

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ
ЭЛЕКТРОННЫМИ ПОТОКАМИ**

М. И. Петелин

Указывается на возможность использования предложенного в работе [1] метода интегрирования кинетического уравнения при рассмотрении взаимодействия электромагнитных волн с криволинейными электронными потоками в случае конечной, но достаточно малой концентрации электронов. Рассмотрены простейшие модели систем указанного типа.

При исследовании распространения плоских электромагнитных волн в неравновесной плазме (см., например, [2,3]) весьма эффективным является метод интегрирования кинетических уравнений для заряженных частиц, предложенный Шафрановым [1] (см. также [4]). Этот метод наряду с методом, включающим в себя интегрирование уравнений движения электронов [5,6], может быть применен при отыскании нормальных волн волновода, пронизываемого криволинейными электронными потоками. Такую задачу способом, аналогичным использованному в работах Вайнштейна [7], удобно свести к решению системы интегральных уравнений относительно декартовых компонент электронного тока, на основании которой методом стационарного функционала может быть получено дисперсионное соотношение для электромагнитных волн в случае конечной, но достаточно малой концентрации электронов. Вывод указанной системы уравнений приведен в первом разделе настоящей работы. Во втором разделе метод кинетического уравнения используется при рассмотрении простейших моделей систем, основанных на непрерывном резонансном взаимодействии электромагнитных волн с потоками электронов, движущихся по криволинейным траекториям под действием однородного магнитного и скрещенных электрического и магнитного полей.

1. СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ТОКА

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в волноводе с идеально проводящими стенками, который пронизывается стационарным потоком электронов, движущихся по периодическим криволинейным траекториям под действием статического электромагнитного поля, не зависящего от координаты z (x, y, z —декартовы координаты с осью z , параллельной образующей волновода). Предположим, что функция распределения электронов по координатам и скоростям в отсутствие высокочастотного поля также не зависит от z : $f_0(x, y, \mathbf{v}) = f_0(p, \mathbf{v})$ *.

Будем искать нормальные волны системы, в которых зависимость электромагнитного поля E, H и тока j от времени и координаты z

* Описываемый здесь метод может быть легко обобщен на случай, когда невозмущенная функция распределения электронов является периодической функцией z ,

определяется фактором $e^{ihz-i\omega t}$ (в дальнейшем этот множитель опускается). Запишем самосогласованное высокочастотное поле в виде разложения [8]

$$\mathbf{E} = \sum_s D_s \mathbf{E}_s^+ \int j \mathbf{E}_s^- ds, \quad \mathbf{H} = \sum_s D_s \mathbf{H}_s^+ \int j \mathbf{E}_s^- ds \quad (1)$$

по E -волнам

$$\mathbf{E}_v^\pm = \mp h \nabla \psi_v + i z_v^2 \psi_v \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{H}_v^\pm = k [\nabla \psi_v, \mathbf{z}_0], \quad (2)$$

H -волнам

$$\mathbf{E}_p^\pm = ik [\nabla \psi_p, \mathbf{z}_0], \quad \mathbf{H}_p^\pm = \pm ih \nabla \psi_p + z_p^2 \psi_p \mathbf{z}_0 \quad (2a)$$

и волнам пространственного заряда

$$\mathbf{E}_\xi^\pm = \nabla \psi_\xi, \quad \mathbf{H}_\xi^\pm = 0; \quad \mathbf{E}_\eta^\pm = z_\eta \psi_\eta \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{H}_\eta^\pm = 0. \quad (2b)$$

Здесь $\psi_s(x, y)$ и z_s^2 —собственные функции и собственные значения уравнений $\Delta \psi_s + z_s^2 \psi_s = 0$ с граничными условиями $\psi_v = \psi_\xi = \psi_\eta = \partial \psi_p / \partial n = 0$ на поверхности волновода. Коэффициенты D_s равны соответственно

$$D_{v,p} = -2ih_{v,p}/N_{v,p} (h^2 - h_{v,p}^2), \quad D_{\xi,\eta} = -2ih_{\xi,\eta}/N_{\xi,\eta},$$

где $N_s = (\omega/2\pi) h_s z_s^2 \int \psi_s^2 ds$ —нормы волн, $k = \omega/c$, $h_s^2 = k^2 - z_s^2$, c —скорость света.

Если из кинетического уравнения для электронов найти методом Шафранова [1,4] токи j_s , возникающие под действием полей \mathbf{E}_s^+ , \mathbf{H}_s^+ , то для полного высокочастотного тока можно получить систему интегральных уравнений

$$j_\alpha(p) = \sum_\beta \int K_{\alpha\beta}(p, \bar{p}) j_\beta(\bar{p}) ds \quad (3)$$

с ядрами

$$K_{\alpha\beta} = \sum_s D_s j_{s,\alpha}(p) E_{s,\beta}^-(\bar{p}).$$

Соотношение между частотой и постоянной распространения для нормальной волны системы может быть записано в виде

$$\sum_\alpha \int j_\alpha(p) j_\alpha^*(p) ds - \sum_{\alpha\beta} \int \int j_\alpha(p) K_{\alpha\beta}(p, \bar{p}) j_\beta(\bar{p}) ds d\bar{s} = 0, \quad (4)$$

где $j_\alpha^*(p)$ —функции, сопряженные по отношению к функциям $j_\alpha(p)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$j_\alpha(p) = \sum_\beta \int K_{\alpha\beta}(\bar{p}, p) j_\beta^*(\bar{p}) ds. \quad (5)$$

Существенно, что левая часть соотношения (4) представляет собой стационарный функционал; благодаря этому оно удовлетворяется с достаточной степенью точности при подстановке в него приближенных решений уравнений (3) и (5). Эти решения могут быть, в частности, легко найдены при достаточно малой концентрации электронов.

В дальнейшем изложение будет ограничено рассмотрением конкретных моделей систем, основанных на взаимодействии электромагнитных волн с криволинейными электронными потоками. Однако основные приемы, использованные в приведенных ниже расчетах, являются общими и для других систем подобного типа.

2. ВОЛНОВОД, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМОЙ

Рассмотрим две волноводные системы.

1) Волновод, помещенный в продольное магнитное поле, частично заполненный однородной квазинейтральной плазмой без дисперсии распределения электронов по продольным $v_{\parallel} = v_z$ и поперечным $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ скоростям*:

$$f_0 = (2\pi v_{\perp}^0)^{-1} \delta(v_{\parallel} - v_{\parallel}^0) \delta(v_{\perp} - v_{\perp}^0). \quad (6)$$

Объем, занятый однородной плазмой, ограничен цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной магнитному полю (см. рис. 1).

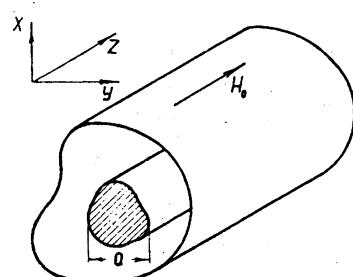


Рис. 1.

В обоих случаях предполагается, что скорость электронов много меньше скорости света ($v \ll c$), а толщина переходного слоя между однородной частью плазмы и вакуумом, равная по порядку величины гиро-радиусу электронов R , пренебрежимо мала:

В обоих случаях предполагается, что скорость электронов много меньше скорости света ($v \ll c$), а толщина переходного слоя между однородной частью плазмы и вакуумом, равная по порядку величины гиро-радиусу электронов R , пренебрежимо мала:

$$R \ll a, \lambda_{\perp}. \quad (7)$$

Здесь a — поперечный размер области, занятой плазмой, λ_{\perp} — поперечный размер неоднородности высокочастотного поля.

Тензор проводимости однородной плазмы. Чтобы найти ток, возникающий в плазме под действием полей E_s^+ , H_s^+ , удобно представить эти поля в виде суперпозиции плоских однородных волн [8] и воспользоваться непосредственно формулой Шафранова [1]. Найденные этим способом выражения для токов j_s имеют вид:

* Распространение плоских однородных электромагнитных волн в такой плазме рассмотрено в работах [2, 3].

** Взаимодействие неравновесной плазмы, помещенной в скрещенные поля, с электромагнитными волнами в волноводе произвольного сечения здесь не рассматривается, поскольку в таких системах связь между полем и током является, вообще говоря, более сложной, чем в полосковой линии.

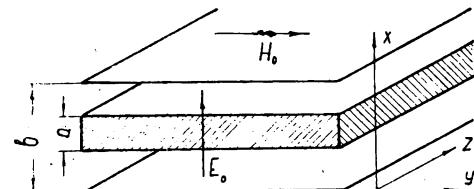


Рис. 2.

$$j_{s,\alpha} = \sum_{\beta} \sigma_{s,\alpha\beta} F_{s,\beta}, \quad (8)$$

где $F_{s,x} = i h \partial \psi_s / \partial x$, $F_{s,y} = i h \partial \psi_s / \partial y$, $F_{s,z} = z_s^2 \psi_s$ для E - и H -волн и $F_{s,x} = \partial \psi_s / \partial x$, $F_{s,y} = \partial \psi_s / \partial y$, $F_{s,z} = z_s \psi_s$ для волн пространственного заряда. Коэффициенты, связывающие компоненты электронного тока с функциями ψ_s и их производными, не зависят от координат. Это обстоятельство существенно связано с тем, что волновые векторы плоских однородных волн, на которые разлагаются поля E_s^+ , H_s^+ , имеют одинаковые проекции на направление статического магнитного поля. Тензоры $\sigma_{s,\alpha\beta}$ совпадают по структуре с тензором проводимости плазмы по отношению к плоской однородной волне [3]:

$$\sigma_{s,\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{s,\alpha\beta}^{\lambda,n} |(h - h_n)^\lambda|. \quad (9)$$

Здесь $h_n = (\omega - n\omega_H)/u$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), ω_H и u — гирочастота и средняя продольная скорость электронов (в волноводе с продольным магнитным полем $u = v_0^0$).

В дальнейшем будет рассматриваться только резонансное взаимодействие поля с разреженной ($\Omega_0 \ll \omega$, Ω_0 — плазменная частота) плазмой на первой гармонике гирочастоты*, когда для одной или одновременно для нескольких близких к вырождению волн „холодного“ волновода (с индексами p_1, p_2, \dots, p_r) имеет место соотношение:

$$|h_p - h_i| \ll h_p. \quad (10)$$

При этом оказывается необходимым знать лишь некоторые коэффициенты в выражениях для тензоров $\sigma_{s,\alpha\beta}$:

$$A_{s,\alpha\beta}^{1,1} = \frac{\Omega_0^2}{8\pi u} L_{s,\alpha\beta}^1, \quad A_{s,\alpha\beta}^{2,1} = \frac{\Omega_0^2 \omega v_\perp^2}{16\pi c^2 u^2} L_{s,\alpha\beta}^2,$$

а именно, в волноводе

$$\begin{aligned} L_{s,xx}^\lambda &= L_{s,yy}^\lambda = i L_{s,xy}^\lambda = -i L_{s,yx}^\lambda; \\ L_{v,xx}^2 &= z_v^2 c^2 / \omega^2; \quad L_{p,xx}^2 = (k^2 - h^2) / kh; \\ L_{v,xx}^1 &= 1; \quad L_{p,xx}^1 = k/h; \\ L_{\xi,xx}^2 &= -i; \quad L_{\eta,xx}^2 = h \kappa_\eta c^2 / \omega^2, \end{aligned}$$

в полосковой линии

$$\begin{aligned} L_{v,xx}^\lambda &= i L_{\xi,xx}^\lambda = L_{v,zz}^\lambda = i L_{\eta,zz}^\lambda = 1; \\ L_{v,zx}^\lambda &= i L_{\xi,zx}^\lambda = -L_{v,xz}^\lambda = -i L_{\eta,xz}^\lambda = -i \\ &\quad (z_v = z_\xi = z_\eta). \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты $A_{s,\alpha\beta}^{\lambda,n}$ либо равны нулю, либо, как показывают оценки, пренебрежимо малы.

Дисперсионное уравнение первого приближения при резонанском

* На высоких гармониках даже при выполнении условия (7) невозможно отыскание поправки второго порядка малости по параметру Ω_0/ω к постоянной распространения волны без учета тока в переходном слое между однородной частью плазмы и вакуумом.

взаимодействии поля с разреженной плазмой. При достаточно малой концентрации плазмы постоянные распространения нормальных волн системы могут быть найдены методом последовательных приближений:

$$h = h_1 + \Delta h_1 + \Delta h_2,$$

$$|\Delta h_1| \ll h_1, \quad |\Delta h_2| \ll |\Delta h_1|.$$

Условие (10) позволяет в первом приближении пренебречь в выражениях для ядер интегральных уравнений слагаемыми, не имеющими знаменателей $(h^2 - h_p^2)$ $(h - h_1)^2$:

$$K_{\alpha\beta}^{(1)}(p, \bar{p}) = \sum_{p=p_1}^{p_r} \frac{D_p}{(h-h_1)^2} \sum_{\gamma} A_{p,\alpha\gamma}^{2,1} E_{p,\beta}^-(\bar{p}) F_{p,\gamma}(p) \quad (11)$$

(волны H -типа в полосковой линии, для которых $L_{p,\alpha\beta}^2 = 0$, исключаются из рассмотрения) и получить уравнение для поправки Δh_1 в виде:

$$\det \| \Delta h_1^2 (\Delta h_1 + h_1 - h_p) N_p \delta_{pq} + i \sum_{\alpha\beta} A_{q,\alpha\beta}^{2,1} \int_{s_u} F_{q,z} E_{p,\alpha}^- ds \| = 0. \quad (12)$$

Здесь s_u —поперечное сечение области, занятой плазмой. Электромагнитное поле соответствующих нормальных волн системы представляет собой линейную комбинацию полей E_p^+, H_p^+ .

Оставляя в стороне детальное исследование уравнения (12), отметим лишь, что при определенных условиях оно имеет комплексно-сопряженные корни, причем волны с $\operatorname{Im} \Delta h_1 < 0$ экспоненциально нарастают вдоль оси z . Так, например, если одновременно для всех h_p выполняется условие

$$h_p = h_1, \quad (13)$$

то соотношение (12) сводится к уравнению r -ой степени относительно $(\Delta h_1)^3$; следовательно, r соответствующих значений Δh_1 из общего числа $3r$ имеют $\operatorname{Im} \Delta h_1 < 0$. При этом инкременты пространственного нарастания волн пропорциональны кубичному корню из концентрации плазмы.

Отметим следующее интересное обстоятельство. Рассматриваемая система отличается от волновода, пронизываемого „тонким“ пучком электронов, тем, что в последнем случае при возбуждении r -кратно вырожденной волны уравнение для поправки к постоянной распространения имеет степень $2+r$, в то время как уравнение (12) имеет степень $3r$. Это отличие обусловлено тем, что плазма представляет собой набор „тонких“ пучков. Можно показать, что при возбуждении r -кратно вырожденной волны m „тонкими“ пучками уравнение относительно Δh_1 имеет степень $r+2m$. При $m > r$ оно может быть преобразовано к виду:

$$P_{3r}(\Delta h_1) \Delta h_1^{2(m-r)} = 0,$$

где полином $P_{3r}(\Delta h_1)$ в общем случае имеет свободный член, отличный от нуля. Следовательно, отличную от нуля поправку к постоянной распространения могут иметь лишь $3r$ волн системы, что поясняет полученный выше результат. На рис. 3 изображен качественный вид дисперсионных кривых в окрестности точки $h_p = h_n$ в случае двухкратного вырождения волн „холодного“ волновода.

Второе приближение для разреженной плазмы. На основании соотношения (4) может быть получено уравнение, позволяющее найти постоянную распространения h с большей точностью, чем уравнение

первого приближения (12). Для нахождения приближенных значений функций j_α и j_α^\times , необходимых для подстановки в (4), воспользуемся системой интегральных уравнений (3) и (5) с ядрами (11). В частности, при резонанском взаимодействии плазмы с полем невырожденной волны холодного волновода имеем:

$$j_\alpha = \sum_p A_{p,\alpha\beta}^{2,1} F_{p,\beta}; \quad j_\alpha^\times = E_{p,\alpha}^+, \quad (14)$$

Уравнение второго приближения для постоянной распространения h в пренебрежении членами высокого порядка малости имеет вид*:

$$(h^2 - h_p^2) [(h - h_1)^2 + \Gamma] + R_1 (h - h_1) + R_2 = 0, \quad (15)$$

где

$$R_\lambda = 2ih_p G_{p,\lambda}/N_p; \quad \Gamma = - \sum_{s < p} G_{s,2} D_s;$$

$$G_{s,\lambda} = \left(\int_{s_n} \mathbf{j} \mathbf{j}^\times ds \right)^{-1} \int_{s_n} \mathbf{E}_s^- \mathbf{j} ds \sum_{\alpha\beta} A_{s,\alpha\beta}^{2,1} \int_{s_n} j_\alpha^\times \mathbf{F}_{s,\beta} ds.$$

Коэффициенты R_λ соответствуют коэффициентам при различных степенях $h - h_1$ в выражениях для элементов тензора проводимости плазмы по отношению к полю E_p^+ , H_p^+ , а коэффициент Γ связан с высокочастотным пространственным зарядом и несинхронными волнами типов E и H . При исчезающей малой концентрации плазмы соотношение (15) сводится к уравнению

$$(h^2 - h_p^2) (h - h_1)^2 + R_2 = 0, \quad (12a)$$

совпадающему с (12).

Члены с Γ и R_1 могут быть учтены в уравнении (15) лишь методом возмущений. Кроме того, в рассматриваемом приближении необходимо учитывать зависимость коэффициента R_2 от h . Следует заметить, что приведенное выражение для R_2 справедливо лишь с точностью до членов порядка v/c . Однако в дальнейшем будет находиться лишь поправка к постоянной распространения, обусловленная малыми членами порядка Ω_0/ω в уравнении (15).

Наибольший интерес представляет нахождение поправки $\gamma_2 = -\text{Im } \Delta h_2$ к инкременту пространственного нарастания $\gamma_1 = -\text{Im } \Delta h_1$ (для волн с $\text{Im } \Delta h_1 < 0$) при $h_p = h_1$, поскольку, как следует из (12a), при этом условии значение γ_1 как функции $h - h_1$ является максимальным:

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} |(R_2/2h_p)^{1/3}|.$$

Соответствующее значение γ_2 равно

$$\gamma_2 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3,$$

* Общий вид дисперсионного уравнения второго приближения для постоянной распространения волны в волноводе, пронизываемом криволинейным электронным потоком, приведен в работе [6].

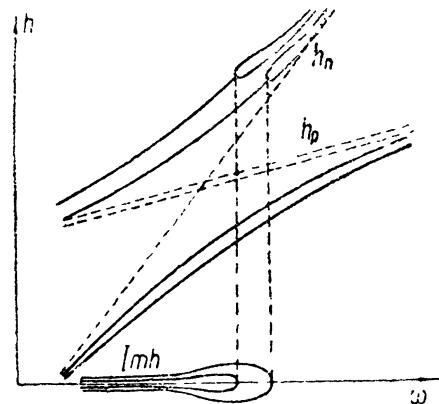


Рис. 3.

где

$$\delta_1 = \frac{\Gamma}{4\gamma_1}, \quad \delta_2 = \frac{1}{16h_p^2\gamma_1} \left(2h_p \frac{dR_2}{dh} - R_2 \right), \quad \delta_3 = \frac{R_1}{8h_p\gamma_1}.$$

Отношение $\delta_3/(\delta_1 + \delta_2)$ пропорционально $v_{\parallel}c/v_{\perp}^2$. Поэтому всегда при достаточно большой величине $v_{\parallel}c/v_{\perp}^2$ знак поправки γ_2 совпадает со знаком слагаемого δ_3 и является в этом случае отрицательным. Наоборот, если величина $v_{\parallel}c/v_{\perp}^2$ достаточно мала, знак γ_2 совпадает со знаком $\delta_1 + \delta_2$ и зависит от геометрии системы и от типа волны. Так, например, для H_{01} -волны в прямоугольном волноводе ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$), помещенном в продольное магнитное поле и полностью заполненном плазмой, коэффициенты δ_1 и δ_2 равны соответственно*

$$\delta_1 = \frac{4\Omega_0^2 v_{\perp}^2}{\pi^4 \gamma_1 u^2 c^2} \frac{a^2}{a^2 - b^2}, \quad \delta_2 = \frac{\Omega_0^2 v_{\perp}^2}{64h_p^2 \gamma_1 c^2 u^2} (k^2 + 3h_p^2).$$

При $v_{\parallel}c/v_{\perp}^2 \rightarrow 0$ поправка γ_2 является отрицательной, если отношение сторон близко к единице и если $b > a$, и является положительной при $a > b$, а также при достаточно большом отношении $b/a > 1$.

Если слой плазмы, находящейся под действием скрещенных электрического и магнитного полей, равноудален от обкладок полосковой линии, для главной волны

$$\delta_1 = -\frac{\Omega_0^2 v_{\perp}^2}{2\gamma_1 abu^2 c^2} \sum_v \frac{h_v^2}{\chi_v^4} \cos^2 \frac{v\pi}{2} \sin^2 \frac{v\pi a}{2b}, \quad \delta_2 = -\frac{3\Omega_0^2 v_{\perp}^2 a}{64\gamma_1 u^2 c^2 b}.$$

В том случае, когда главная волна является единственной распространяющейся волной ($\omega/c < \pi/b$), поправка к инкременту пространственного нарастания волны γ_2 является положительной, если слой плазмы достаточно тонок: $b > 2a$.

В заключение заметим, что метод кинетического уравнения может быть также использован при исследовании взаимодействия криволинейных электронных потоков с полями резонаторов (системы такого типа рассматривались в работе [9]). В частности, точно таким же образом, как и для волновода с продольным магнитным полем, может быть рассмотрена задача о взаимодействии собственных колебаний цилиндрического резонатора с однородной магнитоактивной плазмой, распределение электронов которой по скоростям описывается функцией (6) с $v_{\parallel}^0 = 0$. При этом оказывается, что поправка к инкременту нарастания поля невырожденного типа колебаний, обусловленная малыми по параметру Ω_0/ω членами в уравнении второго приближения для собственных частот системы, является отрицательной.

Автор благодарен А. В. Гапонову за руководство настоящей работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Шафранов, Сб. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 416.
2. В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 57 (1960).
3. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 455 (1961).

* В данном случае условие $|\Delta h_2| \ll |\Delta h_1|$ представляет собой ограничение снизу на величину $|a - b|$. Если же это условие не выполняется, необходимо уже в первом приближении учитывать близость к вырождению волн H_{01} и H_{10} .

4. М. И. Петелин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 736 (1962).
5. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 545 (1961).
6. В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, 95 (1963).
7. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 26, 126, 141 (1956); ЖТФ, 27, 2340 (1957).
8. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
9. А. В. Гапонов, В. К. Юллатов, Радиотехника и электроника, 7, 631 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 мая 1962 г.

ON THE USE OF KINETIC EQUATION METHOD FOR
STUDYING THE INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES WITH
CURVILINEAR ELECTRON BEAMS

M. I. Petelin

The possibility is pointed out of the applicability of the kinetic equation integration method [1] for studying the interaction of electromagnetic waves with curvilinear electron beams in the case of sufficiently small electron concentration. The simplest models of the systems mentioned are considered.
