ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том VI, № 1 РАДИОФИЗИКА 1963

О ДИСПЕРСИОННОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ВОЛНОВОДОВ С НЕПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕКТРОННЫМИ ПОТОКАМИ*

В. К. Юлпатов

Вариационным методом получено дисперсионное уравнение для волноводов с непрямолинейными периодическими электронными пучками. Приводятся некоторые оценки влияния высокочастотного пространственного заряда на взаимодействие пучка с синхронными волнами волновода.

1. В работах [1,2] развит метод, позволяющий исследовать взаимодействие непрямолинейных периодических электронных пучков с электромагнитным полем волноводов в приближении малого сигнала. С помощью этого метода в [2–4] показано, что при определенных условиях электроны пучка могут когерентно излучать электромагнитные волны. Это излучение возникает в связи с неустойчивостью, обусловленной группировкой (автофазировкой) электронов, происходящей как за счет неизохронности периодического движения электронов, так и за счет неоднородности поля синхронной волны. Известно также, что в некоторых случаях группировке электронов, приводящей к неустойчивости, может способствовать поле высокочастотного пространственного заряда пучка [5,6]. Однако метод, использованный в работах [1,2], не позволяет в более или менее обозримом виде учесть влияние пространственного заряда.

В настоящей работе рассмотрено распространение электромагнитных волн в волноводе с гладкими идеально проводящими стенками при наличии непрямолинейного периодического электронного пучка. Дисперсионное уравнение, полученное вариационным методом, дает возможность учесть влияние высокочастотного пространственного заряда пучка.

2. Задача о возбуждении волновода непрямолинейным электронным пучком была подробно рассмотрена в [1]. Но поскольку формулы этой работы оказываются неудобными для применения вариационного метода при нахождении дисперсионного уравнения, получим выражение для электромагнитного поля в волноводе в несколько иной форме.

Будем считать, что каждый электрон непрямолинейного периодического пучка в среднем перемещается параллельно образующей волновода, а длина пучка, как и длина волновода, бесконечна. Кроме того, предположим, что невозмущенные траектории всех электронов одинаковы, но смещены друг относительно друга в пространстве.

Известно, что электромагнитное поле в волноводе с гладкими идеально проводящими стенками, возбуждаемое произвольным током, может быть представлено в виде разложения в ряд по мембранным функциям волновода и их градиентам [7]. Коэффициенты этого ряда, зависящие от времени t и продольной координаты z, удовлетворяют неоднородным уравнениям в частных производных типа телеграфных,

* Основные результаты работы изложены в докладе на сессии Научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова (июнь, 1961 г.).

в правые части которых входят интегралы по поперечному сечению волновода вида

$$S(t, z) = \int\limits_{S_\perp} jE_\lambda \, dS_\perp, \tag{1}$$

где j — плотность тока, возбуждающего волновод, E_λ — функции поперечных координат, выражающиеся определенным образом через мембранные функции.

Переменная составляющая интегралов (1), связанная в данном случае с высокочастотным током пучка, может быть выражена непосредственно через малые смещения электронов относительно невозмущенных траекторий. Действительно, интеграл (1) можно с помощью δ-функции представить в виде интеграла по всему объему волновода:

$$S(t, z) = \int\limits_V \delta(\xi - z) \, Q_1(\xi) \, Q_2(z) \, jE_\lambda \, dS_\perp \, d\xi. \tag{2}$$

Вид функций Q_1 и Q_2 пока не будем конкретизировать, считая их дифференцируемыми при всех значениях аргументов и удовлетворяющими условию $Q_1(z)Q_2(z)=1$. Интегральное представление δ-функции дает возможность записать (2) в форме

$$S(t, z) = \frac{Q_2(z)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{-i\beta z} \int\limits_V jA_\lambda \, dS_\perp \, d\xi, \tag{3}$$

где $A_\lambda = E_\lambda(r_\perp) \, Q_1(\xi) \, e^{i\beta\xi}$.

Интеграл по объему волновода, входящий в (3), может быть преобразован так же, как преобразуется подобный интеграл в работе [1]. Считая, что смещение электронов с невозмущенных траекторий $r^{(1)}$ мало по сравнению с масштабом неоднородности функции A_λ, для переменной составляющей (1) получим выражение

$$\begin{aligned} S_\sim(t, z) = -\frac{eQ_2(z)}{2\pi} \int\limits_\gamma d\gamma w(\gamma) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{-i\beta z} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} (r^{(1)} A_\lambda) + \\ + (r^{(1)} [v^{(0)}, \operatorname{rot} A_\lambda]) + \frac{d}{d\tau} (r^{(1)} A_\lambda) \Big\} d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь, как и в [1], введено время пролета $\tau = t - t_0$ (t_0—момент прохождения электрона через фиксированное сечение волновода). В (4) A_λ зависит от поперечных и продольных координат $r_\perp$ и z, которые соответствуют траекториям невозмущенного движения электронов и являются, как и скорость невозмущенного движения $v^{(0)}$, функциями времени пролета τ и интегралов невозмущенного движения γ. Распределение постоянного тока в пучке дается функцией $w(\gamma)$, зависящей, в силу сделанного выше предположения, лишь от тех интегралов движения, которые определяют положение траекторий электронов в пространстве, и нормированной так, что $e\int\limits_\gamma w d\gamma = I_0$, где I_0—постоянный ток пучка, e — заряд электрона.

В выражении (4) малое смещение электронов с невозмущенных траекторий $r^{(1)}$ зависит не только от τ и γ, но также явно от времени t, причем зависимость от всех этих величин произвольна. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда $r^{(1)}$ может быть представлено в виде

$$r^{(1)} = \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} r_{lm}^{+} e^{i\omega t - ih_l v_{\parallel}\tau + im\omega_0\tau + im\varphi_0}, \tag{5}$$

где $h_l = h + lh_0$, $h_0 = \omega_0/v_{\parallel}$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $v_{\parallel}$ — постоянная составляющая скорости электронов вдоль оси волновода, ω_0 — циклическая частота движения электрона по невозмущенной траектории, φ_0 — фаза электрона в момент t_0 $(0<\varphi_0<2\pi)$; частота ω и волновое число h, вообще говоря, — комплексные величины. В (5) явно выделена зависимость $r^{(1)}$ от фазы φ_0, которая является одним из интегралов движения электрона по невозмущенной траектории. Зависимость $r^{(1)}$ от других интегралов движения определяется видом r_{lm}^{+} и ω_0.

Полагая теперь $Q_1(\xi)\,Q_2(z) = \exp\{-\operatorname{Im} h(\xi - z)\}$ и учитывая периодичность невозмущенных траекторий электронов, разложим A_λ и $[v^{(0)}, \operatorname{rot} A_\lambda]$ в ряды Фурье по τ:

$$\begin{Bmatrix} A_\lambda \\ [v^{(0)}, \operatorname{rot} A_\lambda] \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} A_{\lambda n} \\ [v^{(0)}, \operatorname{rot} A_\lambda]_n \end{Bmatrix} e^{(i\beta - \operatorname{Im} h)v_{\parallel}\tau + in\omega_0\tau + in\varphi_0}. \tag{6}$$

Используя (5) и (6), нетрудно получить:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(r^{(1)} \begin{Bmatrix} A_\lambda \\ [v^{(0)}, \operatorname{rot} A_\lambda] \end{Bmatrix}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{v}\sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty}\left(r_{lm}^{+} \begin{Bmatrix} A_{\lambda n} \\ [v^{(0)}, \operatorname{rot} A_\lambda]_n \end{Bmatrix}\right) \delta[\beta - (\operatorname{Re} h + (l-m-n)h_0)]\, e^{i\omega t + i(m+n)\varphi_0};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\tau}\,(r^{(1)} A_\lambda)\, d\tau = \tag{7}$$

$$= i \sum_{l,m,n=-\infty}^{\infty} [\beta - (\operatorname{Re} h + (l-m-n)h_0)]\,(r_{lm}^{+} A_{\lambda n}) \times$$

$$\times\, \delta[\beta - (\operatorname{Re} h + (l-m-n)\,h_0)]\, e^{i\omega t + i(m+n)\varphi_0}.$$

Подставляя (7) в (4) и интегрируя по β, для переменной составляющей интеграла (1) окончательно получим следующее выражение:

$$S_{\sim}(t, z) = -ieh_c \sum_{p=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{\gamma} w \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} (r_{lm}^{+} B_{\lambda pn})\, d\gamma\right\} e^{i\omega t - ih_p z}. \tag{8}$$

Здесь введены обозначения:

$$h_c = \omega/v_{\parallel}, \quad B_{\lambda p} = A_{\lambda p} - \frac{i}{k}\left[\frac{v^{(0)}}{c}, \operatorname{rot} A_{\lambda p}\right],$$

причем в A_λ вместо β подставлено $h_p = h + ph_0$; $k = \omega/c$ (c — скорость света); индекс n не является независимым — он связан с другими индексами, по которым производится суммирование: $n = l - p - m$.

Коэффициенты разложения электромагнитного поля в волноводе в ряд по мембранным функциям выразим через $S_{\sim}$ с помощью соответствующих формул [7] и в $B_{\lambda p}$ подставим соответствующие мембранные функции. Не приводя выкладок, которые весьма просты, но громоздки, выпишем выражение для комплексной амплитуды переменной (высокочастотной) силы Лоренца, действующей на электрон, перемещающийся по невозмущенной траектории:

$$F^{+}=\sum_{\lambda}\sum_{p=-\infty}^{\infty}2e^{2}h_{\lambda}h_{e}\alpha_{\lambda p}N_{\lambda}^{-1}G_{\lambda p}^{+}\int_{\gamma}w\sum_{l,m=-\infty}^{\infty}(r_{lm}^{+}G_{\lambda pn}^{-})\,d\gamma. \tag{9}$$

Сумма по λ означает одновременное суммирование по пяти индексам μ, ν, ν_1, ν_2, ν_3, которым соответствуют следующие выражения $G_{\lambda p}^{\pm}$ и $\alpha_{\lambda p}$:

$$\begin{aligned}
&G_{\mu p}^{\pm}=\left\{\mp ik\,[\nabla\psi_{\mu}\,z_0]+\left[\frac{v^{(0)}}{c},\,(\varkappa_{\mu}^{2}\,\psi_{\mu}\,z_0\mp ih_p\nabla\psi_{\mu})\right]\right\}e^{\mp ih_p z},\\
&\alpha_{\mu p}=(h_p^2-h_{\mu}^2)^{-1};\\
&G_{\nu p}^{\pm}=\left\{(\varkappa_{\nu}^{2}\,\psi_{\nu}z_0\mp ih_p\nabla\psi_{\nu})\pm ik\left[\frac{v^{(0)}}{c}\,[\nabla\psi_{\nu}z_0]\right]\right\}e^{\mp ih_p z},\\
&\alpha_{\nu p}=(h_p^2-h_{\nu}^2)^{-1};\\
&G_{\nu_1 p}^{\pm}=\varkappa_{\nu}^{2}\psi_{\nu}z_0e^{\mp ih_p z},\quad \alpha_{\nu_1}=-\varkappa_{\nu}^{-2};\\
&G_{\nu_2 p}^{\pm}=\varkappa_{\nu}\nabla\psi_{\nu}\,e^{\mp ih_p z},\quad \alpha_{\nu_2}=-\varkappa_{\nu}^{-2};\\
&G_{\nu_3 p}^{\pm}=\varkappa_{\nu}\left[\frac{v^{(0)}}{c}\,[\nabla\psi_{\nu}z_0]\right]e^{\mp ih_p z},\quad \alpha_{\nu_3}=\varkappa_{\nu}^{-2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Мембранные функции ψ_{λ} и поперечные волновые числа определяются уравнениями $\Delta\psi_{\lambda}+\varkappa_{\lambda}^{2}\psi_{\lambda}=0$ и граничными условиями $\psi_{\nu}=0$ и $\partial\psi_{\mu}\,/\,\partial n=0$ (n — нормаль к боковой поверхности волновода) и нормированы так, что

$$\int_{S_{\perp}}(\nabla\psi_{\lambda})^{2}dS_{\perp}=S_{\perp};\qquad h_{\lambda}^{2}=k^{2}-\varkappa_{\lambda}^{2};\qquad N_{\lambda}=\frac{\omega h_{\lambda}}{2\pi}S_{\perp}.$$

3. Обсудим некоторые свойства соотношения (9). Прежде всего заметим, что $G_{\mu p}^{+}$ и $G_{\nu p}^{+}$ отличаются от выражения для комплексной амплитуды силы Лоренца, действующей на электрон со стороны одной из нормальных волн „холодного" волновода, только тем, что в последней h_{μ} или h_{ν} заменено на h_p.

Функции $G_{\lambda p}^{+}$ и $G_{\lambda p}^{-}$ переходят друг в друга при замене ω на $-\omega$ и h_p на $-h_p$. В частности, $G_{\lambda p}^{-}=(G_{\lambda p}^{+})^{*}$, когда ω и h действительные величины. Это обстоятельство позволяет сразу сделать вывод, что если $r^{(1)}$ записать как

$$r^{(1)}=\sum_{l,m=-\infty}^{\infty}r_{l-m}^{-}\,e^{-i\omega t+ih_l z-im\omega\tau-im\varphi}, \tag{11}$$

то выражение для силы Лоренца принимает вид:

$$F^{-}=\sum_{\lambda}\sum_{p=-\infty}^{\infty}2e^{2}h_{\lambda}h_{e}\alpha_{\lambda p}N^{-1}G_{\lambda p}^{-}\int_{\gamma}w\sum_{l,m=-\infty}^{\infty}(r_{l-m}^{-}G_{\lambda p-n}^{+})\,d\gamma. \tag{12}$$

При действительных ω и h (если $r^{(1)}$ в (5) и (11) комплексно сопряжены) $F^- = (F^+)^*$.

Выражение для силы Лоренца несколько упрощается, если электронный пучок тонкий, т. е. функция распределения постоянного тока пучка w является δ-функцией интегралов движения. Тогда (9) и (12) можно записать как

$$F^{\pm} = \sum_{\lambda} \sum_{p=-\infty}^{\infty} 2eI_0 h_e h_\lambda \alpha_{\lambda p} N_\lambda^{-1} G_{\lambda p}^{\pm} \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} (r_{l\pm m}^{\pm} G_{\lambda p\pm n}^{\mp}). \tag{13}$$

Еще более значительные упрощения можно провести в (9) и (12) в том случае, когда w не зависит от φ_0. Это имеет место, когда структура пучка не зависит от продольной координаты. Такие пучки могут быть сформированы в статических полях, не меняющихся вдоль оси z. (Например, пучки с прямолинейными, винтовыми или трохоидальными траекториями электронов.) Интегрируя в (9) и (12) по φ_0, получим, что составляющая $r^{(1)}$ с волновым числом h_l возбуждает составляющую поля с той же постоянной распространения ($p=l$). Если, кроме того, w есть δ-функция остальных интегралов движения, то выражение для составляющей силы Лоренца с номером p принимает вид:

$$F_p^{\pm} = \sum_{\lambda} 2eI_0 h_e h_\lambda \alpha_{\lambda p} N_\lambda^{-1} G_{\lambda p}^{\pm} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (r_{p\pm m}^{\pm} G_{\lambda p\mp m}^{\mp}). \tag{14}$$

С целью упрощения записи введем обозначения

$$\langle r^{\pm} G_{\lambda p}^{\mp} \rangle = eI_0^{-1} \int_{\gamma} w \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} (r_{l\pm m}^{\pm} G_{\lambda p\pm n}^{\mp})\, d\gamma; \quad h_{\text{п}}^2 = \frac{4\pi e I_0}{m v_{\parallel}^3 S_{\text{п}}},$$

где $h_{\text{п}}$—среднее плазменное волновое число в пучке, m—масса электрона, $S_{\text{п}}$ — эквивалентное поперечное сечение пучка, $U_0 = mv_{\parallel}^2/2e$ — продольное напряжение в пучке, и перепишем (9) и (12):

$$F^{\pm} = 2eh_{\text{п}}^2 U_0 \left(\frac{S_{\text{п}}}{S_{\perp}}\right) \sum_{\lambda} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \alpha_{\lambda p} G_{\lambda p}^{\pm} \langle r^{\pm} G_{\lambda p}^{\mp} \rangle. \tag{15}$$

4. Очевидно, что самосогласованное поле в волноводе с периодическим электронным пучком может быть представлено в виде суперпозиции пространственных гармоник с волновыми числами $h_l = h + lh_0$, $h_0 = \omega_0/v$ ($l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Под действием такого поля возникает малое смещение электронов, выражение для которого записывается в форме (5) или (11). В этом нетрудно убедиться, анализируя уравнение для $r^{(1)}$, подробно рассмотренное для различных случаев в работах [2–4]. Таким образом, выражения для комплексной амплитуды переменной силы Лоренца (15) могут быть использованы при нахождении самосогласованного поля в волноводе с непрямолинейным периодическим электронным пучком.

Если считать, что поле в волноводе с электронным пучком самосогласовано, т. е. смещения электронов с невозмущенных траекторий вызваны тем же высокочастотным полем, которое возникает при наличии этих смещений, то, выражая $r^{\pm}$ через $F^{\pm}$ из уравнения движения электронов (см. [2–4]) и подставляя в (15), получим интегральное уравнение для $F^{\pm}$. Это интегральное уравнение определяет систему собственных функций $F^{\pm}$ и соответствующее им соотношение между h и ω (дисперсионное уравнение). Последнее может быть в данном случае найдено вариационным методом.

С помощью (15) легко получить два квадратичных соотношения

$$J^{\pm}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\Bigg\{\langle \boldsymbol{r}^{\mp}\boldsymbol{F}_p^{\pm}\rangle - \\ -2eh_{\text{п}}^2U_0\left(\frac{S_{\text{п}}}{S_{\perp}}\right)\sum_{\lambda}\alpha_{\lambda p}\langle \boldsymbol{r}^{\mp}\boldsymbol{G}_{\lambda p}^{\pm}\rangle\langle \boldsymbol{r}^{\pm}\boldsymbol{G}_{\lambda p}^{\mp}\rangle\Bigg\}=0, \tag{16}$$

из которых следует, что

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\langle \boldsymbol{r}^{-}\boldsymbol{F}_p^{+}\rangle=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\langle \boldsymbol{r}^{+}\boldsymbol{F}_p^{+}\rangle. \tag{17}$$

Равенства (16) обращаются в тождества, если в них подставить собственные функции интегрального уравнения для самосогласованного поля и соответствующее выражение для $h=h(\omega)$ или $\omega=\omega(h)$. Если же в эти равенства подставить лишь собственные функции, то их можно рассматривать как дисперсионное уравнение, причем постоянная распространения, найденная из (16) (при фиксированной частоте ω), является стационарным функционалом. Действительно, вариация h определяется соотношением

$$\frac{\partial J^{\pm}}{\partial h}\delta h+\delta J^{\pm}=0, \tag{18}$$

где $\delta J^{\pm}$ — вариация $J^{\pm}$ при $h=\text{const}$. Варьируя $J^{\pm}$ при $h=\text{const}$ с использованием (17) и учитывая (15), нетрудно получить, что $\delta J^{\pm}=0$. С другой стороны, приравнивая нулю вариацию $J^{\pm}$ при $h=\text{const}$, получим уравнения (15). Это является необходимым и достаточным условием стационарности функционалов $J^{\pm}$, а также $\boldsymbol{h}$, поскольку их вариации связаны линейным соотношением (18) [8].

Стационарность функционала h означает, что если вместо точных выражений функций $\boldsymbol{r}^{\pm}$ и $\boldsymbol{F}^{\pm}$ взяты некоторые приближенные, то h, найденное из $J^{\pm}=0$, имеет погрешность более высокого порядка малости, чем погрешность выбранных функций.

5. Запишем дисперсионное уравнение в виде

$$1-2eh_{\text{п}}^2U_0\left(\frac{S_{\text{п}}}{S_{\perp}}\right)\frac{\sum\limits_{\lambda}\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\alpha_{\lambda p}\langle \boldsymbol{r}^{-}\boldsymbol{G}_{\lambda p}^{+}\rangle\langle \boldsymbol{r}^{+}\boldsymbol{G}_{\lambda p}^{-}\rangle}{\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\langle \boldsymbol{r}^{-}\boldsymbol{F}_p^{+}\rangle}=0. \tag{19}$$

Это уравнение — трансцендентное. Левая его часть имеет бесконечное число полюсов. Значения $\boldsymbol{h}$ в полюсах соответствуют как волнам „холодного“ волновода (полюса, связанные с α_{λ}), так и волнам электронного пучка при отсутствии взаимодействия между электронами. Если пучок синхронно взаимодействует с s-ой волной волновода, т. е. выполнено условие [2,3]

$$|h_s-(h_e+kh_0)|\ll h_s \tag{20}$$

и концентрация электронов в пучке не слишком велика, то в (19) можно выделить резонансные члены. Сделаем это следующим образом:

$$-2eU_0\left(\frac{S_п}{S_\perp}\right)\frac{\langle r^-G_s^+\rangle\langle r^+G_{s0}^-\rangle}{h_s^2\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\langle r^-F_p^+\rangle}=\frac{K_{1s}}{\Delta_k^2}+\frac{K_{2s}}{h_s\Delta_k}+\frac{K_{3s}}{h_s^2}; \tag{21}$$

$$2eU_0\left(\frac{S_п}{S_\perp}\right)\frac{\sum\limits_{\lambda}{}'\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}{}'\alpha_{\lambda p}\langle r^-G_{\lambda p}^+\rangle\langle r^+G_{\lambda p}^-\rangle}{\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\langle r^-F_p^+\rangle}=\frac{\Gamma_1}{\Delta_k^2}+\frac{\Gamma_2}{h_s\Delta_k}+\frac{\Gamma_3}{h_s^2}, \tag{21a}$$

где $\Delta_k=h_e-h+kh_0$, $|\Delta_k|\ll h_s$ и $\sum'$ в (21а) означает, что из суммы исключен член с $\lambda=s$ и $p=0$*. С учетом (21) и (21а) перепишем (19) следующим образом:

$$\begin{gathered}(h^2-h_s^2)[\Delta_k^2(h_s^2-h_п^2\Gamma_3)-\Delta_k h_s h_п^2\Gamma_2-h_s^2h_п^2\Gamma_1]+\\+\Delta_k^2h_s^2h_п^2K_{3s}+\Delta_k h_s^3h_п^2K_{2s}+h_s^4h_п^2K_{1s}=0.\end{gathered} \tag{22}$$

Введенные в (21) и (21а) коэффициенты K_{is} $(i=1,2,3)$ учитывают взаимодействие пучка с синхронной волной волновода, а Γ_i — взаимодействие с несинхронными волнами и влияние высокочастотного пространственного заряда. Коэффициенты K_{1s} и K_{2s} описывают взаимодействие типа „*O*" и типа „*M*" соответственно. При более жестких ограничениях, налагаемых на ток пучка (очень малое взаимодействие), они переходят в соответствующие коэффициенты, полученные в работах [2–4]. Как Γ_i, так и K_{is}, вообще говоря, зависят от h, однако гораздо более слабо, чем Δ_k^{-2} и Δ_k^{-1} (при $|\Delta_k|\ll h_s$).

Уравнение (22) по своей структуре аналогично дисперсионному уравнению электронных волн в замедляющих системах с прямолинейными пучками, полученному вариационным методом в работе [8], и формально переходит в него при соответствующих предположениях о структуре пучка. В частности, Γ_1 преобразуется в коэффициент депрессии кулоновских сил, введенный в теории ЛБВ.

6. Выражение (22) позволяет лишь судить о виде дисперсионного уравнения для волноводов с непрямолинейными периодическими электронными пучками. Определение коэффициентов Γ_i даже в простейших случаях крайне затруднительно. Однако иногда удается значительно упростить выражения для Γ_i.

Рассмотрим, например, случай, когда имеет место взаимодействие пучка с электромагнитным полем на не слишком высокой ($k\sim 1$ в (20)) гармонике пучка. Считая, что другие гармоники возбуждаются слабо и смещение электронов с невозмущенных траекторий существенно лишь по одному из направлений, запишем приближенное выражение для смещения электронов с невозмущенной траектории [2–4]:

$$r_{0k}\simeq-\frac{MF_{0k}}{2eU_0\Delta_k^2}, \tag{23}$$

где M — безразмерный коэффициент. Подставляя (23) в (21а), получим:

$$\Gamma_1=-M\left(\frac{S_п}{S_\perp}\right)\sum_{\lambda}{}'\alpha_{\lambda 0}G_{\lambda 0k}^+G_{\lambda 0-k}^-,\quad \Gamma_2=\Gamma_3=0. \tag{24}$$

---

* Здесь мы считаем, что волновое число h_s не вырождено. Некоторые вопросы, связанные со случаем вырожденного h_s, обсуждаются в работе [6].

Аналогичное выражение для Γ_1 может быть найдено непосредственно подстановкой (23) в (15) и сравнением с (22).

Для тонкого прямолинейного пучка, скорость которого периодически меняется, нетрудно получить:

$$\Gamma_1 = M\left\{1-\left(\frac{S_\text{п}}{S_\perp}\right)\sum_\lambda{}' \frac{\varkappa_\nu^2\psi_\nu^2}{1-\left(\frac{\varkappa_s}{\varkappa_\nu}\right)^2}\right\}, \tag{25}$$

так как $(S_\text{п}/S_\perp)\sum_\nu \varkappa_\nu^2\psi_\nu^2 = 1$. Здесь значения функций ψ_ν взяты в той точке поперечного сечения волновода, где проходит пучок. Это выражение с точностью до членов более высокого порядка малости совпадает с выражением для соответствующего коэффициента дисперсионного уравнения, полученного в работе [9] другим методом.

Остановимся теперь на случае пучков с интенсивными поперечными колебаниями электронов, считая, что $|v^{(0)}/c|\ll 1$ и, следовательно, амплитуда осцилляций электронов мала по сравнению с масштабом неоднородности поля синхронной волны (если, конечно, $h\sim\varkappa_s\sim\omega/c$). При таком предположении основной вклад в (24) вносят те члены, в которых функции G_λ имеют масштаб неоднородности (в поперечном направлении), сравнимый с амплитудой осцилляций электронов. Для этих членов выполнено условие $\varkappa_\lambda\gg\varkappa_s$. В свою очередь, некоторые из функций G_λ (или их отдельные слагаемые) убывают с ростом $\varkappa_\lambda$ по сравнению с другими. Предполагая также, что под действием высокочастотного поля электроны существенно смещаются лишь в направлении оси волновода, из (24) получим:

$$\Gamma_1 \approx -M\left(\frac{S_\text{п}}{S_\perp}\right)\sum_\nu{}''\{\varkappa_s^2\varkappa_\nu^{-4}|G_{\nu_1}|^2+\varkappa_\nu^{-2}|G_{\nu_2 z}|^2\}, \tag{26}$$

где $\sum''$ означает, что из суммы в (24) исключены малые члены в соответствии с предположениями, сделанными выше. Смещения электронов в направлении оси волновода имеют место, например, при пространственной группировке в винтовых электронных пучках, сформированных в однородном магнитном поле или в цилиндрическом электростатическом поле. В этих случаях $M\approx 1$ [2–4] и, следовательно, $\Gamma_1<0$.

Если же высокочастотное смещение электронов происходит в поперечном направлении (или, по крайней мере, есть не малая составляющая смещения в этом направлении), то выражение для Γ_1 запишется как

$$\Gamma_1 \simeq M\left(\frac{S_\text{п}}{S_\perp}\right)\sum_\nu{}''\varkappa_\nu^{-2}|G_{\nu_2}|^2. \tag{27}$$

Нетрудно заметить, что в данном случае основной вклад в силу, действующую на электроны со стороны несинхронных полей, вносит кулоновское поле. Знак Γ_1 в (27), так же как и в (26), определяется знаком M. При пространственной группировке в поперечном направлении обычно $M=1$ (например, в трохоидальном пучке [2,3]) и $\Gamma_1>0$. При фазовой рассортировке в ряде случаев $M<0$ (например, в винтовых, трохоидальных и строфотронных пучках [2–4]) и, следовательно, $\Gamma_1<0$. Аналогичный результат получен в одном частном случае для винтового пучка в работе [5].

Таким образом, в ряде случаев поле пространственного заряда пучка поддерживает неустойчивость, возникающую при взаимодействии непрямолинейного периодического пучка с синхронной волной волновода, поскольку при $\Gamma_1 < 0$ инкремент пространственного нарастания волн увеличивается по сравнению со случаем $\Gamma_1 \geqslant 0$. Более того, при $\Gamma_1 < 0$ пучок неустойчив относительно электромагнитных возмущений и при отсутствии взаимодействия с синхронной волной.

Автор признателен А. В. Гапонову и М. И. Петелину за обсуждение результатов работы и замечания, сделанные при просмотре рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Изв высш уч. зав.—Радиофизика, **2**, 441 (1959).
2. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 450 (1959); **2**, 836 (1959).
3. А. В. Гапонов, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **4**, 547 (1961).
4. В. М. Боков, А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 831 (1959); **3**, 860 (1960).
5. R. H. Pantell, IRE Trans., **ED-7**, 22 (1960).
6. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, **6**, 104 (1963).
7. А. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, изд. Сов. радио, М., 1952, стр. 176.
8. Л. А. Вайнштейн. ЖТФ, **26**, 126 (1956).
9. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Труды конференции по электронике СВЧ, Госэнергоиздат, М., 1959, стр. 112.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
9 июля 1962 г.

ON THE DISPERSION EQUATION FOR WAVEGUIDES WITH CURVILINEAR ELECTRON BEAMS

V. K. Yulpatov

By the variational method the dispersion equation for the waveguides with curvilinear periodic electron beams is obtained. Several estimations are given of high frequency space charge effect upon the interaction of the beam and the waveguide synchronous waves.