Обозначим через λ_1 и λ_2 корни характеристического уравнения

$$\det(K - \lambda I) = 0. \quad (58)$$

Подставляя в это уравнение матрицу K и учитывая точность, с которой она определена в равенстве (55), будем иметь:

$$\lambda_{1,2} = \frac{i}{2} [n\delta_a^n \pm \Omega]; \quad \Omega = \sqrt{(n\delta_a^n - \alpha)^2 + \alpha\gamma^2(n\delta_a^n - \alpha)/2(1 - \alpha^2)}. \quad (59)$$

Как известно [5], для матрицы A второго порядка можно определить функцию e^A , которая, согласно интерполяционной формуле Лагранжа–Сильвестра, равна

$$e^A = \frac{A - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2} + \frac{A - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1}, \quad (60)$$

(λ_1, λ_2 — корни матрицы A). Заменяя в (60) A на $K\xi$ и используя (59), после несложных преобразований получим:

$$e^{K\xi} = e^{in\delta_a^n \xi/2} \begin{cases} \frac{2i}{\Omega} \left[-\frac{n\delta_a^n - \alpha}{2} + \frac{\gamma^2}{16} \left(\frac{1-\delta_a^{-1}}{1+\alpha} - \frac{1-\delta_a^1}{1-\alpha} \right) \right] \sin\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right) + \cos\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right); \\ \frac{\gamma}{2} \frac{(\delta_a^1 - \delta_a^{-1})}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right); \\ -\frac{\gamma}{2} (\delta_a^1 - \delta_a^{-1}) \Omega^{-1} \sin\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right); \quad \frac{2i}{\Omega} \left[+\frac{n\delta_a^n - \alpha}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2}{16} \left(\frac{1-\delta_a^1}{1-\alpha} - \frac{1-\delta_a^{-1}}{1+\alpha} \right) \right] \sin\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right) + \cos\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right) \end{cases} \quad (61)$$

Аналогичным путем находится матрица $e^{C_0\xi}$:

$$e^{C_0\xi} = \begin{pmatrix} 1; & 0 \\ 0; & e^{-in\delta_a^n \xi} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Зададим граничные условия. Будем считать, что молекулы в момент влета в резонатор находятся на верхнем уровне. Соответственно этому положим:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0; & 0 \\ 0; & 1 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Для того, чтобы найти общее решение, перемножим (55), (56), (61)–(63) в том порядке, в каком это указано в (53); затем в полученной матрице сложим столбцы. Опустив промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$C_1(\xi) = \frac{\gamma}{4} e^{in\delta_a^n \xi/2} \left\{ i \left[\frac{1 - e^{i(1-n\delta_a^n)\xi}}{1-\alpha} + \frac{1 - e^{-i(1+n\delta_a^n)\xi}}{1+\alpha} \right] \cos\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right) + \right. \\ \left. + (n\delta_a^n - \alpha) \left[\frac{1 + e^{-i(1+n\delta_a^n)\xi}}{1+\alpha} + \frac{1 + e^{i(1-n\delta_a^n)\xi}}{1-\alpha} \right] \Omega^{-1} \sin\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right) \right\}; \quad (64)$$

$$C_2(\xi) = i(n\delta_a^n - \alpha) \Omega^{-1} \sin\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right) e^{-in\delta_a^n \xi/2} + \cos\left(\frac{\Omega}{2}\xi\right) e^{-in\delta_a^n \xi/2}. \quad (65)$$

Отметим следующее. В выражении (64) откинуты члены $(\gamma^3/8)f_1(\Omega, \alpha, \xi)$, по порядку величины составляющие $\gamma^3/8$. Точность, с которой определяется величина $C_2(\xi)$ равенством (65), ниже, поскольку в (65) отброшены члены, начиная с $(\gamma^2/4)f_2(\Omega, \alpha, \xi)$.

Для вычисления поляризации молекулярного пучка (а это является конечной целью данной статьи) последнее, однако, несущественно. В этом нетрудно убедиться, если учесть, что в выражения (13), (14) величины $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ входят только через их произведения. Поэтому точность, с которой найдется поляризация при подстановке (64), (65) в (13), (14), будет порядка $\gamma^3/8$. Ее окончательный вид:

$$P(z, t) = P_1(z) \cos(\omega t) + P_2(z) \sin(\omega t);$$

$$P_1(\eta) = \frac{\gamma N_0 d}{(1-\alpha^2)sv} \left\{ \frac{n\delta_a^n - \alpha}{\Omega} \sin(\Omega\eta) \cos(n\delta_a^n \eta) - \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\eta\right) [\sin(n\delta_a^n \eta) - \right. \\ \left. - \alpha \sin \eta] + \frac{(n\delta_a^n - \alpha)^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\eta\right) [\sin(n\delta_a^n \eta) + \alpha \sin \eta] \right\}; \quad (66)$$

$$P_2(\eta) = \frac{\gamma N_0 d}{(1-\alpha^2)sv} \left\{ -\frac{(n\delta_\alpha^n - \alpha)}{\Omega} \sin(\Omega\eta) \sin(n\delta_\alpha^n \eta) + \cos^2\left(\frac{\Omega}{2}\eta\right) \times \right. \\ \left. \times [\cos\eta - \cos(n\delta_\alpha^n \eta)] + \frac{(n\delta_\alpha^n - \alpha)^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}\eta\right) [\cos\eta + \cos(n\delta_\alpha^n \eta)] \right\}, \quad (67)$$

где

$$\eta = \pi lz/L.$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сделаем предельный переход. Будем считать $\gamma \ll 1$, так что

$$\Omega = \sqrt{(n\delta_\alpha^n - \alpha)^2 + \alpha\gamma^2(n\delta_\alpha^n - \alpha)/2(1 - \alpha^2)} \simeq (n\delta_\alpha^n - \alpha). \quad (68)$$

В этом случае формулы (66) и (67) запишутся так:

$$P_1(\eta) = \frac{\gamma N_0 d}{(1 - \alpha^2)sv} [\alpha \sin\eta - \sin(\alpha\eta)]; \\ P_2(\eta) = \frac{\gamma N_0 d}{(1 - \alpha^2)sv} [\cos\eta - \cos(\alpha\eta)]. \quad (69)$$

Сравнив (69) с выражением для поляризации, полученным в работе [3], убедимся, что они совпадают. Случай $\gamma \ll 1$, как отмечалось выше, характерен для режима молекулярного усиления слабых сигналов. Поэтому для его расчета вместо (66), (67) можно использовать выражение (69).

Остановимся более подробно на процессе взаимодействия молекул с электромагнитным полем. Представим поле резонатора в области пучка в виде двух волн, бегущих в противоположных направлениях:

$$E = E_0 \sin\left(\frac{\pi l}{L}z\right) \cos(\omega t) = \frac{E_0}{2} \left[\sin\left(\omega t + \frac{\pi l}{L}z\right) - \sin\left(\omega t - \frac{\pi l}{L}z\right) \right]. \quad (70)$$

Так как каждая молекула пучка движется вдоль координаты z со скоростью v , то на нее действует поле двух частот

$$E = \frac{E_0}{2} \{ \sin[(\omega + \omega_g)t - \Psi_0] - \sin[(\omega - \omega_g)t + \Psi_0] \}, \quad (71)$$

где фаза Ψ_0 связана с временем влета молекулы в резонатор t_0 соотношением $\Psi_0 = \omega_g t_0$.

Компонента поля с частотой $\omega + \omega_g$ обусловлена волной, бегущей в направлении, противоположном движению пучка (обратная волна). Из-за эффекта Допплера первого порядка* частота этой волны в системе, связанной с молекулой, увеличивается на величину ω_g . Аналогично волна, распространяющаяся в направлении движения пучка (прямая волна), действует на молекулы с частотой $\omega - \omega_g$. Если выполнено условие

$$\omega \pm \omega_g = \omega_{21}, \quad (72)$$

то наступает резонанс.

Таким образом, для неоднородного вдоль движения пучка СВЧ поля существует не одна (как это имело место для однородного поля),

* Членами порядка v^2/c^2 всюду пренебрегаем.

а несколько резонансных частот. При синусоидальной зависимости поля от координаты резонанс наступает на двух частотах

$$\omega_{\pm} = \omega_{21} \pm \omega_g.$$

Рассмотрим область расстроек $\alpha = (\omega_{21} - \omega)/\omega_g \approx +1$, соответствующую резонансному взаимодействию обратной волны с молекулярной системой. Апроксимируем множитель в (66), (67) $1/(1-\alpha^2)$ выражением $1/2(1-\alpha)$ и, используя (31), (59), вместо (66), (67) найдем:

$$P_2(\eta) = \frac{\gamma N_0 d}{sv} \left\{ \frac{-\sin(\Omega_1 \eta) \sin \eta}{2\Omega_1} + \frac{1-\alpha}{\Omega_1^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \eta\right) \cos \eta \right\}; \quad (73)$$

$$P_1(\eta) = \frac{\gamma N_0 d}{sv} \left\{ \frac{\sin(\Omega_1 \eta) \cos \eta}{2\Omega_1} + \frac{1-\alpha}{\Omega_1^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \eta\right) \sin \eta - \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \eta\right) \sin \eta \right\}, \quad (74)$$

где

$$\Omega_1 = \sqrt{(1-\alpha)^2 + \gamma^2/4}.$$

Полученные выражения (73), (74) и (13) сравним с поляризацией молекулярного пучка под действием одной обратной волны

$$\frac{E_0}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi l}{L} z\right).$$

Как показывает расчет, который мы здесь не приводим, в этом случае может быть найдено точное значение поляризации, равное

$$P_b = P_{1b} \cos(\omega t) + P_{2b} \sin(\omega t); \quad (75)$$

$$P_{2b} = \frac{\gamma N_0 d}{sv} \left\{ -\frac{\sin(\Omega_1 \eta) \sin \eta}{2\Omega_1} + \frac{1-\alpha}{\Omega_1^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \eta\right) \cos \eta \right\}; \quad (76)$$

$$P_{1b} = \frac{\gamma N_0 d}{sv} \left\{ \frac{\sin(\Omega_1 \eta) \cos \eta}{2\Omega_1} + \frac{1-\alpha}{\Omega_1^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_1}{2} \eta\right) \sin \eta \right\}. \quad (77)$$

Из сравнения следует, что (73) совпадает с выражением (76). Другими словами, в области $\alpha \approx +1$ индуцированное излучение (поглощение) молекул вызывается только обратной волной. Прямая волна с точностью до отброшенных в (73), (74) членов порядка $(\gamma^3/8)f(\Omega, \alpha, \eta)$ вклада в излучение (поглощению) молекул не дает. Наличие прямой волны приводит лишь к появлению в выражении (74) последнего члена и, тем самым, как будет показано в следующей статье, влияет на частоту молекулярного генератора в области $\alpha \approx +1$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для области $\alpha \approx -1$ с той лишь разницей, что прямая и обратная волны меняются местами. Соответственно этому из (66), (67) получим:

$$P_1(\eta) = \frac{\gamma N_0 d}{sv} \left\{ -\frac{\sin(\Omega_2 \eta) \cos \eta}{2\Omega_2} - \frac{1+\alpha}{\Omega_2^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_2}{2} \eta\right) \sin \eta + \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\Omega_2}{2} \eta\right) \sin \eta \right\}; \quad (78)$$

$$P_2(\eta) = \frac{\gamma N_0 d}{sv} \left\{ -\frac{\sin(\Omega_2 \eta) \sin \eta}{2\Omega_2} + \frac{1+\alpha}{\Omega_2^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_2}{2} \eta\right) \cos \eta \right\}, \quad (79)$$

где

$$\Omega_2 = \sqrt{(1+\alpha)^2 + \alpha^2/4}.$$

Введем расстройку

$$u = \begin{cases} 1 + \alpha, & \text{если } \alpha \approx -1 \\ 1 - \alpha, & \text{если } \alpha \approx 1 \end{cases} \quad (80)$$

и, переписывая выражения (73) и (79) с помощью (80), убедимся в их совпадении. Отсюда следует, что в областях ($\alpha \approx \pm 1$) излучение (поглощение) молекулами электромагнитной энергии одинаково и определяется одной из бегущих волн (70). Проделав подобную процедуру с (78), (74), найдем:

$$P_1\left(\eta, \frac{\gamma}{2}, \alpha\right) \Big|_{\text{при } \alpha=1} = -P_1\left(\eta, \frac{\gamma}{2}, \alpha\right) \Big|_{\text{при } \alpha=-1}. \quad (81)$$

Рассмотрим поведение молекулярного пучка при $\alpha=0$. На этой частоте внешнего поля молекулы пучка одинаково взаимодействуют с обеими волнами. Прямая волна действует на движущуюся по оси z молекулу с частотой $\omega_{21}-\omega_g$, а обратная — с частотой $\omega_{21}+\omega_g$; обе они отстоят от резонансной частоты молекулы ω_{21} на величину ω_g . Анализируя выражения (18), можно заключить, что при $\omega=\omega_{21}$ ($\alpha=0$) и четном числе полуволн ($l=2n$) движущиеся в пучке молекулы в конечном итоге не обмениваются энергией с электромагнитным полем.

Последнее особенно легко пояснить, если ввести в рассмотрение плотность активных молекул D . По определению, она равна разности плотностей молекул N_+ и N_- на верхнем и нижнем уровнях

$$D = N_+ - N_- \quad (82)$$

и, следовательно, пропорциональна энергии, запасенной в пучке. С другой стороны, N_+ и N_- могут быть выражены через амплитуды вероятностей и через общую плотность молекул D_0 :

$$N_+ = D_0 |C_2|^2; \quad N_- = D_0 |C_1|^2. \quad (83)$$

Подставляя (83) в (82) и используя (17), получим:

$$D(z) = D_0 \cos \left\{ \gamma \left[1 - \cos \left(\frac{\pi l}{L} z \right) \right] \right\}, \quad (84)$$

откуда при четном $l=2n$ имеем:

$$D(L) = D(0) = D_0. \quad (85)$$

Из равенств (84) и (85) следует, что хотя молекулы пучка совершают переходы с одного уровня на другой, но энергия, которая в них запасена при выходе из резонатора ($z=L$), будет той же самой, что и при влете ($z=0$).

В заключение пользуясь случаем, чтобы поблагодарить В. С. Троицкого за чтение статьи в рукописи и сделанные замечания, а также В. М. Файна и Э. Ящина за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 34, 1658 (1958).
2. А. Г. Fox, T. Li, Proc. IRE, 48, 1904 (1960).
3. J. Вопапомі, Helvetica Physica Acta, 31, 282 (1958).
4. В. А. Якубович, ПММ, 23, 15 (1959).
5. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТТЛ, М., 1954.
6. Г. П. Любимов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 33, 1396 (1957).
7. Г. Л. Сукин, Доклад на семинаре отдела № 7 НИРФИ.

**INTERACTION OF MOLECULAR BEAM WITH ELECTROMAGNETIC FIELD
IN A RESONATOR.****I. MOLECULAR BEAM POLARIZATION IN A PRESCRIBED NONUNIFORM
ELECTRICAL FIELD OF RESONATOR***V. B. Tsaregradsky*

Interaction is studied of a monokinetic molecular beam with a prescribed electromagnetic field of a resonator. The consideration is limited by the case of sinusoidal variation of electrical field along the beam. Approximate expressions are derived for amplitudes of molecular distribution probability in the energy levels considered and in the beam polarization. For the case when the field frequency is equal to transition frequency between molecular levels the exact solution coincides with that of paper [8]. In conclusion the expression is analysed for polarization of a molecular beam at different parameters of the problem.

О ЧАСТОТНОМ СПЕКТРЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, РАССЕЯННЫХ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий

Приведены выражения для тензоров дисперсии электромагнитного поля, рассеянного статистически неровной поверхностью, с учетом кривизны и неидеальности средней поверхности. Рассмотрено влияние диссипативных процессов на ширину спектральной линии рассеянного поля и найдены поправки к спектральной плотности этого поля во втором приближении теории возмущений.

Экспериментальные исследования частотного спектра электромагнитных коротких и средних волн, рассеянных морской поверхностью, показали, что он состоит из дискретных линий, обладающих большой стабильностью и зависящих только от частоты падающего излучения [1–2]. Этот эффект был впервые качественно интерпретирован Кромби [1]; полная теория была дана в работах [3, 4].

В цитированных статьях рассеивающая поверхность рассматривалась как пакет длинных гравитационных волн; задача решалась в первом приближении теории возмущений, причем в качестве малых параметров фигурировали величины ζ_{\max}/λ ; $\partial\zeta/\partial x$, $\partial\zeta/\partial y$. (Здесь $z = \zeta(x, y)$ — форма взволнованной поверхности, $\lambda = \lambda/2\pi$, λ — длина электромагнитной волны.)

Интенсивность рассеяния статистически неровной и неоднородной поверхностью рассчитывалась в [3–6]. При этом кривизна средней поверхности учитывалась лишь в работе [4] для весьма частного случая. В настоящем сообщении приводятся выражения для корреляционных тензоров флюктуационного поля с учетом неидеальной проводимости средней поверхности, исследуется влияние вязкости морской воды на ширину линии рассеянных волн, а также определяется частотный спектр рассеянного поля во втором приближении теории возмущений.

Электромагнитное поле над статистически неровной и неоднородной поверхностью можно записать в следующем виде:

$$\tilde{E}_i = E_i + e_i, \quad \tilde{H}_i = H_i + h_i, \quad (1)$$

где \tilde{E}_i , \tilde{H}_i — компоненты электрического и магнитного поля, $E_i = \tilde{E}_i$, $H_i = \tilde{H}_i$ — средние значения этих полей (черта означает статистическое усреднение), e_i и h_i — их флюктуации.

Как уже не раз указывалось, в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей e_i и h_i распределены по Гауссу, вследствие чего полное статистическое описание электромагнитного поля дается его средними значениями и корреляционными функциями флюктуаций поля.

Введем дисперсионные тензоры

$$e_{ik}(t_1, t_2) = \overline{e_i(t_1) e_k^*(t_2)}; \\ h_{ik}(t_1, t_2) = \overline{h_i(t_1) h_k^*(t_2)}; \quad d_{ik}(t_1, t_2) = \overline{e_i(t_1) h_k^*(t_2)},$$

где t_1 и t_2 означают различные моменты времени*. Для случая хорошо проводящей сферической земли

$$e_{\varphi\varphi} = h_{zz}; \quad e_{\Theta\Theta} = \frac{1}{k^2} \left| \frac{\partial \ln G_1}{\partial z} \right|^2 e_{zz}; \\ e_{\Theta\varphi} = e_{\varphi\Theta}^* = \frac{i}{k} \frac{\partial \ln G_1}{\partial z} d_{zz}; \quad e_{\Theta z} = e_{z\Theta}^* = \frac{i}{k} \frac{\partial \ln G_1}{\partial z} e_{zz}; \\ e_{z\varphi} = e_{\varphi z}^* = d_{zz}; \\ h_{\varphi\varphi} = e_{zz}; \quad h_{\Theta\Theta} = \frac{1}{k^2} \left| \frac{\partial \ln G_2}{\partial z} \right|^2 h_{zz}; \quad h_{\Theta\varphi} = h_{\varphi\Theta}^* = -\frac{i}{k} \frac{\partial \ln G_2}{\partial z} d_{zz}; \\ h_{\Theta z} = h_{z\Theta}^* = \frac{i}{k} \frac{\partial \ln G_2}{\partial z} h_{zz}; \quad h_{z\varphi} = h_{\varphi z}^* = -d_{zz}; \\ d_{\varphi\varphi} = -d_{zz}; \quad d_{\Theta\Theta} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial \ln G_1}{\partial z} \left(\frac{\partial \ln G_2}{\partial z} \right)^* d_{zz}; \quad d_{\varphi\Theta} = -\frac{i}{k} \left(\frac{\partial \ln G_2}{\partial z} \right)^* h_{zz}; \\ d_{\Theta\varphi} = \frac{i}{k} \frac{\partial \ln G_1}{\partial z} e_{zz}; \quad d_{\varphi z} = h_{zz}; \quad d_{z\varphi} = -e_{zz}; \\ d_{\Theta z} = \frac{i}{k} \frac{\partial \ln G_1}{\partial z} d_{zz}; \quad d_{z\Theta} = -\frac{i}{k} \left(\frac{\partial \ln G_2}{\partial z} \right)^* d_{zz}; \quad (2) \\ e_{zz} = \frac{|G_1|^2 S e^{-i\omega_0 \tau}}{16\pi^2} \left\{ \left| 2k^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} E_z - i \left(\mathbf{k}_\perp, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \right) \right|^2 \bar{\zeta}^2 Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2) + \right. \\ \left. + \left| [\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{H}'_\perp]_z \right|^2 |\gamma'|^2 Q'(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2) \right\}; \\ h_{zz} = \frac{|G_2|^2 S e^{-i\omega_0 \tau}}{16\pi^2 |\gamma'|^2} \left[\left| k^2 \sin \gamma E_z - i \left[\mathbf{k}'_\perp, \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z} \right]_z \right|^2 \bar{\zeta}^2 Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2) + \right. \\ \left. + \left| (\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{H}) \right|^2 |\gamma'|^2 Q'(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2) \right]; \\ d_{zz} = -\frac{G_1 G_2 S e^{-i\omega_0 \tau}}{16\pi^2 \gamma'^3} \left[\left(2k^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} E_z - i \left(\mathbf{k}'_\perp, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} \right) \right) (k^2 \sin \gamma E_z^* + \right. \\ \left. + i \left[\mathbf{k}'_\perp, \frac{\partial \mathbf{H}^*}{\partial z} \right]_z) \bar{\zeta}^2 Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2) - \right. \\ \left. - [\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{H}]_z (\mathbf{k}'_\perp, \mathbf{H})^* |\gamma'|^2 Q'(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2) \right].$$

Здесь введены следующие обозначения: $\tau = t_1 - t_2$, z , Θ , φ —сферические координаты, \mathbf{E} и \mathbf{H} —электрические и магнитные поля падающей волны, S —площадь рассеивающего участка, ω_0 —частота этой волны,

* Явный вид этих тензоров для ряда частных случаев был найден в работах [3-6].

\mathbf{k}_\perp и \mathbf{k}'_\perp — проекции волновых векторов падающего и отраженного полей на поверхность $z = 0$, γ — угол между \mathbf{k}_\perp и \mathbf{k}'_\perp , $k = \omega_0/c$, G_1 и G_2 — функции Грина, удовлетворяющие граничным условиям

$$\partial G_1/\partial z - ik\eta G_1 = 0, \quad \eta \partial G_2/\partial z - ikG_2 = 0,$$

η — среднее значение импеданса поверхности, η' — флюктуации импеданса поверхности.

В (2) входят также $Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2)$ и $Q'(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2)$, определяемые соотношениями ($\rho = r' - r$):

$$Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int W(\rho, t_1, t_2) e^{i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \cdot \rho} d\rho_x d\rho_y; \quad (3)$$

$$Q'(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int W'(\rho, t_1, t_2) e^{i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \cdot \rho} d\rho_x d\rho_y; \quad (3a)$$

$$W(\rho, t_1, t_2) = \frac{\zeta(r, t_1) \zeta(r', t_2)}{\zeta^2}; \quad W'(\rho, t_1, t_2) = \frac{\eta'(r, t_1) \eta'^*(r', t_2)}{|\eta'|^2}. \quad (4)$$

Методика получения формул (2) описана в работе [4]. Используя (2), можно найти следующие выражения для компонент вектора Умова—Пойнтинга:

$$\begin{aligned} P_\varphi &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \frac{i}{k} \left(\frac{\partial \ln G_1}{\partial z} + \frac{\partial \ln G_2}{\partial z} \right) e_{zz}(0); \\ P_\theta &= \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} (h_{zz}(0) + e_{zz}(0)); \\ P_z &= -\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \frac{i}{k} \left(\frac{\partial \ln G_1}{\partial z} e_{zz}(0) + \frac{\partial \ln G_2}{\partial z} h_{zz}(0) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Интенсивность поля, рассеянного в направлении \mathbf{h} , определяется как (Pn) , $e_{ik}(0) = e_{ik}(t_1 = 0, t_2 = 0)$ и т. д.

Заметим, что формулы (2) и (5) легко обобщаются на случай локально-однородных неровностей и неоднородностей или настолько больших рассеивающих участков, что в их пределах \mathbf{E} и \mathbf{H} нельзя считать постоянными. При этом $e_{ik}, h_{ik}, d_{ik}, P$ заменяются величинами.

$$\tilde{e}_{ik} = \frac{1}{S} \int_S e_{ik} dS, \quad \tilde{h}_{ik} = \frac{1}{S} \int_S h_{ik} dS; \quad \tilde{d}_{ik} = \frac{1}{S} \int_S d_{ik} dS; \quad \tilde{P} = \frac{1}{S} \int_S P dS. \quad (6)$$

Частотный спектр рассеянного поля определяется как флюктуациями формы поверхности, так и флюктуациями импеданса. Здесь будет исследовано влияние лишь флюктуаций формы поверхности, ибо флюктуации импеданса могут быть рассмотрены аналогично.

Зависимость Q от t_1 и t_2 должна быть найдена из уравнений, описывающих движение поверхности. Для вязкой несжимаемой жидкости это — уравнение Навье—Стокса с обычными граничными условиями на поверхности и на дне бассейна. Мы не будем останавливаться на выкладках, ибо они такие же, как и в работах [3, 4], а приведем сразу результат.

Введем величину ξ по формуле

$$\xi(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t) = \int_S \zeta(r, t) e^{i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \cdot r} dr, \quad (7)$$

Можно легко показать (см. [5]), что $Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t)$ и $\xi(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t)$ связаны соотношением

$$\overline{\xi(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1) \xi^*(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_2)} = \bar{\zeta}^2 S Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2). \quad (8)$$

Как следует из гидродинамических уравнений и граничных условий, ξ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + 2\delta \frac{d\xi}{dt} + \Omega^2 \xi = f(t), \quad (9)$$

где

$$\delta = \frac{2\eta_v}{\rho_0} |\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp|^2,$$

$$\Omega^2(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) = \left(g |\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp| + \frac{\alpha}{\rho_0} |\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp|^3 \right) \operatorname{th} |\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp| d,$$

η_v — коэффициент вязкости, ρ_0 — плотность жидкости, g — ускорение земного тяготения, α — капиллярная постоянная. Сила $f(t)$ связана с внешним давлением на поверхность жидкости $p_0(r, t)$ соотношением

$$f(t) = \frac{|\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp|}{\rho_0} \int_S p_0(r, t) e^{i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) r} dS, \quad (10)$$

Легко видеть, что выражения для δ и Ω являются выражениями для затухания и закона дисперсии поверхностных волн; однако соответствующий волновой вектор определяется частотой и углами падения и рассеяния электромагнитных волн.

Рассмотрим сначала случай отсутствия внешних сил. Решение уравнения (9) имеет вид:

$$\xi(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t) = \xi_+ e^{-\delta t - i\omega t} + \xi_- e^{-\delta t + i\omega t}, \quad (11)$$

откуда для Q получается следующее выражение:

$$Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, t_1, t_2) = e^{-2\delta t_1} \left(|\xi_+|^2 e^{-i\omega \tau - \delta |\tau|} + |\xi_-|^2 e^{i\omega \tau - \delta |\tau|} \right). \quad (12)$$

Как видно из (12), рассеянное поле является нестационарной функцией времени. Наличие диссипации приводит к затуханию рассеянного поля во времени и к уширению линии. При $\delta \rightarrow 0$ мы опять приходим к результатам работ [3, 4].

Исследуем теперь влияние внешней силы. Пусть $f(t)$ — стационарная функция времени. Преобразование Фурье от ξ по времени ξ_ω запишется так:

$$\xi_\omega = \frac{f_\omega}{\Omega^2 - \omega^2 + 2i\omega\delta}, \quad (13)$$

где преобразование Фурье понимается в следующем смысле:

$$f_\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-T}^T e^{i\omega t} f(t) dt. \quad (14)$$

Согласно (13),

$$|\xi_\omega|^2 = \frac{|f_\omega|^2}{(\omega^2 - \Omega^2) + 4\omega^2\delta^2}. \quad (15)$$

Из формул (2) и (3) следует, что $e_{ik\omega}$ и $h_{ik\omega} \sim |\xi_{\omega-\omega_0}|^2$. Этой же величине пропорциональна спектральная плотность интенсивности рассеянного излучения и других линейных комбинаций тензоров дисперсии.

Дальнейшие выводы о форме линии рассеянного излучения можно сделать, исходя из условия конечности тензоров $e_{ik}(0)$, $h_{ik}(0)$ при $\delta \rightarrow 0$. Действительно,

$$e_{ik}(0), h_{ik}(0) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\bar{f}_{\omega-\omega_0}|^2 d\omega}{[(\omega-\omega_0)^2 - \Omega^2]^2 + 4\Omega^2 \delta^2}.$$

Под интегралом в знаменателе $(\omega-\omega_0)^2 \delta^2$ можно заменить на $\Omega^2 \delta^2$:

$$e_{ik}(0), h_{ik}(0) \sim \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\bar{f}_{\omega-\omega_0}^2| \delta d\omega}{[(\omega-\omega_0)^2 - \Omega^2]^2 + 4\Omega^2 \delta^2} \sim \frac{|\bar{f}_{\pm\Omega}^2| + |\bar{f}_{-\pm\Omega}^2|}{\delta},$$

Чтобы при стремлении $\delta \rightarrow 0$ $e_{ik}(0)$ и $h_{ik}(0)$, а следовательно, и интенсивность рассеянного излучения стремились к постоянному пределу, величина $|\bar{f}_{\pm\Omega}^2|$ должна быть пропорциональна δ . Таким образом,

$$e_{ik\omega}, h_{ik\omega} \sim \frac{\delta}{[(\omega-\omega_0)^2 - \Omega^2]^2 + 4\Omega^2 \delta^2}. \quad (16)$$

Подчеркнем, что полученный результат не зависит от формы внешнего давления.

Формула (16) описывает форму линии рассеянного излучения. Легко видеть, что спектральная плотность рассеянного излучения имеет максимумы в точках

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \Omega. \quad (17)$$

Ширина линии—порядка δ .

Покажем теперь, что соотношение $|\bar{f}_{\pm\Omega}^2| \sim \delta$ следует из условий стационарности функции $\xi(t)$. Домножив уравнение (9) на $d\xi^*/dt$, преобразуем его к виду:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left| \frac{d\xi}{dt} \right|^2 + \Omega^2 |\xi|^2 \right] + 2\delta \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^2 = f(t) \frac{d\xi^*}{dt},$$

а затем усредним полученное равенство. Среднее от полной производной по времени в силу стационарности процесса равняется нулю, вследствие чего

$$2\delta \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^2 = \overline{f(t) \frac{d\xi^*}{dt}}. \quad (18)$$

В левой части равенства (18) стоит диссирированная энергия, а в правой—работа, совершенная внешней силой. Их равенство означает, что энергия колебаний остается постоянной.

Преобразуем правую часть равенства (18). Из уравнения (9) в пренебрежении диссипативным членом вытекает, что

$$\frac{d\xi}{dt} = \int_{-\infty}^t f(t') \cos [\Omega(t-t')] dt'. \quad (19)$$

Домножая $d\xi^*/dt$ на $f(t)$ и усредняя, получим:

$$\overline{f(t) \frac{d\xi^*}{dt}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau, \quad (20)$$

где

$$W(\tau) = \overline{f(t) f(t + \tau)}.$$

Однако по теореме Хинчина для стационарного случайного процесса имеет место равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau = \overline{|f_\Omega|^2},$$

откуда

$$\overline{|f_\Omega|^2} = 4\delta \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^2. \quad (21)$$

Ввиду произвольности Ω это верно для любой частоты. Таким образом, мы доказали сформулированное выше предложение.

Если колебания поверхности являются тепловыми, то обычными методами [7] можно показать, что

$$\left| \frac{d\xi}{dt} \right|^2 = \frac{\Omega^2 TS}{g\rho_0}, \quad (22)$$

где T —температура в эргах.

В работе [4] рассматривался недиссипативный механизм уширения линии, связанный с конечной шириной диаграммы направленности, которая здесь не учитывается. Сравнение теории с экспериментом [2], проведенным на волне 180 м, показывает, что, по-видимому, в этом случае недиссипативный механизм превалирует. Однако ширина, связанная с недиссипативным механизмом, пропорциональна $\lambda^{1/2}$, а с наличием вязкости— λ^{-2} . Поэтому по мере укорочения волны основным становится вклад диссипативной части.

Заметим, что наряду с колебаниями случайной поверхности может иметь место ее перенос как целого. В этом случае $z = \zeta(r - vt, t)$, где v —скорость переноса поверхности. Легко видеть, что при этом спектральная плотность имеет максимум в точках

$$\omega = \omega_0 - (\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \cdot \mathbf{v} + \Omega. \quad (23)$$

Второй член в этой формуле соответствует обычному допплер-эффекту.

Представляет интерес частотный спектр рассеянного поля во втором приближении теории возмущений, ибо этот эффект может быть обнаружен экспериментально и может качественно изменить характер результата. Для упрощения расчета мы предположим одномерность рассеивающей поверхности $z = \zeta(x)$.

Задача сводится к решению уравнений гидродинамики и расчету рассеянного излучения во втором приближении метода возмущений по неровностям поверхности. После весьма громоздких выкладок для поправок второго приближения $\delta e_{ik\omega}$, $\delta h_{ik\omega}$ получаются следующие результаты:

$$\delta e_{ik\omega} \sim \delta h_{ik\omega} \sim \bar{\zeta}^2 A Q_{\omega_1} Q_{\omega_2}, \quad (24)$$

где

$$\omega_{1,2} = \frac{v \pm \sqrt{2g |\mathbf{k}_{\perp x} - \mathbf{k}'_{\perp x}|^2 - v^2}}{2}, \quad v = \omega - \omega_0, \quad Q_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau.$$

Коэффициент A в различных частотных интервалах имеет следующие порядки по величине $ka \gg 1$ (здесь a —размер рассеивающей площадки в направлении x):

$$A \sim \begin{cases} (ak)^2 \left(\nu > \sqrt{2g |k_{\perp x} - k'_{\perp x}|} \right); \\ (ak)^3 \left(\nu \leq \sqrt{2g |k_{\perp x} - k'_{\perp x}|}; \nu \neq \sqrt{gk'} \pm \sqrt{g |k_{\perp x} - k'_{\perp x}|} \right); \\ (ak)^{\frac{3}{2}} \left(\nu = \sqrt{kg} \pm \sqrt{g |k_{\perp x} - k'_{\perp x}|}; k_{\perp x} \neq -k'_{\perp x} \right); \\ (ak)^4 \left(\nu = 2\sqrt{kg}; k_{\perp x} = -k'_{\perp x} = k \right). \end{cases} \quad (25)$$

При выводе этих соотношений предполагалось, что связь между вторыми и четвертыми моментами величины ζ является такой, как если бы ζ была распределена по Гауссу.

Заметим, что частотный спектр e'_{ik} и k'_{ik} непрерывен и зависит, вообще говоря, от явного вида Q_ω . Множитель A имеет максимум $\sim (ak)^4$ в случае, когда приемная и передающая точки совмещены и находятся на поверхности раздела. В этом случае $\nu = 2\sqrt{kg}$. На наличие максимума в этой точке указал, исходя из качественных соображений, Кромби [1]. Им же это обстоятельство было подтверждено экспериментально.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. D. Стомбіє, Nature, 175, 681 (1955).
2. С. Я. Брауде, А. В. Мень, В. Ф. Шульга, Сб. Радиоокеанографические исследования морского волнения, изд. АН УССР, 1962.
3. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 58 (1961).
4. Ф. Г. Басс, Сб. Радиоокеанографические исследования морского волнения, изд. АН УССР, 1962.
5. Ф. Г. Басс, В. Г. Бочаров, Радиотехника и электроника, 3, 180 (1958).
6. В. Г. Бочаров, Ф. Г. Басс, Радиотехника и электроника, 3, 577 (1958).
7. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, изд. АН СССР, М., 1948, стр. 246.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
11 июня 1962 г

ON THE FREQUENCY SPECTRUM OF ELECTROMAGNETIC WAVES SCATTERED BY A STATISTICALLY ROUGH SURFACE

F. G. Bass, I. L. Verbitskii

The expressions are given for varians tensors of the electromagnetic field scattered by a statistically rough surface taking into account curvature and finite conductivity of the average surface. The effect of dissipative processes upon the spectral line width of the scattered field is considered and the corrections to the spectral density of the field are obtained in the second approximation of the theory of perturbations.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛЮКТУАЦИОННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПЛАЗМЕ. I

В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов

Найдены корреляционные функции для фурье-компонент (по времени) флюктуационных электрического и магнитного полей в магнитоактивной плазме. Показано, что в области прозрачности, когда затухание мало, корреляционные функции убывают на больших расстояниях r , как $r^{-1} \exp(-\alpha r)$, где α — коэффициент затухания потока энергии плоских волн, групповая скорость которых параллельна r .

Корреляционные функции для флюктуационных электрического и магнитного полей используются для исследования различных физических явлений (тепловое излучение в плазме, прохождение заряженной частицы через плазму, рассеяние электромагнитных волн на флюктуациях и др.). В настоящей работе находятся пространственные корреляционные функции для электромагнитных полей в анизотропной гиротропной среде (магнитоактивной плазме) в случаях, когда эффекты, обусловленные пространственной дисперсией среды, малы. (Для изотропных сред этот вопрос исследован Рытовым [1].) Показано, что в области прозрачности, когда затухание мало, радиус корреляции совпадает с длиной затухания электромагнитной волны.

1. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Фурье-компоненты

$$f(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int f(r, t) e^{-ikr+i\omega t} dr dt$$

напряженности флюктуационных электрического и магнитного полей определяются из уравнений

$$T_{ik}E_k = -\frac{4\pi i}{\omega} j_i^{\text{ст}}, \quad H_i = n [\mathbf{x}E]_i, \quad (1)$$

где $n = kc/\omega$, $\mathbf{x} = \mathbf{k}/k$,

$$T_{ik} = n^2 (\mathbf{x}_i \mathbf{x}_k - \delta_{ik}) + \varepsilon_{ik}, \quad (2)$$

$j^{\text{ст}}(\mathbf{k}, \omega)$ — фурье-компоненты плотности „сторонних“ токов, вызывающих флюктуации, $\varepsilon_{ik}(\mathbf{k}, \omega)$ — комплексный тензор диэлектрической проницаемости. В магнитоактивной плазме тензор ε_{ik} может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} = & a\delta_{ik} + b\mathbf{x}_i \mathbf{x}_k + ch_i h_k + d\varepsilon_{ikl} h_l + \\ & + e(\mathbf{x}_i [\mathbf{x}h]_k - \mathbf{x}_k [\mathbf{x}h]_i) + f[\mathbf{x}h]_i [\mathbf{x}h]_k, \end{aligned} \quad (3)$$

где \mathbf{h} — единичный вектор в направлении внешнего магнитного поля H_0 . В одноосном гиротропном кристалле с выделенным направлением \mathbf{h} тензор ε_{ik} также может быть представлен в виде (3).

Корреляционные функции для фурье-компонент плотности „сторонних“ токов имеют вид (см. [3] и цитированную там литературу)

$$\overline{j_i^{\text{ct}}(\mathbf{k}, \omega) j_k^{\text{ct}}(\mathbf{k}', \omega')} = \frac{T \varepsilon''_{ik} \omega}{(2\pi)^5} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (4)$$

где T — температура среды, ε''_{ik} — антиэрмитова часть тензора ε_{ik} . Из уравнения (1) находим, что

$$E_k = -T_{kl}^{-1} \frac{4\pi i}{\omega} j_l^{\text{ct}}, \quad (5)$$

где T^{-1} — тензор, обратный T :

$$T_{lk}^{-1} = \frac{1}{D} \left\{ T_{lk} \text{Sp } T - T_{ll} T_{kk} - \frac{1}{2} \delta_{lk} [(\text{Sp } T)^2 - \text{Sp } T^2] \right\}, \quad D = \det T. \quad (6)$$

Используя (3), находим, что $T_{lk}^{-1} = u_{lk}/D$, где

$$\begin{aligned} u_{lk} &= u_1 \delta_{lk} + u_2 z_l z_k + u_3 h_l h_k + u_4 \varepsilon_{ikl} h_l + u_5 (z_i [\mathbf{z} \cdot \mathbf{h}]_k - z_k [\mathbf{z} \cdot \mathbf{h}]_i) + \\ &\quad + u_6 [\mathbf{z} \cdot \mathbf{h}]_i [\mathbf{z} \cdot \mathbf{h}]_k + u_7 (z_i h_k + z_k h_i) + u_8 (h_i [\mathbf{z} \cdot \mathbf{h}]_k - h_k [\mathbf{z} \cdot \mathbf{h}]_i); \\ u_1 &= (a - n^2)(a + b + c) + z_\perp^2 [f(a + b + c) + (b + n^2)c - 2de + e^2]; \\ u_2 &= (n^2 - a - c)(b + n^2) + 2de - z_\perp^2 [e^2 + (b + n^2)f]; \\ u_3 &= d^2 - (a + b)c - z_\perp^2 cf; \\ u_4 &= -d(a + b + c + z_\perp^2 f); \\ u_5 &= -d(n^2 + b + f) - e(a + c - n^2); \\ u_6 &= e(2d - e) - f(a + b + c); \\ u_7 &= z_\parallel [(b + n^2)c - de]; \\ u_8 &= z_\parallel (ec + df); \\ z_\parallel &= (\mathbf{z} \cdot \mathbf{h}), \quad z_\perp = \sqrt{1 - z_\parallel^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (4) и (5) получаем:

$$\overline{E_l(\mathbf{k}, \omega) E_k(\mathbf{k}', \omega')} = \frac{T}{2\pi^3 \omega |D|^2} u_{il} \varepsilon''_{lq} u_{kq}^* \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (8)$$

Подставляя сюда вместо ε''_{lq} выражение $\frac{1}{2i} (T_{lq} - T_{ql}^*)$ (* обозначает комплексное сопряжение), находим:

$$\overline{E_l(\mathbf{k}, \omega) E_k(\mathbf{k}', \omega')} = \frac{T}{4\pi^3 \omega i |D|^2} (u_{kl}^* D - D^* u_{lk}) \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'); \quad (9)$$

$$\overline{H_i(\mathbf{k}, \omega) H_k(\mathbf{k}', \omega')} = \frac{T n^2 z_l z_m}{4\pi^3 \omega i |D|^2} \varepsilon_{llq} \varepsilon_{kmp} (u_{qp}^* D - D^* u_{pq}) \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k'}). \quad (10)$$

Производя обратное преобразование Фурье по пространственным переменным, получаем пространственные корреляционные функции для электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} \overline{E_i(\mathbf{r}_1, \omega) E_k(\mathbf{r}_2, \omega')} = & \frac{T}{2\pi^2 \omega} \delta(\omega + \omega') \left\{ C_1 \delta_{ik} + C_2 \frac{x_i x_k}{r_\perp^2} + C_3 h_i h_k - \right. \\ & - C_4 \varepsilon_{ikl} h_l + C_5 \frac{[\mathbf{r} \mathbf{h}]_i [\mathbf{r} \mathbf{h}]_k}{r_\perp^2} - C_6 \frac{x_i h_k + x_k h_i}{r_\perp} - \\ & \left. - C_7 \frac{h_i [\mathbf{r} \mathbf{h}]_k - h_k [\mathbf{r} \mathbf{h}]_i}{r_\perp} - C_8 \frac{x_i [\mathbf{r} \mathbf{h}]_k - x_k [\mathbf{r} \mathbf{h}]_i}{r_\perp^2} \right\}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \overline{H_i(\mathbf{r}_1, \omega) H_k(\mathbf{r}_2, \omega')} = & \frac{T}{2\pi^2 \omega} \delta(\omega + \omega') \left\{ D_1 \delta_{ik} + D_2 \frac{x_i x_k}{r_\perp^2} + D_3 h_i h_k - \right. \\ & - D_4 \varepsilon_{ikl} h_l + D_5 \frac{[\mathbf{r} \mathbf{h}]_i [\mathbf{r} \mathbf{h}]_k}{r_\perp^2} + D_6 \frac{x_i h_k + x_k h_i}{r_\perp} - \\ & \left. - D_7 \frac{h_i [\mathbf{r} \mathbf{h}]_k - h_k [\mathbf{r} \mathbf{h}]_i}{r_\perp} - D_8 \frac{x_i [\mathbf{r} \mathbf{h}]_k - x_k [\mathbf{r} \mathbf{h}]_i}{r_\perp^2} - D_9 \varepsilon_{ikl} \frac{x_l}{r_\perp} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $r_\perp = r \sin \chi$ — составляющая вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, перпендикулярная \mathbf{H}_0 , χ — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{H}_0 . Величины C_q и D_q имеют вид:

$$\begin{aligned} C_q = & \frac{1}{i} \int \int \frac{\tilde{c}_q D \mp D^* c_q}{|D|^2} e^{ik_\parallel r_\parallel} k_\perp dk_\perp dk_\parallel; \\ D_q = & \frac{1}{i} \int \int \frac{\tilde{d}_q D \mp D^* d_q}{|D|^2} e^{ik_\parallel r_\parallel} k_\perp dk_\perp dk_\parallel, \end{aligned} \quad (13)$$

где верхний знак берется для $q = 1, 2, 3, 5, 6$, нижний — для $q = 4, 7, 8, 9$. Величины c_q и d_q соответственно равны

$$\begin{aligned} c_1 &= u_1 J_0; \\ c_2 &= \frac{1}{2} z_\perp^2 [u_2 (J_0 - J_2) + u_6 (J_0 + J_2)]; \\ c_3 &= (u_3 + u_2 z_\perp^2 + 2u_7 z_\parallel) J_0 + 2i \operatorname{ctg} \chi z_\perp (u_2 z_\parallel + u_7) J_1 + \\ &+ \frac{1}{2} z_\perp^2 \operatorname{ctg}^2 \chi [u_2 (J_0 - J_2) + u_6 (J_0 + J_2)]; \\ c_4 &= u_4 J_0; \\ c_5 &= \frac{1}{2} z_\perp^2 [u_2 (J_0 + J_2) + u_6 (J_0 - J_2)]; \\ c_6 &= -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \chi z_\perp^2 [u_2 (J_0 - J_2) + u_6 (J_0 + J_2)] - iz_\perp (u_2 z_\parallel + u_7) J_1; \\ c_7 &= -\operatorname{ctg} \chi z_\perp^2 u_5 J_0 - iz_\perp (u_5 z_\parallel + u_8) J_1; \\ c_8 &= u_5 z_\perp^2 J_0; \\ d_1 &= u_1 J_0; \\ d_2 &= \frac{1}{2} z_\perp^2 [(u_6 z_\parallel^2 - u_1) (J_0 - J_2) + u_3 (J_0 + J_2)]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$d_3 = (u_6 \chi_{\perp}^4 - u_1 \chi_{\parallel}^2) J_0 - 2i \operatorname{ctg} \chi_{\parallel} \chi_{\perp} (u_1 + u_6 \chi_{\perp}^2) J_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 \chi_{\perp}^2 [(u_6 \chi_{\parallel}^2 - u_1) (J_0 - J_2) + u_3 (J_0 + J_2);$$

$$d_4 = -u_4 \chi_{\parallel}^2 J_0 - i u_4 \operatorname{ctg} \chi_{\parallel} \chi_{\perp} J_1;$$

$$d_5 = \frac{1}{2} \chi_{\perp}^2 [(u_6 \chi_{\parallel}^2 - u_1) (J_0 + J_2) + u_3 (J_0 - J_2)];$$

$$d_6 = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \chi_{\parallel} \chi_{\perp}^2 [(u_6 \chi_{\parallel}^2 - u_1) (J_0 - J_2) + u_3 (J_0 + J_2)] + i \chi_{\parallel} \chi_{\perp} (u_1 + u_6 \chi_{\perp}^2) J_1;$$

$$d_7 = -\operatorname{ctg} \chi_{\parallel} \chi_{\perp}^2 u_8 J_0 + i \chi_{\perp}^3 u_8 J_1;$$

$$d_8 = \chi_{\parallel} \chi_{\perp}^2 u_8 J_0;$$

$$d_9 = i \chi_{\parallel} \chi_{\perp} u_4 J_1,$$

где $J_n = J_n(k_{\perp} r_{\perp})$ — функции Бесселя. Величины \tilde{c}_q и \tilde{d}_q определяются формулами (14), в которых необходимо произвести замену $u_i \rightarrow u_i^*$.

Формулы (11) и (12) определяют пространственные корреляционные функции электромагнитных полей в одноосной гиротропной среде для произвольных расстояний r . Далее мы рассмотрим поведение корреляционных функций при $r \rightarrow \infty$ (в волновой зоне) в случае слабо затухающих электромагнитных волн.

2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЙ

Если учитывать пространственную дисперсию плазмы, то величины a, b, c, \dots , входящие в тензор ε_{ik} , и, следовательно, подынтегральное выражение в (13) являются аналитическими функциями k_{\parallel} при $-\pi/4 < \arg k_{\parallel} < \pi/4$ и $3\pi/4 < \arg k_{\parallel} < 5\pi/4$. Поэтому при $r_{\parallel} > 0$ ($0 < \chi < \pi/2$) интеграл по k_{\parallel} в (13) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_{\parallel} r_{\parallel}} \frac{F(k_{\parallel})}{|D|^2} dk_{\parallel} = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res} \frac{F(k_{\parallel j})}{|D|^2} e^{ik_{\parallel} r_{\parallel}} + \int_{\Gamma} e^{ik_{\parallel} r_{\parallel}} \frac{F(k_{\parallel})}{|D|^2} dk_{\parallel}, \quad (15)$$

где $k_{\parallel j}$ — нули функции $D(k_{\parallel})$, лежащие в области аналитичности функции $F|D|^{-2}$ в верхней полуплоскости. Контур интегрирования Γ идет по лучу $\arg k_{\parallel} = 3\pi/4$ из бесконечности к нулю и по лучу $\arg k_{\parallel} = \pi/4$ от нуля до бесконечности.

Покажем, что в случае слабо затухающих волн ($\operatorname{Im} k_{\parallel j}$ мала) на больших расстояниях (в волновой зоне, где $k_{\parallel j} r_{\parallel} \gg 1$) интегралом по контуру Γ в (15) можно пренебречь.

Функция $F(k_{\parallel})$ представляется в виде рядов, содержащих слагаемые вида $\exp \left[-\left(\frac{\omega - s\omega_H}{\sqrt{2} k_{\parallel} V_T} \right)^2 \right]$, где $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ω_H — гирочастота частиц плазмы, $V_T = \sqrt{T/m}$ — их средняя тепловая скорость. Интеграл по контуру Γ нетрудно вычислить при $\tau = r(\omega - s\omega_H)/V_T \gg 1$ методом перевала, если ω не близка к $s\omega_H$. Этот интеграл оказывается пропорциональным $\exp(-4\tau^{3/2}/3)$ (см. [4]), т. е. экспоненциально мал. Если же $\omega = s\omega_H$, то при $r_{\parallel} \rightarrow \infty$ вклад в интеграл по контуру Γ дают

малые $k_{\parallel} \sim 1/r_{\parallel}$. Поэтому величина интеграла вдоль Γ будет порядка $1/k_{\parallel j} r_{\parallel}$ по сравнению с первым слагаемым в (15). При учете только столкновений F и D являются аналитическими функциями на всей плоскости k_{\parallel} , и в (15) интеграл вдоль контура Γ будет отсутствовать, если учесть вычеты на всей верхней полуплоскости.

При $r_{\parallel} < 0$ ($\pi/2 < \chi < \pi$) в (15) необходимо учесть вычеты, лежащие в нижней полуплоскости k_{\parallel} вблизи вещественной оси.

Исследуем случай слабо затухающих волн. Пренебрегая интегралом по контуру Γ и заменяя функции Бесселя $J_n(k_{\perp} r_{\perp})$ их асимптотическими выражениями при $k_{\perp} r_{\perp} \rightarrow \infty$, выполним остающееся интегрирование по k_{\perp} с помощью метода стационарной фазы.

В случае, когда пространственная дисперсия плазмы мала, тензор ε_{lk} имеет вид:

$$\varepsilon_{lk} = \varepsilon_1 \delta_{lk} + i \varepsilon_2 \varepsilon_{lkl} h_l + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) h_l h_k, \quad (16)$$

где в отсутствие затухания

$$\varepsilon_1 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2}, \quad \varepsilon_2 = - \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2 \omega_{H\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{H\alpha}^2)}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\Omega_{\alpha}^2}{\omega^2}. \quad (17)$$

Здесь $\Omega_{\alpha} = \sqrt{4\pi e_{\alpha}^2 n_{0\alpha} / m_{\alpha}}$ — ленгмюровская частота частиц сорта α , $\omega_{H\alpha} = e_{\alpha} H_0 / m_{\alpha}$ — их гирочастота. Определитель D имеет вид $D = D' + iD''$, где реальная часть

$$D' = \varepsilon_3 n_{\parallel}^4 + n_{\parallel}^2 [n_{\perp}^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_3] + \varepsilon_1 n_{\perp}^4 - n_{\perp}^2 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3) + \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) = 0. \quad (18)$$

Мнимая часть D'' , которая предполагается малой, обусловлена различными процессами затухания электромагнитных волн: „ближними“ столкновениями, черенковским и магнитотормозным поглощением волн электронами и ионами плазмы.

Величины u_1, u_2, \dots , определяемые формулами (7) в случае гидродинамического приближения (16), в отсутствие диссипации имеют вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= \varepsilon_1 (\varepsilon_3 - n_{\perp}^2) - \varepsilon_3 n_{\parallel}^2; & u_2 &= n^2 (n^2 - \varepsilon_3); \\ u_3 &= \varepsilon_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2; & u_4 &= -i \varepsilon_2 \varepsilon_3; \\ u_5 &= -i \varepsilon_2 n^2; & u_7 &= n_{\parallel} n (\varepsilon_3 - \varepsilon_1); & u_6 &= u_8 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где $n_{\parallel} = n x_{\parallel}$, $n_{\perp} = n x_{\perp}$.

Вычисление интегралов (13) с учетом (19) дает:

$$\begin{aligned} \overline{E_i(r_1, \omega) E_k(r_2, \omega')} &= \frac{T \omega \delta(\omega + \omega')}{2\pi c^2 r} \sum \sqrt{\frac{n_{\perp}}{\sin \gamma |\cos \chi \frac{d^2 n_{\parallel}}{dn_{\perp}^2}|}} \times \\ &\times \frac{\xi \cos \psi a_{lk}}{n_{\parallel} \varepsilon_3 (n_{\parallel 1}^2 - n_{\parallel 2}^2)} e^{-\gamma r}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \overline{H_i(r_1, \omega) H_k(r_2, \omega')} &= \frac{T \omega \delta(\omega + \omega')}{2\pi c^2 r} \sum \sqrt{\frac{n_{\perp}}{\sin \gamma |\cos \chi \frac{d^2 n_{\parallel}}{dn_{\perp}^2}|}} \times \\ &\times \frac{\xi \cos \psi b_{lk}}{n_{\parallel} \varepsilon_3 (n_{\parallel 1}^2 - n_{\parallel 2}^2)} e^{-\gamma r}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\xi = \operatorname{sgn} D''$,

$$\begin{aligned}
 a_{ik} = & a_1 \delta_{ik} + a_2 \frac{x_i x_k}{r_\perp^2} + a_3 h_i h_k - i a_4 \varepsilon_{ikl} h_l + a_5 \frac{[rh]_i [rh]_k}{r_\perp^2} + \\
 & + a_6 \frac{x_i h_k + x_k h_i}{r_\perp} - i a_7 \frac{h_i [rh]_k - h_k [rh]_i}{r_\perp} - i a_8 \frac{x_i [rh]_k - x_k [rh]_i}{r_\perp^2}, \\
 b_{ik} = & b_1 \delta_{ik} + b_2 \frac{x_i x_k}{r_\perp^2} + b_3 h_i h_k - i b_4 \varepsilon_{ikl} h_l + b_5 \frac{[rh]_i [rh]_k}{r_\perp^2} + \\
 & + b_6 \frac{x_i h_k + x_k h_i}{r_\perp} - i b_7 \frac{h_i [rh]_k - h_k [rh]_i}{r_\perp} - i b_8 \frac{x_i [rh]_k - x_k [rh]_i}{r_\perp^2} - \\
 & - i b_9 \varepsilon_{ikl} \frac{x_l}{r_\perp}.
 \end{aligned} \quad (22)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 a_1 = & \varepsilon_1 (\varepsilon_3 - n_\perp^2) - \varepsilon_3 n_\parallel^2; \quad a_2 = n_\perp^2 (n^2 - \varepsilon_3); \\
 a_3 = & \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 + n_\parallel^2 (n^2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_1) + \operatorname{ctg}^2 \gamma n_\perp^2 (n^2 - \varepsilon_3) + \\
 & + 2\alpha \operatorname{ctg} \gamma n_\parallel n_\perp (n^2 - \varepsilon_1);
 \end{aligned}$$

$$a_4 = -\varepsilon_2 \varepsilon_3; \quad a_5 = 0;$$

$$a_6 = -\operatorname{ctg} \gamma n_\perp^2 (n^2 - \varepsilon_3) - \alpha n_\parallel n_\perp (n^2 - \varepsilon_1);$$

$$a_7 = \operatorname{ctg} \gamma \varepsilon_2 n_\perp^2 + \alpha n_\parallel n_\perp \varepsilon_2;$$

$$a_8 = -n_\perp^2 \varepsilon_2;$$

$$b_1 = n^2 [\varepsilon_1 (\varepsilon_3 - n_\perp^2) - \varepsilon_3 n_\parallel^2]; \quad b_2 = n_\perp^2 [\varepsilon_1 (n_\perp^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3 n_\parallel^2];$$

$$b_3 = [\varepsilon_1 (n_\perp^2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_3 n_\parallel^2] [n_\parallel^2 + \operatorname{ctg}^2 \gamma n_\perp^2 + 2\alpha \operatorname{ctg} \gamma n_\parallel n_\perp];$$

$$b_4 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 (n_\parallel^2 + \alpha \operatorname{ctg} \gamma n_\parallel n_\perp); \quad b_5 = -n_\perp^2 (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1^2);$$

$$b_6 = [\varepsilon_1 (\varepsilon_3 - n_\perp^2) - \varepsilon_3 n_\parallel^2] (\operatorname{ctg} \gamma n_\perp^2 + \alpha n_\parallel n_\perp);$$

$$b_7 = b_8 = 0; \quad b_9 = -\alpha \varepsilon_2 \varepsilon_3 n_\parallel n_\perp;$$

$$\alpha = -\operatorname{sgn} \frac{dn_\parallel}{dn_\perp}.$$

Фаза ψ и коэффициент затухания χ определяются формулами

$$\psi = (n_\parallel \cos \chi + \alpha n_\perp \sin \chi) \frac{\omega r}{c} - \frac{\pi \alpha}{4} - \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \left(\cos \chi \frac{d^2 n_\parallel}{dn_\perp^2} \right); \quad (23)$$

$$\chi = \left| \frac{\omega D'' \cos \chi}{2c \varepsilon_3 n_\parallel (n_{\parallel 1}^2 - n_{\parallel 2}^2)} \right|. \quad (24)$$

Здесь и ниже $n_{\parallel 1}^2$ и $n_{\parallel 2}^2$ — решения дисперсионного уравнения $D' = 0$:

$$n_{\parallel j}^2 = \frac{1}{2\varepsilon_3} \left[2\varepsilon_1\varepsilon_3 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) n_{\perp}^2 \pm \sqrt{n_{\perp}^4 (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + 4\varepsilon_3\varepsilon_2^2 (\varepsilon_3 - n_{\perp}^2)} \right]. \quad (25)$$

Связь между n_{\perp} и углом χ определяется уравнением для стационарной точки

$$\frac{dn_{\parallel}}{dn_{\perp}} = \mp \operatorname{tg} \chi. \quad (26)$$

Суммирование в (20) и (21) проводится по всем вещественным решениям (25) дисперсионного уравнения ($n_{\parallel}^2 > 0$) и всем положительным решениям ($n_{\perp} > 0$) уравнений (26) для стационарной точки. Анализ этих решений будет проведен ниже (см. разделы 3 и 4).

Формулы (20) и (21) определяют поведение корреляционной функции для электрического и магнитного полей на больших расстояниях (в волновой зоне) при $k_{\parallel} r \cos \chi \gg 1$ и $k_{\perp} r \sin \chi \gg 1$. Как следует из полученных выражений для корреляционной функции, корреляция в области прозрачности ($n_{\parallel}^2 > 0$) имеет место на расстоянии $r \lesssim 1/\chi$, где 2χ — коэффициент затухания потока энергии плоских волн, групповая скорость которых параллельна направлению r .

В частном случае изотропной среды $\varepsilon_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}$ формулы (20) и (21) переходят в известные выражения, полученные Рытовым (см., например, [5], §§ 90, 91)..

3. ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ (ЭЛЕКТРОННЫХ) КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим корреляционные функции для случая высоких частот, когда влиянием движения ионов на распространение электромагнитных волн можно пренебречь. Для этого необходимо выполнение неравенств $\omega \gg \omega_{Hi}$ при $x_{\parallel}^2 \gg m/M$ и $\omega^2 \gg \omega_{Hi}\omega_{He}$ при $x_{\parallel}^2 \ll m/M$, где m и M — масса электрона и иона.

При учете „близких“ столкновений величины ε_1 , ε_2 и ε_3 имеют вид (индекс e в этом разделе опустим):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1 - \frac{\Omega^2(\omega + iv)}{\omega [(\omega + iv)^2 - \omega_H^2]} ; \quad \omega_H = \frac{eH_0}{mc} > 0; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\Omega^2 \omega_H}{\omega [(\omega + iv)^2 - \omega_H^2]} ; \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega (\omega + iv)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где v — частота столкновений. Если $v \ll \omega$ и $vv \ll |\omega^2 - \omega_H^2|$, то коэффициент затухания x будет иметь вид (24), где

$$\begin{aligned} D'' &= \frac{v\Omega^2}{\omega^3} D_1 + \frac{2v\Omega^2 \omega \omega_H}{(\omega^2 - \omega_H^2)^2} D_2 + \frac{v\Omega^2}{\omega(\omega + \omega_H)^2} D_3; \\ D_1 &= n_{\parallel}^4 + n_{\parallel}^2 (n_{\perp}^2 - 2\varepsilon_1) - n_{\perp}^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2; \\ D_2 &= n_{\parallel}^2 (n_{\perp}^2 - 2\varepsilon_3) + n_{\perp}^4 - n_{\perp}^2 (6\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\varepsilon_3 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2); \\ D_3 &= n_{\parallel}^2 (n_{\perp}^2 - 2\varepsilon_3) + n_{\perp}^4 - n_{\perp}^2 (6\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь ε_1 , ε_2 и ε_3 определяются формулами (27) при $v = 0$.

Циклотронное затухание оказывается существенным при $\omega \approx s\omega_H$ ($s = 1, 2, 3, \dots$). В этом случае к D'' надо добавить слагаемое

$$D'_s = \frac{\sqrt{\pi} s^{2s-2} n_{\perp}^{2s-2} \beta^{2s-3} \Omega^2}{2^{s+1/2} s! |n_{\perp}| \omega_H^2} D_2 e^{-z_s^2} \quad (s = 2, 3, \dots), \quad (29)$$

где $z_s = (\omega - s\omega_H)/\sqrt{2} k_{\parallel} V_T$, $\beta = V_T/c = \sqrt{T/mc^2}$. Здесь $z_1 \gg 1$; если $z_1 \ll 1$, то необходимо более детальное рассмотрение в связи с тем, что вследствие сильного циклотронного затухания мнимые части ϵ_1 и ϵ_2 велики. В областях частот, где $\omega/k_{\parallel} \ll c$ („медленные“ волны), может оказаться существенным черенковское поглощение. В этом случае к D'' добавляется член

$$D'_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2 \beta^3 |n_{\perp}|^3} D_1 e^{-z_0^2} \quad (z_0^2 \gg 1). \quad (30)$$

Исследуем теперь выражение (25) для $n_{\parallel 1}^2$ и уравнение (26), определяющее n_{\perp} для различных значений ω , Ω и ω_H . Для этого удобно ввести параметры $v = (\Omega/\omega)^2$ и $u = (\omega_H/\omega)^2$.

1. Рассмотрим область частот $\omega > \sqrt{\Omega^2 + \omega_H^2}$ (области I и II на рис. 1). При изменении угла χ от нуля до $\pi/2$ * n_{\perp} изменяется от 0 до $\sqrt{\epsilon_3}$. При этом для первой волны $\xi = -1$, $\alpha = 1$; $n_{\parallel 1}$ падает от $\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2}$ до нуля (см. рис. 2). Распространение второй волны при $\omega < \omega_1 = \omega_H/2 + \sqrt{\omega_H^2/4 + \Omega^2}$ (область II на рис. 1) невозможно ($n_{\parallel 2}^2 < 0$).

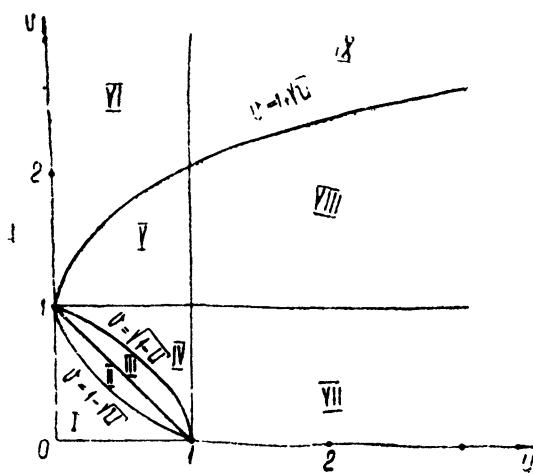


Рис. 1.

Если же $\omega > \omega_1$ (область I на рис. 1), то при изменении χ от нуля до $\pi/2$ n_{\perp} изменяется от нуля до $\sqrt{(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)/\epsilon_1}$, а $n_{\parallel 2}$ падает от $\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}$ до нуля ($\alpha = 1$); при этом $\xi = 1$. Таким образом, при $\omega > \omega_1$ имеется две волны, а при $\sqrt{\Omega^2 + \omega_H^2} < \omega < \omega_1$ — одна волна.

* В области углов $\pi/2 < \chi < \pi$ необходимо просто заменить n_{\parallel} на $-n_{\parallel}$. Поэтому мы ниже рассматриваем только случай $\chi < \pi/2$.

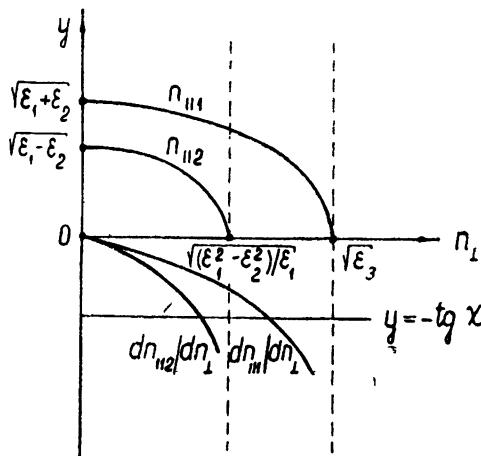


Рис. 2.

2. Пусть $\max(\Omega, \omega_H) < \omega < \sqrt{\Omega^2 + \omega_H^2}$. В этом случае поведение величин $n_{\parallel 1}$ и $n_{\parallel 2}$ и их производных схематически показано на рис. 3 при $\omega^2 > \omega_H^2/2 + \sqrt{\omega_H^4/4 + \Omega^4}$ (область III на рис. 1) и на рис. 4 при

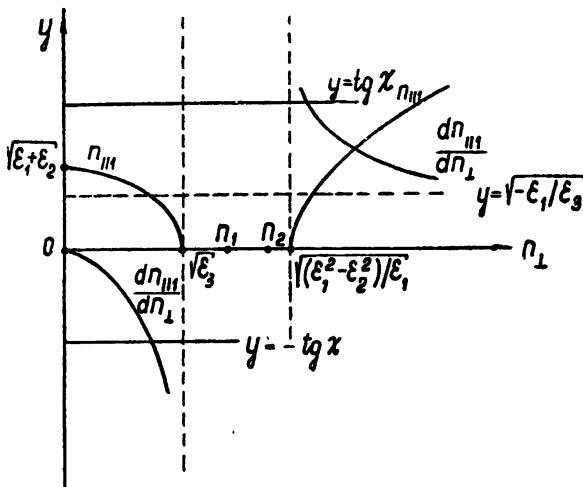


Рис. 3.

$\omega^2 < \omega_H^2/2 + \sqrt{\omega_H^4/4 + \Omega^4}$ (область IV на рис. 1). При $n_1 < n_{\perp} < n_2$, где $n_{1,2}^2 = 2(1-v)(1 \mp \sqrt{1-u}) u^{-1}$, $n_{\parallel 1,2}^2$ — комплексные величины. Как видно из рис. 3, распространение второй волны запрещено при $\omega^2 > \omega_H^2/2 + \sqrt{\omega_H^4/4 + \Omega^4}$. Если $\chi < \chi_0 = \operatorname{arctg} \sqrt{-\epsilon_1/\epsilon_3}$, то распространяется только одна волна ($\xi = 1, \alpha = 1$). Если же $\chi > \chi_0$, то имеется еще вторая распространяющаяся волна, для которой $n_{\perp} > \sqrt{(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)/\epsilon_1}$, $\xi = 1, \alpha = -1$.

При $\omega^2 < \omega_H^2/2 + \sqrt{\omega_H^4/4 + \Omega^4}$ для первой волны $\xi = 1, \alpha = 1$ в интервале $0 < n_{\perp} < \sqrt{\epsilon_3}$ и $\xi = 1, \alpha = -1$ в области $n_{\perp} > n_2$; для второй волны $\xi = -1, \alpha = 1$. Как видно из рис. 4, для $n_{\parallel} = n_{\parallel 1}$ существует либо одна, либо две стационарные точки; для $n_{\parallel} = n_{\parallel 2}$ существует либо

две, либо ни одной стационарной точки в зависимости от величины угла χ .

3. Если $\omega_H < \omega < \Omega$ (области V и VI на рис. 1), то $n_{\perp 1}^2 < 0$ для любых χ . Распространение второй волны возможно только для частот $\omega > \sqrt{\omega_H^2/4 + \Omega^2 - \omega_H/2}$ (область V на рис. 1), при этом $\xi = 1$, $\alpha = -1$.

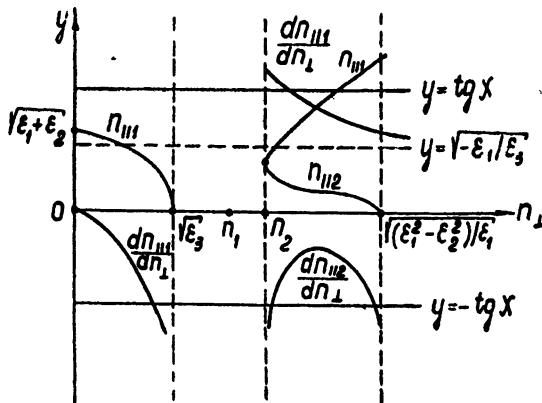


Рис. 4.

Поведение $n_{\perp 2}$ и $dn_{\perp 2}/dn_{\perp}$ аналогично поведению $n_{\perp 2}$ и $dn_{\perp 2}/dn_{\perp}$, показанному на рис. 2 (необходимо только учесть, что при $n_{\perp} = 0$ в рассматриваемом случае $n_{\perp 2} = \sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2}$).

4. При $\Omega < \omega < \omega_H$ (область VII на рис. 1) поведение $n_{\perp 1,2}$ показано на рис. 2, на котором необходимо поменять местами точки $n_{\perp} = \sqrt{\epsilon_3}$ и $n_{\perp} = \sqrt{(\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2)/\epsilon_1}$ и заменить ϵ_2 на $-\epsilon_2$. Для первой волны $\xi = -1$, $\alpha = 1$, для второй $\xi = 1$, $\alpha = 1$.

5. Пусть теперь $\omega < \min(\omega_H, \Omega)$ (области VIII и IX на рис. 1). Распространение первой волны возможно только при $\omega > \sqrt{\omega_H^2/4 + \Omega^2} - \omega_H/2$ (область VIII на рис. 1), при этом $\xi = -1$. Если $v < 2(\sqrt{\omega} - 1)(\sqrt{\omega} - 2)^{-1}$, то $n_{\perp 1}$ убывает с ростом n_{\perp} ($\alpha = 1$) (см. кривую I на рис. 5). Когда $v > 2(\sqrt{\omega} - 1)(\sqrt{\omega} - 2)^{-1}$, $n_{\perp 1}$ имеет максимум (см. кривую II на рис. 5).

Поведение $n_{\perp 2}$ показано на рис. 6 для двух возможных случаев: $v > 2(1 + \sqrt{\omega})(2 + \sqrt{\omega})^{-1}$ (кривая I) и $v < 2(1 + \sqrt{\omega})(2 + \sqrt{\omega})^{-1}$ (кривая II). При этом в обоих случаях $\xi = 1$. В первом случае при $\chi < \chi_0$ распространяется одна волна, во втором случае при достаточно малых χ возможно распространение трех волн. Для больших χ распространение невозможно в обоих случаях.

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В НИЗКОЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим теперь корреляционные функции в области низких частот ($\omega \ll \omega_H$), когда необходимо учитывать движение ионов. Электромагнитные волны с частотами $\omega \ll \omega_H$ слабо поглощаются в плазме, если газокинетическое давление частиц плазмы мало по сравнению с магнитным давлением $H_0^2/8\pi$. При выполнении этого условия тензор ϵ_{ik} можно представить в виде (16), где

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 1 - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \omega_{Hi}^2}; \quad \varepsilon_2 = - \frac{\Omega_i^2 \omega}{\omega_{Hi}(\omega^2 - \omega_{Hi}^2)}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{2\Omega_e^2}{\omega^2} z_e^2 q(z_e); \quad q(z) = 1 + i \sqrt{\pi} z w(z);\end{aligned}\quad (31)$$

$$w(z) = e^{-z^2} \left(\operatorname{sgn} k_{\parallel} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^t dt \right); \quad z_e = \frac{\omega}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{Te}}.$$

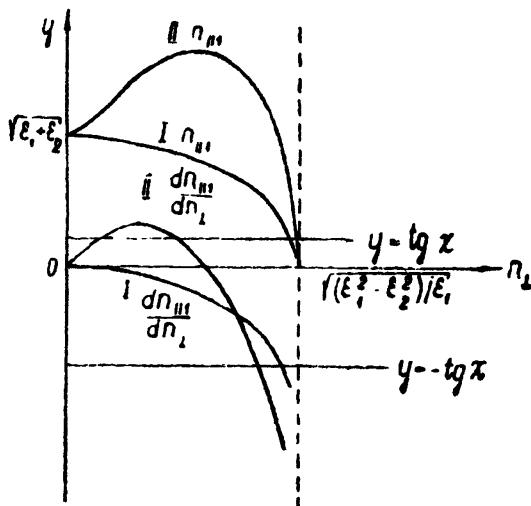


Рис. 5.

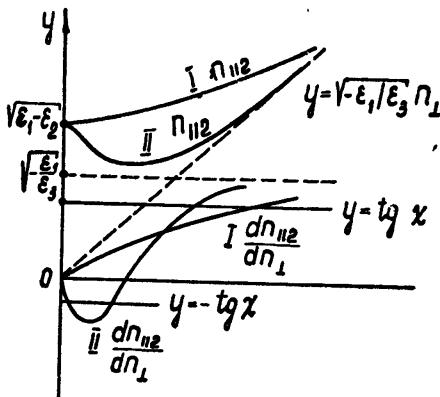


Рис. 6.

Выражения (31) применимы, если частота ω не очень близка к ионной циклотронной частоте ω_{Hi} при выполнении неравенства $|\omega - \omega_{Hi}| \gg k_{\parallel} \sqrt{T/M}$.

Учитывая, что при $\omega_{\parallel}^2 \gg m/M$ величина $|\varepsilon_3| \omega_{\parallel}^2$ значительно больше $\varepsilon_1, \varepsilon_2, n_{\parallel}^2$ и n_{\perp}^2 , найдем, что

$$n_{\parallel i}^2 = \frac{1}{2} (2\varepsilon_1 - n_{\perp}^2 \pm \sqrt{n_{\perp}^4 + 4\varepsilon_2^2}). \quad (32)$$

Используя (32), найдем, что корреляционные функции в рассматриваемом случае будут иметь вид (20), (21), где

$$\begin{aligned} a_1 &= \varepsilon_1 - n_{\parallel}^2; \quad a_2 = -n_{\perp}^2; \quad a_3 = n_{\parallel}^2 - \varepsilon_1 - \operatorname{ctg}^2 \chi n_{\perp}^2; \\ a_4 &= -\varepsilon_2; \quad a_6 = \operatorname{ctg} \chi n_{\perp}^2; \quad a_5 = a_7 = a_8 = 0; \\ b_1 &= (\varepsilon_1 - n_{\parallel}^2)n^2; \quad b_2 = n_{\perp}^2(n_{\parallel}^2 - \varepsilon_1); \\ b_3 &= (n_{\parallel}^2 - \varepsilon_1)(n_{\parallel}^2 + \operatorname{ctg}^2 \chi n_{\perp}^2 + 2\alpha \operatorname{ctg} \chi n_{\parallel} n_{\perp}); \\ b_4 &= \varepsilon_2(n_{\parallel}^2 + \operatorname{ctg} \chi \alpha n_{\parallel} n_{\perp}); \quad b_5 = -\varepsilon_1 n_{\perp}^2; \\ b_6 &= (\varepsilon_1 - n_{\parallel}^2)(\operatorname{ctg} \chi n_{\perp}^2 + \alpha n_{\parallel} n_{\perp}); \quad b_7 = b_8 = 0; \\ b_9 &= -\varepsilon_2 n_{\parallel} n_{\perp}. \end{aligned}$$

Кроме того, в знаменателе в выражениях (20) и (21) нужно ε_3 заменить единицей.

Коэффициент затухания [6,7]

$$\kappa = \kappa_e + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \kappa_s, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_e &= \frac{\sqrt{\pi} m n_{\perp}^2 \cos \chi \Omega_i^2 Q}{4 M \omega c n_{\parallel}^3 z_e (2n_{\parallel}^2 + n_{\perp}^2 - 2\varepsilon_1)} e^{-z_e^2}; \\ Q &= (n_{\parallel}^2 - \varepsilon_1) \frac{\omega^2}{\omega_{Hi}^2} + \frac{\omega^4 n_{\parallel}^2 (\varepsilon_1 n^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}{\Omega_i^4 |q(z_e)|^2}; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \frac{\sigma_s \omega \cos \chi}{c} \frac{2n_{\parallel}^2 + n_{\perp}^2 + 2\varepsilon_1 + 2 \frac{s}{|s|} \varepsilon_2}{n_{\parallel} (2n_{\parallel}^2 + n_{\perp}^2 - 2\varepsilon_1)}; \\ \sigma_s &= \frac{\sqrt{\pi} \Omega_i^2 |s|^2 (s \beta_i n_{\perp})^{2|s|-2}}{\sqrt{8} \omega^2 \beta_i |n_{\parallel}| 2^{|s|} |s|!} e^{-z_s^2}; \end{aligned} \quad (35)$$

$$z_s = \frac{\omega - s \omega_{Hi}}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{Ti}}; \quad \beta_i = \frac{v_{Ti}}{c} = \sqrt{\frac{T}{Mc^2}}.$$

Здесь κ_e — коэффициент затухания, обусловленного черенковским поглощением волн в электронном газе, κ_s — коэффициент циклотронного затухания волн в ионном газе на s -й гармонике в условиях нормального допплер-эффекта ($s > 0$) и аномального допплер-эффекта ($s < 0$); κ_0 — экспоненциально малый коэффициент черенковского затухания волн в ионном газе. Отдельные слагаемые (35), вообще говоря, различны по порядку величины; поэтому в сумме (33) нужно учитывать слагаемые с наименьшими z_s .

Затухание (33) оказывается заметным только для „медленных“ волн, когда $n_{\parallel} \gg 1$. Это имеет место при $n_A = \Omega_i / \omega_{Hi} \gg 1$. Этим условием мы и ограничимся.

Уравнение для седловидной точки имеет вид:

$$\frac{dn_{\parallel}}{dn_{\perp}} = - \frac{n_{\perp} (\sqrt{n_{\perp}^4 + 4\varepsilon_2^2} \mp n_{\perp}^2)}{2n_{\parallel} \sqrt{n_{\perp}^4 + 4\varepsilon_2^2}} = - \operatorname{tg} \chi. \quad (36)$$

Ход величин $n_{\parallel 1}^2$ и $n_{\parallel 2}^2$, определяемых формулой (32), схематически показан на рис. 7 при $\omega > \omega_{Hi}$ и на рис. 8 при $\omega < \omega_{Hi}$. Во втором случае существует только первая волна, для которой $\xi = -1$. При $\omega < \omega_{Hi}$ для первой волны $\xi = -1$, для второй $\xi = 1$.

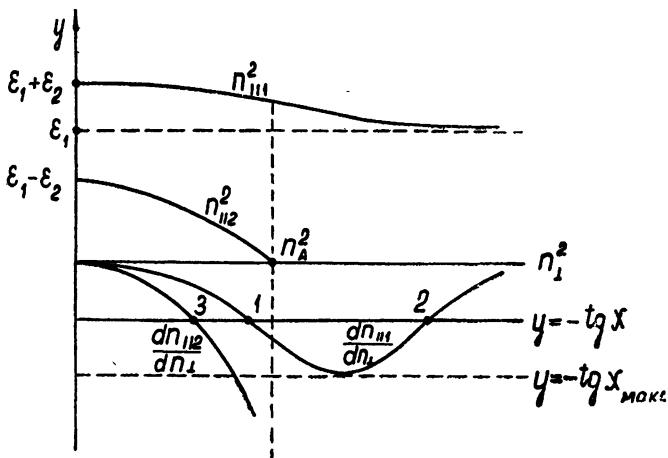


Рис. 7.

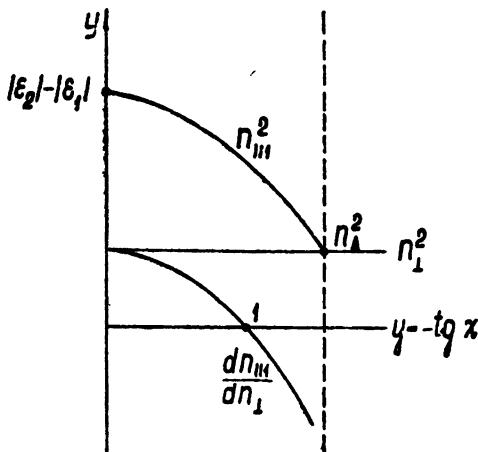


Рис. 8.

Поведение корреляционной функции для резонансного случая $\omega \approx \omega_{Hi}$, когда возникает сильное циклотронное затухание, требует специального исследования.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. И. Ахиезеру и В. И. Пахомову за полезное обсуждение и помошь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

- С. М. Рытов, Теория электрических флюктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.
- В. И. Пахомов, В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, ЖТФ, 31, 1170 (1961).
- В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961.

4. В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 61 (1962).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
6. В. И. Пахомов, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 43, 2153 (1962).
7. К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 38, 265 (1960).

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
19 июня 1962 г.

SPACE CORRELATION OF FLUCTUATIONAL ELECTROMAGNETIC FIELDS
IN PLASMA. I

V. F. Aleksin, K. N. Stepanov

The correlation functions of frequency components of fluctuational electric and magnetic fields in magnetoactive plasma are obtained. It is shown that in the transparency band, when the damping is sufficiently small, the correlation functions are equal to $r^{-1} \exp(-\gamma r)$ (2γ is the damping factor of plane waves which group velocity is parallel to r —the distance).

К ВОПРОСУ О КРЫЛЬЯХ СПЕКТРА КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Ю. Э. Аптэк, А. М. Гершт

Изучаются крылья спектра квазигармонического сигнала, модулированного по амплитуде и частоте (фазе) взаимнокоррелированными флюктуациями, при широких предположениях относительно их закона распределения. В результате получены асимптотические формулы для спектра сигнала. Указана область, в которой пригодны эти выражения.

1. СПЕКТР СИГНАЛА НА ДОСТАТОЧНО ВЫСОКИХ ЧАСТОТАХ

Представим квазигармоническое колебание, амплитуда и частота которого флюктуируют, в виде:

$$U(t) = A_0[1 + \alpha(t)]\cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (1)$$

где

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t v(x)dx, \quad (1a)$$

A_0 — амплитуда, ω_0 — центральная частота, $\alpha(t)$ и $v(t)$ — флюктуации амплитуды и частоты с равными нулю средними значениями ($\bar{\alpha^2} \ll 1$), $\bar{v^2} \ll \omega_0^{2*}$, t_0 — начало отсчета времени. Предположим, что процессы $\alpha(t)$ и $v(t)$ стационарные и стационарно связанные. Опуская элементарные преобразования (см., например, [6]), получим для спектра сигнала процесса (1) следующее выражение**:

$$S_u(\delta) = S_{uv}(\delta) + S_{vv}(\delta), \quad (2)$$

где***

$$S_{uv}(\delta) = \frac{A_0^2}{2\pi} \int_0^\infty [\overline{\cos(\Delta\varphi)}\cos(\delta\tau) - \overline{\sin(\Delta\varphi)}\sin(\delta\tau)]d\tau; \quad (3)$$

$$S_{vv}(\delta) = \frac{A_0}{2\pi} \int_0^\infty [\alpha + \alpha_\tau + \alpha\alpha_\tau][\cos(\Delta\varphi)\cos(\delta\tau) - \sin(\Delta\varphi)\sin(\delta\tau)]d\tau; \quad (3a)$$

$$\Delta\varphi = \int_{t_0}^{t+\tau} v(x)dx; \quad \overline{\Delta\varphi} = 0; \quad \delta = \omega_0 - \omega. \quad (4)$$

* Здесь и далее черта сверху означает усреднение по ансамблю.

** $S_{uv}(\omega_0 + \omega)$ и $S_{vv}(\omega_0 + \omega)$ здесь и далее, как обычно, отбрасываются ввиду их малости; нас будут интересовать δ , много меньшие ω_0 .

*** При выводе (2) — (3а) в функции корреляции процесса (1) появляются нестационарные члены, пропорциональные $\cos 2[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi(t+\tau)]$, $\sin 2[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi(t+\tau)]$. Их формально можно устраниТЬ введением случайной начальной фазы, равномерно распределенной в промежутке $[-\pi, \pi]$, и последующим усреднением по ней (при условии, что процессы $\varphi(t)$, $a(t)$ с этой начальной фазой статистически независимы), т. е. будем считать процесс $U(t)$ установившимся.

Здесь $S_{uv}(\delta)$ представляет спектр сигнала, модулированного частотами, а $S_{uva}(\delta)$ — частотно-амплитудными, в общем случае взаимнокоррелированными, флюктуациями. Спектр сигнала $S_u(\delta)$, согласно (2)–(4), можно представить в виде

$$S_u(\delta) = \frac{A_0^2}{2\pi} \left[\int_0^\infty F_c(\tau) \cos(\delta\tau) d\tau - \int_0^\infty F_s(\tau) \sin(\delta\tau) d\tau \right], \quad (5)$$

где

$$F_c(\tau) = \overline{[1 + \alpha + \alpha_\tau + \alpha\alpha_\tau] \cos(\Delta\varphi)}, \quad (6)$$

$$F_s(\tau) = \overline{[1 + \alpha + \alpha_\tau + \alpha\alpha_\tau] \sin(\Delta\varphi)}. \quad (6a)$$

В дальнейшем нас будут интересовать крылья спектра (2), т. е. значения $S_u(\delta)$ для частот $|\delta|$ порядка $\delta \approx 10\Delta\omega$ и выше, где $\Delta\omega$ — ширина спектра $S_u(\delta)$. Исследуем сначала асимптотическое поведение выражений (3), (3a) (когда $|\delta| \rightarrow \infty$) при достаточно общих предположениях относительно закона распределения флюктуаций. Для этого мы воспользуемся асимптотическим разложением [7] косинус- и синус-трансформаций Фурье, которое для функций (6) запишется так:

$$\varphi_c(\delta) = \int_0^\infty F_c(\tau) \cos(\delta\tau) d\tau = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n F_c^{(2n-1)}(+0)}{\delta^{2n}} + \Theta_{2N}; \quad (7)$$

$$\varphi_s(\delta) = \int_0^\infty F_s(\tau) \sin(\delta\tau) d\tau = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n F_s^{(2n)}(+0)}{\delta^{2n+1}} + \Theta_{2N+1}, \quad (8)$$

где остаточный член легко получить интегрированием (5) по частям:

$$\Theta_{2N} = \frac{(-1)^N}{\delta^{2N}} \int_0^\infty F_c^{(2N)}(\tau) \cos(\delta\tau) d\tau; \quad (9)$$

$$\Theta_{2N+1} = \frac{(-1)^N}{\delta^{2N+1}} \int_0^\infty F_s^{(2N+1)}(\tau) \cos(\delta\tau) d\tau. \quad (10)$$

Для сходимости (в смысле Пуанкаре) разложений (7), (8) достаточно, например, чтобы $F_c(\tau)$ и $F_s(\tau)$ имели соответственно $2N$ и $2N+1$ производных справа при выполнении условий

$$F_c^{(m)}(+\infty) = 0 \quad (1 \leq m \leq 2N); \quad (11)$$

$$F_s^{(m)}(+\infty) = 0 \quad (1 \leq m \leq 2N+1),$$

причем $F_c^{(2N)}(\tau)$ и $F_s^{(2N+1)}(\tau)$ должны быть непрерывными справа, а также абсолютно интегрируемыми на отрезке $[+0, +\infty]$ *.

Разложение по обратным степеням δ , по-видимому, должно быть достаточно общим. Действительно, как известно [6], для непрерывного спектра $S(\delta)$ средней мощности случайного стационарного процесса при $|\delta| \rightarrow \infty$

$$\frac{\alpha_1}{\delta^{k+1}} \leq S(\delta) \leq \frac{\alpha_2}{\delta^k},$$

где α_1 и α_2 — некоторые константы, а k — некоторое целое число.

* Вместо абсолютной интегрируемости $F_c^{(2N)}(\tau)$ и $F_s^{(2N+1)}(\tau)$ достаточно потребовать, например, монотонности убывания этих производных хотя бы для достаточно больших $|\tau|$.

Разлагая (6) в ряд по моментам, получим:

$$F_c(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} m_{u,2k}(\tau), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} m_{u,2k}(\tau) &= \int \int \dots \int_t^{t+\tau} [m_{v,2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) + \\ &+ m_{\alpha,2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) + m_{\alpha_v,2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) + \\ &+ m_{\alpha_{\alpha_v},2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k})] dx_1 dx_2 \dots dx_{2k}. \end{aligned} \quad (13)$$

В (13)

$$m_{v,2k} = \overline{v(x_1)v(x_2) \dots v(x_{2k})} \quad (13a)$$

— $2k$ -мерная корреляционная функция флюктуаций частоты $v(t)$, а

$$m_{\alpha,2k} = \overline{\alpha v(x_1)v(x_2) \dots v(x_{2k})}; \quad (13b)$$

$$m_{\alpha_v,2k} = \overline{\alpha \alpha_v v(x_1)v(x_2) \dots v(x_{2k})}; \quad (13c)$$

$$m_{\alpha_{\alpha_v},2k} = \overline{\alpha \alpha_{\alpha_v} v(x_1)v(x_2) \dots v(x_{2k})} \quad (13d)$$

— смешанные моменты флюктуаций амплитуды $\sigma(t)$ и частоты $v(t)$.

Из (12) следует, что $(2n-1)$ -ая производная при $\tau = +0$

$$F_c^{(2n-1)}(+0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} m_{u,2k}^{(2n-1)}(+0). \quad (14)$$

Легко показать, что для $m_{u,2k}(\tau)$ первой производной, отличной от нуля при $\tau = +0$, будет производная порядка $2k$, если $m_{v,2k}$, $m_{\alpha,2k}$, $m_{\alpha_v,2k}$, $m_{\alpha_{\alpha_v},2k}$ не содержат $\delta(\tau)$ -функций Дирака. Учитывая это, получим:

$$F_c^{(2n-1)}(+0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} m_{u,2k}^{(2n-1)}(+0). \quad (15)$$

Из (15) и (13)—(13d) последовательно имеем:

$$F_c'(+0) = \Phi_u'(+0);$$

$$\begin{aligned} F_c''(+0) &= -\Phi_u'(+0) + \Phi_{\alpha}'(+0) - [\overline{\alpha v_{\tau}^2}]'_{\tau=0} - \\ &- [\overline{(\alpha v_{x_1} v_{\tau})}]'_{x_1=\tau=0} - [\overline{\alpha \alpha_v v_{\tau}^2}]'_{\tau=+0} - [\overline{\alpha v_{x_1} v_{x_2}}]'_{x_1=x_2=\tau=+0} - \\ &- [\overline{\alpha v_{\tau}^2}]'_{\tau=+0} - [\overline{\alpha v_{x_1} v_{\tau}}]'_{x_1=\tau=+0} - [\overline{\alpha \alpha_v v_{x_1} v_{\tau}}]'_{x_1=\tau=+0} - [\overline{\alpha \alpha_v v_{x_1} v_{x_2}}]'_{x_1=x_2=\tau=+0}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\Phi_u(\tau) = \overline{\sigma \alpha_v}, \quad \Phi_{\alpha}(\tau) = \overline{v v_{\tau}}.$$

Совершенно аналогично для синус-трансформации

$$F_s(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} m_{u,2k+1}(\tau), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
 m_{u, 2k+1}(\tau) = & \int \int \dots \int_t^{t+\tau} [m_{v, 2k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}) + \\
 & + m_{\alpha, 2k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}) + m_{\alpha_x, 2k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}) + \\
 & + m_{\alpha_x v, 2k+1}(x_1, x_2, \dots, x_{2k+1})] dx_1 dx_2 \dots dx_{2k+1}, \tag{18}
 \end{aligned}$$

а $m_{v, 2k+1}$, $m_{\alpha, 2k+1}$ и $m_{\alpha_x v, 2k+1}$ — соответствующие моменты, определенные аналогично (13)–(13г). Отсюда

$$F_s^{(2n)}(+0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} m_{u, 2k+1}^{(2n)}(+0), \tag{19}$$

когда моменты не содержат δ -функций. Из (19) следует:

$$F_s(+0) = 0,$$

$$\delta F_s''(+0) = [\overline{\alpha \alpha_\tau v_\tau}]'_{\tau=-0} + [\overline{\alpha v_\tau}]'_{\tau=+0} + [\overline{\alpha \alpha_\tau v_x}]'_{x=\tau=+0} + [\overline{\alpha_x v}]'_{\tau=+0}. \tag{19a}$$

Подставляя последовательно (7), (8), (15) и (18) в (5), получим:

$$\begin{aligned}
 S_u(\delta) = & \frac{A_0^2}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\delta^{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[m_{u, 2k}^{(2n-1)}(+0) - \right. \\
 & \left. - \frac{m_{u, 2k+1}^{(2n)}(+0)}{\delta(2k+1)} \right] + \Theta_{2N} - \Theta_{2N+1}, \tag{20}
 \end{aligned}$$

что с учетом (16) и (19a) дает:

$$\begin{aligned}
 S_u(\delta) = & -\frac{A_0^2}{2\pi\delta^2} \left[\Phi'_a(+0) - \frac{[\overline{\alpha \alpha_\tau v_\tau}]'_{\tau=+0} + [\overline{\alpha v_\tau}]'_{\tau=+0} + [\overline{\alpha \alpha_\tau v_x}]'_{x=\tau=+0}}{\delta} + \right. \\
 & + \frac{\Phi_v'(+0) - \Phi_\alpha''(+0) + [\overline{\alpha v_\tau^2}]'_{\tau=+0} + [\overline{\alpha \alpha_\tau v_\tau^2}]'_{\tau=+0} + [\overline{\alpha_x v_\tau^2}]'_{x=\tau=+0} + [\overline{\alpha \alpha_\tau v_x v_\tau}]'_{x=\tau=+0}}{\delta^2} + \\
 & + \frac{[\overline{\alpha_\tau v_\tau^2}]'_{\tau=+0} + [\overline{\alpha_\tau v_x v_\tau}]'_{x=\tau=+0} + [\overline{\alpha \alpha_\tau v_x v_{x_2}}]_{x_1=x_2=\tau=+0} + [\overline{\alpha_\tau v_x v_{x_2}}]_{x_1=x_2=\tau=+0}}{\delta^2} + \\
 & \left. + \frac{[\overline{\alpha v_\tau}]'_{\tau=+0}}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta^{3-\epsilon}}\right) \right] \quad (\epsilon > 0). \tag{21}
 \end{aligned}$$

Таким образом, (20)–(21) позволяют выразить спектр $S_u(\delta)$ при $|\delta| \rightarrow \infty$ через производные $(r+m)$ -мерных смешанных моментов процесса $a(t)$ и $v(t)$, причем эти производные берутся в нуле справа*. Выражения (20)–(21) получены для достаточно широкого класса законов распределения**. Если $a(t)$ и $v(t)$ статистически независимы, то

* Заметим, что, как следует из (20), если все производные $m_{u, 2k}^{(2n-1)}(+0) = m_{u, 2k+1}^{(2n)}(+0) = 0$, то процесс $U(t)$ будет сингулярным (см. определение [6]).

** Можно показать, что для корректности проделанных выкладок достаточно, чтобы 1) $\frac{m_{v, 2k}}{(2k)!} < \omega_0^{2k}$, $\frac{|m_{v, 2k+1}|}{(2k+1)!} < \omega_0^{2k+1}$ и 2) $m_{u, 2k}(\tau)$, $m_{u, 2k+1}(\tau)$, $F_c(\tau)$ и $F_s(\tau)$ разлагались в ряд по степеням $|\tau|$ на отрезке $[+0, |\tau_\zeta|]$, где $|\tau_\zeta|$ — некоторое произвольное фиксированное значение $|\tau|$. Условие 1 можно значительно расширить. Сходимость указанных выше рядов можно понимать также в смысле Пуанкаре при $\tau \rightarrow +0$.

$$\begin{aligned}
S_u(\delta) = & -\frac{A_0^2}{2\pi\delta^2} \left\{ \Phi'_u(+0) + \frac{\Phi'_v(+0) - \Phi''_u(+0)}{\delta^2} + 3 \frac{\Phi'_u(+0)\Phi_v(+0)}{\delta^2} + \right. \\
& + 3 \frac{\Phi_u(+0)\Phi'_v(+0)}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^3} \left[\frac{\partial}{\partial\tau} m_{v,3}(\tau, \tau, x) \right]_{x=\tau=+0} + \\
& + \frac{1}{\delta^3} \left[\frac{\partial}{\partial\tau} m_{v,3}(\tau, x, x_2) \right]_{x_1=x_2=\tau=+0} - \frac{1}{\delta^4} \Phi_u^{(5)} - \frac{1}{\delta^4} \sum_{m=0}^3 C_5^3 \Phi_u^{(m)}(+0) \Phi_v^{(3-m)}(+0) - \\
& - \frac{1}{\delta^4} \Phi_v^{(3)}(+0) - \frac{1}{\delta^4} \frac{\partial}{\partial\tau} \left[\frac{\partial}{\partial\tau} m_{v,4}(\tau, \tau, \tau, x) \right]_{x=\tau=+0} - \quad (22) \\
& - \frac{1}{\delta^4} 2 \frac{\partial}{\partial\tau} m_{v,4}(\tau, x, x_2, x_3)_{x_1=x_2=x_3=\tau=+0} - \\
& - \frac{1}{\delta^4} \frac{\partial}{\partial\tau} m_{v,4}(\tau, \tau, x_1, x_2)_{x_1=x_2=\tau=+0} + O\left(\frac{1}{\delta^{5+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon > 0).
\end{aligned}$$

Применяя далее формулу типа (7) к спектрам самих возмущающих процессов^{*} и сопоставляя эти разложения с (22), будем иметь при $|\delta| \rightarrow \infty$ и $\Phi'_v(+0) \neq 0$, $\Phi'_u(+0) \neq 0$ или $\Phi''_u(+0) \neq 0$:

$$S_u(\delta) \simeq \frac{A_0^2}{4} [S_u(\delta) + S_\varphi(\delta)], \quad (23)$$

где $S_\varphi(\delta) = S_v(\delta)/\delta^2$ — спектр фазовых флюктуаций**.

По поводу области сходимости (в смысле Пуанкаре) полученных выражений можно провести следующие рассуждения. При больших $|\delta|$ функции $\cos(\delta\tau)$ и $\sin(\delta\tau)$ в выражении (5) начинают быстро осциллировать, причем становится существенным поведение $F_c(\tau)$ и $F_s(\tau)$ лишь при малых $|\tau|$, $|\tau| \approx |\delta|^{-1}$. Если $|\delta|$ настолько велико, что $F_c(\tau)$ и $F_s(\tau)$ при этом слабо изменяются, то асимптотический ряд (21) должен сходиться [7]. Действительно, при малых τ

$$\begin{aligned}
F_c(\tau) &= F_c(+0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_c^{(m)}(+0)\tau^m}{m!}; \\
F_s(\tau) &= F_s(-0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_s^{(m)}(+0)\tau^m}{m!},
\end{aligned} \quad (24)$$

а медленность $F_c(\tau)$ и $F_s(\tau)$ обеспечивается при

$$\begin{aligned}
|F_c^{(n)}(+0)\tau^n| &\ll 1, \\
|F_s^{(n)}(+0)\tau^n| &\ll 1
\end{aligned} \quad (25)$$

* Например, $S_v(\delta) = -\Phi'_v(+0)/\delta^2 + O(1/\delta^4)$.

** В частном случае нормального закона распределения формула (23) была получена в [2] для частотно-модулированного сигнала и в [3] для частотно-модулированного «белым» и амплитудно-модулированного «лоренцевым» шумом. Отметим, что приведенный вывод (23) справедлив только там, где $S_v(\delta) \equiv O(\delta^{-2})$; однако, как будет показано ниже, (23) будет иметь место и при более общих предположениях относительно спектра $S_v(\delta)$.

для не очень больших n , которые и существенны для асимптотического разложения. Из (25) уже следуют требуемые условия сходимости

$$\left| \frac{F_c^{(n)}(+0)}{\delta^n} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{F_s^{(n)}(+0)}{\delta^n} \right| \ll 1. \quad (25a)$$

Выясним физический смысл условий медленности (25а). Для простоты рассмотрим сигнал, модулированный только по частоте случайнym процессом с произвольным четным законом распределения. Тогда

$$F_s(\tau) = 0,$$

$$F_c(\tau) = \overline{\cos(\Delta\varphi)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\overline{\Delta\varphi^{2k}}}{(2k)!}, \quad (26)$$

где

$$\overline{\Delta\varphi^{2k}} = \int_0^\tau \dots \int m_{v, 2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k}) dx_1 dx_2 \dots dx_{2k}. \quad (26a)$$

Медленность $F_c(\tau)$ при малых τ обеспечивается медленностью $\overline{\Delta\varphi^{2k}}$, что в свою очередь выполняется при медленности, а также малости

$$m_{v, 2k}(x_1, x_2, \dots, x_{2k}).$$

Разлагая $m_{v, 2k}$ в ряд Тейлора, имеем (в символической записи):

$$m_{v, 2k} = m_{v, 2k}(0, 0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left[\sum_{l=1}^{2k} \frac{\partial}{\partial x_{l_0}} x_{l_0} \right]^j m_{v, 2k}(0, 0, \dots, 0), \quad (27)$$

где $x_{l_0} = |x_l - x_j|$; пренебрегая здесь суммой производных, получим известное квазистатическое приближение для спектра сигнала, в котором спектр повторяет функцию распределения.

Учет производных в (27) означает учет динамики процесса, которая существенна на крыльях.

Из (26), (27) и вышеуказанного следует, что медленность $F_c(\tau)$ обеспечивается при выполнении условий

$$m_{v, 2k}(0, 0, \dots, 0)\tau^{2k} \ll 1, \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tau^{j+2k}}{j!} \left| \left[\sum_{l=1}^{2k} \frac{\partial}{\partial x_{l_0}} \right]^j m_{v, 2k}(0, 0, \dots, 0) \right| \ll 1,$$

т. е. для сходимости асимптотического разложения достаточно неравенств:

$$\frac{m_{v, 2k}(0, 0, \dots, 0)}{\delta^{2k}} \ll 1, \quad (28a)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j! \delta^{j+2k}} \left| \left[\sum_{l=1}^{2k} \frac{\partial}{\partial x_{l_0}} \right]^j m_{v, 2k}(0, 0, \dots, 0) \right| \ll 1. \quad (28b)$$

Применяя асимптотические разложения к многомерным спектрам возмущающих процессов, можно заключить, что условия (28) достаточны для сходимости и этих разложений. Таким образом, чем медленнее изменяются моменты возмущающих процессов (относительно δ^{-1}), т. е.

чем быстрее затухают их спектры и чем меньше их интенсивность, тем быстрее сходится асимптотическое разложение (21) и тем быстрее затухает спектр сигнала.

Для того, чтобы указать частоту δ , начиная с которой ряд (20), (21), (22) хорошо сходится (в смысле Пуанкаре), необходимо задать соотношения между производными в нуле $(r+m)$ -мерных смешанных моментов процессов $a(t)$ и $v(t)$ (либо процессов $a(t)$ и $\Delta\varphi(t)$). Дальнейшие упрощения можно сделать, задав закон распределения.

2. СПЕКТР $S_{uv}(\delta)$ ДЛЯ ЧЕТНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $\Delta\varphi$, ЗАВИСЯЩИХ ТОЛЬКО ОТ ПАРАМЕТРОВ $\overline{\Delta\varphi^2}$

Для простоты будем рассматривать далее спектры $S_{uv}(\delta)$ и $S_{uv\alpha}(\delta)$ в отдельности. Пусть $\Delta\varphi$ распределена по четному закону $W(\overline{\Delta\varphi^2}, \Delta\varphi)$, зависящему лишь от одного параметра $\overline{\Delta\varphi^2}$, и пусть

$$\overline{\cos(\Delta\varphi)} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\Delta\varphi) W(\overline{\Delta\varphi^2}, \Delta\varphi) d\Delta\varphi \quad (29)$$

можно разложить в ряд по степеням $\overline{\Delta\varphi^2}$. Тогда легко видеть, что

$$S_{uv}(\delta) = \frac{A_0^2}{2\pi} \left\{ \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{\delta^{2n}} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 2^k \lambda_{(k)} \left[\left(\int_0^\tau (\tau - x) \Phi_v(x) dx \right)^k \right]_{\tau=+0}^{(2n-1)} + \Theta_{2N} \right\}, \quad (30)$$

где $\lambda_{(k)}$ — некоторая функция k , такая, что $2\lambda_{(k)} = 1$, и соответственно равная, например, для равномерного и гауссовского законов распределения $\Delta\varphi$

$$2^k \lambda_{(k)} = \frac{6}{(2k+1)!}, \quad 2^k \lambda_{(k)} = \frac{1}{k!}. \quad (31)$$

С помощью формулы Лейбница (30) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} S_{uv}(\delta) &= \frac{A_0^2}{2\pi} \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{\delta^{2n}} \left\{ [\Phi_v^{(2n-3)}(+0)] + \right. \\ &\quad + 2^{2\lambda(2)} \sum_{m=0}^{2n-5} C_{2n-5}^{m+2} \Phi_v^{(2n-5-m)}(+0) \Phi_v^{(m)}(+0) - \\ &\quad - 2^{3\lambda(3)} \sum_{l=0}^{2n-7} C_{2n-1}^{l+4} \sum_{m=0}^l C_{l+4}^{m+2} \Phi_v^{(l-m)}(+0) \Phi_v^{(2n-7-l)}(+0) \Phi_v^{(m)}(+0) + \\ &\quad \left. + \sum_{k=4}^{n-1} (-1)^k 2^k \lambda_{(k)} \left[\left(\int_0^\tau (\tau - x) \Phi_v(x) dx \right)^k \right]_{\tau=+0}^{(2n-1)} \right\} + \frac{A_0^2}{2\pi} \Theta_{2N}. \end{aligned} \quad (32)$$

Согласно (32), в случае, если $S_v(\omega)$ стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$ быстрее, чем любая степень $1/\omega$, то все нечетные производные $\Phi_v^{(2n-1)}(+0)$ тождественно равны нулю, и $S_{uv}(\delta)$ также стремится к нулю быстрее, чем любая степень $1/\delta$, т. е. не существует асимптотического разложения по обратным степеням δ^* .

Рассмотрим зависимость спектра $S_{uv}(\delta)$ от спектра $S_v(\delta)$ более

* Заметим, что в этом случае процессы $v(t)$ и $U(t)$ будут сингулярными.

подробно. Пусть $\nu(t)$ является суммой двух независимых случайных процессов $\nu(t) = \nu_1(t) + \nu_2(t)$, причем

$$\sigma_{\nu_1}^2 \tau_{0_1}^2 \gg 1^1, \quad (33)$$

$$\sigma_{\nu_2}^2 \tau_{0_2}^2 \ll 1, \quad (33a)$$

где σ_ν и τ_0 — соответственно дисперсия и время корреляции процесса $\nu(t)$, причем

$$\tau_0 \sim \frac{1}{\sigma_\nu^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\nu(\tau)| d\tau.$$

Тогда

$$\overline{\Delta\varphi^2} = \overline{\Delta\varphi_1^2} + \overline{\Delta\varphi_2^2}, \quad (34)$$

$$S_\nu(\omega) = S_{\nu_1}(\omega) + S_{\nu_2}(\omega) \quad (35)$$

и, как можно показать, для четных распределений процессов $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$

$$S_{\nu\nu}(\delta) = \left(\frac{A_0^2}{4} \right)^{-1} \frac{\pi}{4} \int_0^\infty S_{\nu\nu}(x) [S_{\nu\nu}(|x - \delta|) + S_{\nu\nu}(x + \delta)] dx. \quad (36)$$

Здесь через $S_{\nu\nu_1}(\delta)$ и $S_{\nu\nu_2}(\delta)$ обозначены спектры сигналов, возникающие при действии только флюктуаций $\nu_1(t)$ или $\nu_2(t)$ в отдельности.

Пусть $\nu_2(t)$ для простоты распределено нормально. Тогда, согласно [4], всюду

$$S_{\nu\nu_2}(\delta) \simeq \frac{A_0^2}{4} \frac{S_{\nu_2}(\delta)}{\left[\frac{\pi S_{\nu_2}(0)}{2} \right]^2 + \delta^2}, \quad (37)$$

в том числе и когда $S_{\nu_2}(0) = 0$, но $S_{\nu_2}(\omega)/\omega \ll 1$ [2].

Рассмотрим теперь спектр $S_{\nu\nu_1}(\delta)$. В некоторых случаях мы сможем определить область частот, где пригодны асимптотические формулы (23). С помощью (36) мы сможем вычислить спектр сигнала в области, начинающейся с гораздо более низких частот, чем те частоты, на которых было бы уже пригодно асимптотическое разложение, получающееся в результате непосредственного применения (7) к выражению (3). Для спектров $S_{\nu_1}(\omega)$, представимых в виде рациональной функции

$$S_{\nu_1}(\omega) = \frac{\sum_i^m a_{2i} \omega^{2i}}{\sum_k^q b_{2k} \omega^{2k}} \quad (q - m = s \geq 1), \quad (38)$$

нетрудно найти (вычисляя известным способом функцию корреляции $\Phi_{\nu_1}(\tau)$) соответствующие производные:

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu_1}^{(n)}(+0) &= 2i^{p+1} \sum_{n=0}^s \sum_{l=0}^{r-1} \frac{a_{nr}^{p+l+1-r}}{l!(p+l+1-r)(r-l-1)!} \times \\ &\times \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} [S_{\nu_1}(z)(z - a_{nr})]_{z=a_{nr}}^r, \end{aligned} \quad (39)$$

где a_{nr} есть n -й r -кратный полюс функции $S_{v_1}(z)$ в верхней полуплоскости. Если при $\omega \rightarrow \infty$

$$S_{v_1}(\omega) \simeq O\left(\frac{1}{\omega^s}\right), \quad \delta^2 \gg \sigma_{v_1}^2 4\lambda_{(2)}(s+2)(s+3),$$

то из (32) получим*:

$$S_{uv_1}(\delta) = \frac{A_0^2}{4} \frac{S_{v_1}(\delta)}{\delta^2} \left[1 + O\left(\frac{\sigma_{v_1}^2 4\lambda_{(2)}(s+2)(s+3)}{\delta^2}\right) \right]. \quad (40)$$

В принципе с помощью (39) спектр $S_{uv_1}(\delta)$ может быть вычислен более точно. Очевидно, когда $\delta \gg \sigma_{v_1}$, а σ_{v_1} много больше последнего полюса и нуля рациональной функции $S_{v_1}(\omega)$, имеет место формула (40), причем последнее не вытекает из условий (33а).

Интеграл свертки (36) легко вычисляется с учетом (37) и (40) при следующих условиях: 1) $\delta^2 \gg \sigma_{v_1}^2 4\lambda_{(2)}(s+2)(s+3)$, но $|\delta|$ много меньше первого полюса $S_{v_2}(\omega)$; 2) $S_{v_2}(\omega)$ слабо меняется для $\omega \ll b\sigma_{v_1} + (\pi/2)S_{v_2}(0)$, а для $\omega > b\sigma_{v_1}$, $S_{v_2}(\omega)/\omega \ll 1$, где b — такое число, большее единицы, что при $|\delta| \gg b\sigma_{v_1}$ имеет место (40). Тогда

$$S_{uv}(\delta) \simeq \frac{A_0^2}{4} \frac{S_v(\delta)}{\delta^2}. \quad (41)$$

Если $|\delta|$ много больше последнего полюса $S_{v_2}(\omega)$, то следует непосредственно применять асимптотическое разложение (30) без использования (36). Пусть, например, $v_1(t)$ распределен тоже нормально,

$$S_{uv_2}(\delta) = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_{v_2}^2 \gamma_2}{\gamma_2^2 + \omega^2},$$

а $\sigma_{v_2}^2 \ll \gamma_2^2$; тогда для $|\delta| \ll \gamma_2$ формулу (41) нельзя найти только из асимптотического выражения, полученного в [2] для спектра $S_{uv}(\delta)$. Из изложенного также следует, что условия (33а) и (33б), вообще говоря, не определяют относительное поведение спектров $S_{v_1}(\omega)$, $S_{v_2}(\omega)$ и, следовательно, $S_{uv_1}(\delta)$, $S_{uv_2}(\delta)$ на достаточно высоких частотах (как в смысле порядка убывания по степеням $1/\omega$ и $1/\delta$, так и в смысле относительного вклада на достаточно высоких частотах).

Рассмотрим теперь спектр $S_{uv\alpha}(\delta)$. В случае, если $\alpha(t)$ и $v(t)$ независимы, можно показать, применяя интеграл свертки, что при любом законе распределения $\alpha(t)$

$$S_u(\delta) \simeq \frac{A_0^2}{4} [S_\alpha(\delta) + S_\varphi(\delta)] \quad (42)$$

при $\delta^2 \gg \sigma_{v_1}^2 4\lambda_{(2)}(s+2)(s+3)$, а спектр $S_{v_1}(\omega)$ определяется выражением (38). Аналогично, при наличии корреляции между $\alpha(t)$ и $v(t)$, например, для нормально распределенных $\alpha(t)$ и $v(t)$

$$S_{uv\alpha}(\delta) = \frac{A_0^2}{2\pi} \left[-\frac{\Phi'_\alpha(+0)}{\delta^2} + \frac{\Phi'_{v\alpha}(+0)}{\delta^3} + \frac{\Phi'_{v\alpha}(\tau - x)_{x=\tau=+0}}{\delta^3} \right], \quad (43)$$

где

$$\Phi_{v\alpha}(\tau) = \overline{\alpha v_\tau} = \Phi_{v\alpha\text{ч}}(\tau) + \Phi_{v\alpha\text{н}}(\tau);$$

* Отметим, что для равномерного и нормального законов распределения коэффициент $4\lambda_{(2)}$ соответственно равен $3/10$ и $1/2$.

$$\Phi_{\nu_{\alpha q}}(-\tau) = \Phi_{\nu_{\alpha q}}(\tau); \quad \Phi_{\nu_{\alpha H}}(\tau) = -\Phi_{\nu_{\alpha H}}(-\tau);$$

$$\Phi_{\alpha v}(\tau) = \Phi_{\nu_{\alpha q}}(\tau) - \Phi_{\nu_{\alpha H}}(\tau);$$

$$S_{\nu_{\alpha q}}(\delta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Phi_{\nu_{\alpha q}}(\tau) \cos(\delta\tau) d\tau,$$

и при достаточно больших δ

$$S_u(\delta) \simeq \frac{A_0^2}{2} \left[\frac{S_\alpha(\delta) + S_\varphi(\delta)}{2} - \frac{S_{\nu_{\alpha q}}(\delta)}{\delta} \right]. \quad (44)$$

Таким образом, при сделанных выше предположениях спектр $S_u(\delta)$ в первом приближении просто выражается через спектры возмущающих функций, взятых на той же частоте, причем легко дать оценку, в какой области частот имеют место эти простые выражения.

3. СПЕКТР $S_{uv}(\delta)$ ДЛЯ БОЛЕЕ НИЗКИХ δ

В разделе 1 рассматривался случай, когда в интересующем нас диапазоне частот δ достаточно быстро убывают закон распределения (при значениях $\nu(t) = \delta$) и многомерные спектры процесса $\nu(t)$ (см. условия (28а) и (28б)). Если параметры закона распределения $\nu(t)$ сравнимы с интересующими нас частотами, т. е. если

$$\frac{m_{\nu, 2k}(0, 0, \dots, 0)}{\delta^{2k}} \simeq 1 \quad (45)$$

или

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j! \delta^{j+2k}} \left| \left[\sum_{l=1}^{2k} \frac{\partial}{\partial x_{l_0}} \right]^j m_{\nu, 2k}(0, 0, \dots, 0) \right| \simeq 1, \quad (45a)$$

то закон распределения $\Delta\varphi$ будет также содержать параметры, порядок изменения которых как функций τ сравним с $\delta\tau$. В этом случае $F_c(\tau)$ и $\cos(\delta\tau)$ изменяются с одинаковой скоростью, следовательно, асимптотические выражения могут быть пригодны лишь на более высоких частотах. Таким образом, существенная (для приложений) область крыльев спектральной линии будет сильно зависеть от задания закона распределения.

Рассмотрим пример, когда функция распределения процессов $\nu_1(t)$ и $\Delta\varphi_1$ зависит от нескольких параметров, а $\nu_2(t)$ по-прежнему распределено нормально. Для удобства вычислений вместо функции распределения зададимся характеристической функцией. Пусть характеристическая функция процесса $\Delta\varphi_1$

$$\Theta_{\Delta\varphi_1}(v) = \sum_{i=1}^3 \beta_i \exp \left[jb_i v \tau - \frac{v^2 \sigma_{\nu_1 i}^2}{2} \int_0^\tau \int R_{\nu_1 i}(|x_1 - x_2|) dx_1 dx_2 \right], \quad (46)$$

причем

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = 1; \quad |b_i| \ll \omega_0; \quad \bar{\nu}_1 = \sum_{i=1}^3 \beta_i b_i = 0; \quad (46a)$$

$$\Delta\varphi_1^2 = \sum_{i=1}^3 \beta_i \left\{ \sigma_{\nu_1 i}^2 \int_0^\tau \int [R_{\nu_1 i}(|x_1 - x_2|) - b_i^2] dx_1 dx_2 \right.$$

и функция корреляции флюктуаций частоты

$$\Phi_{\nu_1}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \beta_i [\alpha_{\nu_1 i}^2 R_{\nu_1 i}(|\tau|) - b_i^2]. \quad (46b)$$

Достаточным условием эргодичности процесса $v_1(t)$ будет равенство

$$\sigma_{v,i}^2 R_{v,i}(\infty) - b_i^2 = 0. \quad (46)$$

Тогда спектр сигнала

$$S_{uv}(\delta) = \frac{A_0^2}{2\pi} \sum_{i=1}^3 \beta_i \int_0^\infty e^{-\frac{\Delta\varphi_{1i}^2 + \Delta\varphi_2^2}{2}} \cos[(\delta + b_i)\tau] d\tau, \quad (47)$$

где

$$\Delta\varphi_{1i}^2 = \sigma_{v,i}^2 \int_t^{t+\tau} R_{v,i}(x_1 - x_2) dx_1 dx_2.$$

На этом примере в задаче о крыльях линии можно проиллюстрировать важность учета малых в среднем (но больших локальных) отклонений закона распределения на крыльях спектра сигнала. Наложим ниже на коэффициенты β_i , $\sigma_{v,i}$ и функцию $R_{v,i}(x)$ такие дополнительные условия, при которых спектр функции корреляции флюктуаций частоты (46б) совпадал бы с достаточной степенью точности со спектром функции корреляции флюктуаций частоты при нормальном законе распределения. Пусть, например,

$$b_1 = 0; \quad b_2 = -|b_2|; \quad |b_2| = |b_3|; \quad b_3 = |b_3|; \quad \beta_1 = \beta_2;$$

$$R_{v,i}(\tau) = \frac{b^2}{\sigma_{v,i}^2} + R_{v_1}(\tau).$$

При этом

$$\Phi_{v_1}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \beta_i \sigma_{v,i}^2 R_{v_1}(\tau).$$

Легко видеть, что эти локальные (малые в среднем) отклонения в законе распределения $v_1(t)$, ($\Delta\varphi_1(t)$) могут быть существенными в спектре $S_{uv}(\delta)$ (хотя $v_2(t)$ распределено нормально) в следующих случаях.

1) При $|b_2| = \delta_0$, где δ_0 — искомая частота на крыльях спектра, и $\sigma_{v,1} = \sigma_{v,2} = \sigma_{v,3} \ll \delta_0$, так как

$$S_{uv}(\delta_0) \simeq \left[\frac{A_0^2}{2\pi} \beta_1 \int_0^\infty e^{-\frac{\Delta\varphi^2}{2}} \cos(\delta_0\tau) d\tau + 2\beta_2 S_{uv}(0) \right]. \quad (48)$$

2) При $\sigma_{v,1} \ll \sigma_{v,2} = \sigma_{v,3}$; $\beta_1 \sigma_{v,1} \gg \beta_2 \sigma_{v,2}$; $|b_2| = \delta_0 \ll \sigma_{v,2}$; $\sigma_{v_1} \ll \delta_0$ и $\frac{S_v(\delta)}{\delta_0} \frac{\sigma_{v,2}}{\delta_0} \ll \beta_2 \ll 1$, так как спектр

$$S_{uv}(\delta) \simeq \frac{A_0^2}{2\pi} \left[\beta_1 \int_0^\infty e^{-\frac{\Delta\varphi_{12}^2 + \Delta\varphi_2^2}{2}} \cos(\delta\tau) d\tau + 2\beta_2 \int_0^\infty e^{-\frac{\Delta\varphi_{12}^2 + \Delta\varphi_2^2}{2}} d\tau \right], \quad (49)$$

по формуле (41) с учетом $\Delta\varphi_{12}^2 \simeq \sigma_{v,2}^2 \tau^{2*}$

$$S_{uv}(\delta) \simeq \frac{A_0^2}{2} \left[\beta_1 \frac{S_v(\delta_0)}{2\delta_0^2} + \beta_2 \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_{v,2}} \right]. \quad (50)$$

* Заметим, что здесь еще непригодны полученные выше асимптотические формулы (21), так как $|b_2| = \delta_0$.

В последнем случае отклонения от нормального закона на крыльях функции распределения более пологи, чем в случае 1.

Легко видеть, что при выводе (48) и (50) из (47) существенны лишь времена

$$1/\delta_0 \leq \tau \leq \tau_0.$$

Таким образом, отклонения в законе распределения $v_1(t)[\Delta\varphi_1]$ от нормального могут быть существенными на крыльях спектра $S_{uv}(\delta)$, даже если в спектре $S_v(\delta)$ на этих частотах преобладают нормальные флюктуации. Причем, чем „резче“ выражен относительный максимум в законе распределения $v_1(t)[\Delta\varphi_1]$ при значении мгновенной частоты $v_1(t) = \delta_0$ (случай 1), тем меньшие отклонения от нормального закона могут дать вклад в спектр сигнала $S_{uv}(\delta)$ при $\delta = \delta_0$, и наоборот, чем более „полого“ выражен относительный максимум на крыльях в законе распределения $v(t)$ (случай 2), тем большими должны быть отклонения от нормального закона распределения, чтобы они могли оказаться на крыльях спектра сигнала. Минимальные относительные отклонения в законе распределения (на его крыльях) ст гауссова, учет которых может быть решающим при вычислении крыльев спектра сигнала, по-видимому, (см. (48)) имеют порядок

$$\beta_2 \geq S_u(\delta_0)/S_u(0).$$

Отметим, наконец, последний предельный случай, когда $F_c(\tau)$ и $F_s(\tau)$ изменяются вместе с τ быстрее, чем $\cos(\delta\tau)$ и $\sin(\delta\tau)$.

Пусть

$$m_{v,2k}/\delta^{2k} \gg 1, \quad |m_{v,2k+1}/\delta^{2k+1}| \gg 1$$

и процесс $v(t)$ — медленный (спектры моментов достаточно быстро убывают). Тогда имеет место (для данных δ) квазистатика — спектр сигнала определяется одномерным законом распределения v_1 [6].

В случае быстрых флюктуаций $|\delta^2\tau_0^2| \ll 1$, когда $S_v(0) \neq 0$ и $\tau > \tau_0$, для $\Delta\varphi$ имеет место [8,9] нормальный закон распределения. В этом случае при $\delta < S_v(0)$

$$S_{uv}(\delta) \simeq \frac{A_0^2}{4} \frac{S_v(0)}{(\pi S_v(0)/2)^2 + \delta^2}.$$

Вопрос о том, насколько можно считать крылья законов распределения флюктуаций нормальными (особенно когда флюктуации удовлетворяют условию $\sigma_v^2\tau_0^2 \gg 1$), зависит от конкретной постановки задачи; в некоторых случаях* он, на наш взгляд, требует дальнейшего рассмотрения.

Резюмируя, можно сказать следующее.

а) Если на текущей частоте возмущающие процессы локально малы (по сравнению с самой текущей частотой) и, кроме того, меняются или много медленнее, или много быстрее, чем $1/\delta$, то спектр сигнала простым образом связан со спектром возмущающего процесса (разделы 1, 2).

б) Наличие в возмущающем процессе особенностей порядка δ по интенсивности или по скорости ($\sim 1/\delta$) нарушает эти простые соотношения (раздел 3).

В заключение авторы выражают благодарность С. И. Боровицкому за интерес к работе и сделанные замечания.

* Например, в задаче о крыльях спектральной линии генератора [8]

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Middleton, Phil. Mag., **41**, 689 (1951).
2. J. A. Mullen, D. Middleton, Proc. IRE, **45**, 874 (1957).
3. J. L. Stewart, Proc. IRE, **42**, 1539 (1954).
4. C. Ward, Proc. IRE, **45**, 1742 (1957).
5. W. A. Edson, Proc. IRE, **48**, 1455 (1960).
6. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков, Выделение сигналов на фоне случайных помех, изд. Сов. радио, М., 1960.
7. A. Erdelyi, J. Soc. Ind. Appl. Math., **3**, 17 (1955).
8. В. А. Волконский, Ю. А. Рязанов, Теория вероятностей и ее применение, **4**, 186 (1959).
9. В. А. Статулавичус, Теория вероятностей и ее применение, **5**, 259 (1960).

Поступила в редакцию
7 апреля 1962 г.

ON THE SPECTRUM WINGS OF QUASIHARMONIC SIGNAL

Yu. E. Aptek, A. M. Gersht

The spectrum wings of quasiharmonic signal modulated in amplitude and frequency (phase) by intercorrelated fluctuations are studied under wide assumptions concerning the law of their distribution. The asymptotic form of the signal spectrum is obtained and the region of its validity is pointed out.

ОБ УДАРНЫХ ВОЛНАХ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С ТОНКИМ СЛОЕМ ФЕРРИТА. I.

Г. И. Фрейдман

Рассматривается вопрос о возможности исследования структуры поля в стационарных ударных электромагнитных волнах, распространяющихся в двухпроводных линиях, содержащих феррит, на основе обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что это можно сделать только при достаточно малых поперечных размерах линии передачи и (в случае неквазистатического изменения намагниченности) при достаточно простой конфигурации поперечного сечения феррита. Для линий передачи с ферритовой пленкой получены обыкновенные линейные дифференциальные уравнения, которые являются следствием уравнений Максвелла и совместно с нелинейным уравнением для намагниченности приближенно определяют структуру ударной волны.

ВВЕДЕНИЕ

При достаточно медленном изменении поля процесс распространения волн в двухпроводных линиях передачи, содержащих феррит, описывается телеграфными уравнениями с нелинейной связью $\Phi = \Phi(J)$ между погонным потоком и током в линии (погонный заряд можно при этом считать пропорциональным напряжению). При распространении волн в таких линиях появляются области быстрого изменения поля [1, 2] (ударные волны), где условия применимости телеграфных уравнений и квазистатических уравнений связи $\Phi = \Phi(J)$, $Q = CU$ могут нарушиться. Электромагнитное поле в этих областях определяется, вообще говоря, лишь полной системой уравнений Максвелла с нестатическими уравнениями связи между B и H , D и E и соответствующими граничными условиями (например, $E_t = 0$) на стенах линии.

При быстрых изменениях напряженности электрического поля E процессы изменения поляризации феррита и остального диэлектрика, заполняющего линию, можно с той или иной точностью описать линейными дифференциальными уравнениями, которые при малых скоростях изменений P и E переходят в линейную алгебраическую зависимость между этими величинами. Быстрые же процессы изменения намагниченности достаточно просто и вместе с тем строго описываются только для намагниченного до насыщения феррита с малыми внутренними полями анизотропии, когда можно считать, что изменение среднего магнитного момента единицы объема определяется уравнением

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\gamma[MH] + \frac{\alpha}{M} \left[M \frac{\partial M}{\partial t} \right], \quad (1)$$

где $M = \text{const}$ — намагниченность насыщения феррита, γ — абсолютная величина гиромагнитного отношения, α — величина, определяющая релаксацию.

В общем случае, когда феррит не намагнчен до насыщения и намагниченность меняется как за счет процессов вращения магнитных моментов доменов, так и за счет движения их стенок, изменение средней намагниченности не определяется, вообще говоря, конечным числом дифференциальных уравнений. В этом случае можно дать только

некоторые упрощенные модели, в которых изменение намагниченности описывается достаточно просто. Например, при медленном изменении величины H_y —постоянного по направлению магнитного поля в ферритах с узкой петлей гистерезиса, когда намагниченность меняется в основном за счет обратимого движения стенок доменов, можно считать, что изменение компоненты намагниченности M_y , параллельной магнитному полю, определяется уравнением

$$\frac{1}{\omega_{rp}^2} \frac{\partial^2 M_y}{\partial t^2} + \frac{1}{\omega_{rp}} \frac{\partial M_y}{\partial t} + f(M_y^2) M_y = \chi_0 H_y. \quad (2)$$

Здесь $f(M_y^2)$ —функция, монотонно возрастающая от единицы при $M_y=0$ до бесконечности при $M_y^2 \rightarrow M^2$, ω_{rp} —собственная частота малых колебаний границ окрест положений равновесия [3], ω_{rp} —величина, определяющая диссипацию при движении границы, χ_0 —начальная восприимчивость феррита. При медленном изменении магнитного поля уравнение (2) переходит в квазистатическую связь $f(M_y^2) M_y = \chi_0 H_y^*$.

Если магнитное поле в феррите меняется достаточно быстро, то намагниченность меняется в основном за счет процессов некогерентного вращения [4, 5]. При этом, как показывают эксперименты по перемагничиванию в постоянном по направлению магнитном поле, для большинства ферритов процесс изменения средней компоненты намагниченности, параллельной магнитному полю, довольно хорошо описывается уравнением [4, 5]

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = \frac{\alpha \gamma}{M(1+\alpha^2)} (M^2 - M_y^2) H_y, \quad (3)$$

в то время как остальные компоненты в среднем равны нулю.

Но даже в тех случаях, когда можно считать, что изменение намагниченности определяется одним из уравнений (1)–(3), задача об исследовании волн в линиях передачи существенно облегчается только тогда, когда ее можно свести к одномерной (т. е. к исследованию зависимости амплитуды поля от продольной координаты z и времени t). При этом в области быстрого изменения поля, где волну можно считать стационарной, т. е. все величины в ней зависящими от $\xi = v_p t - z$ ($v_p = \text{const}$ —скорость ударной волны), задача сводится к решению уравнений в обыкновенных производных.

Для обычных линий передачи, поле в которых существенно зависит от поперечных координат, возможность сведения задачи к одномерной не очевидна. В настоящей работе рассматривается вопрос о возможности приведения задачи об исследовании структуры стационарных ударных волн в двухпроводных** „закрытых“ линиях передачи, т. е. линиях, поле в которых сосредоточено в ограниченной в поперечном направлении области пространства, к исследованию уравнений в обыкновенных производных. При этом предполагается, что изменение намагниченности определяется одним из уравнений (1) или (3).

В первом разделе на простейшем примере двухпроводных линий

* В общем случае, когда меняется не только величина, но и направление магнитного поля, квазистатическое уравнение связи для ферритов с узкой петлей гистерезиса можно записать в виде: $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$, где $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ направлена вдоль магнитного поля, а $|\mathbf{M}(\mathbf{H})|$ —однозначная, непрерывная и неубывающая функция абсолютной величины \mathbf{H} .

** Двухпроводными будем называть линии, в которых при сколь угодно малой частоте может распространяться с конечной фазовой скоростью только одна волна (основная).

передачи с идеально проводящими стенками (двухсвязные волноводы) показано, что изучение стационарных* ударных волн в таких системах сводится к исследованию уравнений типа телеграфных с нелинейными дифференциальными уравнениями связи конечного порядка только при достаточно малом поперечном сечении линии и квазистатической нелинейной зависимости намагниченности от напряженности магнитного поля либо (при неквазистатическом изменении намагниченности) для систем с простейшей конфигурацией поперечного сечения феррита. Для стационарных волн, поле которых зависит от $\xi = v_p t - z$, эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения в обыкновенных производных. Аналогичная ситуация имеет место и для нелинейных двухпроводных линий передачи с импедансными стенками (замедляющие системы), волны в которых не описываются обычными телеграфными уравнениями (с параметрами, не зависящими от частоты) даже в линейной идеализации. Оказывается (см. раздел второй), что и в этом случае изучение структуры стационарных ударных волн в линиях с простейшей конфигурацией поперечного сечения может быть сведено к решению уравнений в обыкновенных производных.

Для определения коэффициентов или конкретного вида нелинейных функций, входящих в дифференциальные уравнения, полученные в настоящей работе, необходимо решить ту или иную двухмерную краевую задачу, что выполнимо, естественно, только в некоторых наиболее простых случаях. Однако эти коэффициенты и функции зачастую могут быть сравнительно просто получены экспериментально. Кроме того, сведение исследования процессов в стационарной ударной волне к решению конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет судить об условиях существования стационарной ударной волны в рассматриваемом приближении и единственности структуры ее фронта (см., например, часть вторую настоящей работы). Поэтому вопрос о возможности такого сведения представляет принципиальный интерес.

1. СТАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

В случае цилиндрических линий передачи с идеально проводящими стенками при заданных функциях P и M решение уравнений Максвелла для стационарных волн сводится к решению счетного числа уравнений с обыкновенными производными. Будем искать поля E и H в виде рядов по поперечным собственным функциям пустого волновода [6]:

$$E = E^0 \nabla \varphi_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \left[E^v \frac{\nabla \varphi_v}{x_v} + E_z^v \varphi_v z_0 \right] + \sum_{\mu=1}^{\infty} E^{\mu} \frac{[\nabla \psi_{\mu} z_0]}{x_{\mu}}, \quad (1.1)$$

$$H = H^0 [\nabla \varphi_0 z_0] + \sum_{v=1}^{\infty} H^v \frac{[\nabla \varphi_v z_0]}{x_v} + H_z^0 z_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[H^{\mu} \frac{\nabla \psi_{\mu}}{x_{\mu}} + H_z^{\mu} \psi_{\mu} z_0 \right],$$

где E^0 , H^0 — амплитуды поля главной волны (для которой критическая частота равна нулю), коэффициенты E^v , H^v , E^{μ} , H^{μ} , H_z^{μ} и E_z^v — функ-

* Предположение о стационарности не является для этого необходимым. Аналогичное рассмотрение можно провести и для волн с произвольной зависимостью от z и t .

ции $\xi = v_p t - z$, а φ_v , ψ_μ зависят только от поперечных координат*, удовлетворяют двухмерным уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta_\perp \varphi_v + z_v^2 \varphi_v = 0, \quad \Delta_\perp \psi_\mu + z_\mu^2 \psi_\mu = 0, \\ \Delta_\perp \varphi_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

и граничным условиям $\varphi_0 = \text{const}$, $\varphi_v = 0$, $\partial \psi_\mu / \partial n = 0$ на стенках линии. Поперечные волновые числа, определяемые из (1.2) и граничных условий, равны по порядку величины единице, деленной на поперечный размер линии передачи, и растут с ростом номера (пропорционально v и μ).

Подставляя (1.1) в уравнения Максвелла и производя преобразования, совершенно аналогичные проведенным в [6], для коэффициентов E^v , H^v и т. д. получим счетное число уравнений в обыкновенных производных:

$$\begin{aligned} \frac{dH^v}{d\xi} = \frac{v_p}{c} \frac{d}{d\xi} (E^v + 4\pi P^v); \quad z_v E_z^v + \frac{dE^v}{d\xi} = \frac{v_p}{c} \frac{d}{d\xi} (H^v + 4\pi M^v); \\ z_v H^v = - \frac{v_p}{c} \frac{d}{d\xi} (E_z^v + 4\pi P_z^v) \\ (v = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE^\mu}{d\xi} = \frac{v_p}{c} \frac{d}{d\xi} (H^\mu + 4\pi M^\mu); \quad z_\mu H_z^\mu + \frac{dH^\mu}{d\xi} = \frac{v_p}{c} \frac{d}{d\xi} (E^\mu + 4\pi P^\mu); \\ z_\mu E^\mu = - \frac{v_p}{c} \frac{d}{d\xi} (H_z^\mu + 4\pi M_z^\mu) \\ (\mu = 1, 2, 3, \dots); \\ \frac{dH_z^0}{d\xi} = - 4\pi \frac{d}{d\xi} M_z^0. \end{aligned} \quad (1.3a)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} M^0 = \frac{1}{S_\perp} \iint M [\nabla \varphi_0 z_0] ds; \quad P^0 = \frac{1}{S_\perp} \iint P \nabla \varphi_0 ds; \quad M_z^0 = \frac{1}{S_\perp} \iint M_z ds; \\ M^v = \frac{1}{S_\perp} \iint M \frac{[\nabla \varphi_v z_0]}{z_v} ds; \quad P^v = \frac{1}{S_\perp} \iint P \frac{\nabla \varphi_v}{z_v} ds; \quad P_z^v = \frac{1}{S_\perp} \iint P_z \varphi_v ds; \\ M^\mu = \frac{1}{S_\perp} \iint M \frac{\nabla \psi_\mu}{z_\mu} ds; \quad M_z^\mu = \frac{1}{S_\perp} \iint M_z \psi_\mu ds; \quad P^\mu = \frac{1}{S_\perp} \iint P \frac{[\nabla \psi_\mu z_0]}{z_\mu} ds. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В общем случае проделанные преобразования не упрощают решение самосогласованной задачи о распространении волн в линии, так как нелинейное уравнение для вектора намагниченности и неоднород-

* Функции φ_v и ψ_μ предполагаются нормированными, так что, например, $\iint \varphi_v ds = S_\perp$, где интегрирование производится по поперечному сечению линии (S_\perp — площадь этого сечения). Исключение составляет функция φ_0 , для которой $\iint (\nabla \varphi_0)^2 ds = S_\perp$.

ность заполнения линии не позволяют провести разделение переменных. Задача несколько облегчается, если поле в области ударной волны в продольном направлении существенно меняется на расстоянии $1/\beta_{\max}$, значительно превышающем поперечные размеры линии передачи. В этом случае в уравнениях (1.3) можно отбросить члены порядка $\beta_{\max}/z_v, \mu \ll 1$ ($z_n \sim n/d$, где d —характерный поперечный размер линии)* и, интегрируя (1.3) от $-\infty$ до ξ , получить линейные алгебраические соотношения между H^v, E^v, H_z^v и E_z^v — с одной стороны и M^v, P^v, M_z^v, P_z^v —с другой**:

$$H^0 = \frac{v_p}{c} (E^0 + 4\pi P^0); \quad E^0 = \frac{v_p}{c} (H^0 + 4\pi M^0); \quad H_z^0 = H_0 + 4\pi \left[\frac{S}{S_\perp} M_0 - M_z^0 \right]; \quad (1.5)$$

$$H^v = -4\pi M^v; \quad E^v = -4\pi P^v; \quad E_z^v = H_z^v = H^v = E^v = 0, \quad (1.5a)$$

где S —площадь поперечного сечения феррита. При этом в рассматриваемом приближении, которое будем называть статическим, выражения (1.1) для полей E и H примут, очевидно, следующий вид:

$$E = E^0 \nabla \varphi_0 + E_d; \quad H = H^0 [\nabla \varphi_0 z_0] + H_z^0 z_0 + H_d, \quad (1.6)$$

где безвихревые (в данном поперечном сечении линии) поля равны

$$H_d = -4\pi \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\nabla \Phi_{\mu}}{z_{\mu}} M^{\mu}; \quad E_d = -4\pi \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\nabla \Phi_v}{z_v} P^v. \quad (1.7)$$

При заданных функциях $E^0(\xi)$, $H^0(\xi)$ и $H_z^0(\xi)$ поля E_d и H_d определяются, как это следует из уравнений Максвелла, двухмерными неоднородными уравнениями:

$$\Delta_{\perp} \varphi = \operatorname{div}_{\perp} 4\pi P; \quad E_d = -\nabla_{\perp} \varphi; \quad (1.8)$$

$$\Delta_{\perp} \psi = \operatorname{div}_{\perp} 4\pi M; \quad H_d = -\nabla_{\perp} \psi, \quad (1.8a)$$

граничными условиями $\varphi = 0$, $\partial \psi / \partial n = 4\pi M_n$ на стенах линии (M_n —нормальная к стенке составляющая намагниченности) и уравнениями связи между поляризацией, намагниченностью и напряженностями магнитного и электрического полей соответственно.

Так как дифференциальное уравнение, связывающее изменение поляризации среды с изменениями электрического поля, линейное, то для определения поля E_d при известной функции $E^0(\xi)$ можно применить преобразование Фурье. Используя это и учитывая общие теоремы электростатики, нетрудно показать, что при кусочно-однородном

* Заметим, что рассмотрение, аналогичное проведенному ниже, можно провести и для случая, когда некоторые поперечные волновые числа z_{μ} ($k > \mu > 0$, где k —некоторое целое число) порядка β_{\max} , в то время как остальные z_v, v по-прежнему порядка $n/d \gg \beta_{\max}$ (такая ситуация может иметь место для некоторых двухсвязных волноводов сложного сечения, например, П-волновода, внутри которого находится еще один цилиндрический проводник). При этом, естественно, число переменных и порядок системы уравнений, определяющих структуру ударной волны, повышается, а поле в данном сечении линии будет отличаться от статического.

** В дальнейшем будем считать, что перед ударной волной, т. е. при $\xi \rightarrow -\infty$ поперечные компоненты поля и намагниченности равны нулю, в то время как продольные составляющие напряженности магнитного поля и намагниченности постоянны и равны соответственно H_0, M_0 . Полученные соотношения легко обобщаются на случай, когда соответствующие постоянные (по ξ) величины отличны от нуля.

заполнении линии* связь между функциями $P^0(\xi)$ и $E^0(\xi)$ определяется линейным дифференциальным уравнением с обыкновенными производными, порядок которого зависит как от порядка уравнений, описывающих процессы изменения поляризации каждого диэлектрика, так и от числа отдельных областей линии, заполненных различными диэлектриками. Для определения коэффициентов этого уравнения надо решать краевую двухмерную электростатическую задачу, что при произвольной форме поперечного сечения линии практически невыполнимо. Однако эти коэффициенты довольно просто определить экспериментально, исследуя зависимость емкости отрезка данной линии от частоты, если заметить, что в статическом приближении напряжение между стенками линии и погонный заряд на них пропорциональны E^0 и $(E^0 + 4\pi P^0)$ соответственно.

Если дисперсия диэлектрической проницаемости среды, заполняющей линию, достаточно велика, то поле в области ударной волны будет меняться настолько медленно, что изменение намагниченности будет происходить квазистатически, т. е. намагниченность в любой точке линии будет направлена вдоль магнитного поля, а ее абсолютная величина является неубывающей непрерывной и однозначной функцией модуля \mathbf{H} . Тогда при заданных $H^0(\xi)$, $H_z^0(\xi)$ размагничивающее поле \mathbf{H}_d однозначно определяется двухмерным уравнением магнитостатики (1.8а)**, и M^0 , M_z^0 , входящие в (1.5), можно считать однозначными нелинейными функциями H^0 и H_z^0 :

$$\begin{aligned} M^0(H^0; H_z^0) &= \frac{1}{S_\perp} \iint M[\mathbf{H}^0 + \mathbf{H}_d(\mathbf{H}^0)] [\nabla \varphi_0 z_0] ds; \\ M_z^0(H^0; H_z^0) &= \frac{1}{S} \iint M_z[\mathbf{H}^0 + \mathbf{H}_d(\mathbf{H}^0)] ds, \end{aligned} \quad (1.9)$$

для определения конкретного вида которых надо решать нелинейную магнитостатическую задачу***. Таким образом, исследование структуры стационарной волны в этом случае сводится к исследованию решений уравнений в обыкновенных производных, т. е. линейного дифференциального уравнения, связывающего изменения функций E^0 и P^0 , совместно с линейными алгебраическими соотношениями (1.5а), где M^0 и M_z^0 —нелинейные функции H^0 и H_z^0 .

При неквазистатическом изменении намагниченности разделить задачу об исследовании структуры фронта стационарной ударной волны на решение уравнений в обыкновенных производных и решение соответствующей двухмерной магнитостатической задачи в общем случае не удается. Такое разделение возможно лишь для частного класса систем, когда уравнения (1.6)–(1.8) допускают такие решения, что

* Первое из уравнений (1.8) выродится при этом в уравнение Лапласа с неоднозначными граничными условиями на границах раздела диэлектриков.

** Это следует из соотношения, которое легко получить из (1.8а):

$$0 = \iint (\nabla \psi_1 - \nabla \psi_2) \{ [\nabla \psi_1 - 4\pi M_\perp (H_0 - \nabla \psi_1)] - [\nabla \psi_2 - 4\pi M_\perp (H^0 - \nabla \psi_2)] \} ds,$$

где $H^0 = H^0[\nabla \varphi_0 z_0] + H_z^0 z_0$, а ψ_1 и ψ_2 —различные по предположению функции, удовлетворяющие (1.8а) и граничным условиям $\partial \psi / \partial n = 4\pi M_n$ при одних и тех же функциях H^0 и H_z^0 .

*** Заметим, что зависимости $M^0(H^0; H_z^0)$ и $M_z^0(H^0; H_z^0)$ довольно легко определить экспериментально, если учесть, что H^0 и $(H^0 + 4\pi M^0)$ пропорциональны току и эзотонному потоку соответственно, а $(S_\perp H_z^0 + 4\pi M_z^0)$ —поток магнитной индукции через поперечное сечение линии.

намагниченность и напряженность магнитного поля внутри феррита можно считать независящими от поперечных координат. К таким системам относятся коаксиальная линия (если отношение диаметров ее внутреннего провода и оболочки близко к единице) и бесконечно широкий полосковый волновод, между стенками которых находится слой феррита, а также коаксиальная линия с существенно различными радиусами внутреннего провода и экрана, если толщина коаксиального слоя феррита много меньше его среднего радиуса.

При произвольной форме поперечного сечения линии намагниченность феррита и поле внутри него можно считать относительно поперечных координат однородным только в том случае, когда феррит имеет форму кругового или эллиптического цилиндра, поперечные размеры которого много меньше расстояния до ближайшей стенки линии. Во всех этих случаях размагничивающее поле H_d внутри феррита можно считать равным $-4\pi \hat{N}M_{\perp}$, где \hat{N} —двухмерный тензор размагничивания эллиптического цилиндра или ферромагнитной пленки, а интегральную связь (1.4) между M^0 , M_z^0 и компонентами намагниченности (вследствие квазиоднородности последней) заменить линейной алгебраической связью. Тогда (как следует из (1.5), (1.6)) соотношения между компонентами намагниченности и напряженности магнитного поля внутри феррита, а также между функциями P^0 , E^0 , будут, тоже линейными алгебраическими соотношениями*:

$$H_{\perp} = \frac{4\pi v_p^2 / c^2}{1 - v_p^2 / c^2} \left[\frac{1}{S_{\perp}} \left(\tilde{\nabla} \varphi_0 M_{\perp} \right) + \frac{c}{v_p} P^0 \right] \overline{\nabla \varphi_0} - 4\pi \hat{N} M_{\perp}; \quad (1.10)$$

$$H_z = H_0 + 4\pi \frac{S}{S_{\perp}} (M_0 - M_z); \quad E^0 = \frac{4\pi v_p / c}{1 - v_p^2 / c^2} \left[\frac{1}{S_{\perp}} \left(\tilde{\nabla} \varphi_0 M_{\perp} \right) + \frac{v_p}{c} P^0 \right],$$

где $\tilde{\nabla} \varphi_0 = \iint_S \nabla \varphi_0 ds$, а $\overline{\nabla \varphi_0}$ — среднее значение $\nabla \varphi_0$ внутри феррита.

Подставляя выражения (1.10) в уравнение, описывающее изменение намагниченности**, получим нелинейное векторное уравнение с обыкновенными производными, которое совместно с линейным дифференциальным уравнением, описывающим связь между изменениями функций P^0 и E^0 , а также последним соотношением (1.10) и определяет структуру ударной волны.

2. КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ЛИНИИ С ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ И ИМПЕДАНСНЫМИ СТЕНКАМИ

Общие соотношения. Электромагнитное поле в линиях с импедансными стенками (замедляющих системах) не описывается уравнениями (1.1), (1.3), рассмотренными в предыдущем разделе. Однако в силу линейности уравнений Максвелла составляющие напряженности поля всегда можно выразить в виде функционала от намагниченности и поляризации. При неквазистатическом изменении намагниченности

* Коэффициент S/S_{\perp} во втором из уравнений (1.10) можно назвать продольным размагничивающим фактором, а поле $4\pi S/S_{\perp} (M_0 - M_z)$ — продольным размагничивающим полем. Следует, однако, иметь в виду, что это поле создается поперечными токами, текущими по стенкам волновода, а не поверхностными магнитными зарядами (как поле H_d), и связано с сохранением потока магнитной индукции через поперечное сечение волновода.

** В этом уравнении (например, в уравнении (1)) надо произвести замену $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow v_p d/d\xi$.

дальнейшее упрощение этих общих соотношений возможно, как видно из полученных выше результатов, только при некоторой специальной конфигурации поперечного сечения стенок линии и феррита, в частности, для двухпроводных линий передачи, стенки которых представляют либо коаксиальные цилиндры, либо бесконечные плоскости, между которыми находится параллельная им ферромагнитная пленка. Только такие линии и будут рассматриваться в настоящем разделе. Диэлектрическую проницаемость феррита и остального заполнения линии будем считать постоянной относительно координат скалярной величиной, а ее дисперсию значительной только в области весьма высоких частот. Поэтому в отличие от предыдущего раздела учтем дисперсию диэлектрической проницаемости приближенно.

Считая заданной функцией переменной $\xi = v_p t - z$ и координаты x только намагниченность M , запишем уравнения Максвелла для спектральных компонент поля в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E(\omega, r) - i \frac{\omega}{c} H(\omega, r) &= -\frac{4\pi}{c} j_m(\omega, r); \\ \operatorname{rot} H(\omega, r) + i \frac{\omega \epsilon}{c} E(\omega, r) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$j_m = -i\beta e^{i\beta z} M(\beta, x); \quad M(\beta, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta \xi} M(\xi, x) d\xi; \quad \beta = \omega/v_p.$$

Решения уравнений (2.1) для закрытых цилиндрических линий передачи могут быть представлены в виде рядов по собственным векторным функциям линии [8]:

$$\begin{aligned} E(\omega, r) &= \sum_s E^s(\omega, r); \quad H_{\perp}(\omega, r) = \sum_s H_{\perp}^s(\omega, r); \\ H_z(\omega, r) &= \sum_s H_z^s(\omega, r) - i \frac{4\pi}{\omega} j_{mz}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$E^s(\omega, r) = C_s e_s + C_{-s} e_{-s}; \quad H^s(\omega, r) = C_s h_s + C_{-s} h_{-s}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_s(z) &= \frac{1}{N_s} \int_{-\infty}^z dz \iint j_m h_s ds; \quad C_{-s}(z) = -\frac{1}{N_s} \int_z^{\infty} dz \iint j_m h_{-s} ds; \\ N_s &= \frac{c}{4\pi} \int \int \{ [e_s h_{-s}] - [e_{-s} h_s] \} z_0 ds, \end{aligned} \quad (2.3)$$

а функции поперечной координаты x и частоты $e_{\perp s}, h_{\perp s}$ соответствуют собственным волнам в линии при $M = 0$. Эти волны определяются уравнениями*

$$\begin{aligned} e_{\perp s \perp} &= \left\{ \pm i \beta_s A_s \varphi_s' x_0 - i \frac{\omega}{c} D_s \psi_s' y_0 \right\} e^{\pm i \beta_s z}; \\ h_{\perp s \perp} &= \left\{ \pm i \beta_s D_s \psi_s' x_0 - i \frac{\omega \epsilon}{c} A_s \varphi_s' y_0 \right\} e^{\pm i \beta_s z}; \\ e_{\pm sz} &= A_s z_s^2 \varphi_s e^{\pm i \beta_s z}; \quad h_{\pm sz} = D_s z_s^2 \psi_s e^{\pm i \beta_s z}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

* В силу симметрии задачи рассматриваются только волны, поле которых не зависит от координаты y , параллельной стенкам линии.

где $\chi_s^2 = k^2 - \beta_s^2$; $k = \omega \sqrt{\varepsilon}/c$, а функции $\varphi_s(x)$ и $\psi_s(x)^*$ удовлетворяют уравнению $\Delta_\perp \varphi_s + \chi_s^2 \varphi_s = 0$. Постоянные A_s , D_s и β_s определяются из граничных условий, которые мы не будем конкретизировать, предполагая лишь, что поверхностный импеданс стенок является чисто реактивным и допускает распространение лишь одной основной волны (величины, соответствующие этой волне, обозначаются нулевым индексом)**.

Из (2.3) и (2.4) получим:

$$C_{\pm s} = \pm \frac{2\pi\beta e^{(\beta \pm \beta_s)z}}{c(\beta \pm \beta_s)N_{0s}} \left\{ \mp iD_s \frac{M_x^s}{k\chi_s} + i\sqrt{\varepsilon} A_s \frac{M_y^s}{\beta_s \chi_s} + D_s \frac{M_z^s}{k\beta_s} \right\};$$

$$N_s = \frac{ck\beta \chi_s^2}{2\pi} N_{0s}; \quad N_{0s} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\chi_s^2} \left\{ \frac{D_s^2}{\varepsilon} \iint_{S_\perp} (\psi_s')^2 ds - A_s^2 \iint_{S_\perp} (\varphi_s')^2 ds \right\},$$
(2.5)

где

$$M_x^s = \frac{1}{\chi_s} \iint_{S_\perp} M_x(\beta, x) \psi_s' ds; \quad M_y^s = \frac{1}{\chi_s} \iint_{S_\perp} M_y(\beta, x) \varphi_s' ds;$$

$$M_z^s = \iint_{S_\perp} M_z(\beta, x) \psi_s' ds.$$
(2.6)

Учитывая (2.4) и (2.5), выражения (2.2) для спектральных составляющих напряженности магнитного поля, соответствующего волне с индексом s , можно записать в виде:

$$H_x^s(\omega, r) = H_x^s e^{i\beta z} = \frac{4\pi D_s^2}{c N_{0s} \chi_s} \psi_s' \left\{ \frac{c M_x^s}{v_p \sqrt{\varepsilon}} \frac{\beta_s^2}{\beta^2 - \beta_s^2} - \frac{\sqrt{\varepsilon} A_s}{D_s} M_y^s \frac{\beta^2}{\beta^2 - \beta_s^2} + \frac{i c M_z^s}{v_p \sqrt{\varepsilon}} \frac{\beta \chi_s}{\beta^2 - \beta_s^2} \right\} e^{i\beta z};$$

$$H_y^s(\omega, r) = H_y^s e^{i\beta z} = \frac{4\pi A_s^2 \varepsilon}{c N_{0s} \chi_s} \varphi_s' \left\{ -\frac{v_p \sqrt{\varepsilon}}{c} M_y \frac{\beta^2}{\beta^2 - \beta_s^2} + \frac{D_s}{A_s \sqrt{\varepsilon}} M_x^s \frac{\beta^2}{\beta^2 - \beta_s^2} + \frac{i D_s}{A_s \sqrt{\varepsilon}} M_z^s \frac{\beta \chi_s}{\beta^2 - \beta_s^2} \right\} e^{i\beta z};$$

$$H_z^s(\omega, r) = H_z^s e^{i\beta z} = \frac{4\pi D_s^2}{c N_{0s}} \psi_s' \left\{ \frac{c M_z^s}{v_p \sqrt{\varepsilon}} \frac{\chi_s^2}{\beta^2 - \beta_s^2} - i \left(\frac{M_x^s c}{v_p \sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon} \frac{A_s}{D_s} M_y^s \right) \frac{\beta \chi_s}{\beta^2 - \beta_s^2} \right\} e^{i\beta z}.$$
(2.7)

* Функции φ_s , ψ_s в отличие от предыдущего раздела не предполагаются нормированными.

** Точнее последнее предположение означает, что граничные условия на стенках линии допускают распространение волны, для которой при $\omega \rightarrow 0$ поперечное волновое число χ_0 пропорционально частоте, в то время как остальные χ_s , хотя и зависят от частоты, но все время остаются порядка s/d , где d —расстояние между стенками линии. При этом постоянные A_0 , D_0 и функции φ_0 , ψ_0 удовлетворяют соотношениям:

$$(\beta_0 A_0 \varphi_0')_{\omega=0} \neq 0; \quad (\beta_0 D_0 \psi_0')_{\omega=0} = (\chi_0^2 A_0 \varphi_0)_{\omega=0} = 0; \quad (\chi_0^2 D_0 \psi_0)_{\omega=0} = \text{const.}$$

Подставляя (2.7) и (2.2) и производя обратное преобразование Фурье, можно получить выражения для компонент поля в виде функционала от намагниченности. Для дальнейшего эти функциональные соотношения удобнее записать в виде*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\xi} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right) H_{\perp}(\beta, x) d\beta = & -\frac{v_p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\xi} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right) H_{\perp}^0 d\beta + \\ & + \frac{v_p}{2\pi} \sum_{s>0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\xi} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right) H_{\perp}^s d\beta; \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\xi} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right) H_z(\beta, x) d\beta = & \frac{v_p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\xi} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right) H_z^0 d\beta + \\ & + \frac{v_p}{2\pi} \sum_{s>0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\xi} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right) H_z^s d\beta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\xi} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\beta^2}\right) 4\pi M_z(\beta, x) d\beta, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где H_{\perp}^s и H_z^s определяются формулами (2.7), а нулевым индексом обозначены величины, соответствующие основной волне, т. е. волне, критическая частота которой равна нулю.

Квазистатическое приближение для линий с идеально проводящими стенками. Упрощение выражений (2.8) проведем сначала на уже рассмотренном примере линий с идеально проводящими стенками, предполагая при этом, что диэлектрическая проницаемость заполнения линии не зависит от частоты. Основная волна в таких линиях является главной волной, фазовая скорость которой постоянна, вследствие чего интегралы, стоящие в (2.8) вне знака суммирования, легко берутся. Волны высших типов разделяются на ТМ-волны (будем обозначать их индексом ν) и ТЕ-волны (индекс μ). Поперечные волновые числа этих волн не зависят от частоты. Поэтому соотношения (2.7), (2.8) будут выглядеть проще. Например, выражение для компоненты магнитного поля, перпендикулярной стенкам линии, примет вид:

$$H_x = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{4\pi D_{\mu}^2}{N_{0\mu} V \zeta_{\mu}} \Psi_{\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\xi} \left\{ M_x^{\mu} \left(1 - \frac{\beta^2}{\zeta_{\mu}^2}\right) - \frac{i\beta}{\zeta_{\mu}} M_z^{\mu} - \right. \\ \left. - \frac{\beta^4 (1 - v_p^2 \epsilon / c^2)}{\zeta_{\mu}^2 (\beta^2 - \beta_{\mu}^2)} M_x^{\mu} - \frac{i\beta^3 (1 - v_p^2 \epsilon / c^2)}{\zeta_{\mu} (\beta^2 - \beta_{\mu}^2)} M_z^{\mu} \right\} d\beta. \quad (2.9)$$

Если изменение намагниченности в области ударной волны происходит на расстояниях $1/\beta_{\max} \gg d$, где d —характерный поперечный размер линии, то амплитуды M_x^{μ}, M_z^{μ} быстро убывают при $\beta > \beta_{\max}$, где $\beta_{\max} \ll \beta_{\nu\mu} \approx \zeta_{\nu\mu}$. Поэтому из (2.9) видно, что слагаемые в правой части соотношений (2.8), зависящие от скорости изменения намагниченности, будут малы, т. е., как и следовало ожидать, в нулевом приближении поле в поперечном сечении линии будет статическим. Связь между компонентами намагниченности и напряженности магнит-

* При выводе (2.8) учтено, что согласно (2.7) и (2.2) напряженность магнитного поля зависит, кроме x , только от $\xi = v_p t - z$.

ногого поля в этом приближении определяется формулами (1.10). (При этом надо иметь в виду, что в рассматриваемом случае $P^0 = (\epsilon - 1)E^0/4\pi)$

Если же толщина слоя феррита мала по сравнению с расстоянием между стенками линии, то напряженность магнитного поля, а следовательно, и намагниченность будут почти постоянны внутри слоя и при учете отличия поля от статического. За нулевое приближение можно взять поле H_0 и намагниченность M_0 , постоянные в сечении феррита. Поэтому, если пренебречь в (2.7), (2.8) слагаемыми, пропорциональными малому параметру $(\beta_{\max} d) \ll 1$ в степени выше второй, их изменение описывается следующими из (2.8) линейными уравнениями в обыкновенных производных*:

$$\begin{aligned} H_{0x} &= -4\pi M_{0x} - 4\pi \frac{d^2 M_{0x}}{d\xi^2} \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{D_{\mu}^2 \tilde{\psi}'_{\mu}}{N_{0\mu} z_{\mu}^4} \right] - \\ &\quad - 4\pi \frac{dM_{0z}}{d\xi} \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{D_{\mu}^2 \tilde{\psi}_{\mu}}{N_{0\mu} \sqrt{\epsilon} z_{\mu}^2} \right]; \\ H_{0y} &= \left[\frac{4\pi v_p^2 \epsilon / c^2}{1 - v_p^2 \epsilon / c^2} \frac{A_0^2 \sqrt{\epsilon} \tilde{\varphi}_0}{N_{00}} \right] M_{0y} + \frac{4\pi v_p^2 \epsilon}{c^2} \frac{d^2 M_{0y}}{d\xi^2} \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{A_y \sqrt{\epsilon} \tilde{\varphi}'_{\mu}}{N_{0\mu} z_{\mu}^4} \right]; \\ H_{0z} &= H_0 + 4\pi(M - M_{0z}) \frac{S}{S_{\perp}} + 4\pi \frac{d^2 M_{0z}}{d\xi^2} \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{D_{\mu}^2 \tilde{\psi}'_{\mu}}{N_{0\mu} \sqrt{\epsilon} z_{\mu}^2} \right] + \\ &\quad + 4\pi \frac{dM_{0x}}{d\xi} \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{D_{\mu}^2 \tilde{\psi}_{\mu}}{N_{0\mu} \sqrt{\epsilon} z_{\mu}^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

(здесь $\tilde{\psi} = \iint_S \psi_{\mu} ds = S \bar{\psi}_{\mu}$; $\tilde{\psi}'_{\mu} = \iint_S \psi'_{\mu} ds = S \bar{\psi}'_{\mu}$ и т. д.; S —поперечное сечение слоя феррита) и нелинейным уравнением, определяющим движение вектора намагниченности.

Уравнения (2.10) в отличие от уравнений (1.10), полученных в предыдущем разделе, учитывают, хотя и приближенно, что в области ударной волны поле в линии отличается от статического. Вследствие этого связь между компонентами напряженности магнитного поля и намагниченности, вытекающая из уравнений Максвелла, в рассматриваемом приближении, которое будем называть квазистатическим, описывается линейными дифференциальными уравнениями, а не линейными алгебраическими соотношениями, как в статическом приближении. Интересно отметить, что, как видно из (2.10)**, в области ударной волны меняется не только величина магнитного поля, но и его конфигурация.

Квазистатическое приближение для замедляющих систем. В замедляющих системах фазовая скорость и конфигурация поля основной волны зависят от частоты. Кроме того, в некоторых системах, например, коаксиальной спиральной линии, не существует чисто поперечных электрических или магнитных волн. Однако и в этом случае

* Заметим, что эти соотношения в данном случае можно получить, если при решении уравнений (1.3) учесть следующее приближение.

** В уравнениях (2.10) черта означает усреднение по сечению S слоя феррита. Поле вне слоя феррита определяется формулами (2.10), если в них опустить знак усреднения, а поперечное размагничивающее поле $-4\pi M_{0x}$ считать равным нулю.

общие интегральные соотношения (2.8) между намагнченностью и напряженностью магнитного поля внутри тонкого слоя феррита могут быть приближенно заменены линейными уравнениями в обыкновенных производных.

В самом деле, постоянная распространения основной волны в области малых частот может быть записана в виде

$$\beta_0^2 \simeq \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + 2i \frac{\omega}{\omega_r} \right), \quad (2.11)$$

где c_0 —фазовая скорость основной волны в линии без феррита при $\omega \rightarrow 0$, ω —некоторая частота, зависящая как от дисперсионных свойств диэлектрика, заполняющего линию, так и от поперечных размеров и импедансных свойств стенок линии, а ω_r —величина, характеризующая затухание основной волны из-за высокочастотных диэлектрических потерь (проводимость среды, заполняющей линию, предполагается равной нулю). Соотношение (2.11) справедливо в тем большей области частот, чем меньше поперечные размеры линии и меньше дисперсия поверхности импеданса стенок и диэлектрической проницаемости заполняющей ее среды. Если оно выполняется во всей области частот, где амплитуды спектральных составляющих компонент поля существенно отличны от нуля, то интегралы, стоящие в правой части выражения (2.8), легко берутся. Для того, чтобы вычислить левые части выражений (2.8) с той же степенью точности, нужно, очевидно, коэффициенты перед M_x^s , M_y^s и M_z^s в (2.7) разложить в ряд по степеням $\beta = \omega/v_p$ и отбросить члены, пропорциональные β в степени выше второй. Так как слой феррита предполагается настолько тонким, что внутри него намагнченность и напряженность магнитного поля в нулевом приближении постоянны, то выражения (2.8) приближенно запишутся в виде системы линейных дифференциальных уравнений. В общем виде эти уравнения получаются довольно громоздкими. Однако они могут быть значительно упрощены, если учесть, что коэффициенты при производных от компонент намагнченности, связанные с нестатическим характером поля волн высших типов, умножены на $(1 - v_p^2/c_0^2)$. При малой толщине слоя феррита эта величина мала. Тогда в правой части выражений (2.8) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными произведению малых параметров $(1 - v_p^2/c_0^2)$, S/S_\perp и $(\beta_{\max} d)$ в степени не ниже первой.

Заметим кроме того, что при сколь угодно медленном изменении намагнченности правые части выражений (2.8) определяют, за исключением первых слагаемых, поперечные и продольные размагничивающие поля. Поперечное размагничивающее поле создается поверхностью магнитными зарядами на границах слоя феррита. Поэтому оно, так же как и в линиях с идеально проводящими стенками, перпендикулярно поверхности ферритовой пленки и равно $-4\pi M_{0x}$. Продольное же размагничивающее поле связано с сохранением потока магнитной индукции через некоторую поверхность, перпендикулярную оси линии, причем площадь этой поверхности $S_{\text{эфф}}$ может быть больше площади поперечного сечения линии, ограниченного импедансными стенками (например, когда одна из этих стенок имеет вид гофрированной поверхности, ребра которой параллельны оси линии). Поэтому в общем случае продольное размагничивающее поле будет равно $4\pi(S/S_{\text{эфф}}) \times (M_0 - M_{0z})$.

Учитывая все это, нетрудно показать, что при статической аппроксимации поля волн высших типов соотношения (2.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} PH_{0v} &= -P 4\pi M_{0v} + P_1 H_x^0; \\ PH_{0y} &= P_1 H_y^0; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$PH_{0z} = P \left[H_0 + 4\pi(M - M_{0z}) \frac{S}{S_{\text{эфф}}} \right] + P_1 H_z^0.$$

Здесь компоненты поля основной волны в линии без феррита

$$\begin{aligned} H_x^0 &= \frac{4\pi v_p^2 \varepsilon}{c^2(1-v_p^2/c_0^2)} \left(a_{xx} M_{0v} - \frac{c}{v_p V \varepsilon} a_{yy} M_{0y} + \frac{c}{v_p V \varepsilon} a_{zz} M_{0z} \right); \\ H_y^0 &= \frac{4\pi v_p^2 \varepsilon}{c^2(1-v_p^2/c_0^2)} \left(\frac{c}{v_p V \varepsilon} a_{xy} M_{0v} + a_{yy} M_{0y} + a_{zy} M_{0z} \right); \\ H_z^0 &= \frac{4\pi v_p^2 \varepsilon}{c^2(1-v_p^2/c_0^2)} \left(-\frac{c}{v_p V \varepsilon} a_{xz} M_{0v} + a_{yz} M_{0y} + a_{zz} M_{0z} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Коэффициенты a_{xx} , a_{yy} и т. д. являются компонентами симметричного внутри феррита тензора

$$\begin{aligned} \frac{D_0^2 \beta_0^2 \tilde{\psi}'_0}{N_{00} V \varepsilon k^2 z_0^2} \tilde{\psi}'_0; & \quad \frac{A_0 D_0 \tilde{\varphi}'_0}{N_{00} z_0^2} \tilde{\psi}'_0; & \quad \frac{i D_0^2 \tilde{\psi}'_0}{N_{00} V \varepsilon k} \tilde{\psi}'_0; \\ \frac{A_0 D_0 \tilde{\psi}'_0}{N_{00} z_0^2} \tilde{\varphi}'_0; & \quad -\frac{A_0^2 V \varepsilon \tilde{\varphi}'_0}{N_{00} z_0^2} \tilde{\varphi}'_0; & \quad \frac{i A_0 D_0 \tilde{\psi}}{N_{00} k} \tilde{\varphi}'_0; \\ \frac{i D_0^2 \tilde{\psi}'_0}{N_{00} V \varepsilon k} \tilde{\psi}_0; & \quad \frac{i A_0 D_0 \tilde{\varphi}'_0}{N_{00} k} \tilde{\psi}_0; & \quad \frac{D_0^2 z_0^2 \tilde{\psi}_0}{N_{00} V \varepsilon k^2} \tilde{\psi}_0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

коэффициенты которого зависят от частоты*, а вне ферритовой пленки и от координаты x ; P и P_1 —дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} P &= \left[\left(1 - \frac{v_p^2}{c_0^2} \right) + \frac{1}{\bar{\beta}^2} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\beta_r} \frac{d}{d\xi} \right] \quad \left(\bar{\beta} = \frac{\omega}{v_p}; \quad \beta_r = \frac{\omega_r}{v_p} \right); \\ P_1 &= \left(1 - \frac{v_p^2}{c_0^2} \right) \left[1 - v_p^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \frac{d^2}{d\omega^2} + i v_p \frac{d}{d\xi} \frac{d}{d\omega} \right]_{\omega=0}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Следует отметить, что в случае линейного уравнения для вектора намагниченности, когда стационарная волна может быть гармонической (скорость $v_p = \omega/\beta$ будет в этом случае, вообще говоря, комплексной величиной), изложенный выше метод (т. е. уравнения (2.12)–(2.15)) эквивалентен в некотором смысле методу возмущений при статической аппроксимации поля внутри феррита**.

Таким образом, как в линиях, где при $M=0$ основная волна является главной и не обладает дисперсией, так и в замедляющих системах связь между напряженностью магнитного поля внутри тонкого

* Из свойств величин A_0 , D_0 , z_0 и функций φ_0 , ψ_0 следует, что при $\omega \rightarrow 0$ все коэффициенты $a_{xx}=a_{yy}=a_{xy}=a_{xz}=a_{zy}=0$.

** Если, разумеется, в рассматриваемой области частот справедливо разложение (2.11) для постоянной распространения основной волны в линии без феррита.

слоя феррита и намагниченностью в стационарной волне, являющейся следствием уравнений Максвелла, может быть приближенно представлена в виде системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Последние совместно с нелинейным уравнением с обыкновенными производными, описывающим изменение намагниченности, и определяют структуру ударной волны. В статическом приближении эти уравнения переходят в линейную алгебраическую связь. Если в линиях без дисперсии появление производных от компонент намагниченности связано только с возбуждением волн высших типов, то в замедляющих системах уравнения остаются дифференциальными даже тогда, когда волны высших типов учитываются лишь в статическом приближении. Это связано, очевидно, с тем, что в замедляющих линиях основная волна обладает дисперсией даже в отсутствие феррита.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, **36**, 957 (1959).
2. И. Г. Катаев, Вопросы радиоэлектроники, серия 6, № 2, 61 (1959).
3. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.
4. Е. М. Гуогу, J. Appl. Phys., **29**, 1709 (1958).
5. Е. М. Гуогу, J. Appl. Phys., **29**, 3283 (1958).
6. А. Г. Гуревич, Польые резонаторы и волноводы, изд. Сов. радио, М., 1952.
7. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **3**, 276 (1960).
8. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 июня 1962 г.

ON SHOCK WAVES IN TRANSMISSION LINE WITH A THIN LAYER OF FERRITE. I

G. I. Friedman

The possibility is discussed of application of ordinary differential equations to study the field structure in stationary shock electromagnetic waves propagating in two-wire lines containing ferrite. This is shown to be possible only when the transverse dimensions of the transmission lines are sufficiently small and in the case of non-quasistatic variation of intensity of magnetization (J) when the configuration of the cross section of ferrite is simple. Ordinary linear differential equations are obtained from Maxwell equations for transmission lines with a ferrite film. Those combined with non-linear equations for intensity of magnetization determine approximately the structure of the shock wave.

ОБ УДАРНЫХ ВОЛНАХ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ С ТОНКИМ СЛОЕМ ФЕРРИТА. II

Г. И. Фрейдман

Рассматривается вопрос о единственности структуры ударной волны в линиях с ферритовой пленкой в квазистатическом приближении и о влиянии, которое оказывает на структуру ударной волны отличие поля от статического в коаксиальной линии и дисперсия основной волны в гребенчатой замедляющей системе.

В части I настоящей работы показано, что структура фронта стационарных ударных волн в цилиндрических линиях, содержащих коаксиальную стенку линии ферритовую пленку, определяется в квазистатическом приближении системой дифференциальных уравнений в обыкновенных производных. Это позволяет исследовать вопрос о единственности структуры фронта ударных волн в квазистатическом приближении.

В первом разделе этой статьи показано, что, как и следовало ожидать, необходимое условие единственности структуры ударной волны совпадает с условием ее устойчивости в разрывном приближении.

Полученные в части I уравнения позволяют на некоторых частных примерах выяснить, какое влияние на структуру ударной волны оказывает отличие поля от статического в линиях с идеально проводящими стенками и дисперсия основной волны в замедляющих системах. Оказывается (см. второй раздел), что нестационарный характер поля в области ударной волны, распространяющейся в коаксиальной линии, может при достаточно больших поперечных размерах линии существенно изменить величину параметров, определяющих структуру ударной волны. Однако для достаточно сильных ударных волн параметры, определяющие структуру ударной волны и поля в области ее фронта, мало отличаются от соответствующих величин, определенных в статическом приближении даже тогда, когда ширина фронта ударной волны меньше расстояния между стенками линии.

Дисперсия основной волны в замедляющих системах качественно по иному влияет на структуру ударной волны. В разделе 3 настоящей статьи показано, что длительность фронта ударной волны в гребенчатой замедляющей системе при увеличении амплитуды волны стремится к некоторой конечной величине, зависящей от дисперсионных свойств линии, а не к нулю, как в статическом приближении. Кроме того, дисперсия основной волны в линии приводит к появлению колебаний за фронтом ударной волны, амплитуда и период которых увеличивается при увеличении амплитуды ударной волны.

1. О ЕДИНСТВЕННОСТИ СТРУКТУРЫ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим вопрос о единственности структуры фронта ударной волны на примере волн в цилиндрических двухпроводных линиях передачи с идеально проводящими стенками. Диэлектрическую проницаемость тонкого (по сравнению с расстоянием между стенками) слоя феррита и остальной среды, заполняющей линию, будем считать оди-

наковой и постоянной. Процессы в области ударной волны описываются в этом случае линейными дифференциальными уравнениями (I.2.10)* в обыкновенных производных и нелинейным уравнением для вектора намагниченности. Для определенности будем считать, что феррит намагнчен до насыщения и изменение намагниченности определяется уравнением (I. 1).

Уравнения (I.2.10) и (I.1) имеют положения равновесия при значениях M_i и H_i , удовлетворяющих соотношениям**:

$$[M_i H_i] = 0; \quad |M_i| = M; \quad (1.1)$$

$$H_{xi} = 0; \quad H_{yi} = 4\pi p M_{yi}; \quad H_{zi} = H_0 + 4\pi(M - M_{zi}) \frac{S}{S_\perp},$$

где

$$p = \frac{v_p^2 \varepsilon / c^2}{1 - v_p^2 \varepsilon / c^2} \frac{\varphi_0'}{\varphi_0} \frac{\iint_S \varphi_0' ds}{\iint_{S_\perp} (\varphi_0')^2 ds},$$

v_p — скорость ударной волны, S и S_\perp — площадь поперечного сечения слоя феррита и линии соответственно, $\varphi_0(x)$ — мембранные функции основной волны в линии при $M = 0$. Особая точка $M_{\perp 1} = 0$; $H_{\perp 1} = 0$; $H_{z1} = H_0$; $M_{z1} = M$ соответствует полю перед ударной волной (при $\xi \rightarrow -\infty$). Существование других особых точек и значения компонент поля в них определяются величиной скорости ударной волны. Легко показать, что в интервале значений v_p , определяемом неравенствами

$$1 > \frac{v_p^2 \varepsilon}{c^2} > \left[1 + \frac{4\pi M}{H_0} \frac{\varphi_0'}{\varphi_0} \frac{\iint_S \varphi_0' ds}{\iint_{S_\perp} (\varphi_0')^2 ds} \right]^{-1},$$

существуют еще два положения равновесия, соответствующих полю за ударными волнами противоположной полярности. Структура фронта ударной волны будет единственна, если в фазовом пространстве уравнений (I.2.10), (I.1) есть только одна фазовая траектория, соединяющая положение равновесия, соответствующее полю перед ударной волной (это положение равновесия должно быть, очевидно, неустойчивым), с положением равновесия, соответствующим полю за ударной волной (к этой особой точке должна приближаться, по крайней мере, одна фазовая траектория).

В окрестности положений равновесия, соответствующих значениям поля перед ударной волной (область 1) и за ней (область 2), отклонения компонент поля от соответствующих постоянных значений можно, за исключением особых случаев, часть которых рассмотрена во втором и третьем разделах, представить в виде суммы решений уравнений (I.2.10), (I.1), линеаризованных около особых точек. Например, отклонение намагниченности

$$\Delta M_{1,2} = \sum_{k=1}^n A_{k,1,2} \Delta M_{k,1,2} \exp \left[-i \frac{\omega_{k,1,2}}{v_p} \xi \right], \quad (1.2)$$

где $A_{k,1,2}$ — произвольные постоянные, n — порядок системы (I.2.11),

* Формулы, полученные в первой части работы [1], обозначаются римской цифрой I.

** Нулевой индекс, означающий нулевое приближение, будем в дальнейшем опускать.

(I.1). При этом в разложении (1.2), соответствующем полю в ударной волне, должны, очевидно, отличаться от нуля только такие $A_{k,1,2}$, которые соответствуют частотам $\omega_{k,1,2}$, удовлетворяющим условиям

$$\operatorname{Im} \omega_{k,1} > 0; \quad \operatorname{Im} \omega_{k,2} < 0. \quad (1.3)$$

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в работе [2], можно показать, что необходимым условием существования и единственности решения уравнений (I.2.10), соответствующего ударной волне, является выполнение равенства

$$n_1 + n_2 = n + 1, \quad (1.4)$$

где n_1 и n_2 —число частот $\omega_{k,1}$ и $\omega_{k,2}$ соответственно, удовлетворяющих неравенствам (1.3).

Условия, при которых это требование выполняется, можно, конечно, получить непосредственно, анализируя расположение собственных частот уравнений (I.2.10), (I.1), линеаризованных около соответствующих особых точек. Однако это гораздо легче сделать, заметив, что $\omega_{k,1,2}$ являются корнями уравнения [3]

$$\frac{\beta(\omega; M^0; H^0)}{\omega} = \frac{1}{v_p}. \quad (1.5)$$

Здесь $\beta(\omega; M^0; H^0)$ —постоянная распространения основной волны в линии с ферритом в линейном приближении при значениях намагниченности и напряженности магнитного поля перед фронтом ударной волны (M_1 и H_1) и за ним (M_2 и H_2) соответственно. Зависимость $\beta(\omega; M^0; H^0)$ можно получить, линеаризуя уравнения (I.2.10), (I.1) около значений M^0 и H^0 с последующей заменой $1/v_p = \beta/\omega$; $\frac{d}{d\xi} = i\beta$.

Условие (1.4) будет, очевидно, выполнено, если при изменении M^0, H^0 от M_1, H_1 до M_2, H_2 только один корень уравнения (1.5) перейдет из полуплоскости $\operatorname{Im} \omega > 0$ в полуплоскость $\operatorname{Im} \omega < 0$. Такой переход возможен только через начало координат. Действительно, если бы он произошел при $\omega \neq 0$, это означало бы, что в линии могут распространяться незатухающие волны, что невозможно, так как в уравнении (I.1) есть диссипативный член. Переход корней уравнения (1.5) из верхней полуплоскости в нижнюю через бесконечность тоже невозможен, так как при больших частотах проницаемость феррита стремится к единице и, следовательно, фазовая скорость волн β/ω не зависит от частоты. Это говорит о том, что решение уравнений (I.2.10), соответствующее ударной волне, непрерывно.

В окрестности точки $\omega=0$ постоянную распространения основной волны можно представить в виде*

$$\beta = \frac{\omega}{v_0(M^0; H^0)} \left(1 + \frac{i\omega}{\Omega} \right), \quad (1.6)$$

где $v_0(M^0; H^0)$ —скорость распространения основной волны бесконечно малой частоты в линии с ферритом, Ω —величина, определяющая затухание волны. Из (1.6) легко увидеть, что один из корней уравнения (1.5) переходит из полуплоскости $\operatorname{Im} \omega > 0$ в нижнюю полуплоскость, когда $v_0(M^0; H^0)$, увеличиваясь, проходит значение v_p . Следовательно, условие (1.4) будет выполнено, если

$$v_0(M_1; H_1) < v_p < v_0(M_2; H_2). \quad (1.7)$$

* Напомним, что проводимость среды, заполняющей линию, мы считаем равной нулю, а проводимость стенок—бесконечной.

Аналогичным образом можно показать, что (1.7) является необходимым условием существования и единственности соответствующего ударной волне решения уравнений (I. 2.12), которые описывают в квазистатическом приближении процессы в стационарных волнах, распространяющихся в замедляющих системах. Кроме того, аналогичное рассмотрение можно провести, если изменение намагниченности описывается не уравнением (I. 1), а любым другим дифференциальным уравнением. Существенно лишь, чтобы при малых скоростях изменения магнитного поля оно переходило в статическую связь $M = M(H)^*$, так как только в этом случае справедливо разложение (1.6).

Неравенство (1.7) является, как известно [4], условием устойчивости ударных волн в разрывном приближении. Таким образом, в линиях с тонкими слоями феррита условие устойчивости ударной волны является одновременно, по крайней мере в квазистатическом приближении, необходимым условием существования и единственности решения, определяющего структуру фронта ударной волны.

2. О ВЛИЯНИИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛН ВЫСШИХ ТИПОВ НА СТРУКТУРУ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В КОАКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Посмотрим, как влияет отличие поля от статического на структуру ударной волны, распространяющейся в коаксиальной линии, внутри которой находится тонкий цилиндрический слой феррита, коаксиальный проводам линии. Диэлектрическую проницаемость этого слоя будем считать равной диэлектрической проницаемости остальной среды, заполняющей линию. Если феррит намагнчен до насыщения, то порядок уравнений (I. 2.10), (I. 1), описывающих в квазистатическом приближении процессы в области ударной волны, довольно высокий, что затрудняет их исследование. Поэтому ограничимся простейшим случаем, когда составляющие поля и намагниченности перед фронтом ударной волны равны нулю, а изменение намагниченности определяется уравнениями (I.2) или (I.3), так что во всей области ударной волны можно считать отличной от нуля только азимутальную компоненту намагниченности M_y . Тогда уравнения (I. 2.10), определяющие в квазистатическом приближении связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля внутри тонкого слоя феррита, примут сравнительно простой вид:

$$H_y = 4\pi p M_y - \frac{4\pi}{\chi} \frac{d^2 M_y}{d\xi^2}. \quad (2.1)$$

Здесь

$$p = \frac{v_p^2 \epsilon / c^2}{1 - v_p^2 \epsilon / c^2} \frac{\overline{\varphi_0} \iint_S \varphi'_0 ds}{\iint_{S_\perp} (\varphi'_0)^2 ds} \simeq \frac{v_p^2 \epsilon / c^2}{1 - v_p^2 \epsilon / c^2} \frac{S}{S_\perp};$$

$$\frac{1}{\chi} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\overline{\varphi_v} \iint_S \varphi'_v ds}{\iint_{S_\perp} \varphi_v^2 ds} \simeq \frac{d^2}{\pi^2} \frac{S}{S_\perp}, \quad (2.2)$$

где S и S_\perp — площадь поперечного сечения феррита и линии соответственно, d — расстояние между стенками линии.

* Это требование не выполняется, например, если процесс изменения намагниченности описывается уравнением (I.3).

Рассмотрим сначала случай, когда изменение M_y определяется уравнением (I. 2). Учитывая (2.1), получим, что структура фронта ударной волны определяется уравнением:

$$\left(\frac{v_p^2}{\omega_{rp}^2} + \frac{4\pi\chi_0}{\chi^2} \right) \frac{d^2 M_y}{d\xi^2} + \frac{v_p}{\omega_{rp}} \frac{dM_y}{d\xi} + [f(M_y^2) - 4\pi\chi_0 p] M_y = 0. \quad (2.3)$$

Уравнения, аналогичные (2.3), довольно подробно исследовались в работе [5]. Из результатов этой работы следует, что структура ударной волны определяется особой фазовой траекторией (сепаратрисой седла), соединяющей неустойчивую особую точку $M_y=0$, соответствующую полю перед ударной волной, с устойчивыми особыми точками, соответствующими полю за фронтом ударных волн противоположной полярности. Значение намагниченности в этих точках определяется уравнением

$$[f(M_y^2) - 4\pi\chi_0 p] = 0. \quad (2.4)$$

В области перед фронтом ударной волны компоненты поля экспоненциально увеличиваются с инкрементом нарастания δ_1 , равным

$$\delta_1 = \left\{ \sqrt{\left[\frac{v_p^2 \omega_{rp}^2 \chi^{-2}}{2\omega_{rp} (v_p^2 \chi^{-2} + 4\pi\chi_0 \omega_{rp})} \right]^2 + \frac{(4\pi\chi_0 p - 1) \omega_{rp}^2 \chi^{-2} v_p}{v_p^2 \chi^{-2} + 4\pi\chi_0 \omega_{rp}^2}} - \frac{v_p^2 \omega_{rp}^2 \chi^{-2}}{2\omega_{rp} (v_p^2 \chi^{-2} + 4\pi\chi_0 \omega_{rp})} \right\}. \quad (2.5)$$

Дальнейший характер изменения поля определяется частотами $\omega_{k;2}$ ($k=1,2$), которые удовлетворяют условию (1.4);

$$\begin{aligned} \omega_{k;2} = & -i \frac{\omega_{rp}^2 v_p^2 \chi^{-2}}{2\omega_{rp} (v_p^2 \chi^{-2} + 4\pi\chi_0 \omega_{rp}^2)} \pm \\ & \pm \sqrt{2M_{y;2}^2 f \frac{\omega_{rp}^2 v_p^2 \chi^{-2}}{v_p^2 \chi^{-2} + 4\pi\chi_0 \omega_{rp}^2} - \left[\frac{\omega_{rp}^2 v_p^2 \chi^{-2}}{2\omega_{rp} (v_p^2 \chi^{-2} + 4\pi\chi_0 \omega_{rp}^2)} \right]^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если эти частоты чисто мнимые, то поле в области ударной волны меняется монотонно. Если же $\omega_{k;2}$ — комплексные, то компоненты поля, совершая затухающие колебания, приближаются к постоянным значениям, соответствующим полю за ударной волной. Если амплитуда колебаний велика, то первые колебания будут существенно отличаться от гармонических.

Как видно из (2.3), отличие поля от статического в данном случае не изменило порядок и характер уравнения, описывающего процессы в области ударной волны. Однако из выражений (2.5), (2.6) следует, что при достаточно больших поперечных размерах линий, когда $v_p^2 \chi^{-2} \ll 4\pi\chi_0 \omega_{rp}^2$, отличие поля от статического существенно влияет на величину параметров, определяющих структуру ударной волны, и в некоторых случаях может существенно изменить ее характер. Действительно, если при малой величине расстояния между стенками d , когда $v_p^2 \chi^{-2} \gg 4\pi\chi_0 \omega_{rp}^2$, частоты $\omega_{k;2}$ были мнимые, то с увеличением d при прочих равных условиях они станут комплексными, т. е. за фронтом ударной волны появятся колебания. При дальнейшем увеличении расстояния между стенками частота колебаний будет умень-

шаться, но ее отношение к декременту затухания, равное при $v_p^2 \bar{x}^2 \ll \ll 4\pi\chi_0 \omega_{rp}^2$

$$\frac{\omega_2}{\delta_2} = 8\pi\chi_0 \frac{\omega_{rp}}{v_p^2 \bar{x}^2} \sqrt{2M_y^2; 2 f(M_y^2; 2) \frac{v_p^2 \bar{x}^2}{4\pi\chi_0} - \left(\frac{v_p^2 \bar{x}^2}{4\pi\chi_0 \omega_{rp}} \right)}, \quad (2.7)$$

непрерывно увеличивается. При этом увеличивается и амплитуда колебаний.

При быстром нарастании напряженности магнитного поля изменение намагниченности происходит в основном за счет процессов необратимого вращения, т. е. определяется уравнением (I. 3). Так как уравнение (I.3) не переходит в статическую связь $M_y = M_y(H_y)$, то при рассмотрении вопроса о единственности структуры ударной волны не применимы рассуждения, приведенные в первом разделе настоящей работы. Поэтому остановимся несколько подробнее на анализе структуры фазовой плоскости уравнения, определяющего в этом случае изменение намагниченности в области ударной волны. Оно, как это следует из (2.1), (I. 3), имеет вид:

$$(1-m^2) \frac{d^2m}{d\xi^2} = \bar{x}^2 pm(1-m^2) - \frac{v_p(1-\alpha^2)\bar{x}^2}{4\pi\gamma M} \frac{dm}{d\xi}. \quad (2.8)$$

Здесь $m=M_y/M$, значение параметра p , а следовательно, и скорость ударной волны определяются из условия, что точка $H_y=H_2$; $M_y=M$ является положением равновесия уравнений (2.1), (2.8). Нетрудно видеть, что это выполняется при

$$p = H_2/4\pi M. \quad (2.9)$$

Структура фазовой плоскости уравнения (2.8) показана на рис. 1. Из этого рисунка видно, что сепаратриса седла, выходящая из положения равновесия при $m=0$, которое соответствует полю перед ударной волной, пересекает изоклину горизонтальных касательных, определяемую уравнением

$$\frac{dm}{d\xi} = \frac{4\pi\gamma M p}{v_p(1+\alpha^2)} m(1-m^2) \quad (2.10)$$

(на рисунке она показана пунктиром), а затем приближается к положению равновесия при $m=1$, соответствующему полю за ударной волной положительной полярности. Таким образом, решение уравнения (2.8), соответствующее стационарной ударной волне, существует и единствено.

Уравнение изоклины горизонтальных касательных (2.10) определяет изменение намагниченности в области ударной волны в статическом приближении, т. е. при

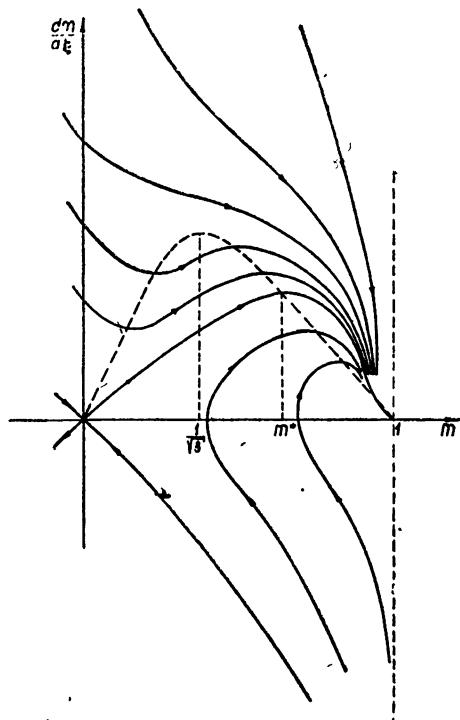


Рис. 1. Структура фазовой плоскости уравнения (2.8).

$\bar{x}^2 \rightarrow \infty$. Поэтому, как видно из рис. 1, при учете отличия структуры поля в линии от статической, т. е. при конечной величине \bar{x}^2 , изменение намагниченности происходит вначале медленнее, чем в статическом приближении. Это видно и из сравнения инкремента нарастания компонент поля перед фронтом ударной волны, величина которого определяется выражением

$$\delta = \frac{v_p^2 (1+\alpha^2) \bar{x}^2}{8\pi\alpha\gamma M} \left[\sqrt{1 + \frac{4\delta_{1,0}^2}{v_p^2 \bar{x}^2 p}} - 1 \right], \quad (2.11)$$

с инкрементом нарастания поля в статическом приближении

$$\delta_{1,0} = \frac{4\pi\alpha\gamma M p}{1+\alpha^2} = \frac{\alpha\gamma H_2}{(1+\alpha^2)}. \quad (2.11a)$$

С увеличением намагниченности скорость ее изменения увеличивается и при значениях $m > m^*$, где m^* определяет точку пересечения сепаратрисы седла и изоклины горизонтальных касательных, становится больше скорости изменения в статическом приближении при тех же значениях намагниченности.

В окрестности положения равновесия при $m=1$ уравнение (2.8) нельзя линеаризовать. Однако из условия конечности $dM/d\xi$ легко показать, что в ударной волне величина $(1-m)$ при малых ее значениях меняется пропорционально $\exp[-2\delta_{1,0}\xi]$, т. е. так же, как и в статическом приближении. Следовательно, если изменение намагниченности происходит в основном за счет процессов необратимого вращения, то как в статическом, так и в квазистатическом приближении намагниченность и напряженность магнитного поля приближаются к постоянным значениям, соответствующим полю за ударной волной, апериодически.

Из (2.11) видно, что скорость изменения намагниченности и магнитного поля в области фронта ударной волны в квазистатическом приближении будет существенно отличаться от скорости изменения этих величин, определяемых в статическом приближении только при $4\delta_{1,0}^2/v_p^2 \bar{x}^2 p \geq 1$. Следует отметить, что для ударных волн большой амплитуды, когда $p=H_2/4\pi M \rightarrow \infty$, это требование может не выполняться, если даже ширина фронта ударной волны порядка или меньше расстояния между стенками линий. На первый взгляд кажется, что при этом нарушается условие применимости квазистатического приближения. Однако анализ точных соотношений (I. 2.8) между намагниченностью и напряженностью магнитного поля внутри тонкого слоя феррита показывает, что при больших значениях параметра p , когда скорость ударной волны близка к $c/\sqrt{\epsilon}$, уравнение (2.1), определяющее связь между H_y и M_y в квазистатическом приближении, остается справедливым до тех пор, пока ширина ударной волны не станет сравнима с толщиной слоя феррита. Следовательно, для сильных ударных волн нестационарный характер поля волн высших типов мало влияет на процессы в области фронта ударной волны даже тогда, когда ее ширина меньше расстояния между стенками линий. Это связано с тем, что для сильных ударных волн граничные условия для компонент поля на разрыве [6] приближенно удовлетворяются для поля главной волны.

3. ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ ОСНОВНОЙ ВОЛНЫ В ЗАМЕДЛЯЮЩИХ ЛИНИЯХ НА СТРУКТУРУ ФРОНТА СТАЦИОНАРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Наличие дисперсии основной волны в замедляющих линиях изменяет, как было показано в части I настоящей работы, порядок линей-

ных уравнений в обычновенных производных, определяющих связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля внутри тонкого слоя феррита, и в том случае, когда волны высших типов учитываются в статическом приближении. Появление в этих уравнениях производных показывает, что достаточно сильная дисперсия может существенно изменить структуру стационарной ударной волны. При этом, как следует из примера, рассмотренного в настоящем разделе, повышение порядка линейных уравнений (являющихся следствием уравнений Максвелла), связанное с дисперсией основной волны в замедляющих линиях, качественно по иному влияет на структуру ударной волны, чем повышение порядка этих уравнений, связанное с нестатическим характером волн высших типов, возбуждаемых в линиях, где основная волна при отсутствии феррита не обладает дисперсией.

В качестве примера диспергирующей линии передачи рассмотрим простейшую гребенчатую замедляющую систему с тонким слоем феррита, прилегающим к верхней идеально проводящей стенке (рис. 2). Если шаг гребенки достаточно мал, то такую систему можно рассматривать как полосковый волновод, верхняя стенка которого идеально проводящая, а на нижней выполняются граничные условия:

$$E_y = 0; \quad E_z = -iH_y Z_1 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\Omega} \right).$$

Постоянные Z_1 и Ω связаны известными соотношениями с параметрами гребенчатой структуры. Поле основной волны в гребенчатой линии без феррита определяется в рассматриваемом приближении функцией

$$\varphi_0 = e^{-z_0 x} - e^{-z_0(2d-x)},$$

где $\tilde{z}_0^2 = \beta_0^2 - k^2$, а зависимость постоянной распространения от частоты — уравнением

$$\operatorname{th}(\tilde{z}_0 d) = Z_1 \frac{k \sqrt{\epsilon}}{z_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\Omega} \right).$$

В области малых частот, когда $\tilde{z}_0 d$ и ω/Ω много меньше единицы, эти выражения можно записать в виде:

$$\varphi_0 \approx (1 + \tilde{z}_0 d)(x - d); \quad (3.1)$$

$$\beta_0^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + 2i \frac{\omega}{\omega_r} \right),$$

где $1/c_0^2 = \epsilon(1 + \pi Z_1 c / 2d\Omega) / c^2$ и $1/\omega^2 = \pi^2 / 12\Omega^2 + \pi Z_1 \epsilon_0 d / 6c\Omega$; $2i/\omega_r =$

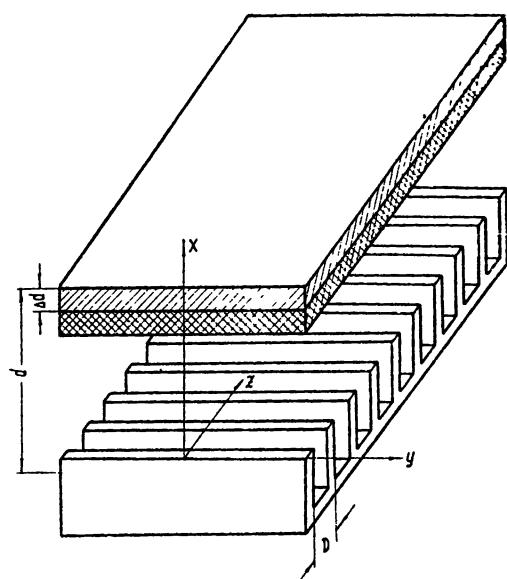


Рис. 2. Гребенчатая замедляющая линия с тонким слоем феррита.

коэффициент в разложении диэлектрической проницаемости по степеням частоты $\epsilon \approx \epsilon_0(1+2i\omega/\omega_0)$.

Толщину слоя феррита Δd будем считать малой по сравнению с расстоянием между стенками d , так что для нахождения связи между компонентами напряженности магнитного поля и вектора намагниченности нулевого приближения можно пользоваться уравнениями (I. 2.12), при выводе которых учитывалась дисперсия основной волны, в то время как волны высших типов учитывались только в статическом приближении. Кроме того, будем считать, что составляющие поля перед ударной волной равны нулю, а изменение компоненты намагниченности, параллельной стенкам линии, определяется уравнением (I. 3), т. е. происходит за счет процессов необратимого вращения. Тогда из (I. 3), (I. 2.12) и (3.1) следует, что в области ударной волны изменение H_y и M_y — компонент напряженности магнитного поля и вектора намагниченности нулевого приближения, параллельных стенкам линии, определяется уравнениями:

$$\frac{1}{\beta^2(1-v_p^2/c_0^2)} \frac{d^2H_y}{d\xi^2} + \frac{1}{\beta_r(1-v_p^2/c_0^2)} \frac{dH_y}{d\xi} + H_y = 4\pi p M_y; \\ \frac{dM_y}{d\xi} = \frac{\alpha\gamma}{Mv_p(1+\alpha^2)} (M^2 - M_y^2) H_y. \quad (3.2)$$

Здесь $p = (v_p^2 \epsilon \Delta d / c^2 d) (1 - v_p^2/c_0^2)^{-1}$. Значение этого параметра, а следовательно, и скорости ударной волны, находится из условия, что при $\xi \rightarrow \infty$ все производные равны нулю, а H_y и M_y равны соответственно H_2 и M , где H_2 — амплитуда магнитного поля в ударной волне. При этом нетрудно видеть, что величина p определяется, как и следовало ожидать, формулой (2.9).

Введем безразмерные переменные: $\eta = \xi \bar{\beta} (1 - v_p^2/c_0^2)^{1/2}$; $h = H_y/H_2$; $m = M_y/M$. Тогда уравнения (3.2) примут вид:

$$\frac{d^2h}{d\eta^2} + 2\delta_r \frac{dh}{d\eta} + h = m; \quad \frac{dm}{d\eta} = \bar{B}(1 - m^2)h, \quad (3.2a)$$

где параметры \bar{B} и δ_r определяются выражениями:

$$\bar{B} = \frac{\alpha\gamma H_2}{\omega(1-\alpha^2)(1-v_p^2/c_0^2)^{1/2}}; \quad \delta_r = \frac{\bar{\omega}}{2\omega(1-v_p^2/c_0^2)^{1/2}}. \quad (3.3)$$

Уравнения, аналогичные (3.2a), подробно исследованы в работе [7]. Из результатов этой работы следует, что существует единственная фазовая траектория, соединяющая неустойчивое положение равновесия $h=0$, $m=0$, соответствующее полю перед ударной волной, с устойчивым положением равновесия $h=1$, $m=1$, соответствующим полю за фронтом ударной волны. Следовательно, структура ударной волны и в этом случае определяется единственным образом. В области перед фронтом ударной волны компоненты поля, так же как и в случаях, рассмотренных в предыдущем разделе, экспоненциально нарастают с инкрементом при $\delta_r \ll 1$, равным

$$\delta_1 = \bar{\omega}(1 - v_p^2/c_0^2)^{1/2} \operatorname{sh} \left[\frac{1}{3} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \bar{B} \right) \right] \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (3.4)$$

В отличие от случая, когда основная волна в линии не обладает дисперсией, при увеличении амплитуды ударной волны инкремент

стремится не к бесконечности, а к конечной величине, определяемой равенством:

$$\delta_{1\infty} = \bar{\omega} \left[\frac{\alpha \gamma 4\pi M c_0^2 \varepsilon \Delta d}{\bar{\omega}(1+\alpha^2)c^2 d} \right]^{1/3}. \quad (3.4a)$$

Кроме того, хотя намагниченность в области фронта ударной волны меняется монотонно, напряженности магнитного и электрического поля приближаются к постоянным за ударной волнной значениям, совершая затухающие колебания, частота и декремент которых при $\delta_r \ll 1$ равны

$$\omega'_2 = \bar{\omega} (1 - v_p^2/c_0^2)^{1/2}; \quad \delta_2 = \frac{\bar{\omega}}{\omega_r}. \quad (3.5)$$

При этом, если $\bar{B} \gg 1$, амплитуда колебаний будет сравнима с амплитудой ударной волны.

Такое различное влияние дисперсии основной волны в гребенчатой замедляющей линии и нестатического характера волн высших типов, возбуждаемых при распространении ударной волны в коаксиальной линии с идеально проводящими стенками, можно объяснить следующим образом. В замедляющей линии в области, где намагниченность феррита уже не меняется, может распространяться волна, фазовая скорость которой равна скорости ударной волны, а групповая меньше этой скорости. В области ударной волны должна, как известно [6], происходить диссилияция определенного количества энергии. Часть этой энергии диссилируется в процессе перемагничивания феррита в передней части фронта ударной волны, часть же уносится волной, групповая скорость которой меньше v_p , и затем диссилируется за счет диэлектрических потерь. В коаксиальной же линии в области, где намагниченность феррита не меняется, распространяющихся волн, фазовая скорость которых равна v_p , не существует. Поэтому диссилияция происходит только в процессе изменения намагниченности феррита, а компоненты поля меняются за фронтом ударной волны, так же как и намагниченность, апериодически.

В заключение пользуясь случаем выразить признательность А. В. Гапонову за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 324 (1963).
2. Г. Я. Любарский, ПММ, 25, 11041 (1961).
3. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
4. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
5. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 680 (1961).
6. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 79 (1960).
7. Ю. К. Богатырев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 1130 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
13 июня 1962 г.

ON SHOCK WAVES IN TRANSMISSION LINES WITH A THIN LAYER OF FERRITE. II

G. I. Friedman

The unicity of the shock waves structure in the transmission lines with ferrite films is studied in quasistatic approximation, the effects are taken into account of the deviation of the field structure from the static one in a coaxial line as well as the dispersion of the principal wave in metal-plate delay system.

МНОГОРЯДНАЯ ВСТРЕЧНО-ШТЫРЕВАЯ ЗАМЕДЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА СО СДВИГОМ РЯДОВ НА ПОЛОВИНУ ПЕРИОДА

A. С. Татаренко

Методом многопроводных линий проведено исследование дисперсии и сопротивления связи четырехрядной замедляющей системы типа «встречные штыри» со сдвигом рядов на половину периода структуры. Измерения дисперсии, выполненные на двух макетах ЛОВ, обнаруживают хорошее соответствие с результатами теории.

Для увеличения выходной мощности генераторов обратной волны можно использовать многорядные замедляющие системы, которые позволяют пропустить несколько электронных потоков и в состоянии выдержать большие тепловые нагрузки. Многорядные системы штыревого типа могут быть многоступенчатыми в двух направлениях. Анализ многорядных штыревых систем, одноступенчатых в одном направлении и многоступенчатых в другом, дан в работе [1]. Многорядная замедляющая система встречно-штыревого типа со сдвигом рядов на половину периода, которая исследована в настоящей работе, является системой двухступенчатой в двух направлениях.

1. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Для общности решения будем рассматривать замедляющую систему с бесконечным числом рядов, двухступенчатую в z - и в x -направлениях, с проводниками квадратного сечения. На рис. 1 показано сечение исследуемой системы в однородной области плоскостями $y = \text{const}$. На этом же рисунке показана нумерация проводников и приведены обозначения основных геометрических параметров системы.

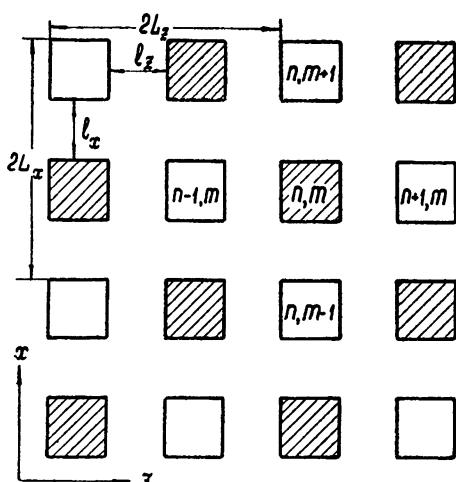


Рис. 1. Сечение многорядной штыревой системы плоскостью $y = \text{const}$ в однородной области.

Так как замедляющая система бесконечна в z - и в x -направлениях, периодична с периодами $2L_z$ и $2L_x$ и имеет конечные нагрузки в y -направлении ($y = \pm h/2$, h — высота штыря), то для амплитуды потенциала можно записать следующее выражение [2,3]:

$$V(xyz) = [A_0 \cos(ky) + B_0 \sin(ky)] \times \sum_{i=-\infty}^{+\infty} C_i e^{-i\beta_i x} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} C_s e^{-i\beta_s z}. \quad (1)$$

Здесь A_0 , B_0 , C_i и C_s — постоянные амплитудные коэффициенты, $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, $\beta_i = (2\Theta_x + 2\pi i)/2L_x$ — фазовая постоянная для волны,

распространяющейся в направлении оси x , $\beta_s = (2\Theta_z + 2\pi s/2L_z)$ — фазовая постоянная для волны, распространяющейся в направлении оси z , $2\Theta_x$ и $2\Theta_z$ — сдвиги фаз на периоды в направлениях x и z соответственно, $i = 0; \pm 1; \pm 2; \pm \dots$, $s = 0; \pm 1; \pm 2; \pm \dots$. Полагая в соотношении (1) $x = mL_x$ и $z = nL_z$, после некоторых преобразований получим выражение для потенциала на проводнике с номером (n, m) :

$$\begin{aligned} V_{n,m}(y) = & [A_1 \cos(ky) + B_1 \sin(ky)] e^{-im\Theta_x} e^{-jn\Theta_z} + \\ & + [A_2 \cos(ky) + B_2 \sin(ky)] e^{-im\Theta_x} e^{-jn(\Theta_z - \pi)} + \\ & + [A_3 \cos(ky) + B_3 \sin(ky)] e^{-im(\Theta_x - \pi)} e^{-jn\Theta_z} + \\ & + [A_4 \cos(ky) + B_4 \sin(ky)] e^{-im(\Theta_x - \pi)} e^{-jn(\Theta_z - \pi)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где A_{1-4} и B_{1-4} — неизвестные амплитудные множители. Из выражения (2) видно, что в этом случае потенциал слагается из четырех компонент, имеющих различные фазовые множители.

Согласно телеграфным уравнениям, выражение для тока, текущего вдоль проводника с номером (n, m) , следует записать в виде

$$\begin{aligned} I_{n,m}(y) = & jY(\Theta_x; \Theta_z) [B_1 \cos(ky) - A_1 \sin(ky)] e^{-im\Theta_x} e^{-jn\Theta_z} + \\ & + jY(\Theta_x; \Theta_z - \pi) [B_2 \cos(ky) - A_2 \sin(ky)] e^{-im\Theta_x} e^{-jn(\Theta_z - \pi)} + \\ & + jY(\Theta_x - \pi; \Theta_z) [B_3 \cos(ky) - A_3 \sin(ky)] e^{-im(\Theta_x - \pi)} e^{-jn\Theta_z} + \\ & + jY(\Theta_x - \pi; \Theta_z - \pi) [B_4 \cos(ky) - A_4 \sin(ky)] e^{-im(\Theta_x - \pi)} e^{-jn(\Theta_z - \pi)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $Y(\Theta_x; \Theta_z)$, $Y(\Theta_x; \Theta_z - \pi)$, $Y(\Theta_x - \pi; \Theta_z)$ и $Y(\Theta_x - \pi; \Theta_z - \pi)$ — волновые проводимости для соответствующих ТЕМ-волн. Волновая проводимость для $(\Theta_x \Theta_z)$ ТЕМ-волны вычисляется по следующей формуле [2,3]:

$$Y(\Theta_x; \Theta_z) = 4 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(\frac{L_x - l_x}{l_z} \sin^2 \frac{\Theta_z}{2} + \frac{L_z - l_z}{l_x} \sin^2 \frac{\Theta_x}{2} \right). \quad (4)$$

Очевидно, что формула (4) справедлива также и для других волновых проводимостей, если заменить углы Θ_x и Θ_z на соответствующие им значения.

Для нахождения дисперсионного уравнения и неизвестных амплитудных коэффициентов необходимо удовлетворить следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \left. \frac{V}{2n, 2m} (h/2) \right. = \left. \frac{V}{2n+1, 2m} (-h/2) \right. = \left. \frac{V}{2n, 2m+1} (-h/2) \right. = \left. \frac{V}{2n+1, 2m+1} (h/2) \right. = 0; \\ \left. I_{2n, 2m} (-h/2) \right. = \left. I_{2n+1, 2m} (h/2) \right. = \left. I_{2n, 2m+1} (h/2) \right. = \left. I_{2n+1, 2m+1} (-h/2) \right. = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя в выражения (5) потенциал и ток из (2) и (3), получим систему восьми уравнений, в результате решения которой можно выразить все амплитудные коэффициенты через один и получить дисперсионное уравнение, которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{kh}{2} = & \left(\frac{L_x - l_x}{l_z} \sin^2 \frac{\Theta_z}{2} + \frac{L_z - l_z}{l_x} \sin^2 \frac{\Theta_x}{2} \right) \times \\ & \times \left(\frac{L_x - l_x}{l_z} \cos^2 \frac{\Theta_z}{2} + \frac{L_z - l_z}{l_x} \cos^2 \frac{\Theta_x}{2} \right)^{-1}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = B_2 = B_3 = B_4 = 0; \quad A_4 = -B_1 \operatorname{tg}(kh/2).$$

Дисперсионное уравнение (6), очевидно, справедливо также для систем с конечным числом рядов. В этом случае фазовый угол Θ_x принимает дискретный ряд значений [1]

$$\Theta_x = n\pi/N, \quad (7)$$

где N — число рядов, $n = 1; 2; 3; \dots; N$.

2. СОПРОТИВЛЕНИЕ СВЯЗИ

Сопротивление связи для бесконечно тонкого луча определяется по формуле:

$$R_s = \overline{E_{zs} E_{zs}^*} / 2\beta_s v_g W. \quad (8)$$

Методом, изложенным в работах [1-3], нетрудно получить составляющую поля E_z в пространстве взаимодействия *. Для системы, изображенной на рис. 1, поле для $(\Theta_x \Theta_z)$ ТЕМ-волны получается в следующем виде:

$$E_z^{III} = 4jB e^{-jky} e^{-jm\theta_v} e^{-jn\theta_z} \frac{\sin(\Theta_x/2)}{L_x} \frac{\sin(\Theta_z/2)}{L_z} \times \\ \times \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{\beta_{2i}} \frac{\sin(\beta_{2i} l_x/2)}{\beta_{2i} l_x/2} e^{-j\beta_{2i} x} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (-1)^s \frac{\sin(\beta_{2s} l_z/2)}{\beta_{2s} l_z/2} e^{-j\beta_{2s} z}, \quad (9)$$

где $B = (A_1 + jB_1)/2$. Учитывая две волны, распространяющиеся в направлениях $+y$ и $-y$, для $(\Theta_x - \pi; \Theta_z - \pi)$ ТЕМ-волны получим:

$$\overline{E_{zs}^III E_{zs}^{III*}} = \frac{1}{2} A_4 A_4^* \left[1 + \frac{\sin(kh)}{kh} \right] \left\{ 4 \frac{\sin[(\Theta_z - \pi)/2]}{L_z} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin[(\Theta_x - \pi)/2]}{L_x} \frac{\sin(\beta_{2s-1} l_z/2)}{\beta_{2s-1} l_z/2} \frac{\sin(\beta_{2i-1} l_x/2)}{\beta_{2i-1} l_x/2} \frac{1}{\beta_{2i-1}} \right\}^2. \quad (10)$$

Для энергии, запасенной на единицу длины замедляющей системы, будем иметь:

$$W = 2A_4 A_4^* \frac{h}{c L_z} Y(\Theta_x - \pi; \Theta_z - \pi). \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (8), получим расчетную формулу для сопротивления связи четырехрядной встречно-штыревой замедляющей системы со сдвигом рядов в z -направлении на половину периода для нулевой гармоники:

$$R_0 = \frac{1}{2} \frac{c}{v_g} \frac{L_z}{h} \left[1 + \frac{\sin(kh)}{kh} \right] \left\{ \frac{L_x L_z}{l_x l_z} \frac{\sin[(\Theta_x - \pi)/2]}{[(\Theta_x - \pi)/2]^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin[(\Theta_z - \pi)/2]}{[(\Theta_z - \pi)/2]^2} \sin\left(\frac{l_x}{L_x} \frac{\Theta_x - \pi}{2}\right) \sin\left(\frac{l_z}{L_z} \frac{\Theta_z - \pi}{2}\right) \right\}^2 \frac{1}{Y(\Theta_x - \pi; \Theta_z - \pi)}. \quad (12)$$

На рис. 2 приведены зависимости сопротивления связи от длины волны, построенные по формуле (12). Как видно из этих графиков, наибольшее сопротивление связи в диапазоне длин волн $\lambda > 5 \text{ см}$ имеет

* Пространством взаимодействия будем считать область III рис. 1.

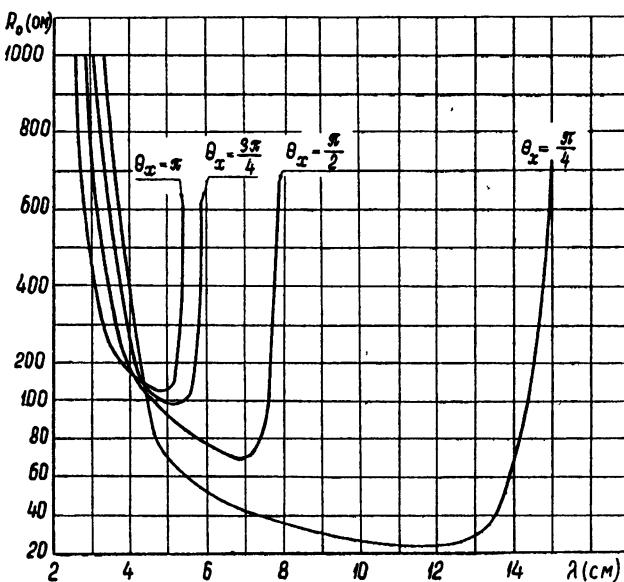


Рис. 2. Кривые сопротивления связи для различных видов колебаний.

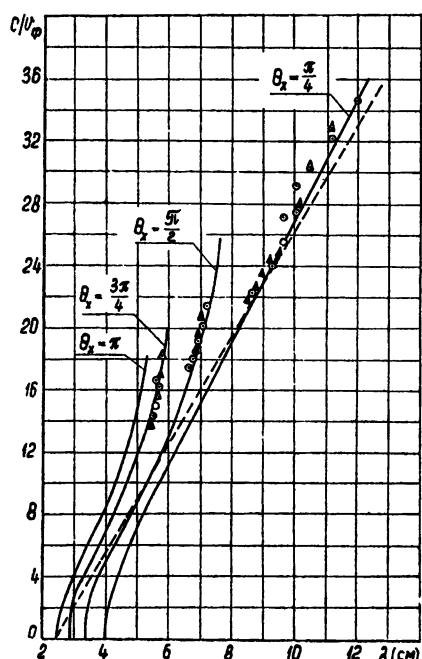
самый коротковолновый вид колебаний. Согласно рис. 2, следует ожидать, что генератор обратной волны, сконструированный с подобной замедляющей системой, будет работать при увеличении ускоряющего напряжения последовательно на типах волн $\Theta_x = \pi/4$, $\Theta_x = 3\pi/4$, $\Theta_x = \pi/2$ и $\Theta_x = \pi$.

3. ЭКСПЕРИМЕНТ

Для экспериментальной проверки результатов теоретического анализа было сконструировано и изготовлено несколько генераторов обратной волны с четырехрядной встречно-штыревой замедляющей системой, имеющей сдвиг рядов в z -направлении на половину периода. Замедляющая система имела следующие размеры: $h = 12$ мм, $L_x = 1,8$ мм, $L_z = 1,5$ мм, $l_x = 1$ мм, $l_z = 0,7$ мм. На рис. 3 приведены дисперсионные кривые, построенные по формуле (6); здесь же показаны экспериментальные частотные характеристики для двух макетов ламп. Для сравнения на этом же рисунке пунктиром проведена дисперсионная кривая для однорядной системы с теми же геометрическими размерами. Как видно из рис. 3, лампы начинают работать последовательно на видах колебаний $\Theta_x = \pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$.

При изменении замедления от 14 до 19 (напряжения — от 1300 до 700 в) генерация имеет место на волнах от 5,5 до 6 см. Чтобы получить колебания в этом диапазоне на однорядной системе с теми же геометрическими параметрами, следует, согласно рис. 3, изменять замедление от 10,3 до 13 (напряжение — от 2300 до 1500 в).

В случае многорядной встречно-штыревой замедляющей системы без сдвига рядов рабочим видом следует считать самый длинноволновый вид колебаний, так как сопротивление связи его наибольшее [1].



При сдвиге рядов на половину периода рабочими видами будут также и коротковолновые виды колебаний, поскольку их сопротивление связи больше. При конструировании ЛОВ с многорядными встречно-штыревыми замедляющими системами со сдвигом рядов следует учитывать, что лампы в первую очередь будут возбуждаться на коротковолновых видах, полоса пропускания которых невелика.

Автор благодарен студентам-дипломникам В. А. Костякову и А. А. Карпову, принявшим участие в вычислительной работе и в монтаже генераторов.

Рис. 3. Теоретические и экспериментальные дисперсионные характеристики для различных видов колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. А. Силин, Электроника, 2, 3 (1958).
2. R. C. Fletcher, Proc. IRE, 40, 951 (1952).
3. Ю. Г. Альтшуллер, А. С. Татаренко и С. В. Герчиков, Радиотехника и электроника, 2, 609 (1957).

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию
18 июня 1962 г.

MULTI-ROW INTERDIGITAL SLOW-WAVE SYSTEM WITH HALF A PERIOD SHIFT OF ROWS

A. S. Tatarenko

The theory of multiwire lines is used in the study of coupling impedance and dispersion for the four-row interdigital slow-wave system with the half a period shift of rows. The dispersion measurements carried out on two models of BWO are well in agreement with results the theory of.

ДИФФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

O. A. Третьяков, B. P. Шестопалов

Рассматривается нормальное падение плоской произвольно поляризованной электромагнитной волны на бесконечный ряд металлических идеально проводящих лент, лежащих на слое изотропного диэлектрика. Дифракционное поле в случае произвольного соотношения между длиной волны, шириной ленты, толщиной слоя и периодом решетки находится методом, развитым в работе [1]. Приводятся приближенные формулы для расчетов коэффициентов отражения и прохождения, и результаты расчета по этим формулам.

Для практического использования ленточных металлических решеток (фильтры, поляризаторы, искусственные диэлектрики и т. п.) необходимо изготавливать их либо из достаточно жестких лент, обладающих определенной толщиной, либо в виде тонких покрытий на пластинах. Если не принимать во внимание этих отклонений от идеализированной бесконечно тонкой решетки, помещенной в свободном пространстве [1], то расчетные данные могут значительно отличаться от истинных. В настоящей работе исследуется влияние изотропной диэлектрической пластины произвольной толщины на дифракционные свойства бесконечно тонкой металлической решетки, лежащей на этой пластине как на жесткой основе.

1. На решетку, образованную бесконечным числом металлических полос, периодически расположенных на диэлектрическом слое (рис. 1), нормально падает плоская электромагнитная волна единичной амплитуды:

$$\begin{aligned} E_{\text{пад}} &= i \cos \gamma e^{-ikz} e^{-i\omega t} + \\ &+ j \sin \gamma e^{-ikz} e^{-i\omega t}; \\ H_{\text{пад}} &= i \sin \gamma e^{-ikz} e^{-i\omega t} + \\ &+ j \cos \gamma e^{-ikz} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (1)$$

В результате дифракции волны (1) на исследуемой системе возникает поле, для определения которого достаточно рассмотреть дифракцию двух плоских волн с амплитудами $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$:

$$\begin{aligned} E_1^{\text{пад}} &= i \cos \gamma e^{-ikz} e^{-i\omega t}; \quad H_1^{\text{пад}} = j \cos \gamma e^{-ikz} e^{-i\omega t}; \\ E_2^{\text{пад}} &= j \sin \gamma e^{-ikz} e^{-i\omega t}; \quad H_2^{\text{пад}} = i \sin \gamma e^{-ikz} e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

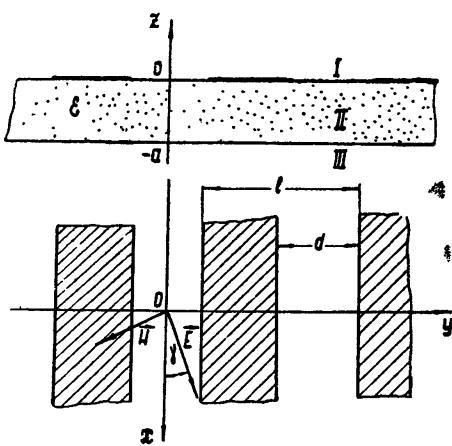


Рис. 1.

У одной из них вектор E параллелен краю ленты (E -поляризованная волна), а у другой—вектор H (H -поляризованные волны). В каждом случае поле периодично по y и вектор, параллельный краю ленты, имеет только x -составляющую. Поэтому искомое поле удобно представить в виде ряда Фурье. Именно, в случае E -поляризации

$$\begin{aligned}
 E_I &= \cos \gamma \left\{ e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ih_n z} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} \right\}; \\
 E_{II} &= \cos \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_n e^{-ih'_n z} + C_n e^{-ih'_n (z+a)}) e^{i \frac{2\pi n}{l} y}; \\
 E_{III} &= \cos \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-ih_n (z+a)} e^{i \frac{2\pi n}{l} y}; \\
 H_I &= j \cos \gamma \left\{ -e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{h_n}{k} e^{ih_n z} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} \right\} - \\
 &\quad - k \cos \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{n}{\chi} e^{ih_n z} e^{i \frac{2\pi n}{l} y}; \\
 H_{II} &= j \cos \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-B_n e^{-ih'_n z} + C_n e^{ih'_n (z+a)}) \frac{h'_n}{k} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} - \\
 &\quad - k \cos \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} (B_n e^{-ih'_n z} + C_n e^{ih'_n (z+a)}) \frac{n}{\chi} e^{i \frac{2\pi n}{l} y}; \\
 H_{III} &= j \cos \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} -D_n \frac{h_n}{k} e^{-ih_n (z+a)} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} - \\
 &\quad - k \cos \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \frac{n}{\chi} e^{-ih_n (z+a)} e^{i \frac{2\pi n}{l} y},
 \end{aligned} \tag{2}$$

а в случае H -поляризации

$$\begin{aligned}
 H_I &= \sin \gamma \left\{ e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ih_n z} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} \right\}; \\
 H_{II} &= \sin \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_n e^{-ih'_n z} + c_n e^{ih'_n (z+a)}) e^{i \frac{2\pi n}{l} y}; \\
 H_{III} &= \sin \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{-ih_n (z+a)} e^{i \frac{2\pi n}{l} y}; \\
 E_I &= -j \sin \gamma \left\{ -e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{h_n}{k} e^{ih_n z} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} \right\} + \\
 &\quad + k \sin \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{n}{\chi} e^{ih_n z} e^{i \frac{2\pi n}{l} y};
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 E_{II} = & -j \sin \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-b_n e^{-ih'_n z} + c_n e^{ih'_n(z+a)}) \frac{h'_n}{k\varepsilon} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} + \\
 & + k \sin \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} (b_n e^{-ih'_n z} + c_n e^{ih'_n(z+a)}) \frac{n}{\chi\varepsilon} e^{i \frac{2\pi n}{l} y}; \\
 E_{III} = & -j \sin \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} -d_n \frac{h_n}{k} e^{-ih_n(z+a)} e^{i \frac{2\pi n}{l} y} + \\
 & + k \sin \gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \frac{n}{\chi} e^{ih'_n(z+a)} e^{i \frac{2\pi n}{l} y},
 \end{aligned}$$

где

$$h_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad h'_n = \sqrt{k^2 \varepsilon - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad k = \frac{\omega}{c}; \quad \chi = \frac{kl}{2\pi} = \frac{l}{\lambda}.$$

Общим полем, возникшим в результате дифракции волны (1), будет суперпозиция полей (2) и (3).

Аналогично [1] условимся под \sqrt{A} понимать то значение корня, у которого $\operatorname{Im} \sqrt{A} > 0$, считая при $\operatorname{Im} \sqrt{A} = 0$, $\operatorname{Re} \sqrt{A} > 0$.

Поля (2) и (3) представляют собой суперпозицию гармоник, распространяющихся при $h'^2_n \geq 0$ или $h_n^2 \geq 0$ и затухающих, если $h'^2_n < 0$ или $h_n^2 < 0$ в областях, соответствующих h'_n и h_n . Из выражений (2) или (3) можно определить направление распространения каждой гармоники. В качестве примера рассмотрим n -ую гармонику для случая E -поляризации. Она имеет только x -составляющую вектора E во всем пространстве, а ее вектор H лежит в плоскости zOy (рис. 2а). На-

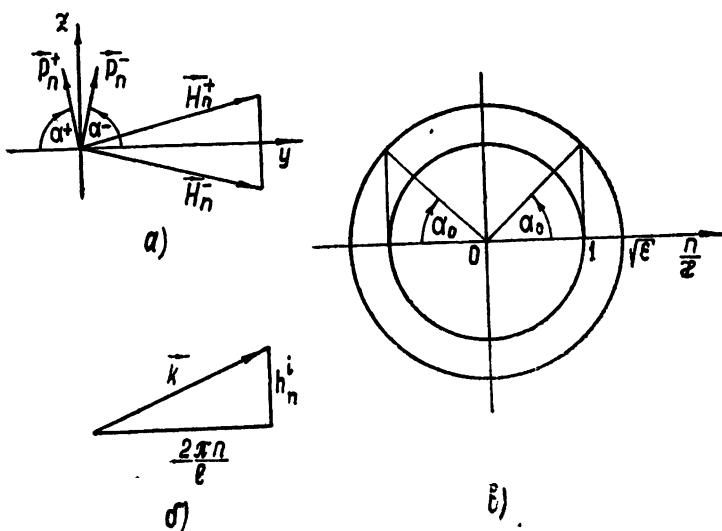


Рис. 2.

правление распространения этой гармоники определяется углом α , образованным вектором Умова—Пойнтинга p_n с осью y , который находится из равенства

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{H_z}{H_y} = \frac{n/\kappa}{h_n^l/k}.$$

Здесь

$$h_n^l = \sqrt{k^2 \varepsilon^l - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad \varepsilon^l = \begin{cases} \varepsilon & \text{для обл. II} \\ 1 & \text{для обл. I и III} \end{cases}.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{\varepsilon} \cos \alpha = n/\kappa, \quad \sin \alpha = h_n^l / k^l. \quad (3a)$$

Направление распространения гармоник можно найти также, если представить гармонику в виде $A_n e^{i(yk_y + zk_z)}$, где \mathbf{k} —волновой вектор для соответствующей среды. Те же результаты (3а) получаются аналогично и для случая H -поляризации.

Угол распространения n -ой гармоники легко находится как угол, образованный лучом, проходящим через точку пересечения перпендикуляра к точке n/κ с окружностью радиуса $\sqrt{\varepsilon^l}$ (рис. 2б).

Легко видеть, что для $n/\kappa > \sqrt{\varepsilon}$ гармоника будет везде поверхностью, т. е. убывающей с возрастанием z ; при $\sqrt{\varepsilon} \geq n/\kappa \geq 1$ она распространяется в области II (причем угол ее распространения меняется соответственно от 0 до α_0), а при $1 \geq n/\kappa \geq 0$ —в областях I и III, а также в области II.

Интересно также отметить, что в момент начала распространения ($\kappa = n/\sqrt{\varepsilon^l}$, где ε^l —диэлектрическая проницаемость соответствующей среды) гармоника распространяется только вдоль оси u независимо от угла поляризации γ . С увеличением κ угол ее распространения α увеличивается и направление распространения меняется относительно оси u в зависимости от угла γ и параметров решетки.

Для решения задачи о дифракции волн (1) на системе, изображенной на рис. 1, достаточно определить поле на одном из ее периодов, например, $-l/2 \leq y \leq l/2$. Для простоты выкладок будем полагать, что $\cos \gamma = 1$ в случае E -поляризации и $\sin \gamma = 1$ в случае H -поляризации, а полученное решение затем умножим соответственно на $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$ для произвольного угла γ .

Удовлетворим граничным условиям на периоде системы для каждой из поляризаций:

$$\begin{aligned} E_{I,t} &= E_{II,t} = 0 \quad (z = 0) \quad (\text{на металле}); \\ E_{I,t} &= E_{II,t}; \quad H_{I,t} = H_{II,t} \quad (\text{на диэлектрике}); \\ E_{III,t} &= E_{IV,t}; \quad H_{III,t} = H_{IV,t} \quad (z = -a). \end{aligned} \quad (4)$$

Остальные не выписанные здесь граничные условия на металле и диэлектрике могут быть использованы для определения поверхностных токов и зарядов, индуцируемых падающей волной.

2. a) Случай E -поляризации.

Подставив выражения для полей (2) в (4), получим:

$$\begin{aligned} 1 + A_0 &= B_0 + C_0 e^{ik_a \sqrt{\varepsilon}}; \quad A_n = B_n + C_n e^{ih_n' a}; \\ D_0 &= B_0 e^{ik_a \sqrt{\varepsilon}} + C_0; \quad D_n = B_n e^{ih_n' a} + C_n; \\ D_0 &= \sqrt{\varepsilon} (B_0 e^{ik_a \sqrt{\varepsilon}} - C_0); \quad D_n h_n = h_n' (B_n e^{ih_n' a} - C_n); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \left(1 - \frac{h'_n - h_n}{h'_n + h_n} e^{i2h'_n a} \right) e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = 0 \quad (\text{на металле});$$

$$\sum_{n \neq 0} B_n (h'_n + h_n) \left(1 - \frac{h'_n - h_n}{h'_n + h_n} e^{i2h'_n a} \right) e^{i \frac{2\pi n}{l} y} = .$$

$$= k \left\{ 2 - B_0 (V^\varepsilon + 1) \left[1 - \frac{(V^\varepsilon - 1)^2}{(V^\varepsilon + 1)^2} e^{i2ka V^\varepsilon} \right] \right\} (\text{на щели}).$$

Сделав замену

$$B_0 = \alpha_0^E \left(1 + \frac{V^\varepsilon - 1}{V^\varepsilon + 1} e^{i2ka V^\varepsilon} \right)^{-1}; \quad B_n = \alpha_n^E \left(1 + \frac{h'_n - h_n}{h'_n + h_n} e^{i2h'_n a} \right)^{-1};$$

$$2\pi y/l = \varphi,$$

получим систему уравнений, которую можно свести (аналогично [1]) к задаче Римана—Гильберта о восстановлении аналитической функции во всей области по ее значению на заданном контуре (рис. 3):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^E e^{in\varphi} = 0 \quad (\text{на металле}); \quad (5a)$$

$$\sum_{n \neq 0} \alpha_n^E (h'_n + h_n) \left[1 - \frac{(h'_n - h_n)^2}{(h'_n + h_n)^2} e^{i2h'_n a} \right] \times$$

$$\times \left(1 + \frac{h'_n - h_n}{h'_n + h_n} e^{i2h'_n a} \right)^{-1} e^{in\varphi} =$$

$$= k \left\{ 2 - \alpha_0^E (V^\varepsilon + 1) \times \quad (5b)$$

$$\times \left[1 - \frac{(V^\varepsilon - 1)^2}{(V^\varepsilon + 1)^2} e^{i2ka V^\varepsilon} \right] \times$$

$$\times \left(1 + \frac{V^\varepsilon - 1}{V^\varepsilon + 1} e^{i2ka V^\varepsilon} \right)^{-1} \right\} (\text{на щели}).$$

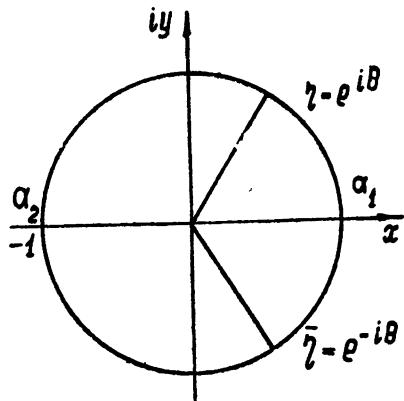


Рис. 3.

Действительно, если ввести

$$\chi_n = 1 + iG_n \quad (n \neq 0);$$

$$G_n = \frac{1}{2} (V^{\varepsilon} n^{-2} \varepsilon - 1 + V^{\varepsilon} n^{-2} - 1) \left[1 - \left(\frac{V^{\varepsilon} n^{-2} \varepsilon - 1 - V^{\varepsilon} n^{-2} - 1}{V^{\varepsilon} n^{-2} \varepsilon - 1 + V^{\varepsilon} n^{-2} - 1} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times e^{i4\pi \frac{a}{l} |n| V^{\varepsilon} n^{-2} \varepsilon - 1} \right] \left[1 + \frac{V^{\varepsilon} n^{-2} \varepsilon - 1 - V^{\varepsilon} n^{-2} - 1}{V^{\varepsilon} n^{-2} \varepsilon - 1 + V^{\varepsilon} n^{-2} - 1} e^{i4\pi \frac{a}{l} |n| V^{\varepsilon} n^{-2} \varepsilon - 1} \right]^{-1};$$

$$G_0 = \frac{V^{\varepsilon} + 1}{2} \left[1 - \left(\frac{V^{\varepsilon} - 1}{V^{\varepsilon} + 1} \right)^2 e^{i4\pi \frac{a}{l} V^{\varepsilon} - 1} \right] \left(1 + \frac{V^{\varepsilon} - 1}{V^{\varepsilon} + 1} e^{i4\pi \frac{a}{l} V^{\varepsilon}} \right)^{-1};$$

$$X_n = \alpha_n^E n$$

и продифференцировать (5) по φ , то после подстановки χ_n и G_0 в (5б) получим:

$$\sum_{n \neq 0} X_n e^{in\varphi} = 0 \quad (\text{на металле});$$

$$\sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = -ix + ix G_0 \alpha_0^E + \sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} \chi_n e^{in\varphi} \quad (\text{на щели}). \quad (6)$$

Точное решение системы (6) рассмотрено в работе [1] и имеет вид бесконечной системы уравнений относительно неизвестных α_0^E и X_n :

$$-\alpha_0^E = ix G_0 V_{[s]}^0 \sigma_0^E + 2cR_{[s]} - ix V_{[s]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_{[s]}^n + V_{[s]}^{-n}];$$

$$0 = ix G_0 V_0^0 \alpha_0^E + 2cR_0 - ix V_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_0^n + V_0^{-n}]; \quad (7)$$

$$X_m = ix G_0 V_m^0 \alpha_0^E + 2cR_m - ix V_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_m^n + V_m^{-n}],$$

где

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(\zeta - \eta)(\zeta - \bar{\eta})}} & (\zeta \in L_1) \\ 0 & (\zeta \in L_2) \end{cases};$$

$$V_n(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\zeta_n}{\zeta - \zeta_0} \sqrt{(\zeta - \eta)(\zeta - \bar{\eta})} d\zeta, \quad (\zeta_0 \in L_1);$$

$$V_m^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_n(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi; \quad (8)$$

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi;$$

$$R_{[s]} = \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{R_m}{m}; \quad V_{[s]}^n = \sum_{m \neq 0} (-1)^m \frac{V_m^n}{m}.$$

Полагая, что $\chi_n = 0$ при $n > N$, получим приближенные формулы для α_0^E и α_n^E :

$$\alpha_0^E = \frac{ix\Delta}{ixG_0\Delta + D}; \quad \alpha_n^E = \frac{-1}{n} \frac{ixD^{(n)}}{ixG_0\Delta + D}, \quad (9)$$

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccccc} V_{[s]}^0 & R_{[s]} & \chi_1 [V_{[s]}^1 + V_{[s]}^{-1}] & \dots & \chi_N [V_{[s]}^N + V_{[s]}^{-N}] \\ V_0^0 & R_0 & \chi_1 [V_0^1 + V_0^{-1}] & \dots & \chi_N [V_0^N + V_0^{-N}] \\ V_1^0 & R_1 & \chi_1 [V_1^1 + V_1^{-1}] - 1 & \dots & \chi_N [V_1^N + V_1^{-N}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_N^0 & R_N & \chi_1 [V_N^1 + V_N^{-1}] & \dots & \chi_N [V_N^N + V_N^{-N}] - 1 \end{array} \right|, \quad (10)$$

D — минор элемента $V_{[o]}^0$, $D^{(n)}$ — минор элемента $\chi_n [V_{[o]}^n + V_{[-o]}^{-n}]$.

Формулы для коэффициентов отражения и прохождения можно определить из соотношений (5) и (9):

$$A_0 = \frac{i\zeta\Delta}{i\zeta G_0\Delta + D} - 1; \\ D_0 = \frac{i\zeta\Delta}{i\zeta G_0\Delta + D} \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + 1} e^{i2\pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}} \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} e^{i4\pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Устремив $a/l \rightarrow \infty$ и потребовав выполнения условия излучения, получим коэффициенты отражения и прохождения для решетки, лежащей на полупространстве, заполненном диэлектриком:

$$A_0 = i\zeta\Delta \left(i\zeta\Delta \frac{\sqrt{\varepsilon} + 1}{2} + D \right)^{-1} - 1; \quad B_0 = i\zeta\Delta \left(i\zeta\Delta \frac{\sqrt{\varepsilon} + 1}{2} + D \right)^{-1}, \quad (12)$$

где

$$\gamma_n = 1 + \frac{i}{2} \left(\sqrt{\frac{x^2}{n^2} \varepsilon - 1} + \sqrt{\frac{x^2}{n^2} - 1} \right).$$

При $\varepsilon = 1$ формулы (11) и (12) переходят в известные выражения [1] для решетки, помещенной в свободном пространстве. Если положить $\chi_n = 0$ при $n \geq 1$, то придем к решению задачи в длинноволновом приближении, аналогичному полученному Ламбом для решетки в свободном пространстве [2]:

$$A_0 = \frac{i\zeta(1-G_0)2\ln \cos(\pi d/2l) - 1}{i\zeta G_0 2\ln \cos(\pi d/2l) + 1}; \\ D_0 = \frac{i\zeta 2\ln \cos(\pi d/2l)}{i\zeta G_0 2\ln \cos(\pi d/2l) + 1} \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + 1} e^{i2\pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}} \times \\ \times \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} e^{i4\pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}} \right)^{-1}. \quad (13)$$

Соотношения выполняются для диапазона $x \leq 0,5/\sqrt{\varepsilon}$ и переходят в формулы Ламба при $\varepsilon = 1$.

При вычислениях по формулам (11) в диапазоне $0 \leq x \leq 3$ удобно пользоваться выражениями Δ и D , представленными через произведения χ_n [1]:

$$D = K_0 + K_1 \gamma_1 + K_2 \gamma_2 + K_3 \gamma_3 + K_{12} \chi_1 \gamma_2 + K_{13} \chi_1 \gamma_3 + K_{23} \chi_2 \gamma_3 + K_{123} \chi_1 \chi_2 \gamma_3; \quad (14)$$

$$\Delta = H_0 D + H_1 \gamma_1 + H_2 \gamma_2 + H_3 \gamma_3 + H_{12} \gamma_1 \gamma_2 + H_{13} \gamma_1 \gamma_3 + H_{23} \gamma_2 \gamma_3 + H_{123} \chi_1 \chi_2 \gamma_3.$$

Коэффициенты K и H выражаются через полиномы Лежандра от $u = \cos(\pi d/l)$ и для ряда значений u даны в таблице 1.

б) Случай H -поляризации.

Удовлетворив граничным условиям (4) для полей (3), получим соотношения

$$(-1 + a_0) \sqrt{\varepsilon} = -b_0 + c_0 e^{ika \sqrt{\varepsilon}}; \quad a_n h_n \varepsilon = h'_n (-b_n + c_n e^{ih'_n a});$$

$$\sqrt{\varepsilon} d_0 = b_0 e^{ika \sqrt{\varepsilon}} + c_0; \quad a_n h_n = h'_n (b_n e^{ih'_n a} - c_n); \quad (15)$$

$$d_0 = b_0 e^{ika \sqrt{\varepsilon}} + c_0; \quad d_n = b_n e^{ih'_n a} + c_n;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n h'_n \left[1 + \frac{\varepsilon h_n - h'_n}{\varepsilon h_n + h'_n} e^{i2h'_n a} \right] e^{in\varphi} = 0 \text{ (на металле);} \quad (15a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left[\frac{\varepsilon h_n + h'_n}{2\varepsilon h_n} - \frac{(\varepsilon h_n - h'_n)}{2\varepsilon h_n (\varepsilon h_n + h'_n)} e^{i2h'_n a} \right] e^{in\varphi} = 1 \text{ (на щели).} \quad (15b)$$

Сделав аналогично предыдущему случаю замены

$$\alpha_0^H = b_0 \left[\frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{(\sqrt{\varepsilon} - 1)^2}{2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon} + 1)} e^{i2ka \sqrt{\varepsilon}} \right] - 1;$$

$$\alpha_n^H = b_n \left[\frac{\varepsilon h_n + h'_n}{2\varepsilon h_n} - \frac{(\varepsilon h_n - h'_n)^2}{2\varepsilon h_n (\varepsilon h_n + h'_n)} e^{i2h'_n a} \right];$$

$$\delta_n = 1 + ig_n \quad (n \neq 0);$$

$$g_n = (1 + \varepsilon) \sqrt{x^2 n^{-2} \varepsilon - 1} \sqrt{x^2 n^{-2} - 1} \times \\ \times \frac{\varepsilon \sqrt{x^2 n^{-2} - 1} + \sqrt{x^2 n^{-2} \varepsilon - 1} + (\varepsilon \sqrt{x^2 n^{-2} - 1} - \sqrt{x^2 n^{-2} \varepsilon - 1}) e^{i4\pi \frac{a}{l} |n| \sqrt{x^2 n^{-2} \varepsilon - 1}}}{(x \sqrt{x^2 n^{-2} - 1} + \sqrt{x^2 n^{-2} \varepsilon - 1})^2 - (\varepsilon \sqrt{x^2 n^{-2} - 1} - \sqrt{x^2 n^{-2} \varepsilon - 1})^2 e^{i4\pi \frac{a}{l} |n| \sqrt{x^2 n^{-2} \varepsilon - 1}}};$$

$$g_0 = (1 + \varepsilon) \frac{\sqrt{\varepsilon} + 1 - (\sqrt{\varepsilon} - 1) e^{i4\pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}}}{(\sqrt{\varepsilon} + 1)^2 - (\sqrt{\varepsilon} - 1)^2 e^{i4\pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}}};$$

$$x_n = n \alpha_n^H$$

и продифференцировав (15) по φ , получим сводящуюся к задаче Римана—Гильберта систему уравнений:

$$\sum_{n \neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0 \text{ (на щели);}$$

$$\sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = ix g_0 (\alpha_0^H + 1) + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \delta_n \text{ (на металле),}$$

которая решается так же, как и система (6). Точное решение ее имеет вид бесконечной системы уравнений

$$-\alpha_0^H = ix g_0 V_{[e]}^0 \alpha_0^H + 2cR_{[e]} + ix g_0 V_{[e]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \delta_n [V_{[e]}^n + V_{[e]}^{-n}];$$

$$0 = ix g_0 V_0^0 \alpha_0^H + 2cR_0 + ix g_0 V_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \delta_n [V_0^n + V_0^{-n}];$$

$$x_m = ix g_0 V_m^0 \alpha_0^H + 2cR_m + ix g_0 V_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \delta_n [V_m^n + V_m^{-n}],$$

где

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{(\zeta + \gamma_0)(\zeta + \bar{\gamma}_0)}} & (\zeta \in L_2) \\ 0 & (\zeta \in L_1) \end{cases};$$

$$V_n(\zeta_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_2} \frac{\zeta_n}{\zeta - \zeta_0} \sqrt{(\zeta + \gamma_0)(\zeta + \bar{\gamma}_0)} d\zeta \quad (\zeta \in L_2);$$

остальные обозначения те же, что и в (8). Решение этой бесконечной системы уравнений запишется следующим образом:

$$\alpha_0^H = \frac{-i \times g_0 \Delta}{i \times g_0 \Delta + D}; \quad \alpha_n^H = \frac{1}{n} \frac{i \times g_0 D^{(n)}}{i \times g_0 \Delta + D},$$

где $D, D^{(n)}$ и Δ имеют вид (10), если заменить χ_n на δ_n . Их также можно представить в форме (14), но аргументом полиномов Лежандра будет — $u = \cos [\pi(l-d)/l]$; при численных расчетах удобно пользоваться таблицей 1.

Коэффициенты отражения и прохождения можно найти из соотношений (15):

$$a_0 = 1 - \frac{2g_0}{1 + \varepsilon} D [i \times g_0 \Delta + D]^{-1};$$

$$d_0 = \frac{D}{i \times g_0 \Delta + D} \frac{4 \sqrt{\varepsilon} e^{i 2 \pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}}}{(\sqrt{\varepsilon} + 1)^2 - (\sqrt{\varepsilon} - 1)^2 e^{i 4 \pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}}}. \quad (16)$$

Они также переходят в выражения для коэффициентов отражения и прохождения решетки, лежащей на полупространстве, заполненном диэлектриком:

$$a_0 = 1 - \frac{2}{\sqrt{\varepsilon} + 1} D \left[i \times \Delta \frac{1 + \varepsilon}{1 + \sqrt{\varepsilon}} + D \right]^{-1};$$

$$d_0 = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + 1} D \left[i \times \Delta \frac{1 + \varepsilon}{1 + \sqrt{\varepsilon}} + D \right]^{-1}. \quad (17)$$

Здесь

$$\delta_n = 1 + i(1 + \sqrt{\varepsilon}) \frac{\sqrt{x^2 n^{-2} - 1} \sqrt{x^2 n^{-2} \varepsilon - 1}}{\varepsilon \sqrt{x^2 n^{-2} - 1} + \sqrt{x^2 n^{-2} \varepsilon - 1}}.$$

При $\varepsilon = 1$ (16) и (17) согласуются с принципом двойственности и переходят в соотношения для решетки, помещенной в свободном пространстве [1].

Решение задачи для случая H -поляризации в длинноволновом приближении имеет вид:

$$a_0 = \frac{i \times g_0 2 \ln \cos [\pi(l-d)/2l] + (1 - g_0)}{i \times g_0 2 \ln \cos [\pi(l-d)/2l] + 1};$$

$$(18)$$

$$d_0 = \frac{4 \sqrt{\varepsilon} e^{i 2 \pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}}}{(\sqrt{\varepsilon} + 1)^2 - (\sqrt{\varepsilon} - 1)^2 e^{i 4 \pi \frac{a}{l} \times \sqrt{\varepsilon}}} \left[i \times g_0 2 \ln \cos \frac{\pi(l-d)}{2l} + 1 \right]^{-1}.$$

Таблица 1

Индекс	$u = -0,6$		$u = -0,4$		$u = -0,2$		$u = 0,0$		$u = 0,2$		$u = 0,4$		$u = 0,6$		
	K		H		K		H		K		H		K		
	K	H	K	H	K	H	K	H	K	H	K	H	K	H	
0	-0,500	-1,610	-0,500	-1,200	-0,500	-0,916	-0,500	-0,693	-0,500	-0,693	-0,500	-0,500	-0,357	-0,500	
1	-0,480	-0,640	-0,455	-0,490	-0,420	-0,360	-0,375	-0,250	-0,250	-0,250	-0,250	-0,250	-0,054	-0,180	-0,040
2	0,397	0,051	0,319	0,002	0,257	0,007	0,219	0,031	0,205	0,031	0,203	0,031	0,193	0,003	0,039
3	0,334	0,008	0,303	0,041	0,301	0,043	0,281	0,021	0,228	0,021	0,223	0,021	0,134	0,003	0,013
12	-0,377	-0,590	-0,275	-0,328	-0,179	-0,163	-0,102	-0,070	-0,048	-0,070	-0,070	-0,070	-0,017	-0,006	-0,004
13	-0,315	-0,419	-0,262	-0,288	-0,239	-0,211	-0,205	-0,141	-0,141	-0,141	-0,141	-0,141	-0,027	-0,024	-0,005
23	-0,232	-0,030	-0,32	-0,020	-0,091	-0,076	-0,042	-0,061	-0,042	-0,037	-0,037	-0,037	-0,013	-0,014	-0,003
123	0,213	0,341	0,091	0,110	0,031	0,005	0,028	0,008	0,005	0,005	0,005	0,005	0	0	0

Таблица 2

α	$u = 0,0$		$u = 0,2$		$u = 0,6$										
	A_0		D_0		A_0										
	A_0	D_0	A_0	D_0	A_0	D_0									
0,4	-0,768	-0,264	i	0,344	-0,041	i	-0,826	-0,176	i	0,244	-0,014	i	-0,960	-0,102	i
0,707	-0,378	-0,215	i	0,245	+0,715	i	-0,514	-0,320	i	0,366	+0,558	i	-0,913	-0,230	i
0,8	-0,589	-0,437	i	0,343	+0,582	i	-0,732	-0,415	i	0,364	+0,420	i	-0,950	-0,217	i
0,98	-0,318	-0,282	i	-0,276	+0,675	i	-0,439	-0,365	i	-0,133	+0,648	i	-0,862	-0,312	i
1,0	-0,988	-0,030	i	-0,012	+0,029	i	-0,988	-0,013	i	0,000	+0,018	i	-0,992	-0,002	i
1,1	-0,641	-0,156	i	-0,211	+0,299	i	-0,693	-0,163	i	-0,166	+0,280	i	-0,845	-0,169	i
1,2	-0,562	-0,101	i	-0,328	+0,217	i	-0,606	-0,120	i	-0,266	+0,219	i	-0,771	-0,185	i
1,4	-0,479	-0,207	i	-0,434	+0,181	i	-0,550	-0,141	i	-0,375	+0,127	i	-0,733	-0,214	i
1,8	-0,571	-0,116	i	-0,390	-0,184	i	-0,619	-0,133	i	-0,365	-0,141	i	-0,766	-0,177	i
2,0	-0,645	-0,063	i	-0,202	-0,341	i	-0,670	-0,052	i	-0,181	-0,320	i	-0,720	-0,077	i
2,2	-0,774	-0,064	i	-0,010	-0,263	i	-0,818	-0,001	i	+0,047	-0,198	i	-0,836	+0,022	i
2,4	-0,588	-0,060	i	0,242	-0,345	i	-0,613	-0,078	i	+0,212	-0,330	i	-0,797	-0,013	i
2,5	-0,663	-0,085	i	-0,219	-0,240	i	-0,719	-0,070	i	-0,183	-0,198	i	-0,805	-0,032	i
2,6	-0,575	-0,151	i	0,296	-0,263	i	-0,672	-0,128	i	0,224	-0,213	i	-0,772	-0,063	i
2,8	-0,467	-0,102	i	0,437	-0,105	i	-0,609	-0,117	i	0,319	-0,112	i	-0,722	-0,035	i
2,9	-0,335	-0,297	i	0,578	-0,181	i	-0,541	-0,123	i	0,391	-0,057	i	-0,716	-0,004	i
3,0	-0,583	+0,001	i	0,313	+0,101	i	-0,603	+0,006	i	-0,297	+0,101	i	-0,778	-0,226	i

Эти формулы легко переходят в формулы, аналогичные полученным в [2], если положить $\varepsilon = 1$. Пределы применимости (18) те же, что и (13).

3. Соотношения между отдельными гармониками (5) и (15)

$$\begin{aligned} A_n &= B_n + C_n e^{i h_n' a}; \quad \varepsilon a_n h_n = h_n' (-b_n + c_n e^{i h_n' a}); \\ D_n h_n &= h_n' (B_n e^{i h_n' a} - C_n); \quad \varepsilon d_n h_n = h_n' (b_n e^{i h_n' a} - c_n) \end{aligned} \quad (19)$$

позволяют сделать некоторые физические выводы. Условие $h_n^2 \geq 0$ соответствует возникновению и существованию распространяющейся n -ой гармоники в областях I и III, а $h_n'^2 \geq 0$ — в области II. Очевидно, что если $\varepsilon \neq 1$, то n -ая гармоника при увеличении параметра $z = l/\lambda$ сначала начинает распространяться в области II (когда $z = |n|/\sqrt{\varepsilon}$), а затем — в областях I и III (при $z = |n|$). Из соотношений (19) видно, что в случае H -поляризованной волны n -ая гармоника в момент ее возникновения в области II существует только в этой области, т. е. поверхностное поле n -ой гармоники „отсасывается“ из областей I и III в область II. И наоборот, в момент $z = |n|$ n -ая гармоника существует только вне диэлектрика.

При падении E -поляризованной волны такой обмен полем n -ой гармоники, как и в случае H -поляризации, происходит только между областями II и III. Если угол поляризации γ произволен, то имеет место суперпозиция этих явлений.

Коэффициенты отражения и прохождения для случая $\varepsilon = 2 + 0,01i$; $a/l = 0,25$, приведенные в таблице 2, показывают, что даже при малых $|\varepsilon|$ диэлектрик оказывает существенное влияние на дифракцию, особенно в диапазоне $0,9/\sqrt{\varepsilon} \leq z \leq 2,0$. Сравнивая данные таблицы 2 и результаты работы [1], легко убедиться, что пренебрежение влиянием диэлектрического слоя в реальных образцах может привести к значительной погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, 382 (1962).
2. Х. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
26 мая 1962 г.

DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY PLANE METAL ARRAY PLACED ON A DIELECTRIC LAYER

O. A. Tretiakov, V. P. Shestopalov

The normal incidence is considered of an arbitrarily polarized plane electromagnetic wave upon an infinite row of perfectly conducting metal strips placed on the layer of an isotropic dielectric. The diffraction field is calculated by the method given in paper I, the wavelength, the bandwidth and the array period being arbitrary. The approximate formulas for the reflection and transmission factors are presented as well as the calculation results based upon these formulas.

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ ЭКРАНИРОВАННОЙ РЕШЕТКЕ (случай нормального падения)

О. А. Третьяков, Д. В. Хорошун, В. П. Шестопалов

Методом, предложенным в работе [1], решена задача о дифракции плоской электромагнитной волны, нормально падающей на экранированную решетку с диэлектрическим заполнением. Последняя представляет собой отражающую систему, образованную плоской ленточной металлической решеткой, параллельно которой помещена идеально проводящая плоскость; пространство между экранирующей плоскостью и решеткой заполнено изотропным диэлектриком с произвольной проницаемостью ϵ_2 (над решеткой—среда с ϵ_1). Соотношения между длиной волны, периодом решетки и шириной ленты произвольны. Такая периодическая структура представляет интерес при анализе двухзеркальных решетчатых антенн, а также при исследовании распространения электромагнитных волн в кольцевом и спиральном волноводах, помещенных в диэлектрическую среду (усредненные граничные условия).

1. На рис. 1 представлена экранированная решетка в плоскости $x = \text{const}$. Здесь введены обозначения: l — период решетки, $l - d$ — ширина ленты металла, a — расстояние между решеткой и идеальным экраном, ϵ_2 — диэлектрическая проницаемость среды пространства между решеткой и экраном (область II), ϵ_1 — диэлектрическая проницаемость

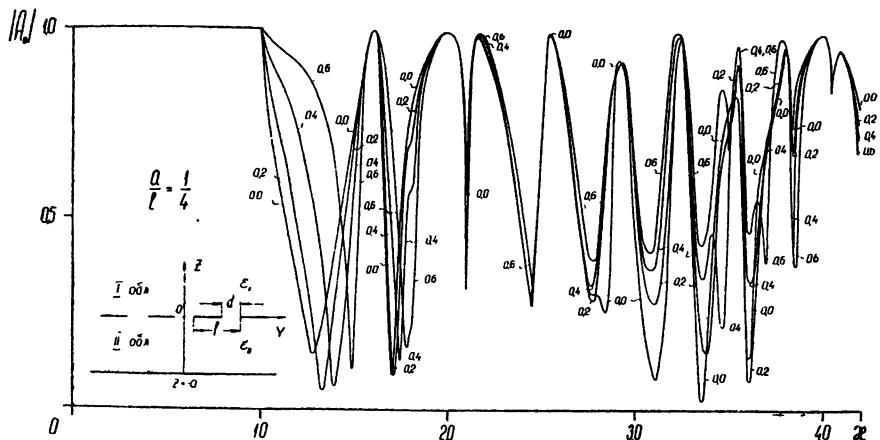


Рис. 1. Схематическое изображение экранированной решетки. Зависимость коэффициента отражения от $z=l/\lambda$ для различных значений $u=\cos(\pi d/l) > 0$ (кривые обозначены соответствующими значениями $u=0,0; 0,2; 0,4; 0,6$).

полупространства (область I). Ленты предполагаются бесконечно тонкими и идеально проводящими. На такую отражающую систему нормально падает плоская электромагнитная волна, вектор E которой произвольно ориентирован относительно края ленты (оси $0x$):

$$E(x, y, z, t) = E(x, y) e^{-ik\sqrt{\epsilon_1}z} e^{-i\omega t}.$$

Для определения поля, возникшего в результате дифракции такой волны, достаточно рассмотреть два случая: когда вектор $E(x, y) = iE_0$ (случай E -поляризации) и когда $E = -jE_0$, где E_0 — амплитуда падающей плоской волны (случай H -поляризации). Для произвольной поляризации поле представляет собой суперпозицию дифракционных полей, обусловленных обеими поляризациями. Если принять $E_0=1$, то вследствие периодичности отражающей системы вдоль оси Oy и отсутствия возмущений вдоль оси Ox поле в каждом случае удобно представить в виде ряда Фурье.

а) E -поляризация:

$$\begin{aligned} E_I &= e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ih'_n z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}; \\ E_{II} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ B_n e^{-ih''_n z} + C_n e^{ih''_n (z+a)} \right\} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}; \\ H_I &= j \left\{ -\sqrt{\varepsilon_1} e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{h'_n}{k} e^{ih'_n z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \right\} - \\ &\quad - k \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{n}{\chi} e^{ih'_n z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}; \\ H_{II} &= j \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h''_n}{k} \left\{ -B_n e^{-ih''_n z} + C_n e^{ih''_n (z+a)} \right\} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \right\} - \\ &\quad - k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\chi} \left\{ B_n e^{-ih''_n z} + C_n e^{ih''_n (z+a)} \right\} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}; \end{aligned} \tag{1}$$

б) H -поляризация:

$$\begin{aligned} H_I &= e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ih'_n z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}; \\ H_{II} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ b_n e^{-ih''_n z} + c_n e^{ih''_n (z+a)} \right\} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}; \\ E_I &= -j \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1}z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{h'_n}{k\varepsilon_1} e^{ih'_n z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \right\} + \\ &\quad + k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\chi\varepsilon_1} a_n e^{ih'_n z} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}; \\ E_{II} &= -j \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h''_n}{k\varepsilon_2} \left\{ -b_n e^{-ih''_n z} + c_n e^{ih''_n (z+a)} \right\} e^{i\frac{2\pi n}{l}y} \right\} + \\ &\quad + k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\chi\varepsilon_2} \left\{ b_n e^{-ih''_n z} + c_n e^{ih''_n (z+a)} \right\} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$h'_n = \sqrt{k^2\varepsilon_1 - (2\pi n/l)^2}; \quad h''_n = \sqrt{k^2\varepsilon_2 - (2\pi n/l)^2}; \quad k = 2\pi/\lambda; \quad \chi = kl/2\pi = l/\lambda$$

(i, j, k — орты прямоугольной системы координат).

Если в падающей плоской волне вектор E образует с осью Ox угол γ , то дифракционное поле есть суперпозиция полей E -и H -поляризаций, умноженных соответственно на $\cos \gamma$ и $\sin \gamma$.

2. Искомые дифракционные поля подчиняются граничным условиям

$$z = 0: \begin{cases} E_{It} = E_{Ht} = 0 & \text{(на металле)} \\ E_{It} = E_{Ht}; \quad H_{It} = H_{Ht} & \text{(на диэлектрике)} \end{cases}; \quad (3)$$

$$z = -a: \quad E_{Ht} = 0$$

и удовлетворяют условиям излучения. Для отыскания поля во всем пространстве (область I и область II) достаточно найти его на одном из периодов, например, при $-l/2 \leq y \leq l/2$.

а) Случай E -поляризации.

Подставив выражения полей (1) в граничные условия (3), получим:

$$1 + A_0 = B_0 + C_0 e^{ik\sqrt{\epsilon_1} a}; \quad B_n = -C_n e^{ih''_n a}; \quad (4)$$

$$A_n = B_n + C_n e^{ih'_n a} \quad (n \neq 0);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (1 - e^{i2h''_n a}) e^{i\frac{2\pi n}{l} y} = 0 \quad (\text{металл}); \quad (5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \left\{ h'_n (1 - e^{i2h''_n a}) + h''_n (1 + e^{i2h''_n a}) \right\} e^{i\frac{2\pi n}{l} y} = 2k \quad (\text{щель}). \quad (5a)$$

Если ввести обозначения

$$\alpha_n = B_n (1 - e^{i2h''_n a}); \quad X_n = n\alpha_n; \quad (2\pi/l)y = \varphi;$$

$$\gamma_n = 1 + iG_n \frac{l}{2\pi |n|} = 1 + \frac{i}{2} \left\{ \sqrt{\frac{x^2}{n^2} \epsilon_1 - 1} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{x^2}{n^2} \epsilon_2 - 1} \left(1 + e^{i4\pi \frac{a}{l} |n| \sqrt{\frac{x^2}{n^2} \epsilon_2 - 1}} \right) \left(1 - e^{i4\pi \frac{a}{l} |n| \sqrt{\frac{x^2}{n^2} \epsilon_2 - 1}} \right)^{-1} \right\},$$

то, продифференцировав соотношение (5) по φ и сделав в соотношениях (5) и (5a) ряд преобразований, получим систему уравнений:

$$\sum' X_n e^{in\varphi} = 0 \quad (|\varphi| \leq \Theta); \quad (6)$$

$$\sum' X_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = -ix + ix G_0 \sigma_0 + \sum' X_n \gamma_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} \quad (\Theta \leq |\varphi| \leq \pi), \quad (6a)$$

где символ \sum' означает суммирование по n от $-\infty$ до ∞ , исключая $n = 0$, а $\Theta = \pi d/l$. Система уравнений (6), (6a) представляет задачу Римана—Гильберта, которая детально исследована в работе [1]; поэтому, опустив промежуточные выкладки, можем записать систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, из которой можно найти искомые величины σ_0 , X_n , а значит A_0 , A_n и т. д.:

$$ix V_{[a]}^0 = (ix G_0 V_{[a]}^0 + 1) \alpha_0 + 2cR_{[a]} + \sum_{n=-1}^{\infty} X_n \gamma_n (V_{[a]}^n + V_{[a]}^{-n});$$

$$i\alpha V_0^0 = i\alpha G_0 V_0^0 \alpha_0 + 2cR_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n (V_m^n + V_m^{-n}); \quad (7)$$

$$i\alpha V_m^0 = i\alpha G_0 V_m^0 \alpha_0 + 2cR_m + \sum_{n=1}^{\infty} X_n [\chi_n (V_m^n + V_m^{-n}) - \delta_{mn}] \\ (m = 1, 2, \dots).$$

Величины V_m^n , R_m , V_m^n , R_m определяются по формулам (28), (33), (34), (40) работы [1] и записываются через полиномы Лежандра, аргументом которых служит величина $u = \cos(\pi d/l)$.

б) Случай H -поляризации.

Удовлетворяя граничным условиям (3) для полей (2), получим следующие соотношения для искомых величин:

$$-1 + a_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} (-b_0 + c_0 e^{ih' \varepsilon_2 a}); \quad a_n = \frac{h_n'' \varepsilon_1}{h_n' \varepsilon_2} (-b_n + c_n e^{ih_n'' a}); \quad (8)$$

$$c_n = b_n e^{ih_n'' a} \quad (n \neq 0);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left\{ \left(1 + \frac{h_n'' \varepsilon_1}{h_n' \varepsilon_2} \right) + \left(1 - \frac{h_n'' \varepsilon_1}{h_n' \varepsilon_2} \right) e^{i2h_n'' a} \right\} e^{in\varphi} = 2 \quad (\text{щель}); \quad (9)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left(1 - e^{i2h_n'' a} \right) h_n'' e^{in\varphi} = 0 \quad (\text{металл}). \quad (9a)$$

После некоторых замен и преобразований в соотношениях (9) и (9a) можно получить систему уравнений, подобную (6), (6a). Так как эти замены аналогичны случаю E -поляризации, ниже сразу приводится окончательная система линейных алгебраических уравнений для нахождения β_0 и x_n :

$$i\alpha V_{\varepsilon_2}^- g_0 V_{[\varepsilon]}^0 = \{ i\alpha V_{\varepsilon_2}^- g_0 V_{[\varepsilon]}^0 + 1 \} \beta_0 + 2c'R_{[\varepsilon]} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \delta_n (V_m^n + V_m^{-n});$$

$$-i\alpha V_{\varepsilon_2}^- g_0 V_0^0 = i\alpha V_{\varepsilon_2}^- g_0 V_0^0 \beta_0 + 2c'R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \delta_n (V_m^n + V_m^{-n}); \quad (10)$$

$$-i\alpha V_{\varepsilon_2}^- g_0 V_m^0 = i\alpha V_{\varepsilon_2}^- g_0 V_m^0 \beta_0 + 2c'R_m + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \{ \delta_n (V_m^n + V_m^{-n}) - \delta_{mn} \} \\ (m = 1, 2, \dots).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\beta_n = b_n \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{h_n'' \varepsilon_1}{h_n' \varepsilon_2} \right) + \left(1 - \frac{h_n'' \varepsilon_1}{h_n' \varepsilon_2} \right) e^{i2h_n'' a} \right\} - \delta_{0n};$$

$$\delta_n = 1 + ig_n \sqrt{\frac{x^2}{n^2} - 1}; \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1; & m = n \\ 0; & m \neq n \end{cases};$$

$$g_n = 2 \left(1 - e^{i2h_n'' a} \right) \left[1 + \frac{h_n'' \varepsilon_1}{h_n' \varepsilon_2} + \left(1 - \frac{h_n'' \varepsilon_1}{h_n' \varepsilon_2} \right) e^{i2h_n'' a} \right]^{-1};$$

V_m^n , R_m , $V_{[o]}^n$, $R_{[o]}$ определяются через полиномы Лежандра так же, как и в случае E -поляризации; однако аргументом полиномов Лежандра в этом случае являются величины $v = \cos [\pi(l-d)/l] = -u$.

3. Бесконечные системы уравнений (7) и (10) позволяют найти точное решение дифракционной задачи. Решив эти уравнения и воспользовавшись соотношениями (4) и (8), можно найти поля во всем пространстве, подставив значения гармоник в выражения полей (1) и (2).

Поскольку, однако, ряды, содержащие χ_n и δ_n , достаточно быстро сходятся, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \rightarrow 0,$$

можно ограничиться конечным числом уравнений, полагая, что

$$\begin{cases} \chi_n \\ \delta_n \end{cases} \neq 0 \quad (n \leq N); \quad \begin{cases} \chi_n \\ \delta_n \end{cases} = 0 \quad (n > N).$$

В этом случае решение систем уравнений (7) и (10) можно представить в виде:

$$A_0 = \frac{i \times \Delta \chi}{i \times \Delta_\chi G_0 + D_\chi} - 1; \quad A_n = -\frac{1}{n} \frac{i \times D_\chi^{(n)}}{i \times \Delta_\chi G_0 + D_\chi}; \quad (11)$$

$$a_0 = \frac{D_\delta \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2} g_0}{i \times \sqrt{\varepsilon_2} g_0 \Delta_\delta + D_\delta} + 1; \quad a_n = -\frac{1}{n} \frac{i \times \sqrt{\varepsilon_2} g_0 D_\delta^{(n)}}{i \times \sqrt{\varepsilon_2} g_0 \Delta_\delta + D_\delta} \frac{\varepsilon_1 h_n''}{\varepsilon_2 h_n'} g_n, \quad (12)$$

где

$$\Delta_\chi = \begin{vmatrix} V_{[o]}^0 & R_{[o]} & \chi_1(V_{[o]}^1 + V_{[o]}^{-1}) & \dots & \chi_N(V_{[o]}^N + V_{[o]}^{-N}) \\ V_0^0 & R_0 & \chi_1(V_0^1 + V_0^{-1}) & \dots & \chi_N(V_0^N + V_0^{-N}) \\ V_1^0 & R_1 & \chi_1(V_1^1 + V_1^{-1}) - 1 & \dots & \chi_N(V_1^N + V_1^{-N}) \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ V_N^0 & R_N & \chi_1(V_N^1 + V_N^{-1}) & \dots & \chi_N(V_N^N + V_N^{-N}) - 1 \end{vmatrix}, \quad (13)$$

D_χ — минор элемента $V_{[o]}^0$, $D_\chi^{(n)}$ — минор элемента $\chi_n(V_{[o]}^N + V_{[o]}^{-N})$, а определители Δ_δ , D_δ , $D_\delta^{(n)}$ образуются заменой χ_n на δ_n в определителях Δ_χ , D_χ , $D_\chi^{(n)}$ соответственно. Для расчетов по приближенным формулам (11) и (12) удобно расписать определители Δ и D по произведениям χ_n (или δ_n) и представить их в виде:

$$D = K_0 + K_1 \chi_1 + K_2 \chi_2 + K_3 \chi_3 + K_{12} \chi_1 \chi_2 + K_{13} \chi_1 \chi_3 + K_{23} \chi_2 \chi_3 + K_{123} \chi_1 \chi_2 \chi_3;$$

$$\Delta = H_0 D + H_1 \chi_1 + H_2 \chi_2 + H_3 \chi_3 + H_{12} \chi_1 \chi_2 + H_{13} \chi_1 \chi_3 + H_{23} \chi_2 \chi_3 + H_{123} \chi_1 \chi_2 \chi_3,$$

если ограничиться случаем, когда $N = 3$. Таблица коэффициентов K и H для различных значений u приведена в работе [3].

Если предположить, что $\chi_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$), то получим решение задачи в длинноволновом приближении, аналогичное Ламбу [2]. В этом случае коэффициенты отражения для обоих случаев поляризаций

$$A_0 = \frac{i \times (1 - G_0) 2 \ln \cos(\pi d/2l) - 1}{i \times G_0 2 \ln \cos(\pi d/2l) + 1}; \quad (14)$$

$$a_0 = \frac{1 - V_{\varepsilon_1/\varepsilon_2} g_0 + i \times V_{\varepsilon_2} g_0 2 \ln \cos [\pi(l-d)/2l]}{i \times V_{\varepsilon_2} g_0 2 \ln \cos [\pi(l-d)/2l] + 1},$$

где

$$G_0 = \frac{1}{2} \left(V_{\varepsilon_1} + V_{\varepsilon_2} \frac{1 + e^{i 4 \pi \frac{a}{l} \times V_{\varepsilon_2}}}{1 - e^{i 4 \pi \frac{a}{l} \times V_{\varepsilon_2}}} \right);$$

$$g_0 = 2 \left(1 - e^{i 4 \pi \frac{a}{l} \times V_{\varepsilon_2}} \right) \left\{ \left(1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right) + \left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right) e^{i 4 \pi \frac{a}{l} \times V_{\varepsilon_2}} \right\}^{-1}.$$

Если устремить $a/l \rightarrow \infty$, удовлетворить условиям излучения и положить $\varepsilon_1 = 1$, то формулы (14) перейдут в соотношения для решетки, лежащей на полупространстве, заполненном диэлектриком [3]; при $\varepsilon_2 = 1$ они согласуются с принципом двойственности и переходят в известные [1] выражения для одиночной решетки.

4. Аналогично [3] можно сделать некоторые выводы относительно полей из соотношений между отдельными гармониками (4) и (8):

$$A_n = B_n + C_n e^{i h_n'' a}; \quad a_n h_n' \varepsilon_2 = h_n'' \varepsilon_1 b_n (1 + e^{i h_n'' a}). \quad (15)$$

При дифракции H -поляризованной волны имеет место „отсос“ энергии n -ой гармоники из одной из областей в ту область, где начинает распространяться эта гармоника. Это соответствует равенству нулю h_n' или h_n'' . В случае E -поляризации такого явления не происходит.

Характер распространения гармоник удобно понять из рис. 2 работы [3]. Как видно из [3] и анализа выражений для полей (2) и (3), величина n/x имеет смысл косинуса угла, образованного направлением распространения гармоники с осью Oy . Индексы i и j на рис. 2 [3] принимают значения $i=1, j=2$ при $|\varepsilon_1| < |\varepsilon_2|$ и $i=2, j=1$ при $|\varepsilon_2| < |\varepsilon_1|$. В области $n/x > V_{\varepsilon_j}$ нет распространяющейся волны; область $V_{\varepsilon_i} < n/x < V_{\varepsilon_j}$ соответствует случаю, когда волна распространяется в оптически более плотной среде, а область $n/x < V_{\varepsilon_i}$ — в оптически менее плотной. Направление распространения гармоники определяется с помощью перпендикуляра, восстановленного в точке n/x до пересечения с соответствующей окружностью (рис. 2 [3]).

Из соотношений (11) и (12) видно, что в резонансных точках

$$x_{\text{рез}} = \frac{i M}{2a V_{\varepsilon_2}} \quad (M = 1, 2, 3, \dots)$$

коэффициент отражения имеет максимум. Физический смысл этого становится ясным, если ввести параметр $\Psi = a V_{\varepsilon_2}/\lambda$. Тогда

$$\Psi_{\text{рез}} = 0,5 M, \quad (16)$$

т. е. электрическое расстояние между решеткой и экраном кратно целому числу полуволн.

Представляет интерес параметр $\xi = \lambda/s V_{\varepsilon_2}$, где s — расстояние от решетки до экрана вдоль направления распространения гармоники; этот параметр является величиной, обратной электрическому расстоянию:

$$\xi = \frac{n}{s V_{\varepsilon_2}} \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{n^2}{s^2}} / n \frac{a}{l}.$$

Легко убедиться, что $\xi(n/\kappa)$ имеет максимум в точке $\kappa = n\sqrt{2}/\sqrt{\varepsilon_2}$, т. е. наиболее короткое электрическое расстояние между решеткой и экраном для n -ой гармоники такое, когда она распространяется под углом 45° относительно оси Oy . При соответствующем выборе a/l и ε_2 в этой точке будут иметь место явления резонансного характера.

Зависимость дифракционных полей от параметров отражающей системы в случае E -поляризации исследовалась путем решения системы уравнений (7) с удержанием 6 членов ряда. При этом параметры менялись в пределах $0 \leq \kappa \leq 4,2$ с шагом 0,05, $1/16 \leq a/l \leq 4/3$ с шагом $1/16$, $-0,6 \leq u \leq 0,6$ с шагом 0,2; значения ε_1 и ε_2 были приняты равными единице. Влияние диэлектрика учитывалось в том же диапазоне κ и u для систем с $a/l=2/16$; при этом считалось, что $\varepsilon_1=1$ и $\varepsilon_2=1,03+0,0002i$; $2+0,02i$; $4+0,4i$. Расчеты велись на электронной вычислительной машине. На рис. 1—6 представлены графики $|A_0|$ и гармоник дифракционных спектров в диапазоне $0 \leq \kappa \leq 4,2$ для случая $a/l=0,25$; $\varepsilon_1=1$; $\varepsilon_2=1$; $u = \cos(\pi d/l)$ изменяется от $-0,6$ до $0,6$ через 0,2.

Точки $\kappa = 2,0$; $4,0$ соответствуют $\Psi_{\text{рез}}$; основная гармоника $|A_0|$ принимает значение, равное 1, а гармоники A_1, A_2, A_3 — нулю. Между этими значениями κ существует ряд максимумов, которые обусловлены

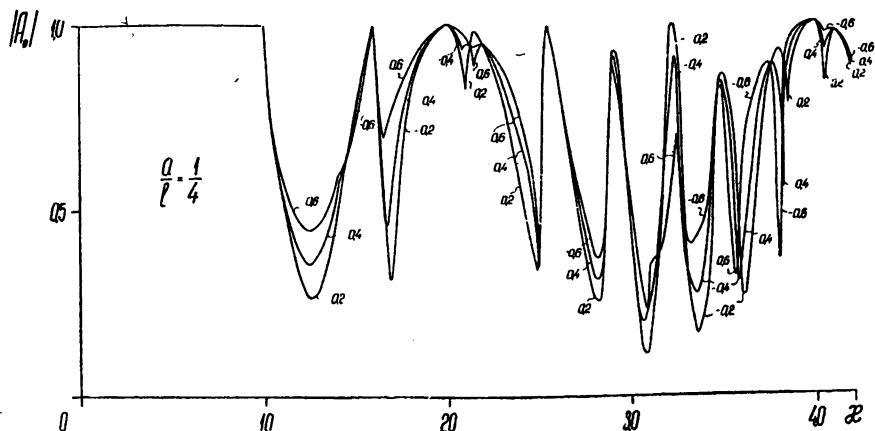


Рис. 2. Коэффициент отражения для $u < 0$ (кривые обозначены соответствующими значениями $u = -0,2; -0,4; -0,6$).

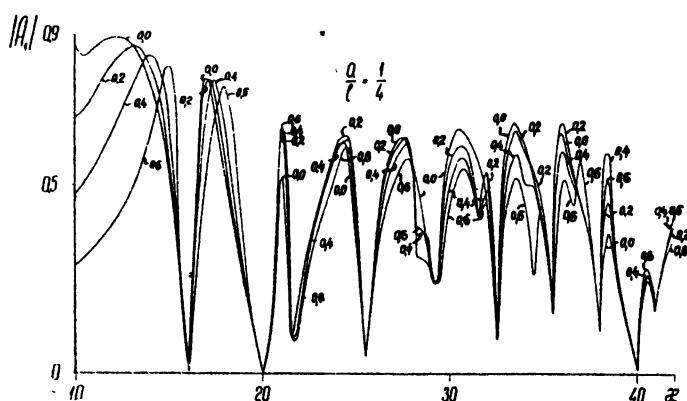
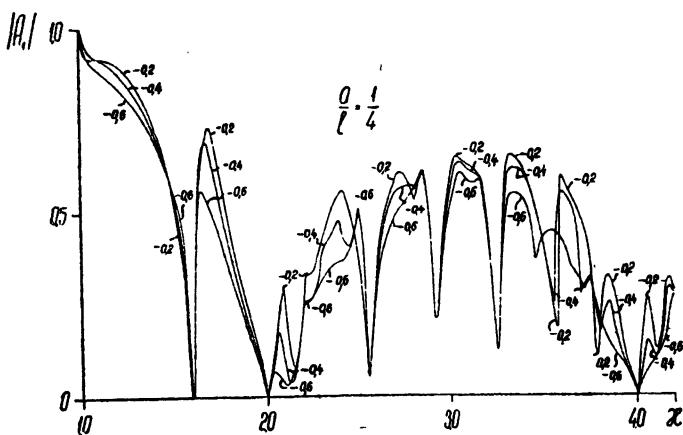
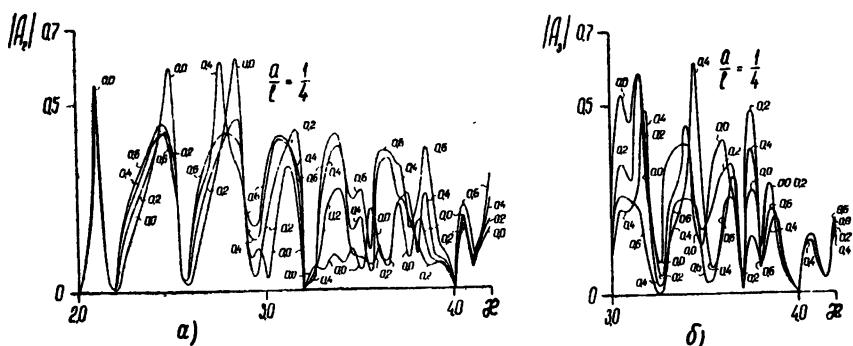
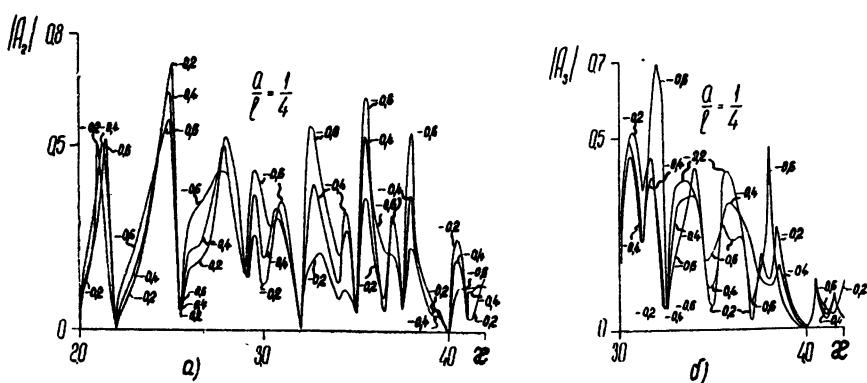


Рис. 3. Зависимость первой амплитуды дифракционного спектра от $\kappa = l/\lambda$ для различных $u > 0$ (обозначения те же, что и на рис. 1).

Рис. 4. То же, что и на рис. 3, но при $u < 0$.Рис. 5. Зависимость второй (а) и третьей (б) амплитуд дифракционных спектров от x при различных $u > 0$.Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но при $u < 0$.

тем, что гармоники при отражении и прохождении получают сдвиг фазы, вследствие чего появляются $\Psi_{\text{рез}}$ при других значениях x . С увеличением ширины лент $u \geq -0,6$ нулевая гармоника уменьшается, а амплитуды высших гармоник увеличиваются; при $u = 0,0 - 0,2$ нулевая гармоника снова начинает увеличиваться за счет уменьшения высших гармоник. С ростом a/l число $x_{\text{рез}}$ в указанном диапазоне увели-

чивается; увеличивается также и число дополнительных $\chi_{\text{рез}}$, обусловленных сдвигом фазы при прохождении сквозь решетку.

При наличии диэлектрического заполнения $\chi_{\text{рез}}$, согласно (16), смещаются и число их в исследуемом диапазоне увеличивается пропорционально $\sqrt{\epsilon_2}$. Минимальная часть ϵ_2 заметно оказывается на амплитуде основной гармоники. При $\epsilon_2 = 4 + 0,4i$ кривые имеют в значительной степени слаженный вид. Расчеты по формулам (12) в случае дифракции H -поляризованной волны также выполнены на электронной вычислительной машине. При этом параметры изменялись следующим образом: $0 \leq k \leq 3,0$ с шагом 0,05, $0,0 \leq u \leq 0,6$ с шагом 0,2, $a/l = 1/8; 1/4; 1/2; 1; 0$; ϵ_1 и ϵ_2 по-прежнему считались равными единице. При расчетах $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ принимались отличными от 0, а δ_n при $n > 3$ пренебрегали. В этом случае также выполняется условие резонанса (15), а кривые ведут себя аналогично случаю E -поляризации. Так как для определенной решетки с фиксированными параметрами и фиксированным значением χ , отличным от $\chi_{\text{рез}}$, $A_n = |A_n|e^{i\Phi_n}$ и $a_n = |a_n|e^{i\Phi_n}$ имеют разные фазы, то при падении на экранированную решетку волны с вектором E , произвольно ориентированным относительно края ленты, можно получить отраженную волну с электрической поляризацией. Выбрав соответствующим образом параметры отражающей системы для фиксированной длины волны, можем получить волну с круговой поляризацией ($|A_0| = |a_0|$, а $\Phi_0 - \Psi_0 = \pm \pi/2$). В этом случае представляет интерес диапазон $0 \leq z \leq 1,0$.

Необходимо отметить, что закон сохранения энергии для решетки с экраном (без диэлектрика; этот случай представлен графиками на рис. 1–6) имеет следующий вид:

$$|A_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^N |A_n|^2 \frac{h_n}{k} = 1, \quad |a_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \frac{h_n}{k} = 1, \quad (17)$$

где $h_n = |h_n|$ при $n \leq N$. В точках, где $h_n/k = \sqrt{1 - n^2/\chi^2}$ достаточно мало, амплитуда поля может быть достаточно большой, а при $n = \infty$ произвольное значение $|A_n|$ не нарушает (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, 382 (1962).
2. Х. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
3. О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 353 (1963).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
30 июня 1962 г.

ELECTROMAGNETIC WAVES DIFFRACTION ON A PLANAR SCREENED ARRAY (THE NORMAL INCIDENCE)

O. A. Tretiakov, D. V. Khoroshun, V. P. Shestopalov

By the method suggested in [1] the problem is considered of the diffraction of a plane electromagnetic wave normally incident upon the screened array with a dielectric filling. The latter is the reflecting system formed by a planar strip metal array parallel to the perfectly conducting surface; the space between the plane and the array is filled with isotropic dielectric of arbitrary permittivity ϵ_2 (there is a medium with ϵ_1 above the array). The wavelength, the array period and the width of a strip are arbitrary. Such a periodic structure is of an interest for analysis of two-mirror array antennas as well as for studying of the electromagnetic waves propagation in ring and spiral waveguides immersed in a dielectric medium (averaged boundary conditions).

О ДИСПЕРСИИ ВОЛН В СПИРАЛИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В. Н. Иванов, Е. Т. Харченко

Получено дисперсионное уравнение для волн, распространяющихся между двумя анизотропно проводящими плоскостями. Это уравнение использовано для отыскания дисперсионного уравнения симметричных и несимметрических волн в спирале прямоугольного сечения в случае, когда угол подъема витка спирали постоянен, а большая сторона поперечного сечения велика по сравнению с меньшей.

Замедляющая система в виде спирали с прямоугольным поперечным сечением нашла применение в лампе с поперечным током [1]; она также может быть использована в обычной ЛБВ с ленточным электронным пучком. Теория такой замедляющей системы [2] развита только для случая, когда на одну длину волны приходится несколько витков и когда можно пренебречь изменением фазы тока в пределах одного витка. Однако при использовании подобной замедляющей системы в ЛОВ фаза тока в пределах одного витка существенно меняется и поэтому распределение поля в поперечном сечении уже нельзя считать симметричным.

В настоящей работе исследованы дисперсионные свойства спирали прямоугольного сечения в случае несимметрических волн.

1. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН МЕЖДУ ДВУМЯ АНИЗОТРОПНО ПРОВОДЯЩИМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Рассмотрим сначала волны, распространяющиеся между двумя анизотропно проводящими плоскостями, находящимися в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Систему координат расположим как указано на рис. 1; углы между осью u и направлениями идеальной проводимости верх-

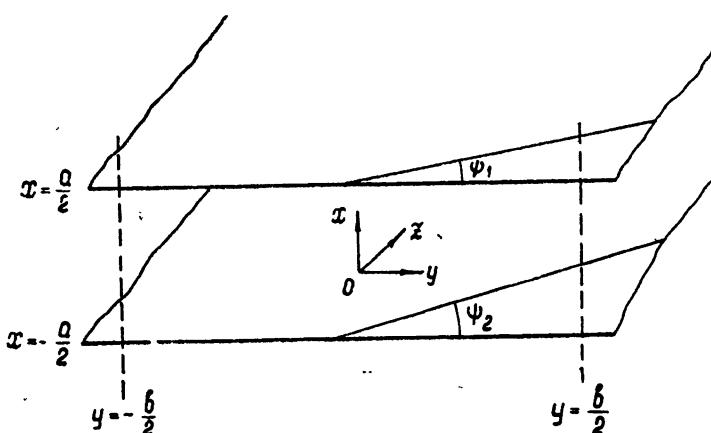


Рис. 1.

ней и нижней плоскостей обозначим соответственно через φ_1 и φ_2 . Если предположить, что все величины пропорциональны опускаемому в дальнейшем множителю $e^{i(\omega t - \beta z)}$, то для векторного потенциала, возбуждаемого токами, протекающими в верхней и нижней плоскостях, может быть записано следующее выражение (интегрирование по z выполняется аналогично [3]):

$$\begin{aligned} A = & \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i_1(\eta) K_0 \left[\gamma \sqrt{\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + (y - \eta)^2} \right] d\eta + \\ & + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i_2(\eta) K_0 \left[\gamma \sqrt{\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + (y - \eta)^2} \right] d\eta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $i_1(y)$ и $i_2(y)$ —векторы поверхностной плотности тока соответственно в верхней и нижней плоскостях, $\gamma^2 = \beta^2 - k^2$, $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$, K_0 — модифицированная функция Бесселя 2-го рода нулевого порядка.

Определив по формуле [4]

$$E = - \frac{i\omega}{k^2} (\text{grad div } A + k^2 A) \quad (2)$$

составляющие электрического поля и подставив в граничные условия

$$\begin{aligned} E_y \cos \varphi_1 + E_z \sin \varphi_1 &= 0 \quad (x = a/2); \\ E_y \cos \varphi_2 + E_z \sin \varphi_2 &= 0 \quad (x = -a/2), \end{aligned} \quad (3)$$

выражающие тот факт, что составляющая электрического поля вдоль направления проводимости на плоскостях равна нулю, получим для определения поверхностной плотности тока систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dy^2} - 2i\beta \operatorname{tg} \varphi_1 \frac{d}{dy} + k^2 - \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\eta) K_0(\gamma |y - \eta|) d\eta + \\ & + \left[\frac{d^2}{dy^2} - i\beta(\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2) \frac{d}{dy} + k^2 - \gamma^2 \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\eta) K_0[\gamma \sqrt{a^2 + (y - \eta)^2}] d\eta = 0; \\ & \left[\frac{d^2}{dy^2} - i\beta(\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2) \frac{d}{dy} + k^2 - \gamma^2 \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\eta) K_0[\gamma \sqrt{a^2 + (y - \eta)^2}] d\eta + \\ & + \left[\frac{d^2}{dy^2} - 2i\beta \operatorname{tg} \varphi_2 \frac{d}{dy} + k^2 - \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 \right] \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\eta) K_0(\gamma |y - \eta|) d\eta = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

в которой через $f_1(y)$ и $f_2(y)$ обозначены проекции на ось y вектора поверхностной плотности тока соответственно в верхней и нижней плоскостях.

2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (4)

Для решения системы (4) преобразуем ее по Фурье, учитывая теорему о свертке [5] и соотношение [6]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0(\gamma \sqrt{a^2 + y^2}) e^{iwy} dy = \pi \frac{e^{-a \sqrt{w^2 + \gamma^2}}}{\sqrt{w^2 + \gamma^2}}.$$

После выполнения этого преобразования (4) сводится к следующей системе алгебраических уравнений:

$$P_{11}(w) F_1(w) + P_{12}(w) e^{-a \sqrt{w^2 + \gamma^2}} F_2(w) = 0; \quad (5)$$

$$P_{12}(w) e^{-a \sqrt{w^2 + \gamma^2}} F_1(w) + P_{22}(w) F_2(w) = 0,$$

где

$$F_{1,2}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1,2}(y) e^{iwy} dy$$

—преобразованные по Фурье y -компоненты плотности тока,

$$P_{rp}(w) = w^2 + \beta (\operatorname{tg} \varphi_r + \operatorname{tg} \varphi_p) w + \gamma^2 \operatorname{tg} \varphi_r \operatorname{tg} \varphi_p - k^2 \quad (r, p = 1, 2).$$

Решением системы (5) будет множество функций, отличных от нуля в точках, где обращается в нуль функциональный определитель, составленный из коэффициентов при $F_1(w)$ и $F_2(w)$. Решения, удовлетворяющие физическому смыслу задачи, могут быть записаны в виде:

$$F_1(w) = C_s \delta(w - w_s);$$

$$F_2(w) = -C_s \frac{P_{11}(w_s)}{P_{12}(w_s)} e^{a \sqrt{w_s^2 + \gamma^2}} \delta(w - w_s),$$

где δ —дельта-функция Дирака, а w_s —корень уравнения

$$P_{11}(w) P_{22}(w) - P_{12}^2(w) e^{-2a \sqrt{w^2 + \gamma^2}} = 0. \quad (6)$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получаем решения исходной системы (4):

$$f_1(y) = \frac{C_s}{\sqrt{2\pi}} e^{-iw_s y}; \quad (7)$$

$$f_2(y) = -\frac{C_s}{\sqrt{2\pi}} \frac{P_{11}(w_s)}{P_{12}(w_s)} e^{a \sqrt{w_s^2 + \gamma^2}} e^{-iw_s y}.$$

Из решения (7) следует, что между двумя анизотропно проводящими плоскостями может существовать система незатухающих волн, постоянные распространения которых в направлении u определяются как корни w_s уравнения (6). Таким образом, уравнение (6) является дисперсионным уравнением для постоянной распространения в направлении оси u , если заданы частота ω и постоянная распространения β вдоль оси z .

3. СПИРАЛЬ С ПОСТОЯННЫМ УГЛОМ ПОДЪЕМА

Уравнение (6) может быть использовано для расчета дисперсии спирали прямоугольного поперечного сечения, если длина поперечного

сечения b велика по сравнению с его шириной a . В этом случае влиянием меньших сторон спирали на распределение поля вблизи больших сторон можно пренебречь и считать, что выражения для токов в больших сторонах могут быть записаны в виде суперпозиции решений (7). Используя дополнительные граничные условия на меньших сторонах, получим однородную систему для определения амплитуд токов C_s , а условие совместности этой системы даст еще одну связь между постоянными распространения (одна дается уравнением (6)). Это позволит найти зависимость β от ω .

В общем случае (при произвольных углах подъема витка спирали на больших сторонах φ_1 и φ_2) решение задачи связано со значительными трудностями; поэтому в дальнейшем мы разберем часто встречающийся на практике случай постоянного угла подъема витка спирали. Тогда можно положить $\varphi_1 = -\varphi_2 = \psi$ и уравнение (6) будет иметь пары корней, равных по величине и противоположных по знаку. Следовательно, в рассматриваемом случае скорости распространения волн вдоль положительного и отрицательного направления оси y равны (в общем случае, очевидно, это не имеет места).

Записывая решение для токов в больших сторонах в виде суммы таких двух волн, имеющих равные и противоположно направленные скорости вдоль оси y , в качестве приближенных граничных условий на меньших сторонах потребуем равенства нулю суммы токов в обеих больших сторонах в точках $y = \pm b/2$. Получающаяся система уравнений для определения амплитуд токов, как легко проверить, будет совместна, если выполняется очевидное условие, согласно которому в плоскости xOy изменение фазы волны, вышедшей из некоторой точки и вернувшейся в ту же точку после отражения от обеих меньших сторон, кратно 2π :

$$2w_s b = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (8)$$

Найдя из (8) величину постоянной распространения в y -направлении w_s и подставляя ее в (6), получим дисперсионное уравнение для спирали с постоянным углом подъема витка.

4. СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ ($m = 0$)

Рассмотрим сначала случай симметричного распределения поля в поперечном сечении спирали ($m = 0$). Дисперсионное уравнение тогда имеет вид:

$$(\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \psi - k^2)^2 - (\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \psi + k^2) e^{-2a\gamma} = 0$$

и, как непосредственно видно, распадается на два следующие уравнения:

$$\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \psi - k^2 - (\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \psi + k^2) e^{-a\gamma} = 0; \quad (9)$$

$$\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \psi - k^2 + (\gamma^2 \operatorname{tg}^2 \psi + k^2) e^{-a\gamma} = 0. \quad (10)$$

Из сопоставления этих уравнений с выражениями (7) следует, что уравнение (9) описывает волны, у которых токи в обеих анизотропно проводящих плоскостях равны по величине и направлению, а уравнение (10)—волны, у которых токи имеют противоположные направления. В спирале имеет место последний случай, поэтому в качестве дисперсионного уравнения для спирали прямоугольного сечения в случае симметричного распределения поля следует взять уравнение (10), которое удобно преобразовать к виду:

$$k = \operatorname{tg} \psi \gamma \operatorname{ctg} (a\gamma/2). \quad (11)$$

Используя соотношение

$$\gamma^2 = \beta^2 - k^2,$$

из уравнения (11) найдем величину коэффициента замедления (отношение фазовой скорости v волны в направлении z к скорости света c в свободном пространстве):

$$\frac{v}{c} = \frac{k}{\beta} = [1 + \operatorname{ctg}^2 \psi \operatorname{th}(a\gamma/2)]^{-1/2}. \quad (12)$$

Пользуясь уравнениями (11) и (12), можно найти зависимость коэффициента замедления от величины волнового числа k . На рис. 2

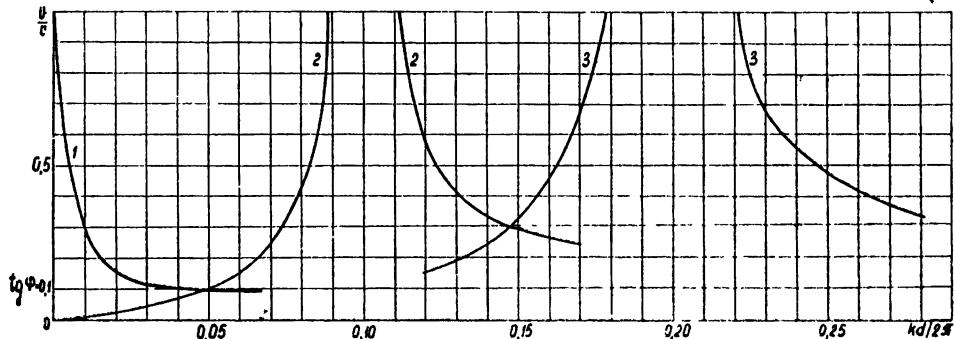


Рис. 2. Зависимость коэффициента замедления от волнового числа для спирали прямоугольного поперечного сечения при $b/a = 5$ ($d = 2b \operatorname{tg} \psi$ — период спирали):
1 — $m = 0$, 2 — $m = 1$, 3 — $m = 2$.

кривая 1 изображает такую зависимость для некоторой выбранной геометрии спирали.

Следует отметить, что полученные для симметричного распределения поля результаты полностью совпадают с результатами работы [2] для спирали в однородной среде.

5. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ ($m \neq 0$)

В случае несимметричных волн ($m \neq 0$) вместо (11) и (12) из уравнения (6) с учетом условия (8) можно после некоторых преобразований получить следующие выражения:

$$k^2 = \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \sec^2 \psi + \Gamma^2 \operatorname{tg}^2 \psi \operatorname{cth}(\Gamma a) \pm \Gamma \operatorname{tg} \psi \sqrt{\frac{\Gamma^2 \operatorname{tg}^2 \psi}{\operatorname{sh}^2(\Gamma a)} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \frac{1 + \operatorname{cth}(\Gamma a)}{\cos^2 \psi}}; \quad (13)$$

$$\gamma^2 = \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \psi + \Gamma^2 [1 + \operatorname{tg}^2 \psi \operatorname{cth}(\Gamma a)] \pm \Gamma \operatorname{tg} \psi \sqrt{\frac{\Gamma^2 \operatorname{tg}^2 \psi}{\operatorname{sh}^2(\Gamma a)} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \frac{1 + \operatorname{cth}(\Gamma a)}{\cos^2 \psi}}, \quad (14)$$

где $\Gamma^2 = \gamma^2 + m^2 \pi^2/b^2$, а знаки перед радикалами для одной и той же ветви дисперсионной кривой следует брать одинаковыми. Результаты расчета зависимости коэффициента замедления для несимметричных волн от волнового числа k для той же геометрии спирали, что и в случае $m = 0$, приведены на рис. 2 (кривые 2 и 3).

Границы применимости решений с различным m можно установить аналогично тому, как это сделано для спирали круглого сечения в [7]. Очевидно, что решение для $m = 0$ должно хорошо описывать поле в однозаходной спирали, если длина волны велика по сравнению

с длиной одного витка спирали; решение для $m = 1$ соответствует случаю, когда длина волны сравнима с длиной витка спирали, $m = 2$ — случаю, когда длина волны сравнима с половиной длины витка и т. д. Если длина волны много больше длины витка или если вдоль витка укладывается m длин волн, то происходит соответственно нулевой или m -й пространственный резонанс. Вблизи m -го пространственного резонанса преобладающим будет поле m -й пространственной гармоники, поле которой и описывается полученным решением.

Таким образом, на основании графиков рис. 2 можно в случае необходимости построить зависимость от волнового числа и коэффициента замедления для основной пространственной гармоники подобно тому, как это делается в [7].

6. О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛНЫ В СПИРАЛИ

Для более наглядного представления о процессе распространения волны вдоль спирали прямоугольного сечения рассмотрим распределение токов в случае несимметричных волн.

На основании (7) и (6) отношение величин токов в верхней и нижней плоскостях можно записать таким образом:

$$\frac{f_2(y)}{f_1(y)} = \pm \sqrt{\frac{P_{11}(w_s)}{P_{22}(w_s)}}. \quad (15)$$

Вдали от пространственного резонанса замедление велико, поэтому велика величина β , а следовательно, и γ , в силу чего второе слагаемое в уравнении (6) будет малым по сравнению с первым и уравнение (6) можно приближенно заменить двумя следующими:

$$P_{11}(w) = 0; \quad (16)$$

$$P_{22}(w) = 0. \quad (17)$$

Отсюда следует, что в случае волн, постоянные распространения которых в направлении y являются решениями уравнения (16), амплитуда тока в нижней плоскости будет много меньше амплитуды тока в верхней плоскости. В случае волн, постоянные распространения которых являются решениями уравнения (17), мала будет амплитуда тока в верхней плоскости. Физически это означает, что в силу ярко выраженного поверхностного характера волна, возбуждаемая в верхней плоскости, наводит незначительный ток в нижней и наоборот.

Таким образом, вдали от пространственного резонанса распространение волны вдоль спирали прямоугольного сечения можно представить себе как распространение одной неоднородной плоской волны в одиночной анизотропно проводящей плоскости, переходящей последовательно с одной стороны спирали на другую. При этом распространение такой волны может происходить как в направлении витков спиралей, так и в поперечном к ним направлении (аналогично правовинтовой и левовинтовой волнам в круглой спирали [7]).

При приближении к пространственному резонансу растет скорость волны и теряется ее поверхностный характер. Благодаря этому волна, распространяющаяся вдоль одной стороны спирали, наводит значительный ток в другой стороне, и наоборот. Поэтому близ пространственного резонанса распределение поля в поперечном сечении спирали приближается к распределению поля в стоячей волне. Чисто стоячей волны в поперечном направлении может стать только при $\beta = 0$, так как тогда $f_1(y) = f_2(y)$; это, однако, не реализуется для неэкранированной спирали.

7. ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ СПИРАЛИ НА ЕЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим вопрос о влиянии на характер дисперсии изменения отношения b/a сторон сечения спирали.

Из условия равенства суммы квадратов постоянных распространения по всем трем направлениям квадрату волнового числа для свободного пространства следует, что постоянная распределения в направлении x будет мнимой и равной $i\Gamma$. Поэтому слабее всего поверхностный характер поля выражен при нулевом пространственном резонансе ($m = 0$) и, следовательно, изменение величины b/a сильнее должно сказаться на дисперсионной кривой вблизи нулевого пространственного резонанса.

Соответствующие расчеты показывают, что изменение величины b/a практически не влияет на дисперсию несимметричных волн, в тоже время существенно меняя дисперсию симметричной волны. В частности, при больших b/a (порядка 10) наименьшее значение v/c в области нулевого пространственного резонанса может значительно превосходить величину $\sin \psi^*$, т. е. в диапазоне частот, где амплитуда основной пространственной гармоники преобладает в составе поля, не удается получить значительного замедления.

Проведенный анализ дисперсионного уравнения спирали прямоугольного поперечного сечения, полученного из дисперсионного уравнения для волн между двумя анизотропно проводящими плоскостями, показывает, что процессы, протекающие в такой спирали, аналогичны процессам в спирали круглого сечения.

Необходимо также добавить, что при не слишком больших b/a пренебрежение изменением фазы токов на меньших сторонах может привести к значительной ошибке. Ее можно несколько уменьшить, приняв за величину b половину периметра поперечного сечения спирали. Так как величина этой ошибки будет, очевидно, расти с ростом m , трудно ожидать хорошего количественного совпадения развитой теории с результатами эксперимента при $m > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. L. Dunn, W. A. Hartman, Proc. IRE, 44, 883 (1956).
2. C. C. Johnson, IRE Trans. on Electron Devices, ED-6, 189 (1959).
3. В. Н. Иванов, Радиотехника и электроника, 4, 1838 (1959).
4. Дж. Стрэттон, Теория электромагнетизма, ГИТТЛ, М., 1948.
5. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ГИТТЛ, М., 1948.
6. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений, ГИТТЛ, М., 1951.
7. Л. Я. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступила в редакцию
3 мая 1962 г.

ON THE WAVE DISPERSION IN A HELIX WITH RECTANGULAR CROSS SECTION

V. N. Ivanov, E. T. Kharchenko

The dispersion equation is obtained for waves propagating between two anisotropic conductive planes. This equation is used to derive the dispersion equation for symmetrical and non-symmetrical waves in the helix with a rectangular cross section, the winding angle of the helix being constant and one side of the cross section greatly exceeds another.

* Ордината пересечения кривых 1 и 2 рис. 2 значительно больше, чем $\sin \psi$.

О ВЛИЯНИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ СИЛ СВЯЗИ НА ПРОЦЕССЫ ЗАТЯГИВАНИЯ В СЛОЖНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В. П. Рубаник, З. Л. Кравченко

Рассматриваются сложные автоколебательные системы, состоящие из простого автогенератора, индуктивно связанного с нелинейным резонатором. Выясняется влияние нелинейности резонатора и запаздывания сил связи на процессы затягивания в таких системах.

В радиотехнике часто встречаются сложные автоколебательные системы, состоящие из связанных между собой автогенератора и резонатора. В таких системах, как известно, имеет место явление затягивания, которое состоит в том, что в некоторой области частот вблизи резонанса между генератором и резонатором могут существовать два устойчивых периодических режима колебаний, причем тот или иной режим устанавливается в зависимости от того, с какой стороны вести настройку резонатора.

Исследованию явления затягивания в сложных автоколебательных системах посвящено много теоретических и экспериментальных работ ([¹⁻⁸] и др.). Однако во всех этих работах предполагается, что силы взаимодействия между генератором и резонатором действуют мгновенно, без запаздывания. Между тем в реальных высокочастотных системах силы взаимодействия будут иметь некоторое запаздывание, обусловленное наличием некоторого расстояния между генератором и резонатором. Хотя это запаздывание, выраженное в секундах, будет очень малым, но оно может оказаться значительным по сравнению с естественной единицей измерения времени для рассматриваемой системы — периодом колебаний. В некоторых случаях запаздывание может быть специально введено в систему.

В нашей работе исследуется влияние запаздывания сил связи на процессы затягивания в сложных автоколебательных системах. При этом мы воспользуемся асимптотическим методом построения приближенных решений, разработанным для обыкновенных квазилинейных колебательных систем Крыловым, Боголюбовым, Митропольским [⁹] и обобщенным на случай колебательных систем с запаздыванием в работе [¹⁰].

1. СЛУЧАЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРА И РЕЗОНАТОРА С НЕЛИНЕЙНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Рассмотрим сначала взаимодействие автогенератора, который описывается уравнением типа Ван-дер-Поля, с нелинейным резонатором, который описывается уравнением типа Дуффинга, при наличии запаздывающей индуктивной связи. Будем предполагать, что частота собственных колебаний резонатора, коэффициенты и запаздывания сил связи медленно изменяются во времени.

Такое взаимодействие будет описываться системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) + \omega_1^2 u(t) &= \mu [1 - \alpha u^2(t)] \dot{u}(t) + R_{12}(t) \dot{v}[t - \Delta(t)]; \\ \ddot{v}(t) + \omega_2^2 v(t) &= -2n\dot{v}(t) + Av^3(t) + R_{21}(t) \ddot{u}[t - \Delta(t)],\end{aligned}\quad (1)$$

где ω_1 , μ , α , n — вещественные положительные постоянные, A — вещественная постоянная любого знака, $\omega_2(t)$, $\Delta(t)$, $R_{12}(t)$, $R_{21}(t)$ — вещественные медленно изменяющиеся во времени функции. Будем еще предполагать, что $\omega_2(t)$ мало отличается от ω_1 .

Для применимости асимптотического метода мы должны потребовать выполнения условий:

$$\begin{aligned}\mu &\ll \omega_1; \quad n \ll \omega_1; \\ |A| &\ll \omega_1^2; \quad |R_{12}(t)| \ll 1; \quad |R_{21}(t)| \ll 1.\end{aligned}$$

Заменой переменных

$$\omega_1(t) = t', \quad u \sqrt{\alpha} = x, \quad v = y$$

систему (1) приведем к виду:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t') + x(t') &= \varepsilon [1 - x^2(t')] \dot{x}(t') + \varepsilon r_{12}(\tau) \ddot{y}[t' - \Delta'(\tau)]; \\ \ddot{y}(t') + [1 + \varepsilon \gamma(\tau)] y(t') &= -2\varepsilon \lambda \dot{y}(t') + \varepsilon \beta y^3(t') + \\ &+ \varepsilon r_{21}(\tau) \ddot{x}[t' - \Delta'(\tau)],\end{aligned}\quad (2)$$

где ε — малый параметр, $\tau = \varepsilon t'$.

Приближенное решение системы (2) ищем в форме

$$\begin{aligned}x(t') &= a(t') \cos \Theta_1(t') + \varepsilon U_1[\tau, a(t'), b(t'), \Theta_1(t'), \Theta_2(t')]; \\ y(t') &= b(t') \cos \Theta_2(t') + \varepsilon V_1[\tau, a(t'), b(t'), \Theta_1(t'), \Theta_2(t')],\end{aligned}\quad (3)$$

где $a(t')$, $b(t')$, $\nu_1 = d\Theta_1/dt'$, $\nu_2 = d\Theta_2/dt'$ — медленно изменяющиеся функции времени, которые определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt'} &= \varepsilon P_1(\tau, a, b, \eta); \quad \frac{d\Theta_1}{dt'} = 1 + \varepsilon Q_1(\tau, a, b, \eta); \\ \frac{db}{dt'} &= \varepsilon P_2(\tau, a, b, \eta); \quad \frac{d\Theta_2}{dt'} = 1 + \varepsilon Q_2(\tau, a, b, \eta); \\ \eta(t') &= \Theta_2(t') - \Theta_1(t'),\end{aligned}\quad (4)$$

а U_1 , V_1 — ограниченные функции, периодические по каждому из переменных Θ_1 , Θ_2 .

Для определения функций U_1 , V_1 , P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 подставим выражения (3) (с учетом уравнений (4)) в уравнения (2). Ограничивааясь членами первого порядка малости относительно ε , получим уравнения:

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_1} + \frac{\partial}{\partial \Theta_2} \right)^2 + 1 \right] U_1(\tau, a, b, \Theta_1, \Theta_2) &= 2P_1 \sin \Theta_1 + 2aQ_1 \cos \Theta_1 + \\ &+ (1 - a^2 \cos^2 \Theta_1)(-a \sin \Theta_2) - r_{12}(\tau)b \cos[\Theta_2 - \Delta'(\tau)];\end{aligned}$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \Theta_1} + \frac{\partial}{\partial \Theta_2} \right)^2 + 1 \right] V_1(\tau, a, b, \Theta_1, \Theta_2) = \quad (5)$$

$$= 2P_2 \sin \Theta_2 + 2bQ_2 \cos \Theta_2 - \gamma(\tau)b \cos \Theta_2 - r_{21}(\tau) \cos[\Theta_1 - \Delta'(\tau)].$$

В правой части первого из уравнений проведем замену $\Theta_2 = \Theta_1 + \eta$, в правой части второго — замену $\Theta_1 = \Theta_2 - \eta$. Тогда из условия периодичности для U_1 , V_1 получим следующие равенства для определения P_1 , Q_1 , P_2 , Q_2 :

$$\begin{aligned} 2P_1 - a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) + r_{12}(\tau)b \sin[\eta - \Delta'(\tau)] &= 0; \\ 2aQ_1 - r_{12}(\tau)b \cos[\eta - \Delta'(\tau)] &= 0; \\ 2P_2 + 2\lambda b - r_{21}(\tau)a \sin[\eta + \Delta'(\tau)] &= 0; \\ 2bQ_2 - \gamma(\tau)b + \frac{3\beta b^3}{4} - r_{21}(\tau)a \cos[\eta + \Delta'(\tau)] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Определяя из уравнений (6) функции P_1 , Q_1 , P_2 , Q_2 и подставляя их в (4), найдем следующие уравнения для определения $a(t')$, $b(t')$, $\Theta_1(t')$, $\Theta_2(t')$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt'} &= \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{\varepsilon r_{12}(\tau)b}{2} \sin[\eta - \Delta'(\tau)]; \\ \frac{db}{dt'} &= -\varepsilon \lambda b + \frac{\varepsilon r_{21}(\tau)a}{2} \sin[\eta + \Delta'(\tau)]; \\ \frac{d\Theta_1}{dt'} &= 1 + \frac{\varepsilon r_{12}(\tau)b}{2a} \cos[\eta - \Delta'(\tau)]; \\ \frac{d\Theta_2}{dt'} &= 1 + \frac{\varepsilon \gamma(\tau)}{2} - \frac{3\varepsilon \beta b^2}{8} + \frac{\varepsilon r_{21}(\tau)a}{2b} \cos[\eta + \Delta'(\tau)]; \\ \eta(t') &= \Theta_2(t') - \Theta_1(t'). \end{aligned} \quad (7)$$

Для U_1 , V_1 получим выражения:

$$U_1 = -\frac{a^3}{32} \sin(3\Theta_1); \quad V_1 = -\frac{\beta b^3}{32} \cos(3\Theta_2). \quad (8)$$

Сначала рассмотрим явление затягивания при стационарных периодических режимах колебаний, которые получаем из условий:

$$\Delta' = \text{const}, \quad r_{12} = \text{const}, \quad r_{21} = \text{const}, \quad \gamma = \text{const},$$

$$a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \quad \eta = \Theta_2(t') - \Theta_1(t') = \text{const}.$$

При этих условиях получим следующие уравнения для определения амплитуд и сдвигов фаз стационарных режимов колебаний:

$$\begin{aligned} a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - r_{12}b \sin(\eta - \Delta') &= 0; \\ 2\lambda b - r_{21}a \sin(\eta + \Delta') &= 0; \\ -\gamma + \frac{3\beta b^3}{4} + \frac{r_{12}b}{a} \cos(\eta - \Delta') - \frac{r_{21}a}{b} \cos(\eta + \Delta') &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для выяснения вопроса о практической осуществимости подобных стационарных режимов мы должны еще исследовать их устойчивость, составив с этой целью систему уравнений в вариациях и исследовав расположение корней ее характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение приводится к виду:

$$\rho^3 + \varepsilon A\rho^2 + \varepsilon^2 B\rho + \varepsilon^3 C = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{2} + 2\lambda - 1; \\ B &= \frac{(1 - 2\lambda)^2}{4} + \frac{(3\lambda - 1)a^2}{4} + \frac{3a^4}{64} + \frac{3\beta r_{21}ab}{8} \cos(\eta + \Delta') + \\ &\quad + \left[\frac{r_{12}b}{a} \cos(\eta - \Delta') + \frac{r_{21}a}{b} \cos(\eta + \Delta') \right]^2; \\ C &= \frac{\lambda a^2}{8} \left(\frac{a^2}{4} + 2\lambda - 1 \right) - \frac{3\lambda\beta r_{12}b^3}{8a} \cos(\eta - \Delta') + \\ &\quad + \frac{3\beta r_{21}ab(3a^2 - 4)}{64} \cos(\eta + \Delta') + \\ &\quad + \frac{r_{21}a^3}{16b} \cos(\eta + \Delta') \left[\frac{r_{12}b}{a} \cos(\eta - \Delta') + \frac{r_{21}a}{b} \cos(\eta + \Delta') \right]. \end{aligned}$$

Для устойчивости стационарного режима необходимо и достаточно выполнения условий:

$$A > 0; \quad C > 0; \quad AB - C > 0. \quad (11)$$

Сначала для сравнения рассмотрим случай, когда запаздывание сил связи отсутствует, т. е. $\Delta' = 0$. В этом случае система (9) приводится к виду:

$$\begin{aligned} 2\lambda r_{12}b^2 &= r_{21}a^2 \left(1 - \frac{a^2}{4} \right); \quad \sin \eta = \frac{2\lambda b}{r_{21}a}; \\ \gamma &= \frac{3\beta b^2}{4} + \frac{r_{12}b^2 - r_{21}a^2}{ab} \cos \eta. \end{aligned} \quad (12)$$

Из системы (12) найдем зависимости a , b , η от γ . Полученные значения a , b , η проверим на устойчивость по условиям (11).

Рассмотрим стационарные периодические режимы при различных значениях параметров системы.

На рис. 1 показаны стационарные режимы при $\Delta' = 0$, $r_{12} = r_{21} = 1$, $\lambda = 0,1$, $\beta = 1$. Пунктиром отмечены неустойчивые режимы. Из рисунка ясно, что в области резонанса между точками A и B существуют два устойчивых периодических режима колебаний (синфазный и антифазный); слева от A — один синфазный, справа от B — один антифазный. Таким образом, между точками A и B имеется область затягивания. Вследствие нелинейности резонатора область затягивания сдвинута вправо от точки $\gamma = 0$. Увеличение амплитуд колебаний резонатора при резонансе вызывает некоторое уменьшение амплитуд колебаний генератора.

При $\Delta' = 0$, $r_{12} = r_{21} = 1/2$, $\lambda = 1$, $\beta = 1$ получим кривые I, II, изображенные на рис. 2. В этом случае затягивание почти исчезает. Имеющееся небольшое затягивание обусловлено нелинейностью резонатора.

При $\Delta' = 0$, $r_{12} = r_{21} = 1$, $\lambda = 1$, $\beta = 1$ получим кривые III. В этом случае затягивание исчезает и два периодических режима сливаются в один.

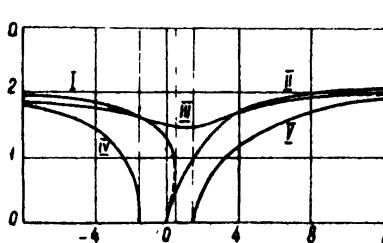
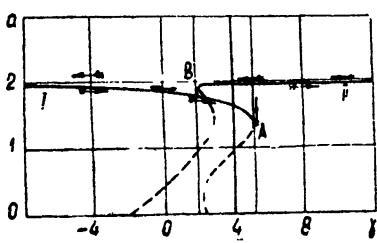
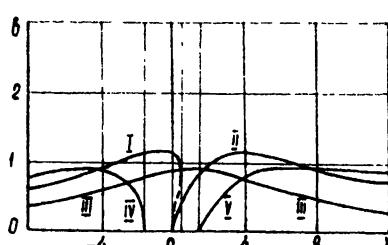
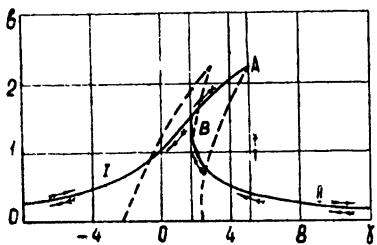
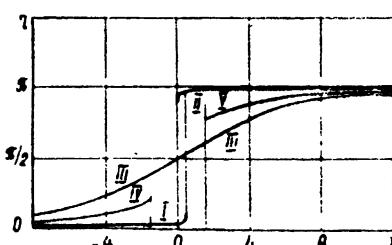
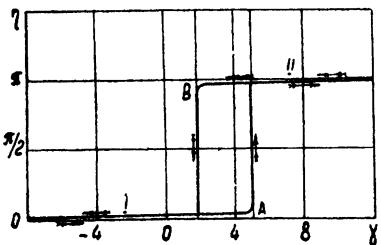


Рис. 1.

Рис. 2.

При дальнейшем усилении связи и увеличении затухания, т. е. при $r_{12} = r_{21} = 2$, $\lambda = 1$, $\beta = 1$ получим кривые IV, V. В этом случае затягивания нет, а в области резонанса появляется интервал частот, в котором колебания автогенератора затухают. Это объясняется тем, что в силу больших сил связи и большого рассеивания энергии резонатором последний забирает от генератора слишком много энергии и генератор перестает самовозбуждаться.

Рассмотрим теперь влияние запаздывания сил связи на процессы затягивания, обратившись сначала к случаю очень малого (по сравнению с периодом колебаний) запаздывания. Возьмем $\Delta' = 0,05$, $r_{12} = r_{21} = 1$, $\lambda = 0,1$, $\beta = 1$. В этом случае система (9) приводится приближенно к виду:

$$\left[\frac{a}{2b} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{0,1b}{a} \right]^2 = \Delta'^2 \left\{ 1 - \left[\frac{a}{2b} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) + \frac{0,1b}{a} \right]^2 \right\};$$

$$\begin{aligned}\sin \eta &= \frac{0,1b}{a} + \frac{a}{2b} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right); \\ \cos \eta &= \frac{1}{\Delta'} \left[\frac{0,1b}{a} - \frac{a}{2b} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \right]; \\ \gamma &= \frac{3b^2}{4} + \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) \cos \eta + \Delta' \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \sin \eta.\end{aligned}\quad (13)$$

Полученные из системы (13) зависимости a , b , η от γ изображены на рис. 3. Как и раньше, пунктиром отмечены неустойчивые режимы. Из рис. 3 мы видим, что уже весьма малое запаздывание сил связи вызывает увеличение области затягивания и значительное увеличение амплитуд колебаний резонатора для синфазного режима.

Пусть теперь $\Delta' = \pi/4$, $r_{12} = r_{21} = 1$, $\lambda = 0,1$, $\beta = 1$. В этом случае система (9) приводится к виду:

$$\begin{aligned}b^2 &= \frac{5a^2}{4} [10 \pm \sqrt{(6+a^2)(14-a^2)}]; \\ \cos \left(\eta - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{0,2b}{a}; \quad \sin \left(\eta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{a(4-a^2)}{4b}; \\ \gamma &= \frac{3b^2}{4} + \frac{0,2b^2}{a^2} + \frac{a^2(4-a^2)}{4b^2}.\end{aligned}\quad (14)$$

Из системы (14) получаем зависимости a , b , η от γ , изображенные на рис. 4. В этом случае для синфазного режима сильно увеличиваются амплитуды колебаний не только резонатора, но также и генератора, а кривые уходят далеко вправо (за пределы рисунка). Для антифазного режима колебаний амплитуды генератора и резонатора несколько уменьшаются. Область затягивания в этом случае очень сильно увеличивается.

Почти аналогичная картина имеет место и при $\Delta' = \pi/2$.

Рассмотрим еще случай большого затухания резонатора и более сильной связи с запаздыванием. Для этого возьмем $\Delta' = \pi/4$, $r_{12} = r_{21} = 2$, $\lambda = 1$, $\beta = 1$. Тогда система (9) приводится к виду:

$$\begin{aligned}b^2 &= \frac{a^2}{8} (4 \pm a \sqrt{8-a^2}); \\ \cos \left(\eta - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{b}{a}; \\ \sin \left(\eta - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{a(4-a^2)}{8b}; \\ \gamma &= \frac{3b^2}{4} + \frac{2b^2}{a^2} + \frac{a^2(4-a^2)}{4b^2}.\end{aligned}\quad (15)$$

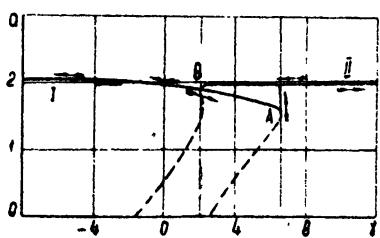
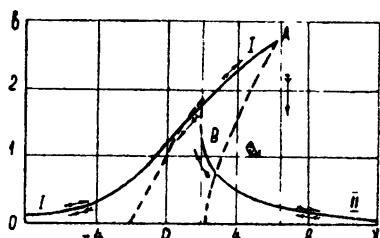
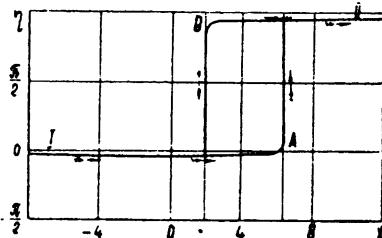


Рис. 3.

Соответствующие этой системе стационарные режимы изображены на рис. 5. Кривые рис. 5 соответствуют кривым IV, V рис. 2 для случая без запаздывания. Из сравнения этих кривых мы видим, что в случае значительных сил связи и значительного рассеивания энергии введение запаздывания сил связи приводит к исчезновению области, в которой автоколебания отсутствуют, и даже к появлению некоторого затягивания.

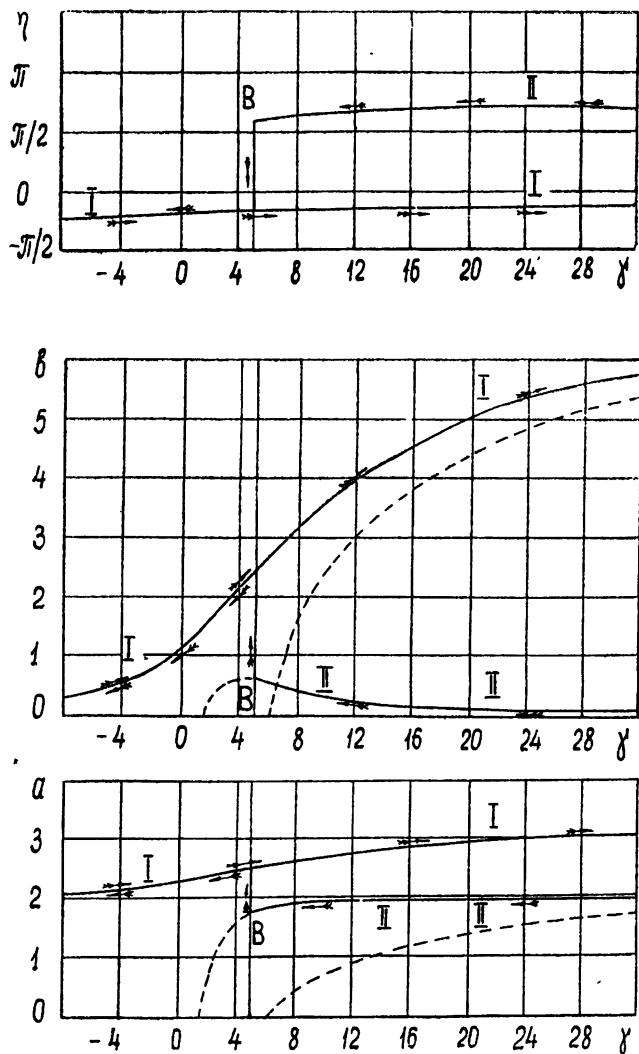


Рис. 4.

Мы рассмотрели явление затягивания при стационарных периодических режимах колебаний. Теперь изучим явление затягивания при медленном изменении частоты резонатора. Для этого возьмем γ , медленно изменяющееся по закону $\gamma(t') = \gamma_0 + \varepsilon\gamma_1 t'$.

Соответствующие стационарные режимы для значений параметров $\Delta' = 0,05$, $r_{12} = r_{21} = 1$, $\lambda = 0,1$, $\beta = 1$ изображены на рис. 3.

Для определения переходных процессов мы должны интегрировать систему (7) численными методами. Результаты интегрирования

показаны на рис. 6. Кривые I соответствуют $\gamma = 0,02 t'$, кривые II — $\gamma = 8 - 0,02 t'$. Пунктиром показаны для сравнения стационарные режимы колебаний. Из рис. 6 мы видим, что при медленном прохождении зоны затягивания величина этой зоны несколько увеличивается и, кроме того, при переходе с одного периодического режима на второй появляются значительные биения, которые затем быстро затухают.

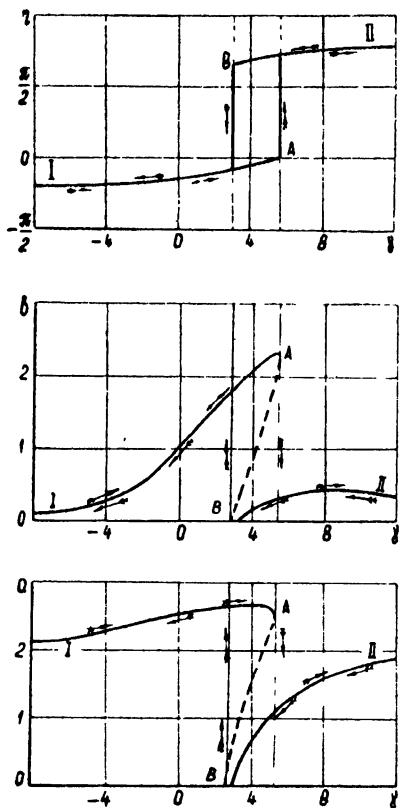


Рис. 5.

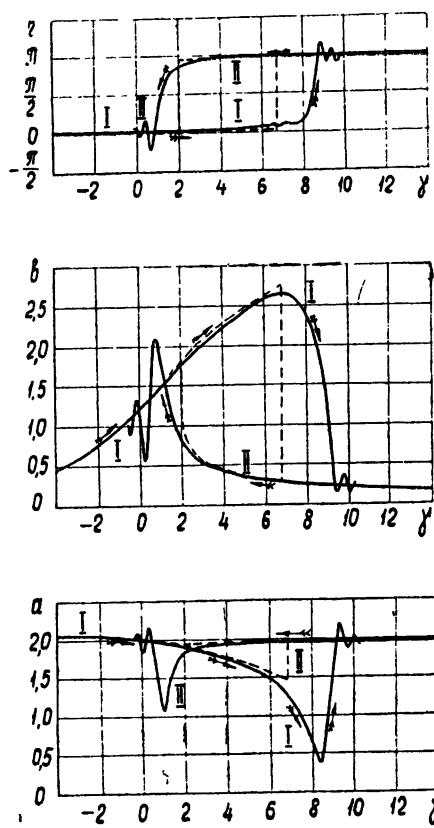


Рис. 6.

2. СЛУЧАЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АВТОГЕНЕРАТОРА С РЕЗОНАТОРОМ, ИМЕЮЩИМ НЕЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим теперь влияние запаздывания сил связи на процессы затягивания при взаимодействии автогенератора типа Ван-дер-Поля с нелинейным резонатором, имеющим линейную восстановливающую силу и нелинейную диссипативную силу. Такое взаимодействие будет описываться системой уравнений вида:

$$u(t) + \omega_1^2 u(t) = \mu [1 - \alpha u^2(t)] \dot{u}(t) + R_{12}(t) \ddot{v}[t - \Delta(t)]; \quad (16)$$

$$\ddot{v}(t) + \omega_2^2 v(t) = -2n[1 + \beta v^2(t)] \dot{v}(t) + R_{21}(t) \dot{u}[t - \Delta(t)].$$

Относительно μ , n , $\Delta(t)$, $R_{12}(t)$, $R_{21}(t)$ делаем те же предположения, что и в предыдущем случае.

Заменой переменных $\omega_1(t) = t'$, $u \sqrt{\alpha} = x$, $\omega_1 v \sqrt{\beta} = y$ систему (16) приводим к виду:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t') + x(t') = \varepsilon [1 - x^2(t')] \dot{x}(t') + \varepsilon r_{12}(\tau) \ddot{y}[t' - \Delta'(\tau)]; \\ \ddot{y}(t') + [1 + \varepsilon \gamma(\tau)] y(t') = -2\varepsilon \lambda [1 + y^2(t')] \dot{y}(t') + \\ + \varepsilon r_{21}(\tau) \ddot{x}[t' - \Delta'(\tau)].\end{aligned}\quad (17)$$

Как и в предыдущем случае, приближенное решение системы (17) ищем в форме (3). Для определения $a(t')$, $b(t')$, $\Theta_1(t')$, $\Theta_2(t')$ аналогично предыдущему получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt'} = \frac{\varepsilon a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - \frac{\varepsilon r_{12}(\tau)b}{2} \sin[\eta - \Delta'(\tau)]; \\ \frac{db}{dt'} = -\varepsilon \lambda b \left(1 + \frac{3b^2}{4}\right) + \frac{\varepsilon r_{21}(\tau)a}{2} \sin[\eta + \Delta'(\tau)]; \\ \frac{d\Theta_1}{dt'} = 1 + \frac{\varepsilon r_{12}(\tau)b}{2a} \cos[\eta - \Delta'(\tau)]; \\ \frac{d\Theta_2}{dt'} = 1 + \frac{\varepsilon \gamma(\tau)}{2} + \frac{\varepsilon r_{21}(\tau)a}{2b} \cos[\eta + \Delta'(\tau)]; \\ \eta(t') = \Theta_2(t') - \Theta_1(t'),\end{aligned}\quad (18)$$

а для U_1 , V_1 — выражения

$$U_1 = -\frac{a^3}{32} \sin(3\Theta_1); \quad V_1 = \frac{\lambda b^3}{16} \sin(3\Theta_2). \quad (19)$$

Для определения стационарных режимов колебаний будем иметь следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}a \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) - r_{12}b \sin(\eta - \Delta') = 0; \\ 2\lambda b \left(1 + \frac{3b^2}{4}\right) - r_{21}a \sin(\eta + \Delta') = 0; \\ \gamma = \frac{r_{12}b}{a} \cos(\eta - \Delta') - \frac{r_{21}a}{b} \cos(\eta + \Delta').\end{aligned}\quad (20)$$

Характеристическое уравнение и условия устойчивости получим в том же виде, что и раньше. Однако выражения для коэффициентов A , B , C в этом случае будут иными:

$$\begin{aligned}A = \frac{a^2 + 6\lambda b^2}{2} + 2\lambda - 1; \\ B = \frac{(1 - 2\lambda)^2}{4} + \frac{(3\lambda - 1)a^2}{4} + \frac{3\lambda(4\lambda - 3)b^2}{8} + \frac{3a^4}{64} + \frac{27\lambda^2 b^4}{16} + \\ + \frac{21\lambda a^2 b^2}{16} + \frac{1}{4} \left[\frac{r_{12}b}{a} \cos(\eta - \Delta') + \frac{r_{21}a}{b} \cos(\eta + \Delta') \right]; \\ C = \frac{\lambda}{8} \left(\frac{a^2}{4} + \frac{3\lambda b^2}{2} + 2\lambda - 1 \right) (a^2 + 3a^2 b^2 - 3b^2) +\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{8} \left[\frac{3\lambda r_{12} b^3}{a} \cos(\eta - \Delta') + \frac{r_{21} a^3}{b} \cos(\eta + \Delta') \right] \times \\ \times \left[\frac{r_{12} b}{a} \cos(\eta - \Delta') + \frac{r_{21} a}{b} \cos(\eta + \Delta') \right].$$

Сначала для сравнения рассмотрим случай, когда запаздывание сил связи отсутствует. Тогда система (20) приводится к виду:

$$(a^2 - 2)^2 + 6\lambda \left(b^2 + \frac{2}{3} \right)^2 = 4 + \frac{8\lambda}{3}; \\ \sin \eta = \frac{a(4 - a^2)}{4r_{12}b} = \frac{2\lambda b(4 + 3b^2)}{4r_{21}a}; \\ \gamma = \left(\frac{r_{12}b}{a} - \frac{r_{21}a}{b} \right) \cos \eta. \quad (21)$$

На рис. 7 показаны зависимости a , b , η от γ при $\Delta' = 0$, $r_{12} = r_{21} = 1$, $\lambda = 0,04$. Как и раньше, пунктирумыми линиями отмечены неустойчивые режимы.

Как и в предыдущем случае, в области резонанса существует область затягивания, в которой могут существовать два устойчивых

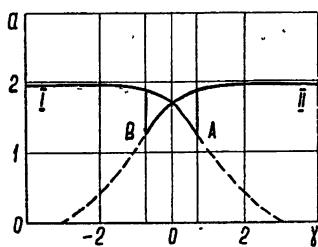
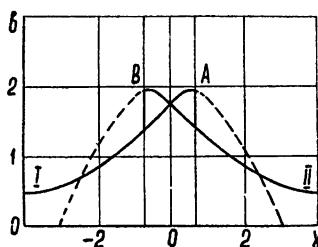
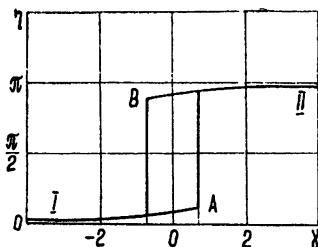


Рис. 7.

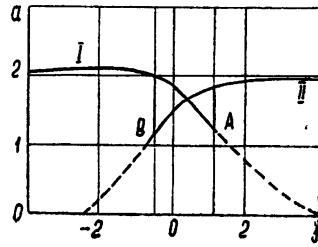
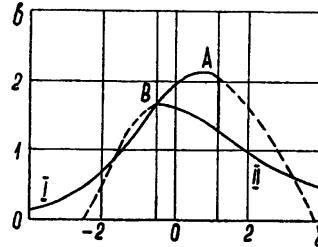
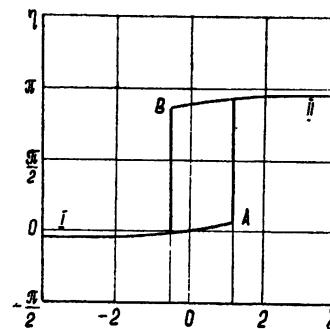


Рис. 8.

стационарных периодических режима колебаний. Но, в отличие от предыдущего случая, область затягивания и резонансные кривые в этом случае симметричны относительно прямой $\gamma = 0$. Увеличение амплитуд колебаний резонатора вызывает некоторое уменьшение амплитуд колебаний генератора.

Теперь исследуем влияние запаздывания сил связи на процессы затягивания в рассматриваемой системе, взяв сначала малое запаздывание $\Delta' = 0,1$ при тех же значениях остальных параметров системы, что и в случае без запаздывания. Из системы (20) получим кривые, изображенные на рис. 8. Из этого рисунка видно, что малое запаздывание сил связи в этом случае не изменяет заметно величины области затягивания, но эта область несколько сдвигается вправо. Кроме того, нарушается симметрия амплитудных кривых: амплитуды колебаний синфазного режима несколько увеличиваются, а амплитуды колебаний антифазного режима уменьшаются.

Рассмотрим теперь случай $\Delta' = \pi/4$ при тех же значениях остальных параметров. Тогда из системы (20) получим кривые, изображенные на рис. 9. В этом случае в синфазном режиме колебаний значительно увеличиваются амплитуды колебаний не только резонатора, но и генератора. Амплитуды же антифазного режима колебаний несколько уменьшаются. Область затягивания еще больше сдвигается вправо и несколько уменьшается.

В случае, когда $\Delta' = \pi/2$, из рис. 10 ясно, что антифазный режим колебаний совсем исчезает, а вместе с ним исчезает и явление затягивания. Остается лишь один синфазный режим колебаний, у которого

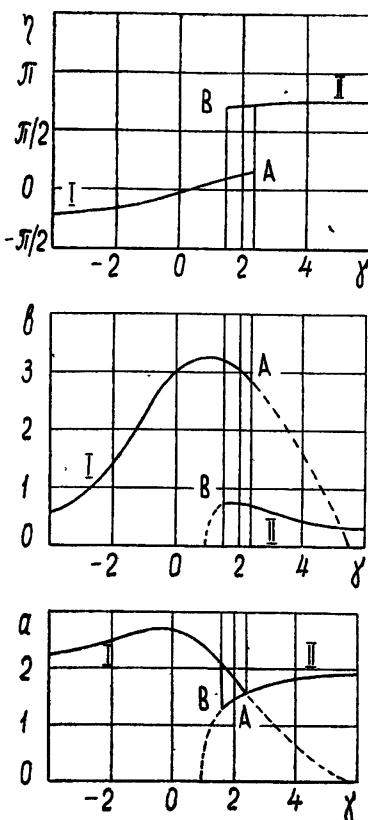


Рис. 9.

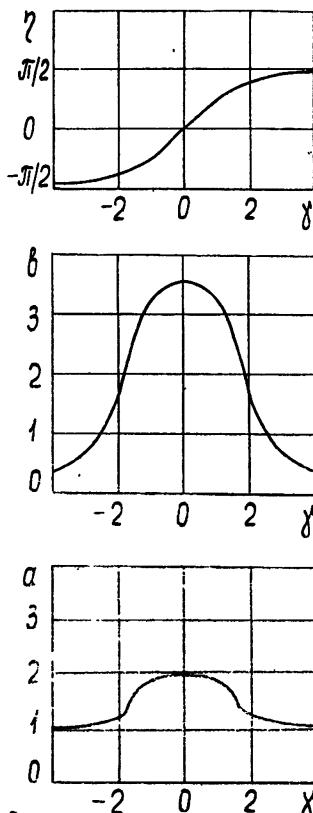


Рис. 10.

амплитуды колебаний генератора и резонатора в момент резонанса значительно возрастают.

Из проведенного рассмотрения можно сделать следующие выводы:

1) запаздывание сил связи существенно влияет на процессы затягивания в сложных автоколебательных системах;

2) в случае нелинейного резонатора с нелинейной восстановливающей силой и линейным законом рассеяния энергии запаздывание сил связи вызывает очень значительное увеличение области затягивания;

3) в случае нелинейного резонатора с линейной восстановливающей силой и нелинейным законом рассеяния энергии запаздывание сил связи вызывает некоторое уменьшение и даже полное исчезновение затягивания;

4) запаздывание сил связи в момент резонанса вызывает в обоих случаях значительное увеличение амплитуд колебаний как резонатора, так и автогенератора. Следовательно, запаздывание сил связи, по-видимому, можно использовать для усиления автоколебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, ЖТФ, 4, 122 (1934).
2. Ю. В. Григорьев, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 1617 (1961).
3. В. И. Зубков, Я. А. Монсов, Радиотехника и электроника, 5, 75 (1960).
4. Е. А. Ирисов, Научн. докл. высшей школы—Радиотехника и электроника, 2, 74 (1958).
5. Ю. Б. Кобзарев, Радиотехника, 5, 2, 162 (1950).
6. А. П. Скибарко, С. П. Стрелков, ЖТФ, 4, 158 (1934).
7. B. Van der Pol, Phil. Mag., 43, 700 (1922).
8. W. Rungge, Archiv für Elektrotechn., 13, 34 (1924).
9. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
10. В. П. Рубаник, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 4, 726 (1961).

Черновицкий государственный университет

Поступила в редакцию
21 мая 1962 г.

ON THE INFLUENCE OF DELAY COUPLING UPON THE PROCESSES OF BACKLASH IN COMPLEX AUTOOSCILLATING SYSTEMS

V. P. Rubanick, Z. L. Kravchenko

The complex autooscillating systems of an ordinary autooscillator inductively coupled with a non-linear resonator are considered. The influence of the resonator non-linearity and delay in coupling upon the processes of backlash is cleared up.

ПРИМЕНЕНИЕ ВРЕМЯ-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА МАГНИТНОЙ ЛЕНТЕ

E. V. Прокофьев, Ю. Я. Хохлов

Обосновывается возможность применения времязимпульсной модуляции для моделирования переменного запаздывания на магнитной ленте. Производится анализ искажений задерживаемого сигнала, возникающих из-за движения магнитной головки во время записи и из-за нестабильности скорости движения магнитной ленты.

Для решения ряда задач на машинах непрерывного действия необходимы блоки, моделирующие запаздывание. К настоящему времени созданы устройства, воспроизводящие постоянное запаздывание [1-3]. Такие устройства позволяют решать задачи, в которых за интервал времени, представляющий интерес, запаздывание можно считать постоянным. Время запаздывания заранее устанавливается, после чего производится решение, в течение которого время запаздывания остается неизменным. Вполне естественно, что круг таких задач ограничен, так как в общем случае запаздывание является переменным и не всегда бывает возможным идеализировать его как постоянное.

Создание блока, моделирующего переменное запаздывание, существенно расширяет класс задач, решаемых на машинах непрерывного действия. В основу устройства для моделирования переменного запаздывания, разработанного в ГИФТИ, положена запись на магнитную ленту (рис. 1).

Задерживаемый сигнал $x(t)$ через блок записи 1 записывается на магнитную ленту. Задержанный сигнал снимается с выхода блока

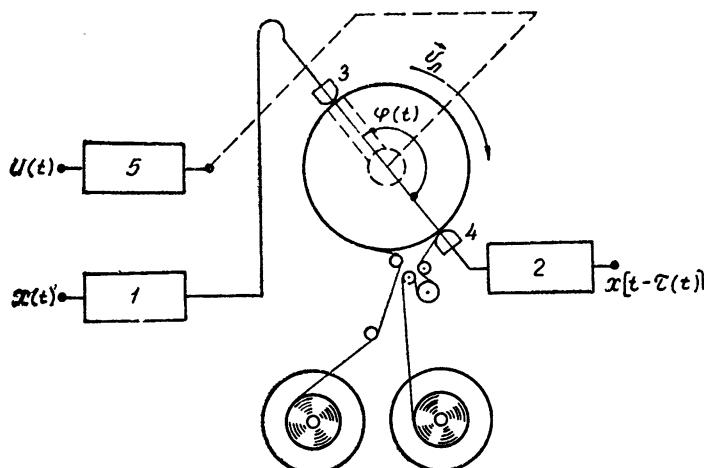


Рис. 1.

* Подробное описание действующего устройства составит содержание отдельной статьи.

воспроизведения 2. Угол между головками записи 3 и воспроизведения 4 устанавливается автоматически посредством следящей системы 5, на вход которой подается напряжение $u(t)$, характеризующее изменение запаздывания во времени.

При моделировании запаздывания на магнитной ленте целесообразно применение модуляции [4]. Выбор типа модуляции при моделировании переменного запаздывания имеет решающее значение, так как кроме требования высокой точности, необходимой для вычислительной техники, требуется также независимость мгновенных значений задержанного сигнала от перемещений магнитной головки.

Ниже показывается, что применение время-импульсной модуляции позволяет свести искажение полученного сигнала за счет движения магнитной головки до величины, удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к машинам непрерывного действия.

1. Время-импульсная модуляция — это такой тип модуляции, при которой изменениям подвергается временной интервал между импульсами. На рис. 2 показаны осциллограммы работы время-импульсного модулятора. Такой модулятор является устройством, преобразующим непрерывное напряжение $x(t)$ в дискретный ряд интервалов времени Θ_n .

Весьма узкие импульсы I_1 (рис. 2а) с постоянным периодом следования T являются опорными, а импульсы I_2 (рис. 2б) имеют переменный период следования и сдвинуты на время Θ_n относительно импульсов I_1 . Интервал времени Θ_n от импульса к импульсу изменяется пропорционально напряжению $x(t)$.

Период следования опорных импульсов T можно выбрать настолько малым, что дискретный ряд значений $x(n)$ будет с заданной точностью представлять истинное напряжение $x(t)$. Если период следования опорных импульсов T задан, то номер дискретного интервала n определяется очевидным соотношением

$$n = \lceil t/T \rceil. \quad (1)$$

Для линейной характеристики модулятора временной интервал Θ_n связан с величиной напряжения $x(n)$ очевидным соотношением:

$$\Theta_n = T\gamma + \frac{mT}{S} x(n), \quad (2)$$

где γ — коэффициент, определяющий положение „условного нуля“, m — глубина модуляции, S — рабочий интервал машины непрерывного действия.

Назовем величину $z_n = \Theta_n/T$ заполнением время-импульсной модуляции, тогда

$$z_n = \gamma + \frac{m}{S} x(n). \quad (3)$$

2. Рассмотрим магнитную время-импульсную модуляцию — сигналограмму рис. 2в, где представлен отрезок магнитной ленты с двумя дорожками 1, 2, на которых записаны импульсы I_1 , I_2 . Пусть угол, на котором расположена головка записи, изменяется по некоторому закону $\varphi(t)$. Магнитная лента движется со скоростью v_l , а головка записи перемещается со скоростью

$$v_r = R \dot{\varphi}, \quad (4)$$

где R — радиус диска блока запаздывания. Рабочий зазор головки записи движется относительно магнитной ленты со скоростью

$$w = v_a - R\dot{\varphi}. \quad (5)$$

На магнитной сигналограмме (рис. 2в) имеют место две последовательности отрезков, длины которых обозначены через L_n и λ_n . Первые характеризуют расстояние вдоль ленты между двумя соседними отпечатками импульсов I_1 , а вторые — сдвиг вдоль ленты между магнитными отпечатками импульсов I_1 и I_2 . Зная период следования импульсов T и временные интервалы Θ_n , найдем величины L_n и λ_n . Интегрируя элементарное перемещение магнитной ленты $dl = wdt$ на отрезке L_n , получим:

$$\int_{L_n} dl = \int_{(n-1)T}^{nT} wdt, \quad (6)$$

откуда

$$L_n = v_a T - R\Delta\varphi_n. \quad (7)$$

Здесь

$$\Delta\varphi_n = \varphi(nT) - \varphi[(n-1)T]. \quad (8)$$

Аналогично

$$\lambda_n = v_a \Theta_n - R\Delta\xi_n, \quad (9)$$

где

$$\Delta\xi_n = \varphi[(n-1)T + \Theta_n] - \varphi[(n-1)T]. \quad (10)$$

Заметим, что члены соотношений (7) и (9) $R\Delta\varphi_n$ и $R\Delta\xi_n$ характеризуют влияние движения магнитной головки записи на длины L_n , λ_n . Если запаздывание постоянное, т. е. $\dot{\varphi} = 0$, то $\Delta\varphi_n = \Delta\xi_n = 0$ и, следовательно,

$$L_n = v_a T; \quad \lambda_n = v_a \Theta_n. \quad (11)$$

3. Рассмотрим результирующую модуляцию импульсов воспроизведения I_{1b} и I_{2b} (рис. 2г, д), обусловленную двумя факторами, задерживаемым сигналом и движением головки записи.

При воспроизведении сигналограмма движется мимо неподвижной головки воспроизведения с постоянной скоростью v_a . Для анализа искажений за счет движения магнитной головки нет надобности рассматривать процессы записи и воспроизведения в одной временной системе координат, поскольку сигналограмма, перемещаясь в лентопротяжном механизме, не искажается. Поэтому выберем новое начало

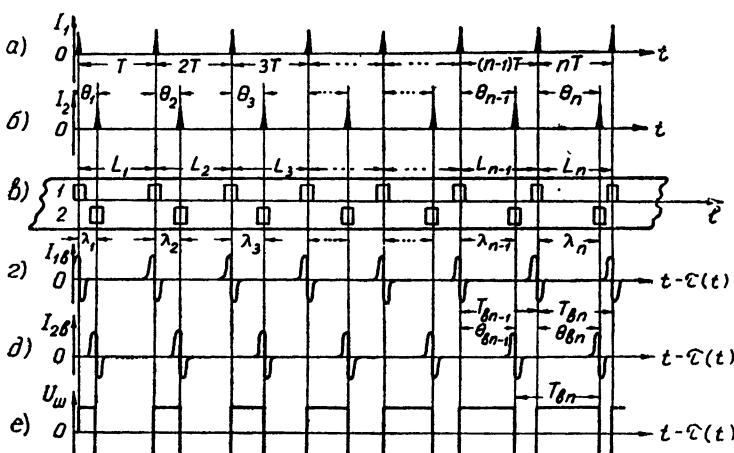


Рис. 2.

отсчета времени в тот момент, когда нулевой магнитный отпечаток находится против рабочего зазора головки воспроизведения. Для импульсов I_{1b} , I_{2b} будут справедливы соотношения:

$$T_{bn} = \frac{L_n}{v_a} = T - \frac{R\Delta\varphi_n}{v_a}; \quad (12)$$

$$\Theta_{bn} = \frac{\lambda_n}{v_a} = \Theta_n - \frac{R\Delta\xi_n}{v_a}. \quad (13)$$

Базируясь на импульсах I_{1b} , I_{2b} , нетрудно синтезировать широтные импульсы воспроизведения U_w (рис. 2e).

Рассмотрим заполнение широтного импульса воспроизведения

$$z_{bn} = \frac{\Theta_{bn}}{T_{bn}} = z_n \frac{1 - R\Delta\xi_n/v_a \Theta_n}{1 - R\Delta\varphi_n/v_a T}. \quad (14)$$

Перемещения головки вызывают паразитные изменения заполнения. Из соотношения (14) следует, что для двух частных случаев—постоянного запаздывания и запаздывания, меняющегося равномерно ($\Delta\varphi_n/T = \Delta\xi_n/\Theta_n = \omega_2$)—искажения заполнения отсутствуют. Следовательно, искажения заполнения имеют место только для более сложных движений.

Преобразуем соотношение (14), воспользовавшись разложением приращений функций $\Delta\xi_n$ и $\Delta\varphi_n$ в ряд Тейлора:

$$\Delta\xi_n = \Theta_n \dot{\varphi} [(n-1)T] + \frac{\Theta_n^2}{2} \ddot{\varphi} [(n-1)T] + \dots; \quad (15)$$

$$\Delta\varphi_n = T \dot{\varphi} [(n-1)T] + \frac{T^2}{2} \ddot{\varphi} [(n-1)T] + \dots. \quad (16)$$

Ограничивааясь членами разложения второго порядка, соотношение (14) можно приближенно представить в виде:

$$z_{bn} = z_n \frac{1 - (R/v_a) \{ \dot{\varphi} [(n-1)T] + (\Theta_n/2) \ddot{\varphi} [(n-1)T] \}}{1 - (R/v_a) \{ \dot{\varphi} [(n-1)T] + (T/2) \ddot{\varphi} [(n-1)T] \}}. \quad (17)$$

Считая величину $R\dot{\varphi}$ малой и пренебрегая членами с ее степенями выше первой, после ряда преобразований при $R\dot{\varphi} = v_r$ получим:

$$z_{bn} = z_n \left[1 - \frac{T - \Theta_n}{2v_a(1 - v_r/v_a)} \right] R\ddot{\varphi}, \quad (18)$$

где

$$z_n \frac{T - \Theta_n}{2v_a(1 - v_r/v_a)} R\ddot{\varphi} = \Delta z_n \quad (19)$$

— абсолютная ошибка,

$$\delta z_n = \frac{T - \Theta_n}{2v_a(1 - v_r/v_a)} R\ddot{\varphi} \quad (20)$$

— относительная ошибка. Подставив в (20) выражение (2), получим выражение относительной ошибки через параметры модулятора:

$$\delta z_n = \frac{T [1 - \gamma - (m/S)x(n)]}{2v_a(1 - v_r/v_a)} R\ddot{\varphi}. \quad (21)$$

Для предельных значений параметров осуществленного устройства моделирования переменного запаздывания ($T=0,01$ сек, $t=0,8$, $\gamma=0,5$, $S=200$ в, $x(n)=-100$ в, $v_l=40$ мм·сек $^{-1}$, $v_r/v_l \leq 0,4$, $R\varphi \leq 15$ мм·сек $^{-2}$) величина δz_n составляет 0,3%.

Практически при моделировании переменного запаздывания интересны максимальные значения времени запаздывания $\tau = (R/v_l) \varphi_{\max}$, скорости изменения запаздывания $\dot{\tau} = (R/v_l) \dot{\varphi}_{\max} = v_{r \max}/v_l$ и величины $\tau = (R/v_l) \varphi_{\max}$. Время запаздывания ограничено длиной ленты между записывающей и воспроизводящей головками, т. е. определяется конструкцией механизма. Две другие величины ограничиваются максимально допустимой ошибкой устройства, как это показано на диаграмме рис. 3, которая составлена для максимальных значений параметров, указанных выше. Область, где погрешность не превышает заданной величины, расположена ниже соответствующей прямой.

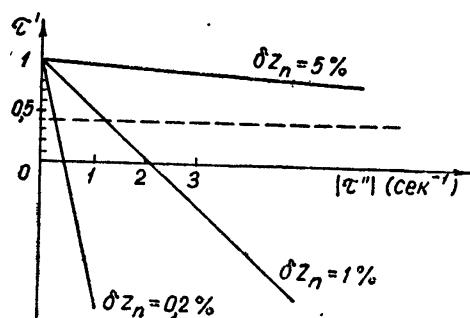


Рис. 3.

4. Создание высокостабильного лентопротяжного механизма является весьма трудной задачей. Эти трудности возрастают при низких скоростях движения магнитной ленты ($v_l < 100$ мм·сек $^{-1}$); поэтому интересно оценить влияние нестабильности скорости магнитной ленты на задерживаемый сигнал. Для оценки этого влияния можно воспользоваться выведенным выше соотношением

для ошибки, обусловленной движением головки, так как определяющим фактором является относительность движения ленты и головки. Поскольку нестабильность скорости оказывается и на записи, и на воспроизведении, то в худшем случае относительную ошибку, найденную из этих соображений, необходимо удвоить.

Пусть нестабильность скорости носит периодический характер, т. е.

$$v_l^* = v_l + \Delta v \sin(\Omega t), \quad (22)$$

где Δv — максимальное отклонение скорости от расчетной, Ω — частота биений. Тогда, полагая в (21) $x(n) = 0$, находим:

$$\delta z_n = T(1 - \gamma) \frac{\Delta v}{v_l} \Omega \cos(\Omega t). \quad (23)$$

Таким образом, относительная ошибка заполнения за счет нестабильности скорости пропорциональна относительной ошибке скорости, частоте биений Ω и периоду следования импульсов T . Из соотношения (23) следует, что $\delta z_n \rightarrow 0$ при $\Omega \rightarrow 0$. Это весьма существенно, так как рабочая полоса частот машин непрерывного действия примыкает к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Коган, Электронные модулирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования, Физматгиз, М., 1959.
2. В. А. Иванов, Автоматика и телемеханика, 17, 324 (1956).
3. R. S. Stone, R. A. Dande, IRE Trans., EC—6, 187 (1957).
4. K. Fett, Instruments and Control Systems, 32, 82 (1959).

**APPLICATION OF PULSE MODULATION FOR THE MODELLING
OF VARIABLE DELAY ON MAGNETIC TAPE***E. V. Prokofiev, Yu. Ya. Khokhlov*

The possibility is proved of application of pulse modulation for modelling the variable delay on a magnetic tape. The analysis is carried out of the delay signal distortions arising from movement of a magnetic head in the course of recording and from instability of magnetic tape motion velocity.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ КАССИОПЕЯ-А И ЛЕБЕДЬ-А НА ВОЛНЕ $\lambda = 10,26 \text{ см}$

B. B. Хрулев

В 1962 году в Крыму в районе горы Карадаг были проведены измерения интенсивности радиоизлучения дискретных источников Кассиопея-А и Лебедь-А на волне $\lambda = 10,26 \text{ см}$. Измерения проводились по методу „искусственной Луны“, описанному в работе [1], на параболической антenne диаметром 4 м. Ширина диаграммы направленности антennes на уровне половинной мощности $\Delta\theta = 1^{\circ}40'$. В качестве приемной аппаратуры использовался радиометр с параметрическим усилителем. Рельная чувствительность радиометра была $0,1^{\circ}\text{K}$ при постоянной времени $\tau = 16 \text{ сек}$.

Методика измерений интенсивности радиоизлучения источника была аналогична описанной в работе [2]. Калибровка проводилась через каждые три измерения источников по собственному радиоизлучению абсолютно черного диска диаметром $D = 3,8 \text{ м}$, помещенного на расстоянии 230 м от антennes (угловые размеры $55,05'$). Угловая высота диска составляла 26° . Температуры антennes от излучения диска равнялась $T_a = 27,7^\circ\text{K}$. Температуры антennes, обусловленные радиоизлучением Кассиопеи-А и Лебедя-А, были соответственно 2°K и 1°K . В результате 35 измерений Кассиопеи-А получено значение потока

$$S_v^{(K)} = (15,26 \pm 0,46) 10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}.$$

Для Лебедя-А было проведено 9 измерений, что дало значение потока

$$S_v^{(L)} = (7,5 \pm 0,53) 10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}.$$

Полная ошибка, которая определяется среднеквадратичным разбросом значений, связанных с флюктуациями, была равна в первом случае $\pm 3\%$, во втором — $\pm 7\%$.

ЛИГЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 759 (1961).
- 2 В. С. Лазаревский, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Астрон. ж. (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 ноября 1962 г.

НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКТИВНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ ЖЕСТКОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА

П. Д. Калачев

1. Проблема создания большого параболического полноповоротного рефлектора, пригодного для работы в коротковолновой части сантиметрового диапазона ($\lambda = 2 \frac{1}{3} \text{ см}$), в основном сводится к решению двух задач: 1) разработке технологии изготовления достаточно точной отражающей поверхности рефлектора и 2) нахождению такой конструктивной схемы рефлектора и его подвески к опорно-поворотному устройству, которая обеспечила бы сохранение правильной параболической формы при любых

положениях рефлектора в пространстве. Первая задача, как показал опыт изготовления 22-метрового рефлектора радиотелескопа ФИАН [1], вполне разрешима. Вторая задача связана с необходимостью уменьшения или компенсации до приемлемой величины упругих деформаций рефлектора от воздействия собственного веса, ветровых нагрузок и температуры. В рассматриваемом случае максимальные допустимые перемещения отражающей поверхности рефлектора вследствие упругих деформаций, по-видимому, не должны превосходить $\pm 3 \text{ мм}^*$, что близко к максимальной суммарной ошибке.

Полное решение этой сложной задачи связано с дальнейшими исследованиями. В частности, нам неизвестны теоретические и экспериментальные данные о температурных деформациях рефлекторов. Равномерный нагрев или охлаждение не должны ухудшать работу рефлектора, так как облучатель вследствие деформаций несущей конструкции смещается вдоль оси одновременно и в соответствии с изменением параметра рефлектора, оставаясь в его фокусе [2]. Можно далее считать, что степень неравномерности нагрева конструкций рефлектора зависит от прямой солнечной радиации, а также от скорости и направления ветра. Следует ожидать, что в ночное время и в пасмурные дни неравномерность должна быть минимальной. Изучение деформаций от неравномерного нагрева позволит принять обоснованные решения о мерах по уменьшению или компенсации последних.

Говоря об упругих деформациях, вызываемых ветровыми нагрузками, следует подчеркнуть, что для жестких рефлектиров эти нагрузки оказываются на порядок меньше весовых. Например, вес конструкции одного квадратного метра 22-метрового рефлектора РТ22 и 42-метрового рефлектора, сооружаемого в США, соответственно равен 170 и 220 кг. Расчет показывает, что при эксплуатационной скорости ветра $12 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ветровая нагрузка на 1 м² площади апертуры рефлектора составит 20 кг. Таким образом, ветровые нагрузки в первом приближении могут быть учтены увеличением весовой нагрузки на 10%.

Целью настоящей работы является попытка решить задачу малой деформации рефлектора от воздействия основной причины — его собственного веса — путем рационального выбора конструктивной схемы. Основная идея этой схемы заключается в многоопорной подвеске рефлектора. Для уменьшения деформаций, зависящих от угла наклона рефлектора к горизонту, применяется балансная и балансно-кинематическая компенсация.

Для определенности конструктивная схема иллюстрируется на примере параболического рефлектора диаметром 66 м с допустимыми максимальными деформациями $\pm 3 \text{ мм}$. Подробное изложение предлагаемой схемы содержится в [3].

2 При выборе схемы мы исходим из того, что максимальная длина консольных участков (расстояние от опоры до края рефлектора), упругая деформация которых не превышала бы $2\text{--}3 \text{ мм}$, равна $4\text{--}5 \text{ м}$. Максимальные длины пролетных участков (расстояния между опорами — вдоль радиуса и вдоль хордовых ферм) при этом должны быть в пределах $10\text{--}14 \text{ м}$. Исходя из этих условий 66-метровый рефлектор должен иметь 17 опор. В предлагаемой конструкции эти семнадцать опор образованы посредством а) восьмиопорной промежуточной конструкции, б) восьмистержневой пирамиды и в) центральным стержнем. Объединяющим узлом, посредством которого нагрузка от 17 опор передается на две опорные цапфы горизонтальной оси вращения рефлектора, является узел секторов вращения (рис. 1).

Промежуточная конструкция образована четырьмя одинаковыми плоскими фермами, концы которых (1—8) являются основными опорами рефлектора, а точки взаимного пересечения ферм образуют узлы крепления этой конструкции к секторам вращения. Узел секторов вращения с горизонтальной осью (трубой), балкой противовеса с параллельными и диагональными связями представляет собой пространственную систему, способную воспринимать изгибающие и крутящие моменты. Вспомогательные опоры рефлектора (9—17) образуются восьмистержневой пирамидой (9—16) и центральным стержнем (17). Вершина пирамиды опирается на балку противовеса в средней точке. Основные восемь и вспомогательные девять опор расположены радиально симметрично относительно центра рефлектора. Четыре стержня, несущие облучатель, крепятся к 4 из 8 основных опорных точек; к остальным четырем точкам крепятся компенсирующие весовые балансы. Вес каждого баланса равен вертикальной составляющей нагрузки на узел от стержня четырехстержневой пирамиды.

Жесткость балки противовеса подбирается такой, чтобы прогиб в ее середине был равен прогибу каждой из 8 основных опорных точек промежуточной конструкции. Это значит, что при горизонтальном положении рефлектора все семнадцать опорных точек имеют одинаковое вертикальное перемещение.

* Технология получения точной поверхности [1] позволяет уменьшить максимальную случайную ошибку до величины $\pm 0,5 \div 1,0 \text{ мм}$.

3. Таким образом, предлагаемая многоопорная подвеска рефлектора обеспечивает допустимые деформации в его горизонтальном положении, т. е. при симметричных нагрузках. В этом положении рефлектора восемь основных и восемь вспомогательных опорных точек располагаются в двух горизонтальных плоскостях. При повороте рефлектора вокруг горизонтальной оси плоскость, содержащая восемь вспомогательных опорных точек, практически не искажается (вследствие большой продольной

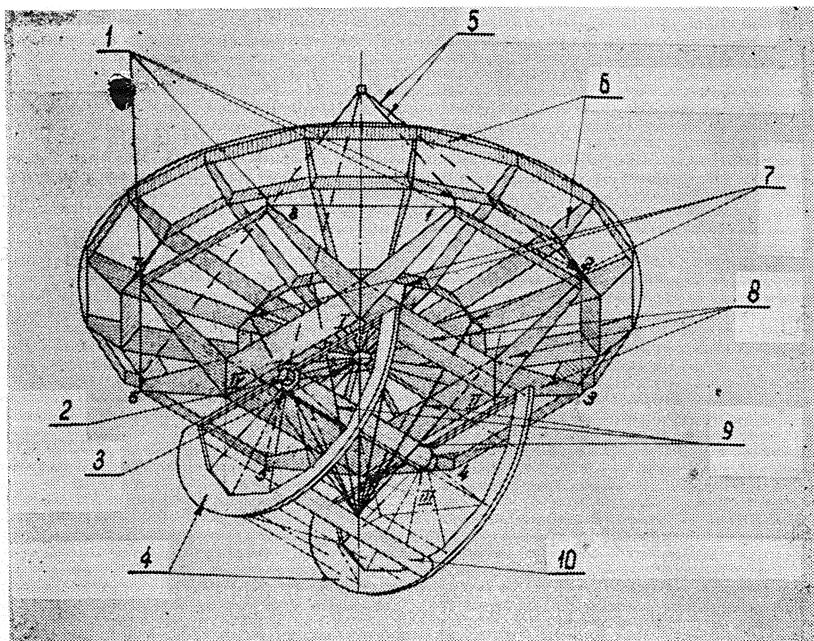


Рис. 1. Конструктивная схема рефлектора, промежуточной опорной конструкции, секторов вращения и восьмистержневой пирамиды:

1—основные опорные точки (1, 2,...,8); 2—опорная цапфа; 3—центральная опорная точка 17; 4—секторы вращения; 5—четырехстержневая пирамида; 6—каркас рефлектора, 7—промежуточные точки 9, 10, ..,16, 8—промежуточная опорная конструкция; 9—восьмистержневая пирамида; 10—балка противовеса.

жесткости стержней восьмистержневой пирамиды), а плоскость, в которой расположены восемь основных опор, под воздействием антисимметричных нагрузок в общем случае распадается на две плоскости, одна из которых содержит опорные точки 1, 2, 5 и 6, а другая—3, 4, 7 и 8.

Если четырехстержневую пирамиду, несущую облучатель, прикрепить к точкам, принадлежащим плоскости с меньшим углом поворота вокруг горизонтальной оси, то, регулируя величину грузового момента балансным грузом, помещенным за вершиной пирамиды, можно добиться совмещения указанных плоскостей в одну (балансная компенсация). Для сохранения же параллельности плоскостей основных и вспомогательных опорных точек вершине восьмистержневой пирамиды (с центральным стержнем) задается соответствующее принудительное поперечное перемещение посредством механизма, кинематически связанного с поворотом рефлектора вокруг горизонтальной оси, и балансными грузами, уменьшающими усилия в звеньях механизма (балансно-кинематическая компенсация) [3].

Величина и направление поперечного перемещения вершины пирамиды регулируются. Критерием правильной настройки механизма кинематической компенсации является расположение всех восьми вспомогательных опорных точек в плоскости, параллельной плоскости основных опорных точек, что играет определяющую роль в сохранении правильной параболической формы рефлекгра.

Таким образом, предлагаемая конструктивная схема может обеспечить сохранение формы рефлектора с малыми деформациями как в горизонтальном, так и в любом другом положении рефлектора под действием весовых нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Д. Калачев, А. Е. Саломонович. Труды ФИАН, 17, 13 (1962).
2. J. Feld, Ann. N. J. Acad. Sci., 70, 153 (1957).
3. П. Д. Калачев, Препринт А-103, ФИАН, 1962.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
16 июля 1962 г.

ОБ ОДНОМ ВИДЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКОВ В ПЛАЗМЕ

A. A. Рухадзе

1. Исследованию неустойчивости пучков заряженных частиц в плазме посвящено большое число работ (см. [1-3] и цитированную там литературу). Распространено мнение, будто пучковая неустойчивость по отношению к возбуждению электромагнитных волн в плазме имеет место лишь в области частот $\omega < u\mathbf{k}$ (u —скорость пучка), т. е. когда проекция скорости пучка на направление распространения волны превышает ее фазовую скорость. В связи с тем, что фазовая скорость поперечных электромагнитных волн в изотропной плазме (т. е. в плазме при отсутствии сильных полей) больше скорости света, предполагалось, что возбуждение поперечных волн пучком заряженных частиц в такой плазме не происходит. Поэтому в литературе основное внимание уделяется пучковой неустойчивости, связанной с возбуждением продольной компоненты электрического поля $kE \neq 0$. Ниже мы покажем, что пучок заряженных частиц в изотропной плазме может вызвать возбуждение чисто поперечной компоненты электрического поля волны $kE = 0$ (при этом, разумеется, $uE \neq 0$). Для простоты ограничимся рассмотрением случая $u\mathbf{k} = 0$, т. е. волн, распространяющихся поперек пучка. На возбуждение электромагнитных волн, распространяющихся поперек пучка заряженных частиц в холодной плазме, ранее указывалось в работах [4, 5]. В работе [4] был рассмотрен частный случай двух одинаковых встречных пучков. В работе [5] хотя и было получено дисперсионное уравнение для общего случая произвольных пучков, однако решения его, которые нам удалось найти путем специального выбора системы координат, в этой работе не были найдены.

2. Будем исходить из дисперсионного уравнения электромагнитных волн

$$\left| k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0, \quad (1)$$

где $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ —тензор диэлектрической проницаемости системы, состоящей из пучка заряженных частиц и плазмы. Общий метод получения тензора $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ при движении пучка в плазме вдоль внешнего магнитного поля развит в работе [6]. Здесь, для удобства, рассмотрение будем вести в системе координат, в которой движутся как пучок, так и плазма, причем скорость частиц α -сорта $u_\alpha \parallel \mathbf{u}$. Полагая $u_\alpha \mathbf{k} = 0$, получаем

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \alpha_{i\mu}^{(\alpha)} \left\{ \epsilon_{\mu\nu}^{(\alpha)} \left(\omega'_\alpha, \mathbf{k}'_\alpha \right) - \delta_{\mu\nu} \right\} \beta_{j\nu}^{(\alpha)}, \quad (2)$$

где

$$\alpha_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{ij} - \frac{u_{\alpha i} u_{\alpha j}}{u_{\alpha}^2} \frac{\gamma_{\alpha} - 1}{\gamma_{\alpha}} + \frac{u_{\alpha i} k_j}{\omega},$$

$$\beta_{ij}^{(\alpha)} = \gamma_{\alpha} \left[\delta_{ij} - \frac{u_{\alpha i} u_{\alpha j}}{u_{\alpha}^2} \frac{\gamma_{\alpha} - 1}{\gamma_{\alpha}} + \frac{u_{\alpha j} k_i}{\omega} \right],$$

$\epsilon_{ij}^{(\alpha)}(\omega'_\alpha, \mathbf{k}'_\alpha)$ —тензор диэлектрической проницаемости частиц α -сорта в собственной системе координат, $\gamma_{\alpha} = \left(1 - \frac{u_{\alpha}^2}{c^2} \right)^{-1/2}$, а $\omega'_\alpha = \gamma_{\alpha} \omega$ и $\mathbf{k}'_\alpha = \mathbf{k} - \gamma_{\alpha} \frac{\omega \mathbf{u}_{\alpha}}{c^2}$ —лоренцевски преобразованные частота и волновой вектор.

3. Рассмотрим случай, когда через нейтральную холодную плазму движется нейтральный холодный пучок заряженных частиц, т. е. тепловым движением частиц как в плазме, так и в пучке пренебрежем. Будем считать также, что в системе отсутствуют сильные внешние поля. В этом случае тензор диэлектрической проницаемости системы принимает вид:

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left\{ \delta_{ij} + \frac{u_{\alpha i} u_{\alpha j}}{\omega^2} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) + \frac{u_{\alpha i} k_j + k_i u_{\alpha j}}{\omega} \right\}, \quad (3)$$

где $\omega_{L\alpha}$ — ленгмюровская частота частиц α -сорта. Легко видеть, что в выражении (3) существенный вклад дают лишь электроны пучка и плазмы. Далее выберем систему координат так, чтобы

$$\sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2 u_{\alpha} = 0.$$

В этой системе координат выражение (3) существенно упрощается; в нем отсутствуют последние слагаемые в фигурных скобках. Дисперсионное уравнение (1) при этом распадается на следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} &= 0; \\ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \right) &= 0; \\ k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{u_{\alpha}^2}{\omega^2} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое из этих уравнений описывает колебания продольного поля $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$, второе — колебания поперечного поля $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = u_{\alpha} E = 0$ и, наконец, третье — колебания поперечного поля, в котором, однако, $u_{\alpha} \parallel \mathbf{E}$. Поэтому первые два уравнения описывают лишь ненарастающие (устойчивые) колебания плазмы. Из третьего же уравнения находим

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2 \left(1 - \frac{u_{\alpha}^2}{c^2} \right) \pm \sqrt{\left[k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2 \left(1 - \frac{u_{\alpha}^2}{c^2} \right) \right]^2 + 4k^2 \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2 u_{\alpha}^2} \right\}. \quad (5)$$

Один из корней (5) всегда отрицательный. Это означает, что система, состоящая из плазмы и движущегося со сверхзвуковой скоростью нейтрального пучка заряженных частиц, неустойчива по отношению к возбуждению поперечных электромагнитных волн. В случае нерелятивистских скоростей $u_{\alpha} \ll c$ инкремент нарастания электромагнитных волн, согласно выражению (5), равен

$$\gamma = k \sqrt{\frac{\sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2 u_{\alpha}^2}{k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2}} = u k \sqrt{\frac{\omega_{L1} \omega_{L2}}{\left(k^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2 \right) \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2}}, \quad (6)$$

где ω_{L1} и ω_{L2} — ленгмюровские частоты электронов соответственно для пучка и плазмы. При малой плотности пучка, $N_1 \ll N_2$, для предельного случая длинных волн, $k^2 c^2 \ll \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2$, из выражения (6) имеем $\gamma \simeq u k \sqrt{N_1 / N_2}$. Для предельного случая

коротких волн, $k^2 c^2 \gg \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2$, согласно выражению (6), $\gamma \simeq \frac{u}{c} \omega_{L1}$. Для сравнения напомним, что возбуждение продольных электромагнитных волн в рассматриваемом нами случае пучка малой плотности происходит лишь при условии [1] $(uk)^2 < \omega_{L2}^2$ (при этом, разумеется, $uk \geq \omega$), причем инкремент нарастания $\gamma \simeq uk \sqrt{N_1 / N_2}$

4. Рассмотрим теперь случай, когда все электроны плазмы движутся со сверхтепловой скоростью u относительно ионов. Полученные выше формулы (3)–(6) в этом случае сохраняют силу с той лишь разницей, что суммирование производится по электронам и ионам плазмы. Благодаря большой разности в массах электронов и ионов при этом несколько упрощается выражение (6) для инкремента нарастания волн

$$\gamma = uk \frac{\omega_{Li}}{\sqrt{k^2 c^2 + \omega_{Le}^2}}. \quad (7)$$

В области больших, $k^2 c^2 \ll \omega_{Le}^2$, и коротких, $k^2 c^2 \gg \omega_{Le}^2$, длии волн соответственно из этого выражения имеем $\gamma \approx uk \sqrt{m/M}$ и $\gamma \approx \frac{u}{c} \omega_{Li}$. Возбуждение продольных волн в случае, когда все электроны плазмы движутся относительно ионов, происходит при условии $(uk)^2 < \omega_{Le}^2$, причем инкремент нарастания равен $\gamma \approx uk \sqrt{m/M}$.

5. Из рассмотренных выше примеров следует, что пучок заряженных частиц, движущийся со сверхтепловой скоростью в изотропной плазме, возбуждает поперечные электромагнитные волны. Инкременты нарастания поперечных волн в области длинных волн того же порядка, что и инкременты нарастания продольных волн, распространяющихся вдоль пучка в тех же условиях. Эти неустойчивости можно назвать гидродинамическими, так как они не связаны с тепловым движением частиц и описываются уравнениями двухжидкостной гидродинамики холодной плазмы [1]. В отличие от кинетических неустойчивостей, имеющих место лишь при выполнении черенковского условия $\omega < uk$ и существенно зависящих от теплового движения частиц [6], гидродинамические неустойчивости непосредственно не связаны с черенковским механизмом возбуждения волн в плазме. Об этом убедительно свидетельствуют рассмотренные выше неустойчивости поперечных волн, имеющие место при $uk = 0$ и приводящие к апериодическому распаду системы. В действительности, разумеется, никакого распада системы не происходит, а устанавливается нелинейный режим движения, пространственно промодулированный поперек направления распространения пучка. Таким образом, при движении пучка со сверхтепловой скоростью должна происходить пространственная модуляция как плотности пучка, обусловленная возбуждением продольных волн в плазме [7], так и скорости пучка, связанная с возбуждением поперечных волн.

Автор выражает глубокую благодарность В. Л. Гинзбургу, М. С. Рабиновичу и В. П. Силину за ценные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин и А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Атомиздат, М., 1961.
2. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, УФН, 73, 701 (1961).
3. Я. Б. Файнберг, Атомная энергия, 11, 313 (1961).
4. B. D. Fried, Phys. Fluids, 2, 337 (1959).
5. J. Neufeld, P. Doyle, Phys. Rev., 121, 654 (1961).
6. А. А. Рухадзе, ЖТФ, 32, 669 (1962), А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН, 76, 79 (1962).
7. И. Ф. Харченко, Я. Б. Файнберг, Р. М. Николаев, Е. А. Корнилов, Е. И. Луденко, Н. С. Паденко, ЖЭТФ, 33, 685 (1960).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
20 октября 1962 г.

О ПОГЛОЩЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ КВАЗИПРОДОЛЬНОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ

К. И. Степанов

Загухание Ландау при квазипродольном распространении в разреженной высокотемпературной плазме может значительно превосходить затухание вследствие „бллизких“ столкновений. В частности, оно может оказаться существенным при распространении УНЧ-излучения в верхней атмосфере [1] и в ряде экспериментальных установок, используемых для получения высокотемпературной плазмы. Экспериментальное

исследование затухания Ландау в таких устройствах позволит определить температуру электронного газа T_e .

В настоящей работе исследуется поглощение Ландау электромагнитных волн низкой частоты, проходящих через магнитоактивную плазму в условиях квазипродольного распространения. В случае, когда фазовая скорость волны значительно больше средней тепловой скорости электронов, этот вопрос исследован Гершманом [2] и Шафрановым [3].

Рассмотрим распространение через магнитоактивную плазму электромагнитной волны, частота которой ω значительно меньше гирочастоты электронов ω_H , но значительно больше гирочастоты ионов ω_H ($\mu = m/M$ —отношение массы электрона к массе иона). Будем предполагать также, что длина волны в плазме значительно больше ларморовского радиуса электронов, имеющих скорость порядка $v_T = \sqrt{\omega T_e/m}$, и фазовая скорость волны значительно больше средней тепловой скорости ионов, т. е.

$$\left(\frac{kv_T \sin \theta}{\omega_H} \right)^2 \ll 1; \quad \frac{\omega_H}{kv_T \cos \theta} \gg 1; \quad \frac{\omega}{kv_T} \gg \sqrt{\frac{m T_e}{M T_i}}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{k} —волновой вектор, θ —угол между вектором \mathbf{k} и внешним магнитным полем, T_i —температура ионного газа. Тогда тензор диэлектрической проницаемости плазмы ϵ_{ij} имеет вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_H^2} - \frac{\mu \Omega^2}{\omega^2}; \quad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = -\frac{i \Omega^2}{\omega \omega_H}; \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{11} + i \sqrt{\pi} \lg^2 \theta \frac{\Omega^2}{z \omega_H^2} e^{-z^2}; \quad \epsilon_{33} = 1 + \frac{2 \Omega^2 z^2}{\omega^2} [1 + i \sqrt{\pi} z w(z)]; \\ \epsilon_{23} &= -\epsilon_{32} = -\frac{i \Omega^2 \operatorname{tg} \theta}{\omega \omega_H} [1 + i \sqrt{\pi} z w(z)]; \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0, \end{aligned}$$

где

$$w(z) = e^{-z^2} \left(1 + \frac{2i}{V\pi} \int_0^z e^{t^2} dt \right), \quad z = \frac{\omega}{V^2 k v_T \cos \theta},$$

Ω —ленгмюровская частота, $\beta = v_T/c$, $n' = kc/\omega$ —показатель преломления. Мнимые поправки к ϵ_{11} и $i\epsilon_{12}$ пропорциональны $\exp[-(1/2)(\omega_H/kv_T \cos \theta)^2]$, т. е. экспоненциально малы. Выбрана система координат, в которой $k_x = k \sin \theta$, $k_y = 0$, $k_z = k \cos \theta$.

Предполагая, что $\cos^2 \theta |\epsilon_{33}| \gg |\epsilon_{12}| \gg |\epsilon_{11}|$, получим из дисперсионного уравнения следующее выражение для комплексного показателя преломления: $n' = n + i\alpha$, где $\alpha \ll n$ и

$$n^2 = \frac{\Omega^2}{\omega \omega_H \cos \theta}, \quad (2)$$

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{V\pi \omega \sin^2 \theta}{4\omega_H \cos \theta} f(z), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2z} \left(1 + \frac{1}{|1 + i \sqrt{\pi} z w(z)|^2} \right) e^{-z^2}, \\ z &= (V^2 \beta n \cos \theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

При $z \sim V_\Phi/v_T \gg 1$, используя асимптотическое разложение $w(z) \approx i/V\pi z$, получим, что $f(z) \approx 2z^3 e^{-z^2}$. Выражение (3) для коэффициента затухания в этом случае переходит в выражения, полученные Шафрановым [3] и Гершманом [2]. Если же $z \ll 1$, то $f(z) \approx 1/z$. График функции $f(z)$ при $0.1 \ll z \ll 3$ показан на рис. 1. По порядку величины при $z \sim 1$ $\alpha/n \sim \omega/\omega_H \ll 1$. Затухание быстро уменьшается при увеличении z и уже при $z = 3$ $\alpha/n \sim 10^{-3} \omega/\omega_H$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. Ф. Алексину, А. И. Ахиезеру и В. И. Пахомову за обсуждение работы.

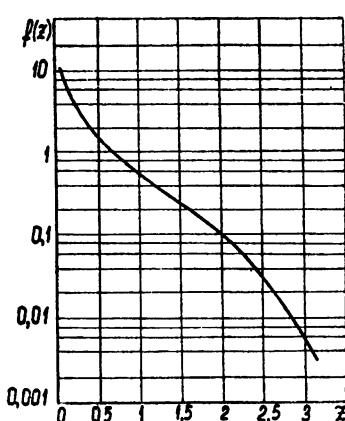


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Н. Гершман, В. А. Угаров, УФН, 72, 235 (1960).
 2. Б. Н. Гершман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 49 (1958).
 3. В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, 34, 1457 (1958).

Физико-технический институт
АН УССР

Поступила в редакцию
17 сентября 1962 г.

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА, НАЛЕТАЮЩЕГО НА МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ ШАР

Г. В. Городинский, В. Я. Эйдман

В последнее время в литературе отмечается известный интерес к задаче об излучении заряда, налетающего на металлический шар. Так, в [2] получена спектральная плотность интенсивности излучения для частицы, пролетающей мимо шара. В [1] получено выражение для энергии, излучаемой системой в том случае, когда частица налетает на шар в лоб. Однако при этом не было учтено влияние процесса столкновения на излучаемую энергию. Как будет показано ниже, из общей интенсивности излучения невозможно выделить излучение, предшествующее столкновению. В связи с этим в настоящей заметке при тех же, что и в [1] и [2], условиях, т. е. при $a \ll \lambda$, где a —радиус шара, λ —длина излучаемой волны, рассматривается лобовое столкновение нерелятивистской заряженной частицы с металлическим шаром. Движение частицы считается заданным, остановка мгновенной, т. е. скорость частицы определяется функцией

$$v = v_0 1(z),$$

где

$$1(z) = 1(z > 0), \quad 1(z) = 0(z < 0).$$

Для решения поставленной задачи естественно воспользоваться методом изображений [1, 2]. Применимость метода изображений в задаче о заряде, пролетающем мимо металлического шара, может быть выяснена посредством строгого решения этой задачи с помощью разложения поля по сферическим функциям (см. [3]). Из результатов этой работы следует, что при $a \ll \lambda$ метод изображений справедлив до тех пор, пока $v^2/c^2 \ll 1$, а не $v/c \ll 1$.

Разумеется, в случае переходного излучения на плоской границе вакуум—металл ввиду особой симметрии задачи это ограничение на скорость заряда отпадает.

В цилиндрической системе координат с началом в точке столкновения (заряд движется в противоположном оси z направлении) источники поля можно записать в следующем виде:

$$\rho = e\delta(\rho) \left\{ \delta(z+vt) 1(z) + \frac{a}{a-vt} \delta(z+a) 1(-t) - \frac{a}{a-vt} \delta\left[z+a\left(1-\frac{a}{a-vt}\right)\right] 1(z, a) \right\}; \\ j = e\rho\delta(\rho) \left\{ \delta(z+vt) 1(z) + \frac{a^3}{(a-vt)^3} \delta\left[z+a\left(1-\frac{a}{a-vt}\right)\right] 1(z, a) \right\}, \quad (1)$$

где

$$1(z) = \begin{cases} 1 & (z > 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}; \quad 1(-t) = \begin{cases} 1 & (t < 0) \\ 0 & (t > 0) \end{cases}; \quad 1(z, a) = \begin{cases} 1 & (-a < z < 0) \\ 0 & (-a > z > 0) \end{cases}.$$

Для фурье-компонент потенциалов вне шара имеем уравнения $(H_\omega = \text{rot } A_\omega, E_\omega = -\frac{i\omega}{c} A_\omega - \nabla \varphi_\omega)$

$$\Delta A_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} A_\omega = -\frac{4\pi}{c} j_\omega, \\ \Delta \varphi_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_\omega = -4\pi \rho_\omega. \quad (2)$$

Решение этих уравнений элементарно, например,

$$A_{\omega}(R) = \frac{e\omega}{2\pi vc} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{v}z - \frac{\omega}{c}\sqrt{R^2 - 2Rz \cos \theta + z^2}\right)}}{\sqrt{R^2 - 2Rz \cos \theta + z^2}} dz + \right. \\ \left. + \int_{-a}^0 \frac{(a+z)}{a} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{v}\frac{az}{a+z} - \frac{\omega}{c}\sqrt{R^2 - Rz \cos \theta + z^2}\right)}}{\sqrt{R^2 - 2Rz \cos \theta + z^2}} dz \right\}, \quad (3)$$

где θ — угол между R и осью $0z$. Способ вычисления первого интеграла приведен в [4]. Во втором интеграле при $\frac{\omega}{c} \frac{a^3}{R} \ll 1$ можно в показателе экспоненты оставить лишь член первого порядка по z , а в знаменателе, при $R \gg a$, ограничиться членом нулевого порядка по z .

Таким образом, получим

$$A_{\omega} = \frac{e\omega}{2\pi vc} \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}R}}{R} \left\{ \frac{i}{\frac{\omega}{v} + \frac{\omega}{c} \cos \theta} + a \int_0^1 (1-x) e^{-i\frac{\omega}{v}a\left(\frac{x}{1-x} - \beta x \cos \theta\right)} dx \right\} \quad (4)$$

$$(\beta = v/c).$$

Аналогичным образом

$$\varphi_{\omega} = \frac{e}{2\pi v} \frac{e^{-i\frac{\omega}{c}R}}{R} \left\{ Ei\left(-i\frac{\omega}{v}a\right) e^{i\frac{\omega}{v}a(1-\beta \cos \theta)} + \frac{i}{\frac{\omega}{v} + \frac{\omega}{c} \cos \theta} - a \int_0^1 \frac{1}{1-x} \times \right. \\ \left. \times e^{i\frac{\omega}{v}a\left(\frac{x}{1-x} - \beta x \cos \theta\right)} dx \right\}. \quad (5)$$

Здесь $Ei(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{t} e^t dt$ — интегральная показательная функция (см., например, [5]).

Переходя к сферическим координатам и вычисляя компоненты электрического и магнитного полей, будем иметь для потока энергии в единицу телесного угла следующее выражение $\left(R_0 - \frac{R}{R}\right)$:

$$\Pi_{\omega, \Sigma} = c R^2 |H_{\omega}|^2 R_0 = \frac{\omega^2 e^2 \sin^2 \theta}{4\pi^2 c^3} \left\{ \frac{v^2}{\omega^2} \frac{1}{(1+\beta \cos \theta)^2} + a^2 J J^* + \frac{v}{\omega} \frac{a i (J^* - J)}{(1+\beta \cos \theta)} \right\} R^0, \quad (6)$$

где при сделанных предположениях

$$J = \int_0^1 (1-x) e^{-i\frac{\omega}{v}a\left(\frac{x}{1-x} - \beta x \cos \theta\right)} dx = \frac{1}{2} \left\{ -1 + i\frac{\omega}{v}a - \frac{\omega^2}{v^2} a^2 e^{i\frac{\omega}{v}a} Ei\left(-i\frac{\omega}{v}a\right) \right\}. \quad (7)$$

При $a \rightarrow \infty$, т. е. в случае переходного излучения на плоской границе с металлом, имеем из (3)

$$\Pi_{\omega, \Sigma} = \frac{e^2 v^2 \sin^2 \theta R^0}{\pi^2 c^3 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (8)$$

Эта формула, разумеется, совпадает с соответствующим выражением для энергии переходного излучения, получаемым другими способами (см., например, [6]). В другом предельном случае, когда $a \rightarrow 0$, получаем интенсивность излучения при столкновении заряда с пейтральной частицей

$$\Pi_{\omega, \Omega} = \frac{e^2 v^2 \sin^2 \Theta R^0}{4\pi^2 c^3 (1 + \beta \cos \Theta)^2}. \quad (9)$$

Поскольку $\beta \ll 1$, то энергия излучения в единицу телесного угла на точке в четыре раза меньше энергии, излучаемой на плоской границе.

Из (6) следует, что невозможно выделить член, который отвечал бы выражению для излучаемой энергии, полученному в [1]. Это связано с тем, что, вообще говоря, некорректно отделять излучение, предшествующее столкновению из-за неравномерного движения, от излучения в момент столкновения.

Авторы признательны В. Е. Пафомову за сделанные им замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А Аскарьян, ЖЭТФ, 29, 388 (1955).
2. А Ц. Аматуни, А. Н. Оганесян, Изв. АН Арм. ССР, 14, 99 (1961).
3. Г. В Городинский, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
4. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, 16, 15 (1945).
5. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, изд. техн.-теор. лит., М., 1953.
6. Н. А. Корхмазян, Изв. АН Арм. ССР, 10, 29 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
18 июня 1962 г.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ НАД ПЕРИОДИЧЕСКИЙ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина

В работах Ахиезера, Любарского, Файнберга, Хижняка [1–2] и других рассмотрено движение частиц в структурах, свойства которых периодически меняются в пространстве, и показано, что наличие периодичности приводит к дополнительному излучению энергии. Аналогичный эффект имеет место при движении частицы над периодически неровной поверхностью. Исследование этого вопроса посвящено настояще сообщение.

Ограничимся идеально проводящей неровной поверхностью, описываемой уравнением $z = \zeta(x, y)$. Функция $\zeta(x, y)$ периодична по x и y с периодами L_x и L_y . Частица движется в вакууме с постоянной скоростью v , направленной вдоль оси x на расстоянии a от плоскости $z = 0$.

Потери энергии частицы на единицу пройденного пути определяются формулой

$$\frac{dW}{dx} = eE_x \Big|_{\begin{array}{l} x = vt \\ y = 0 \\ z = a \end{array}}, \quad (1)$$

где E —электрическое поле, рассеянное неровной границей раздела, e —заряд частицы. Уравнение для электрического поля в вакууме имеет вид:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c^2} e v \frac{\partial}{\partial t} \delta(x - vt) \delta(y) \delta(z - a).$$

Графическим условием на идеально проводящей поверхности является обращение в нуль тангенциальных составляющих электрического поля, т. е. $[En] = 0$ (n —нормаль к поверхности), или

$$E_x + E_z \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad E_y + E_z \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (\text{при } z = \zeta(x, y)). \quad (2)$$

Задача решается в следующих предположениях относительно функции $\zeta(x, y)$. Неровная поверхность $z = \zeta(x, y)$ меняется достаточно плавно, т. е.

$$\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{\max} \ll 1, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right|_{\max} \ll 1, \quad (3)$$

и, кроме того, ее максимальная высота удовлетворяет условию

$$\frac{\omega}{c} |\zeta|_{\max} \left| \frac{\partial \zeta}{\partial x, y} \right|_{\max} \ll 1. \quad (4)$$

Следовательно, вторыми слагаемыми в (2) можно пренебречь. При этих допущениях, как показано Лысановым [3] и Митчем [4], определение рассеянного электрического поля сводится к решению интегрального уравнения

$$E_x^{(n)}(x_2, y_2, \zeta_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial n} \frac{1}{n_z} \frac{e^{ikR_{12}}}{R_{12}}, \quad (5)$$

где \mathcal{E} —суммарное электрическое поле падающей и рассеянной волны, R_{12} —расстояние между точками (x_2, y_2, ζ_2) и (x_1, y_1, ζ_1) , расположенными на поверхности раздела, $E^{(n)}$ —электрическое поле падающей волны, излучаемой движущейся частицей:

$$E_{x, \omega}^{(n)}(x, y, \zeta) = \frac{e\omega(1 - \beta^2)}{2\pi v^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz_y \frac{1}{\lambda} e^{i \left[\frac{\omega}{v} x + \gamma_y y - \lambda(\zeta - a) \right]} \quad (6)$$

($\lambda^2 = k^2 - \omega^2/v^2 - \kappa_y^2$, знак ω означает преобразование в интеграл Фурье по времени).

Разложим функцию $e^{-i\lambda\zeta(r, y)}$ в ряд Фурье по координатам

$$e^{-i\lambda\zeta(x, y)} = \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} B_{p, q}(\lambda A) e^{i \left(\frac{2\pi}{L_x} px + \frac{2\pi}{L_y} qy \right)}$$

(A —высота неровностей). Тогда

$$E_{x, \omega}^{(n)}(x, y, \zeta) = \frac{e\omega(1 - \beta^2)}{2\pi v^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz_y \sum_{p, q=-\infty}^{\infty} B_{p, q}(\lambda A) \frac{1}{\lambda} e^{i(\lambda a + b(p, q)r)}, \quad (7)$$

$$b_x^{(p, q)} = \frac{2\pi}{L_x} p + \frac{\omega}{v}; \quad b_y^{(p, q)} = \frac{2\pi}{L_y} q + \gamma_y.$$

В силу условий (3) и (4) в (5) имеем: $R_{12} \approx [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$, $n_z \approx 1$.

Будем искать $\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial n} \frac{1}{n_z}$ в виде:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial n} \frac{1}{n_z} = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} C_{m, n} e^{ib^{(m, n)}r}. \quad (8)$$

Подставив (7) и (8) в (5) для $C_{m, n}$, получим следующее выражение:

$$C_{m, n} = -\frac{ie\omega(1 - \beta^2)}{\pi v^2 \lambda} \sqrt{k^2 - b^{2(m, n)}} e^{i\lambda a} B_{m, n}.$$

Рассеянное электрическое поле в точке, где находится частица в момент времени t , определяется нормальной производной поля на поверхности по формуле Грина:

$$\begin{aligned} E_x \Big|_{\substack{x=vt \\ y=0 \\ z=a}} &= -\frac{e(1 - \beta^2)}{2\pi v^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega dz_y \omega \sum_{r, s, d, l=-\infty}^{\infty} B_{s, r}(\lambda_d, l A) B_{d-s}(\lambda_r, l A) \times \\ &\times \frac{\lambda_1}{\lambda \lambda_{d, l}} e^{i(\lambda_d + \lambda_r) a + i \frac{2\pi}{L_x} vt}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\lambda_1^2 = k^2 - \left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi}{L_x} s \right)^2 - \left(z_y - \frac{2\pi}{L_y} r \right)^2;$$

$$\lambda_{d, l}^2 = k^2 - \left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi}{L_x} d \right)^2 - \left(z_y + \frac{2\pi}{L_y} l \right)^2.$$

Поскольку нас интересуют средние по времени потери энергии, то после усреднения для d остается одно значение $d = 0$:

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{e^2 (1 - \beta^2)}{2\pi v^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{l, s, r = -\infty}^{\infty} d\omega dz_y \omega \sum_{l-s}^{\infty} B_{l-s} (\lambda A) B_{s, r} (\lambda_0, l A) e^{i(\lambda + \lambda_0, l) a} \frac{\lambda_1}{\lambda \lambda_0, l}. \quad (10)$$

В случае одномерной неровной поверхности, уравнение которой имеет синусоидальный характер, $\zeta = A \cos(2\pi x/L_x)$,

$$B_n = (-i)^n J_n.$$

При $a \frac{\omega}{v} \gg 1$ интеграл по x_y вычисляется методом перевала; тогда

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} = & -\frac{e^2 (1 - \beta^2)^{1/4}}{2 \sqrt{\pi a v}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{sgn} \omega \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-i)^s J_s^2 (\lambda A) \sqrt{k^2 - \left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi}{L_x} s \right)^2} \times \\ & \times e^{-2a \frac{\omega}{v} (1 - \beta^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если для функции $\zeta(x, y)$ выполняются условия

$$\left| \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{\max} \ll 1, \quad \left| \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right|_{\max} \ll 1, \quad \frac{\omega}{v} (1 - \beta^2)^{1/2} |\zeta|_{\max} \ll 1, \quad (12)$$

то применим метод возмущений в граничных условиях, изложенный в [3]. Расчет, проведенный этим методом, дает для потерь энергии выражение

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} = & \operatorname{Re} \left\{ \frac{ie^2 (1 - \beta^2)}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int d\omega dz_y \omega \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_{0q} e^{i(\lambda + \lambda_q) a} + \right. \\ & + \left. \frac{e^2}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{s, r, l = -\infty}^{\infty} d\omega dz_y \omega \sum_{s, r, l} A_{s, r} A_{l-r} \frac{[\lambda_{s, r}^2 (1 - \beta^2) - (2\pi s/L_x)^2 \beta^2]}{\lambda_{s, r}} e^{i a (\lambda + \lambda_l)}, \right. \end{aligned} \quad (13)$$

где A_{lk} — коэффициент разложения в ряд Фурье функции $z = \zeta(x, y)$,

$$\lambda_j^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} - \left(z_y + \frac{2\pi}{L_y} j \right)^2 \quad (j = q, l),$$

$$\lambda_{s, r}^2 = k^2 - \left(\frac{\omega}{v} + \frac{2\pi}{L_x} s \right)^2 - \left(z_y + \frac{2\pi}{L_y} r \right)^2.$$

Если $\zeta = A \cos(2\pi x/L_x)$, то

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} = & -\frac{e^2 A^2}{2\pi v^2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz_y d\omega \left\{ \left[\frac{2\pi}{L_x} - \frac{\omega}{v} (1 - \beta^2) \right]^2 + z_y^2 (1 - \beta^2) \right\} \times \\ & \times \left[k^2 - \left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi}{L_x} \right)^2 - z_y^2 \right]^{-1/2} \omega e^{2i \lambda a}. \end{aligned} \quad (14)$$

При $a \omega/v \gg 1$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} = & -\frac{e^2 A^2 (1-\beta^2)^{1/4}}{2 \sqrt{\pi a} v^{5/2}} \int_0^{\infty} d\omega \omega^{3/2} \left[\frac{2\pi}{L_x} - \frac{\omega}{v} (1-\beta^2) \right]^2 \times \\ & \times \left[k^2 - \left(\frac{\omega}{v} - \frac{2\pi}{L_x} \right)^2 \right]^{-1/2} e^{-2a \frac{\omega}{v} (1-\beta^2)^{1/2}} ; \\ \omega_0 = & 2\pi v / (1-\beta^2) L_x . \end{aligned} \quad (15)$$

Приведенные выше формулы описывают потери энергии для точечного заряда. Можно определить также потери энергии диполя и заряженной нити. Для этого достаточно выражения (11) и (15) умножить для диполя на $(\omega^2/e^2 v^2) [(1-\beta^2) P_z^2 + P_x^2]$, где P_z и P_x —проекции дипольного момента \mathbf{P} на оси z и x , а для заряженной нити—на $(2\tau^2/e^2) \sqrt{\pi a v} \omega (1-\beta^2)^{1/2}$, где τ —заряд на единицу длины нити. Выражения для потерь энергии заряженной нити верны при любых значениях a .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Я. Б. Файнберг, ЖТФ, 25, 2526 (1955).
2. Я. Б. Файнберг, Н. А. Хижняк, ЖЭТФ, 32, 883 (1957).
3. Ю. П. Лысанов, Акустический журнал, 2, 182 (1956).
4. W. Meesham, J. Acoust. Soc. Amer., 28, 370 (1956).
5. Е. М. Фейнберг, Распространение радиоволн, ГИТЛ, М., 1953.

Институт радиофизики и электронники
АН УССР

Поступила в редакцию
10 июля 1962 г.

О РЕАКЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЗАРЯДА ПО ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ В ВОЛНОВОДЕ

B. K. Юллатов

В работе [1] рассмотрено влияние поля излучения на характер движения заряженной частицы, перемещающейся (при отсутствии реакции излучения) по прямолинейной траектории с периодически меняющейся скоростью в прямоугольном волноводе, заполненном анизотропным диэлектриком. Показано, что как и при движении осцилирующей частицы в среде, заполняющей свободное пространство (см., например, [2,3]), возможность излучения аномальных допплеровских частот приводит к уменьшению торможения колебаний частицы. В некоторых случаях может наступить даже раскачка колебаний. Эти результаты могут быть легко обобщены на случай движения частицы по произвольной периодической траектории в любом волноводе без потерь с анизотропным (негиротропным) заполнением и импедансными стенками.

Будем считать, что средняя скорость частицы, величина которой равна v_0 , направлена вдоль волновода и совпадает с направлением координатной оси z . Представляя электромагнитное поле в виде интеграла Фурье, запишем работу, совершающую полем излучения над частицей за период движения T , в форме

$$W = e \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} dt, \quad (1)$$

где e —заряд частицы, \mathbf{v} —ее скорость, $\mathbf{E}(\omega)$ —компоненты Фурье электрического поля. Выражение для изменения энергии поступательного движения частицы [2,3]

$$W_1 = e \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^T v_0 z_0 \left\{ \mathbf{E}(\omega) - \left[\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{B}(\omega) \right] \right\} e^{i\omega t} dt$$

с помощью тождества

$$z_0 \mathbf{E} e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega} \frac{d}{dt} \{ z_0 \mathbf{E} e^{i\omega t} \} + \frac{i}{\omega} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} e^{i\omega t} + \frac{i}{\omega} \mathbf{v} [\mathbf{z}_0 \text{rot } \mathbf{E}] e^{i\omega t},$$

в котором $\operatorname{rot} E(\omega)$ заменим на $-(i\omega/c) B(\omega)$ (c —скорость света в вакууме), нетрудно преобразовать к виду:

$$W_{\parallel} = e \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^T i v_0 \frac{\partial E(\omega)}{\partial z} e^{i\omega t} dt. \quad (2)$$

Изменение энергии колебательного движения W_{\sim} можно найти как разность W и W_{\parallel} .

Компонента Фурье электрического поля, возбуждаемого в волноводе произвольным током, может быть найдена как [4]*

$$E(\omega) = \sum_s \{C_s E_s + C_{-s} E_{-s}\}. \quad (3)$$

Коэффициенты этого ряда $C_{\pm s}$ определяются из уравнений

$$\frac{dC_{\pm s}}{dz} = \pm \frac{1}{N_s} \int_{S_{\perp}} j(\omega) E_{\mp s} dS_{\perp}, \quad (4)$$

где

$$N_s = \frac{c}{4\pi} \int_{S_{\perp}} \{[E_s H_{-s}] - [E_{-s} H_s]\} z_0 dS_{\perp}, \quad E_{\pm s} = E_{\pm s}^0(r_{\perp}) e^{\mp ih_s z}, \quad H_{\pm s} = H_{\pm s}^0(r_{\perp}) \times e^{\mp ih_s z}$$

— собственные волны данного волновода, r_{\perp} — координаты в поперечном сечении волновода S_{\perp} , $j(\omega)$ — компонента Фурье плотности тока. Сразу заметим, что при действительных ω и h_s (распространяющиеся волны) имеют место соотношения $E_{-s} = E_s^*$, $H_{-s} = -H_s^*$ и $N_s = -4P_s$ (P_s — поток мощности в волне данного типа) [5].

Плотность тока частицы, перемещающейся по произвольной периодической траектории, представим в виде [6]

$$j = e \frac{v}{v} \delta(r_{\perp} - r_{\perp}(z)) \delta\left(t - \int_0^z \frac{d\xi}{v}\right), \quad (5)$$

причем v — проекция скорости частицы на ось z и $r_{\perp}(z)$ — координаты частицы в поперечном сечении волновода — являются периодическими функциями z с периодом L , а следовательно, и периодическими функциями времени с периодом T . Находя из (5) $j(\omega)$ и подставляя в (4), разложим правую часть (4) в ряд Фурье по z :

$$\frac{dC_{\pm s}}{dz} = \pm \frac{e}{2\pi N_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{\mp s - n} e^{-ih_n z \pm ih_s z}. \quad (6)$$

Здесь $h_n = \omega/v_0 + 2\pi n/L$ * и

$$A_{\mp s - n} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{v}{v} E_{\mp s}^0 e^{-\frac{i\omega}{v} \int_0^z d\xi + ih_n z} dz = \frac{1}{L} \int_0^T v E_{\mp s}^0 e^{-i\omega t + ih_n z} dt. \quad (7)$$

Проводя интегрирование в (6) и подставляя $C_{\pm s}$ в (3), найдем $E(\omega)$, после чего из (1) и (2) нетрудно получить:

$$W = \frac{e^2 L}{2\pi i} \sum_{s,n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{N_s} \left\{ \frac{A_{-s-n}^{\omega} A_s^{\omega}}{h_s - h_n} + \frac{A_s^{\omega} A_{-s-n}^{\omega}}{h_s + h_n} \right\} d\omega;$$

* В (3) опущен член, пропорциональный продольной составляющей плотности тока, поскольку он не имеет отношения к полю излучения.

** В [6] $h_n = \omega(1/v) + 2\pi n/L$, где $(1/v) = (1/L) \int_0^L dz/v$. Но легко видеть, что

$(1/v) = T/L$, а $v_0 = (1/T) \int_0^T v dt = L/T$. Поэтому $(1/v) = 1/v_0$.

$$W_{\parallel} = \frac{e^2 L}{2\pi i} \sum_{s,n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_n v_0}{\omega N_s} \left\{ \frac{A_{-s-n}^{-\omega} A_s^{\omega}}{h_s - h_n} + \frac{A_{s-n}^{-\omega} A_{-s}^{\omega}}{h_s + h_n} \right\} d\omega. \quad (8)$$

В этих выражениях $A_{\pm s n}^{\omega}$ отличаются от (7) только знаком перед h_n .

Интегралы в (8) понимаются в смысле их предельного значения при исчезающем малом затухании электромагнитных волн [7]. При внесении в волновод поглощения волновые числа распространяющихся волн h_s приобретают мнимую часть, причем если $\omega P_s > 0$, то при $\omega > 0 \operatorname{Im} h_s < 0$, а при $\omega < 0 \operatorname{Im} h_s > 0$; если же $\omega P_s < 0$ (обратные волны), то знак $\operatorname{Im} h_s$ меняется на обратный. Кроме того, необходимо учесть, что если $E_s(-\omega) = E_s(\omega)$, то $H_s(-\omega) = -H_s(\omega)$ и, следовательно, $N_s(-\omega) = -N_s(\omega)$. Используя все это, из (8) окончательно получим:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{s,n} \{ W_{s n} + W_{-s n} \}, \quad W_{\parallel} = \sum_{s,n} \left\{ \frac{h_n v_0}{\omega} W_{s n} + \frac{h_n v_0}{\omega} W_{-s n} \right\}, \\ W_{\sim} &= W - W_{\parallel} = - \sum_{s,n} \left\{ \frac{2\pi n}{\omega T} W_{s n} + \frac{2\pi n}{\omega T} W_{-s n} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$W_{\pm s n} = \frac{-e^2 L |A_{\pm s n}^{\omega}|^2}{N_s \left(\frac{\partial h_s}{\partial \omega} \mp \frac{1}{v_0} \right)}.$$

В W , W_{\parallel} и W_{\sim} частота в первых слагаемых определяется как положительный корень уравнения

$$h_s - h_n = 0, \quad (10)$$

а во вторых—как положительный корень уравнения

$$h_s + h_n = 0. \quad (10a)$$

Первый член в W определяет изменение энергии частицы за период, связанные с излучением электромагнитных волн, фазовая скорость которых совпадает по направлению со средней скоростью частицы ($v_{\phi} > 0$); второй член связан с волнами, у которых $v_{\phi} < 0$. Из выражения для W_{\parallel} видно, что излучение волн с $v_{\phi} > 0$ уменьшает энергию поступательного движения частицы, а волн с $v_{\phi} < 0$ —увеличивает ее.

Постоянные распространения излучаемых волн равны $h = \pm h_s(\omega)$ (частота определяется формулами (10) и (10a)). Из последних легко получить: $\omega - hv_0 = -2\pi n/T$. Это означает, что излучению нормальных допплеровских частот соответствуют $n < 0$, а аномальных допплеровских частот— $n > 0$. Чerenковское излучение может иметь место при $n = 0$ [8]. Излучение нормальных допплеровских частот, как следует из выражения для W_{\sim} , уменьшает колебательную энергию частицы, в то время как излучение аномальных допплеровских частот увеличивает ее, что находится в полном соответствии с общей теорией излучения движущихся осцилляторов [8].

В [1] показано, что в прямоугольном волноводе с $\epsilon_{\parallel} < 0, \epsilon_{\perp} > (c/v_0)^2$ частица, перемещающаяся по прямолинейной траектории с достаточно малой амплитудой осцилляций, в некоторых случаях излучает лишь аномальные допплеровские частоты и поэтому происходит раскачка колебаний частицы. Этот вывод с помощью (9) обобщается на случай волноводов с произвольным поперечным сечением, поскольку для любых волноводов с различными ϵ_{\parallel} и ϵ_{\perp} TM-волны имеют $h_s = \{ \epsilon_{\perp} (\omega/c)^2 - (\epsilon_{\perp}/\epsilon_{\parallel}) k_s^2 \}^{1/2}$ (k_s —поперечное волновое число).

Считаю приятным долгом выразить признательность А. В. Гапонову, обратившему мое внимание на эту задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Коробков, В. Я Эйдман, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 122 (1962).
2. В. Л. Гинзбург, В. Я Эйдман, ЖЭТФ, 36, 1823 (1959).
3. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, 331 (1959).
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957, стр. 436, 448.

5. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 27, 2340 (1957).
6. В. А. Солинцев, А. С. Тагер, Радиотехника и электроника, 5, 1100 (1960).
7. М. И. Каганов, ЖТФ, 23, 505 (1953).
8. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР, 56, 583 (1947).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 сентября 1962 г.

ОТРАЖЕНИЕ УДАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ КОРОТКОЗАМКНУТОГО КОНЦА ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С ФЕРРИТОМ

Л. А. Островский

1. Отражение ударной волны от границы раздела двух линий передачи является характерным и сравнительно легко осуществимым случаем взаимодействия волн в нелинейных средах. Рассмотрим, в частности, падение стационарного разрыва на короткозамкнутый конец двухпроводной линии (рис. 1а). Границные условия на разрыве, аналогичные условиям для плоской волны в безграничной среде [1], имеют вид:

$$\frac{V_2 - V_1}{\Phi_2 - \Phi_1} = \frac{I_2 - I_1}{C(V_2 - V_1)}. \quad (1)$$

Здесь V —напряжение, I —ток, Φ —поток индукции, C —погонная емкость линии; индексы 1 и 2 отвечают значениям перед и за фронтом разрыва; электрические свойства линии считаются линейными.

По достижении разрывом (в момент $t = t_0$) конца линии передачи $z = z_0$ возникает отраженная волна (рис. 1б), за фронтом которой $V = 0$, а I больше, чем в падающей волне, т. е. отраженная волна также ударная. Задача определения тока I_k на конце линии после отражения сводится, очевидно, к совместному решению двух уравнений вида (1) для падающего и отраженного разрывов. Если при $t < t_0$ на конце линии $I = \Phi = 0$ ($V \equiv 0$ на конце по предположению), то нетрудно найти:

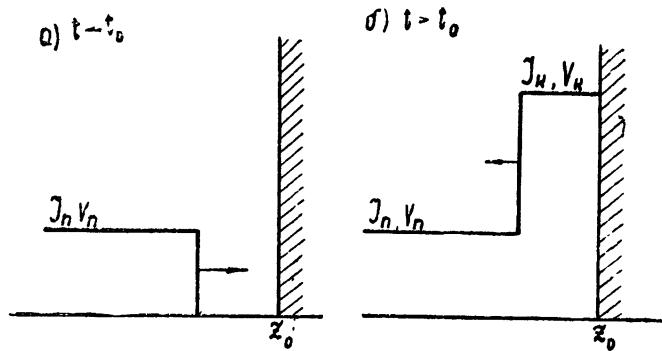


Рис. 1.

$$I_n/I_k + \Phi_n/\Phi_k = 1. \quad (2)$$

Здесь I_n , Φ_n —величины за фронтом падающего разрыва (перед фронтом отраженного), а I_k , Φ_k —на конце линии (за фронтом отраженного разрыва).

При линейной однородной связи между Φ и I из (2) имеем, разумеется, $I_k = 2I_n$. Если же $\Phi_n/\Phi_k < I_n/I_k$, в частности, если функция $d\Phi/dI$ —монотонно убывающая (что обычно выполняется для имеющихся нелинейных материалов), то, согласно (2), $I_k > 2I_n$, причем это увеличение может быть значительным*.

* Этот факт отмечался ранее в докладе [2], где приводилась формула (4).

Рассмотрим конкретно линию передачи с ферритом. Предположим, что амплитуда разрыва достаточно велика, так что за его фронтом феррит намагничен до насыщения в направлении магнитного поля волны. Тогда, если не интересоваться структурой ударной волны, магнитные свойства линии можно описывать кусочно-линейной связью $\Phi(I)$ ^[3]:

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_0 \pm L_0 I, & I \neq 0, \\ \Phi_0, & I = 0 \quad (\lvert \Phi_0 \rvert \ll \Phi_s). \end{cases} \quad (3)$$

Очевидно, величина Φ_s определяется намагнченностью насыщения феррита M_s , а Φ_0 — положением вектора намагнченности перед падающим разрывом. С учетом (3) из граничных условий (1) найдем следующее выражение для тока за фронтом отраженного разрыва:

$$p = I_k/I_n = 1 + \sqrt{1 + \frac{\Phi_s - \Phi_0}{L_0 I_n}} > 2. \quad (4)$$

При $\Phi_0 = 0$ формула (4) является частным случаем (2).

2. Ниже приводятся экспериментальные результаты, подтверждающие наличие указанного нелинейного эффекта. В качестве линии передачи использовалась цепочка из 32 звеньев с сосредоточенными параметрами (рис. 2),

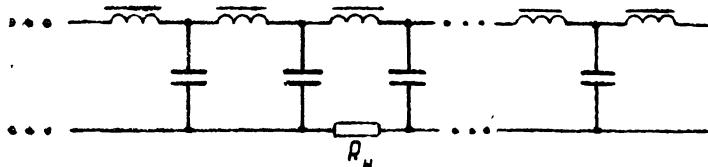


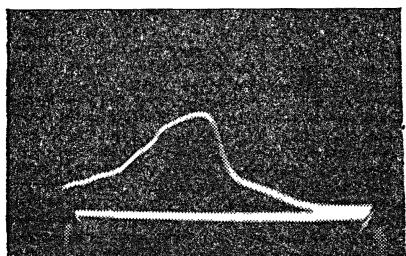
Рис. 2.

индуктивные элементы которой представляют собой катушки, намотанные на торoidalные сердечники из феррита. Емкость одного звена $C_1 = 20 \text{ пФ}$, индуктивность без феррита $L_0 = 1,1 \text{ мГн}$. Более подробное описание таких линий и их применения для формирования ударных волн можно найти, например, в [4,5].

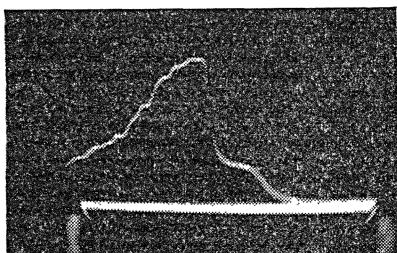
На вход линии подавался импульс с амплитудой тока от 15 до 40 а (магнитное поле в сердечниках равно при этом $60 \div 160$ эрстед) и длительностью фронта около $3 \cdot 10^{-8}$ сек. Уже на первых 10 звеньях формировалась ударная волна с длительностью фронта около $2 \cdot 10^{-9}$ сек. Конец линии короткозамкнут, а за несколько ячеек до конца в заземленный провод последовательно включалось сопротивление нагрузки $R_h \approx 2$ ом, малое по сравнению со средним характеристическим сопротивлением линии $\gamma \approx 75$ ом. Напряжение с указанного сопротивления (пропорциональное тому в линии) подавалось на скоростной осциллограф с длительностью развертки около $5 \cdot 10^{-8}$ сек. Таким образом, последовательно во времени наблюдались сначала падающая, а затем отраженная ударная волна в выбранной точке линии.

На рис. 3 а, б, в, г приведены осциллограммы тока* в шестой от конца ячейке линии при амплитуде напряжения падающей волны, равной соответственно $V_n=3$; $3,5$; 4 ; 5 кВ. Отношение $p=I_k/I_n$ здесь около $3,4-3,6$. Формула (4) дает несколько более резкое изменение p , если значению $V_n=4$ кВ соответствует $p=3,5$, то для $V_n=3$ и 5 кВ имеем, согласно (5), $V_n=4$ и $3,1$. Отличие вызвано, по-видимому, некоторым затуханием волны при распространении от нагрузки до конца линии и, обратно, в результате чего значение p получается заниженным; затухание же сказывается тем больше, чем меньше V_n . Это же относится и к изменению p под действием небольшого постоянного намагничивающего тока I_0 , изменяющего величину Φ_0 . Рис. 4а соответствует величине $I_0=-30$ мА (положительным считается знак тока в падающей волне), рис. 4б — $-I_0=+40$ мА при $V_n=4$ кВ. Ясно, что при дальнейшем увеличении I_0 ток должен убывать ($\Phi_0 \rightarrow \Phi_s$). На рис. 3 и 4 видно уменьшение длительности фронта ударной волны с ростом ее амплитуды и с убыванием I_0 (в частности, фронт отраженной волны всегда короче фронта падающей), а также появление колебаний за фронтом сильной ударной волны, обусловленных влиянием пространственной дисперсии в линии. Во всех случаях величина p существенно больше значения 2, соответствующего линейному закону отражения. Более тщательное измерение p может служить одним из методов определения параметров феррита, важных для исследования ударных волн.

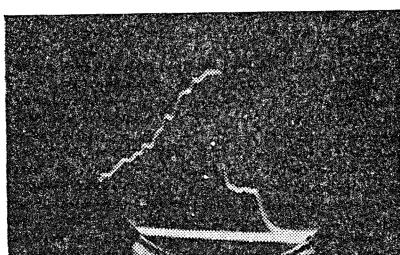
* Ось времени направлена влево.



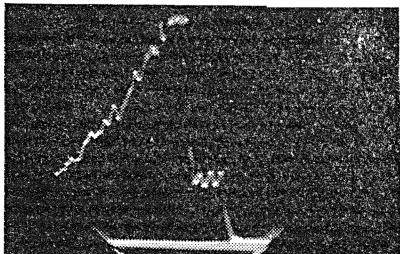
а)



б)



в)

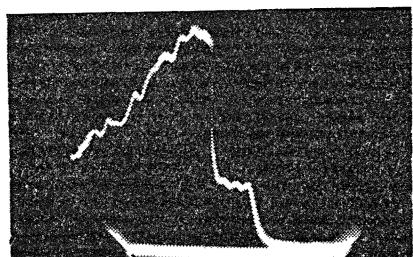


г)

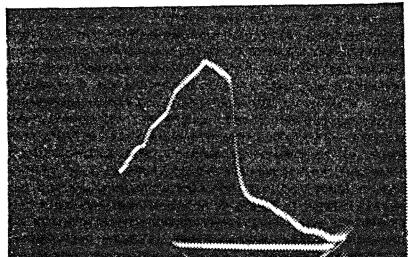
Рис. 3.

Отметим, что подобный эффект удается получить для напряжения в линии с нелинейной емкостью при отражении от разомкнутого ее конца, однако p получается меньшим (не более 2,5) [6].

В заключение укажем, что рассмотренный эффект в значительной степени аналогичен известному в газодинамике нелинейному возрастанию давления при прямом отражении ударной волны от жесткой стенки [7]. Поэтому описанный эксперимент



а)



б)

Рис. 4.

можно в качественном отношении рассматривать и как моделирование соответствующей газодинамической закономерности.

Автор признателен А. М. Белянцеву и А. В. Гапонову за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 36, 957 (1959).
2. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Доклад на XIII Ассамблее, URSI, Лондон, 1960.
3. Л. А. Островский, ЖТФ (в печати).
4. И. Г. Катаев, Вопросы радиоэлектроники, сер. 6, 61 (1959).

5. А. М. Белянцев, Ю. К. Богатырев, Л. И. Соловьева, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика (в печати).
 6. А. М. Белянцев, Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 183 (1962).
 7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, ГИТТЛ, М., 1953

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 октября 1962 г.

**ДИФФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ С ЭКРАНОМ И ДИЭЛЕКТРИКОМ
(СЛУЧАЙ НАКЛОННОГО ПАДЕНИЯ)**

A. И. Адонина

Рассматриваемая в настоящей работе задача представляет интерес как для теории дифракционных явлений на плоских решетках, так и для чисто практических целей, потому что в реальных условиях (в антенной технике) используются экранированные решетки на диэлектрическом слое. Кроме того, решение данной задачи позволяет установить эквивалентные граничные условия, которые могут быть применены для исследования кольцевых и спиральных волноводов.

Пусть на плоскую металлическую решетку с экраном (период решетки l , ширина щели d , расстояние от решетки до экрана a) и диэлектриком ($\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$), расположенным между решеткой и экраном, падает плоская волна. Вектор $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$ (где \vec{n} —единичный вектор, определяющий направление падения) лежит в плоскости, перпендикулярной металлическим полоскам решетки, и составляет угол α с осью Oz *. Следует найти диффрагированное поле для E - и H -поляризованной волны.

Решение проводится методом сведения дифракционной задачи к неоднородной задаче сопряжения, предложенным в работе [1]. Применительно к решению задач о наклонном падении на плоские металлические решетки этот метод изложен в работе [2]. Поэтому мы не будем останавливаться на подробных выкладках (на записи полей в обеих областях, удовлетворении граничным условиям, решении неоднородной задачи сопряжения), а сразу запишем системы уравнений для определения неизвестных a_n и c_n .

Так, для E -поляризации

$$\begin{aligned} iz \cos \alpha \tilde{V}_{[0]}^0 &= x_0 \xi_0^E \tilde{V}_{[0]}^0 + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|z \sin \alpha + n|}{z \sin \alpha + n} \xi_n^E \tilde{V}_{[0]}^n + 2L^E \tilde{R}_{[0]} ; \\ iz \cos \alpha V_0^0 &= x_0 (\xi_0^E V_0^0 - 1) + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|z \sin \alpha + n|}{z \sin \alpha + n} \xi_n^E V_0^n + 2L^E R_0 ; \\ iz \cos \alpha V_m^0 &= x_0 \xi_0^E V_m^0 + x_m \left[\frac{|z \sin \alpha + n|}{z \sin \alpha + n} \xi_m^E V_m^m - 1 \right] + \\ &+ \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n \neq m}} x_n \frac{|z \sin \alpha + n|}{z \sin \alpha + n} \xi_n^E V_m^n + 2L^E R_m , \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$z = l/\lambda; \quad x_n = B_n(z \sin \alpha + n);$$

$$\begin{aligned} \chi_n^E &= \frac{\sqrt{z^2 \epsilon - (z \sin \alpha + n)^2}}{\sqrt{z^2 - (z \sin \alpha + n)^2}} \frac{1 + \exp [4\pi i(a/l) \sqrt{z^2 \epsilon - (z \sin \alpha + n)^2}]}{1 - \exp [4\pi i(a/l) \sqrt{z^2 \epsilon - (z \sin \alpha + n)^2}]} ; \\ \xi_n^E &= 1 + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{z^2}{(z \sin \alpha + n)^2} - 1} (1 + \chi_n^E) \quad (n \neq p), \end{aligned} \quad (2)$$

* Т. е. с осью, ортогональной плоскости решетки.

$$\xi_p^E = -1 + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\chi^2}{(\chi \sin \alpha + p)^2} - 1} \quad (1 + \chi_p^E)$$

($n=p; p=-1, -2, \dots, -j; j < \chi \sin \alpha < j+1$);

$$a_0 = B_0 - 1; \quad a_n = B_n$$

(a_0 —коэффициент отражения основной волны, a_n —амплитуды гармоник).

Для H -поляризации

$$(i \chi \varepsilon_{12} \cos \alpha - \chi \sin \alpha \eta) V_0^0 = y_0 \xi_0^H V_0^0 + \sum_{n \neq 0} y_n \frac{|\chi \sin \alpha + n|}{\chi \sin \alpha + n} \xi_n^H V_0^n + 2L^H R_0; \quad (1)$$

$$(i \chi \varepsilon_{12} \cos \alpha - \chi \sin \alpha \eta) V_0^0 + \chi \sin \alpha \eta = y_0 [\xi_0^H V_0^0 - 1] + \sum_{n \neq 0} y_n \frac{|\chi \sin \alpha + n|}{\chi \sin \alpha + n} \xi_n^H V_0^n + 2L^H R_0;$$

$$(i \chi \varepsilon_{12} \cos \alpha - \chi \sin \alpha \eta) V_m^0 = y_0 \xi_0^E V_m^0 + y_m \left[\frac{|\chi \sin \alpha + m|}{\chi \sin \alpha + m} \xi_m^H V_m^m - 1 \right] + \quad (3)$$

$$+ \sum_{n \neq 0, n+m} y_n \frac{|\chi \sin \alpha + n|}{\chi \sin \alpha + n} \xi_n^H V_m^n + 2L^H R_m,$$

где

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon); \quad y_n = c_n (\chi \sin \alpha + n) \frac{1}{2} (1 + \varepsilon \chi_n^H);$$

$$\eta = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon \chi_0^H); \quad \chi_n^H = \frac{\sqrt{\chi^2 - (\chi \sin \alpha + n)^2}}{\sqrt{\chi^2 \varepsilon - (\chi \sin \alpha + n)^2}} \frac{1 + \exp[4\pi i(a/l)\sqrt{\chi^2 \varepsilon - (\chi \sin \alpha + n)^2}]}{1 - \exp[4\pi i(a/l)\sqrt{\chi^2 \varepsilon - (\chi \sin \alpha + n)^2}]}, \quad (4)$$

$$\xi_n^H = 1 + i \sqrt{\frac{\chi^2}{(\chi \sin \alpha + n)^2} - 1} \frac{2\varepsilon_{12}}{1 + \varepsilon \chi_n^H} \quad (n \neq p);$$

$$\xi_p^H = -1 + i \sqrt{\frac{\chi^2}{(\chi \sin \alpha + p)^2} - 1} \frac{2\varepsilon_{12}}{1 + \varepsilon \chi_p^H}$$

($n=p; p=-1, -2, \dots, -j; j < \chi \sin \alpha < j+1$),

c_0 —коэффициент отражения основной H -поляризованной волны, c_n —амплитуды гармоник дифракционного спектра, L^E и L^H —постоянные, возникающие при решении неоднородной задачи сопряжения; V_m^n и R_m определены в работе [1] и выражаются

через полиномы Лежандра, а \tilde{V}_0^n и \tilde{R}_0 — через функции Лежандра [2]. Заметим, что для E -поляризованной волны в системе (1) все полиномы и функции Лежандра имеют аргумент $u = \cos(\pi d/l)$, а для H -поляризованной волны (3) все полиномы и функции Лежандра имеют аргумент $v = \cos[(\pi/l)(l-d)] = -u$.

Итак, для определения коэффициента отражения E - и H -поляризованных волн мы получили бесконечные системы уравнений. Под знаком суммы каждой системы стоят величины ξ_n^E и ξ_n^H , которые при увеличении n уменьшаются как $1/n^2$. Поэтому, полагая, что при $n > N$ все ξ_n^E и ξ_n^H равны нулю, получим конечную систему уравнений, корни которой могут быть рассчитаны на вычислительной машине.

Если систему уравнений (1) решить относительно $(a_0 + 1)$ ($a_0 + 1 = B_0$) по формулам Крамера, то получим выражение, пропорциональное $1 - e^{4\pi l \frac{a}{l}} \chi \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \alpha}$. При

$$\chi = \frac{ml}{2a \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \alpha}} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

это выражение обращается в нуль; следовательно, $a_0 = 1$, т. е. в данных точках происходит идеальное отражение E -поляризованной волны. Этот вывод хорошо согла-

суется с расчетными данными, приведенными на рис. 1. При $\alpha=45^\circ$ и $\epsilon=2,85$ точки идеального отражения повторяются примерно через 1,3 λ .

Если выполняется условие $\kappa \ll 1$ (длинноволновое приближение), то в уравнениях (1) и (3) всеми ξ_n^E и ξ_n^H можно пренебречь и коэффициент отражения для E - поляризованной волны

$$\begin{aligned} a_0^E = i \kappa \cos \alpha \ln \frac{1+u}{2} \left\{ \frac{1}{2} i \kappa \left[\cos \alpha + \sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha} \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{1 + \exp[4\pi i \kappa(a/l) \sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha}]}{1 - \exp[4\pi i \kappa(a/l) \sqrt{\epsilon - \sin^2 \alpha}]} \right\} \ln \frac{1+u}{2} - 1 \}^{-1} - 1; \end{aligned} \quad (5)$$

для H -поляризованной волны

$$a_0^H = \left(i \kappa \cos \alpha \epsilon_{12} \ln \frac{1+v}{2} - \eta \right) \left[i \kappa \cos \alpha \epsilon_{12} \ln \frac{1+v}{2} + \frac{1}{2} (1 + \epsilon \chi_0^H) \right]^{-1}. \quad (6)$$

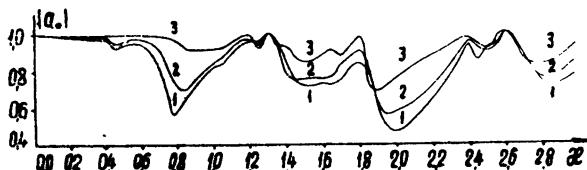


Рис. 1. Зависимость $|a_0|$ от u при $\alpha=45^\circ$, $b=0,25$,
 $\epsilon=2,85+0,0004$:
 1— $u=0$; 2— $u=0,2$; 3— $u=0,6$.

Находя разность тангенциальных составляющих поля на решетке и используя значение коэффициента отражения (4), (5), приходим к следующим граничным условиям, которые могут быть применены для расчета кольцевых и спиральных волноводов в длинноволновом приближении:

$$E_{x1} = E_{x2} = E_x;$$

$$E_{y1} = E_{y2} = E_y;$$

$$E_x = -i \kappa \ln \frac{1+u}{2} (H_{y1} - H_{y2});$$

$$H_{x1} - H_{x2} = -i \kappa \epsilon_{12} \ln \frac{1+v}{2} E_y.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, 381 (1962).
2. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов, ЖТФ (в печати).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
18 сентября 1962 г.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ШИРИНЫ ЛИНИИ АВТОГЕНЕРАТОРА

В. А. Маркелов

Некоторые авторы (см., например, [1]) для определения ширины линии автогенератора прибегают к следующему приему: рассматриваются шумы в усилителе, полученные из изучаемого генератора путем уменьшения вносимого тем или иным образом

в его схему отрицательного сопротивления, и подбором его величины (иными словами, подбором степени регенерации) добиваются равенства мощности шумов на выходе усилителя мощности исходного генератора. Определив при этом условии значение ширины полосы пропускания такого "эквивалентного" усилителя, считают, что таким же будет и значение ширины линии генератора в предположении, что интенсивность случайных сил в обеих системах одна и та же.

Целью данной заметки является рассмотрение такого метода расчета, представляющего интерес в тех случаях, когда точный анализ схемы генератора (с учетом его нелинейных свойств) затруднителен. Насколько нам известно, такое рассмотрение ранее проведено не было.

Прежде всего, однако, надо подчеркнуть, что колебания на выходе усилителя, являющиеся нормальным случайным процессом (при некоторых ограничениях, которые практически всегда выполняются), по своему характеру резко отличаются от колебаний генератора. Поэтому речь может идти лишь о сравнении корреляционных функций и картины спектров обоих процессов.

Положим, что рассматриваемые системы могут быть описаны уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}) + \omega_0^2 \xi(t), \quad (1)$$

где ω_0 —собственная частота консервативной системы, $f(x, \dot{x})$ характеризует малое отклонение системы от консервативной, $\xi(t)$ —малая случайная сила.

Рассмотрим сначала случай регенеративного усилителя. При этом система предполагается линейной и $f(x, \dot{x})$ в уравнении (1) запишется следующим образом:

$$f(x, \dot{x}) = -2 \left(\frac{\omega_0}{2Q} - \beta \right) \dot{x}, \quad (2)$$

где Q —добротность колебательной системы, β —величина, характеризующая регенерацию.

Обозначив через $W_\xi(\omega)$ спектральную плотность случайной силы $\xi(t)$, определим из (1) и (2) выражение для спектральной плотности $W_x(\omega)$:

$$W_x(\omega) = \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2 W_\xi(\omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0/2Q - \beta)^2}. \quad (3)$$

В дальнейшем примем, что $W_\xi(\omega)$ постоянна вблизи частоты ω_0 и равна $W_\xi(\omega_0)$. Из (3) легко определить полную мощность на выходе усилителя $(\bar{x}^2)_y$ и ширину его полосы пропускания $(\Delta\omega)_y$ (на уровне 0,5 по мощности):

$$(\bar{x}^2)_y = \frac{W_\xi(\omega_0)}{8} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0/2Q - \beta)^2}; \quad (4)$$

$$(\Delta\omega)_y = 2 \left(\frac{\omega_0}{2Q} - \beta \right) = \frac{W_\xi(\omega_0) \omega_0^2}{4(\bar{x}^2)_y}. \quad (5)$$

Перейдем теперь к генератору. Как известно [2], спектр его вблизи частоты ω_0 будет иметь следующий вид:

$$W_x(\omega) = \frac{A_0^2 D/2}{(\omega - \omega_0)^2 + D^2/4}, \quad (6)$$

где A —амплитуда автоколебаний, а D —коэффициент диффузии фазы. Таким образом, процессы на выходе усилителя и генератора имеют идентичную картину спектров. Из (6) следует, что ширина спектральной линии генератора $(\Delta\omega)_r$ равна D . Согласно [3],

$$D = (\Delta\omega)_r = \frac{W_\xi(\omega_0) \omega_0^2}{4A_0^2}. \quad (7)$$

Как видим, в случае изохронного генератора нелинейные члены уравнения (1) влияют на ширину линии лишь косвенно, через амплитуду автоколебаний.

Сравнивая (7) с (5) и полагая мощность колебательных процессов на выходе обеих систем одинаковой, т. е. $(\bar{x}^2)_y = A_0^2/2$, получим:

$$(\Delta\omega)_r = \frac{1}{2} (\Delta\omega)_y. \quad (8)$$

Соотношение (8) оказывается верным и в некоторых более сложных, чем разобранный выше, случаях. Рассмотрим, например, молекулярный генератор. Как показано в [4], квазисинусоидальный процесс в молекулярном генераторе может быть описан уравнением типа (1), в котором, однако, член $f(x, \dot{x})$ зависит от частоты автоколебаний. Для этого случая уравнение (1) примет вид (см. [4]):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \nabla x - 2 \left(\frac{\omega_0}{2Q} - \beta \right) \dot{x} + \omega_0^2 \xi(t), \quad (9)$$

где $\nabla = 1 - \epsilon_1/\epsilon_2$; $\beta = \omega_0 \epsilon_2 / \omega_0^2$; ϵ_1 и ϵ_2 —действительная и мнимая части комплексной диэлектрической постоянной молекул газа, зависящие от частоты и амплитуды синусоидального поля в конденсаторе генератора.

Если не принимать во внимание неизохронность генератора и дробовой шум пучка молекул (который является фактически флюктуациями параметров ϵ_1 и ϵ_2), то ширина линии вместо (7) будет теперь задаваться выражением

$$(\Delta\omega)_r = \frac{W_\xi(\omega_0) \omega_0^2}{4A_0^2} \left(1 - \frac{\omega_0}{2} \frac{d\epsilon_1}{d\omega} \right)^{-2}, \quad (10)$$

т. е. она уменьшится в $\left(1 - \frac{\omega_0}{2} \frac{d\epsilon_1}{d\omega} \right)^2$ раз по сравнению с обычным случаем.

Покажем теперь, что благодаря такой зависимости $f(x, \dot{x})$ от частоты и полосы молекулярного усилителя уменьшится во столько же раз. В случае усилителя уравнение (9) будет описывать вынужденное квазисинусоидальное решение, причем ϵ_1 и ϵ_2 можно считать зависящими только от частоты. Учитывая вид ϵ_1 и ϵ_2 (см. [1, 4]), разложим ∇ и β в уравнении (9) в ряд по степеням $(\omega - \omega_0)$ и ограничимся первыми членами разложения:

$$\nabla = -(\omega - \omega_0) d\epsilon_1/d\omega; \quad \beta = \beta_0. \quad (11)$$

Используя (11), определим из (9) спектр шума на выходе усилителя:

$$W_x(\omega) = \omega_0^2 W_\xi(\omega_0) \left(1 - \frac{\omega_0}{2} \frac{d\epsilon_1}{d\omega} \right)^{-2} \left[(\omega - \omega_0)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\omega_0}{2Q} - \beta_0 \right)^2 \left(1 - \frac{\omega_0}{2} \frac{d\epsilon_1}{d\omega} \right)^{-2} \right]^{-1}, \quad (12)$$

откуда, вычисляя $(\overline{x^2})_y$, найдем ширину полосы:

$$(\Delta\omega)_y = \frac{W_\xi(\omega_0) \omega_0^2}{4(\overline{x^2})_y} \left(1 - \frac{\omega_0}{2} \frac{d\epsilon_1}{d\omega} \right)^{-2}. \quad (13)$$

Следовательно, и в этом случае $(\Delta\omega)_r = (\Delta\omega)_y/2$.

Более строгое рассмотрение вопроса [4, 5] показывает, что при обычных условиях в молекулярном генераторе ширина линии обусловливается лишь тепловыми шумами контура генератора и шумами спонтанного излучения молекул, а неизохронность и дробовой шум молекул можно не принимать во внимание. Таким образом, данный метод расчета ширины линии применим и к молекулярному генератору; поэтому результаты авторов [4], основанные на этом методе, совпадают с результатами [4, 6], полученными более строгим путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. P. Gordon, N. Z. Zeiger, C. H. Townes, Phys. Rev., **99**, 1264 (1955).
2. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., **14**, 145 (1950).
3. С. М. Рытов, ЖЭТФ, **29**, 304 (1955).
4. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, **3**, 1298 ((1958)).
5. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 3, 377 (1959).
6. K. Shimoda, T. C. Wang, C. H. Townes, Phys. Rev., **102**, 1308 (1956).