

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
	Табл. 2	. . .   Момент 4-го контакта	. . .   Момент 4-го контакта
875		$12^h \ 33^m$	$12^h \ 33^m$
	18 и 19 сверху	. . . $D_{эфф} = 38', 2 \neq 1,18 D_{\odot}$ $2 = 1,18 D_{\odot}$ . . .	. . . $D_{эфф} = 38', 2 = 1,18 D_{\odot}$ . . .
920	13 снизу	. . . $\omega = \omega_0 - \kappa\vartheta$ .	. . . $\omega = \omega_0 + \kappa\vartheta$ ,
925	9 сверху	. . . $\int_0^h [\cos^2(\alpha - \psi) - 2\tau N(\zeta)]^{-3/2} d\zeta =$	. . . $\int_0^h [\cos^2(\alpha - \psi) - 2\tau N(\zeta)]^{-3/2} d\zeta =$
926	1 снизу	. . . $= \frac{\rho(1 - \rho^2) \sin^2 \alpha}{(1 - \rho^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}$	. . . $= \frac{\rho(1 - \rho^2) \sin \alpha}{(1 - \rho^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}$
945	7 сверху	. . . $0 < \alpha < .$	. . . $0 < \alpha < 3$ .
969	4 сверху	. . . $= \frac{e^{3/2} S V \sim n_e l}{2,26 \sqrt{\pi m} \lambda_0^2}$ . . .	. . . $= \frac{e^{3/2} S V \sim n_e \chi}{2,26 \sqrt{\pi m} \lambda_0^2}$ . . .
	5 снизу	. . . системы $W$ . . .	. . . системы $\bar{W}$ . . .
987	1 снизу	$\tilde{\Delta}/\omega_0 \sim \varepsilon^{3/2}$ .	$\tilde{\Delta}/\omega_0 \sim \varepsilon^{3/2}$ ).
992	3 снизу	$x_0 = e^{-kx} \{ [c(1 - k^2)] \dots$	$\dot{x}_0 = e^{-kx} \{ [c(1 - k^2)] \dots$
1006	6 снизу	. . . $\leq t < t_0 + 1$	. . . $\leq t \leq t_0 + 1$
1010	2 снизу	$i \neq kvl$	$i \neq kUl$
1027	Рис. 26.	$t_{n+k}$	$t_k$
	19 снизу	. . . $bK_1(\zeta b)$	. . . $bK_1(\zeta^* b)$
1033	10 снизу	. . . часть $W_K$	. . . часть $W_b$
	1 снизу	$W_0 = \dots$	$W_b = \dots$

Вначале стрелки  $t_k$  опущен индекс начального элемента  $U_k$

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
223	15 снизу	$\dots \overline{R_1(0)^2} + \overline{R_2(0)^2}$	$\dots \overline{R_1(0)^2} + \overline{R_2(0)^2}$
317	17 сверху	$\dots 2\lambda_{(k)} = 1 \dots$	$\dots 2\lambda_{(1)} = 1 \dots$
Ошибки в № 5, 1962 г., допущенные автором			
1003	13 сверху	$\dots = \left( \frac{-\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \omega_1 - \frac{\nu - \sigma}{\nu_1 - \nu_2} \right) \dots$	$\dots = \left( \frac{-\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \omega_1 + \frac{\nu - \sigma}{\nu_1 - \nu_2} \right) \dots$
	14 сверху	$+ \left( \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \omega_1 + \frac{\nu - \sigma}{\nu_1 - \nu_2} \right) \dots$	$+ \left( \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \omega_1 - \frac{\nu - \sigma}{\nu_1 - \nu_2} \right) \dots$
	19 сверху	$\frac{-\nu + \sigma - \dots}{\nu_1 - \nu_2} \dots +$	$\frac{\nu - \sigma - \dots}{\nu_1 - \nu_2} \dots -$
	20 сверху	$+ \frac{\nu - \sigma - \dots}{\nu_1 - \nu_2} \dots$	$- \frac{\nu - \sigma - \dots}{\nu_1 - \nu_2} \dots$
1006	14 снизу	$\dots$ близким к $r$ .	$\dots$ близким к $r^2$ .
	4 снизу	$\dots - \frac{\nu + \sigma (\nu_2 \tau_1 - 1)}{\nu_1 - \nu_2} \dots$	$\dots - \frac{\nu - \sigma (\nu_1 \tau_1 + 1)}{\nu_1 - \nu_2} \dots$
	3 снизу	$+ \frac{\nu + \sigma (\nu_1 \tau_1 - 1)}{\nu_1 - \nu_2} \dots$	$+ \frac{\nu - \sigma (\nu_2 \tau_1 + 1)}{\nu_1 - \nu_2} \dots$

## СОДЕРЖАНИЕ

Ерухимов Л. М. Исследование неоднородностей электронной плотности в ионосфере радиоастрономическими методами и с помощью искусственных спутников Земли (обзор)	839
Гетманцев Г. Г., Разин В. А. О методах измерения пространственных вариаций спектра космического радиоизлучения	866
Матвеев Л. И., Сороченко Р. Л. Наблюдения полного солнечного затмения 15 февраля 1961 г. на волнах 22 и 83 см	873
Каменская С. А., Семенов Б. И., Троицкий В. С., Плечков В. М. Результаты прецизионных измерений радиоизлучения Луны на волне 1,6 см	882
Троицкий В. С. Новая возможность определения плотности поверхностных пород Луны	885
Митяков Н. А. О частоте поля осциллятора, движущегося в анизотропной среде	892
Эйдман В. Я. Об излучении заряда, движущегося в неоднородной среде	897
Луговой В. Н. Распространение плоских электромагнитных волн в периодически нестационарной магнитоактивной плазме	901
Степанов Н. С. Об отражении волн от произвольной движущейся неоднородности	908
Рыжов Ю. А. Дифракция радиоизлучения со сплошным спектром на неоднородностях плоского слоя	917
Татарский В. И. К теории рефракции в слоисто-неоднородной среде	923
Миллер М. А. О параметрическом взаимодействии заряженных или квазинейтральных объектов с неоднородными высокочастотными полями	929
Головановский К. С., Кузовников А. А. Нижняя частотная граница высокочастотного квазипотенциала в плазме положительного столба	933
Кисляков А. Г. Оптимальное время наблюдения при измерении слабых сигналов	945
Флягин В. А., Панкратова Т. Б. Экспериментальное исследование способов формирования трохлоидальных электронных пучков методом фотографирования электронных траекторий	956
Соболь Г. А. К вопросу о детекторных свойствах плазмы	963
Левитский С. М. и Баранчук Н. С. Исследование некоторых свойств замедляющей системы, состоящей из плазменного стержня, окруженного спиралью	972
Ольшанский А. П. Применение метода связанных волн к расчету диафрагмированных волноводов	978
Островский Л. А. О колебаниях связанных систем с медленно меняющимися параметрами	984
Черепанов А. И. Исследование автоколебаний простейшей релейной системы с коррекцией	989
Рабинович М. И. Динамика следящей системы с люфтом при введении нелинейной коррекции	998
Мишина К. А., Алексеев А. С. О применении некоторых специальных операций в задаче анализа и синтеза линейных электрических цепей	1009
Ахманов С. А., Рошаль А. С. Троичные триггеры на параметрических генераторах	1017
Эйнгорин М. Я. Динамические задержки, регистры и триггеры без сдвига информации	1026

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Болотовский Б. М., Воронин В. С. О потерях энергии электрического и магнитного зарядов в ферроэлектрике	1033
Нечаев В. Е. Об адиабатическом приближении при анализе работы приборов магнетронного типа	1035
Турик А. В. Собственные и вынужденные колебания в нелинейном контуре с асимметричной характеристикой	1037
Печорина И. Н. Исследование периодических режимов методом гармонического баланса в системах автоматического управления, содержащих неустойчивые звенья	1040

### Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомagnetизм и аэрoнoмия», т. II, № 3, 1962	1043
---	------

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ В ИОНОСФЕРЕ РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ И С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ**

(Обзор)

*Л. М. Ерухимов*

**Содержание**

	Стр.
1. Методы исследования ионосферных неоднородностей с помощью радиоизлучения дискретных источников и сигналов искусственных спутников Земли	839
2. Анализ дифракционной картины	843
3. Суточный и сезонный ход флюктуаций. Зависимость от широты; связь с солнечной активностью	844
4. Связь флюктуаций с ионосферными параметрами	848
5. Высота, размеры и форма неоднородностей. Флюктуации электронной плотности в ионосфере	849
6. Дрейфы ионосферных неоднородностей	853
7. Связь с магнитной активностью. Неоднородности в приполярной и экваториальной ионосфере	854
8. Крупномасштабные неоднородности в ионосфере	859
9. Обсуждение результатов наблюдений.	860

Вопрос о происхождении ионосферных неоднородностей занимает в настоящее время центральное место среди различных проблем физики ионосферы. В последние годы в этой области был достигнут значительный прогресс. Обширная сеть ионосферных станций, использование для изучения неоднородной структуры ионосферы источников космического радиоизлучения и искусственных спутников Земли (ИСЗ) позволили получить богатый экспериментальный материал о неоднородностях электронной плотности в ионосфере. При этом применение дискретных источников космического радиоизлучения и ИСЗ позволили расширить доступный для наблюдений диапазон высот ионосферы и получить сведения о неоднородностях, расположенных выше максимума  $F_2$ -слоя.

Настоящая работа посвящена обзору экспериментальных работ по исследованию ионосферных неоднородностей радиоастрономическими методами и с помощью ИСЗ. При составлении обзора мы старались по возможности систематизировать эти данные и сравнить их с результатами, полученными при исследовании верхних слоев атмосферы Земли другими методами. Особое внимание уделено вопросам высотного распределения неоднородностей, ответственных за флюктуации космического радиоизлучения и сигналов ИСЗ, а также качественным и количественным особенностям поведения неоднородностей на различных широтах.

**1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ И СИГНАЛОВ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ**

Исследование неоднородностей электронной плотности в ионосфере с помощью радиоизлучения внеземных источников основано на анализе

диффракционной картины на Земле, которая возникает при прохождении радиоволны через неоднородную ионосферу. Для изучения структуры диффракционной картины проводятся следующие основные измерения:

1) измерение флюктуаций интенсивности и фазы сигнала на фиксированной частоте;

2) исследование флюктуаций на разных частотах;

3) измерения в пространственно-разнесенных точках.

Методика измерений флюктуаций интенсивности сравнительно проста. Принимаемый на антенну сигнал усиливается приемным устройством и после детектирования регистрируется выходным прибором.

Одна из основных трудностей в случае приема излучения дискретных источников состоит в выделении сигнала дискретного источника на фоне распределенного космического радиоизлучения, что делает необходимым применение антенн со сравнительно большим КНД. С этой целью на частотах, меньших 80 *мгц*, обычно применяются многодипольные антенны; на больших частотах используются антенны с параболическим зеркалом.

Измерение флюктуаций фазы в случае приема радиоизлучения космических источников, имеющих шумовой спектр, невозможно. Поэтому информация о фазовых флюктуациях в этом случае получается благодаря регистрации разности фаз сигналов, принимаемых на две разнесенные антенны. Средне-квадратичное значение флюктуаций фазы волны  $(\overline{\Delta\varphi})^2$ , как легко показать, связано с флюктуациями разности фаз  $\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)$  в антеннах интерферометра следующим образом [55]:

$$(\overline{\Delta\varphi})^2 = \frac{1}{2(1-\rho)} \overline{\{\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)\}^2},$$

где  $\rho$  — коэффициент корреляции между флюктуациями фазы сигнала на двух антеннах. Часто вводится также понятие флюктуаций углов прихода волны

$$\overline{\Theta}^2 = \left[ \frac{\lambda}{2\pi d} \right]^2 \overline{\{\Delta(\varphi_1 - \varphi_2)\}^2},$$

где  $\lambda$  — длина волны,  $d$  — база интерферометра. Необходимо отметить, однако, что флюктуации углов прихода имеют ясный физический смысл только в приближении геометрической оптики, где они характеризуют угол прихода принимаемого излучения.

Широкое распространение в интерферометрических измерениях получил фазопереключающий интерферометр Райла [4]. Отличительной особенностью этого интерферометра является наличие фазового переключателя, при помощи которого фаза одного из каналов приема периодически изменяется на  $180^\circ$ . Это вызывает периодическое смещение диаграммы направленности интерферометра, в результате чего на выходе приемника появляется составляющая сигнала, имеющая частоту переключения фазы. Последующее синхронное детектирование позволяет выделить только переменный сигнал и исключить влияние распределенного космического радиоизлучения. При перемещении источника через диаграмму направленности интерферометра запись на выходе имеет вид, показанный на рис. 1а. Напряжение на выходе приемного устройства при наличии флюктуаций фазы принимаемого сигнала пропорционально  $\cos(\Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_1)$ , где  $\Delta\varphi_0$  — регулярная разность фаз сигнала на антеннах,  $\Delta\varphi_1$  — флюктуации разности фаз. Таким образом, наличие флюктуаций разности фаз приведет к нерегулярным пересечениям линии нулевого сигнала на выходе прибора (рис. 1б). Нерегулярные

колебания выходного напряжения характеризуют также флюктуации амплитуды принимаемой волны.

Более усовершенствованные приборы, позволяющие производить раздельную регистрацию амплитудных и фазовых флюктуаций, описаны в работах [12–15].

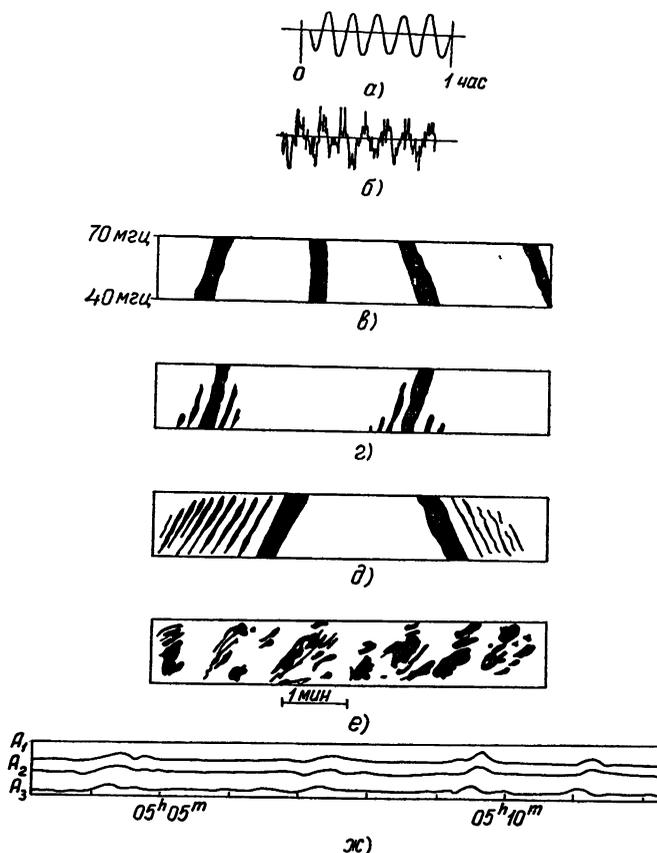


Рис. 1. Примеры записей при различных методах исследования:

а) и б) — запись на интерферометре Райла; в), г), д), е) — динамический спектр флюктуаций (по осям отложены рабочая частота и время); ж) — запись флюктуаций сигнала с разнесенных антенн ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ).

Частотный анализ флюктуаций позволяет значительно полнее исследовать структуру дифракционной картины. Для частотного анализа используются как измерения на нескольких дискретных частотах, так и динамические измерения флюктуаций по диапазону. В последнем случае применяются спектрографы с перекрытием всего интервала частот за время порядка секунды [10]. Пространственные измерения флюктуаций интенсивности (амплитуды) принимаемого излучения обычно проводятся на трех разнесенных на расстояния от нескольких сот метров до  $1 \div 2$  км антеннах, которые располагаются по вершинам прямоугольного треугольника. В каждой из этих антенн перемещающееся неоднородное поле приводит к замираниям сигнала, сдвинутым друг относительно друга во времени. По пространственным измерениям флюктуаций определяют размеры и форму нерегулярностей дифракционной картины, а также горизонтальную скорость и направление ее дрейфа [19–27]. Примеры записей, которые получаются при динамических изме-

рениях флюктуаций в диапазоне частот  $40 \div 70$  мГц и при приеме на разнесенные антенны приведены на рис. 1в — ж.

Описанный выше комплекс измерений может быть проведен также при использовании в качестве источника излучения передатчика, помещенного на ИСЗ. Для приема сигналов ИСЗ в ряде случаев оказывается достаточным применение простейших антенн. Кроме того, при наличии на спутнике когерентных частот возможны непосредственные измерения флюктуаций фазы сигнала на одной частоте относительно фазы сигнала на второй частоте. Прием радиоизлучения ИСЗ делает возможным также применение таких методов исследования неоднородностей в ионосфере как изучение флюктуаций доплеровского сдвига частоты [78] и флюктуаций фазового инварианта тригармонической волны [79], вызванных прохождением радиоволн от ИСЗ через неоднородную ионосферу.

Изучение характеристик диффракционной картины позволяет перейти к изучению статистических свойств ионосферы: среднего размера и формы ионосферных неоднородностей, высоты и толщины слоя с неоднородностями, флюктуаций электронной плотности в ионосфере, движений ионосферных неоднородностей.

Измерение скорости и направления движения диффракционной картины в случае приема радиоизлучения космических дискретных источников позволяет определять направление и скорость дрейфов ионосферных неоднородностей [19–27]. В случае приема сигналов ИСЗ, когда источник излучения расположен на конечном расстоянии от слоя с неоднородностями, скорость дрейфа диффракционной картины вследствие сферичности падающих волн определяется величиной  $V'z/(h_c - z)$ , где  $V'$  — разность между скоростью движения спутника  $V_c$  и скоростью дрейфа неоднородностей  $V_d$ ,  $h_c$  — расстояние до спутника,  $z$  — высота слоя с неоднородностями, ответственным за флюктуации принимаемого сигнала ИСЗ. При скоростях спутника, значительно превышающих скорость дрейфа неоднородностей (что обычно имеет место), по известным  $V_c$  и  $h_c$  можно определить высоту слоя с неоднородностями из измерений скорости дрейфа диффракционной картины [72–74]. Изучение размеров и формы нерегулярностей диффракционной картины позволяет оценить средние размеры и форму ионосферных неоднородностей.

Измерения флюктуаций интенсивности или фазы принимаемого сигнала могут быть использованы для определения флюктуаций электронной плотности в ионосфере. Кроме того, одновременные измерения флюктуаций амплитуды и фазы дают информацию о высоте ионосферных неоднородностей [5, 29, 30, 32]. Мы не будем останавливаться здесь на методах расчета параметров ионосферных неоднородностей по измерениям флюктуаций амплитуды и фазы принимаемых волн; этому вопросу посвящены работы [29–32]. Заметим только, что задача легко решается, если флюктуации амплитуды поля на Земле малы. В этом случае средний размер диффракционной картины на Земле совпадает со средним размером неоднородностей в ионосфере (предполагается, что такой размер существует) [30, 31]. Если же флюктуации излучения источника сравнимы с величиной интенсивности, интерпретация диффракционной картины существенно усложняется [33–35]. В этом случае наряду с масштабом, совпадающим с характерным размером ионосферных неоднородностей  $l$ , в диффракционной картине будут присутствовать также мелкоструктурные неоднородности со средним размером  $l/\sqrt{(\Delta\varphi)^2}$  ( $\sqrt{(\Delta\varphi)^2}$  — дисперсия фазы на выходе слоя с неоднородностями). Последние являются результатом интерференции между лучами, проходящими через различные неоднородности [33, 35]. На достаточно

больших расстояниях от слоя (в зоне Фраунгофера) в дифракционной картине будут присутствовать только мелкоструктурные неоднородности [30 33, 35]. Значительно более сложным в случае больших амплитудных изменений поля является и расчет флюктуаций амплитуды и фазы поля [32].

Часто амплитудные и фазовые флюктуации используются для исследования ряда морфологических характеристик флюктуаций, а также их связи с другими геофизическими явлениями. В качестве параметров при этом используются а) индекс или амплитуда флюктуаций, б) „появляемость“ и в) скорость флюктуаций. В выборе индекса флюктуаций существует большой произвол. Так, например, в [5] в качестве индекса использовалось отношение дисперсии амплитуды флюктуаций к средней амплитуде принимаемого сигнала. В работах [7, 43, 45, 46, 50] применяется другой индекс, который определяется средним размахом флюктуаций на записи, выраженным в процентах от средней интенсивности источника. Авторы [40 47] пользуются визуальной оценкой записей. „Появляемость“ флюктуаций обычно характеризуется отношением интервалов времени, в которое наблюдались флюктуации, большие заданной пороговой величины, к общему интервалу наблюдений. Скорость флюктуаций определяется числом максимумов флюктуаций на записи в единицу времени (минуту); она часто используется для характеристики скорости дрейфа ионосферных неоднородностей.

## 2. АНАЛИЗ ДИФФРАКЦИОННОЙ КАРТИНЫ

В настоящее время установлено, что неоднородная структура ионосферы оказывает значительное влияние на распространение радиоволн от внеземных источников в широком диапазоне частот ( $13 \div 480$  мГц) [1–11, 16–18]. При приеме радиоизлучения дискретных источников на средних широтах близ северного горизонта флюктуации сигнала ионосферного происхождения наблюдаются на частотах вплоть до  $900$  мГц [51, 52].

Флюктуации интенсивности сигнала всегда сопровождаются флюктуациями углов прихода волны (разности фаз в двух точках). Характерной чертой амплитудных и угловых флюктуаций является их зависимость от рабочей частоты. Флюктуации углов прихода пропорциональны квадрату длины волны; распределение величин угловых флюктуаций близко к распределению Гаусса [5, 44]. На частотах  $40 \div 50$  мГц в зените величина угловых флюктуаций в обычные дни  $2' \div 3'$ ; однако в периоды сильно возмущенной ионосферы угловые флюктуации достигают  $30'$  [5, 44, 80].

Флюктуации интенсивности и амплитуды также возрастают с ростом длины волны. Согласно [5, 17], флюктуации амплитуды приблизительно пропорциональны квадрату длины волны\*. По данным работы [44], при значениях  $(\overline{\Delta A})^2 / A^2 \approx 0,274$  зависимость амплитудных флюктуаций от частоты исчезает. Распределение величины флюктуаций интенсивности близко к распределению Райса. При малых индексах флюктуаций распределение флюктуаций интенсивности списывается распределением Гаусса, при больших — близко к распределению Рэлея [24, 44]. Эти характеристики принимаемого излучения являются экспериментальным подтверждением теории, объясняющей наблюдаемые флюктуации интен-

\* Данные, полученные в Австралии [9] под большими зенитными углами, показывают исчезновение частотной зависимости на  $f > 100$  мГц. Возможно, что это нарушение связано со значительным влиянием тропосферной турбулентности. Согласно [95], флюктуации тропосферного происхождения часто наблюдаются в Австралии при приеме радиоизлучения от локальных источников на солнечном диске.

сивности рассеянием на неоднородностях электронной концентрации в ионосфере.

Скорость флюктуаций на частотах  $f > 100$  мгц не зависит от частоты [16]; на частотах, меньших 30 мгц, эта зависимость наблюдается в периоды возмущенной ионосферы [17, 18]. Наличие зависимости скорости флюктуаций от рабочей частоты на частотах  $f < 30$  мгц может быть объяснено существованием достаточно интенсивных неоднородностей в ионосфере, вызывающих флюктуации фазы волны на выходе слоя больше одного радиана.

Корреляция между флюктуациями на разных частотах исследовалась в работах [16–18]. По данным [16], коэффициент корреляции на частотах 81,5 мгц и 118,5 мгц в среднем равен 0,61 и уменьшается с ростом амплитуды флюктуаций; на частотах 25 мгц и 18,6 мгц коэффициент корреляции в отдельных случаях достигает значений, близких к единице, хотя в возмущенной ионосфере он значительно уменьшается; на частотах 25 мгц и 13 мгц коэффициент корреляции не превышает значений  $0,3 \div 0,4$  [18]. Корреляция между записями на частотах, отличающихся в 2,5 раза, пренебрежимо мала [17].

Максимальные значения для коэффициентов корреляции, полученных в работах [16–18], можно объяснить, рассматривая дифракцию радиоволн на слое, содержащем слабые неоднородности с размерами порядка километра и расположенном на высоте 300 км. Уменьшение корреляции в периоды возмущенного состояния ионосферы, возможно, связано с изменением структуры дифракционной картины при больших набегах фазы волны в слое.

В работе [10] приводятся результаты исследования динамического спектра дифракционной картины на частотах  $40 \div 70$  мгц. Обычно динамический спектр носит хаотический характер; однако часто проявляются регулярные свойства картины (рис. 1в, д). В ряде случаев динамический спектр дифракционной картины состоит из полос, интенсивность которых почти в пять раз превышает среднее значение. Расстояние между максимумами по времени больше продолжительности отдельных флюктуаций. Полосы иногда расщепляются на ряд узких максимумов, расстояние между которыми уменьшается для больших длин волн. Наличие тонкой структуры флюктуаций отмечалось также в работах [11, 18, 41]. Иногда наблюдаются изолированные выбросы с ярко выраженной фокусировкой [18]. Эти эффекты объясняются фокусировкой, а также дифракционными и интерференционными явлениями на интенсивных неоднородностях с размерами, большими размеров первой зоны Френеля [10, 35, 41].

### 3. СУТОЧНЫЙ И СЕЗОННЫЙ ХОД ФЛЮКТУАЦИЙ. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ШИРОТЫ; СВЯЗЬ С СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТЬЮ

Специфические трудности, возникающие при исследовании суточных и сезонных характеристик ионосферных неоднородностей радиоастрономическими методами, связаны с ограниченностью сеанса наблюдений за источником. Дискретные источники космического радиоизлучения проходят через диаграмму направленности неподвижной антенны за время порядка  $1 \div 3$  часов. Каждый последующий день время наблюдений за источником сдвигается приблизительно на 4 мин вследствие отличия звездных от солнечных суток. Таким образом, только наблюдения в течение года позволяют проследить поведение ионосферы за полные сутки. Использование подвижных антенных систем, позволяющих принимать излучение дискретного источника из любой доступной для наблюдений точки его траектории, значительно увеличивает сеанс наблюдения; однако интерпретация результатов этих наблюдений обыч-

но затруднена тем, что принимаемые из различных участков траектории источника радиоволны пересекают ионосферу под разными углами и на разных широтах. Поэтому только измерения по нескольким источникам, каждый из которых наблюдается под данным зенитным углом в разное время суток, позволяют полностью разделить суточные и сезонные изменения в неоднородной структуре ионосферы. Определенный успех может быть достигнут также при использовании ИСЗ, полный 24-часовой цикл наблюдений за которыми можно осуществить в течение  $2 + 3$  месяцев.

Характерной особенностью суточного хода „появляемости“ и индексов флюктуаций радиоизлучения дискретных источников и ИСЗ является наличие ярко выраженного максимума в ночное время. На экваториальных широтах флюктуации являются сугубо ночным явлением; согласно [40], только в нескольких случаях (во время сильных магнитных возмущений) флюктуации радиоизлучения дискретных источников на частоте 53 мГц наблюдались в дневное время. Индекс флюктуаций резко возрастает после 18 часов местного времени, достигает максимального значения около 22 часов, затем медленно падает до значений, близких к нулю, перед восходом Солнца [40, 62]. Аналогичные результаты получают при исследовании экваториальной ионосферы при помощи ИСЗ [71] (рис. 2). Результаты измерений на средних широтах показывают также наличие флюктуаций в дневное время; однако „по-

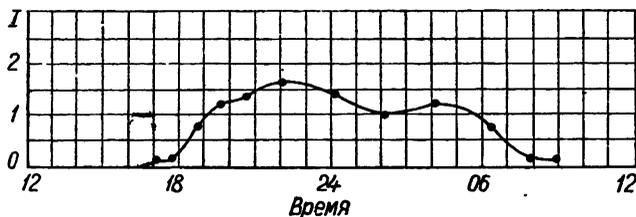


Рис. 2. Суточная зависимость индекса флюктуаций I на экваториальных широтах.

являемость“ и амплитуда дневных флюктуаций обычно значительно меньше, чем ночью [5,18,43—45,66]. Максимального значения флюктуации достигают в период от 22 до 1 часа местного времени [5,43—45]. При приближении к зоне полярных сияний „появляемость“ дневных флюктуаций заметно возрастает [46—48]. В области полярных сияний, как показали измерения, проведенные на Аляске [49,61], флюктуации радиоизлучения дискретных источников обнаруживают слабые суточные изменения, однако так же, как и на низких широтах, максимум флюктуаций наблюдается в ночное время.

Исследование сезонной зависимости индексов флюктуаций проводилось в работах [5,9,48,52,67]. Для разделения суточного и сезонного эффектов авторы [5,9] использовали данные наблюдений нескольких дискретных источников; в работе [62] выделение сезонного эффекта проводилось по наблюдениям источника Лебедь-А в моменты, близкие к восходу и заходу источника. Автор [67] для измерений использовал сигналы первых советских ИСЗ.

Наблюдения под малыми зенитными углами в Англии [5] не обнаружили значительных сезонных изменений индекса флюктуаций. Аналогичные результаты были получены для „появляемости“ флюктуаций сигналов ИСЗ [67]. С другой стороны, наблюдения под углами, близкими к горизонту, показали заметную сезонную зависимость индекса [9] и „появляемости“ [62] флюктуаций: в Канаде с максимумом летом [52], в Австралии — летом и зимой [9]. Наблюдения под углами, близкими

к горизонту, показывают также наличие значительного максимума флюктуаций в дневное время [9,18,67]. Как будет показано в разделе 4, наблюдаемые близ горизонта флюктуации часто коррелируют с возмущениями, которые имеют место на уровне *E*-слоя ионосферы.

На рис. 3 приведены данные, полученные Харроуэром в Канаде в 1954 г. [48]. Круглосуточные наблюдения за источником Кассиопея-А

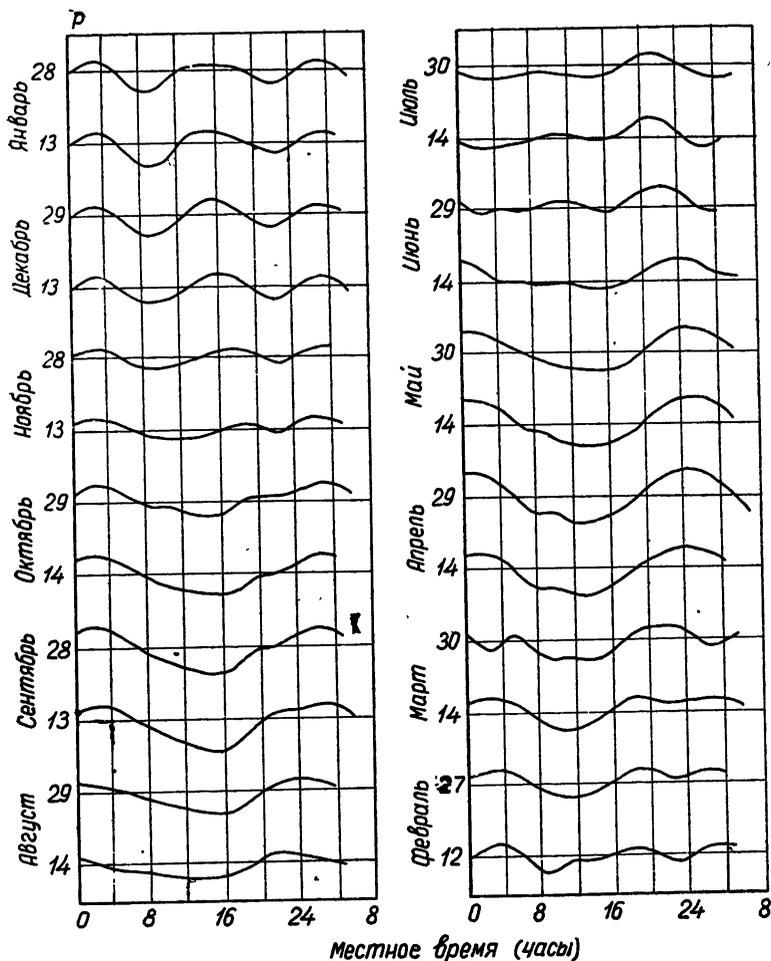


Рис. 3. Суточная и сезонная зависимость появляемости *P* флюктуаций по наблюдениям в Канаде.

были разделены автором на восемь групп, соответствующих различным зенитным углам, под которыми наблюдался источник. Усреднение результатов за год позволило получить зависимость появляемости амплитудных флюктуаций от зенитного угла источника, которая затем была использована для исключения эффекта зенитного угла. Данные показывают наличие нескольких характерных максимумов, положение которых на суточной кривой различно для разных месяцев. Исследуемая область ионосферы при наблюдениях в Канаде была расположена недалеко от зоны максимальной повторяемости полярных сияний; поэтому особенности сезонной зависимости для этих наблюдений, на наш взгляд, следует искать в комплексе явлений, наблюдаемых в приполярной ионосфере.

В настоящее время трудно построить полную картину широтного распределения неоднородностей как из-за отсутствия достаточного количества измерений на разных широтах, так и вследствие различия индексов, используемых разными авторами. Мы уже отмечали качественное различие суточного хода флюктуаций на разных широтах, основная особенность которого состоит в увеличении „появляемости“ флюктуаций в дневное время при переходе от экваториальных к высоким широтам. Данные наблюдений ИСЗ на умеренных и высоких широтах показывают также существование широтной зависимости и индекса ночных флюктуаций. Наблюдения за ИСЗ „Спутник-1“ в Англии в 1957 г. показали наличие резкой границы „появляемости“ и индекса флюктуаций на широтах порядка  $50^\circ$  с. ш. [65]. Существование резкой границы „появляемости“ ночных флюктуаций отмечалось также в Канаде в 1957 г. по наблюдениям за первым и третьим советскими ИСЗ [67]. Область, где происходило при этом исчезновение сигнала, была расположена на широтах  $30^\circ \div 45^\circ$  с. ш. Наличие такой границы для дневных флюктуаций обнаружено не было. Наблюдения за ИСЗ в Англии [70] и Норвегии [72] в 1959—1960 гг. не обнаружили подобного резкого градиента „появляемости“ и индекса флюктуаций; однако результаты этих наблюдений также свидетельствуют о возрастании флюктуаций с ростом широты.

Таким же образом можно интерпретировать результаты измерений зависимости индекса флюктуаций от зенитного угла источника [55]. (Наблюдения в Англии показали, что возрастание индекса флюктуаций с зенитным углом источника для источников северного наклона происходит резче, чем этого следует ожидать из дифракционной теории [5—7].) В зоне полярных сияний „появляемость“ и индекс флюктуаций, по-видимому, максимальны [40]. Результаты измерений [40, 71] показывают также наличие второго максимума вблизи магнитного экватора. Аналогичная широтная зависимость имеет место для диффузности отраженных от  $F_2$ -слоя ионосферы сигналов [98, 105]\*. Говоря о широтной зависимости флюктуаций и диффузности, следует заметить, что большее соответствие последние явления проявляют с изменением геомагнитной или магнитной широты [65, 70].

Измерения флюктуаций радиоизлучения дискретных источников обнаруживают значительное увеличение индекса флюктуаций вблизи максимума солнечной активности. Индекс флюктуаций на экваторе достаточно хорошо коррелирует с изменением числа солнечных пятен [40]. Аналогичные результаты были получены в Джодрел-Бэнк (Англия) [45]. Наблюдения за источником Кассиопея-А в [45] проводились круглосуточно. При этом источник исследовался под разными углами; однако при усреднении результатов не учитывалось различие зенитных углов источника. В то же время, как было показано в данном разделе, на этих широтах существенна широтная зависимость индекса флюктуаций. Поэтому можно ожидать, что приведенные данные относятся к более северным районам, чем Джодрел-Бэнк ( $\varphi = 55^\circ$  с. ш.).

В то же время, согласно [50], флюктуации и диффузность на широтах  $50 \div 55^\circ$  с. ш. достигают максимума через  $1 \div 2$  года после периода максимума солнечной активности и больше соответствуют изменению годового индекса магнитной активности  $C_1$ , чем изменению относительного числа солнечных пятен.

\* Изучению явления диффузности отраженных от  $F_2$ -слоя сигналов, получившему в зарубежной литературе название  $F_{\text{spread}}$ , посвящены работы [97—103, 127—129, 132]. В настоящее время принято считать, что этот эффект связан с наличием интенсивных неоднородностей вблизи максимума  $F_2$ -слоя.

Данные наблюдений флюктуаций интенсивности дискретного источника Кассиопея-А, проведенных вблизи зоны полярных сияний в 1955—1958 гг., показывают значительное уменьшение зависимости скорости и амплитуды флюктуаций от зенитного угла источника по мере увеличения солнечной деятельности [57]. Результаты аналогичных наблюдений в Джодрел-Бэнк, расположенном значительно южнее зоны полярных сияний, показывают противоположные изменения параметров в этот же период времени [45]. Эти данные могут свидетельствовать о смещении к югу области возмущенной ионосферы, ответственной за наблюдаемые флюктуации, в годы максимума солнечной активности [57].

#### 4. СВЯЗЬ ФЛЮКТУАЦИЙ С ИОНОСФЕРНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Уже ранние наблюдения флюктуаций радиоизлучения дискретных источников показали наличие связи между флюктуациями и диффузностью отраженных от  $F_2$ -слоя ионосферы сигналов [5–8]. Эта связь в дальнейшем была подтверждена рядом исследований, проведенных на разных широтах [18,28,40,43,44]; установлено также наличие корреляции между диффузностью и флюктуациями сигналов ИСЗ. В то же время были обнаружены некоторые различия в сезонных и суточных характеристиках флюктуаций и диффузности [43]; в ряде работ отмечалось отсутствие детальной корреляции между этими явлениями, особенно в областях, близких к зоне полярных сияний [46]. Согласно [58–60], отсутствие полной корреляции между диффузностью и флюктуациями частично может быть объяснено как экранировкой ионосферных неоднородностей плотными нижележащими слоями ионизации  $F$ -области при импульсном зондировании, так и различием исследуемых областей ионосферы при радиоастрономических и импульсных измерениях (пункты, где проводились радиоастрономические и импульсные измерения, в большинстве случаев были удалены друг от друга на расстояние нескольких сот километров). Последнее свидетельствует о локальном характере возмущенных областей в ионосфере. На средних широтах эти области, вероятно, вытянуты вдоль геомагнитной широты; их размер в направлении север—юг—порядка 500 км [69]. Существование локальных областей с неоднородностями электронной плотности было отмечено также при изучении флюктуаций сигналов ИСЗ в Англии [65]. Размеры этих областей—порядка 1000 км вдоль геомагнитной широты, поперечные размеры—200 ÷ 400 км, что хорошо согласуется с данными [59].

Как видно из рис. 4, на котором приведены данные, полученные на экваторе с помощью ИСЗ [71], высокая корреляция флюктуаций сигнала спутника с диффузностью наблюдается даже в случаях, когда расстояние между исследуемыми областями ионосферы достигало 700 км. Наличие осцилляций автокоррелятивной функции флюктуаций и функции корреляции между флюктуациями сигнала и диффузностью на рис. 4 свидетельствует о существовании локальных возмущенных областей с горизонтальными размерами порядка 100 км. Существование локальных областей, вероятно, проявляется также при исследовании корреляции между флюктуациями радиоизлучения дискретных источников и ИСЗ [68].

Наблюдения под углами, близкими к горизонту, проведенные в Австралии [9], обнаружили значительную корреляцию между флюктуациями радиоизлучения дискретных источников и „появляемостью“ спорадических слоев в  $E$ -области ионосферы ( $E_{\text{спор}}$ )\*. Аналогичная кор-

\* Наблюдения в Австралии под малыми зенитными углами [8] в противоположность данным [9] показали значительную корреляцию флюктуаций радиоизлучения дискретных источников с диффузностью сигналов, отраженных от  $F_2$ -слоя ионосферы.

реляция при наблюдении под углами, близкими к горизонту, была найдена в работе [10] для дневных флюктуаций. Автор [11] отмечает наличие значительной корреляции между флюктуациями и  $\dot{E}_{\text{спор}}$  для ноября—декабря 1954 г. (в этот период источник наблюдался в предутренние и утренние часы). Наблюдавшиеся рядом исследователей груп-

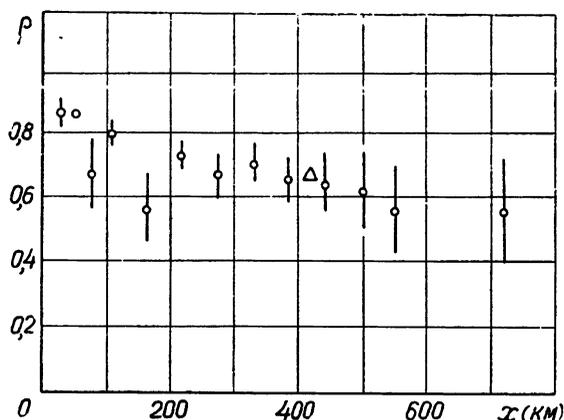


Рис. 4. Изменение коэффициента автокорреляции  $\rho(x)$  интенсивности флюктуаций вдоль трассы спутника (светлые точки) и корреляции между флюктуациями сигналов ИСЗ и диффузностью (темные точки) с расстоянием  $x$  ( $\Delta$ —значение коэффициента корреляции между флюктуациями радиоизлучения дискретных источников и диффузностью, полученное в работе [40]).

повые флюктуации с наличием тонкой структуры также обнаруживают корреляцию с  $E_{\text{спор}}$  [18, 41]. О частичном вкладе неоднородностей, расположенных на уровне  $E$ -слоя, свидетельствуют данные [54, 133]. С другой стороны, наблюдения в Боулдере за дискретным источником в Лебеде показали отсутствие корреляции флюктуаций и  $E_{\text{спор}}$  [44]. Об отсутствии связи флюктуаций с  $E_{\text{спор}}$  могут свидетельствовать данные, полученные на экваторе: флюктуации радиоизлучения дискретных источников и ИСЗ существуют только ночью, в то время как „появляемость“  $E_{\text{спор}}$  максимальна в дневные часы (в период около полудня „появляемость“  $E_{\text{спор}}$  на экваторе больше 40%) [39].

Противоречивость данных о корреляции флюктуаций с возникновением  $E_{\text{спор}}$ , возможно, связана с существованием различных типов слоев  $E_{\text{спор}}$ . Те из них, которые обладают неоднородной структурой, могут давать вклад в наблюдаемые флюктуации радиоизлучения дискретных источников [9]. Увеличение корреляции с  $E_{\text{спор}}$  при наблюдении под углами, близкими к горизонту, может быть связано со значительно большим, по сравнению с  $F$ -слоем, увеличением толщины  $E$ -слоя при переходе к большим зенитным углам из-за сферичности Земли [56].

Сопоставление данных о флюктуациях с параметрами регулярной ионосферы ( $f_{\text{мин}}$ ,  $f_0F_2$ ,  $h'F_2$ ,  $h_{\text{макс}}F_2$ ) показывает наличие заметной корреляции амплитуды флюктуаций с изменением минимальной виртуальной высоты  $h'$  и высоты максимума  $h_{\text{макс}}F_2$ -слоя [44].

##### 5. ВЫСОТА, РАЗМЕРЫ И ФОРМА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ. ФЛЮКТУАЦИИ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ В ИОНОСФЕРЕ

Впервые измерения высоты ионосферных неоднородностей, ответственных за флюктуации радиоизлучения дискретных источников на частотах 37 и 45 мгц, были проведены в Англии в 1950—51 гг. [5]. Из

анализа амплитудных и фазовых изменений принимаемого сигнала следовало, что неоднородности должны быть расположены на высотах порядка 400 км. Впоследствии Бриггс [69] из изучения корреляции между флюктуациями космического радиоизлучения и диффузностью отраженных от  $F_2$ -слоя сигналов пришел к выводу, что эта высота порядка 300 км. Приведенные в предыдущем разделе данные свидетельствуют о частичном вкладе в наблюдаемые флюктуации радиоизлучения дискретных источников неоднородностей, расположенных на уровне  $E$ -слоя ионосферы.

Наблюдения за флюктуациями сигналов ИСЗ позволили получить более полное представление о высотном распределении неоднородностей. Судя по измерениям в Англии, флюктуации сигнала ИСЗ на частоте 40 мГц обычно наблюдаются на высотах, больших 250 км, что позволяет оценить нижнюю границу расположения неоднородностей для этих наблюдений (200 км) [65]. Возрастание индекса флюктуаций обычно прекращалось, когда спутник находился на высотах, больших 325 км, что, по мнению автора [65], определяет верхнюю границу высот неоднородностей. Отметим, однако, что высота спутника для вечерних пролетов не превышала 300 км; спутник наблюдался на высотах 300 ÷ 500 км в предутренние часы (после 3 часов). На основании последнего можно заключить, что указанная автором [65] верхняя граница, вероятно, должна быть отнесена к предутренним часам.

О значительном вкладе неоднородностей, расположенных на высотах 200 ÷ 300 км, свидетельствуют измерения, проведенные в Австралии [69].

На рис. 5 приведены данные измерений флюктуаций сигналов третьего советского ИСЗ [67]. Данные рис. 5а получены в периоды, когда спутник находился на высотах 220 ÷ 250 км,

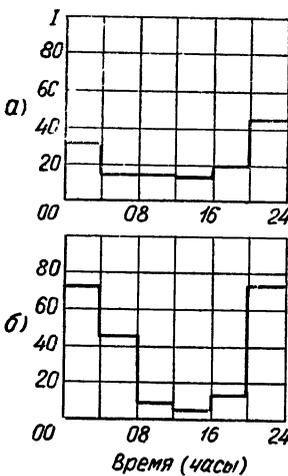
данные рис. 5б относятся к периодам, когда высота спутника превышала 700 км. Из рис. 5 видно, что „появляемость“ флюктуаций в ночное время заметно больше для высоких пролетов спутника, в то же время „появляемость“ флюктуаций днем приблизительно одинакова как для больших, так и для малых высот спутника. На этом основании можно предположить, что неоднородности, ответственные за дневные флюктуации ИСЗ, в основном были расположены на высотах, меньших 220 ÷ 250 км.

Измерение высоты неоднородностей методом разнесенного приема сигналов ИСЗ (см. раздел 1) проводилось в работах [73–76]. Полученные в [73–75] результаты относятся к ночному времени. Измерения на экваторе со спутников Тирос II на частоте 108 мГц показали, что неоднородности расположены на 50 ÷ 100 км выше максимума  $F_2$ -слоя [74]. Толщина слоя, оцененная по максимуму корреляции флюктуаций сигнала на разнесенных антеннах, оказалась порядка 100 км. По данным наблюдений за американским ИСЗ Эксплорер-7 в 1962 г.

Рис. 5. Зависимость суточного хода индекса флюктуаций от высоты  $h_c$  спутника:

а)  $h_c \geq 700$  км, б)  $h_c \approx 220 \div 250$  км.

в г. Горьком вертикальный размер области, в которой отмечаются неоднородности за время одного сеанса, составляет 150 ÷ 200 км, средняя высота слоя с неоднородностями в период измерений изменяется от 260 до 370 км [73]. В единичных случаях наблюдались неоднородности, выходящие за пределы указанной области. Сравнение получен-



ных значений средних высот слоя, содержащего неоднородности, со значениями высоты максимума  $F_2$ -слоя для г. Горького показало хорошее соответствие между этими величинами, несмотря на то, что исследованная область  $F_2$ -слоя ионосферы была расположена южнее г. Горького на расстоянии  $250 \pm 400$  км. Гистограммы высот неоднородностей для нескольких пролетов спутника, полученные в [75], приведены на рис. 6. В Норвегии [78] кроме неоднородностей, расположенных в  $F$ -слое,

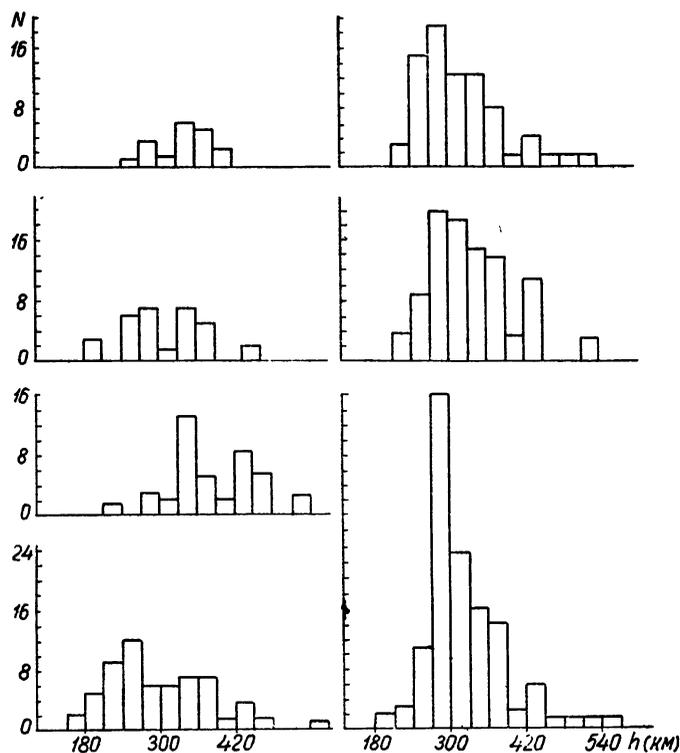


Рис. 6. Гистограммы высот неоднородностей  $h$  для нескольких сеансов наблюдений за ИСЗ.

были зарегистрированы неоднородности, высота которых была порядка  $100$  км. В другой работе норвежских авторов [72] приведены значения высот неоднородностей  $300 \pm 500$  км; однако при этом не указывается метод, с помощью которого были получены эти данные. Измерения высоты неоднородностей, выполненные в Колледже (Аляска) в зоне максимальной повторяемости полярных сияний, показывают, что неоднородности электронной плотности, ответственные за флуктуации сигналов ИСЗ в этих районах, почти равномерно распределены в диапазоне высот от  $140$  км до  $600$  км [76].

Основные сведения о форме и размерах ионосферных неоднородностей получены из сопоставления пространственных и временных изменений поля на трех разнесенных антеннах. Для этого используется корреляционный метод обработки [83].

Следует отметить, что размеры и форма диффракционной картины, которые определяются при этих измерениях, даже в случае слабых возмущений поля принимаемых радиоволн определяются не только формой и размерами ионосферных неоднородностей, но и существенно

зависят от пространственной ориентации неоднородностей и от зенитного угла источника. Это позволяет, в свою очередь, по зависимости ориентации неоднородностей дифракционной картины от зенитного угла источника получить сведения о пространственной ориентации неоднородностей в ионосфере. Подобные измерения, проведенные в Джорд-Бэнк (Англия) [20, 23] и бухте Галли (Антарктика) [25] показали значительную вытянутость ионосферных неоднородностей вдоль силовых линий магнитного поля Земли. О значительной вытянутости неоднородностей вдоль магнитных силовых линий свидетельствуют также данные об изменении скорости флюктуаций с зенитным углом источника, полученные в Канаде [81], и результаты наблюдений за ИСЗ вблизи магнитного экватора [77]\*.

Поперечные размеры неоднородностей, вероятно, равны  $0,5 \div 1$  км [3-7, 10, 22, 71]; размеры вдоль направления силовых линий магнитного поля почти на порядок превышают поперечные размеры [23, 25].

Одним из основных параметров ионосферных неоднородностей является относительная дисперсия электронной концентрации  $\delta N = \sqrt{(\Delta N)^2 / (\bar{N})^2}$ . В настоящее время имеется, однако, очень мало данных о флюктуациях электронной плотности в ионосфере, особенно в  $F_2$ -слое. Эти данные обычно получаются из результатов высотного зондирования ионосферы и изучения рассеяния ультракоротких волн [38]. В работе [36] рассматривалась возможность определения  $\delta N$  из данных радиоастрономических наблюдений. Расчет относительной дисперсии по наблюдениям за флюктуациями радиоизлучения дискретных источников Кассиопея-А на частотах 25 мГц и 18,6 мГц и Лебедь-А на частоте 30 мГц был проведен в [37]. Величина  $\delta N$  по наблюдениям источника в Кассиопее 19 и 20 октября изменялась от  $0,7 \cdot 10^{-3}$  до  $4,5 \cdot 10^{-3}$  со средним значением  $\delta N \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$  (наблюдения проводились с 19 до 23 час местного времени). Наблюдения источника в Лебеде охватывали утренние и дневные часы в течение августа—сентября месяцев 1959 г. Величины  $\delta N$  лежат в пределах  $(0,7 \div 7) \cdot 10^{-3}$ , понижаясь в дневные часы. Дискретный источник Лебедь-А наблюдался под большими зенитными углами, поэтому полученные данные относятся к области ионосферы, расположенной севернее Горького, где проводились измерения, на расстоянии порядка 800 км. Одновременные импульсные измерения, проведенные в период 12—21 октября в Горьком, приводят к верхней границе  $\delta N \approx 3,8 \cdot 10^{-3}$  для слоя  $F_2$  (ночью). Заметим, что данные о величине  $\delta N$ , полученные в работе [37] как радиоастрономическим, так и импульсным методами, по всей вероятности, представляют нижнюю границу  $\delta N$ , поскольку при расчете считалось, что неоднородности электронной концентрации равномерно распределены по всей толще  $F_2$ -слоя с одинаковым значением  $\delta N$ . К сожалению, результаты работы [37] являются единственными радиоастрономическими данными в литературе. Из рассмотрения широтной зависимости следует ожидать возрастания  $\delta N$  при приближении к полярным широтам. Наличие значительных фазовых набегов в слое  $F$ , на частоте 108 мГц на экваторе, о которых свидетельствуют данные [71], говорит о том, что и здесь в  $F_2$ -слое имеются неоднородности со сравнительно большими значениями электронной концентрации.

\* Наблюдения за ИСЗ в Австралии показали заметное увеличение индекса флюктуаций, когда направление на спутник было близко к направлению магнитных силовых линий [77]. Можно ожидать, что амплитудные флюктуации будут максимальны при распространении волны вдоль наибольшего размера неоднородностей. Таким образом, данные [77] могут служить косвенным доказательством вытянутости неоднородностей вдоль силовых линий магнитного поля.

## 6. ДРЕЙФЫ ИОНОСФЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Как уже указывалось, для исследования движений ионосферных неоднородностей, ответственных за флюктуации радиоизлучения дискретных источников, широко применяется метод пространственно-разнесенного приема. Измерения в Англии [5,19] показали, что изменения скорости флюктуаций в основном определяются изменениями скорости дрейфа ионосферных неоднородностей, что позволяет в ряде случаев использовать более простые измерения скорости флюктуаций для приближенного анализа вариаций скорости дрейфа неоднородностей.

Согласно данным, полученным в Англии в 1950—1952 гг., скорость дрейфа неоднородностей значительно изменяется от ночи к ночи; в среднем скорость дрейфа порядка  $200 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$  [5,19]. По данным наблюдений в СССР [22] наиболее вероятная скорость дрейфа—порядка  $100 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Согласно [22], существенной зависимости величины скорости от времени суток и года не наблюдается. Измерения в Англии показывают увеличение скорости дрейфа и скорости флюктуаций в ночные часы [19, 45]. Данные в Горьком свидетельствуют о наличии небольшого увеличения скорости флюктуаций в зимние месяцы [18]. Последнее согласуется с результатами исследования ветров в ионосфере для Горького методом импульсного зондирования [84]. По данным [5,19] преобладающее направление дрейфа—восточно-западное. В течение первой половины ночи от 19 до 00 час движение, в основном, направлено к западу, от 00 до 5 час—к востоку. Между 00 и 01 час ночи происходит изменение направления дрейфа, которое иногда совершается довольно быстро. В некоторых случаях оно сопровождается уменьшением скорости до нуля и постепенным ее возрастанием после изменения направления движения [5].

В работе [23] отмечается наличие значительной северо-южной составляющей дрейфов над Англией (измерения проводились в ночные часы 1954—1957 гг.). Согласно данным, полученным в [22], ночью наблюдается некоторая группировка скоростей около юго-восточного и юго-западного направления; в дневное время направления скоростей распределены хаотично. Об отсутствии выделенного направления скоростей в дневные часы свидетельствуют также измерения в Австралии [10].

Результаты одновременных измерений дрейфов радиоастрономическим и импульсным методами показывают хорошее соответствие между направлениями движения ионосферных неоднородностей, полученных обоими методами в случае, когда исследуемые области ионосферы разнесены на расстояние меньше  $250 \text{ км}$  в горизонтальном направлении; однако на расстояниях свыше  $400 \div 850 \text{ км}$  в направлении север—юг корреляция между флюктуациями, полученными разными методами, исчезает [23]. С другой стороны, направления и скорости ветров, полученные радиоастрономическим методом, подобны для областей ионосферы, расположенных приблизительно на одной геомагнитной широте и разнесенных по долготе на расстояние  $800 \text{ км}$  [19]. Указанные результаты свидетельствуют о наличии локальных движений в областях, вытянутых вдоль геомагнитной широты. Интересно, что размеры этих областей того же порядка, что и размеры локальных областей возмущенности, о которых говорилось в разделе 4. О наличии зон с локальным характером дрейфов в  $F_2$ -слое свидетельствуют также данные импульсного зондирования ионосферы [85].

Скорость дрейфа значительно увеличивается при переходе к высоким геомагнитным широтам, достигая в среднем величины  $350 \div 400 \text{ км}$  вблизи зоны полярных сияний [19, 24]. В работе [45] отмечается также значительное увеличение скорости флюктуаций с ростом геомагнитной

широты. Преимущественное направление дрейфа вблизи зоны полярных сияний — западное между 09 и 21 час и юго-восточное между 21 и 06 час [19]. В работе [24] отмечается большой процент западных дрейфов. Около 18 час местного времени 96% измеренных дрейфов имели западное направление, около 3 час ночи процент „появляемости“ западных дрейфов падал до минимального значения (42%). Наиболее вероятное время для изменения направления дрейфов от западного к восточному — около 23 час. Согласно данным, полученным в 1957—1958 гг. в бухте Галли ( $\varphi = 75^{\circ}31'$  ю. ш.,  $\lambda = 26^{\circ}36'$  з. д.), скорость западных дрейфов, как правило, больше скорости восточной составляющей (рис. 7). Большие скорости дрейфа (в среднем порядка  $400 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$ ) наблюда-

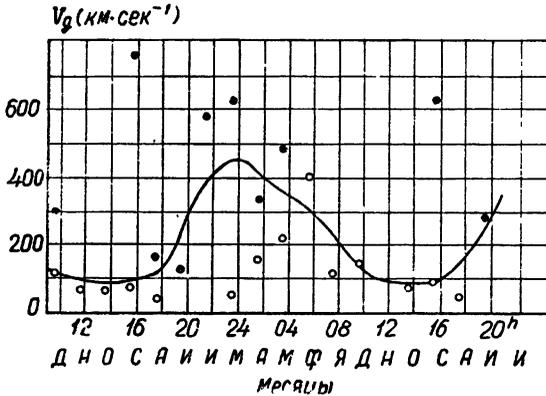


Рис. 7. Суточный (сезонный) ход скорости дрейфа неоднородностей  $V_d$  по наблюдениям в Антарктике:

● — западная составляющая, ○ — восточная составляющая дрейфа.

лись обычно в вечерние часы. Ночью, когда устанавливались дрейфы восточного направления, величина скорости уменьшалась до значений порядка  $100 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$  [15]. Аналогичные изменения наблюдались в движении видимых полярных форм над бухтой Галли в 1956 г. [86]. Большая аналогия между движениями неоднородностей, измеренными радиоастрономическим методом, и перемещением полярных сияний отмечалась также в работах [19, 87]. Движение видимых полярных образований, как правило, направлено к западу во время положительных вариаций горизонтальной составляющей магнитного поля (положительные бухты) и к востоку — во время отрицательных бухт [88]. В свою очередь, изменение знака бухты во время магнитных бурь контролируется системой токов, которая в среднем изменяет свое направление от западного к восточному вблизи полуночи и от восточного к западному — вблизи полудня [89, 90]. Все это указывает на связь изменений движений в верхних слоях атмосферы в этих районах и изменений параметров полярной токовой системы.

## 7. СВЯЗЬ С МАГНИТНОЙ АКТИВНОСТЬЮ. НЕОДНОРОДНОСТИ В ПРИПОЛЯРНОЙ И ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ИОНОСФЕРЕ

Одним из важных свойств флюктуаций радиоизлучения дискретных источников является наличие связи характеристик флюктуаций с возмущениями магнитного поля Земли. В 1962 г. Литтл и Максвелл в Англии обнаружили связь между скоростью флюктуаций принимаемого сигнала и магнитным  $K$ -индексом [6]. Установлена также значительная положительная корреляция между скоростями дрейфа ионосферных

неоднородностей, измеренных радиоастрономическим методом, и  $K$ -индексом [5,19]. Аналогичные данные для средних и высоких широт получены при измерении дрейфов в  $F$ -слое импульсным методом [27, 84]. Как было показано в работе [42], скорость дрейфа изменяется по линейному закону с возрастанием амплитуды вариаций геомагнитного поля вплоть до  $200\gamma$  ( $\gamma = 10^{-5}$  эрстед). Для большей амплитуды вариаций поля увеличение скорости становится более медленным. Отмечается также наличие положительной корреляции между „появляемостью“ и амплитудой флюктуаций, а также наличием сильных фазовых искажений принимаемого сигнала и магнитной активностью [18,43,45,63]. Во время магнитных возмущений часто наблюдаются изменения направления дрейфа неоднородностей. По данным [42] в большинстве случаев изменение направления дрейфа происходило при значениях  $K > 4$ . С ростом  $K$ -индекса время, в которое наблюдалось изменение направления дрейфа, смещается в более ранние часы.

Следует заметить, что приведенные выше данные о связи радиоастрономических флюктуаций с магнитной активностью относились в основном к ночному времени. По данным, полученным в г. Горьком, корреляция скорости и индекса флюктуаций с изменением  $K$ -индекса, которая обычно наблюдалась в вечерние часы (август—ноябрь), почти полностью исчезала в дневные и утренние часы (март—май) [18]. Аналогичные результаты для скоростей флюктуаций получают при исследовании флюктуаций радиоизлучения дискретных источников под углами, близкими к горизонту [18, 52]. Как на частоте 30 *мгц* (Горький, 1959 г. [18]), так и на частоте 915 *мгц* (Оттава, 1957 г. [52]) возрастание скорости флюктуаций с ростом  $K$ -индекса, которое наблюдалось в вечерние и ночные часы, исчезало в дневные и утренние часы (апрель—август). В работе [11] указывается на отсутствие корреляции скорости флюктуаций радиоизлучения дискретного источника Кассиопея-А и суммарного суточного  $K_z$ -индекса при наблюдениях под углами, близкими к горизонту, для ноября, декабря 1954 г. и января 1955 г., в то время как для февраля—июля 1955 г. наблюдалось возрастание скорости флюктуаций с ростом  $K_z$ -индекса. В декабре 1954 г., когда отсутствие корреляции скорости флюктуаций с магнитной активностью было наиболее очевидным, отмечалась значительная корреляция между флюктуациями и ионосферным  $E_{\text{спор}}$ -слоем. Следует заметить, что в ноябре—январе время наблюдений за источником в этих измерениях приходилось на предутренние и утренние часы.

Автором [42] изучение связи флюктуаций с магнитными возмущениями проводилось на основе сопоставления данных о флюктуациях непосредственно с магнитограммами вертикальной и горизонтальной составляющих магнитного поля и магнитного склонения. Была найдена значительная корреляция между изменениями скорости флюктуаций и изменениями магнитного поля Земли, особенно вертикальной составляющей поля. В ряде записей была найдена связь между амплитудой флюктуаций и вариациями магнитного поля (преимущественно горизонтальной составляющей поля). В некоторых записях был обнаружен временной сдвиг между изменениями скорости или амплитуды флюктуаций и вариациями одной из магнитных компонент (пункты, где проводились радиоастрономические и магнитные измерения, были разнесены на расстояние порядка 300 *км* по долготе). Наряду со значительной корреляцией, которая имела место во время магнитных возмущений, происходящих в вечерние часы (между 18 *час* и 0 *час* местного времени), было замечено нарушение связи амплитуды и скорости флюктуаций с магнитной активностью после полуночи.

Таким образом, приведенные данные свидетельствуют об умень-

шении на умеренных широтах корреляции скорости и индекса флюктуаций с магнитной активностью в поздние ночные, утренние и дневные часы.

Для индекса флюктуаций обычно наблюдается меньшая корреляция с вариациями магнитного поля, чем для скорости флюктуаций [91]. Обнаружено уменьшение корреляции индекса флюктуаций с понижением рабочей частоты, а также с увеличением зенитного угла источника [91]\*.

Исследование связи флюктуаций с планетарным  $K_p$ -индексом проводилось в работе [46, 47]. Как известно, планетарный  $K_p$ -индекс характеризует изменения токовой системы, окружающей Землю (внешний радиационный пояс), обусловленные воздействием солнечной корпускулярной радиации [47]. По данным за 1955—57 гг. автором [47] была установлена значительная корреляция между скоростью флюктуаций и планетарным  $K_p$ -индексом (коэффициент корреляции между этими величинами оказался равным +0,54).

В работе [64] отмечается наличие периодической составляющей индексов флюктуаций радиоизлучения дискретного источника Лебедь-А с периодом 27,5 суток, т. е. с периодом обращения Солнца вокруг своей оси. О наличии связи флюктуаций космического радиоизлучения с нестационарными образованиями на Солнце свидетельствуют также данные, полученные в г. Горьком [18]. Это видно из рис. 8, на котором приведены данные о „появляемости“ флюктуаций в дневное время. Обычно в дневное время „появляемость“ флюктуаций, как видно из рис. 8,

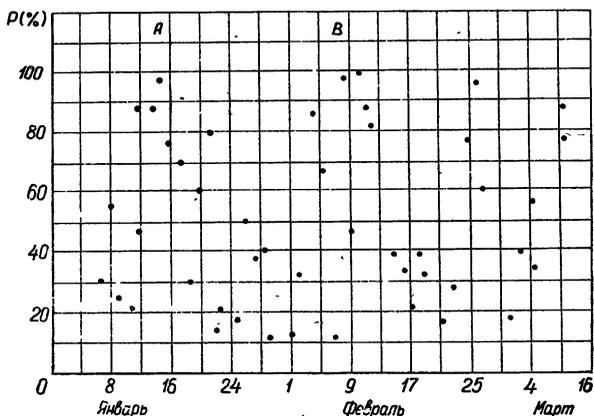


Рис. 8. Зависимость „появляемости“ флюктуаций  $P$  на  $f = 25$  мГц от времени наблюдений.

относительно невелика; наличие двух ярко выраженных максимумов (A и B), расстояние между которыми порядка  $26 \pm 28$  дней, можно связать с появлением на видимой части солнечного диска геоактивных областей, ответственных за ионосферные возмущения  $13 \pm 15$  января и  $9 \pm 13$  февраля.

\* Подобная зависимость индекса флюктуаций с магнитным  $K$ -индексом от частоты и отношения источника в [91] объясняется замыванием диффракционной картины из-за конечных размеров дискретного источника (в данном случае—Кассиопей-А), которое должно быть сильнее выражено на более низкой частоте и при больших зенитных углах. Вследствие этого степень неоднородности ионосферы, по мнению автора [91], характеризуется скорее диффузностью отраженных от слоя  $F_2$  сигналов, чем флюктуациями дискретных источников.

В работе [82] обнаружено наличие корреляции между флуктуациями радиосточников в северном и южном полушариях в пунктах, расположенных на приблизительно одинаковых геомагнитных долготах. Статистический коэффициент корреляции (на основе 338 сеансов) между флуктуациями амплитуды для источников в созвездии Центавра в бухте Галли и в созвездии Кассиопеи в Джодрел-Бэнк оказался равным  $+0,37$ , в то время как коэффициент корреляции между данными о флуктуациях в Кембридже (Англия) и экваториальной станцией в Гане оказался равным  $+0,08$  [40].

Таким образом, приведенные выше данные свидетельствуют о наличии связи флуктуаций на широтах, больших  $50^\circ$  с. ш., с корпускулярными потоками солнечного происхождения. В связи с этим представляют интерес данные о корреляции флуктуаций радиоизлучения дискретных источников с полярными сияниями. В 1952 г. в Англии было обнаружено значительное увеличение скорости флуктуаций при наблюдении под углами, близкими к северному горизонту, в периоды, когда наблюдались полярные сияния [6]. Аналогичные результаты получены автором [51, 52] на частоте 915 *мгц*. Хартсом в Канаде [47] установлено, что изменение „появляемости“ флуктуаций с большими индексами со звездным временем подобно изменению расстояния между исследуемой областью *F*-слоя ионосферы (расчет проводился для высоты 400 *км*) от зоны максимальной полярной активности. Здесь интересно подобие суточной зависимости „появляемостей“ интенсивных флуктуаций, локальной магнитной возмущенности, радиоотражений от полярных сияний и рассеяния высокочастотных радиоволн полярными сияниями [47, 93, 95]. Для иллюстрации мы приводим на рис. 9 суточный ход „появляемости“ интенсивных флуктуаций [47] и появляемости радиоотражений от полярных сияний [95].

На Аляске проводилось изучение детальной корреляции между амплитудой флуктуаций на частоте 223 *мгц* и „появляемостью“ полярных сияний [96]. Результаты измерений показали, что полярные сияния всегда сопровождаются флуктуациями радиоизлучения дискретных источников (обратное не всегда имеет место). Данные были получены из статистического анализа как на основе ежедневных, так и почасовых данных о флуктуациях и полярных сияниях. Исследование связи между этими явлениями на основе минутных данных было проведено в 1959 г. [97]. Наблюдения показали усиление (или появление) флуктуаций сигнала дискретного источника при прохождении видимых форм полярных сияний через направление на источник. Заметим, что при наблюдениях на умеренных широтах под большими зенитными углами излучение от дискретных источников просвечивает полярные области ионосферы на высотах, больших 200–300 *км*, в то время как полярные сияния наблюдаются в основном на

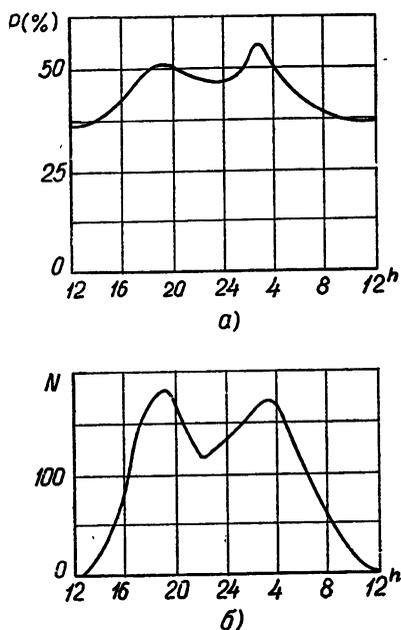


Рис. 9. Суточный ход „появляемости“ интенсивных флуктуаций *P* (а) и числа случаев радиоотражений от полярных сияний *N* (б).

высотах порядка 100 км [39]. Поэтому наличие корреляции с полярными сияниями на умеренных широтах показывает, что возмущение полярной ионосферы при внедрении корпускулярных потоков происходит в большой области высот. Это подтверждается также некоторым различием в поведении скорости флюктуаций и радиоотражений от полярных сияний во время магнитных бурь, которое отмечается в работе [73]. Наличие детальной корреляции с видимыми формами полярных сияний указывает на непосредственное влияние неоднородностей, расположенных на высотах порядка 100 км. В то же время для разных магнитных бурь эффективность возмущений на разных высотах различная. Об этом свидетельствует тот факт, что суммарная корреляция флюктуаций и аномального поглощения в нижних слоях ионосферы (которое регистрировалось по нарушению связи на трассе, проходящей через зону полярных сияний) с  $K_p$ -индексом больше, чем отдельно для каждого из этих явлений.

Нерегулярные процессы в  $F_2$ -слое экваториальной ионосферы проявляются сразу же после захода Солнца в виде резкого возрастания флюктуаций сигналов дискретных источников и ИСЗ, диффузности отраженных от слоя сигналов и трансэкваториального рассеяния на частотах  $20 \div 50$  мГц [62,103,107]\*. Все эти явления, хорошо коррелируя друг с другом, обнаруживают совершенно отличную от умеренных и высоких широт связь с магнитной активностью. Связь с магнитной активностью незначительна в годы минимума солнечной активности; однако в годы максимальной активности наблюдается ярко выраженная отрицательная корреляция флюктуаций, диффузности и трансэкваториального рассеяния с возмущениями магнитного поля Земли.

Исследование дрейфов в экваториальном  $F$ -слое методом импульсного зондирования свидетельствует о наличии отрицательной корреляции между скоростью дрейфа неоднородностей и магнитными возмущениями. Быстрые изменения направления дрейфа, которые имели место между 19 и 23 час местного времени, исчезали в магнитно-возмущенные дни, когда переход от восточных дрейфов к западным проходил более плавно. Быстрое увеличение высоты слоя, которое обычно наблюдалось в эти часы магнитно-спокойных дней, заметно уменьшалось в магнитно-возмущенные периоды [82].

В работах [104,116] отмечается значительное увеличение „появляемости“ диффузности при увеличении высоты максимума слоя. По данным [104], появляемость диффузности особенно велика, когда высота  $F_2$ -слоя превышает 400 км. В магнитно-возмущенные периоды корреляция между диффузностью и высотой максимума  $F_2$ -слоя уменьшается: уменьшение диффузности происходит более резко, чем изменение высоты слоя [104]. Переход от отрицательной корреляции с магнитными возмущениями к положительной, которая имеет место на умеренных и высоких широтах, наблюдается на магнитных широтах  $30^\circ \div 40^\circ$ , где „появляемость“ диффузности пренебрежимо мала [104,108]. На этих широтах наблюдается отсутствие связи скорости дрейфа ионосферных неоднородностей в  $F$ -слое, полученных методом импульсного зондирования, с магнитной активностью [27].

Заметим, что различная связь с магнитной активностью на умеренных и экваториальных широтах появляется также при изучении элек-

\* Согласно [107], трансэкваториальное рассеяние радиоволн сопровождается только «экваториальным» типом диффузности, который характеризуется размытием следа на всех частотах. Предполагается, что «экваториальный» тип диффузности вызван рассеянием радиоволн на неоднородностях, вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля и имеющих размеры в перпендикулярном полю направлении порядка нескольких метров.

тронной концентрации регулярного слоя  $F$ . По данным [109] во время магнитных возмущений  $F$ -слой обычно становится более плотным; в [110] обнаружено значительное увеличение интегральной концентрации на малых широтах в период сильных магнитных возмущений. В то же время на умеренных и высоких широтах происходит уменьшение интегральной концентрации в ионосфере в дни, когда наблюдаются магнитные бури [111–113].

## 8. КРУПНОМАСШТАБНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ В ИОНОСФЕРЕ

В работах [44, 80, 114–117] было показано, что угол прихода радиоволн от внеземного источника в точку наблюдения на Земле подвергается медленным нерегулярным изменениям, которые обусловлены наличием в ионосфере неоднородностей с размерами порядка нескольких сотен километров. Одновременные измерения на частотах 53 мГц и 108 мГц показали, что величина медленных угловых флюктуаций в среднем пропорциональна квадрату волны, что хорошо согласуется с теоретически ожидаемой зависимостью для рефракции радиоволн на крупномасштабных неоднородностях [44, 115] (примеры записей, полученных в работе [44], приведены на рис. 10). Характерной чертой наблюдаемых флюктуаций служит отсутствие сопровождающих их амплитудных изменений на частотах, больших 50 мГц [44]. Последнее говорит о том, что фокусирующие свойства крупномасштабных неоднородностей не проявляются на этих частотах.

Одновременные исследования нескольких источников позволили установить, что в основном временной ход „появляемости“ медленных колебаний рефракции связан с суточными, а не сезонными изменениями. Максимальная частота появления неоднородностей наблюдается через  $1,5 \div 2$  часа после восхода Солнца [115]. Данные [44] подтверждают наличие ярко выраженного максимума „появляемости“ медленных флюктуаций рефракции в утренние часы.

Изучение зависимости угловых флюктуаций от зенитного угла источника при зенитных углах  $70^\circ \div 90^\circ$  позволило оценить высоту расположения крупномасштабных неоднородностей, которая оказалась равной 350 км [115]. Скорость дрейфа крупномасштабных неоднородностей, согласно [118], составляет  $150 \div 300$  м·сек<sup>-1</sup>.

В работах [115, 116] были предложены две модели крупномасштабных неоднородностей. Согласно первой модели, нерегулярные колебания рефракции вызы-

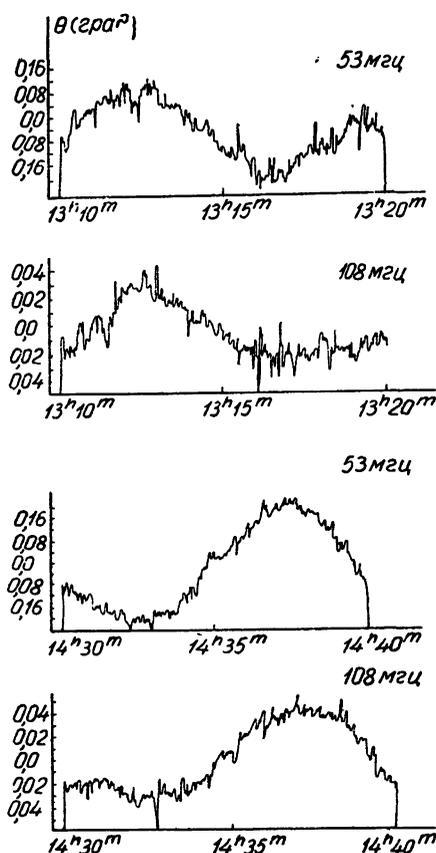


Рис. 10. Примеры записи угловых флюктуаций, вызванных крупномасштабными неоднородностями.

ваются крупномасштабными флюктуациями электронной концентрации в ионосфере; в этом случае для объяснения наблюдаемых величин рефракции необходимо изменение интегральной концентрации вдоль слоя на  $2 \div 3\%$  [115,116]. Вторая модель предполагает волнистую структуру ионосферы вблизи максимума  $F_2$ -слоя, в которой отсутствуют горизонтальные градиенты интегральной электронной концентрации. Как было показано в [116], волнистая структура слоя не должна вызывать нерегулярной рефракции при наблюдении источника в зените. Сравнение результатов наблюдений, проведенных в зените и под углами, близкими к горизонту, показало, что наблюдаемые крупномасштабные ионосферные неоднородности представляют собой образование волнообразного типа (вторая модель) со средним размером порядка  $200 \text{ км}$  и амплитудой волны по вертикали порядка или больше  $0,5 \text{ км}$ , причем волнообразно изогнутой является лишь незначительная по толщине часть слоя (толщина  $\Delta h \sim 50 \text{ км}$ ) [117]\*. Эти выводы, однако, нуждаются в дальнейшей проверке, поскольку при сопоставлении результатов не учитывался широтный эффект, который мог проявляться при наблюдении под большими зенитными углами, когда область исследуемой ионосферы была расположена севернее пункта наблюдений на  $1300-1700 \text{ км}$ .

Кроме того, наблюдаемые в [18] флюктуации интенсивности принимаемого космического радиоизлучения с периодом  $5 \div 20 \text{ мин}$  показывают наличие неоднородностей с размерами  $30 \div 200 \text{ км}$ , фокусирующие свойства которых проявляются на частотах порядка или меньше  $25 \text{ мгц}$ . Наличие крупномасштабных неоднородностей электронной концентрации обнаружено также при исследовании интегральной концентрации в ионосфере при помощи ИСЗ. По данным [119] относительные флюктуации концентрации для неоднородностей с размерами порядка нескольких сотен километров достигают  $1 \div 3\%$ .

Крупномасштабные неоднородности в ионосфере обнаружены также при изучении ионосферы методом импульсного зондирования. Импульсные измерения свидетельствуют о наличии неоднородностей с горизонтальными размерами вплоть до нескольких тысяч километров.

## 9. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Из приведенных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Неоднородности, ответственные за флюктуации радиоизлучения дискретных источников и ИСЗ, в основном расположены в  $F$ -слое ионосферы. В то же время в ряде случаев, особенно при наблюдениях под большими зенитными углами, возможно влияние неоднородностей, расположенных на высотах порядка  $100 \text{ км}$ , в частности, неоднородностей спорадического  $E$ -слоя.

2. Характерные особенности широтной зависимости состоят в наличии двух областей возмущенности ночной ионосферы, расположенных вблизи магнитного экватора и в зоне полярных сияний.

3. На всех широтах наблюдается различие в интенсивности неоднородностей при переходе от дневного к ночному времени. Особенно ярко это различие проявляется на экваториальных широтах, на которых отсутствуют дневные флюктуации радиоизлучения внеземных источников на частотах, больших  $50 \text{ мгц}$ . В то же время флюктуации отраженных от  $F_2$ -слоя сигналов, наблюдаемые при исследовании дрейфов

\* Величина рефракции на крупномасштабных неоднородностях при наблюдении на  $\lambda = 5,8 \text{ м}$  под зенитными углами  $0-30^\circ$  в утренние часы оказалась равной  $0,9'$  вместо ожидаемого (из пересчета данных, полученных под большими зенитными углами) значения  $6,7'-8'$  для первой модели.

в экваториальной ионосфере, свидетельствует о наличии слабых неоднородностей и в дневное время. Ночью неоднородности, ответственные за флюктуации и диффузность на экваторе, расположены вблизи и выше максимума  $F_2$ -слоя. Для умеренных и высоких широт характерны флюктуации и в дневное время. Ночью в умеренных широтах неоднородности распределены в значительной части  $F$ -слоя вплоть до высот 400—500 км; при этом существенный вклад в наблюдаемые флюктуации дают неоднородности, расположенные на высотах 200—300 км. Данные [67] свидетельствуют о том, что неоднородности, ответственные за дневные флюктуации, в основном расположены на высотах, меньших 200—250 км. Это согласуется с данными [123] об отсутствии значительных возмущений в  $F_2$ -слое в дневное время. В полярных областях ионосферы интенсивные неоднородности наблюдаются в любое время суток. Для полярных областей характерно возмущение всей толщи ионосферы, которое особенно велико в вечерние и ночные часы. Интересным является наличие двух ночных максимумов „появляемости“ и индекса флюктуаций.

4. Наблюдается тенденция к группировке в локальные области неоднородностей электронной концентрации, ответственных за флюктуации сигналов дискретных источников и ИСЗ, а также за диффузность отраженных от слоя  $F_2$  сигналов. На умеренных широтах эти области вытянуты в направлении, параллельном геомагнитной широте, и имеют размеры в этом направлении порядка 1000 км. Размер областей в направлении геомагнитного меридиана порядка 200—400 км. Неоднородности электронной плотности вытянуты вдоль магнитных силовых линий, их размер в направлении, перпендикулярном силовым линиям, порядка 0,5—1 км.

5. На умеренных и высоких широтах имеет место заметная связь параметров неоднородностей и их движений с магнитными возмущениями. Связь с магнитной активностью, однако, уменьшается в дневное время. Характерное отличие экваториальных широт заключается в наличии отрицательной корреляции между параметрами неоднородностей и их дрейфов с магнитной активностью, которая особенно ярко проявляется в годы максимальной солнечной активности.

Уменьшение зависимости от магнитной активности, наблюдаемое в дневное время на умеренных широтах, возможно, связано с уменьшением высоты слоя с неоднородностями, ответственными за флюктуации принимаемого сигнала. В связи с этим стоит заметить, что, согласно данным импульсного зондирования, зависимость скорости дрейфа от магнитной активности уменьшается с уменьшением исследуемого уровня в ионосфере: в частности, в  $E$ -слое скорость дрейфа неоднородностей не зависит от возмущений магнитного поля Земли для значений  $K$ -индекса, меньших 4 [84].

Механизм образования неоднородностей с размерами порядка нескольких километров в  $F$ -слое ионосферы до настоящего времени остается не совсем ясным. Вследствие большой вязкости в  $F$ -области турбулизация воздушных течений невозможна. Дополнительной причиной, препятствующей возникновению турбулентности, является воздействие на движение среды магнитного поля Земли. Вызывает ряд затруднений и механизм образования неоднородностей за счет конвективной неустойчивости газа [120].

В работе [121] предполагается образование неоднородностей под воздействием постоянных электрических полей в  $F_2$ -слое; однако вопрос о происхождении этих полей в настоящее время остается нерешенным. Автором [122] отмечается возможность переноса неоднородностей элек-

тронной плотности из нижних слоев ионосферы, где их образование возможно за счет турбулентности.

Заметим, что механизмы образования неоднородностей в нижней части  $F$ -слоя и на больших высотах могут быть различными. Неоднородности нижней части слоя, стабильные относительно геомагнитных возмущений, могут быть связаны с неоднородностями, расположенными на высотах 100–120 км. Неоднородности, расположенные вблизи и выше максимума  $F_2$ -слоя, возможно, связаны с возмущениями, проникающими сверху. Источником этих возмущений могут быть солнечные корпускулярные потоки.

В работе [124] была выдвинута гипотеза о связи флюктуаций и диффузности с низкоширотными полярными сияниями. Предполагалось, что все эти явления связаны с вторжением корпускулярных потоков в атмосферу Земли. Авторами [126,127] подчеркивалась возможность связи полярных сияний и сопровождающих их явлений с частицами из внешнего радиационного пояса. В работе [130] указывается на возможную связь неоднородностей электронной плотности на экваторе с процессами во внутреннем радиационном поясе. Влияние внутреннего пояса возможно распространяется и на средние широты [125]. В связи с этим интересно заметить, что, согласно полученным в последнее время данным, поток частиц во внутреннем радиационном поясе изменяется во времени в 2–3 раза [131]. Это может указывать на существование мощного механизма (помимо механизма распада альбедных нейтронов) инжекции частиц во внутренний пояс, который, возможно, связан с приходом частиц извне, так же как и в случае внешнего радиационного пояса [131].

В настоящее время, однако, остается неясным, в какой конкретной форме проявляется влияние радиационных поясов. Затруднения в этом случае также вызывают объяснение суточной зависимости флюктуаций.

В дальнейшем для изучения проблемы происхождения неоднородностей в  $F_2$ -слое ионосферы необходимо исследование высотного распределения параметров неоднородностей их движений, а также их связи с магнитной активностью и другими геофизическими явлениями. Одной из важных задач в этой области является изучение неоднородной структуры ионосферы на высотах, значительно превышающих высоту максимума  $F_2$ -слоя. Для этого необходимо использование новых методов исследования. Методы исследования с помощью радиоизлучения дискретных источников и ИСЗ затрудняют проведение таких измерений, ибо в этом случае наибольший вклад в диффракционную картину вносят неоднородности, расположенные вблизи области максимальной электронной концентрации в ионосфере. Последние могут „маскировать“ неоднородности, расположенные выше 500–700 км, где концентрация электронов падает в 2–3 раза по сравнению с концентрацией в максимуме  $F_2$ -слоя. Большой интерес представляет изучение связи между нерегулярными явлениями в ионосфере и процессами в радиационных поясах Земли.

Для дальнейшего изучения неоднородной структуры ионосферы необходимо также усовершенствование и разработка новых радиофизических методов, особенно для более точных измерений флюктуаций электронной плотности в ионосфере, размеров, формы и движений ионосферных неоднородностей. Целесообразно также более полно исследовать крупномасштабные неоднородности с размерами порядка сотен и тысяч километров, которые могут характеризовать глобальные изменения в верхней атмосфере Земли.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благо-

дарность Г. Г. Гетманцеву, прочитавшему обзор в рукописи и сделавшему ряд замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. G. Smith, *Nature*, **165**, 422 (1950).
2. C. G. Little, A. C. B. Lovell, *Nature*, **165**, 423 (1950).
3. M. Ryle, A. Hewish, M. N. Royal, *Astron. Soc.*, **110**, 384 (1950).
4. M. Ryle, *Proc. Royal Soc.*, **211**, 351 (1952).
5. A. Hewish, *Proc. Royal Soc.*, **214A**, 494 (1952).
6. C. G. Little, A. Maxwell, *Phil. Mag.*, **42**, 267 (1951).
7. A. Maxwell, C. G. Little, *Nature*, **169**, 746 (1952).
8. B. Y. Mills, A. B. Thomas, *Austr. J. Phys.*, **A4**, 158 (1951).
9. I. G. Bolton, O. B. Slee, G. Y. Stanley, *Austr. J. Phys.*, **A6**, 434 (1953).
10. I. P. Wild, I. A. Roberts, *J. Atm. Terr. Phys.*, **8**, 55 (1956).
11. B. Dueno, *J. Geophys. Res.*, **61**, 535 (1956).
12. В. В. Виткевич, Ю. Л. Кокурин, *Радиотехника и электроника*, **3**, 1373 (1958).
13. R. S. Lawrence, *Proc. IRE*, **46**, 315 (1958).
14. H. Penfield, *Proc. IRE*, **46**, 321 (1958).
15. S. Gruber, *J. Atm. Terr. Phys.*, **20**, 59 (1961).
16. K. Burrow, C. G. Little, *Jodrell Bank Annals*, **1**, 29 (1952).
17. H. J. A. Chivers, *J. Atm. Terr. Phys.*, **17**, 181 (1960).
18. Г. М. Артемьева, В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. М. Ерухимов, М. А. Иткина, Ю. С. Коробков, *Геомагнетизм и аэрномия* (в печати).
19. A. Maxwell, M. Dagg, *Phil. Mag.*, **45**, 551 (1954).
20. M. Spenser, *Proc. Phys. Soc.*, **B 68**, 493 (1955).
21. В. В. Виткевич, Ю. Л. Кокурин, *Радиотехника и электроника*, **4**, 17 (1959).
22. Ю. Л. Кокурин, Дрейфы и неоднородности в ионосфере, серия МГГ, изд. АН СССР, М., 1, 60 (1959).
23. I. L. Jones, *J. Atm. Terr. Phys.*, **19**, 26 (1960).
24. A. J. A. Chivers, *J. Atm. Terr. Phys.*, **21**, 221 (1961).
25. R. M. Brenan, *Proc. Royal Soc.*, **A 256**, 222 (1960).
26. A. Maxwell, *Proc. Cambridge Conf. Phys. Ionosphere*, 1954, p. 163.
27. Ю. В. Кушнеревский, С. Ф. Миркотан, *Геомагнетизм и аэрномия*, **1**, 453 (1961).
28. R. W. Wright, J. R. Koster, N. J. Skinner, *J. Atm. Terr. Phys.*, **8**, 240 (1956).
29. A. Hewish, *Proc. Royal Soc.*, **209A**, 81 (1951).
30. J. Ratcliffe, *Rep. Progr. Phys.*, **19**, 188 (1956); перевод в сб. *Проблемы современной физики*, **10**, 5 (1957).
31. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **2**, 521 (1959).
32. Н. Г. Денисов, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **4**, 630 (1961).
33. В. В. Писарева, *Астрон. ж.*, **35**, 112 (1958).
34. В. В. Писарева, *Акуст. ж.*, **5**, 87 (1960).
35. В. В. Писарева, *Диссертация*, Горький, 1960.
36. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **2**, 344 (1959).
37. Е. А. Бенедиктов, Н. А. Митяков, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **3**, 733 (1960).
38. Я. Л. Альперт, *Распространение радиоволн и ионосфера*, изд. АН СССР, М., 1960.
39. J. A. Ratcliffe, *Physics of the upper Atmosphere*, New York, London, 1960.
40. J. R. Koster, *J. Atm. Terr. Phys.*, **12**, 100 (1958).
41. M. Dagg, *J. Atm. Terr. Phys.*, **11**, 118 (1957).
42. M. Dagg, *J. Atm. Terr. Phys.*, **10**, 191 (1957).
43. M. Dagg, *J. Atm. Terr. Phys.*, **10**, 204 (1957).
44. R. S. Lawrence, J. L. Jespersen, R. C. Lamb, *J. Research N. B. S.*, **65 D**, 333 (1951).
45. N. J. A. Chivers, *J. Atm. Terr. Phys.*, **19**, 54 (1960).
46. T. R. Harts, *Canadian J. Phys.*, **33**, 476 (1955).
47. T. R. Harts, *Canadian J. Phys.*, **37**, 1137 (1959).
48. G. A. Harrower, *Canadian J. Phys.*, **35**, 512 (1957); *Nature*, **179**, 608 (1956).
49. E. H. Vestine, W. O. Roberts, *J. Geoph. Res.*, **64**, 1077 (1959).
50. M. Dagg, *J. Atm. Terr. Phys.*, **11**, 139 (1957).

51. H. C. Ko, Proc. IRE, **48**, 1871 (1960).
52. H. C. Ko, Proc. IRE, **46**, 1872 (1958).
53. C. D. Watkins, J. Atm. Terr. Phys., **19**, 289 (1960).
54. R. S. Lawrence, Radio noise Spectrum, Cambridge, 43 (1955).
55. H. G. Booker, Proc. IRE, **46**, 298 (1958).
56. C. G. Little, W. M. Rayton, R. B. Roof, Proc. IRE, **44**, 992 (1956).
57. P. A. Forsyth, K. V. Paulson, Canadian J. Phys., **39**, 502 (1961).
58. H. W. Wells, J. Geoph. Res., **59**, 273 (1951).
59. B. H. Briggs, J. Atm. Terr. Phys., **12**, 34 (1957).
60. B. H. Briggs, J. Atm. Terr. Phys., **12**, 89 (1957).
61. C. G. Little, G. C. Reid, E. Stilther, R. P. Merritt, J. Geoph. Res., **67**, 1763 (1962).
62. G. R. Koster, R. W. Wright, J. Geoph. Res., **65**, 2303 (1960).
63. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 993 (1961).
64. W. D. Ryan, G. A. Harrower, Canadian J. Phys., **38**, 883 (1960).
65. G. S. Kent, J. Atm. Terr. Phys., **16**, 10 (1959).
66. F. Mendonga, O. G. Villard, O. K. Garriot, Proc. IRE, **48**, 2028 (1960).
67. K. C. Jen, C. W. Swenson, J. Geoph. Res., **64**, 2281 (1959).
68. R. Parthasarathy, G. C. Reid, Proc. IRE, **46**, 610 (1958).
69. O. B. Slee, Nature, **181**, 1610 (1958).
70. W. C. Bain, Nature, **189**, 129 (1961).
71. G. S. Kent, J. Atm. Terr. Phys., **22**, 255 (1961).
72. J. Frihagen, J. Tröim, J. Atm. Terr. Phys., **20**, 215 (1961).
73. J. Frihagen, J. Tröim, J. Atm. Terr. Phys., **18**, 75 (1960).
74. G. S. Kent, J. R. Koster, Nature, **191**, 1085 (1961).
75. Л. М. Ерухимов, Геомагнетизм и аэрономия, **2**, 688 (1962).
76. P. P. Basler, R. N. De Will, J. Geoph. Res., **67**, 587 (1962).
77. D. G. Singleton, G. J. E. Lynch, J. A. Thomas, Nature, **189**, 30 (1961).
78. H. P. Hutchinson, P. R. Arend, Proc. IRE, **48**, 670 (1960).
79. Ю. А. Рыжов, О. И. Юдин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, 13 (1962).
80. В. В. Виткевич, Радиотехника и электроника, **3**, 478 (1958).
81. G. C. Reid, Canadian J. Phys., **35**, 1004 (1957).
82. A. J. Lyon, N. J. Skinner, R. W. Wright, Some Ionospheric Results I. G. Y., Amsterdam—London—New York, 1960, p. 333.
83. G. J. Phillips, M. Spencer, Proc. Phys. Soc., **B 68**, 481 (1955).
84. Л. В. Гришкевич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 608 (1961).
85. Ю. В. Кушнеревский, Е. С. Заярная, Дрейфы и неоднородности в ионосфере, № 1, Серия МПГ, изд. АН СССР, М., 1959, стр. 22.
86. S. Evans, J. Atm. Terr. Phys., **16**, 190 (1960).
87. G. Weill, Ann. Geophysique, **17**, № 1 (1961).
88. F. R. Bond, Austr. J. of Phys., **13**, 478 (1960).
89. A. B. Meinel, Astroph. J., **122**, 206 (1955).
90. Р. А. Зевакина, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 304 (1959).
91. B. H. Briggs, J. Roy. Astr. Soc., **5**, 306 (1961).
92. P. M. Brennan, J. Atm. Terr. Phys., **19**, 287 (1967).
93. C. Collins and P. A. Forsyth, J. Atm. Terr. Phys., **19**, 287 (1960).
94. T. R. Kaiser, The airglow and aurorae, Pergamon Press, London.
95. A. Tsuchiya, M. Morimoto, Pubs. Astron. Soc. Japan, **13**, 303 (1961).
96. G. C. Reid, E. Stilner, Quart. Progr. Rep. **13**, Project 5535—Task 45774, Colledge, Alaska (1959).
97. R. F. Benson, J. Geoph. Res., **65**, 1881 (1960).
98. D. G. Singleton, Nature, **191**, 482 (1961).
99. G. Reber, J. Geoph. Res., **59**, 445 (1954).
100. G. Reber, J. Geoph. Res., **61**, 157 (1956).
101. V. Marasigan, J. Atm. Terr. Phys., **18**, 43 (1956).
102. A. J. Lyon, N. J. Skinner, R. W. Wright, Nature, **181**, 1724 (1958).
103. A. J. Lyon, N. J. Skinner, R. W. Wright, J. Atm. Terr. Phys., **19**, 145 (1960).
104. R. W. Wright, N. J. Skinner, J. Atm. Terr. Phys., **15**, 121 (1959).
105. D. G. Singleton, J. Geoph. Res., **65**, 3615 (1960).
106. M. S. V. Gopala Rao, B. R. Rao, P. R. Rao Pant, J. Atm. Terr. Phys., **17**, 315 (1960).
107. M. L. Pitteway, R. Cohen, J. Geoph. Res., **66**, 3141 (1961).
108. R. W. Wright, J. Geoph. Res., **64**, 2203 (1959).

109. N. J. Skinner, R. W. Wright, Proc. Phys. Soc., **70 B**, 833 (1957).
110. O. K. Garriott, J. Geoph. Res., **65**, 1151 (1960).
111. W. J. Ross, J. Geoph. Res., **65**, 2607 (1960).
112. G. N. Taylor, Nature, **189**, 740 (1961).
113. T. G. Hame, W. D. Stuart, Proc. IRE, **48**, 1786 (1960).
114. W. Ross, E. N. Bramley, Nature, **159**, 132 (1957); Nature, **164**, 355 (1949).
115. В. В. Виткевич, Ю. Л. Кокурин, Радиотехника и электроника, **2**, 286 (1957).
116. Ю. Л. Кокурин, Радиотехника и электроника, **4**, 1985 (1959).
117. Ю. Л. Кокурин, А. Н. Сухановский, Ю. И. Алексеев, Радиотехника и электроника, **6**, 738 (1961).
118. Б. М. Чихачев, Радиотехника и электроника, **3**, 1373 (1960).
119. G. G. Little, R. S. Lawrence, J. Res. N. B. S., **64 D**, 335 (1960).
120. В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 5 (1961).
121. Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрномия, **2**, 242 (1962).
122. P. F. Marty n, Proc. IRE, **47**, 147 (1959); J. Geoph. Res., **64**, 2178 (1959).
123. Н. В. Медникова, сб. Физика солнечных корпускулярных потоков, изд. АН СССР, М., 1957, стр. 183.
124. A. M. Peterson, O. G. Villard, R. I. Leadabrand, P. B. Gallagher, J. Geoph. Res., **60**, 497 (1955).
125. J. Mawdsley, W. H. Ward, J. Geoph. Res., **65**, 1828 (1960).
126. G. I. Galperin, Planetary and Space Sci, **1**, 57 (1959).
127. H. F. Bates, J. Geoph. Res., **64**, 1257 (1959).
128. R. Cohen, K. L. Bowles, J. Geoph. Res., **66**, 1081 (1961).
129. W. Calvert, R. Cohen, J. Geoph. Res., **66**, 3125 (1961).
130. Lal Chaman, J. Inst. Telecommun. Engrs, **6**, 223 (1960).
131. В. Л. Гинзбург, Л. В. Курносова, Л. А. Разоренов, М. И. Фрадкин, Геомагнетизм и аэрномия, **2**, 193 (1962).
132. Н. П. Бенъкова, Геомагнетизм и аэрномия, **1**, 5 (1961).
133. H. J. A. Chivers, J. S. Greenhow, J. Atm. Terr. Phys., **17**, 1 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
7 июля 1962 г.

*Примечания при корректуре.* 1. Отметим некоторое различие в суточной зависимости флюктуаций радиоизлучения на высоких широтах. Вблизи зоны полярных сияний суточный ход флюктуаций характеризуется двумя максимумами (рис. 9а), разделенными минимумом около полуночи. (Подобная картина, как видно из рис. 2, наблюдалась и на экваторе вблизи максимальной фазы солнечной активности.) В то же время в зоне полярных сияний, согласно данным, полученным в Колледже, Аляска (геомагнитная широта  $64,1^\circ$ ), флюктуации радиоизлучения дискретных источников и сигналов ИСЗ имеют один максимум около полуночи <sup>[61,76]</sup>. Наличие максимума около полуночи показывают также исследования радиоотражений от полярных сияний в Колледже <sup>[89]</sup>. Сезонная зависимость флюктуаций в Колледже характеризуется, по-видимому, наличием единного максимума зимой <sup>[61,76]</sup>.

2. Ссылка на литературу <sup>[86]</sup> взята из работы <sup>[97]</sup>.

## О МЕТОДАХ ИЗМЕРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВАРИАЦИЙ СПЕКТРА КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Г. Г. Гетманцев, В. А. Разин

Обсуждаются методы повышения точности измерения пространственных вариаций спектрального индекса космического радиоизлучения.

Для исследования характера движения космических частиц в межзвездном пространстве, изучения природы галактической короны и решения некоторых других астрофизических проблем весьма важны данные о пространственных вариациях спектра нетеплового космического радиоизлучения. Между тем опубликованные данные очень неточны и противоречивы (см. таблицу 1). Поэтому нам кажется целесообразным обсудить возможные пути повышения точности измерений вариаций спектра космического радиоизлучения, что и будет сделано ниже.

Для того, чтобы иметь представление о величине вариаций спектра и значениях их измерений, остановимся сначала на вопросе о том, какие вариации спектра можно ожидать, исходя из представления о магнитно-тормозной природе нетеплового космического радиоизлучения. Рассмотрим следующие очень упрощенные модели Галактики.

Таблица 1

Экспериментальные значения спектрального индекса

Частоты, на которых проводились измерения (мгц)	Спектральный индекс $\alpha = \beta + 2$ $T, \infty \nu^{-\alpha}$	Область, к которой относится спектральный индекс	Автор
40, 90, 200	2,69	Область, где температура максимальна Область, где температура минимальна	Moxon [1]
	2,1		
25, 110	2,41	Всюду	Herbstreit [2] Johler
50 ÷ 300	2,73	$\begin{cases} l^I = 200^\circ; b^I = -30^\circ \\ l^I = 180^\circ; b^I = 0^\circ \\ l^I = 300^\circ; b^I = -2^\circ \end{cases}$	Piddington [3]
	2,51		
	$2,5 \pm 0,1$	Всюду в короне	Adgie, Smith [4]
38—180 мгц	$2,37 \pm 0,04$	Всюду в короне	Costain [5]
30—300 мгц	2,4 ( $\nu \approx 30$ мгц) 2,8 ( $\nu \approx 300$ мгц)	В короне и диске	Baldwin [6]

1. Допустим, что Галактика представляет собой квазиизолированную от внегалактического пространства область (космические частицы „отражаются“ от ее „границы“). Внутри Галактики космические частицы свободно диффундируют во всех направлениях, причем диффу-

зионный путь частиц за время их „жизни“ значительно превосходит размеры Галактики. В этом случае, очевидно, энергетический спектр космических электронов  $N(\mathcal{E})$  всюду будет один и тот же независимо от пространственного распределения их источников. Вариации спектра радиоизлучения космических электронов могут возникать при этом лишь из-за вариаций величины перпендикулярной лучу зрения компоненты магнитного поля  $H_{\perp}$  и отличия функции распределения космических электронов от степенной функции  $\mathcal{E}^{-\eta}$  с  $\eta = \text{const}$ . В самом деле, за радиоизлучение на частоте  $\nu$  в основном ответственны электроны с энергией  $\mathcal{E} \sim (\nu/1,4 \cdot 10^6 H_{\perp})^{1/2} mc^2$  [7], где  $m$ —масса покоя электрона,  $c$ —скорость света. Если в окрестности этой энергии функция распределения электронов аппроксимируется выражением  $\mathcal{E}^{-\eta}$ , то спектр радиоизлучения в окрестности частоты  $\nu$  будет аппроксимироваться выражением  $I_{\nu} \propto \nu^{-\beta}$ , где спектральный индекс  $\beta = (\eta - 1)/2$ . В областях пространства с различными значениями  $H_{\perp}$  на частоте  $\nu$  излучают космические электроны с различными энергиями  $\mathcal{E}$ , которым отвечают, вообще говоря, разные значения  $\eta$ , а следовательно, и  $\alpha$ . Другими словами, если энергетический спектр космических электронов всюду в Галактике один и тот же, то пространственные вариации спектра радиоизлучения возникают из-за вариаций  $H_{\perp}$  и зависимости спектрального индекса  $\beta = (\eta - 1)/2$  от частоты.

В работе [8] проведено вычисление спектра радиоизлучения космических электронов с функцией распределения  $N(E) \propto 1/[a/bE^2 + 1] E^{\eta}$  ( $E = \mathcal{E}/mc^2$ ), учитывающей магнитно-тормозные и ионизационные потери энергии космических электронов. Как следует из этой работы, при средней концентрации газа в Галактике  $n \approx 10^{-2} \text{ см}^{-3}$  можно ожидать, что разность спектральных индексов короны  $\beta_k$  и „диска“  $\beta_d$  —около 0,05. (Средняя величина  $H_{\perp}$  в короне принималась в четыре раза меньшей, чем в „диске“, поскольку излучательная способность единицы объема „диска“ приблизительно в десять раз больше, чем у короны [8], а интенсивность радиоизлучения  $I_{\nu} \propto H_{\perp}^{(1+\eta)/2}$  и  $\eta \approx 2 \div 2,4$ .) Если средняя концентрация газа в Галактике  $n < 10^{-2} \text{ см}^{-3}$ , то  $(\beta_k - \beta_d) < 0,05$ .

Можно также ожидать небольших пространственных вариаций спектра радиоизлучения галактической короны и „диска“ из-за вариаций величины  $H_{\perp}$  на луче зрения [8].

2. Предположим теперь, что галактической „границы“ нет, а источники космических электронов сконцентрированы вблизи галактической плоскости. По мере движения космических электронов от источников их энергетический спектр изменяется из-за потерь энергии; поэтому в достаточно удаленных от источников областях Галактики энергетический спектр космических электронов может заметно отличаться от их спектра вблизи от источников. Это приводит, естественно, к пространственным вариациям спектра космического радиоизлучения, причем вариации будут крупномасштабными в том смысле, что заметные изменения спектрального индекса  $\Delta\beta$  будут наблюдаться лишь при наблюдении в существенно различных направлениях, например, в направлениях на полюс и центр Галактики. Как показано в работе [9] и более детально в [10], при этом можно ожидать значений  $\Delta\beta \approx 0,2$ .

Предположим, наконец, что спиральные галактические рукава квази-изолированы от короны, т. е. что обмен космическими электронами между „диском“ и короной затруднен (либо в силу квазизамкнутости магнитного поля спиральных рукавов, либо из-за малой скорости диффузии космических лучей [11]). В этом случае спектры радиоизлучения короны и „диска“ могут существенно отличаться ( $\beta_k - \beta_d \approx 0,2 \div 0,4$ ) [8], даже если энергетические спектры космических лучей в короне

и „диске“ были первоначально одинаковы, так как физические условия (концентрация газа, напряженность магнитного поля) в короне и „диске“ различны\*. Если же космические лучи в короне и „диске“ имеют разное происхождение, то, разумеется, тем более можно ожидать заметного отличия  $\beta_k$  от  $\beta_d$ . Данные о возможных вариациях  $\beta$  для удобства сведены в таблицу 2\*\*.

Таблица 2

Возможные вариации спектрального индекса ( $\Delta\alpha$ ) нетеплового космического радиоизлучения

Модель Галактики	$\Delta\alpha$
1. „Диск“ и корона представляют собой единую систему в отношении движения космических частиц. Частицы отражаются от галактической „границы“	$\leq 0,05$
2. Галактическая „граница“ отсутствует. Источники космических лучей сосредоточены вблизи галактической плоскости. Космические частицы достаточно быстро диффундируют в корону	0,2
3. Спиральные рукава квазиизолированы от галактической короны	$0,2 \div 0,4$

Поскольку ожидаемые вариации спектрального индекса космического радиоизлучения тесно связаны с представлениями о происхождении космических лучей и структуре Галактики, измерения вариации  $\alpha$  должны внести некоторую ясность в вопрос о выборе правильной модели Галактики.

Измерения угловых вариаций частотного спектра космического радиоизлучения могут производиться различными методами. Все они, разумеется, сводятся к сравнению отношения интенсивностей радиоизлучения на двух длинах волн для различных участков небосвода. С этой целью, в частности, могут быть использованы имеющиеся радиоизотопы космического радиоизлучения, полученные разными авторами в широком диапазоне волн. Определение самой величины спектрального индекса  $\beta$  или связанного с ним спектрального индекса эффективной температуры  $\alpha = \beta + 2$  возможно при этом с погрешностью  $\Delta\alpha \approx 0,2 \div 0,3$ , соответствующей точности абсолютных измерений интенсивности космического радиоизлучения в процессе построения радиоизотопов. Определение же угловых вариаций спектрального индекса  $\Delta\alpha(l, b)$  по радиоизотопам может быть произведено, очевидно, с несколько большей точностью, поскольку в этом случае речь идет лишь о сравнении относительных интенсивностей радиоизлучения для различных участков неба. Практика, однако, показывает, что при этом минимальные обнаружимые вариации  $\Delta\alpha \approx 0,03 \div 0,05$  уже находятся на пределе точности существующих методов относительных измерений интенсивности радиоизлучения в процессе построения радиоизотопов.

Погрешность измерения угловых вариаций спектрального индекса  $\Delta\alpha(l, b)$ , как нам представляется, может быть значительно снижена, если применять предлагаемую ниже методику измерений. Предположим,

\* В короне космические лучи, вообще говоря, могут иметь реликтовое происхождение [11], а в «диске», вероятно, всего, преобладают космические лучи, образующиеся при вспышках сверхновых звезд.

\*\* Выше не были рассмотрены вариации спектра космического радиоизлучения, связанные с наличием тепловой компоненты и поглощением нетеплового радиоизлучения в ННП областях. Следует, впрочем, указать, что соответствующие вариации  $\alpha$  должны быть сравнительно мелкомасштабными благодаря тому, что ионизированный водород в Галактике сконцентрирован в галактической плоскости в отдельных локализованных областях.

что для исключения влияния на результаты измерений угловых градиентов распределения космического радиоизлучения по небосводу измерения проводятся на двух длинах волн с помощью двух одинаковых по конструкции антенн с линейными размерами  $L \propto \lambda = c/\nu$ , имеющими благодаря этому одинаковые диаграммы направленности. Сравнение уровней сигналов на выходах антенн, направленных в один и тот же участок неба, производится с помощью модуляционного радиоприемного устройства.

Перед началом измерений антенны наводятся на какой-либо „эталонный“ участок небосвода (например, на Полярную звезду) и сигналы на выходах приемника искусственно уравниваются по изложенной ниже методике с помощью изменения коэффициента усиления приемника и за счет ослабления сигнала в антенно-фидерном тракте. Соответствующие сигналы на частотах  $\nu_1, \nu_2$ , выраженные в эффективных температурах, приведенных к выходу измерителя, могут быть записаны в виде\*:

$$T_{\nu_1}^* = (T_{\nu_1} + T_{\text{ш}}) k_1; \quad (1)$$

$$T_{\nu_2}^* = (T_{\nu_2} (1 - \gamma) + T_0 \gamma + T_{\text{ш}}) k_2,$$

где  $T_{\nu_1}^*$  и  $T_{\nu_2}^*$  — эффективные температуры небосвода,  $\gamma$  — коэффициент ослабления излучения в аттенюаторе антенно-фидерного тракта на частоте  $\nu_2$ ;  $T_0$  — температура аттенюатора,  $T_{\text{ш}}$  — шумовая температура входа измерителя, а  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты усиления измерителя по мощности.

Разность эффективных температур сигналов на выходе измерителя, очевидно, равна

$$\Delta T = T_{\nu_2}^* - T_{\nu_1}^* = T_{\nu_2} (1 - \gamma) k_2 \left[ 1 - \left( \frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{-\alpha} \frac{k}{1 - \gamma} \right] + k_2 \{ T_0 \gamma + T_{\text{ш}} - T_{\text{ш}} k \}, \quad (2)$$

где через  $k = k_1/k_2$  обозначено отношение коэффициентов усиления, а для  $T_{\nu}$  принято выражение  $T_{\nu} = T(l, b) \nu^{-\alpha}$ . Поскольку  $T_0$  и  $T_{\text{ш}}$  считаются известными, надлежащим изменением  $k$  и  $\gamma$  можно обратить в нуль второе слагаемое в выражении (2), заключенное в фигурные скобки. При этом

$$(k - 1)/\gamma = T_0/T_{\text{ш}}. \quad (3)$$

Далее, меняя  $k$  и  $\gamma$  так, чтобы равенство (3) не нарушалось, можно обратить в нуль и первое слагаемое в (2), заключенное в квадратные скобки, т. е. обратить в нуль всю разность  $\Delta T$ , что может быть непосредственно зафиксировано по отсутствию разности сигналов на выходе измерителя.

По завершении описанной процедуры обе антенны одновременно наводятся на другой участок небосвода, спектральный индекс которого требуется сравнить со спектральным индексом „эталонного“ участка. Если спектральный индекс для второго участка небосвода равен спектральному индексу „эталонного“ участка, то разность температур  $\Delta T$  не должна измениться при перемещении антенн по небосводу. Вместе с тем, как это непосредственно следует из выражения (2); при изменении спектрального индекса  $\alpha$  на  $\Delta\alpha \ll 1$  на выходе измерителя должен появиться сигнал

\* Предполагается, что антенно-фидерная система идеально согласована. Поглощение в фидере на частоте  $\nu_1$  отсутствует, а на частоте  $\nu_2$  уровень сигнала может меняться с помощью имеющегося в фидере аттенюатора. Кроме того, мы считаем, что собственные шумы измерителя на обеих частотах одинаковы.

$$\Delta T' = k_1 T_{v_1} \ln \frac{\nu_1}{\nu_2} \Delta \alpha. \quad (4)$$

Зная  $\Delta T'$ , с помощью (4) оказывается возможным определить искомую величину  $\Delta \alpha$ , если известна эффективная температура  $T_{v_1}$ .

Предлагаемая методика измерения  $\Delta \alpha$  применима, конечно, лишь в том случае, когда подбором  $k$  и  $\gamma$  удастся достаточно точно обратить в нуль сигнал, обусловленный собственными шумами измерителя и тепловым излучением аттенюатора. Во всяком случае, отношение указанного паразитного сигнала к разности эффективных температур небосвода на частотах  $\nu_1$  и  $\nu_2$  прямо определяет значение  $(\Delta \alpha)_{\min}$ , которое еще может быть измерено с помощью указанной методики. Таким образом, наличие собственных шумов измерителя и теплового излучения антенно-фидерного тракта ограничивает диапазон измеряемых  $\Delta \alpha$  снизу, причем  $(\Delta \alpha)_{\min} \approx (T_0 \gamma + T_{\text{ш}} - T_{\text{ш}} k) / T_{v_1}$  (мы считаем, что  $k_1/k_2 \approx 1$ ). Полагая несколько условно числитель в  $(\Delta \alpha)_{\min}$  равным порядку величины  $30^\circ\text{K}$  и  $(\Delta \alpha)_{\min} \approx 10^{-3}$ , находим, что  $T_{v_1} \approx 3 \cdot 10^4 \text{K}$ . Эффективная температура небосвода достигает значений  $T_{v_1} \approx 3 \cdot 10^4$  на волнах  $\lambda \gtrsim 10 \text{ м}$  и, следовательно, на декаметровых волнах возможно измерять  $\Delta \alpha \approx 10^{-3}$ .

Приведенное выше выражение для  $(\Delta \alpha)_{\min}$  определяет предел измерений, связанный с нестабильностью коэффициента усиления приемника и другими техническими факторами. Принципиальный же предел определяется, очевидно, флюктуационным порогом чувствительности аппаратуры. Для современных радиоастрономических приемников при „постоянной времени“ измерения в несколько десятков секунд этот предел примерно на порядок ниже  $(\Delta \alpha)_{\min} \approx 10^{-3}$ .

Отмеченные только что ограничения в измерениях  $\Delta \alpha$ , накладываемые присутствием собственного теплового излучения антенно-фидерного устройства, принципиально устранимы, если пользоваться несколько иной методикой измерений. Предположим, что выходы антенных систем подключены к двум различным модуляционным измерителям, на входах которых осуществляется частотная модуляция принимаемого излучения в пределах некоторого малого интервала частот  $\Delta \nu$ . Амплитуды принимаемых модулированных сигналов, выраженные через эффективные температуры на выходах приемников, получают непосредственно из выражения (1)\*:

$$\begin{aligned} \Delta T_{v_1}^* &= k_1 \alpha T_{v_1} \gamma_1 (\Delta \nu_1 / \nu_1); \\ \Delta T_{v_2}^* &= k_2 \alpha T_{v_2} \gamma_2 (\Delta \nu_2 / \nu_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагая для простоты, что  $\Delta \nu_1 / \nu_1 = \Delta \nu_2 / \nu_2$ , будем считать, что на выходе измерителей имеется устройство, позволяющее получить разность  $\Delta T = \Delta T_{v_1}^* - \Delta T_{v_2}^*$ :

$$\Delta T = k_2 \alpha (\Delta \nu / \nu) T_{v_2} \gamma_2 \left[ k \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left( \frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{-\alpha} - 1 \right]. \quad (6)$$

Выражение в квадратных скобках в (6) практически совпадает с выражением, фигурирующим в (2); однако (6), в отличие от (2), уже не содержит слагаемого, обусловленного тепловым излучением антенны и фидера.

\* Ниже мы считаем, что на обеих частотах имеется поглощение излучения в фидере и что тепловое излучение фидеров и собственные шумы приемников не модулируются.

Как и в рассмотренном выше случае, подбором отношения  $k = k_1/k_2$  или отношения  $\gamma_1/\gamma_2$  для „эталонного“ участка небосвода можно обратить в нуль  $\Delta T$ , определяемое выражением (6). При перемещении диаграмм направленности приемных антенн по небосводу и изменении  $\alpha$  на выходном устройстве возникнет разность сигналов, определяемая

$$\Delta T' \approx [k_1 T_{v_1}(\ell, b) \gamma_1] \ln \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \Delta \alpha \frac{\Delta v}{v} \alpha, \quad (7)$$

причем найденное  $\Delta T'$  совпадет с точностью до множителя  $(\Delta v/v) \alpha \gamma_1$  с выражением (4). Поскольку во втором способе измерения  $\Delta \alpha$  собственное излучение антенны и фидера исключается путем применения частотной модуляции в пределах  $\Delta v_{1,2}$  одновременно на обеих частотах  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , то в этом смысле, естественно, отсутствуют и ограничения в выборе частот, на которых должны производиться измерения  $\Delta \alpha$ . Поэтому соответствующие измерения могут, в частности, производиться на волнах метрового диапазона\*. Отсчет  $\Delta \alpha$  может производиться при этом как по измеряемой величине  $\Delta T'$ , так и по показаниям стоящего в одном из антенных трактов аттенюатора, с помощью которого в процессе измерений сигналы от обеих антенн могут непрерывно уравниваться; величину  $\Delta \alpha$  можно отсчитывать также по показаниям регулятора коэффициентов усиления приемника на частотах  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . В последнем случае измерительное радиоприемное устройство служит, очевидно, лишь индикатором равенства сигналов, идущих от двух антенн, и сами измерения ведутся по „нулевому методу“\*\*.

Для оценки точности измерений, ограниченной, естественно, флюктуационным порогом чувствительности приемной аппаратуры, предположим, что радиоприемное устройство обладает модуляционным выигрышем  $Q \approx 10^4$  и коэффициентом шумов  $N \approx 5$ . (Такие параметры могут быть без труда достигнуты в установках метрового диапазона волн.) Флюктуационный порог чувствительности такого измерителя, выраженный через антенную температуру, равен  $(\Delta T_a)_{\text{фл}} \approx NT_0/Q \approx 0,15^\circ$ , где  $T_0 \approx 300^\circ$  — температура входных цепей приемника. Полагая, что частоты, на которых проводятся измерения, не слишком близки друг к другу  $(\ln \frac{\nu_1}{\nu_2} \approx 1)$ , модуляция производится в достаточно широких пределах  $(\Delta v/v \approx 1)$  и антенная температура, обусловленная космическим радиоизлучением на короткой длине волны,  $T_{v_1} \approx 150^\circ \text{K}$  (это значение  $T_{v_1}$  близко к  $T_{\text{эфф}}$  небосвода вдали от галактической плоскости на  $\lambda \approx 1,5 \text{ м}$ ), находим, что минимальные обнаружимые  $\Delta \alpha \approx (\Delta T_a)_{\text{фл}}/T_{v_1} \approx 10^{-3}$ .

Таким образом, предлагаемые способы измерения пространственных вариаций спектрального индекса, обладая всеми достоинствами „нулевого метода“ измерений (независимость результатов от усиления и формы амплитудной характеристики приемника и т. д.), позволяют, по крайней мере в принципе, снизить нижний предел измеряемых  $\Delta \alpha$  в несколько десятков раз по сравнению с  $\Delta \alpha$ , которые можно снять с имеющихся радиоизотопов. При реализации предлагаемого метода измерения  $\Delta \alpha$  могут быть, разумеется, использованы различные варианты антенных

\* Используя описываемую методику измерений  $\Delta \alpha$ , необходимо особенно тщательно согласовать отдельные элементы антенно-фидерного тракта с тем, чтобы исключить появление паразитного сигнала, обусловленного интерференцией шумов входа приемника в антенном фидере.

\*\* Во втором случае при нахождении  $\Delta \alpha$  отпадает необходимость знать эффективную температуру небосвода  $T_v$ . Если установка «нуля» производится за счет изменения коэффициента усиления  $k$ , то  $\Delta k/k = \Delta \alpha \ln(\nu_2/\nu_1)$ .

устройств и приемной аппаратуры. Так, например, если частоты, на которых производятся измерения радиоизлучения, не слишком сильно отличаются друг от друга, вместо двух-различных антенн может быть использована одна диапазонная антенна. Поскольку при этом диаграммы направленности антенны на разных частотах будут слегка различны, во избежание больших ошибок при определении  $\Delta\alpha$  измерения следует проводить в участках небосвода, свободных от больших градиентов в распределении космического радиоизлучения. Изменение ориентации антенны относительно земли также может быть источником ошибок при определении  $\Delta\alpha$ , поскольку может меняться уровень радиоизлучения земли, попадающий в боковые лепестки. Этот источник ошибок может быть, однако, в значительной мере устранен, если провести контрольные измерения с неподвижной антенной так, чтобы приемная диаграмма направленности перемещалась по небосводу только вследствие вращения Земли.

Авторы признательны Е. А. Бенедиктову, В. В. Беликовичу, Н. А. Митякову, В. О. Рапопорту за обсуждение статьи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. Moxon, *Nature*, **158**, 758 (1946).
2. I. Herbstreit, J. Jöhler, *Nature*, **161**, 515 (1948).
3. J. Piddington, *Monthly Not.*, **111**, 45 (1951).
4. R. Adgie, F. G. Smith, *Observatory*, **76**, 181 (1956).
5. C. H. Costain, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.*, **120**, 248 (1960).
6. J. E. Baldwin, Report on the International Conference on Cosmic Rays, Japan, 1961.
7. В. Л. Гинзбург, *УФН*, **62**, 37 (1957).
8. В. А. Разин, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, **3**, 921 (1960).
9. Г. Г. Гетманцев, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 468.
10. С. И. Сыроватский, *Астрон. ж.*, **36**, 17 (1959).
11. Г. Г. Гетманцев, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика* (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
15 января 1962 г.

## ON MEASUREMENT METHODS OF SPACE VARIATIONS OF COSMIC RADIATION SPECTRUM

*G. G. Getmantsev, V. A. Rasin*

The methods are discussed of increasing of accuracy of measuring the spectral index space variations of cosmic radio emission.

**НАБЛЮДЕНИЯ ПОЛНОГО СОЛНЕЧНОГО ЗАТМЕНИЯ**  
**15 февраля 1961 г. НА ВОЛНАХ 22 и 83 см**

*Л. И. Матвеевко, Р. Л. Сороченко*

Сообщаются результаты наблюдений полного солнечного затмения 15.II.1961 г. на волнах 22 и 83 см, проведенных в Крымской станции ФИАН. На основании полученных данных определены радиоразмеры Солнца, величины остаточных интенсивностей в момент полной фазы и построены карты распределения радиояркости по диску Солнца. Определены координаты, размеры и яркостные температуры областей повышенного радиоизлучения («радиопятен») на Солнце в день затмения.

Наблюдения солнечных затмений в радиодиапазоне представляют значительный интерес для определения структуры и физических свойств атмосферы Солнца. 15 февраля 1961 г. полоса полного солнечного затмения проходила через место расположения Крымской научной станции Физического института им. П. Н. Лебедева. Это обстоятельство позволило провести наблюдения затмения на всех имеющихся инструментах в дециметровом и метровом диапазоне радиоволн. Результаты наблюдений на волнах 1,5÷4 метра изложены в работе [1]. Ниже приводятся результаты наблюдений на волнах дециметрового диапазона (22 и 83 см).

**1. АППАРАТУРА И МЕТОДИКА НАБЛЮДЕНИЙ**

Наблюдения проводились на усеченной параболической антенне с размерами раскрыва 18×8 м. Работающая с этим радиотелескопом спектральная установка на волну 21 см [2] была приспособлена для приема радиоизлучения непрерывного спектра. Регистрация сигнала проводилась непосредственно на выходе второго детектора. Поскольку у спектральной установки чувствительность как по прямому ( $\lambda=21$  см), так и по зеркальному ( $\lambda=23$  см) каналам была одинаковой, эффективная длина волны при наблюдении солнечного затмения соответствовала 22 см.

В фокусе радиотелескопа была установлена (симметрично относительно рупорного облучателя спектральной установки) дипольная система облучателей [3] на волну 83 см. Электрические оси радиотелескопа на обеих волнах были тщательно совмещены. На волне 83 см использовался компенсационный радиометр обычного типа. Основные параметры аппаратуры, использованной для наблюдения солнечного затмения, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Длина волны (см)	Ширина диаграммы антенны на уровне половинной интенсивности	Полоса пропускания приемников $\Delta f$ (мгц)	Постоянная времени (сек)	Чувствительность $\Delta T$ (°К)
22	47'×113'	5	1	2÷4
83	2°,5×4°,15	5	1	~30

При проведении наблюдений сопровождение антенной Солнца проводилось с помощью автоматического программного устройства. Точ-

ность сопровождения составляла  $2' \div 3'$  с максимальной возможной ошибкой, накопленной в течение всего времени наблюдения затмения, не более  $5'$ . Это соответствует случайной ошибке измерений антенной температуры  $\sim 1\%$  и накопленной  $\sim 3\%$  на волне  $22 \text{ см}$ .

Для проверки нулевого уровня аппаратуры перед началом, в ходе затмения и после его окончания антенна отводилась на определенную калибровочную площадку неба. Разность антенных температур калибровочной площадки и площадки неба, где находилось Солнце, можно считать пренебрежимо малой.

Основные электрические параметры антенны на волне  $22 \text{ см}$  были достаточно точно определены в период осуществления программы исследований радиолинии водорода. Это позволило провести абсолютную калибровку радиотелескопа на день затмения. При этих измерениях в качестве эталона было принято радиоизлучение дискретного источника Кассиопея-А. Согласно [4], поток радиоизлучения от этого источника на волне  $22 \text{ см}$  равен  $25 \times 10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1}$ .

На волне  $\lambda = 83 \text{ см}$  в связи с малой чувствительностью аппаратуры проведены лишь относительные измерения радиоизлучения Солнца в течение затмения.

## 2. ЗАТМЕННЫЕ КРИВЫЕ

Данные наблюдений в виде кривых изменения антенной температуры  $T_a$  в ходе затмения представлены на рис. 1. Кривые пронормированы относительно радиоизлучения незатменного Солнца, исправлены

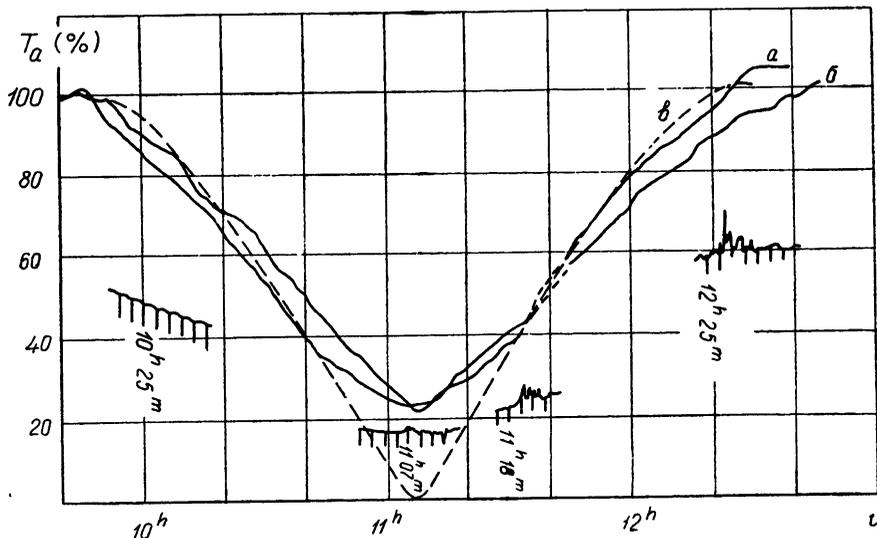


Рис. 1. Кривые изменения относительной температуры антенны во время полного солнечного затмения 15 февраля 1961 г. на волнах 22 и  $83 \text{ см}$  (время московское): а— $\lambda = 22 \text{ см}$ ; б— $\lambda = 83 \text{ см}$ ; в—оптическое затмение. Под кривыми приведены отдельные участки записи на  $\lambda = 83 \text{ см}$  с метками времени через 1 минуту.

на нелинейность амплитудных характеристик радиометров и смещения нулевого уровня из-за аппаратурных эффектов. На основании изучения затменных кривых можно сделать следующие выводы.

1) На обеих волнах наблюдается асимметрия кривых затмения относительно момента максимальной фазы. Это следует как из общего хода кривых, так и из несимметрии моментов первого и четвертого

контактов. Моменты контактов и максимальной фазы затмения приведены в таблице 2 (время московское).

Таблица 2

Длина волны (см)	Момент 1-го контакта	Момент максимальной фазы	Момент 4-го контакта
22	9 <sup>h</sup> 51 <sup>m</sup>	11 <sup>h</sup> 07 <sup>m</sup>	1 <sup>h</sup> 33 <sup>m</sup>
83	9 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	11 <sup>h</sup> 06 <sup>m</sup> 30 <sup>s</sup>	12 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>
оптич. диапазон	9 <sup>h</sup> 51 <sup>m</sup> 27 <sup>s</sup>	11 <sup>h</sup> 06 <sup>m</sup> 24 <sup>s</sup>	12 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup> 40 <sup>s</sup>

2) Как видно из таблицы 2, время максимальной фазы на волне 22 см запаздывает примерно на 0,5 минуты относительно соответствующего времени в оптике, что свидетельствует о большей яркости восточного края солнечного диска.

3) Радиодиаметр Солнца, вычисленный по времени контактов радиозатмения, составляет на волне 22 см  $D_k = 35',65 = 1,1D_\odot$  и на волне 83 см  $D_k = 45',26 = 1,4D_\odot$  ( $D_\odot = 32',38$  — оптический диаметр Солнца).

Эти размеры могут быть сравнены с эффективным радиодиаметром Солнца, вычисленным по формуле  $D_{эфф} = D_L / \sqrt{1-k}$ , где  $k$  — величина остаточной интенсивности и  $D_L$  — диаметр Луны, равный во время затмения  $33',25$ . Вычисления дают:  $D_{эфф} = 38' = 1,17D_\odot$  и  $D_{эфф} = 38',2 = 1,18D_\odot$  соответственно для волн 22 и 83 см.

На волне 22 см  $D_{эфф} > D_k$ , что может быть обусловлено либо большим вкладом излучения полярных областей Солнца, либо значительным уярчением краев, близких к экватору (траектория движения Луны проходила примерно под углом  $20^\circ$  к солнечному экватору). Последнее более вероятно и подтверждается данными, характеризующими распределение радиояркости по диску Солнца во время затмения (см. раздел 3). На волне 83 см  $D_{эфф} < D_k$ , что свидетельствует о большем вкладе излучения короны и о большой протяженности последней в районе 4-го контакта.

По наблюдениям, проведенным Файрором [5] на волне 88 см в течение марта—декабря 1957 г. в период значительной солнечной активности с помощью ножевой диаграммы направленности шириной  $4',8$  эффективный диаметр Солнца был равен  $44'$ . Полученное нами меньшее значение величины эффективного диаметра Солнца свидетельствует о сжатии короны в период с 1957 г. по 1961 г., что также подтверждается малым различием между контактными и эффективным диаметром Солнца на волне 83 см.

4) В момент, непосредственно предшествующий затмению ( $9^h 45^m$ ), наблюдалось повышение потока радиоизлучения Солнца, составившее 1,5% и 2% соответственно на волнах 22 и 83 см. Нарастание и спад повышенного радиоизлучения происходили плавно. Моменты максимумов повышенного излучения совпали на обеих волнах. Длительность этого излучения 2,5 минуты на волне 22 см и около 5 минут на волне 83 см, считая по нулевому уровню. Повышенное радиоизлучение на 83 см исказило момент 1-го контакта затмения.

Можно предположить, что аналогичные эффекты имели место и во время затмения; однако их выявление было затруднено в связи с изменением интенсивности радиоизлучения Солнца в ходе затмения. Возможно, что именно этим эффектом объясняется площадка на затменной кривой  $\lambda = 22$  см при  $t = 10^h 22^m$ .

Повышенная интенсивность радиоизлучения на этой волне  $\sim 3\%$  после окончания затмения по сравнению с предзатменным периодом,

по-видимому, обусловлена аппаратурными эффектами (набегание ошибки сопровождения, изменение коэффициента усиления).

На волне 83 см помимо медленного изменения интенсивности радиоизлучения наблюдались кратковременные (порядка секунд) всплески радиоизлучения. Величина всплесков достигала 5% от излучения незатменного Солнца. Участки затменной кривой с группами таких всплесков показаны на рис. 1 в увеличенном масштабе. Подобные возмущения радиоизлучения появились непосредственно после момента максимальной фазы затмения. Это может свидетельствовать о наличии активной области на западном крае диска Солнца. Наличие такой области подтверждается оптическими наблюдениями вспышек 12—15 февраля [6].

Кратковременные наблюдения Солнца на волне 83 см, проведенные нами 10 февраля, указывают на наличие на Солнце активной области, ответственной за флуктуации потока радиоизлучения. За день перед затмением (14 февраля) радиоизлучение Солнца носило спокойный характер, что может свидетельствовать либо об уменьшении активности этой области, либо о том, что она заходит за край диска. Недостаточное время наблюдений до начала затмения не позволяет сделать окончательный вывод о точных координатах этой активной области, но, учитывая оптические данные, можно предположить, что область, ответственная за всплески радиоизлучения, соответствует области группы пятен с координатами 80°W, 5°N.

5) Остаточная интенсивность радиоизлучения относительно уровня незатменного Солнца на волне 22 см равна 23,5% и на волне 83 см — 24%\*. Величина остаточной интенсивности на волне 22 см близка к значению остаточной интенсивности 20%, полученной на волне 23 см по результатам наблюдений полного солнечного затмения 2 октября 1959 г. [7].

Сопоставление величин остаточных интенсивностей, полученных вами, с аналогичными величинами, найденными другими авторами [8] но время наблюдения полного солнечного затмения 15 февраля 1961 г., показывает, что остаточные интенсивности на 83 см и метровых волнах меняются линейно с длиной волны (рис. 2). Остаточная интенсивность

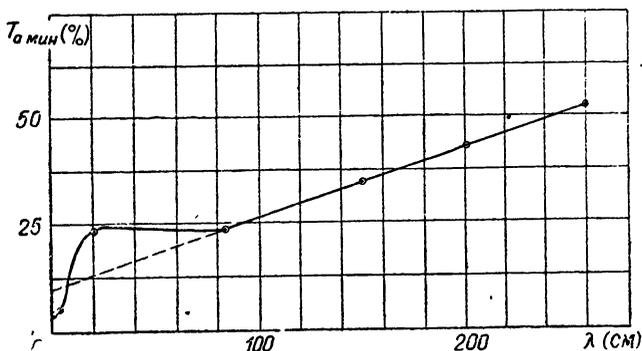


Рис. 2. Величины остаточных антенных температур  $T_{a \text{ мин}}$  на разных волнах, полученные по результатам наблюдений затмения 15. II. 61.

на 22 см намного превышает значение величины, которую можно было бы ожидать, исходя из этой зависимости, что несомненно говорит

\* При определении величины остаточной интенсивности на волне 22 см данные затменной кривой исправлялись на влияние диаграммы направленности. На волне 83 см в связи с большой шириной диаграммы антенны коррекция не вносилась.

о значительном вкладе уярчения края на этой волне. Отсутствие более подробных данных об остаточных интенсивностях на дециметровых волнах не позволяет сделать выводов о частоте, на которой это уярчение имеет максимальное значение.

### 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИОЯРКОСТИ ПО ДИСКУ СОЛНЦА

Изменения наклона затменных кривых на отдельных участках указывают на наличие областей повышенной интенсивности радиоизлучения на Солнце. Карты распределения радиояркости по диску Солнца на волнах 22 и 83 см, полученные методом графического интегрирования по данным затменных кривых, изображены на рис. 3.

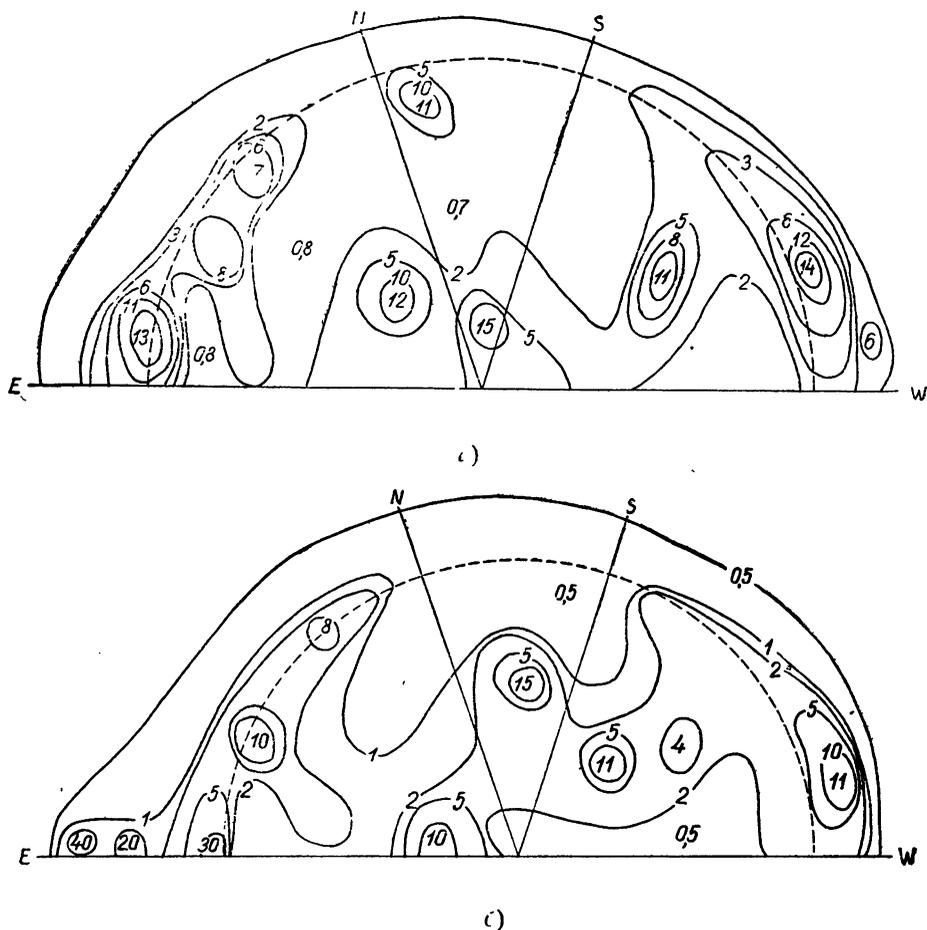


Рис. 3. Радиоизофоты Солнца, полученные по данным солнечного затмения 15. II. 61: а —  $\lambda = 22$  см; яркостная температура в единицах  $140 \cdot 10^3$  К; б —  $\lambda = 83$  см; яркостная температура в единицах  $10^6$  К.

Наличие нестационарных явлений на Солнце в период затмения может привести к некоторым неточностям в распределении радиояркости.

Так как наши результаты неоднозначны относительно правой и левой половины диска (считая по линии движения Луны во время затмения), то полученное распределение для каждой волны представляет совмещенное распределение обеих половин. На рис. 4 для срав-

нения приводится радиоизображение Солнца, полученное на волне 9,1 см методом сканирования диаграммой антенны с шириной луча

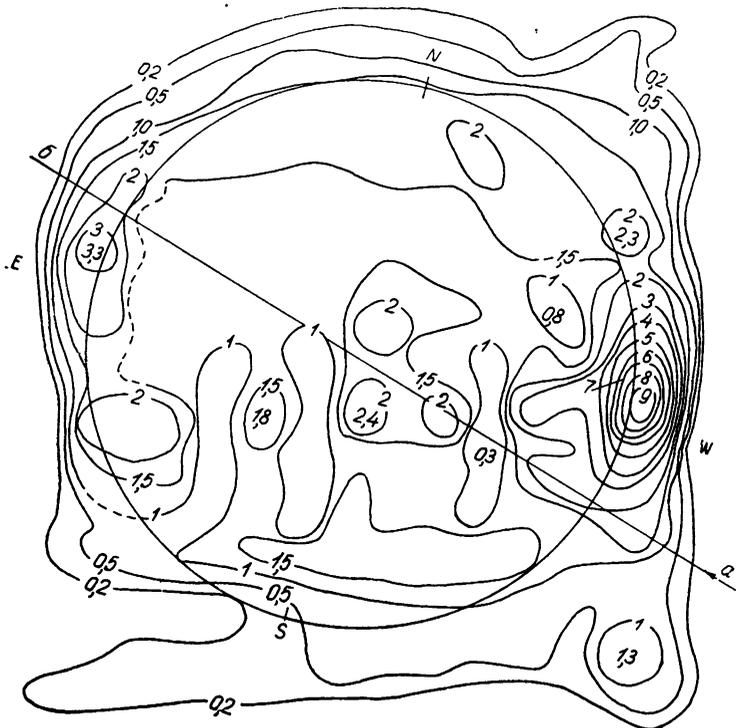


Рис. 4. Радиоизображение Солнца на волне 9,1 см, полученное Брейсуэлом на 13 часов раньше момента затмения;  $T_{\text{ярк}}$  — в единицах  $1,78 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ .

31' × 5' по диску Солнца\*. Эти данные для большей наглядности при сравнении с нашими результатами представлены также в совмещенном

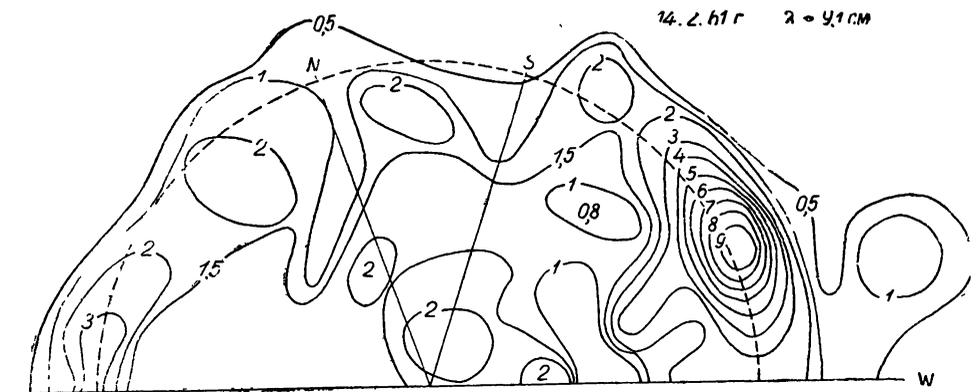


Рис. 5а. Совмещенное радиоизображение Солнца, построенное по результатам наблюдений на волне 9,1 см на 13 часов раньше момента полной фазы затмения в Крыму.

\* Карты радиоизображения Солнца на волне 9,1 см предоставлены нам Брейсуэлом (Станфордский университет, США).

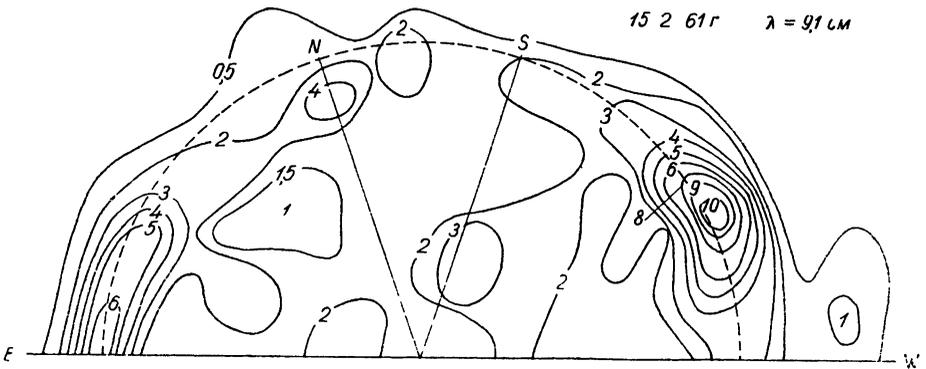


Рис. 56. Совмещенное радиоизображение Солнца, построенное по результатам наблюдений на волне 9,1 см на 11 часов позднее момента полной фазы.

виде (рис. 5). Как видно из рисунков, на всех трех волнах имеется определенное сходство в распределении радиояркости.

На волнах 22 и 83 см на восточном и западном краях диска хорошо заметны уярчения, сильно искаженные, однако, локальными источниками — „радиопятнами“. На обеих волнах яркостная температура

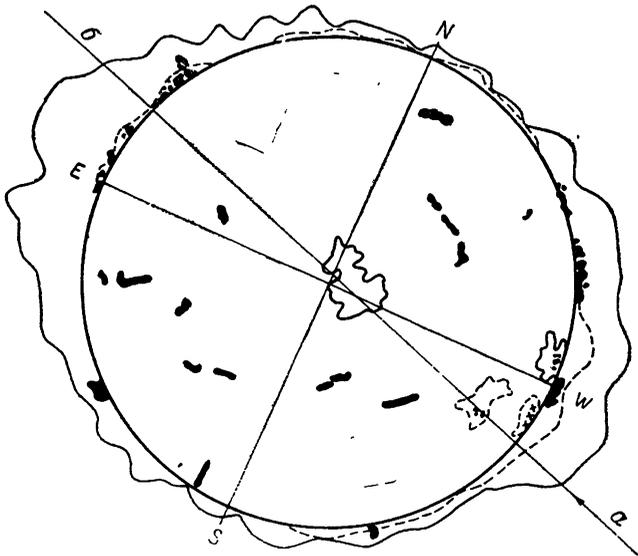


Рис. 6. Карта Солнца 15.11.61 [6]. Линия а—б—траектория движения Луны; сплошная линия вокруг солнечного диска соответствует относительной яркости излучения Солнца в зеленой линии, пунктирная линия соответствует интенсивности красной линии.

уярченного края превосходит яркостную температуру центральной части диска приблизительно в 4 раза. На волне 9,1 см общее уярчение краев выражено не столь четко. Повышенное радиоизлучение краев

К о о р д и н а т ы

1	$\lambda=9,1 \text{ см}$ (14. II 61)		$\lambda=9,1 \text{ см}$ (15. II. 61)		$\lambda=22 \text{ см}$		$\lambda=83 \text{ см}$	
	<i>l</i>	$\varphi$	<i>l</i>	$\varphi$	<i>l</i>	$\varphi$	<i>l</i>	
	2	3	4	5	6	7	8	
1	W 0,47 R <sub>⊙</sub>	-40°	W 0,2 R <sub>⊙</sub>	-20°	W 0,2 R <sub>⊙</sub> W 0,2 R <sub>⊙</sub>	-10° -25°		
2	W 0,05 R <sub>⊙</sub>	+5°	W 0,04 R <sub>⊙</sub>	+10°	W 0,05 R <sub>⊙</sub> W 0,05 R <sub>⊙</sub>	+ 3° -40°	W 0,125 W 0,125	- -
3	W 45°	-5°	W 50°	+5°	W 42° W 30°	+4° -35°	W 42° W 30°	+ -
4	W 3°	+3°	W 15°	+10°	W 3° E 2°	+ 2° -14°	W 23° W 13°	+ -
5			E 15°	0°	E 5° E 20°	+12° -13°	E 15° E 15°	0° -ε
6	W 25°	+75°	W 25° E 2°	+80°	W 12° E 40°	+53° -6,°	W 15° E 12'	+ε -4
7	E 60°	-30°		+75°	E 50° E 70°	+50° -23°	E 70° E 75°	+6 -3
8			E 40°	-5°	E 55° E 65°	+35° -12°	E 80° E 80°	+35 -8
9	E 90°	+8°	E 90°	+10°	E 0,05 R <sub>⊙</sub> E 0,05 R <sub>⊙</sub>	+25° + 5°	E 0,05 R <sub>⊙</sub> E 0,05 R <sub>⊙</sub>	+2. +1.
10							E 0 3 E 0,3 R <sub>⊙</sub>	
11							E 0,045 R <sub>⊙</sub> E 0,045 R <sub>⊙</sub>	
12	E 20°	-25°						
13	W 20°	-15°						
14	W 15°	-15°						

Солнца на волнах 22 и 83 см хорошо коррелирует с оптическими данными излучения Солнца в красной и зеленой линиях (рис. 6).

Основные параметры областей повышенного радиоизлучения на Солнце („радиопятен“), полученные на основании результатов наших наблюдений, а также взятые для сравнения аналогичные данные на волне 9,1 см и в оптическом, диапазоне приведены в таблице 3. В столбцах 2—9 этой таблицы приведены координаты „радиопятен“ на трех рассматриваемых волнах. В связи с неоднозначностью результатов на волнах 22 и 83 см для каждого радиопятна указаны координаты двух возможных положений. Приведенные данные показывают, что в большинстве случаев имеется определенное соответствие в координатах „радиопятен“ на всех трех волнах. В оптическом диапазоне этим областям повышенного радиоизлучения соответствуют те или иные активные образования (пятна, протуберанцы, кальциевые флоккулы), данные о которых помещены в столбце 10 таблицы. Имеющиеся некоторые расхождения в радиоизображениях, по-видимому, объясняются тем, что за излучение на различных волнах ответственны различные по высоте слои солнечной короны. Кроме того, данные на волне 9,1 см относятся к несколько другому времени, чем время наших наблюдений.

В столбцах 11—14 приведены площади „радиопятен“ в квадратных минутах. Уменьшение размеров областей с ростом длины волны, по-видимому, обусловлено отсутствием на волнах 22 и 83 см излучения нижележащих корональных конденсаций либо малым разрешением антенны на волне 9,1 см.

Данные о форме „радиопятен“, характеризующиеся отношением максимального и минимального размеров  $r_{\text{макс}}/r_{\text{мин}}$ , приведены в столбцах 15—18. При этом, как видно из рисунков 3—5, ориентация радиопятен в основном совпадает на всех трех волнах радиодиапазона.

В столбцах 19—22 приведена температура „радиопятен“. На волне 22 см эти данные получены на основании проведенной нами температурной калибровки радиоизлучения. При этом видимая температура диска Солнца на этой волне оказалась равной  $165 \cdot 10^3$  К, а температура отдельных „радиопятен“, как это видно из таблицы, достигает  $1 \div 2 \cdot 10^6$  К. Отсутствие абсолютной калибровки на волне 83 см позволяет определить лишь относительную температуру ярких областей по сравнению с минимальной температурой на диске  $T_{\text{мин}}$ . Для этой волны яркостная температура  $T_{\text{ярк}} = 15 \div 30 T_{\text{мин}}$ . Температуру невозмущенных участков на диске Солнца  $T_{\text{мин}} = 0,53 \cdot 10^6$  К мы оценили по данным [5], где приведены видимая температура и эффективный диаметр „спокойного“ Солнца на волне 88 см. Исходя из этой оценки, температура „радиопятен“ на волне 83 см соответствует  $T_{\text{ярк}} = (8 \div 16) 10^6$  К, достигая в отдельных случаях  $40 \cdot 10^6$  К.

Отношения температур соответствующих областей повышенной интенсивности радиоизлучения на 83 и 22 см лежат в пределах от 5 до 9.

Сравнение температур на  $\lambda=22$  и  $\lambda=83$  см с  $T_{\text{ярк}}$  на  $\lambda=9,1$  см дает большой разброс величин, что может быть обусловлено как различными механизмами излучения на этих волнах, так и расхождением данных во времени.

Высокие значения температур областей повышенной интенсивности радиоизлучения на 83 см свидетельствуют о нетепловом механизме излучения этих областей.

Авторы выражают свою признательность Ю. С. Русинову и В. В. Локтионову за помощь в подготовке аппаратуры и проведении наблюдений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Алексеев, В. И. Бабий, В. В. Виткевич, М. В. Горелова, А. Г. Суховей, *Астрон. ж.* (в печати).
2. Р. Л. Сороченко, Диссертация, Физический институт им. П. Н. Лебедева, М., 1961.
3. А. Д. Кузьмин, *Радиотехника и электроника*, 3, 122 (1958).
4. C. R. Lynds, *Publ. Nat. Radio Astr. Observ.*, 1, 43 (1961).
5. Дж. Файрор, *Радиоастрономия*, Парижский симпозиум, ИЛ, М., 1961, стр. 108.
6. *Солнечные данные*, № 2, 17 (1961).
7. J. Aarons, J. P. Castell, *Astron. J.*, 65, 556 (1960).
8. М. Н. Гнедышев, *Вестник АН СССР*, 5, 56 (1961).

Физический институт  
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию  
27 января 1962 г.

OBSERVATION OF FULL SOLAR ECLIPSE ON THE 15-th OF  
FEBRUARY 1961 AT 22 cm AND 83 cm WAVELENGTH

*L. I. Matveenko, R. L. Sorochenko*

The observation results are presented of full solar eclipse on the 15-th of February 1961. The measurements at 22 cm and 83 cm wavelength was made at the Crimean station of FIAN. The data obtained were applied to determine the solar radio dimensions and the magnitudes of remnant intensities in the full phase moment. The patterns are plotted of radio brightness over the solar disk. The coordinates, dimensions and brightness temperatures are determined of the intensive radiation regions (radio spots) on the Sun in the day of eclipse.

---

**РЕЗУЛЬТАТЫ ПРЕЦИЗИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ  
РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНЕ 1,6 см**

*С. А. Каменская, Б. И. Семенов, В. С. Троицкий, В. М. Плечков*

В июле—сентябре 1961 г. были проведены прецизионные измерения интенсивности радиоизлучения Луны на  $\lambda = 1,6$  см методом, предложенным в работе [1]. Полученная фазовая зависимость радиотемпературы Луны имеет вид:

$$T_{лФ} = 208^\circ + 37^\circ \cos(\Omega t - 30^\circ).$$

Среднеквадратичная ошибка в определении постоянной составляющей составляет около  $\pm 3\%$ .

Методом „искусственной Луны“, предложенным в работе [1], были проведены прецизионные измерения радиоизлучения Луны на волне 1,6 см. Для этой цели использовался радиотелескоп, состоящий из параболической антенны и радиометра модуляционного типа с флюктуационным порогом, равным 1,5° (для постоянной времени 32 сек, при которой осуществлялись наблюдения). Антенна радиометра имела следующие данные [2]: диаметр 1,5 м, ширина диаграммы направленности, измеренная по Солнцу на уровне половинной мощности 44'; коэффициент направленного действия  $3,87 \cdot 10^4$ ; поляризация горизонтальная.

Компенсация фонового сигнала производилась опорной рупорной системой, направленной в зенит. Для проверки стабильности аппаратуры осуществлялась тепловая калибровка по горячему эталону и по излучению зенита [3].

Радиоизлучение Луны сравнивалось с эталонным тепловым излучением абсолютно черного диска, который был изготовлен из алюминия со специальным поглощающим покрытием. Измерения „черноты“ диска, проведенные радиоастрономическими методами, показали правомерность его использования на волне 1,6 см в качестве „абсолютно черного тела“. Диаметр диска менялся от 4,2 до 4,6 м в зависимости от изменения видимого углового размера Луны. Диск располагался во френгоферовой зоне антенны на расстоянии  $l_d = 464,32$  м под углом места в 20°; при этом ошибка измерений из-за дифракции фона излучения земли на диске не превышала 0,2% [1,4].

Радиосигнал от Луны определялся по разности показаний выходного прибора при антенне, наведенной на Луну и отведенной от нее по азимуту на  $3 \div 4^\circ$ . Аналогично при антенне, направленной на центр диска, измерялась разность сигналов при поднятом и опущенном диске. Длительность отдельных записей источников излучения и фона составляла 4 мин. Одно наблюдение, в течение которого проводилось 4—5 циклов измерений Луна—диск, занимало около  $3 \div 4$  часов.

Средняя температура антенны от Луны составляла 25°, а средняя температура антенны от диска менялась от 37° до 44° (за счет изменения его диаметра). Температура Луны для условий приема вне влияния атмосферы находилась по формуле:

$$T_{лФ} = \frac{n_{л}}{n_{д}} \alpha T_{од} e^{-\alpha \tau} e^{-\beta_{д}} \left[ 1 + \frac{T_{од} - T_{он} e^{+\beta_{д}}}{T_{од}} \gamma_{од} + \frac{12}{T_{од}} e^{+\beta_{д}} \right],$$

где  $T_{0д} = 273^\circ + t_d^\circ \text{C}$  — термодинамическая температура эталона, которая измерялась термометром, расположенным в поглощающем слое,  $n_d$  — отклонение выходного прибора от излучения Луны,  $n_L$  — отклонение выходного прибора от излучения диска,  $\alpha$  — коэффициент, учитывающий разницу в угловых размерах диска и Луны,

$$\alpha = \frac{1}{1 - k\Delta r}, \quad k = F(r_{cp}) r_{cp} / \int_0^{r_d} F(r) \sin r \, dr,$$

$$\Delta r = r_d - r_L, \quad r_{cp} = \frac{r_d + r_L}{2} \simeq r_d,$$

$r_L$  — видимый угловой радиус Луны,  $r_d$  — угловой радиус диска, коэффициент  $k$  для  $r_d = 15'33''$ ;  $16'17''$ ;  $17'01''$  соответственно равен 0,1167; 0,1013; 0,0905,  $F(r)$  — диаграмма направленности антенны,  $e^{-\Delta\gamma}$  — коэффициент, учитывающий поглощение радиоизлучения Луны в атмосфере и излучение атмосферы за диском,  $e^{-\beta_d}$  — коэффициент, учитывающий поглощение сигнала от диска до антенны,

$$e^{-\Delta\gamma} e^{-\beta_d} \left[ 1 + \frac{T_{0д} - T_{0н} e^{+\beta_d}}{T_{0д}} \gamma_{0д} + \frac{12}{T_{0д}} e^{+\beta_d} \right] = \eta$$

— общий коэффициент, учитывающий указанные атмосферные влияния и определяемый в основном значением абсолютной влажности атмосферы  $\rho$  у поверхности земли в часы наблюдений,

$$\Delta\gamma = \gamma_d - \gamma_L, \quad \gamma = \left( x_{O_2} \frac{H_1}{\sin \Theta} + x_{H_2O} \frac{H_2}{\sin \Theta} \right) \frac{1}{4,34},$$

$\Theta$  — угловая высота Луны или диска,  $x_{O_2} = 0,0095 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$ ,  $x_{H_2O} = 0,085 \text{ дб} \cdot \text{км}^{-1}$ ,  $H_1 = 5,3 \text{ км}$ ,  $H_2 = 2,15 \text{ км}$ ,  $\gamma_{0д}$  — коэффициент поглощения атмосферы на уровне диска (в неперях),

$$\beta_d \simeq (\gamma_{O_2} + x_{H_2O} \rho) L_d \frac{1}{4,34}$$

— коэффициент поглощения излучения на пути от диска до радиотелескопа.

Кривая фазовой зависимости  $T_{LF}$  изображена на рис. 1. Экспе-

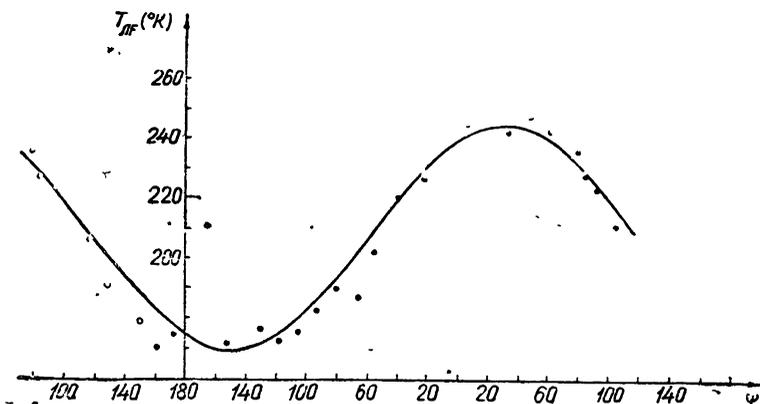


Рис. 1. Фазовая зависимость радиотемпературы Луны:

— — кривая  $T_{LF} = 208^\circ + 37^\circ \cos(2\psi - 30^\circ)$ ; . . . — экспериментальные точки.

риментальные точки фазовой зависимости  $T_{LF}$  хорошо аппроксимируются выражением:

$$T_{LF} = 208^\circ + 37^\circ \cos(\Omega t - 30^\circ).$$

Среднеквадратичное отклонение экспериментальных точек относительно аппроксимирующей кривой составляет  $\pm 3,5\%$ ; дисперсия измерений в течение дня в среднем  $\pm 5\%$ .

Оценим пределы возможных ошибок.

Наибольшая случайная ошибка в измерении  $T_{LF}$  возникает из-за неточности в определении абсолютной влажности и составляет  $\pm 2,5\%$  для единичного измерения. Случайная ошибка единичного измерения, вызванная шумами аппаратуры и уходами нуля, равна  $\pm 4\%$ . Случайные ошибки в подсчетах  $\alpha$  и  $T_{од}$  невелики и равны соответственно  $\pm 0,3\%$  и  $\pm 0,2\%$ . Таким образом, средняя квадратичная случайная ошибка измерения равна  $\pm 5\%$ , а ошибка однодневного измерения составляет  $\pm 5/\sqrt{4} \approx \pm 2,5\%$ .

Систематическая ошибка в измерении  $T_{LF}$  в основном определяется ошибкой в определении  $\eta$ , связанной с неточностью теории. Эта ошибка имеет величину порядка  $\pm 3\%$ . Систематические ошибки в определении  $T_{од}$  и  $\alpha$  малы и соответственно равны  $\pm 0,2\%$  и  $\pm 0,5\%$ . Среднеквадратичная систематическая ошибка равна  $\pm 3\%$ ; общая среднеквадратичная ошибка однодневного значения  $\pm 4\%$ .

Погрешность постоянной составляющей из-за большого числа измерений (около 30) снижается до величины систематической ошибки и достигает  $\pm 3\%$ . Погрешность в определении амплитуды переменной составляющей не более  $\pm 3^\circ$ . Ошибка в определении фазы равна  $\pm 10^\circ$ .

#### ЛИТЕРАТУРА .

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 6 (1961).
2. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 623 (1962).
3. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 600 (1961).
4. Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, В. А. Порфирьев, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 802 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
18 декабря 1961 г.

## RESULTS OF PRECISE MEASUREMENTS OF LUNAR RADIATION AT 1,6 cm WAVELENGTH

S. A. Kamenskaya, B. I. Semenov, V. S. Troitski, V. M. Plechkov

In the period from June to September 1961 precise measurements were carried out of lunar radiation intensity at  $\lambda = 1,6$  cm by method suggested in paper [1]. The obtained phase dependence of lunar radio temperature is

$$T_{LF} = 208^\circ + 37^\circ \cos(\Omega t - 30^\circ).$$

The root-mean-square error in the determination of the constant component is about  $\pm 3\%$ .

## НОВАЯ ВОЗМОЖНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОРОД ЛУНЫ

В. С. Троицкий

Предлагается новый способ определения плотности пород верхнего покрова Луны по измеренным значениям тепловых параметров покрова. Метод основан на использовании зависимости теплопроводности в вакууме от степени пористости или объемного веса материала. Показано, что для земных пород величина  $\gamma = (k\rho c)^{-1/2}$  в интервале плотностей  $0,4 \leq \rho \leq 1,5$  практически является универсальной функцией плотности материала  $\rho$ . Поскольку минералогический состав лунной поверхности не отличается от земного, а  $\gamma$  для пород лунной поверхности определяется непосредственно из эксперимента, то указанная функция может служить для определения плотности  $\rho$  пород на Луне. Измеренная для поверхности Луны величина  $\gamma = 350 \pm 75$  дает для плотности лунных пород на поверхности в зависимости от предполагаемой структуры породы значение в пределах  $0,4 \leq \rho \leq 0,9$   $г \cdot см^{-3}$ . Нижний предел плотности соответствует материалу в пенообразном твердом состоянии и лучше согласуется с величиной плотности, полученной ранее из электрических параметров верхнего покрова Луны.

В работах [1,2] предложено два способа прямого измерения диэлектрической постоянной лунных пород и показано, что они позволяют определить плотность этих пород. В статье [3] проведено определение диэлектрической постоянной по интегральной радиоизлучательной способности поверхности Луны. В результате получено, что плотность пород  $\rho$  лежит в пределах  $0,3 \leq \rho \leq 0,8$   $г \cdot см^{-3}$ . Все эти способы основаны на использовании данных радиоизлучения и электрических характеристик пород. В настоящей работе показана новая возможность определения плотности пород путем измерений тепловых параметров верхнего покрова Луны. В связи с тем, что в настоящее время для тепловых параметров, по-видимому, могут быть даны значительно более узкие и обоснованные границы, чем ранее [4], определение плотности предлагаемым способом представляется нам наиболее точным.

### 1. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Известно, что теплопроводность твердых материалов сильно зависит от степени их пористости [5]. Если обозначить относительный объем пустот (пористость) через  $p$ , объемный вес и теплопроводность непористого состояния вещества через  $\rho_0, k_0$  и пористого соответственно через  $\rho, k$ , то в общем случае, когда в порах — вакуум,  $k = k(k_0, p)$ , где  $p = 1 - \rho/\rho_0$ . При одной и той же пористости вещество может быть либо сыпучим, либо твердым пенообразным. Во втором случае вакуум является включением в твердую матричную фазу, а в первом, наоборот, твердая фаза является как бы включением в матричную „вакуумную“ систему. Естественно ожидать, что для обоих случаев структуры вещества зависимости теплопроводности от пористости для одного и того же материала будут, вообще говоря, различны. Кроме того, следует ожидать некоторого влияния размера пор или зерен. В соответствии со сказанным обозначим функцию теплопроводности для пенистого веще-

ства через  $k_1 = k_1(k_0, p, d)$  и для сыпучего через  $k_2 = k_2(k_0, p, d)$ . Теоретические исследования показывают, что указанные функции весьма слабо зависят от обычного диапазона размера  $d$  и имеют вид:

$$k_1 = k_1(k_0/\rho_0, \rho), \quad k_2 = k_2(k_0/\rho_0, \rho). \quad (1)$$

В применении к Луне нас интересуют функции теплопроводности для группы неорганических материалов, состоящих из различных земных пород. Как оказывается, почти для всех пород отношение  $k_0/\rho_0$  колеблется в пределах  $\pm 30\%$  от значения  $k_0/\rho_0 = 0,8$ , где  $k$  в единицах  $\text{ккал} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{час}^{-1}$  и  $\rho_0$  в  $\text{т} \cdot \text{м}^{-3}$  (для гранита, мрамора, базальта  $k_0/\rho_0 \approx 1$ ; для кварцита, песчаника  $k_0/\rho_0 \approx 0,8$ ; для известняка  $k_0/\rho_0 = 0,6$  и т. д.). Таким образом, по крайней мере для определенной группы пород зависимость теплопроводности от объемного веса материала является практически универсальной функцией  $k = k(\rho)$ . В силу сказанного величина  $\gamma = (k\rho c)^{-1/2}$ , где  $c$  — теплоемкость, является универсальной функцией плотности для всех материалов данной группы (теплоемкость, как известно, с точностью  $\pm 10\%$  одинакова для всех силикатов и равна  $0,2 \text{ кал} \cdot \text{г}^{-1}$ ). В результате имеем:

$$\gamma(\rho) = \frac{1}{\sqrt{k(\rho)\rho c}}. \quad (2)$$

Отсюда ясно, что если для какого-либо образца пористой породы известна величина  $\gamma$  и группа пород, к которой он принадлежит, то нетрудно, согласно (2), определить его плотность.

Аналогичная задача может быть поставлена для лунных пород. Как известно, способы измерения тепловых параметров лунной поверхности дают непосредственно величину  $\gamma$ , и, следовательно, зная ориентировочно группу пород, представленных на Луне, можно найти их плотность  $\rho$ .

Для практического осуществления расчета  $\rho$  по величине  $\gamma$  необходимо знание функции  $k(\rho)$  для различных материалов в достаточно высоком вакууме. Хотя эта зависимость для различных материалов еще экспериментально не изучена, тем не менее уже из имеющихся данных можно сделать некоторые необходимые для дальнейшего расчета заключения о характере этой функции.

Теоретические расчеты и экспериментальные данные показывают, что для малой пористости (до 20–30%) функция  $k(\rho)$  практически линейна. Теплопроводность пенистого материала в этом случае достаточно точно описывается формулой Максвелла [5], справедливой при обычной температуре, когда теплопроводностью через излучение можно пренебречь:

$$k_1 = \frac{1-p}{1+p/2} \approx \frac{k_0}{\rho_0} \rho \quad (0 \leq p \leq 0,3; \quad 1 \geq \rho/\rho_0 \geq 0,7). \quad (3)$$

При большой пористости, когда  $p > 0,4 \div 0,5$ , эта формула несправедлива [5,6].

Экспериментальное исследование теплопроводности пористых тел с заполнением пор материалами различной теплопроводности, проведенное в [6], показывает, что функция  $k(\rho)$  не является линейной. Для заполнения пор воздухом характер функции представлен на рис. 1. Довольно резкий излом кривой  $k(\rho)$  наступает при воздушном заполнении для  $\rho/\rho_0 \geq 0,6 \div 0,7$ . Исследования показывают [6], что чем меньше теплопроводность заполняющего поры материала, тем резче и при большем  $\rho$  наступает излом функции теплопроводности. Таким образом

полная функция  $k(\rho)$  может быть аппроксимирована двумя прямыми, образующими ломаную линию с точкой излома при  $\rho/\rho_0 \sim 0,6 \div 0,7$ . Для больших плотностей ( $\rho/\rho_0 \geq 0,7$ ) справедлива формула (3), а для малых ( $\rho/\rho_0 \leq 0,6$ ) для обоих видов структур можно написать:

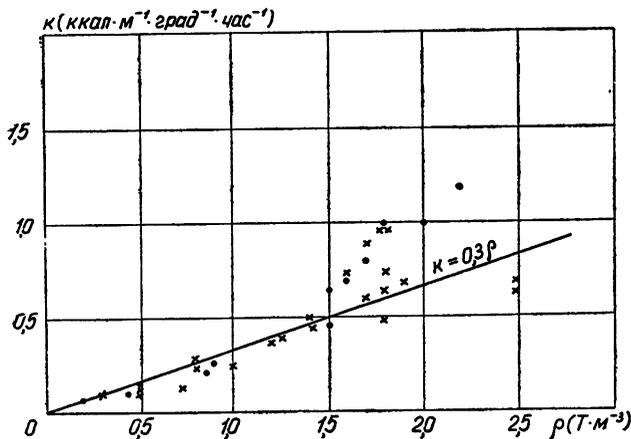


Рис. 1. Зависимость теплопроводности в воздухе (точки—естественные материалы: сухой грунт, мрамор, гранит, базальт, песчаники, кварциты, известняк, туф; крестики — искусственные материалы: кирпич, шлако-вый кирпич, кирпичи из кремнезема, шлак, цемент и др.). Зависимость  $k = 0,3\rho$  имеет место в интервале  $0,2 \leq \rho \leq 1,4$ .

$$k_1 = \alpha_1 \rho, \quad k_2 = \alpha_2 \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 1,5, \quad (4)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2 \ll k_0/\rho_0$ . Поскольку для земных пород в среднем  $\rho = 2,5$ , то выражения (4) справедливы в интервале  $0 \leq \rho \leq 1,5$ .

Для Луны известно, что плотность пород заключена в этом интервале: тогда, согласно (2), (4), при данном  $\gamma$  плотность будет равна

$$\rho_1 = 1/\gamma \sqrt{\alpha_1 c} \quad \text{или} \quad \rho_2 = 1/\gamma \sqrt{\alpha_2 c} \quad (0 \leq \rho \leq 1,5). \quad (5)$$

Так как структура лунной породы (пенистая, твердая или сыпучая) точно еще не определена, то, вообще говоря, о плотности мы будем иметь лишь альтернативные суждения. Однако, привлекая дополнительные данные в случае резкого различия  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , можно отбросить то или иное значение как менее вероятное.

Интересно отметить, что в указанном интервале плотностей величина температуропроводности, определяющая глубину проникновения тепловой волны в лунную поверхность, не зависит от объемной плотности  $\rho$ . Глубина проникновения

$$l_T = \sqrt{2k/\rho c \Omega} = \sqrt{2\alpha_i/c \Omega} \quad (i = 1, 2).$$

Величина  $\alpha_i$  пород в вакууме неизвестна. Однако существуют обширные данные для теплопроводности пористых материалов в воздухе [7], которые могут быть использованы для приближенного определения  $\alpha_i$  для вакуума и расчета плотности лунного материала. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

## 2. ПЛОТНОСТЬ ЛУННОЙ ПОРОДЫ

На рис. 2 представлена зависимость коэффициента теплопроводности от объемного веса  $\rho$  различных сыпучих неорганических материалов в воздухе (пемза, плотный известняк, красный кирпич, каменно-

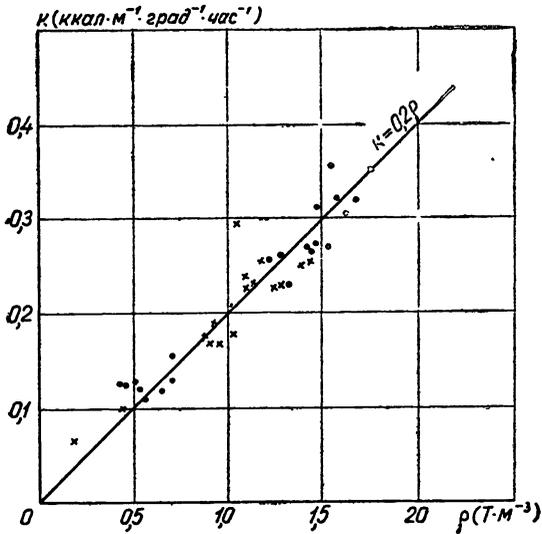


Рис. 2. Зависимость теплопроводности в воздухе от объемного веса сыпучих материалов и размера зерен угловато-щербинистой формы с нормальным уплотнением (точки—естественные материалы: пемза, плотный известняк; крестики—искусственные материалы: красный кирпич, каменноугольный шлак). Зависимость  $k = 0,2\rho$  справедлива в интервале  $0,4 \leq \rho \leq 1,5$ .

угольный шлак) при различных градациях размеров зерен:  $0 \div 0,15$  мм;  $0 \div 1,2$  мм;  $0 \div 5$  мм;  $0 \div 20$  мм;  $0,6 \div 20$  мм;  $1,2 \div 20$  мм;  $2,5 \div 20$  мм (см. таблицу 434 в [7]). Как видно из графика, несмотря на различие в природе образующих веществ, их естественное или искусственное происхождение и крупность зерен, значение теплопроводности определяется только объемным весом  $\rho$  или пористостью  $p$ . Зависимость  $k(\rho)$  хорошо аппроксимируется в интервале  $0,4 \leq \rho \leq 1,5$  линейной функцией  $k = 0,2\rho$  ккал·м<sup>-1</sup>·час<sup>-1</sup>·град<sup>-1</sup>.

На рис. 3 представлена зависимость теплопроводности пенообразных материалов в воздухе, таких как пенобетон, пеногипс, пеноангидрид, пенодиатомовый кирпич (с различным количеством ячеек на 1 см<sup>2</sup> от 20 до 1500 и средним диаметром ячеек от 0,2 мм до 2 мм (см. таблицу 445 в [7])). В этом случае теплопроводность также определяется лишь объемным весом и в интервале  $0,3 \leq \rho \leq 1$  довольно хорошо аппроксимируется прямой  $k_1 = 0,21\rho$ .

Отсюда видно, что в воздухе высоко-пористые (как пенные сплошные материалы, так и сыпучие) материалы при одном и том же объемном весе имеют практически одинаковую теплопроводность. На рис. 1 для сравнения представлена зависимость теплопроводности для сплошных естественных (точки) и искусственных (крестики) материалов ([7], таблица 447). Из естественных включены сухой грунт (гравий, суглинок, песок), мрамор, гранит, базальт, песчаники, кварциты, известняк, туф арктический; из искусственных—кирпич, шлаковый кирпич, кирпичи из кремнезема, шлак, цемент и др. Как видно из кривой, при малых

объемных весах в интервале  $0,3 \leq \rho \leq 1,4$  зависимость теплопроводности аппроксимируется прямой  $k = 0,3\rho$ . Для объемных весов  $\rho > 1,5$  видно существенное отклонение от прямой: кривая имеет гиперболический характер [5,6].

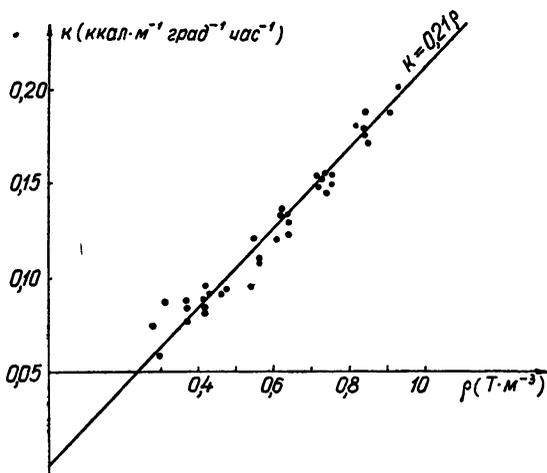


Рис. 3. Зависимость теплопроводности в воздухе от объемного веса пенообразных неорганических материалов (каждый с различным числом ячеек от  $20 \text{ см}^{-2}$  до  $1500 \text{ см}^{-2}$ ). Зависимость  $k = 0,21\rho$  — в пределах  $0,3 \leq \rho \leq 1$ .

Таким образом, для силикатных материалов в воздухе можно принять в качестве универсальной функции

$$k_{1,2} = 0,22\rho \text{ ккал} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{час}^{-1} \quad (0,4 \leq \rho \leq 1,5) \quad (6)$$

(здесь  $\rho$  — в ед.  $\text{т} \cdot \text{м}^{-3}$ ).

Из кривых видно, что отклонение от линейности при малых  $\rho$  связано с тем, что при этом существенную роль начинает играть теплопроводность воздуха, равная  $k = 0,02 \text{ ккал} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{час}^{-1}$ , к которой стремится теплопроводность дисперсной системы при  $\rho \rightarrow 0$ .

Из приведенных данных для теплопроводности дисперсных материалов в воздухе можно сделать заключения для вакуума. В самом деле, линейный ход кривой, очевидно, не нарушится, а при малых  $\rho$  еще улучшится (при  $\rho \rightarrow 0$  теплопроводность будет определяться малой излучательной теплопроводностью). В вакууме все значения теплопроводности, по крайней мере для пористости более  $0,4 \div 0,5$ , будут резко уменьшены. Имея отдельные значения теплопроводности в вакууме для материалов с  $\rho \approx 0,7 \div 1,5$  [6], можно определить коэффициент  $\alpha$  в сохраняющейся зависимости  $k = \alpha\rho$ .

В настоящее время, согласно работе [6], в первом приближении можно считать, что для пенистых материалов величина  $\alpha$  в (6) в вакууме уменьшается при пористости более 30% в среднем в 3 раза, т. е. функция теплопроводности в физической системе единиц будет иметь вид:

$$k_1 = 2 \cdot 10^{-4} \rho \quad (0,2 \leq \rho \leq 1,5), \quad (7)$$

где  $k$  —  $\text{кал} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$  и  $\rho$  —  $\text{гр} \cdot \text{см}^{-3}$ .

Для сыпучих материалов, согласно данным [6,8], уменьшение теплопроводности достигает  $10 \div 20$  раз и зависит от размеров частиц. Для не слишком мелких зерен можно принять уменьшение в 12 раз; следовательно

$$k_2 = 5 \cdot 10^{-5} \rho \quad (0,2 \leq \rho \leq 1,5). \quad (8)$$

Подставляя (7) в (5), получим для плотности пенистой структуры:

$$\rho = 1/\gamma \sqrt{0,4 \cdot 10^{-4}} = 160/\gamma; \quad (9)$$

для сыпучей структуры:

$$\rho_2 = 1/\gamma \sqrt{10^{-5}} = 320/\gamma. \quad (10)$$

Известно, что для лунных поверхностных пород  $\gamma = 350 \pm 75$  [4]. Отсюда и из (9), (10) получаем, что плотность лунных пород при пенистой структуре должна быть около

$$\rho_1 = 0,4 \pm 0,1 \text{ гр} \cdot \text{см}^{-3},$$

при сыпучей —

$$\rho_2 = 0,9 \pm 0,2 \text{ гр} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Первое значение плотности лежит ближе к значению, определяемому из электрических параметров. Отсюда нам кажется более вероятной пенообразная структура поверхностных пород Луны. Полученное высокое значение теплопроводности  $4 \cdot 10^{-5} \leq k \leq 8 \cdot 10^{-5}$  (следующее из (7) и (8) соответственно при  $\rho = 0,4$  и  $0,9$ ) показывает, что вещество не находится в состоянии тонкой пыли.

Интересно теперь по найденному значению плотности оценить значение диэлектрической постоянной  $\epsilon$  материала. Полагая, что для плотного состояния вещества диэлектрическая постоянная на СВЧ, как в большинстве пород, равна в среднем  $\epsilon_0 = 4,5$ , и пользуясь формулой

$$\epsilon = \epsilon_0 \left[ 1 - 3p / \left( \frac{2\epsilon_0 + 1}{\epsilon_0 - 1} + p \right) \right]$$

(см., например, [2]) при  $\rho_0 = 2,5$ , получим:

$$\rho_1 = 0,5, \quad \epsilon_1 \approx 1,5;$$

$$\rho_2 = 0,9, \quad \epsilon_2 \approx 2,2.$$

Значение  $\epsilon_1 = 1,5$  близко к полученной из радиоизмерений величине [3].

Проведенное определение  $\rho$  в силу неточного знания некоторых параметров скорее нужно рассматривать как иллюстрацию метода и получение материала для обоснованной постановки задач дальнейшего исследования тепловых параметров материалов в вакууме. По нашему мнению, открывается существенная возможность определения структуры вещества верхнего покрова по его тепловым свойствам. Для этого необходимо

1) более точно определить тепловой параметр  $\gamma$  и плотность вещества верхнего покрова Луны;

2) исследовать тепловые параметры земных горных пород в вакууме и выяснить характер зависимости теплопроводности от степени пористости и типа пород, а также при данной пористости — от вида структуры породы (сыпучая с различными размерами зерен, твердая пористая с различными размерами пор и т. д.).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 623 (1962).
2. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 38, 1001 (1961).
3. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж. (в печати).

4. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж. (в печати).
5. А. Ф. Чудновский, Теплообмен в дисперсных средах, Гостехиздат, М., 1954.
6. W. Woodside, J. H. Messmer, J. Appl. Phys., **32**, 1688 (1961).
7. В. С. Чиркин, Теплофизические свойства материалов, Физматгиз, М., 1959.
8. Г. К. Уайт, Экспериментальная техника в физике низких температур, Физматгиз, М., 1961.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
27 февраля 1962 г.

## A NEW POSSIBILITY OF DETERMINATION OF SURFACE LUNAR ROCKS DENSITY

*V. S. Troitski*

A new method is suggested for determining the rock density of the upper lunar surface using the measured values of thermal cover parameters. It is based on using the dependence of thermoconductivity on porosity degree or material volume weight. It is shown that for earth rocks the value  $\gamma = (k\rho c)^{-1/2}$  is practically a universal function of material density  $\rho$  over the interval of the densities  $0,4 < \rho < 1,5$ . If the mineralogical structure of lunar surface does not differ from that of the earth and for surface lunar rocks  $\gamma$  is determined directly from the experiment, then the indicated function can be used for determination of  $\rho$  density of rocks at the moon. The magnitude  $\gamma = 350 \pm 75$  being measured for lunar surface varies in the limits  $0,4 < \rho < 0,9 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$  for surface lunar rocks density depending on supposed rock structure. The lower density limit corresponds to a material in a foam state and better agrees with the density obtained earlier from the electric parameters of the upper lunar surface.

## О ЧАСТОТЕ ПОЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

*Н. А. Митяков*

Определяется частота  $\Omega$  поля в точке наблюдения для осциллятора, движущегося в анизотропной среде. Показано, что в общем случае  $\Omega$  не совпадает с частотой волны  $\omega$ , которая следует из формулы для эффекта Доплера: равенство  $\Omega = \omega$  справедливо только в случае изотропной среды. В качестве примера рассмотрено движение осциллятора в магнитоактивной плазме.

В ряде задач необходимо знать частоту поля движущегося осциллятора для неподвижного наблюдателя. Частота колебаний поля в точке наблюдения будет изменяться во времени. Однако в квазистационарном приближении, когда изменения частоты за период колебаний малы, можно ввести понятие мгновенной частоты, которая определяется скоростью изменения фазы в точке наблюдения в данный момент времени. Именно с такой частотой будет колебаться, например, ток в приемной антенне, которой пользуется наблюдатель. Ниже будет показано, что частота изменений поля в точке наблюдения совпадает в изотропной среде с частотой волны, которая следует из формулы для эффекта Доплера. В анизотропной среде появляется поправка, связанная с тем, что показатель преломления зависит от направления прихода волны.

1. Рассмотрим сначала случай, когда источник находится в начале неподвижной системы координат  $x, y$ , а наблюдатель — в точке  $x' = 0, y' = y_0$  системы координат, которая движется со скоростью  $v$  в положительном направлении оси  $x$ . Показатель преломления в неподвижной системе координат обозначим через  $n(\omega, \Theta)$ , учитывая, что в анизотропной среде существуют два показателя преломления соответственно для обыкновенной и необыкновенной волн. Фаза волны в точке наблюдения в неподвижной системе координат имеет вид:

$$\psi = \omega t - k_x x - k_y y_0, \quad (1)$$

где  $\omega$  — частота осциллятора,  $k_x = (\omega/c)n(\omega, \Theta) \cos \Theta$ ,  $k_y = (\omega/c)n(\omega, \Theta) \sin \Theta$  — проекции волнового вектора на оси  $x$  и  $y$ ,  $\Theta$  — угол между радиусом-вектором наблюдателя и осью  $x$  или, что то же самое, угол между волновым вектором и вектором скорости наблюдателя.

Полная производная фазы по времени характеризует частоту изменения поля волны в точке наблюдения

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\omega}{c} \left[ \frac{dx}{dt} (n \cos \Theta) + \frac{d\Theta}{dt} (n y_0 \cos \Theta - n x \sin \Theta + x \frac{\partial n}{\partial \Theta} \cos \Theta + y_0 \frac{\partial n}{\partial \Theta} \sin \Theta) \right].$$

Замечая, что  $y_0/x = \tan \Theta$ ;  $dx/dt = V$ ;  $d\Theta/dt = -V \sin^2 \Theta / y_0$ , получаем:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega \left( 1 - \frac{nV}{c} \cos \Theta + \frac{\partial n}{\partial \Theta} \frac{V}{c} \sin \Theta \right). \quad (2)$$

В системе координат, связанной с наблюдателем, фаза должна быть той же самой и поэтому

$$\frac{d\psi'}{dt'} = \frac{d\psi}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{d\psi}{dt} \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Обозначим через  $\beta$  отношение скорости наблюдателя к скорости света ( $\beta = V/c$ ) и через  $\hat{n}$  производную показателя преломления по углу ( $\hat{n} = \partial n / \partial \Theta$ ). Тогда окончательно получим:

$$\Omega' = \frac{d\psi'}{dt'} = \frac{\omega (1 - n\beta \cos \Theta + \hat{n}\beta \sin \Theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (3)$$

Выражение (3) отличается от обычной формулы эффекта Доплера

$$\omega' = \frac{\omega (1 - n\beta \cos \Theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4)$$

наличием поправки  $\hat{n}\beta \sin \Theta$ . Эта поправка исчезает в изотропной среде. Последнее означает, что для изотропной среды частота поля в точке наблюдения соответствует частоте волны, излученной под углом  $\Theta$ .

Если наблюдатель неподвижен, а движется источник, то по аналогии с предыдущим случаем

$$\Omega = \frac{\omega' (1 + \beta n' \cos \Theta' - \beta \hat{n}' \sin \Theta')}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (5)$$

где  $\omega'$  — собственная частота осциллятора. Это выражение отличается от (3) тем, что  $n'$ ,  $\hat{n}'$  и  $\Theta'$  относятся к движущейся системе координат, жестко связанной с осциллятором, и  $\beta$  заменено на  $-\beta$ .

Если источник движется вместе со средой, то с точностью до знака перед  $\beta$  выражение (5) аналогично (3). В том случае, когда среда неподвижна по отношению к наблюдателю и источник движется в среде, то необходимо перейти в (5) к углу  $\Theta$  и показателю преломления  $n$ , определенным для неподвижной среды. Для этого воспользуемся формулой Лауэ, которая может быть легко получена из теоремы сложения скоростей [1]:

$$n'(\omega', \Theta') = \frac{n(\omega, \Theta) - \beta \cos \Theta}{(1 + \beta^2 n^2(\omega, \Theta) + 2\beta n(\omega, \Theta) \cos \Theta - \beta^2 \sin^2 \Theta)^{1/2}}, \quad (6)$$

и формулой преобразования углов:

$$\operatorname{tg} \Theta' = \frac{(1 - \beta^2)^{1/2} \sin \Theta}{\cos \Theta - \beta n(\omega, \Theta)}. \quad (7)$$

Определив из этих формул  $\sin \Theta'$ ,  $\cos \Theta'$  и  $\hat{n}' = \partial n' / \partial \Theta' = (\partial n' / \partial \Theta) (\partial \Theta / \partial \Theta')$ , получим:

$$\Omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta n(\omega, \Theta) \cos \Theta + \beta \hat{n}(\omega, \Theta) \sin \Theta}, \quad (8)$$

где  $\hat{n} = \partial n(\omega, \theta) / \partial \theta$ , а частота  $\omega$ , которую следует подставлять в показатель преломления, определяется из формулы для эффекта Доплера:

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta n(\omega, \theta) \cos \theta} \quad (9)$$

Легко видеть, что так же, как и в предыдущем случае,  $\Omega = \omega$  только для изотропной среды, когда  $\hat{n} = 0$ . В анизотропной среде  $\Omega = \omega$  лишь в частном случае движения по лучу зрения ( $\sin \theta = 0$ ).

Следует отметить, что выражение (8) для частоты изменения поля в точке наблюдения справедливо только в квазистационарном приближении, т. е. когда выполняется неравенство

$$d\Omega/dt \ll \Omega^2. \quad (10)$$

В изотропной среде это условие заведомо нарушается вблизи черенковского конуса. Действительно, условием черенковского конуса является соотношение

$$1 - \beta n(\omega, \theta) \cos \theta = 0, \quad (11)$$

откуда можно определить угол  $\theta$ , под которым направлено излучение на частоте  $\omega$ . Именно в этом случае  $d\Omega/dt \rightarrow \infty$ . Физически это означает, что в момент  $t_0$ , когда справедливо (11), в точку наблюдения приходят все волны, частота и направление которых удовлетворяют равенству (11).

Любопытно, что в анизотропной среде, как это следует из (8), даже при  $\theta = \pi/2$  имеется эффект изменения частоты поля в точке наблюдения первого порядка относительно  $V/c$ . Наоборот, эффект второго порядка будет наблюдаться не при  $\theta = \pi/2$ , а под некоторым другим углом  $\theta_0$ , который можно определить из уравнения

$$n(\omega, \theta_0) \cos \theta_0 = \hat{n}(\omega, \theta_0) \sin \theta_0. \quad (12)$$

2. В качестве примера практического применения формулы (8) рассмотрим движение осциллятора в анизотропной плазме. Ограничимся случаем, когда  $\beta n \cos \theta \ll 1$ . При этом

$$\Omega = \omega' (1 + \beta n \cos \theta - \beta \hat{n} \sin \theta). \quad (13)$$

Будем считать, что частота  $\omega'$  достаточно высока, т. е.  $v = \omega_0^2 / \omega'^2 \ll 1$  и  $u = \omega_H^2 / \omega'^2 \ll 1$ , где  $\omega_0 = 4\pi e^2 N / m$ ,  $\omega_H = |e| H / mc$  — плазменная частота и гирочастота,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $H$  — напряженность магнитного поля. Тогда в квазипродольном приближении показатель преломления будет иметь вид:

$$n_{1,2} = 1 - \frac{v}{2} (1 \mp \sqrt{u} \cos \alpha), \quad (14)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением волновой нормали и магнитным полем  $H$ , а индексы 1, 2 и знаки  $-$  и  $+$  относятся соответственно к необыкновенной и обыкновенной волнам. При этом, как следует из (9), (14), разность  $\omega - \omega'$  мала, и, следовательно, мы можем в показатель преломления (14) подставлять частоту  $\omega = \omega'$ .

Если магнитное поле  $H$  составляет угол  $\gamma_0$  с осью  $x$ , то  $\alpha = \theta - \gamma_0$  и

$$n_{1,2} = 1 - \frac{v}{2} (1 \mp \sqrt{u} \cos(\Theta - \gamma_0)) . \quad (14a)$$

Подставляя это значение  $n_{1,2}$  в (13), получаем выражение для разности частот  $\omega'$  и  $\Omega_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{1,2} = \omega' - \Omega_{1,2} = \omega' \beta \cos \Theta - \frac{\omega' v}{2} \beta (1 \pm \sqrt{u} \cos(\Theta - \gamma_0)) \times \\ \times \cos \Theta \mp \frac{\omega' v \sqrt{u}}{2} \beta \sin \Theta \sin(\Theta - \gamma_0) . \end{aligned} \quad (15)$$

Первый член этого равенства  $\omega' \beta \cos \Theta$  является основным и соответствует поправке к частоте в отсутствие среды; второй член характеризует влияние среды и вместе с первым соответствует обычному доплеровскому смещению частоты. Последний член характеризует анизотропию среды и соответствует поправке  $\beta \hat{n} \cos \Theta$ . В нашем случае эта поправка мала и при измерении  $\Delta\omega$  можно пользоваться обычной формулой эффекта Доплера.

Легко видеть, однако, что для разности частот обыкновенной и необыкновенной волн (эта разность характеризует частоту вращения плоскости поляризации) указанная поправка имеет существенное значение. Действительно,

$$\delta\omega = \Omega_1 - \Omega_2 = \omega' v \sqrt{u} \beta \cos \gamma_0 , \quad (16)$$

т. е.  $\delta\omega$  не зависит от  $\Theta$ , в то время как разность доплеровских смещений частот обыкновенной и необыкновенной волн существенно зависит от  $\Theta$ :

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega' v \sqrt{u} \beta \cos(\Theta - \gamma_0) \cos \Theta . \quad (17)$$

Указанные выводы относятся лишь к однородной среде; в случае неоднородной среды задачу необходимо решать заново. В этой связи интересно отметить следующее обстоятельство. В изотропном случае, как было показано выше, частота изменения поля в точке наблюдения совпадает с частотой волны, которая следует из формулы Доплера (9). Поэтому в приближении геометрической оптики (по крайней мере в случае  $\beta \hat{n} \cos \Theta \ll 1$ ) можно утверждать, что частота изменения поля в точке наблюдения будет равна частоте волны, определяемой из (9) для такого угла  $\Theta$ , который нужен, чтобы волна с учетом рефракции достигла точки наблюдения.

Именно поэтому окончательное выражение для сдвига частоты передатчика искусственного спутника Земли, выведенное в работе [2] на основе формулы (9) для эффекта Доплера, совпало с соответствующим выражением, полученным ранее [3] более последовательным методом, основанном на нахождении фазы волны в точке наблюдения. Естественно, что при учете анизотропии указанное выше обстоятельство не имеет места, так как даже в однородной среде имеется поправка  $\beta \hat{n} \cos \Theta$ . Более последовательным методом определения частоты изменения поля в месте приема в случае анизотропной среды является метод, основанный на нахождении фазы волны. Таким способом, например, решена задача о частоте вращения плоскости поляризации сигналов искусственных спутников Земли в работах [4-6]. Это решение, разумеется, не совпадает с результатами, найденными путем непосредственного применения формулы Доплера [7].

Автор благодарен Я. Л. Альперту и Г. Г. Гетманцеву за полезную дискуссию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Беккер, Электронная теория, ОНТИ, 1936.
2. Я. Л. Альперт, УФН, 71, 369 (1960).
3. Я. Л. Альперт, УФН, 64, 3 (1958).
4. F. B. Daniels, S. J. Bauer, J. Frankl. Inst., 267, 187 (1959).
5. J. M. Kelso, J. Geophys. Res., 66, 1107 (1961).
6. Э. Е. Митякова, Н. А. Митяков, Радиофизика, 3, 949 (1960).
7. F. H. Hibberd, J. Geophys. Res., 64, 945 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 марта 1962 г.

## ON THE FIELD FREQUENCY OF OSCILLATOR MOVING IN ANISOTROPIC MEDIUM

*N. A. Mitiakov*

The field frequency  $\Omega$  of an oscillator moving in anisotropic medium is calculated in an observation point. It is shown that in general case  $\Omega$  does not coincide with the wave frequency  $\omega$  connected with usual Doppler effect; the equation  $\Omega = \omega$  is correct only for isotropic medium. The motion of an oscillator in a magnetoactive plasma is considered as an example.

---

## ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В. Я. Эйдман

Получено выражение для излучаемой энергии при движении заряда в слоисто-неоднородной среде под углом к направлению изменения свойств среды.

Излучение заряда, движущегося в неоднородной среде, рассматривалось в ряде работ (см., например, [1]). При этом обычно предполагалось, что заряд движется в слоисто-неоднородной среде вдоль направления, в котором изменяются свойства среды. Между тем, например, в космических условиях излучающие частицы движутся, как правило, под некоторым углом к направлению градиента диэлектрической проницаемости. Ввиду этого представляет интерес получить формулы для интенсивности излучения при движении частицы под произвольным углом к направлению изменения свойств среды.

В настоящей статье в приближении геометрической оптики решается задача об излучении частицы, движущейся в произвольной слоисто-неоднородной среде под некоторым углом к направлению изменения свойств среды. Более подробно рассмотрен случай, когда диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  является периодической функцией координаты  $z$ .

Как известно, из уравнений Максвелла вытекают следующие уравнения для напряженности электрического поля:

$$\Delta E - \text{grad div } E - \epsilon(z) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}; \quad (1)$$

$$\text{grad div } E = 4\pi \text{grad} \left( \frac{\rho}{\epsilon} \right) - \text{grad } E_z \frac{d}{dz} \ln \epsilon.$$

Здесь диэлектрическая проницаемость считается зависящей лишь от одной переменной  $z$ ;  $j$  и  $\rho$  — плотность тока и заряда.

Предположим, что заряд движется в координатной плоскости  $yz$ , т. е.

$$\rho = e\delta(r - r_e); \quad j = v\rho,$$

где

$$r_e = vt \{0, \sin \alpha, \cos \alpha\};$$

$$V = v \{0, \sin \alpha, \cos \alpha\},$$

$\alpha$  — угол между  $v$  и координатной осью  $z$ . Разлагая все величины в интегралы Фурье вида

$$E = \int E_{\omega k}(z) e^{i(kx - \omega t)} d\omega dk + \text{к. с.}; \quad (3)$$

$$\rho = \{x, y, 0\}; \quad x = \{k_x, k_y, 0\},$$

будем иметь для фурье-компонент полей следующие уравнения:

$$\left(-\dot{x}^2 + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2}\right) E_{y\kappa\omega} + \frac{d^2 E_{y\kappa\omega}}{dz^2} = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{y\kappa\omega} + \frac{4\pi i k_y}{\varepsilon} \rho_{\kappa\omega} - ik_y E_{z\kappa\omega} \frac{d}{dz} \ln \varepsilon; \quad (4)$$

$$\left(-\dot{x}^2 + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2}\right) E_{z\kappa\omega} + \frac{d^2 E_{z\kappa\omega}}{dz^2} + \frac{d}{dz} \left( E_{z\kappa\omega} \frac{d}{dz} \ln \varepsilon \right) = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{z\kappa\omega} + 4\pi \frac{d}{dz} \left( \frac{\rho_{\kappa\omega}}{\varepsilon} \right),$$

где, например,  $\rho_{\kappa\omega} = (e/(2\pi)^3 v \cos \alpha) \exp \{i(z/v \cos \alpha) (\omega - vk_y \sin \alpha)\} = (e/(2\pi)^3 v \cos \alpha) e^{i\delta z/v \cos \alpha}$  (см. (2)).

В приближении геометрической оптики, т. е. в случае, когда свойства среды мало меняются на расстоянии порядка длины волны ( $\lambda \ll l$ , где  $l$ —расстояние, на котором существенно изменяется  $\varepsilon$ ), легко найти решение уравнений (4) [1]:

$$E_{\alpha\kappa\omega}(z) = \frac{B_\alpha}{2} \left\{ e^{i \int_0^z \gamma dz} \int_{-\infty}^z I_\alpha(z') e^{-i \int_0^{z'} \gamma(z'') dz''} dz' - e^{-i \int_0^z \gamma dz} \times \right. \\ \left. \times \int_0^z I_\alpha(z') e^{i \int_0^{z'} \gamma(z'') dz''} dz' \right\}, \quad (5)$$

где

$$\alpha = y, z; \quad \gamma = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \dot{x}^2}; \quad B_y = (\varepsilon - \dot{x}^2)^{-1/4}; \quad B_z = \varepsilon^{-1/2} (\varepsilon - \dot{x}^2)^{-1/4};$$

$$\dot{x} = \frac{\omega}{c} x; \quad I_y = (e/2\pi^2 B_y \gamma) e^{i\delta z/v \cos \alpha} (-v\omega \sin \alpha/c^2 + k_y/\varepsilon)/v \cos \alpha;$$

$$I_z = (e/2\pi^2 B_z \gamma v \cos \alpha) e^{i\delta z/v \cos \alpha} (-\omega v \cos \alpha/c^2 + \delta/\varepsilon v \cos \alpha).$$

Легко видеть, что выражение (5) отвечает расходящейся от траектории частицы волне.

Для того, чтобы вычислить величину излучаемой энергии, удобно определить работу, совершаемую полем над движущейся частицей. Эта величина будет равна

$$A = e \int_0^{\tau} \mathbf{v} \mathbf{E}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_e) dt = ev \sin \alpha \int_0^{\tau} \int E_{y\kappa\omega}(z = z_e) e^{-i\delta t} d\omega dx dt + \\ + ev \cos \alpha \int_0^{\tau} \int E_{z\kappa\omega}(z = z_e) e^{-i\delta t} d\omega dx dt + \text{к. с. .} \quad (6)$$

В случае, когда диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  не зависит от координат, формула (6) переходит в обычное выражение для черенковских потерь при движении частицы в однородной среде.

В качестве примера рассмотрим подробнее случай движения частицы в периодической среде. Предположим, что изменение среды происходит следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta \cos(\xi z); \quad \Delta \ll \varepsilon_0, \quad (7)$$

где  $\epsilon_0, \Delta$  — не зависящие от координат параметры. Тогда  $\gamma \approx \gamma_0 + \tilde{\Delta} \cos \xi z$ ;  $\tilde{\Delta} = \Delta \omega^2 / 2c^2 \gamma_0$ ;  $\gamma_0 = \sqrt{(\omega^2/c^2) \epsilon_0 - x^2}$ ;  $\gamma_0^2 \gg \Delta \omega^2 / 2c^2$ . Подставляя (7) в (5) и производя элементарные преобразования с помощью формулы 
$$e^{iy \sin \xi z} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(y) e^{i \xi z s},$$
 получим:

$$E_{ax\omega} = \frac{B_x I_a}{2} \sum_{s,s'=-\infty}^{\infty} J_s(y) J_{s'}(y) \times \left\{ \frac{e^{iz\xi(s'-s)}}{\delta/v \cos \alpha - \gamma_0 - \xi s} - \frac{e^{iz\xi(s-s')}}{\delta/v \cos \alpha + \gamma_0 + \xi s} \right\}, \quad (8)$$

где  $y = \tilde{\Delta} / \xi$ . При получении (8), как обычно, используется то обстоятельство, что диэлектрическая проницаемость, вообще говоря, имеет исчезающе малую мнимую часть, отвечающую затуханию электромагнитных волн в среде ( $\text{Im } \epsilon \rightarrow 0, \omega \text{Im } \epsilon > 0$ ). Поэтому значение первообразных в формуле (5) на нижних пределах равно нулю. Используя (6), (8), легко получить для величины излучаемой энергии  $W = -A$  за промежутков времени  $\tau$  выражение

$$W = \frac{e^2 \tau v}{2\pi c^2 \cos \alpha} \sum_{i=1,2}^{\infty} \int \frac{J_s^2(y_i) x_i d\omega d\varphi (1 - 1/\epsilon_0 \beta^2) \omega}{|x_i (\sin^2 \varphi \text{tg}^2 \alpha + 1) - \sin \varphi \text{tg} \alpha (\omega/v \cos \alpha + \xi s)|}. \quad (9)$$

Здесь  $\beta = v/c, k_x = x \cos \varphi, k_y = x \sin \varphi$ ; интегрирование по  $dx$  осуществляется с учетом полюсов подынтегрального выражения в (8), т. е. значение  $x_i$ , входящее в (9), определяется как действительный и положительный корень уравнения  $\gamma^2 = (\delta/v \cos \theta + \xi s)^2$ , что дает

$$x_i = \frac{(\omega/v \cos \alpha + \xi s) \Phi \pm \sqrt{(\omega^2/c^2) \epsilon_0 (1 + \Phi^2) - (\omega/v \cos \alpha + \xi s)^2}}{1 + \Phi^2}, \quad (10)$$

$$\Phi = \sin \varphi \text{tg} \alpha.$$

В выражениях (9), (10) значение индекса  $i = 1$  отвечает верхнему знаку перед корнем „+“, а  $i = 2$  — нижнему знаку „-“.

Слагаемое  $s = 0$  в (9) соответствует излучению типа Вавилова—Черенкова. Оно отлично от нуля только при  $\epsilon_0 \beta^2 > 1$ , в то время как следующие члены с  $s > 0$ , вообще говоря, могут быть отличными от нуля и при досветовых скоростях излучающей частицы\*. В этом случае излучение равномерно движущейся частицы целиком обязательно изменению свойств среды. Черенковское излучение превалирует, например, в случае, когда  $\epsilon_0 \beta^2 > 1, u \ll 1$ . При движении частицы в среде с непериодически изменяющимися свойствами (см. (5), (6)) также возможны случаи, когда излучение в основном определяется наличием градиента диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Такая ситуация имеет место, например, при движении частицы с досветовой скоростью.

\* При движении частицы со сверхсветовой скоростью в рассматриваемой среде отношение энергии черенковского излучения  $W_{\text{чер}}$  к энергии излучения, обязанного изменению свойств среды  $W_{\sim}$ , приближенно характеризуется следующим образом:

$$W_{\text{чер}}/W_{\sim} \approx J_0^2(y)/J_1^2(y).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Тер-Микаэлян, Изв. АН Арм. ССР, сер физ, 14, 103 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
2 марта 1962 г.

ON THE RADIATION OF CHARGE MOVING IN THE  
NONUNIFORM MEDIUM

*V. Ya. Eidman*

The expression of radiation energy was obtained of a charge moving in a layer-nonuniform medium at an angle to the direction of a change of medium properties.

---

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Н. Луговой

Рассматривается распространение плоских электромагнитных волн в разреженной плазме, находящейся в однородном переменном магнитном поле  $H_1(t) = H_0[1 - \chi \cos(pt)]$ . Определены поглощающие свойства такой среды для различных типов электромагнитных волн в ней в зависимости от амплитуды переменной составляющей магнитного поля  $\chi$ .

В настоящей работе рассматриваются электромагнитные волны в плазме малой концентрации, находящейся во внешнем однородном переменном во времени магнитном поле  $H_1(t) = H_0[1 - \chi \cos(pt)]$ . В отличие от рассматривавшихся ранее сред с зависящими от времени свойствами [1-5] эта нестационарная среда является анизотропной и обладает временной дисперсией. Соответствующее материальное уравнение определяется уравнением для средней скорости электрона (см., например, [6]), которое в нерелятивистском приближении имеет следующий вид:

$$m \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} \right) = e\mathbf{E} + e \frac{[\mathbf{v}H_1(t)]}{c}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — средняя скорость электрона,  $\mathbf{E}$  — слабое электрическое поле волны,  $\tau$  — эффективное время свободного пробега. При этом плотность полного тока  $\mathbf{j} = \partial \mathbf{p} / \partial t + \mathbf{j}_{np}$  определяется равенством  $\mathbf{j} = N e \mathbf{v}$  ( $N$  — плотность свободных электронов). Ниже мы будем считать, что среда заполняет полупространство  $z \geq 0$ , причем из вакуума нормально к границе раздела  $z = 0$  падает плоская монохроматическая волна частоты  $\omega$  и произвольной поляризации. Нас будет интересовать установившееся электромагнитное поле в среде.

Очевидно электромагнитное поле при  $z > 0$  будет иметь вид плоской волны. Учитывая это и исключая из уравнений Максвелла ее магнитное поле, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 E_{\perp}}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 E_{\perp}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial J_{\perp}}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = -\mu J_z.$$

Здесь  $\mu = 4\pi e^2 N / m \omega^2$ ,  $\alpha = \omega / p$ ,  $\mathbf{J} = (mp/e)\mathbf{v}$ ; под  $z$ ,  $t$  имеются в виду безразмерные переменные ( $z \rightarrow (\omega/c)z$ ,  $t \rightarrow pt$ ). Соответственно уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\tau p} - \frac{e}{pmc} [\mathbf{J}H_1(t)] = \mathbf{E}. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) образуют замкнутую систему; из них мы будем исходить при решении поставленной задачи.

В этой работе рассматривается только случай малых значений коэффициента  $\mu$ . Зависимость электрического поля  $E$  от времени в общем случае определяется целым набором частот  $\pm \omega \pm k\mu$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). Однако ясно, что при достаточно малых значениях  $\mu$  поле  $E$  вблизи границы  $z=0$  будет почти монохроматическим (с частотой  $\omega$ ). Распространяясь вглубь среды, оно будет „медленно“ изменяться. При этом, вообще говоря, возможны два случая: либо это изменение будет сопровождаться появлением заметных составляющих с частотами  $\pm \omega \pm k\mu$  ( $k=1, 2, \dots$ ), либо оно сведется к изменению только амплитуды основной гармонической составляющей частоты  $\omega$ . В Дополнении показано, что имеет место последний случай и к решению задачи можно применить метод „медленно меняющихся амплитуд“, записывая электрическое поле в виде:

$$E = \text{Re} \{ A(\mu z) e^{i(z - \omega t)} \}, \quad (4)$$

где  $A = \{A_x, A_y, 0\}$ . Подставляя выражение (4) в уравнения (3) и (2), нетрудно убедиться, что амплитуда  $A(\mu z)$  определяется равенством

$$A(\mu z) = A_1 e^{-\lambda_1 \mu z} + A_2 e^{-\lambda_2 \mu z}, \quad (5)$$

где  $A_l = \{A_{lx}, A_{ly}, 0\}$  ( $l=1, 2$ ). При этом постоянные коэффициенты  $A_1, A_2, \lambda_1, \lambda_2$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx}(\omega) - 2\mu\lambda_l \right] A_{lx} + \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy}(\omega) A_{ly} &= 0; \\ \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{yx}(\omega) A_{lx} + \left[ \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{yy}(\omega) - 2\mu\lambda_l \right] A_{ly} &= 0 \\ (l = 1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнения (6) входят также компоненты тензора проводимости  $\overset{\wedge}{\sigma}(\omega)$ . Последний определяется следующим образом. Положим внешнее электрическое поле равным  $E = \text{Re} \{ a e^{-i\omega t} \}$ . Тогда в силу материального уравнения (1) установившийся отклик плотности полного тока  $j$  имеет вид

$$j(t) = \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-i(\omega + n\mu)t}, \quad (7)$$

где, в частности,

$$b_0 = \overset{\wedge}{\sigma}(\omega) a. \quad (8)$$

Это равенство и является определением тензора  $\overset{\wedge}{\sigma}(\omega)$ . Для стационарной плазмы это определение приводит к обычному тензору проводимости (по отношению к полному току).

Ясно, что всегда можно выбрать поляризацию падающей волны так, чтобы либо  $A_2=0$ , либо  $A_1=0$ . Будем, как обычно, в обоих этих случаях называть поле в среде „нормальной“ волной. Показатели  $\gamma_{1,2} = \mu\lambda_{1,2}$  этих волн находятся из условия равенства нулю определителя системы (6) и являются корнями уравнения

$$\left( \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} - 2\gamma \right) \left( \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{yy} - 2\gamma \right) - \left( \frac{4\pi}{\omega} \right)^2 \sigma_{xy} \sigma_{yx} = 0. \quad (9)$$

Соответствующие этим корням векторы  $A_{1,2}$  определяют поляризации нормальных волн.

Таким образом, при малых значениях коэффициента  $\mu$ , несмотря

на нестационарность среды, на „больших“ ее интервалах могут распространяться почти монохроматические электромагнитные волны (под „большими“ имеются в виду такие интервалы, на которых волна успевает существенно измениться). Эти волны в общем случае представляют суперпозицию двух нормальных волн, которые в силу (6) полностью определяются тензором  $\hat{\sigma}(\omega)$ . При этом плотность тока в среде  $\hat{j}(t)$ , вообще говоря, будет содержать целый ряд гармонических составляющих (7). Так как  $\mu = (\omega_0/\omega)^2$  ( $\omega_0$  — плазменная частота), то условие малости  $\mu$  означает условие малости плазменной частоты  $\omega_0$  по сравнению с частотой распространяющейся в среде электромагнитной волны\*.

Определим теперь компоненты тензора  $\hat{\sigma}(\omega)$  в исходной системе координат  $x, y, z$  для произвольно направленного внешнего магнитного поля  $H_0$ . Без ограничения общности можно считать, что вектор  $H_0$  лежит в плоскости  $x = 0$ . Введем декартову систему координат  $\xi, \eta, \zeta$  так, чтобы ось  $\xi$  совпадала с осью  $x$ , а направление оси  $\zeta$  с направлением вектора  $H_0$  (рис. 1). В системе координат  $\xi, \eta, \zeta$  матрица тензора  $\hat{\sigma}(\omega)$  определяется следующими формулами [8]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sigma_{\xi\xi}(\omega) &= \frac{Ne^2}{2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\Delta) \left\{ \frac{1/\tau}{(\omega - \omega_H - np)^2 + 1/\tau^2} + \frac{1/\tau}{(\omega + \omega_H + np)^2 + 1/\tau^2} \right\}; \\ \operatorname{Im} \sigma_{\xi\xi}(\omega) &= \frac{Ne^2}{2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\Delta) \left\{ \frac{\omega - \omega_H - np}{(\omega - \omega_H - np)^2 + 1/\tau^2} + \frac{\omega + \omega_H + np}{(\omega + \omega_H + np)^2 + 1/\tau^2} \right\}; \\ \operatorname{Re} \sigma_{\tau\xi}(\omega) &= \frac{Ne^2}{2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\Delta) \left\{ \frac{\omega + \omega_H + np}{(\omega + \omega_H + np)^2 + 1/\tau^2} - \frac{\omega - \omega_H - np}{(\omega - \omega_H - np)^2 + 1/\tau^2} \right\}; \quad (10) \\ \operatorname{Im} \sigma_{\tau\xi}(\omega) &= \frac{Ne^2}{2m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\Delta) \left\{ \frac{1/\tau}{(\omega - \omega_H - np)^2 + 1/\tau^2} - \frac{1/\tau}{(\omega + \omega_H + np)^2 + 1/\tau^2} \right\}; \\ \sigma_{\xi\eta} &= -\sigma_{\tau\xi}, \quad \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\xi\xi}, \quad \sigma_{\xi\zeta} \equiv \sigma_{\zeta\xi} \equiv \sigma_{\tau\zeta} \equiv \sigma_{\zeta\tau} \equiv 0; \\ \sigma_{\zeta\zeta}(\omega) &= \frac{e^2 N}{m} \frac{1/\tau + i\omega}{\omega^2 + 1/\tau^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_H = |e| H_0 / mc$ ,  $\Delta = \chi |e| H_0 / p m c$ ,  $J_n(\Delta)$  — функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка. Матрица  $\hat{\sigma}_{xyz}$  тензора  $\hat{\sigma}$  (в координатах  $x, y, z$ ) получается из его матрицы  $\hat{\sigma}_{\xi\eta\zeta}$  (в координатах  $\xi, \eta, \zeta$ ) с помощью преобразования подобия  $\hat{\sigma}_{xyz} = \hat{u}^{-1} \hat{\sigma}_{\xi\eta\zeta} \hat{u}$ , где  $\hat{u}$  — матрица перехода от системы координат  $x, y, z$  к системе  $\xi, \eta, \zeta$ . Обозначая через  $\beta$  угол между направлением оси  $z$  и направлением вектора  $H_0$ , получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{x\tau} &= \sigma_{\xi\xi}, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{\xi\eta} \cos \beta; \\ \sigma_{yx} &= \sigma_{\tau\xi} \cos \beta, \quad \sigma_{yy} = \sigma_{\tau\eta} \cos^2 \beta + \sigma_{\zeta\zeta} \sin^2 \beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Ниже ограничимся для простоты двумя случаями:  $\beta = 0$  (продольное распространение) и  $\beta = \pi/2$  (поперечное распространение).

\* В том случае, когда существенны соударения электронов с ионами, обычные кинетические представления, а также представления, основанные на уравнении (1), при условии  $(\omega_0/\omega)^2 \ll 1$  теряют, как известно, свой непосредственный смысл. Однако в работе [7] показано, что и в этом случае этими представлениями можно пользоваться, если ввести несколько иное понятие среднего времени свободного пробега,

Продольное распространение ( $\beta = 0$ ). Используя (10) и (11), а также уравнение (9) для показателей нормальных волн, находим:

$$\gamma_{1,2} = \frac{2\pi}{\omega} (\sigma_{\xi\xi} \mp i\sigma_{\eta\xi}). \quad (12)$$

Система (6) дает поляризацию каждой нормальной волны:

$$A_{1y} = iA_{1x}, \quad A_{2y} = -iA_{2x}. \quad (13)$$

Мы видим, что обе полученных волны поляризованы по кругу, но с разными направлениями вращения вектора электрического поля.

Рассмотрим теперь, как поглощаются эти волны средой. При этом будем предполагать выполненным условие

$$p\tau \gg 1. \quad (14)$$

Вещественные и мнимые части компонент  $\sigma_{\xi\xi}$ ,  $\sigma_{\xi\eta}$ ,  $\sigma_{\eta\xi}$ ,  $\sigma_{\eta\eta}$  тензора проводимости как функции частоты  $\omega$  при условии (14) имеют пики в окрестностях частот  $\pm\omega_H \pm kp$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ). Коэффициенты поглощения обеих волн (по отношению к размерной координате  $z$ ) равны  $\text{Re}(\omega\gamma_{1,2}/c) = (2\pi/c) (\text{Re} \sigma_{\xi\xi} \pm \text{Im} \sigma_{\eta\xi})$ . Если переменная составляющая внешнего маг-

нитного поля отсутствует ( $\Delta = 0$ ), это дает известные выражения для коэффициентов поглощения необыкновенной и обыкновенной волны. При этом волна первого типа имеет пик поглощения, когда ее частота лежит в окрестности гиромангнитной частоты  $\omega_H$ . При введении переменной составляющей внешнего магнитного поля величина пика коэффициента поглощения на этой частоте уменьшается и совсем исчезает, когда  $\Delta$  совпадает с первым корнем бесселевой функции  $J_0(\Delta)$ . Таким образом, введением переменной составляющей внешнего магнитного поля можно „просветлить“ большой объем плазмы (соответствующее предположение было высказано в [9]). При этом пики поглощения появляются в окрестностях частот  $\omega_H \pm p$ . Дальнейшее увеличение  $\Delta$  приводит к последовательному появлению пиков поглощения на частотах  $\omega_H \pm np$  ( $n=2, 3, \dots$ ), причем величина каждого фиксированного пика „периодически“ уменьшается до нуля и вновь увеличивается; двум соседним нулям соответствует интервал  $\Delta \sim \pi$ .

Волна второго типа при  $\Delta = 0$  не имеет пиков поглощения. При увеличении  $\Delta$  резкий максимум может появиться сначала на частоте  $p - \omega_H$  (если  $p > \omega_H$ ). Затем такие максимумы появляются последовательно на частотах  $np - \omega_H$  ( $n=2, 3, \dots$ ).

*Поперечное распространение.* Из (11) и (9) получаем:

$$\gamma_1 = \frac{2\pi}{\omega} \sigma_{\xi\xi}, \quad \gamma_2 = \frac{2\pi}{\omega} \sigma_{\xi\xi}. \quad (15)$$

Обе волны плоско поляризованы:

$$A_{1y} = 0, \quad A_{2y} = 0. \quad (16)$$

Вектор электрического поля волны второго типа всегда ориентирован вдоль внешнего магнитного поля. Ее коэффициент поглощения не за-

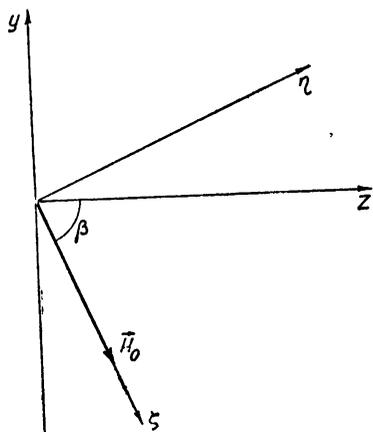


Рис. 1.

висит от  $\Delta$  и совпадает с соответствующим коэффициентом в изотропной плазме. Вектор электрического поля волны первого типа перпендикулярен внешнему магнитному полю. Эта волна имеет пик поглощения на гиромагнитной частоте  $\omega_H$ . С увеличением  $\Delta$  до первого корня бесселевой функции  $J_0(\Delta)$  этот пик исчезает. При этом резкие максимумы появляются на частотах  $\pm\omega_H \pm p$ . Дальнейшее увеличение  $\Delta$  приводит к последовательному появлению таких максимумов на частотах  $\pm\omega_H \pm np$  ( $n=2, 3, \dots$ ). Величина этих пиков зависит от  $\Delta$  так же, как и в случае продольного распространения.

В заключение выражаю благодарность Ф. В. Бункину за постановку задачи и руководство работой.

### ДОПОЛНЕНИЕ

В установившемся режиме материальное уравнение (3) дает:

$$J(t) = \int_0^{\infty} \hat{\Phi}(t, u) E(t-u) du. \quad (17)$$

Здесь  $\hat{\Phi}(t, u)$  — тензор, компоненты которого являются периодическими функциями безразмерного времени  $t$  с периодом  $T=2\pi$ . Мы не приводим явного выражения для этого тензора, так как проведенное ниже рассмотрение справедливо при материальном уравнении (17) в его общем виде. Исходными являются уравнения (2) и (17); при этом сначала мы не будем предполагать малости коэффициента  $\mu$ . Можно убедиться (используя, например, метод последовательных приближений по степеням  $\mu$ ), что общий вид плоской волны в среде ( $z > 0$ ) определяется выражениями:

$$E(z, t) = \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n(z) e^{-i(\alpha+n)t};$$

$$J(z, t) = \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n(z) e^{-i(\alpha+n)t}, \quad (18)$$

где  $M_n(z)$ ,  $K_n(z)$  — некоторые комплексные функции от  $z$ . Подставляя (18) в (17) и (2) и исключая  $K_n(z)$  и  $M_{nz}(z)$ , приходим к следующей системе дифференциальных уравнений для  $M_{nx}$  и  $M_{ny}$ :

$$\frac{d^2 M_{\perp}(z)}{dz^2} = Q M_{\perp}(z). \quad (19)$$

Здесь

$$M_{\perp}(z) = \begin{pmatrix} M_x(z) \\ M_y(z) \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

причем  $M_x(z)$  — бесконечномерный столбец с элементами  $M_{nx}(z)$  ( $-\infty < n < \infty$ );  $M_y(z)$  определяется аналогично;  $Q_{xx}$ ,  $Q_{xy}$ ,  $Q_{yx}$ ,  $Q_{yy}$  — не зависящие от  $z$  бесконечномерные матрицы, определяющиеся тензором  $\hat{\Phi}(t, u)$ .

Общее решение системы уравнений (19) имеет вид:

$$M(z) = S e^{V\sqrt{\Lambda}z} C_{\perp}^{(1)} + S e^{-V\sqrt{\Lambda}z} C_{\perp}^{(2)}. \quad (21)$$

Здесь  $V\sqrt{\Lambda}$  — диагональная матрица, получающаяся из диагональной матрицы  $\Lambda = S^{-1}QS$  путем извлечения квадратного корня из каждого диагонального элемента,  $C_{\perp}^{(1)}$ ,  $C_{\perp}^{(2)}$  — произвольные постоянные столбцы

(при этом мы отвлекаемся от тех исключительных случаев, когда матрица  $Q$  приводится к жордановой форме). Если считать, что при  $z=0$  электромагнитное поле является монохроматическим, то это однозначно определяет постоянные  $C_{\perp}^{(1)}$  и  $C_{\perp}^{(2)}$ . Однако соответствующее решение не является прошедшей в среду волной (когда на границу  $z=0$  из вакуума падает плоская монохроматическая волна), так как при этом отраженная волна не будет монохроматической:

$$E^{\text{отр}} = \text{Re} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_{10}^{(k)} \exp \left\{ -i \left[ \frac{\omega + kp}{c} z + (\omega + kp) t \right] \right\}. \quad (22)$$

Каждое слагаемое в этой сумме является, однако, монохроматическим и определяет соответственно свой столбец  $M_{\perp}^{(k)}(z)$  (21). Сумма этих столбцов вместе со столбцом, соответствующим падающей волне, определяет прошедшую в среду волну. Если локальное поглощение электрического поля в среде для всех частот положительно, то полученная волна должна полностью затухнуть при  $z \rightarrow \infty$ . Это дает условие, однозначно определяющее амплитуды  $E_{10}^{(k)}$  в равенстве (22). Если же локальное поглощение электрического поля для некоторых частот отрицательно, то все эти величины можно определить с помощью непрерывного перехода от положительного локального поглощения к отрицательному. Электрическое поле в среде дается равенством (18) вместе с соотношениями

$$M_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M^{nm} e^{\beta_m z}. \quad (23)$$

Здесь  $\{\beta_m\}$  — совокупность всех диагональных элементов матрицы  $\sqrt{\Lambda}$ ; комплексные векторы  $M^{nm}$  являются определенными постоянными. Аналогичные соотношения справедливы и для магнитного поля волны.

Величины  $M^{nm}$ ,  $\beta_m$  являются функциями от  $\mu$ . Можно убедиться, что из совокупности коэффициентов  $M^{nm}$  при  $\mu = 0$  отличны от нуля только два, для которых  $n = 0$  и которые мы обозначим через  $A_1(\mu)$ ,  $A_2(\mu)$  (причем  $A_l(0) = \{A_{lx}(0), A_{ly}(0), 0\}$ ,  $l=1, 2$ ). Соответствующие им показатели (из совокупности  $\beta_m$ ) обозначим через  $\alpha_1(\mu) = i - \gamma_1(\mu)$ ,  $\alpha_2(\mu) = i - \gamma_2(\mu)$ . Если локальное поглощение электрического поля для всех частот положительно (что справедливо в случае материального уравнения (1)), то, используя (23) и (18), получаем:

$$E(z, t) = \text{Re} \{ (A_1 e^{-\gamma_1 z} + A_2 e^{-\gamma_2 z}) e^{i(\omega - \gamma_1 t)} \} + \text{Re} m(z, t), \quad (24)$$

где  $\{m(z, t) m^*(z, t)\}^{1/2} \leq m_0$  для всех  $t$  и для всех  $z \in (0, \infty)$ , причем  $m_0 \sim \mu \{ [A_1(0) + A_2(0)] [A_1^*(0) + A_2^*(0)] \}^{1/2}$ . Разложения показателей  $\gamma_1(\mu)$ ,  $\gamma_2(\mu)$  в ряд Тейлора по степеням  $\mu$  не имеют свободных членов:

$$\gamma_1(\mu) = \lambda_1 \mu + \dots; \quad \gamma_2(\mu) = \lambda_2 \mu + \dots \quad (25)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что величины  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  (25) и векторы  $A_1(0)$ ,  $A_2(0)$  удовлетворяют уравнениям (6). Это в конечном счете и определяет справедливость того, что выше решение было записано в виде (4). (Впрочем, применение метода (4) является естественным и на основании равенств (24) и (25) )

#### ЛИТЕРАТУРА

1. F R Morgenthaler, IRE Trans., MTT-6, 167 (1958).
2. С. И Аверков, Л. А. Островский, Изв высш уч. зав — Радиофизика, 1, 4, 46 (1958).

3. С. И. Аверков, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 203 (1959).
4. А. М. Марковкин, Радиотехника и электроника, 4, 785 (1959).
5. С. И. Аверков, Ю. Г. Хронополо, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 818 (1960).
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, ГИФМЛ, М., 1960.
7. В. П. Силин, ЖЭТФ, 38, 1771 (1960).
8. В. Н. Луговой, ЖЭТФ, 41, 1562 (1961).
9. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 41, 1859 (1961).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
13 января 1962 г.

## PROPAGATION OF PLANE ELECTROMAGNETIC WAVES IN PERIODICALLY NONSTATIONARY MAGNETOACTIVE PLASMA

*V. N. Lugovoi*

The propagation is considered of plane electromagnetic waves in a rarefied plasma placed in a homogeneous oscillating magnetic field.  $H_1(t) = H_0[1 - \chi \cos(pt)]$ . The absorption properties of such a medium are determined for different types of electromagnetic waves in it depending upon an amplitude of oscillating component of a magnetic field  $\chi$ .

---

## ОБ ОТРАЖЕНИИ ВОЛН ОТ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ НЕОДНОРОДНОСТИ

*Н. С. Степанов*

Рассматривается распространение волн в некоторых движущихся слоях произвольного профиля (плоская электромагнитная или акустическая волна в среде с «бегущими» параметрами, электромагнитные волны в движущейся неоднородной плазме). Показано, что во всех этих случаях после разделения переменных задача может быть сведена к исследованию волн в неподвижном неоднородном слое. Обсуждаются некоторые свойства решения (изменение частоты, коэффициент отражения и т. д.); приводятся соотношения, обобщающие закон сохранения энергии в таких системах.

Распространение волн в системах с переменными параметрами к настоящему времени сравнительно подробно исследовано при медленном их изменении, когда справедливо приближение геометрической оптики [1-5]. Решение же этой задачи при нарушении указанного приближения найдено лишь для нескольких случаев [4-10]. В частности, в некоторых работах обсуждается возможность усиления волн при отражении от движущейся границы (или при преломлении через нее), причем последняя может представлять собою как действительный раздел сред, например, границу движущейся плазмы [6,7], так и разрыв параметров среды, необязательно связанный с ее движением (ударные волны [8,9]); сюда же относится отражение от точки, где эффективная диэлектрическая или магнитная проницаемость среды изменяет знак [4]. Кроме того, в работе [10] рассмотрено распределенное отражение от периодической неоднородности.

Поскольку, однако, практически граница чаще всего имеет конечную ширину, представляется интересной задача о распространении и, в частности, отражении волн в случае движущегося слоя произвольного профиля. В связи с этим рассмотрим здесь сначала волны в длинной линии с параметрами, произвольно изменяющимися внутри слоя  $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$  по закону бегущей волны:

$$\begin{aligned} \sqrt{LC} = n(\zeta), \quad \sqrt{L/C} = \rho(\zeta), \quad \frac{1}{2} \left( \frac{R}{\rho} + \rho G \right) = s(\zeta), \\ \frac{1}{2} \left( \frac{R}{\rho} - \rho G \right) = d(\zeta), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\zeta = x - at$  (знак  $a$  любой). В силу аналогии уравнений все результаты могут быть непосредственно перенесены и на случай плоской электромагнитной или акустической [3] волны в бесконечной среде.

Если для резкой границы раздела основные результаты удастся получить из соответствующих граничных условий, не решая уравнений с зависящими от  $x$  и  $t$  коэффициентами, то в нашем случае задача значительно сложнее. Некоторое упрощение этих уравнений, разумеется, может быть достигнуто переходом к „сопровождающей“ системе координат, в которой коэффициенты будут зависеть только

от одной (пространственной) переменной; при этом для электромагнитных волн материальные уравнения Максвелла заменяются, как известно, более сложными соотношениями Минковского. Гораздо проще оказывается другой, несколько формальный, зато более общий (непосредственно применимый и к волнам другой природы) метод решения задачи: во-первых, разделением переменных получить обыкновенные уравнения, во-вторых, свести задачу к исследованию стационарной системы, где параметры изменяются только в пространстве. Ниже будет показано, что аналогичный метод удастся применить и к некоторым другим системам, например, к электромагнитным волнам в движущейся неоднородной плазме.

1. Возможность разделения переменных для линии с бегущими параметрами (1) при  $\rho = \text{const}$  была показана в статье [11], а с учетом изменения  $\rho$ , но в отсутствие потерь — в [12]. В общем случае после преобразования телеграфных уравнений введением новых величин  $U_{1,2} = V \pm \rho I$  это возможно в переменных  $\zeta, \xi_i$ , где  $\xi_i$  — любое из семейств характеристик (интегралов уравнений  $ndx = \pm dt$ ). В частности, вводя замену

$$U_1 = \frac{\sqrt{\rho}}{an - 1} \exp\left(-\int \frac{s d\zeta}{1 - an}\right) g(\zeta) \exp \frac{j\omega' \xi_1}{a};$$

$$U_2 = \frac{\sqrt{\rho}}{an + 1} \left(\frac{d \ln \sqrt{\rho}}{d\zeta} - \frac{d}{1 + an}\right)^{-1} \exp\left(\int \frac{s d\zeta}{1 + an} + 2 \int \frac{s d\zeta}{1 - a^2 n^2}\right) \frac{dg}{d\zeta} \exp \frac{j\omega' \xi_1}{a}, \quad (2)$$

где  $\omega'$  — постоянная разделения, из формул (6) в [1] можно получить\* следующее уравнение для  $g(\zeta)$ :

$$\frac{d^2 g}{d\zeta^2} - \left[2j\omega' n' + \frac{d}{d\zeta} \ln\left(\frac{d}{d\zeta} \ln \sqrt{\rho'} - d'\right)\right] \frac{dg}{d\zeta} - \left[\left(\frac{d}{d\zeta} \ln \sqrt{\rho'}\right)^2 - (d')^2\right] g(\zeta) = 0, \quad (3)$$

где

$$n' = \frac{n}{1 - a^2 n^2}, \quad \rho' = \pm \rho \exp\left(2 \int \frac{dan d\zeta}{1 - a^2 n^2}\right), \quad (4)$$

$$s' = \frac{s}{1 - a^2 n^2}, \quad d' = \frac{d}{1 - a^2 n^2}.$$

Известно, что решение уравнения (3) можно найти в квадратурах лишь в нескольких частных случаях, и мы не будем на них здесь останавливаться. Существенно, однако, что оно всегда может быть выражено через решение для некоторого неподвижного слоя, распространение волн в котором исследовано довольно подробно [13–15]. В самом деле, при  $a \rightarrow 0$  в (4)  $n' \rightarrow n(\zeta)$ ,  $\rho' \rightarrow \pm \rho(\zeta)$  и т. д., причем  $\zeta \rightarrow x$ ; если рассмотреть вспомогательный слой с параметрами, определенными соотношениями (4), но движущийся со скоростью  $a'/a \rightarrow 0$ , то уравнение для  $g(\zeta')$  (здесь  $\zeta' = x - a't$ ) будет совпадать с (3),

\* Возможно также разделение переменных  $\zeta, x$  или  $\zeta, t$ , но указанный способ здесь удобнее.

когда постоянная  $\omega'$  в обоих случаях одна и та же (т. е. общее решение для  $g$  в (2) будет для этих слоев одинаково).

Гармоническое во времени решение для вспомогательного слоя\* всегда может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} U_1' &= X'(\zeta') \exp[j\omega'(t - \int n'd\zeta')] ; \\ U_2' &= Y'(\zeta') \exp[j\omega'(t + \int n'd\zeta')] , \end{aligned} \quad (5)$$

где при медленном изменении параметров функции  $X'$  и  $Y'$  имеют смысл амплитуд прямой и обратной волн. Сравнивая (5) с (2) и учитывая, что [11]

$$\frac{\xi_1}{a} = t - \int \frac{nd\zeta}{1-an} , \quad \frac{\xi_1'}{a'} = t - \int n'd\zeta' , \quad (6)$$

можно выразить  $g(\zeta)$  через  $X'(\zeta)$  или  $Y'(\zeta)$  :

$$g(\zeta) = - \frac{X'(\zeta)}{\sqrt{\rho(\zeta)}} \exp \int \frac{s d\zeta}{1-an} ;$$

$$\frac{dg}{d\zeta} = Y'(\zeta) \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{d \ln \sqrt{\rho}}{d\zeta} - \frac{d}{1+an} \right) \exp \left( -3 \int \frac{s d\zeta}{1-a^2n^2} + 2j\omega' \int \frac{n d\zeta}{1-a^2n^2} \right) . \quad (7)$$

Тогда из соотношений (2), (6), (7) решение исходной задачи можно найти в виде, симметричном с (5):

$$\begin{aligned} U_1 &= X(\zeta) \exp \left[ j\omega' \left( t - \int \frac{n d\zeta}{1-an} \right) \right] ; \\ U_2 &= Y(\zeta) \exp \left[ j\omega' \left( t + \int \frac{n d\zeta}{1-an} \right) \right] , \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$X(\zeta) = \frac{X'(\zeta)}{1-an(\zeta)} , \quad Y(\zeta) = \frac{Y'(\zeta)}{1+an(\zeta)} . \quad (9)$$

Функции  $X'$ ,  $Y'$  и нижние пределы интегрирования в выражениях (5)–(8) могут быть нормированы так, чтобы были выполнены заданные граничные и начальные условия. Для определенности далее будем интересоваться таким решением, которое в отсутствие отражения (см. [1]) дает лишь прямую волну  $U_1$ , монохроматическую (с частотой  $\omega_0$ ) в „невозмущенной“ волной параметра области.

2. Многие существенные свойства решения можно выяснить, не конкретизируя закон изменения параметров. Так, например, из стационарной задачи следует, что в отсутствие потерь ( $s = d = 0$ ) вне области  $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$ , где изменяются параметры, множители  $X'$  и  $Y'$  (а следовательно, и  $X$ ,  $Y$  в (9)) постоянны, т. е.  $U_1$  и  $U_2$  представляют собой монохроматические волны с частотами

$$\omega_+ = \frac{\omega'}{1-an_l} , \quad \omega_- = \frac{\omega'}{1+an_l} . \quad (10)$$

Здесь  $n_l$  — значения параметра  $\sqrt{LC}$  с той или иной стороны слоя.

\* Соответствующие ему величины будем помечать штрихом.

Далее цифрой 1 будем обозначать значения переменных при  $\zeta < \zeta_1$  и цифрой 2 — при  $\zeta > \zeta_2$ .

Рассмотрим сначала случай  $a^2 n^2 < 1$ . При этом  $n' > 0$ ; естественно взять также  $\rho' > 0$ . Тогда  $Y'(2) = 0$ , так как из физических соображений ясно, что в этой области отраженной волны не будет (см. рис. 1а). Из (10) следует, что частоты падающей ( $\omega_0 = \omega_+$  (1)), отраженной ( $\omega_r = \omega_-$  (1)) и прошедшей ( $\omega_g = \omega_+$  (2)) волн связаны здесь соотношениями, обычными в электродинамике движущихся сред:

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{1 - an_1}{1 + an_1}, \quad \frac{\omega_g}{\omega_0} = \frac{1 - an_1}{1 - an_2}. \quad (11)$$

Внутри же слоя, вообще говоря, множители  $X$  и  $Y$  в (8) изменяются и волны немонохроматичны; при наличии потерь они не строго монохроматичны и вне слоя, так как при его движении со временем меняются оптический путь и результирующее затухание этих волн (для простоты ниже потери учитывать не будем).

Если для вспомогательно-го слоя (4) коэффициенты отражения (по мощности)  $R_p' = |Y'(1)/X'(1)|^2$  и проникновения  $K_p' = (\rho_1/\rho_2) |X'(2)/X'(1)|^2$  на частоте  $\omega' = \omega_0(1 - an_1)$  известны, легко найти и соответствующие коэффициенты для исходной системы:

$$R_p = R_p' \omega_r^2 / \omega_0^2, \quad K_p = K_p' \omega_g^2 / \omega_0^2. \quad (12)$$

Полные же энергии отраженного и преломленного сигнала с учетом изменения его длительности [1] будут тогда пропорциональны первым степеням соответствующих частот. Из равенств (11) и (12) следует, что при  $a < 0$  коэффициент отражения может превышать единицу, а при  $a > 0$  всегда  $R_p < R_p' \leq 1$ . Частота и энергия проникающей волны могут увеличиваться при  $n_2 < n_1, a < 0$  или  $n_2 > n_1, a > 0$ .

Далее, из закона сохранения энергии, который справедлив для стационарной задачи, следует равенство  $R_p' + K_p' = 1$ ; тогда из (12) получаем энергетическое соотношение, обобщенное для движущегося слоя:

$$K_p \omega_0^2 / \omega_g^2 + R_p \omega_0^2 / \omega_r^2 = 1. \quad (13)$$

Если каким-либо способом найти коэффициент  $R_p$ , то отсюда без дополнительных вычислений определяется и  $K_p$ . В частности, из (13) следует, что при  $n_1 = n_2$  ( $\omega_g = \omega_0$ ) отражение уменьшает поток энергии

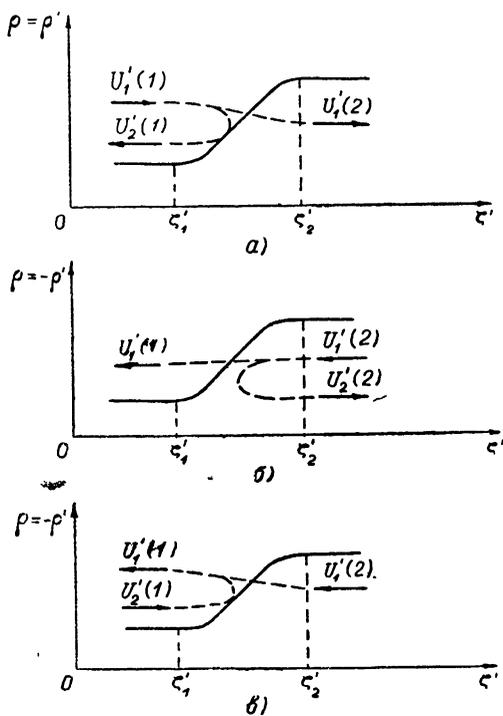


Рис. 1.

прямой волны, что согласуется с результатами, полученными в работе [10] для периодического изменения параметров\*.

3. Аналогично можно рассмотреть и случай  $a^2 n^2 > 1$ . При этом в (4)  $n' < 0$ . Чтобы величины  $L' = n'\rho'$ ;  $C' = n'/\rho'$  сохранили свой энергетический смысл, естественно положить  $\rho' < 0$ ; тогда направления распространения волн  $U'_1$  и  $U'_2$  в вспомогательном слое меняются на обратные. В частности, для  $a < -1/n$  получаем ситуацию, указанную на рис. 1б: „падающей“ волной здесь является  $U'_1(2)$ , а в области 1 имеется лишь „преломленная волна“  $U'_1(1)$ . Физически это соответствует тому обстоятельству, что отраженная волна в реальной линии при  $a < -1/n$  отстает от волны параметра и в области 1 отсутствует. Сравнивая все волны с невозмущенной ( $U_1(1)$ ), естественно определить коэффициент отражения как  $R_p = (\rho_1/\rho_2)|Y(2)/X(1)|^2$ . Частота обратной волны здесь равна  $\omega_r = \omega_-(2)$ , так что второе равенство в (11) остается в силе, а вместо первого из (10) имеем:

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{1 - an_1}{1 + an_2}. \quad (11a)$$

Как и в формулах (12), величины  $R_p$  и  $K_p$  можно выразить через характеристики вспомогательного слоя, так что

$$R_p = \frac{R'_p \omega_r^2}{K'_p \omega_0^2}, \quad K_p = \frac{1}{K'_p} \frac{\omega_g^2}{\omega_0^2}. \quad (12a)$$

Здесь  $K'_p = (\rho_2/\rho_1)|X'(1)/X'(2)|^2$  — коэффициент проникновения для этого слоя при падении волны частоты  $\omega' = \omega_0(1 - an_1)$  справа,  $R'_p = |Y'(2)/X'(2)|^2$  — соответствующий коэффициент отражения. (Из теоремы взаимности следует, что в отсутствие потерь эти коэффициенты — такие же, как и при падении волны на тот же слой слева.) Очевидно, и здесь  $K'_p + R'_p = 1$ , так что вместо (13) теперь получаем:

$$K_p \frac{\omega_0^2}{\omega_r^2} - R_p \frac{\omega_0^2}{\omega_g^2} = 1. \quad (13a)$$

При  $n_1 = n_2$  из (13a) следует, что  $K_p \geq 1$ , т. е. наличие отражения здесь приводит к увеличению мощности проникающей волны; последнее также согласуется с [10].

Если же  $a > 1/n$  (волна параметра догоняет сигнал), то отраженной волны не может быть в области 2; в вспомогательной системе (см. рис. 1в) в этом случае и  $U'_1(2)$  и  $U'_2(1)$  являются по отношению к слою падающими, а  $U'_2(2) \equiv 0$ . Поскольку в основной системе падающей волной здесь является  $U_1(2)$ ,

\* В этой статье была показана возможность резонансного отражения волн и найдена одна из таких частот. Пользуясь применяемым здесь методом, нетрудно найти другие резонансные зоны и характер решения в них. Известно, что в стационарной системе эти частоты определяются равенством  $K' = 2k'/r$ , где  $K'$  и  $k' = \omega'n'_0$  — волновые числа параметра и сигнала,  $r = 1, 2, 3$ , — номер зоны. Поскольку, как ясно из (4), (8), (10),  $K' = K = \Omega/a$ , где  $\Omega$  — частота изменения параметра,  $k_{\pm} = \omega_{\pm} n_0 = k'_{\pm}(1 \pm an_0)$ , и мы получаем тогда условие параметрического резонанса, обобщенное на случай «бегущих» параметров:

$$K = 2k_{\pm}/r(1 \pm an_0) \text{ или } \omega_{\pm} = (\Omega/2r)(1 \pm 1/an_0).$$

$$K_p = (\rho_2/\rho_1) |X(1)/X(2)|^2, \quad R_p = (\rho_2/\rho_1) |Y(1)/X(2)|^2, \\ \omega_0 = \omega_+(2), \quad \omega_g = \omega_+(1), \quad \omega_r = \omega_-(1),$$

так что из (10) следует:

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{1 - an_2}{1 + an_1}, \quad \frac{\omega_g}{\omega_0} = \frac{1 - an_2}{1 - an_1}. \quad (116)$$

Выражая  $X'$  и  $Y'$  через коэффициенты отражения и проникновения для вспомогательного слоя (на частоте  $\omega' = \omega_0 (1 - an_2)$ ), с учетом теоремы взаимности, снова получаем соотношения (12а), а из закона сохранения энергии — (13а).

Таким образом, если не интересоваться структурой поля внутри слоя, то во всех рассмотренных случаях для отыскания амплитуд и частот волн вне его достаточно знать предельные значения параметров и коэффициент отражения для вспомогательной стационарной линии. Некоторые особенности могут иметь место в точке (если такая имеется), где величина  $1 - a^2n^2$  переходит через нуль. Из работы [1], однако, ясно, что в окрестности этой точки отражение мало и достаточно точное решение здесь дается приближением геометрической оптики.

4. Поскольку в нашем случае решение выражается через монохроматические волны стационарной задачи, естественно ожидать, что использованный метод применим и к диспергирующим системам, параметры которых зависят от частоты. Рассмотрим здесь плоскую линейно-поляризованную электромагнитную волну в диэлектрической среде с  $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = 1$ , пронизываемой плазмой с переменной электронной концентрацией  $N(\zeta)$ , где по-прежнему  $\zeta = x - at$ . Вводя аналогично (2) замену

$$A = g(\zeta) e^{j \frac{\omega'}{a} \xi_1}. \quad (14)$$

где  $A$  — вектор-потенциал, имеющий лишь поперечную составляющую, из формулы (10) статьи [2] для множителя  $g(\zeta)$  легко получаем уравнение\*

$$\frac{d^2 g}{d\zeta^2} - \frac{2j\omega' n}{1 - a^2 n^2} \frac{dg}{d\zeta} - \frac{\omega_n^2}{c^2(1 - a^2 n^2)} g = 0, \quad (15)$$

где обозначено  $n = \sqrt{\epsilon}/c$ ,  $\omega_n^2 = 4\pi e^2 N/m$  ( $e$  и  $m = m_0(1 - a^2/c^2)^{-1/2}$  — заряд и релятивистская масса электрона). Рассуждая так же, как и в случае линии передачи, находим, что множитель  $g(\zeta)$  в (14) может быть выражен через решение для неподвижной неоднородной плазмы с концентрацией электронов  $N'$  в среде с показателем преломления  $cn'$ , причем

$$\mu' = \mu = 1, \quad n' = \frac{n}{1 - a^2 n^2}, \quad N' = \frac{N \sqrt{1 - a^2/c^2}}{1 - a^2 n^2}; \quad (16)$$

задача последнего типа подробно рассмотрена в (15) (то обстоятельство, что здесь  $\epsilon' = c^2(n')^2 \neq 1$  и концентрация  $N'$  при  $a^2 n^2 > 1$  формально может быть отрицательной величиной, дела не меняет)\*\*.

\* При выводе этого уравнения пренебрежено членами порядка  $v_{\perp}/c$ , где  $v_{\perp}$  — поперечная составляющая скорости электронов.

\*\* Заметим, что с таким же успехом можно было выбрать  $N' = N$  и отличие этих двух слоев приписать проницаемости  $\mu'$ ; жесткое ограничение накладывается лишь на закон «преобразования» величины  $n$ .

Решение для слоя (16) естественно взять в виде:

$$A' = X'(\zeta') \exp[j\omega'(t - \int n'_{\text{эфф}} d\zeta')] + Y'(\zeta') \exp[j\omega'(t + \int n'_{\text{эфф}} d\zeta')], \quad (17)$$

где  $n'_{\text{эфф}} = (1/c) [\varepsilon' - (\omega'_n)^2/(\omega')^2]$ ,  $(\omega'_n)^2 = 4\pi e^2 N'/m_0$ ; здесь параметр  $\varepsilon'_{\text{эфф}} = c^2(n'_{\text{эфф}})^2$  имеет смысл эффективной диэлектрической проницаемости. Из формул (6), (14) и (17) легко найти функцию  $g(\zeta)$ ; в результате после некоторых преобразований получим:

$$A = X'(\zeta) \exp\left[j\omega'\left(t - \int \frac{d\zeta}{v(\omega_+) - a}\right)\right] + Y'(\zeta) \exp\left[j\omega'\left(t + \int \frac{d\zeta}{v(\omega_-) + a}\right)\right], \quad (18)$$

где величины  $v(\omega_{\pm}) = c/\sqrt{\varepsilon_{\text{эфф}}(\omega_{\pm}, \zeta)}$  вне слоя  $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$  (где изменяется  $N(\zeta)$ ) суть фазовые скорости прямой и обратной волны;  $\varepsilon_{\text{эфф}} = \varepsilon - \omega_n^2(\zeta)/\omega_{\pm}^2(\zeta)$ . Частоты этих волн удовлетворяют равенствам, аналогичным (10):

$$\omega_+ = \frac{\omega'}{1 - a/v(\omega_+)}, \quad \omega_- = \frac{\omega'}{1 + a/v(\omega_-)}; \quad (19)$$

амплитуды напряженностей поля  $E = -(1/c)(\partial A/\partial t)$ ,  $H = \partial A/\partial x$  вне слоя равны соответственно  $-j\omega_+ X'/c$ ,  $-j\omega_+ X'/v(\omega_+)$  в прямой и  $-j\omega_- Y'/c$ ,  $j\omega_- Y'/v(\omega_-)$  — в обратной волне.

Выражение (18) показывает, что величина  $\varepsilon_{\text{эфф}}[\omega(\zeta), \zeta]$  может рассматриваться как эффективная диэлектрическая проницаемость и внутри слоя (где  $X'$  и  $Y'$  нельзя считать постоянными или даже медленными множителями), если под  $\omega(\zeta)$  понимать соответственно  $\omega_{\pm}(\zeta)$ , определяемые формулами (19). Если, например, групповая скорость отраженной волны  $v_{\text{гр}}(\omega_-) = c^2/\varepsilon v(\omega_-) = c\sqrt{\varepsilon_{\text{эфф}}(\omega_-)/\varepsilon} > |a|$ , то, как и в длинной линии при  $1/n > |a|$ , имеем:  $Y'(2) = 0$  и  $\omega_0 = \omega_+(1)$ ,  $\omega_r = \omega_-(1)$ ,  $\omega_g = \omega_+(2)$ , причем исключение  $v(\omega_-)$  из (19) дает:

$$\frac{\omega_r}{\omega_0} = \frac{1 - a(1 - a^2 n^2) n'_{\text{эфф}}(\omega')}{1 + a(1 - a^2 n^2) n'_{\text{эфф}}(\omega')}; \quad \omega' = \omega_0 [1 - a/v(\omega_0)]. \quad (20)$$

Найдя из стационарной задачи значение  $Y'(1)$ , легко определить коэффициенты отражения и проникновения для движущейся плазмы:

$$R_p = R'_p \frac{\omega_r^2 v(\omega_0)}{\omega_0^2 v(\omega_r)}; \quad K_p = K'_p \frac{\omega_g^2 v(\omega_0)}{\omega_0^2 v(\omega_g)}, \quad (21)$$

где  $R'_p = |Y'(1)/X'(1)|^2$  — коэффициент отражения для неподвижного слоя (16) на частоте  $\omega'$ ;  $K'_p = 1 - R'_p$ .

Заметим, что характер вспомогательного слоя такой же, как и у исходного; это обстоятельство упрощает исследование коэффициента отражения. Например, движущийся „переходный“ слой Эпштейна

$$N(\zeta) = N_0 \left(1 + \frac{be^{\tau\zeta}}{1 + e^{\tau\zeta}}\right) \quad (22)$$

сопоставляется с аналогичным неподвижным слоем  $N'$ , только в несколько измененном масштабе. Коэффициент отражения от такого слоя хорошо известен [14, 15]:

$$R'_p = \frac{\text{sh}^2[(\pi S/2)(1 - \sqrt{1 - P})]}{\text{sh}^2[(\pi S/2)(1 + \sqrt{1 - P})]}, \quad (23)$$

где

$$S = \frac{\pi \omega'_0 n'_{\text{эфф}}(1)}{\gamma}, \quad P = b \left[ \frac{\varepsilon m(\omega')^2}{4 \pi e^2 N_0 (1 - a^2 n^2)} - 1 \right]^{-1},$$

$$\omega' = \omega_0 \left( 1 - \frac{a}{c} \sqrt{\varepsilon - \frac{4 \pi e^2 N_0}{m \omega_0^2}} \right).$$

Из соотношения (21) тогда легко найти и  $K_p$ . При переходе к резкой границе ( $S \rightarrow 0$ ) эти результаты совпадают с полученными в работах [6, 7].

Если в некоторой точке  $\varepsilon'_{\text{эфф}}$  меняет знак, коэффициент  $R'_p$  может иметь максимальное значение, равное единице („движущееся зеркало“); в приведенном выше примере (22) это соответствует случаю  $P > 1$ . В статье [4] другим методом рассмотрена возможность такого отражения от волны магнитного поля в неподвижной плазме и в феррите.

В случае  $a < -v_{\text{гр}}(\omega_-)$  отраженная волна будет отставать от движущегося слоя; соответствующие формулы без труда можно получить аналогичным образом. Отметим лишь, что при  $|a| > c/\sqrt{\varepsilon}$  „полное“ отражение невозможно, что видно из выражения для эффективной проницаемости  $\varepsilon'_{\text{эфф}}$ , которая здесь не принимает отрицательные значения.

Представляется, что такое сопоставление движущегося и неподвижного слоев допустимо и может быть полезным во многих других случаях\*, в том числе и тех, когда задача не может быть сведена к решению дифференциального уравнения второго порядка.

В заключение автор выражает признательность М. А. Миллеру за полезные замечания при обсуждении работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 672 (1960).
2. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 293 (1961).
3. Н. С. Степанов, Акуст. ж., **8**, 139 (1962).
4. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, **41**, 226 (1961).
5. С. И. Аверков, Ю. Г. Хронополо, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 818 (1960).
6. M. A. Lampert, Phys. Rev., **102**, 299 (1956).
7. Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич, ЖТФ, **39**, 491 (1959).
8. Д. И. Блохинцев, Акустика неоднородной движущейся среды, изд. АН СССР, М., 1946.
9. Л. А. Островский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 833 (1959).
10. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 656 (1961).
11. С. И. Аверков, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 203 (1959).

\* Если, например, изменение концентрации электронов происходит в виде волны ионизации в неподвижной плазме, для напряженности  $E$  имеет место уравнение [2], с точностью до релятивистской поправки совпадающее с уравнением (15) для потенциала  $A$ . Следовательно, для коэффициента отражения вместо (21) теперь получаем  $R_p = R'_p v(\omega_0)/v(\omega_r)$ ; при  $a < 0$  тогда  $\omega_r > \omega_0$  и  $R_p > R'_p < 1$ , в согласии со сказанным в [4].

12. В. А. Солнцев, Диссертация, ГГУ, Горький, 1960.
13. И. Е. Средний, Радиотехника, 1, 6, 46 (1946).
14. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
15. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
8 февраля 1962 г.

## ON WAVE REFLECTION FROM ARBITRARY MOVING INHOMOGENEITY

*N. S. Stepanov*

Wave propagation is considered in some moving layers of an arbitrary profile (plane electromagnetic or acoustic wave in a media with „travelling“ parameters, electromagnetic waves in a moving nonuniform plasma). It is shown that in all the cases mentioned after separation of variables the problem may be reduced to the investigation of waves in a stationary inhomogeneous layer. Some properties of a solution are discussed (frequency variation, reflection factor, etc.) Equations are given which generalize the energy conservation law for such systems.

---

## ДИФФРАКЦИЯ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ СО СПЛОШНЫМ СПЕКТРОМ НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ ПЛОСКОГО СЛОЯ

Ю. А. Рыжов

Рассмотрена задача о распространении стационарного шума через слой, заполненный неоднородностями, в предположении, что неоднородности имеют размеры, намного превосходящие длины волн спектра невозмущенной волны. Методом плавных возмущений показано, что полученные решения справедливы в условиях малости набега комплексной фазы на максимальной длине волны спектра.

### 1. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Во многих задачах радиоастрономии представляет интерес вопрос о влиянии неоднородностей тропосферы на распространение радиоизлучения со сплошным спектром, т. е. диффракция волны со сложной зависимостью от времени на случайных флюктуациях коэффициента преломления.

Допустим, что волна падает на неоднородный слой, расположенный между двумя плоскостями  $x = 0$  и  $x = L$ . Для коротких волн можно пренебречь поляризационными эффектами и считать, что электрическое поле удовлетворяет волновому скалярному уравнению

$$\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0, \quad (1)$$

где  $n = 1 + n_1(\mathbf{r}, t)$ ,  $n_1 \ll 1$ . Будем искать решение уравнения (1) в виде ряда  $E = E_0 + E_1 + \dots$ , где  $E_1$  имеет порядок  $n_1 E_0$ . Выпишем уравнения, которым удовлетворяют соответственно нулевой и первый члены ряда:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} - \Delta E_0 = 0; \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} - \Delta E_1 = - \frac{2 n_1(\mathbf{r}, t)}{c^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Нулевой член ряда, соответствующий невозмущенной волне, с учетом того, что мы рассматриваем распространение коротких волн, возьмем в виде  $E_0 = E_0(t - x/c)$ , где  $E_0(t)$  — произвольная функция времени.

Решение уравнения (3) можно записать следующим образом:

$$E_1(\mathbf{r}, t) = - \frac{1}{2\pi c^2} \int_V \frac{n_1(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c})}{R} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} \left( t - \frac{R + x'}{c} \right) dV'; \quad (4)$$

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

Здесь интегрирование производится по всему объему слоя, т. е. по  $y$  и  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а по  $x$  от 0 до  $L$ .

Для простоты будем предполагать, что существует функция корреляции флуктуаций коэффициента преломления. Записанные в спектральной форме результаты будут справедливы и в случае локально-однородной и изотропной турбулентности.

Умножим левую и правую части (3) на  $e^{-i\omega t}/2\pi$  и проинтегрируем по  $t$ . Тогда получим:

$$E_1(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi c^2} \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_1(\mathbf{r}', \omega - \omega')}{R} \omega'^2 f(\omega') e^{-i\omega R/c} e^{-i\omega' x'/c} d\omega' d\mathbf{v}', \quad (5)$$

где

$$E_1(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\infty} E_1(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt; \quad (6)$$

$$n_1(\mathbf{r}', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} n_1(\mathbf{r}', t) e^{-i\omega t} dt; \quad (7)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8)$$

Для коротких волн  $R$  под знаком интеграла в экспоненте можно приближенно представить в виде [1]

$$R \simeq \frac{(\rho - \rho')^2}{2(x - x')} + x - x'; \quad (9)$$

в знаменателе же можно считать, что  $R \simeq x - x'$ . Здесь  $\rho$  и  $x$  — поперечная и продольная компоненты радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Тогда

$$E_1(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi c^2} \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n_1(\mathbf{r}', \omega - \omega')}{x - x'} \omega'^2 f(\omega') e^{-i\omega' x'/c} e^{-i\omega(x-x')/c} \times \\ \times e^{-i(\omega/c)(\rho - \rho')^2/2(x-x')} dx' d\rho' d\omega'. \quad (10)$$

Дальнейший ход вычислений аналогичен приведенному в [1]. Воспользуемся представлением  $E_1(\mathbf{r})$  и  $n_1(\mathbf{r})$  в виде интеграла Фурье:

$$E_1(\mathbf{r}, \omega) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\mathbf{x}, \omega) e^{i\mathbf{x}\rho} d\mathbf{x}; \quad (11)$$

$$n_1(\mathbf{r}, \omega) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(\mathbf{x}, \omega, x) e^{i\mathbf{x}\rho} d\mathbf{x}; \quad (12)$$

$$d\mathbf{x} = dx_2 dx_3.$$

Функции  $\Phi_1(\mathbf{x}, \omega, x)$  и  $\nu(\mathbf{x}, \omega, x)$  в случае однородного поля удовлетворяют условиям:

$$\overline{\Phi_1(\mathbf{x}, \omega, x) \Phi_1^*(\mathbf{x}', \omega', x')} = F_1(\mathbf{x}, \omega, x - x') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\omega - \omega'); \quad (13)$$

$$\overline{v_1(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}) v_1^*(\mathbf{x}', \omega', \mathbf{x}')} = F_n(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\omega - \omega'). \quad (14)$$

Подставив разложение (11), (12) в (10), умножим левую и правую части получившегося равенства на  $e^{-i\mathbf{x}\rho}/4\pi^2$  и проинтегрируем по  $\rho$ . В результате несложных вычислений находим пространственно-временной спектр рассеянного поля  $E_1$  в плоскости  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{x}, \omega, \mathbf{x}_0) = & -\frac{i}{c\omega} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} v(\mathbf{x}, \omega - \omega', \mathbf{x}') \omega'^2 f(\omega') \times \\ & \times e^{i\mathbf{x}^2 c(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/2\omega} e^{-i\omega' \mathbf{x}'/c} e^{-i\omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}')/c} d\mathbf{x}' d\omega'. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножив (15) на  $\Phi_1^*(\mathbf{x}', \omega', \mathbf{x})$ , учитывая (13), (14), а также предположение, что невозмущенное поле  $E_0(t)$  является однородным стационарным процессом, для которого  $f(\omega') f(\omega'') = F(\omega') \delta(\omega' - \omega'')$ , находим двухмерный спектр рассеянного поля в плоскости  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ :

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, \omega) = & \frac{1}{c^2 \omega^2} \iint F_n(\mathbf{x}, \omega - \omega', \xi) \omega'^4 F(\omega') e^{i\mathbf{x}^2 c \xi / 2\omega} \times \\ & \times e^{i\omega' \xi / c} e^{-i\omega \xi / c} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь область интегрирования по  $\xi$  и  $\eta$  есть ромб с вершинами в точках:  $\xi, \eta = 0, 0; L, L/2; -L, L/2; 0, L$ . Поскольку в существенной для интегрирования  $F_n(\mathbf{x}, \omega - \omega', \xi)$  области  $(\mathbf{x}^2 c / 2\omega) \xi \ll 1$ , можно положить  $e^{i\mathbf{x}^2 c \xi / 2\omega} \approx 1$ , в случае  $L \gg \xi$  мы можем распространить интегрирование по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Учитывая, что

$$\Phi_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(\mathbf{x}, \omega, \xi) e^{-i\mathbf{x}_1 \xi} d\xi,$$

окончательное выражение для  $F_1(\mathbf{x}, \omega, 0)$  представим в виде:

$$F_1(\mathbf{x}, \omega, 0) = \frac{2\pi L}{c^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n\left(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, -\frac{\omega - \omega'}{c}; \omega - \omega'\right) \omega'^4 F(\omega') d\omega'. \quad (17)$$

Выражение (17) определяет средний угловой энергетический спектр рассеянного поля [2,3]. Зная  $F_1(\mathbf{x}, \omega)$ , можно определить функцию корреляции комплексного поля  $E_1(\mathbf{r}, t)$  в плоскости  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ :

$$z(\rho, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\mathbf{x}, \omega) e^{i\mathbf{x}\rho + i\omega\tau} d\mathbf{x} d\omega. \quad (18)$$

Мы видим, что угловой спектр рассеянного поля и его функция корреляции не зависят от выбора плоскости наблюдения за слоем.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Узкополосный процесс  $E_0(t)$ . Если процесс  $E_0(t)$  имеет узкий спектр, сосредоточенный вблизи частоты  $\omega_0$ , то можно пренебречь изменением множителя  $\omega'^4$  в пределах, где  $F(\omega')$  отлична от 0. Тогда мы получим:

$$F_1(\mathbf{x}, \omega, 0) = \frac{2\pi L \omega_0^4}{c^2 \omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n\left(\mathbf{x}, \frac{\omega - \omega'}{c}; \omega - \omega'\right) F(\omega') d\omega'. \quad (19)$$

Так как спектр флюктуаций коэффициента преломления сосредоточен вблизи  $\omega = 0$  и имеет полосу частот  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , то ясно, что функция  $F_1(\mathbf{x}, \omega, 0)$  отлична от 0 вблизи  $\omega = \omega_0$ . Если мы имеем дело с таким узкополосным процессом, что можно пренебречь изменением функции  $\Phi_n\left(\mathbf{x}, \frac{\omega - \omega'}{c}; \omega - \omega'\right)$  в пределах ширины спектра  $E_0(t)$ , то получим:

$$F_1(\mathbf{x}, \omega, 0) = 2\pi L k_0^2 \Phi_n\left(\mathbf{x}, \frac{\omega - \omega_0}{c}; \omega - \omega_0\right) z(0), \quad (20)$$

где

$$z(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \overline{E_0(t)E_0(t + \tau)}. \quad (21)$$

**2. Широкополосный процесс.** Если мы рассматриваем широкополосный процесс  $E_0(t)$ , такой, что можно пренебречь изменением спектра  $F(\omega')$  при изменении  $\omega'$  на величину  $\Omega$ , приблизительно равную максимальной частоте в спектре флюктуаций коэффициента преломления, то

$$F_1(\mathbf{x}, \omega, 0) = \frac{2\pi L \omega^2}{c^2} F(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n\left(\mathbf{x}, \frac{\Omega}{c}, \Omega\right) d\Omega. \quad (22)$$

**3. Случай поперечного переноса неоднородностей.** Если мы имеем дело с „замороженными“ неоднородностями, спектр которых  $\Phi_n(\mathbf{x})$  известен, то пространственно-временной спектр флюктуаций, которые возникнут, если эти неоднородности смещать с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  поперек трассы, будет иметь вид:

$$\Phi_n(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\omega - \mathbf{x}\mathbf{v}) \Phi_n(x_1, x_2, x_3).$$

Подставив это выражение в формулу (17), получим:

$$F_1(\mathbf{x}, \omega, 0) = \frac{2\pi L}{c^2 \omega^2} \Phi_n\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}\mathbf{v}}{c}\right) (\omega - \mathbf{x}\mathbf{v})^4 F(\omega - \mathbf{x}\mathbf{v}). \quad (23)$$

Особенностью этого выражения является то обстоятельство, что если спектр процесса  $E_0(t)$  сосредоточен вблизи частоты  $\omega_0$ , то в направлении  $x_2, x_3$  и  $x_1 = \sqrt{k_0^2 - x_2^2 - x_3^2}$  рассеяние происходит на смещенной частоте  $\omega = \omega_0 - \mathbf{x}\mathbf{v}$ . Величина  $\mathbf{x}\mathbf{v}$  является доплеровским сдвигом частоты рассеяния.

## 2. МЕТОД ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Результаты, полученные в первом разделе, справедливы при условии малости рассеянного поля по сравнению с невозмущенным полем. В частности, энергетический спектр  $F(\omega)$  полного поля в точке за слоем равен сумме энергетического спектра невозмущенного процесса  $F(\omega)$  и спектра рассеянного поля  $F_1(\omega)$ , причем  $F_1(\omega) \ll F(\omega)$ . Однако можно показать, что аналогично тому, как это имеет место при распространении монохроматической волны [1], решения, полученные методом малых возмущений, справедливы в гораздо более широкой области, нежели это следует из условий применимости метода малых возмущений. Именно, покажем, что при условии малости набега комп-

лексной фазы на максимальной длине волны спектра невозмущенного поля будут справедливы формулы метода последовательных приближений.

Представляя поле  $E$  в виде  $e^\Theta$ , получаем из (1) следующее уравнение для комплексной фазы  $\Theta$ :

$$\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \frac{n^2}{c^2} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)^2 - \Delta \Theta - (\Delta \Theta)^2 = 0. \quad (24)$$

Применим метод последовательных приближений к этому уравнению. Представим решение уравнения (24) в виде  $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$ . Тогда, имея в виду, что  $\Theta_0$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} \right)^2 - \Delta \Theta_0 - (\Delta \Theta_0)^2 = 0, \quad (25)$$

для  $\Theta_1$ , получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial t^2} + \frac{2n_1}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \\ - \Delta \Theta_1 - \nabla \Theta_1 (2\nabla \Theta_0 + \nabla \Theta_1) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

В (26) отброшены члены  $\frac{2n_1}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial t^2}$ ,  $\frac{2n_1}{c^2} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial t^2} \right)^2$  и т. д., которые малы по сравнению с  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial t^2}$ ,  $\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} \right)^2$  и т. д., а также члены более высоких порядков.

Уравнение (26) можно линеаризовать при условии, когда

$$\left| \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} \right| \ll \left| \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} \right|, \quad \left| \nabla \Theta_1 \right| \ll \left| \nabla \Theta_0 \right|. \quad (27)$$

Эти условия фактически совпадают, приводя к неравенству  $\lambda_{\max} |\nabla \Theta_1| \ll 2\pi$ . Окончательно уравнение для  $\Theta_1$  принимает вид:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial t^2} + \frac{2n_1}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial t^2} + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} + \frac{2n_1}{c^2} \left( \frac{\partial \Theta_0}{\partial t} \right)^2 - \Delta \Theta_1 - 2(\nabla \Theta_0 \nabla \Theta_1) = 0. \quad (28)$$

Подстановкой  $\Theta_1 = e^{-i\omega t} \omega$  оно приводится к форме:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \Delta \omega = - \frac{2n_1}{c^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}. \quad (29)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (3) для  $E_1$ , следовательно,  $\omega$  и  $E_1$  совпадают. Однако уравнение (29) справедливо при условиях  $n_1 \ll 1$  и  $\lambda_{\max} |\nabla \Theta_1| \ll 1$ , т. е. при условии малости изменения комплексной фазы на максимальной длине волны в спектре невозмущенной волны. Таким образом, формула (19) и вытекающие из нее формулы справедливы и в случае большой величины рассеянного поля  $E_1$ . Соответственно, энергетический спектр поля при прохождении радиоизлучения через неоднородный слой может сильно отличаться от невозмущенного\*.

\* Необходимо, однако, отметить, что при более строгом рассмотрении критерий применимости метода плавных возмущений отличается от условия малости набега комплексной фазы на длине волны [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
2. Дж. Ратклифф, Проблемы совр. физики, вып 10, 1957, стр. 3.
3. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 393 (1960).
4. В. В. Писарева, Акуст. ж, 6, 87 (1960).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
10 марта 1962 г.

DIFFRACTION OF THE RADIATION WITH CONTINUOUS  
SPECTRUM ON IRREGULARITIES OF A PLANE LAYER

*Yu. A. Ryzhov*

Propagation of stationary noise through the nonuniform layer is considered dimensions of the irregularities being much greater than the wavelengths of unperturbed field spectrum. Solutions obtained by smooth perturbation method are shown to be correct provided deviation of a complex phase corresponding to the maximum wavelength is small enough.

---

К ТЕОРИИ РЕФРАКЦИИ В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

*В. И. Татарский*

Найдено выражение для угла рефракции в слоисто-неоднородной среде в виде ряда по степенным функционалам от электронной концентрации  $N(r)$  (или по отклонению показателя преломления от единицы). На конкретном примере линейного профиля  $N(z) = \gamma z$ , для которого может быть получено строгое решение, рассмотрена точность предлагаемого метода расчета рефракции.

1. Рассмотрим сначала случай плоско-слоистой среды. Уравнение луча задается соотношениями

$$n(z)\sin\varphi = \sin\varphi_0, \quad \text{ctg}\varphi = dz/dx,$$

где  $n$  — показатель преломления, а остальные обозначения ясны из рис. 1; предполагается, что в точке наблюдения  $n=1$ . После интегрирования находим отсюда:

$$\text{tga} = \sin(\alpha - \psi) \frac{1}{h} \int_0^h \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2(\alpha - \psi)}}. \quad (1)$$

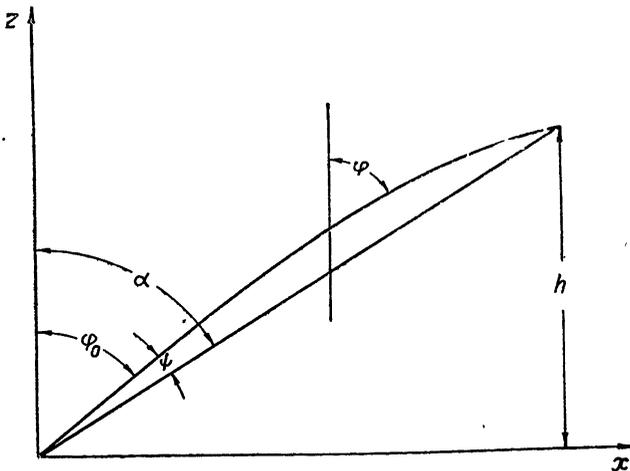


Рис. 1.

При заданных  $n(z)$ ,  $h$  и  $\alpha$  (1) представляет собой уравнение, из которого должен быть определен угол рефракции  $\psi$ . Последний можно найти из (1), разлагая правую часть в двойной ряд по степеням  $\psi$  и  $1 - n^2(z) = 2aN(z)$  (в случае ионосферы  $a = 2\pi e^2/m\omega^2$  и  $N$  — электронная концентрация) и ограничиваясь первыми членами обоих разложений (см. [1]).

Ниже мы получим  $\psi$  в виде ряда лишь по функциям  $N$ . Получаемое разложение эквивалентно тому, что упомянутый выше двойной

ряд по  $\psi$  и  $N$ , рассматриваемый как алгебраическое уравнение бесконечного порядка по  $\psi$ , разрешен относительно  $\psi$  и его решение представлено в виде ряда по  $N$ .

Для того, чтобы найти искомое разложение, заметим, что выражение (1), которое мы запишем в виде

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin(\alpha - \psi)} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{d\zeta}{\sqrt{\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(\zeta)}}, \quad (2)$$

задает в неявном виде функционал

$$\psi = \psi[N(\zeta)]. \quad (3)$$

Ясно, что если в (2) положить  $N = 0$ ,  $\psi = 0$ , то уравнение удовлетворяется. Следовательно,

$$\psi[0] = 0. \quad (4)$$

Функционал (3) может быть разложен в функциональный ряд Тейлора вида

$$\begin{aligned} \psi[N(\zeta)] = & \psi[0] + \int_0^h f(z)N(z)dz + \frac{1}{2!} \int_0^h \int_0^h \varphi(z_1, z_2)N(z_1)N(z_2)dz_1dz_2 + \\ & + \frac{1}{3!} \int_0^h \int_0^h \int_0^h F(z_1, z_2, z_3)N(z_1)N(z_2)N(z_3)dz_1dz_2dz_3 + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где функции  $f(z)$ ,  $\varphi(z_1, z_2)$ ,  $F(z_1, z_2, z_3)$  и т. д. являются функциональными (вариационными) производными функционала (3) в точке  $N = 0^*$ :

$$f(z) = \left[ \frac{\delta\psi[N(\zeta)]}{\delta N(z)} \right]_{N=0}, \quad \varphi(z_1, z_2) = \left[ \frac{\delta^2\psi[N(\zeta)]}{\delta N(z_1)\delta N(z_2)} \right]_{N=0}, \quad (6)$$

$$F(z_1, z_2, z_3) = \left[ \frac{\delta^3\psi[N(\zeta)]}{\delta N(z_1)\delta N(z_2)\delta N(z_3)} \right]_{N=0}.$$

Эти функции можно найти, выполняя вариационное дифференцирование соотношения (2) и полагая затем  $N = 0$ ,  $\psi = 0$ . При этом мы пользуемся следующими легко доказываемыми правилами: если  $f(x)$ —обычная функция, то

$$\frac{\delta f(\psi[N(\zeta)])}{\delta N(z)} = f'(\psi[N(\zeta)]) \frac{\delta\psi[N(\zeta)]}{\delta N(z)}; \quad (7)$$

$$\frac{\delta N(z_1)}{\delta N(z_2)} = \delta(z_1 - z_2). \quad (8)$$

Используя эти правила и дифференцируя (2) (в правой части дифференцируем под знаком интеграла), получим равенство:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha \cos(\alpha - \psi)}{\sin^2(\alpha - \psi)} \frac{\delta\psi}{\delta N(z)} = -\frac{1}{2h} \int_0^h \frac{2 \cos(\alpha - \psi) \sin(\alpha - \psi) \delta\psi / \delta N(z) - 2a\delta(z - \zeta)}{[\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(\zeta)]^{3/2}} d\zeta =$$

\* Определение и некоторые простейшие свойства вариационных производных можно найти, например, в [2]. Понятие вариационной производной широко применяется в квантовой теории поля и с ним можно ознакомиться по современным монографиям по этой дисциплине.

$$= -\sin(\alpha - \psi) \cos(\alpha - \psi) \frac{\delta\psi}{\delta N(z)} \frac{1}{h} \int_0^h \frac{d\zeta}{[\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(\zeta)]^{3/2}} + \quad (9)$$

$$+ \frac{a}{h} [\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(z)]^{-3/2}.$$

Полагая в (9)  $N = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $[\delta\psi/\delta N(z)]_{N=0} = f(z)$ , найдем:

$$\frac{f(z)}{\sin\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} f(z) + \frac{a}{h\cos^3\alpha},$$

откуда

$$f(z) = \frac{a}{h} \operatorname{tg}\alpha. \quad (10)$$

Продолжая этот процесс, продифференцируем равенство (9) в точке  $z'$ , что дает уравнение

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta N(z)\delta N(z')} \left\{ \frac{\operatorname{tg}\alpha \cos(\alpha - \psi)}{\sin^2(\alpha - \psi)} + \frac{\sin 2(\alpha - \psi)}{2} \frac{1}{h} \int_0^h [\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(\zeta)]^{-3/2} d\zeta \right\} =$$

$$= \frac{\delta\psi}{\delta N(z)} \frac{\delta\psi}{\delta N(z')} \left\{ -\operatorname{tg}\alpha \frac{1 + \cos^2(\alpha - \psi)}{\sin^3(\alpha - \psi)} + \cos 2(\alpha - \psi) \times \right.$$

$$\times \frac{1}{h} \int_0^h [\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(\zeta)]^{-3/2} d\zeta + \frac{3}{4} \sin^2 2(\alpha - \psi) \times \quad (11)$$

$$\times \frac{1}{h} \int_0^h [\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(\zeta)]^{-5/2} d\zeta \left. \right\} + \frac{3a^2}{h} [\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(z)]^{-5/2} \delta(z - z') -$$

$$- \frac{3a}{2h} \sin 2(\alpha - \psi) \left\{ [\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(z)]^{-5/2} \frac{\delta\psi}{\delta N(z')} + \right.$$

$$\left. + [\cos^2(\alpha - \psi) - 2aN(z')]^{-5/2} \frac{\delta\psi}{\delta N(z')} \right\}.$$

Положив здесь

$$N = 0, \psi = 0, \left[ \frac{\delta\psi}{\delta N(z)} \right]_{N=0} = f(z), \left[ \frac{\delta^2\psi}{\delta N(z_1)\delta N(z_2)} \right]_{N=0} = \varphi(z_1, z_2),$$

получим:

$$\varphi(z, z') = \frac{3a^2}{h} \operatorname{tg}\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \delta(z - z') - \frac{2a^2}{h^2} \operatorname{tg}\alpha(1 + 2\operatorname{tg}^2\alpha). \quad (12)$$

Аналогичным образом, дифференцируя (11), находим после довольно громоздких вычислений, что

$$F(z, z', z'') = \frac{15a^3}{h} \operatorname{tg}\alpha(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2 \delta(z - z') \delta(z - z'') -$$

$$- \frac{6a^3}{h^2} \operatorname{tg}\alpha(1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}^4\alpha) [\delta(z - z') + \delta(z - z'') + \delta(z' - z'')] + \quad (13)$$

$$+ \frac{2a^3}{h^3} \operatorname{tg}\alpha(3 + 20\operatorname{tg}^2\alpha + 21\operatorname{tg}^4\alpha).$$

Подставляя (10), (12) и (13) в формулу (5) и вводя обозначения

$$\bar{N} = \frac{1}{h} \int_0^h N(z) dz, \quad (\bar{N}^2) = \frac{1}{h} \int_0^h N^2(z) dz, \quad (\bar{N}^3) = \frac{1}{h} \int_0^h N^3(z) dz, \quad (14)$$

получим следующее разложение:

$$\begin{aligned} \psi[N(z)] = & \operatorname{tg} \alpha a \bar{N} - \operatorname{tg} \alpha (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha) (a \bar{N})^2 + \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) a^2 (\bar{N}^2) + \\ & + \frac{5}{2} \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 a^3 (\bar{N}^3) - 3 \operatorname{tg} \alpha (1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg}^4 \alpha) a \bar{N} a^2 (\bar{N}^2) + \\ & + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha (3 + 20 \operatorname{tg}^2 \alpha + 21 \operatorname{tg}^4 \alpha) (a \bar{N})^3 + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Первый член разложения (15) совпадает с приведенным в [1].

2. В случае сферически слоистой среды (1) заменяется соотношением

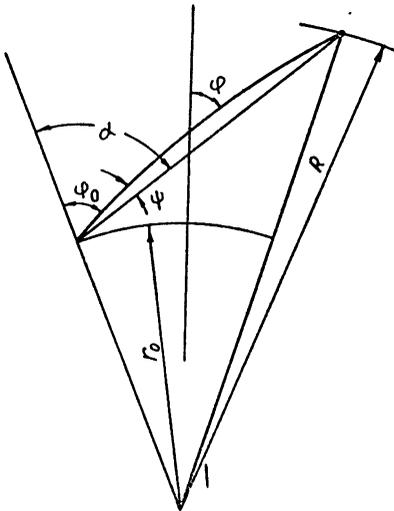


Рис. 2.

$$\begin{aligned} r_0 \sin(\alpha - \psi) \int_{r_0}^R \frac{dr}{r \sqrt{r^2 n^2(r) - r_0^2 \sin^2(\alpha - \psi)}} = \\ = \theta(\alpha) = \alpha - \arcsin(\rho \sin \alpha), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\rho = r_0/R$ , а остальные обозначения пояснены на рис. 2. Применяя к уравнению (16) ту же процедуру, которая была применена к уравнению (1), можно получить разложение:

$$\begin{aligned} \psi[N(r)] = & \frac{ar_0 \sin \alpha}{\theta'(\alpha)} \int_{r_0}^R \frac{r N(r) dr}{(r^2 - r_0^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} + \\ & + \frac{3a^2 r_0 \sin \alpha}{2 \theta'(\alpha)} \int_{r_0}^R \frac{r^3 [N(r)]^2 dr}{(r^2 - r_0^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} + \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{a^2 r_0^2}{2 [\theta'(\alpha)]^2} \left[ \sin^2 \alpha \frac{\theta''(\alpha)}{\theta'(\alpha)} - \sin 2\alpha \right] \left[ \int_{r_0}^R \frac{r N(r) dr}{(r^2 - r_0^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right]^2 - \\ & - \frac{3a^2 r_0^4 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha}{2 [\theta'(\alpha)]^2} \left[ \int_{r_0}^R \frac{r_1 N(r_1) dr_1}{(r_1^2 - r_0^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} \right] \left[ \int_{r_0}^R \frac{r_2 N(r_2) dr_2}{(r_2^2 - r_0^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \right] + \dots, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\theta'(\alpha) = 1 - \frac{\rho \cos \alpha}{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \alpha}}; \quad \theta''(\alpha) = -\frac{\rho(1 - \rho^2 \sin^2 \alpha)}{(1 - \rho^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}}. \quad (18)$$

(Ввиду большей сложности вычислений для случая сферически слоистой среды вычислены лишь первые два члена разложения.) При  $\rho = r_0/R \rightarrow 1$  формула (17) переходит в полученную выше формулу (15) для плоского случая. При выполнении этого перехода в интегралах, входящих в (17), следует положить  $r = r_0 + z$ ,  $R = r_0 + h$  и затем устремить  $r_0$  к бесконечности.

3. В качестве примера рассмотрим среду с линейной зависимостью  $N$  от высоты (плоский случай):

$$N(z) = \gamma z. \quad (19)$$

В этом случае можно получить точное решение задачи о рефракции, так как интегрирование в (2) выполняется и получающееся после этого уравнение разрешается относительно  $\text{tg}\psi$ :

$$\text{tg}\psi = \text{tg}\alpha \frac{1 + aN_0 \text{tg}^2\alpha - \sqrt{1 - 2aN_0 - a^2N_0^2 \text{tg}^2\alpha}}{2 + \text{tg}^2\alpha \left[ 1 + aN_0 + \sqrt{1 - 2aN_0 - a^2N_0^2 \text{tg}^2\alpha} \right]}. \quad (20)$$

Здесь  $N_0 = \gamma h$  — значение  $N$  в верхней точке траектории луча.

Сравним значения  $\psi$ , найденные по этой точной формуле, со значениями, вычисленными по формуле (15). В случае  $N(z) = \gamma z$  величины  $\bar{N}$ ,  $\overline{N^2}$  и  $\overline{N^3}$  принимают следующие значения:

$$\bar{N} = \frac{1}{2} N_0, \quad \overline{N^2} = \frac{1}{3} N_0^2, \quad \overline{N^3} = \frac{1}{4} N_0^3.$$

Подставляя их в формулу (15) и приводя подобные члены, получим:

$$\psi = \frac{1}{2} aN_0 \text{tg}\alpha + \frac{1}{4} a^2 N_0^2 \text{tg}\alpha + \frac{1}{12} a^3 N_0^3 \text{tg}\alpha (\text{tg}^2\alpha + 3) + \dots \quad (21)$$

Заметим, что для данного конкретного вида профиля  $N(z) = \gamma z$  в членах второго порядка по  $a$  взаимно уничтожаются слагаемые, пропорциональные  $\text{tg}^3\alpha$ , а в членах третьего порядка по  $a$  — слагаемые, пропорциональные  $\text{tg}^5\alpha$ .

На рис. 3 приведены зависимости  $\psi(\alpha)$  для случая  $aN_0 = 0,1$ ,  $n_0 = 0,894$ , построенные по точной формуле (на рисунке эта зависимость обозначена через  $\psi_0$ ) и по формулам

$$\psi_1 = \frac{1}{2} aN_0 \text{tg}\alpha, \quad \psi_2 = \frac{1}{2} aN_0 \text{tg}\alpha + \frac{1}{4} a^2 N_0^2 \text{tg}\alpha,$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2} aN_0 \text{tg}\alpha + \frac{1}{4} a^2 N_0^2 \text{tg}\alpha + \frac{1}{12} a^3 N_0^3 \text{tg}\alpha (\text{tg}^2\alpha + 3),$$

соответствующим первому, второму и третьему приближениям. На рис. 4 приведены те же зависимости, но для случая  $aN_0 = 0,2$ ,  $n_0 = 0,775$ . Кривые, вычисленные по точной формуле, обрываются в точке максимально возможной рефракции, соответствующей горизонтальному выходу луча из верхней точки его траектории.

В рассматриваемом примере линейного профиля  $N$  отношение  $\psi_2/\psi_1$  не зависит от  $\text{tg}\alpha$ , откуда следует, что поправка второго приближения существенна уже при малых значениях  $\alpha$ , что хорошо видно на рис. 4.

4. Рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что расчет рефракции по формуле (15) (или ее аналогу (17) для сферической модели) дает более точные результаты по сравнению с простейшей (линейной по  $N$ ) формулой. Для получения более удовлетворительных результатов вблизи точки максимально возможной рефракции целесообразно учесть следующие члены разложения функционала  $\psi[N(\zeta)]$ , что не представляет принципиальных трудностей и связано лишь с проведением более или менее громоздких выкладок.

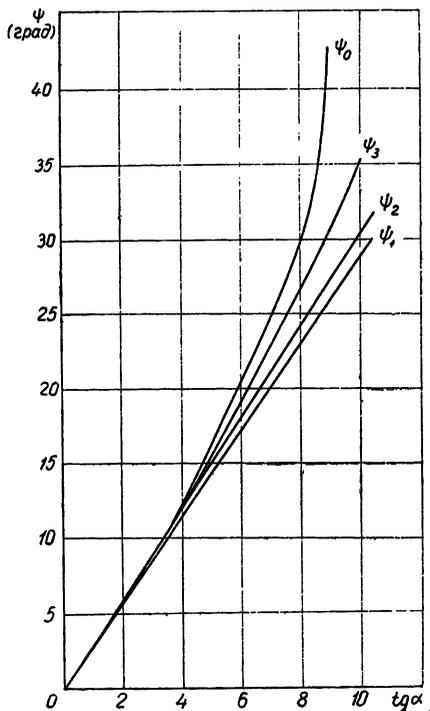


Рис. 3.

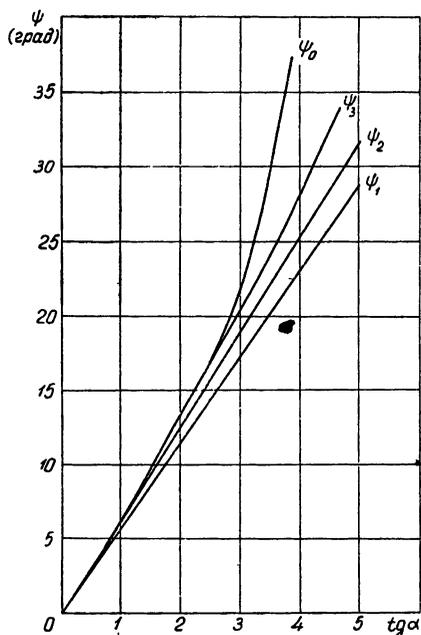


Рис. 4.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн в ионосфере, изд. АН СССР, М., 1960, § 28.
- 2 И. М. Гельфанд, С. В. Фомин, Вариационное исчисление, Физматгиз, М., 1961, § 6.

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
2 марта 1962 г.

## TO THE THEORY OF REFRACTION IN STRATIFIED NONUNIFORM MEDIUM

V. I. Tatarski

The expression is found for the refraction angle in a stratified nonuniform medium in the form of power series in the functionals of an electron density profile  $N(r)$  (or in a refraction index deviation from the unity). As an example a linear profile  $N(z) = \gamma z$  for which an exact solution may be obtained is considered. The accuracy of the suggested method of refraction calculation is discussed.

## О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ИЛИ КВАЗИНЕЙТРАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ С НЕОДНОРОДНЫМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ ПОЛЯМИ

М. А. Миллер

Рассматривается взаимодействие заряженных или квазинейтральных объектов с пространственно неоднородным нестационарным полем в приближении медленно изменяющихся амплитуд. Показано, что определенный класс «механизмов» параметрического взаимодействия между объектом и квазистатическим потенциальным полем может реализоваться и в высокочастотном случае. Приведены примеры, иллюстрирующие различные возможности: ускорение и торможение сгустков плазмы в амплитудно модулированных полях, а также их взаимодействие с бегущими полями усредненных сил.

1. Цель настоящей заметки состоит в пояснении одного из возможных механизмов параметрического взаимодействия заряженных или квазинейтральных объектов с пространственно неоднородными высокочастотными полями. Для простоты будем иметь дело с заряженными частицами или с устойчивыми изотропными диэлектрическими объектами (например, плазменным сгустком) небольших размеров, пренебрегая искажениями, вносимыми этими объектами во внешнее поле. Последнее запишем в виде:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_a(\mathbf{r})f(t)e^{i\omega t}; \quad H(\mathbf{r}, t) = H_a(\mathbf{r})f(t)e^{i\omega t}, \quad (1)$$

предполагая, что амплитуда является достаточно плавно изменяющейся функцией координат и времени. В нерелятивистском приближении соответствующие критерии сводятся к неравенствам [1,2]

$$\frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{c} \ll 1; \quad \frac{\Omega}{\omega} \sim \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{\omega L} \ll 1, \quad (2)$$

где через  $L$  и  $1/\Omega$  обозначены соответственно характерное расстояние  $L \sim E/|\nabla E| \sim H/|\nabla H|$  и время  $1/\Omega \sim f/f'$ , в пределах которых амплитуда поля (1) претерпевает заметные изменения. Действуя примерно так же, как и в случае полей с постоянными амплитудами [3], нетрудно получить в приближении (2) следующее усредненное по периоду  $2\pi/\omega$  уравнение движения [1]:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi(\mathbf{r})f^2(t), \quad (3)$$

где  $\Phi(\mathbf{r})$  — стационарный высокочастотный потенциал, свойства и возможные распределения которого подробно изучены в [1-3].

2. Усредненное уравнение (3) формально совпадает с уравнением движения материальной точки в квазистатическом силовом поле, так что любой квазистатической системе можно поставить в соответствие аналогичную высокочастотную [1,2]. С другой стороны, уравнение (3) является уравнением с изменяющимся во времени параметром, и, следовательно, определенный класс «механизмов» параметрического взаимодействия между объектом и квазистатическим потенциальным полем

должен реализоваться и в высокочастотном случае. Можно привести множество различных примеров, заимствуя хорошо известные результаты из электроники и даже из механики. Ниже мы ограничимся лишь несколькими иллюстрациями.

3. Рассмотрим одномерное движение частицы в окрестности точки минимума потенциала  $\Phi(z)$ . Совмещая начало отсчета ( $z = 0$ ) с этой точкой и удерживая в разложении  $\Phi(z)$  только члены второго порядка малости по  $z/L$  ( $\Phi(z) \approx \Phi(0) + (z^2/2)\Phi''(0)$ ), запишем уравнение (3) в виде:

$$\ddot{z} + \Omega^2 z f^2(t) = 0, \quad (4)$$

где  $\Phi''(0) = \Omega^2$ .

Остановимся на двух частных случаях, допускающих интегрирование (4) в известных функциях. Предположим сначала, что речь идет о синусоидально модулированном поле (1):  $f(t) = \cos(\tilde{\Omega}t)$ ; тогда (4) превращается в уравнение Матье, решение которого ограничено в пределах  $\Phi''(0) = \Omega^2 \leq 1,32 \tilde{\Omega}^2$  (первая зона устойчивости). При переходе через эту границу начинается параметрическая раскачка или успокоение колебаний в зависимости от их начальной фазы. Соответственно на этом принципе могут быть построены параметрический генератор высокочастотных колебаний или параметрический ускоритель плазменных сгустков.

Второй случай относится к апериодически модулированному полю. Если положить в (4)  $f(t) = e^{-at}$ , то, как нетрудно проверить, решение (4) будет иметь вид:

$$z = c_1 J_0\left(\frac{\Omega}{\alpha} e^{-at}\right) + c_2 N_0\left(\frac{\Omega}{\alpha} e^{-at}\right).$$

Здесь  $J_0$  и  $N_0$  — функция Бесселя и Неймана нулевого порядка,  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные константы. Пусть, например, сгусток налетает со скоростью  $\dot{z} = v_0$  на экспоненциально убывающий во времени параболический барьер высокочастотного потенциала  $\Phi = (z^2/2)\Phi''(0)$ , проходя в момент  $t = 0$  точку  $z = 0$ . Для простоты положим  $\Omega/\alpha = \mu_{01}$ , где  $\mu_{01} = 2,4$  — первый корень функции Бесселя, т. е.  $J_0(\mu_{01}) = 0$ . Тогда, очевидно, усредненное движение сгустка будет описываться формулой:

$$z = \frac{\pi v_0}{2\alpha} N_0(\mu_{01}) J_0(\mu_{01}) e^{-at}.$$

В результате в конце импульса (формально при  $t \rightarrow \infty$ , фактически при  $at \gg 1$ ) сгусток остановится в точке

$$z = \frac{\pi}{2} \frac{v_0}{\alpha} N_0(\mu_{01}) \approx 0,8 v_0/\alpha,$$

отдав начальную кинетическую энергию высокочастотному полю<sup>1</sup>.

Аналогичным образом можно рассчитать „высвечивание“ плазмы (или просто диэлектрика) внутри высокочастотного резонатора, а также ускорение под действием медленно включаемого высокочастотного импульса. Если в начальный момент времени сгусток покоился ( $\dot{z}=0$ ) в точке  $z = -z_0$ , то под действием экспоненциально растущего во

<sup>1</sup> Если, конечно, пренебречь рассеянием энергии в другие, отличные от (1) поля. В резонансных системах это возможно при  $\Omega Q \ll \omega_0$ , где  $Q$  — добротность,  $\omega_0$  — резонансная частота; последняя, естественно, зависит от положения сгустка в резонаторе, так что всегда имеет место эффект частичного «схлопывания» поля.

времени высокочастотного поля ( $f(t) = e^{+at}$ ,  $\Omega/\alpha = \mu_{01}$ ) он будет вытолкнут за пределы потенциального барьера и достигнет плоскости  $z = 0$  в момент

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\mu_{01}\alpha}{\Omega},$$

обладая скоростью

$$\dot{z} = z_0 \alpha \mu_{01} J_1(\mu_{01}) = 1,25 \alpha z_0.$$

Все другие оценки параметров ускорителей такого рода практически совпадают с содержащимися в работе [4], хотя там речь идет только о стационарных полях.

4. Приведем в конце еще один пример, поясняющий возможности взаимодействия сгустков с существенно протяженными полями усредненных сил. Рассмотрим сквозное движение в поле с синусоидально модулированным в пространстве и времени высокочастотным потенциалом

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \sin(hz); \quad f(t) = \cos(\tilde{\Omega}t). \quad (5)$$

Если соблюдены условия параметрического резонанса ( $v_0 h = \tilde{\Omega}$ ), которые одновременно являются условиями синхронизации сгустка с бегущей компонентой поля (5), то соответствующую систему следует рассматривать как высокочастотный генератор, работающий в режиме низкочастотной ЛБВ, т. е. в режиме синхронизации с сильно замедленной низкочастотной огибающей усредненного силового поля.

Интересной разновидностью такой системы является устройство, позволяющее осуществлять перекачку энергии из одного силового поля в другое без каких-либо изменений, вносимых в движение плазменных сгустков. Допустим, что наряду с (5) имеется еще и другое силовое поле с потенциалом

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 - \Phi_1 \sin(hz); \quad f(t) = \cos(\tilde{\Omega}t). \quad (6)$$

Это может быть усредненный высокочастотный потенциал поля другой частоты [1], потенциал поля квазиэлектростатических пондермоторных сил [3] и т. п. Поскольку  $\Phi + \tilde{\Phi} = \text{const}$ , то под действием суперпозиции (5) и (6) сгусток будет двигаться с постоянной скоростью  $z = v_0$  ( $z = v_0 t + z_0 \equiv v_0 t + \varphi_0/h$ ), осуществляя между тем перекачку энергии из одного поля в другое.

Действительно, для энергии взаимодействия между сгустком и полем (5) с точностью до несущественных сейчас множителей найдем

$$\begin{aligned} W_{вз} &\sim \int_0^{2\pi/\tilde{\Omega}} v_0 \nabla_z \Phi \cos(\tilde{\Omega}t) dt = -v_0 \Phi_1 h \int_0^{2\pi/\tilde{\Omega}} \cos(\tilde{\Omega}t + \varphi_0) \cos(\tilde{\Omega}t) dt = \\ &= \text{const} \cos \varphi_0. \end{aligned} \quad (7)$$

При  $\text{const} > 0$  все сгустки, влетающие в поле с начальными фазами  $-\pi/2 < \varphi_0 < +\pi/2$ , совершают положительную работу в силовом поле (5), что приводит к усилению этого поля за счет энергии, черпаемой из поля (6). В конечном счете взаимная компенсация потенциалов (5) и (6) нарушится и система расфазирована, если, конечно, не принять специальных мер по постепенному выравниванию амплитуд распределений (5) и (6).

При оценке параметров систем такого типа следует иметь в виду, что приведенные выше рассуждения относились к взаимодействию сгустков со сторонними полями, заданными извне и не изменяющимися в процессе взаимодействия. Такие условия реализуются либо при квазистатической перестройке резонансных систем, либо при работе вдали от резонанса, когда изменение резонансной частоты под влиянием сгустка несущественно сказывается на амплитуде управляющего поля.

В заключение отметим, что выше мы умышленно опустили многие важные подробности, стремясь подчеркнуть лишь физическую сторону проблемы. Несколькo условным является отнесение всех описанных выше систем к числу параметрических, что, однако, может быть оправдано некоторой неопределенностью этого термина.

Автор признателен В. И. Беспалову, А. В. Гапонову, Б. Г. Еремину и С. Б. Моченеву за полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Миллер, Диссертация, НИРФИ, Горький, 1960.
2. M. A. Miller, Proc. Intern. Conf. High Energy Acc. and Instr., CERN, 1959, p. 662.
3. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 3, 110 (1958); 2, 439 (1959).
4. В. Б. Гильденбург, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 97 (1960).
5. Г. А. Аскарьян, Диссертация, ФИАН, М., 1961.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
19 декабря 1961 г.

### ON PARAMETRIC INTERACTION OF CHARGED OR QUASI-NEUTRAL OBJECTS WITH NONUNIFORM HIGH FREQUENCY FIELDS

*M. A. Miller*

Interaction of charged or quasi-neutral objects with space nonuniform non-stationary field is considered in approximation of slowly varying amplitudes. It is shown that a certain class of „mechanisms“ of parametric interaction between an object and a quasistatic potential field can appear in a high frequency case. Some examples are presented to illustrate various possibilities: acceleration and retarding of plasma in amplitude modulated fields as well as their interaction with travelling fields of averaged forces.

## НИЖНЯЯ ЧАСТОТНАЯ ГРАНИЦА ВЫСОКОЧАСТОТНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛА В ПЛАЗМЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СТОЛБА

К. С. Головановский, А. А. Кузовников

Изучены частотные характеристики эффекта ограничения радиальной диффузии ионов плазмы положительного столба неоднородным высокочастотным полем в области низких радиочастот. Обнаружено изменение радиального диффузионного тока в поле высокочастотного усредненного потенциала и зависимость граничной частоты изучаемого эффекта от плотности ионов плазмы. Последний результат интерпретируется с точки зрения динамики процесса поляризации плазмы во внешнем электрическом поле.

### 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вопросу о взаимодействии плазмы с переменным неоднородным электромагнитным полем посвящено значительное число теоретических работ (см., например, [1-4]). В большинстве из них рассматривалась модельная задача об усредненном по периоду колебаний движении одиночной заряженной частицы, не испытывающей столкновений с другими частицами в переменном во времени и неоднородном в пространстве электромагнитном поле. Оказалось [5], что такое движение описывается потенциальной функцией вида

$$\Phi = eE^2/4m\omega^2, \quad (1)$$

где  $e$ ,  $m$ —заряд и масса частицы,  $E$ ,  $\omega$ —амплитуда в точке и частота поля.

Этот результат был получен путем разложения движения частицы на быстрое (колебательное в однородном поле) и медленное (дрейфовое в неоднородном поле) движение. Аналогичным методом нетрудно получить выражение для дрейфа частицы в газе. Если частота столкновений равна  $\nu$ , то

$$\Phi = eE^2/4m(\omega^2 + \nu^2). \quad (2)$$

В дальнейшем изложении величина  $\Phi$  будет называться высокочастотным квазипотенциалом.

Формулы (1) и (2), вообще говоря, неприменимы к реальной плазме, так как внешнее поле  $E$  сильно искажается полем объемных зарядов, возникающих в плазме при движении частиц. Попытка учесть поля объемных зарядов была сделана Вайбелем [6]; однако полученная им система уравнений для распределения плотности плазмы в электромагнитном поле не решена. Кроме того, как легко видеть, при  $\omega \rightarrow 0$ , согласно (1),  $\Phi \rightarrow \infty$ , а согласно (2),  $\Phi$  стремится к  $eE^2/4m\nu^2$ , т. е. к конечному пределу. Оба эти результата лишены смысла, если их прилагать к реальной плазме, например, плазме положительного столба, так как время взаимодействия заряженных частиц с полем заведомо ограничено, например, временем жизни частиц; это совместно с другими эффектами, речь о которых будет идти ниже, должно привести к тому, что в реальной плазме  $\Phi \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Другими словами, ВЧ квазипотенциал должен иметь нижнюю частотную границу.

Рассмотрим кратко некоторые факторы, которые, по нашему мнению, должны определять нижнюю частотную границу ВЧ квазипотенциала в плазме положительного столба.

*а) Время пролета частицей области неоднородного ВЧ поля.* Электроны и ионы дрейфуют в положительном столбе вдоль оси со скоростями  $v_e$  и  $v_i$ . Если считать, что внешнее ВЧ поле локализовано в некоторой области положительного столба размером  $L$ , то время взаимодействия электронов и ионов с полем будет порядка  $L/v_e$  и  $L/v_i$  соответственно. Для справедливости усреднения движения частицы по времени необходимо, чтобы время пролета области ВЧ поля превышало период колебаний последнего, так как времена, характеризующие дрейфовое движение в поле квазипотенциала, намного больше периода колебаний. Следовательно, эффект конечного времени пролета должен налагать ограничение снизу на частоту ВЧ поля:

$$\tau_e^{\text{пр}} = \frac{L}{v_e} > \frac{2\pi}{\omega}; \quad \tau_i^{\text{пр}} = \frac{L}{v_i} > \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3)$$

где  $\omega$  — частота поля.

Ясно, что нижнюю частотную границу будет фактически определять большее из этих двух времен, т. е. второе из неравенств (3).

*б) Время жизни заряженных частиц.* Одновременно с дрейфовым движением вдоль трубки электроны и ионы, рождающиеся в объеме, движутся к стенкам, где происходит рекомбинация, либо рекомбинируют в объеме на пути к стенке. При давлениях газа порядка 1 мм рт. ст. и ниже и таких радиусах разрядных трубок, когда положительный столб находится в диффузионном режиме, второй процесс играет ничтожную роль по сравнению с первым [7]. В этих условиях время жизни частицы определяется процессом амбиполярной диффузии [7]:

$$\tau_{\text{диф}} = \Lambda^2/D_a, \quad (4)$$

где  $\Lambda$  — диффузионная длина, а  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии. Граница справедливости этой формулы определяется границей существования диффузионного режима положительного столба при понижении давления.

Таким образом, необходимым условием существования ВЧ квазипотенциала в плазме является выполнение неравенства

$$\tau_{\text{диф}} > 2\pi/\omega. \quad (5)$$

*в) Время формирования объемного заряда.* При наложении внешнего переменного электрического поля на плазму она периодически поляризуется, если отсутствуют условия для прохождения стационарного тока. В процессе поляризации электрическое поле  $E$ , которое в момент наложения внешнего поля равно  $E_{\text{внеш}}$ , уменьшается из-за возникновения противоположно направленного поля объемных зарядов и через достаточно большой промежуток времени становится сколь угодно близким к нулю. Другими словами, при наложении синусоидального поля в плазме поле не является синусоидальным, т. е. оно обогащается гармониками высших порядков за счет уменьшения амплитуды первой гармоники с частотой  $\omega$ . Вклад этой частоты в величину ВЧ квазипотенциала является наибольшим, как легко видеть из формул (1) и (2). Таким образом, если частота внешнего поля меньше величины, обратной характерному времени установления объемного заряда в плазме  $\tau_{0,3}$ , то амплитуда электрического поля с частотой внешнего поля будет малой. Из этого следует, что нижняя частотная граница ВЧ квазипотенциала в плазме может определяться характерным временем установления объемного заряда.

По-видимому, могут существовать и другие факторы, существенно влияющие на частотные свойства квазипотенциала (например, резонансно-взаимодействие ВЧ поля с плазмой). Однако, как будет видно из дальнейшего, вся картина эффектов, связанных с нижней частотной границей квазипотенциала в плазме, в основном определяется перечисленными факторами.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе мы ставили перед собой следующую задачу: а) выяснить экспериментально, существует ли нижняя частотная граница и, если она существует, то

б) исследовать зависимость частотной границы от параметров плазмы, определяющих три фактора, рассмотренных выше, т. е. от давления газа (диффузионное время жизни и скорость дрейфа), разрядного тока (плотность ионов) и радиуса разрядной трубки (диффузионное время жизни).

## 3. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА

Ранее было показано [8,9], что при наложении на положительный столб ВЧ электрического поля, образующего квазипотенциальный рельеф, провисающий у оси, ионный диффузионный ток на стенку  $j_{ir}$  уменьшается на величину

$$|\Delta j_{ir}| = en (\nabla\Phi_e + \nabla\Phi_i) \frac{b_e b_i}{b_e + b_i}, \quad (6)$$

где  $b_i$ ,  $b_e$  — подвижности ионов и электронов.

Измерения, произведенные в настоящей работе, базировались на этом эффекте. В самом деле, регистрируя изменение ионного тока на стенку при включении поля и относя его к ионному току в отсутствие поля, мы получим величину, являющуюся мерой действия ВЧ квазипотенциала. Неудобным является тот факт, что  $|\Delta j_{ir}|$  определяется как ионным, так и электронным квазипотенциалом, причем зависимость их от частоты внешнего поля различна. Поэтому эксперимент ставился так, чтобы по возможности свести до минимума действие одного из этих квазипотенциалов по сравнению с другим. Этого легко было добиться, налагая ВЧ поле на часть положительного столба, настолько малую, что фазовый угол дрейфового пролета электронами области ВЧ поля был меньше  $2\pi$  в масштабе частоты внешнего поля. Ионы же, дрейфующие значительно медленнее, полностью испытывали на себе действие ВЧ квазипотенциала. Таким образом, в этих условиях практически  $\nabla\Phi_e = 0$  и

$$|\Delta j_{ir}| = en b_i \nabla\Phi_i, \quad (7)$$

так как  $b_e \gg b_i$ .

Мерой эффекта ВЧ квазипотенциала является отношение

$$\frac{\Delta j_{ir}}{j_{ir0}} = \frac{n}{\nabla n} \frac{e}{kT_e} \nabla\Phi_i, \quad (8)$$

где  $j_{ir0}$  — плотность ионного радиального тока в отсутствие внешнего ВЧ поля. Если выбрать амплитуду ВЧ поля достаточно малой, чтобы существенно не возмущать электронную температуру и распределение плотности ионов по сечению столба, то отношение (8) пропорционально ионному ВЧ квазипотенциалу.

Конструкция разрядной трубки (рис. 1) обеспечивала получение

плазмы с тремя различными диффузионными временами жизни ионов при одинаковом давлении газа. Трубка содержала один оксидный катод косвенного подогрева  $K$  и три анода ( $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ ), впаянных в отrostки с диаметром соответственно 3, 5 и 2 см. Каждый из отrostков был снабжен цилиндрическим зондом ( $\text{ЦЗ}_1$ ,  $\text{ЦЗ}_2$  и  $\text{ЦЗ}_3$ ), сделанным из молибденовой проволоки диаметром 0,02 см и плоским стеночным зондом ( $\text{ПЗ}_1$ ,  $\text{ПЗ}_2$  и  $\text{ПЗ}_3$ ), изготовленным из круглого никелевого диска толщиной 0,02 см и диаметром 0,4 см и впаянным на молибденовом вводе. Цилиндрические зонды предназначались для определения параметров плазмы на оси отrostков; стеночные зонды

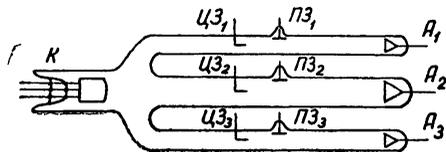


Рис. 1. Разрядная трубка.

использовались для исследования ионного тока на стенку во внешнем ВЧ поле. Для подавления анодных колебаний анодам придавалась форма полых конусов.

Перед работой трубка подвергалась вакуумной обработке и наполнялась исследуемым газом. Вакуумная обработка заключалась в откачке трубки до давления  $10^{-6}$  мм рт. ст., прогреве ее в электрической печи при температуре  $400^\circ\text{C}$  в течение 3—4 часов при непрерывной откачке, обезгаживании и активировании оксидного катода при наполнении лопушки вакуумной установки жидким азотом и обезгаживании анодов прогревом в высокочастотной печи. После этой процедуры трубка наполнялась газом и тренировалась разрядом при токе 0,5 а в течение нескольких часов. Затем трубка откачивалась до высокого вакуума, вновь наполнялась газом до нужного давления и отпаивалась при накаливаемом катоде. Наполнением служил спектрально чистый неон при давлениях 1; 0,35 и 0,1 мм рт. ст. Рабочее давление газа регистрировалось термомпарным и  $U$ -образным масляным манометрами.

Блок-схема установки изображена на рис. 2. Разряд питался от стабилизированного выпрямителя через цепь проволочных реостатов, регулировавших разрядный ток. Питание зондов производилось от аккумуляторных батарей. Напряжение высокой частоты подавалось на медную пластину (ВЧ электрод) размером  $26 \text{ мм} \times 19 \text{ мм}$ , наложенную на внешнюю поверхность стекла в области стеночного зонда, и регистрировалось катодным вольтметром.

Установка позволяла менять разрядные токи от 0,1 до 100 ма и частоту поля от 10 кгц до  $10^4$  кгц. Напряжение высокой частоты на ВЧ электроде относительно земли поддерживалось равным 25 в.

Установка позволяла менять разрядные токи от 0,1 до 100 ма и частоту поля от 10 кгц до  $10^4$  кгц. Напряжение высокой частоты на ВЧ электроде относительно земли поддерживалось равным 25 в.

В таблице 1 сведены параметры плазмы для всех четырех давлений и трех радиусов трубок. Как видно из таблицы, при всех рабочих давлениях в трубках осуществлялся диффузионный режим положительного столба. В процессе работы мы могли изменять плотность ионов более, чем на два порядка (от  $10^8 \text{ см}^{-3}$  до  $2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ).

Методика измерений заключалась в следующем. При данном дав-

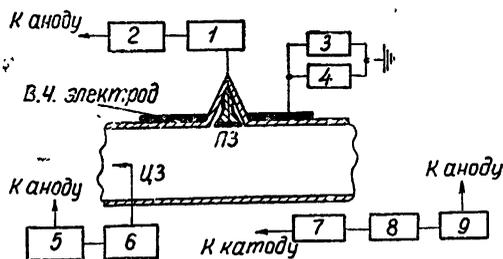


Рис. 2. Блок-схема экспериментальной установки:

1, 2—источник питания и регистрация тока плоского зонда; 3, 4—генератор ВЧ колебаний и регистрация напряжения высокой частоты; 5, 6—источник питания и регистрация тока цилиндрического зонда; 7, 8, 9—источник питания разряда, регулировка и измерение его тока.

Таблица 1\*

Радиус трубки $R_{тр}$ (см)	$P$ (мм рт. ст.)	$\lambda_i/R_{тр}$	$(\tau_e^{пр})^{-1}$ (кГц)	$(\tau_i^{пр})^{-1}$ (кГц)	$(\tau_{диф})^{-1}$ (кГц)	$\nu_e$ (кГц)	$\nu_i$ (кГц)
1	1	$5,2 \cdot 10^{-3}$	1760	8	84	$2 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^4$
	0,35	$1,48 \cdot 10^{-2}$	3330	43	330	$8 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^3$
	0,1	$5,2 \cdot 10^{-2}$	10650	176	1490	$2,7 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^3$
1,5	1	$3,5 \cdot 10^{-3}$	1640	7,4	37	$1,9 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^4$
	0,35	$0,99 \cdot 10^{-2}$	2860	40	150	$7,6 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^3$
	0,1	$3,5 \cdot 10^{-2}$	8300	163	660	$2,2 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^3$
2,5	1	$2,1 \cdot 10^{-3}$	870	3,8	13	$1,9 \cdot 10^6$	$1,4 \cdot 10^4$
	0,35	$5,9 \cdot 10^{-3}$	1670	23	53	$7,2 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^3$
	0,1	$2,1 \cdot 10^{-2}$	5560	103	238	$1,8 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^3$

лении в каждой трубке измерялось изменение ионного тока на стеночный зонд  $\Delta i_r$ , в зависимости от частоты внешнего поля (при постоянном потенциале зонда около 110 в относительно анода). Это изменение относилось к ионному току на зонд  $i_{r0}$  при том же потенциале зонда в отсутствие поля. Отношение  $\Delta i_r/i_{r0}$  принималось за меру эффекта. Все измерения производились для различных фиксированных значений разрядного тока, которым соответствовали определенные значения  $n$ , вычисленные из зондовых характеристик цилиндрического зонда для данных разрядных токов.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Первые же опыты показали, что при наложении ВЧ поля на область столба вблизи стеночного зонда ионный ток на стеночный зонд изменялся. Если ВЧ электрод помещался с той стороны трубки, где находился стеночный зонд (рис. 3а), то ионный ток уменьшался. Чтобы убедиться в том, что знак изменения ионного тока зависит от знака градиента амплитуды электрического поля, мы помещали ВЧ электрод со стороны трубки, противоположной стеночному зонду (рис. 3б). При этом, как и ожидалось, ионный ток возрастал.

Результаты измерений частотных характеристик относительного изменения ионного тока на стеночный зонд при наложении внешнего переменного поля представлены на рис. 4—6. Легко видеть, что интенсивность эффекта существенно зависит от частоты, причем во всех случаях наблюдается нижняя частотная граница. Следует отметить, что эта граница не является настолько резкой, чтобы ее можно было охарактеризовать строго определенной частотой. В качестве критерия нижней частотной границы естественно выбрать точку в области перехода нарастающей части кривой в плато, соответствующую пересечению продолжений прямолинейных частей характеристики.

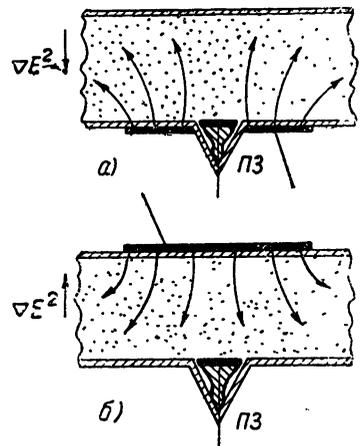


Рис. 3. а) Ионный ток на зонд уменьшается, б) ионный ток на зонд увеличивается. Стрелками изображены силовые линии электрического поля.

\* Весь справочный материал взят из книг [11—13]. Для оценки  $\tau_e^{пр}$  и  $\tau_i^{пр}$  в первом приближении длина  $L$  области столба, в которой сосредоточено ВЧ поле, принималась равной длине ВЧ электрода (2,9 см).

Из графиков видно, что насыщение кривых не всегда выражается ровным плато. Часто, особенно при высоких давлениях, плато быстро

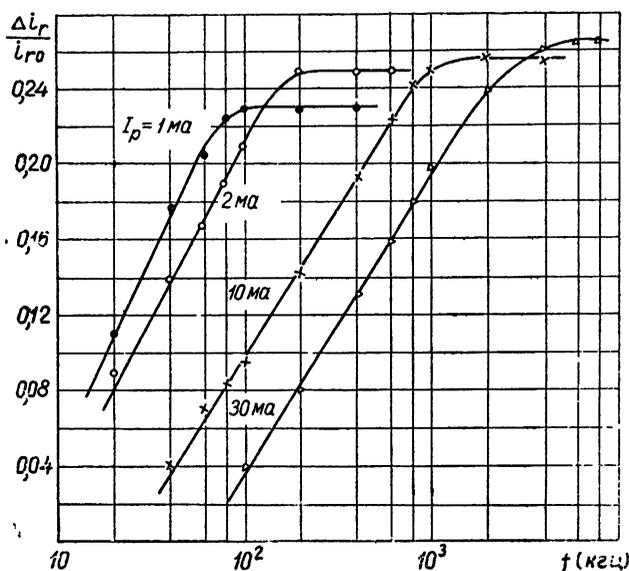
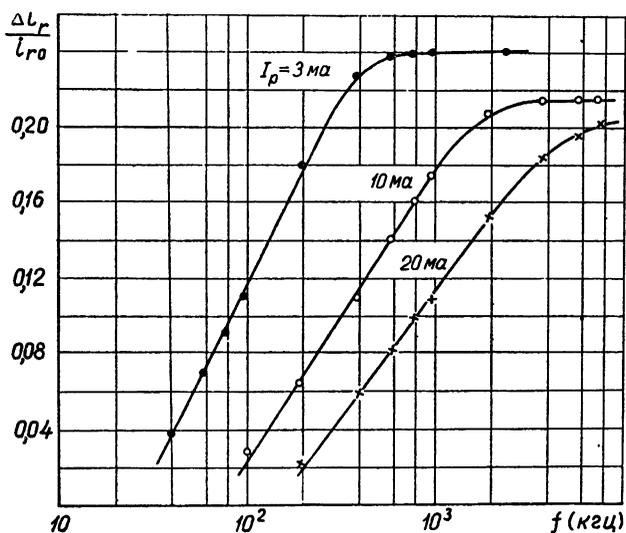


Рис. 4. Нижняя частотная граница при давлении  $P=0,1$  мм рт. ст. в Ne:

а)  $R_{тр} = 1$  см; б)  $R_{тр} = 1,5$  см.

переходит в спадающую часть кривой. Однако этот эффект не относится к нижней частотной границе и поэтому обсуждаться в этой статье не будет. В случаях, когда плато переходило в ниспадающую часть, мы использовали для определения граничной частоты горизонтальную касательную к кривой.

Определенная таким образом граничная частота ВЧ квазипотенциала существенно зависела от плотности плазмы и практически не зависела от радиуса разрядной трубки. Это хорошо видно на рис. 7, где изо-

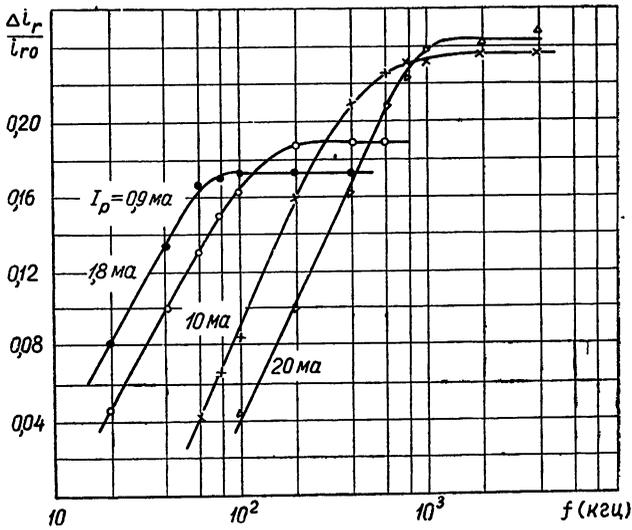


Рис. 4. Нижняя частотная граница при давлении  $P = 0,1$  мм рт. ст. в Ne:  
в)  $R_{\text{ТР}} = 2,5$  см,

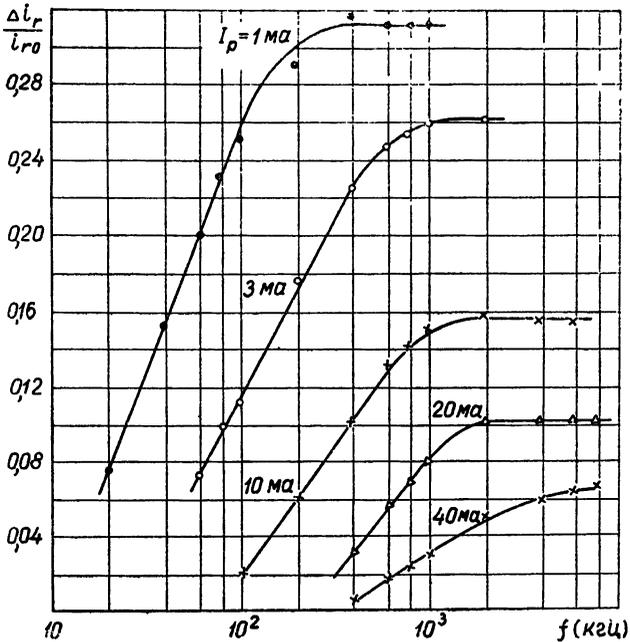


Рис. 5. Нижняя частотная граница при давлении  $P = 0,35$  мм рт. ст. в Ne:  
а)  $R_{\text{ТР}} = 1$  см.

бражены зависимости граничной частоты от плотности ионов для разных трубок при разных давлениях. Точки, соответствующие различным трубкам при одном и том же давлении, укладывались на одну кривую. В зависимости от давления эти кривые располагались одна над другой, причем, чем ниже давление, тем большим граничным частотам соответствовал эффект. Зависимость граничной частоты от концентрации ионов в логарифмическом масштабе представляет собой прямую линию

с тангенсом угла наклона, равным приблизительно 0,5 (в диапазоне концентраций  $10^9 \text{ см}^{-3}$  и выше). При малых концентрациях ( $10^8 \div 10^9 \text{ см}^{-3}$ ) наблюдается отступление от этого закона, увеличивающееся с уменьшением давления.

Практически во всех случаях граничная частота превышала времяпролетную частоту  $\nu_i/L$  и частоту ионизации  $1/\tau_{\text{диф}}$ .

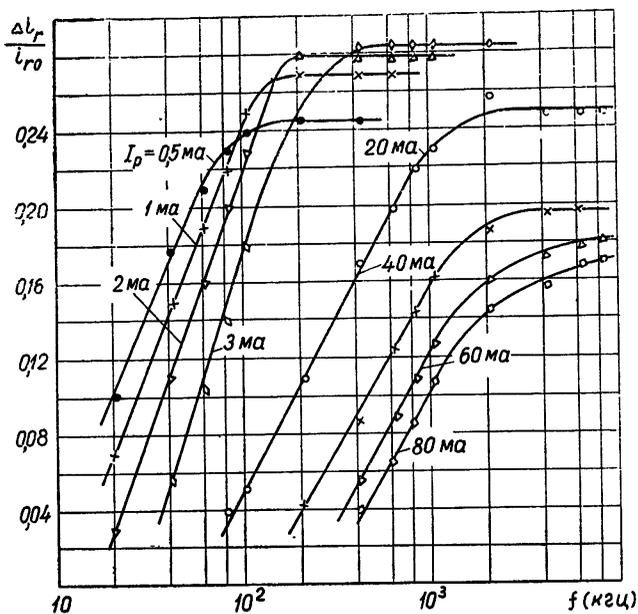
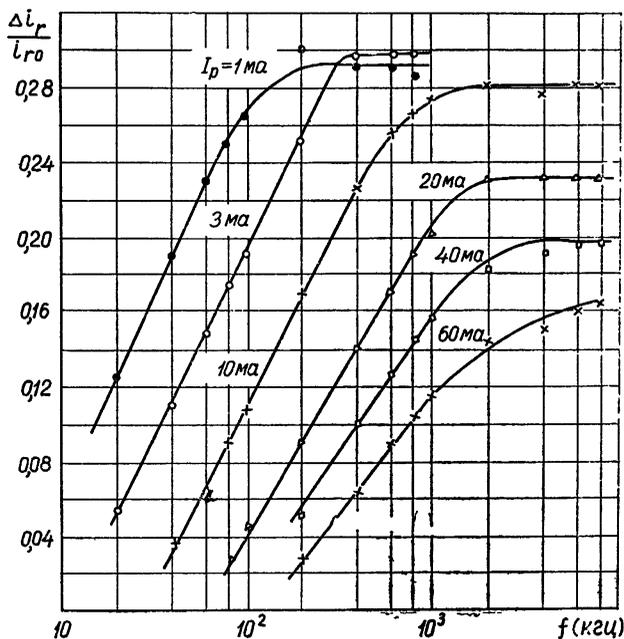


Рис. 5. Нижняя частотная граница при давлении  $P=0.35 \text{ мм рт. ст. в Ne}$ :

б)  $R_{\text{ГР}} = 1,5 \text{ см}$ ; в)  $R_{\text{ГР}} = 2,5 \text{ см}$ .

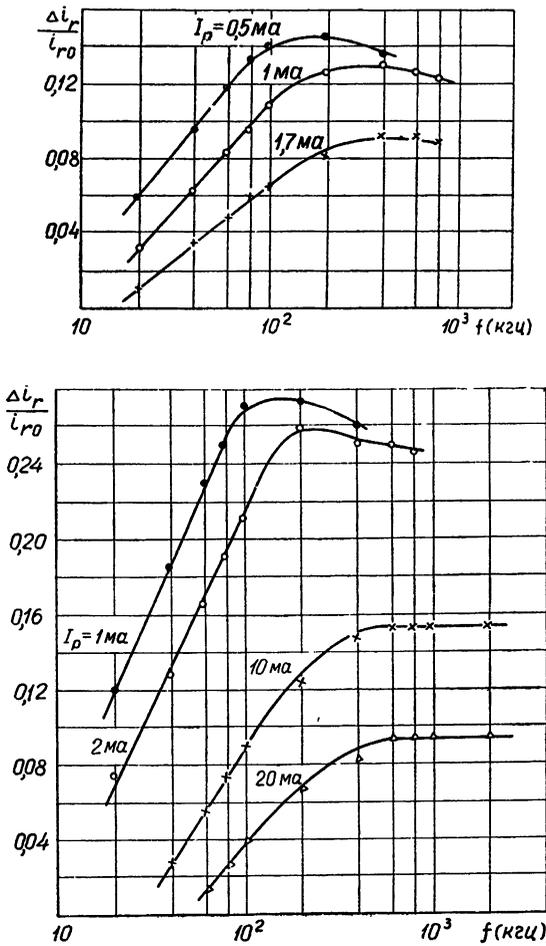


Рис. 6. Нижняя частотная граница при давлении  $P = 1$  мм рт. ст. в Ne;  
 а)  $R_{тр} = 1$  см; б)  $R_{тр} = 1,5$  см.

### 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Таким образом, основным экспериментальным результатом является тот факт, что граничная частота квазипотенциала определяется плотностью ионов, причем при концентрациях  $10^9$  см<sup>-3</sup> и выше эта зависимость выражается соотношением

$$\lg f_r = \lg A + \lg \sqrt{n} . \quad (9)$$

Если бы нижняя частотная граница определялась временем пролета ионов или временем их жизни, то никакой зависимости ее от плотности плазмы не должно было бы наблюдаться. Зависимость граничной частоты от концентрации ионов указывает на существенную роль, которую играет в изучаемом явлении действие объемных зарядов. В самом деле, легко показать, что толщина слоя объемного заряда, необходимого для полной экранировки внешнего поля, образованного разностью потенциалов на границах плазмы  $U_0$ ,

$$d = \sqrt{U_0 / 4\pi en} . \quad (10)$$

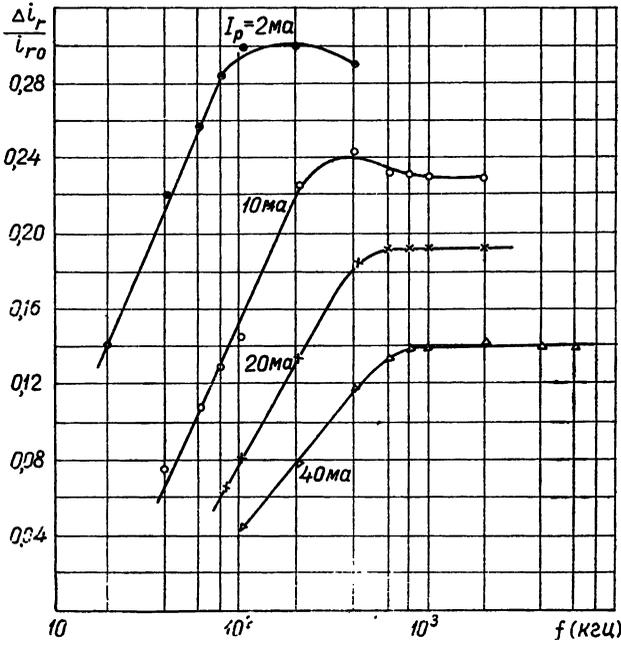


Рис. 6. Нижняя частотная граница при давлении  $P=1$  мм рт. ст. в Ne:  
в)  $R_{TP}=2,5$  см.

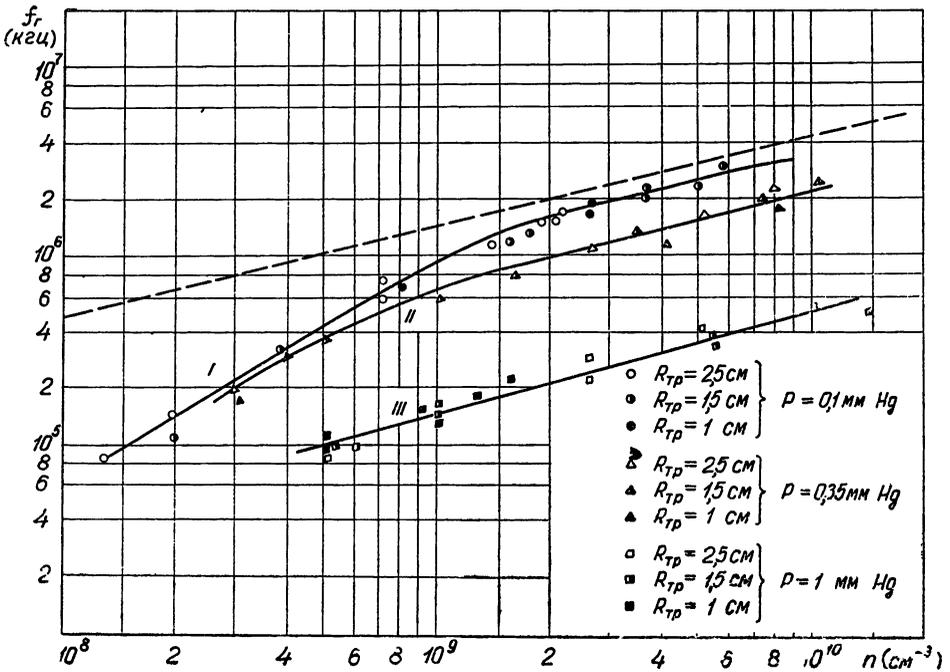


Рис. 7. Сводный график для частотных границ  $f_r$  в неоне для разных давлений  $P$  и радиусов трубок  $R_{TP}$ :

I— $P=0,1$  мм рт. ст.; II— $P=0,35$  мм рт. ст.; III— $P=1$  мм рт. ст. (светлые точки соответствуют  $R_{TP}=2,5$  см, зачерненные наполовину— $R_{TP}=1,5$  см, черные— $R_{TP}=1$  см; пунктирной линией отмечена ионная ленгмюровская частота).

Время формирования этого слоя приближенно равно

$$\tau_{03} = d/v_i = \sqrt{U_0/4\pi en v_i^2}. \quad (11)$$

Следовательно, частота, характерная для формирования объемного заряда,

$$f_{03} = \sqrt{4\pi en v_i^2/U_0}; \quad (12)$$

в логарифмическом масштабе

$$\lg f_{03} = \lg (4\pi en v_i^2/U_0)^{1/2} + \lg \sqrt{n}. \quad (13)$$

Таким образом, зависимость частоты формирования объемного заряда от концентрации ионов качественно та же, что и зависимость (9) граничной частоты от  $n$ . Если эти две частоты тождественны, то

$$A = (4\pi en v_i^2/U_0)^{1/2}. \quad (14)$$

Значение  $A$  нетрудно найти из графиков рис. 7. Тогда из (14) можно вычислить  $v_i$  для каждого давления. Эти значения приведены в таблице 2. При  $d \gg \lambda_i$  под  $v_i$  следует понимать дрейфовую скорость, так как при формировании слоя объемного заряда ионы испытывают боль-

Таблица 2

$P$ (мм рт. ст.)	$v_i$ (см сек <sup>-1</sup> )	$\lambda_i$ (см)	$d$ (см)		
			$n=10^8$ см <sup>-3</sup>	$n=10^9$ см <sup>-3</sup>	$n=10^{10}$ см <sup>-3</sup>
0,1	$14,8 \cdot 10^4$	$55 \cdot 10^{-3}$	$36 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$
0,35	$8,2 \cdot 10^4$	$17 \cdot 10^{-3}$	$36 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$
1,0	$2,0 \cdot 10^4$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$36 \cdot 10^{-2}$	$11 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$

шое число столкновений. В противном случае, когда  $d \ll \lambda_i$ ,  $v_i$  есть средняя скорость иона, свободно ускоряемого на расстоянии  $d$ , так что

$$v_i = \bar{v}_i = \frac{1}{d} \int_0^d \sqrt{2eEx/M} dx \approx \frac{2}{3} \sqrt{eU_0/M}, \quad (15)$$

поскольку  $E \approx U_0/2d$  ( $M$ —масса иона). Характерная частота

$$f_{03} = (4\pi/3) \sqrt{e^2 n/\pi M}. \quad (16)$$

Таким образом, при  $d \ll \lambda_i$  характерная частота для объемного заряда равна ионной ленгмюровской частоте с точностью до постоянного коэффициента порядка единицы (этот коэффициент есть результат нестрогости проведенного качественного расчета).

Из таблицы 2 видно, что значения  $v_i$ , найденные из (14), имеют разумные значения и правильно изменяются с давлением [10].

Относительно спада кривых  $\lg f_r$  в зависимости от  $\lg n$  для низких давлений при малых  $n$  (рис. 7) можно предположить, что с уменьшением концентрации ионов толщина слоя растет и поэтому отношение  $\lambda_i/d$  уменьшается, что может привести к уменьшению средней скорости иона на длине  $d$ . Следовательно, граничная частота также должна понижаться.

Итак, в настоящей работе получены следующие результаты.

1) Обнаружено предсказанное теорией изменение ионного тока на стенку в присутствии ВЧ неоднородного поля.

2) Экспериментально показано, что ВЧ квазипотенциал в плазме имеет нижнюю частотную границу.

3) Установлено, что граничная частота определяется плотностью ионов и, как правило, превышает частоту ионизации и времяпролетную частоту. Зависимость граничной частоты от плотности ионов удовлетворительно объясняется эффектом объемных зарядов.

Авторы благодарны Н. А. Капцову за интерес к данной работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ, 34, 242 (1958).
2. Т. Ф. Волков, сб. Физика плазмы и проблема упр. терм. реакций, 3, изд. АН СССР, М., 1958.
3. Р. З. Сагдеев, сб. Физика плазмы и проблема упр. терм. реакций, 3, изд. АН СССР, М., 1958.
4. H. Boot, S. Self, R. S. Harvie, J. Electronics and Control, 4, 434 (1958).
5. Л. А. Арцимович, Управляемые термоядерные реакции, Физматгиз, М., 1961.
6. E. S. Weibel, J. Electronics and Control, 5, 435 (1958).
7. В. Л. Грановский, Электрический ток в газе, 1, ГИТТЛ, М., 1952.
8. К. С. Головановский, А. А. Кузовников, ЖТФ, 31, 348 (1961).
9. К. С. Головановский, А. А. Кузовников, ЖТФ, 31, 890 (1961).
10. Ю. М. Каган, Изв. АН СССР, сер. физ., 22, 702 (1958).
11. А. Энгель, Ионизованные газы, Физматгиз, М., 1959.
12. В. И. Гапонов, Электроника, 1, Физматгиз, М., 1960.
13. Н. А. Капцов, Электроника, ГИТТЛ, М., 1956.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
13 января 1962 г.

## LOW FREQUENCY BOUNDARY OF THE HIGH FREQUENCY QUASI—POTENTIAL IN POSITIVE COLUMN PLASMA

*K. S. Golovanivski, A. A. Kouzovnikov*

The frequency characteristics are studied of the restriction of radial ions diffusion effect in the plasma of positive column by means of nonuniform high frequency field in the low radio frequency region. The variation is found out of radial diffusion current in the high frequency averaged potential field and the dependence of boundary frequency of the effect considered on ions density. The latter result is interpreted in terms of dynamics of plasma polarization process in the external electrical field.

## ОПТИМАЛЬНОЕ ВРЕМЯ НАБЛЮДЕНИЯ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ

А. Г. Кисляков

Получены формулы для чувствительности компенсационного, корреляционного и модуляционного измерителей в предположении, что спектр флюктуаций их параметров задан выражением вида  $\omega^{-\alpha}$ , где  $\omega$  — круговая частота,  $0 < \alpha < 3$ . Рассмотрены два способа измерения: единичный отсчет величины сигнала и усреднение записи сигнала, оказавшиеся равноценными. Результаты анализа позволяют дать ряд рекомендаций по выбору оптимального соотношения между постоянной времени измерителя и временем наблюдения, а также могут быть полезными при определении рациональной методики измерения.

В работе [1] было показано, что чувствительность измерителей слабых сигналов может существенным и сложным образом зависеть от продолжительности времени наблюдения. Однако результаты проведенного в [1] анализа зависимости чувствительности различного типа измерителей от времени наблюдения трудно использовать на практике, поскольку этот анализ проводился в предположении, что спектр флюктуаций параметров измерителя  $w_m(\omega)$  задан выражением  $w_m(\omega) = (\omega^2 \tau_m^2 + 1)^{-1}$ , где  $\tau_m$  — время корреляции флюктуаций параметров, а  $\omega$  — круговая частота. В соотношения для чувствительности измерителей, приводимые в [1], входят  $\tau_m$  и стандарт отклонения относительных флюктуаций параметров  $\sigma_m$ . Обе эти величины не представляется возможным рассчитать, а их измерение, по-видимому, связано со значительными трудностями. Кроме того, спектр флюктуаций параметров реальных измерителей, как показал эксперимент [2], довольно сильно отличается от выражения  $(\omega^2 \tau_m^2 + 1)^{-1}$ . Из [2] следует, что наиболее подходящим приближением для  $w_m(\omega)$  является соотношение

$$w_m(\omega) = \begin{cases} B\omega_m^{-\alpha} & \text{при } \omega \leq \omega_m \\ B\omega^{-\alpha} & \text{при } \omega \geq \omega_m \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\omega_m$  — некоторая граничная частота, а  $B$  и  $\alpha$  — постоянные, зависящие от схемы измерителя и типа составляющих его элементов, причем обычно  $\alpha \geq 1$ .

В настоящей работе проводится анализ чувствительности различного типа измерителей слабых сигналов в предположении, что спектр флюктуаций параметров измерителей описывается выражением (1). На основе этого анализа даются некоторые практические рекомендации для выбора оптимальных параметров и методики измерения, отвечающих максимальной чувствительности.

### 1. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ИЗМЕРИТЕЛЯ

Мы используем определение чувствительности, данное в [1] выражением (22):

$$\Delta\omega = k \sqrt{\frac{1}{2} (I_1 - I_2)^2}, \quad (2)$$

где  $\Delta\omega$  — минимальное обнаружимое приращение спектральной плотности\* мощности сигнала,  $k$  — некоторый коэффициент, зависящий от параметров аппаратуры, а величины  $I_1$  и  $I_2$  определяются соотношениями

$$I_1 = \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt, \quad I_2 = \frac{1}{T_2} \int_{t_3}^{t_4} u(t) dt.$$

Здесь  $u(t)$  — выходное напряжение измерителя,  $t_1$  и  $t_2 = t_1 + T_1$  — моменты начала и конца интервала усреднения нулевого уровня измерителя, а  $t_3$  и  $t_4 = t_3 + T_2$  — те же величины при усреднении записи сигнала. Таким образом, выражение (2) есть минимальный обнаружимый сигнал при применении усреднения записи сигнала. Очевидно, что условие  $T_1 = T_2 = 0$  соответствует случаю единичного отсчета и определение чувствительности в форме (2) перейдет в известное [3] выражение для пороговой чувствительности при единичном отсчете величины сигнала.

Поскольку отсчеты нулевого уровня измерителя и величины сигнала разделены конечным интервалом времени, необходимо учесть процесс установления сигнала, имеющий место при его включении. Таким образом,

$$\Delta\omega = km^{-1}(\Delta T) s_T^{1/2}, \quad (3)$$

где  $m(\Delta T)$  — некоторая регулярная функция, описывающая процесс установления величины сигнала после включения,  $\Delta T = t_3 - t_2$  — интервал между отсчетами нуля и величины сигнала, а  $s_T = \frac{1}{2} \overline{(I_1 - I_2)^2}$ .

Рассмотрение не потеряет своей общности, если положить  $T_1 = T_2 = T$ . В этом случае  $s_T$  есть структурная функция процесса  $u(t)$ , усредненного за время  $T$ . Связь структурной функции со спектром процесса  $u(t)$ ,  $\omega(f)$  рассмотрена в Приложении I. Использование формулы, связывающей  $s_T$  и  $\omega(f)$ , целесообразно для упрощения расчетов.

Перейдем теперь к анализу зависимости чувствительности компенсационного, корреляционного и модуляционного измерителей от времени наблюдения.

## 2. ОПТИМАЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ МЕЖДУ ОТСЧЕТАМИ

Предположим, что 1) спектр флюктуаций параметров определяется соотношением (1), 2) выходная цепь измерителя представляет собой интегрирующую RC-цепочку, 3) сигнал на входе измерителя при включении меняется скачком. Используя результаты работ [1, 4-6], а также соотношения (3) и (П1), (П6), мы можем получить выражение для чувствительности измерителя при единичном отсчете величины сигнала:

$$\Delta\omega_e = \frac{\omega_\phi + \omega_n}{1 - e^{-x}} [D_1(1 - e^{-x}) + D_2 x^{\alpha-1}(M + \delta M)]^{1/2}, \quad (4)$$

где  $\omega_\phi$  — спектральная плотность среднего квадрата напряжения фона [6] на входе измерителя,  $\omega_n$  — спектральная плотность среднего квадрата пересчитанного на вход напряжения собственных шумов измерителя,  $x = \Delta T/\tau$ , где  $\tau$  — постоянная времени выходной цепи измерителя,

\* Здесь, как и в [1], рассматривается случай, когда измеряемый сигнал имеет гладкий сплошной спектр. Однако результаты анализа могут быть без труда обобщены и применены для других случаев.

$$M = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{1 + \left(2 \frac{z}{x}\right)^2} \frac{dz}{z^\alpha}; \quad \delta M = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin^2 z}{1 + \left(2 \frac{z}{x}\right)^2} dz - \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin^2 z}{1 + \left(2 \frac{z}{x}\right)^2} \frac{dz}{z^\alpha}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon = \frac{1}{2} \omega_m \Delta T$ . Как показано в Приложении II,  $\delta M \ll M$  при условии, что  $\omega_m \Delta T \ll 1$ ,  $\omega_m \tau \ll 1$  и  $0 < \alpha < 3$ . Первые два неравенства, по-видимому, должны выполняться в большинстве практических случаев, поскольку имеются экспериментальные данные, из которых следует, что частота  $\omega_m < 10^{-5}$   $\mu\text{ц}$  [7]. Существует мнение [8], что  $\omega_m \rightarrow 0$ ; в этом случае  $\delta M = 0$ . Неравенство  $0 < \alpha < 3$  ограничивает применимость полученных в настоящей работе формул для чувствительности измерителей.

Постоянные  $D_1$  и  $D_2$  зависят только от схемы измерителя, типа элементов, входящих в его состав, и от интенсивности флюктуаций параметров этих элементов. Формулы для коэффициентов  $D_1$  и  $D_2$  сведены в таблицу 1. В ней  $\Delta f$  — эффективная шумовая ширина полосы пропускания частот усилителя, стоящего в измерителе до второго детектора, а величина  $\xi = \omega_\Phi / (\omega_\Phi + \omega_n)$  обычно много меньше единицы. Заметим, что для компенсационного измерителя величина  $B$  характеризует интенсивность относительных флюктуаций уровня собственных шумов, а для корреляционного и модуляционного — интенсивность относительных флюктуаций коэффициента усиления усилителя, стоящего до второго детектора (в модуляционном измерителе это квадратичный детектор, а в корреляционном — перемножающее устройство).

Т а б л и ц а 1

Тип измерителя Параметр	Компенсационный	Корреляционный	Модуляционный
$D_1$	$(2 \Delta f \tau)^{-1}$	$(4 \Delta f \tau)^{-1}$	$\pi^2 (4 \Delta f \tau)^{-1}$
$D_2$	$\frac{1}{\pi} 2^{2-\alpha} B \tau^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\pi} 2^{1-\alpha} B \xi^2 \tau^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\pi} 2^{2-\alpha} B \xi^2 \tau^{\alpha-1}$
$D'_1$	$(2 \Delta f \Delta T)^{-1}$	$(4 \Delta f \Delta T)^{-1}$	$\pi^2 (4 \Delta f \Delta T)^{-1}$
$D'_2$	$\frac{1}{\pi} 2^{2-\alpha} B \Delta T^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\pi} 2^{1-\alpha} B \xi^2 \Delta T^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\pi} 2^{2-\alpha} B \xi^2 \Delta T^{\alpha-1}$
$l_1$	$2^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$c_1$	$(2 \Delta f)^{-1}$	$(4 \Delta f)^{-1}$	$\pi^2 (4 \Delta f)^{-1}$
$c_2$	$\frac{B}{4}$	$\frac{B \xi^2}{8}$	$\frac{B \xi^2}{4}$
$c_\alpha$	$2 \kappa B$	$B \kappa \xi^2$	$2 \kappa \xi^2 B$

Интеграл (5) берется в элементарных функциях только при  $\alpha=0$  и  $\alpha=2$  (при  $\alpha > 3$  (5) расходится). Как уже отмечалось выше, наибольший практический интерес представляет случай  $\alpha > 1$ . При  $\alpha=2$  выражение (4) принимает вид:

$$\Delta w_e = \frac{w_\phi + w_n}{1 - e^{-x}} \left[ D_1(1 - e^{-x}) + \frac{\pi D_2}{4} (x - 1 + e^{-x}) \right]^{1/2}. \quad (6)$$

Проанализируем это соотношение. Нетрудно видеть, что при  $x \ll 1$  (6) переходит в

$$\Delta w_e \approx (w_\phi + w_n) \left[ \frac{D_1}{x} + \frac{\pi D_2}{8} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

а при  $x \gg 1$  из (6) получаем:

$$\Delta w_e \approx (w_\phi + w_n) \left[ D_1 + \frac{\pi D_2}{4} x \right]^{1/2}. \quad (8)$$

Таким образом, величина  $\Delta w_e$  в области малых  $x$  растет, а в области больших  $x$  убывает с уменьшением  $x$ . Это значит, что функция

$\Delta w_e(x)$  имеет по крайней мере один минимум. Более детальный анализ показывает, что существует только одно значение  $x = x_{\text{опт}}$ , при котором  $\Delta w_e(x)$  минимально. Найти связь  $x_{\text{опт}}$  с параметрами измерителя в явном виде не представляется возможным, поскольку уравнение для него трансцендентно:

$$e^{2x} - (2x + d_1)e^x + d_1 - 1 = 0, \quad (9)$$

где  $d_1 = 4D_1/\pi D_2$ . На рис. 1 представлен график зависимости  $x_{\text{опт}}(d_1)$ , полученный путем приближенного решения уравнения (9). Из графика на рис. 1 видно, что при  $d_1 \ll 1$  оптимальный интервал между отсчетами  $\Delta T_{\text{опт}} \ll \tau$ . Неравенство  $d_1 \ll 1$  означает, что шумы на выходе измерителя определяются, в основном, флуктуациями его параметров (т. е.  $\xi^2 B \tau \gg (\Delta f \tau)^{-1}$ ). В другом крайнем случае (при  $d_1 \gg 1$ ) оптимальное значение интервала  $\Delta T_{\text{опт}} \gg \tau$ .

На рис. 2 представлены графики зависимости  $\Delta w_e(x)$ , построенные при различных значениях параметров  $D_1$ ,  $\pi D_2/4$ . Из этих графиков видно, что минимумы у кривых  $\Delta w_e(x)$  довольно пологие.

Рассмотрим теперь, как изменятся кривые на рис. 2 при  $\alpha \neq 2$ . Очевидно, что при  $\alpha < 2$  рост структурной функции выходного напряжения измерителя с увеличением  $\Delta T$  будет более медленным, чем при  $\alpha = 2$ . Поэтому минимумы у кривых  $\Delta w_e(x)$  при  $\alpha < 2$  отодвинутся в область больших значений, а правая ветвь кривой  $\Delta w_e(x)$  станет более пологой, чем при  $\alpha = 2$ . Наконец, при  $\alpha < 1$  величина  $\Delta T_{\text{опт}} \rightarrow \infty$ .

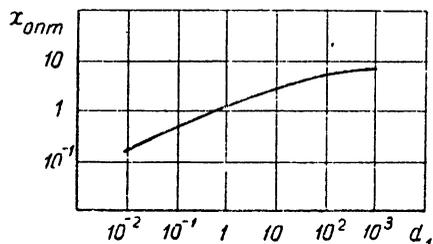


Рис. 1.

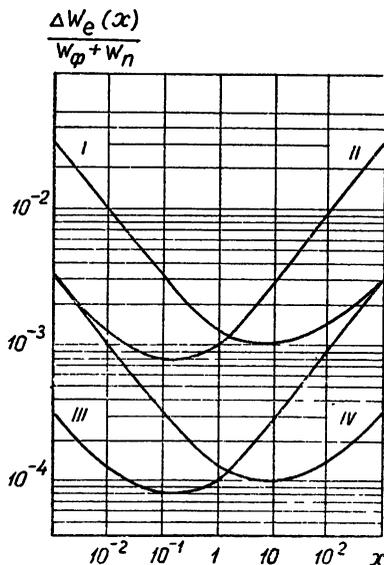


Рис. 2. Графики построены при следующих значениях параметров  $D_1$  и  $D_2$ :

$$\begin{aligned} \text{I} - 4D_1 = 10^{-6}, \quad \pi D_2 = 10^{-8}; \quad \text{II} - 4D_1 = 10^{-8}, \\ \pi D_2 = 10^{-6}; \quad \text{III} - 4D_1 = 10^{-8}, \quad \pi D_2 = 10^{-10}; \\ \text{IV} - \pi D_2 = 10^{-8}, \quad 4D_1 = 10^{-10} \end{aligned}$$

### 3. ОПТИМАЛЬНАЯ ПОСТОЯННАЯ ВРЕМЕНИ

Рассмотрев соотношение (6) для чувствительности измерителей при единичном отсчете, нетрудно убедиться, что для каждого заданного значения интервала между отсчетами существует оптимальная величина постоянной времени выходного устройства  $\tau_{\text{опт}}$ , которому соответствует минимум  $\Delta w_e(x)$ . Связь  $\tau_{\text{опт}}$  с другими параметрами измерителя и с  $\Delta T$  дается следующим трансцендентным уравнением:

$$\frac{2e^{-x} - x^2(1 - e^x)(1 - e^{-x} + xe^{-x})}{(1 - e^{-x})(1 - e^{-x} - xe^{-x})} = d_2, \quad (10)$$

где  $d_2 = 4D'_1/\pi D'_2$ , а величины  $D'_1$  и  $D'_2$  приведены в таблице 1. На рис. 3 представлен график зависимости левой части уравнения (10) от  $x$ . Рис. 4 иллюстрирует зависимость  $\Delta w_e(\tau)$ .

Таким образом, величина оптимальной постоянной времени определяется двумя параметрами: интервалом между отсчетами  $\Delta T$  и числом  $d_2$ , целиком зависящим от конструктивных и схемных особенностей измерителя. Как видно из графика на рис. 3, величина  $\tau_{\text{опт}}$  существенно превышает интервал между отсчетами при  $d_2 \gg 1$  (т. е. когда флюктуации параметров дают сравнительно малый вклад в полный шум на выходе измерителя). Другими словами, уравнение (10) при  $d_2 \gg 1$  имеет решение в области  $x \ll 1$ . Для значений  $x \ll 1$  уравнение (10) принимает простой вид:  $d_2 \approx (2x^2)^{-1}$ , откуда можно получить, что  $\tau_{\text{опт}} \approx \approx \Delta T \sqrt{2d_2}$ .

Поскольку  $d_2 \sim \Delta T^{-2}$ , то  $\tau_{\text{опт}}$  в этом случае не зависит от интервала между отсчетами, а определяется интенсивностью флюктуаций параметров в измерителе и шириной полосы частот  $\Delta f$ . Чувствительность измерителей при оптимальной постоянной времени равна

$$\overline{\Delta w}_{e \text{ мин}} \approx l_1(\omega_\phi + \omega_n)(\Delta f \Delta T)^{-1/2}. \quad (11)$$

Коэффициент  $l_1$  также приводится в таблице 1.

Чем меньший вклад дают флюктуации параметров в общий шум на выходе измерителя, тем больше величина  $\tau_{\text{опт}}$ . В пределе при  $d_2 \rightarrow \infty$  (флюктуации параметров отсутствуют)  $\tau_{\text{опт}} \rightarrow \infty$ . Этот вывод находится в противоречии с результатами работы [9]. Автор [9] рассматривал вопрос об оптимальной постоянной времени выходного устройства компенсационного измерителя и нашел, что  $\tau_{\text{опт}} \approx 0,2 \Delta T$ . Этот результат является ошибочным, поскольку в [9] не учитывалась корреляция между значениями напряжения шумов на выходе измерителя в моменты отсчета нуля и величины сигнала. Постановка задачи в [9] противоречива. С одной стороны, автор [9] учитывает конечность времени наблюдения сигнала, принимая во внимание процесс установления сигнала после включения, а с другой стороны, считает, что чувствительность измерителя определяется дисперсией шума на выходе, реализуемой за бесконечное время.

Из формулы (11) следует, что оптимальная чувствительность измерителя с постоянными параметрами растет с увеличением  $\Delta T$ . Это

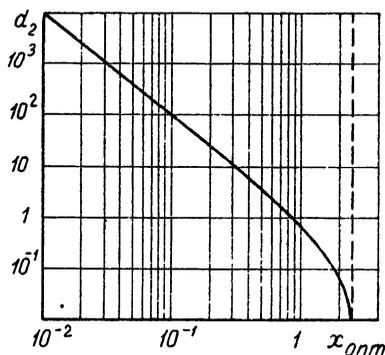


Рис. 3.

физически ясный и хорошо известный факт. Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда  $d_2 \ll 1$  (т. е. флюктуации параметров определяют уровень шумов на выходе измерителя). Чем сильнее флюктуации параметров, тем раньше они вступают в игру при увеличении  $\tau$ ; поэтому оптимум по  $\tau$  достигается при меньших значениях.

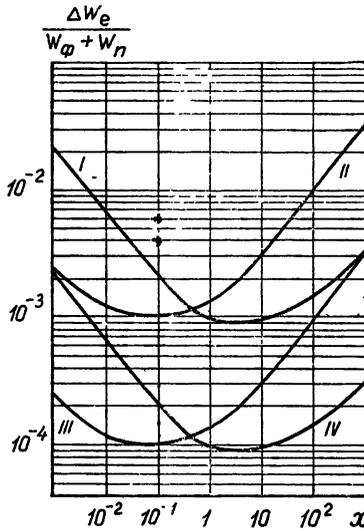


Рис. 4. Графики построены при следующих значениях  $D_1$  и  $D_2$ :  
 I— $4D_1' = 10^{-6}$ ,  $\pi D_2' = 10^{-8}$ ; II— $4D_1' = 10^{-8}$ ,  
 $\pi D_2' = 10^{-6}$ ; III— $4D_1' = 10^{-8}$ ,  $\pi D_2' = 10^{-10}$ ;  
 IV— $4D_1' = 10^{-10}$ ,  $\pi D_2' = 10^{-8}$ .

Иллюстрацией сказанного может служить график на рис. 3, из которого видно, что с уменьшением  $d_2$   $\tau_{\text{опт}}$  убывает. В пределе при  $d_2 \rightarrow 0$  величина  $\tau_{\text{опт}}$  достигает минимального значения (около  $0,4 \Delta T$ ) независимо от интенсивности флюктуаций параметров. Чувствительность компенсационного измерителя равна в этом случае

$$\tilde{\Delta w}_{e \text{ мин}} \approx 0,4(\omega_\phi + \omega_\pi) \sqrt{B \Delta T}. \quad (12)$$

Аналогичные формулы имеют место для чувствительности модуляционного и корреляционного измерителей:

$$\tilde{\Delta w}'_{e \text{ мин}} \approx \omega_\phi \sqrt{B \Delta T}; \quad (13)$$

$$\tilde{\Delta w}''_{e \text{ мин}} \approx \omega_\phi \sqrt{B \Delta T / 2}.$$

#### 4. МАКСИМАЛЬНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ИЗМЕРИТЕЛЯ ПРИ ЕДИНИЧНОМ ОТСЧЕТЕ

Полагая в выражении (6)  $x = a = \text{const}$ , найдем величину  $\tau$ , при которой  $\Delta w_e$  минимально:

$$\tau_{\text{опт}} = \left[ \frac{c_1}{c_2} \frac{1 - e^{-a}}{a - 1 + e^{-a}} \right]^{1/2}, \quad (14)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные, зависящие от типа измерителя (см. таблицу 1). Подставив (14) в (6), получим:

$$\Delta w_{e \text{ мин}} = (\omega_\phi + \omega_\pi) \sqrt{2 \sqrt{c_1 c_2} A}, \quad (15)$$

где  $A = (a - 1 + e^{-a})(1 - e^{-a})^{-3}$ . Функция  $A(a)$  имеет минимум при  $a \approx 1$  (см. рис. 5). Поэтому

$$(\Delta w_{e \text{ мин}})_{\text{мин}} \approx (\omega_\phi + \omega_\pi) (6 c_1 c_2)^{1/4}. \quad (16)$$

Это — максимальная чувствительность измерителя, которая может быть достигнута способом единичного отсчета величины сигнала. Интервал между отсчетами должен выбираться равным постоянной времени выходной цепи измерителя, а постоянная времени определяется соотношением

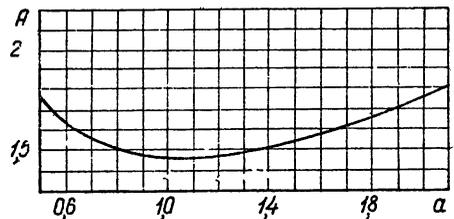


Рис. 5.

$$\tau_{\text{опт}} \approx 1,3 \sqrt{c_1 / c_2}. \quad (17)$$

Формула (17) получена путем подстановки значения  $a = 1$  в (14).

## 5. ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ИНТЕРВАЛА УСРЕДНЕНИЯ

Воспользуемся определением чувствительности измерителя в форме (2), а также соотношением, связывающим спектр мощности шума на выходе измерителя со структурной функцией  $s_T$  (см. Приложение I, формулы (П1), (П7)), и найдем выражение для минимального обнаружимого приращения спектральной плотности мощности сигнала:

$$\Delta\omega = (\omega_n + \omega_\phi) \sqrt{c_1/T + c_\alpha T^{\alpha-1}}, \quad (18)$$

где коэффициент  $c_\alpha$  определяется соответствующими формулами в таблице 1, причем

$$x = \frac{2^{\alpha-1} - 1}{\Gamma(\alpha + 2)} \operatorname{cosec} \frac{(\alpha - 1)\pi}{2}. \quad (19)$$

Выражение (18) справедливо при выполнении неравенств  $\omega_m T \ll 1$  и  $T \gg \tau$ , так как в (18) опущены члены, пренебрежимо малые при этих условиях (см. Приложение II).

Анализ выражения (18) показывает, что  $\Delta\omega(T)$  имеет минимум при

$$T = T_{\text{опт}} = \left[ \frac{c_1}{c_\alpha (\alpha - 1)} \right]^{1/\alpha}. \quad (20)$$

В этом случае оба члена под корнем в (18) дают одинаковый вклад, если  $\alpha = 2$ . Подставив (20) в (18), получаем:

$$\Delta\omega_{\text{мин}} = (\omega_n + \omega_\phi) \left[ c_1^{1-1/\alpha} c_\alpha^{1/\alpha} \alpha (\alpha - 1)^{1/\alpha-1} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Таким образом, оптимальная продолжительность интервала усреднения определяется величинами  $B$ ,  $\alpha$ ,  $\Delta f$  и  $\xi$ . Следует отметить, что минимум функции  $\Delta\omega(T)$  существует только при  $\alpha \geq 1$ . При  $\alpha = 1$ , как нетрудно видеть из (20),  $T_{\text{опт}} \rightarrow \infty$ . Когда  $\alpha < 1$ , чувствительность измерителя растет с ростом  $T$  во всей области значений  $T$ . Как уже упоминалось выше, наибольший практический интерес имеет случай  $\alpha > 1$ .

## 6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты проведенного выше анализа подтверждают сделанный в [1] вывод о том, что при наличии сильных флуктуаций параметров измерителя увеличение времени наблюдения не всегда приводит к увеличению чувствительности измерителя. Наиболее рациональным методом измерения является суперпозиция большого количества записей сигналов, сделанных в одинаковых условиях и при оптимальном времени наблюдения.

Интересно сравнить чувствительность измерителей при различных способах регистрации сигнала: единичном отсчете и усреднении записи сигнала. Проведем это сравнение для  $\alpha = 2$ . Тогда из (21) получим (так как  $c_{\alpha=2} = 2c_2/3$ ):

$$\Delta\omega_{\text{мин}} \approx 1,3(\omega_n + \omega_\phi)(c_1 c_2)^{1/4}, \quad (22)$$

а формула (20) для оптимальной продолжительности интервала усреднения при  $\alpha = 2$  примет следующий вид:

$$T_{\text{опт}} \approx 1,2 \sqrt{c_1/c_2}. \quad (23)$$

Сравнивая соотношения (16) и (22), а также (17) и (23), мы видим, что величина минимального обнаружимого сигнала практически одинакова при обоих способах регистрации сигнала, а оптимальная постоянная времени  $\Delta\tau_{\text{опт}} \approx T_{\text{опт}}$ . Это естественный результат, так как усреднение записи сигнала играет ту же роль, что и интегрирующая RC-цепочка

на выходе измерителя, когда применяется единичный отсчет. Другими словами, усреднение записи сигнала эквивалентно измерению путем единичного отсчета в измерителе, выходная цепь которого имеет частотную характеристику вида  $\sin^2(\omega T/2)/(\omega T/2)^2$ .

Таким образом, результаты анализа, проведенного для случая усреднения записи сигнала, применимы и к единичному отсчету; ими можно руководствоваться при выборе оптимальной величины  $\tau$ . Когда  $\alpha \neq 2$ ,  $\tau_{\text{опт}}$  определяется соотношением (20); интервал же между отсчетами, как уже указывалось в разделе 4, следует выбирать равным постоянной времени. Поскольку минимум у функции  $A(a)$  (см. рис. 5) довольно пологий, то рационально выбирать  $\Delta T_{\text{опт}}$  около нескольких  $\tau$  (для удобства измерений).

Вышеизложенное позволяет рекомендовать следующий практический способ определения оптимальной постоянной времени (или оптимального интервала усреднения), применимый даже в том случае, когда параметры измерителя и обстоятельства измерения неизвестны. По записям реализаций выходного напряжения измерителя, сделанным при различных  $\tau$  и в тех условиях, в каких будет производиться измерение, находится структурная функция выходного напряжения  $s_\tau$  в зависимости от  $\tau$ . Значение  $\tau$ , при котором  $s_\tau$  минимально, является оптимальным.

В настоящей работе рассматривался случай, когда флуктуации параметров измерителя оказывают существенное влияние на уровень выходного шума измерителя. Известно [5, 10], что применение нулевого метода измерения позволяет значительно ослабить это влияние, так что величина минимального обнаружимого сигнала в нулевом измерителе не зависит от интенсивности флуктуаций коэффициента усиления. Однако в нулевых измерителях также могут существовать флуктуации со спектром вида (1). В высокочувствительных радиометрах сантиметрового и миллиметрового диапазонов волн, применяемых в радиоастрономии, становятся заметными нестабильность эталонов излучения [11], а также флуктуации радиоизлучения атмосферы [12]. Эти две причины могут вызвать появление флуктуаций со спектром (1). Кроме того, различные наводки по промежуточной и высокой частоте, а также некоторые помехи, могут, вообще говоря, иметь спектр огибающей вида (1). Во всех этих случаях также применим рекомендованный выше практический способ определения  $\tau_{\text{опт}}$  и  $T_{\text{опт}}$ .

Автор пользуется случаем выразить свою благодарность В. С. Троицкому, проявлявшему неизменный интерес к данной работе.

## ПРИЛОЖЕНИЕ I. СВЯЗЬ СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ СО СПЕКТРОМ ПРОЦЕССА

Пусть процесс  $u(t)$  имеет спектр  $w(f)$ . Чтобы найти связь между  $w(f)$  и  $s_\tau$ , вычислим сначала структурную функцию  $s_{Tf}df$  для бесконечно малого частотного интервала  $[f, f + df]$  функции  $w(f)$ . Другими словами, найдем  $s_\tau$  для процесса с прямоугольным спектром шириной  $df$  и высотой  $w(f)$ . Интегрируя затем  $s_{Tf}df$  по всем частотам, мы получим  $s_\tau$ .

Из соотношения [1]

$$s_{Tf}df = \frac{1}{2} \overline{(I_1 - I_2)^2} df =$$

$$= \lim_{df \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{T_1^2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} r_0(t - t') dt dt' + \frac{1}{T_2^2} \int_{t_3}^{t_4} \int_{t_3}^{t_4} r_0(t - t') dt dt' - \right. \quad (\text{П1})$$

$$-\frac{2}{T_1 T_2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{t_3}^{t_4} r_0(t-t') dt' \} df,$$

где

$$r_0(t-t') = w(f) \frac{\sin[\pi df(t-t')]}{\pi df(t-t')} \cos[2\pi f(t-t')], \quad (\text{П2})$$

получаем:

$$s_T = \int_0^{\infty} s_{Tf} df = \int_0^{\infty} g(T, f) w(f) df. \quad (\text{П3})$$

Здесь  $g(T, f)$  — некоторая весовая функция вида

$$g(T, f) = \frac{\sin^2(\pi f T_1)}{2(\pi f T_1)^2} + \frac{\sin^2(\pi f T_2)}{2(\pi f T_2)^2} - \frac{\sin(\pi f T_1) \sin(\pi f T_2)}{(\pi f)^2 T_1 T_2} \cos[\pi f(T_1 + T_2 + 2\Delta T)]. \quad (\text{П4})$$

В случае  $T_1 = T_2 = T$  выражение (П4) существенно упрощается:

$$g(T, f) = \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} [1 - \cos 2\pi f(T + \Delta T)]. \quad (\text{П5})$$

Полагая в (П5)  $T = 0$ , придем к случаю единичного отсчета:

$$g(T, f) = 1 - \cos(2\pi f \Delta T). \quad (\text{П6})$$

При усреднении записи сигнала хорошо выполняется другое приближение:  $\Delta T \ll T$  (так как  $\tau \ll T$ ). Учитывая это неравенство, получаем из (П5):

$$g(T, f) \approx \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} [1 - \cos(2\pi f T)]. \quad (\text{П7})$$

Выражения (П6) и (П7) можно вывести и другим путем, аналогично тому, как в [13] находится связь между спектром процесса и дисперсией за время  $T$ .

#### ПРИЛОЖЕНИЕ II. ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛОВ, ОПУЩЕННЫХ В ВЫРАЖЕНИЯХ (4) и (18)

Рассмотрим условия, при которых  $M \gg \delta M$ , если

$$M + \delta M = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 z}{1 + (2z/x)^2} \frac{dz}{z^\alpha} \quad (\text{П8})$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin^2 z}{1 + (2z/x)^2} \frac{dz}{z^\alpha} + \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin^2 z}{1 + (2z/x)^2} dz;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \omega_m \Delta T.$$

Предполагая, что  $\varepsilon \ll 1$  и  $\omega_m \tau \ll 1$ , имеем:

$$\delta M \approx \varepsilon^{3-\alpha} \left[ \frac{\alpha}{3(3-\alpha)} \right]. \quad (\text{П9})$$

Из (П9) следует, что  $\delta M = 0$  при  $\alpha = 0$ . В этом нетрудно убедиться и путем рассмотрения (П8). При  $\alpha > 0$   $\delta M \sim e^{3-\alpha}$ . Анализ производной  $M'_\alpha(\alpha)$  показывает, что  $M(\alpha)$  является монотонной неубывающей функцией в интервале значений  $\alpha \in [0, 3]$ ; при этом [14]

$$M(0) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 z}{1 + (2z/x)^2} dz = \frac{\pi x}{8} (1 - e^{-x}). \quad (\text{П10})$$

Неравенство  $M \gg \delta M$  заведомо выполняется во всем интервале значений  $\alpha$ , если справедливо неравенство

$$\frac{\pi x}{8} (1 - e^{-x}) \gg e^{3-\alpha} \left[ \frac{\alpha}{3(3-\alpha)} \right]. \quad (\text{П11})$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть  $x \gg 1$ . Тогда (П11) имеет вид:

$$\frac{\pi x}{8} \gg e^{3-\alpha} \left[ \frac{\alpha}{3(3-\alpha)} \right],$$

что всегда справедливо, если  $\epsilon \ll 1$ . Если же  $x \ll 1$ , то условие (П11) выглядит так:

$$\frac{\pi}{8} \frac{\Delta T^2}{\tau^2} \gg e^{3-\alpha} \left[ \frac{\alpha}{3(3-\alpha)} \right],$$

что можно переписать в виде:

$$\left( \frac{\omega_m}{2} \right)^{3-\alpha} \Delta T^{1-\alpha} \tau^2 \frac{8}{\pi} \left[ \frac{\alpha}{3(3-\alpha)} \right] \ll 1. \quad (\text{П12})$$

Поскольку  $\Delta T \ll \tau$  (так как  $x \ll 1$ ), то неравенство (П12) будет заведомо выполнено, если верно условие

$$\left( \frac{\omega_m \tau}{2} \right)^{3-\alpha} \frac{8}{\pi} \left[ \frac{\alpha}{3(3-\alpha)} \right] \ll 1. \quad (\text{П13})$$

Как уже упоминалось выше, величина  $\omega_m \sim 10^{-5}$  гц. Поэтому (П13) выполняется для не слишком больших  $\tau$  и при  $\alpha < 3$ .

Аналогичным путем можно доказать справедливость соотношения (18) в приближении  $\epsilon \ll 1$  и  $\omega_m \tau \ll 1$ . Поскольку весь анализ в разделе 5 можно вести в приближении  $T \gg \tau$ , то выполнение соответствующих неравенств становится более легким делом, чем выполнение неравенства (П13).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 187 (1959).
2. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 438 (1957).
3. В. Л. Грановский, Электрические флюктуации, ОНТИ, М.—Л., 1936, гл. 5
4. В. С. Троицкий, ЖТФ, 21, 994 (1951).
5. Ф. В. Бункин и Н. В. Карлов, ЖТФ, 25, 233, 430 (1955).
6. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 4, 81 (1958).
7. T. E. Firlie, H. Winston, J. Appl. Phys., 26, 716 (1955).
8. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 4, 54 (1959).
9. J. Galejs, Proc. IRE, 45, 1410 (1957).
10. В. С. Троицкий, ЖТФ, 25, 478 (1955).

11. P. D. Strum, Proc. IRE, 46, 43 (1958).
12. J. E. Gibson, R. J. Mc Ewan, Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford Univ. Press, 1959.
13. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 509 (1959).
14. И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
26 марта 1962 г.

## OPTIMAL TIME OF OBSERVATION WHILE MEASURING WEAK SIGNALS

*A. G. Kisliakov*

The formulas are obtained for sensitivity of subtract type, correlation type and comparison type meters with assumption that the spectrum of fluctuations and their parameters has been given by the expression  $\omega^{-\alpha}$  where  $\omega$  is an angular frequency,  $0 < \alpha < 3$ . Two methods of measurement are considered: the single sampling of a signal magnitude and the averaging of a signal record. Both methods proved to be equivalent. The results of the analysis reveal the possibility to give a series of recommendations for a choice of optimal relationship between a time constant of the meter and the observation time, they may be also used for determination of efficient methods of measurements.

---

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ФОРМИРОВАНИЯ ТРОХОИДАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ МЕТОДОМ ФОТОГРАФИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ТРАЕКТОРИЙ

*В. А. Флягин, Т. Б. Панкратова*

Приводятся результаты экспериментального исследования электронных пушек с «короткой» и «длинной» оптикой, формирующих в скрещенных электрическом и магнитном полях трохоидальные электронные пучки

с большими значениями параметра  $f = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \sim 10 \div 20$ . Для изучения

электронно-оптических систем использовался метод наблюдения электронных траекторий в несовершенном вакууме (при давлении  $5 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-5}$  мм рт. ст.). Результаты экспериментов достаточно хорошо согласуются с теоретическими представлениями.

У электронных СВЧ приборов, работа которых основана на взаимодействии незамедленных электромагнитных волн с потоком колеблющихся электронов, коэффициент усиления, выходная мощность и КПД существенно зависят от отношения энергий колебательного и поступательного движения электронов [1-4]. Основной электронно-оптической задачей, возникающей при разработке приборов такого типа, является формирование электронного пучка с достаточно большой «раскачкой»  $f = v_{\perp}/v_{\parallel}$  ( $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$  — скорости поперечного (колебательного) и поступательного движения электронов соответственно) и последующее управление этим пучком в области взаимодействия. Для формирования трохоидальных электронных траекторий с большой поперечной скоростью электронов могут быть использованы два вида электронно-оптических систем: системы с «короткой» оптикой, в которых формирование пучка происходит на первой ветви циклоиды, и системы с «длинной» оптикой, в которых образование электронного пучка происходит в плавно изменяющихся полях. Следует отметить, что, если поведение пучка в оптических системах с плавно изменяющимися полями достаточно хорошо описывается аналитически [5, 6], то анализ систем с короткой оптикой весьма затруднителен и требует, как правило, численного интегрирования уравнений движения. Применение экспериментальных методов исследования электронно-оптических систем позволяет в ряде случаев получать необходимую информацию достаточно простыми средствами.

### 1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Для экспериментального исследования электронно-оптических систем применялся простой и в то же время весьма наглядный метод наблюдения электронных траекторий в несовершенном вакууме [7, 8]. При малой плотности пространственного заряда метод дает достаточно достоверные результаты. Можно предполагать, что наличие газа в системе приводит к искажению характера движения электронов. Однако в электронно-оптических системах с поперечными электрическим и магнитным полями не происходит накопления ионов [9] и, как пока-

зал опыт, циклоидальные электронные траектории, наблюдаемые в диапазоне давлений  $5 \cdot 10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-5}$  мм рт. ст. при скоростях порядка сотен вольт и плотности тока в пучке  $10^{-1}$  а·см<sup>-2</sup>, достаточно хорошо совпадают с рассчитанными. Размеры исследуемых моделей электронных пушек определялись условиями поставленной задачи и возможностью четкого наблюдения электронных траекторий. В качестве эмиттера использовался точечный оксидный катод.

Для изучения электронно-оптических систем, в которых формирование трохлоидальных электронных пучков происходит в резко неоднородных полях, была собрана установка, общий вид которой показан на рис. 1. Баллон 1, в котором на специальной ножке помещалась исследуемая модель, откачивался до высокого вакуума. Игольчатый натекагель 3 позволял устанавливать любое нужное давление газа в системе. Соленоид 2, укрепленный на карданном подвесе, создавал однородное магнитное поле  $H$  (около 200 эрстед), величину и ориентацию которого можно плавно менять.

Системы с медленно изменяющимися полями, несколько большие по длине и требующие больших магнитных полей, исследовались на установке, общий вид которой показан на рис. 2. Исследуемая модель 1 располагалась между полюсами электромагнита 2, который создавал поля порядка 1000 эрстед. Необходимое распределение магнитного поля получалось либо в полях рассеяния магнита, либо с помощью экранировки оптической системы. Изображение электронного луча наблюдалось с помощью зеркала, установленного под углом  $45^\circ$  к системе.

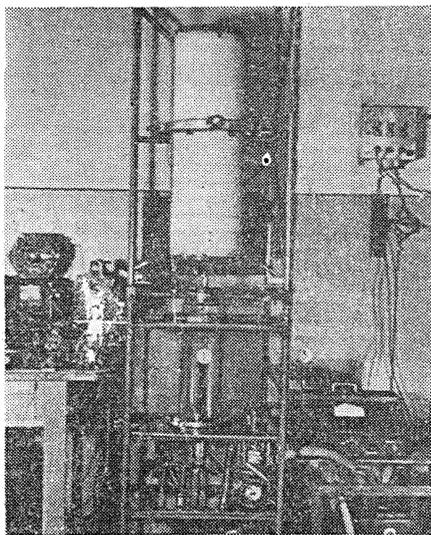


Рис. 1. Общий вид установки для изучения электронно-оптических систем, формирующих электронные пучки в резко неоднородных полях.

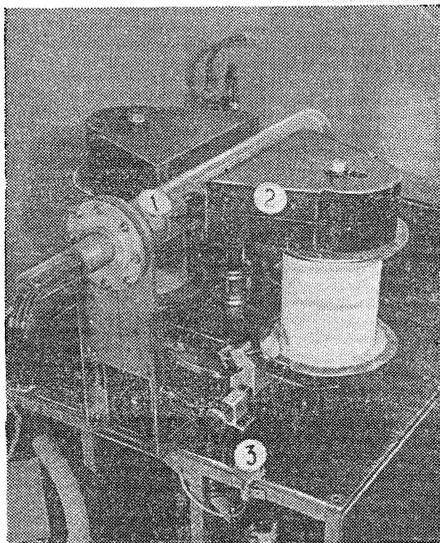


Рис. 2. Общий вид установки для изучения электронно-оптических систем с медленно меняющимися полями.

## 2. СИСТЕМЫ С «КОРОТКОЙ» ОПТИКОЙ

Рассмотрим случай, когда электроны влетают в пространство взаимодействия с вершины первой ветви циклоиды. Приняв при этом весьма грубую идеализацию скачкообразного изменения поля в области формирования (рис. 3), можно показать, исходя из уравнений дви-

жения электронов, что в пространстве взаимодействия выполняется соотношение:

$$f = \frac{r_{\text{тр}}}{r_{\text{ц}}} = 2 \frac{E_1 B_2}{E_2 B_1} - 1, \quad (1)$$

где  $r_{\text{ц}}$  — радиус циклоиды в полях  $E_2, B_2$ ,  $r_{\text{тр}}$  — радиус трохойды в тех же полях.

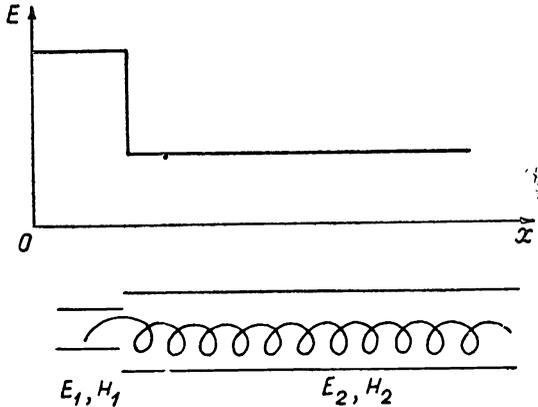


Рис. 3. Характер изменения поля в области формирования пучка.

Как следует из выражения (1), при соответствующем выборе полей в области формирования поперечная энергия электронов, движущихся по трохойде, может быть значительно увеличена по сравнению с вращательной энергией электронов, движущихся по циклоиде в тех же полях. Величина этого соотношения характеризуется значением параметра  $f$ .

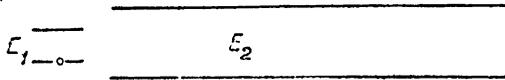
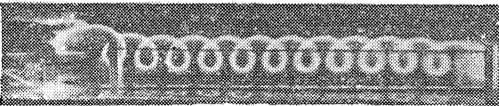


Рис. 4. Электронный пучок в короткофокусной системе ( $E_1/E_2 = 3$ ).

Поведение пучка в оптических системах с „короткой“ оптикой при  $f > 1$  исследовалось на ряде моделей, одна из которых изображена на рис. 4. Траектория электронов имеет вид трохойды с радиусом, в пять раз большим радиуса циклоиды, что хорошо согласуется с расчетными данными.

Следует заметить, что хотя подобные системы просты и компактны, они не могут быть использованы для получения трохойдальных пучков с большими значениями поперечной скорости вследствие трудностей создания резкого (в масштабе длины циклоиды) изменения поля в области формирования. Кроме того, при конечной ширине катода верхняя и нижняя границы пучка входят в область резкого изменения полей с разными скоростями, что приводит к значительному разбросу поперечных скоростей в области взаимодействия. Формиро-

вание пучка конечной толщины иллюстрируется рис. 5. Системы, в которых формирование пучка происходит в плавно меняющихся полях, в значительной мере свободны от указанных недостатков.\*

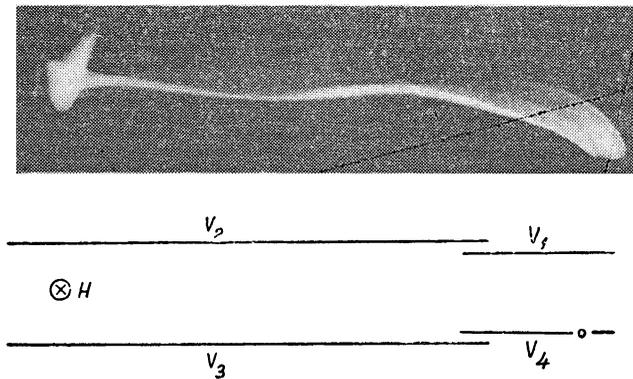


Рис. 5. Формирование пучка конечной толщины ( $V_1 = 405$  в;  $V_2 = 872$  в;  $V_3 = -395$  в;  $V_4 = -5$  в;  $H = 66$  эрстед).

### 3. ФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ В МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ПОЛЯХ

Если скрещенные электрическое ( $E$ ) и магнитное ( $H$ ) поля являются медленными функциями координат и времени:

$$\begin{aligned} |(r\nabla)H| &\ll H; & |(r\nabla)E| &\ll E; \\ T \left| \frac{dH}{dt} \right| &\ll H; & T \left| \frac{dE}{dt} \right| &\ll E, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $r$  — радиус τροχοиды,  $T = 2\pi/\omega_H$ ,  $\omega_H$  — циклотронная частота, то заряженная частица движется в этих полях по квазитροχοидальным траекториям [5, 6] (рис. 6). При этом величина  $Hr^2$  является адиабатическим инвариантом. Таким образом, если всюду в переходной об-

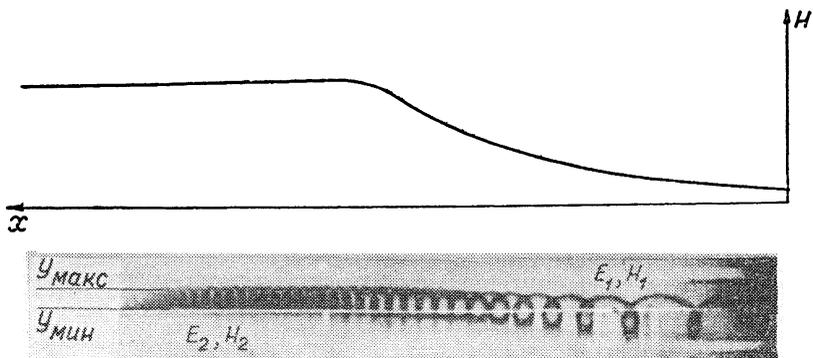


Рис. 6. Формирование пучка в медленно меняющихся полях.

\* Создание τροχοидальных пучков с большими значениями параметра  $f$  с помощью магнитно-экранированных пушек [10] встречает также ряд затруднений, связанных, во-первых, с проблемой экранировки в больших магнитных полях, и, во-вторых, с вводом пучка в область взаимодействия через область неоднородных полей, что неизбежно приводит к появлению значительного разброса скоростей электронов.

ласти выполнены условия (2), то радиусы трохиды электронов катода связаны соотношением

$$H_1 r_{\text{тр}_1}^2 = H_2 r_{\text{тр}_2}^2,$$

где  $r_{\text{тр}_1}$  и  $r_{\text{тр}_2}$  — радиусы трохиды в области катода I и в пространстве взаимодействия II соответственно.

Из выражения (3) следует, что

$$r_{\text{тр}_2} = f r_{\text{ц}_2}, \quad (4)$$

где  $r_{\text{ц}_2} = E_2 / r_1 H_2^2$ , и

$$v_{\perp 2} = f v_{\perp 1}, \quad (4a)$$

где  $f = (E_1/E_2)(H_2/H_1)^{3/2}$ .

При движении в области неоднородных магнитных полей поперечная энергия электронов возрастает [11] и они дрейфуют в область больших значений потенциала. Используя адиабатический инвариант и закон сохранения энергии, можно определить границы пучка в пространстве взаимодействия:

$$Y_{\text{макс}} = \frac{1}{2} r_{\text{ц}_2} (1 + f)^2; \quad Y_{\text{мин}} = \frac{1}{2} r_{\text{ц}_2} (1 - f)^2. \quad (5)$$

Формирование электронных пучков в медленно меняющихся полях исследовалось на ряде моделей, одна из которых изображена на рис. 7.

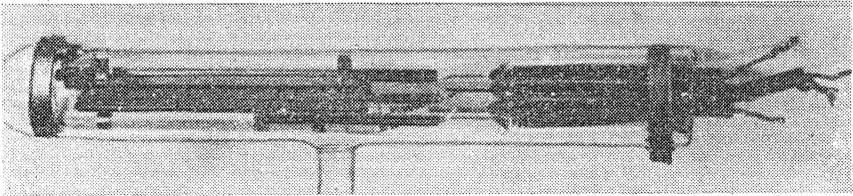


Рис. 7. Модель электронно-оптической системы с медленно меняющимися полями.

Траектории электронов, полученные в системе с постоянным электрическим и медленно меняющимся магнитным полями при значениях параметра  $f = 7$  и  $20$ , изображены на рис. 8, 9. Закон распределения

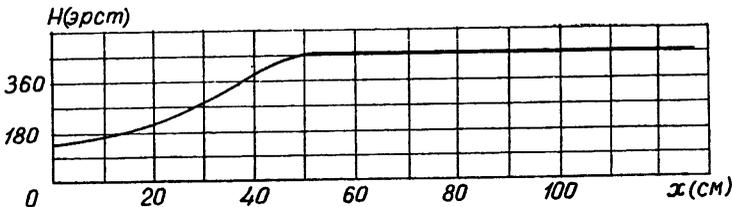


Рис. 8. Распределение магнитного поля и траектория электронов в системе с постоянным электрическим и медленно меняющимся магнитным полем для  $f = 7$ .

магнитного поля вдоль системы соответствует полю рассеяния полюсов магнита, между которыми помещалась область взаимодействия испытуемой модели.

Наблюдаемые электронные траектории для указанных значений параметра  $f$  достаточно хорошо совпадают с рассчитанными с помощью адиабатического инварианта. В системах с медленно меняющимися полями, как это следует из выражения (5), толщина пучка, а следовательно, и разброс скоростей могут быть сделаны минимальными без учета пространственного заряда, если поля  $E_1$ ,  $H_1$  на катоде конечной ширины сохраняются неизменными.

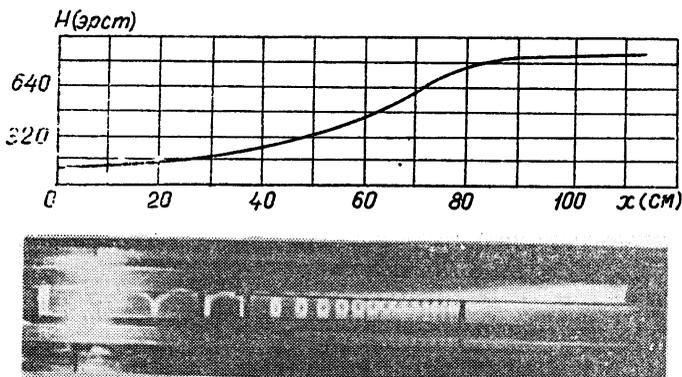


Рис. 9. Распределение магнитного поля и траектория электронов в системе с постоянным электрическим и медленно меняющимся магнитным полями для  $f = 20$ .

На рис. 10 изображены траектории электронов с двух катодов, расположенных на расстоянии 2 мм. Как видно из фотографии, вершины траекторий в области взаимодействия практически совпадают.

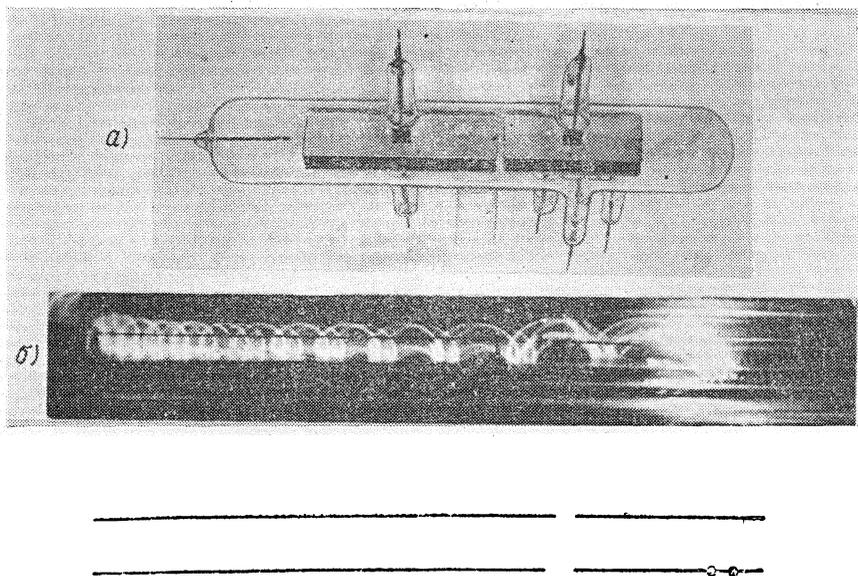


Рис. 10. а) Модель электрично-оптической системы с двумя разнесенными катодами. б) Траектории электронов, полученные с двух разнесенных катодов.

Экспериментальное исследование электронно-оптических систем, формирующих трохойдальные электронные пучки с большими значениями параметра  $f$ , показали полное соответствие поведения пучка с теоретическими представлениями. Полученные результаты были использованы при конструировании электронных пушек для электронных приборов (генераторов, усилителей), работа которых основана на взаимодействии электромагнитных волн с трохойдальным электронным пучком электронов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, **39**, 326 (1960).
2. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 443 (1959); **2**, 863 (1959).
3. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 443 (1959).
4. В. М. Боков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 730 (1959).
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
6. I. Daen, I. A. D. Lewis, Proc. Phys. Soc., **B67**, 449 (1954).
7. Е. Брюхе, О. Шерцер, Геометрическая электронная оптика, Лениздат, Л., 1943.
8. N. Strandel, Trans. Roy. Inst. Technology, Stockholm, Sweden, № 106, 1 (1956).
9. V. A. Wightman, T. R. № 52, Stanford Electronics Laboratories, Stanford Univ. California, February, 9 (1959).
10. O. L. Hoch and D. A. Watkins, IRE Trans. Electron Devices, **ED 6**, 18 (1959).
11. Л. Д. Ландау и Е. Н. Лифшиц, Механика, Физматгиз, М., 1958.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
13 марта 1962 г.

## THE PHOTOGRAPHICAL EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF METHODS OF TROCHOIDAL ELECTRON BEAMS FORMATION

*V. A. Fliagin, T. B. Pankratova*

Results are set forth of experimental investigation of electron guns with „short“ and „long“ optics which form trochoidal electron beams with large magnitudes of parameter  $f = (v_{\perp}/v_{\parallel}) \sim 10 \div 20$  in crossed electric and magnetic fields. To study electronic optical systems the method of observation of electronic trajectories in an imperfect vacuum (the pressure of  $5 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-5}$  mm of Hg was applied. The experimental results are well in agreement with theoretical assumptions.

## К ВОПРОСУ О ДЕТЕКТОРНЫХ СВОЙСТВАХ ПЛАЗМЫ

Г. А. Соболев

Изложен упрощенный метод определения параметров плазмы с помощью детекторных характеристик, основанный на опытных формулах для зондового и детекторного токов. Проведено экспериментальное подтверждение этих формул. Методом детекторных характеристик выполнен анализ ранее полученных экспериментальных данных, в результате чего получена зависимость детекторного тока от электрического режима разряда, давления газа в трубке, интенсивности ионизации газа и радиуса разрядной трубки.

Исследованию детекторных свойств газоразрядной плазмы посвящен ряд работ, однако число статей по изучению указанных свойств с помощью зондов незначительно (см. [1-7]). Известно, что детекторная характеристика  $I_d = f_1(V_3)$  является более тонким отображением ее зондовой характеристики  $I_s = f_2(V_3)$ . Следовательно, и метод детекторных характеристик, развиваемый в работах [1,6], должен стать более совершенным в сравнении с ленгмюровским.

## 1. О МЕТОДЕ ДЕТЕКТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В области квадратичного детектирования величина детекторного тока, как известно, выражается уравнением

$$I_d = \left( \frac{V_3}{2} \right)^2 \frac{d^2 I_s}{dV_3^2}. \quad (1)$$

В работе [5] путем двукратного дифференцирования экспоненты зондового тока по зондовому напряжению при  $V_3 < 0$  дается формула детекторной характеристики в виде

$$I_d = 0,825 n_e T_e^{-3/2} V_3^2 e^{-eV_3/kT_e} \text{ (мкА)}. \quad (2)$$

Зависимость  $I_d = f_1(V_3)$ , как видим, не имеет максимума, в то время как все опытные детекторные характеристики проходят через соответствующие максимумы в области  $V_3 < 0$  (см. рис. 1-6).

Все измерения производились нами на установке, собранной по схеме с компенсацией в зондовой цепи в аргоне, неоне, парах ртути и их смесях — в плазме дугового, тлеющего и частично высокочастотного разрядов (диапазон частот детектируемых сигналов  $20 \text{ гц} \leq f_d \leq 4 \cdot 10^8 \text{ гц}$ ). Снимались зондовые (ленгмюровские) характеристики и соответствующие им кривые детекторного тока (детекторные характеристики) в различных режимах плазмы. Часть таких характеристик представлена графиками на рис. 1-6. Экспериментальные точки зон-

довых характеристик  $I_3 = f_2(V_3)$  нанесены крестиками, детекторных характеристик  $I_d = f_1(V_3)$  — кружками.

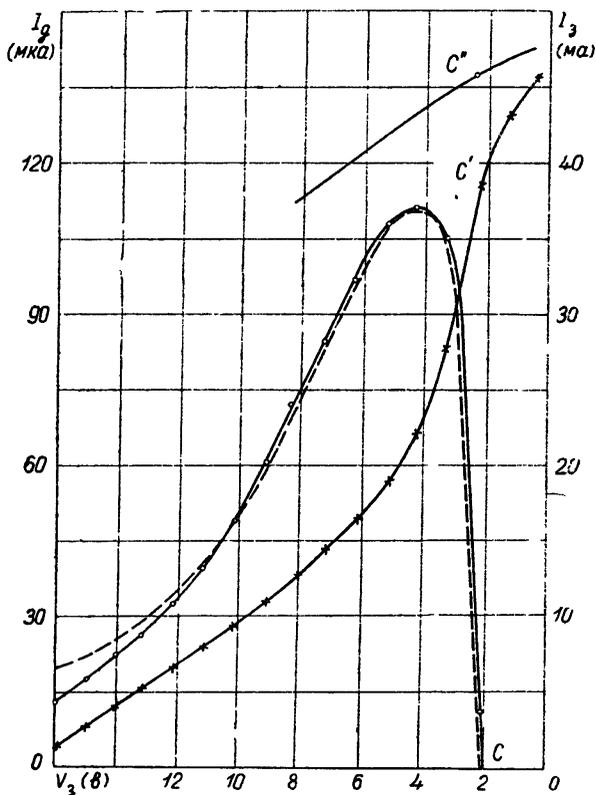


Рис. 1. Зависимость  $I_d$ ,  $I_3$  от  $V_3$  для дугового разряда в аргоне ( $V_a=18$  в,  $I_a=15$  ма,  $f_d = 25$  мГц;  $V_- = 0,4$  в,  $P=1$  мм рт. ст.).

В процессе обработки указанных кривых выяснилось, что до давлений газа в трубках  $P \approx 1$  мм рт. ст. все опытные детекторные характеристики достаточно хорошо аппроксимируются формулой [1]

$$I_d = AV_3^{1/2} e^{-eV_3/kT_e} \quad (3)$$

( $A$ —постоянная опыта). В работе [6] показано, что

$$A = \frac{e^{7/2} S n_e V_-^2}{\sqrt{32\pi m} (kT_e)^2}. \quad (4)$$

Выражая  $I_d$  в микроамперах,  $V_3$  и  $V_-$  — в вольтах и подставляя  $A$  в (3), получим:

$$I_d = 90 \frac{S n_e V_-^2}{T_e^2} V_3^{1/2} e^{-\alpha V_3} (\text{мкА}). \quad (5)$$

На рис. 1—6 штриховыми линиями представлены графики кривых, которые рассчитывались по формуле (5), где  $\alpha = e/kT_e$ ,  $S$ —площадь

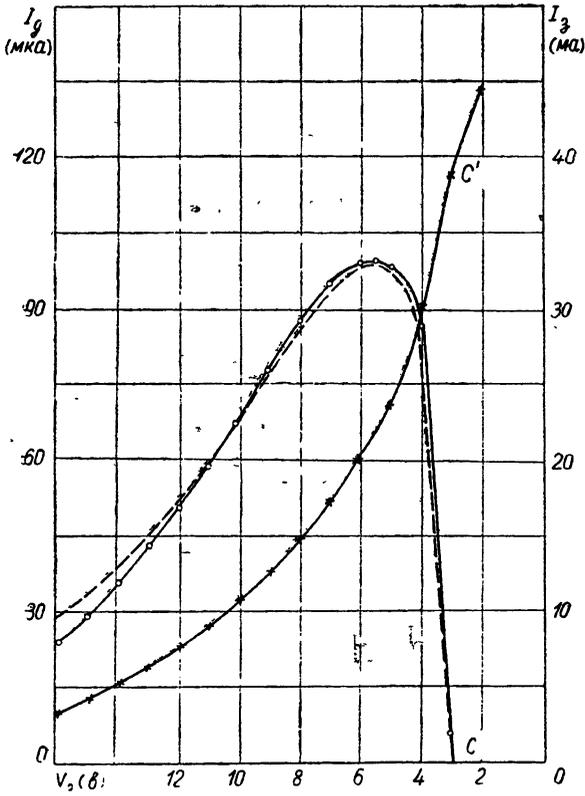


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для дугового разряда в неоне ( $V_a=30$  в,  $I_a=70$  ма,  $f_d=25$  мГц,  $V_{\sim}=0,4$  в,  $P=1$  мм рт. ст.).

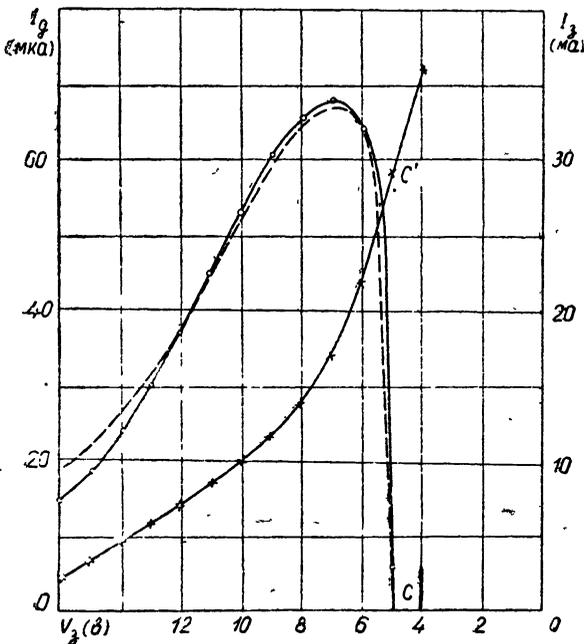


Рис. 3. То же, что на рис. 1, для тлеющего разряда в аргоне ( $V_a=172$  в,  $I_a=10$  ма,  $f_d=50$  гц,  $V_{\sim}=0,4$  в,  $P=1$  мм рт. ст.).

зонда,  $n_e$  — концентрация электронов плазмы,  $V_{\sim}$  — напряжение детектируемых сигналов,  $T_e$  — электронная температура,  $V_3$  — зондовое напряжение. В максимуме кривой (5) имеет место соотношение

$$eV_{3m}/kT_e = 1/2,$$

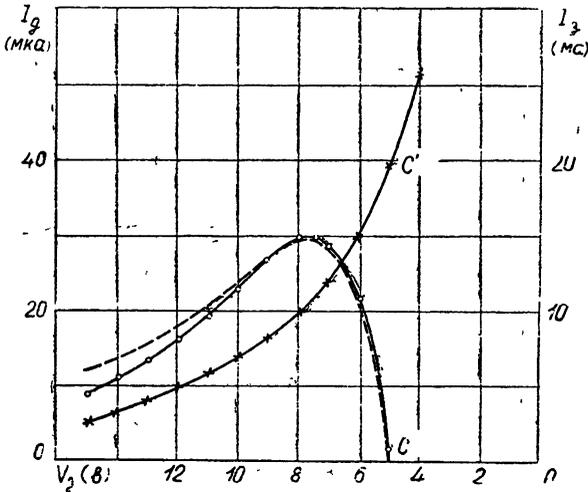


Рис. 4. То же, что на рис. 1, для тлеющего разряда в неоне ( $V_a=186$  в,  $I_a=10$  ма,  $f_d=50$  гц,  $V_{\sim}=0,4$  в,  $P=1$  мм рт. ст.).

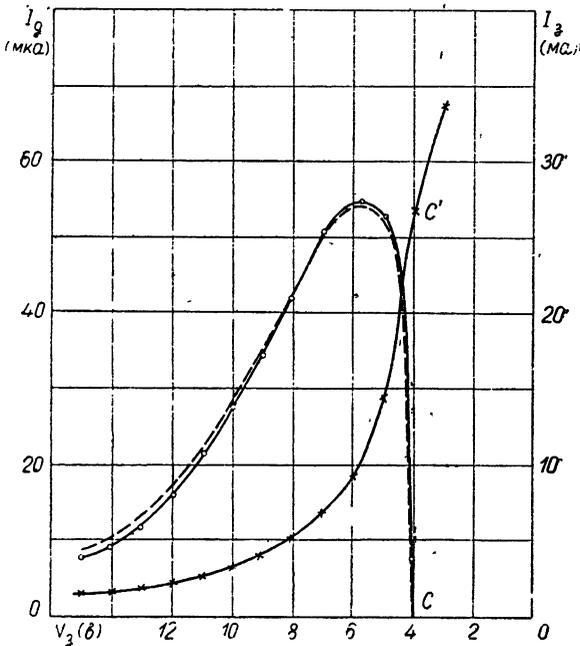


Рис. 5. То же, что на рис. 1, для высокочастотного разряда в смеси аргона ( $P=0,5$  мм рт. ст.) и неона ( $P=0,5$  мм рт. ст.) ( $f_d=20$  мгц,  $V_{\sim}=0,4$  в,  $f_{\sim}=10^8$  гц).

откуда

$$T_e = 2,32 \cdot 10^4 V_{zm} (\text{°K}), \quad (6)$$

$V_{zm}$  — напряжение на зонде в вольтах относительно плазмы в максимуме кривой  $I_d = f_1(V_3)$ . При  $V_3 = 0$  детекторный ток  $I_d$  также равен

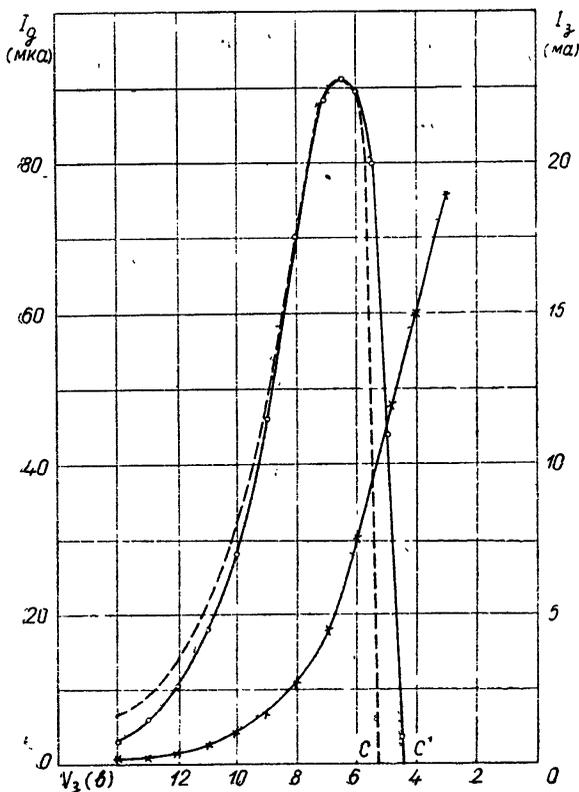


Рис. 6. То же, что на рис. 1, для дугового разряда в парах ртути ( $V_a = 35$  в,  $I_a = 50$  ма,  $f_d = 25$  мГц,  $V_{\sim} = 0,4$  в,  $P = 1,2$  мм рт. ст.).

нулю, т. е. в этой точке потенциал зонда равен потенциалу плазмы. Следовательно, по двум точкам детекторной характеристики ( $V_3 = 0$  и  $V_3 = V_{zm}$ ) можно значительно проще найти параметры плазмы — потенциал  $V_p$  в области зонда и электронную температуру  $T_e$ .

В максимуме детекторной характеристики (5) с учетом (6) получим:

$$n_e = 9,86 \cdot 10^6 \frac{V_{zm}^{3/2} I_{dm}}{S V_{\sim}^2} \text{ (см}^{-3}\text{)}, \quad (7)$$

т. е. по этим же двум точкам детекторной характеристики можно определить и третий параметр плазмы — плотность электронов плазмы  $n_e$ .

Однако указанный метод определения параметров плазмы  $V_p$ ,  $T_e$ ,  $n_e$  пригоден лишь для давлений  $P \leq 1$  мм рт. ст. При давлениях  $P > 1$  мм рт. ст. сказывается наличие соударений в ленгмюровском слое и зондовая характеристика уже не описывается экспонентой, на что указывалось в работе [10]. При этом имеют место так называемые

„затяжки“ в нижней части правой ветви детекторных характеристик: (точка, в которой  $I_d = 0$ , заходит в положительную или отрицательную область зондового напряжения  $V_3 \geq 0$ ). Эти „затяжки“ начинают появляться иногда уже при  $P \approx 1$  мм рт. ст. (см. рис. 6). Здесь  $V_3 = 0$  в точке  $C$ ; однако детекторный ток  $I_d$  равен нулю в точке  $C'$ , т. е. в области  $V_3 > 0$ . На всех остальных рисунках  $I_d = 0$  при  $V_3 = 0$  (в точке  $C$ ), что подтверждает перегиб полулогарифмической характеристики на рис. 1 в точке  $C''$  (на рис. 2—5 полулогарифмические характеристики зондового тока не показаны).

В таблице 1 даны значения  $T_e$  и  $n_e$ , которые определялись ленгмюровским и нашим методами по экспериментальным данным, полученным в различных разрядах (диаметр разрядной трубки 4 см).

Таблица 1

Рисунок		1	2	3	4	5
Метод измерений						
$T_e$ (°K)	ленгмюровский	$4,72 \cdot 10^4$	$6,0 \cdot 10^4$	$5,0 \cdot 10^4$	$4,95 \cdot 10^4$	$4,03 \cdot 10^4$
	детекторных характеристик	$4,64 \cdot 10^4$	$5,8 \cdot 10^4$	$4,87 \cdot 10^4$	$5,47 \cdot 10^4$	$3,87 \cdot 10^4$
$n_e$ (см <sup>-3</sup> )	ленгмюровский	$5,4 \cdot 10^{10}$	$5,1 \cdot 10^{10}$	$4,0 \cdot 10^{10}$	$2,5 \cdot 10^{10}$	$4,1 \cdot 10^{10}$
	детекторных характеристик	$13,8 \cdot 10^{10}$	$17,3 \cdot 10^{10}$	$9,1 \cdot 10^{10}$	$8,1 \cdot 10^{10}$	$5,2 \cdot 10^{10}$

Из таблицы видим, что значения  $T_e$ , определяемые методом детекторных характеристик, близки к ленгмюровским, чего нельзя сказать о плотности электронов  $n_e$ . Однако известно, что ленгмюровский метод дает заниженные значения  $n_e$ . Следовательно, методом детекторных характеристик можно значительно проще, без дополнительных пересчетов определять (с помощью (6), (7)) параметры плазмы.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

С помощью метода детекторных характеристик можно провести анализ результатов проведенных ранее измерений. В работе [3] предложена аппроксимация кривой максимумов детекторных характеристик в зависимости от режима плазмы в виде:

$$I_{dm} = B n_e T_e^{-3/2} \quad (8)$$

( $B$ —постоянная опыта). В этой же работе представлены неплохо совпадающие графики опытных и расчетных кривых. В максимуме кривой (5) с учетом (6) имеем:

$$I_{dm} = 0,36 S V_{\sim}^2 n_e T_e^{-3/2} \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), получим значение  $B$ :

$$B = 0,36 S V_{\sim}^2 (\text{мкка} \cdot \text{см}^3 \cdot \text{град}^{3/2}), \quad (10)$$

где  $S$ —площадь зонда в см<sup>2</sup>,  $V_{\sim}$ —амплитуда детектируемых сигналов в вольтах.

Исходя из (5), легко найти зависимость  $I_d = f_3(P/E)$ , для чего воспользуемся применимым к плазме соотношением [8]  $kT_e = 0,63e\lambda_0 E / \sqrt{\chi} P$  и формулой (3) с учетом (4):

$$I_d = \frac{e^{3/2} S V_{\sim} n_e \chi}{2,26 \sqrt{\pi m} \lambda_0^2} \left(\frac{P}{E}\right)^2 V_3^{1/2} \exp \left[ -\frac{\sqrt{\chi} V_3}{0,63 \lambda_0} \left(\frac{P}{E}\right) \right]. \quad (11)$$

Из (11) следует, что кривая  $I_d = f_3(P/E)$  проходит через максимум в точке, где

$$P_m = 1,26 \frac{\lambda_0 E_m}{\sqrt{\chi} V_{3m}} \quad (\text{мм рт. ст.}) \quad (12)$$

( $E_m$  — градиент поля в максимуме,  $V_{3m}$  — напряжение на зонде, соответствующее  $I_{dm}$ ,  $\lambda_0$  — длина свободного пробега электрона, отнесенная к 1 мм рт. ст.,  $\chi$  — часть энергии, теряемой электроном при соударении).

По данным работы [2], согласно (12), мы должны иметь для аргона  $P_m = 2,8$  мм рт. ст., для неона  $P_m = 5,0$  мм рт. ст., для ртути  $P_m = 4,0$  мм рт. ст. И действительно, близкие значения соответствуют точкам максимумов кривых  $I_{dm} = f_3(P/E)$  на графиках в работе [2], которые здесь не приводятся.

Кроме других факторов, режим плазмы обуславливается процессами ионизации (например, интенсивностью ионизации  $J = n_e Z$ , где  $Z$  — частота ионизации). Следовательно, и величина детекторного тока  $I_d$  должна в какой-то мере зависеть от этих процессов (от величины  $J$ ). Пользуясь аппроксимацией функции ионизации Моргулиса [8] для частоты ионизации  $Z$  и формулой (3) с учетом (4), получим выражение детекторной характеристики в зависимости от  $Z$  и других величин в виде:

$$I_d = 0,46 \frac{e^2 S V_{\sim}^2 n_e (\beta + 2e/3kT_e)^2}{\alpha m n_a (\beta V_i + 2e V_i / 3kT_e + 2)} \sqrt{\frac{e V_3}{kT_e}} \times \exp \left[ \frac{e}{kT_e} \left( \frac{2}{3} V_i - V_3 \right) \right] Z, \quad (13)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — постоянные,  $n_a$  — плотность атомов газа,  $V_i$  — потенциал ионизации. В максимуме этой кривой, учитывая (6) и обозначая

$$L = 0,19 \frac{(\beta + 2e/3kT_e)^2}{(\beta V_i + 2e V_i / 3kT_e + 2)} e^{2e V_i / 3kT_e},$$

окончательно получим:

$$I_{dm} = L \frac{e^2 S n_e V_{\sim}^2}{\alpha m n_a} Z. \quad (14)$$

Формула (14) представляет кривую максимумов детекторных характеристик для разных режимов плазмы (разные  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $n_e$ ,  $n_a$ ,  $V_i$ ,  $T_e$ ,  $Z$ ). Перепишав (14) в удобной для нас форме:

$$Z = \frac{\alpha m n_a I_{dm}}{e^2 L S n_e V_{\sim}^2}, \quad (15)$$

видим, что методом детекторных характеристик можно производить измерения величины  $Z$  (а следовательно, и  $J = n_e Z$ ) в различных ре-

жимах плазмы. Иными словами, зная  $n_a$ ,  $V$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  (в формуле [8]),  $S$ ,  $V$  и определив методом детекторных характеристик  $T_e$  и  $n_e$ , легко вычислить значение  $Z$  для данного режима плазмы. Затем, изменив режим плазмы, определяем таким же способом величину  $Z$  (следовательно,  $J$ ) уже для другого состояния плазмы и т. д.

Если воспользоваться приближенной опытной формулой [9] для измерения  $Z$  в виде:

$$Z = 3,59 \frac{10^{-8}}{r} \sqrt{\frac{T_e}{M}},$$

то, подставив значение  $Z$  в (14), получим выражение, показывающее зависимость  $I_{dm}$  от радиуса разрядной трубки  $r$  и атомного веса газа в трубке ( $M$ —масса иона):

$$I_{dm} = 9,1 \frac{S n_e V^2}{\alpha n_a r} L \sqrt{\frac{T_e}{M}}. \quad (16)$$

Такая зависимость объясняется тем, что с увеличением  $r$  и  $M$  скорость выхода положительных ионов (уменьшающих  $I_{dm}$ ) из объема плазмы падает; следовательно, уменьшается и величина детекторного тока  $I_{dm}$ .

Таким образом, из вышеизложенного следует, что

1) плазме дугового, тлеющего и высокочастотного разрядов присущи детекторные свойства в широком интервале частот;

2) по двум точкам детекторной характеристики можно определять параметры плазмы ( $V_p$ ,  $T_e$ ,  $n_e$ );

3) в области низких давлений ( $P \leq 1$  мм рт. ст.) все детекторные характеристики хорошо аппроксимируются формулой (5);

4) в области квадратичного детектирования  $I_d = \gamma V^2$  чувствительность плазменного детектора  $\gamma$  растет с увеличением  $S$ ,  $n_e$ ,  $L$ ,  $Z$  и уменьшением  $T_e$ ,  $r$ ,  $M$ , а также своеобразно зависит от  $V_3$ ,  $P/E$ ,  $\lambda_0$ . Следовательно, оптимальными условиями процесса детектирования являются такие, которым соответствует максимальная детекторная чувствительность  $\gamma_m$ ; иными словами, должен быть выбран такой режим плазмы, при котором значения указанных величин соответствуют максимальной  $\gamma_m$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. О. Соболев, Наук. зап. МДПИ, Мелітополь, 4, 245 (1957).
2. К. І. Кононенко, Г. О. Соболев, Наук. зап. МДПИ, Мелітополь, 4, 255 (1957).
3. Г. О. Соболев, К. І. Кононенко, Наук. зап. МДПИ, Мелітополь, 4, 273 (1957).
4. I. M. Anderson, Proc. IRE, 48, 1662 (1960).
5. К. И. Кононенко, Труды физ. отд. ХГУ, Харьков, 6, 191 (1955).
6. К. И. Кононенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 927 (1959).
7. Ю. М. Каган, К. С. Мустафин, ЖТФ, 30, 1938 (1960).
8. В. Л. Грановский, Электрический ток в газах, 1, ГИТТЛ, М., 1952.
9. Б. Клярфельд, ЖТФ, 8, 2012 (1938).
10. В. М. Захарова, Ю. Каган, К. Мустафин, В. Перель, ЖТФ, 30, 442 (1960).

## TO THE DETECTOR PROPERTIES OF PLASMA

*G. A. Sobol*

A simplified method is outlined of plasma parameters determination by means of detector characteristics based on experimental formulas for sound and detector currents. An experimental corroboration of these formulas is carried out. By method of detector characteristics the analysis is given of experimental data obtained earlier, the dependence being obtained of detector current upon electrical charge regime, gas pressure in the tube, intensity of gas ionisation and discharge tube radius.

---

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПЛАЗМЕННОГО СТЕРЖНЯ, ОКРУЖЕННОГО СПИРАЛЬЮ

*С. М. Левитский и Н. С. Баранчук*

Проведен расчет фазовой скорости и волнового сопротивления в замедляющей системе, состоящей из плазменного стержня, окруженного спиралью; результаты расчета сопоставлены с данными эксперимента. Показано, что при малых плотностях плазмы свойства системы приближаются к свойствам спирали, а при больших плотностях — к свойствам плазменного волновода.

Последнее время в литературе появились сообщения о новом варианте замедляющей системы, представляющей собой плазменный стержень, окруженный спиралью. Помимо ряда свойств, присущих исходным замедляющим системам — плазменному волноводу и спирали, такая „гибридная“ замедляющая система обладает также некоторыми новыми свойствами, представляющими известный практический интерес.

Теоретически свойства плазменного стержня, окруженного спирально-проводящей поверхностью, были подробно изучены в [1]. На базе этой работы мы рассчитали зависимости фазовой скорости волн от различных параметров системы и сопоставили ход полученных зависимостей с данными эксперимента.

Практическое применение рассматриваемая замедляющая система получила пока только в одном случае — в устройстве, служащем для возбуждения плазменного волновода [2]. Ввиду того, что к такого рода переходным и возбуждающим устройствам всегда предъявляются требования согласованности и широкополосности, мы проверили также, насколько эти требования удовлетворяются в месте перехода от плазменного волновода, окруженного спиралью, к обычному плазменному волноводу.

### 1. ЗАМЕДЛЕНИЕ ВОЛН В СИСТЕМЕ ПЛАЗМЕННОГО СТЕРЖНЯ — СПИРАЛЬ

Дисперсионное уравнение, полученное в работе [1] в общем виде, применительно к той системе, с которой производились эксперименты, может быть значительно упрощено. Во-первых, поскольку в наших опытах магнитное поле отсутствовало, следует положить  $H = 0$ . Во-вторых, ввиду малой толщины стеклянных стенок разрядной трубки, на которую была намотана спираль, можно было считать, что радиус спирали  $b$  равен радиусу плазменного стержня  $a$ . С учетом этих упрощений дисперсионное уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{K_1(y)}{yK_0(y)} - \frac{yK_0(y)}{K_1(y)} \sigma^2 = -\frac{\epsilon_p}{\epsilon_d} \frac{I_1(x)}{xI_0(x)} + \frac{xI_0(x)}{I_1(x)} \sigma^2, \quad (1)$$

где  $\epsilon_p$  и  $\epsilon_d$  — диэлектрические проницаемости плазмы и диэлектрика, окружающего рассматриваемую систему,  $y = \gamma_d a$  и  $x = \gamma_p a$ , где  $\gamma_d = \sqrt{a^2 - (\omega^2/c^2) \epsilon_d}$  и  $\gamma_p = \sqrt{a^2 - (\omega^2/c^2) \epsilon_p}$  — поперечные коэффициен-

ты распространения волны в диэлектрике и плазме,  $\alpha$  — продольный коэффициент распространения волны и  $\sigma = \frac{c}{\omega a} \operatorname{tg} \psi$  ( $\psi$  — угол намотки спирали).

Следует отметить, что при  $\sigma = 0$  (т. е. в случае, когда полностью исчезает аксиальная компонента проводимости спирали) уравнение (1) превращается в дисперсионное уравнение плазменного волновода [3], а при  $\epsilon_p = \epsilon_d$  — в обычное дисперсионное уравнение для спирали.

Вторым уравнением, необходимым для нахождения двух неизвестных  $x$  и  $y$ , служит соотношение, получающееся в результате приравнивания продольного коэффициента распространения волн внутри плазмы и вне ее:

$$x^2 - y^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2} (\epsilon_d - \epsilon_p). \quad (2)$$

Результаты вычисления величины замедления  $\beta = c/v_\phi$ , полученные путем совместного решения уравнений (1) и (2), представлены на рис. 1 (кривая 1). Для сравнения на этом же рисунке изображена кривая 2,

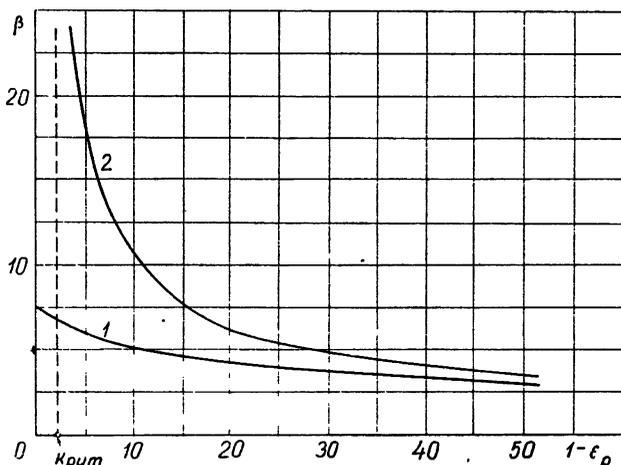


Рис. 1. Теоретическая зависимость замедления от диэлектрической проницаемости плазмы:

1 — для плазменного волновода, окруженного спиралью ( $\omega a/c = -4,2 \cdot 10^{-2}$ ;  $\operatorname{tg} \psi = 0,08$ ); 2 — для обычного плазменного волновода с тем же значением  $\omega a/c$  ( $\epsilon_d = 1$ ; точка „крит.“ соответствует критическому режиму плазменного волновода).

рассчитанная для обычного плазменного волновода. Как видно из сопоставления этих кривых, зависимость  $\beta(\epsilon_p)$  для спирали с плазмой при больших плотностях электронов в плазме ( $|\epsilon_p| \geq 50$ ) стремится к кривой 2, т. е. система приобретает свойства обычного плазменного волновода. При малых же концентрациях электронов ( $|\epsilon_p| < 10$ ) фазовая скорость волн в системе близка к фазовой скорости волн в обычной спирали. Чем меньше угол намотки  $\psi$ , тем раньше приближается величина замедления в системе к величине замедления в плазменном волноводе, оставаясь, однако, всегда меньше последней.

Экспериментальное исследование фазовой скорости и замедления волн в системе плазменный стержень — спираль было проведено на установке, описанной в работе [4]. Объектом исследования была газоразрядная лампа с накаливаемым катодом, наполненная парами ртути. Основная часть лампы представляла собой тонкую стеклянную трубку

(внешний диаметр 8 мм и внутренний—6 мм), которая оканчивалась анодом. На трубку была намотана спираль, причем диаметр провода спирали в зависимости от шага намотки выбирался в пределах от 0,2 до 0,5 мм. Один из концов спирали присоединялся к аноду разрядной трубки, который в свою очередь соединялся через дельта-трансформатор с центральным проводником питающего коаксиального кабеля. Катодная часть трубки погружалась в жидкость ультратермостата и подерживалась при температуре 50°C.

Непосредственного измерения концентрации электронов в трубке не производилось, так как диаметр трубки был слишком мал и изготовление зондов представляло большие трудности. Концентрацию электронов можно было определить расчетным путем, используя графики, приведенные в известной работе Кларфельда [5]. Для нашего конкретного случая ( $p = 1,27 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст.;  $a = 0,3$  см) концентрация электронов была пропорциональна разрядному току  $i_{\text{разр}}$  и могла быть выражена соотношением:

$$\bar{n}_e \text{ (см}^{-3}\text{)} = 1,5 \cdot 10^{12} i_{\text{разр}} (a),$$

где под  $\bar{n}_e$  следует понимать значение концентрации, усредненное по сечению разрядной трубки.

Результаты измерений для двух спиралей с различным шагом изображены на рис. 2. Из сопоставления последнего с рис. 1 видно, что

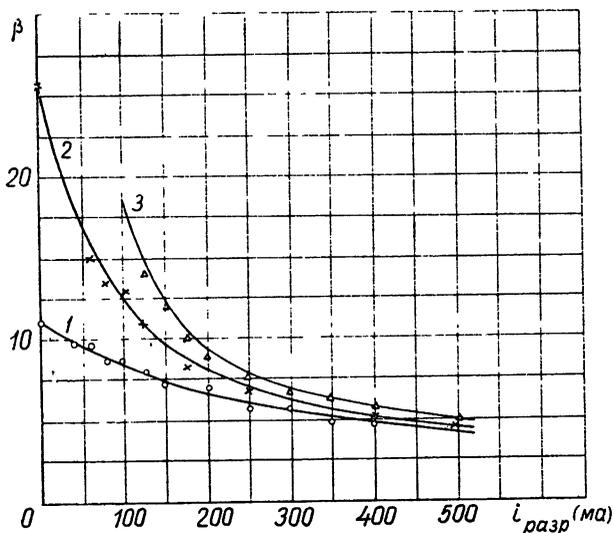


Рис. 2. Экспериментальная зависимость задержки от величины разрядного тока трубки на частоте 670 мГц: 1—для плазменного стержня, окруженного спиралью ( $a = 0,3$  см,  $\psi = 5^\circ$ ); 2—то же для  $\psi = 2,5^\circ$ ; 3—для плазменного волновода такого же диаметра.

как расчетные, так и экспериментальные кривые зависимости задержки от концентрации электронов имеют качественно одинаковый ход.

На основании полученных данных можно заключить, что сочетание двух замедляющих систем—плазменного волновода и спирали—позволяет, с одной стороны, электрически управлять коэффициентом задержки в спирали (подобно тому, как это сделано для спирали, окруженной плазмой в [6]), а с другой стороны, позволяет изменять и снижать до желаемого значения коэффициент задержки в заданном плазменном волноводе.

## 2. СОГЛАСОВАНИЕ ПЛАЗМЕННОГО ВОЛНОВОДА С ТЕМ ЖЕ ВОЛНОВОДОМ, ОКРУЖЕННЫМ СПИРАЛЬЮ

Можно полагать, что степень согласования плазменного волновода с участком того же волновода, окруженным спиралью, будет определяться соотношением их волновых сопротивлений. Такое утверждение является в данном случае в достаточной мере справедливым, так как структура поля в спирали, плазменном волноводе и их комбинации качественно сходна и вряд ли следует ожидать существенных диффракционных явлений в месте их взаимного перехода.

Величину волнового сопротивления  $W$  для плазменного волновода со спиралью можно определить тем же способом, как это делается для обычной спирали [7]:

$$W = U_t^2 / 2P,$$

где  $U_t = \int_a^\infty E_r dr$ ,  $P$  — поток мощности через все сечение замедляющей системы. Для плазменного стержня, окруженного спиралью,

$$W = \frac{4\alpha}{\omega \varepsilon_d} \frac{K_0^2}{y^2} \left\{ \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_d} \frac{K_0^2 y^2}{I_0^2 x^2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_p} \frac{x I_0^2}{I_1^2} \sigma^2 \right] \left[ I_1^2 - I_0^2 + \frac{2I_0 I_1}{x} \right] + \right. \\ \left. + \left[ 1 + \frac{y^2 K_1^2}{K_0^2} \sigma^2 \right] \left[ K_0^2 - K_1^2 + \frac{2K_0 K_1}{y} \right] \right\}^{-1} \quad (3)$$

( $I_{0,1}$  и  $K_{0,1}$  — модифицированные функции Бесселя от  $x$  и  $y$  соответственно).

На рис. 3 в качестве примера изображена зависимость  $W(\varepsilon_p)$  для случая обычного плазменного волновода (кривая 2) и для случая, когда на тот же плазменный волновод одета спираль с углом намотки  $\psi = 4,5^\circ$  (кривая 1). Из сопоставления этих кривых видно, что волновое сопротивление плазменного волновода со спиралью всегда меньше волнового сопротивления того же плазменного волновода в чистом

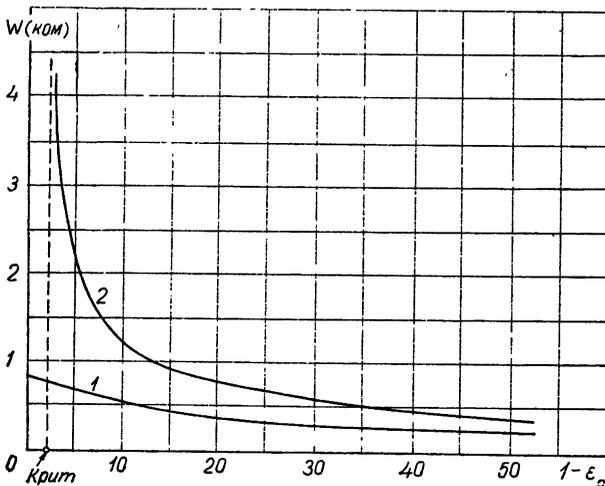


Рис. 3. Рассчитанное значение величины волнового сопротивления  $W$  для обычного плазменного волновода и окруженного спиралью. Обозначения и параметры те же, что и на рис. 1.

виде. Особенно велико расхождение при малых концентрациях электронов, где волновое сопротивление плазменного волновода уходит в бесконечность. По мере повышения концентрации электронов кривые асимптотически сближаются, но нигде волновые сопротивления рассматриваемых систем не могут быть равны друг другу. Отсюда можно сделать вывод, что полного согласования плазменного волновода с участком того же волновода, окруженным спиралью, достичь невозможно, хотя по мере повышения концентрации электронов согласование должно улучшаться.

Экспериментальное исследование согласованности производилось на той же лампе, которая описана выше; однако теперь она была обмотана спиралью лишь до половины. Проводя зонд измерительной линии вдоль лампы, можно было наблюдать картину изменения поля как на участке А, лишенном спирали, так и на участке Б, обмотанном спиралью. Выходной конец участка А оканчивался согласованной нагрузкой (степень согласования контролировалась по отсутствию стоячих волн на участке А). На вход участка Б также вводилось некоторое небольшое затухание, чтобы предотвратить многократные отражения. При соблюдении подобных предосторожностей можно было по картине стоячих волн на участке Б судить о степени согласования этого участка с „чистым“ плазменным волноводом.

Результаты измерений, полученные для нескольких частот, представлены на рис. 4. Как видно, удовлетворительное согласование действительно получается только для достаточно больших интенсивностей

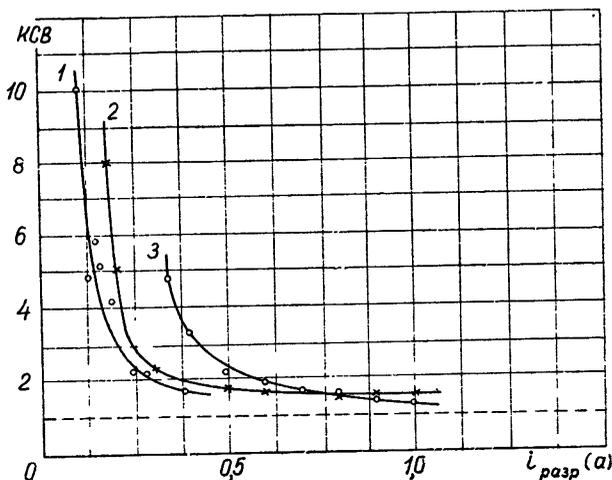


Рис. 4. Измеренная величина КСВ в зависимости от величины разрядного тока при переходе волны от плазменного волновода, окруженного спиралью, к обычному плазменному волноводу ( $a = 0,3$  см,  $\psi = 5^\circ$ ):

1—частота 670 мгц, 2—1000 мгц, 3—1600 мгц.

разряда. При малых разрядных токах, когда плазменный волновод приближается к критическому режиму, согласование резко ухудшается.

Таким образом, в смысле согласования рассматриваемая система возбуждения, состоящая из участка плазменного волновода, обмотанного спиралью, не имеет принципиальных преимуществ по сравнению с непосредственным переходом от коаксиальной линии к плазменному волноводу, который применялся в ряде работ [8] и свойства которого были изучены в сообщении [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Булгаков, В. П. Шестопалов, Л. А. Шишкин, И. П. Якименко, ЖТФ, **30**, 840 (1960).
2. В. Я. Кислов, Е. В. Богданов, Радиотехника и электроника, **5**, 1974 (1960).
3. W. O. Schumann, Z. Naturforsch, **5a**, 181 (1950).
4. С. М. Левитский и Н. С. Баранчук, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 1078 (1961).
5. V. Klafeld, J. Phys. USSR., **5**, 155 (1941).
6. В. Д. Иванова, В. С. Михалевский, Радиотехника и электроника, **4**, 1932 (1959).
7. Д. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
8. G. Bittner, Z. angew. Physik, **10**, 117 (1958); A. W. Trivelpiece, R. W. Gould, J. Appl. Phys., **30**, 1784 (1959).
9. В. И. Зимина, Радиотехника и электроника, **5**, 938 (1960).

Киевский государственный университет

Поступила в редакцию  
5 февраля 1962 г.

## STUDY OF SOME PROPERTIES OF DELAY SYSTEM CONSISTING OF PLASMA ROD SURROUNDED WITH A HELIX

*S. M. Levitski, N. S. Baranchuk*

The calculation is carried out of phase velocity and wave impedance for the delay system consisting of plasma rod surrounded with a helix; calculation results are compared with the experimental data. It is shown that when plasma densities are small the properties of the system approach those of a helix and for high densities those approach a plasma waveguide.

---

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СВЯЗАННЫХ ВОЛН К РАСЧЕТУ ДИАФРАГМИРОВАННЫХ ВОЛНОВОДОВ

А. П. Ольшанский

Описан приближенный метод расчета фазовой постоянной для однородной периодической системы типа „двойной гребенки“, основанный на применении векторных собственных функций некоторого регулярного волновода. Получены алгебраические дисперсионные уравнения для синфазных волн диафрагмированного волновода. Проведено сравнение расчетной дисперсионной характеристики с экспериментом.

В большинстве работ методом связанных волн исследовались системы, имеющие на границе сравнительно малые возмущения, когда связь между частными решениями, полученными для невозмущенной области, является слабой [1-3]. В настоящей статье рассматривается случай больших возмущений на границе исследуемой области: величина поверхностного импеданса на границе периодической структуры рассматриваемого диафрагмированного волновода достигает нескольких тысяч ом.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечный волновод прямоугольного поперечного сечения, нагруженный по узким стенкам металлическими диафрагмами (рис. 1). Пусть на границе металлопластинчатой периодической структуры справедливы однородные граничные условия вида

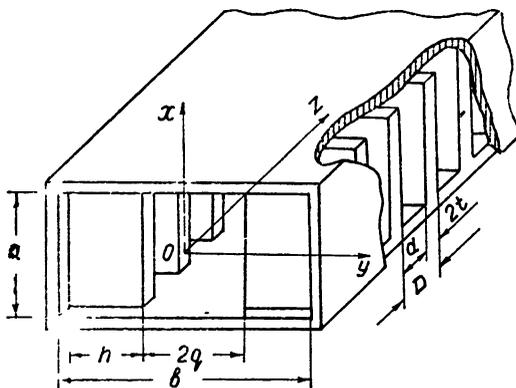


Рис. 1.

$$E = Z [Hn], \quad (1)$$

а на поверхностях  $x = \pm \frac{a}{2}$  — граничные условия

$$[nE] = 0. \quad (2)$$

Поле, удовлетворяющее однородным уравнениям Максвелла\*

\* Используется практическая рационализированная система единиц; зависимость от времени задается в виде  $e^{-i\omega t}$ .

$$\operatorname{rot} H = -i\omega\epsilon E,$$

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H$$

и граничным условиям (1) и (2), будем искать в виде разложения по полной системе собственных функций  $E$ —задачи для регулярного волновода с поперечными размерами  $a$  и  $2q$ :

$$E = \sum_e e_l E_l + \sum_e e_g E_g + \sum_h e_c E_c \equiv \sum_a e_a E_a, \quad (3)$$

$$H = \sum_h h_l H_l + \sum_h h_g H_g + \sum_e h_c H_c \equiv \sum_b h_b H_b, \quad (4)$$

где  $E_l, H_l$ —продольные,  $E_g, H_g$ —градиентные,  $E_c, H_c$ —вихревые векторные собственные функции, а  $e_a, h_b$ —амплитудные коэффициенты, определяемые граничными условиями. Суммирование ведется по всем  $E$ -волнам и  $H$ -волнам регулярного волновода.

## 2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Ортонормированные векторные собственные функции регулярного волновода известны и задаются следующими выражениями:

$$E_l = \sqrt{\frac{2}{aq}} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2q} yz_0\right);$$

$$H_l = \sqrt{\frac{2}{aq}} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2q} yz_0\right);$$

$$E_g = \frac{1}{x_e} \operatorname{grad} E_l; \quad H_g = \frac{1}{x_h} \operatorname{grad} H_l;$$

$$E_c = [H_g z_0]; \quad H_c = [z_0 E_g].$$

Здесь  $x_{e,h}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/2q)^2$  — поперечные волновые числа  $E$ -волны и  $H$ -волны регулярного волновода.

Амплитудные коэффициенты  $e_a$  и  $h_b$  находятся из системы волноводных уравнений [1]:

$$\begin{aligned} -i\omega\epsilon e_l + x_e h_c &= 0; & -i\omega\mu h_c - x_e e_l + \frac{de_g}{dz} &= -f_c; \\ -i\omega\epsilon e_g + \frac{dh_c}{dz} &= 0; & -i\omega\mu h_g + \frac{de_c}{dz} &= -f_g; \\ -i\omega\epsilon e_c + \frac{dh_g}{dz} - x_h h_l &= 0; & -i\omega\mu h_l + x_h e_c &= -f_l; \end{aligned} \quad (5)$$

$$f_c = \oint_L E [H_c n] dL; \quad f_g = \oint_L E [H_g n] dL; \quad f_l = \oint_L E [H_l n] dL.$$

Здесь  $L$ —контур поперечного сечения регулярного волновода. В подынтегральные выражения для функций  $f_c, f_g$  и  $f_l$  входит напряженность электрического поля на границе периодической структуры  $E$ .

Если диафрагмы достаточно тонкие и расположены часто ( $t \ll d$  и  $D \ll \lambda_b$ ), то напряженность поля  $E$  на границе можно представить в виде (1). Используя далее выражение (4), получим:

$$E = Z \left[ \sum_{b'} h_{b'} H_{b'} n \right].$$

В пространстве резонаторов учтем только основной тип волны  $H_{10}^*$ , имеющей на границе периодической структуры компоненты  $E_z$  и  $H_x$ . В этом случае поверхностный импеданс определится по формуле  $Z = E_z/H_x$  и напряженность электрического поля на границе запишется в виде

$$E = E_z z_0 = Z \left[ \sum_{g'} h_{g'} H_{g'} + \sum_{c'} h_{c'} H_{c'}, n \right]. \quad (6)$$

После подстановки (6) в уравнение (5) и некоторых преобразований получим бесконечную систему дифференциальных уравнений для амплитудных коэффициентов  $h_c$  и  $h_g$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_c}{dz^2} + \beta_{cc}^2 h_c + A \alpha_{gc}^{nn} h_g + A \sum_{g'} \alpha_{g'c}^{n'n} h_{g'} + A \sum_{c'} \alpha_{c'c}^{n'n} h_{c'} &= 0; \\ \frac{d^2 h_g}{dz^2} + \beta_{gg}^2 h_g + B_n \alpha_{cg}^{nn} h_c + B_n \sum_{g'} \alpha_{g'g}^{n'n} h_{g'} + B_n \sum_{c'} \alpha_{c'g}^{n'n} h_{c'} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $A = i\omega\epsilon Z$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{b'b}^{n'n} &= \int_0^a H_{b'} H_b dx \Big|_{y=g} + \int_0^a H_{b'} H_b dx \Big|_{y=-g}, \quad \beta_{cc}^{nn} = \gamma_e^2 + A \alpha_{cc}^{nn}, \\ \beta_{gg}^{nn} &= \gamma_h^2 + B_n \alpha_{gg}^{nn}, \quad B_n = i \frac{\gamma_h^2}{\omega\mu} Z, \quad \gamma_{e,h}^2 = k^2 - \kappa_{e,h}^2. \end{aligned}$$

Система уравнений (7) описывает связанные  $E$ - и  $H$ -волны регулярного волновода. Степень связи определяется величиной поверхностного импеданса  $Z$  и коэффициентами  $\alpha_{b'b}$ . Чем больше величина импеданса  $Z$ , тем сильнее связь между волнами регулярного волновода. При  $Z = 0$  связь между волнами отсутствует и система уравнений (7) распадается на два независимых уравнения для  $E$ - и  $H$ -волн. Связанными оказываются волны с одинаковыми числами  $m$  вдоль координаты  $x$ , но разными числами  $n$  вдоль координаты  $y$ .

Коэффициенты  $\alpha_{b'b}^{n'n}$  выражаются формулами вида

$$\alpha_{b'b}^{n'n} = K_{b'b} [1 + (-1)^{n'+n}].$$

Отсюда следует, что при нечетной сумме  $n' + n$  коэффициенты  $\alpha_{b'b}^{n'n}$  равны нулю и (7) распадается на две независимых системы уравнений. Система уравнений для полей с нечетными индексами  $n$  соответствует синфазным волнам диафрагмированного волновода. Вторая система соответствует противифазным волнам.

Частное решение однородной системы уравнений (7) ищем в виде

$$h_c = k_{mn} e^{i\gamma z}, \quad h_g = p_{mn} e^{i\gamma z}.$$

Рассматривая поля с нечетными индексами  $n$ , получим для синфазных волн с индексом  $m = 1$  следующую систему алгебраических уравнений:

\* Классификация проводится относительно координаты  $y$ .

$$(\beta_{cc}^{11} - \gamma^2) k_{11} + A\alpha_{c'c}^{31} k_{13} + \dots + A\alpha_{gc}^{11} p_{11} + A\alpha_{g'c}^{31} p_{13} + \dots = 0;$$

$$A\alpha_{c'c}^{13} k_{11} + (\beta_{cc}^{33} - \gamma^2) k_{13} + \dots + A\alpha_{g'c}^{13} p_{11} + A\alpha_{gc}^{33} p_{13} + \dots = 0;$$

$$B_{11}\alpha_{cg}^{11} k_{11} + B_{11}\alpha_{c'g}^{31} k_{13} + \dots + (\beta_{gg}^{11} - \gamma^2) p_{11} + B_{11}\alpha_{g'g}^{31} p_{13} + \dots = 0; \quad (8)$$

$$B_{13}\alpha_{cg}^{13} k_{11} + B_{13}\alpha_{c'g}^{33} k_{13} + \dots + B_{13}\alpha_{g'g}^{13} p_{11} + (\beta_{gg}^{33} - \gamma^2) p_{13} + \dots = 0;$$

Здесь

$$\alpha_{g'g}^{n'n} = \frac{2}{q \sqrt{[1 + r^2 (n')^2] (1 + r^2 n^2)}}; \quad r = \frac{a}{2q};$$

$$\alpha_{c'c}^{n'n} = r^2 n' n \alpha_{g'g}^{n'n}; \quad \alpha_{c'g}^{n'n} = r n' \alpha_{g'c}^{n'n}; \quad \alpha_{g'c}^{n'n} = r n \alpha_{g'g}^{n'n}.$$

Приравнявая определитель системы (8) нулю, получаем дисперсионное уравнение для синфазных волн диафрагмированного волновода. При учете двух волн типа  $E_{1n}$  и  $H_{1n}$  соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \beta_{cc}^{nn} - \gamma^2 & A\alpha_{gc}^{nn} \\ B_{1n}\alpha_{cg}^{nn} & \beta_{gg}^{nn} - \gamma^2 \end{vmatrix} = 0$$

или после ряда преобразований

$$\gamma^4 - (\gamma_{1n}^2 + D_n^2) \gamma^2 + \gamma_{1n}^2 D_n^2 = 0, \quad (9)$$

где

$$D_n^2 = \gamma_{1n}^2 + A\alpha_{cc}^{nn} + B_{1n}\alpha_{gg}^{nn}, \quad \gamma_e = \gamma_h = \gamma_{1n}.$$

Решение дисперсионного уравнения (9) дает два значения для фазовой постоянной синфазной волны в диафрагмированном волноводе:

$$\gamma_1^2 = \gamma_{1n}^2; \quad \gamma_2^2 = D_n^2.$$

Анализ полученных решений показывает, что фазовая постоянная  $\gamma = \gamma_{1n}$  соответствует продольно-магнитной волне типа  $LM_{1n}$  ( $H_x = 0$ ; быстрая волна), а фазовая постоянная  $\gamma = D_n$  — продольно-электрической волне типа  $LE_{1n}$  ( $E_x = 0$ ; медленная волна).

Аналогичные решения получаются и для противофазных волн ( $n$  — четное число).

Таким образом, использование метода связанных волн приводит к выводу, что в диафрагмированном волноводе типа „двойной гребенки“ могут существовать синфазные и противофазные продольно-электрические и продольно-магнитные волны [4].

### 3. РАСЧЕТ ДИСПЕРСИИ СИНФАЗНОЙ ПРОДОЛЬНО-ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Проведем расчет фазовой постоянной синфазной продольно-электрической волны типа  $LE_{11}$  для волновода с размерами  $a = 7 \cdot 10^{-2}$  м,  $b = 7,74 \cdot 10^{-2}$  м,  $2q = 2 \cdot 10^{-2}$  м,  $h = 2,87 \cdot 10^{-2}$  м,  $D = 2,5 \cdot 10^{-2}$  м.

При расчете учтем две основные волны регулярного волновода  $E_{11}$  и  $H_{11}$ . Тогда фазовая постоянная

$$\gamma = \sqrt{\gamma_{11}^2 + i\omega\epsilon\alpha_{cc}^{11}Z + i\frac{\alpha_{gg}^{11}}{\omega\mu}\gamma_{11}^2Z}. \quad (10)$$

Значение поверхностного импеданса  $Z$  вычислим по формуле [5]

$$Z = -i120\pi \frac{k}{k_0} \operatorname{tg}(k_0 h), \quad k_0 = \sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}.$$

В полосе пропускания нашего волновода, соответствующей десятисантиметровому диапазону, поверхностный импеданс в зависимости от частоты имеет величины от  $-i1500$  до  $-i2000$  ом.

На рис. 2 приведена дисперсионная характеристика синфазной волны, рассчитанная по полученной формуле (10) (кривая 1). Кривой 2 на

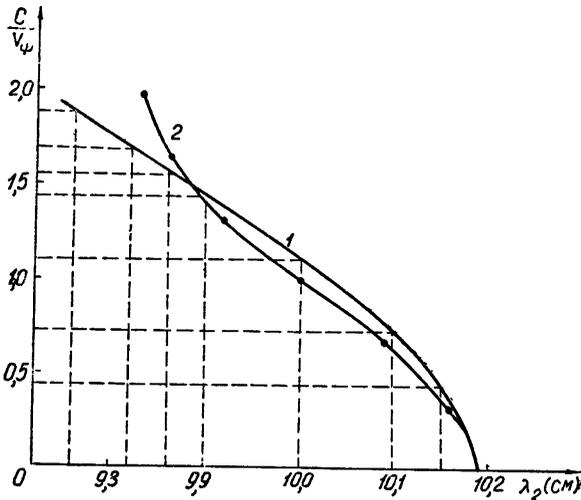


Рис. 2.

этом же рисунке соответствует экспериментальная дисперсионная характеристика. Как видно, при замедлении порядка единицы ( $c/v_\phi \leq 1,6$ ) наибольшее расхождение между теоретической и экспериментальной длинами волн генератора при заданном замедлении не превышает 0,3%.

Ход расчетной дисперсионной кривой 1 при наибольшем замедлении в полосе пропускания системы  $c/v_\phi > 1,6$  объясняется тем, что при расчете дисперсии в импедансном приближении не учитывается периодичность системы и соответствующая верхняя граничная частота находится в области более высоких частот, чем при учете периода системы [6].

Хорошее совпадение расчетной дисперсионной кривой с реальной дисперсионной характеристикой позволяет сделать вывод, что сильно связанными оказываются волны  $E$ -и  $H$ -типов с одинаковыми фазовыми постоянными  $\gamma_e = \gamma_h$  и их взаимосвязь в основном определяет фазовые постоянные нормальных волн рассматриваемой системы. Аналогичный вывод сделан в работах [3,7].

Итак, на примере диафрагмированного волновода типа „двойной гребенки“ показана возможность использования метода связанных волн для расчета дисперсионных характеристик периодических систем, на границе которых могут быть заданы импедансные граничные условия. Показано, что с помощью этого метода сравнительно просто получают алгебраические дисперсионные уравнения и их решение, не требуя громоздких численных расчетов, давая вполне удовлетворительные результаты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, изд. ВКАС, М., 1949.
2. Б. Ф. Емелин, Радиотехника и электроника, 3, 615 (1958).
3. Волноводные линии передачи с малыми потерями, ИЛ, М., 1960.
4. Е. С. Коваленко, В. И. Шиманский, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 3, 153 (1960).
5. М. А. Миллер, ЖТФ, 25, 1972 (1955).
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
7. L. C. Bahiana and L. D. Smullin, IRE Trans. Microwave Theory and Techn, 8, 454 (1960).

Научно-исследовательский институт ядерной физики,  
электроники и автоматики  
при Томском политехническом институте

Поступила в редакцию  
27 февраля 1962 г.

APPLICATION OF COUPLED WAVES METHOD TO  
CALCULATION OF WAVEGUIDE WITH DIAPHRAGMS

*A. P. Olshanski*

An approximate method is described of phase constant calculation for the homogeneous periodic system of double metal plate structure type which is based on the application of vector self-functions of a certain regular waveguide. Algebraic dispersive equations are obtained for cophased waves of septate waveguide. The comparison is carried out of the calculated measured dispersive characteristics.

---

## О КОЛЕБАНИЯХ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

*Л. А. Островский*

Рассматриваются колебания в системе с близкими нормальными частотами, параметры которой изменяются с частотой  $\Omega$ , сравнимой с разностью нормальных частот  $\omega_l - \omega_k$ . Показано, что при  $\Omega = \omega_l - \omega_k$  в такой системе возможна резонансная перекачка энергии между нормальными колебаниями.

1. Колебания в системе с произвольным конечным числом степеней свободы, параметры которой достаточно медленно изменяются во времени, представляют собою суперпозицию модулированных нормальных колебаний, частоты которых изменяются квазистационарным образом, причем отношение энергии каждого нормального колебания к его частоте является адиабатическим инвариантом [1]. Требование достаточной медленности означает, что характерная частота изменения параметров  $\Omega$  должна быть мала, во-первых, по сравнению с частотами нормальных колебаний  $\omega_l$  и, во-вторых, по сравнению со значениями разностей любых двух этих частот. Если в спектре собственных колебаний системы имеются близкие частоты (система находится в состоянии, близком к вырожденному), то уже при малой величине  $\Omega$  второе условие нарушается и колебания носят более сложный характер. При этом возможны некоторые специфические эффекты; один из них рассматривается ниже на примере системы с двумя степенями свободы.

Положим, как и в [1], что кинетическая и потенциальная энергии системы представлены положительными квадратичными формами с медленно меняющимися коэффициентами:

$$T = \sum_{i, k} a_{ik}(\tau) \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_k}{dt}; \quad U = \sum_{i, k} b_{ik}(\tau) q_i q_k \quad (a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}), \quad (1)$$

где  $q_i$  — независимые координаты,  $\tau = \epsilon t$  ( $\epsilon$  — малый параметр). В соответствии со сказанным выше будем рассматривать такие изменения величин  $a_{ik}$  и  $b_{ik}$ , при которых нормальные частоты отличаются на величину порядка  $\epsilon$ , а именно\*:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= a_{ii}^0 [1 + \epsilon \alpha_{ii}(\tau)]; & b_{ii} &= \omega_0^2 a_{ii}^0 [1 + \epsilon \beta_{ii}(\tau)]; \\ a_{ik} &= \epsilon a_{ii}^0 \alpha_{ik}(\tau); & b_{ik} &= \epsilon \omega_0^2 a_{ii}^0 \beta_{ik}(\tau) \quad (i \neq k). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\omega_0$ ,  $a_{ii}^0$  — постоянные,  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$  — заданные функции  $\tau$ . Из (2) вы-

\* Пользуясь уравнениями Лагранжа, нетрудно показать, что необходимые условия близости нормальных частот в системе с двумя степенями свободы имеют несколько более общий вид:  $b_{ii} = \omega_0^2(\tau) a_{ii} + O(\epsilon)$ ,  $b_{1,2}(\tau) - \omega_0^2(\tau) a_{1,2}(\tau) = O(\epsilon)$ . Решение задачи для такого закона изменения параметров вместо (2) немногим сложнее, но и не дает ничего существенно нового.

текает близость парциальных частот системы, а также малость связей между парциальными подсистемами.

С помощью (1) и (2) уравнения Лагранжа запишутся следующим образом:

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} + \omega_0^2 q_i = -\varepsilon \sum_k \left( \alpha_{ik} \frac{d^2 q_k}{dt^2} + \omega_0^2 \beta_{ik} q_k \right) - \varepsilon^2 \sum_k \alpha'_{ik} \frac{dq_k}{dt} \quad (3)$$

(штрих обозначает дифференцирование по  $\tau$ ). Приближенное решение (3) естественно искать в виде:

$$q_i = u_i(\tau) \cos(\omega_0 t) + v_i(\tau) \sin(\omega_0 t). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), найдем, что  $u$  и  $v$  удовлетворяют уравнениям

$$-u'_i = \sum_k \delta_{ik} v_k, \quad v'_i = \sum_k \delta_{ik} u_k, \quad (5)$$

где  $\delta_{ik} = \frac{\omega_0}{2} (\alpha_{ik} - \beta_{ik})$ . Система (5) имеет тот же порядок, что и (3),

и не определяет в общем случае независимых нормальных колебаний.

Полученные уравнения верны для любого числа степеней свободы. В случае двух степеней свободы исключением  $v_i$  можно привести (5) к виду:

$$\begin{aligned} u''_1 + (\delta_{11}^2 + \delta_{12}\delta_{21})u_1 &= -\delta_{12}(\delta_{11} + \delta_{22})u_2 + \\ &+ \frac{\delta'_{11}\delta_{22} - \delta'_{12}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} u'_1 + \frac{\delta_{11}\delta'_{12} - \delta'_{11}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} u'_2; \\ u''_2 + (\delta_{22}^2 + \delta_{12}\delta_{21})u_2 &= -\delta_{21}(\delta_{11} + \delta_{22})u_1 + \\ &+ \frac{\delta'_{22}\delta_{11} - \delta'_{21}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} u'_2 + \frac{\delta_{22}\delta'_{21} - \delta'_{22}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} u'_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (6) сходны по виду с (3) и могут формально рассматриваться как описывающие колебания двух связанных подсистем с малыми (по сравнению с  $\omega_0$ ) парциальными частотами. Поэтому в данном случае сравнительно медленное изменение параметров  $\delta_{ik}$  может привести к эффектам, которые в системах с невырожденным спектром играют заметную роль лишь при большой (порядка величины нормальных частот) характерной частоте изменения параметров, именно, к существенным изменениям энергии нормальных колебаний, обусловленным малыми изменениями параметров.

2. Исследуем далее резонансные явления, возникающие при периодическом изменении параметров с определенными частотами. Положим, как это обычно делается, что переменные составляющие величин  $\delta_{ik}$  малы, т. е.:

$$\delta_{ik} = \bar{\delta}_{ik} + \varepsilon^{1/2} [\tilde{\delta}_{ik} \cos(\Omega\tau) + \check{\delta}_{ik} \sin(\Omega\tau)] \quad (i, k = 1, 2), \quad (7)$$

где  $\bar{\delta}_{ik}$ ,  $\tilde{\delta}_{ik}$ ,  $\check{\delta}_{ik}$ ,  $\Omega$  — постоянные\*.

\* Малым параметром здесь является  $\varepsilon^{1/2}$ , а не  $\varepsilon$ , так как в последнем случае существенные члены в (6) имели бы тот же порядок малости, что и отброшенные ранее в исходной системе (3).

Рассмотрим, например, случай, когда в первом приближении система симметрична, т. е.  $\tilde{\delta}_{11} = \tilde{\delta}_{22}$ . Поскольку при заданных  $a_{ii}$  и  $b_{ii}$  величины  $a_{ii}^0$  и  $\omega_0$  определены в (2) с точностью до величин порядка  $\varepsilon$ , то, как нетрудно видеть, можно без ограничения общности положить  $\tilde{\delta}_{11} = \tilde{\delta}_{22} = 0$ . При этом правые части (6) имеют порядок  $\varepsilon^{1/2}$ , а роль частоты играет величина  $k = \sqrt{\tilde{\delta}_{12}\tilde{\delta}_{21}}$ . Полагая в (7)  $\Omega = 2k$ , будем искать решение (6) в виде:

$$u_i = \tilde{u}_i(\varepsilon^{1/2}\tau) \cos(k\tau) + \tilde{u}_i(\varepsilon^{1/2}\tau) \sin(k\tau). \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (6) и учитывая только резонансные члены, получим систему уравнений с постоянными коэффициентами:

$$4\kappa^{\pm 1} \tilde{u}'_{1,2} = \pm \varepsilon^{1/2} (\tilde{\Delta} \tilde{u}_{2,1} - \tilde{\Delta} \tilde{u}_{2,1}); \quad (9)$$

$$4\kappa^{\pm 1} \tilde{u}'_{1,2} = \pm \varepsilon^{1/2} (\tilde{\Delta} \tilde{u}_{2,1} + \tilde{\Delta} \tilde{u}_{2,1}).$$

Здесь  $\tilde{\Delta} = \tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2$ ,  $\tilde{\Delta} = \tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2$ ,  $\kappa = (\tilde{\delta}_{21}/\tilde{\delta}_{12})^{1/2} = (a_{11}^0/a_{22}^0)^{1/2}$ . Из (9) следует, что изменения параметров, не нарушающие симметрии системы (изменение „коэффициентов связи“  $\tilde{\delta}_{12}$ ,  $\tilde{\delta}_{21}$ , а также одинаковые изменения величин  $\tilde{\delta}_{11}$  и  $\tilde{\delta}_{22}$ ), не оказывают резонансного влияния на амплитуду колебаний.

Полагая в (9) искомые величины пропорциональными  $e^{s\xi}$ , где  $\xi = \varepsilon^{1/2}\tau$ , найдем:

$$s^2 + \frac{1}{16} (\tilde{\Delta}^2 + \tilde{\Delta}^2) = 0. \quad (10)$$

Пользуясь (10), легко написать решение системы (9), а затем, определяя с помощью (5) величины  $v_i$ , — и общее решение исходной системы (3). Если, например,  $\tilde{\Delta} = 0$ ,  $\tilde{\Delta} > 0$ , то общее решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \kappa^{\pm 1/2} q_{1,2} = A \left\{ \cos\left(\frac{\tilde{\Delta}}{4}\xi + \varphi\right) \cos[(\omega_0 - \varepsilon k)t] \mp \right. \\ \left. \mp \sin\left(\frac{\tilde{\Delta}}{4}\xi + \varphi\right) \cos[(\omega_0 + \varepsilon k)t] \right\} + B \left\{ \sin\left(\frac{\tilde{\Delta}}{4}\xi + \psi\right) \sin[(\omega_0 - \varepsilon k)t] \pm \right. \\ \left. \pm \cos\left(\frac{\tilde{\Delta}}{4}\xi + \psi\right) \sin[(\omega_0 + \varepsilon k)t] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  — произвольные постоянные.

Таким образом, амплитуды нормальных колебаний, имеющих частоты  $\omega_{\mp} = \omega_0 \mp \varepsilon k$ , периодически изменяются с частотой  $\varepsilon^{3/2}\tilde{\Delta}/4$  и сдвигом фаз  $\pi/2$  по отношению друг к другу. Согласно (1) и (11), средняя за время  $2\pi/\varepsilon k$  энергия  $\bar{W}_{\mp} = \bar{T}_{\mp} + \bar{V}_{\mp}$  каждого из нормальных колебаний изменяется в принятом приближении следующим образом:

$$\bar{W}_{-} \sim A^2 \cos^2\left(\frac{\tilde{\Delta}}{4}\xi + \varphi\right) + B^2 \sin^2\left(\frac{\tilde{\Delta}}{4}\xi + \psi\right);$$

$$\bar{W}_+ \sim A^2 \sin^2 \left( \frac{\tilde{\Delta}}{4} \xi + \varphi \right) + B^2 \cos^2 \left( \frac{\tilde{\Delta}}{4} \xi + \psi \right). \quad (12)$$

При определенных значениях постоянных (например, при  $B = 0$ ) за промежутки времени  $t_0$ , равные  $2\pi/\varepsilon^{3/2}\tilde{\Delta}$ , происходит полная перекачка энергии одного нормального колебания в другое. Зависимость эффекта от начальных условий характерна для параметрических явлений, однако из (6) и (9) ясно, что существенным в конечном счете является сдвиг фазы изменения параметров по отношению к фазе медленно меняющихся амплитуд  $u$ ,  $v$  (которая в свою очередь зависит от взаимного сдвига фаз нормальных колебаний), в отличие от случая обычного параметрического усиления в „вырожденном“ режиме [2].

С физической точки зрения рассмотренный резонансный эффект обусловлен изменением параметров в такт с процессом энергетических биений между парциальными подсистемами, совершающимся с частотой  $\Omega = 2\varepsilon k$ . При этом в спектре каждого нормального колебания, кроме основной частоты  $\omega$ , возникают компоненты с частотами  $\omega \pm \pm 2\varepsilon km$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) и, в частности, при  $m=1$  — с основной частотой второго нормального колебания, вследствие чего фаза и амплитуда энергетических биений в каждой подсистеме непрерывно изменяются. Результирующий процесс описывается формулами (11) и (12), из которых следует, что полная энергия системы, равная  $\bar{W} = \bar{W}_{\omega_1} + \bar{W}_{\omega_2}$ , остается постоянной, а роль изменения параметров сводится в данном приближении лишь к осуществлению „взаимодействия“ между нормальными колебаниями\*.

В заключение отметим возможность существования аналогичных явлений для бегущих волн в связанных линиях передачи с периодически изменяющимися во времени и пространстве параметрами. В литературе рассмотрено взаимное преобразование нормальных волн при аперриодическом изменении параметров среды в пространстве, например, переход обыкновенной волны в необыкновенную в неоднородном ионосферном слое [3]. Следует ожидать, что аперриодическое изменение во времени параметров системы с сосредоточенными параметрами также может привести к переходу энергии одного нормального колебания в другое.

К тому же типу, что и рассмотренный выше, относится механизм параметрического взаимодействия потока частиц с усредненными компонентами двух высокочастотных силовых полей, возможность которого указана в последнее время [4].

Автор выражает признательность В. И. Беспалову, А. В. Гапонову и М. А. Миллеру за интерес к работе и критические замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Рытов, Труды физического института АН СССР, 2, 1, 40 (1940).
2. S. Bloom, K. Chang, R. C. A. Rev., 18, 578 (1957).
3. Н. Г. Денисов, ЖЭТФ, 29, 380 (1955).
4. М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 929 (1962).

Научно-исследовательский радиопизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
20 февраля 1962 г.

\* Простые качественные соображения показывают, что на отдельных участках процесса, в зависимости от фазы энергетических биений, происходит резонансное возрастание или уменьшение энергии системы  $W$ , вследствие чего последняя изменяется с периодом  $2t_0$ . Однако, как указал автору В. И. Беспалов, максимальное изменение  $W$  пропорционально  $\Omega/\omega_0 \sim \varepsilon$  и поэтому в (11) не учтено, хотя и велико по сравнению с долей энергии, вносимой за период изменения параметров (пропорциональной  $\tilde{\Delta}/\omega_0 \sim \varepsilon^{3/2}$ ).

ON THE OSCILLATIONS OF COUPLED SYSTEMS WITH  
SLOWLY VARYING PARAMETERS*L. A. Ostrovsky*

Oscillations are considered in the system with slightly different normal frequencies. The parameters of the system change with the frequency  $\Omega$  which equals approximately to the difference of normal frequencies  $\omega_l - \omega_k$ . It is shown that there is possible in such a system when  $\Omega = \omega_l - \omega_k$  a resonant energy transformation between normal oscillations.

---

## ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ ПРОСТЕЙШЕЙ РЕЛЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С КОРРЕКЦИЕЙ

А. И. Черепанов

Находятся автоколебания системы двухпозиционного регулирования с коррекцией по времени. Поведение системы при различных параметрах корректирующего устройства изучены на электронной модели. Сравниваются результаты точного и приближенного расчета конкретной системы регулирования температуры второго порядка.

В последнее время в технике все большее распространение получают двухпозиционные регуляторы с корректирующими устройствами; которые позволяют простыми средствами получить высокую точность регулирования [1-11, 14]. В частности, в работах [5-8] описывается двухпозиционная система регулирования с коррекцией по времени, осуществляемой с помощью специального электромеханического корректирующего устройства. Этот принцип коррекции может быть осуществлен, как будет показано ниже, с помощью электронного корректирующего устройства, имеющего преимущества по сравнению с электромеханическим.

Исследование процессов двухпозиционного регулирования с коррекцией проводилось ранее главным образом приближенным графоаналитическим методом, развитым в [12]. Очень мало работ [10, 11, 14] посвящено точному исследованию процессов в таких системах. В настоящей работе автоколебания системы двухпозиционного регулирования с коррекцией по времени (с электронным корректирующим устройством) находятся методом [13]. Выведены точные формулы для определения параметров автоколебаний в системе. Сравниваются результаты точного и приближенного расчета конкретной системы двухпозиционного регулирования с коррекцией по времени и без коррекции.

Рассмотрим кратко работу двухпозиционного регулятора с электронным корректирующим устройством, принципиальная схема которого изображена на рис. 1.

Предположим, что регулируемый параметр находится выше заданного уровня и контакт регулятора КР разомкнут. Исполнительное реле ИР обесточено и энергия в объект не поступает. Значение регулируемого параметра падает. При достижении заданного уровня замыкаются контакты регулятора КР-2 и КР-1. Первый вводит энергию в объект, второй

корректирующим устройством, принципиальная схема которого изображена на рис. 1.

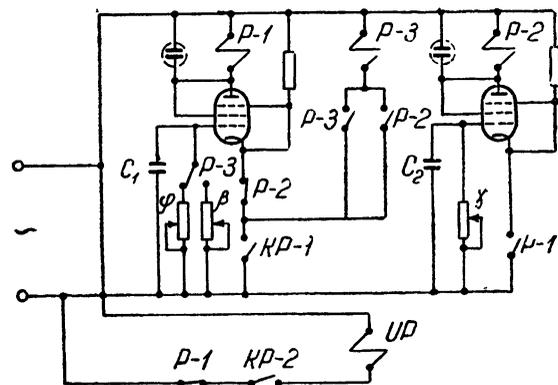


Рис. 1. Принципиальная схема включения корректирующего устройства:

P-1, P-2—реле времени; C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>—разрядные емкости; ИР—исполнительные реле; КР—контакт двухпозиционного регулятора; P-3—промежуточное реле.

запускает первое реле времени. Если объект регулирования обладает запаздыванием, регулируемый параметр некоторое время после начала притока энергии продолжает падать, а затем начинает возрастать. Через некоторое, заранее заданное время  $\varphi$  сработает реле Р-1 и прекратит приток энергии в объект раньше, чем разомкнется контакт КР. Одновременно реле Р-1 запускает второе реле времени с заданной выдержкой  $\gamma$ .

Если регулируемый параметр превысит заданное значение раньше, чем сработает реле Р-2, то контакт КР разомкнется и схема возвратится в исходное состояние. Именно так должны быть выбраны выдержки  $\varphi$  и  $\gamma$  для нормальной работы корректирующего устройства при отсутствии возмущений. Если же реле Р-2 сработает раньше, чем регулируемый параметр превысит заданный уровень, то реле Р-2 включит реле Р-3, которое самоблокируется и переключает реле Р-1 на новую выдержку  $\beta$ . Далее происходит импульсная подача энергии в объект с длительностью импульса  $\beta$  и скважностью  $\gamma$ .

Будем считать, что объект регулирования описывается уравнением второго порядка с чистым запаздыванием (10). В этом случае уравнение системы можно записать следующим образом:

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + (k^2 - 1)x = (k^2 - 1)V[x(t - \alpha)];$$

$$V[x(t - \alpha)] = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < \varphi; \varphi + i(\gamma + \beta) + \gamma < t < \varphi + (i+1)(\gamma + \beta) \quad (x < c); \\ 0 & \text{при } \varphi + i(\gamma + \beta) < t < \varphi + i(\gamma + \beta) + \gamma \quad (x < c); \\ 0 & \text{при } x > c \end{cases} \quad (1)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь  $x$ —регулируемый параметр;  $k$ —параметр, характеризующий объект;  $\alpha$ —запаздывание;  $c$ —заданный уровень регулирования.

В уравнении (1)  $t = 0$  и  $i = 0$  каждый раз в момент  $x = c$ ,  $\dot{x} < 0$  (и в начальный момент включения при  $x < c$ ).

Из рассмотрения принципа работы системы ясно, что процесс коррекции будет протекать нормально при выполнении условия

$$x > c \text{ при } t \leq \varphi + \gamma. \quad (2)$$

Условие (2) может быть выполнено при соответствующем выборе выдержек времени  $\varphi$  и  $\gamma$ . Оно всегда выполняется в установившемся режиме при малых отклонениях параметра от состояния равновесия. В этом случае уравнение системы может быть записано так:

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + (k^2 - 1)x = (k^2 - 1)V[x(t - \alpha)];$$

$$V[x(t - \alpha)] = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t \leq \varphi \quad (x < c); \\ 0 & \text{при } \varphi < t \leq \varphi + \gamma \quad (x < c); \\ 0 & \text{при } x > c. \end{cases} \quad (3)$$

В уравнении (3)  $t = 0$  всегда при  $x = c$ ,  $\dot{x} < 0$ . Уравнение (3) справедливо только при выполнении условия (2).

При малых отклонениях от состояния равновесия в соответствии с уравнением (3) фазовое пространство системы можно представить из двух плоскостей (рис. 2): на плоскости I  $V[x(t - \alpha)] = 1$ , на плоскости II  $V[x(t - \alpha)] = 0$ .

Рассмотрим движение точки в фазовом пространстве от полупрямой  $U_2$  при отклонениях  $|U_2| < |U'_2|$ . При пересечении точкой полупрямой  $U_2$  ( $x = c$ ,  $\dot{x} < 0$ ) начинается приток энергии в объект. Точка

продолжает двигаться в течение времени  $\alpha$  по траекториям плоскости II, соответствующим отсутствию притока энергии. При переходе через полупрямую  $U_3$  приток энергии в объект прекращается. На полупрямой  $V_2$  точка переходит на плоскость I и движется по ее траекториям до линии  $V_3$ , где вновь переходит на плоскость II. Время движения точки по траекториям плоскости I равно  $\varphi$ , а время от  $U_3$  до  $V_3$  соответствует  $\alpha$ . Если рассматривать движения точки при отклонениях

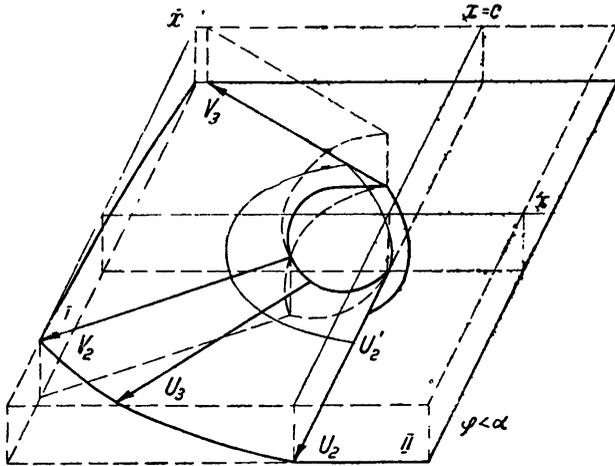


Рис. 2. Фазовое пространство системы с коррекцией.

$|U_2| < |U_2'|$ , то она после линии  $V_3$  вновь пересечет полупрямую  $U_2$  и движение ее повторится.

На рис. 3 изображена проекция фазового пространства системы на плоскость  $x, \dot{x}$  при малых отклонениях от состояния равновесия  $|U_2| < |U_2'|$ .

Уравнения прямых переключения легко находятся из соответствующих решений уравнения (3). При включенном притоке энергии, когда  $V[x(t-\alpha)] = 1$ , фазовые траектории описываются уравнениями:

$$x = e^{-kt} \{ [\dot{x}_0 - k(1-x_0)] \operatorname{sh} t - (1-x_0) \operatorname{ch} t \} + 1; \tag{4}$$

$$\dot{x} = e^{-kt} \{ [(k^2 - 1)(1-x_0) - k\dot{x}_0] \operatorname{sh} t + \dot{x}_0 \operatorname{ch} t \},$$

а в отсутствие притока энергии, когда  $V[x(t-\alpha)] = 0$ , — уравнениями

$$x = e^{-kt} \{ (x_0 + kx_0) \operatorname{sh} t + x_0 \operatorname{ch} t \}; \tag{5}$$

$$\dot{x} = e^{-kt} \{ [x_0(1-k^2) - kx_0] \operatorname{sh} t + \dot{x}_0 \operatorname{ch} t \}.$$

Уравнение полупрямой  $V_2$  находим из (5) при  $x_0 = c, \dot{x}_0 = U_2, t = \alpha$ :

$$x = e^{-k\alpha} [(U_2 + ck) \operatorname{sh} \alpha + c \operatorname{ch} \alpha];$$

$$\dot{x} = e^{-k\alpha} \{ [c(1-k^2) - kU_2] \operatorname{sh} \alpha + U_2 \operatorname{ch} \alpha \}. \tag{6}$$

Уравнение линии переключения  $V_3$  находим из (4) при подстановке в качестве начальных условий выражений (6) при  $t = \varphi$ :

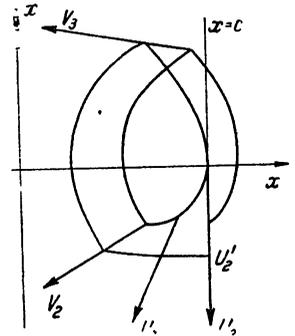


Рис. 3. Проекция фазового пространства.

$$\begin{aligned} x &= e^{-k(\varphi+\alpha)} [(U_2 + kc) \operatorname{sh}(\varphi + \alpha) + c \operatorname{ch}(\varphi + \alpha)] - e^{-k\varphi} (\operatorname{ch}\varphi + k \operatorname{sh}\varphi) + 1; \\ \dot{x} &= U_2 e^{-k(\varphi+\alpha)} [\operatorname{ch}(\varphi + \alpha) - k \operatorname{sh}(\varphi + \alpha)] + c(1 - k^2) e^{-k(\varphi+\alpha)} \operatorname{sh}(\varphi + \alpha) + \\ &\quad + e^{-k\varphi} (k^2 - 1) \operatorname{sh}\varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

В пределах отклонений  $0 - U_2'$  введем точечное преобразование  $T_1$ , являющееся преобразованием некоторого  $U_2$  в новое значение  $\tilde{U}_2$ . Преобразование  $T_1$  легко определить из (5) при подстановке в качестве начальных условий выражений (7) и при  $x=c$ ,  $\dot{x}=\tilde{U}_2$ ,  $t=\tau_1$ . Параметр  $\tau_1$  есть время прогона изображающей точки от полупрямой  $V_3$  до  $U_2$ . Для преобразования  $T_1$  имеем:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{ce^{k(\varphi+\alpha+\tau_1)} - c [\operatorname{ch}(\varphi + \alpha + \tau_1) + k \operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \tau_1)]}{\operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \tau_1)} + \\ &\quad + \frac{e^{k\alpha} [\operatorname{ch}(\varphi + \tau_1) + k \operatorname{sh}(\varphi + \tau_1)] - e^{k(\varphi+\alpha)} (\operatorname{ch}\tau_1 + k \operatorname{sh}\tau_1)}{\operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \tau_1)}; \quad (8) \\ \tilde{U}_2 &= \frac{-ce^{-k(\varphi+\alpha+\tau_1)} + c [\operatorname{ch}(\varphi + \alpha + \tau_1) - k \operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \tau_1)] + e^{-k(\varphi+\tau_1)} (\operatorname{ch}\alpha - k \operatorname{sh}\alpha)}{\operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \tau_1)} - \\ &\quad - \frac{e^{-k\tau_1} [\operatorname{ch}(\varphi + \tau_1) - k \operatorname{sh}(\varphi + \tau_1)]}{\operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \tau_1)}. \end{aligned}$$

На рис. 4 построены кривые точечных преобразований  $T_1$  для

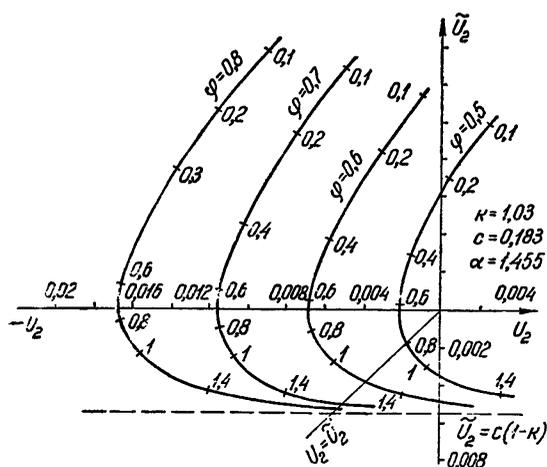


Рис. 4. Кривые точечных преобразований  $T_1$  при различных значениях  $\varphi$ .

конкретной системы регулирования ( $k=1,03$ ;  $c=0,183$ ;  $\alpha=1,455$ ) при различных значениях времени  $\varphi$ . Ход кривых на рис. 4 показывает, что при значениях  $\varphi=0,6$ ;  $0,7$ ;  $0,8$  и более в системе имеет место один устойчивый предельный цикл, соответствующий точке пересечения кривой  $T_1$  с прямой  $U_2=\tilde{U}_2$  (рис. 5).

Определенные графически величины  $U_2^0 = \tilde{U}_2^0$  и  $\tau_1^0$  (рис. 5) позволяют найти параметры автоколебаний по следующим формулам:

$$\Delta x_{m(-)}' = c - e^{-k\bar{t}} \{ [\dot{x}_0 - k(1 - x_0)] \operatorname{sh}\bar{t} - (1 - x_0) \operatorname{ch}\bar{t} \} + 1, \quad (9)$$

где

$$\bar{t} = \frac{1}{2} \ln \frac{(k^2 - 1)(1 - x_0) - \dot{x}_0(k + 1)}{(k^2 - 1)(1 - x_0) - \dot{x}_0(k - 1)},$$

$$x_0 = e^{-k\alpha} \{ [c(1 - k^2) - kU_2^0] \operatorname{sh}\alpha + U_2^0 \operatorname{ch}\alpha \},$$

$$x_0 = e^{-k\alpha} [(U_2^0 + kc) \operatorname{sh}\alpha + c \operatorname{ch}\alpha];$$

$$\Delta x_{m(+)}' = e^{-k\bar{t}} [(\dot{x}_0 + kx_0) \operatorname{sh}\bar{t} + x_0 \operatorname{ch}\bar{t}] - c, \quad (10)$$

где

$$\bar{t} = \frac{1}{2} \ln \frac{x_0(1-k^2) - (k+1)\dot{x}_0}{x_0(1-k^2) - (k-1)\dot{x}_0},$$

$$x_0 = e^{-k(\varphi+\alpha)} [(U_2^0 + kc) \operatorname{sh}(\varphi + \alpha) + c \operatorname{ch}(\varphi + \alpha)] - e^{-k\varphi} (\operatorname{ch}\varphi + k \operatorname{sh}\varphi) + 1,$$

$$\dot{x}_0 = U_2^0 e^{-k(\varphi+\alpha)} [\operatorname{ch}(\varphi + \alpha) - k \operatorname{sh}(\varphi + \alpha)] + c(1-k^2) e^{-k(\varphi+\alpha)} \operatorname{sh}(\varphi + \alpha) + e^{-k\varphi} (k^2 - 1) \operatorname{sh}\varphi;$$

$$p' = \varphi + \alpha + \tau_1^0. \tag{11}$$

В формулах (9)–(11)  $\Delta x'_{m(-)}$ ,  $\Delta x'_{m(+)}$  — максимальное отрицательное и положительное отклонения регулируемого параметра от заданного значения при коррекции,  $p'$  — период колебаний.

Рассмотрим движения системы с коррекцией при больших отклонениях на конкретном примере системы с параметрами  $k = 1,018$ ,  $c = 0,181$ ,  $\alpha = 1,473$ ,  $\varphi = 0,6$ ,  $\gamma = 2,1$ ,  $\beta = 0,6$ . Для простоты примем  $\beta = \varphi$ . На рис. 6 изображена проекция фазового пространства данной системы на плоскость  $x, \dot{x}$ .

При отклонениях в системе  $|U_2| < |U_2^0|$  движение изображающей точки происходит так, как было рассмотрено выше. Заметим, что  $U_2^0$  может быть найдено из (8) при  $U_2 = 0$ .

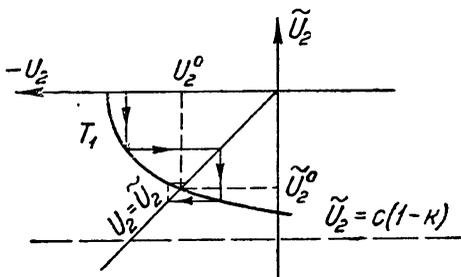


Рис. 5. Кривая точечного преобразования  $T_1$  и образование предельного цикла.

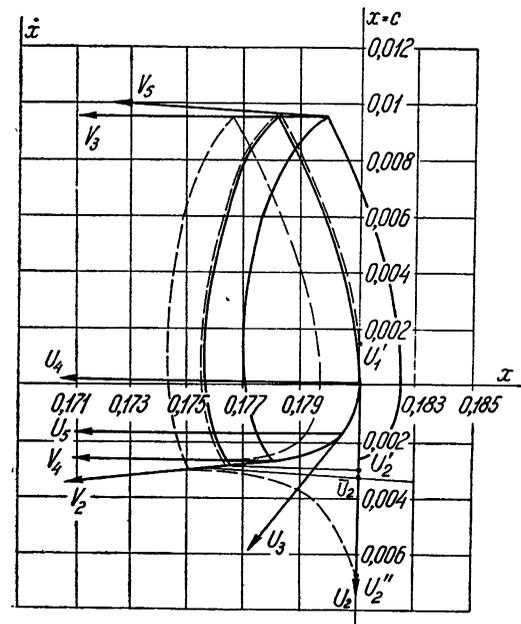


Рис. 6. Фазовая плоскость при больших отклонениях от состояния равновесия.

При отклонениях в системе  $|U_2^0| \leq |U_2| < |U_2^0|$  движение точки происходит следующим образом. Двигаясь от полупрямой  $U_2$ , изображающая точка пересекает полупрямую  $U_3$ , где происходит прекращение притока энергии, движение же точки по новым траекториям происходит от полупрямой перехода  $V_2$  (6). Полупрямая  $V_2$  есть геометрическое место точек, удаленных от полупрямой  $U_2$  на время  $\alpha$ . После полупрямой  $V_2$  точка движется по соответствующим траекториям в течение заданного времени  $\varphi$  до полупрямой  $V_3$  (7). Полупрямая  $V_3$  отстоит от полупрямой  $U_3$  на время  $\alpha$ . Далее точка движется в течение времени  $\gamma$  по траекториям, соответствующим

отсутствию притока энергии, и пересекает полупрямую  $U_4$ , где происходит новое поступление энергии в объект. Для простоты на рис. 6  $\gamma$  выбрано таким образом, что прямая  $U_4$  выходит из точки  $x=c$ ,  $\dot{x}=0$ . После начала притока энергии на полупрямой  $U_4$  точка движется еще время  $\alpha$  и переходит на новые траектории на полупрямой  $V_4$ . Далее точка движется по траекториям, соответствующим включенному притоку энергии, в течение времени  $\beta$  (в нашем случае  $\beta=\varphi$ ). Время  $\beta$  отделяет прямую  $U_5$  от прямой  $U_4$ . На линии  $V_5$  изображающая точка вновь переходит на траектории, соответствующие отсутствию притока энергии. Если после полупрямой  $V_5$  изображающая точка пересечет прямую  $x=c$  раньше, чем истечёт время  $\gamma$ , то движение точки далее будет происходить в зависимости от того, при каком значении она пересечет полупрямую  $U_2$ . Значение  $U_2''$  графически легко получить, двигаясь в обратном направлении по соответствующим траекториям из точки  $U_1'$ . Время от точки  $U_1'$  до полупрямой  $V_5$  равно  $\gamma$ .

Из построения на рис. 6 видно, что в данном конкретном случае изображающая точка, двигаясь от полупрямой  $U_2$  из диапазона  $|U_2'| < |U_2| < |U_2''|$ , приходит на полупрямую  $U_2$  в диапазон  $0 < |U_2| < |U_2'|$ .

Из теории колебаний [13] известно, что фазовые траектории дифференциального уравнения второго порядка в случае действительных корней имеют асимптоты, выходящие под некоторыми углами из точки  $x=0$ ,  $\dot{x}=0$ . На рис. 6 одна из асимптот, имеющая меньший угол наклона к оси  $x$ , пересекает полупрямую  $U_2$  в точке  $\bar{U}_2$ .

Если предположить, что первоначально изображающая точка была выведена на линию  $x=c$ ,  $\dot{x}>0$  (что практически легко осуществимо), то рассмотренных двух случаев движения точки от полупрямой в диапазонах  $0 < |U_2| < |U_2'|$  и  $U_2' < U_2 < U_2''$  вполне достаточно для исследования всех возможных движений в системе при данном сочетании параметров корректирующего устройства  $\varphi$ ,  $\gamma$  и  $\beta$ . Сказанное объясняется тем, что точка в этом случае не может пересечь полупрямую  $U_2$  ниже значения  $\bar{U}_2$ , а значение  $\bar{U}_2$  входит в диапазон  $U_2' - U_2''$ .

Найдем теперь уравнения дополнительных прямых переключения  $V_4$  и  $V_5$ . Уравнение линии  $V_4$  получаем из выражений (5) при использовании в качестве начальных условий уравнений линии  $V_3$  (7) и при  $t = \gamma$ :

$$x = e^{-k\gamma} \{ e^{-k(\varphi+\alpha)} \operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \gamma) [U_2 + kc] + ce^{-k(\varphi+\alpha)} \operatorname{ch}(\varphi + \alpha + \gamma) - e^{-k\varphi} [\operatorname{ch}(\varphi + \gamma) + k \operatorname{sh}(\varphi + \gamma)] + (\operatorname{ch}\gamma + k \operatorname{sh}\gamma) \}; \quad (12)$$

$$\dot{x} = e^{-k\gamma} \{ U_2 e^{-k(\varphi+\alpha)} \operatorname{ch}(\varphi + \alpha + \gamma) + (1 - k^2) \operatorname{sh}\gamma - k U_2 e^{-k(\varphi+\alpha)} \operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \gamma) + (1 - k^2) ce^{-k(\varphi+\alpha)} \operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \gamma) - (1 - k^2) e^{-k\varphi} \operatorname{sh}(\varphi + \gamma) \}.$$

Уравнение линии  $V_5$  получаем из выражений (4) при подстановке в качестве начальных условий уравнений (12) и при  $t = \beta$ :

$$x = e^{-k\beta} \{ U_2 e^{-k(\varphi+\alpha+\gamma)} \operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \gamma + \beta) + e^{-k\gamma} [\operatorname{ch}(\gamma + \beta) + k \operatorname{sh}(\gamma + \beta)] + ce^{-k(\varphi+\alpha+\gamma)} [\operatorname{ch}(\varphi + \alpha + \gamma + \beta) + k \operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \gamma + \beta)] - e^{-k(\varphi+\gamma)} [\operatorname{ch}(\varphi + \gamma + \beta) + k \operatorname{sh}(\varphi + \gamma + \beta)] - (\operatorname{ch}\beta + k \operatorname{sh}\beta) \} + 1; \quad (13)$$

$$\dot{x} = e^{-k\beta} \{ (k^2 - 1) \operatorname{sh}\beta - ce^{-k(\varphi+\gamma+\beta)} (k^2 - 1) \operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \gamma + \beta) + (k^2 - 1) e^{-k(\varphi+\gamma)} \operatorname{sh}(\varphi + \gamma + \beta) + U_2 e^{-k(\varphi+\alpha+\gamma)} [\operatorname{ch}(\varphi + \alpha + \gamma + \beta)] - k \operatorname{sh}(\varphi + \alpha + \gamma + \beta) \} - (k^2 - 1) e^{-k\gamma} \operatorname{sh}(\gamma + \beta).$$

В пределах отклонений  $|U_2'| < |U_2| < |U_2''|$  введем дополнительное точечное преобразование  $T_2$ , которое, как и  $T_1$ , есть преобразование отрезка полупрямой  $U_2$  в полупрямую  $\tilde{U}_2$ . За параметр  $\tau_2$  примем время пробега изображающей точки от полупрямой  $V_5$  до полупрямой  $\tilde{U}_2$ .

Формулу для  $T_2$  получаем из (5) при начальных условиях (13) и при  $x = c$ ,  $\dot{x} = \tilde{U}_2$ ,  $t = \tau_2$ :

$$U_2 = \{ \{ ce^{k(\varphi+\gamma+\beta+\alpha+\tau_2)} + e^{k(\varphi+\gamma+\alpha)} [\text{ch}(\beta + \tau_2) + k \text{sh}(\beta + \tau_2)] - c [\text{ch}(\varphi + \gamma + \beta + \alpha + \tau_2) + k \text{sh}(\varphi + \gamma + \beta + \alpha + \tau_2)] \} + e^{k\alpha} [\text{ch}(\varphi + \gamma + \beta + \tau_2) + k \text{sh}(\varphi + \gamma + \beta + \tau_2)] - e^{k(\varphi+\alpha)} [\text{ch}(\gamma + \beta + \tau_2) + k \text{sh}(\gamma + \beta + \tau_2)] - e^{k(\varphi+\gamma+\beta+\alpha)} (\text{ch} \tau_2 + k \text{sh} \tau_2) \} / \text{sh}(\varphi + \gamma + \beta + \alpha + \tau_2); \quad (14)$$

$$\tilde{U}_2 = \{ -ce^{-k(\varphi+\gamma+\beta+\alpha+\tau_2)} + c [\text{ch}(\varphi + \gamma + \beta + \alpha + \tau_2) - k \text{sh}(\varphi + \gamma + \beta + \alpha + \tau_2)] + e^{-k(\beta+\tau_2)} [\text{ch}(\varphi + \gamma + \tau_2) - k \text{sh}(\varphi + \gamma + \tau_2)] + e^{-k(\varphi+\gamma+\beta+\tau_2)} (\text{ch} \alpha - k \text{sh} \alpha) - e^{-k(\beta+\gamma+\tau_2)} [\text{ch}(\varphi + \alpha) - k \text{sh}(\varphi + \alpha)] - e^{-k\tau_2} [\text{ch}(\varphi + \gamma + \beta + \alpha) - k \text{sh}(\varphi + \gamma + \beta + \alpha)] \} / \text{sh}(\varphi + \gamma + \beta + \alpha + \tau_2).$$

На рис. 7 изображены кривые точечных преобразований  $T_1$  и  $T_2$  для рассматриваемой системы. В данном случае все движения в системе сводятся к одному устойчивому предельному циклу, соответствующему точке пересечения кривой  $T_1$  с прямой П.

Можно показать, что в рассматриваемой системе двухпозиционного регулирования с коррекцией могут возникнуть (при определенном сочетании параметров или при наличии сильных возмущений) сложные периодические движения.

Автоколебания системы при различных параметрах корректора  $\varphi$ ,  $\gamma$  и  $\beta$  исследовались на электронной модели. Параметры модели соответствовали рассмотренной ранее системе регулирования температуры:  $k=1,018$ ,  $c=0,183$ ,  $\alpha=1,5$  (для удобства величина  $\alpha$  округлена).

Моделирование производилось с целью проверки теоретических выводов, выявления сложных движений в системе и выбора оптимальных параметров корректирующего устройства.

На рис. 8 представлены некоторые осциллограммы процессов в системе и фотографии соответствующих изображений на фазовой плоскости. На осциллограммах масштаб выбран так, что величина  $x=10^{-2}$  x (в вольтах). Пересчет  $x$  в градусы осуществляется по формуле  $\vartheta^\circ = 381x + 31$ .

На осциллограмме рис. 8а записан процесс без коррекции. На осциллограммах рис. 8б—8г процесс с коррекцией при  $\varphi = 2,2$  мин; 1,5 мин; 1 мин. На осциллограмме рис. 8д записан процесс при  $\varphi = 0,9$  мин. Как видно из осциллограммы, в этом случае нормальный ход процесса коррекции нарушился. Значение  $\varphi = 0,9$  мин для этой си-

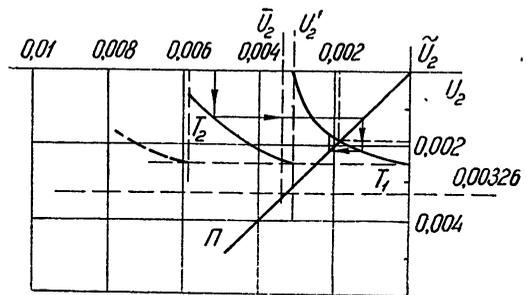


Рис. 7. Кривые точечных преобразований  $T_1$  и  $T_2$  при больших отклонениях в системе.

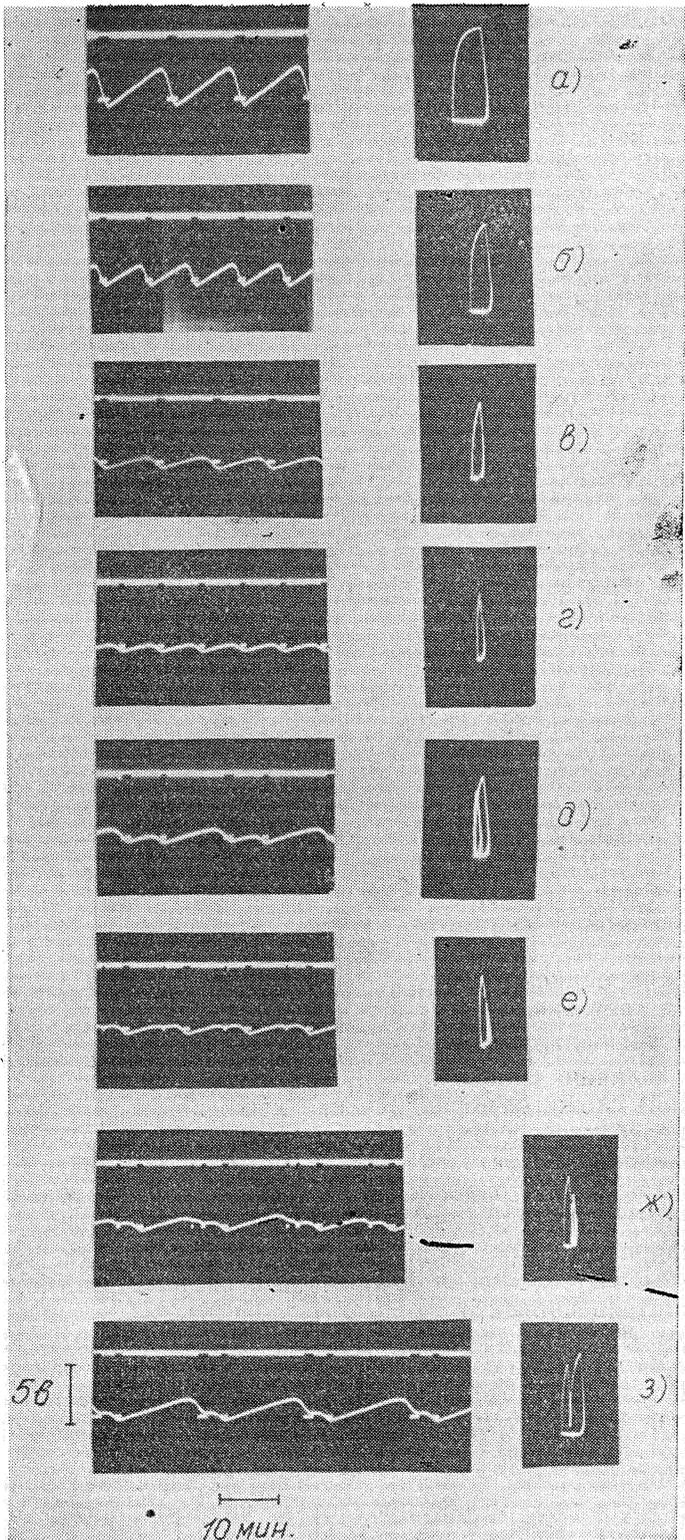


Рис. 8.

стемы является критическим. На осциллограммах рис. 8е—8з представлены записи других сложных процессов, возникающих в системе. Сравнение теоретических расчетов с экспериментальными данными показывает удовлетворительное соответствие результатов. Например, теоретически критическое значение  $\varphi = 0,915$  мин.

Интересно сравнить результаты расчета рассматриваемой системы регулирования температуры, полученные с помощью точного метода, изложенного в настоящей статье, и приближенного метода, развитого в работах [5—7]. Для системы с параметрами  $\varphi = 0,6$ ,  $\gamma = 2,073$ ,  $\beta = 0,6$  из рис. 7 находим  $U_2^0 = 0,002$ . По формулам (9)—(11) получаем:  $\Delta x'_{m(-)} = 0,0046$  ( $1,2^\circ\text{C}$ );  $\Delta x'_{m(+)} = 0,001$  ( $0,7^\circ\text{C}$ );  $p' = 3,27$  ( $6,65$  мин). По приближенным формулам из [7] находим:  $\Delta \vartheta'_{m(-)} = 1,61^\circ\text{C}$ ;  $\Delta \vartheta'_{m(+)} = 1,34^\circ\text{C}$ ;  $T' = 6,72$  мин.

В заключение автор выражает признательность Ф. Я. Кауфман и Т. В. Рафанович за участие в работе по моделированию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Кампе-Немм, Автоматика и телемеханика, 17, 680 (1956).
2. А. А. Кампе-Немм, Автоматика и телемеханика, 19, 469 (1958).
3. А. А. Кампе-Немм, Приборостроение, 2, 7 (1956).
4. S. Paul, Regelungstechnik, 4, 431 (1955).
5. А. И. Черепанов, Автоматика и телемеханика, 19, 5, 47 (1958).
6. А. И. Черепанов, Авт. свид. № 580257 (1959).
7. А. И. Черепанов, Автоматика и телемеханика, 21, 4, 558 (1960).
8. А. И. Черепанов, Автоматика и телемеханика, 21, 3, 310 (1960).
9. А. И. Черепанов, Приборостроение, 12, 19 (1959).
10. А. С. Алексеев, Диссертация, Горький, 1954.
11. И. Б. Челпанов, Диссертация, Ленинград, 1958.
12. А. А. Кампе-Немм, Динамика двухпозиционного регулирования, Госэнергоиздат, М.—Л., 1955.
13. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
14. А. С. Алексеев, В. А. Дозоров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 330 (1961).

Поступила в редакцию  
30 декабря 1961 г.

## STUDY OF AUTOOSCILLATIONS OF THE SIMPLEST RELAY SYSTEM WITH CORRECTION

A. I. Cherepanov

Autooscillations of a two-position control system with time correction are investigated by the point transformation method. Formulas are derived for calculation of the basic parameters of autooscillations. The behaviour of the system at various parameters of the correcting device is studied by means of electron model. It is shown that the complicated periodic motions appear in the system under certain conditions. The results of the exact and approximate calculations are compared for the certain temperature control system of the second order.

## ДИНАМИКА СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ С ЛЮФТОМ ПРИ ВВЕДЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ КОРРЕКЦИИ

М. И. Рабинович

Методом точечных преобразований исследуется динамика следящей системы с люфтом, содержащей специально подобранное для повышения качества отработки нелинейное корректирующее устройство. Показано, что в системе при периодическом пилообразном управляющем воздействии возможны устойчивые периодические движения трех типов. Проведено разбиение пространства параметров системы на области, соответствующие различным типам движения; это разбиение позволило дать рекомендации по выбору параметров корректирующего устройства.

В работах [1-6] приближенными методами показано, что в системах регулирования с люфтом возможны автоколебания. Это подтверждено работой [7], в которой методом точечных преобразований рассмотрена динамика автономной следящей системы с люфтом. Из [1-7] следует, что устранение автоколебаний в нелинейной системе может быть достигнуто определенным подбором параметров ее линейной части. Однако ввиду противоречивости требований, предъявляемых к параметрам линейной части системы для получения устойчивости и улучшения качества переходного процесса, такой путь не всегда приемлем. Некоторые авторы [8,9] предлагают для подавления автоколебаний в системах с люфтом вводить дополнительные обратные связи, содержащие нелинейности типа ограничения и зоны нечувствительности.

В настоящей работе методом точечных преобразований рассматривается динамика неавтономной следящей системы второго порядка с люфтом при учете ограничения скорости исполнительного элемента. Для повышения качества отработки пилообразного управляющего воздействия в систему введено нелинейное корректирующее устройство. Получено разбиение пространства параметров системы на области существования и устойчивости движений различных типов, которое позволяет дать рекомендации по подбору параметров корректирующего устройства.

1. Рассматриваемая следящая система, структурная схема которой представлена на рис. 1, состоит из линейной части  $\Pi_1$ , которая характеризуется коэффициентом передачи  $C/(Ap + B)$ , исполнительного эле-

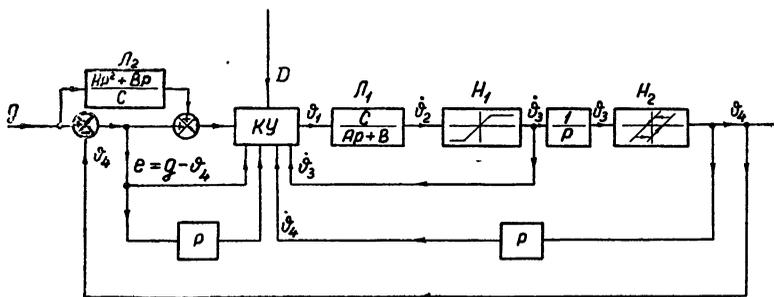


Рис 1.

мента  $H_1$  с ограничением по скорости, элемента с люфтом  $H_2$ , интегрирующего элемента  $1/P$ , нелинейного корректирующего устройства КУ, линейного корректирующего звена  $L_2$  с коэффициентом передачи  $(Ap^2 + Bp)/C$  и двух дифференцирующих звеньев  $P$ .

Характеристику элемента с люфтом  $H_2$  в случае отсутствия нагрузки на его выходе можно представить в виде:

$$\vartheta_4 = \begin{cases} \vartheta_3 + \Delta & \text{при } \dot{\vartheta}_3 < 0 \quad \text{и } |\vartheta_4 - \vartheta_3| \geq \Delta; \\ \vartheta_3^0 & \text{при } |\vartheta_4 - \vartheta_3| < \Delta; \\ \vartheta_3 - \Delta & \text{при } \dot{\vartheta}_3 > 0 \quad \text{и } |\vartheta_4 - \vartheta_3| \geq \Delta, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\vartheta_3$  — входная координата  $H_2$ ,  $\vartheta_3^0$  — ее значение в момент смены знака  $\dot{\vartheta}_3$ ,  $\vartheta_4$  — выходная координата  $H_2$  и  $2\Delta$  — величина зоны люфта.

Связь выходной координаты  $\vartheta_3$  исполнительного элемента  $H_1$  с его входной координатой  $\vartheta_2$  определяется соотношением:

$$\dot{\vartheta}_3 = \begin{cases} \dot{\vartheta}_2 & \text{при } |\dot{\vartheta}_2| \leq \Theta \\ \Theta \operatorname{sgn} \dot{\vartheta}_2 & \text{при } |\dot{\vartheta}_2| > \Theta, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $\Theta$  — предельная скорость исполнительного элемента.

Качество обработки управляющего воздействия пилообразной формы, очевидно, повысится, если сократить время выбора люфта и с максимальной возможной скоростью компенсировать накопившуюся за это время ошибку. Во избежание перегулирования движение с максимальной скоростью должно быть прекращено несколько раньше того момента времени, когда ошибка будет компенсирована полностью. Исходя из этого и определяются функции корректирующего устройства, на выходе которого имеем:

$$\vartheta_1 = \begin{cases} D \operatorname{sgn} \dot{g} + B_1 \dot{\vartheta}_3 & \text{при } \dot{\vartheta}_4 = 0, \quad |\dot{\vartheta}_3| < \Theta; \\ B_1 \dot{\vartheta}_3 & \text{при } \dot{\vartheta}_4 = 0, \quad |\dot{\vartheta}_3| = \Theta \quad \text{или при } \dot{\vartheta}_4 \neq 0, \quad (\dot{e} + he)\dot{e} < 0; \\ e + H\dot{e} + (A\ddot{g} + B\dot{g})/C & \text{при } \dot{\vartheta}_4 \neq 0, \quad (\dot{e} + he)\dot{e} \geq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где

$$g = (-1)^{[1+t/T]} \{t - ([t/T] + 1/2)T\} R \quad (1.4)$$

— пилообразное управляющее воздействие с полупериодом  $T$  и скоростью изменения  $R$ ,  $e = g - \vartheta_4$  — сигнал ошибки,  $D$  — постоянный сигнал, подаваемый во время выбора люфта до момента достижения исполнительным элементом предельной скорости,  $\dot{e} + he = 0$  — условие переключения,  $B_1, H, h$  — постоянные коэффициенты.

Введение в систему корректирующего звена  $L_2$  представляет интерес, поскольку при таком комбинированном управлении отсутствует статическая ошибка. Исследование динамики в этом случае несколько упрощается.

Уравнения, описывающие поведение рассматриваемой следящей системы, имеют вид:

$$A\ddot{\vartheta}_2 + B\dot{\vartheta}_2 = \begin{cases} C(D \operatorname{sgn} \dot{g} + B_1 \dot{\vartheta}_3) & \text{при } \dot{\vartheta}_4 = 0, \quad |\dot{\vartheta}_3| < \Theta; \\ CB_1 \dot{\vartheta}_3 & \text{при } \dot{\vartheta}_4 = 0, \quad |\dot{\vartheta}_3| = \Theta \quad \text{или при } \dot{\vartheta}_4 \neq 0, \\ & (\dot{e} + he)\dot{e} < 0; \\ C \left( e + H\dot{e} + \frac{A\ddot{g} + B\dot{g}}{C} \right) & \text{при } \dot{\vartheta}_4 \neq 0, \quad (\dot{e} + he)\dot{e} \geq 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

$$(1.7)$$

Выбирая коэффициент положительной обратной связи по скорости предлюфтовой координаты  $B_1$  равным  $B/C$ , вместо (1.5) и (1.6) получим:

$$A\ddot{\vartheta}_2 = CD \operatorname{sgn} \dot{g} \quad \text{при} \quad \dot{\vartheta}_4 = 0, \quad |\dot{\vartheta}_3| < \Theta; \quad (1.8)$$

$$\dot{\vartheta}_3 = \Theta \operatorname{sgn} \dot{g} \quad \text{при} \quad \dot{\vartheta}_4 = 0, \quad |\dot{\vartheta}_3| = \Theta \quad \text{или} \quad \text{при} \quad \dot{\vartheta}_4 \neq 0, \quad (\dot{e} + h\epsilon)\dot{e} < 0. \quad (1.9)$$

После перехода в уравнениях системы к безразмерным координатам и времени  $t = t_{ст}/T$ , учитывая (1.1)–(1.4), из (1.7)–(1.9) получим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \mp \eta \\ \dot{\epsilon} &= \mp \sigma \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad \dot{y} = 0, \quad |\dot{x}| < v; \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \mp v \\ \dot{\epsilon} &= \mp \sigma \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad \dot{y} = 0, \quad |\dot{x}| = v; \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \mp v \\ \dot{\epsilon} &= \pm (v - \sigma) \end{aligned} \right\} \quad \text{при} \quad \dot{y} \neq 0, \quad (\dot{\epsilon} + v_1\epsilon)\dot{\epsilon} < 0; \quad (1.12)$$

$$\ddot{\epsilon} + (\alpha + \gamma)\dot{\epsilon} + \beta\epsilon = 0 \quad \text{при} \quad \dot{y} \neq 0, \quad (\dot{\epsilon} + v_1\epsilon)\dot{\epsilon} \geq 0, \quad (1.13)$$

где  $x = \vartheta_3/\Delta$ ,  $y = \vartheta_4/\Delta$ ,  $z = g/\Delta$ ,  $\epsilon = z - y = e/\Delta$ ;

параметр  $\alpha = BT/A$  характеризует демпфирование в исполнительном элементе;  $\beta = CT^2/A$  — усиление линейной части системы,  $\gamma = CHT/A$  — отрицательную обратную связь по скорости предлюфтовой координаты,  $\eta = DCT^2/A\Delta$  — величину постоянного сигнала,  $\sigma = RT/\Delta$  — скорость изменения входного воздействия;  $v = \Theta T/\Delta$  соответствует предельной скорости исполнительного элемента;  $v_1 = hT = (\alpha + \gamma)/2 + \sqrt{(\alpha + \gamma)^2/4 - \beta}$  — модуль наибольшего по величине корня характеристического полинома уравнения (1.13).

Монотонное уменьшение ошибки возможно лишь в случае, когда особая точка уравнения (1.13) представляет собой устойчивый узел, т. е. когда  $-v_1$  и  $-v_2$  — корни его характеристического полинома — действительные и отрицательные. Области отсутствия перерегулирования при этом ограничены особой прямой

$$\dot{\epsilon} + v_1\epsilon = 0, \quad (1.14)$$

которая и является прямой переключения. При  $\dot{\epsilon} > 0$  область монотонного уменьшения ошибки лежит слева от этой прямой, а при  $\dot{\epsilon} < 0$  — справа от нее; поэтому полный закон переключения имеет вид (1.12), (1.13) аналогично [10].

2. Будем рассматривать движение системы в пространстве  $(\epsilon, \dot{\epsilon})$ , изображенном на рис. 2. Оно состоит из шести областей, так что каждому полупериоду управляющего воздействия соответствуют три области, связанные с тремя видами движения: с выбором люфта — области  $G_1$  и  $G_4$ , с движением системы с максимально возможной скоростью в сторону уменьшения ошибки — области  $G_2$  и  $G_5$  и с заторможенным движением к состоянию равновесия — области  $G_3$  и  $G_6$ .

Области  $G_1$  и  $G_4$  представляют собой, согласно уравнениям (1.10) и (1.11), прямые  $\dot{\epsilon} = -\sigma$  и  $\dot{\epsilon} = \sigma$ , а области  $G_2$  и  $G_5$  — полупрямые  $\dot{\epsilon} = v - \sigma$  и  $\dot{\epsilon} = -v + \sigma$ , ограниченные прямой переключений (1.14);

в этих областях справедливо уравнение (1.12). Движение системы в областях  $G_3$  и  $G_6$ , представляющих собой плоскости  $(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ , описывается уравнением (1.13).

Пусть  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_3$  — соответственно времена движения изображающей точки в областях  $G_1$ ,  $G_2$  и  $G_3$ . Для нахождения  $\tau_1$ , из (1.10) и (1.11) получим:

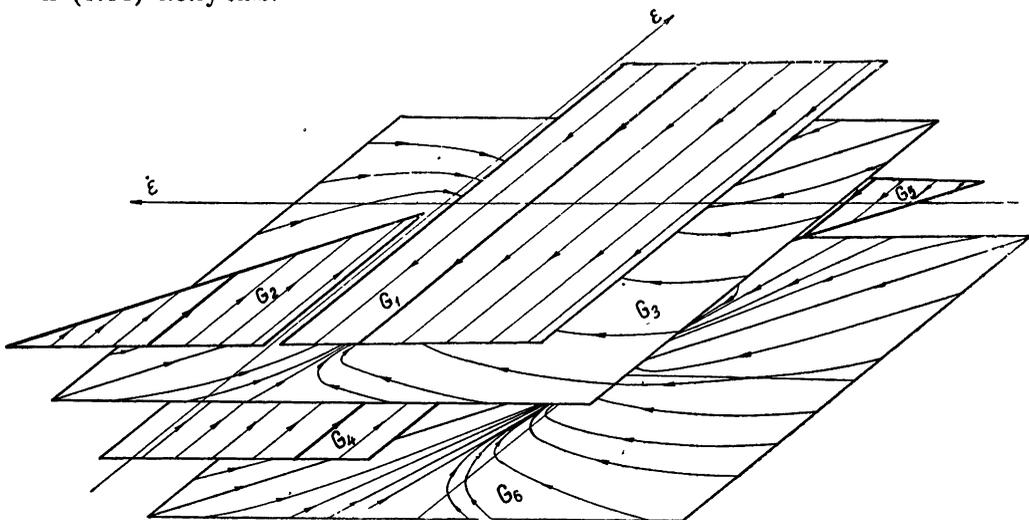


Рис. 2.

$$x(t) = \begin{cases} -\eta t^2/2 + \dot{x}(0)t + x(0) & \text{при } 0 \leq t \leq t_1; \\ -v(t-t_1) + x(t_1) & \text{при } t_1 \leq t \leq \tau_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $t_1$  — время достижения исполнительным элементом предельной скорости  $v$ . Предполагается, что момент  $t = 0$  соответствует началу выбора люфта; так как движение в зоне люфта начинается со смены знака  $x$ , то  $x(0) = 0$ . Рассматриваемый случай  $t_1 < \tau_1$  имеет место, если справедливо неравенство

$$\eta > v^2/4. \quad (2.2)$$

Это условие накладывает на предельную величину ускорения исполнительного элемента ограничение  $|\ddot{x}|_{\max} > v^2/4$ . Из (2.1) при учете (2.2) находим:

$$\tau_1 = 2/v + v/2\eta. \quad (2.3)$$

Величина  $\tau_2$  определяется моментом попадания изображающей точки на прямую (1.14), если начальное значение ошибки  $\varepsilon_0 \in (\varepsilon_0^*, \varepsilon_0)$ . При  $\varepsilon_0 > \varepsilon_0^*$  изображающая точка по окончании движения в области  $G_1$  сразу переходит в область  $G_3$ . Если же  $\varepsilon_0 < \varepsilon_0^*$ , изображающая точка, двигаясь в области  $G_2$ , не успевает до окончания полупериода достичь прямой (1.14) и в момент  $t = 1$  переходит в область  $G_4$ , представляющую движение в следующем полупериоде. Эти различные типы движений системы показаны соответственно на рис. За, б и в. Величины, определяющие движение этих типов, будут в дальнейшем отмечаться соответственно одним, двумя и тремя штрихами.

Из сказанного следует, что  $\tau_2''$  и  $\tau_3'''$  не существуют. Величина  $\tau_2'$  находится из условия:

$$\varepsilon_1 + (v - \sigma) \tau_2' = - (v - \sigma) / v_1, \quad (2.4)$$

где для конечного значения ошибки  $\varepsilon_1$  при движении в области  $G_1$  имеем:

$$\varepsilon_1 = - \sigma (2/v + v/2\eta) + \varepsilon_0. \quad (2.5)$$

Таким образом,

$$\tau_2' = (2\sigma/v + \sigma v/2\eta - v/v_1 + \sigma/v_1 - \varepsilon_0) / (v - \sigma). \quad (2.6)$$

Из (2.3) получим:

$$\tau_2'' = 1 - \tau_1 = 1 - 2/v - v/2\eta. \quad (2.7)$$

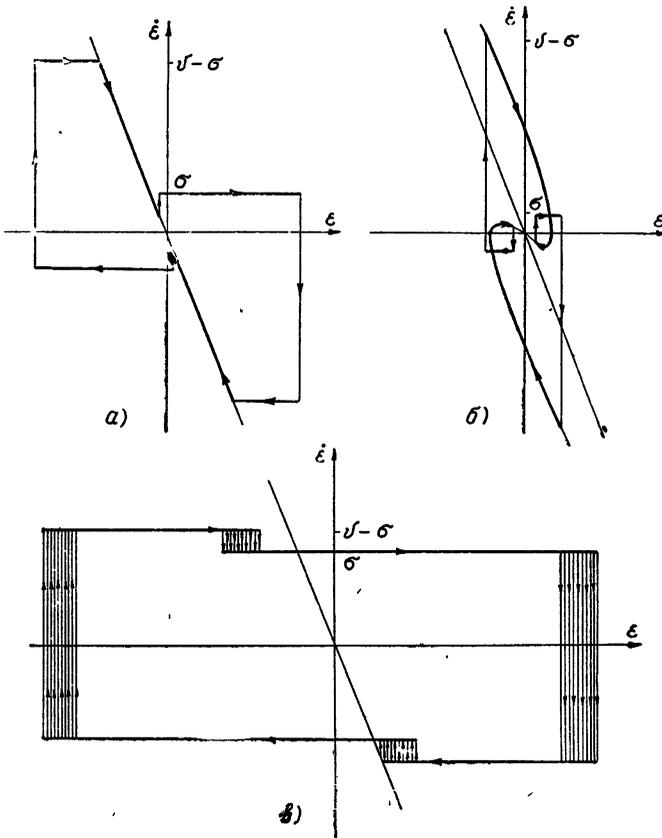


Рис. 3.

Значения  $\tau_3'$  и  $\tau_3''$  находятся аналогично:

$$\tau_3' = 1 - \tau_1 - \tau_2' = 1 + 1/v_1 - (2 + v^2/2\eta - \varepsilon_0) / (v - \sigma); \quad (2.8)$$

$$\tau_3'' = 1 - \tau_1 = 1 - 2/v - v/2\eta. \quad (2.9)$$

Величина  $\varepsilon_0'$  отыскивается из (2.4) (с учетом (2.5)) при  $\tau_2' = 0$ :

$$\varepsilon_0' = \sigma (2/v + v/2\eta) - (v - \sigma) / v_1. \quad (2.10)$$

Из равенства выражений для  $\tau_2''$  и  $\tau_2'$  следует, что

$$\varepsilon_0'' = v(2/v + v/2\eta) - (v - \sigma) (1 + 1/v_1). \quad (2.11)$$

3. Для исследования динамики рассматриваемой системы при управляющем воздействии вида (1.4) воспользуемся методом точечных преобразований [11,12]. В качестве прямой без контакта выберем прямую  $\dot{\varepsilon} = 0$ , на которой введем координаты  $u = \varepsilon_0$ ,  $w_1 = -\varepsilon_1$ ,  $w_2 = -\varepsilon_2$  и  $w_3 = -\varepsilon_3$  для областей  $G_1, G_2$  и  $G_3$  и  $u = -\varepsilon_0$ ,  $w_1 = \varepsilon_1$ ,  $w_2 = \varepsilon_2$  и  $w_3 = \varepsilon_3$  для областей  $G_4, G_5$  и  $G_6$ . Здесь  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  — конечные значения  $\varepsilon$  при движении в областях  $G_1$  или  $G_4, G_2$  или  $G_5$  и  $G_3$  или  $G_6$  соответственно.

Точечное преобразование прямой  $\dot{\varepsilon} = 0$  в себя при учете симметрии может быть представлено четырьмя функциями соответствия:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= T_1(u) = \sigma\tau_1 - u; \\ \dot{w}_3 &= T_2'(w_1) = \frac{v - \sigma}{v_1} e^{-v_1\tau_3'}(w_1); \\ \dot{w}_3'' &= T_2''(w_1) = \left( \frac{-v_2}{v_1 - v_2} w_1 - \frac{v - \sigma}{v_1 - v_2} \right) e^{-v_1\tau_3''} + \\ &+ \left( \frac{v_1}{v_1 - v_2} w_1 + \frac{v - \sigma}{v_1 - v_2} \right) e^{-v_2\tau_3''}; \\ \dot{w}_2'' &= T_2''(w_1) = w_1 - (v - \sigma)\tau_2'', \end{aligned} \tag{3.1}$$

где, согласно (2.4) и (2.8),  $\tau_3'(w_1) = 1 + 1/v_1 - \tau_1 - w_1/(v - \sigma)$ . Соотношения (3.1) определяют три формы функции последования  $T_2'T_1, T_2''T_1$  и  $T_2''T_1$ . Функция последования  $w = T_2T_1(u)$  находится из (3.1) и (2.3) — (2.9):

$$w(u) = \begin{cases} \frac{-v + \sigma - v_2\sigma(2/v + v/2\eta)}{v_1 - v_2} e^{-v_1(1-2/v-v/2\eta)} + \\ + \frac{v - \sigma - v_1\sigma(2/v + v/2\eta)}{v_1 - v_2} e^{-v_2(1-2/v-v/2\eta)} + \\ + \frac{v_2}{v_1 - v_2} u \left[ e^{-v_1(1-2/v-v/2\eta)} - \frac{v_1}{v_2} e^{-v_2(1-2/v-v/2\eta)} \right] & \text{при } u \geq u'; \\ \frac{v - \sigma}{v_1} e^{-v_1[1+1/v_1-(2+v^2/2\eta-u)/(v-\sigma)]} & \text{при } u'' \leq u \leq u'; \\ 2 + v^2/2\eta - v + \sigma - u & \text{при } u \leq u''. \end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь  $u' = \varepsilon_0'$ ,  $u'' = \varepsilon_0''$ .

Рассмотрим поведение функции последования (3.2) на плоскости  $(u, w)$ . Ее производная имеет вид:

$$\frac{dw}{du} = \begin{cases} \frac{v_2}{v_1 - v_2} \left[ e^{-v_1(1-2/v-v/2\eta)} - \frac{v_1}{v_2} e^{-v_2(1-2/v-v/2\eta)} \right] & \text{при } u \geq u'; \\ - e^{-v_1[1+1/v_1-(2+v^2/2\eta-u)/(v-\sigma)]} & \text{при } u'' \leq u \leq u'; \\ -1 & \text{при } u \leq u'. \end{cases} \tag{3.3}$$

Учитывая, что  $|dw/du|_{u=u'} = 1$ , из (3.3) находим:

$$\left| \frac{dw}{du} \right|_{u'' < u < u'} < 1. \tag{3.4}$$

Рассмотрим  $d\omega/du|_{u>u'}$ , преобразовав (3.3) к виду:

$$\frac{d\omega}{du} \Big|_{u>u'} = \frac{1}{2x} [(1-x)e^{-r(1-\tau)(1+x)} - (1+x)e^{-r(1-\tau)(1-x)}], \quad (3.5)$$

где  $r = (\alpha + \gamma)/2$  и  $x = \sqrt{r^2 - \beta}/r$  определяются из соотношений  $v_1 = r(1+x)$  и  $v_2 = r(1-x)$ . Так как  $v_2$  и  $v_1 > v_2$  действительны и положительны, то  $r > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ . Из (3.5) при этом следует, что  $d\omega/du|_{u>u'} < 0$ . Обозначим функцию, находящуюся в квадратных скобках выражения (3.5), через  $-f(x)$ . Как нетрудно видеть,  $df/dx > 0$  и  $d^2f/dx^2 > 0$ ; кроме того,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 2$  и, следовательно, при всех  $x \in (0, 1)$  выполнено условие  $[f(x)/2x] < 1$ . Таким образом,

$$\left| \frac{d\omega}{du} \right|_{u>u'} < 1. \quad (3.6)$$

Точка пересечения  $u^*$  функции последования (3.2), график которой качественно изображен на рис. 4, с биссектрисой координатного угла соответствует простой инвариантной точке преобразования  $T_2T_1$ . Единственность простой инвариантной точки следует из монотонного убывания функции последования (3.2). Простая инвариантная точка  $u^*$  преобразования  $T_2T_1$  устойчива в большом, если  $u^* > u''$ , что следует из (3.3), (3.4) и (3.6).

При  $u^* < u''$  из простой инвариантной точки преобразования  $T_2T_1$  рождается бесконечное число двухкратных инвариантных точек [12],

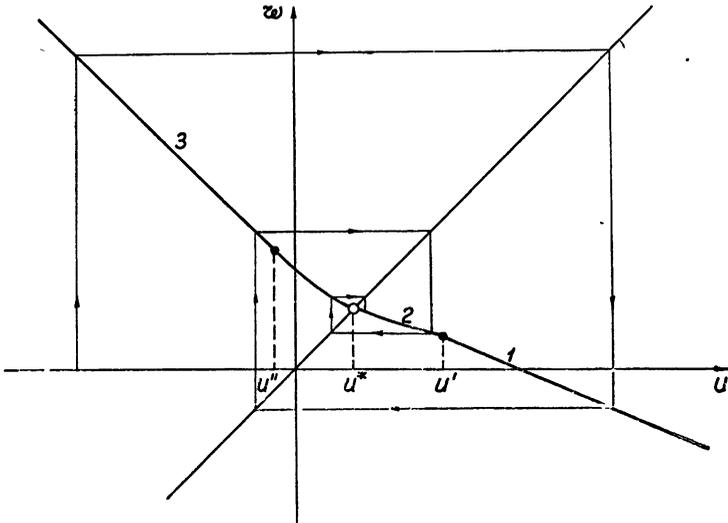


Рис. 4.

непрерывно заполняющих интервал  $u \in [2u^* - u'', u'']$ . Простая инвариантная точка при этом из устойчивой становится полуустойчивой. Двухкратная инвариантная точка, соответствующая границе интервала, также является полуустойчивой.

4. Точечное преобразование  $T_2T_1$  зависит от пяти параметров  $(\alpha + \gamma)$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$ ,  $\nu$  (см. (1.10)–(1.13)). На рис. 5 качественно изображено разбиение пространства  $(\alpha + \gamma)$ ,  $\beta$  и  $\sigma$  на области существования

и устойчивости движений различных типов. Если условие (2.2) выполнено, то рассмотренное точечное преобразование существует в области, ограниченной поверхностями  $N_1$  и  $N_2$ .

С переходом точки (при увеличении  $\beta$ ) через поверхность  $N_1$ , уравнение которой  $\beta = (\alpha + \gamma)^2/4$ , связано появление в областях  $G_3$  и  $G_6$  пространства  $(\epsilon, \epsilon)$  устойчивого фокуса. Следовательно, поверхность  $N_1$  отделяет в пространстве параметров область монотонного уменьшения ошибки от области, в которой система имеет перерегулирование.

Поверхность  $N_2$ , представляющая из себя плоскость  $\sigma = v$ , отделяет в пространстве параметров область, для которой скорость изменения управляющего воздействия выше предельной скорости исполнительного элемента.

Граница области существования и устойчивости простой инвариантной точки  $u^*$  преобразования  $T_2T_1$  состоит из поверхностей  $N_1$  и  $N_3$ .

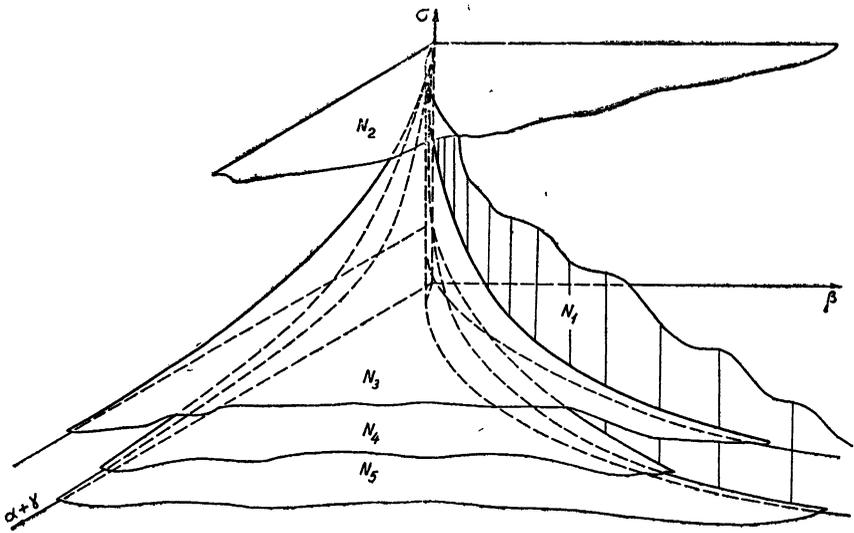


Рис. 5.

Точкам поверхности  $N_3$  соответствует значение  $u^* = u''$ ; согласно (2.11) и (3.2), уравнение этой поверхности имеет вид:

$$\sigma_2 = v - (2 + v^2/2\eta)/(1 + 2/v_1). \tag{4.1}$$

Область существования и устойчивости простой инвариантной точки  $u^*$  разделена поверхностью  $N_4$  на две области, соответствующие движениям типа  $a$  и  $b$ . Точкам поверхности  $N_4$  отвечает инвариантная точка  $u^* = u'$ . Воспользовавшись (2.10) и (3.2), получим уравнение этой поверхности:

$$\sigma_1 = \frac{v [1 + e^{-v_1(1-2/v-v/2\eta)}]}{v_1(2/v + v/2\eta) + e^{-v_1(1-2/v-v/2\eta)} + 1}. \tag{4.2}$$

При переходе через поверхность  $N_4$  в сторону уменьшения  $\sigma$ , инвариантная точка попадает на участок 1 функции последования (рис. 4). Это соответствует периодическому движению типа  $b$ . С переходом через поверхность  $N_5$  связана смена знака  $u^*$ . При  $u^* < 0$  система обрабатывает управляющее воздействие с перерегулированием. Уравнение поверхности  $N_5$  находим из (3.2), приравняв  $u^*$  нулю:

$$\sigma_3 = v \left[ (2/v + v/2\eta) \frac{v_2 e^{-v_1(1-2/v-v/2\eta)} - v_1 e^{-v_2(1-2/v-v/2\eta)}}{e^{-v_1(1-2/v-v/2\eta)} - e^{-v_2(1-2/v-v/2\eta)}} + 1 \right]^{-1}. \quad (4.3)$$

Между поверхностями  $N_4$  и  $N_3$  заключена область существования и устойчивости периодических движений типа  $a$ . При переходе через поверхность  $N_3$  в сторону увеличения  $\sigma$  точка  $u^*$  попадает на участок 3 функции последования. На плоскости  $(\epsilon, \dot{\epsilon})$  это соответствует появлению континуума неопределенных, сдвинутых друг относительно друга, несимметричных замкнутых траекторий (рис. 3в).

При расчете системы параметры следует выбирать таким образом, чтобы соответствующая им точка в рассмотренном пространстве параметров попала в область существования и устойчивости простой инвариантной точки  $u^*$ . Качество обработки управляющего воздействия при определенном  $\sigma$  будет, очевидно, тем выше, чем больше  $v$  и  $v_1$ . С ростом  $v_1$  поверхности  $N_4$  и  $N_5$  (рис. 5) стремятся к плоскости  $\sigma = 0$ , а поверхность  $N_3$  — к плоскости

$$\sigma_4 = v - 2 - v^2/2\eta. \quad (4.4)$$

Если  $\alpha + \gamma$  достаточно велико, то область существования и устойчивости движений типа  $a$  заполняет практически всю область существования и устойчивости простой инвариантной точки  $u^*$ . Поэтому ясно, что при расчете системы значение  $v$  следует определять из (4.4) при  $\sigma_4 = \sigma_{\max}$ , где  $\sigma_{\max}$  — максимальная скорость монотонного изменения управляющего воздействия, для обработки которого предназначается система.

Ошибка слежения, очевидно, возрастет, если переключение произойдет раньше, чем изображающая точка попадет на прямую (1.14). Это увеличение ошибки будет незначительным при  $v_2 \approx v_1$ . Таким образом, значение  $\beta$  следует выбирать близким к  $r$ .

Осциллограммы выходной координаты системы  $y$  в зависимости от  $\sigma \in (0, v)$  качественно изображены на рис. 6. Значения  $y_a$ ,  $y_b$  и  $y_v$  соответствуют движениям типа рис. 3а, 3б и 3в. Их аналитические выражения для одного полупериода имеют вид:

$$y_a = \begin{cases} \sigma - u_1^* & \text{при } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_1; \\ \sigma - v(t - \tau_1 - t_0) - u_1^* & \text{при } t_0 + \tau_1 \leq t \leq t_0 + \tau_2'(u_1^*); \\ -\sigma(t - t_0 - 1) + \frac{1}{v_1}(v - \sigma)e^{-v_1(t - \tau_2'(u_1^*) - t_0)} & \\ \text{при } t_0 + \tau_2'(u_1^*) \leq t < t_0 + 1; \end{cases} \quad (4.5)$$

$$y_b = \begin{cases} \sigma - u_2^* & \text{при } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_1; \\ -\sigma(t - t_0 - 1) - \frac{v + \sigma(v_2\tau_1 - 1)}{v_1 - v_2} e^{-v_2(t - \tau_1 - t_0)} + \\ + \frac{v + \sigma(v_1\tau_1 - 1)}{v_1 - v_2} e^{-v_1(t - \tau_1 - t_0)} + \\ + \frac{v_2}{v_1 - v_2} u_2^* \left[ e^{-v_1(t - \tau_1 - t_0)} - \frac{v_1}{v_2} e^{-v_2(t - \tau_1 - t_0)} \right] & \\ \text{при } t_0 + \tau_1 \leq t \leq t_0 + 1; \end{cases} \quad (4.6)$$

$$y_B = \begin{cases} \sigma - u_3^* & \text{при } t_0 \leq t \leq t_0 + \tau_1; \\ \sigma - v(t - \tau_1 - t_0) - u_3^* & \text{при } t_0 + \tau_1 \leq t_0 + 1. \end{cases} \quad (4.7)$$

Здесь  $u_1^*$ ,  $u_2^*$  и  $u_3^*$  — инвариантные точки преобразований  $T_2''T_1$ ,  $T_2''T_1$  и  $T_2''T_1$  — определяются соотношениями:

$$u_1^* = \frac{v - \sigma}{v_1} e^{-v_1[1+1/v_1 - (2+v^2/2\eta - u_1^*)/(v - \sigma)]};$$

$$u_2^* = \frac{[v - \sigma(v_2\tau_1 + 1)] e^{-v_1\tau_1} - [v - \sigma(v_1\tau_1 + 1)] e^{-v_2\tau_1}}{(1 + e^{-v_2\tau_1})v_1 - (1 + e^{-v_1\tau_1})v_2}; \quad (4.8)$$

$$u_3^* = \frac{1}{2} (v^2/2\eta - v + \sigma + 2).$$

Следует заметить, что предложенная нелинейная коррекция применима и при непериодическом управляющем воздействии. В этом случае при расчете системы под  $R$  следует понимать максимальную

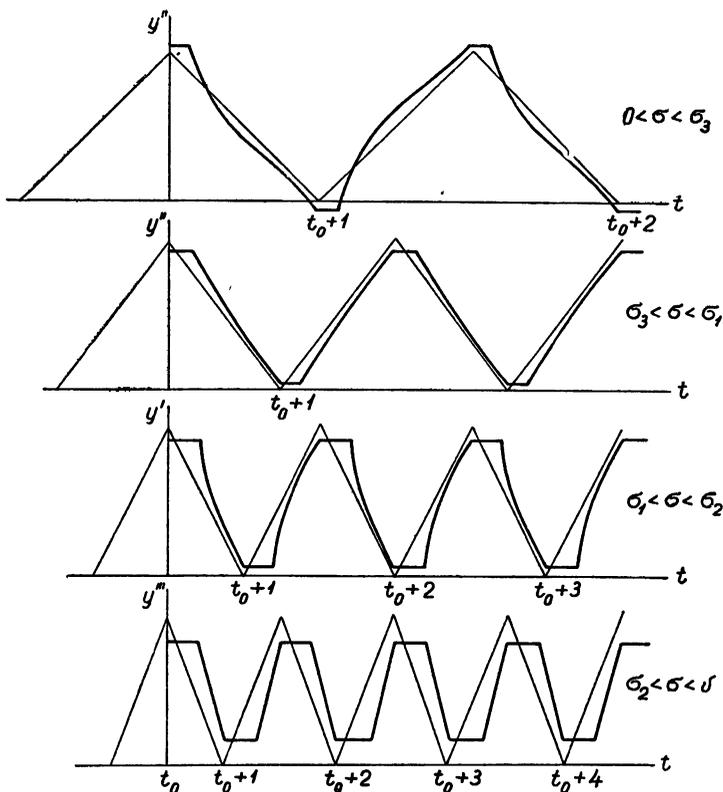


Рис. 6.

скорость монотонного изменения воздействия, а под  $T$  — минимальный промежуток времени между двумя монотонными участками.

Автор выражает глубокую благодарность А. С. Алексею за постановку задачи и руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Л. С. Гольдфарб, Автоматика и телемеханика, 8, 349 (1947).
- 2 A. Tustin, J. IEE, 94, 11a, 143 (1947).
- 3 N. V. Nichols, Trans. AIEE, 72, II, 462 (1953).
- 4 L. M. Vallesse, Trans. AIEE, 74, II, 1 (1955).
- 5 И. П. Пальтов, Приборостроение, 12, 9 (1958).
- 6 Е. П. Попов, И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, М., 1960.
- 7 В. А. Бру́син, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 751 (1962).
- 8 Г. С. Поспелов, Труды МАИ, вып. 112 (1959).
- 9 К. Шен, Труды первого международного конгресса по управлению, 1, изд. АН СССР, М, 1960.
- 10 Г. М. Островский, Автоматика и телемеханика, 17, 979 (1956).
- 11 А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
- 12 Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41 (1958); 1, № 2, 95 (1958), 1, № 5—6, 149 (1958).

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
2 марта 1962 г.

## DYNAMICS OF SERVOMECHANISM WITH A BACKLASH BY INTRODUCING NONLINEAR CORRECTION

*M. I. Rabinovitch*

By point transformation method the dynamics is studied of second-order servomechanism with a backlash containing a nonlinear correction device designed for improvement of performance. It is shown that in the system affected by sawtooth-like force periodical motion of three types are possible. The space of parameters of the system is divided into regions corresponding to different motion types, this division makes it possible to give recommendations concerning parameters choice of the correction device.

---

## О ПРИМЕНЕНИИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ В ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

К. А. Мишина, А. С. Алексеев

Некоторые специальные операции применяются для упрощения процесса составления уравнений линейных пассивных электрических цепей, их анализа и синтеза

В работах [1,2] предложено использовать для алгебраического исследования пассивных линейных электрических цепей, содержащих реле, специальные операции (инверсию и гармоническое сложение), которые для некоторого класса систем существенно упрощают анализ. Сама математическая запись алгебраических выражений в этом случае становится адекватной чертежу схемы, что зачастую позволяет обходиться без рисунков.

Представляется целесообразным использовать эти (а может быть и некоторые другие) специальные операции для упрощения работы по составлению и анализу дифференциальных уравнений для сложных линейных, релейных и кусочно-линейных систем, а также в решении задачи синтеза таких систем. В настоящей работе рассмотрены некоторые возможности, которые открываются при применении таких операций в целях анализа и синтеза линейных электрических систем.

1. Для анализа линейных электрических схем будем пользоваться операторным методом [3] и рассматривать проводимость  $Y(p)$  и импеданс  $Z(p)$  как некоторые интегродифференциальные операторы двухполюсника, связывающие ток через него с напряжением на его зажимах.

Аналогично тому, как это делалось в [1,2], наряду с обычными алгебраическими операциями, введем операцию инверсии

$$\bar{Y} \equiv Y^{-1} (= Z), \quad \bar{Z} \equiv Z^{-1} (= Y) \quad (1.1)$$

и операцию гармонического сложения

$$Y_1 \oplus Y_2 = \overline{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2} \left( = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right); \quad (1.2)$$

$$Z_1 \oplus Z_2 = \overline{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} \left( = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \right).$$

Очевидно, если обычная сумма  $Y_1 + Y_2$  есть проводимость параллельного соединения двухполюсников, то гармоническая сумма  $Y_1 \oplus Y_2$  есть проводимость их последовательного соединения. Обратное имеет место для импедансов. Поэтому выражение, состоящее из ряда проводимостей  $Y_i$ , связанных операциями простого и гармонического сложения, легко может быть переведено в чертеж соответствующей

схемы двухполюсника. Наоборот, по чертежу схемы сложного двухполюсника, состоящего лишь из параллельных и последовательных соединений (П-схемы) двухполюсников, импедансы или проводимости которых известны, нетрудно сразу в операциях простого и гармонического сложения записать его общий импеданс или проводимость.

Как показано в [1, 2], операции инверсии простого и гармонического суммирования совпадают соответственно с операциями инверсии, дизъюнкции и конъюнкции двоичной алгебры логики, построенной на множестве элементов, состоящем из начала координат и бесконечно удаленной точки комплексной сферы.

Равенства

$$\overline{\bigoplus_1^n a_i} = \sum_1^n \overline{a_i} \left( = \frac{\sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} a_i}{\prod_{i=1}^n a_i} \right); \quad (1.3)$$

$$\overline{\sum_1^n a_i} = \bigoplus_1^n \overline{a_i} \left( = \frac{\prod_{i=1}^n 1/a_i}{\sum_{j=1}^n \prod_{i \neq j} 1/a_i} \right), \quad (1.4)$$

наряду с (1.1) и (1.2) справедливы на всей комплексной сфере, позволяя, по-видимому, более тесно связать аппараты дифференциальных уравнений (в операторной форме) и алгебры логики. Заметим, что операции инверсии и гармонического сложения могут быть распространены на квадратные матрицы, если под инверсией понимать образование обратной матрицы. Выражения (1.1)–(1.4), исключая равенства, стоящие в круглых скобках, очевидно, остаются справедливыми в этом случае. Аналогично предыдущему, при параллельном соединении двух  $n$ -полюсников их матрицы проводимостей складываются, а матрицы импедансов складываются гармонически.

2. Рассмотрим схему некоторого линейного пассивного  $n$ -полюсника  $N$  с  $n+1$ -м заземленным или базисным [4] полюсом; искомые уравнения  $n$ -полюсника в матричном виде могут быть записаны как

$$i = Yv \quad (2.1)$$

или

$$v = Zi, \quad (2.2)$$

где  $Y$  и  $Z$ —симметричные квадратные матрицы. В этих матрицах содержится  $n(n+1)/2$  неизвестных элементов, которые имеют соответственно размерности проводимостей и импедансов, но не являются, вообще говоря, проводимостями и импедансами каких-либо двухполюсников из  $N$ . Вместе с тем, производя некоторые „испытания“, представляющие собой превращения  $N$  (путем определенных ниже замыканий, обрывов и объединений полюсов) в двухполюсники, и применяя операции (1.1) и (1.2), нетрудно составить его дифференциальные уравнения в операторной форме, т. е. найти оператор  $Y$  или  $Z$ . Действительно, пусть

$$\eta_j \equiv i_j/v_j \quad (2.3)$$

при  $v_i = 0$  для всех  $i \neq j$  и

$$\eta_{lk} \equiv \eta_{kl} \equiv (i_k + i_l)/v \quad (2.4)$$

при  $v_k = v_l = v$  и  $v_i = 0$  для всех  $i \neq k, l$ . Тогда легко видеть, что элементы матрицы из (1.1) выразятся следующим образом:

$$Y_{jj} = \eta_j, Y_{kj} = Y_{jk} = \frac{1}{2}(\eta_{jk} - \eta_j - \eta_k). \quad (2.5)$$

Пусть далее

$$\zeta_j \equiv v_j/i_j \quad (2.6)$$

при  $i_l = 0$  для всех  $l \neq j$  и

$$\zeta_{lk} \equiv (v_l - v_k)/i_l \quad (2.7)$$

при  $i_k = -i_l$  и  $i_j = 0$  для всех  $j \neq kvl$  (здесь также  $\zeta_{lk} = \zeta_{kl}$ ). Тогда элементы матрицы  $Z$  из (2.2) запишутся в виде:

$$Z_{ij} = \zeta_j, Z_{jk} = \frac{1}{2}(\zeta_j + \zeta_k - \zeta_{jk}). \quad (2.8)$$

Рассмотрим теперь случай, когда отысканию подлежит оператор  $n$ -полюсника  $N$  в форме смешанной коагулированной матрицы. Пусть, например, полюса  $N$  разбиты по какому-либо признаку на две группы из  $r$  и  $m = n - r$  штук. Тогда уравнения (2.1) могут быть записаны в виде

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix}, \quad (2.9)$$

где  $i_1$  и  $v_1$ ,  $i_2$  и  $v_2$ ,  $Y_{11}$ ,  $Y_{22}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Y_{21}$ —соответственно матрицы  $(r \times 1)$ ,  $(m \times 1)$ ,  $(r \times r)$ ,  $(m \times m)$ ,  $(r \times m)$ ,  $(m \times r)$ ; в силу симметричности матрицы  $Y$ ,  $Y_{12}^T = Y_{21}$ .

Искомые смешанные уравнения многополюсника  $N$  могут быть представлены на основе (2.9) в одной из двух форм\*:

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{11} & A_{12} \\ K_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ i_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} v_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & K_{12} \\ A_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ v_2 \end{vmatrix}, \quad (2.10)$$

где для внутренних матриц имеем:

$$Y_{11} = Y_{11} - Y_{12} \bar{Y}_{22} Y_{21}; A_{12} = Y_{12} \bar{Y}_{22} = -K_{21} = \bar{Y}_{22} Y_{21}; Z_{22} = \bar{Y}_{22}; \quad (2.11)$$

$$Z_{11} = \bar{Y}_{11}; A_{21} = Y_{21} \bar{Y}_{11} = -K_{12} = \bar{Y}_{11} Y_{12}; Y_{22} = Y_{22} - Y_{12} \bar{Y}_{11} Y_{12}.$$

Элементы внутренних матриц из (2.10) также легко могут быть найдены с помощью некоторых „испытаний“, которые без ограничения общности определены ниже лишь для левой системы из (2.10).

Действительно, если обозначить участок циклической последовательности из  $n$  номеров, начинающийся с номера  $k$  и кончающийся номером  $l$ , через  $n_k^l$ , то аналогично предыдущему можно определить некоторые проводимости

$$\gamma_j \equiv i_j/v_j \quad (2.12)$$

при  $j \in n_1^n$ ,  $i_l = 0$  для  $l \in n_{r+1}^n / j$  и  $v_k = 0$  для  $k \in n_1^r / j$   
и

$$\gamma_{mj} = \gamma_{jm} \equiv (i_j + i_m)/v \quad (2.13)$$

при  $j, m \in n_1^n$ ,  $v_m = v_j = v$ ,  $i_l = 0$  для  $l \in n_{r+1}^n / j \cup m$  и  $v_k = 0$  для  $k \in n_1^r / j \cup m$ ,  
а также импедансы

$$\xi_k \equiv v_k/i_k \quad (2.14)$$

\* Два других представления с помощью смешанной квадратной матрицы возможны лишь для четного  $n$  при  $r = m = n/2$  и здесь не рассматриваются.

при  $k \in n_1^n$ ,  $v_j = 0$  для  $j \in n_1^n / k$ ,  $i_l = 0$  для  $l \in n_{r+1}^n / k$  и

$$\xi_{km} \equiv (v_k - v_m) / i_k \quad (2.15)$$

при  $i_k = -i_m$ ,  $k, m \in n_1^n$ ,  $v_j = 0$  для  $j \in n_1^n / k \cup m$  и  $i_l = 0$  для  $l \in n_{r+1}^n / k \cup m$ .

Тогда элементы искомой матрицы, как и ранее, определяются через эти величины; именно, для матрицы  $Y_{11}$

$$Y_{jj} = \gamma_j, \quad Y_{mj} = \frac{1}{2} (\gamma_{mj} - \gamma_m - \gamma_j); \quad (2.16)$$

для матрицы  $Z_{22}$  —

$$Z_{jj} = \xi_j, \quad Z_{jm} = \frac{1}{2} (\xi_j + \xi_m - \xi_{jm}); \quad (2.17)$$

для матриц  $A_{12}$  и  $K_{21}$  —

$$K_{lk} = -A_{kl} = \frac{\gamma_l + \gamma_k - \gamma_{lk}}{2\gamma_l} = \frac{\xi_l + \xi_k - \xi_{lk}}{2\xi_k}. \quad (2.18)$$

Таким образом, оператор  $n$ -полюсника  $N$  в форме (2.1), (2.2) или (2.9) может быть найден сразу по его схеме, если в результате определенных в (2.3), (2.4), (2.6), (2.7) или (2.12)–(2.15) „испытаний“, каждое из которых представляет собой обращение  $n$ -полюсника  $N$  в некоторый двухполюсник, получаются двухполюсники, состоящие лишь из последовательных и параллельных соединений элементов, с известными импедансами или проводимостями.

3. Предположим теперь, что рассматриваемый многополюсник  $N$  таков, что в одном или нескольких его „испытаниях“ получается мост, т. е. простейшая схема двухполюсника, не являющаяся П-схемой [1, 2]. В этом случае также нетрудно найти импеданс или проводимость, пользуясь специальными операциями.

Действительно, пусть для определенности мост представляет собой схему, при обходе по внешнему контуру которой последовательно встречаются четыре узла (1, 2, 3, 4) и четыре двухполюсника (с импедансами  $z_1, z_2, z_3$  и  $z_4$ ); двухполюсник с импедансом  $z_c$  включен между узлами 2 и 4, а отыскивается импеданс моста  $z_m$  между узлами 1 и 3 ( $z_i = y_i$  при  $i = 1, 2, 3, 4, C, M$ ). Тогда, определив импеданс моста при разрыве в диагонали ( $z_c = \infty, y_c = 0$ ):

$$z_\infty = (z_1 + z_2) \oplus (z_3 + z_4), \quad y_\infty = y_1 \oplus y_2 + y_3 \oplus y_4, \quad (3.1)$$

при коротком замыкании в диагонали ( $z_c = 0, y_c = \infty$ ):

$$z_0 = z_1 \oplus z_4 + z_2 \oplus z_3, \quad y_0 = (y_1 + y_4) \oplus (y_2 + y_3) \quad (3.2)$$

и между узлами подсоединения диагонального двухполюсника в его отсутствие (т. е. между узлами 2 и 4 при  $z_c = \infty$  или  $y_c = 0$ ):

$$z_\infty^* = (z_2 + z_3) \oplus (z_4 + z_1), \quad y_\infty^* = y_2 \oplus y_3 + y_4 \oplus y_1, \quad (3.3)$$

нетрудно получить искомый импеданс

$$z_m = \frac{z_c z_\infty + z_0 z_\infty^*}{z_c + z_\infty^*} \quad (3.4)$$

и с помощью (1.3) и (1.4)—проводимость

$$y_m = \frac{y_c y_\infty \oplus y_0 y_\infty^*}{y_c \oplus y_\infty^*}. \quad (3.5)$$

Существенно, что выражения (3.4) и (3.5) сохраняют силу и в случае, когда произвольный пассивный линейный четырехполюсник обращается в двухполюсник подсоединением к любой паре его полюсов двухполюсника с импедансом  $z_c$  и требованием отсутствия внешних токов в этих узлах (т. е. путем нагрузки на два полюса и скрытия этих полюсов внутрь схемы). В самом деле, пусть уравнения рассматриваемого четырехполюсника заданы в форме (2.2) и некоторый двухполюсник с импедансом  $z_c$  подсоединен к его узлам 3 и 4. Тогда, для нахождения импеданса, получающегося в результате указанной операции двухполюсника

$$z = \frac{v_1 - v_2}{i_1} \Big|_{i_1 = -i_2, i_3 = -i_4 = \frac{1}{z_c}(v_4 - v_3)} = z_{11} - z_{22} - \frac{(z_{13} - z_{24})^2 - (z_{14} - z_{23})^2}{z_c + z_{33} - z_{44}}, \quad (3.6)$$

определим его импеданс при  $z_c = \infty$ :

$$z_\infty = \frac{v_1 - v_2}{i_1} \Big|_{i_1 = -i_2, i_3 = i_4 = 0} = z_{11} - z_{22}, \quad (3.7)$$

при  $z_c = 0$ :

$$z_0 = \frac{v_1 - v_2}{i_1} \Big|_{i_2 = -i_1, i_3 = -i_4, v_3 = v_4} = z_{11} - z_{22} - \frac{(z_{13} - z_{24})^2 - (z_{14} - z_{23})^2}{z_{33} - z_{44}} \quad (3.8)$$

и его импеданс между узлами 3 и 4 при  $z_c = \infty$ :

$$z_\infty^* = \frac{v_3 - v_4}{i_3} \Big|_{i_1 = i_2 = 0, i_3 = -i_4} = z_{33} - z_{44}. \quad (3.9)$$

Подставляя теперь (3.7), (3.8) и (3.9) в (3.6), получим, что

$$z = \frac{z_c z_\infty + z_0 z_\infty^*}{z_c + z_\infty^*}. \quad (3.10)$$

Этот прием позволяет в двухполюснике, не являющемся П-схемой, убрать произвольный двухполюсник и в случае, если отсутствие последнего обратит схему в последовательно-параллельную относительно обеих пар полюсов, найти его оператор с помощью (3.6)—(3.10).

Указанный способ, далеко не всегда приводящий к П-схемам, допускает исчерпывающее обобщение. А именно, в несводимом с помощью рассмотренных „испытаний“ к П-двухполюсникам  $r$ -полюснике  $R$  всегда можно найти некоторое количество  $m$  его внутренних узлов, объявить их дополнительными полюсами и отсоединить от них некоторую подсхему  $R$  в виде  $m$ -полюсника  $M$  так, чтобы как оставшаяся часть схемы  $R'$ , так и  $M$  при „испытаниях“ давали лишь П-двухполюсники. Тогда, определив вышеуказанным способом операторы  $R'$  и  $M$ , можно найти искомый оператор  $r$ -полюсника  $R$ . Действительно, пусть уравнения  $R$  ищутся в форме (2.1) и после указанной операции соотношения

$$\left| \frac{i_c}{i_d} \right| = \left| \frac{Y_c}{Y_{ac}} \frac{Y_{cd}}{Y_d} \right| \left| \frac{v_c}{v_d} \right|, \quad (3.11)$$

$$\left| \frac{i_c}{i_d} \right| = \left| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & Y'_d \end{array} \right| \quad \left| \frac{v_c}{v_d} \right| \quad (3.12)$$

соответственно являются вспомогательными уравнениями  $(m+r)$ -полюсников  $R'$  и  $M$ , где индекс „с“ относится к старым, а „д“—к дополнительным полюсам. Тогда, учитывая, что при параллельном соединении двух  $k$ -полюсников с операторами  $Y_1$  и  $Y_2$  ( $Z_1$  и  $Z_2$ ) для результирующего оператора

$$Y_p = Y_1 + Y_2, \quad Z_p = Z_1 \oplus Z_2, \quad (3.13)$$

а при свертывании дополнительных полюсов  $|i_d|=0$ , при восстановлении  $r$ -полюсника  $R$  найдем для его матрицы выражение:

$$Y = Y_c - Y_{cd}(\overline{Y_d + Y'_d})Y_{dc}. \quad (3.14)$$

Для упрощения схем получающихся двухполюсников можно пользоваться лишь операциями образования и свертывания новых полюсов. В этом случае  $Y'_d = 0$  и искомая матрица для  $R$  будет иметь вид:

$$Y = Y_c - Y_{cd} \overline{Y_d} Y_{dc}. \quad (3.15)$$

4. Рассмотренный выше способ определения оператора линейного пассивного  $n$ -полюсника  $N$  позволяет, прежде всего, во многих случаях эффективно получать его дифференциальные уравнения и их решения. Так, если освободиться в полученных матрицах от операций гармонического сложения и инверсии (можно, вообще говоря, и не делать этого) и рассматривать величину  $p$  как оператор дифференцирования, то дифференциальные уравнения системы относительно узловых напряжений получатся в форме (2.1) при заданных токах в узлах, а относительно этих токов—в форме (2.2) при заданных напряжениях в узлах. Выражения

$$\det Y(p) = 0, \quad \det Z(p) = 0 \quad (4.1)$$

дадут характеристические уравнения. В противном случае, т. е. когда в (2.1) заданы напряжения, а в (2.2)—токи, эти выражения дают в операторной форме решение системы при нулевых начальных условиях.

Аналогичное заключение можно сделать и для уравнений, записанных в форме (2.10). Если  $i_2$  и  $v_1$  заданы, то справа написаны в операторной форме дифференциальные уравнения, а слева—их частное решение при нулевых начальных условиях. Здесь интересны некоторые частные случаи. Так, например, если все токи, составляющие элементы матрицы  $|i_2|$ , равны нулю, а токи, составляющие матрицу  $|i_1|$ , нас не интересуют, то

$$v_2 = K_{21} v_1 \quad (4.2)$$

дает решение системы при нулевых начальных условиях, но характеристическое уравнение системы (при заземленных узлах, на которых заданы напряжения  $|v_1|$ ), вообще говоря, по-прежнему дается выражением

$$\det \begin{vmatrix} Z_{11} & K_{12} \\ A_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.2)$$

Отметим, что если ищется напряжение на каком-либо полюсе  $m$   $n$ -полюсника при  $i_m = 0$  и заданных напряжениях на остальных его

узлах, то величины  $\gamma$  в (2.18) совпадают с величинами  $\eta$  из (2.3)–(2.5). Поэтому с помощью указанных формул нетрудно получить, что

$$v_m = \frac{1}{2} \sum_{i+m}^n v_i + \frac{1}{2\eta_m} \sum_{i+m}^n (\eta_i - \eta_{im}) v_i. \quad (4.3)$$

В случае, если этот полюс, кроме того, нагружается двухполюсником с проводимостью  $y^*$ , его узловое напряжение

$$u = \frac{1}{2(\eta_m + y^*)} \sum_{j+m}^n (\eta_m + \eta_j - \eta_{jm}). \quad (4.4)$$

Предложенный способ весьма удобен при нахождении интегро-дифференциального оператора решающего усилителя математической машины непрерывного действия. Если в этом случае к усилителю постоянного тока с коэффициентом усиления  $k$  подсоединены входной двухполюсник  $Y_1$  и двухполюсник обратной связи  $Y_2$ , то при достаточно больших  $k$  его оператор, как известно, находится в виде отношения:

$$K(p) \simeq -Y_1/Y_2, \quad (4.5)$$

где обычно эти двухполюсники являются П-схемами.

5. Указанные операции, по-видимому, с успехом могут быть использованы для синтеза линейных многополюсников по заданным уравнениям в форме (2.1). Действительно, пусть задан оператор  $Y$  (т. е. все  $Y_{ij}$ ) некоторого  $n$ -полюсника  $N$ , схему которого необходимо найти. Будем конструировать требуемую схему следующим образом. Возьмем на первых порах  $n$  полюсов и  $i$ -й полюс с  $j$ -м соединим некоторой проводимостью  $y_{ij}$  ( $i \neq j$ ); кроме того, каждый полюс с землей соединим некоторой проводимостью  $y_{ii}$  ( $i, j, l=1, 2, \dots, n$ ). Тогда в этом многополюснике, пользуясь „испытаниями“ (2.3), (2.4) и формулами (2.5), нетрудно получить линейную систему для искомых проводимостей  $y_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), решениями которой будет

$$y_{ij} = -Y_{ij} \quad (5.1)$$

при  $i \neq j$  и

$$y_{ii} = \sum_{j=1}^n Y_{jb}, \quad Y_{ii} = \sum_{j=1}^n y_{ji}. \quad (5.2)$$

Определив из (5.1) и (5.2) проводимости искомого двухполюсников синтезируемой схемы, следует лишь представить их через операции инверсии, простого и гармонического сложения известных проводимостей; синтез схемы не представит труда. Однако непосредственно такое представление, очевидно, возможно далеко не всегда. В этих случаях будем брать увеличенное на некоторое достаточное число  $m$  количество полюсов синтезируемой схемы и, применяя затем операцию свертывания этих  $m$  дополнительных полюсов, добиваться требуемой представимости. Тогда для  $(n+m+1)(n+m)/2$  искомого элементарных проводимостей  $y_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n+m$ ) получится  $(n+1)n/2$  уравнений, которые с учетом (3.15), (5.1) и (5.2) запишутся в матричном виде следующим образом:

$$A - B \bar{C} B^T = Y, \quad (5.3)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $C$ —соответственно матрицы  $(n \times n)$ ,  $(n \times m)$  и  $(m \times m)$ , элементы которых

$$a_{ij} = \begin{cases} -y_{ij} & \text{при } i \neq j \\ \sum_{k=1}^n y_{ik} & \text{при } i = j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n); \quad (5.4)$$

$$b_{lk} = -y_{lk} \quad (l = 1, 2, \dots, n; k = n+1, n+2, \dots, n+m); \quad (5.5)$$

$$c_{rs} = \begin{cases} -y_{rs} & \text{при } r \neq s \\ \sum_{k=n+1}^{n+m} y_{rk} & \text{при } r = s \end{cases} \quad (r, s = n+1, n+2, \dots, n+m). \quad (5.6)$$

В заключение отметим, что поскольку любой многополюсник с конечным числом полюсов и внутренних узлов после обращения последних в дополнительные полюса превращается в схему, содержащую лишь параллельные соединения элементарных двухполюсников, то любой оператор  $Y$ , синтезируемый в принципе, синтезируем с помощью предложенного выше алгоритма. Учитывая, что рассмотренные вопросы составления уравнений, анализа и синтеза электрических цепей связаны даже в достаточно простых случаях с большим количеством алгебраических преобразований, уместно рекомендовать для этих целей использование цифровых вычислительных машин при соответствующем кодировании графов цепей, алгебраических и специальных операций и буквенной информации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Шестаков, ЖТФ, 11, 532 (1941).
2. В. И. Шестаков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 526 (1960).
3. В. А. Диткин, П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, ГИИТТЛ, М.—Л., 1951.
4. Э. В. Зелях, Основы общей теории линейных электрических схем, изд. АН СССР, М., 1951.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
29 декабря 1961 г.

## ON APPLICATION OF SOME SPECIAL OPERATIONS IN THE PROBLEM OF ANALYSIS AND SYNTHESIS OF THE LINEAR ELECTRICAL CIRCUITS

*K. A. Mishina, A. S. Alekseev*

Some special operations are applied to simplify the process of composition of equations in the analysis and synthesis of the linear passive electrical circuits.

ТРОИЧНЫЕ ТРИГГЕРЫ НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ  
ГЕНЕРАТОРАХ

С. А. Ахманов, А. С. Рошаль

Обсуждаются некоторые возможности улучшения характеристик цифровых вычислительных машин, связанные с рациональным выбором системы счисления, и способы их реализации с помощью элементов, которые оперируют с информацией, закодированной путем фазовой модуляции несущей. Отмечен ряд преимуществ симметричной тройной системы счисления. Показано, что в качестве триггера с тремя устойчивыми состояниями в устройствах с указанной системой счисления может быть использован двухконтурный параметрический генератор, работающий в режиме взаимной синхронизации; при этом трем возможным устойчивым состояниям соответствуют три различные фазы несущей. Приведены экспериментальные характеристики такого триггера. Изложены соображения об использовании тройного триггера в цифровой вычислительной машине.

Особенности и сравнительные достоинства различных систем счисления, причины, по которым они используются (или могут использоваться) в вычислительных машинах, обсуждались в ряде работ [1-5]. В литературе неоднократно указывалось, что при наличии эффективных и надежных многопозиционных триггеров значительный интерес могут представить системы счисления с основанием  $r$ , отличным от используемого обычно  $r=2$ , в частности, тройная система. Действительно, основание  $r=3$  является, как известно, наиболее выгодным с точки зрения затраты оборудования; разработка трехпозиционного элемента, не отличающегося по сложности от аналогичного двухпозиционного, позволила бы получить выигрыш в объеме запоминающего устройства в 1,6 раза. Применение в вычислительной машине так называемой симметричной (относительно нуля) тройной системы с цифрами  $\bar{1}$ , 0, 1 позволяет, кроме того, использовать некоторые существенные преимущества, присущие симметричным системам счисления\*. Среди этих преимуществ можно отметить отсутствие необходимости в специальном разряде знака числа, возможности сокращения времени выполнения отдельных арифметических действий [1] и т. д.

Новые возможности создания многопозиционных триггеров и конструирования цифровых вычислительных машин с различными системами счисления открываются в связи с предложенным недавно новым способом кодирования информации с помощью амплитудной, частотной или фазовой модуляции несущей (см. [6] и обзор [7]). Соответствующие двоичные элементы с фазовым кодированием информации—одно-контурные параметрические генераторы с двумя устойчивыми состояниями—уже применяются в настоящее время (см. [6, 7]).

Возможности использования явления параметрического резонанса для создания триггеров с несколькими устойчивыми состояниями этим, однако, не ограничиваются. При использовании параметрического резонанса в двухконтурной схеме могут быть построены и многопозиционные триггеры, устойчивые состояния которых характеризуются

\* Об использовании системы  $\bar{1}$ , 0, 1 см., например, [8].

различными фазами несущей (отсчитываемыми от фазы колебаний опорного генератора)\*. В соответствии с вышеизложенным, в частности, может представлять интерес создание трехпозиционного триггера и применение его в троичной системе счисления. Ниже изложена теория и описаны рабочие характеристики трехпозиционного триггера, в котором используется явление параметрического возбуждения двухконтурной колебательной системы и продискутированы некоторые возможности его применения в цифровых вычислительных машинах.

### 1. ТРИГГЕР С ТРЕМЯ УСТОЙЧИВЫМИ СОСТОЯНИЯМИ, ХАРАКТЕРИЗУЕМЫМИ РАЗЛИЧНЫМИ ФАЗАМИ НЕСУЩЕЙ

В литературе уже указывалось [6], что для создания триггера с  $n$  устойчивыми состояниями, характеризуемыми различными фазами несущей, надо располагать генератором  $n$ -ой субгармоники. При этом определенной фазе колебания основной частоты соответствуют  $n$  возможных устойчивых фаз субгармоники, сдвинутых друг относительно друга на  $2\pi/n$ .

Одной из эффективных возможностей получения субгармоник с  $n > 2$ , как показывают расчеты и эксперимент, является использование двухконтурного параметрического генератора (см., например, [9]), работающего в режиме взаимной синхронизации генерируемых колебаний\*\*. В указанном генераторе (рис. 1) осуществляется параметрическое возбуждение системы двух колебательных контуров с собственными частотами  $\Omega_{1,2}$  путем воздействия на нелинейный реактивный элемент связи, например, на емкость  $C$ , зависящую от напряжения  $u$ :

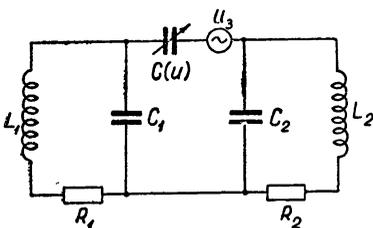


Рис. 1. Эквивалентная схема двухконтурного параметрического генератора.

$$C = C_0 + \sigma u + \gamma u^2, \quad (1)$$

интенсивных колебаний (накачки) с частотой  $\omega_3 \approx \Omega_1 + \Omega_2$ . При достаточной глубине модуляции реактивного параметра в контурах 1, 2 возникают колебания вида

$$u_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi) \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

причем  $\omega_i \approx \Omega_i$ .

С точки зрения проблемы создания многопозиционных триггеров наибольший интерес представляют характеристики фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Оказывается, что эти характеристики в первую очередь определяются соотношением частот  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Если собственные частоты двухконтурной системы  $\Omega_{1,2}$  не находятся в кратных отношениях и, следовательно, гармоники и комбинационные частоты колебаний  $u_i$  не влияют на процессы, протекающие в двухконтурном генераторе (не попадают в полосы пропускания контуров), фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  произвольны и могут пробегать непрерывный ряд значений. Фиксирована лишь сумма фаз  $\varphi_1 + \varphi_2$ , значение которой определяет поступление энергии в систему от генератора накачки. Экспериментальному и теоретическому исследованию этого режима двухконтурного генератора посвящены работы [9, 11, 12].

Совершенно иная ситуация имеет место в случае, когда  $\Omega_2/\Omega_1 \approx k$

\* Могут быть также созданы многопозиционные триггеры, в которых для кодирования информации служит частотная модуляция; таким триггером, например, может быть генератор с запаздыванием в цепи обратной связи [7].

\*\* См., например, [12]; эта возможность отмечалась также А. Капланом.

или  $1/k$ , где  $k$ —целое число. В этом случае между параметрическими колебаниями (2) помимо связи, определяемой накачкой, возникает, вообще говоря, дополнительная связь, определяемая нелинейными свойствами управляемого реактивного элемента. Так, если  $\Omega_2/\Omega_1 \approx k$ , то  $k$ -ая гармоника параметрических колебаний, имеющих место в контуре 1 ( $u_1$ ), попадает в полосу прозрачности контура 2, а комбинационная частота  $(k-1)$ -ой гармоники напряжения  $u_1$  и напряжения  $u_2$  попадает в полосу прозрачности контура 1. Если такое взаимодействие оказывается достаточно сильным (последнее в значительной мере определяется видом нелинейной характеристики управляемого реактивного элемента), то осуществляется устойчивая взаимная синхронизация колебаний  $u_1$  и  $u_2$ , причем в этом режиме

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_1 + k\omega_1 = (k+1)\omega_1 = \omega_3$$

и, следовательно,  $\omega_1 = \omega_3/(k+1) = \omega_3/n$ . Нетрудно показать, что в этом случае фазы параметрически возбужденных колебаний могут теперь принимать лишь  $k+1=n$  фиксированных устойчивых значений, отстоящих друг от друга на угол  $2\pi/n$ ; при этом любые два соседних устойчивых значения разделены неустойчивым состоянием, соответствующим сепаратрисе на фазовой плоскости.

Поясним сказанное на примере случая  $k=2$  ( $n=3$ ), представляющего наибольший интерес с точки зрения настоящей работы. Предположим, что  $\omega_1 = \omega_3/3$  и, следовательно,  $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1 = 2\omega_1$ ; представим напряжение накачки  $u_3$  в виде  $u_3 = A_3 \cos(\omega_3 t)$ . Составляя для схемы, изображенной на рис. 1, уравнения Кирхгофа и пользуясь обычными в теории двухконтурного параметрического генератора (см. также [11]) предположениями о а) малости потерь в контурах 1, 2, б) малости нелинейности, в) малости статической связи между контурами,  $C_0/C_i < 1$  ( $i=1, 2$ ) и малости нелинейных членов высшего порядка в характеристике нелинейной емкости (1)  $\sigma A_3/C_i > \gamma A_3^2/C_i$  ( $i=1, 2$ ) для рассмотрения процессов в двухконтурном генераторе третьей субгармоники, можно применить метод медленно меняющихся амплитуд. Укороченные уравнения, описывающие изменение во времени амплитуд  $A_{1,2}$  и фаз  $\varphi_{1,2}$  взаимно синхронизованных колебаний, имеют вид:

$$\frac{dA_1}{dt} + \frac{1}{2} h_1 A_1 + \frac{1}{2} \omega_1 A_2 A_3 \frac{\sigma}{C_1} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2} \omega_1 \frac{\sigma}{C_1} A_1 A_2 \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{dA_2}{dt} + \frac{1}{2} h_2 A_2 + \frac{1}{2} \omega_2 A_1 A_3 \frac{\sigma}{C_2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{4} \omega_2 \frac{\sigma}{C_2} A_1^2 \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} + \Delta\omega_1 + \omega_1 \frac{C_{n1}}{2C_1} + \frac{1}{2} \omega_1 \frac{A_2}{A_1} \frac{\sigma}{C_1} A_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2} \omega_1 \frac{\sigma}{C_1} A_2 \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} + \Delta\omega_2 + \omega_2 \frac{C_{n2}}{2C_2} + \frac{1}{2} \omega_2 \frac{A_1}{A_2} \frac{\sigma}{C_2} A_3 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{4} \omega_2 \frac{\sigma}{C_2} \frac{A_1^2}{A_2} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (6)$$

Здесь\*

$$\Delta\omega_1 = \omega_1 - \Omega_1; \quad \Delta\omega_2 = \omega_2 - \Omega_2; \quad \Omega_i = \frac{1}{\sqrt{L_i(C_0 + C_i)}} \quad (i=1, 2);$$

$$h_i = \frac{R_i}{L_i} \quad (i=1, 2); \quad C_{n1} = \frac{3}{2} \gamma \left[ \frac{A_1^2}{2} + A_2^2 + A_3^2 \right]; \quad C_{n2} = \frac{3}{2} \gamma \left[ \frac{A_2^2}{2} + A_1^2 + A_3^2 \right].$$

\* Такие выражения для собственных частот связанных контуров  $\Omega_i$  имеют место, как известно, для  $C_0 < C_{1,2}$ .

Взаимодействие параметрических колебаний в контурах 1, 2 через нелинейную емкость связи, приводящее к взаимной синхронизации, описывается последними членами уравнений (3)—(6), содержащими синус и косинус аргумента  $2\varphi_1 - \varphi_2$ ; появление этих членов свидетельствует о том, что в режиме взаимной синхронизации фиксирована не только сумма фаз  $\varphi_1 + \varphi_2$ , но и комбинация  $2\varphi_1 - \varphi_2$ , а следовательно, и сами фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Ограничение амплитуд стационарных колебаний в (3)—(6) определяется „нелинейными расстройками“  $C_{н1}$  и  $C_{н2}$  (ограничение за счет нелинейной реактивности).

Для определения условий устойчивости синхронного режима следует положить производные в (3)—(6) равными нулю, найти стационарные амплитуды  $A_1$ ,  $A_2$ , расстройки  $\Delta\omega_{1,2}$  и фазы, затем проанализировать их на устойчивость. Проведение такого расчета для системы (3)—(6) оказывается в общем случае весьма затруднительным. Поэтому, поскольку в первую очередь нас интересуют фазовые соотношения в генераторе и области взаимной синхронизации, мы ограничимся приближенным рассмотрением. В основу анализа положим то обстоятельство, что дополнительная связь между колебаниями в контурах 1, 2, приводящая к их взаимной синхронизации, может считаться слабой (слабая синхронизация) по сравнению с параметрической связью, определяемой колебаниями накачки\*: члены с синусом и косинусом  $\varphi_1 + \varphi_2$  больше последних членов, поскольку  $A_3 > A_{1,2}$ .

Для дальнейшего в фазовых уравнениях (5), (6) от переменных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  удобно перейти к новым переменным  $\Psi = \varphi_1 + \varphi_2$  и  $\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ . В новых переменных имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} + \Delta + \Delta_{нл} + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_1}{C_1} \frac{\sigma}{A_1} + \frac{\omega_2}{C_2} \frac{\sigma}{A_2} \right) A_3 \cos \Psi + \\ + \left( \frac{1}{2} \omega_1 \frac{\sigma}{C_1} + \frac{1}{4} \omega_2 \frac{\sigma}{C_2} \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) A_2 \cos \Phi = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} + \nabla + \nabla_{нл} + \left( \omega_1 \frac{\sigma}{C_1} \frac{A_2}{A_1} - \frac{1}{2} \omega_2 \frac{A_1}{A_2} \frac{\sigma}{C_2} \right) A_3 \cos \Psi + \\ + \left( \omega_1 \frac{\sigma}{C_1} - \frac{1}{4} \omega_2 \frac{\sigma}{C_2} \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) A_2 \cos \Phi = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\Delta = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 = \omega_3 - \Omega_1 - \Omega_2; \quad \Delta_{нл} = \omega_1 C_{н1}/2C_1 + \omega_2 C_{н2}/2C_2;$$

$$\nabla = 2\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2 = \Omega_2 - 2\Omega_1 \quad (\text{поскольку } \omega_2 = 2\omega_1); \quad \nabla_{нл} = \omega_1 C_{н1}/C_1 - \omega_2 C_{н2}/2C_2.$$

Нетрудно видеть, что для слабой синхронизации движение по координате  $\Phi$  является медленным, в отличие от движений по  $A_1$ ,  $A_2$  и  $\Psi$ . Поэтому в первом приближении в соответствии с методикой так называемого вторичного упрощения укороченных уравнений, развитой Хохловым [10] для задач подобного типа, можно ввести следующие разложения по малому параметру  $\mu$ :

$$\begin{aligned} A_1 = A_{10} + \mu a_1(\mu t); \quad A_2 = A_{20} + \mu a_2(\mu t); \\ \Psi = \Psi_0 + \mu \Psi_1(\mu t); \quad \Phi = \Phi(\mu t), \end{aligned} \quad (9)$$

\* Нетрудно убедиться, что сказанное тем более верно, чем больше значение  $k$ , поскольку для  $k > 2$  взаимная синхронизация определяется высшими членами в нелинейной характеристике (1): при  $k=3$ —квадратичным, при  $k=4$ —кубичным и т. д.

где  $A_{10}$ ,  $A_{20}$  и  $\Psi_0$ —значения соответствующих параметров в отсутствие взаимной синхронизации и  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\Psi_1$ —малые поправки. Из (3)—(8) следует (более подробно см. [11]), что

$$A_{10}^2/A_{20}^2 = C_2 Q_1/C_1 Q_2, \quad (10)$$

где  $Q_{1,2}$ —добротности контуров,

$$\cos \Psi_0 = -2 \frac{\Delta + \Delta_{\text{нл}}(A_{10}, A_{20})}{A_3 \left( \omega_1 \frac{\sigma}{C_1} A_{20}/A_{10} + \omega_2 \frac{\sigma}{C_2} A_{10}/A_{20} \right)}. \quad (11)$$

Для дальнейших расчетов в общем случае следует подставить (9) в уравнения (3), (4), (7), разрешить получаемую таким образом систему алгебраических уравнений относительно  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\Psi_1$  и полученные результаты подставить в (8). Задача существенно упрощается, однако, если учесть, что обычно добротности  $Q_1$ ,  $Q_2$  не очень велики\* и параметр  $\gamma$  имеет порядок  $\mu$ . Тогда достаточно лишь определить величину  $\Psi_1$ , чтобы получить независимое дифференциальное уравнение для  $\Phi$ . Это уравнение имеет вид:

$$\frac{d\Phi}{dt} + \Delta_s + \Delta_c \cos \Phi = 0. \quad (12)$$

Здесь

$$\Delta_s = \nabla + \nabla_{\text{нл}} - (\Delta + \Delta_{\text{нл}}) \frac{2(1 - Q_1/Q_2)}{1 + 2Q_1/Q_2}; \quad \Delta_c = \frac{3}{2} \frac{\sigma}{C_1} \omega_1 \frac{A_{20}}{(2 + Q_2/Q_1)}. \quad (13)$$

Теперь уже решение задачи о взаимной синхронизации колебаний двухконтурного параметрического генератора сводится к анализу (12). Уравнение такого вида неоднократно анализировалось в связи с исследованием неавтономных режимов автоколебательных систем (см., например, [10]). При  $\Delta_c > \Delta_s$  фаза  $\Phi$  монотонно стремится к стационарному значению (синхронный режим), определяемому из условия

$$\cos \Phi_c = \cos(2\varphi_{1c} - \varphi_{2c}) = -\Delta_s/\Delta_c; \quad (14)$$

напротив, при  $\Delta_s > \Delta_c$  фаза зависит от времени периодически, что соответствует режиму биений вне полосы взаимной синхронизации.

Пользуясь формулами (13) и выражениями для  $A_{10}$  и  $A_{20}$ , можно вычислить полосу взаимной синхронизации для конкретных значений параметров. Нетрудно определить и стационарные значения фаз. Из (11) и уравнений (3), (4) следует, что устойчиво\*\* значение

$$\Psi_0 = \varphi_{10} + \varphi_{20} = -\frac{\pi}{2} + \alpha, \quad (15)$$

где определяемое из (11)  $\alpha \ll \pi$  (поскольку  $\cos \Psi_0 \sim \mu$ ). Из (15) следует, что

$$\Psi_c = \varphi_{1c} + \varphi_{2c} = \Psi_0 + \Psi_1 = -\pi/2 + \alpha_2, \quad (16)$$

где  $\alpha_1 = \alpha + \Psi_1 \ll \pi$  для слабой синхронизации. Учитывая (16), из (14) получаем:

$$\cos(2\varphi_{1c} - \varphi_{2c}) = \cos\left(3\varphi_{1c} + \frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) = -\sin(3\varphi_{1c} - \alpha_1) = -\frac{\Delta_s}{\Delta_c}$$

\* Так что условие параметрического возбуждения выполняется с небольшим запасом.

\*\* Напомним, что устойчивое значение  $\Psi_0$  соответствует передаче энергии от генератора накачки параметрически возбуждаемым колебаниям.

и, следовательно, для  $\varphi_{1c}$  имеем шесть возможных значений:

$$\{\varphi_{1c}\}_{1,2,3} = \frac{1}{3} \left[ \arcsin \frac{\Delta_3}{\Delta_c} + \alpha_1 + 2\pi l \right] \quad (l = 0, 1, 2);$$

$$\{\varphi_{1c}\}_{4,5,6} = \frac{1}{3} \left[ -\arcsin \frac{\Delta_3}{\Delta_c} + \alpha_1 + (2l+1)\pi \right] \quad (l = 0, 1, 2).$$

Очевидно, что из этих шести возможных значений устойчивы три, причем два устойчивых состояния разделяются неустойчивым. На диаграмме рис. 2 изображены возможные устойчивые состояния для  $\Delta_3/\Delta_c \ll 1$  в контуре третьей субгармоники; для удобства на диаграмме взято  $\{\varphi_{1c}\}_1 = 0$ . Пунктиром проведены сепаратрисы\*, разделяющие области притяжения устойчивых состояний.

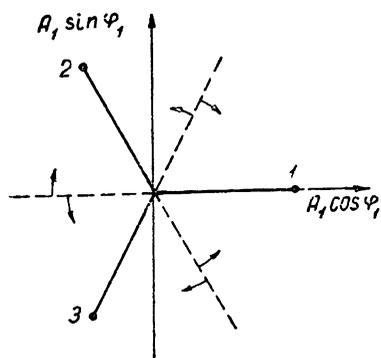


Рис. 2. Диаграмма устойчивых состояний двухконтурного параметрического генератора третьей субгармоники. Пунктиром проведены сепаратрисы, разделяющие области притяжения устойчивых состояний.

Колебания, генерируемые исследуемым двухконтурным генератором, наблюдались либо на экране осциллографа, развертка которого синхронизировалась генератором накачки, либо подавались на фазовый детектор (рис. 3). В цепи накачки исследуемого генератора включен модулятор, позволяющий срывать параметрические колебания без воздействия на генератор накачки. Осциллограммы колебаний представлены на рис. 4. Отчетливо видны три устойчивые фазовые состояния (рис. 4б); приблизительно одинаковая яркость всех трех кривых свидетельствует о равновероятности возбуждения устойчивых состояний в автономном генераторе.

Для навязывания заданной фазы (переключения триггера), подобно тому, как это делается в параметроне с двумя устойчивыми состояниями (см. [7]), можно использовать либо запуск генератора от слабого сигнала нужной фазы\*\*, либо явление захватывания непрерывно работающего генератора колебаниями нужной фазы. Эффективность обоих способов переключения проверялась экспериментально; с этой целью в установку рис. 3 был введен еще один параметрический генератор третьей субгармоники, аналогичный исследуемому; этот же генератор

\* В области, близкой к началу координат.

\*\* При этом параметрические колебания на некоторое время должны быть срываны.

Для экспериментальной проверки изложенных соображений был создан двухконтурный параметрический генератор с контурами, настроенными на частоты  $\Omega_1/2\pi \approx 1$  мГц и  $\Omega_2/2\pi \approx 2$  мГц, и накачкой на частоте 3 мГц. В качестве нелинейного реактивного элемента связи использовалась емкость  $p-n$  перехода германиевого диода. При добротностях контуров  $Q_{1,2} \approx 40 \div 50$  параметрическое возбуждение наступало при амплитудах накачки  $A_3 \approx 3 \div 4$  в; при этом амплитуды генерируемых колебаний  $A_{1,2}$  были  $1,5 \div 2$  в. Полоса взаимной синхронизации, где в контуре частоты  $\Omega_1$  устойчиво генерировалась третья субгармоника накачки, составляла в данном генераторе около  $130 \div 150$  кГц.

Особое внимание было уделено исследованию факторов, определяющих фазу колебаний третьей субгармоники.

вырабатывал опорное напряжение для фазового детектора. Плавный фазовращатель, помещенный между опорным и исследуемым генераторами, позволил определить положения сепаратрис, разделяющих области притяжения устойчивых фаз; проведенные измерения обнаружили удовлетворительное согласие с теорией.

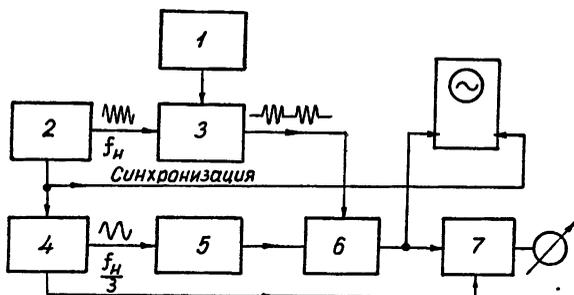


Рис. 3. Блок-схема экспериментальной установки для исследования устойчивых состояний генератора третьей субгармоники и режимов переключения фазы:

1—генератор импульсов, 2—генератор накачки (3 мГц), 3—модулятор, 4—опорный параметрический генератор, 5—фазовращатель, 6—исследуемый параметрический генератор, 7—фазовый детектор.

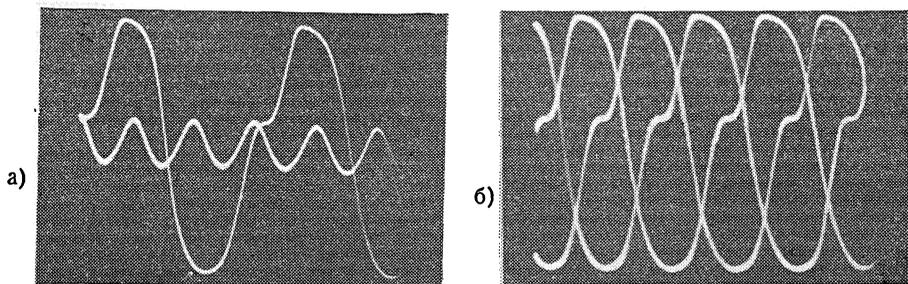


Рис. 4. Осциллограммы выходного напряжения автономного генератора , третьей субгармоники:

а) колебания в непрерывно работающем генераторе (здесь же с помощью специальной приставки сфотографированы колебания накачки; масштабы по оси ординат выбраны произвольно); б) колебания в периодически возбуждаемом генераторе; развертка осциллографа синхронизирована напряжением накачки.

Количество оборудования и мощность накачки для одного параметрического генератора с тремя устойчивыми состояниями практически не отличаются от таковых для параметрического генератора с двумя устойчивыми состояниями. Экспериментальные данные, характеризующие полосу взаимной синхронизации, свидетельствуют о вполне достаточной устойчивости рассматриваемого режима по отношению к флюктуациям параметров контуров и частоты накачки. Быстродействие описанного триггера в первую очередь определяется частотой накачки, как и для параметронов с двумя устойчивыми состояниями. На частотах порядка единиц мегагерц, на которых работал экспериментальный генератор, использование параметрических триггеров, разумеется, не дает выигрыша в быстродействии\*: экспериментально определенное время установления колебаний в исследуемом триггере, работавшем при частоте накачки 3 мГц, составляло 10 мксек. Однако здесь их достоинством, подобно тому, как это имеет место с двоичными параметронами, является экономичность и надежность\*\*.

\* Для увеличения быстродействия необходимо повышать рабочую частоту параметрического генератора.

\*\* С этой точки зрения представляет интерес разработка трощных параметрических триггеров, в которых в качестве управляемых реактивных элементов используются ферритовые сердечники.

## 2. ТРЕХПОЗИЦИОННЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ТРИГГЕР В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ

В трехпозиционном параметрическом генераторе цифрам троичной системы можно поставить в соответствие три дискретные фазы колебаний, например, так, как показано на векторной диаграмме (см. ниже рис. 6). Управлять движением информации, представленной в этом виде, можно теми же методами, которые применимы для схем на двоичных параметронах, т. е. с помощью трехфазной системы накачки, клапанов и т. п. Точно также здесь применимы все способы переключения параметрического генератора (см. раздел 1), сохраняются схемы сдвигающего регистра, триггера, ЗУ матричного типа. В машине на параметронах с фазовой записью информации желательным было бы использовать логические и арифметические схемы, также оперирующие с информацией, выраженной фазой несущей. Поскольку, однако, такие схемы для  $r > 2$  пока не разработаны, и полагая, что на трехпозиционных параметронах будет реализовано лишь ЗУ\* (и, может быть, сдвигающие регистры), можно осуществить на выходе (входе) ЗУ преобразование каждой троичной цифры в импульсы, распространяющиеся по двум каналам. Это позволит сочетать матрицу параметронов с уже разработанными элементами, основанными на подобном представлении информации.

Одна из возможных схем преобразования видеоимпульсов в фазу несущей (входное устройство), изображена на рис. 5. На входы 1 и 2 поступают видеоимпульсы с дешифратора ввода; при записи 1,  $\bar{1}$  и 0 импульс имеется на входе 1, на входе 2 или отсутствует на обоих входах соответственно. Модуляторы  $M_1$  и  $M_2$  открываются этими импульсами и пропускают ВЧ сигнал с фазой, означающей 1 или  $\bar{1}$  соответственно, который и запускает параметрический генератор ПГ, например, путем кратковременного прерывания его накачки. Если импульсы на входах 1 и 2 отсутствуют, то генератор запускается от постоянно посылаемого в него слабого сигнала (скажем, с амплитудой в  $1/3 \div 1/2$  нормальной величины сигнала, имеющего фазу  $0^{**}$ ).

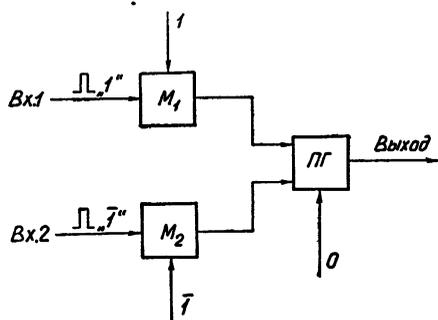


Рис. 5. Преобразование видеоимпульсов в фазу несущей (входное устройство):

$M_1, M_2$ —модуляторы, открываемые входными видеоимпульсами; ПГ—параметрический генератор.

На рис. 6 изображена простейшая схема для преобразования фазовой записи информации в видеоимпульсы, распространяющиеся по двум каналам. На фазовые детекторы  $\Phi_{D1}$  и  $\Phi_{D2}$  заведен 0, задержанный в первом случае на  $3/4$ , во втором—на  $1/4$  периода колебаний. Если в ПГ записана 1, то на выходе  $\Phi_{D2}$  будет отрицательный импульс, а на выходе  $\Phi_{D1}$ —положительный; если записана  $\bar{1}$ , то наоборот. Благодаря наличию детекторов импульс появляется соответственно на выходе 1 или 2. Если в ПГ записан 0, то разность фаз сигналов и на  $\Phi_{D1}$ , и на  $\Phi_{D2}$  составляет  $\pi/2$ , так что видеоимпуль-

сы на выходе отсутствуют.

\* Отметим, что, как показано в [1], создание ЗУ на  $r$ -ичных элементах является наиболее важной задачей при реализации цифрового устройства с  $r$ -ичной системой счисления.

\*\* Сигналы 1, 0,  $\bar{1}$  можно получить от одного опорного генератора с помощью задержки.

В ЗУ на троичных параметрических генераторах преобразователи, описанные выше, потребуются только на входе и выходе каждого разряда ЗУ, что приведет лишь к небольшому увеличению объема оборуования.

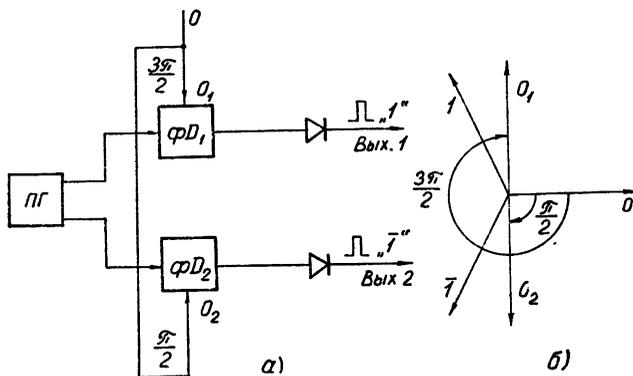


Рис. 6. а) Преобразование фазы несущей в виде импульсы (выходное устройство): ФД<sub>1</sub>, ФД<sub>2</sub>— фазовые детекторы. б) Векторная диаграмма, поясняющая работу выходного преобразователя. Вектор  $O_1$  изображает 0, задержанный на  $3/4$  периода несущей; вектор  $O_2$  изображает 0, задержанный на  $1/4$  периода несущей.

В заключение авторы приносят искреннюю признательность Р. В. Хохлову и Е. А. Жоголеву за дискуссию, С. Д. Гвоздоверу за внимание к работе и М. М. Струкову за помощь в проведении эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Карцев, Арифметические устройства электронных цифровых машин, Физматгиз, М., 1958.
2. Быстродействующие вычислительные машины, изд. Сов. радио, М., 1952.
3. Р. К. Ричардс, Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах, ИЛ, М., 1957.
4. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем, ИЛ, М., 1954.
5. D. E. Moris, W. Alexander, Electronic Engineering, **32**, 554 (1960).
6. R. Wignington, Proc. IRE, **47**, 516 (1959).
7. С. А. Ахманов, А. С. Рошаль, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 203 (1961).
8. Е. А. Жоголев, Журнал вычислительной математики и математической физики, **1**, 499 (1961).
9. С. А. Ахманов, А. К. Романюк, М. М. Струков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **4**, 179 (1961).
10. Р. В. Хохлов, ДАН СССР, **97**, 411 (1954).
11. С. А. Ахманов, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **5**, 144 (1962).
12. Г. М. Уткин, Радиотехника и электроника, **5**, 1866 (1960).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию

5 августа 1961 г.,

после переработки 5 февраля 1962 г.

#### TERNARY TRIGGERS WITH PARAMETRIC OSCILLATORS

S. A. Akhmanov, A. S. Roshal

Some possibilities of improving digital computers characteristics are discussed. Those are connected with a rational choice of an arithmetic system. The ways of realization with the help of elements which operate with information coded by means of phase modulation of a carrier are also considered. A number of advantages of the symmetrical ternary arithmetic system is noted. It is shown that the two circuit parametric oscillator operating in the regime of mutual synchronization can be used as a trigger with three stable states in the devices with the mentioned arithmetic system. In this case three various carrier phases correspond to three possible stable states. The experimental characteristics of such a trigger are given. The considerations are set forth of using the ternary trigger in digital computers.

*Примечание при корректуре.* После того, как настоящая работа была послана в печать, появилась работа Ю. А. Ильинского (Вестник МГУ 1962, серия III, № 2, 60), посвященная исследованию двухконтурного генератора в режиме четырехкратного деления частоты.

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДЕРЖКИ, РЕГИСТРЫ И ТРИГГЕРЫ БЕЗ СДВИГА ИНФОРМАЦИИ

М. Я. Эйнгорин

В работе рассматриваются новые схемы динамических триггеров, регистров и задержек, отличающихся большой простотой и надежностью работы. Схемы регистров и триггеров не являются сдвиговыми.

Большую роль в вычислительных и управляющих устройствах играют динамические триггеры и различные рециркуляционные регистры. Особенно это относится к последовательным вычислительным устройствам. Известен ряд схем динамических триггеров и сдвиговых рециркуляционных регистров, схемы которых весьма сложны и требуют для своей реализации довольно значительного числа электронных ламп или полупроводниковых триодов. Динамические же сдвиговые регистры, выполненные на ферритовых сердечниках, не обладают достаточным быстродействием.

В настоящей работе рассматриваются весьма экономичные схемы динамических триггеров и рециркуляционных регистров, каждый из которых требует для своей реализации одного активного импульсного усилителя. В качестве импульсного усилителя могут быть использованы электронные лампы, кристаллические триоды или какие-либо другие усилительные элементы.

В общем случае блок-схема рециркуляционного регистра задержки или динамического триггера дана на рис. 1, где  $n$  — число разрядов информации, подлежащей хранению,  $U_k$  — статические запоминающие элементы на время  $N\tau$  ( $\tau$  — такт работы схемы,  $N$  — общее число запоминающих элементов в схеме),  $\beta_k$  — вход разрешения записи на элемент  $U_k$ ,  $\beta'_k$  — вход разрешения считывания с элемента  $U_k$ . Основным отличительным свойством рассматриваемых схем является то, что запись на данный элемент  $U_k$  и считывание с него производится один раз за цикл  $N\tau$ .

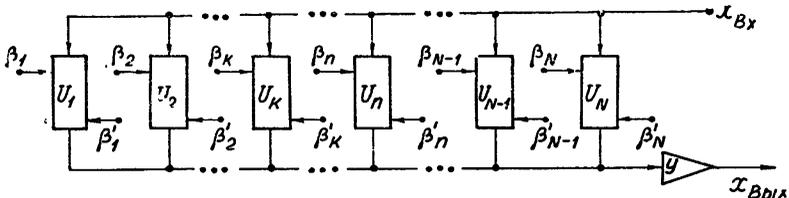
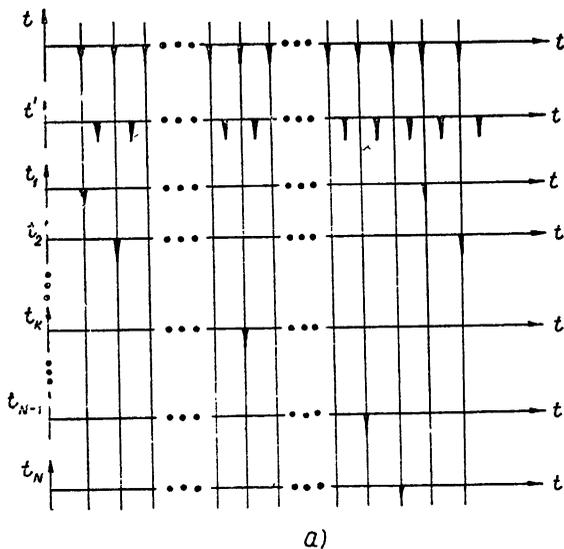


Рис. 1.

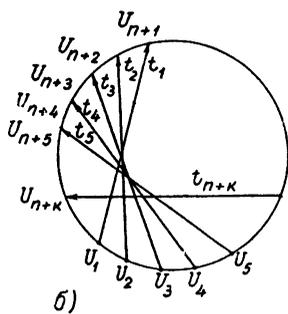
Путем различных коммутаций управляющих входов схемы  $\beta_k$ ,  $\beta'_k$  и подачи на них тактовых импульсов  $t_1, t_2, \dots, t_N$  (см. рис. 2а) можно получить схему с необходимыми свойствами\*. При этом, если  $x_{\text{вых}} = x_{\text{вх}}$

\* Импульсы  $t$  и  $t'$  необходимы для получения обратного кода хранимой или задержанной информации в схемах с ферритовыми сердечниками.

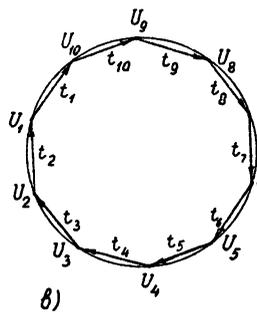
(рис. 1) и  $N = 2$  при  $n = 1$ , получаем схему динамического триггера с задержкой, а при  $N > 2$  и  $n > 1$  — схему рециркуляционного регистра. В случае, если выход схемы не соединен с ее входом, и следовательно, в общем случае  $x_{\text{вых}} \neq x_{\text{вх}}$ , схема, изображенная на рис. 1, представляет из себя линию задержки.



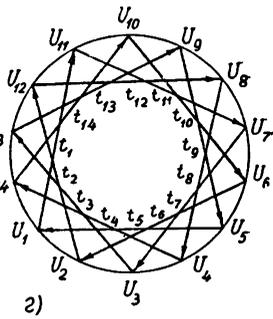
а)



б)



в)



2)

Рис. 2.

Рассмотрим более подробно случай  $x_{\text{вых}} = x_{\text{вх}}$ . Пусть требуется выполнить схему рециркуляционного регистра на  $n$  двоичных разрядах с частотой следования тактовых импульсов  $f = 1/\tau$  и минимальным временным интервалом между считыванием с данного элемента  $U_k$  и записью на него  $T' = \alpha\tau$ , где  $\alpha \geq 1$  — целое число натурального ряда.

Если учесть, что запись на данный запоминающий элемент  $U_k$  и считывание с него должно производиться один раз за цикл  $N\tau$ , причем в каждый такт  $\tau$  осуществляется перезапись информации с элемента  $U_k$  на элемент  $U_j$ , то общее число элементов  $U_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) устройства  $N = n + \alpha$ . В этом случае управляющие входы  $\beta'_k$  и  $\beta_j$  ( $j$  и  $k = 1, 2, \dots, N$ ) всех элементов  $U_k$  и  $U_j$  соединяются попарно согласно таблице 1 коммутаций, каждый элемент  $a_{ji}$  которой, как это следует из предыдущего, равен единице, если выполнено условие

$$\beta'_{(k) \bmod N} = \beta_{(k+n) \bmod N} \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

и равен нулю, если это условие нарушено\*. Импульсы  $t_1, t_2, \dots, t_N$  (рис. 2а) подаются на соединенные входы  $\beta_k$  и  $\beta_{k+n}$  так, что выполнено соответствие

$$\beta'_1 \beta'_2 \dots \beta'_k \dots \beta'_N; \quad (2)$$

$$t_1 t_2 \dots t_k \dots t_N.$$

Таблица 1

Запись \ Чтение	$\beta_k$						
	1	2	...	$l$	...	$N$	
$\beta'_k$	1	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1l}$	...	$a_{1N}$
	2	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2l}$	...	$a_{2N}$
	.	.	.	...	.	...	.
	.	.	.	...	.	...	.
	.	.	.	...	.	...	.
	$j$	$a_{j1}$	$a_{j2}$	...	$a_{jl}$	...	$a_{jN}$
	.	.	.	...	.	...	.
	.	.	.	...	.	...	.
	.	.	.	...	.	...	.
	$N$	$a_{N1}$	$a_{N2}$	...	$a_{Nl}$	...	$a_{NN}$

Каждый столбец и каждая строка таблицы имеют по одному единичному коэффициенту  $a_{jl} = 1$ . Все коэффициенты главной диагонали таблицы всегда равны нулю, так как не может быть одновременной записи и считывания с одного и того же элемента. При этом на один и тот же элемент  $U_k$  подается импульс считывания  $t_{(k) \bmod N}$  и импульс записи  $t_{(k+a) \bmod N}$ , так как запись на этом элементе запаздывает относительно считывания с него на время  $a\tau$ .

Работа схемы может быть легко показана графически на диаграмме переноса информации, построенной согласно равенству (1) и соответствию (2) (см. рис. 2б, где вершины  $U_1, U_2, \dots, U_N$  обозначают запоминающие элементы, а стрелки, соединяющие элементы  $U_k$  и  $U_{k+n}$ , — перенос со стиранием информации с запоминающего элемента  $U_k$  на элемент  $U_{k+n}$  в момент времени  $t_k$ ).

Моделирование подобных схем на различных физических элементах приводит к динамическим триггерам, рециркуляционным регистрам и задержкам с периодом или временем задержки  $T = n\tau$ . При этом информация, записанная на каждом из элементов  $U_k$ , считывается с него через время  $T = n\tau$ . Новая запись на данный элемент  $U_k$  происходит через время  $T' = a\tau$ . Все входы (выходы) элементов  $U_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) соединены, образуя два узла. В случае рециркуляционных регистров или динамических триггеров сигнал с выходного узла через импульсный усилитель поступает на узел входа. Заметим, что рассмотренные рециркуляционные регистры не являются сдвигowymi.

Приведем несколько примеров выполнения схем динамических триггеров и рециркуляционных регистров на двух типах запоминающих элементов: емкостях и ферритах с прямоугольной петлей гистерезиса, приняв, что единица эквивалентна отрицательному импульсу, нуль — отсутствию импульса.

\* Равенство  $\beta'_{(k)} = \beta_{(k+n)}$  означает в схеме соединение этих управляющих входов.

1)  $N = 2, n = 1$ . Схемы динамического триггера, выполненного на элементах рис. 3а и 3б, 3а и 3е, где в качестве запоминающего элемента используется емкость, и элементах 3б и 3ж, где в качестве запоминающего элемента использованы ферритовые сердечники с прямоугольной петлей гистерезиса\*, даны соответственно на рис. 4а, б, в\*\*.

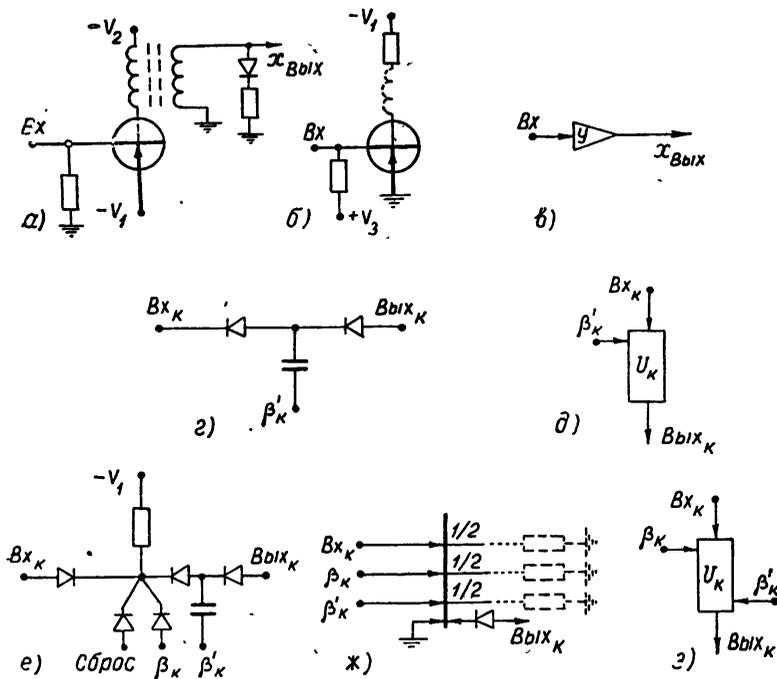


Рис. 3.

В схеме рис. 4б за счет наличия клапанов заряда запоминающих емкостей легко может быть введено дополнительное внешнее управление триггером путем увеличения числа входов этих клапанов. Аналогично может быть введено дополнительное управление для схем на ферритах. Заметим, что обмотки ферритов, имеющие индексы, удовлетворяющие (1), соединены последовательно и имеют общее ограничительное сопротивление. Феррит III схемы рис. 4в имеет на выходе обратный код хранимой информации, который в случае необходимости может быть усилен специальным импульсным усилителем.

Амплитуды рабочих импульсов для заданного напряжения эмиттеров триодов в емкостных схемах —  $V_1$ .

2)  $N = 11, n = 10$ . Схемы регистров с рециркуляцией могут быть выполнены так, как это показано на рис. 5а. На схеме условными обозначениями рис. 3д и 3з отмечены запоминающие элементы рис. 3г, е, ж. При этом схемы рис. 3е и ж могут использоваться соответ-

\* На всех рисунках схем с ферритовыми сердечниками жирная прямая линия условно обозначает тороидальный ферритовый сердечник, тонкая линия, пересекающая ферритовый сердечник со стрелкой, направленной вправо (вниз) — обмотку с током, устанавливающим сердечник в состояние единицы, и направленной влево (вверх) — в нуль. Линия с двумя стрелками, направленными навстречу друг другу, — считывающая обмотка;  $AW_0$  — ампервитки, достаточные для перевода сердечника из одного состояния в другое. Напряжение  $V_3 > 0 > -V_1 > -V_2$ .

\*\* На схемах с ферритовыми сердечниками для упрощения рисунков  $(1/2) AW_0$  заменено просто на  $1/2$  и  $AW_0$  — на 1.

венно с импульсными усилителями рис. 3а и 3б. Схема рис. 3г может быть использована в случае двухполярных управляющих импульсов, причем положительная полярность соответствует записи, а отрицательная — считыванию. Для нормальной работы схемы на эмиттер триода (рис. 3а) должно быть подано напряжение  $-V_1$  ( $-V_1$  — амплитуда рабочего импульса). Как и в случае 1, все обмотки, для которых выполнено условие (1), соединены последовательно с общим ограничивающим сопротивлением. Введя в схему феррит вида III (см. рисунок 4в), получим инверсный выход хранимого кода. Диаграмма переходов, соответствующая рассматриваемой схеме, дана на рис. 2в.

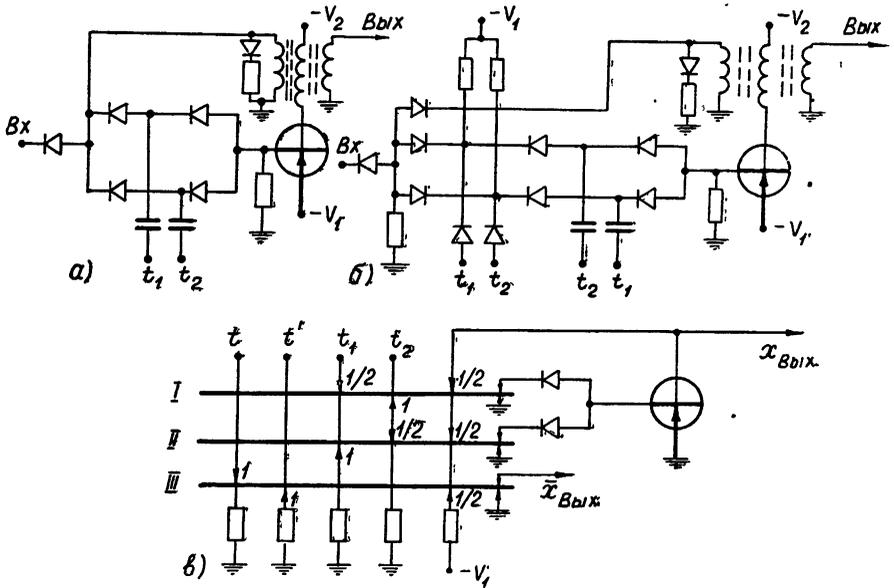


Рис. 4.

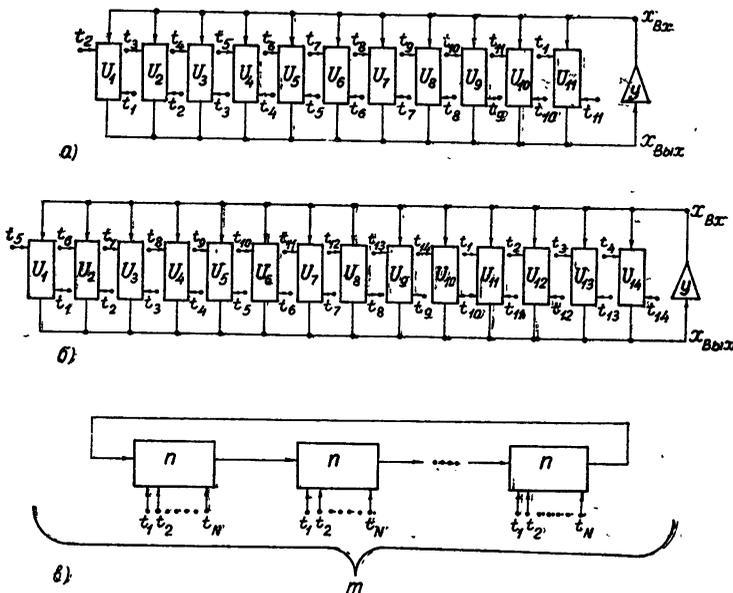


Рис. 5.

3)  $N = 14$ ,  $n = 10$ . Схемы строятся аналогично изложенному. Общая блок-схема дана на рис. 5б, диаграмма переходов — на рис. 2г.

Принцип работы приведенных схем достаточно прост и не требует дополнительных разъяснений. Отметим лишь, что разряд запоминающих емкостей в схемах с элементами рис. 3г и е с „1“ на „0“ осуществляется импульсами отрицательной полярности  $t_k$  через участок база—коллектор триода; усилители в схемах с запоминанием на ферритах могут быть убраны, так как ферриты в данном варианте включения (см. рис. 3ж) дают усиление сигнала за счет энергии синхронизирующих импульсов  $t_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

Рассмотренные схемы отличаются рядом существенных преимуществ по сравнению с уже известными.

1) В случае больших  $n$  они имеют на один разряд кода один запоминающий элемент, в то время как наиболее распространенные сдвиговые двухтактные регистры — два элемента.

2) На каждый элемент запоминания запись и чтение производится один раз за цикл  $M\tau$ . Время между чтением и записью равно  $\alpha\tau$ . В обычных сдвиговых регистрах все запоминающие элементы работают каждый такт  $\tau$ , что требует повышенной частоты их работы и значительных затрат мощности.

3) В регистре обеспечивается устойчивая рециркуляция за счет одного усилительного элемента, стоящего в цепи рециркуляции. В сдвиговых регистрах на ферритотранзисторных ячейках их требуется  $2n$ .

4) Схемы рассмотренных рециркуляционных регистров тем экономичнее, чем большее число регистров обслуживают тактовые импульсы.

5) При заданных тактовых импульсах  $t_1, t_2, \dots, t_N$  может быть выполнен рециркуляционный регистр с любым числом разрядов  $n \leq N - 1$  за счет изменения  $\alpha$ .

Наибольший интерес рассмотренные рециркуляционные регистры представляют для последовательных электронных вычислительных машин; динамические триггеры представляют интерес для всех дискретных устройств.

Проведенные эксперименты показали, что подобные устройства весьма экономичны, имеют хорошие эксплуатационные характеристики, работая на частотах в несколько сотен килогерц, могут работать в диапазоне до нескольких десятков мегагерц. Особенно это относится к схемам на элементе рис. 3г и схемам на запоминающих элементах с прямоугольной петлей гистерезиса, выполненных в виде пленок.

Укажем некоторые варианты использования рассмотренных устройств.

1) Каскадное включение задержек на  $n$  разрядов в рециркуляционный регистр.

Пусть требуется выполнить рециркуляционный регистр на  $w = nt$  разрядов. Если имеются задержки (или регистры на  $n$  разрядов), то, соединяя последовательно  $t$  элементов, получим необходимый регистр, показанный на рис. 5в.

2) Получение тактовых импульсов  $t_1, t_2, \dots, t_N$ .

Первоначально для получения тактовых импульсов  $t_1, t_2, \dots, t_N$  может быть использовано  $N$ , соединенных последовательно задержек с  $\tilde{N} = 2$ ,  $\tilde{n} = 1$  и  $\tilde{\alpha} = 1$ . Рециркуляция единицы в этом регистре с тактовыми импульсами  $\tilde{t}_1$  и  $\tilde{t}_2$  дает с выходов задержек требуемые импульсы  $t_1, t_2, \dots, t_N$ , необходимые для питания больших регистров, имеющих период до  $n = N - 1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Р. К. Ричардс, Элементы и схемы цифровых вычислительных машин, ИЛ, М., 1961.
2. М. Л. Цетлин, Л. М. Шехтман, Проблемы кибернетики, № 2, 139 (1959).
3. Э. Бут и К. Бут, Автоматические цифровые машины, Физматгиз, М., 1959.
4. П. П. Головистиков, Труды конференции «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения», ч. 1, М., 1956, стр. 174.
5. В. Я. Алексеев, Труды конференции «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения», ч. 1, М., 1956, стр. 189.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
10 февраля 1962 г.

## DYNAMIC RELAYS, REGISTERS AND TRIGGERS WITHOUT INFORMATION SHIFT

*Eingorin M. Ya.*

New circuits of dynamic triggers, registers and delays of great simplicity and re-leability are considered. The circuits of registers and triggers are those without an information shift.

---

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

**О ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ЗАРЯДОВ  
В ФЕРРОДИЭЛЕКТРИКЕ**

*Б. М. Болотовский, В. С. Воронин*

Вопрос о характере поля и потерях энергии заряженной частицы, движущейся в ферродиеэлектрике, рассматривался в [1-5]. При этом в работах [4,5] утверждается, что в ферродиеэлектрике, в отличие от простого диэлектрика, частица теряет энергию на возбуждение трех видов волн — на черенковское излучение (на частотах, где  $\epsilon\mu\beta^2 > 1$ ), на поляризационное излучение (на тех частотах, где  $\epsilon(\omega) = 0$ ) и, кроме того, на тех частотах, где имеет место резонанс магнитной проницаемости ( $\mu(\omega) \rightarrow \infty$ ). Последний вид потерь был авторами [4] назван магнитными поляризационными потерями. В настоящей заметке мы хотим показать, что третий вид потерь в действительности не существует и что вывод работ [4,5] о наличии магнитных поляризационных потерь основан на неправильной аппроксимации.

Потери энергии частицы, движущейся в среде с заданными  $\epsilon$  и  $\mu$ , вычисляются по потоку вектора Пойнтинга через цилиндрическую поверхность радиуса  $b$ , окружающую путь частицы:

$$W_b = \frac{2q^2}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty i \omega d\omega \left( \frac{1}{\epsilon} - \mu\beta^2 \right) K_0(\zeta b) \zeta^* b K_1(\zeta b), \quad (1)$$

где

$$\zeta(\omega) = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \epsilon\mu\beta^2}, \quad \operatorname{Re} \zeta(\omega) \geq 0.$$

Радиус  $b$  выбирается достаточно малым, чтобы учесть все потери. Тогда при

$$\left| b \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \epsilon\mu\beta^2} \right| \ll 1 \quad (2)$$

формулу (1) можно переписать в виде:

$$W_b = \frac{q^2}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty i \omega d\omega \left( \frac{1}{\epsilon} - \mu\beta^2 \right) \ln \frac{4}{3,17\zeta^2 b}. \quad (3)$$

Из этой формулы и исходили авторы [4,5].

Интеграл по области  $\epsilon\mu\beta^2 > 1$  дает хорошо известную формулу потерь на черенковское излучение. Кроме того, подынтегральное выражение имеет особые точки при  $\epsilon = 0$  и  $\mu \rightarrow \infty$ , которые также могут дать вклад в действительную часть  $W_R$ . Точка, где  $\epsilon(\omega) = 0$ , соответствует хорошо известным поляризационным потерям. Точка, где  $\mu \rightarrow \infty$ , как отмечается в [4,5], дает магнитные поляризационные потери. Однако с последним выводом нельзя согласиться, так как при  $\mu \rightarrow \infty$  приближенное выражение (3) неправильно, не выполняется условие его справедливости (2).

Легко показать, что при точном подсчете точка  $\mu \rightarrow \infty$  не дает никакого вклада в потери энергии заряженной частицы, движущейся в среде. Действительно, будем исходить из хорошо известной формулы для напряженности электрического поля, тор-мозящего заряженную частицу:

$$W_0 = - \frac{q^2}{\pi v^2} \int_0^\infty k_r dk_r \int_{-\infty}^\infty \frac{[1 - \epsilon\mu\beta^2] i \omega d\omega}{\epsilon \left[ k_r^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \epsilon\mu\beta^2) \right]}. \quad (4)$$

Формула (4) дает реакцию поля, созданного частицей в среде. Выражение (4) логарифмически расходится за счет больших значений  $k_r$ ,  $\omega$ , при которых нарушается классическая электродинамика в среде. Поэтому пределы интегрирования в (4) должны определяться условием применимости макроскопической электродинамики среды  $k^2 = k_r^2 + \omega^2/v^2 < k_{\text{макс}}^2$ . Следует иметь в виду, что условие применимости макроскопической электродинамики, использующей  $\epsilon(\omega)$  и  $\mu(\omega)$ , существенно отличается от условий применимости макроскопической электродинамики, учитывающей только  $\epsilon(\omega)$ . Дело в том, что  $\mu$  теряет смысл при меньших значениях  $k_{\text{макс}}$ , чем  $\epsilon$ .

Интеграл (4), взятый по области  $k_r^2 + \omega^2/v^2 < k_{\text{макс}}^2$ , можно записать в виде:

$$W_0 = -\frac{q^2}{\pi v^2} \int_{-k_{\text{макс}} v}^{k_{\text{макс}} v} i \omega d\omega \int_0^{\sqrt{k_{\text{макс}}^2 - \omega^2/v^2}} \frac{[1 - \epsilon \mu \beta^2] k_r dk_r}{\epsilon [k_r^2 + (\omega^2/v^2)] (1 - \epsilon \mu \beta^2)}. \quad (5)$$

Интегрирование по  $k_r$  дает:

$$W_0 = -\frac{q^2}{\pi v^2} \text{Re} \int_0^{k_{\text{макс}} v} \left( \frac{1}{\epsilon} - \mu \beta^2 \right) \ln \left\{ 1 + \frac{k_{\text{макс}}^2 - \omega^2/v^2}{(\omega^2/v^2) (1 - \epsilon \mu \beta^2)} \right\} i \omega d\omega. \quad (6)$$

Легко видеть, что вклад в действительную часть интеграла в прозрачной среде дают нули диэлектрической постоянной  $\epsilon(\omega_l) = 0$ , если  $|\omega_l| < k_{\text{макс}} v$ , т. е. если

$$v > |\omega_l| k_{\text{макс}}^{-1}. \quad (7)$$

Это условие совпадает с соответствующим условием в [6]. Нули  $\epsilon(\omega)$  при выполнении этого неравенства дают поляризационные потери энергии частицы в среде. Далее, вклад в действительную часть интеграла дают также те области значений  $\omega$ , где аргумент логарифма отрицательный. Интеграл по этой области сводится к выражению

$$W_0 = \frac{q^2}{c^2} \int \left( 1 - \frac{1}{\epsilon \mu \beta^2} \right) \mu(\omega) \omega d\omega; \quad (8)$$

$$1 < \epsilon \mu \beta^2 < v^2 k_{\text{макс}}^2 / \omega^2. \quad (9)$$

Ограничение области интегрирования неравенством (9) весьма существенно в прозрачной среде, ибо оно ограничивает интенсивность излучения Вавилова — Черенкова вблизи от полос поглощения в среде.

Легко видеть, что точки, в которых  $\mu$  велико, не дают никакого вклада в действительную часть интеграла, так как вблизи от этих точек мы можем написать:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \ln \left\{ 1 + \frac{k_{\text{макс}}^2 - \omega^2/v^2}{(\omega^2/v^2) (1 - \epsilon \mu \beta^2)} \right\} \rightarrow \frac{k_{\text{макс}}^2 - \omega^2/v^2}{-(\omega^2/c^2) \epsilon \mu}.$$

Подставив это выражение в (6), видим, что подынтегральное выражение не имеет особенности и вообще не зависит от  $\mu$ .

Таким образом, наше рассмотрение доказывает, что электрический заряд в веществе не испытывает магнитных поляризационных потерь. Этот вывод получается, конечно, и при корректном рассмотрении формулы (1).

Интересно отметить, что если бы существовал магнитный заряд, то при прохождении через вещество он не испытывал бы поляризационных потерь на частотах, где  $\epsilon(\omega) = 0$ . Потери энергии магнитным зарядом имели бы место лишь на тех частотах, где  $\mu(\omega) = 0$ , и на черенковских частотах, где выполняется условие  $\epsilon \mu \beta^2 > 1$ . По-видимому, это обстоятельство не было учтено авторами работы [7], где были предприняты поиски магнитных зарядов, предсказанных Дираком, по их ионизационным потерям.

Авторы благодарны В. П. Силину и В. Н. Цытовичу за обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Иваненко и В. С. Гургенидзе, ДАН СССР, 67, 997 (1949).
2. Д. Иваненко и В. С. Гургенидзе, Вестн. МГУ, 2, 69 (1950).
3. А. Г. Ситенко, ЖТФ, 23, 2200 (1953).
4. Д. Иваненко и В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 28, 291 (1955).

5. S. Naya kawa, K. Kitao, Progr. Theor. Phys., **16**, 131 (1956).  
 6. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.  
 7. E. Amaldi, G. Baroni, H. Bradner, L. Hoffman, A. Manfredini, G. Vandehaeghe and H. G. de Carvalho, Notas de Fisica, **8**, 15.

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию  
23 мая 1962 г.

## ОБ АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ АНАЛИЗЕ РАБОТЫ ПРИБОРОВ МАГНЕТРОННОГО ТИПА

*В. Е. Нечаев*

Теоретическое исследование взаимодействия электронов с полем в многорезонаторном магнетроне и родственных ему приборах начинается с решения двумерной задачи о движении электронов в однородном магнитном поле и электрических полях, сводящихся к статическим в одноволенной идеализации. При этом широко пользуются [1,2,3] адиабатическим приближением с заменой трохoidalных траекторий на усредненные, что обычно достигается отбрасыванием из уравнений движения членов, содержащих ускорения. Получающиеся при этом соотношения формально совпадают с теми, которые были получены в [4] для дрейфовой скорости центра тяжести ларморовской окружности в предположении малого изменения поля на петле траектории. Однако последнее условие не выполняется в приборах магнетронного типа с катодом в пространстве взаимодействия. В этом случае необходимо выяснить два вопроса: каковы усредненные скорости и траектории и в какой мере ими можно пользоваться для расчета мощности, отдаваемой электронами полю. Рассмотреть эти вопросы аналитически удастся, если сила, действующая на электрон со стороны электрического поля мала по сравнению с силой со стороны магнитного поля.

Выберем плоскость  $x, y$  так, чтобы однородное магнитное поле было перпендикулярно к ней. Введем безразмерное время  $T = \omega_H t$ , где  $\omega_H = \left| \frac{e}{m} \right| B$  — циклотронная частота, и комплексную координату  $\xi = x + jy$ . Тогда уравнение движения электрона относительно системы отсчета, связанной с бегущей волной поля в плоской модели, примет вид:

$$\ddot{\xi} + j\dot{\xi} = -\frac{1}{\omega_H B} \{E_x(x, y) + jE_y(x, y)\}. \quad (1)$$

Здесь  $E_x, E_y$  — составляющие электрического поля.

Если при расчете траектории можно пренебречь полями пространственного заряда, то в силу  $\operatorname{div} E, \operatorname{rot} E = 0$  уравнение (1) может быть записано в удобной для анализа форме:

$$\ddot{\xi} + j\dot{\xi} = F(\xi^*), \quad (2)$$

где  $F(\xi^*)$  — аналитическая функция. Будем искать решение уравнения (?) для того случая, когда правая часть его мала по сравнению с любым из членов левой части, что как раз и означает слабое возмущение движения со стороны электрического поля. Проведем рассмотрение по аналогии с методом медленно меняющихся амплитуд [4].

Введем новую переменную вместо одного уравнения первого порядка (2) получим систему двух уравнений первого порядка:

$$\dot{\xi} = \eta; \quad \dot{\eta} + j\eta = F(\xi^*) \quad (3)$$

Решение будем искать в виде, близком к невозмущенному:

$$\xi = r + R e^{-jT}; \quad \eta = -jR e^{-jT}. \quad (4)$$

Здесь  $r$  и  $R$  — комплексные коэффициенты, передающие положение центра, радиуса и фазы вращения электрона. При  $F(\xi^*) \neq 0$  они зависят от времени. Подстановка (4) в (3) позволяет получить для  $\dot{r}$  и  $\dot{R}$  следующие точные соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -jF(r^* + R^* e^{jT}); \\ \dot{R} &= jF(r^* + R^* e^{jT}) e^{jT}. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу малости правых частей (5)  $r$  и  $R$  могут быть представлены в виде суперпозиции плавно изменяющихся членов  $r$ ,  $\bar{R}$  и суммы малых вибрационных. В первом приближении, усредняя по периоду циклотронной частоты и отбрасывая малые вибрационные члены, получим:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\bar{r}^* + \bar{R}^* e^{jT}) dT = -jF(\bar{r}^*); \\ \dot{\bar{R}} &= j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\bar{r}^* + \bar{R}^* e^{lT}) e^{lT} dT = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь учтено, что функция  $F(\bar{r}^*)$  — регулярная в круге радиуса  $|\bar{R}^*|$ , и применена теорема Гаусса о среднем. Из (6) видно, что средний радиус вращательного движения в первом приближении остается постоянным, так что медленное изменение кинетической энергии может происходить в основном за счет изменения дрейфовой скорости  $v_{\perp}$ . Из (6) следует, что скорость дрейфа центра ларморовской окружности в первом приближении может быть рассчитана как и в однородном поле, только величина электрического поля должна выбираться точно по линии дрейфа:

$$v_{\perp} = -\frac{1}{B^2} [B \times E(x_{др}, y_{др})]. \quad (7)$$

Если искать решение уравнений (5) в виде гармонических рядов, то можно получить улучшенное первое приближение, учитывающее вибрационные члены:

$$\dot{r} = -j \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{Выч.} \left\{ \frac{F(\bar{r}^* + \bar{R}^* z)}{z^{n+1}} \right\}_{z=0} e^{jnT}; \quad \dot{R} = j \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{Выч.} \left\{ \frac{F(\bar{r}^* + \bar{R}^* z)}{z^n} \right\} e^{jnT}. \quad (8)$$

Для скорости электронов можно получить из (3), (4) и (8):

$$\dot{\xi} = -j\bar{R}e^{-iT} - jF(\bar{r}^*) - j \sum_{n \neq 0,1} \frac{1}{n} \text{Выч.} \left\{ \frac{F(\bar{r}^* + \bar{R}^* z)}{z^n} \right\} e^{j(n-1)T}. \quad (9)$$

Расчет мощности, отдаваемой электронами высокочастотному полю, в приборах магнетронного типа можно существенно упростить, если заменить поток электронов, движущихся по петлевидным траекториям условным несжимаемым (как видно из (7)  $\text{div } v_{\perp} = 0$ ) потоком электронов, движущихся по линиям дрейфа. Поскольку в случае неоднородных полей энергетическая эквивалентность такой замены не очевидна, то рассчитаем среднюю за период циклотронной частоты мощность взаимодействия каждого электрона с высокочастотным полем. Если учесть, что задача сведена к статической путем перехода в систему отсчета, связанную с волной поля и движущуюся с ее фазовой скоростью  $v_{\phi}$ , то средняя мощность взаимодействия  $\bar{P}$  составляет:

$$\bar{P} = eB\omega_H \frac{1}{2\pi} \text{Re} \int_0^{2\pi} (v_{\phi} + \omega_H \dot{\xi}) F_{\sim}(\xi) dT. \quad (10)$$

Здесь  $F_{\sim}(\xi)$  соответствует высокочастотной составляющей электрического поля. Из (10), учитывая (9), можно получить, что

$$\bar{P} = eB\omega_H \text{Re} [(v_{\phi} + \omega_H \dot{r}) F_{\sim}(\bar{r})]. \quad (11)$$

Из (11) можно видеть, что средняя мощность взаимодействия равна мощности, отдаваемой мысленно введенным зарядом  $e$ , движущимся точно по линии дрейфа.

Аналогичным образом (с некоторыми усложнениями) можно провести анализ и для цилиндрических моделей, отвечающих большинству реальных конструкций.

Таким образом, для предоставления движения в виде вращения и дрейфа, определяемого соотношением (7), требование квазиоднородности поля на протяжении петли траектории не обязательно. Если сила со стороны электрического поля мала по сравнению с силой со стороны магнитного поля, то достаточно, чтобы выполнялось условие  $\text{div } E = 0$ . Для расчета мощности и наведенного тока можно пользоваться в первом приближении упрощенной моделью, в которой трохоидальные движения

электронов заменены усредненными. Такой расчет выполнен в [5] без подробных обоснований.

Автор благодарен Л. В. Родыгину за полезные обсуждения и замечания, сделанные при чтении рукописи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Гельвич, Электроника, № 6, 45 (1959).
2. Дж. Фейнштейн, Сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1962, стр. 473.
3. Т. Симидзу, Сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., 1962, стр. 492.
4. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
5. В. Е. Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 534 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
17 апреля 1962 г

## СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ КОНТУРЕ С АСИММЕТРИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А. В. Турик

1. При малой величине диэлектрических потерь семейство гистерезисных петель сегнетоэлектрика можно заменить однозначной кривой, которую, в соответствии с [1], аппроксимируем функцией  $U_s = \alpha q + \beta q^3$ , где  $U_s$  — напряжение,  $q$  — заряд на сегнетоконденсаторе. Рассмотрим контур, состоящий из последовательно включенных сегнетоконденсатора и линейной индуктивности  $L$ , на вход которого одновременно поданы переменное напряжение  $U_m \sin(\omega t)$  и постоянное напряжение  $U_0$  (последнее делает характеристику контура асимметричной).

Дифференциальное уравнение колебаний в контуре имеет вид:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \alpha q + \beta q^3 = U_0 + U_m \sin(\omega t). \quad (1)$$

Уравнение подобного типа (при  $\alpha = 0$ ) рассматривал Хаяси [2], однако последний не исследовал резонансные явления в контуре и точное решение автономного уравнения ( $U_m = 0$ ). Практический интерес, который имеет уравнение (1) для исследования схем с нелинейными сегнетоэлектрическими элементами, побудил нас подробно рассмотреть его, уделив вышеупомянутым вопросам основное внимание. Следуя в основном рекомендации Каудерера [3], введем безразмерные параметры и переменные

$$\tau = \sqrt{\frac{\alpha}{L}} t; \quad x = \frac{\alpha}{v} q; \quad \tau_1 = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha/L}}; \quad \epsilon = \frac{v^2}{\alpha^3} \beta; \quad p_0 = \frac{U_0}{v},$$

где  $v$  — удобно выбираемая величина с размерностью напряжения (например, можно выбрать  $v = U_0$ ). При этом уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x(1 + \epsilon x^2) = p_0 + \frac{U_m}{v} \sin(\tau_1 \tau). \quad (2)$$

2. Рассмотрим собственные колебания ( $U_m = 0$ ). Умножая обе части (2) на безразмерную скорость  $y = dx/d\tau$  и интегрируя по  $\tau$ , получим для семейства фазовых кривых с параметром  $r^2$  следующее уравнение:

$$(x - p_0)^2 + \frac{1}{2} \epsilon x^4 + y^2 = r^2. \quad (3)$$

Проинтегрировав (3) с учетом симметрии фазовых кривых относительно оси  $x$ , найдем период колебаний

$$T = 2 \int_{X_2}^{X_1} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - (x - p_0)^2 - \varepsilon x^4/2}}, \quad (4)$$

где  $X_1$  и  $X_2$  определяются как корни уравнения (3) при  $y = 0$ .

Преобразуем (4) к полному эллиптическому интегралу 1 рода в канонической форме Лежандра. Полином 4-й степени под корнем представляется в виде произведения двух квадратных трехчленов с вещественными коэффициентами [4]:

$$F = -\frac{1}{2} \varepsilon x^4 - x^2 + 2p_0 x + r^2 - p_0^2 = -\frac{1}{2} \varepsilon (x^2 + px + q)(x^2 - px + q'), \quad (5)$$

причем  $p$ ,  $q$  и  $q'$  определяются из следующих уравнений:

$$q + q' - p^2 = 2'\varepsilon; \quad p(q - q') = 4p_0\varepsilon; \quad r^2 = p_0^2 - \varepsilon q q'/2. \quad (6)$$

Далее с помощью дробно-линейной подстановки  $x = (\mu t + \nu)/(t + 1)$  уничтожим в (5) члены с первой степенью  $x$ , для чего достаточно определить  $\mu$  и  $\nu$  как корни квадратного уравнения

$$z^2 + \frac{q - q'}{p} z - \frac{q + q'}{2} = 0. \quad (7)$$

После этих преобразований интеграл (4) сводится к следующему виду:

$$T = B \int_b^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + a^2} \sqrt{t^2 - b^2}} = \frac{B}{c} K(a/c), \quad (8)$$

где  $K(a/c)$  — полный эллиптический интеграл 1 рода,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad a^2 = \frac{\nu^2 + p\nu + q}{\mu^2 + p\mu + q};$$

$$b^2 = \frac{\nu^2 - p\nu + q'}{-\mu^2 + p\mu - q'}; \quad B = 4 \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \frac{\mu - \nu}{\sqrt{(\mu^2 + p\mu + q)(-\mu^2 + p\mu - q')}}.$$

Значения интегралов  $K(a/c)$  брались из таблиц [5].

После нахождения периода  $T$  определялась частота колебаний  $\eta = 2\pi/T$  и исследовалась ее зависимость от амплитуды  $(X_1 - X_2)/2$ . Были проведены расчеты для последовательного контура с сегнетоконденсатором (монокристалл  $\text{BaTiO}_3 - \text{BaHfO}_3$ ), зависимость напряжения от заряда на котором аппроксимировалась функцией  $U_s = 2,08 \cdot 10^8 q + 1,88 \cdot 10^{21} q^3$  ( $q$  — в кулонах,  $U_s$  — в вольтах; индуктивность  $L = 0,11$  гн,  $U_0 = 37$  в и  $69,2$  в). Расчетные кривые в координатах  $\omega/\omega_0$  ( $\omega_0 = \sqrt{a/L}$ ),  $q_m$  приведены на рис. 1 (пунктирные линии). Сплошными линиями на том же рисунке показаны результаты приближенного расчета по методу Галеркина [1,2], проведенного в приближении гармонического решения:  $x = a_0 + a \sin(\eta\tau)$ .

Окончательные выражения для зависимости  $a_0$  и  $\eta$  от амплитуды колебаний  $a$ , полученные по методу Галеркина, таковы:

$$a_0 = \sqrt[3]{\frac{p_0}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{p_0}{2\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\varepsilon} + \frac{1}{2} a^2\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{p_0}{2\varepsilon} - \sqrt{\left(\frac{p_0}{2\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\varepsilon} + \frac{1}{2} a^2\right)^3}}; \quad (9)$$

$$\eta^2 = 1 + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 + 3\varepsilon \left[ \sqrt[3]{\frac{p_0}{2\varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{p_0}{2\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\varepsilon} + \frac{1}{2} a^2\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{p_0}{2\varepsilon} - \sqrt{\left(\frac{p_0}{2\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{1}{3\varepsilon} + \frac{1}{2} a^2\right)^3}} \right]^2. \quad (10)$$

Из рис. 1 видно, что метод Галеркина дает в данном случае вполне достаточную точность даже в приближении гармонического решения.

Характерной особенностью кривых собственных колебаний контура с асимметричной характеристикой является загиб в сторону низких частот при малых амплитудах колебаний. Загиб появляется при достаточно больших постоянных напряжениях  $U_0$  и по мере роста  $U_0$  смещается в сторону больших амплитуд. Эти эффекты, как видно из (9), обусловлены монотонным убыванием  $a_0$  с ростом  $a$ .

3. При  $U_m \neq 0$  точные решения уравнения (2) неизвестны. Отыскание приближенных решений по методу Галеркина приводит к уравнениям (9) и (10) (к правой части (10) добавляется член  $-U_m/va$ ). На рис. 2 изображены кривая собственных колебаний и несколько резонансных кривых. При больших значениях  $U_m$  последние имеют

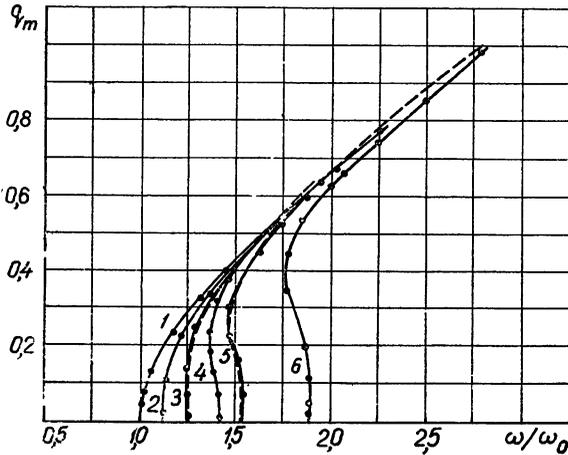


Рис. 1. Кривые собственных колебаний:

- 1 —  $U_0 = 0$ ; 2 —  $U_0 = 21,8$  в; 3 —  $U_0 = 37$  в; 4 —  $U_0 = 53,6$  в;  
5 —  $U_0 = 69,2$  в; 6 —  $U_0 = 138,4$  в;  $q_m$  — в микрокулонах.

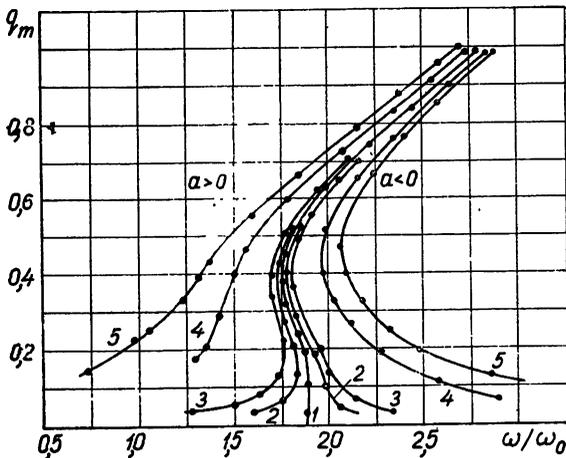


Рис. 2. Кривые вынужденных колебаний ( $U_0 = 138,4$  в):

- 1 —  $U_m = 0$ ; 2 —  $U_m = 6,9$  в; 3 —  $U_m = 13,8$  в; 4 —  $U_m = 69,2$  в;  
5 —  $U_m = 110,7$  в;  $q_m$  — в микрокулонах.

тот же характер, что для контура с симметричной характеристикой [6]. При малых  $U_m$  в узкой области частот вблизи резонанса одному значению  $\omega$  соответствуют пять значений  $a$  (кривая 2), из которых устойчивы колебания с минимальной, средней и максимальной амплитудой (условие устойчивости  $dU_m^2/da^2 > 0$  [2]). Какой именно тип

устойчивых колебаний практически реализуется — зависит от начальных условий. В точках, где  $dn/da = 0$ , наблюдаются скачки амплитуды, сопровождающиеся изменением фазы на  $180^\circ$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. М. Казарновский, Электричество, № 10, 68 (1953).
2. Т. Хаяси, Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИЛ, М., 1957.
3. Н. Кauderer, Ingenieur-Archiv, 28, 154 (1959).
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 2, ГИТТЛ, М., 1951, стр. 99.
5. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, М., 1959.
6. Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, М., 1953.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступила в редакцию  
27 февраля 1962 г.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ НЕУСТОЙЧИВЫЕ ЗВЕНЬЯ

И. Н. Печорина

В литературе [1,2] указывается, что при исследовании периодических режимов методом гармонического баланса гипотеза фильтра усиливается требованием, чтобы линейная часть системы была устойчива или нейтральна. Путем несложных преобразований можно, однако, показать возможность использования метода гармонического баланса и для неустойчивых в разомкнутом состоянии систем. Ниже изложены соображения, использование которых позволяет распространить метод гармонического баланса на случай определения частоты и амплитуды периодического режима в системе, состоящей из неустойчивой линейной части и одного нелинейного звена.

1. Предположим, что структура системы автоматического управления может быть сведена к виду, представленному на рис. 1. Передаточная функция линейной части I системы  $W_L(p) = R(p)/Q(p)$ , причем полином  $Q(p)$  имеет корни с положительными вещественными частями. Переменные  $x_1$  и  $x_2$  в нелинейном звене II связаны уравнением  $x_2 = f(x_1)$ ; для случая, когда возникает периодический режим, можно ввести эквивалентный передаточный коэффициент  $q(A)$ .

Заменим нелинейное звено линейным с передаточным коэффициентом  $K_H$ , который удовлетворяет условию  $q_{\min} < K_H < q_{\max}$ . Если замкнутая система устойчива при некотором значении коэффициента  $K_H = K'_H$ , то в выражении

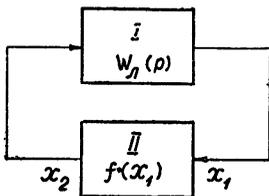
$$W_1(p) = \frac{W_L(p)}{1 + K'_H W_L(p)}$$

корни полинома  $1 + K'_H W_L(p)$  имеют отрицательные вещественные части и систему можно привести к виду, представленному на рис. 2. При этом функция  $\varphi(x_1) = f(x_1) - K'_H$ , а эквивалентный передаточный коэффициент  $q'(A) = q(A) - K'_H$ .

Так как линейная часть системы автоматического управления во втором варианте устойчива, запишем выражение для определения амплитуды и частоты периодического режима:

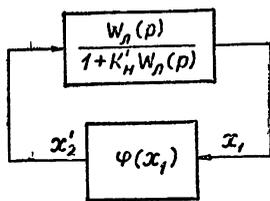
$$\frac{W_L(j\omega)}{1 + K'_H W_L(j\omega)} q'(A) = -1.$$

Рис. 1. Исходная структура системы автоматического управления.



После преобразования этой формулы получим:

$$W_L(j\omega) [q'(A) + K'_H] = -1$$



или

$$W_n(j\omega) q(A) = -1.$$

Проведенное рассуждение показывает, что амплитуду и частоту периодического режима можно определить, распространив метод гармонического баланса и на неустойчивую в разомкнутом состоянии систему.

2. В некоторых случаях затруднительно представить себе разделение нелинейного звена на два, из которых одно является обычным линейным. Введем в этом случае звено с комплексным коэффициентом усиления (наличие комплексных параметров не изменит методов исследования устойчивости). Величину коэффициента примем равной некоторому частному значению эквивалентного коэффициента

Рис. 2. Преобразованная структура системы автоматического управления.

нелинейного звена, т. е.  $\bar{K}'_H = W_n(A')$ . Тогда  $W_n(A) = \bar{K}'_H + w_n(A)$  и комплексная передаточная функция узла

$$W_1(j\omega) = \frac{W_n(j\omega)}{1 + \bar{K}'_H W_n(j\omega)}.$$

В случае, когда замкнутая система при выбранном коэффициенте  $\bar{K}'_H$  устойчива, можно использовать метод гармонического баланса для определения амплитуды и частоты периодического режима. В конечном итоге выражение для определения частоты и амплитуды периодического режима примет обычный вид:

$$W_n(j\omega) W_n(A) = -1.$$

Из сказанного можно сделать следующий вывод: если линейная часть системы автоматического управления неустойчива, но контур, составленный из линейной части и звена с постоянным комплексным передаточным коэффициентом, равным частному значению эквивалентного комплексного коэффициента нелинейного звена, устойчив, то возможно использование метода гармонического баланса для определения амплитуды и частоты периодического режима.

3. Рассмотрим простой пример. Допустим, что система состоит из линейного звена с передаточной функцией

$$W_n(p) = \frac{2(0,3p + 1)}{(0,01p^2 - 0,2p + 1)(0,02p + 1)}$$

и звена с насыщением, характеристика которого приведена на рис. 3а. Заменяем нелинейную функцию (рис. 3б) суммой

$$f(x_1) = x_1 + [-\varphi(x_1)],$$

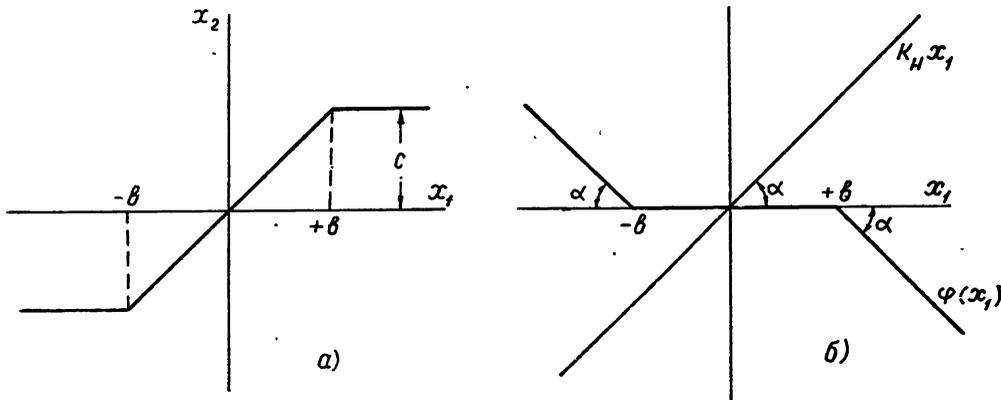


Рис. 3. Характеристики нелинейного звена:

а) исходная характеристика, б) разложение исходной характеристики на две составляющие.

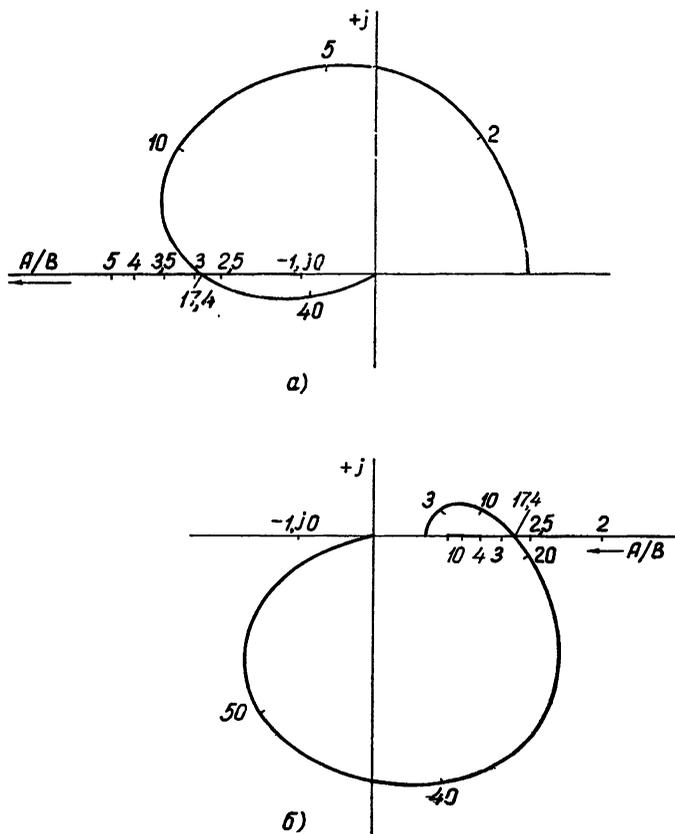


Рис. 4. Амплитудно-фазовые характеристики:  
а) исходной системы, б) преобразованной системы.

где зависимость  $\varphi(x_1)$  имеет вид характеристики с зоной нечувствительности. В данном случае  $K'_n = 1$ .

Построим амплитудно-фазовую характеристику по уравнению  $W_d(j\omega)$  (рис. 4а); из нее видно, что при  $K'_n = 1$  замкнутая система устойчива. Исследование периодических режимов можно проводить по исходной амплитудно-фазовой характеристике и характеристике нелинейного звена с насыщением (рис. 4а) или путем исследования амплитудно-фазовой характеристики  $W_1(j\omega)$  и характеристики нелинейного звена с зоной нечувствительности (рис. 4б). И в том и в другом случае получим значение  $A_n = 2,8b$  и  $\omega_n = 17,4 \text{ сек}^{-1}$ . Из рис. 4б видно, что условие фильтра в данном случае выполняется слабо и для уточнения результатов следует учесть еще одну гармонику. Легко показать, что периодический режим неустойчив.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Попов, И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, М., 1960.
2. М. А. Айзерман, Лекции по теории автоматического регулирования, Физматгиз, М., 1958.

Уральский политехнический институт

Поступила в редакцию  
14 ноября 1961 г.