ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том V, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1962*

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ, НАПРАВЛЯЕМЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ СТАТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

М. И. Петелин

Рассматривается распространение электромагнитных волн в волноводе, который пронизывается криволинейным электронным потоком, направляемым электрическим или магнитным статическим полем, периодически меняющимся вдоль волновода и имеющим квадрупольную структуру в поперечном сечении.

В работе Мотца и Накамуры [1] рассматривалось возбуждение волновода тонким криволинейным электронным пучком, направляемым периодическим статическим полем. Вид этого поля не конкретизировался, а электронный ток, возбуждаемый электромагнитной волной, находился методом Пирса [2]. Известно, однако, что характер взаимодействия высокочастотного поля со стационарными потоками заряженных частиц существенно зависит от вида действующих на них статических полей, поскольку для нахождения высокочастотного тока необходимо знать интегралы невозмущенного движения частиц как по траекториям, совпадающим с тонким пучком, так и по близким к нему траекториям [3]. Приведенное соображение заставляет усомниться в применимости метода, использованного в работе [1], к расчету взаимодействия электромагнитных волн с криволинейными электронными потоками в пространственно-периодических статических полях.

В настоящей работе при рассмотрении простейшей идеализированной системы этого типа используется метод кинетического уравнения, представляющий собой видоизменение метода Шафранова [4]. Полученный этим способом результат отличается от результата расчета той же модели методом, предложенным в работе [1].

1. Рассмотрим распространение электромагнитных волн в волноводе, который пронизывается нерелятивистским моноэнергетическим электронным потоком в случае, когда на электроны действует периодическое статическое поле одного из следующих двух типов*:

а) квадрупольное магнитное поле, скалярный потенциал которого вблизи оси z, направленной вдоль волновода, имеет вид:

$$\varphi^m = xy\Psi(z); \tag{1}$$

б) квадрупольное электрическое поле, скалярный потенциал которого вблизи оси z имеет вид:

$$\varphi^e = (y^2 - x^2)\,\Psi(z). \tag{2}$$

В формулах (1) и (2) Ψ—периодическая четная функция z.

Ток, возникающий в электронном потоке под действием высокочастотного поля, в приближении теории малого сигнала (в линейном

* Эти типы полей были предложены для фокусировки пучков заряженных частиц Курантом, Ливингстоном, Снайдером [5] и Блеветом [6].

приближении) может быть найден интегрированием кинетического уравнения для электронов в переменных Лагранжа (см. Приложение):

$$j = -\frac{e^2}{m}\sum_{\alpha\beta}\int d\boldsymbol{v}\,\frac{\partial f_0}{\partial \xi_\beta}\int\limits_{-\infty}^{t} E_\alpha(\tau)\,A_{\alpha\beta}(\tau)\,d\tau. \qquad (3)$$

Здесь $f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ — невозмущенная функция распределения электронов в пространстве координат и скоростей, e и m—заряд и масса электрона, переменные ξ_β совпадают с координатами и скоростями электронов, $A_{\alpha\beta}(\tau)$—алгебраическое дополнение к элементу $\partial v_\alpha(\tau)/\partial\xi_\beta$ в матрице $\| \partial\xi_\gamma(\tau)/\partial\xi_\delta \|$, где $\xi_\gamma(\tau)$—координаты и скорости электронов в момент τ как функции координат и скоростей в момент t. Нижний предел интегрирования по времени в выражении (3) выбран в соответствии с предположением о том, что амплитуда высокочастотного поля, действующего на каждый электрон, нарастает во времени.

Для вычисления тока (3) необходимо знать решение уравнений движения частицы в полях (1) и (2). Ограничиваясь рассмотрением параксиальных пучков (в соответствии с допущениями о структуре полей (1) и (2)), будем считать, что отклонение электронов от оси z много меньше размеров неоднородности статического поля и что продольная скорость электронов много больше поперечной. Кроме того, для простоты положим $y\equiv 0$ (плоское движение).

При этих допущениях движение электронов в z-направлении можно считать равномерным, а поперечная координата x удовлетворяет уравнению Хилла:

$$x'' + \Phi(\zeta)x = 0, \qquad (4)$$

где $\zeta = kz$, $k = 2\pi/d$, d — период статического поля, штрих означает производную по ζ. Функции $\Phi(\zeta)$ для магнитного (1) и электрического (2) полей равны соответственно

$$\Phi^m = -\frac{e}{mk^2cv_z}\Psi, \qquad \Phi^e = -\frac{2e}{mk^2v_z^2}\Psi,$$

где c—скорость света в вакууме.

Будем предполагать, что параметры статического поля и продольная скорость электронов таковы, что система является фокусирующей, т. е. общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$x(\zeta) = Ae^{i\beta\zeta}\sum_r C_r e^{ir\zeta} + Be^{-i\beta\zeta}\sum_r C_r e^{-ir\zeta} \equiv A\psi_1(\zeta) + B\psi_2(\zeta);$$
$$\operatorname{Im}\beta = 0; \quad 0 < \beta < 1; \quad \beta \neq 1/2. \qquad (5)$$

Здесь A и B—произвольные постоянные. Функции $\psi_1(\zeta)$ и $\psi_2(\zeta)$ удобно нормировать так, чтобы выполнялось соотношение $\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2 = 1$. Как видно из выражения (5), поперечное движение электрона представляет собой совокупность гармонических колебаний с частотами $r\Omega\pm\Omega_1$ (r=0, ± 1, ± 2, ...), где $\Omega = kv_z$, $\Omega_1=\beta kv_z$.

Координаты и скорость частицы в момент τ могут быть выражены через координаты и скорость в момент t следующим образом:

$$z(\tau) = z + v_z\bar{\tau}; \quad v_z(\tau) = v_z;$$
$$x(\tau) = A\psi_1(\zeta + kv_z\bar{\tau}) + B\psi_2(\zeta + kv_z\bar{\tau}); \qquad (6)$$
$$v_x(\tau) = kv_z[A\psi_1'(\zeta + kv_z\bar{\tau}) + B\psi_2'(\zeta + kv_z\bar{\tau})],$$

ствием неоднородного по поперечному сечению волновода продольного электрического поля волны, сопровождающаяся когерентным излучением образовавшихся электронных сгустков.

Существенно, что при условии (16) нарастание поля вдоль волновода может иметь место и при взаимодействии пучка с незамедленной волной. В этом отношении рассмотренная система сходна с другими системами, основанными на непрерывном взаимодействии высокочастотного поля с системами возбужденных моноэнергетических осцилляторов [3].

Интересно сравнить дисперсионное уравнение (17) с уравнением для постоянной распространения, которое может быть получено при тех же условиях методом, предложенным в работе [1]. Последнее имеет вид:

$$\Delta h(\Delta h - \varepsilon)^2 = -R\overline{K}_q/v_\parallel^2,$$

где $\overline{K}_q = A^+ B^+ \mathcal{E}_z'^2 C_q^2 [h \pm k(\beta+q)]$. Отличие этого уравнения от уравнения (17) обусловлено тем, что при его выводе принималась во внимание только неоднородность высокочастотного поля в поперечном сечении волновода, в то время как непосредственное влияние неоднородности статического поля на группировку электронов не учитывалось.

Принятые в настоящей работе ограничения в значительной степени сужают область применимости приведенных расчетов к реальным системам. Однако с помощью использованного здесь метода могут быть рассмотрены и более сложные модели электронных приборов.

Приношу благодарность А. В. Гапонову за руководство настоящей работой.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Метод интегрирования кинетического уравнения в переменных Лагранжа был использован Шафрановым для нахождения тензора диэлектрической проницаемости однородной плазмы, функции распределения компонент которой по координатам и импульсам в нулевом приближении не зависят от времени [4]. Этот метод может быть применен и в том случае, когда распределение частиц является неоднородным и нестационарным.

Если сила, действующая на частицы, представляет собой сумму двух членов, один из которых много больше другого:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_1, \quad |\boldsymbol{F}_0| \gg |\boldsymbol{F}_1|,$$

то функцию распределения частиц можно искать в виде функции нулевого приближения и малой поправки:

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) + f_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t), \quad f_0 \gg |f_1|,$$

где f_0 и f_1 удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}_0\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = 0; \qquad (1\text{П})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}_0\frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{F}_1\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}}. \qquad (2\text{П})$$

Здесь $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{p}$ — координаты, скорости и импульсы частиц.

Чтобы найти функцию $f_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$, выразим из уравнения движения

$$d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F}_0$$

координаты $\boldsymbol{r}(\tau)$ и импульс $\boldsymbol{p}(\tau)$ частицы на траектории невозмущенного движения в момент τ как функции $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$, τ,

в результате чего уравнения (1П) и (2П) принимают вид*:

$$\frac{df_0}{d\tau} = 0; \tag{1Па}$$

$$\frac{df_1}{d\tau} = -\boldsymbol{F}_1 \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}(\tau)} \equiv -\sum_{\alpha\beta} F_{1,\alpha}(\tau) \frac{A_{\alpha\beta}(\tau)}{D[\boldsymbol{r}(\tau), \boldsymbol{p}(\tau)]/D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})} \frac{\partial f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial \xi_\beta}, \tag{2Па}$$

где переменные ξ_β представляют собой совокупность координат $\boldsymbol{r}$ и импульсов $\boldsymbol{p}$ частиц, $D[\boldsymbol{r}(\tau), \boldsymbol{p}(\tau)]/D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$—якобиан преобразования от переменных $\boldsymbol{r}(\tau)$, $\boldsymbol{p}(\tau)$ к переменным $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$, $A_{\alpha\beta}(\tau)$—алгебраическое дополнение к элементу $\partial p_\alpha(\tau)/\partial \xi_\beta$ в матрице $\| \partial \xi_\gamma(\tau)/\partial \xi_\delta \|$. По теореме Лиувилля $D[\boldsymbol{r}(\tau), \boldsymbol{p}(\tau)]/D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = 1$.

Функция $f_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ может быть найдена интегрированием уравнения (2Па):

$$f_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = f_1(t_1) - \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial f_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)}{\partial \xi_\beta} \int_{t_1}^{t} F_{1,\alpha}(\tau) A_{\alpha\beta}(\tau)\, d\tau. \tag{3П}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Motz, M. Nakamura, Proc. of the Symposium on Millimeter Waves, N. J. Brooklin, 1959, p. 155.
2. Дж. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
3. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
4. В. Д. Шафранов, Сб. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 416.
5. E. D. Courant, M. S. Livingston, H. S. Snyder, Phys. Rev., 88, 1190 (1952).
6. J. P. Blewett, Phys. Rev., 88, 1197 (1952)
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
8. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Труды НИИ МРТП, № 7, 3 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 13 декабря 1961 г.

TO THE INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES WITH AN ELECTRON BEAM GUIDED BY A PERIODIC DC FIELD

M. I. Petelin

Electromagnetic wave propagation is considered in a waveguide which is pierced by a curve electron beam guided by an electric or magnetic dc field, the latter changing periodically along the waveguide and having a quadrupole structure in a cross-section.

---

* Уравнение для функции f_1 может быть проинтегрировано и в других переменных. Например, для системы частиц, которые в нулевом приближении совершают одномерное финитное движение в потенциальном поле, удобно выразить $x(\tau)$ и $p(\tau)$ как функции энергии частицы и времени ее пролета от некоторого фиксированного сечения.