

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Троицкий В. С., Цейтлин Н. М.</b> Использование абсолютного радиоастрономического метода для калибровки небольших антенных систем на сантиметровых волнах . . . . .	623
<b>Балклав А.</b> Редукция в радиоастрономии приближенными методами . . . . .	629
<b>Басистов Г. Г.</b> О возможности создания преобразователя координат повышенной точности для системы сопровождения радиотелескопа . . . . .	640
<b>Железняков В. В. и Злотник Е. Я.</b> О переходе плазменных волн в электромагнитные в неоднородной изотропной плазме . . . . .	644
<b>Светозарова Г. И., Цытович В. Н.</b> О пространственной дисперсии релятивистской плазмы в магнитном поле . . . . .	658
<b>Столяров С. Н.</b> Взаимодействие электромагнитных волн с движущейся границей раздела двух сред . . . . .	671
<b>Гулин Э. П.</b> Оценка флюктуаций амплитуды и фазы звуковой волны при наличии новой границы раздела двух сред . . . . .	679
<b>Бункин Ф. В.</b> К теории спектроскопического эффекта насыщения . . . . .	687
<b>Файн В. М., Ханин Я. И., Яшин Э. Г.</b> О взаимодействии электромагнитных колебаний в трехуровневых системах . . . . .	697
<b>Бункин Ф. В.</b> К электродинамике сред с периодическими по времени свойствами	714
<b>Таланов В. И.</b> Поле над плоскостью с неоднородным поверхностным импедансом	721
<b>Петелин М. И.</b> К вопросу о взаимодействии электромагнитных волн с электронным потоком, направляемым периодическим статическим полем . . . . .	736
<b>Ахманов С. А., Кохлов Р. В.</b> О триггерных свойствах нелинейных волноводных систем . . . . .	742
<b>Федин В. Т.</b> О радиоизлучении при трении металлических поверхностей, находящихся под различными электрическими потенциалами . . . . .	747
<b>Ерусин В. А.</b> Динамика простейшей модели следящей системы с люфтом . . . . .	751
<b>Валеев К. Г.</b> Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с синусоидальными коэффициентами . . . . .	766
<b>Поспелов Д. А.</b> Реализация логических функций в одном классе функциональных схем . . . . .	784
<b>Поспелов Д. А., Фальк В. Н.</b> Реализация троичных функций с помощью трехфазных кодов . . . . .	791
 <b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Бабий В. И. и Суховей А. Г.</b> Строенный радиоинтерферометр . . . . .	799
<b>Бабий В. И.</b> Выбор постоянной времени для радиоинтерферометра . . . . .	801
<b>Бондарь Л. Н., Зелинская М. Р., Порфириев В. А., Стрежнева К. М.</b> Прецизионное измерение радиоизлучения Луны на волне $\lambda = 3,2 \text{ см}$ . . . . .	802
<b>Гольнев В. Я., Кайдановский Н. Л., Малумян В. Г.</b> Наблюдения на Большом пулковском радиотелескопе на $\lambda = 33 \text{ см}$ за пределами длинноволновой границы его диапазона . . . . .	805
<b>Су Ши-вень, Сяо Гуан-ция, У Хуай-вей, Тун-ву, У Цзинь-ци, Троицкий В. С. Рахлин В. Л., Стрежнева К. М., Зелинская М. Р.</b> Наблюдение затмения Солнца 15 февраля 1961 г. на волнах 3,2 см и 1,6 см . . . . .	807
<b>Цейтлин Н. М.</b> К вопросу об абсолютном измерении интенсивности космического радиоизлучения . . . . .	810
<b>Ловецкий Е. Е.</b> О высокочастотной диэлектрической проницаемости неизотермической плазмы . . . . .	813
<b>Сучкин Г. Л.</b> О возможности наблюдения сложного спектрального состава излучения движущегося источника в среде с отрицательной абсолютной температурой . . . . .	815
<b>Урицкий З. И. и Тульинский В. В.</b> К теории внешнего фотоэффекта с полупроводниками с большой глубиной выхода фотозелектронов . . . . .	816
<b>Крупинов А. Ф., Скворцов В. А.</b> Молекулярный генератор на пучке молекул формальдегида в 4-мм диапазоне . . . . .	820
 <b>Информация</b>	
<b>Второй Всесоюзный симпозиум по дифракции волн . . . . .</b>	821
<b>Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. II, № 2, 1962 . . . . .</b>	825
<b>Содержание №№ 1, 2, 3 журнала «Известия вузов МВ и ССО СССР» по разделу «Радиотехника» за 1962 г. . . . .</b>	826

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АБСОЛЮТНОГО  
РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ КАЛИБРОВКИ  
НЕБОЛЬШИХ АНТЕННЫХ СИСТЕМ НА САНТИМЕТРОВЫХ  
ВОЛНАХ**

*B. C. Троицкий, N. M. Цейтлин*

Предложен метод измерения параметров антенн на сантиметровых волнах по эталонному излучению черного диска с малыми угловыми размерами. Приведены результаты экспериментальной проверки метода на волнах 1,6 см, 3,2 см и 10 см. Обсуждаются условия измерений в дециметровом диапазоне волн.

В [1] был предложен и разработан метод прецизионного измерения интенсивности радиоизлучения Солнца, Луны и дискретных источников путем сравнения с эталонным излучением взаимно дополнительных абсолютно черных тел. В качестве таких тел используются покрытые поглощающим материалом диск с угловыми размерами  $\Omega_d$  и экран, имеющий отверстие с угловыми размерами  $\Omega_{\text{отв}} = \Omega_d$ . Использование дополнительного к диску экрана позволяет учесть дифракционные явления на малом диске ( $\Omega_d \ll \Omega_{\text{гл}}$ , где  $\Omega_{\text{гл}}$  — телесный угол главного лепестка диаграммы) и исключить при измерениях соответствующие дифракционные поправки, которые при калибровке лишь по одному диску (как это предложено в [2]) могут привести к значительным погрешностям. Однако, как теоретически и экспериментально показано в [1], эти дифракционные поправки оказываются несущественными, если линейные размеры диска достаточно велики по сравнению с длиной волны (порядка  $20\lambda$ ) и за диском находится достаточно однородный фон излучения. Последнее, согласно [1], выполняется на сантиметровых волнах при углах наблюдения диска больше  $15 \div 20^\circ$ . При выполнении указанных условий ввиду малости дифракционной поправки отпадает необходимость в дополнительном экране, и достаточно малая погрешность измерений ( $1 \div 2\%$ ) реализуется при использовании лишь одного черного диска \*.

Использование метода [1] позволило измерить интенсивность радиоизлучения Луны, Кассиопеи-А, Тельца-А и Ориона с погрешностью в несколько процентов.

В то же время, как выяснилось и было проверено экспериментально, использование „черного“ диска (яркостная температура  $T_d$ ) с малыми угловыми размерами (наблюдаемого под углом порядка  $20^\circ$  с целью исключения дифракционной поправки) позволяет с достаточной точностью калибровать антенны.

Действительно, в случае, когда можно пренебречь дифракционными явлениями на диске, отклики антенн на радиоизлучение диска и фона равен [3]

\* Заметим, что дифракционная поправка оказывается несущественной также и при  $\Omega_d \approx \Omega_{\text{гл}}$ , т. е. в случае, когда диск „закрывает“ весь главный лепесток (см. также [4]).

$$T_{a_d} = T_d(1-\beta_d)\eta + T_0\beta_d\eta + T_0(1-\eta), \quad (1)$$

где  $\eta$  — КПД антенны,  $\beta_d$  — фактор рассеяния антенны вне телесного угла диска,  $T_0$  — средняя температура излучения фона, попадающего в антенну вне телесного угла  $\Omega_d$ ,  $T_0 \approx 300^\circ\text{K}$  — температура материала антенны.

При убранном диске температура антенны равна

$$T_{a_h} = T_h(1-\beta_d)\eta + T_0\beta_d\eta + T_0(1-\eta), \quad (2)$$

где  $T_h$  — усредненная по части  $\Omega_d$  главного лепестка диаграммы температура излучения неба в направлении за диском.

Из (1) и (2) имеем:

$$\Delta T_{a_{d-h}} = T_{a_d} - T_{a_h} = (T_d - T_h)(1-\beta_d)\eta. \quad (3)$$

В случае достаточно малых угловых размеров диска выражение (3) удобнее записать в виде:

$$\Delta T_{a_{d-h}} = (T_d - T_h) \frac{\int F d\Omega}{\int F d\Omega} \eta = (T_d - T_h) \frac{\Omega_d}{4\pi K} G, \quad (4)$$

где  $G$  — усиление антенны, а отношение\*

$$K = \Omega_d / \int F d\Omega \approx 1.$$

Из (3) и (4) следует, что

$$(1-\beta_d)\eta = \Delta T_{a_{d-h}} / (T_d - T_h); \quad (5)$$

$$G = (4\pi/\Omega_d) K \Delta T_{a_{d-h}} / (T_d - T_h). \quad (6)$$

Измерив  $\Delta T_{a_{d-h}}$  и зная  $\Omega_d$ , главный лепесток диаграммы и величины  $T_d$  и  $T_h$ , из (5) и (6) можно найти значения  $(1-\beta_d)\eta$  и  $G$ . Ошибка в определении  $G$  обусловлена, с одной стороны, случайной погрешностью в измерении  $\Delta T_{a_{d-h}}$ , а с другой — возможной систематической ошибкой в значениях  $(T_d - T_h)$ ,  $\Omega_d$  и  $K$ . При  $\Omega_d \approx 0,05 \Omega_{gl}$   $\Delta T_{a_{d-h}} \approx 10^\circ\text{K}$ , т. е. при пороговой чувствительности  $\approx 0,5^\circ\text{K}$  и при усреднении по  $20+30$  измерениям случайная погрешность может быть сделана меньше 1%. Величина  $T_d$  обычно известна с ошибкой порядка  $1+2\%$ ; величина  $T_h$  на сантиметровых волнах при угле наблюдения больше  $20^\circ$  составляет лишь несколько процентов от  $T_d$ . Так, при  $\lambda=3 \text{ см}$   $T_h \approx 10^\circ\text{K} \approx 0,03 T_d$ , т. е. ошибка в определении  $T_h$  может привести к незначительной погрешности в значении  $(T_d - T_h)$ . Значения  $\Omega_d$  и  $K$  могут быть определены с погрешностью, не превышающей 1%. Кроме того, систематическая ошибка тепловой калибровки может составлять  $3+5\%$ . Таким образом, усиление антенны  $G$  может быть определено рассмотренным методом с погрешностью порядка  $5+10\%$ .

Что касается величины  $(1-\beta_d)\eta$ , то при  $\Omega_d \ll \Omega_{gl}$  она обычно не-посредственного интереса не представляет, но может быть использо-

\* При необходимости величина  $K$  может быть легко оценена,

вана для определения фактора рассеяния антенны вне главного лепестка диаграммы  $\Omega_{\text{рл}}(\beta_{\text{рл}})$  или вне любого интересующего угла  $\Omega_a(\beta_a)$ . Очевидно, что

$$1 - \beta_a = (1 - \beta_d) \int_{\Omega_a} F d\Omega / \int_{\Omega_d} F d\Omega, \quad (7)$$

а отношение  $\int_{\Omega_a} F d\Omega / \int_{\Omega_d} F d\Omega$  может быть легко вычислено по известной диаграмме направленности \*.

Для определения из (5) и (6)  $(1 - \beta_d)$  и  $D$  — КНД антенны — можно воспользоваться обычным методом калибровки по излучению зенита:

$$T_{a_3} = T_z \eta + T_0(1 - \eta), \quad (8)$$

где  $T_z$  составляет на сантиметровых волнах  $30 \pm 40^\circ\text{K}$  (см. [3]), т. е. с погрешностью, не превышающей 5%,

$$\eta = (T_0 - T_{a_3}) / (T_0 - 35). \quad (9)$$

Измеряя  $(T_0 - T_{a_3})$ , т. е. излучение зенита относительно излучения холодного эталона температуры  $T_0$  (см., например, [4]), из (9) и (5), (6) получаем:

$$1 - \beta_d = \frac{\Delta n_{d-h}}{\Delta n_{x-z}} \frac{T_0 - 35}{T_d - T_h}; \quad (10)$$

$$D = \frac{G}{\eta} = \frac{4\pi}{\Omega_d} K \frac{\Delta n_{d-h}}{\Delta n_{x-z}} \frac{T_0 - 35}{T_d - T_h}, \quad (11)$$

где  $\Delta n_{d-h}$  и  $\Delta n_{x-z}$  — соответственно показания выходного прибора при приеме излучения диска и зенита. Из (10) и (11) видно, что величины  $(1 - \beta_d)$  и  $D$  определяются с большей ошибкой, чем  $(1 - \beta_d)\eta$  и  $G$  за счет некоторой неопределенности в значении  $T_z$ ; в то же время при измерениях  $(1 - \beta_d)$  и  $D$ , как следует из (10), (11), отпадает необходимость в тепловой калибровке аппаратуры.

Рассмотренным методом были измерены параметры четырех параболических антенн на волнах 10 см (диаметр зеркала  $d=4$  м), 3,2 см ( $d=4$  м и 1,5 м) и 1,6 см ( $d=1,5$  м). Для калибровки использовались три диска, покрытые поглощающим материалом и расположенные в дальней зоне антенн на вершине горы так, что они были видны из места расположения антены под углом 19,5°. Первый диск диаметром 4,2–4,6 м был помещен на расстоянии 472,8 м от антены и имел соответственно переменные угловые размеры 30',6+33',5 — „большой“ диск, который использовался на волнах 1,6 см и 3,2 см; второй диск был расположен на том же расстоянии и имел угловые размеры 8' (диаметр диска 1,1 м) — „малый“ диск, использовавшийся на волне 3,2 см; третий диск диаметром 1,9 м был удален на расстояние 202,5 м от антены (угловые размеры 32',25), он использовался на волне 10 см.

Диаграммы направленности всех исследуемых антенн были измерены по Солнцу и исправлены на уширение из-за конечных угловых размеров Солнца. Величина  $T_z$  была принята равной 35°К, а значения

\* При определении  $\beta_a$  желательно, чтобы  $\Omega_d$  был ненамного меньше  $\Omega_{\text{рл}}$ , а при определении  $G$   $\Omega_d \approx (0,05 \pm 0,1) \Omega_{\text{рл}}$ . Дальнейшее уменьшение  $\Omega_d$  может увеличить ошибку в определении  $G$  из-за уменьшения  $\Delta T_{a_{d-h}}$  и более существенного влияния дифракционных явлений на диске.

$T_{\text{н}}$  определялись по обычной формуле  $T_{\text{н}} = (T_0 - 32) \gamma$  (см. [5,6]), где  $\gamma$  — общее поглощение в атмосфере при данной температуре и влажности. Величина  $T_{\text{д}}$  контролировалась непосредственным измерением температуры поглощающего материала  $T$ . Как показало исследование поглощающих свойств материала,  $T_{\text{д}} = T$  с погрешностью, не превышающей 1%; кроме того, наличие небольшого отражения от диска практически не уменьшало его яркостной температуры, так как в антенну попадало отраженное от диска радиоизлучение земли, видимой из диска под углом 19,5° (плоскость диска нормальна к электрической оси антенны).

В качестве иллюстрации метода приведем полученные результаты. Зеркало диаметром 4 м на волне 3,2 см исследовалось по „большому“ диску с угловым размером 30', 6 (для определения  $1 - \beta_{\text{д}}$ ) и по „малому“ диску (для определения  $G$ ). Ширина диаграммы направленности на уровне половинной мощности  $\vartheta_{0,5} = 38'$ . За главный лепесток принята часть диаграммы шириной  $\vartheta_{\text{гл}} = 74'$ . При этом  $\int_{\Omega_{\text{гл}}} F d\Omega / \int_{\Omega_{\text{д}}} F d\Omega = 2,05$ ;

$$\Omega_{\text{д}} / \int_{\Omega_{\text{д}}} F d\Omega = 1; \quad D_{\text{гл}} = 4\pi / \int_{\Omega_{\text{гл}}} F d\Omega = 1,115 \cdot 10^5, \text{ т. е.}$$

$$1 - \beta_{\text{гл}} = 2,05 (1 - \beta_{\text{д}});$$

$$D = D_{\text{гл}} 2,05 (1 - \beta_{\text{д}});$$

$$K = 1.$$

При измерениях оказалось, что а) по „большому“ диску  $1 - \beta_{\text{д}} = 0,26$ , откуда  $1 - \beta_{\text{гл}} = 0,54$ ,  $D = 6 \cdot 10^4$ ; б) по „малому“ диску  $G = 5,24 \cdot 10^4$ ,  $\eta = 0,81$ ,  $D = 6,5 \cdot 10^4$ .

Заметим, что определение  $D$  по „малому“ диску является значительно более точным, чем по „большому“, так как в последнем случае требуется пересчет по главному лепестку диаграммы. Совпадение величин  $D$ , определенных по разным дискам, оказалось в пределах 10%. Данные по остальным антennам приведены в таблице 1 (здесь же указаны данные по четырехметровой антенне на  $\lambda = 3,2$  см и значения „коэффициента использования“ зеркала  $\sigma/\sigma_{\text{геом}}$ , где  $\sigma_{\text{геом}} = \pi d^2/4$  — площадь раскрытия, а  $\sigma = \lambda^2 D / 4\pi$  — эффективная площадь приема).

Таблица 1

Антenna	$\vartheta_{0,5}$	$\vartheta_{\text{гл}}$	Диск	$\frac{\int_{\Omega_{\text{гл}}} F d\Omega}{\int_{\Omega_{\text{д}}} F d\Omega}$	$D_{\text{гл}}$	$1 - \beta_{\text{д}}$	$D$	$\sigma/\sigma_{\text{геом}}$
$d=4 \text{ м}$ $\lambda=3,2 \text{ см}$	38'	74'	первый второй	2,05 $G=52400$	111500 $\eta=0,81$	0,26	60000 65000	0,42
$d=4 \text{ м}$ $\lambda=10 \text{ см}$	98'	3°	третий	11,4	15500	0,038	6800	0,43
$d=1,5 \text{ м}$ $\lambda=3,2 \text{ см}$	78'	2°46'	первый	8	25000	0,049	9700	0,45
$d=1,5 \text{ м}$ $\lambda=1,6 \text{ см}$	36'	3°10'	первый	3,33	78200	0,148	38500	0,45

Рассмотренный выше метод может быть применен также на волнах дециметрового диапазона. Особенностью этого диапазона по срав-

нению с сантиметровым и метровым является то, что здесь мало как излучение атмосферы, так и космическое излучение. Яркостная температура космического излучения в преобладающей части неба составляет  $1 \pm 2^{\circ}\text{K}$  на 30 см и  $10 \pm 15^{\circ}\text{K}$  на 75 см. Лучше всего было бы наблюдать диск в направлении на Полярную звезду (т. е. под углом, равным широте места), где фон космического излучения остается постоянным в течение суток. Однако практически это неосуществимо. В то же время при наблюдении в направлении на север под углами  $10 \pm 15^{\circ}$  через диаграмму антенны в течение суток проходят, в основном, области высоких галактических широт с малой интенсивностью космического радиоизлучения, достаточно однородного в этих областях (лишь в течение двух-трех часов в сутки по этому направлению „видны“ близкие к галактической плоскости области с большим и неоднородным фоном). Таким образом, на дециметровых волнах выполняются условия малости дифракционной поправки на углах  $10 \pm 15^{\circ}$  (условия отсутствия влияния радиоизлучения земли те же, что и в сантиметровом диапазоне). На этих волнах кроме рельефа местности можно использовать для калибровки мачты с установленными на них дисками.

В таблице 2 приведены ориентировочные данные необходимых параметров мачт и дисков. Из таблицы видно, что на дециметровых волнах, используя мачты высотой  $50 \pm 75$  м с установленными на них дисками диаметром 4 м, можно измерять усиление и рассеяние антенн

Таблица 2

Диаметр зеркала (м)	Длина волны (см)	Дальняя зона (м)	Высота мачты (м)	Видимый угол вершины мачты (град.)	Ширина диаграммы (град.)	Диаметр диска (м)	Угловые размеры диска (мин)	Приращение температуры антенны от радиоизлучения диска ( $^{\circ}\text{K}$ )
25	30	2000	100	3	1	6	10	10
	60	1000		6	2		20	
	100	600		10	3		40	
15	30	750	75	6	1,5	4	20	$10 \pm 15$
	60	375		12	3		40	
	100	225		20	5		60	
10	30	330	50	9	2	4	45	30
	60	165		18	4		90	
	100	100		30	7		150	

с диаметром раскрыта до  $15 \pm 20$  м (приращение антенной температуры в  $10^{\circ}\text{K}$  можно надежно измерять с помощью существующих радиометров). Антенны с большими раскрытиями на дециметровых волнах, по-видимому, удобнее калибровать по радиоизлучению Луны, используемой в качестве „черного диска“ (угловые размеры 30', температура  $220 \pm 250^{\circ}\text{K}$ , ожидаемое приращение антенной температуры на волне 50 см при антенне с диаметром раскрыта 25 м порядка  $10^{\circ}\text{K}$ ). Луна, в свою очередь, должна быть проэталонирована с помощью 15+20-метровой антенны и эталонного диска.

В заключение заметим, что диск, вероятно, можно расположать на расстоянии от антенны, меньшем, чем  $d^2/\lambda$ . С целью проверки этой возможности было проведено измерение величины  $(1 - \beta_d)$  антенны с  $d = 1,5$  м на волне 3,2 см ( $d^2/\lambda = 70$  м) с использованием диска диаметром 26 см, расположенного на расстоянии около 28 м ( $d^2/2,5\lambda$ ) от антенны (угловой диаметр диска 32'). Величина  $(1 - \beta_d)$  при этом оказалась лишь на 2+3% больше измеренной с помощью диска диаметром 4,4 м, расположенного на расстоянии 472 м ( $\approx 7d^2/\lambda$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1004 (1961).
2. R. Whitehurst, J. Copeland, F. Mitchell, Proc. IRE, 45, 1410 (1957).
3. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 393 (1961).
4. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 2, 935 (1957).
5. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 4, 21 (1959).
6. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 19 (1958).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
7 декабря 1961 г.

USE OF AN ABSOLUTE RADIOASTRONOMICAL METHOD  
FOR CALIBRATION OF SMALL ANTENNA SYSTEMS AT  
cm WAVELENGTH

*V. S. Troitski, N. M. Tseitlin*

A method is proposed of antenna parameters measurement at cm wavelengths using a standard radiation from a black disk with small angular dimensions. The results are given of an experimental verification of the method at 1,6 cm; 3,2 cm and 10 cm wavelengths. The conditions of measurements in dcm band are discussed.

## РЕДУКЦИЯ В РАДИОАСТРОНОМИИ ПРИБЛИЖЕННЫМИ МЕТОДАМИ

*A. Балклав*

Рассмотрены три приближенных метода исключения систематической ошибки, вносимой радиотелескопами в результаты наблюдения. Указано на возможность применения счетных машин для решения проблемы редукции. Данна принципиальная схема устройства, позволяющего полностью автоматизировать процесс редукции.

### ВВЕДЕНИЕ

Из оптики известно, что исследование любого распределения спектральным прибором вносит систематическую ошибку в полученном результате. Это происходит потому, что любой реальный спектральный прибор имеет апертурную диаграмму, спектральный состав которой отличен от спектрального состава функции Дирака. Действительно, процесс исследования истинного распределения  $T(\varphi)$  спектральным прибором, имеющим апертурную диаграмму  $A(\varphi)$ , можно описать уравнением:

$$T_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\varphi - \beta) T(\beta) d\beta. \quad (1)$$

Если был бы спектральный прибор, у которого  $A(\varphi) = \delta(\varphi)$ , где  $\delta(\varphi)$  — функция Дирака, то

$$T_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\varphi - \beta) T(\beta) d\beta = T(\varphi).$$

В этом и только в этом случае получалось бы полное соответствие результата исследования  $T_a(\varphi)$  с истинным распределением  $T(\varphi)$ .

Реальные спектральные приборы не могут иметь  $A(\varphi) = \delta(\varphi)$ , поэтому всегда результат исследования  $T_a(\varphi) \neq T(\varphi)$ , т. е. реальный спектральный прибор искажает истинное распределение  $T(\varphi)$  и вносит систематическую ошибку в результат наблюдения. В связи с этим возникает проблема исключения систематической ошибки, вносимой спектральным прибором, из результатов наблюдений — так называемая проблема редукции. С математической точки зрения проблема редукции равносильна решению интегрального уравнения (1) относительно функции  $T(\varphi)$ .

В оптике разработано множество методов решения уравнения (1). Мы рассмотрим некоторые приближенные методы решения уравнения (1), которые удобно применять в радиоастрономии, где так же, как и в оптике, возникает сходная с описанной выше проблема редукции.

Изложение приближенных методов решения уравнения (1) удобно произвести, используя интегральные преобразования Фурье [10]. Преобразование Фурье свертки (1) выражается уравнением

$$\bar{T}_a(s) = \bar{A}(s) \bar{T}(s), \quad (2)$$

где

$$\bar{T}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} T_a(\varphi) e^{-2\pi i s \varphi} d\varphi;$$

$$\bar{A}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\varphi) e^{-2\pi i s \varphi} d\varphi;$$

$$\bar{T}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} T(\varphi) e^{-2\pi i s \varphi} d\varphi.$$

Из уравнения (2) следует, что

$$\bar{T}(s) = \bar{T}_a(s)/\bar{A}(s). \quad (3)$$

Последнее справедливо во всех точках, где  $\bar{A}(s) \neq 0$ . Если  $\bar{A}(s_1) = 0$ , то, как ясно из (2),  $\bar{T}_a(s_1) = 0$  и уравнение (3) дает неопределенность, т. е. о характере функции  $\bar{T}(s)$  в точке  $s = s_1$  ничего нельзя сказать.

Используя обратное преобразование Фурье, из (3) получаем так называемое формальное решение интегрального уравнения (1):

$$T(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{T}_a(s)}{\bar{A}(s)} e^{2\pi i s \varphi} ds. \quad (4)$$

Преобразуем (4) следующим образом [1]:

$$T(\varphi) = T_a(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{T}_a(s) [\bar{A}^{-1}(s) - 1] e^{2\pi i s \varphi} ds.$$

Основная идея приближенных методов состоит в разложении выражения  $\bar{A}^{-1}(s) - 1$  в функциональный ряд вида

$$\bar{A}^{-1}(s) - 1 = \sum_n b_n u_n(s). \quad (5)$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, находим:

$$T(\varphi) = T_a(\varphi) + \sum_n b_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_n(s) \bar{T}_a(s) e^{2\pi i s \varphi} ds. \quad (6)$$

Тем самым проблема нахождения неизвестного распределения  $T(\varphi)$  решается выполнением определенных операций над известным распределением  $T_a(\varphi)$ . Операции, которые должны производиться над  $T_a(\varphi)$ , зависят от вида  $u_n(s)$  в (5).

В радиоастрономии  $T(\varphi)$  означает истинное распределение радиояркости (в температурных единицах) по небу,  $T_a(\varphi)$  — результат исследования и  $A(\varphi)$  — antennную диаграмму направленности, причем предполагается, что  $\int_{-\infty}^{\infty} A(\varphi) d\varphi = 1$ .

Обычно  $A(\varphi)$  аппроксимируется более или менее простыми функциями, характерной особенностью которых является ограниченность их спектра какой-то критической частотой  $s_{kp}$ , т. е.  $\bar{A}(s)$  имеет следующий вид:

$$\bar{A}(s) = \begin{cases} \neq 0, & \text{если } |s| < s_{kp} \\ = 0, & \text{если } |s| \geq s_{kp} \end{cases}. \quad (7)$$

Это положение связано со случайными ошибками измерений. Ошибки измерения, флюктуационные процессы в радиоаппаратуре настолько искажают высокие частоты исследуемого распределения, что теряется всякая уверенность в их истинных значениях. Поэтому антенная диаграмма направленности аппроксимируется простой функцией с ограниченным спектром, причем граничная частота спектра  $s_{kp}$  выбирается из соображений ошибок измерения для частоты  $s_{kp}$ . Спектр функции аппроксимации должен совпадать с истинным спектром антенной диаграммы направленности для  $|s| < s_{kp}$ .

Как показано в [4], точное решение дифракционной задачи в апертуре спектрального прибора не может привести к  $\bar{A}(s)$  вида (7), где  $\bar{A}(s)$  в целой спектральной области, т. е. для  $|s| \geq s_{kp}$ , обращается в нуль, и что в результате исследования  $T_a(\varphi)$  всегда есть все частоты  $\bar{T}(s)$ , конечно, измененные в соответствии со спектром апертурной диаграммы. Поэтому при полном отсутствии случайных ошибок измерения, т. е. в случае абсолютно точных измерений, в принципе возможно полное решение задачи редукций.

В реальных условиях случайные ошибки измерения приводят к тому, что практически уверенная редукция возможна только до частоты  $s_{kp}$  и даже ниже. В связи с этим, некоторые авторы [7, 8] предложили предварительную фильтрацию результатов измерений, т. е.  $T_a(\varphi)$ , чтобы полностью освободиться от присутствия частот  $|s| > s_{kp}$ . Как показано в [9], это равносильно разложению  $T_a(\varphi)$  в ряд Котельникова. Предварительную фильтрацию  $T_a(\varphi)$  надо считать целесообразной с точки зрения уверенности в полученных результатах редукции для частот  $|s| < s_{kp}$ .

Итак, мы видим, что практически в радиоастрономии аппроксимация диаграммы направленности простыми функциями с ограниченными спектрами является вполне оправданным и необходимым действием, чтобы не загромождать картину распределения деталями мелких размеров, в правдивости которых мы не можем быть уверены и присутствие которых может оказаться ложным. В последнем можно убедиться, исследуя данное распределение другой антенной с более направленной диаграммой, т. е. с большим  $s_{kp}$ .

Наиболее распространенными функциями аппроксимации радиоастрономических антенных диаграмм направленности являются функция апертурной диаграммы для равномерно освещенной апертуры и функция Гаусса. Первая хорошо описывает диаграмму направленности одиночных антенн, вторая—многоантенных интерферометров:

$$A_1(\varphi) = s_{kp} \frac{\sin^2(s_{kp}\pi\varphi)}{(\pi s_{kp}\varphi)^2}; \quad (8)$$

$$A_2(\varphi) = \frac{s_{kp}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varphi^2 s_{kp}^2/2}. \quad (9)$$

Для удобства введем обозначения

$$s_{kp} = s_0 = 1/\varphi_0.$$

Преобразованиями Фурье для (8), (9), как нетрудно показать, являются, соответственно,

$$\bar{A}_1(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } |s| \geq s_0; \\ 1 - |s/s_0|, & \text{если } |s| < s_0 \end{cases}$$

$$\bar{A}_2(s) = e^{-2\pi^2 s_0^2 s^2}.$$

Поскольку  $A_2(\varphi)$  не является функцией с ограниченным спектром, в связи со сказанным выше практически должно производиться обрывание спектра  $\bar{A}_2(s)$  при определенной частоте.

### 1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Одним из методов, предложенных для приближенного решения управления типа (1), является метод конечных разностей. В основе метода лежит разложение следующего вида:

$$\bar{A}^{-1}(s) - 1 = \sum_n b_n \sin^n(\pi s \alpha). \quad (10)$$

Из (6) получается:

$$T(\varphi) = T_a(\varphi) + \sum_n \frac{b_n}{(2i)^n} \Delta_a^n T_a(\varphi), \quad (11)$$

где  $\Delta_a^n T_a(\varphi)$  обозначает конечную разность  $n$ -го порядка с интервалом  $\alpha$  от функции  $T_a(\varphi)$ , т. е.

$$\Delta_a^n T_a(\varphi) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k T_a \left[ \varphi + \left( \frac{n}{2} - k \right) \alpha \right]. \quad (12)$$

Конечные разности четного порядка легко находятся графически, при помощи простых конструкций (см. рис. 1). Нетрудно убедиться, что

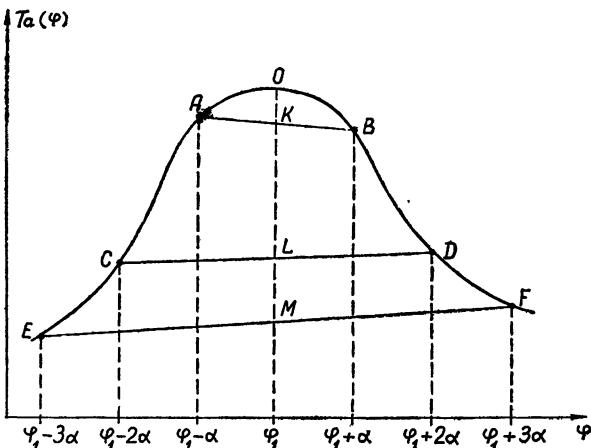


Рис. 1.

$$\Delta_a^{2n} T_a(\varphi) = -2 \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m C_{2n}^m \Delta_{2(n-m)},$$

где

$$\Delta_2 = OK;$$

$$\Delta_4 = OL;$$

$$\Delta_6 = OM;$$

... . . .

Основываясь на приведенных выше соотношениях, рассмотрим вопрос об аппроксимации  $\bar{A}_1^{-1}(s) - 1$  и  $\bar{A}_2^{-1}(s) - 1$  рядом (10).

Параметры  $b_n$  и  $\alpha$  выбираются, исходя из требования наилучшего совпадения ряда  $\sum b_n \sin^n(\pi s\alpha)$  с  $\bar{A}_1^{-1}(s) - 1$  на определенном интер-

вале значений для  $s$ , а сам интервал — исходя из соображений точности измерения для данного  $s$ . Как показано в [2] и [3], хорошее совпадение получается, если брать  $\alpha = 1/2s_0$ ,  $b_2 = 2$ , а  $b_1 = b_3 = b_4 = \dots = 0$ .

Конечно, это не единственная возможность. Как видно из рис. 2, не менее хорошее совпадение получается и для  $\alpha = 1/2s_0$ ,  $b_4 = 4$  и  $b_1 =$

$= b_2 = b_3 = b_5 = \dots = 0$ . Эти значения  $\alpha$  и  $b_4$  выбраны так, чтобы добиться хорошего совпадения для высших частот, поскольку низкие частоты антенна искажает мало. В первом случае хорошее совпадение между  $\bar{A}_1^{-1}(s) - 1$  и  $2 \sin^2(\pi s/2s_0)$  имеет место до  $|s/s_0| \approx 0,6$ , а во втором случае, т. е. между  $\bar{A}_1^{-1}(s) - 1$  и  $4 \sin^4(\pi s/2s_0)$ , — до  $|s/s_0| \approx 0,75$ .

Надо отметить, что  $\varphi_0 = 1/s_0$  равно половине ширины главного лепестка антенной диаграммы между нулями.

Если  $A(\varphi) = A_2(\varphi)$ , то, как известно,

$$e^{x^2} = 1 + \sin^2 x + \frac{5}{6} \sin^4 x +$$

$$+ \frac{61}{90} \sin^6 x + \dots,$$

если  $x < \pi/2$  и

$$\bar{A}_2^{-1}(s) - 1 = \sin^2 \sqrt{2} \pi \frac{s}{s_0} +$$

$$+ \frac{5}{6} \sin^4 \sqrt{2} \pi \frac{s}{s_0} + \dots,$$

т. е.

$$b_2 = 1, \quad b_4 = \frac{5}{6}, \quad b_6 = \frac{61}{90}, \dots, \quad \alpha = \sqrt{2}/s_0,$$

где  $s_0$  находится из измерений ширины главного лепестка антенной диаграммы по половинной мощности на основе (9).

Рис. 3 показывает согласование между  $\bar{A}_2^{-1}(s) - 1$ ,  $\sin^2(\sqrt{2}\pi s/s_0)$  и  $\sin^2(\sqrt{2}\pi s/s_0) + \frac{5}{6} \sin^4(\sqrt{2}\pi s/s_0)$ . Аппроксимация  $\bar{A}_2^{-1}(s) - 1$  такого вида исследована в [5].

Приведенным приближениям для  $\bar{A}_1^{-1}(s) - 1$  и  $\bar{A}_2^{-1}(s) - 1$  соответствуют очень простые графические приемы решения уравнения (1), что ясно из (11), (12) и рис. 1.

Заканчивая обозрение метода конечных разностей, надо указать

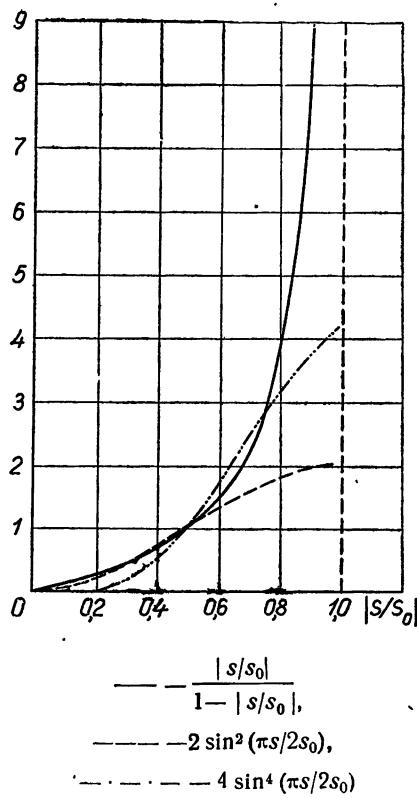


Рис. 2.

на приближенное решение уравнения (1) аналитически, используя метод конечных разностей. Как было показано в [9],  $T_a(\varphi)$  можно представить аналитически, используя теорему Котельникова (см. также [6]):

$$T_a(\varphi) \approx \sum_{n=-m}^m T_a(n\tau) \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi - n\tau) \right]^{-1} \sin \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi - n\tau) \right], \quad (13)$$

где  $\tau = 1/2 s_0$ . С помощью ряда (13) можно определить значения  $T_a(\varphi)$  с любой заданной степенью точности, которая зависит от  $m$ . Метод конечных разностей, по сути дела, требует только нахождения значений  $T_a(\varphi)$  при разных  $\varphi$  и произведения определенных арифметических действий над этими значениями. Действительно, используя (11), (13) и условие аппроксимации  $\bar{A}^{-1}(s)-1$  только четными степенями  $\sin^n(\pi s\alpha)$ , находим, что

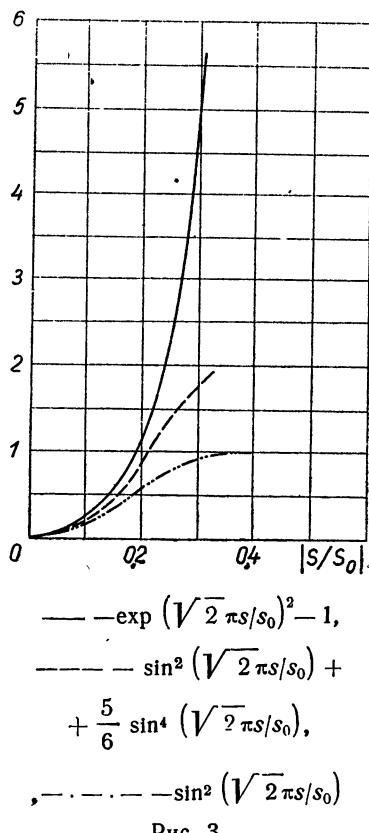


Рис. 3.

$$\begin{aligned} T(\varphi) \approx & \sum_{n=-m}^m T_a(n\tau) \left\{ \left( 1 - \frac{b_2}{2} + \frac{3b_4}{8} \right) \times \right. \\ & \times \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi - n\tau) \right]^{-1} \sin \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi - n\tau) \right] + \\ & + \left( \frac{b_2}{4} - \frac{b_4}{4} \right) \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi + \alpha - n\tau) \right]^{-1} \times \\ & \times \sin \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi + \alpha - n\tau) \right] + \left( \frac{b_2}{4} - \frac{b_4}{4} \right) \times \\ & \times \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi - \alpha - n\tau) \right]^{-1} \sin \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi - \alpha - n\tau) \right] + \frac{b_4}{16} \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi + 2\alpha - n\tau) \right]^{-1} \times \\ & \times \sin \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi + 2\alpha - n\tau) \right] + \frac{b_4}{16} \times \\ & \times \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi - 2\alpha - n\tau) \right]^{-1} \sin \left[ \frac{\pi}{\tau} (\varphi - 2\alpha - n\tau) \right] + \dots \Big\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Значения коэффициентов  $b_2$ ,  $b_4$ ,  $\tau$  и  $\alpha$  известны из исследований антенной диаграммы  $A(\varphi)$  и из аппроксимации  $\bar{A}^{-1}(s)-1$  рядом (10), а коэффициентами  $T_a(n\tau)$  служат ординаты функции  $T_a(\varphi)$ , взятые через равные промежутки аргумента  $\varphi$  (т. е. через  $\Delta\varphi = \tau$ , которые определяются на ленте самописца, как показано на рис. 4).

Нанеся значения  $T_a(n\tau)$  на магнитную ленту или перфокарты и составив программу для выражения (14) или сходного с ним (это, как мы видели, зависит от аппроксимации (10)), можно утомительную и трудоемкую задачу нахождения  $T(\varphi)$  поручить счетной машине.

## 2. МЕТОД РАВНООТСТОЯЩИХ ТОЧЕК

Метод равноотстоящих точек основывается на разложении  $\bar{A}^{-1}(s) - 1$  в тригонометрический ряд. Положим, что имеет место соотношение

$$\bar{A}^{-1}(s) - 1 = \sum_n b_n e^{-2\pi i s n \alpha}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (6), получаем:

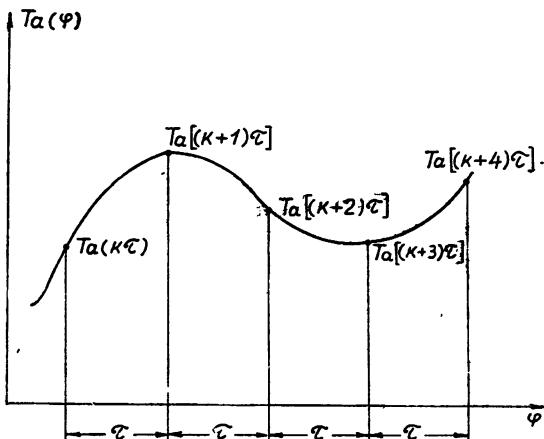


Рис. 4.

$$T(\varphi) = T_a(\varphi) + \sum_n b_n T_a(\varphi - n\alpha). \quad (16)$$

Рассмотрим способы аппроксимации  $\bar{A}_1^{-1}(s) - 1$  и  $\bar{A}_2^{-1}(s) - 1$  рядами вида (15). Как видно из рис. 5, хорошая аппроксимация до  $|s/s_0| \approx 0,65$  для  $A_1(\varphi)$  получается, если взять  $b_0 = 3,5$ ,  $b_1 = b_{-1} = 1,75$ ,  $b_2 = b_{-2} = b_3 = b_{-3} = \dots = 0$ ,  $\alpha = 1/4 s_0$  или  $b_0 = 8$ ,  $b_1 = b_{-1} = 4$ ,  $b_2 = b_{-2} = b_3 = b_{-3} = \dots = 0$ ,  $\alpha = 1/6 s_0$ . Для выбранных аппроксимаций из (16) следует, что

$$T(\varphi) \approx 4,5 T_a(\varphi) - 1,75 \left[ T_a\left(\varphi - \frac{1}{4s_0}\right) + T_a\left(\varphi + \frac{1}{4s_0}\right) \right]; \quad (17)$$

$$T(\varphi) \approx 9 T_a(\varphi) - 4 \left[ T_a\left(\varphi - \frac{1}{6s_0}\right) + T_a\left(\varphi + \frac{1}{6s_0}\right) \right]. \quad (18)$$

Решения (17) и (18) опять легко получить графически, определяя ординаты  $T_a(\varphi)$  в определенных точках, как показано в (17) и (18).

Для  $A_2(\varphi)$  хорошие резуль-

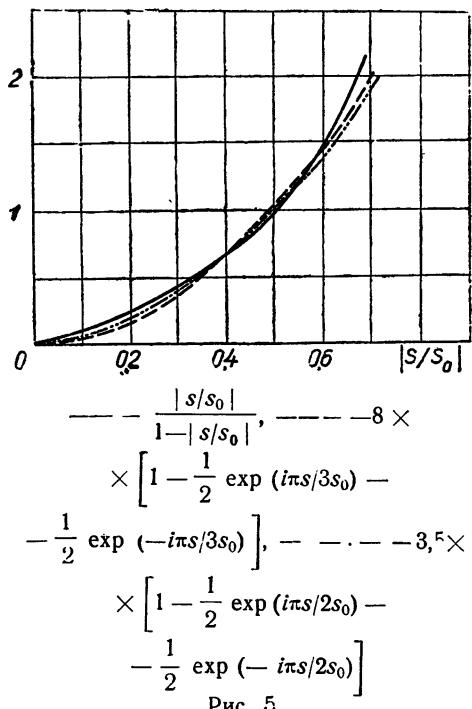


Рис. 5.

таты получаются до  $|s/s_0| = 0,2$ , если взять  $b_0 = 42$ ,  $b_1 = b_{-1} = 21$ ,  $b_2 = b_{-2} = b_3 = b_{-3} = \dots = 0$ ,  $\alpha = 1/6 s_0$  или  $b_0 = 10$ ,  $b_1 = b_{-1} = 5$ ,  $b_2 = b_{-2} = b_3 = b_{-3} = \dots = 0$ ,  $\alpha = 1/2 s_0$ , как это видно из рис. 6. Для выбранных аппроксимаций, если  $A(\varphi) = A_2(\varphi)$ , из (16) получаем, что

$$T(\varphi) \simeq 43T_a(\varphi) - 21 \left[ T_a\left(\varphi - \frac{1}{6s_0}\right) + T_a\left(\varphi + \frac{1}{6s_0}\right) \right]; \quad (19)$$

$$T(\varphi) \simeq 11T_a(\varphi) - 5 \left[ T_a\left(\varphi - \frac{1}{2s_0}\right) + T_a\left(\varphi + \frac{1}{2s_0}\right) \right]. \quad (20)$$

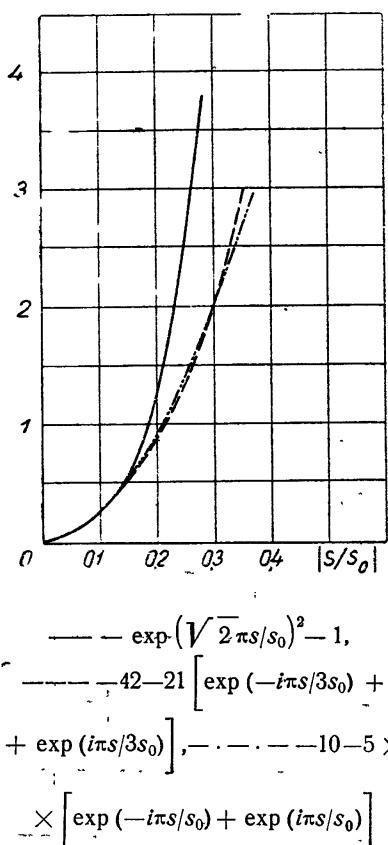


Рис. 6.

(21). Как видно из рис. 7, хорошая аппроксимация для  $A_1(\varphi)$  получается, если взять  $b_2 = 5/s_0^2$ ,  $b_1 = b_3 = b_4 = \dots = 0$  или  $b_2 = 4/s_0^2$ ,  $b_1 = b_3 = b_4 = \dots = 0$ . Для выбранных значений  $b_2$ , согласно (22),

$$T(\varphi) \simeq T_a(\varphi) - \frac{5}{(2\pi)^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} T_a(\varphi); \quad (23)$$

$$T(\varphi) \simeq T_a(\varphi) - \frac{1}{\pi^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} T_a(\varphi). \quad (24)$$

Результаты, даваемые выражениями (23) и (24), мало отличаются от истинного решения интегрального уравнения (1) до  $|s/s_0| \simeq 0,75$  и  $|s/s_0| \simeq 0,65$  соответственно.

Конечно, выбранные аппроксимации как в случае  $A(\varphi) = A_1(\varphi)$ , так и в случае  $A(\varphi) = A_2(\varphi)$  не являются единственными возможными.

Как и в методе конечных разностей, в методе равноотстоящих точек можно приближенное решение уравнения (1) найти не только графически, но и аналитически, основываясь на разложении (13) и выражениях (17)–(20) и им подобных. Нахождение  $T(\varphi)$  в последнем случае опять можно провести на счетной машине.

### 3. МЕТОД ПРОИЗВОДНЫХ

Метод производных основывается на разложении  $\bar{A}^{-1}(s) - 1$  в степенной ряд. Положим, что имеет место:

$$\bar{A}^{-1}(s) - 1 = \sum_n b_n s^n. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (6), получаем:

$$T(\varphi) = T_a(\varphi) + \sum_n \frac{b_n}{i^n (2\pi)^n} \times \\ \times \frac{d^n}{d\varphi^n} T_a(\varphi). \quad (22)$$

Рассмотрим способы аппроксимации  $\bar{A}_1^{-1}(s) - 1$  и  $\bar{A}_2^{-1}(s) - 1$  рядами вида

(21). Как видно из рис. 7, хорошая аппроксимация для  $A_1(\varphi)$  получается, если взять  $b_2 = 5/s_0^2$ ,  $b_1 = b_3 = b_4 = \dots = 0$  или  $b_2 = 4/s_0^2$ ,  $b_1 = b_3 = b_4 = \dots = 0$ . Для выбранных значений  $b_2$ , согласно (22),

$$T(\varphi) \simeq T_a(\varphi) - \frac{5}{(2\pi)^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} T_a(\varphi); \quad (23)$$

$$T(\varphi) \simeq T_a(\varphi) - \frac{1}{\pi^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} T_a(\varphi). \quad (24)$$

Для  $A_2(\varphi)$  хорошая аппроксимация получается, как видно из рис. 8, если взять  $b_2 = 20/s_0^2$ ,  $b_1 = b_3 = b_4 = \dots = 0$  или  $b_2 = 20/s_0^2$ ,  $b_4 = 200/s_0^4$ ,  $b_1 = b_3 = b_5 = \dots = 0$ . Для этих значений из (22) следует, что

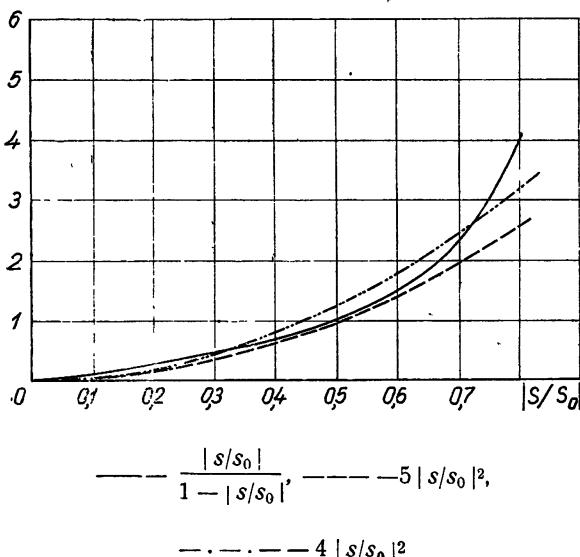


Рис. 7.

$$T(\varphi) \simeq T_a(\varphi) - \frac{5}{\pi^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} T_a(\varphi); \quad (25)$$

$$\begin{aligned} T(\varphi) \simeq T_a(\varphi) - \frac{5}{\pi^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} T_a(\varphi) + \\ + \frac{25}{2\pi^4} \frac{d^4}{d\varphi^4} T_a(\varphi). \end{aligned} \quad (26)$$

Конечно, и здесь выбранные способы аппроксимации  $\bar{A}_1^{-1}(s) - 1$  и  $\bar{A}_2^{-1}(s) - 1$  не являются единственными возможными.

Полученным результатам (23), (24), (25) и (26) не соответствуют простые графические конструкции. Но, как известно,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} T_a(\varphi) \simeq \\ \simeq \frac{T_a(\varphi+2\alpha) - 2T_a(\varphi+\alpha) + T_a(\varphi)}{\alpha^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Выражение (27) позволяет с любой степенью точности найти  $\frac{d^2}{d\varphi^2} T_a(\varphi)$ ; чем меньше  $\alpha$ , тем точность больше. Так как  $T_a(\varphi)$  является функ-

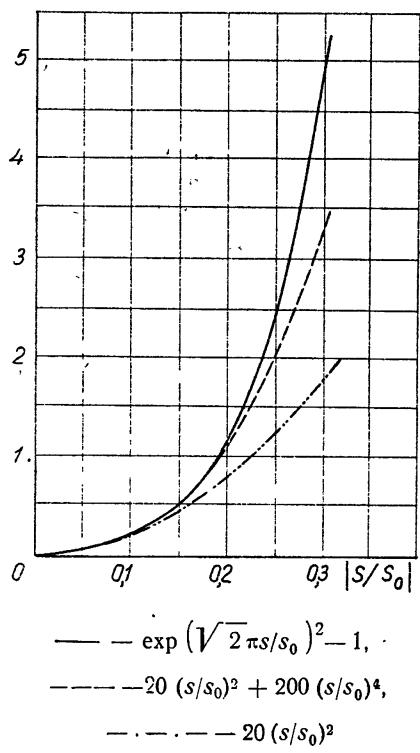


Рис. 8.

цией с ограниченным спектром, то она не может иметь резких выступов и впадин и брать  $\alpha$  чрезмерно малым для обеспечения большей точности не требуется.

Итак, используя (27) и (13), можно и в этом случае искать приближенное решение уравнения (1) аналитически, в частности, с помощью счетной машины.

Рассмотренные в статье приближенные методы решения уравнения (1) не являются единственными. Однако эти методы наиболее просты и дают возможность находить решение уравнения (1) или простыми графическими конструкциями, или аналитически, используя ряд (13), позволяющий рассчитать значения  $T_a(\varphi)$  при разных  $\varphi$ . Последний способ нахождения  $T(\varphi)$  позволяет не только провести вычисление  $T(\varphi)$  на счетных машинах, но и полностью автоматизировать эту работу. Эта возможность основывается на замечательном свойстве ряда Котельникова (13), коэффициентами в который входят значения функции  $T_a(\varphi)$ , взятые через равные промежутки аргумента, т. е.  $T_a(n\tau)$ . Эти значения должны быть нанесены на магнитную ленту или перфокарты, что можно делать автоматически, приспособливая к самописцу, производящему запись  $T_a(\varphi)$ , специальный датчик, дающий импульсы с амплитудой, пропорциональной  $T_a(n\tau)$ , через равные промежутки времени  $\tau$ . Эти импульсы подаются на специальное устройство, которое их расшифровывает и приводит в действие перфоратор. Счетная машина дает значения функции  $T(\varphi)$ .

Поскольку (13) производит фильтрацию  $T_a(\varphi)$  от высоких частот, то полученный вышеописанным образом результат  $T(\varphi)$  представляется надежным в том смысле, что исследование  $T(\varphi)$  с радиотелескопом более высокой разрешающей способности ничего не изменит относительно представлений в  $T(\varphi)$  низких частот, а откроет только новые детали малых размеров, т. е. прибавит к ранее найденному  $T(\varphi)$  более высокие частоты.

Поскольку  $T(\varphi)$ , определенное указанными приближенными методами, остается функцией с ограниченным спектром, то оно полностью определяется своими значениями, взятыми через равные промежутки аргумента  $\tau$ , где  $\tau$  также равны  $1/2 s_0$ , как и у  $T_a(\varphi)$ . Дело в том, что спектральный состав после редукции не изменяется, изменяются лишь те спектральные составляющие, которые представлены в  $T_a(\varphi)$ . Последнее означает, что счетная машина может определить только эти значения функции  $T(\varphi)$ . Далее эти значения можно подать на импульсный генератор, который должен вырабатывать короткие импульсы с амплитудами, пропорциональными  $T(n\tau)$ , которые, в свою очередь, подаются на вход идеального фильтра с граничной частотой пропускания  $2\pi s_0$ ; после фильтра стоит самописец, рисующий на ленту график функции  $T(\varphi)$ . Такая система, позволяющая передать непрерывное сообщение таким же методом, как дискретное сообщение, т. е. отдельными импульсами, известна и применяется в технике связи [1]. В основе этой системы также лежит теорема Котельникова [6]. Таким образом, используя предложенную здесь схему, можно полностью автоматизировать весь трудоемкий процесс редукции (см. рис. 9).

Изложенные в настоящей статье методы применимы и для других антенных диаграмм, не равных  $A_1(\varphi)$  и  $A_2(\varphi)$ . Если нельзя найти простое аналитическое выражение для представления  $A(\varphi)$  и, тем самым, для определения  $\bar{A}(s)$  аналитическим путем, то определение  $\bar{A}(s)$  надо делать известными приближенными методами численно; затем численно найти  $\bar{A}^{-1}(s)-1$  и аппроксимировать найденное  $\bar{A}^{-1}(s)-1$  уже од-

ним из показанных выше способов, т. е. рядом  $\sum_n b_n \sin^n(\pi s a)$ , или  $\sum_n b_n e^{2\pi i s n a}$ , или  $\sum_n b_n s^n$ . Дальнейший ход редукции остается без изменений.

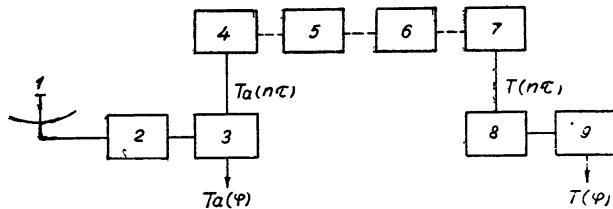


Рис. 9. Блок-схема автоматизации процесса редукции:

1—антenna, 2—приемник, 3—самописец, 4—датчик, приводящий в действие перфоратор, 5—автоматический перфоратор, 6—счетная машина, 7—модулятор и импульсный генератор, вырабатывающий импульсы с амплитудой, пропорциональной  $T(n\pi)$ , 8—идеальный фильтр с верхней границей пропускания  $2\pi s_0$ , 9—самописец.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Раутян, УФН, **66**, 475 (1958).
2. R. N. Bradwell, Austr. J. Phys., **8**, 200 (1955).
3. R. N. Bradwell, J. Opt. Soc. America, **45**, 873 (1955).
4. С. Г. Раутян, ДАН СССР, **109**, 743 (1956).
5. R. N. Bradwell, Austr. J. Phys., **8**, 54 (1955).
6. А. А. Харкевич, Очерки общей теории связи, Гостехиздат, М., 1955.
7. R. N. Bradwell, J. A. Roberts, Austr. J. Phys., **7**, 615 (1954).
8. R. N. Bradwell, Austr. J. Phys., **9**, 297 (1956).
9. А. Балклав, Изв. АН Латв. ССР, № 10, 73 (1961).
10. И. Снедdon, Преобразование Фурье, ИЛ, М., 1955.
11. А. А. Харкевич, Теоретические основы радиосвязи, Гостехиздат, М., 1957.

Астрофизическая лаборатория  
АН Латвийской ССР

Поступила в редакцию  
28 октября 1961 г.

## RESTORATION IN RADIO ASTRONOMY BY APPROXIMATE METHODS

*A. Balklav*

Three approximate methods are considered of excluding the systematic error, produced by a radio telescope in the results of observation. The opportunity of using digital computers for solving the problem of correction is pointed out. A block diagram is given of a device allowing the completest automatization of the restoration process.

## О ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ КООРДИНАТ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ СОПРОВОЖДЕНИЯ РАДИОТЕЛЕСКОПА\*

Г. Г. Басистов

Рассматривается преобразователь координат для системы сопровождения радиотелескопов на цифровых интеграторах. Оценивается сложность вычислительной схемы и влияние части вычислительной схемы, входящей в следующую систему, на устойчивость последней.

Разрешающая способность современных подвижных радиотелескопов постоянно возрастает, в связи с чем увеличивается необходимая точность слежения. Например, ширина диаграммы направленности 22-метрового радиотелескопа ФИАН [1] составляет около  $2'$ ; в этом случае слежение должно производиться с ошибкой, меньшей  $0',2$ . Эта задача сравнительно легко осуществима при параллактической монтировке радиотелескопа, когда необходимо обеспечить равномерное вращение вокруг оси часового угла  $t$  и фиксированное положение или медленное вращение вокруг второй оси—оси склонения  $\delta$ .

При азимутально-вертикальной монтировке, обычно использующейся в крупных радиотелескопах, оказывается необходимым специальное программное устройство, преобразующее исходные координаты  $t$  и  $\delta$  в азимут  $A$  и высоту  $h$ . Для решения задачи преобразования координат до последнего времени применялась аналоговая техника [2-4], не позволявшая решать задачу преобразования с точностью выше  $1' \div 2'$ .

В настоящей статье предлагается использовать интегрирующие дискретные элементы для построения программного устройства, которое смогло бы обеспечить точность системы сопровождения радиотелескопа порядка  $0',1 \div 0',2$  при слежении за „радиозвездами“ и планетами.

Программное устройство должно решать тригонометрические уравнения преобразования из экваториальной системы координат в горизонтальную:

$$\begin{aligned} \sin h &= \cos \varphi \cos \delta \cos t + \sin \varphi \sin \delta; \\ \cos h \sin A &= \cos \delta \sin t; \\ \cos h \cos A &= \sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta \end{aligned} \quad (1)$$

(где  $\varphi$ —географическая широта местонахождения радиотелескопа).

Для образования тригонометрических функций от входных данных  $t$  и  $\delta$  удобно использовать решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка типа  $y'' + \omega^2 y = 0$ —тригонометрическую функцию  $y = C_1 e^{j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t}$ . С целью получения необходимой точности это уравнение должно решаться на цифровых интеграторах, производящих двухкратное интегрирование в замкнутой цепи (например, можно использовать цифровые дифференциальные анализаторы [5]).

\* Доклад на расширенном пленуме Комиссии по радиоастрономии Астросовета АН СССР, М., 1960.

Процесс в такой замкнутой цепи будет управляться импульсами приращениями  $\Delta t$  (или  $\Delta\delta$ ), соответствующими приращению часового угла  $t$  (или  $\delta$ ). Чтобы иметь необходимую точность, регистр у интегратора (см. рис. 1) должен содержать (с учетом ошибок вычислений) 20 разрядов ( $n_y=20$  [5]).

Масштабом хранения регистра  $u$  следует принять масштаб  $M^y = 1$  ( $m_y=0$ ), так как максимальное число в регистре  $u$  будет 1 (максимальные значения синуса и косинуса). Из необходимого условия  $m_y = m_{dy} - n$  [5] определяется коэффициент по выходу  $u$ :  $m_{dy}=20$ . Следовательно, для заполнения регистра  $u$  требуется  $2^{20}$  импульсов  $dy$ . Из условия  $m_{dt} = m_{dR} = m_y$  определяется масштабный коэффициент выхода  $R$ :  $m_{dR}=20$ .

В регистре  $R$  будут записываться интегралы от косинуса или синуса, т. е. числа меньше 1; следовательно, можно принять  $m_R=0$ . Из условия  $m_R = m_{dR} - n$  определяется число разрядов регистра  $R$ :  $n_R=20$ . Для требуемой скорости вычислений необходимо параллельное сложение при переносе содержимого  $u$  в регистр  $R$ . В этом случае регистр  $u$ , представляющий из себя реверсивный счетчик, будет состоять из 20 триггеров и 40 вентилей, обеспечивающих добавление или вычитание поступающего сигнала  $\Delta u$ . Регистр  $R$  будет представлять собой параллельный накопитель (20 триггеров, 20 вентилей переноса, 20 линий задержки); схема, осуществляющая перенос из  $u$  в  $R$ , будет состоять из 20 вентилей, открывающихся при поступлении сигнала  $\Delta t$ . Сигналы  $\Delta t$  всегда положительные. Отрицательные числа  $u$  будут записываться в дополнительном коде. Схема связи выхода регистра  $R$  со входом регистра следующего интегратора определяется способом передачи переполнений (унитарный, бинарный либо тернарный).

Если триггеры выполнить на полупроводниковых (плоскостных) триодах, то триггер сможет считать с частотой  $50 \div 100$  кГц, а 20-разрядный интегратор сможет надежно работать при частоте поступления сигналов  $\Delta t$  около 10 кГц. Для ввода максимального начального значения входной величины  $t_0=2\pi$  или  $\delta_0=2\pi$  ( $2^{20}$  сигналов  $\Delta t$  или  $\Delta\delta$ ) потребуется время  $\tau_{\max}=2^{20} \cdot 10^{-4} \approx 100$  сек, что вполне допустимо. Чтобы вся схема вычисляла с такой же скоростью, необходима параллельная работа интеграторов (одновременная работа всех интеграторов, решающих уравнения).

При сопровождении сигналы  $\Delta t$  должны поступать со значительно меньшей скоростью, соответствующей звездной скорости изменения часового угла  $t$  (поступать они должны от кварцевого генератора во избежание накопления большой ошибки по часовому углу).

Кроме получения синусов и косинусов схема должна осуществлять произведение этих функций. Эта операция возможна на таких же интеграторах [5].

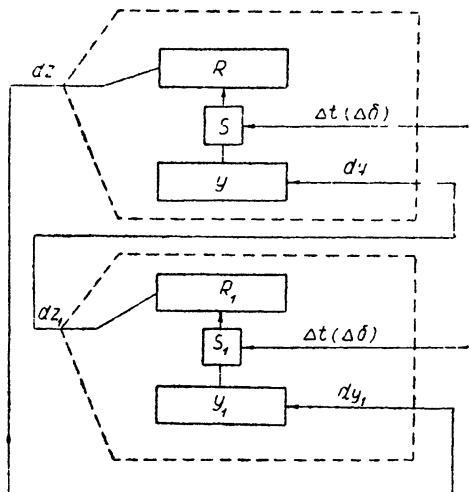


Рис. 1. Схема соединения двух интеграторов для решения уравнения  $y'' + \omega^2 y = 0$ :

$u$ ,  $u_1$ —входные регистры,  $R$ ,  $R_1$ —регистры-накопители,  $S$ ,  $S_1$ —схемы переноса,  $\Delta t$  и  $\Delta\delta$ —сигналы переноса,  $dz$ ,  $dz_1$ —сигналы переполнения (займа) регистра  $R$ ,  $R_1$ .

Схема должна также решать правые и левые части уравнения (1), а получающаяся разность при сравнении их использоваться как сигнал управления для следящего привода. Вся система будет содержать около 20 интеграторов (около 1600 триодов и 1600 диодов), потребляющих мощность около 100 вт.

Входными данными для той части схемы, которая решает левые части уравнений, являются углы  $A$  и  $h$ , снимаемые с сеей радиотелескопа; они должны выдаваться цифровыми датчиками углов с точностью  $17 \pm 18$  разрядов. В настоящее время разработаны фотоэлектрические датчики на 17 разрядов; существуют конструкции датчиков, позволяющие снимать угол с ошибкой в несколько секунд [6].

Для получения сигналов ошибок можно было бы производить сравнение расчетных и действительных углов  $A$  и  $h$ . Но для этого следовало бы решать обратные тригонометрические функции (первое соотношение уравнения (1) дает  $\sin h$ , второе и третье —  $\operatorname{tg} A$ ). При значениях  $A$ , близких к  $\pi/2$ , значения  $\operatorname{tg} A$  близки к бесконечности и схема не сможет работать с требуемой точностью. Кроме того, для образования  $\operatorname{tg} A$  и  $A$  потребовалась бы дополнительная сложная схема.

Из сказанного следует, что часть вычислительной схемы, решающая левые части уравнений (1), оказывается включенной в замкнутую цепь следящего привода, внося в эту цепь запаздывание, которое может, вообще говоря, оказаться недопустимо большим. Оценим это запаздывание. Интеграторы, вырабатывающие  $\cos A$  и  $\sin A$ ,  $\cosh h$  и  $\sinh h$ , выдают эти значения с отставанием от входных значений на время одной полной операции сложения, т. е. на время 0,1 мсек, а вся схема, решающая левые части уравнений (1), внесет запаздывание, меньшее 1 мсек (это при параллельной работе интеграторов и параллельном переносе из  $u$  в  $R$  внутри интегратора).

С другой стороны, можно оценить величину допустимого запаздывания для следящего привода. Упрощенная передаточная функция\* разомкнутой следящей системы, состоящей из электронного и электромашинного усилителя и двигателя, представится выражением:

$$J_p(p) = \frac{K_c}{p(1 + pT_d)(1 + pT_y)},$$

где  $K_c$  — добротность системы,  $p$  — параметр преобразования Лапласа,  $T_y$ ,  $T_d$  — постоянные времени усилителя и двигателя.

Постоянная времени  $T_d$  будет определяться двигателем и моментом инерции нагрузки. Поскольку передаточное число редуктора между осью двигателя и осью антенны радиотелескопа выбирается порядка  $10^5$  (для сопровождения звезд и планет) и момент инерции антенны, приведенный к оси двигателя, будет в  $10^{10}$  раз меньше его натуральной величины и значительно меньше момента инерции двигателя, можно считать, что  $T_d$  полностью определяется типом двигателя и заключена в пределах  $0,1 \div 0,25$  сек. Например, для двигателей мощностью от 0,37 до 7 квт, применяющихся для систем сопровождения радиотелескопов,  $T_d \sim 0,11 \div 0,23$  сек.

Постоянная времени  $T_y$  имеет величину порядка 0,025 сек. Если ограничиться ошибкой следящего привода по скорости и ускорению и пренебречь ошибками по более высоким производным от отрабатываемой координаты  $\Theta$  (азимут или высота), то получим следующее выражение для ошибки:

\* В упрощенной передаточной функции пренебрегается постоянной времени электронного усилителя ввиду того, что она значительно меньше постоянной времени двигателя и электромашинного усилителя и существенно не влияет на устойчивость и качество регулирования следящей системы.

$$\Delta\Theta = \frac{1}{K_c} [\dot{\Theta} + (T_x + T_y) \ddot{\Theta}].$$

Значения скоростей и ускорений по азимуту в области зенита становятся очень большими и значительно превосходят скорости и ускорения по высоте. Поэтому рассмотрим случай азимутального сопровождения. Если ограничиться зоной, недоступной для сопровождения около зенита в пределах  $\pm 2^\circ$  по часовому углу и склонению, то максимальные скорости и ускорения даже для южных широт, где они будут иметь наибольшие значения, согласно уравнению (1), будут иметь значения 220 угловых сек в сек времени и  $A=0,5$  угл. сек·сек $^{-2}$ .

Если допустить ошибку следящего привода  $2'' \div 3''$  (это—часть всей ошибки системы сопровождения), то для осуществления такой точности следящий привод должен иметь добротность 100 сек $^{-1}$ .

Расчет такого следящего привода методом логарифмических амплитудно-частотных характеристик [7] и соответствующий выбор корректирующей обратной связи\* показывают, что в области частоты среза  $\omega_c$  (около 10 гц) можно получить запас по фазе более одного радиана (1,38 рад). Следящий привод будет работать с хорошим переходным процессом при запасе по фазе, равным  $30^\circ$  (0,52 рад). Следовательно, можно допустить, чтобы вычислительная схема вносила запаздывание  $\phi_3$  около 0,8 рад. Передаточная функция этой части вычислительной схемы (которая входит в замкнутую цепь следящего привода и вносит в него запаздывание) выражается функцией  $ke^{\tau_3 \omega}$  ( $k$  — передаточный коэффициент,  $\tau_3$  — время запаздывания). Допустимое время запаздывания  $\tau_3 = \phi_3 / \omega_c \approx 0,08$  сек более чем на порядок превосходит запаздывание, которое вносит вычислительная схема на параллельных интеграторах.

Таким образом, предлагаемый преобразователь координат для радиотелескопов на цифровых интеграторах позволит получить высокую точность преобразования. При этом быстрое изменение входных начальных условий позволит легко менять программы наблюдений за источниками радиоизлучения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Саломонович, Радиотехника и электроника, 4, 2092 (1959).
2. Т. Педерсани, Вестник информации, № 1 (237), 4 (1957).
3. G. Westerhout, Bull. Astr. Neth., 14, 215 (1958).
4. Electron. Engin., 30, 466 (1958).
5. Сб. Цифровые дифференциальные анализаторы, ИЛ, М., 1959.
6. А. Д. Таланцев, Автоматика и телемеханика, 20, 361 (1959).
7. Сб. Корректирующие цепи в автоматике, ИЛ, М., 1954.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР.

Поступила в редакцию  
9 ноября 1961 г.

#### ON THE POSSIBILITY OF CONSTRUCTION OF COORDINATES TRANSFORMER OF HIGHER ACCURACY FOR A TRACKING SYSTEM OF RADIO TELESCOPE

G. G. Basistov

The coordinates transformer is considered for the tracking system of radio telescopes based on digital integrator. The complexity of computing circuit is estimated as well as the influence of the part of the circuit involved in the control system on the stability of the latter.

\* Расчет по этому методу дает параметры корректирующей обратной связи, которая для указанной передаточной функции реализуется в виде тахометрии (на валу двигателя) и включенной последовательно с ней дифференцирующей RC-цепочкой.

## О ПЕРЕХОДЕ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

B. B. Железняков и E. Я. Злотник

Рассмотрен переход плазменных волн в электромагнитное излучение в условиях неподвижной изотропной плоско-слоистой плазмы. Вычислена эффективность трансформации волн и выяснены пределы применимости решения, полученного методом возмущений.

Как известно [1-4], при интерпретации спорадического радиоизлучения Солнца и Юпитера важную роль играет вопрос о возможности и условиях трансформации одного типа нормальных волн в другой, в частности, плазменных волн в электромагнитное излучение, выходящее за пределы плазмы. В однородной изотропной и неподвижной плазме переход плазменных волн в электромагнитное излучение возможен только за счет рассеяния продольных волн на флюктуациях электронной концентрации [2,3]. Без учета флюктуаций продольные плазменные и поперечные электромагнитные волны в такой среде являются нормальными волнами, что исключает возможность их взаимной трансформации. В приближении геометрической оптики нормальные волны в неоднородной плазме также остаются независимыми. Взаимодействие и трансформация нормальных волн при этом появляются лишь в более высоком приближении; этот вопрос рассмотрен недавно в статье Тидмана [5]. Более сильного взаимодействия и взаимного перехода одного типа нормальных волн в другой следует ожидать в области, где одновременно нарушается геометрико-оптическое приближение для обеих нормальных волн\*. В этом случае переход плазменных волн в электромагнитные обсуждался в работах одного из авторов [6] и Филда [7]; в первой из них рассматривалась трансформация волн в среде с плавно меняющимися свойствами, а во второй—взаимодействие на резкой границе плазма—вакуум. Однако в работе [6] были приведены лишь результаты решения без исследования пределов их применимости.

В настоящей статье подробно рассмотрен переход плазменных волн в электромагнитное излучение в изотропной плоско-слоистой плазме, вычислена эффективность трансформации и выяснены пределы применимости решения.

### 1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛОСКО-СЛОИСТОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Задача о трансформации плазменных волн в электромагнитные для случая, когда постоянное магнитное поле  $H_0 = 0$  и агенты, обеспечивающие нестабильность плазмы, отсутствуют, может быть поставлена

\* Необходимо подчеркнуть, что отмеченное «взаимодействие нормальных волн» не связано с нарушением принципа суперпозиции для полей  $E$  и  $H$  в плазме, т. е. с нелинейным характером электромагнитных волн; «взаимодействие» вызвано тем, что в некоторых областях неоднородной плазмы не применимо разложение поля на нормальные волны, под которыми здесь понимаются соответствующие геометрико-оптические решения типа плазменных и электромагнитных волн.

следующим образом. Имеется плоско-слоистая плазма, в которой распространяется свободная плазменная волна. Свойства среды зависят лишь от координаты  $z$ ; волновой вектор плазменной волны  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $y, z$ . Следует найти интенсивность выходящей из среды электромагнитной волны, возбужденной плазменной волной\*.

Система исходных уравнений для решения этой задачи в гидродинамическом приближении состоит из уравнений Максвелла и уравнений движения электронов:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (1.1)$$

$$mN\dot{\mathbf{r}} = -\kappa T\nabla N + eN\mathbf{E} - mN\nu_{\text{эфф}}\dot{\mathbf{r}}; \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N\dot{\mathbf{r}}) = 0. \quad (1.2)$$

Здесь  $m$  и  $e$ —масса и заряд электрона,  $N$ —концентрация электронов,  $\nu_{\text{эфф}}$ —эффективное число соударений,  $\mathbf{r}$ —радиус-вектор электрона,  $\kappa$ —постоянная Больцмана.

Линеаризуя уравнения (1.2) и принимая во внимание, что поляризация среды  $\mathbf{P} = eN\mathbf{r} \approx eN_0\mathbf{r}$  ( $N_0$ —равновесная концентрация в плазме), получим, что поля с компонентами  $E_x, H_y, H_z$  и  $H_x, E_y, E_z$  не зависят друг от друга, причем тепловое движение, которое в рассматриваемом приближении учитывается членом  $-\kappa T\nabla N$  в уравнении (1.2), не сказывается на уравнениях, описывающих поле с компонентами  $E_x, H_y, H_z$ . Отыскивая решения для  $H_x, E_y, E_z$  в виде

$$\begin{aligned} H_x &= W(z) \exp(ik_0 n_3 q y + i\omega t); \\ E_y &= V(z) \exp(ik_0 n_3 q y + i\omega t); \\ E_z &= U(z) \exp(ik_0 n_3 q y + i\omega t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

(где  $k_0 = \omega/c$ ,  $q = \sin \varphi$ ,  $\varphi$ —угол между осью  $z$  и волновым вектором плазменной волны  $\mathbf{k}$ ,  $n_3$ —показатель преломления плазменной волны) и считая при этом, что  $n_3 q$  не зависит от  $z$ , можно показать, что  $W$  и  $U$  подчиняются уравнениям:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} - \frac{\partial \epsilon'/\partial z}{\epsilon' - q_0^2} \frac{dW}{dz} + k_0^2 \left( \epsilon' - \frac{q_0^2}{\beta_T^2} \right) W = \beta_T q_0 \frac{d\epsilon'/dz}{\epsilon' - q_0^2} \frac{dU}{dz}; \quad (1.4)$$

$$\beta_T^2 \frac{d^2 U}{dz^2} + k_0^2 (\epsilon' - q_0^2) U = \frac{q_0}{\beta_T} k_0^2 (\beta_T^2 - 1) W, \quad (1.5)$$

а  $V$  выражается через  $W$  и  $U$ . В уравнениях (1.4)–(1.5) через  $\epsilon'$  обозначена величина

$$1 - 4\pi e^2 N / m\omega^2 (1 - is); \quad s = \nu_{\text{эфф}}/\omega, \quad (1.6)$$

а через  $\beta_T^2$  — выражение\*\*

$$\beta_T^2 = \kappa T / mc^2 (1 - is) \approx (V_T/c)^2. \quad (1.7)$$

В полученных уравнениях  $q_0$  представляет собой введенный формально синус угла падения плазменной волны на корону в слое, где концен-

\* Обратная задача о переходе электромагнитной волны в плазменную рассмотривалась Денисовым [8].

\*\* Если положить  $\omega \sim 2\pi \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\nu_{\text{эфф}} \sim 6 \text{ сек}^{-1}$ ,  $T \sim 10^6 \text{ К}$ , то  $s \sim 10^{-8}$  и  $\beta_T \sim 10^{-2}$ .

трация частиц  $N_0 = 0$  и показатель преломления плазменной волны  $n_3 = 1/\beta_T$ . В действительности свободная плазменная волна вследствие затухания Ландау может существовать лишь в слоях, где  $|\epsilon'| \ll 1$ .

Соотношения (1.4)–(1.5) представляют собой систему двух связанных уравнений второго порядка. При нормальном распространении ( $q_0 = 0$ ) уравнения разделяются, причем уравнение (1.5) описывает продольную плазменную волну с показателем преломления  $n_3 = \sqrt{\epsilon'/\beta_T}$ .

Если  $q_0$  отлично от нуля, то однородные уравнения, соответствующие уравнениям (1.4) и (1.5), описывают электромагнитную и плазменную волны, электрические векторы которых расположены в плоскости падения. Как известно [8], приближение геометрической оптики для такой электромагнитной волны нарушается в окрестности точек  $\epsilon' - q_0^2 = 0$  и  $\epsilon' - q_0^2/\beta_T^2 = 0$ . В слое  $\epsilon' - q_0^2/\beta_T^2 \approx 0$  происходит отражение электромагнитной волны, а в точке  $\epsilon' - q_0^2 \approx 0$  волна имеет особенность, проявляющуюся в резком возрастании электрического поля близ этой точки. Поскольку в точке  $\epsilon' - q_0^2 = 0$  нарушается также соответствующее приближение геометрической оптики для плазменной волны, в области  $\epsilon' - q_0^2 \approx 0$  следует ожидать сильного взаимодействия и взаимного перехода одного типа волн в другой. Отмеченное взаимодействие учитывается членами в правой части уравнений (1.4)–(1.5).

Система (1.4)–(1.5) отличается только введением поглощения от уравнений, полученных в [8]. Необходимость учета поглощения связана с расходностью интеграла (2.16) при  $s = 0$ . Комплексный характер  $\epsilon'$ , по существу, позволяет получить правило обхода точек, в которых подынтегральная функция имеет особенность. Аналогичное положение создается, например, при расчете эффекта „умножения“ отраженных сигналов в ионосфере (см. [9], § 79).

Аппроксимируя реальную зависимость  $\epsilon'(z)$  линейной функцией и предполагая для простоты, что поглощение на любом уровне равно поглощению в точке  $z = 0$ , получим, что

$$\epsilon' = -\alpha_0 z - is \quad (s \ll 1). \quad (1.8)$$

(Заметим, что конкретный вид  $\epsilon'$  существенен только в области отражения и взаимодействия волн; там, где выполнена геометрическая оптика, зависимость  $\epsilon'(z)$  должна лишь иметь достаточно плавный характер.)

Используя замену переменного  $\xi = \alpha_0 z + is + q_0^2$ , приведем уравнения (1.4)–(1.5) к виду:

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dW}{d\xi} - \rho^2 \left( \xi + \frac{q_0^2}{\beta_T^2} \right) W = \frac{\beta_T q_0}{\xi} \frac{dU}{d\xi}; \quad (1.9)$$

$$\beta_T^2 \frac{d^2 U}{d\xi^2} - \rho^2 \xi U = -\frac{q_0 \rho^2}{\beta_T} W, \quad (1.10)$$

где учтено, что  $\beta_T^2 \ll 1$ ,  $q_0^2/\beta_T^2 \gg q_0^2$ , и обозначено  $\rho = k_0/\alpha_0$ . Ниже будет предполагаться, что  $\rho \gg 1^*$ .

\* В условиях солнечной короны  $\rho \sim 10^8 \gg 1$  (для  $\omega \sim 2\pi \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$  и  $\alpha_0 \equiv |\text{grad } \epsilon| \sim \sim 10^{10} \text{ см}^{-1}$ ). Значение  $|\text{grad } \epsilon|$  взято для „стационарной“ короны на уровне, где  $\omega_0 = \omega \sim 2\pi \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$  ( $\omega_0$  — лэнгмюровская частота). Если принять во внимание существование неоднородностей в короне, то величина  $|\text{grad } \epsilon|$  может быть увеличена на один-два порядка.

## 2. НАХОЖДЕНИЕ ПОЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, ВЫХОДЯЩЕЙ ИЗ ПЛАЗМЫ

Считая  $q_0$  достаточно малым\*, возьмем в качестве нулевого приближения решения системы (1.9)–(1.10) решение уравнения (1.10) без правой части; последнее, как известно, выражается через функции Эйри  $v$  и  $u$  [10]:

$$U^{(0)} = c_1 v(\xi) + c_2 u(\xi), \quad (2.1)$$

где

$$\xi = (\rho/\beta_T)^{2/3} \xi. \quad (2.2)$$

Из условия  $U^{(0)} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  следует, что  $c_2 = 0$  (так как  $u(\xi)$  неограниченно возрастает, если  $\xi \rightarrow \infty$ ). Постоянную  $c_1$  выберем равной единице, и, следовательно, в нашем случае

$$U^{(0)} = v(\xi) = v[(\rho/\beta_T)^{2/3} \xi]. \quad (2.3)$$

Выбор нулевого решения в виде (2.3) означает, что при этом пре-небрегается магнитными полями, возникающими при распространении плазменной волны в неоднородной среде, т. е. в нулевом приближении принято  $W^{(0)} = 0$ .

С учетом (2.3) уравнение для магнитного поля в первом приближении имеет следующий вид (см. (1.9)):

$$\frac{d^2 W^{(1)}}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dW^{(1)}}{d\xi} - \rho^2 \left( \xi + \frac{q_0^2}{\beta_T^2} \right) W^{(1)} = G(\xi); \quad (2.4)$$

$$G(\xi) = \rho^{2/3} \beta_T^{1/3} q_0 \frac{v'(\xi)}{\xi}. \quad (2.5)$$

Общее решение уравнения (2.4) можно записать в виде:

$$W^{(1)} = W_1 \gamma_1 + W_2 \gamma_2 - W_1 \int_{-1+q_0^2+is}^{\xi} \frac{W_2 G}{\Delta} d\xi + W_2 \int_{\infty+is}^{\xi} \frac{W_1 G}{\Delta} d\xi, \quad (2.6)$$

где  $W_1$  и  $W_2$ —фундаментальная система функций уравнения (2.4);  $\Delta$ —вронскиан, равный  $W_1 W'_2 - W_2 W'_1$ ;  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ —постоянные, определяемые из условий, чтобы при  $z \rightarrow \infty$  ( $\xi \rightarrow \infty$ )  $W^{(1)} \rightarrow 0$ , а в начале слоя (при  $\xi \sim -1$ ) электромагнитная волна распространялась в сторону выхода из плазмы (в сторону больших значений  $\xi$ ).

1. В качестве фундаментальной системы  $W_1$ ,  $W_2$  возьмем сначала производные от функций Эйри

$$W_1 = v'(\eta); \quad W_2 = u'(\eta); \quad (2.7)$$

$$\eta = \rho^{2/3} \xi,$$

вронскиан которых [10]

$$\Delta = \rho^{4/3} \xi (v u' - u v') = \rho^{4/3} \xi. \quad (2.8)$$

Функции (2.7) являются решениями уравнения (2.4) без правой части при  $(\rho^2 q_0^2 / \beta_T^2) W^{(1)} = 0$ .

Легко видеть, что пренебрежение этим членом в (2.4) возможно лишь в том случае, если расстояние между точкой  $\xi = 0$ , где (2.4) имеет

\* Необходимые условия применимости метода последовательных приближений получены в разделе 4.

особенность, и точкой  $\xi = -q_0^2/\beta_T^2$ , где отражается электромагнитная волна, достаточно мало по сравнению с характерными размерами, на которых существенно изменяются функции (2.3) и (2.7) в этой области:

$$q_0^2/\beta_T^2 \ll \beta_T^{2/3}/\rho^{2/3}; \quad q_0^2/\beta_T^2 \ll 1/\rho^{2/3}. \quad (2.9)$$

При  $\beta_T^2 \ll 1$  определяющую роль играет, очевидно, первое неравенство.

Для дальнейшего удобно представить решение (2.6) в виде суммы двух слагаемых:

$$W^{(1)} = \tilde{W} + \tilde{\tilde{W}},$$

где

$$\tilde{W} = W_1 \gamma_1 + W_2 \gamma_2 + W_2 \int_{\infty+is}^{-1+q_0^2+is} \frac{W_1 G}{\Delta} d\xi; \quad (2.10)$$

$$\tilde{\tilde{W}} = -W_1 \int_{-1+q_0^2+is}^{\xi} \frac{W_2 G}{\Delta} d\xi + W_2 \int_{-1+q_0^2+is}^{\xi} \frac{W_1 G}{\Delta} d\xi. \quad (2.11)$$

Из поведения компонент  $\tilde{W}$  и  $\tilde{\tilde{W}}$  при больших  $|\xi|$  можно заключить, что  $\tilde{W}$  описывает магнитное поле электромагнитной волны, в то время как  $\tilde{\tilde{W}}$ , не имеющее пространственной периодичности „поперечной“ волн, представляет собою поле плазменной волны в неоднородной среде. Поскольку  $W_1$  и  $W_2$  (2.7) медленно меняются по сравнению с функцией  $G$ , быстро осцилирующей при  $\xi < 0$  и быстро убывающей при  $\xi > 0$  (это различие легко усмотреть, сопоставляя аргументы функций (2.3)  $\zeta = (\rho/\beta_T)^{2/3} \xi$  и (2.7)  $\eta = \rho^{2/3} \xi$ ), то, вынося в (2.11)  $W_1$ ,  $W_2$  из-под знака интеграла со значением на верхнем пределе (это возможно при  $-\zeta \gg 1$ ), убеждаемся, что в указанной области  $\tilde{\tilde{W}} \approx 0$ .

В (2.10) коэффициент  $\gamma_2$  следует положить равным нулю, так как при  $\eta \rightarrow \infty$  ( $\xi \rightarrow \infty$ ) функция  $W_2 \rightarrow \infty$ . (Тогда  $W^{(1)} = \tilde{W} + \tilde{\tilde{W}} \rightarrow 0$ , когда  $\xi \rightarrow \infty$ .) Фактор  $\gamma_1$  выбирается из условия, чтобы  $\tilde{W}$  при  $-\eta \gg 1$  представляла волну, распространяющуюся в сторону отрицательных  $\eta$  и  $\xi$ :

$$\gamma_1 = e^{i\pi/2} \int_{\infty+is}^{-1+q_0^2+is} \frac{W_1 G}{\Delta} d\xi. \quad (2.12)$$

Последнее можно получить, используя асимптотическое представление функций  $W_1$ ,  $W_2$  [10]: при  $\eta \gg 1$

$$W_1 = -\frac{1}{2} |\eta|^{1/4} e^{-\frac{2}{3} \eta^{3/2}}; \quad W_2 = \eta^{1/4} e^{\frac{2}{3} \eta^{3/2}}, \quad (2.13)$$

а при  $-\eta \gg 1$

$$W_1 = -|\eta|^{1/4} \cos \left( \frac{2}{3} |\eta|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right); \quad (2.14)$$

$$W_2 = |\eta|^{1/4} \sin \left( \frac{2}{3} |\eta|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Принимая во внимание (2.12) и соотношение  $\gamma_2 = 0$ , получаем:

$$\tilde{W} = (iW_1 + W_2) \int_{-\infty+is}^{-1+q_0^2+is} \frac{W_1 G}{\Delta} d\xi \simeq i |\eta|^{1/4} e^{-i \frac{2}{3} |\eta|^{3/2} - i \frac{\pi}{2}} \int_{\infty+is}^{-\infty+is} \frac{W_1 G}{\Delta} d\xi.$$

Последнее соотношение справедливо в области  $-\eta \gg 1$ .

Тогда  $x$ -компоненты магнитного поля электромагнитной волны, выходящей из области взаимодействия в вакуум, равна

$$H_x = \tilde{W} e^{ik_0 q_0 \beta_T^{-1} y + i\omega t},$$

где

$$\tilde{W} \simeq |\eta|^{1/4} e^{-i \frac{2}{3} |\eta|^{3/2}} \int_{-\infty+is}^{-\infty+is} \frac{W_1 G}{\Delta} d\xi \equiv |\eta|^{1/4} e^{-i \frac{2}{3} |\eta|^{3/2}} L; \quad (2.15)$$

через  $L$  здесь обозначен интеграл, который берется в плоскости  $\xi$  по прямой, параллельной действительной оси и проходящей на расстоянии  $is$  от нее.

Решение поставленной задачи сводится к вычислению интеграла  $L$  в (2.15).

$$L = \rho^{-2/3} \beta_T^{1/3} q_0 \int_{-\infty+is}^{-\infty+i\sigma} \frac{v'(\eta) v'(\zeta)}{\zeta^2} d\xi. \quad (2.16)$$

Функция  $v'(\eta)$  медленно меняется по сравнению с функцией  $v'(\zeta)$ , которая быстро осциллирует в области  $\zeta < 0$  и быстро (экспоненциально) убывает при  $\zeta > 0$ . Поэтому  $v'(\eta)$  можно вынести из-под знака интеграла со значением в точке  $\xi = is$ . Проводя в интеграле замену переменной  $\zeta = (\rho/\beta_T)^{2/3} \xi$ , получаем:

$$L = \beta_T^{-1/3} q_0 v'[\rho^{2/3} is] \int_{\infty+i\sigma}^{-\infty+i\sigma} \frac{v'(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta, \quad (2.17)$$

где  $\sigma = (\rho/\beta_T)^{2/3} s$ . Интегрируя по частям и устремляя в (2.13)  $\sigma \rightarrow 0$ , находим величину  $L$ :

$$L = \beta_T^{-1/3} q_0 v'(0) \int_{-\infty}^{-\infty} v(\zeta) d\zeta = -\sqrt{\pi} \beta_T^{-1/3} q_0 v'(0) \quad (2.18)$$

и величину магнитного поля электромагнитной волны (при  $-\eta \gg 1$ ):

$$H_x = -\sqrt{\pi} \beta_T^{-1/3} q_0 v'(0) |\eta|^{1/4} e^{-i \frac{2}{3} |\eta|^{3/2} + ik_0 q_0 \beta_T^{-1} y + i\omega t} \quad (2.19)$$

$$(\eta = \rho^{2/3} \xi).$$

2. В случае достаточно больших углов  $q_0$ , когда нарушаются неравенства (2.9), для отыскания поля  $H_x$  электромагнитной волны в качестве фундаментальной системы уравнения (2.4) следует взять функции  $W_1$  и  $W_2$ , которые являются решениями (2.4) без правой части при любых  $S_0$  (в отличие от функций (2.7)). Однако отыскание подобных

решений во всей области значений  $\xi$  представляется весьма затруднительным.

Согласно [8], при достаточно больших значениях  $|\xi|$ , когда влияние особенности в уравнении (2.4), выраженной членом  $-(1/\xi) dW/d\xi$ , станет несущественным, линейно независимые решения могут быть выражены через функции Ганкеля порядка 1/3:

$$W_1 = \sqrt{\xi} \frac{S'}{S} H_{1/3}^{(1)}(iS) e^{S_0 - i\pi/3}; \quad W_2 = \sqrt{\xi} \frac{S'}{S} H_{1/3}^{(2)}(iS) e^{-S_0 + i\pi/3};$$

$$\Delta = -\frac{4i}{\pi} \xi; \quad (2.20)$$

$$S = \frac{2}{3} \rho \left( \xi + \frac{q_0^2}{\beta_T^2} \right)^{3/2}; \quad S_0 = \frac{2}{3} \rho \frac{q_0^3}{\beta_T^3}; \quad S' = \frac{dS}{d\xi}.$$

Для произвольных значений параметра  $S_0 \neq 0$  вид функций  $W_{1,2}$  известен также в окрестности точки  $\xi = 0$ , для которой выполнено неравенство

$$|\xi| \ll q_0^2/\beta_T^2. \quad (2.21)$$

В окрестности (2.21) общее решение  $W_1, W_2$  определяется соотношениями:

$$W_{1,2} = \varepsilon \xi e^{b\xi} S^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(iS) H_1^{(1,2)}(ib\xi);$$

$$b = i \frac{\rho q_0}{\beta_T} \frac{H_{-2/3}^{(1)}(iS_0)}{H_{1/3}^{(1)}(iS_0)}; \quad \varepsilon = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} S_0^{1/6} e^{S_0 - i\pi/3}. \quad (2.22)$$

Вронскиан системы функций (2.22)

$$\Delta = -\frac{4i}{\pi} \varepsilon^2 S^{2/3} [H_{1/3}^{(1)}(iS)]^2 e^{2b\xi} \xi. \quad (2.23)$$

Функции  $W_{1,2}$  (2.22) и  $\Delta/\xi$  (2.23) медленно меняются по сравнению с (2.3), если коэффициенты при  $\xi$  в аргументах экспонент и функций Ганкеля малы по сравнению с соответствующими коэффициентами в функциях Эйри (2.3), т. е.

$$\beta_T^{2/3} \ll 1; \quad |b| \ll \rho^{2/3}/\beta_T^{2/3}. \quad (2.24)$$

Поскольку  $|b|$  — порядка  $\rho q_0/\beta_T$  при  $S_0 \geq 1$  и порядка  $\rho^{2/3}$  при  $S_0 \ll 1$ , второе неравенство можно записать в следующем виде:

$$\beta_T^{2/3} \ll 1 \quad (S_0 \ll 1);$$

$$S_0^{1/3} \beta_T^{2/3} \ll 1 \quad (S_0 \geq 1).$$

Таким образом,  $W_{1,2}$  и  $\Delta/\xi$  медленно меняются по сравнению с  $v(\zeta)$  и  $u(\zeta)$  при всех  $S_0$ , удовлетворяющих условию:

$$S_0^{1/3} \ll \beta_T^{-2/3}. \quad (2.25)$$

Считая это неравенство выполненным, подставим (2.22) в (2.10) и (2.11). Вынося  $W_{1,2}$  и  $\Delta/\xi$  из-под знаков интеграла со значением на верхнем пределе для (2.11) в области  $-\xi \gg 1$  и со значением в точке  $\xi = 0$  для (2.10), получаем:

$$\tilde{W} \simeq 0 \quad (\text{при } -\zeta \gg 1);$$

$$\tilde{W} = W_1 \gamma_1 + W_2 \gamma_2 + W_2 \left( \frac{W_1 \xi}{\Delta} \right)_{\xi=0} \int_{-\infty+is}^{\infty+is} \frac{G}{\xi} d\xi. \quad (2.26)$$

Для последней операции необходимо, чтобы в области  $|\zeta| \lesssim 1$ , дающей основной вклад в интеграл (2.26), функция  $W_1$  определялась соотношениями (2.22); это имеет место, если  $|\xi| \ll q_0^2/\beta_T^2$ . Сопоставляя указанные неравенства, заключаем, что формула (2.26) применима при условии

$$\frac{\beta_T^{2/3}}{\rho^{2/3}} \ll \frac{q_0^2}{\beta_T^2} \quad \text{или} \quad S_0^{2/3} \gg \beta_T^{2/3}, \quad (2.27)$$

обратном первому из неравенств (2.9).

Из (2.22), (2.23) следует, что, когда  $\xi = 0$ ,

$$\frac{W_1 \xi}{\Delta} = \frac{1}{2ib \mathcal{E} S_0^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(iS_0)}, \quad (2.28)$$

а из (2.20), что при  $|S| \gg 1$

$$W_1 = \sqrt{\frac{2\xi}{\pi S'}} e^{-S+S_0-i\pi}; \quad W_2 = \sqrt{\frac{2\xi}{\pi S'}} e^{S-S_0+i\pi/2}. \quad (2.29)$$

Поскольку функция  $W_2$  неограниченно нарастает при  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $S \rightarrow \infty$ , для обращения  $\tilde{W}^{(1)}$  в нуль на бесконечности следует положить в (2.26)  $\gamma_2 = 0$ . При отрицательных значениях  $\xi$ , удовлетворяющих условию  $|\xi| \gg q_0^2/\beta_T^2$ , параметр

$$S = \frac{2}{3} \rho \xi^{3/2} = -i \frac{2}{3} \rho |\xi|^{3/2}, \quad (2.30)$$

и, следовательно,  $W_2$  представляет собой волну, бегущую в сторону отрицательных  $\xi$  (в сторону выхода из плазмы),  $W_1$  — в сторону положительных  $\xi$ . Поэтому в (2.26)  $\gamma_1$  также равно нулю. Тогда

$$\tilde{W} = W_2 K / 2ib \mathcal{E} S_0^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(iS_0), \quad (2.31)$$

где

$$K = \int_{-\infty+is}^{\infty+is} \frac{G}{\xi} d\xi = \rho^{2/3} \beta_T^{1/3} q_0 \int_{-\infty+is}^{\infty+is} \frac{v'(\zeta)}{\xi^2} d\xi = -\rho^{4/3} \beta_T^{-1/3} q_0 \sqrt{-\pi}. \quad (2.32)$$

Из (2.29) — (2.32) следует, что амплитуда электромагнитной волны, выходящей из области взаимодействия, равна (в области применимости геометрической оптики):

$$H_{0 \text{ эл}} = |\tilde{W}| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho^{-1/6} \beta_T^{2/3} e^{-2S_0} |\xi|^{1/4}}{S_0^{1/2} H_{-2/3}^{(1)}(iS_0)}. \quad (2.33)$$

### 3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПЕРЕХОДА ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Средняя плотность потока энергии в электромагнитной волне, имеющей амплитуду магнитного поля  $H_{0\text{ эл}}$ ,

$$\bar{S}_{\text{эл}} = \frac{c}{8\pi n_{1,2}} H_{0\text{ эл}}^2,$$

где  $n_{1,2}$  — показатель преломления, равный  $\sqrt{\epsilon} \approx \sqrt{-\xi}$ .

Согласно (2.19) и (2.33),  $\bar{S}_{\text{эл}}$  для разных  $q_0$  определяется следующими соотношениями: при  $S_0^{2/3} \ll \beta_T^{2/3}$ \*

$$\bar{S}_{\text{эл}} = \frac{c}{8\pi} \pi \rho^{1/3} \beta_T^{-2/3} q_0^2 [v'(0)]^2, \quad (3.1)$$

а в области, где  $S_0^{2/3} \gg \beta_T^{2/3}$ , но  $S_0^{1/3} \ll \beta_T^{-2/3}$ ,

$$\bar{S}_{\text{эл}} = \frac{c}{8\pi} \frac{\rho^{-1/3} \beta_T^{4/3} e^{-4S_0}}{\pi S_0 [H_{-2/3}^{(1)}(iS_0)]^2}. \quad (3.2)$$

Вместе с тем, можно показать, что для плазменной волны в квазигидродинамическом приближении средняя плотность энергии

$$\bar{\rho}_{\text{пл}} = \frac{E_{0\text{ пл}}^2}{8\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \approx \frac{E_{0\text{ пл}}^2}{8\pi}$$

(последнее равенство, справедливое при  $k \rightarrow 0$ , т. е. при  $\omega \approx \omega_0$ , очевидно). Поскольку плотность потока энергии в волне связана с плотностью энергии соотношением

$$\bar{S} = \bar{\rho} V_{\text{рп}} = \bar{\rho} \frac{d\omega}{dk},$$

для плазменной волны получаем ( $\omega^2 = \omega_0^2 + V_T^2 k^2$ ):

$$\bar{S}_{\text{пл}} = \frac{E_{0\text{ пл}}^2}{8\pi} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{V_T^2 k}{\omega} \approx \frac{c n_3}{8\pi} \beta_T^2 E_{0\text{ пл}}^2 = \frac{c \sqrt{\epsilon}}{8\pi} \beta_T E_{0\text{ пл}}^2. \quad (3.3)$$

В области  $|\zeta| \gg 1$ , где имеет место приближение геометрической оптики для плазменной волны

$$E_{z\text{ пл}} = v(\zeta) e^{i \hbar_0 q_0 \beta_T^{-1} y + i \omega t}, \quad (3.4)$$

функция Эйри  $v(\zeta)$  может быть представлена в виде [10]:

$$v(\zeta) = \frac{1}{|\zeta|^{1/4}} \sin \left( \frac{2}{3} |\zeta|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{i}{2 |\zeta|^{1/4}} e^{-i \frac{2}{3} |\zeta|^{3/2} - i \frac{\pi}{4}} - \frac{i}{2 |\zeta|^{1/4}} e^{i \frac{2}{3} |\zeta|^{3/2} + i \frac{\pi}{4}}. \quad (3.5)$$

\* При переходе от (2.19) к (3.1) учтено, что  $q_0 \ll 1$  (волна распространяется почти по нормали к среде).

Из (3.4)–(3.5) ясно, что амплитуда  $z$ -компоненты плазменной волны, падающей на слой  $\epsilon \approx 0$ , равна

$$E_{0 \text{ пл}} = \frac{1}{2|\zeta|^{1/4}} \approx \frac{1}{2\epsilon^{1/4}} \rho^{-1/6} \beta_T^{1/6}, \quad (3.6)$$

и, так как  $y$ -компонента при  $q_0 \ll 1$  мала по сравнению с  $z$ -компонентой, поток энергии в рассматриваемой волне определяется соотношением:

$$\bar{S}_{\text{пл}} \approx \frac{c}{8\pi} \frac{1}{4} \rho^{-1/3} \beta_T^{4/3}. \quad (3.7)$$

Согласно (3.1), (3.7), в случае, когда выполнены неравенства (2.9) (т. е. при условии  $S_0^{2/3} \ll \beta_T^{2/3}$ ), эффективность трансформации плазменной волны в электромагнитное излучение, определяемая как отношение потока энергии в электромагнитной волне, выходящей из области  $\epsilon \approx 0$  в вакуум к потоку энергии в плазменной волне, падающей на область взаимодействия  $\epsilon \approx 0$ , есть

$$Q \approx 4\pi [v'(0)]^2 \rho^{2/3} \frac{q_0^2}{\beta_T^2} = 4\pi [v'(0)]^2 \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} S_0^{2/3},$$

где  $v'(0) = -0,46$ . Тогда  $4\pi [v'(0)]^2 (3/2)^{2/3} \approx 3,44$  и, следовательно,

$$Q \approx 3,44 S_0^{2/3}. \quad (3.8)$$

В случае же, когда выполнены неравенства (2.25) и (2.27) ( $S_0^{1/3} \ll \beta^{-2/3}$ ;  $S_0^{2/3} \gg \beta^{2/3}$ ), эффективность трансформации

$$Q = \frac{4}{\pi} \frac{e^{-4S_0}}{S_0 [H_{-2/3}^{(1)}(iS_0)]^2}. \quad (3.9)$$

При этом в частных случаях, когда  $S_0 \ll 1$ ,  $S_0 \approx 1$  и  $S_0 \gg 1$ , величина  $[H_{-2/3}^{(1)}(iS_0)]^2$  соответственно равна

$$\left(\frac{2}{\pi S_0}\right)^{4/3} \frac{\Gamma^2(2/3)}{\pi^2}; \quad \approx 0,31^2; \quad \frac{2}{\pi S_0} e^{-2S_0}$$

и эффективность  $Q$  определяется следующими соотношениями\*: при  $S_0 \ll 1$

$$Q = \frac{2\pi^2}{\Gamma^2(2/3)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/3} S_0^{1/3} e^{-4S_0}; \quad (3.10)$$

при  $S_0 \approx 1$

$$Q = \frac{4}{\pi 0,31^2} e^{-4} \approx 0,24; \quad (3.11)$$

при  $S_0 \gg 1$

$$Q = 2e^{-2S_0}. \quad (3.12)$$

Из формул (3.8), (3.10)–(3.12) следует, что максимальное взаимодействие происходит при  $S_0 \sim 1$ , когда расстояние между точками отражения электромагнитной и плазменной волн—порядка длины электромагнитной волны в области отражения.

\* В [6] введено несколько иное определение для эффективности трансформации. Заметим также, что в статье [6] из соотношений (7)–(9) для коэффициента трансформации следует исключить ошибочно указанный численный коэффициент  $2^{11}/3^7 = 0,94$ .

Если это расстояние много больше длины волны ( $S_0 \gg 1$ ), то коэффициент трансформации уменьшается, так как электромагнитная волна, выйдя из области взаимодействия ( $\epsilon - q_0^2 = 0$ ), испытывает сильное затухание в области, где  $\epsilon - q_0^2/\beta_T^2 < 0$ . Если же  $S_0 \rightarrow 0$ ,  $q_0 \rightarrow 0$ , то интенсивность электромагнитной волны стремится к нулю, так как в предельном случае нормального падения взаимодействие отсутствует.

#### 4. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТРАНСФОРМАЦИИ

Выражения для  $Q$  (3.9) и (3.10)–(3.12) справедливы в том случае, если выполнены неравенства (2.25) и (2.27). Кроме того, проведенное рассмотрение методом возмущений остается корректным лишь в том случае, если нулевое приближение в виде стоячей волны (2.3) с достаточной точностью описывает электрическое поле в плазме. Последнее заведомо не имеет места в том случае, когда поток трансформированной электромагнитной волны сравним по величине с потоком падающей на слой  $\epsilon \approx 0$  плазменной волны.

Для того, чтобы более строго выяснить пределы применимости нашего решения, необходимо вычислить следующее приближение  $U^{(1)}$  для функции  $U$  и сравнить его с нулевым.

Функция  $U^{(1)}$  есть решение уравнения (1.10) с правой частью  $-(q_0\rho^2/\beta_T) W^{(1)}$ , где  $W^{(1)}$  выражается функцией (2.31) в области геометрической оптики и соотношением

$$W^{(1)} = -W_1 \int_{\tilde{\xi}+is}^{\xi} \frac{W_2 G}{\Delta} d\xi + W_2 \int_{\tilde{\xi}+is}^{\xi} \frac{W_1 G}{\Delta} d\xi \quad (4.1)$$

в области взаимодействия. В (4.1) функции  $W_1$  и  $W_2$  определяются формулами (2.22);  $\tilde{\xi} \sim -q_0^2/\beta_T^2$  — условная граница областей применимости решений (2.20) и (2.22) при отрицательных  $\xi$ ;  $\tilde{\xi} \sim (\beta_T/\rho)^{2/3}$  — точка в области положительных  $\xi$ , начиная с которой вкладом подынтегральных функций в интеграл можно пренебречь. Учитывая соотношения (2.25) и (2.27), приводим  $W^{(1)}$  (4.1) к виду:

$$W^{(1)} = -\frac{\rho^{4/3} q_0}{2 b \beta_T^{1/3}} \xi e^{b\xi} [H_1^{(1)}(ib\xi) \varphi_-(\zeta) + H_1^{(2)}(ib\xi) \varphi_+(\zeta)], \quad (4.2)$$

где

$$\varphi_+(\zeta) = \int_{\tilde{\zeta}+is}^{\zeta} \frac{v'(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta; \quad \varphi_-(\zeta) = \int_{\tilde{\zeta}+is}^{\zeta} \frac{v'(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta.$$

Общее решение уравнения (1.10) с правой частью:

$$\begin{aligned} U^{(1)} = C_1 v(\zeta) + C_2 u(\zeta) + \frac{q_0}{\beta_T} \left( \frac{\rho}{\beta_T} \right)^{4/3} \left[ -u(\zeta) \int_{\infty+is}^{\xi} v(\zeta) W^{(1)} d\xi + \right. \\ \left. + v(\zeta) \int_{1+q_0^2+is}^{\xi} u(\zeta) W^{(1)} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Из условия  $U^{(1)} \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$  следует, что постоянная  $C_2 = 0$ . Фактор  $C_1$  выбирается из условия, что в начале слоя волна распространяется в сторону выхода из плазмы (аналогично  $\gamma_1$ ):

$$C_1 = -i \frac{q_0}{\beta_T} \left( \frac{\rho}{\beta_T} \right)^{4/3} \int_{-\infty + i\sigma}^{-1 + q_0^2 + i\sigma} v(\zeta) W^{(1)} d\xi$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= \frac{q_0}{\beta_T} \left( \frac{\rho}{\beta_T} \right)^{4/3} \left[ -iv \int_{-\infty + i\sigma}^{-1 + q_0^2 + i\sigma} v(\zeta) W^{(1)} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - u \int_{-\infty + i\sigma}^{\xi} v(\zeta) W^{(1)} d\xi + v \int_{-1 + q_0^2 + i\sigma}^{\xi} u(\zeta) W^{(1)} d\xi \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Вычисления показывают, что условия, которые обеспечивают неравенство  $|U^{(1)}| \ll |U^{(0)}|$  в области взаимодействия волн, являются достаточными для выполнения того же неравенства в области геометрической оптики. Поэтому для выяснения пределов применимости решения можно вычислить  $U^{(1)}$  только в окрестности точки  $\xi = 0$  и потребовать  $|U^{(1)}| \ll 1$ , так как при  $\zeta$ , близком к нулю, функции  $u$  и  $v$ —порядка единицы.

Подставляя в (4.3) соответствующие выражения для  $W^{(1)}$ , учитывая соотношения (2.25) и (2.27) и проводя операции, аналогичные вычислению интегралов (2.16) и (2.32), получаем:

$$U^{(1)} = \frac{\rho^2 q_0^2}{\pi \beta_T^2 b^2} \left\{ -v(\zeta) M + iu(\zeta) f_v(\zeta) - iv(\zeta) f_u(\zeta) \right\} - v(\zeta) AN, \quad (4.4)$$

где

$$M = \int_{\tilde{\zeta} + i\sigma}^{\tilde{\zeta} + i\sigma} v(\zeta) [\varphi_-(\zeta) - \varphi_+(\zeta)] d\zeta \simeq -\pi; \quad (4.5)$$

$$f_v = \int_{\tilde{\zeta} + i\sigma}^{\xi} v(\zeta) [\varphi_-(\zeta) - \varphi_+(\zeta)] d\zeta \simeq -\sqrt{\pi} \int_{\tilde{\zeta}}^{\xi} v(\zeta) d\zeta; \quad (4.6)$$

$$f_u = \int_{\tilde{\zeta} + i\sigma}^{\xi} u(\zeta) [\varphi_-(\zeta) - \varphi_+(\zeta)] d\zeta \simeq \sqrt{\pi} \int_{\tilde{\zeta}}^{\xi} u(\zeta) d\zeta;$$

$$N = \int_{-\tilde{\zeta}}^{\zeta_1} e^{i\zeta^{3/2}} d\zeta; \quad (4.7)$$

$$A = \frac{3\beta_T^{1/6} e^{-2S_0}}{4 \sqrt{\pi} S_0^{1/6} H_{2/3}^{(1)}(iS_0)} \ll 1. \quad (4.8)$$

Из вида функций Эйри следует, что максимальные значения функций (4.6) не превышают по модулю  $2\sqrt{\pi}$ . В интеграле (4.7) нижний предел —  $\zeta \sim (S_0/\beta_T)^{2/3} \gg 1$ ; верхний предел —  $\zeta_1 = (\rho/\beta_T)^{2/3}(1-q_0^2)$  можно положить равным бесконечности. Так как функция  $e^{i\zeta^{3/2}}$  при больших положительных значениях аргумента быстро осциллирует,  $N$  близко к нулю.

Из всего сказанного следует, что по порядку величины  $U^{(1)}$  не превышает  $|H_{1/3}^{(1)}(iS_0)/H_{-2/3}^{(1)}(iS_0)|^2$ . В частных случаях из этой формулы получается:

$$|U^{(1)}| \sim S_0^{2/3} \text{ при } S_0 \ll 1; \quad (4.9)$$

$$|U^{(1)}| \sim 1 \text{ при } S_0 \sim 1 \text{ и } S_0 \gg 1. \quad (4.10)$$

В случае очень малых  $q_0$ , когда выполняются неравенства (2.9), обратные (2.27), и в качестве фундаментальной системы решений  $W_1$  и  $W_2$  уравнения (2.4) можно взять функции (2.7), простые вычисления, аналогичные только что проделанным, показывают, что в области взаимодействия

$$|U^{(1)}| \sim S_0^{2/3}. \quad (4.11)$$

Таким образом, полученные результаты могут быть корректны только при  $S_0 \ll 1$  ( $Q \ll 1$ ). Для  $Q \sim 1$  в области  $S_0 \sim 1$  величина (3.11) имеет ценность лишь для оценок по порядку величины. Что касается величины (3.12), то член  $e^{-2S_0}$ , очевидно, сохраняется и в точном выражении для коэффициента трансформации, так как он определяет экспоненциальное спадение электромагнитной волны при выходе из области взаимодействия; неточность выражения (3.12) заключена, следовательно, только в коэффициенте перед экспонентой.

В заключение сравним полученные результаты с результатами статьи Тидмана [5], посвященной тому же вопросу. В указанной работе вычисляется эффективность трансформаций плазменных волн в электромагнитное излучение в приближении геометрической оптики при наличии градиента плотности и температуры. Из полученных автором выражений следует, что максимально возможный коэффициент трансформации в случае  $\lambda_{\text{пл}} \ll L$ , где  $L$  — характерный размер неоднородности плотности или температуры, не превышает

$$R_{N,T} \sim \frac{\lambda_{\text{пл}}}{L} \beta_T e^{-2\pi}$$

(здесь  $\beta_T \ll 1$ ). Как и следовало ожидать,  $R_{N,T} \ll 1$ , т. е. значительно меньше того, что дает взаимодействие волн в слое  $\epsilon \approx 0$ .

Имеет смысл сравнить полные потоки энергии электромагнитных волн в том случае, если система плазменных волн, входящих в область взаимодействия, имеет в том и другом случае широкий угловой спектр. Оба механизма обеспечивают эффективную трансформацию только тех плазменных волн, которые распространяются в узком конусе, ось которого направлена по градиенту. Угол этого конуса у Тидмана  $\Theta_{N,T} \sim \beta_T$ , а в нашем случае определяется из условия  $S_0 \sim 1$ , т. е.

$$\Theta \sim \beta_T \left( \frac{\omega}{c} L \right)^{-1/3} \sim \frac{\beta_T^{2/3} \lambda_{\text{пл}}^{1/3}}{L^{1/3}}.$$

Отношение упомянутых потоков энергии, следовательно, равно

$$\frac{R_{N,T} \Theta_{N,T}^2}{\Theta^2 Q} \sim \frac{\Theta_T^{8/3} \lambda_{\text{пл}}^{1/3}}{L^{1/3}},$$

что также значительно меньше единицы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, Усп. физ. наук, **64**, 113 (1958).
2. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, Астрон. ж., **35**, 694 (1958); **36**, 223 (1959).
3. В. Л. Гинзбург и В. В. Железняков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 5—6, 9 (1958); Paris Symposium on Radio Astronomy, Stanford, Univ. Press, 1959.
4. В. В. Железняков, Астрон. ж., **35**, 230 (1958).
5. D. A. Tidman, Phys. Rev., **117**, 366 (1960).
6. В. В. Железняков, Радиотехника и электроника, **1**, 840 (1956).
7. G. B. Field, Astrophys. J., **124**, 555 (1956).
8. Н. Г. Денисов, Диссертация, Горький, ГГУ, 1954.
9. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радио-волн, ГИТТЛ, М., 1953.
10. В. А. Фок, Таблицы функций Эйри, М., 1946.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
27 декабря 1961 г.

### ON THE TRANSFORMATION OF PLASMA WAVES INTO ELECTROMAGNETIC ONES IN NONUNIFORM ISOTROPIC PLASMA

*V. V. Zhelezniakov, E. Ya. Zlotnik*

The plasma waves transformation into electromagnetic radiation is considered in stationary isotropic plane-stratified plasma. The efficiency of wave transformation is calculated and the validity limits of the solution obtained by a perturbation method are estimated.

## О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*Г. И. Светозарова, В. Н. Цытович*

Получено выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле с учетом релятивистских и квантовых эффектов и рассмотрены некоторые вопросы распространения электромагнитных волн.

1. Вопросам распространения электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, магнитотормозного излучения и поглощения плазмы посвящено много работ [1–7]. В рамках линейного приближения электромагнитные свойства плазмы в магнитном поле описываются тензором диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  с учетом частотной и пространственной дисперсии. В последнее время стало ясно, что для решения ряда задач необходимо знание релятивистского квантового выражения для тензора  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ . В качестве примера такого рода задач можно привести задачу о распространении и поглощении электромагнитных волн вблизи резонансных частот, кратных гирочастоте, квантовые флюктуации в плазме, прохождение релятивистских частиц через плазму и др. Необходимо подчеркнуть, что в нерелятивистской плазме ряд эффектов, например, затухание волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю, и характер волн вблизи резонансных частот не могут быть рассмотрены в рамках нерелятивистского приближения [3,7].

В настоящей работе находится тензор  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  в релятивистском и квантовом случае для электронной плазмы (спин 1/2) в магнитном поле и исследуются эффекты, связанные с распространением электромагнитных волн.

В рамках классического приближения электроны в магнитном поле движутся по окружностям, и если их скорости релятивистские, они излучают высокие обертоны гирочастоты. Наличие плазмы меняет характер излучения (см. [5,8]), что связано с тем, что частоты, излучаемые одной частицей, могут хорошо поглощаться другими [5]. Результатирующая картина распространения электромагнитных волн в плазме определяется, в конечном счете, показателем преломления и коэффициентом поглощения, которые могут быть найдены из дисперсионного уравнения с помощью  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ . Квантовые эффекты при излучении релятивистских электронов в ускорителях рассматривались в целом ряде работ.

Проведенный в настоящей работе анализ показывает, что квантовые поправки слабо сказываются на распространение электромагнитных волн в плазме для нерелятивистских максвелловских распределений электронов по скоростям. Исключение составляют узкие области в непосредственной близости к частотам, кратным гирочастоте, где квантовые поправки могут изменять поглощение волн в плазме.

Вопрос о квантовых эффектах в поглощении возникает также в том случае, когда классическое поглощение обращается в нуль. Это имеет место, например, для волны, распространяющейся в нерелятивистской плазме под углом  $\pi/2$  к магнитному полю. Однако, как показывает

исследование, проведенное ниже, квантовые поправки для невырожденного случая появляются лишь при учете релятивистских эффектов. Учет релятивистских эффектов (как было показано сначала Гершманом [3], а впоследствии более подробно рассмотрено Силиным и Рухадзе [7]) в классическом пределе еще при нерелятивистских, но достаточно больших тепловых скоростях электронов может заметно сказаться на поглощении волн. Квантовые поправки возникают лишь к этим релятивистским эффектам и, следовательно, малы. Таким образом, в невырожденном газе специфическое квантовое затухание волн, перпендикулярных магнитному полю, для равновесного распределения электронов по скоростям отсутствует. В вырожденном газе, находящемся в сильном магнитном поле, возможно появление специфического квантового затухания. Этот результат может иметь отношение к распространению волн в полупроводниках, где концентрации электронов относительно невелики (при достаточно низкой температуре).

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что при немаксвелловском распределении электронов по скоростям учет квантовых эффектов, особенно для быстрых частиц, весьма существен и может приводить к ряду интересных эффектов [16].

2. Для определения  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  достаточно найти (см. [9]) поляризационный оператор, который связан с  $\epsilon_{ij}$  следующим соотношением:

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi\Pi_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{\omega^2} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Для нахождения  $\Pi_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  используем представление, в котором переменными являются числа заполнения по состояниям частицы во внешнем магнитном поле. Если  $q$  — полный набор квантовых чисел,  $\Psi_q$  — набор собственных функций дираковской частицы в магнитном поле, то оператор электронно-позитронного поля в пренебрежении взаимодействием частиц будет иметь вид:

$$\hat{\Psi}(x) = \sum_q \hat{a}_q(t) \Psi_q(r), \quad x = \{t, \mathbf{r}\}. \quad (2)$$

Тогда поляризационный оператор  $\Pi_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  является четырехмерным фурье-преобразованием оператора (см. [9, 10])

$$\Pi_{ij}(x_1 - x_2) = ie^2 \text{Sp} \gamma_i G(x_1, x_2) \gamma_j G(x_2, x_1), \quad (3)$$

где  $\gamma_i$  — дираковская матрица, а  $G(x_1, x_2)$  — функция Грина электронно-позитронного поля:

$$G(x_1, x_2) = \text{Tr} [\rho T(\hat{\Psi}(x_1), \hat{\Psi}(x_2))], \quad (4)$$

$\rho$  — матрица плотности,  $T$  — знак  $T$ -произведения; символ  $\text{Tr}$  означает статистическое усреднение ( $\text{Tr} \rho = 1$ ),  $\text{Sp}$  — усреднение по спиновым состояниям.

Надо отметить, что хотя  $G(x_1, x_2)$  при наличии магнитного поля не является трансляционно-инвариантным, поляризационный оператор  $\Pi_{ij}$ , очевидно, является трансляционно-инвариантным (см. [11]) и зависит лишь от разности  $x_1 - x_2$ . Поэтому в (3) можно положить  $x_2 = 0$ :

$$\Pi_{ij}(x) = ie^2 \text{Sp} \{\gamma_i G(x, 0) \gamma_j G(0, x)\}. \quad (5)$$

Для нахождения  $G(x_1, x_2)$  следует (2) подставить в (4).  $T$ -произведение содержит комбинации  $\hat{a}_q \hat{a}_q^+$  и  $\hat{a}_q^+ \hat{a}_q$ , которые после усредне-

ния с матрицей плотности  $\rho$  дают  $1 - n_q$  и  $n_q$ , где  $n_q$  — число частиц в состоянии  $q$ . Для состояний с положительной энергией  $n_q$  обозначим через  $n_q^+$ ; для состояний отрицательной энергии введем число позитронов  $n_q^-$  по формуле  $n_q^- = 1 - n_q^+|_{\epsilon < 0}$ . Для распределения Гиббса

$$n_q^+ = \frac{1}{e^{(\epsilon_q - \mu)\beta} + 1}; \quad n_q^- = \frac{1}{e^{(\epsilon_q + \mu)\beta} + 1}, \quad (6)$$

где  $\epsilon_q$  — модуль энергии,  $\mu$  — химический потенциал. Найденные таким образом  $G(x, 0)$  и  $G(0, x)$  могут быть подставлены в (5), после чего легко находятся фурье-компоненты  $\Pi_{ij}$  по времени  $\Pi_{ij}(\omega, r)$ . При вычислениях фурье-компонент по пространству необходимо воспользоваться конкретным выражением собственных функций дираковской частицы в магнитном поле (см. [12])  $\Psi_q = \Psi_{p_y, p_z, n, \mu}^\sigma$ ,  $\sigma = \pm 1$  — знак энергии,  $\mu = \pm 1$  — проекция спина на магнитное поле, направленное по оси  $z$ ,  $p_y, p_z$  — импульсы,  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ :

$$\Psi_{p_y, p_z, n, 1}^\sigma = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\exp[i(p_y y + p_z z)]}{\sqrt{2\sigma\epsilon_{p_z, n, 1}(\sigma\epsilon_{p_z, n, 1} + m)}} \begin{pmatrix} (\sigma\epsilon_{p_z, n, 1} + m)v^{(n)}(\xi) \\ p_z v^{(n)}(\xi) \\ -i_{p_{\perp, n, 1}} v^{(n-1)}(\xi) \end{pmatrix}; \quad (7)$$

$$\Psi_{p_y, p_z, n, -1}^\sigma = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{\exp[i(p_y y + p_z z)]}{\sqrt{2\sigma\epsilon_{p_z, n, -1}(\sigma\epsilon_{p_z, n, -1} + m)}} \begin{pmatrix} (\sigma\epsilon_{p_z, n, -1} + m)v^{(n)}(\xi) \\ i_{p_{\perp, n, -1}} v^{(n+1)}(\xi) \\ -p_z v^{(n)}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\epsilon = |\epsilon|; \quad \epsilon_{p_z, n, \mu} = m^2 + p_z^2 + p_{\perp, n, \mu}^2; \quad p_{\perp, n, \mu}^2 = eH(2n - \mu + 1); \quad (9)$$

$$v^{(n)}(\xi) = \sqrt{\frac{eH}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}; \quad \xi = \sqrt{eH} \left( x - \frac{p_y}{eH} \right); \quad (10)$$

$\hbar = c = 1$ ,  $V$  — нормировочный объем,  $H_n(\xi)$  — полином Эрмита.

Обозначим составляющую волнового вектора  $k$ , перпендикулярную магнитному полю, через  $k_\perp$ . Ось  $x$  направим по  $k_\perp$ ; тогда  $k_1 = k_x$ ,  $k_y = 0$ . При вычислении пространственных компонент Фурье интегралы по  $dy$  и  $dz$  дают дельта-функции  $\delta(p_y - p'_y)$  и  $\delta(p_z - p'_z - k_z)$  (без штриха — состояния  $G(x, 0)$ , со штрихом — состояния  $G(0, x)$ ). Остающиеся интегралы по  $dx$  и  $dp_y$  типа

$$\int e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_{n'}(\xi) e^{ik_x \xi(eH)^{-1/2}} d\xi;$$

$$\int e^{-p_y^2(eH)^{-1}} H_n \left( -\frac{p_y}{\sqrt{eH}} \right) H_{n'} \left( -\frac{p_y}{\sqrt{eH}} \right) e^{-i k_x p_y (eH)^{-1}} dp_y$$

вычисляются при помощи формулы

$$\int e^{-x^2/2} H_n \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) H_{n'} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) e^{ixy} dx =$$

$$= \sqrt{2\pi} 2^{(n+n')/2} (iy)^{n'-n} e^{-y^2/2} L_n^{n'-n}(y^2), \quad (11)$$

где  $L_n$  — обобщенные полиномы Лагерра.

Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательное выражение для поляризационного оператора \*:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = & -\frac{e^3 H}{4\pi^2} \sum_{n,\nu,\mu,\mu'} \int dp_z \left\{ \frac{n_{q'}^+ - n_q^+}{\omega + \epsilon_{q'} - \epsilon_q} \Pi_{ij}^{\mu,\mu',1,1} + \right. \\ & + \frac{(n_{q'}^- - n_q^-)}{\omega - \epsilon_{q'} + \epsilon_q} \Pi_{ij}^{\mu,\mu',-1,-1} + \frac{n_q^+ + n_{q'}^- - 1}{\epsilon_q + \epsilon_{q'} - \omega} \Pi_{ij}^{\mu,\mu',1,-1} + \\ & \left. + \frac{n_{q'}^- + n_q^+ - 1}{\epsilon_q + \epsilon_{q'} + \omega} \Pi_{ij}^{\mu,\mu',-1,1} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\epsilon_q^2 = m^2 + p_z^2 + p_\perp^2; \quad \epsilon_{q'}^2 = m^2 + p_z'^2 + p_\perp'^2; \quad p_z' = p_z - k_z;$$

$$p_\perp^2 = eH(2n - \mu + 1); \quad (13)$$

$$p_\perp'^2 = eH(2n' - \mu' + 1) = eH(2n + 2\nu - \mu' + 1); \quad \nu = n' - n.$$

Величина  $\nu$  в (12) принимает значения  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty; n = 0, 1, \dots, \infty; \mu = \pm 1; \mu' = \pm 1$ .

Первый член в (12) соответствует дисперсии на электронах, второй — на позитронах, третий и четвертый — на парах. Антиэрмитовы части связаны с нулями энергетических знаменателей. Из (12) видно, что первый член связан с поглощением квантов на электронах (поглощение Ландау [13] или специфическое поглощение в присутствии магнитного поля), второй соответствует аналогичному процессу на позитронах, третий и четвертый — поглощению кванта с рождением пары — процессу, рассмотренному без магнитного поля в [9]. При малых частотах, плотностях и полях основную роль играет первый член (12), связанный с дисперсией на электронах. Следует, наконец, сказать, что в (12) оставлены вакуумные члены, не обращающиеся в нуль при  $n_q^- = n_q^+ = 0$ . Их учет в антиэрмитовой части  $\Pi_{ij}$  существенен для процесса поглощения с рождением пар, поскольку при наличии показателя преломления в среде распространение кванта происходит вне светового конуса  $\omega = k$ .

Выпишем, наконец, коэффициенты  $\Pi_{ij}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'}$ , входящие в (12):

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'} &= \frac{1}{4\sigma\epsilon_q\sigma'\epsilon_{q'}s} \pi_{ij}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'}; \quad s = \frac{\sigma\epsilon_q + m}{\sigma\epsilon_{q'} + m}; \\ \pi_{11}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'} &= \frac{1 + \mu\mu'}{2} (p_\perp's J_{-\mu}^n + p_\perp J_{+\mu}^{n-\mu})^2 + \frac{1 - \mu\mu'}{2} (p_z's - p_z)^2 (J_\nu^n)^2; \\ \pi_{22}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'} &= \frac{1 + \mu\mu'}{2} (p_\perp's J_{-\mu}^n - p_\perp J_{+\mu}^{n-\mu})^2 + \frac{1 - \mu\mu'}{2} (p_z's - p_z)^2 (J_\nu^n)^2; \\ \pi_{33}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'} &= \frac{1 + \mu\mu'}{2} (p_z's + p_z)^2 (J_\nu^n)^2 + \frac{1 - \mu\mu'}{2} (p_\perp's J_{+\mu}^n - p_\perp J_{-\mu}^{n-\mu})^2; \end{aligned} \quad (14)$$

\* Указанным выше способом находится лишь эрмитова часть  $\Pi_{ij}$ . Антиэрмитова часть может быть восстановлена из дисперсионных соотношений. Это сводится к тому, что  $\omega$  в (1) и (12) нужно понимать в смысле  $\omega + i\delta$ , где  $\delta \rightarrow +0$ .

$$\begin{aligned}\pi_{12}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'} &= i\mu \left\{ \frac{1+\mu\mu'}{2} [p_\perp'^2 s^2 (J_{v+\mu}^n)^2 - p_\perp^2 (J_{v+\mu}^{n-\mu})^2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\mu\mu'}{2} (p_z' s - p_z)^2 (J_v^n)^2 \right\}; \\ \pi_{13}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'} &= -\frac{1+\mu\mu'}{2} (p_z + p_z') (p_\perp' s J_{v+\mu}^n + p_\perp J_{v+\mu}^{n-\mu}) J_v^n + \quad (15) \\ &\quad + \frac{1-\mu\mu'}{2} (p_z' s - p_z) (p_\perp' s J_{v+\mu}^n - p_\perp J_{v+\mu}^{n-\mu}) J_v^n;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_{23}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'} &= i\mu \left\{ \frac{1+\mu\mu'}{2} (p_z' s + p_z) (p_\perp' s J_{v-\mu}^n - p_\perp J_{v-\mu}^{n-\mu}) J_v^n - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-\mu\mu'}{2} (p_z' s - p_z) (p_\perp' s J_{v+\mu}^n - p_\perp J_{v+\mu}^{n-\mu}) J_v^n \right\}, \quad (16)\end{aligned}$$

где

$$J_v^n = J_v^n \left( \frac{k_\perp^2}{2eH} \right); \quad J_v^n(x) = \frac{1}{V^n n!(n+v)!} e^{-x/2} x^{v/2} L_n^v(x).$$

3. Рассмотрим переход к классическому пределу, что соответствует  $\hbar \rightarrow 0$  или  $n \rightarrow \infty$  так, что  $p_\perp^2 = 2eH\hbar n$  стремится к конечному пределу, равному классическому поперечному импульсу.

Воспользуемся формулой, связывающей обобщенные полиномы Лагерра  $J_v^n$  с функциями Бесселя  $J_v$ :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ v=\text{const}}} J_v^n(z^2/4n) = J_v(z). \quad (17)$$

В нашем случае

$$z = k_\perp v_\perp / \omega_H; \quad \omega_H = eH/\epsilon_q; \quad v_\perp = p_\perp / \epsilon_q. \quad (18)$$

Будем считать  $n_q^- = 0$  (позитроны отсутствуют) и рассмотрим малые частоты  $\omega \ll 2\epsilon_q$ . Тогда в третьем и четвертом членах (12), пренебрегая эффектами поляризации вакуума и считая  $\epsilon_{q'} \approx \epsilon_q$ , получим слагаемые вида  $(n_q^+ / 2\epsilon_q) (\Pi_{ij}^{\mu,\mu',1,-1} + \Pi_{ij}^{\mu,\mu',-1,1})$ . В первом члене (12) необходимо разложить

$$n_{q'}^+ - n_q^+ = \frac{\partial n_q^+}{\partial \epsilon_q} \left( \omega_H v - v_z k_z + \frac{1}{2} \omega_H (\mu - \mu') \right),$$

учитывая лишь первый, не равный нулю, член разложения. В коэффициентах  $\Pi_{ij}^{\mu,\mu',\sigma,\sigma'}$  везде можно положить  $\epsilon_{q'} = \epsilon_q$  и  $p' = p$ . Учитывая, что суммирование по  $v$  происходит в бесконечных пределах, и заменяя суммирование по  $n$  интегрированием по  $p_\perp$ , получим, например, для  $\Pi_{11}$  выражение:

$$\begin{aligned}\Pi_{11}(k, \omega) &= -e^2 \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{p_\perp^2}{4\epsilon^2} \frac{2(\partial n / \partial \epsilon)}{\omega - v\omega_H - k_z v_z} \times \right. \\ &\quad \times (J_{v+1} + J_{v-1})^2 + \frac{2n}{\epsilon} \left[ J_v^2 - \frac{p_\perp^2}{2\epsilon^2} (J_v^2 + 2J_{v+1} J_{v-1}) \right] \Big\}; \quad (19) \\ \epsilon &= \sqrt{p_z^2 + p_\perp^2 + m^2}; \quad n = n^+(\epsilon).\end{aligned}$$

Прибавляя и вычитая  $\omega$  в числите первого слагаемого, интегрируя по частям и используя рекуррентные формулы и формулы дифференцирования функций Бесселя, убеждаемся в том, что в классическом пределе члены, не содержащие резонансного знаменателя, сокращаются. Тогда получим известный классический результат:

$$\Pi_{11} = e^2 \int \frac{dp}{(2\pi)^3} 2 \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{v_{\perp}^2 [\nu J_1(z)/z]^2}{\omega - \omega_H - k_z v_z}. \quad (20)$$

Аналогично находятся остальные компоненты  $\Pi_{ij}$ .

4. Рассмотрим эрмитову часть поляризационного оператора. Если  $k\bar{v} \ll \omega$ , можно пространственную дисперсию считать слабой и разложить  $\Pi_{ij}$  по степеням  $k$ . При разложении по  $k_{\perp}$  в нулевом приближении, которым мы ограничимся, не равны нулю лишь те члены, для которых нижний индекс функции  $J_n'$  равен нулю. При  $k=0$  после громоздких вычислений, которые мы опускаем, получим:

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^0 = \Pi_{22}^0 &= \frac{e^3 H}{4\pi^2} \int dp_z \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\epsilon_{n+1} - \epsilon_n}{\omega^2 - (\epsilon_{n+1} - \epsilon_n)^2} (f_{n+1} - f_n) \times \right. \\ &\times \left. \left( 1 - \frac{m^2 + p_z^2}{\epsilon_n \epsilon_{n+1}} \right) + \frac{\epsilon_{n+1} + \epsilon_n}{\omega^2 - (\epsilon_{n+1} + \epsilon_n)^2} (f_{n+1} + f_n) \left( 1 + \frac{m^2 + p_z^2}{\epsilon_n \epsilon_{n+1}} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{12}^0 &= -\frac{ie^3 H}{4\pi^2} \int dp_z \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1} - f_n) \left\{ \left( 1 - \frac{m^2 + p_z^2}{\epsilon_n \epsilon_{n+1}} \right) \frac{1}{\omega^2 - (\epsilon_n - \epsilon_{n+1})^2} + \right. \\ &\left. + \left( 1 + \frac{m^2 + p_z^2}{\epsilon_n \epsilon_{n+1}} \right) \frac{1}{\omega^2 - (\epsilon_n + \epsilon_{n+1})^2} \right\}; \end{aligned}$$

$$\Pi_{33}^0 = \frac{e^3 H}{\pi^2} \int dp_z \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\epsilon_n f_n}{\omega^2 - 4\epsilon_n^2} \left( 1 - \frac{p_z^2}{\epsilon_n^2} \right) + \frac{\epsilon_{n+1} f_{n+1}}{\omega^2 - 4\epsilon_{n+1}^2} \left( 1 - \frac{p_z^2}{\epsilon_{n+1}^2} \right) \right\}; \quad (22)$$

$$\Pi_{13}^0 = \Pi_{23}^0 = 0. \quad (23)$$

Здесь  $f_n = n^+(\epsilon_n) + n^-(\epsilon_n)$ ;  $\epsilon_n = \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2eHn}$ . Кроме того, в (21)–(23) отброшен поляризационный оператор вакуума (стандартной перенормировкой он дает известные выражения для поляризации вакуума в магнитном поле). Следует также подчеркнуть, что (21)–(23) верны лишь вдали от резонансов, а именно, при выполнении условий

$$k_z \bar{v} \ll \omega - \omega_p \quad (24)$$

( $\omega_p$  — резонансная частота,  $\bar{v}$  — среднее значение скорости частицы плазмы).

Если  $H \rightarrow 0$ , в (21)–(23) можно перейти от суммы по  $n$  к интегралу по  $p_{\perp}$ . В результате несложных расчетов находим, например, для  $\Pi_{33}$  выражение, полученное в работе [9]. Если в (21)–(24) пренебречь членами относительного порядка  $\omega/m$ ,  $\omega_H/m$ ,  $p/m$  (релятивистскими эффектами), то для невырожденного газа

$$\Pi_{11} = -\frac{\omega_0^2 \omega}{4\pi(\omega^2 - \omega_H^2)}; \quad \Pi_{12} = -\frac{i\omega \omega_0^2 \omega_H}{4\pi(\omega^2 - \omega_H^2)}; \quad \Pi_{33} = -\frac{\omega_0^2}{4\pi}.$$

(квантовые эффекты не сказываются). Учет малых членов порядка  $\omega_H/m$  дает, например, дополнительное малое вращение плоскости поляризации при распространении волн вдоль поля с коэффициентом, слабо зависящим от температуры.

Рассмотрим другой предельный случай, когда разность уровней энергии в магнитном поле велика по сравнению с  $1/\beta = T$ . Заметим, что химический потенциал  $\mu$  определяется равенством

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{eH}{4\pi^2} \int dp_z [n^+(\varepsilon_n) + n^+(\varepsilon_{n+1}) - n^-(\varepsilon_n) - n^-(\varepsilon_{n+1})] = N,$$

где  $N$  — разность между числом частиц и античастиц в единице объема. Для полностью вырожденного газа при  $n^- = 0$

$$\frac{(eH)^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2} \left( \sqrt{n_0} + 2 \sum_{n=1}^{n_0} \sqrt{n_0 - n} \right) = N; \quad n_0 = \frac{\mu^2 - m^2}{2eH}. \quad (25)$$

В предельном квантовом случае  $n_0 \ll 1$  получаем из (21)–(23):

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^3 &= \Pi_{22}^3 = -\frac{e^3 H}{2\pi^2} \left\{ \ln \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2}}{m} + \frac{s}{2\sqrt{s^2 - m^2}} \times \right. \\ &\times \ln \left[ \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2})^2 - (s + \sqrt{s^2 - m^2})^2}{(\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2})^2 - (s - \sqrt{s^2 - m^2})^2} \cdot \frac{m^2 - (s - \sqrt{s^2 - m^2})^2}{m^2 - (s + \sqrt{s^2 - m^2})^2} \right]; \\ \Pi_{12}^3 &= \frac{ie^3 H}{4\pi^2} \frac{s}{\sqrt{s^2 - m^2}} \ln \left[ \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2} - \sqrt{s^2 - m^2})^2 - s^2}{(\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2} + \sqrt{s^2 - m^2})^2 - s^2} \times \right. \\ &\times \left. \frac{(m + \sqrt{s^2 - m^2})^2 - s^2}{(m - \sqrt{s^2 - m^2})^2 - s^2} \right]; \\ \Pi_{33}^3 &= \frac{e^3 H m^2}{\pi^2 \omega \sqrt{m^2 - \omega^2/4}} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2} + \omega/2}{\sqrt{m^2 - \omega^2/4}} - \right. \\ &- \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m + \omega/2}{m - \omega/2}} - \operatorname{arctg} \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - m^2} - \omega/2}{\sqrt{m^2 - \omega^2/4}} + \\ &\left. + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m - \omega/2}{m + \omega/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

причем  $s = eH/\omega = \omega/2 > m$  и  $m > \omega/2$ . В случае  $\mu - m \ll m$ ,  $\omega^2 \ll 2m\omega_H$  получаем:

$$\Pi_{11}^3 = \Pi_{22}^3 = -\frac{\omega_0^2 \omega^2}{4\pi(\omega^2 - \omega_H^2)}; \quad \Pi_{12}^3 = -\frac{i\omega_0^2 \omega \omega_H}{4\pi(\omega^2 - \omega_H^2)}; \quad \Pi_{33}^3 = -\frac{\omega_0^2}{4\pi}. \quad (27)$$

5. При рассмотрении антиэрмитовой части при малых тепловых скоростях допустимо разложение по  $k_\perp$ ; однако зависимость от  $k_z$  следует учитывать точно. Используя  $\delta$ -функции, заменяющие энергетические знаменатели (14), можно проинтегрировать по  $p_z$ . В результате

довольно громоздких расчетов получим следующие выражения для антиэрмитовой части, связанной с черенковской и магнитотормозной диссипацией \*:

$$\begin{aligned} \Pi_{11,L}^{(a)} = \Pi_{22,L}^{(a)} &= i \frac{e^3 H}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 + \frac{2eH(2n+1)}{k_z^2 - \omega^2} \right] \frac{k_z}{2x_{\perp n}} \left\{ \Theta_n^{(-)} f \left[ \Theta^{(0)} \left( x_{\perp n} - \frac{\omega}{2} \alpha_- \right) \right] - \Theta_n^{(-)} f \left[ \Theta^{(0)} \left( x_{\perp n} + \frac{\omega}{2} \alpha_+ \right) \right] + \Theta_n^{(+)} \Theta^{(0)} f \left[ x_{\perp n} - \frac{\omega}{2} \alpha_+ \right] - \Theta_n^{(+)} \Theta^{(0)} f \left[ x_{\perp n} + \frac{\omega}{2} \alpha_- \right] \right\}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{12,L}^{(a)} &= - \frac{e^3 H}{8\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 1 + \frac{2eH(2n+1)}{k_z^2 - \omega^2} \right] \frac{k_z}{2x_{\perp n}} \left\{ \Theta_n^{(-)} f \left[ \Theta^{(0)} \left( x_{\perp n} - \frac{\omega}{2} \alpha_- \right) \right] - \Theta_n^{(-)} f \left[ \Theta^{(0)} \left( x_{\perp n} + \frac{\omega}{2} \alpha_+ \right) \right] + \Theta_n^{(+)} f \left( x_{\perp n} - \frac{\omega}{2} \alpha_+ \right) - \Theta_n^{(+)} f \left( x_{\perp n} + \frac{\omega}{2} \alpha_- \right) \right\}; \\ \Pi_{33,L}^{(a)} &= \frac{ie^3 H}{2\pi} \frac{\omega^2}{(k_z^2 - \omega^2)^2} \left\{ \frac{m^2 k_z}{4x_{z,0}} \left[ f \left( x_{z,0} - \frac{\omega}{2} \right) - f \left( x_{z,0} + \frac{\omega}{2} \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m^2 + 2eHn) k_z}{x_{z,n}} \left[ \Theta_{z,n} f \left( x_{z,n} - \frac{\omega}{2} \right) - \Theta_{z,n} f \left( x_{z,n} + \frac{\omega}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$x_{\perp n} = \frac{k_z}{2} \sqrt{\left( 1 + \frac{2eH}{k_z^2 - \omega^2} \right)^2 + \frac{4(m^2 + 2eHn)}{k_z^2 - \omega^2}}; \quad (31)$$

$$x_{z,n} = \sqrt{1 + \frac{4(m^2 + 2eHn)}{k_z^2 - \omega^2}}; \quad \alpha_{\pm} = 1 \pm \frac{2eH}{k_z^2 - \omega^2}; \quad (32)$$

$$f[\varepsilon] = n^+(\varepsilon) + n^-(\varepsilon).$$

Следует заметить, что выражения (28)–(30) записаны для случая  $\omega > 0$ ,  $k_z > 0$ . Исходя из общих свойств поляризационного оператора или диэлектрической проницаемости (см. [14]), не представляет труда выписать антиэрмитовые части  $\Pi_{ij}$  для любых  $\omega$  и  $k$ . Наконец, в (28)–(30) функции  $\Theta_n^{(\pm)}$ ,  $\Theta_{z,n}$  равны либо единице, либо нулю (нуль соответствует тому, что законы сохранения энергии и импульса при поглощении не могут одновременно выполняться):

$$\Theta_{z,n} = \begin{cases} 1 & \text{при } x_{z,n} - \omega/2 > m; \\ 0 & \text{при } x_{z,n} - \omega/2 < m \end{cases}; \quad \Theta^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{при } k_z^2 > \omega^2 \\ -1 & \text{при } k_z^2 < \omega^2 \end{cases}.$$

Условием неравенства нулю  $\Pi_{33,L}^{(a)}$  является

$$k_z^2 > \omega^2.$$

\* Индекс  $L$  указывает на то, что это затухание аналогично рассмотренному Ланду [13].

Такое же условие получается и при неквантовом рассмотрении. Ситуация здесь сходна с той, которая имеется без магнитного поля (см. [9]), а именно, учет квантовых эффектов при поглощении, в частности, квантового эффекта отдачи, не изменяет области волновых векторов, а следовательно, и показателей преломления, для которых диссипация имеет место (хотя изменяет, конечно, ее величину). Однако для компонент  $\Pi_{11,L}^{(a)}$ ,  $\Pi_{12,L}^{(a)}$  при наличии магнитного поля этого совпадения уже нет:

$$\Theta_n^{(\pm)} = \begin{cases} 1 & \text{при } \chi_{\perp n} - \omega\alpha_{\pm}/2 > m \\ 0 & \text{при } \chi_{\perp n} - \omega\alpha_{\pm}/2 < m \end{cases}.$$

Отсюда следует, что  $\Theta_n^{(-)} \neq 0$  при  $\omega^2 < k_z^2$  и равно нулю при  $\omega^2 > k_z^2$ , тогда как  $\Theta_n^{(+)} \neq 0$  при  $\omega^2 < k_z^2 + \omega_H^2 [1 + (k_z^2 - \omega_H^2)/2\epsilon_{\perp n}\omega_H]^2$ , где  $\omega_H = eH/\epsilon_{\perp n}$ ,  $\epsilon_{\perp n}^2 = m^2 + p_{\perp}^2$ . Последнее неравенство дает две граничные кривые ( $\epsilon_{\perp n} = m$ )  $\omega_{\pm}^2 = k_z^2 + 2m^2(1 + \omega_H/m \pm \sqrt{1 + 2\omega_H/m})$ . Анализ показывает, что законы сохранения выполняются ниже  $\omega_-(\omega < \omega_-)$  и выше  $\omega_+(\omega > \omega_+)$ , причем в последней области мы имеем дело с диссипацией, обязанной рождению пар. Считая  $\omega_H/m \ll 1$ , получим:  $\omega_-^2 = \omega_H^2 \times (1 + \omega_H/m) + k_z^2$ ,  $\omega_+^2 = k_z^2 + 4m^2(1 + \omega_H/m)$ ,  $\omega_H = eH/m$ . Поправки приводят, таким образом, к незначительному изменению начальной частоты (частоты при  $k_z = 0$ ).

Рассмотрим случай достаточно высоких температур  $\omega_H\beta \ll 1$  (когда  $T$  значительно превосходит разность уровней энергии электрона в магнитном поле). Тогда от сумм (28)–(30) можно перейти к интегралам, которые для больцмановского электронного газа ( $n^+ = 0$ ,  $f = \exp(-\epsilon\beta + \mu\beta)$ ,  $\mu$  – химический потенциал) вычисляются до конца:

$$\Pi_{11,L}^{(a)} = \begin{cases} i \frac{e^2}{8\pi k_z^3 \beta} \left( \operatorname{sh} \frac{\beta\omega\alpha_-}{2} + \operatorname{sh} \frac{\beta\omega\alpha_+}{2} \right) (k_z^2 - \omega^2) e^{\mu\beta - \chi_{\perp 0}\beta} \times \\ \times \left( k_z^2 + \frac{4\chi_{\perp 0}}{\beta} + \frac{4}{\beta^2} \right) & \text{при } k_z^2 > \omega^2, \\ i \frac{e^2}{8\pi} \frac{(\omega^2 - k_z^2)}{k_z \beta} \operatorname{sh} \frac{\omega\beta}{2} \left[ \frac{4\chi_{\perp 0}}{k_z^2 \beta} \operatorname{ch} \chi_{\perp 0} \beta - \left( 1 + \frac{4}{k_z^2 \beta^2} \right) \operatorname{sh} \chi_{\perp 0} \beta \right] & \text{при } k_z^2 < \omega^2; \end{cases} \quad (33)$$

$$\Pi_{12,L}^{(a)} = \begin{cases} - \frac{e^2}{8\pi k_z^3 \beta} \left( \operatorname{ch} \frac{\beta\omega\alpha_-}{2} - \operatorname{ch} \frac{\beta\omega\alpha_+}{2} \right) (k_z^2 - \omega^2) \left( k_z^2 + \frac{4\chi_{\perp 0}}{\beta^2} + \frac{4}{\beta^2} \right) \times \\ \times \exp [\mu\beta - \beta m \omega \omega_H (\omega^2 - k_z^2)^{-1}] & \text{при } k_z^2 > \omega^2; \\ - i \Pi_{11}^{(a)} & \text{при } k_z^2 < \omega^2; \end{cases} \quad (34)$$

$$\Pi_{33}^{(a)} = \frac{ie^2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{\omega\beta}{2} \frac{\omega^2}{\beta k_z^3} \left( \frac{m^2 k_z^2}{k_z^2 - \omega^2} + \frac{2\chi_{z,0}}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} \right) e^{\mu\beta - \chi_{z,0}\beta}, \quad (35)$$

где

$$\chi_{\perp,0} = \frac{k_z}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k_z^2 - \omega^2} \left( 1 + \frac{\omega_H^2}{k_z^2 - \omega^2} \right)};$$

$$\chi_{z,0} = \frac{k_z}{2} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k_z^2 - \omega^2}}. \quad (36)$$

В неквантовом пределе получим результаты работы [7]. Выражение (35) совпадает с тем, что было найдено для  $\text{Im } \epsilon^t$  в [9] (если в последнем положить  $k_\perp = 0$ ), а (33) при  $H = 0$  соответствует найденной в [9]  $\text{Im } \epsilon^t$ . Следует заметить, что (33)–(35) справедливы при релятивистских температурах для волн, распространяющихся по полю.

Можно рассмотреть другой предельный случай  $n_0 < 1$ . Тогда  $f(\epsilon_{n+1}) = 0$ ;  $f(\epsilon_0) \neq 0$ . Поэтому в области  $k_z^2 > \omega^2$  антиэрмитовы части поляризационного оператора (28)–(30) равны нулю. В области же  $k_z^2 < \omega^2 < \omega_-^2 + k_z^2$  не равны нулю лишь компоненты  $\Pi_{11,L}^{(a)}$  и  $\Pi_{12,L}^{(a)}$ :

$$\begin{aligned} \Pi_{11,L}^{(a)} = i \Pi_{12,L}^{(a)} = i \frac{e^3 H}{8\pi} \frac{2eH/(\omega^2 - k_z^2) - 1}{\sqrt{[1 - 2eH/(\omega^2 - k_z^2)]^2 - 4m^2/(\omega^2 - k_z^2)}} \times \\ \times \begin{cases} 2 & \text{при } \chi_{\perp n} > \pm [\omega\alpha_+/2 \pm \mu] \\ 1 & \text{при } \omega\alpha_+/2 + \mu > \chi_{\perp n} > -\omega\alpha_+/2 + \mu. \\ 0 & \text{при } \chi_{\perp n} < \pm \omega\alpha_+/2 + \mu \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

6. В рассматриваемом приближении, когда  $\Pi_{23} \approx \Pi_{13} \approx 0$ , дисперсионное уравнение для распространения электромагнитных волн сводится к квадратному уравнению для комплексного показателя преломления  $n = k/\omega$  (см. [14]):

$$n^2 = \frac{(\epsilon^2 - \eta^2 - \epsilon\epsilon_z)\sin^2\Theta + 2\epsilon\epsilon_z \pm \sqrt{(\epsilon^2 - \eta^2 - \epsilon\epsilon_z)^2 \sin^4\Theta + 4\eta^2\epsilon_z^2 \cos^2\Theta}}{2(\epsilon \sin^2\Theta + \epsilon_z \cos^2\Theta)}, \quad (38)$$

где  $\Theta$  — угол между  $k$  и  $H$ ,  $\epsilon = 1 + 4\pi\Pi_{11}/\omega^2$ ,  $\epsilon_z = 1 + 4\pi\Pi_{33}/\omega^2$ ,  $\eta = i4\pi\Pi_{12}/\omega^2$ . В случае слабого затухания волн можно в первом приближении пренебречь антиэрмитовыми частями  $\Pi_{ij}$ ; уравнение (38) определяет тогда зависимость показателя преломления от частоты и направления. Считая коэффициент поглощения  $\chi$  малым и учитывая лишь члены, линейные по  $\chi$  и мнимым частям  $\Pi_{ij}$ , легко получим формулу для  $\chi$  как функцию действительных и мнимых частей  $\Pi_{ij}$  и угла. Эти формулы весьма громоздки, хотя и получаются путем простого разложения (38). Подставляя в них найденные выше эрмитовы и антиэрмитовы части поляризационного оператора, получим искомые показатель преломления и коэффициент поглощения. Остановимся более подробно здесь на некоторых частных случаях.

Низкочастотные плазменные колебания соответствуют большим показателям преломления  $n \rightarrow \infty$  или  $\epsilon \sin^2\Theta + \epsilon_z \cos^2\Theta = 0$ . Если не учитывать релятивистские эффекты, то в рассмотренных выше примерах невырожденного бульмановского электронного газа и для вырожденного газа в предельном квантовом случае  $n_0 < 1$  (см. (27)) получим обычное дисперсионное уравнение \*:

\* Утверждение [15] о том, что при  $n_0 < 1$  последний член дисперсионного соотношения (39) исчезает, представляется неверным. Поэтому в рамках сделанных допущений нет найденных в работе [15] ограничений применимости «гидродинамического» приближения со стороны больших значений магнитных полей. Нам представляется также ошибочным вывод работы [15] о скачкообразном изменении дисперсионных свойств или, что то же самое, показателя преломления с ростом магнитного поля. В работе [7] было показано (в рамках классического рассмотрения), что учет релятивистских

$$\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{\cos^2 \Theta}{\omega^2} - \frac{\sin^2 \Theta}{\omega^2 - \omega_H^2} = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}. \quad (39)$$

Рассмотрим далее простой случай продольного распространения:

$$n_{\pm}^2 = 1 + \frac{4\pi}{\omega^2} (\Pi_{11}^3 \pm i \Pi_{12}^3); \quad \kappa_{\pm,L} = \frac{2\pi}{i\omega^2 n} (\Pi_{11,L}^{(a)} \pm i \Pi_{12,L}^{(a)}). \quad (40)$$

Для достаточно высоких температур  $\omega_H^3 \ll 1$  из (33) — (35) получаем:

$$n_{\pm}^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega(\omega \mp \omega_H)}; \quad (41)$$

$$\kappa_{\pm,L} = \frac{2}{\omega\beta} \operatorname{sh} \frac{\omega\beta}{2} \frac{e^2}{\omega^2 n^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left[ \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{n^2 \omega^2}{4} + \frac{m^2 n^2}{n^2 - 1} \left(1 + \frac{\omega_H^2}{\omega^2(n^2 - 1)}\right)} + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2 n^2}{4} \right] \exp \left\{ \mu\beta - \beta \sqrt{\frac{n^2 \omega^2}{4} + \frac{m^2 n^2}{n^2 - 1} \left(1 + \frac{\omega_H^2}{\omega^2(n^2 - 1)}\right)} \pm \beta \frac{\omega_H m}{\omega(n^2 - 1)} \right\}, \quad (42)$$

причем  $\kappa_+$  не равно нулю для  $\omega^2 < \omega_0^2/(1 - n^2)$ , а  $\kappa_-$  для  $n^2 > 1$  (предполагается, что  $n^2 > 0$ ). Кроме того, мы пренебрегли членами порядка  $1/m\beta \ll 1$  в предэкспоненциальном множителе (нерелятивистские температуры).

Квантовые поправки в (42) содержатся а) в множителе  $(2/\omega\beta)\operatorname{sh}(\omega\beta/2)$ , который при  $\omega$  порядка  $\omega_H$  в силу  $\omega_H^3 \ll 1$  близок к единице; б) в предэкспоненциальной скобке (42); причем при  $\omega \sim \omega_H$  и  $n \sim 1$  они имеют относительный порядок  $\omega_H^2 \beta^2/m\beta \ll 1$ ; в) в экспоненциальном множителе, который вблизи гирорезонанса  $\omega \sim \omega_H$ ,  $n^2 \gg 1$  с учетом квантовых поправок имеет вид:  $\exp\{-\beta[m(\omega - \omega_H)^2/2n^2\omega^2 + n^2\omega^2/8m]\}$ . Так, для необыкновенной волны  $n \sim \omega_0^2/(\omega_H - \omega)$  и относительный порядок квантовой поправки в экспоненте составляет  $\omega_0^4\omega^2/4m^2(\omega - \omega_H)^2$ . Таким образом, вблизи гирорезонанса квантовые поправки могут оказаться на поглощении электромагнитных волн в плазме.

Для предельного квантового случая  $n_0 \ll 1$  при параллельном распространении  $n^2$  описывается приближенно соотношением (41); коэффициент поглощения обыкновенной волны в силу (37) строго равен нулю, а для необыкновенной волны

$$\kappa_+ = \frac{e^2 \omega_H m}{\omega^2 n} \frac{2\omega_H m/\omega^2(1 - n^2) - 1}{\sqrt{[2\omega_H m/\omega^2(n^2 - 1) + 1]^2 + 4m^2/\omega^2(n^2 - 1)}}. \quad (43)$$

Для перпендикулярных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю, близким к  $\pi/2$ , в классическом пределе (неквантовом и нерелятивистском) затухание Ландау обращается в нуль. Возникает вопрос, в какой мере учет квантовых и релятивистских эффектов меняет этот вывод. В работе [3] было показано, что даже для нерелятивистской плазмы, в которой отношение средней тепловой скорости частиц к скорости света значительно меньше единицы, хотя и не очень мало (например,  $v/c \sim 10^{-1}$ ), учет неквантовых релятивистских эффектов может привести к значительному поглощению волн с  $\Theta \approx \pi/2$ .

эффектов даже в нерелятивистской плазме приводит к выводу об отсутствии особых точек  $\epsilon_{ij}$  вблизи гирорезонансных частот. Квантовое рассмотрение не меняет основного вывода работы [7].

При малых тепловых скоростях, когда этот эффект пренебрежимо мал, возникает вопрос о квантовых эффектах. Затухание волны с  $\Theta \approx \pi/2$  определяется выражениями (см. [14])

$$\begin{aligned} z_1 &= i\varepsilon^{(a)} \frac{1 - \eta/\varepsilon}{2n_1 - (\partial\varepsilon/\partial n_1)(1 - \eta/\varepsilon)^2}; \quad n_1^2 = \varepsilon - \eta^2/\varepsilon; \\ z_2 &= -\frac{-i\varepsilon_z^{(a)}}{2n_2 - \partial\varepsilon_z/\partial n_z}; \quad n_2^2 = \varepsilon_z. \end{aligned} \quad (44)$$

Величина  $\varepsilon^{(a)} = 1 + 4\pi\omega^{-2} \Pi_{11,L}^{(a)}|_{k_z=0}$  должна быть подставлена сюда из (29). При этом, поскольку  $k_z = 0$ ,  $\varepsilon^{(a)} \neq 0$  при  $\omega < \omega_-$ . В случае  $\omega_H \beta \ll 1$ , когда спектр энергий частицы в магнитном поле можно считать непрерывным, можно использовать (33), положив  $k_\perp = 0$ . Получаем, что квантовые поправки к классическим формулам при  $\omega \sim \omega_H$  имеют порядок  $\omega_H/m \ll 1$ . К поправкам того же порядка приводим рассмотрение  $\varepsilon_z^{(a)}$ \*. К другому выводу мы придем для предельного квантового случая  $n_0 \ll 1$ . Так, для  $\varepsilon^{(a)}$  имеем из (37):

$$\varepsilon^{(a)} = \frac{e^2 \omega_H m}{8\pi\omega^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\omega_H m/\omega^2)^2 - 4m^2/\omega^2}} (2\omega_H m/\omega^2 - 1). \quad (45)$$

7. Рассмотрим в заключение затухание, связанное с рождением пар фотоном \*\*. Ограничимся невырожденным газом, когда основной вклад вносит мнимая часть вакуумного поляризационного оператора. Тогда из (14), (15) получим для продольного распространения:

$$\begin{aligned} z_{\pm, p} &= \frac{2\pi}{i\omega^2 n_\pm} (\Pi_{11, p}^{(a)} \pm i\Pi_{12, p}^{(a)}) = \frac{2e^3 H}{\omega^2 n_\pm} \times . \\ &\times \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left( 1 + \frac{2eH(2n+1)}{k_z^2 - \omega^2} \right) \frac{k_z}{2z_{\perp n}}, \end{aligned} \quad (46)$$

причем  $n_{\max}$  определяется из условия действительности  $z_{\perp n}$ .

Авторы приносят искреннюю признательность А. А. Рухадзе за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ситенко и К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 31, 642 (1956); К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 35, 283 (1958); К. Н. Степанов и В. С. Ткалич, ЖТФ, 28, 1789 (1958).
2. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, 37, 659 (1959); ЖЭТФ, 38, 912 (1960).
3. Б. Н. Гершман, ДАН СССР, 137, 827 (1961).
4. В. Д. Шафранов, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 4, 424 (1958).
5. В. А. Трубников, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 3, 1958, стр. 104; 4, 1958, стр. 305.
6. В. П. Силин, Труды ФИАН, 6, 200 (1955).
7. В. П. Силин и А. А. Рухадзе, ЖЭТФ (в печати).
8. В. Н. Цытович, Вестник МГУ, 11, 27 (1951).
9. В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 40, 1775 (1961).

\* Формула (30) при этом дает нуль; поэтому необходимо учесть следующий член разложения по  $k_\perp$ .

\*\* При  $H=0$  этот механизм затухания рассмотрен в [9].

10. Э. С. Фрадкин, Диссертация, ФИАН, М., 1961; В. Л. Бонч-Бруевич, ДАН СССР, 126, 539 (1959); Ш. М. Коган, ДАН СССР, 126, 546 (1959).
11. J. Schwingen, Phys. Rev., 82, 664 (1951).
12. А. И. Ахинзер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Гостехиздат, М., 1959.
13. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 574 (1956).
14. В. П. Силин и А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмо-подобных сред, Атомиздат, М., 1961.
15. П. С. Зырянов, ЖЭТФ, 40, 1065 (1961).
16. В. Н. Цытович, ДАН СССР, 142, 319 (1962).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
23 декабря 1961 г.

## ON THE SPACE DISPERSION OF RELATIVISTIC PLASMA IN MAGNETIC FIELD

*G. I. Svetosarova, V. N. Tsytovitch*

The expression is obtained for a permittivity tensor of plasma in a magnetic field taking into account relativistic and quantum effects. Some problems associated with electromagnetic wave propagation are considered.

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

*C. H. Столяров*

Рассмотрены некоторые особенности отражения электромагнитной волны от движущейся границы раздела двух сред. Приведен более детальный анализ явления увлечения электромагнитной волны движущейся средой.

Взаимодействие электромагнитных волн с движущимися границами раздела обладает рядом интересных особенностей, которые рассмотрены в данной статье. Некоторые эффекты оказываются линейными по скорости границы раздела  $u$ , которая предполагается постоянной. Поэтому результаты данной работы могут быть полезны при изучении взаимодействия электромагнитных волн с движущимися объектами: в физике — со сгустками плазмы или с пучками релятивистских частиц, в астрономии — с оболочками сверхновых звезд.

1. Для простоты рассмотрим взаимодействие плоской монохроматической электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме, с прозрачной средой, движущейся в том же направлении со скоростью  $u$  (рис. 1). Если среда и свет двигаются навстречу друг другу, то все

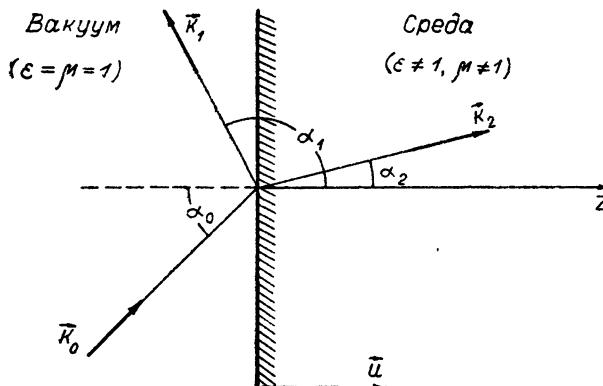


Рис. 1. Схема отражения электромагнитной волны от движущейся границы вакуума со средой:

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  — соответственно углы падения, отражения и преломления.

формулы получаются заменой  $u$  на  $-u$ . Тогда, если  $(\mathbf{k}_0, \omega_0)$ ,  $(\mathbf{k}_1, \omega_1)$  и  $(\mathbf{k}_2, \omega_2)$  соответственно волновой вектор и частота падающей, отраженной и преломленной волн, то с помощью амплитудно-фазовых соотношений, полученных в работе [1], имеем

а) для отраженной волны  $(\mathbf{k}_1, \omega_1)$ :

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{(1 + \beta^2) - 2\beta \cos \alpha_0}{1 - \beta^2}; \quad k_{1z} = -\frac{\omega_0 (1 + \beta^2) \cos \alpha_0 - 2\beta}{c} \frac{1}{1 - \beta^2},$$

$$k_{1r} = \frac{\omega_0}{c} \sin \alpha_0; \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = - \frac{\sin \alpha_0 (1 - \beta^2)}{(1 + \beta^2) \cos \alpha_0 - 2\beta};$$

$$R_{\perp} = - \frac{k_{1z}\omega_1}{k_{0z}\omega_0} \left\{ \frac{(\mu k_{0z} - k_{2z}) + (\mu - 1)\beta I_2/c(1 - \beta^2)}{(k_{2z} - \mu k_{1z}) - (\mu - 1)\beta I_2/c(1 - \beta^2)} \right\}^2; \quad (1)$$

$$R_{\parallel} = - \frac{k_{1z}\omega_1}{k_{0z}\omega_0} \left\{ \frac{(\epsilon k_{0z} - k_{2z}) + (\epsilon - 1)\beta I_2/c(1 - \beta^2)}{(k_{2z} - \epsilon k_{1z}) - (\epsilon - 1)\beta I_2/c(1 - \beta^2)} \right\}^2;$$

б) для преломленной волны ( $\mathbf{k}_2$ ,  $\omega_2$ ):

$$\omega_2 = \omega_0(1 - \beta \cos \alpha_0) \frac{1 + \beta \sqrt{(\epsilon\mu - 1) + (\cos \alpha_0 - \beta)^2 / (1 - \beta \cos \alpha_0)^2}}{1 - \beta^2};$$

$$k_{2r} = \frac{\omega_0}{c} \sin \alpha_0;$$

$$k_{2z} = \frac{\omega_0(1 - \beta \cos \alpha_0)}{c(1 - \beta^2)} \left\{ \beta + \sqrt{(\epsilon\mu - 1) + \left( \frac{\cos \alpha_0 - \beta}{1 - \beta \cos \alpha_0} \right)^2} \right\};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_0 (1 - \beta^2)}{1 - \beta \cos \alpha_0} / \beta + \sqrt{(\epsilon\mu - 1) + \left( \frac{\cos \alpha_0 - \beta}{1 - \beta \cos \alpha_0} \right)^2};$$

$$D_{\perp} = \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{\mu(k_{0z} - k_{1z})^2}{(1 - \beta^2)k_{0z}} \frac{k_{2z}(1 - \epsilon\mu\beta^2) + \beta(\epsilon\mu - 1)\omega_2/c}{\{(k_{2z} - \mu k_{1z}) - (\mu - 1)\beta I_2/c(1 - \beta^2)\}^2}; \quad (2)$$

$$D_{\parallel} = \frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{\epsilon(k_{0z} - k_{1z})^2}{(1 - \beta^2)k_{0z}} \frac{k_{2z}(1 - \epsilon\mu\beta^2) + \beta(\epsilon\mu - 1)\omega_2/c}{\{(k_{2z} - \epsilon k_{1z}) - (\epsilon - 1)\beta I_2/c(1 - \beta^2)\}^2}.$$

Здесь  $R$  и  $D$  — коэффициенты отражения и прохождения,

$$\beta = u/c; \quad I_2 = \omega_0(\beta \cos \alpha_0 - 1),$$

знаки  $\parallel$  и  $\perp$  соответствуют волнам, поляризованным в плоскости падения и перпендикулярно к ней.

Так как 4-вектор  $\mathbf{k}_i = (\mathbf{k}, \omega/c)$  в среде уже не является нулевым вектором ( $k_i^2 \neq 0$ ), то известная формула для aberrации света принимает вид:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta' - \beta / \sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (3)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{u}$  в системе, где среда движется,  $\theta'$  — угол между теми же векторами в системе, где среда поконится. При  $\beta \ll 1$  формула (3) дает:

$$\Delta\theta \approx \beta \sin \theta' / \sqrt{\epsilon\mu},$$

где  $\Delta\theta = \theta' - \theta$ , в отличие от известной формулы aberrации света в вакууме [2]. В дальнейшем всегда предполагается, что  $\epsilon\mu > 1$ .

2. Исследуя выражения (1) и (2), легко установить ряд характерных свойств отраженной и преломленной волн.

1) Частоты отраженной ( $\omega_1$ ) и преломленной ( $\omega_2$ ) волн отличны от частоты  $\omega_0$  падающей волны (эффект Допплера).

2) При увеличении скорости границы ( $\beta \rightarrow 1$ ) направления отра-

женной и преломленной волн становятся близкими к нормальным ( $\alpha_2 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_1 \rightarrow \pi$ ; см. рис. 1) независимо от величины угла падения  $\alpha_0$ .

3) С изменением скорости меняется и величина угла Брюстера  $\alpha_{0p}$ :

$$\cos \alpha_{0p} = \left( \sqrt{\frac{\epsilon\mu - 1}{\epsilon^2 - 1}} + \beta \right) \left( 1 + \beta \sqrt{\frac{\epsilon\mu - 1}{\epsilon^2 - 1}} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Отметим, что когда волна и граница раздела движутся в одну сторону, всегда можно подобрать по формуле (4) такой угол падения, что отраженный луч будет полностью линейно поляризован. Если же электромагнитная волна и граница раздела движутся навстречу друг другу, то при скорости границы

$$\beta > \beta_p = \sqrt{\frac{\epsilon\mu - 1}{\epsilon^2 - 1}}$$

такого угла найти уже нельзя.

3. Существенное значение при исследовании свойств преломленной (а также и отраженной) волны имеет знание фазовой ( $v_\phi$ ) и групповой ( $v_{gp}$ ) скорости сигнала в движущейся среде. Используя дисперсионное уравнение в движущейся среде

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 + \frac{x}{c^2} \frac{(\mathbf{k}u - \omega)^2}{1 - u^2/c^2} = 0, \quad (5)$$

получим

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{c}{n(\alpha)} \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad (6)$$

где величина фазовой скорости  $c/n(\alpha)$  дана в [3]:

$$\left( \frac{c}{n(\alpha)} \right)_{1,2} = \frac{\eta u \cos \alpha \pm \sqrt{c^2 + \eta(c^2 - u^2 \cos^2 \alpha)}}{1 + \eta}. \quad (7)$$

Для среды со слабой дисперсией

$$\frac{d\omega}{dk} = v_{gp} = \left( \mathbf{k} - u \frac{x}{c^2} \frac{\mathbf{k}u - \omega}{1 - u^2/c^2} \right) \left( \frac{\omega}{c^2} - \frac{x}{c^2} \frac{\mathbf{k}u - \omega}{1 - u^2/c^2} \right)^{-1}; \quad (8)$$

для среды с сильной дисперсией

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{du} = v_{gp} = & \left\{ \mathbf{k} - u \left[ \frac{x(\mathbf{k}u - \omega)}{c^2(1 - u^2/c^2)} - \frac{x'}{2c^2} \frac{(\mathbf{k}u - \omega)^2}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{\omega}{c^2} - \frac{x}{c^2} \frac{\mathbf{k}u - \omega}{1 - u^2/c^2} + \frac{x'}{2c^2} \frac{(\mathbf{k}u - \omega)^2}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (8a)$$

Здесь  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$  — частота и волновой вектор волны,  $u$  — скорость среды,  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{u}$ ,  $\eta = x/(1 - u^2/c^2)$ ,  $\epsilon = \epsilon\mu - 1$ ,  $x'$  — производная от  $x$  по аргументу  $\omega' = (\omega - \mathbf{k}u)/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ .

Очевидно, что в общем случае направления фазовой (6) и групповой (8), (8a) скорости не совпадают. Если фазовая скорость направлена по волновому вектору волны  $\mathbf{k}$ , то групповая скорость волны в дви-

жущейся среде имеет составляющую, направленную по  $\mathbf{u}$  и обусловленную увлечением этой волны движущейся средой.

В силу этого легко понять некоторые особенности отраженной и преломленной волн, возникающие при возрастании скорости  $\mathbf{u}$ .

1) Рассмотрим случай, когда падающая волна и граница раздела движутся навстречу друг другу. Тогда при некотором значении скорости границы составляющая групповой скорости преломленной волны  $v_{2\text{grp}}$  на направление движения границы меняет знак\*. В связи с тем, что направление групповой скорости дает направление потока энергии волны, одновременно меняет знак и коэффициент пропускания в (2). Это изменение знака означает, что энергия преломленной волны начинает с этого момента течь в сторону уходящей границы раздела, хотя направление распространения волны  $\mathbf{k}_2$  остается прежним ( $k_{2z}$  знака не меняет; см. рис. 1). Указанное обстоятельство не противоречит тому, что преломленная волна должна всегда отводить энергию от границы, так как ее групповая скорость вдоль  $\mathbf{u}$  всегда остается меньше скорости границы.

2) Аналогичное явление имеет место и для отраженной волны в том случае, когда падающая волна и граница раздела двигаются в одну сторону. Действительно, при некотором значении скорости границы групповая скорость отраженной волны также меняет знак, т. е. отраженная волна начинает двигаться в ту же сторону, что и падающая. В силу того, что ее групповая скорость всегда меньше скорости границы, отраженная волна распространяется в вакууме и не догоняет уходящую от нее границу. Естественно, что и в этом случае она осуществляет отвод энергии от границы.

Несмотря на то, что между этими двумя случаями существует некоторая аналогия, они все же представляют собой различные эффекты. Если у преломленной волны эффект обусловлен увлечением света движущейся средой, то для отраженной волны наблюдаемое изменение знака групповой скорости является релятивистским эффектом, связанным с движущейся границей.

У отраженной волны в случае 2 изменение знака фазовой скорости происходит одновременно с изменением знака групповой скорости, что связано лишь с изменением знака компоненты волнового вектора  $k_{1z}$  (в вакууме направления фазовой и групповой скорости совпадают). Оказывается, что в случае 1 изменения знака фазовой и групповой скорости осуществляются в разные моменты. Это является следствием того факта, что в движущейся среде изменение знака групповой скорости определяется увлечением средой,<sup>1</sup> а изменение знака фазовой скорости — изменением знака частоты преломленной волны.

Падающая на покоящуюся границу раздела электромагнитная волна возбуждает на границу дипольные и другие типы колебаний, которые дают излучение с одинаковой частотой в определенных направлениях — отраженную и преломленную волны. Когда граница раздела начинает двигаться, частоты отраженной и преломленной волн оказываются смещенными по Допплеру, а сами лучи — отклоненными. В результате при некоторой скорости границы частота преломленной волны обращается в нуль, т. е. в среде образуется статическая волна вида  $\exp i\mathbf{k}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, z)$ . С помощью (8), (8а) нетрудно убедиться в том, что  $|\mathbf{v}_{2\text{grp}}| \neq 0$  при  $\omega_2 = 0$ , и, таким образом, получающаяся статическая волна интересна тем, что имеет отличный от нуля поток энергии.

\* В дальнейшем везде, где говорится об изменении знака групповой скорости, подразумевается изменение знака составляющей групповой скорости на направление движения границы раздела.

В случае среды со слабой дисперсией из (5) и (8), (8а) следует, что  $(\mathbf{k}_2 \mathbf{v}_{2\text{гр}})_{\omega_2=0} = 0$ , т. е. энергия в такой статической волне течет перпендикулярно направлению распространения волны.

Отметим, что эти свойства могут появиться у преломленной волны лишь тогда, когда среда движется со скоростью, удовлетворяющей условию черенковского излучения в ней:  $\beta^2 > 1/\epsilon\mu$ .

4. При взаимодействии электромагнитной волны с движущейся границей раздела энергия падающей волны перераспределяется таким образом, что для нормального падения

$$R = R_\perp = R_i = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{\epsilon} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\mu}} \right)^2; \\ D = D_\perp = D_i = \left( \frac{1 + \beta \sqrt{\epsilon\mu}}{1 + \beta} \right)^2 \frac{4 \sqrt{\epsilon\mu}}{(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\mu})^2}. \quad (9)$$

Легко убедиться, что при  $\beta = u/c \neq 0$  сумма  $R + D \neq 1$ . Поэтому в этом случае перераспределение энергии приводит к обмену энергией между полем и движущейся средой.

Если подсчитать изменение электромагнитной энергии  $\Delta W$  в единицу времени в объеме цилиндра  $V$  единичного сечения, внутри которого находится в данный момент движущаяся граница, то

$$\Delta W = \int_V \left\{ \operatorname{div} \mathcal{S} + \frac{\partial w}{\partial t} \right\} dV, \quad (10)$$

где  $w = \frac{1}{8\pi} \{ (\overline{\mathbf{E}}, \overline{\mathbf{D}}) + (\overline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{H}}) \}$  — усредненная за период плотность электромагнитной энергии,  $\mathcal{S} = \frac{c}{4\pi} [\overline{\mathbf{E}}, \overline{\mathbf{H}}]$  — усредненная за период плотность потока электромагнитной энергии. Первое слагаемое в (10) дает поток энергии через поверхность цилиндра, а второе слагаемое — изменение электромагнитной энергии в объеме цилиндра при пересечении его границей раздела. Для нормального падения

$$\Delta W = \{ S_{2z} - (S_{1z} + S_{0z}) \} + u \{ w_2 - (w_1 + w_0) \} = \\ = uw_0 2 \frac{[\epsilon(\mu - 1) + \mu(\epsilon - 1)] (3 + \beta^2) + 4 \sqrt{\epsilon\mu} (\epsilon\mu - 1) \beta}{(1 + \beta)^2 (\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\mu})^2}.$$

Индексы 0, 1, 2 относятся соответственно к падающей, отраженной и преломленной волне.

Изменение электромагнитной энергии (10) равно работе  $A$  пондемоторных сил  $\mathbf{F}$  в единицу времени, совершающей над единичной площадкой границы раздела:

$$\Delta W = -A = -(\mathbf{F}, \mathbf{u}).$$

Для полей, не зависящих в среднем от времени [4],

$$F_\alpha = \int \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV = \{(T_2)_{\alpha\beta} + (T_1)_{\alpha\beta}\} n_\beta, \quad (11)$$

где  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ,  $(T_2)_{\alpha\beta}$  — компоненты тензора максвелловых напряжений на границе раздела во второй среде,  $(T_1)_{\alpha\beta}$  — компоненты тензора

нагружений на границе раздела в первой среде,  $n_\beta$  — компоненты единичного вектора нормали к поверхности границы раздела.

Воздействие пондеромоторных сил на поверхность раздела со стороны прошедшей волны, характеризуемое компонентами тензора нагрузок ( $T_2$ ) <sub>$\alpha\beta$</sub> , уравновешивается силами упругого натяжения, возникающими в среде. Поэтому сила, которая действует извне на среду в целом, определяется компонентами тензора электромагнитных нагрузок вне среды ( $T_1$ ) <sub>$\alpha\beta$</sub>  и является обычным световым давлением. В соответствии с формулой (11) эта сила равна

$$f_\alpha = (T_1)_{\alpha\beta} n_\beta = (T_{\alpha\beta}^{(0)} + T_{\alpha\beta}^{(1)}) n_\beta,$$

где  $T_{\alpha\beta}^{(0)}$ ,  $T_{\alpha\beta}^{(1)}$  — тензоры электромагнитных нагрузок для падающей и отраженной волн.

Когда первая среда является вакуумом,

$$f_\alpha = \frac{c k_0}{\omega_0} \left( \frac{c k_0}{\omega_0}, \mathbf{n} \right) w_0 + \frac{c k_1}{\omega_1} \left( \frac{c k_1}{\omega_1}, \mathbf{n} \right) w_1. \quad (12)$$

Выражения для  $k_0$ ,  $\omega_0$ ,  $k_1$ ,  $\omega_1$  даны в (1) и (2), а  $\omega_1 = r^2 \omega_0$ , где  $r = E_1/E_0$  приведены в статье [1].

Для нормального падения внешняя сила, действующая на единицу поверхности тела,

$$f_z = \left\{ 1 + \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 \left( \frac{\sqrt{\epsilon} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\mu}} \right)^2 \right\} w_0.$$

При наклонном падении появляется тангенциальная компонента силы, действующая в плоскости границы раздела.

5. Касательным падением считается падение под углом  $\alpha_0$ , близким к  $\pi/2$ . Характерной чертой касательного падения электромагнитной волны на движущуюся среду является наличие предельных углов отражения  $\alpha_{1l}$  ( $\operatorname{tg} \alpha_{1l} = -\frac{1 - \beta^2}{2\beta}$ ) и преломления  $\alpha_{2l}$  ( $\operatorname{tg} \alpha_{2l} = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{\epsilon\mu} - 1 + \beta^2 - \beta}$ ).

Это значит, что при  $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$  движущаяся граница отбрасывает часть энергии первичного потока  $S_0$  в направлении движения:

$$S_{1z} = -2\beta \frac{1 + \beta^2}{(1 - \beta^2)^2} \frac{\{\mu\beta - \sqrt{\epsilon\mu} - 1 + \beta^2\}^2}{\{\mu\beta + \sqrt{\epsilon\mu} - 1 + \beta^2\}^2} S_0,$$

а часть энергии переходит в среду в виде предельной преломленной волны, у которой поток энергии от границы

$$S_{2z} = \frac{4\mu\beta^2}{(1 - \beta^2)^2} \frac{[1 - \beta\sqrt{\epsilon\mu} - 1 + \beta^2][\sqrt{\epsilon\mu} - 1 + \beta^2 - \epsilon\mu\beta]}{[\mu\beta + \sqrt{\epsilon\mu} - 1 + \beta^2]^2} S_0.$$

Подобное явление отсутствует при отражении луча, падающего почти касательно на неподвижную границу раздела.

6. Определенный интерес представляет явление полного внутреннего отражения от движущейся границы раздела.

Используя известные граничные условия [1] и дисперсионное уравнение (6), можно получить связь между углом падения  $\alpha_0$  и преломления  $\alpha_2$ :

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_2} = \frac{c/n_1(\alpha_0) - u \cos \alpha_0}{c/n_2(\alpha_2) - u \cos \alpha_2}, \quad (13)$$

где выражение для фазовых скоростей  $c/n_i(\alpha_i)$  в каждой среде дается соотношением (8), (8а). Нужно учитывать только, что для первой среды  $n = n_1(\alpha_0)$ ,  $\alpha_1 = \epsilon_1\mu_1 - 1$ , а для второй среды  $n = n_2(\alpha_2)$ ,  $\alpha_2 = \epsilon_2\mu_2 - 1$ .

С помощью формулы (13) нетрудно получить выражение для угла полного внутреннего отражения  $\alpha_{0r}$ :

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha_{0r} = & \left[ (1 - \beta^2) \left( \frac{1 + \eta_1}{1 + \eta_2} - \beta^2 \right) + \frac{2\beta}{1 + \eta_2} \pm \frac{2\beta}{1 + \eta_2} \times \right. \\ & \left. \times \sqrt{\beta^2 + (1 - \beta^2)(\eta_1 - \eta_2)} \right] \left[ \left( \frac{1 + \eta_1}{1 + \eta_2} - \beta^2 \right)^2 - \frac{4\beta^2}{1 + \eta_2} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь знаки „—“ и „+“ соответствуют движению падающей волны по направлению движения границы и против него,  $\eta_i = (\epsilon_i\mu_i - 1)(1 - \beta^2)^{-1}$ .

Из выражения (14) видно, что для осуществления полного отражения от движущейся границы раздела совершенно не обязательно ограничение  $\epsilon_1\mu_1 > \epsilon_2\mu_2$ , которое имело место при отражении от покоящейся границы. При  $\beta \rightarrow 1$

а) для  $\epsilon_2\mu_2 \neq 1$

$$\sin \alpha_{0r} \simeq \frac{\sqrt{\epsilon_2\mu_2 - 1}}{\epsilon_1\mu_1 - \epsilon_2\mu_2} [\sqrt{\epsilon_1\mu_1 - \epsilon_2\mu_2 + 1} \pm 1] \sqrt{1 - \beta^2};$$

б) для  $\epsilon_2\mu_2 = 1$

$$\sin \alpha_{0r} \simeq \frac{\sqrt{\epsilon_1\mu_1} \pm 1}{\epsilon_1\mu_1 - 1} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

7. В полученных выше формулах не учитывались дисперсные свойства среды. Учет дисперсии сводится к тому, что во всех формулах постоянные  $\epsilon$  и  $\mu$  заменяются на функции  $\epsilon \left( \frac{\omega - ku}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$  и  $\mu \left( \frac{\omega - ku}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)$ ,

аргументами которых является смещенная по Допплеру частота. При  $\beta \rightarrow 1$  учет дисперсии становится принципиальным, так как, согласно (1) и (2), частота прошедшего сигнала будет достаточно большой. В этих условиях можно воспользоваться асимптотическими выражениями

$$\epsilon(\omega') = 1 - \omega_p'^2/\omega'^2, \quad \mu(\omega') \simeq 1,$$

где

$$\omega' = (\omega - ku)/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad \omega_p'^2 = 4\pi e^2 n'/m'.$$

Величины с индексом относятся к системе координат, где среда покоятся. При этом  $\epsilon\mu$  становится меньше единицы, что требует более тщательного исследования.

Очевидно, что кажущаяся расходимость выражения для коэффициента пропускания  $D$  при  $\epsilon \rightarrow \infty$  на самом деле не является проблемой, ибо с ростом  $\epsilon$  растет и частота  $\omega_2$  прошедшего сигнала (см.(2)). Это, в свою очередь, требует, во первых, учета дисперсных свойств среды, а во вторых, при  $\epsilon \rightarrow \infty$   $\omega_2 \rightarrow \infty$  и длина волны в среде  $\lambda \rightarrow 0$ , т. е. становится неприменимым макроскопический подход к задаче.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Б. М. Болотовскому за постановку задачи и за постоянную помощь и В. Л. Гинзбургу — за полезное обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1171 (1961).
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1958.
3. Б. М. Болотовский, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1346 (1959).
4. В. Паули, Теория относительности, ГИТТЛ, М.—Л., 1947.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
9 мая 1961 г.,  
после исправления  
2 марта 1962 г.

## ELECTROMAGNETIC WAVE INTERACTION WITH MOVING INTERFACE OF TWO MEDIA

S. N. STOLYAROV

Some peculiarities are considered of electromagnetic wave reflection from a moving interface of two media. A more detailed analysis of an electromagnetic wave convection by a moving media is given.

## ОЦЕНКА ФЛЮКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ПРИ НАЛИЧИИ НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Э. П. Гулин

С помощью метода возмущений дается оценка флюктуаций амплитуды и фазы звуковой волны при наличии статистически шероховатой границы раздела двух сред. На основании полученных результатов делается попытка оценить флюктуации амплитуды и фазы сигнала, вызываемые неровностями слоя температурного скачка в море.

В ряде работ [1-3] исследовалось рассеяние плоских и сферических волн, распространяющихся в средах со случайными неоднородностями показателя преломления, а также флюктуации амплитуды и фазы, возникающие вследствие наложения на первичное поле рассеянных волн. При этом среда считалась целиком заполненной случайными неоднородностями, для характеристики которых вводилась пространственная функция автокорреляции флюктуаций показателя преломления. На основе таких представлений получены выражения для средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы звукового поля. В некоторых случаях, однако, неоднородности могут быть сосредоточены в тонких слоях, а не заполнять целиком все пространство. Например, в море температурные пульсации, обусловливающие изменчивость амплитуды и фазы прямого сигнала в точке приема, сосредоточены в слое температурного скачка. Одной из возможных причин рассеяния и флюктуаций прямого звука при прохождении этого слоя, указанной Г. Д. Малюжинцем, являются внутренние гравитационные волны, которые могут возбуждаться в области значительных градиентов температуры (плотности). В работе [4] получено выражение для средней интенсивности поля, рассеянного неровной границей в локационном направлении, и рассчитан коэффициент рассеяния в применении к рассеянию звука неровностями слоя температурного скачка в море. В настоящей работе дается оценка флюктуаций амплитуды и фазы прямого поля при наличии неровной рассеивающей границы.

Рассмотрим простейший случай, когда внутренние волны возникают на границе раздела двух сред с различными плотностями и температурами. Звуковое давление, создаваемое точечным источником, монохроматических колебаний, находящимся в точке  $Q_0$ , описывается уравнением Гельмгольца

$$\nabla^2 p + k^2 n^2(x, y, z)p = -4\pi\delta(Q - Q_0)$$

(фактор  $e^{-i\omega t}$  опущен). Зависимостью плотности от координат пренебрегаем, поскольку связанные с ней акустические эффекты при наблюдаемых в море градиентах плотности имеют следующий порядок малости по сравнению с акустическими эффектами, вызванными зависимостью скорости звука (показателя преломления) от координат.

В нулевом приближении ( $n=1$ ) решением уравнения Гельмгольца является сферическая волна  $p=e^{ikR}/R$ . Если показатель преломления

отличается от единицы на малую величину, то в решении уравнения появляется дополнительный член, который содержит в общем случае рефракционную поправку и рассеянное поле:

$$p_1 = \frac{k^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2} [n^2(x, y, z) - 1] dx dy dz, \quad (1)$$

где  $k$ —волновое число,  $R_1$  и  $R_2$ —расстояния от некоторой точки в пространстве до источника и приемника звука.

Зададим форму границы раздела двух сред для некоторого момента времени  $t_0$  в виде  $z=F(x, y)$  (в отсутствие неровностей граница раздела совпадает с плоскостью  $z=0$ ) и предположим, что показатель преломления выше и ниже границы раздела можно записать соответственно в виде  $n_1=1-\epsilon/2$ ,  $n_2=1+\epsilon/2$ . Преобразуем внутренний интеграл по  $z$  в (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [n^2 - 1] \frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2} dz &= -\epsilon \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2} dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{-\infty} \frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2} dz \right] + 2\epsilon \int_0^{F(x, y)} \frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2} dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Первый член в правой части (2) дает при подстановке в (1) рефракционную поправку, учитывающую отражение от границы раздела в отсутствие неровностей; второй член содержит собственно рассеяние, обусловленное шероховатостями границы раздела двух сред.

Для дальнейших расчетов применим метод возмущений в обычной форме. Перейдем к выражениям для флюктуаций амплитуды  $\delta A/A = -Re(p_1/p_0)$  и фазы  $\delta\varphi = Im(p_1/p_0)$ , где в качестве  $p_0$  возьмем сферическую волну  $p_0 = e^{ikR_0/R_0}$ , которая является решением задачи в отсутствие границы раздела:

$$\begin{aligned} \frac{\delta A}{A} &= \frac{k^2 \epsilon R_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{F(x, y)} \int_0^{\infty} \frac{\cos k(R_1 + R_2 - 2R_0)}{R_1 R_2} dx dy dz; \\ \delta\varphi &= \frac{k^2 \epsilon R_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{F(x, y)} \int_0^{\infty} \frac{\sin k(R_1 + R_2 - 2R_0)}{R_1 R_2} dx dy dz. \end{aligned} \quad (3)$$

Предположим далее, что источник звука расположен ниже границы раздела в точке с координатами  $(0, 0, z_0)$ , а приемник—в точке с координатами  $(L, 0, z_0)$ . Тогда  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_0$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z_0 - z)^2}; \quad R_2 = \sqrt{(L - x)^2 + y^2 + (z_0 - z)^2}; \\ R_0 &= \sqrt{L^2/4 + z_0^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве области интегрирования возьмем площадку на неровной границе, вытянутую вдоль оси  $x$  и сплюснутую в поперечном направлении так, чтобы при интегрировании можно было считать  $|y| \ll x$  и  $z_0 \ll x$ . Такие условия реализуются, например, при рассеянии на неровной границе импульсных сигналов достаточно малой длительности.

Считая также, что  $|z| \ll z_0$ , заменим  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_0$  приближенными выражениями:

$$R_1 \approx x + \frac{y^2 + z_0^2}{2x} - \frac{z_0 z}{x}; \quad R_2 \approx L - x + \frac{y^2 + z_0^2}{2(L-x)} - \frac{z_0 z}{L-x}; \quad (5)$$

$$2R_0 \approx L + \frac{2z_0^2}{L}.$$

При этом мы должны потребовать выполнения неравенства

$$\frac{kz_0^2}{x_0} \frac{z_0^2}{x_0^2} \ll 1, \quad (6)$$

где  $x_0 = L/2 - \Delta$ , а  $2\Delta$  — размер рассеивающей области на границе раздела вдоль оси  $x$ . С учетом сделанных приближений интегралы для флюктуаций амплитуды и фазы примут такой вид:

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{k^2 \epsilon L}{2\pi} \int_{x_0}^{L-x_0} \int_{-l}^l \int_0^F \frac{1}{x(L-x)} \cos \left\{ k \left[ \frac{L(y^2 + z_0^2)}{2x(L-x)} - \frac{2z_0^2}{L} - \frac{z_0 z L}{x(L-x)} \right] \right\} dx dy dz; \quad (7)$$

$$\delta \varphi = \frac{k^2 \epsilon L}{2\pi} \int_x^{L-x_0} \int_{-l}^l \int_0^F \frac{1}{x(L-x)} \sin \left\{ k \left[ \frac{L(y^2 + z_0^2)}{2x(L-x)} - \frac{2z_0^2}{L} - \frac{z_0 z L}{x(L-x)} \right] \right\} dx dy dz. \quad (8)$$

Интегралы (7) и (8) соответствуют приближению Френеля в теории дифракции. Пусть в рассматриваемой области интегрирования выполняется условие

$$kz_0 F L / x(L-x) \ll 1. \quad (9)$$

Тогда, интегрируя в (7) и (8) по  $z$ , получим:

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{k^2 \epsilon L}{2\pi} \int_{x_0}^{L-x_0} \int_{-l}^l \frac{1}{x(L-x)} \cos \left\{ k \left[ \frac{L(y^2 + z_0^2)}{2x(L-x)} - \frac{2z_0^2}{L} \right] \right\} F(x, y) dx dy;$$

$$\delta \varphi = \frac{k^2 \epsilon L}{2\pi} \int_{x_0}^{L-x_0} \int_{-l}^l \frac{1}{x(L-x)} \sin \left\{ k \left[ \frac{L(y^2 + z_0^2)}{2x(L-x)} - \frac{2z_0^2}{L} \right] \right\} F(x, y) dx dy.$$

Интегрирование в (10) проводится по прямоугольной площадке со сторонами  $2\Delta = L - 2x_0$  и  $2l$ .

Пусть  $F(x, y)$  — однородная изотропная случайная функция координат, и пространственная функция автокорреляции смещений границы раздела относительно нулевого уровня имеет такой вид:

$$\bar{F}(x_1, y_1) \bar{F}(x_2, y_2) = \bar{F}_0^2 \exp \left[ - \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{a^2} \right], \quad (11)$$

где  $a$  — радиус корреляции. Перейдем к новым переменным интегрирования  $\xi = x_1 - x_2$ ,  $\eta = y_1 - y_2$ ,  $x = (x_1 + x_2 - L)/2$ ,  $y = (y_1 + y_2)/2$ . Запишем выражения для средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы, считая, что радиус корреляции неровностей границы значительно меньше размеров рассеивающей площадки ( $a \ll \Delta$ ,  $a \ll l$ ):

$$\frac{(\delta A)^2}{A^2} = J_1 + J_2; \quad (\overline{\delta\varphi})^2 = J_1 - J_2,$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{k^2 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2}{8\pi^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\xi^2 + \eta^2)/a^2}}{S_1 S_2} \cos \left[ \frac{(y + \eta/2)^2 + z_0^2}{2S_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(y - \eta/2)^2 + z_0^2}{2S_2} \right] dx dy d\xi d\eta; \\ J_2 &= \frac{k^2 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2}{8\pi^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(\xi^2 + \eta^2)/a^2}}{S_1 S_2} \cos \left[ \frac{(y + \eta/2)^2 + z_0^2}{2S_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(y - \eta/2)^2 + z_0^2}{2S_2} - \frac{4kz_0^2}{L} \right] dx dy d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь введены обозначения

$$S_1 = x_1(L - x_1)/kL, \quad S_2 = x_2(L - x_2)/kL.$$

С целью упрощения интегралов (12) введем ряд предположений. Будем считать, что радиус корреляции неровностей не превышает поперечный размер зоны Френеля ( $ka^2/L \ll 1$ ), а размеры рассеивающей площадки малы по сравнению с расстоянием между источником и приемником звука ( $\Delta \ll L$ ,  $l \ll L$ ), причем благодаря неравенству  $l \gg a$  выполняется условие  $kal/L > 1$ . С учетом введенных приближений интегралы (12) принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} J_1 &\simeq \frac{2k^4 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2}{\pi^2 l^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2 + \eta^2)/a^2} \cos \left[ \frac{4k}{L} y\eta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{16kx\xi z_0^2}{L^3} \right] dx dy d\xi d\eta; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} J_2 &\simeq \frac{2k^4 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2}{\pi^2 L^2} \int_{-\Delta}^{\Delta} \int_{-l}^l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2 + \eta^2)/a^2} \cos \left[ \frac{4k}{L} \left( y^2 + \frac{\eta^2}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4kz_0^2}{L^3} x^2 \right] dx dy d\xi d\eta. \end{aligned}$$

После интегрирования в (13) получим:

$$J_1 = \frac{1}{8} \frac{k^2 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2 L^2}{z_0^2} \Phi \left( \frac{8kz_0^2}{L^3} a \Delta \right);$$

$$J_2 = \frac{1}{2} k^2 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2 \frac{k a^2}{z_0} \frac{1}{\sqrt[4]{1+k^2 a^4/L^2}} \left\{ \cos \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k a^2}{L} \right) \times \right. \\ \left. \times [C(t) - S(t)] - \sin \left( \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k a^2}{L} \right) [C(t) + S(t)] \right\}, \quad (14)$$

где  $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-x^2} dx$  — интеграл вероятностей,  $C(t) = \int_0^t \cos(\pi t^2/2) dt$  и  $S(t) = \int_0^t \sin(\pi t^2/2) dt$  — интегралы Френеля, а  $t = \sqrt{8k z_0^2 \Delta^2 / \pi L^3}$ .

Можно показать, что при выполнении условия  $k a^2 / L \ll 1$  второй интеграл пренебрежимо мал по сравнению с первым. Тогда в случае  $8k z_0^2 \Delta > L^3$  из (14) получаем:

$$\frac{(\delta A)^2}{A^2} \simeq \frac{(\delta \varphi)^2}{(\delta \varphi)^2} = \frac{1}{8} k^2 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2 \frac{L^2}{z_0^2}, \quad (15)$$

если же  $\frac{8k z_0^2}{L^3} \Delta \ll 1$ , то

$$\frac{(\delta A)^2}{A^2} = \frac{(\delta \varphi)^2}{(\delta \varphi)^2} = \frac{k^3 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta}{L}. \quad (15a)$$

Второй интеграл следует учитывать лишь при условии  $k a^2 / L \sim 1$ , когда радиус корреляции неровностей сравним с поперечным размером зоны Френеля (при этом флюктуации амплитуды могут оказаться заметно слабее флюктуаций фазы).

Рассмотрим случай квазигармонической шероховатой границы, когда функция пространственной автокорреляции смещений границы раздела двух сред имеет вид:

$$\bar{F}_1 \bar{F}_2 = \bar{F}_0^2 e^{-(x_1 - x_2)^2/a^2} \cos[q(x_1 - x_2)]. \quad (16)$$

Считая (с последующей проверкой), что существенная для рассеяния область ограничена площадкой, определяемой неравенствами  $|y| \ll x$  и  $z_0 \ll x$ , и выполняя в (10) интегрирование по  $y$  при условии  $k l^2 / L \gg 1$ , запишем интегралы для флюктуаций амплитуды и фазы в приближении Френеля:

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{k^2 \varepsilon L}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{kL}} \int \frac{1}{\sqrt{x(L-x)}} \cos \left[ \frac{kL z_0^2}{2x(L-x)} - \right. \\ \left. - \frac{2k z_0^2}{L} + \frac{\pi}{4} \right] F(x) dx; \quad (17)$$

$$\delta \varphi = \frac{k^2 \varepsilon L}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{kL}} \int \frac{1}{\sqrt{x(L-x)}} \sin \left[ \frac{kL z_0^2}{2x(L-x)} - \frac{2k z_0^2}{L} + \frac{\pi}{4} \right] F(x) dx.$$

Выражения для средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы можно записать в виде:

$$J = \frac{k^3 \varepsilon^2 L \bar{F}_0^2}{16\pi} \int \int \int \frac{e^{-(x_1 - x_2)^2/a^2}}{\sqrt{V_{x_1}(L-x_1) x_2(L-x_2)}} [ \pm e^{i(f_1 + f_2 + qx_1 - qx_2)} \pm \\ \pm e^{-i(f_1 + f_2 + qx_1 - qx_2)} \pm e^{i(f_1 + f_2 - qx_1 + qx_2)} \pm e^{-i(f_1 + f_2 - qx_1 + qx_2)} + \\ + e^{i(f_1 - f_2 + qx_1 - qx_2)} + e^{-i(f_1 - f_2 + qx_1 - qx_2)} + e^{i(f_1 - f_2 - qx_1 + qx_2)} + \\ + e^{-i(f_1 - f_2 - qx_1 + qx_2)} ] dx_1 dx_2, \quad (18)$$

где

$$f_1 = \frac{kLz_0^2}{2x_1(L-x_1)} - \frac{2kz_0^2}{L} + \frac{\pi}{4}; \quad f_2 = \frac{kLz_0^2}{2x_2(L-x_2)} - \frac{2kz_0^2}{L} + \frac{\pi}{4},$$

а знаки плюс и минус относятся соответственно к флюктуациям амплитуды и фазы.

Таким образом, выражения для средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы свелись к сумме интегралов типа

$$I = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) e^{i f(x_1, x_2)} dx_1 dx_2, \quad (19)$$

которые можно оценить методом стационарной фазы. В результате (19) примет такой вид:

$$I = \frac{2g(x_1, x_2)}{\sqrt{f_{x_1 x_1} f_{x_2 x_2}}} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 + \frac{u}{\sqrt{2f_{x_1 x_1}}} \left( \frac{f_{x_1 x_1}}{f_{x_1 x_1}} - \frac{2g_{x_1}}{g} \right) + \right. \\ \left. + \frac{v}{\sqrt{2f_{x_2 x_2}}} \left( \frac{f_{x_2 x_2}}{f_{x_2 x_2}} - \frac{2g_{x_2}}{g} \right) \right]^{-1} e^{i(u^2 + v^2)} du dv. \quad (20)$$

Знаменатель в подынтегральном выражении (20) содержит поправочные члены, которые в случае применимости метода стационарной фазы должны быть значительно меньше единицы (по модулю). Значения всех функций в (20) взяты в точках стационарной фазы, координаты которых определяются из уравнения

$$z_0^2/(L-x)^2 - z_0^2/x_2^2 = \pm 2q/k. \quad (21)$$

Считаем, что соблюдено условие  $q(L^2/4 + z_0^2)^{3/2} / k a z_0^2 \gg 1$ . Тогда можно не учитывать первые четыре члена в подынтегральном выражении (18) (это заключение следует из рассмотрения конечного результата, записанного в общем виде). В случае  $qL^2/kz_0^2 \ll 1$  точки стационарной фазы лежат в окрестности  $x_0 \approx L/2$ , а выражения для флюктуаций амплитуды и фазы, полученные после интегрирования в (20), совпадают с (15). При выполнении обратного неравенства  $qL^2/kz_0^2 \gg 1$  точки стационарной фазы смещаются ближе к источнику и приемнику звука. Из уравнения (21) в этом случае получаем:

$$x_1 \approx z_0 \sqrt{k/2q}; \quad x_2 \approx L - z_0 \sqrt{k/2q}. \quad (22)$$

Отсюда для средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы будем иметь:

$$\frac{(\delta A)^2}{A^2} = \frac{(\delta \varphi)^2}{(\delta \varphi)^2} = \frac{k^2 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2}{2} \frac{x_1^2}{z_0^2} = \frac{k^3 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2}{4q}. \quad (23)$$

В общем случае средние квадраты флюктуаций амплитуды и фазы равны

$$\frac{\overline{(\delta A)^2}}{A^2} = \frac{\overline{(\delta\varphi)^2}}{A^2} = \frac{k^2 \varepsilon^2 \bar{F}_0^2 L}{2z_0^2} \frac{x_1^2 (L-x_1)^2}{x_1^3 + (L-x_1)^3}, \quad (24)$$

где  $x_1 < L/2$  определяется из уравнения (21). Как показывают расчеты, поправка в знаменателе подынтегрального выражения (20) достаточно мала лишь при выполнении условий  $ka^2 z_0^2 / x_1^3 \gg 1$  и  $qa \gg 1$ .

Если функция пространственной автокорреляции смещений границы раздела имеет вид

$$\bar{F}_1 F_2 = \bar{F}_0^2 e^{-(y_1 - y_2)^2/a^2} \cos[q(y_1 - y_2)], \quad (25)$$

то, проведя аналогичные предыдущим расчеты, для координат точек стационарной фазы будем иметь  $x_1 \approx L/2$ ,  $y \approx 0$  (предполагается, что размеры неровностей значительно больше длины звуковой волны). Для средних квадратов флюктуаций амплитуды и фазы при условии  $q \sqrt{L^2/4 + z^2}/ka \gg 1$  получим формулу, совпадающую с (15). Поправка в знаменателе подынтегрального выражения (20) пренебрежимо мала, если радиус корреляции неровностей значительно больше поперечного размера зоны Френеля ( $ka^2/L \gg 1$ ) и  $qa \gg 1$ .

Полученные результаты позволяют оценить флюктуации амплитуды и фазы не только в случае резкой границы раздела двух сред, но и при наличии переходного слоя некоторой толщины. В случае размытой границы можно ввести эквивалентную резкую границу раздела  $z = F_1(x, y)$ , где

$$F_1(x, y) = -\frac{1}{2\varepsilon} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon(x, y, z) dz. \quad (26)$$

Выводы, полученные для резкой границы раздела, можно перенести и на общий случай переходного слоя конечной толщины; правда, слой должен быть достаточно тонким для того, чтобы воспользоваться принятым приближением (6).

В заключение с помощью формул (14) и (23) проведем оценку флюктуаций амплитуды и фазы при рассеянии звука на внутренних волнах. Для параметров, входящих в (14), выберем следующие числовые значения:  $k = 60 \text{ м}^{-1}$  ( $f = 15 \text{ кГц}$ ),  $\varepsilon^2 = 2,2 \cdot 10^{-6}$  ( $\Delta t \approx 0,5^\circ\text{C}$ ,  $h=20 \text{ см}$ ),  $\sqrt{\bar{F}_0^2} = 10 \text{ см}$ ,  $a=5 \text{ м}$ ,  $L=3 \text{ км}$ ,  $\Delta=500 \text{ м}$ ,  $z_0=10 \text{ м}$ . Тогда с помощью выражений (14) получим:  $\sqrt{\overline{(\delta A)^2}}/A \approx \sqrt{\overline{(\delta\varphi)^2}} \approx 7 \cdot 10^{-2}$ . В случае продольной (относительно трассы распространения звука) квазигармонической шероховатости из формулы (23) при  $k=60 \text{ м}^{-1}$ ,  $\varepsilon^2 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ ,  $\sqrt{\bar{F}_0^2} = 10 \text{ см}$ ,  $a = 8 \text{ м}$ ,  $L = 2 \text{ км}$ ,  $z_0 = 10 \text{ м}$ ,  $q = 0,8$  ( $\Delta = 8 \text{ м}$ ) будем иметь:  $\sqrt{\overline{(\delta A)^2}}/A = \sqrt{\overline{(\delta\varphi)^2}} = 4 \cdot 10^{-2}$ . Наконец, в случае поперечной квазигармонической шероховатости при тех же значениях параметров, согласно формуле (15), получим:  $\sqrt{\overline{(\delta A)^2}}/A = \sqrt{\overline{(\delta\varphi)^2}} = 0,3$ .

Из приведенных примеров следует, что в некоторых случаях рассеяние звуковых сигналов на внутренних волнах может вызывать заметные флюктуации амплитуды и фазы в точке приема.

Заметим, что при малых углах скольжения коэффициент отражения на границе раздела двух сред может быть близок к единице, и следовало бы в качестве нулевого приближения  $p_0$  взять сумму полей прямой волны и волны, отраженной от границы в отсутствие неровностей. При этом в интерференционных минимумах должно наблюдаться заметное нарастание флюктуаций амплитуды и фазы; к сожалению, используемый нами метод возмущений в этих областях неприменим. Для оценки же флюктуаций в других областях (исключая окрестности интерференционных минимумов) можно приблизенно пользоваться принятым в расчетах нулевым приближением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
2. D. J. Mintzer, J. Acoust. Soc. Amer., 26, 186 (1954).
3. В. Н. Каравайников, Акуст. ж., 3, 165 (1957).
4. Г. Д. Малюжинец, Акуст. ж., 5, 70 (1959).

Поступила в редакцию  
18 сентября 1961 г.

#### ESTIMATION OF FLUCTUATIONS OF ACOUSTIC WAVE AMPLITUDE AND PHASE IN PRESENCE OF ROUGH INTERFACE OF TWO MEDIA

*E. P. Gulin*

By means of perturbation method the estimation is given of fluctuations of acoustic wave amplitude and phase in presence of statistically rough interface of two media. On the basis of results obtained an attempt is made to estimate the fluctuations of signal amplitude and phase caused by roughness of temperature discontinuity layer in the sea.

## К ТЕОРИИ СПЕКТРОСКОПИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА НАСЫЩЕНИЯ

Ф. В. Бункин

Рассматривается спектральная поглощающая способность среды в нелинейном приближении при произвольном немонохроматическом поле излучения. Показано, что спектральный коэффициент поглощения среды является, вообще говоря, нелинейным функционалом от спектральной интенсивности излучения. Анализ ведется методом последовательных приближений, причем первые члены всех разложений соответствуют «линейной спектроскопии», а высшие члены—эффекту насыщения. Вводится понятие восприимчивости (магнитной или электрической)  $n$ -го порядка, соответствующей  $n$ -му нелинейному члену разложения намагничения (или поляризации) среды во внешнем переменном поле. Показано, что каждая такая величина удовлетворяет дисперсионным соотношениям типа соотношений Крамерса—Кронига.

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Спектроскопический эффект насыщения теоретически исследовался до сих пор, главным образом, лишь для монохроматического поля излучения [1, 2]. Приближенное рассмотрение этого эффекта для случая квазимонохроматического поля имеется в [3]. В настоящее время в связи с распространением принципов „квантового усилителя и генератора“ на инфракрасный и оптический диапазоны длин волн [4] задача об эффекте насыщения в немонохроматическом поле приобретает существенное значение. С такой задачей мы сталкиваемся, например, при рассмотрении распространения излучения в среде с отрицательным поглощением [4–6]. Если даже входящее в такую среду излучение является монохроматическим, то из-за спонтанного излучения самой среды (а для сред с отрицательным поглощением оно непременно существует) распространяющееся через нее излучение становится все равно немонохроматическим. При этом, поскольку интенсивность излучения в среде нарастает, в конце концов становятся существенными нелинейные эффекты.

В дальнейшем, ради определенности, мы будем проводить все рассмотрение для образца (среды), обладающего лишь магнитными потерями (например, парамагнитный кристалл), хотя полученные в работе общие выводы в равной мере справедливы и для образцов, обладающих как магнитными, так и электрическими потерями.

При учете нелинейных эффектов прежде всего необходимо выяснить вопрос о том, что следует понимать под спектральной поглощающей способностью (коэффициентом поглощения)  $\alpha_\omega$  исследуемого образца. В линейном приближении эта величина определяется так, что средняя мощность поглощения  $P_\omega$  энергии электромагнитного поля в единице объема вещества на единичный спектральный интервал равна

$$P_\omega = c \alpha_\omega G_H(\omega), \quad (1.1)$$

где  $c$ —скорость света, а  $G_H(\omega)$ —спектральная интенсивность перемен-

ногого магнитного поля  $H(t)$ \*. При этом для  $\alpha_\omega$  имеем известное выражение:

$$\alpha_\omega = \frac{\omega}{c} \chi_1''(\omega), \quad (1.2)$$

где  $\chi_1''(\omega)$  — мнимая часть магнитной восприимчивости среды  $\chi_1(\omega) = \chi_1'(\omega) + i\chi_1''(\omega)$ \*\*. Для монохроматического поля  $H(t) = H_1 \cos(\omega_1 t)$ , когда

$$G_H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle H(t)H(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{H_1^2}{4} \{ \delta(\omega - \omega_1) + \delta(\omega + \omega_1) \}, \quad (1.3)$$

для полной (интегральной) мощности поглощения  $P$ , на основании (1.1) и (1.2), получаем хорошо известный результат (при этом необходимо учесть, что  $\chi_1'(\omega) = -\chi_1''(-\omega)$ ):

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} p_\omega d\omega = \frac{\omega_1}{2} \chi_1''(\omega_1) H_1^2. \quad (1.4)$$

При учете нелинейных эффектов в среде величина  $p_\omega$  сохраняет свой прежний смысл, в то время как величина  $\alpha_\omega$ , определяемая соотношением (1.1), его теряет. Дело в том, что, как будет показано ниже, для нелинейной среды величина  $\alpha_\omega$  становится, вообще говоря, нелинейным функционалом от спектральной интенсивности поля  $G_H(\omega)$ . При этом  $\alpha_\omega d\omega$  уже не определяет мощности поглощения в интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$  при единичной спектральной интенсивности поля  $G_H(\omega)$  в этом интервале. Тем не менее, по причине практического удобства понятием спектральной поглощающей способности, формально определяемым соотношением (1.1), пользуются и в нелинейном приближении (см., например, [4–6]). Мы также будем пользоваться этим понятием.

Наша задача будет заключаться в том, чтобы выяснить общий характер функционала  $\alpha_\omega [G_H(\omega)]$  и получить конкретные выражения для него в случае слабого насыщения. Будут получены также некоторые результаты, касающиеся эффекта насыщения в переменном поле с достаточно широким спектром.

## 2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОГЛОЩАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

Полная (интегральная) средняя мощность  $P$ , поглощаемая в единице объема произвольной стационарной среды, при произвольном характере спектра магнитного поля  $H(t)$ , равна\*\*\*

$$P = - \langle M(t) \dot{H}(t) \rangle = \langle \dot{M}(t) H(t) \rangle, \quad (2.1)$$

где  $M(t)$  — проекция намагничения среды на направление поля  $H(t)$ . Далее мы будем считать, что процесс  $H(t)$  (а следовательно, и  $M(t)$ ) представляет собою стационарный случайный процесс. Очевидно, что

\* Мы для простоты предполагаем, что переменное поле  $H(t)$  линейно поляризовано (в случае парамагнитного резонанса — перпендикулярно постоянному магнитному полю).

\*\* Смысл индекса «1» станет ясен из дальнейшего.

\*\*\* Если среда обладает и электрическими потерями, то к правой части (2.1) должен быть прибавлен член  $\langle \dot{P}(t)E(t) \rangle = -\langle P(t)\dot{E}(t) \rangle$ , где  $E(t)$  и  $P(t)$  — соответственно напряженность электрического поля и поляризация среды.

тем самым будет учитываться и случай периодических (или почти периодических) процессов  $H(t)$ . Скобки в формуле (2.1) означают усреднение по ансамблю.

Разлагая процессы  $H(t)$  и  $M(t)$  в интегралы Фурье и пользуясь тем, что для спектральных амплитуд  $H_\omega$  и  $M_\omega$  справедливы соотношения [7]

$$\langle M_\omega H_\omega^* \rangle = G_{MH}(\omega) \delta(\omega - \omega'); \quad (2.2)$$

$$G_{MH}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle M(t + \tau) H(t) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (2.3)$$

для мощности  $P$  получаем:

$$P = -i \int_{-\infty}^{\infty} \omega G_{MH}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega G''_{MH}(\omega) d\omega, \quad (2.4)$$

где

$$G''_{MH}(\omega) = \text{Im} G_{MH}(\omega).$$

Последнее равенство в (2.4) написано на основании следующих свойств симметрии функций  $G'_{MH}(\omega) = \text{Re} G_{MH}(\omega)$  и  $G''_{MH}(\omega)$ , вытекающих из (2.3):

$$G'_{MH}(\omega) = G'_{MH}(-\omega), \quad G''_{MH}(\omega) = -G''_{MH}(-\omega). \quad (2.5)$$

Таким образом, спектральная мощность поглощения  $p_\omega = \omega G''_{MH}(\omega)$ , а спектральная поглощательная способность  $\alpha_\omega$ , согласно (1.1), равна

$$\alpha_\omega = \frac{\omega}{c} G''_{MH}(\omega) / G_H(\omega). \quad (2.6)$$

Рассмотрим некоторые общие свойства величины  $\alpha_\omega$ . Во-первых, в линейном приближении, когда  $M_\omega = \chi_1(\omega) H_\omega$  и поэтому  $G''_{MH}(\omega) = \chi_1(\omega) G_H(\omega)$ , формула (2.6), как и должно быть, переходит в формулу (1.2). Далее, на основании (2.5) и свойства четности спектральной интенсивности  $G_H(\omega) = G_H(-\omega)$  заключаем, что  $\alpha_\omega = \alpha_{-\omega}$ . Покажем теперь, что при заданном значении  $\omega$  величина  $\alpha_\omega$  является, вообще говоря, нелинейным функционалом (но не функцией, как это принимается в [5, 6]) от спектральной интенсивности  $G_H(\omega)$ . Мы при этом предположим, что процесс  $H(t)$  является гауссовым процессом. Только при наличии этого свойства у процесса  $H(t)$  величина  $\alpha_\omega$  является функционалом от спектральной интенсивности  $G_H(\omega)$  (спектральной характеристики второго момента) и не зависит от спектральных характеристик более высоких моментов. Само предположение о гауссовом характере процесса  $H(t)$  часто может быть хорошо обосновано как с физической, так и с математической точек зрения; мы сейчас не станем заниматься этим вопросом\*.

В общем случае намагничение  $M(t) = A[H(t)]$ , где  $A$ —некоторый нелинейный оператор. В Приложении показано (см. также следующий раздел), что этот оператор при весьма общих предположениях может быть представлен в виде:

$$M(t) = A[H(t)] = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} J_m(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) H(t - \tau_1) \dots H(t - \tau_m) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_m. \quad (2.7)$$

\* Заметим, что в том случае, когда немонохроматичность поля  $H(t)$  обусловлена, например, спонтанным излучением среды, гауссовые свойства  $H(t)$  следуют непосредственно из центральной предельной теоремы вероятностей.

Для вычислительных целей такое представление оператора  $A[H(t)]$ , разумеется, эффективно лишь при достаточно слабом поле  $H(t)$  (слабом эффекте насыщения), когда можно ограничиться несколькими первыми членами суммы (2.7). Однако для нас это обстоятельство несущественно.

Вычислим на основании (2.3), (2.6) и (2.7) величину  $G_{MH}''(\omega)$ , предварительно введя понятие магнитной восприимчивости нелинейной среды  $n$ -го порядка  $\chi_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ :

$$\chi_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \int_0^\infty J_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \exp[i(\omega_1\tau_1 + \dots + \omega_n\tau_n)] d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (2.8)$$

Очевидно, что восприимчивость первого порядка  $\chi_1(\omega)$  совпадает с обычно используемой в линейном приближении магнитной восприимчивостью.

Отметим свойства функций  $\chi_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \chi'_n + i\chi''_n$ , вытекающие из ее определения (2.8). Во-первых,

$$\begin{aligned} \chi'_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) &= \chi'_n(-\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n), \\ \chi''_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) &= -\chi''_n(-\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n); \end{aligned} \quad (2.9)$$

во-вторых, поскольку функция  $\chi_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  аналитична в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega_i$  для любого  $i=1, 2, \dots, n$  (см. Приложение), функции  $\chi'_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  и  $\chi''_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  должны быть связаны дисперсионными соотношениями Крамерса—Кронига [7]:

$$\begin{aligned} \chi'_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''_n(\omega_1, \dots, \overset{i}{\omega_i}, \dots, \omega_n)}{\omega_i - \omega_i} d\omega'_i; \\ \chi''_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'_n(\omega_1, \dots, \overset{i}{\omega_i}, \dots, \omega_n)}{\omega_i - \omega_i} d\omega'_i \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Умножим правую часть формулы (2.7), взятую для момента  $(t+\tau)$ , на  $H(t)$  и усредним. Поскольку  $\langle H(t) \rangle = 0$ , то после усреднения останутся лишь члены с нечетными  $n=(2m+1)^*$ :

$$\begin{aligned} \langle M(t+\tau)H(t) \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} J_{2m+1}(\tau_1, \dots, \tau_{2m+1}) \times \\ &\quad \times \langle H(t+\tau-\tau_1)H(t+\tau-\tau_2) \dots H(t+\tau-\tau_{2m+1})H(t) \rangle d\tau_1 \dots d\tau_{2m+1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для гауссовых процессов  $H(t)$  справедлива формула (см., например, [8]):

$$\begin{aligned} \langle H(t_1)H(t_2) \dots H(t_{2k}) \rangle &= \psi(t_{2k-1} - t_{2k}) \langle H(t_1)H(t_2) \dots H(t_{2k-2}) \rangle + \\ &+ \psi(t_{2k-2} - t_{2k}) \langle H(t_1)H(t_2) \dots H(t_{2k-3})H(t_{2k-1}) \rangle + \\ &\quad \dots \\ &+ \psi(t_1 - t_{2k}) \langle H(t_2)H(t_3) \dots H(t_{2k-1}) \rangle, \end{aligned} \quad (2.12)$$

\* Из общих соображений можно показать (см. также следующий раздел), что члены с четными  $n$  отсутствуют и до усреднения

где  $\psi(\tau) = \langle H(t + \tau)H(t) \rangle$  — функция корреляции процесса  $H(t)$ . В частности, при  $k=2$  формула (2.12) дает:

$$\begin{aligned} & \langle H(t + \tau - \tau_1)H(t + \tau - \tau_2)H(t + \tau - \tau_3)H(t) \rangle = \\ & = \psi(\tau - \tau_1)\psi(\tau_2 - \tau_3) + \psi(\tau - \tau_2)\psi(\tau_1 - \tau_3) + \psi(\tau - \tau_3)\psi(\tau_1 - \tau_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Пользуясь этими формулами и учитывая, что

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_H(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega,$$

на основании (2.3), (2.6) и (2.11) получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega} = & \frac{\omega}{c} \left\{ \chi_1''(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} K_{\omega}^{(1)}(\omega_1) G_H(\omega_1) d\omega_1 + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\omega}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) G_H(\omega_1) G_H(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$K_{\omega}^{(1)}(\omega_1) = -K_{-\omega}^{(1)}(-\omega_1) = \chi_3''(\omega, \omega_1, -\omega_1) + \chi_3''(\omega_1, \omega, -\omega_1) + \chi_3''(\omega_1, -\omega_1, \omega); \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} K_{\omega}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = & -K_{-\omega}^{(2)}(-\omega_1, -\omega_2) = \chi_5''(\omega, \omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2) + \\ & + \chi_5''(\omega, \omega_1, \omega_2, -\omega_1, -\omega_2) + \chi_5''(\omega, \omega_1, \omega_2, -\omega_2, -\omega_1) + \\ & + \chi_5''(\omega_1, \omega, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2) + \chi_5''(\omega_1, \omega, \omega_2, -\omega_1, -\omega_2) + \\ & + \chi_5''(\omega_1, \omega, \omega_2, -\omega_2, -\omega_1) + \chi_5''(\omega_1, -\omega_1, \omega, \omega_2, -\omega_2) + \\ & + \chi_5''(\omega_1, \omega_2, \omega, -\omega_1, -\omega_2) + \chi_5''(\omega_1, \omega_2, \omega, -\omega_2, -\omega_1) + \\ & + \chi_5''(\omega_1, -\omega_1, \omega_2, \omega, -\omega_2) + \chi_5''(\omega_1, \omega_2, -\omega_1, \omega, -\omega_2) + \\ & + \chi_5''(\omega_1, \omega_2, -\omega_2, \omega, -\omega_1) + \chi_5''(\omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2, \omega) + \\ & + \chi_5''(\omega_1, \omega_2, -\omega_1, -\omega_2, \omega) + \chi_5''(\omega_1, \omega_2, -\omega_2, -\omega_1, \omega). \end{aligned} \quad (2.15a)$$

Ядро  $K_{\omega}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) = -K_{-\omega}^{(n)}(-\omega_1, \dots, -\omega_n)$  равно сумме  $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$  членов, каждый из которых представляет собою величину  $\chi_{2n+1}''$ , соответствующую определенному набору частот из ряда  $\omega, \pm \omega_1, \pm \omega_2, \dots, \pm \omega_n$  (всего  $2n+1$ ).

Таким образом, спектральная поглощательная способность  $\alpha_{\omega}$  при учете нелинейных эффектов действительно является функционалом от спектральной интенсивности поля излучения  $G_H(\omega)$ . Только в двух крайних случаях — при монохроматическом поле  $H(t) = H_1 \cos(\omega_1 t)$  и поле с равномерным спектром  $G_H(\omega) = G_0 = \text{const}$  („белый шум“) — функционал  $\alpha_{\omega}$  вырождается в функцию соответственно от полной (интегральной) интенсивности поля  $\langle H^2 \rangle = H_1^2/2$  и от спектральной интенсивности  $G_0$ .

### 3. ЭФФЕКТ НАСЫЩЕНИЯ В НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ПРИ ПАРАМАГНИТНОМ РЕЗОНАНСЕ

Применим полученные в предыдущем параграфе общие результаты к парамагнитному резонансу. Как уже отмечалось, разложение типа (2.7) и все вытекающие из него результаты представляют практический

интерес лишь при слабом эффекте насыщения, когда можно ограничиться несколькими первыми членами разложений. Применяя ниже формулу (2.14), мы будем предполагать именно этот случай, не накладывая при этом никаких ограничений на форму спектра  $G_H(\omega)$ .

Согласно (2.14), функционал  $\alpha_\omega [G_H(\omega)]$  однозначно определяется функциями  $\chi'_{2n+1}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n+1})$ —мнимыми частями магнитных восприимчивостей вещества  $(2n+1)$ -го порядка. Определим эти функции для парамагнитного образца. Будем исходить из феноменологического уравнения Блоха [9]:

$$\frac{dM}{dt} = \gamma[M, H] - i\frac{M_x}{T_2} - j\frac{M_y}{T_2} - k\frac{M_z - M_0}{T_1}; \\ H = kH_0 + iH_x(t), \quad (3.1)$$

где  $M$ —вектор намагничения в момент времени  $t$ ,  $M_0$ —равновесное значение намагничения, соответствующее постоянному магнитному полю  $H_0$ ,  $\gamma$ —гиромагнитное отношение,  $T_1$  и  $T_2$ —времена продольной и поперечной релаксаций соответственно,  $i, j, k$ —орты осей координат. Функции  $H(t)$  и  $M(t)$ , фигурирующие в предыдущем параграфе, мы снабдили теперь индексом „ $x$ “. Легко показать, что эти уравнения при интересующих нас начальных условиях  $M_z(-\infty) = M_0$ ,  $M_x(-\infty) = M_y(-\infty) = 0$  сводятся к следующей системе интегральных уравнений:

$$M_z(t) = M_0 - \gamma^2 \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)/T_1} H_x(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-\tau_1)/T_2} \cos \omega_0(\tau-\tau_1) H_x(\tau_1) M_z(\tau_1) d\tau_1; \quad (3.2)$$

$$M_x(t) = \gamma \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)/T_2} \sin \omega_0(t-\tau) H_x(\tau) M_z(\tau) d\tau; \quad (3.3)$$

$$M_y(t) = \gamma \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)/T_2} \cos \omega_0(t-\tau) H_x(\tau) M_z(\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

где  $\omega_0 = \gamma H_0$ .

Для того, чтобы получить выражения для функций  $J_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ , входящих в оператор  $A[H(t)]$  (см. (2.7)), очевидно, необходимо решить систему уравнений (3.2)–(3.4) методом последовательных приближений, положив в качестве нулевого приближения  $M_z^{(0)} = M_0$ ,  $M_x^{(0)} = 0$ ,  $M_y^{(0)} = 0$ . Опуская несложные математические операции, для функции  $J_{2n+1}$  получаем (функции  $J_{2n} = 0$ ):

$$J_{2n+1}(\tau_1, \dots, \tau_{2n+1}) = (-1)^n M_0 r^{2n+1} e^{-\tau_1/T_2} \sin(\omega_0 \tau_1) \Theta(\tau_1) \times \\ \times \prod_{k=1, 3, \dots, (2n-1)} e^{-(\tau_{k+1}-\tau_k)/T_1} e^{-(\tau_{k+2}-\tau_{k+1})/T_2} \cos \omega_0(\tau_{k+2}-\tau_{k+1}) \times \\ \times \Theta(\tau_{k+1}-\tau_k) \Theta(\tau_{k+2}-\tau_{k+1}), \quad (3.5)$$

где

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & (t>0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}.$$

При  $n=0$  входящее в (3.5) произведение следует считать равным единице. Из этого выражения видно, что функция  $J_{2n+1}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{2n+1})=0$ , если хотя бы один из ее аргументов принимает отрицательное значение. Это свойство представляет собою проявление принципа причин-

ности в нелинейном отклике произвольной пассивной системы (см. Приложение).

Для магнитных восприимчивостей первого и третьего порядка на основании (2.8) и (3.5) имеем:

$$\chi_1(\omega) = \frac{\chi_0 \omega_0}{2} T_2 \left[ \frac{(\omega_0 - \omega) T_2 + i}{(\omega_0 - \omega)^2 T_2^2 + 1} + \frac{(\omega_0 + \omega) T_2 - i}{(\omega_0 + \omega)^2 T_2^2 + 1} \right]; \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \chi_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = & -\chi_0 \omega_0^2 \gamma^2 T_1 T_2^3 (1 - i\omega_3 T_2) \times \\ & \times \frac{[1 - i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_0) T_2]^{-1} [1 - i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_0) T_2]^{-1}}{[1 - i(\omega_3 + \omega_0) T_2] [1 - i(\omega_3 - \omega_0) T_2] [1 - i(\omega_2 + \omega_3) T_1]}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\chi_0 = M_0/H_0$  — статическая восприимчивость. Выражения для функций  $\chi_5$  и функций более высокого порядка получаются слишком громоздкими и здесь не приводятся. Для выяснения начальной стадии влияния эффекта насыщения на поглощательную способность образца достаточно учесть лишь первый нелинейный член разложения (2.14), определяемый ядром  $K_{\omega}^{(1)}(\omega_1)$ . Последнее, в свою очередь, легко определяется, ся на основании формул (2.15) и (3.7).

В частном случае монохроматического поля  $H_x(t) = H_1 \cos(\omega_1 t)$ , когда спектральная интенсивность  $G_H(\omega)$  определяется формулой (1.3), полная мощность поглощения  $P$ , как известно [1, 2], равна (считаем, что  $\omega_0 T_2 \gg 1$  и  $|\omega_1 - \omega_0| T_2 \ll 1$ )

$$P = c \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\omega} G_H(\omega) d\omega = \frac{1}{4} \frac{\chi_0 \omega_0^2 T_2 H_1^2}{1 + (\omega_0 - \omega_1)^2 T_2^2 + (\gamma H_1/2)^2 T_1 T_2}. \quad (3.8)$$

Разложение (2.14) для величины  $\alpha_{\omega}$  должно, очевидно, в этом случае соответствовать разложению величины по степеням  $(\gamma H_1/2)^2 T_1 T_2$ . В отношении первых двух членов такого разложения в этом легко убедиться, воспользовавшись формулами (1.3), (2.15), (3.6) и (3.7)\*.

В заключение мы хотим обратить внимание на существование, наряду со случаем монохроматического поля излучения, другого крайнего случая, когда задача об эффекте насыщения допускает замкнутое решение (без разложения в ряды). Мы имеем в виду тот случай, когда поле  $H_x(t)$  — случайный процесс с равномерным спектром  $G_H(\omega) = G_0$ . („белый шум“). Требование равномерности спектра  $G_H(\omega)$  физически, очевидно, означает, что его ширина должна быть велика по сравнению с шириной линии  $T_2^{-1}$ . На практике с такими условиями встречаются, например, в оптических квантовых генераторах на твердом теле, где в качестве источника вспомогательного излучения используются люминесцентные лампы. Вычислим для этого случая, например, изменение среднего значения  $\langle M_z(t) \rangle$  при включении поля  $H_x(t)$  в момент  $t=0$  ( $M_z(0)=M_0$ ,  $M_x(0)=M_y(0)=0$ ). Уравнение, которому удовлетворяет величина  $M_z(t)$  при таком начальном условии, совпадает с уравнением (3.2), если в нем нижние пределы интегрирования заменить на нуль. Усредним обе части такого уравнения и воспользуемся тем, что для δ-коррелированных процессов  $H_x(t)$  справедливо соотношение [10]:

$$\langle M_z(t) H(t) H(t_1) \rangle = \langle M_z(t) \rangle \langle H(t) H(t_1) \rangle = 2\pi G_0 \delta(t-t_1) \langle M_z(t) \rangle. \quad (3.9)$$

\* Используя только формулу (1.3), получаем:

$$P = c \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\omega} G_H(\omega) d\omega = \omega_1 \frac{H_1^2}{2} \left\{ \chi_1''(\omega_1) + \frac{H_1^2}{4} [K_{\omega_1}^{(1)}(\omega_1) + K_{\omega_1}^{(1)}(-\omega_1)] + \dots \right\}.$$

Тогда получим:

$$\langle M_z(t) \rangle = M_0 - \pi \gamma^2 G_0 \int_0^t e^{-(t-\tau)/T_1} \langle M_z(\tau) \rangle d\tau.$$

Решение этого уравнения дает:

$$\langle M_z(t) \rangle = \frac{M_0}{1+T_1 W_{\text{инд}}} \left\{ 1 + T_1 W_{\text{инд}} \exp \left[ -\frac{1+T_1 W_{\text{инд}}}{T_1} t \right] \right\}, \quad (3.10)$$

где  $W_{\text{инд}} = \pi \gamma^2 G_0$ . Для двухуровневой системы величина  $W_{\text{инд}}$  имеет смысл вероятности индуцированного перехода в поле с равномерным спектром [11].

Из формулы (3.10) видно, что скорость установления населенности уровней (т. е. величины  $\langle M_z \rangle$ ) не зависит от времени  $T_2$ . В случае сильного насыщения, когда  $T_1 W_{\text{инд}} \gg 1$ , эта скорость не зависит и от времени  $T_1$ , определяясь только спектральной интенсивностью поля (величиной  $W_{\text{инд}}$ ). Полная мощность поглощения  $P$  в установившемся состоянии (когда  $\langle M_z \rangle = M_0 / (1 + T_1 W_{\text{инд}})$ ) равна\*

$$P = \langle \dot{M}_x H_x \rangle = (\omega_0^2 W_{\text{инд}} / \gamma^2) \frac{\chi_0}{1 + T_1 W_{\text{инд}}} = \frac{\hbar \omega_0 W_{\text{инд}}}{1 + T_1 W_{\text{инд}}} \frac{\langle N_1 \rangle^{(0)} - \langle N_2 \rangle^{(0)}}{2}. \quad (3.11)$$

Вторая форма выражения для величины  $P$  соответствует двухуровневой системе, причем  $\langle N_1 \rangle^{(0)}$  и  $\langle N_2 \rangle^{(0)}$ —средние населенности уровней в состоянии теплового равновесия при наличии поля  $H_0$ . В состоянии сильного насыщения ( $T_1 W_{\text{инд}} \gg 1$ ), отсюда получаем:

$$P = \omega_0^2 \chi_0 / T_1 \gamma^2 = (\langle N_1 \rangle^{(0)} - \langle N_2 \rangle^{(0)}) \hbar \omega_0 / 2 T_1,$$

что совпадает с соответствующим выражением для случая сильного насыщения в монохроматическом поле (см. (3.8)). Такое совпадение, разумеется, можно было предсказать заранее, поскольку в состоянии полного насыщения мощность  $P$  не должна зависеть от спектрального состава излучения, а функционал  $P[G_H(\omega)]$  при этом должен превращаться в константу.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Установим общий вид нелинейного оператора  $x(t) = A[F(t)]$ , описывающего отклик  $x(t)$  произвольной пассивной системы на внешнюю силу  $F(t)$ . По определению

$$\hat{x}(t) = \text{Sp} \hat{\rho}(t) \hat{x}, \quad (1)$$

где  $\hat{x}$ —оператор, соответствующий величине  $x$ , а  $\hat{\rho}(t)$ —статистический оператор, описывающий состояние системы при наличии воздействия на нее силы  $F(t)$ . Пусть в отсутствие воздействия на систему она описывается не зависящим от времени гамильтонианом  $\hat{H}$ , а гамильтониан возмущения имеет вид  $\hat{V}(t) = -\hat{\xi}F(t)$ . Тогда статистический оператор  $\hat{\rho}(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{i}\hbar \hat{\rho} = [\hat{H} - \hat{\xi}F(t), \hat{\rho}]. \quad (2)$$

\* При этом мы пользуемся уравнением (3.3) с заменой нижнего предела  $(-\infty)$  на нуль и соотношением (3.9).

Уравнение (2) может быть решено методом последовательных приближений:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_0 + \hat{\rho}_1(t) + \hat{\rho}_2(t) + \dots . \quad (3)$$

Предполагая, что возмущение  $\hat{V}(t)$  включается адиабатически при  $t=-\infty$ , причем  $\hat{\rho}(-\infty) = \hat{\rho}_0 = C \exp(-\hat{H}/kT)$ , для  $\hat{\rho}_n(t)$  имеем [12]:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_n(t) = & \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n \int_{-\infty}^{t_1} \int_{-\infty}^{t_2} \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} \exp(-it\hat{H}^x/\hbar) \hat{\xi}(t_1)^x \dots \hat{\xi}(t_n)^x \hat{\rho}_0 \times \\ & \times F(t_1)F(t_2) \dots F(t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\hat{\xi}(t) = \exp(it\hat{H}/\hbar) \hat{\xi} \exp(-it\hat{H}/\hbar),$$

а крест означает операцию коммутирования по отношению к операторам, стоящим справа:

$$\hat{a}^x \hat{b} = [\hat{a}, \hat{b}], \quad \hat{e}^a \hat{b} = \hat{e}^a \hat{b} \hat{e}^{-a}.$$

Отклик системы  $x(t)$  в соответствии с (1) и (3) принимает вид:

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + x_1(t) + x_2(t) + \dots ; \\ x_n(t) = & \text{Sp} \hat{\rho}_n(t) \hat{x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Весьма существенным является то, что выражение

$$\text{Sp} \hat{x} \exp(-it\hat{H}^x/\hbar) \hat{\xi}(t_1)^x \dots \hat{\xi}(t_n)^x \hat{\rho}_0 \quad (6)$$

зависит от  $t, t_1, t_2, \dots, t_n$  только через разности  $(t-t_k)$  и  $(t_i-t_j)$ \*. Этот факт позволяет для  $x_n(t)$  на основании (4) и (5) в общем случае написать:

$$x_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} J_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) F(t-\tau_1) \dots F(t-\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad (7)$$

где функция

$$J_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n \Theta(\tau_1)\Theta(\tau_2-\tau_1)\dots\Theta(\tau_n-\tau_{n-1}) W_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n). \quad (8)$$

Здесь  $W_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  представляет собою выражение (6), в котором разности  $(t-t_k)$  заменены на  $\tau_k$ , а разности  $(t_i-t_j)$ —на  $(\tau_j-\tau_i)$ ;

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

На основании (8) легко заключить, что функция  $J_n(\tau_1, \dots, \tau_n)=0$ , если хотя бы один из ее аргументов принимает отрицательное значение. Это свойство позволяет заменить нижние пределы в интеграле (7) на нули (см. (2.7)). Заметим, что функция

$$J_1(t-t') = - \frac{i}{\hbar} \Theta(t-t') \text{Sp} \hat{\rho}_0 [\hat{\xi}, \hat{x}(t-t')],$$

\* Мы не даем общего доказательства этому утверждению; для каждого фиксированного  $n$  оно может быть проверено непосредственно.

т. е. представляет собою так называемую двухвременную запаздывающую функцию Грина [13].

Введем спектральные функции

$$\chi_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \int_0^{\infty} J_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) e^{i(\omega_1 \tau_1 + \dots + \omega_n \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (9)$$

По отношению к каждой из своих переменных  $\omega_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) функция  $\chi_n$  является односторонним преобразованием Фурье. Поэтому, если функция  $J_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  не нарастает экспоненциально при стремлении какой-либо из своих переменных  $\tau_i$  в бесконечность (а в этом можно убедиться из непосредственного анализа выражения для  $W_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ ), то функция  $\chi_n(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  является аналитической во всей верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Отсюда следует, что по отношению к каждому из своих аргументов функции  $\operatorname{Re} \chi_n$  и  $\operatorname{Im} \chi_n$  удовлетворяют дисперсионным соотношениям Крамерса—Кронига (2.10).

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. Karpplus, J. Schwingeg, Phys. Rev., **73**, 1020 (1948).
2. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, УФН, **57**, 485 (1955).
3. Г. П. Любимов, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, **33**, 1396 (1957).
4. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, УФН, **72**, 161 (1960).
5. Ф. А. Бутаева, В. А. Фабрикант, Сб. Исследования по экспериментальной и теоретической физике, памяти Г. С. Лансберга, изд. АН СССР, М., 1959.
6. Б. И. Степанов, Основы спектроскопии отрицательных световых потоков, Минск, изд. Белорусск. ун-та, 1961.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, ГИФМЛ, М., 1959.
8. А. М. Обухов, Труды геофиз. ин-та АН СССР, № 24, 3 (1954).
9. F. Bloch, Phys. Rev., **70**, 460 (1946).
10. C. Samuels, J. Acoust. Soc. America, **32**, 594 (1960).
11. Ф. В. Бункин, А. Н. Ораевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 181 (1959).
12. R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan, **12**, 570 (1957).
13. В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тяблков, Метод функций Грина в статистической механике, ГИФМЛ, М., 1961.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
23 декабря 1961 г.

## TO THE THEORY OF SPECTROSCOPIC SATURATION EFFECT

F. V. Bunkin

Spectral absorptivity of a medium is considered in a non-linear approximation when radiation field being arbitrary non-monochromatic. It is shown that a spectral absorption coefficient of the medium is in general a non-linear functional of a radiation spectral intensity. Analysis is carried out by the method of successive approximations. The first terms of derived series correspond to a "linear spectroscopy" and the highest terms to a saturation effect. The concept is introduced of n-order susceptibility (magnetic or electric) corresponding to non-linear term in series expansion of medium magnetization (or polarization) in an external alternating field. Each quantity is shown to satisfy the dispersive equations similar to those of Kramers—Kronig.

## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ТРЕХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ

*В. М. Файн, Я. И. Ханин, Э. Г. Ящин*

Рассмотрен вопрос об использовании нелинейных свойств трехуровневых квантовомеханических систем для целей преобразования частот электромагнитных колебаний в оптическом и радиодиапазонах. Для описания процессов, происходящих в многоуровневых газовых системах, выведено уравнение для матрицы плотности с учетом скорости молекул. В результате совместного решения уравнения для матрицы плотности и уравнений Максвелла найдено выражение для коэффициента преобразования трехуровневого смесителя; этот коэффициент достигает очень больших значений (в принципе бесконечных), если на одной из частот (сигнала или комбинационной) обеспечивается регенерация. Кроме того, вычислена интенсивность излучения в свободное пространство на преобразованной частоте в оптическом диапазоне, когда размеры трехуровневой системы много больше длины волны.

Многоуровневые и, в частности, трехуровневые системы нашли широкое применение в квантовой радиофизике. Существенной их чертой является неэквидистантность спектра энергии, что и дает возможность пользоваться двухуровневой, трехуровневой и т. п. идеализациями. Очевидно, что неэквидистантность уровней связана, с одной стороны, с нелинейностью системы и, с другой стороны, с ее квантовым характером. В самом деле, линейные системы характеризуются эквидистантностью спектра (гармонический осциллятор), а характерной чертой классических и квазиклассических систем является квазиеэквидистантность спектра энергии [1].

Нелинейные свойства систем с неэквидистантным спектром используются в работе квантовых усилителей и генераторов. Достаточно указать на два связанных с ними эффекта. Это, во-первых, возможность создания отрицательного поглощения, которое как в классическом [2], так и в квантовом случае связано с нелинейными свойствами системы\*. В квантовой линейной системе ни при каком заполнении уровней невозможно получить отрицательное поглощение, не зависящее от фазовых соотношений между осцилляторами и полем. Во-вторых, с нелинейностью связан эффект насыщения [4], следствием которого является возможность автоколебательного режима масеров.

Целью настоящей статьи является исследование эффекта взаимодействия электромагнитных колебаний в трехуровневых системах. Возможность такого взаимодействия в нарушение принципа суперпозиции также является следствием нелинейности рассматриваемых систем. В нелинейной системе под действием двух полей с частотами  $\Omega_{31}$  и  $\Omega_{32}$  в стационарном режиме возникает отклик на комбинационных частотах  $n\Omega_{31} + m\Omega_{32}$ , где  $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . В случае совпадения частот  $\Omega_{31}$  и  $\Omega_{32}$  с разностями термов трехуровневой системы

\* Здесь мы имеем в виду отрицательное поглощение, которое не зависит от соотношения фаз поля и рассматриваемой системы. Соответствующим выбором фаз можно добиться отрицательного поглощения и в линейной системе (см., например, [1]).

отклик наиболее значителен на частотах  $\Omega_{31}$ ,  $\Omega_{32}$  и  $\Omega_{31}-\Omega_{32}$ . Часть энергии исходных электромагнитных полей преобразуется в энергию поля с комбинационной частотой [5].

Мы рассмотрим эффект преобразования применительно к оптическому диапазону и радиодиапазону. Важно подчеркнуть, что в обоих случаях предполагается когерентный, нешумовой характер взаимодействующих полей, т. е. их средние отличны от нуля, фазы и амплитуды в достаточной степени определены. Обычно же в оптике определенным предполагается число фотонов (см., например, [3]), т. е. матрица плотности диагональна по числу фотонов. По этой причине рассматриваемые ниже эффекты существенно отличаются от изложенных в [3].

Нахождению отклика системы под воздействием заданных электромагнитных полей посвящены разделы 1, 2. В разделах 3, 4 рассмотрен вопрос об излучении таких систем.

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Поведение квантовой системы можно описывать с помощью матрицы плотности  $\hat{\rho}$ , подчиняющейся уравнению

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{H}) + \frac{\delta \hat{\rho}}{\delta t}. \quad (1)$$

Здесь  $\hat{H}$  — гамильтониан системы, вообще говоря, явно зависящий от времени;  $\delta \hat{\rho} / \delta t$  — изменение матрицы плотности вследствие различного рода релаксационных процессов. Релаксационный член имеет достаточно сложный вид и в общем случае даже не выражается через  $\hat{\rho}$ . Для простоты мы, как это часто делается в подобного рода расчетах, выбираем сравнительно простое выражение для релаксационного члена

$$\left( \frac{\delta \hat{\rho}}{\delta t} \right)_{mn} = \begin{cases} -(\hat{\rho} - \rho_0)_{mn} / \tau_1^{mn} & (m = n); \\ -\rho_{mn} / \tau_2^{mn} & (m \neq n). \end{cases} \quad (2)$$

При адекватном выборе эмпирических констант  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (2) приводит к верным по порядку величины результатам. При использовании (2) уравнение (1) имеет тот же смысл, что и уравнения Блоха с  $T_1$  и  $T_2$ . Для однокомпонентных газообразных систем выражение (2) упрощается:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -(\hat{\rho} - \rho_0) / \tau. \quad (2a)$$

Уравнение (1) с релаксационным членом в форме (2a) выводится в предположении, что внешнее поле однородно, т. е. гамильтониан  $\hat{H}$  явно от координат не зависит. Однако оно справедливо и для случая неоднородного поля, если мала длина свободного пробега частиц системы:

$$l \ll \lambda. \quad (3)$$

Здесь  $\lambda$  — характерный размер неоднородности внешнего поля, входящего в  $\hat{H}(x, t)$ , и, в частности,  $\lambda$  — длина волны.

Если условие (3) не выполнено, уравнения (1) — (2a) нуждаются в обобщении. При этом следует исходить из матрицы плотности для отдельной молекулы, которая имеет вид  $\rho(t, x, t_0, v)$  ( $v$  — скорость движения частиц). Процедура усреднения по времени последнего соударения  $t_0$  изложена в Приложении 1; она приводит к уравнению

$$\frac{\hat{\delta\rho}(t, x)}{dt} + \mathbf{v} \nabla \hat{\rho}(t, x) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t, x), \hat{\rho}(t, x)] - \frac{1}{\tau} (\hat{\rho} - \hat{\rho}_0). \quad (4)$$

Входящую в (4) матрицу плотности в момент соударения  $\hat{\rho}_0$  мы в дальнейшем будем полагать равновесной. Уравнение (4) содержит в качестве параметра  $\mathbf{v}$  и, таким образом, описывает монокинетический пучок. Его решения можно использовать и для описания изотропного газа, для чего их необходимо усреднить по возможным скоростям молекул.

При выполнении условия (3) уравнение (4) переходит в (1)–(2a). В самом деле, если  $\hat{H}(t, x)$  зависит от координаты  $x$  как плоская волна с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , то  $\Delta \hat{\rho} \sim \hat{\mathbf{k}} \hat{\rho}$ . Тогда член  $\mathbf{v} \nabla \hat{\rho}$  мал по сравнению с релаксационным членом, когда

$$kv\tau \ll 1. \quad (3a)$$

Легко видеть, что это условие совпадает с (3). Очевидно, что для твердого тела, молекулы которого совершают малые колебания относительно положения равновесия в узлах решетки, условие (3)–(3a) заведомо выполняется и в радиодиапазоне и в оптике. В отличие от этого для газов, особенно в оптическом диапазоне, может выполняться обратное неравенство

$$kv\tau \gg 1. \quad (3b)$$

К сказанному следует сделать одно замечание. Усреднение по соударениям уравнения для матрицы плотности проводится, фактически, в двух предположениях. Во-первых, длительность акта соударения мала по сравнению с характерными временами всех других процессов. Во-вторых, соударения являются наиболее эффективным механизмом восстановления равновесия системы. Оба предположения хорошо оправдываются в радиодиапазоне и совершенно необоснованы в случае оптики. Мы, тем не менее, и во втором случае производим усреднение по функции распределения  $f(\Theta)$  (см. Приложение 1), понимая под  $\tau$  некоторое характерное время установления равновесия в системе или время взаимодействия ее частиц с полем. Эффективным процессом установления в оптике является спонтанное излучение. Поскольку вероятность спонтанного излучения для разных переходов может существенно отличаться, для газовой системы правильнее пользоваться уравнениями с разными временами релаксации  $\tau_1^{mn}$  и  $\tau_2^{mn}$ . Из сказанного ясно, что получаемые результаты будут носить чисто качественный характер.

## 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

a) Случай  $kv\tau \ll 1$ . Зададимся внешним полем в виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_{13} \cos(\Omega_{13} t) + \mathbf{H}_{23} \cos(\Omega_{23} t + \psi) + \mathbf{H}_{12} \cos(\Omega_{12} t + \varphi). \quad (5)$$

Оператор Гамильтона системы, находящейся под действием поля  $\mathbf{F}$  и обладающей дипольным моментом  $\mathbf{\mu}$ , можно представить как

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{\mu} \hat{F}, \quad (6)$$

где  $\hat{H}_0$ —гамильтониан изолированной системы. Рассматриваемые три невырожденных\* уровня мы перенумеруем таким образом, что

\* Учет вырождения для частного случая изотропной системы (вырождение по  $M$ -магнитному квантовому числу) проведен в Приложении 2.

$E_1 < E_2 < E_3$ . Частоты соответствующих переходов  $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$  близки к частотам поля  $\Omega_{mn}$ . Для дальнейшего достаточно ограничиться случаем  $\Omega_{12} + \Omega_{23} = \Omega_{13}$ . При сделанных предположениях решение (1)–(2) можно искать в виде

$$\rho_{n,n} = \rho_{mn}^- e^{-i\Omega_{mn} t} + \rho_{mn}^+ e^{i\Omega_{mn} t}, \quad (7)$$

удерживая после подстановки (7) в (1) только резонансные члены [6]. Практически наиболее важным является вариант с двумя слабыми (в нашем случае  $H_{12}$  и  $H_{23}$ ) и третьим сильным полем. Это позволит пре-небречь членами с  $H_{12}$  и  $H_{23}$ . Ограничений на величину  $H_{13}$  пока на-лагать не будем.

Необходимые стационарные решения уравнения для матрицы плот-ности содержатся в работе Клэгстона [7]\*. Мы не будем приводить их в общем виде. Заметим лишь, что компоненты  $\rho_{21}^-$  и  $\rho_{32}^-$ , которые будут нас более всего интересовать в дальнейшем, могут быть пред-ставлены в виде:

$$\rho_{21}^- = \alpha \gamma_{12} e^{-i\varphi} + \beta \gamma_{13} \gamma_{23} e^{i\psi}; \quad (8)$$

$$\rho_{32}^- = \tilde{\alpha} \gamma_{23} e^{-i\psi} + \tilde{\beta} \gamma_{13} \gamma_{12} e^{i\varphi}, \quad (8a)$$

где  $\gamma_{mn} = \mu_{mn} H_{mn}/\hbar$ . В частном случае  $\tau_2^{mn} = \tau_2 \ll \tau_1 = \tau_1^{mn}$ , реализую-щемся в твердом теле на радиочастотах, полная система решений (при  $\Omega_{mn} = \omega_{mn}^0$ ):

$$D_{13} = D_{13}^0/(1 + \tau_1 \tau_2 \gamma_{13}^2); \quad D_{23} = D_{23}^0 - \frac{1}{2} D_{13}^0 \tau_1 \tau_2 \gamma_{13}^2/(1 + \tau_1 \tau_2 \gamma_{13}^2); \quad (9)$$

$$D_{12} = D_{12}^0 - \frac{1}{2} D_{13}^0 \tau_1 \tau_2 \gamma_{12}^2/(1 + \tau_1 \tau_2 \gamma_{13}^2); \\ \alpha = \frac{1}{2} i \tau_2 D_{ef}; \quad \beta = -\frac{1}{4} \tau_2^2 D_e; \\ \tilde{\alpha} = \frac{1}{2} i \tau_2 \tilde{D}_{ef}; \quad \tilde{\beta} = -\frac{1}{4} \tau_2^2 \tilde{D}_e. \quad (10)$$

Здесь  $D_{mn} = \rho_{mm} - \rho_{nn}$ . Из эрмитовости матрицы  $\rho$ , кроме того, сле-дует, что

$$\rho_{mn}^- = (\rho_{nm}^+)^*. \quad (11)$$

Выражения для  $D_{ef}$ ,  $D_e$ ,  $\tilde{D}_{ef}$  и  $\tilde{D}_e$  в наиболее интересной области из-менения поля  $H_{13}$  приведены в таблице 1.

Результаты, рассмотренные в настоящем разделе, получены для случая однородного поля. Легко, однако, видеть, что вид решений не изменится и при переходе к неоднородному полю; следует лишь учесть, что  $\gamma_{mn}$  становятся функциями координат.

\* В нашей работе [5] ошибочно сказано, что в расчетах Клэгстона не учитываются все резонансные члены. Это недоразумение связано с тем, что в [7] написано неполное выражение матричного элемента энергии взаимодействия. Можно, однако, убедить-ся, что это не вносит ошибки в конечный результат работы [7].

Таблица 1

	$\tau_{13}^2 < (\tau_2 \tau_1)^{-1}$	$(\tau_2 \tau_1)^{-1} < \tau_{13}^2 < \tau_2^{-2}$	$\tau_{13}^2 > \tau_2^{-2}$
$D_{ef}$	$D_{12}^0$	$\frac{1}{2}(2D_{12}^0 - D_{13}^0)$	$2(2D_{12}^0 - D_{13}^0)/\tau_{13}^2 \tau_2^2$
$D_e$	$D_{23}^0 + D_{13}^0$	$\frac{1}{2}(2D_{23}^0 - D_{13}^0)$	$2(2D_{23}^0 - D_{13}^0)/\tau_{13}^2 \tau_2^2$
$\tilde{D}_{ef}$	$D_{23}^0$	$\frac{1}{2}(2D_{23}^0 - D_{13}^0)$	$2(2D_{23}^0 - D_{13}^0)/\tau_{13}^2 \tau_2^2$
$\tilde{D}_e$	$D_{13}^0 + D_{12}^0$	$\frac{1}{2}(2D_{12}^0 - D_{13}^0)$	$2(2D_{12}^0 - D_{13}^0)/\tau_{13}^2 \tau_2^2$

б) Случай  $k v \tau \gg 1$ . Под этот случай подпадает система молекул газа, обладающих оптическими переходами. Состояние такой системы, помещенной в заданное электромагнитное поле, можно найти, решив уравнение (4). Зададим поле в виде суммы двух плоских, линейно поляризованных стоячих волн:

$$F = H_{13} \cos(\Omega_{13} t) \cos(k_{13} z) + H_{12} \cos(\Omega_{12} t + \varphi) \cos(k_{12} z) \quad (12)$$

и станем искать решения уравнений (4)–(2a) в виде:

$$\rho_{32} = [A_{32} \cos(k_{32} z) + B_{32} \sin(k_{32} z)] e^{-i\Omega_{32} t}; \quad (13)$$

$$\rho_{23} = [\tilde{A}_{23} \cos(k_{32} z) + \tilde{B}_{23} \sin(k_{32} z)] e^{i\Omega_{32} t};$$

$$\rho_{31} = [A_{31} \cos(k_{31} z) + B_{31} \sin(k_{31} z)] e^{-i\Omega_{31} t}; \quad (13a)$$

$$\rho_{13} = [\tilde{A}_{13} \cos(k_{31} z) + \tilde{B}_{13} \sin(k_{31} z)] e^{i\Omega_{31} t};$$

$$\rho_{21} = [A_{21} \cos(k_{21} z) + B_{21} \sin(k_{21} z)] e^{-i\Omega_{21} t}; \quad (13b)$$

$$\rho_{12} = [\tilde{A}_{12} \cos(k_{21} z) + \tilde{B}_{12} \sin(k_{21} z)] e^{i\Omega_{21} t};$$

$$\rho_{mm} - \rho_{nn} = D_{mn} = \text{const},$$

причем  $A_{mn}^* = \tilde{A}_{nm}$  и  $B_{mn}^* = \tilde{B}_{nm}$ . При написании (13) мы ограничились первой пространственной гармоникой недиагональных элементов и постоянной составляющей диагональных элементов матрицы плотности. Пренебрежение высшими гармониками законно, как показано в Приложении 2, при условии

$$\sqrt{\tau^{-2} + \gamma_{13}^2} / k v \ll 1. \quad (14)$$

Подстановка (12) и (13)–(13b) в (4)–(2a) приводит к системе алгебраических уравнений, разрешая которые, в частности, находим:

$$D_{13} = \frac{2(k_{31}^2 v^2 + \tau^{-2})}{2(k_{31}^2 v^2 + \tau^{-2}) + \gamma_{13}^2} D_{13}^0; \quad A_{31} = \frac{i \gamma_{13} \tau^{-1} D_{13}^0}{2(k_{31}^2 v^2 + \tau^{-2}) + \gamma_{13}^2}; \quad (15)$$

$$B_{31} = i \frac{\gamma_{13} k_{31} v D_{13}^0}{2(k_{31}^2 v^2 + \tau^{-2}) + \gamma_{13}^2}.$$

Усреднив эти выражения по однородному максвелловскому распределению\* и использовав условие (14), придем к следующим выражениям\*\*:

$$\bar{D}_{13} = D_{13}^0 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{k_{31} \bar{v}} \left( \sqrt{\frac{\tau^{-2}}{\tau^{-2} + \gamma_{13}^2/2}} - \frac{\tau^{-2}}{\sqrt{\frac{\tau^{-2}}{\tau^{-2} + \gamma_{13}^2/2}}} \right) + \frac{\gamma_{13}^2}{k_{31}^2 \bar{v}^2} + \dots \right\};$$

$$\bar{B}_{31} = 0; \quad \bar{A}_{31} = \frac{i \gamma_{13} \tau^{-1} D_{13}^0}{2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{k_{31} \bar{v} \sqrt{\frac{\tau^{-2}}{\tau^{-2} + \gamma_{13}^2/2}}} - \frac{1}{k_{31}^2 \bar{v}^2} + \dots \right), \quad (16)$$

где  $\bar{v} = \sqrt{2kT/m}$  — средняя тепловая скорость молекулы.

При выводе всех этих соотношений было пренебрежено квадратами величин  $\gamma_{12}$  по сравнению с  $\tau^{-2}$ .

Нас будет интересовать далее величина  $\bar{A}_{32}$  ( $\bar{B}_{32}=0$ ). Из-за громоздкости выражение для  $A_{32}$  не приводится. Ограничимся частным случаем  $\gamma_{13} \gg \tau^{-1}$ . В этом случае после усреднения, используя условие (14), получаем\*\*\*:

$$\bar{A}_{32} = - \frac{1}{4} \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{13}} e^{i\varphi} \frac{D_{13}^0 k_{31} \bar{k}_{21}}{\left( \frac{1}{8} \bar{k}_{31}^2 - \bar{k}_{32} \bar{k}_{21} \right)} - \frac{\gamma_{12}}{2} e^{i\varphi} \frac{D_{12}^0}{\bar{v} \sqrt{\bar{k}_{21} \bar{k}_{31} \pi^{-1}}}. \quad (17)$$

Здесь  $\gamma_{12} < \tau^{-1}$ , а  $\gamma_{13}$  удовлетворяет неравенствам  $\tau^{-1} < \gamma_{13} < k\bar{v}$ .

Для оценки величины  $\bar{A}_{32}$  рассмотрим случай  $k_{32} \ll k_{31}$ . При этом  $\bar{k}_{31} \sim \bar{k}_{21}$  и  $\bar{A}_{32} \simeq -2(\gamma_{12}/\gamma_{13}) e^{i\varphi} D_{13}^0$ . Это выражение имеет максимальное значение при  $\gamma_{12} \simeq \tau^{-1}$  и  $\gamma_{13} \simeq \tau^{-1}$ \*\*\*\*:

$$\bar{A}_{32} \sim - e^{i\varphi} D_{13}^0. \quad (18)$$

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ И УСИЛЕНИЕ СИГНАЛОВ В РАДИОДИАПАЗОНЕ

В предыдущем разделе было рассмотрено поведение трехуровневой системы под действием заданного поля и найдены ее вынужденные колебания. Используя полученные решения и уравнения Максвел-

\* Напомним, что  $v$  есть компонента скорости вдоль направления  $\nabla p$ .

\*\* Имеют место следующие интегралы [8]:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-q^2 v^2}}{p^2 + v^2} dv = [1 - \Phi(pq)] \frac{\pi}{p} e^{p^2 q^2} \simeq \frac{\pi}{p} - 2 \sqrt{\pi} q;$$

$$I_1 = - \frac{1}{2q} \frac{\partial I}{\partial q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^2 e^{-q^2 v^2}}{p^2 + v^2} dv = \frac{\pi}{q} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} - pq [1 - \Phi(pq)] e^{p^2 q^2} \right\} \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{q} - \pi p$$

(приближенные равенства справедливы при  $qp \ll 1$ ).

\*\*\* Здесь не выписан ряд членов, пропорциональных  $D_{13}^0$  и имеющих тот же порядок, что второй член, и много меньших первого члена. Второй член в (17) может играть существенную роль при  $D_{13}^0 \ll D_{12}^0$ .

\*\*\*\* Строго говоря, при этих значениях формула (17) несправедлива; однако для оценки можно воспользоваться (17) при этих значениях.

ла, мы можем находить самосогласованные режимы. Если воспользоваться разложением поля по собственным типам колебаний резонатора

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\sum \omega_v q_v(t) \mathbf{H}_v(\mathbf{r}), \quad (19)$$

то уравнения Максвелла приводятся к виду:

$$\ddot{q}_v + \frac{\omega_v}{Q_{L_v}} \dot{q}_v + \omega_v^2 q_v = - \int_{V_p} \omega_v \mathbf{H}_v(\mathbf{r}) \mathbf{M} dV. \quad (20)$$

Здесь  $Q_{L_v}$  — нагруженная добротность пустого резонатора на частоте  $\omega_v$ ;  $V_p$  — объем резонатора\*. Намагниченность  $\mathbf{M}$  выражается через матрицу плотности

$$\mathbf{M} = \text{Sp}(\rho \hat{\mu}) = \sum_{mn} \rho_{mn} \hat{\mu}_{nm}, \quad (21)$$

компоненты которой  $\rho_{mn}$  определены формулами (8)–(11). Мы будем интересоваться возбуждением таких колебаний резонатора, частоты которых близки к резонансным частотам трехуровневой системы. При этом нам придется иметь дело со спектральными компонентами  $M_{21}$  и  $M_{32}$ :

$$M_{21} = \rho_{21}^- \mu_{12} e^{-i\Omega_{21}t} + \text{к. с.} = (\alpha \gamma_{12} e^{-i\varphi} + \beta \gamma_{13} \gamma_{23} e^{i\psi}) \mu_{12} e^{-i\Omega_{21}t} + \text{к. с.}; \quad (22)$$

$$M_{32} = \rho_{32}^- \mu_{23} e^{-i\Omega_{32}t} + \text{к. с.} = (\tilde{\alpha} \gamma_{23} e^{-i\varphi} + \tilde{\beta} \gamma_{13} \gamma_{12} e^{i\psi}) \mu_{23} e^{-i\Omega_{32}t} + \text{к. с.}$$

Перейдем к рассмотрению самосогласованной задачи, заключающейся в совместном решении уравнений (1) и (20) с учетом соотношения (21). Если рабочее вещество сосредоточено в достаточно малом объеме  $V_0$ , в котором все поля можно считать однородными, то подстановка (22) в (20) дает:

$$\ddot{q}_{32} + \frac{\omega_{32}}{Q_{L23}} \dot{q}_{32} + \omega_{32}^2 q_{32} = -\omega_{32} H_{32}(0) V_0 M_{32} + \left( \frac{8P_{\text{вх}}^{32} \omega_{32}}{Q_{R1}} \right)^{1/2} \cos(\Omega_{32} t); \quad (23)$$

$$\ddot{q}_{21} + \frac{\omega_{21}}{Q_{L21}} \dot{q}_{21} + \omega_{21}^2 q_{21} = -\omega_{21} H_{21}(0) V_0 M_{21} + \left( \frac{8P_{\text{вх}}^{21} \omega_{21}}{Q_{R1}} \right)^{1/2} \cos(\Omega_{21} t).$$

В (23) введены дополнительные члены, учитывающие возбуждение резонатора подводимыми извне сигналами мощностью  $P_{\text{вх}}^{32}$  и  $P_{\text{вх}}^{21}$ . Добротности связи резонатора с входными волноводами приняты одинаковыми и обозначены через  $Q_{R1}$ . К системе (23) следовало бы добавить уравнение для поля накачки  $q_{13}$ . Мы, однако, будем считать  $\gamma_{13}$  заданным и введем его в теорию как параметр.

Стационарными решениями (23) являются функции

$$q_{32} = \frac{1}{2} \bar{q}_{32} e^{-i(\Omega_{32} t + \varphi)} + \text{к. с.}; \quad (24)$$

$$q_{21} = \frac{1}{2} \bar{q}_{21} e^{-i(\Omega_{21} t + \varphi)} + \text{к. с.},$$

\* Аналогичные уравнения могут быть написаны и в случае системы с электродипольными переходами. Вместо  $\mathbf{M}$  в них будет фигурировать поляризация  $\mathbf{P}$  и вместо магнитных полей — электрические.

подстановка которых в (23) приводит к системе алгебраических уравнений для определения амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{32} [\cos \psi (\omega_{32}^2 - \Omega_{32}^2) - \sin \psi \omega_{32} \Omega_{32} Q_{\Sigma 32}^{-1}] = & -2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} \beta \bar{q}_{21} \cos \varphi + \\ & + (8P_{\text{вх}}^{32} \omega_{32} / Q_{R1})^{1/2}; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\bar{q}_{32} [-\sin \psi (\omega_{32}^2 - \Omega_{32}^2) - \cos \psi \omega_{32} \Omega_{32} Q_{\Sigma 32}^{-1}] = +2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} \beta \bar{q}_{21} \sin \varphi; \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_{21} [\cos \varphi (\omega_{21}^2 - \Omega_{21}^2) - \sin \varphi \omega_{21} \Omega_{21} Q_{\Sigma 21}^{-1}] = & \\ = -2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} \beta \bar{q}_{32} \cos \psi + (8P_{\text{вх}}^{21} \omega_{21} / Q_{R1})^{1/2}; \end{aligned} \quad (25b)$$

$$\bar{q}_{21} [+ \sin \varphi (\omega_{21}^2 - \Omega_{21}^2) + \cos \varphi \omega_{21} \Omega_{21} Q_{\Sigma 21}^{-1}] = +2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} \beta \bar{q}_{32} \sin \psi. \quad (25b)$$

Здесь  $\xi_{mn} = \omega_{mn} H_{mn}(0)$  и введен параметр  $Q_M$ , называемый обычно магнитной добротностью вещества. В наших обозначениях

$$Q_{M32}^{-1} = -\frac{2i \xi_{32}^2 V_0}{\hbar \omega_{32} \Omega_{32}} \alpha; \quad Q_{M21}^{-1} = \frac{2i \xi_{21}^2 V_0}{\hbar \omega_{21} \Omega_{21}} \alpha. \quad (26)$$

Суммарная добротность определяется соотношением  $Q_{\Sigma}^{-1} = Q_L^{-1} + Q_M^{-1}$ .

Прежде чем приступить к рассмотрению частных случаев, сделаем одно замечание, касающееся входящих в (25) коэффициентов.

Величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  зависят, вообще говоря, от расстройки сигналов по отношению к частотам квантовых переходов. Этой зависимостью можно пренебречь, если спектральная линия много шире полосы резонатора, т. е.  $\tau_2^{-1} \gg \omega_{mn} / Q_{Lmn}$ . Указанное условие обычно выполняется для парамагнитных веществ; тогда можно пользоваться формулами (10), справедливыми для  $\omega_{mn}^0 = \Omega_{mn}$ , т. е. при отсутствии расстройки. Частотная характеристика прибора определяется в этом случае суммарной добротностью  $Q_{\Sigma mn}^{-1}$ .

Уравнения (25) содержат всю информацию, необходимую для описания режимов усиления и преобразования частоты, в которых может работать рассматриваемое устройство.

a) *Регенеративный усилитель (мазер).* Рассмотрим случай отсутствия поля на частоте  $\Omega_{32}$ , что может быть, когда резонатор не настроен на частоту перехода  $\omega_{32}^0$ . Уравнения (25) в этом случае сводятся к

$$\bar{q}_{21} [\cos \varphi (\omega_{21} - \Omega_{21}) - \sin \varphi \omega_{21} \Omega_{21} Q_{\Sigma 21}^{-1}] = (8P_{\text{вх}}^{21} \omega_{21} / Q_{R1})^{1/2}; \quad (27)$$

$$\bar{q}_{21} [\sin \varphi (\omega_{21} - \Omega_{21}) + \cos \varphi \omega_{21} \Omega_{21} Q_{\Sigma 21}^{-1}] = 0.$$

Эти уравнения описывают осциллятор, совершающий вынужденные колебания. Диссипация энергии определяется суммарной добротностью  $Q_{\Sigma 21}$ , величина которой зависит от мощности накачки.

В случае строгого резонанса ( $\omega_{21} = \Omega_{21}$ ) из (27) находим:

$$\varphi = -\pi/2; \quad \bar{q}_{21} = (8P_{\text{вх}}^{21} \omega_{21} / Q_{R1})^{1/2} (1/\omega_{21} Q_{\Sigma 21}^{-1}). \quad (28)$$

Зная  $\bar{q}_{21}$  и добротность связи с выходным волноводом  $Q_{R2}$ , легко найти мощность на выходе прибора:

$$P_{\text{вых}}^{21} = \omega_{21}^3 q_{21}^{-2} / 2Q_{R2} = 4P_{\text{вх}}^{21} / Q_{R1} Q_{R2} Q_{\Sigma 21}^{-2}. \quad (29)$$

Отсюда коэффициент передачи по мощности

$$G = P_{\text{вых}}^{21}/P_{\text{вх}}^{21} = 4/Q_{R1} Q_{R2} Q_{\Sigma 21}^{-2} \quad (30)$$

или при  $Q_{R1} = Q_{R2} = Q_R$

$$G = 4/Q_R^2 Q_{\Sigma 21}^{-2}. \quad (30a)$$

Режиму усиления соответствует  $1 < G < \infty$ , что означает отсутствие генерации при коэффициенте усиления, большем единицы. Это условие можно переписать в виде:

$$Q_{021}^{-1} < -Q_{M21}^{-1} < Q_{L21}^{-1}, \quad (31)$$

где через  $Q_0$  обозначена ненагруженная добротность резонатора. Отсюда видно, что для получения усиления магнитная добротность должна быть отрицательной и не выходить за указанные пределы.

Для определения величины  $Q_{M21}$  воспользуемся формулами (26), (10) и таблицей 1. Из них следует, что при насыщающем поле накачки ( $\tau_1^{-1} \tau_2^{-1} < \gamma_{13}^2 < \tau_2^{-2}$ ) магнитная добротность

$$Q_{M21} = \frac{2\hbar}{H_{21}^2(0) V_0 \mu_{21}^2 \tau_2 (2D_{12}^0 - D_{13}^0)} \quad (32)$$

и условие ее отрицательности  $2D_{12}^0 < D_{13}^0$  сводится в радиодиапазоне к  $\omega_{21} < \omega_{31}/2$ . Полоса усилителя  $\Pi = \omega_{21} Q_{\Sigma 21}^{-1}$  и произведение полосы на коэффициент усиления по напряжению для усилителя с проходным резонатором составляет

$$G^{1/2} \Pi = 2\omega_{21} (Q_{R1} Q_{R2})^{-1/2}. \quad (33)$$

*б) Квантовый преобразователь частоты.* Если приведенные выше результаты хорошо известны в теории мазера, то эффект преобразования частоты трехуровневыми системами обычно не рассматривается, хотя, как будет показано ниже, он может быть значительным и представляет несомненный интерес. Пусть резонатор настроен на все три частоты квантовой системы и  $P_{\text{вх}}^{21} = 0$ ,  $P_{\text{вх}}^{32} \neq 0$ . Если при этом  $\Omega_{21} = \omega_{21}$  и  $\Omega_{32} = \omega_{32}$ , то система уравнений (25) легко решается. Возводя в квадрат обе части уравнений (25) и (25в) и затем складывая их, получаем:

$$\bar{q}_{21} \omega_{21} Q_{\Sigma 21}^{-1} = 2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} |\beta| \bar{q}_{32}. \quad (34)$$

Подстановка (34) в (25б), (25в) приводит к следующему соотношению между фазами:

$$\sin \varphi = \pm \cos \psi; \quad \cos \varphi = \pm \sin \psi. \quad (35)$$

Из двух знаков следует оставить тот, который совпадает со знаком  $\beta$ . При насыщающем поле накачки, как следует из таблицы 1, величины  $\beta$  и  $\tilde{\beta}$  имеют противоположные знаки и подстановка (35) в (25)–(25а) дает:

$$\sin \psi (\omega_{32}^2 Q_{\Sigma 32}^{-1} \bar{q}_{32} + 2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} |\tilde{\beta}| \bar{q}_{21}) = - (8P_{\text{вх}}^{32} \omega_{32} Q_{R1}^{-1})^{1/2}; \quad (36)$$

$$\cos \psi (\omega_{32}^2 Q_{\Sigma 32}^{-1} \bar{q}_{32} + 2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} |\tilde{\beta}| \bar{q}_{21}) = 0. \quad (36a)$$

Из (36а) следует, что  $\cos \psi = 0$ ,  $\psi = \pm \pi/2$ , причем знак плюс противоречит (36). Окончательно  $\psi = -\pi/2$  и решение для  $q_{21}$  есть

$$\bar{q}_{21} \left( \frac{\omega_{32}^2 \omega_{21}^2 Q_{\Sigma 32}^{-1} Q_{\Sigma 21}^{-1}}{2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} |\beta|} + 2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} |\beta| \right) = (8P_{\text{вых}}^{32} \omega_{32} Q_{R1}^{-1})^{1/2}. \quad (37)$$

Эффективность системы можно характеризовать коэффициентом преобразования, определенным как отношение выходной мощности к входной:

$$K = P_{\text{вых}}^{21}/P_{\text{вх}}^{32}. \quad (38)$$

Для вычисления  $K$  воспользуемся равенством (37) и далее найдем  $P_{\text{вых}} = \omega_{21} Q_{R1}^{-1} \bar{q}_{21}^2 \omega_{21}^2/2$ . Заметим, что (37) можно привести к форме (28), если ввести в рассмотрение величину  $Q_{S21}^{-1}$ , определив ее как

$$Q_{S21}^{-1} = Q_{\Sigma 21}^{-1} + \frac{(2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1})^2}{\omega_{32}^2 \omega_{21}^2 Q_{\Sigma 32}^{-1}} |\beta \tilde{\beta}|. \quad (39)$$

Аналогично

$$Q_{S32}^{-1} = Q_{\Sigma 32}^{-1} + \frac{(2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1})^2}{\omega_{32}^2 \omega_{21}^2 Q_{\Sigma 21}^{-1}} |\beta \tilde{\beta}|. \quad (39a)$$

Величина  $Q_{S12}$  имеет смысл суммарной добротности. Ее отличие от  $Q_{\Sigma 12}$  обусловлено связью с колебаниями на частоте  $\Omega_{32}$  и вносимыми этой связью дополнительными потерями. На основании (37) и (39), (39a) получаем:

$$K = \frac{4Q_{S21}^2}{Q_{R1} Q_{R2}} \frac{|2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} |\beta| Q_{\Sigma 32}|^2}{\omega_{21} \omega_{32}^2} \quad (40)$$

или

$$K = \frac{4Q_{S32}^2}{Q_{R1} Q_{R2}} \frac{|2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} |\beta| Q_{\Sigma 21}|^2}{\omega_{21} \omega_{32}^2}. \quad (40a)$$

Наиболее интересной возможностью, следующей из развиваемой теории, является сочетание в одном приборе эффектов преобразования и усиления. При рассмотрении теории мазера указывалось, что усиление возможно на самой низкой из резонансных частот трехуровневой системы, т. е. либо на частоте входного сигнала (если  $\omega_{32} < \omega_{21}$ ), либо на комбинационной частоте (если  $\omega_{32} > \omega_{21}$ ). Рассмотрим оба возможных случая, полагая выполненным условие на поле накачки  $(\tau_1 \tau_2)^{-1} \ll \gamma_{13}^2 \ll \tau_z^{-2}$ .

1) Преобразование с уменьшением частоты ( $\omega_{21} > \omega_{32}$ ). Коэффициент преобразования дается формулой (40). На полосу влияют частотные характеристики всех элементов тракта; однако определяющим является контур, в котором имеет место регенерация. Без большой ошибки можно поэтому считать, что

$$\Pi = \Pi_{21} = \omega_{21} Q_{S21}^{-1}. \quad (41)$$

Произведение корня из коэффициента преобразования на полосу

$$K^{1/2} \Pi_{21} = \frac{2\omega_{21}}{(Q_{R1} Q_{R2})^{1/2}} \frac{2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} |\beta| Q_{\Sigma 32}}{\omega_{21}^{1/2} \omega_{32}^{3/2}}. \quad (42)$$

Эту формулу можно привести к виду, удобному для практических расчетов. Для этого воспользуемся близостью условий усиления и генерации и найдем параметры системы, соответствующие порогу самовозбуждения  $Q_{S21}^{-1} = 0$ . Поскольку добротность, связанная с дополнительным

тельными потерями, как показывают оценки, велика по сравнению с другими добротностями, можно воспользоваться более простым соотношением  $Q_{\Sigma 21}^{-1} = 0$ . Заметим также, что согласно таблице 1 ( $\gamma_{13}^2 \sim \tau_2^{-2}$  и  $D_{12}^0 \ll D_{13}^0$ )

$$|D_{ef}| = |\tilde{D}_{ef}| = |D_e| = |\tilde{D}_e| = D.$$

Поэтому вблизи порога генерации:

$$D = \hbar \omega_{21} Q_{L21}^{-1} / \xi_{21}^2 V_0 \tau_2, \quad |\beta| = \tau_2^2 D/4. \quad (43)$$

Если  $H_{21}(0) = H_{32}(0)$  и  $\mu_{21} = \mu_{32}$ , то на основании (26) можно записать  $|Q_{M21}| = |Q_{M32}|$ , и на пороге генерации магнитные добротности будут порядка  $Q_{L21}$ .

Подставляя (43) в (42), при этих предположениях получаем:

$$K^{1/2} \Pi_{12} = \frac{\omega_{21}}{(Q_{R1} Q_{R2})^{1/2}} \left( \frac{\omega_{21}}{\omega_{32}} \right)^{1/2} \frac{\gamma_{13} \tau_2}{1 + Q_{L21} / Q_{L32}}. \quad (44)$$

Наиболее оптимальной является мощность накачки, обеспечивающая стремление  $\gamma_{13}$  к  $\tau_2^{-1}$ .

Параметр  $K^{1/2} \Pi$ , характеризующий качества преобразователя, естественно сравнивать с параметром  $G^{1/2} \Pi$  мазера (33), работающего на частоте  $\Omega_{21}$ :

$$\frac{K^{1/2} \Pi_{12}}{G^{1/2} \Pi_{12}} = \frac{1}{2} \left( \frac{Q_{R1}^{21}}{Q_{R1}^{32}} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega_{21}}{\omega_{32}} \right)^{1/2} \frac{\gamma_{13} \tau_2}{1 + Q_{L21} Q_{L32}^{-1}}. \quad (45)$$

2) Преобразование с увеличением частоты  $\omega_{32} < \omega_{21}$ . В этом случае полоса прибора определяется  $Q_{S32}$  и равна

$$\Pi = \Pi_{32} = \omega_{32} Q_{S32}^{-1}; \quad (46)$$

согласно (40а).

$$K^{1/2} \Pi_{32} = \frac{2\omega_{32}}{(Q_{R1} Q_{R2})^{1/2}} \frac{2\xi_{21} \xi_{32} \gamma_{13} V_0 \hbar^{-1} |\beta| Q_{\Sigma 21}}{\omega_{21}^{1/2} \omega_{32}^{3/2}}. \quad (47)$$

Вытекающее отсюда упрощенное выражение имеет вид:

$$K^{1/2} \Pi_{32} = \frac{2\omega_{32}}{(Q_{R1} Q_{R2})^{1/2}} \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_{21}}{\omega_{32}} \right)^{1/2} \frac{\gamma_{13} \tau_2}{1 + Q_{L32} Q_{L21}^{-1}}. \quad (48)$$

Эффективность преобразования с увеличением частоты целесообразно сравнивать с работой мазера на частоте  $\Omega_{32}$ . Воспользовавшись для этого аналогией с (33), напишем выражение для  $G^{1/2} \Pi_{32}$ , которое сравним с (48):

$$\frac{K^{1/2} \Pi_{32}}{G^{1/2} \Pi_{32}} = \sqrt{\frac{\omega_{21}}{\omega_{32}}} \sqrt{\frac{Q_{R2}^{(32)}}{Q_{R2}^{(21)}}} \frac{\gamma_{13} \tau_2}{(1 - Q_{L21} Q_{L32}^{-1})}. \quad (45a)$$

Из (45) и (45а) видно, что квантовое преобразование частоты происходит достаточно эффективно, так как в (45) и (45а), по существу, входит только корень отношения частот (с точностью до несущественного множителя, не намного меньшего единицы при  $\gamma_{13} \sim \tau_2^{-1}$ ). Заметим, что в (45а) (преобразование с увеличением частоты) частоты входят благоприятнее, чем в (45), так как в (45а)  $\omega_{21}/\omega_{32} > 1$ .

#### 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЧАСТОТЫ В ОПТИЧЕСКОМ ДИАПАЗОНЕ

При рассмотрении эффекта преобразования частоты в оптическом диапазоне важно учитывать пространственную зависимость матрицы плотности. Дело в том, что в оптике, как правило, размеры системы много больше длины излучаемой волны. Под действием двух полей

$$H_{13} \cos(\Omega_{13} t) \cos(k_{13} z) + H_{12} \cos(\Omega_{12} t + \varphi) \cos(k_{12} z) \quad (12a)$$

возникает отклик в виде матрицы плотности на частоте  $\Omega_{32}$  и с волновым вектором  $k_{32} = \Omega_{32}/c^*$ :

$$\rho_{32} = \frac{1}{2} \tilde{\beta} \gamma_{13}^0 \gamma_{12}^0 e^{i\varphi} \cos(k_{32} z) e^{-i\Omega_{32} t} \quad (kv\tau \ll 1)$$

и

$$\bar{\rho}_{32} = \bar{A}_{32} \cos(k_{32} z) e^{-i\Omega_{32} t} \quad (kv\tau \gg 1)$$

(см. (8a) и (13)). Вообще говоря,  $\tilde{\beta}$  зависит от  $\gamma_{13} = \gamma_{13}^0 \cos(k_{31} z)$  и, следовательно, от  $z$ . Однако в ряде случаев (см. таблицу 1) этой зависимостью можно пренебречь.

Для описания эффекта преобразования частоты нам необходимо найти интенсивность излучения на частоте  $\Omega_{32}$ . Будем рассматривать случай, когда электродинамическая система не является резонансной на частоте  $\Omega_{32}$  и излучение происходит в свободное пространство. Из выражений (8a), (13) следует, что намагниченность (или поляризация) на частоте  $\Omega_{32}$  имеет вид:

$$\mathbf{M}(z, t) = \mathbf{M}_0 \cos(k_{32} z) \cos(\Omega_{32} t). \quad (49)$$

Для вычисления интенсивности такого излучения воспользуемся уравнением (20), которое справедливо, конечно, и для свободного пространства. Из (20) и (49) обычным образом находим интенсивность излучения в свободном пространстве [3] в интервале телесных углов  $d\Omega$ :

$$dS = \frac{\pi}{4} \frac{\Omega_{32}^2}{(2\pi c)^3} b_v^2 L^3 d\Omega, \quad (50)$$

где

$$b_v = -\omega_v \mathbf{M}_0 \int_V \mathbf{H}_v(r) \cos k_0 z dV,$$

$V$ —объем вещества, а  $L^3$ —нормированный объем свободного пространства ( $L \rightarrow \infty$ ). Собственные функции  $\mathbf{H}_v$ , описывающие колебания в свободном пространстве, имеют вид [3]:

$$\mathbf{H}_{v_1}^s = \sqrt{\frac{8\pi}{L^3}} \mathbf{e}_v^s \cos(k_v r), \quad \mathbf{H}_{v_2}^s = \sqrt{\frac{8\pi}{L^3}} \mathbf{e}_v^s \sin(k_v r),$$

где  $s$  принимает два значения, соответствующие двум возможным независимым поляризациям  $\mathbf{e}_v^s$ .

Далее мы рассмотрим случай, когда размеры молекулярной системы  $A$ ,  $B$  и  $C$  (по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) много больше длины волны. В этом приближении

$$b_v^2 = \frac{1}{4} \omega_0^2 (\mathbf{e}_{v_1}^s \mathbf{M}_0) \frac{8\pi}{L^3} \left\{ \frac{\sin(k_x A/2)}{k_x A/2} \right\}^2 \left\{ \frac{\sin(k_y B/2)}{k_y B/2} \right\}^2 \times$$

\* Мы пренебрегаем дисперсией.

$$\times \left\{ \frac{\sin [(k_z - k_0) C/2]}{(k_z - k_0)/2} \right\}^2 A^2 B^2 C^2; \\ k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_{32}^2. \quad (51)$$

Эти выражения определяют диаграмму направленности излучения нашей системы. В случае, когда  $A \sim B \sim C$ , нетрудно найти, что угловой размер диаграммы направленности порядка

$$\Delta\Theta = \lambda_{32}/A.$$

Найдем полную интенсивность излучения. Для этого необходимо проинтегрировать (50) по всем углам  $d\Omega$ . В нашем случае достаточно ограничиться малым интервалом углов  $d\Omega$  относительно оси  $z$ :

$$d\Omega = dk_x dk_y / k_{32}^2,$$

а  $k_z$ —заменить на  $k_{32}$ . В силу того, что (51)—достаточно острая функция угла, интегрирование можно распространить до бесконечности. Тогда полная интенсивность излучения принимает вид:

$$S = \frac{\omega_{32}^4 M_0^2 AB \lambda_{32}^2 C^2}{16 \pi c^3}. \quad (52)$$

Выражения (52), (8), (13) и (21) определяют интенсивность преобразованного излучения в оптике.

Проведенное выше рассмотрение можно резюмировать следующим образом. Трехуровневые квантовые системы являются эффективными нелинейными элементами для преобразования частоты. Предлагаемый квантовый преобразователь частоты обладает высоким коэффициентом преобразования в радиодиапазоне (в принципе бесконечным—вблизи режима генерации) и является так же, как и мазер, малошумящим устройством. Следует отметить, что рассмотренные эффекты не могут быть поняты в терминах населенностей уровней молекулярной системы и поля (чисел фотонов), так как эффект преобразования связан с недиагональными элементами матрицы плотности и когерентным полем излучения с определенной фазой (в этом случае числа фотонов не определены). В частности, преобразованное излучение может происходить на частоте, которой соответствует пара уровней с неинвертированными населенностями.

### Приложение 1. Вывод уравнения для матрицы плотности с учетом движения молекул

Матрица плотности отдельной молекулы газа имеет вид:

$$\hat{\rho}(t, x, t_0, v),$$

где  $t_0$ —время последнего соударения,  $v$ —скорость молекулы. Нас будет интересовать матрица плотности, усредненная по  $t_0$ :

$$\hat{\rho}(t, x) = \int_0^\infty f(\Theta) d\Theta \rho(t, x, t_0, v), \quad (1.1)$$

где  $f(\Theta) d\Theta$ —вероятность того, что соударение произошло в интервале времени между  $t - \Theta$  и  $t - \Theta + d\Theta$ . Как обычно [4], положим  $f(\Theta) = \tau^{-1} e^{-\Theta/\tau}$ , где  $\tau$ —среднее время между соударениями. Продифференцируем (1.1) по  $t$ :

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} = \int_0^\infty f(\Theta) \left[ \frac{\partial \rho(t, x, t_0, v)}{\partial t} \right]_{t_0=t-\Theta} d\Theta - \tau^{-1} \int_0^\infty e^{-\Theta/\tau} \frac{\hat{\partial \rho}(t, x, t-\Theta, v)}{\partial \Theta} d\Theta. \quad (1.2)$$

Далее учтем, что для отдельной молекулы имеет место соотношение

$$\left[ \frac{\hat{\partial \rho}(t, x, t_0, v)}{\partial t} \right]_{t_0=t-\Theta} + v \nabla \rho(t, x, t-\Theta, v) = - \frac{i}{\hbar} [H(x, t), \rho(t, x, t-\Theta, v)].$$

Подставляя это равенство в правую часть (1.2) и интегрируя последний член в (1.2) по частям, окончательно находим:

$$\frac{\hat{\partial \rho}}{\partial t} + v \nabla \hat{\rho} = - \frac{i}{\hbar} [H, \hat{\rho}] - \frac{1}{\tau} (\hat{\rho} - \hat{\rho}_0), \quad (1.3)$$

где  $\rho_0$  — значение матрицы плотности в момент соударения. Этую матрицу в дальнейшем будем отождествлять с равновесной матрицей плотности.

## Приложение 2. Решение уравнения для матрицы плотности в случае $kvt \gg 1$

Покажем, что при решении уравнения (4) можно ограничиться первой пространственной гармоникой недиагональных элементов и постоянной составляющей диагональных элементов. Для этого запишем решения уравнений (4) и (6), (12) в виде ряда:

$$\begin{aligned} \rho_{ik} &= \sum_m \rho_{ik}^{(m)} e^{ik_{ik} m z} e^{-i\omega_{ik} t}; \\ \rho_{kl} &= \sum_m \tilde{\rho}_{ki}^{(m)} e^{ik_{kl} m z} e^{i\omega_{ik} t}; \\ D_{ln} &= \sum_m d_{ln}^{(m)} e^{ik_{ln} m z}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в уравнение (4) и оставляя секулярные члены, получим для первых пространственных гармоник следующие уравнения:

$$[(\delta - i\tau_2^{-1}) + k_{32} v] \rho_{32}^{(1)} = \frac{1}{4} (\gamma_{13}^0 \tilde{\rho}_{12}^{(-1)} - \gamma_{12}^0 e^{i\varphi} \rho_{31}^{(1)}); \quad (2.2)$$

$$[(\delta_1 - i\tau_2^{-1}) + k_{31} v] \rho_{31}^{(1)} = \frac{1}{4} (\gamma_{13}^0 d_{13}^{(0)} + \gamma_{13}^0 d_{13}^{(2)}); \quad (2.3)$$

$$[(\delta - i\tau_2^{-1}) + k_{21} v] \rho_{21}^{(1)} = \frac{1}{4} [\gamma_{13}^0 \tilde{\rho}_{23}^{(-1)} + \gamma_{12}^0 e^{-i\varphi} (d_{12}^{(0)} + d_{12}^{(2)})]; \quad (2.4)$$

$$\tau_1^{-1} (d_{23}^{(0)} - D_{23}^0) = - \frac{1}{4} \gamma_{13}^0 (\tilde{\rho}_{13}^{(-1)} + \tilde{\rho}_{13}^{(1)} - \rho_{31}^{(-1)} - \rho_{31}^{(1)}); \quad (2.5)$$

$$\tau_1^{-1} (d_{13}^{(0)} - D_{13}^0) = - \frac{2i}{4} \gamma_{13}^0 (\tilde{\rho}_{13}^{(-1)} + \tilde{\rho}_{13}^{(1)} - \rho_{31}^{(-1)} - \rho_{31}^{(1)}); \quad (2.6)$$

$$\tau_1^{-1} (d_{12}^{(0)} - D_{12}^0) = - \frac{i}{4} \gamma_{13}^0 (\tilde{\rho}_{13}^{(-1)} + \tilde{\rho}_{13}^{(1)} - \rho_{31}^{(-1)} - \rho_{31}^{(1)}); \quad (2.7)$$

$$[(\delta - i\tau_2^{-1}) + 3k_{32} v] \rho_{32}^{(3)} = 0; \quad (2.8)$$

$$[(\delta_1 - i\tau_2^{-1}) + 3k_{31}v] \rho_{31}^{(3)} = \frac{1}{4} \gamma_{13}^0 (d_{13}^{(2)} + d_{13}^{(4)}); \quad (2.9)$$

$$[(\delta_2 - i\tau_2^{-1}) + 3k_{21}v] \rho_{21}^{(3)} = \frac{1}{4} \gamma_{12}^0 e^{-i\varphi} (d_{12}^{(2)} + d_{12}^{(4)}); \quad (2.10)$$

$$\tau_1^{-1} d_{23}^{(2)} + 2ivk_{23} d_{23}^{(2)} = -\frac{i}{4} \gamma_{13}^0 (\tilde{\rho}_{13}^{(1)} + \tilde{\rho}_{13}^{(3)} - \rho_{13}^{(1)} - \rho_{31}^{(3)}); \quad (2.11)$$

$$\tau_1^{-1} d_{13}^{(2)} + 2ivk_{31} d_{13}^{(2)} = -\frac{1}{2} i \gamma_{13}^0 (\tilde{\rho}_{13}^{(3)} + \tilde{\rho}_{13}^{(3)} - \rho_{13}^{(1)} - \rho_{31}^{(3)}); \quad (2.12)$$

$$\tau_1^{-1} d_{12}^{(2)} + 2ivk_{21} d_{12}^{(2)} = -\frac{1}{4} i \gamma_{13}^0 (\tilde{\rho}_{13}^{(3)} + \tilde{\rho}_{13}^{(3)} - \rho_{13}^{(1)} - \rho_{31}^{(3)}). \quad (2.13)$$

Из этих уравнений легко видеть, что второй гармоникой диагональных элементов и третьей недиагональных можно пренебречь. В самом деле, воспользовавшись (2.3) и (2.12) при  $\delta = 0$ ;  $\tau_1 \approx \tau_2$  и  $kvt \gg 1$  и пренебрегая  $\rho_{31}^{(3)}$  и  $\tilde{\rho}_{13}^{(3)}$ , получим:

$$\frac{d_{13}^{(0)}}{d_{13}^{(2)}} \approx \frac{16 \rho_{31}^{(1)}}{\tilde{\rho}_{13}^{(1)} - \rho_{31}^{(1)}} \frac{(k_{31}v)^2}{\gamma_{13}^2}. \quad (2.14)$$

Исходя из (2.4) и (2.13) и подставив в (2.4)  $\rho_{21}^{(1)}$ , взятое из уравнения для  $\tilde{\rho}_{23}^{(-1)}$ , аналогичного (2.2), легко получить:

$$\frac{d_{12}^{(0)}}{d_{12}^{(2)}} = \frac{32 \rho_{13}^{(-1)}}{\tilde{\rho}_{13}^{(1)} - \rho_{31}^{(1)}} \frac{(k_{21}v)^2}{\gamma_{13}^2}. \quad (2.15)$$

При написании (2.15) мы пренебрегли третьей гармоникой  $\rho_{31}^{(3)}$ ; кроме того, был отброшен член с  $\tilde{\rho}_{23}^{(-1)}$ .

Из соотношений (2.14) и (2.15) видно, что при  $(kv)^2 \gg \gamma_{13}^2$  вторыми гармониками действительно можно пренебречь. Остается убедиться, что третья гармоника  $\rho_{31}$  мала по сравнению с первой в том же приближении. Действительно, комбинируя (2.3) и (2.9), получим:

$$\frac{\rho_{31}^{(1)}}{\rho_{31}^{(3)}} = 3 \frac{d_{13}^{(0)}}{d_{13}^{(2)}} = 48 \frac{\rho_{31}^{(1)}}{\tilde{\rho}_{13}^{(1)} - \rho_{31}^{(1)}} \frac{(k_{31}v)^2}{\gamma_{13}^2}. \quad (2.16)$$

При выводе (2.16) была отброшена четвертая гармоника  $d_{13}^{(4)}$ , которая, как легко убедиться, мала.

Таким образом, условия применимости использованного приближения имеют вид:

$$kv\tau \gg 1; \quad kv/\gamma_{13} \gg 1.$$

Эти два условия можно записать в виде одного:

$$kv / \sqrt{\tau^{-2} + \gamma_{13}^2} \gg 1.$$

### Приложение 3. Учет вырождения

Учет вырождения в общем случае является довольно сложной задачей. Поэтому мы остановимся на простом, но важном случае вы-

рождения по  $M$ -магнитному квантовому числу (это вырождение связано с изотропностью рассматриваемой системы).

Пусть все три поля  $H_{13}$ ,  $H_{23}$  и  $H_{12}$  поляризованы вдоль оси  $z$ . Тогда энергия взаимодействия будет пропорциональна  $z$ -компоненте дипольного момента:

$$V = -F_z \mu^z. \quad (3.1)$$

Отсюда следует, что можно выбрать такое представление, в котором  $\hat{V}$  будет диагонально по  $M$  (см., например, [1], § 27). В этом случае уравнение (1) для матрицы плотности принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{nM; mM'}}{\partial t} + i\omega_{nm} \rho_{nM; mM'} + \frac{1}{\tau} (\hat{\rho} - \hat{\rho}_0)_{nM; mM'} &= \\ = -\frac{i}{\hbar} \sum_k (V_{nM; kM} \rho_{kM; mM'} - \rho_{nM; kM'} V_{kM'; mM'}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

(мы для простоты рассматриваем случай одинаковых  $\tau$ ).

Так как в состоянии равновесия матрица плотности  $\hat{\rho}_0$  диагональна, то (при  $M \neq M'$ )

$$(\rho_0)_{nM; mM'} = 0.$$

Отсюда следует, что для  $\rho_{nM; mM'}$  ( $M \neq M'$ ) система уравнений (3.2) является однородной и, следовательно, стационарное решение имеет вид:

$$\rho_{nM; mM'} = 0 \quad (M \neq M').$$

При  $M = M'$  система (3.2) совпадает с системой уравнений без вырождения, но  $V_{nk}$  теперь является функцией  $M$ . Зависимость  $V_{nk}$  от  $M$ , а следовательно, и зависимость  $\rho_{nM; mM}$  от  $M$  определяется зависимостью  $\mu_{MM'}^z$  от  $M$ . Матричные элементы  $z$ -компоненты произвольного вектора как функции  $M$  приведены в [1], § 27. Матрица  $\rho_{nM; kM}$  определяет среднее значение  $z$ -компоненты дипольного момента:

$$\langle M_z \rangle = \text{Sp} (\hat{\rho} \hat{\mu}^z) = \sum_{M, n, k} \rho_{nM; kM} \mu_{kM; nM}^z.$$

Средние значения  $x$ - и  $y$ -компоненты дипольного момента определяются недиагональными матричными элементами  $\rho_{nM; lM'}$ , так как  $\mu^x$  и  $\mu^y$  в выбранном представлении недиагональны. Следовательно,

$$\langle \mu^x \rangle = \langle \mu^y \rangle = 0,$$

так как

$$\rho_{nM; mM'} = 0.$$

Таким образом, при наличии вырождения по  $M$  под действием полей  $H_{21}$ ,  $H_{13}$  и  $H_{23}$ , поляризованных по оси  $z$ , возникает отклик только по оси  $z$ . Случай различных поляризаций полей  $H_{nm}$  является более сложным, и мы не будем останавливаться на нем.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Квантовая механика, ч. I, ГИТТЛ, М., 1948.
2. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
3. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.

4. R. Karpplus, J. Schwinger, Phys. Rev., 73, 1020 (1948).
5. Б. М. Файн, Я. И. Ханин, Э. Г. Яшин, ЖЭТФ, 41, 986 (1961).
6. А. Н. Малахов, В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 66 (1958).
7. A. M. Glogston, J. Phys. Chem. Solids, 4, 271 (1958).
8. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию ЖЭТФ  
20 января 1962 г.,  
в редакцию «Радиофизики»  
7 марта 1962 г.

## ON THE INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC OSCILLATIONS IN THREE-LEVEL SYSTEMS

*V. M. Fain, Ja. I. Khanin, E. G. Jashchin*

The problem is considered of using non-linear properties of three-level quantum systems for transformation of frequencies of electromagnetic oscillations in optical and radio region. An equation for density matrix describing behaviour of many-level gaseous systems was obtained taking into account molecular velocities. An expression for transformation factor of a three-level mixer has been derived as a result of a simultaneous solution of the equation for density matrix and Maxwell equations; the values of this factor may be very high (in principle infinite) if there is a regeneration at one of the frequencies (signal or combination one). Besides the intensity of radiation into a free space at a transformed frequency in an optical range has been calculated, when the dimensions of three-level system are much larger than a wavelength.

## К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СРЕД С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПО ВРЕМЕНИ СВОЙСТВАМИ

*Ф. В. Бункин*

Устанавливаются некоторые общие свойства решения неоднородной задачи электродинамики периодически нестационарных сред. В качестве конкретной среды рассмотрена достаточно разреженная плазма, находящаяся в сильных сторонних электрических и магнитных полях, периодически меняющихся во времени.

1. В тех случаях, когда под действием некоторых причин, не связанных с влиянием рассматриваемого ниже электромагнитного поля  $E(r, t)$ ,  $B(r, t)$ , среда меняет свои свойства со временем, система макроскопических уравнений поля может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} B &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \int_v dr' \int_v^{\infty} \hat{K}(r, r'; t, \tau) E(r', t-\tau) d\tau + \frac{4\pi}{c} j; \\ \operatorname{rot} E &= - \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $j = j(r, t)$  — плотность стороннего тока, а интегральный член представляет собою плотность полного индуцируемого полем  $E(r, t)$  тока. Компоненты тензора  $K_{ik}(r, r'; t, \tau)$  определяют линейный отклик  $i$ -ой компоненты плотности тока в точке  $r$  в момент времени  $t$  на  $\delta$ -импульс  $k$ -ой компоненты поля  $E$ , действующий в точке  $r'$  в момент  $(t-\tau)$ .

Очевидно, что в приведенных уравнениях учитывается не только временная, но и пространственная дисперсия. Если внешнее переменное воздействие на среду, обусловливающее ее нестационарность (зависимость тензора  $\hat{K}$  от времени  $t$ ), является периодическим с периодом  $T = 2\pi/\Omega$ , то компоненты  $K_{ik}(r, r'; t, \tau)$  будут периодическими функциями  $t$  с тем же периодом. Примером среды с периодическими по времени свойствами может служить плазма, находящаяся в сильных сторонних периодических электрических и магнитных полях [1].

Наша задача будет заключаться, прежде всего, в том, чтобы установить некоторые общие свойства решения неоднородной задачи электродинамики периодически нестационарных сред. В качестве конкретной среды будет рассмотрена достаточно разреженная плазма со сколь угодно глубокой модуляцией своих параметров.

2. Периодическая модуляция свойств среды может, в принципе, приводить к эффекту параметрической регенерации (в частности, параметрическому самовозбуждению; см., например, [2]). Мы будем предполагать, что в рассматриваемой нестационарной среде параметрическая регенерация невозможна\*. Это означает, что при любом пространст-

венно-временном распределении сторонних токов  $j(r, t)$  в среде не существует нарастающих со временем (или в пространстве) волн.

Для установившегося значения вектора поля  $E(r, t)$  в общем случае на основании принципа суперпозиций имеем:

$$E(r, t) = \int dr' \int_0^\infty d\tau \hat{Q}(r, r'; t, \tau) j(r', t, -\tau); \quad (2)$$

аналогичное соотношение справедливо и для вектора магнитной индукции  $B(r, t)$ .

Физический смысл функции Грина  $Q_{ik}(r, r'; t, \tau)$ , очевидно, аналогичен смыслу функции  $K_{ik}(r, r'; t, \tau)$  как линейного отклика на  $\delta$ -импульс. Так же, как и последняя, функция  $Q_{ik}(r, r'; t, \tau)$  периодична по  $t$  с периодом  $T = 2\pi/\Omega$ . Далее, на основании принципа причинности при учете конечности скорости света  $c$  получаем, что  $Q_{ik}(r, r'; t, \tau) = 0$ , если  $\tau < |r - r'|/c$ . Отсюда, в частности, следует, что если в (2) интегрирование по  $r'$  распространяется на всю пространственную область существования токов  $j(r, t)$ , то нижний предел интегрирования по  $\tau$  должен быть равен  $|r - r'|/c$ .

Это свойство тензора  $Q_{ik}$  как функции  $\tau$  приводит к тому, что вещественная и мнимая части тензора

$$q_{ik}(r, r'; t, \omega) = \int_{|r - r'|/c}^{\infty} Q_{ik}(r, r'; t, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (3)$$

должны удовлетворять обычным соотношениям Крамерса—Кронига по отношению к переменной  $\omega$  при произвольных значениях  $r, r'$  и  $t^{**}$ . Легко убедиться в том, что этим соотношениям при любых значениях  $r$  и  $r'$  должны также удовлетворять и коэффициенты  $q_{ik}^{(n)}(r, r'; \omega)$  разложения тензора  $q_{ik}(r, r'; t, \omega)$  в ряд Фурье по  $t$ , т. е. величины

$$q_{ik}^{(n)}(r, r'; \omega) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} q_{ik}(r, r'; t, \omega) e^{in\Omega t} dt. \quad (4)$$

Величины  $q_{ik}(r, r'; t, \omega)$  и  $q_{ik}^{(n)}(r, r'; \omega)$  как функции  $\omega$  обладают следующими свойствами симметрии, вытекающими из (3) и 4):

$$\begin{aligned} q_{ik}(r, r'; t, \omega) &= q_{ik}^*(r, r'; t, -\omega); \\ q_{ik}^{(n)}(r, r'; \omega) &= q_{ik}^{(-n)*}(r, r'; -\omega). \end{aligned} \quad (5)$$

Для фурье-амплитуды напряженности поля  $E(r, \omega)$  на основании (2)–(4) получаем:

\* Для случая периодически нестационарной плазмы невозможность параметрической регенерации доказана в [1,3].

\*\* Этот вывод вместе с другими, отражающими свойства функции  $q_{ik}^{(n)}(r, r'; \omega)$  (см. (4) и (5)), разумеется, в равной мере справедлив и в отношении тензора  $K_{ik}(r, r'; t, \tau)$  [1]. Заметим также, что для пространственно однородных сред, когда тензоры  $K_{ik}$  и  $Q_{ik}$  зависят лишь от разности  $r - r'$ , учет конечности скорости света приводит, как известно [1], к обобщению соотношений Крамерса—Кронига. Однако предположение об однородности периодически нестационарной среды представляется искусственным и поэтому нами не рассматривается.

$$E(r, \omega) = \sum_n \int dr' \hat{q}^{(n)}(r, r'; \omega - n\Omega) j(r, \omega - n\Omega), \quad (6)$$

где  $j(r, \omega)$  — фурье-амплитуда плотности тока  $j(r, t)$ . Это уравнение показывает, что при гармоническом стороннем токе  $j(r, t) = j(r) \times \exp(-i\omega t)$  поле  $E(r, t)$  представляет собою суперпозицию полей

$$E^{(n)}(r, t) = E^{(n)}(r) \exp[-i(\omega + n\Omega)t] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где

$$E^{(n)}(r) = \int dr' \hat{q}^{(n)}(r, r'; \omega) j(r'). \quad (7)$$

Будем называть поле  $E^{(n)}(r)$  парциальным полем; частота этого поля равна  $\omega + n\Omega$ . Соотношение (7) дает возможность выразить тензор  $\hat{q}^{(n)}(r, r'; \omega)$  (а в конечном счете, и всю функцию Грина  $Q_{ik}$ ) через  $n$ -ое парциальное поле  $\mathcal{E}^{(n)}(r, r'; \omega)$ , возбуждаемое гармоническим элементарным диполем с моментом  $p = p_0 \exp(-i\omega t)$ , помещенным в точке  $r'$ . Действительно, соответствующая такому диполю плотность тока  $j(r)$ , очевидно, равна  $-i\omega p_0 \delta(r - r')$  и поэтому, в согласии с (7), имеем:

$$\mathcal{E}^{(n)}(r, r'; \omega) = -i\omega \hat{q}^{(n)}(r, r'; \omega) p_0. \quad (8)$$

Отсюда следует, что компонента тензора  $q_{ik}^{(n)}(r, r'; \omega)$  равна умноженной на  $i/\omega$  компоненте поля  $\mathcal{E}_i^{(n)}(r, r'; \omega)$ , возбуждаемого единичным диполем, который ориентирован вдоль  $k$ -ой оси.

Для сред с постоянными по времени свойствами, когда  $n$  может принимать только одно значение  $n = 0$ , справедлива теорема взаимности, согласно которой [5]

$$\mathcal{E}(r, r'; \omega) p_0(r) = \mathcal{E}(r', r; \omega) p_0(r').$$

Отсюда для тензора  $q_{ik}(r, r'; \omega)$  получаем условие симметрии

$$q_{ik}(r, r'; \omega) = q_{ki}(r', r; \omega). \quad (9)$$

Если в среде имеется постоянное магнитное поле  $B_0$ , создаваемое внешним источником, то теорема взаимности\* приводит к соотношению [6]

$$\mathcal{E}(r, r'; \omega, B_0) p_0(r) = \mathcal{E}(r', r; \omega, -B_0) p_0(r').$$

Отсюда следует, что в этом случае условие симметрии (9) выглядит так:

$$q_{ik}(r, r'; \omega, B_0) = q_{ki}(r', r; \omega, -B_0). \quad (9a)$$

Для рассматриваемых периодически нестационарных сред каких-либо простых соотношений между  $p_0(r)$ ,  $p_0(r')$  и парциальными полями  $\mathcal{E}^{(n)}(r, r'; \omega)$  и  $\mathcal{E}^{(n)}(r', r; \omega)$  получить не удается, и тензор  $q_{ik}^{(n)}(r, r'; \omega)$  не обладает свойствами симметрии типа (9) или (9a).

Если область пространства  $V$ , занятого токами  $j(r)$ , достаточно мала, то парциальное поле  $E^{(n)}(r)$  можно разложить на мультиполи. Разлагая функцию  $q_{ik}^{(n)}(r, r'; \omega)$  по степеням  $r'$ , на основании (7) получаем:

\* Заметим, что теорема взаимности обычно (и, в частности, в работах [5, 6]) выводится для сред без пространственной дисперсии. Легко, однако, убедиться в том, что она остается справедливой и при учете пространственной дисперсии.

$$\begin{aligned} E^{(n)}(\mathbf{r}) = & -i\omega \hat{q}^{(n)}(\mathbf{r}, 0; \omega) \mathbf{p} + \\ & + \hat{R}^{(n)}(\mathbf{r}; \omega) \mathbf{m} - i\omega \hat{T}^{(n)}(\mathbf{r}; \omega) \hat{D} + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{m}$ —векторы соответственно электрического и магнитного дипольного момента распределения токов, определяемые равенствами

$$\mathbf{p} = \frac{i}{\omega} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'; \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r}', \mathbf{j}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}',$$

$\hat{D}$ —тензор электрического квадрупольного момента, определяемый равенством

$$D_{lk} = \frac{i}{\omega} \int [3(x'_l j_k(\mathbf{r}') + x'_k j_l(\mathbf{r}') - 2\delta_{lk} \mathbf{r}' \mathbf{j}(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}',$$

а тензоры  $\hat{R}(n)(\mathbf{r}; \omega)$  (второго ранга) и  $\hat{T}(n)(\mathbf{r}; \omega)$  (третьего ранга) определяются свойствами тензора  $\hat{q}^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)$ :

$$\begin{aligned} R_{ik}^{(n)}(\mathbf{r}; \omega) &= \frac{c}{2} e_{\alpha\beta\gamma} \left( \frac{\partial q_{i\beta}^{(n)}}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial q_{i\alpha}^{(n)}}{\partial x'_\beta} \right)_{\mathbf{r}'=0}; \\ T_{ikl}^{(n)}(\mathbf{r}; \omega) &= \frac{1}{12} \left( \frac{\partial q_{ik}^{(n)}}{\partial x'_l} + \frac{\partial q_{il}^{(n)}}{\partial x'_k} \right)_{\mathbf{r}'=0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $e_{\alpha\beta\gamma}$ —совершенно антисимметричный единичный псевдотензор третьего ранга ( $e_{123} = 1$ ).

3. Вычислим тензор  $q_{lk}^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)$  для случая достаточно разреженной плазмы, находящейся в постоянном магнитном поле и в сильных сторонних переменных электрических и магнитных полях. Пространственной дисперсией будем при этом пренебречь. Парциальные поля  $E^{(n)}(\mathbf{r})$  и  $B^{(n)}(\mathbf{r})$ , возбуждаемые гармоническим током  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ , согласно (1), (6) и (7), удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \text{rot } B^{(n)}(\mathbf{r}) = & -ik_n E^{(n)}(\mathbf{r}) + \frac{4\pi}{c} \sum_k \hat{\sigma}^{(n-k)}(\mathbf{r}, \omega + k\Omega) E^{(k)}(\mathbf{r}) + \\ & + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \delta_{0n}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{rot } E^{(n)}(\mathbf{r}) = ik_n B^{(n)}(\mathbf{r}),$$

где  $k_n = (\omega + n\Omega)/c$ , а тензор  $\hat{\sigma}^{(n)}(\mathbf{r}, \omega)$  определяется равенством\*:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(n)}(\mathbf{r}, \omega) &= \hat{\sigma}^{(-n)*}(\mathbf{r}, -\omega) = \\ &= \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} e^{in\Omega t} dt \int_0^\infty \hat{K}(\mathbf{r}; t, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

\* Поскольку пространственной дисперсией пренебрегается, тензор  $\hat{K}$  зависит от координат  $\mathbf{r}$  лишь одной точки пространства.

Для интересующего нас случая плазмы компоненты тензора  $\sigma_{ik}^{(n)}$  были вычислены ранее [1]. Так же, как и для стационарной плазмы, при стремлении электронной плотности  $N$  к нулю все компоненты  $\sigma_{ik}^{(n)}$  являются малыми порядка  $N$ , причем равномерно по  $n$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Это обстоятельство дает возможность применить для вычисления  $q_{ik}^{(n)}$  метод возмущений, который оказывается пригодным при сколь угодно глубокой модуляции параметров плазмы.

Будем искать поля  $E^{(n)}$  и  $B^{(n)}$  в виде разложений:

$$E^{(n)} = E_0^{(n)} + E_1^{(n)} + E_2^{(n)} + \dots; \quad B^{(n)} = B_0^{(n)} + B_1^{(n)} + B_2^{(n)} + \dots, \quad (14)$$

где  $E_1^{(n)}$  и  $B_1^{(n)}$  имеют тот же порядок малости, что и величины  $\sigma_{ik}^{(n)}$ ;  $E_2^{(n)}$  и  $B_2^{(n)}$  — второй порядок малости и т. д. Если ввести теперь векторный потенциал  $A^{(n)}(\mathbf{r})$ , через который парциальные поля  $E^{(n)}(\mathbf{r})$  и  $B^{(n)}(\mathbf{r})$  определяются обычным образом, т. е.

$$\begin{aligned} E^{(n)}(\mathbf{r}) &= (i/k_n) [\operatorname{grad} \operatorname{div} A^{(n)}(\mathbf{r}) + k_n^2 A^{(n)}(\mathbf{r})]; \\ B^{(n)}(\mathbf{r}) &= \operatorname{rot} A^{(n)}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (15)$$

то для последовательных приближений  $A_q^{(n)}$  на основании (12) и (15) получаем уравнения:

$$\Delta A_0^{(n)} + k_n^2 A_0^{(n)} = -\frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{j}}_{0n}; \quad (16)$$

$$\Delta A_1^{(n)} + k_n^2 A_1^{(n)} = -\frac{4\pi}{c} \hat{\sigma}_{(n)}(\mathbf{r}, \omega) E_0^{(0)}; \quad (17)$$

$$\Delta A_q^{(n)} + k_n^2 A_q^{(n)} = -\frac{4\pi}{c} \sum_k \hat{\sigma}_{(n-k)}(\mathbf{r}, \omega + k\Omega) E_{q-1}^{(k)} \quad (q \geq 2). \quad (18)$$

В уравнении (17) уже учтено, что, как это следует из (16),  $E_0^{(n)} = E_0^{(0)} \delta_{0n}$ . Определяя из уравнения (16) поле  $\mathcal{E}_0^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  для случая точечного излучателя с дипольным моментом  $\mathbf{p}_0$ , расположенного в точке  $\mathbf{r}_0$  ( $j(\mathbf{r}) = -i\omega \mathbf{p}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ ), и подставляя соответствующее выражение в уравнение (17), для векторного потенциала  $A_1^{(n)}(\mathbf{r})$  получаем:

$$\begin{aligned} A_1^{(n)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\exp[i(k_n R + kp)]}{R} \hat{\sigma}_{(n)}(\mathbf{r}'; \omega) \left\{ \frac{3\mathbf{p}_0(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0}{\rho^3} - \right. \\ &\quad \left. - ik \frac{3\mathbf{p}_0(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_0}{\rho^2} - k^2 \frac{[\mathbf{p}_0, [\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0]]}{\rho} \right\} d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (19)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}/\rho$ ; интегрирование распространяется на весь объем плазмы  $V$ , где функция  $\hat{\sigma}_{(n)}(\mathbf{r}, \omega)$  существенно отлична от нуля. Тензор  $q_{ik}^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \omega)$  определяется отсюда (в первом приближении) на основании формул (8) и (15). Такое определение, однако, нуждается в некотором уточнении в том случае, когда источник поля находится внутри рассматриваемого объема плазмы, поскольку при этом интеграл (19) из-за наличия члена  $\rho^{-3}$  логарифмически расходится (точку наблюдения  $\mathbf{r}$  мы считаем всегда находящейся вне объема плазмы).

Физическая причина расходимости интеграла (19) заключается, очевидно, в том, что в нем учитывается поле тока, который индуцировался бы в точке нахождения источника  $\mathbf{r}_0$ , если бы проводимость

среды в этой точке определялась тензором  $\hat{\sigma}^{(n)}(\mathbf{r}_0, \omega)$ . Поскольку поле  $\hat{\mathcal{E}}_0^{(0)}$  в точке  $\mathbf{r}_0$  бесконечно, а величины  $\hat{\sigma}_{ik}^{(n)}(\mathbf{r}_0, \omega)$ , вообще говоря, отличны от нуля, то плотность тока  $\hat{\sigma}^{(n)}(\mathbf{r}_0, \omega) \hat{\mathcal{E}}_0^{(0)}$ , а вместе с ней и векторы  $\hat{\mathbf{A}}_1^{(n)}(\mathbf{r})$  и  $\hat{\mathcal{E}}_1^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  оказываются бесконечными. На самом деле электрические свойства плазмы в точке  $\mathbf{r}_0$  и ее ближайшей окрестности, конечно, не определяются тензором  $\hat{\sigma}^{(n)}(\mathbf{r}, \omega)$ , вычисленным в предположении, что источники поля достаточно удалены от этой точки. Наличие в точке  $\mathbf{r}_0$  источника приводит, очевидно, к тому, что плотность электронов в окрестности этой точки следует считать равной  $N\mu(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)$ , где  $N(r)$ —безусловная плотность электронов в точке  $\mathbf{r}$ , т. е. именно та плотность, которая входит в выражение для тензора  $\hat{\sigma}^{(n)}(\mathbf{r}, \omega)$ , а  $\mu(\rho)$ —коррелятивная функция бинарного распределения  $f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  электронов по пространству, определяемая из соотношения

$$f_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f_1(\mathbf{r}_1) f_1(\mathbf{r}_2) \mu(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

( $f_1(\mathbf{r})$ —ординарная функция распределения).

В свете сказанного интеграл (19) должен быть „исправлен“ подстановкой в него вместо тензора  $\hat{\sigma}^{(n)}(\mathbf{r}', \omega)$  „условного“ тензора  $\hat{\sigma}^{(n)}(\mathbf{r}', \omega; \mathbf{r}_0)$ , который получается из  $\hat{\sigma}^{(n)}(\mathbf{r}', \omega)$  путем замены плотности  $N(\mathbf{r}')$  на величину  $\bar{N}(\mathbf{r}')\mu(\rho)$ . Однако такая замена существенна лишь для интеграла с членом  $\rho^{-3}$ ; сходимость его при этом обеспечивается тем, что при любой плотности  $N(\mathbf{r}_0)$  функция  $\mu(\rho) \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ . В сходящихся интегралах с членами  $\rho^{-2}$  и  $\rho^{-1}$  указанная замена излишня, поскольку интервал  $\Delta\rho$ , на протяжении которого функцию  $\mu(\rho)$  следует считать близкой к нулю, удовлетворяет, очевидно, условию  $\Delta\rho \ll N^{-1/3}$ , в то время как мы, естественно, считаем, что  $V\bar{N} \gg 1$  ( $\bar{N}$ —среднее значение плотности). По этой же причине значение интеграла с  $\rho^{-3}$  практически не зависит от вида функции  $\mu(\rho)$  внутри интервала  $0 < \rho < \Delta\rho$ ; величину же  $\Delta\rho$  достаточно знать лишь с логарифмической точностью. Поэтому для расчётов можно положить  $\mu(\rho) = \Theta(\rho - N^{-1/3})$ , где  $\Theta(x)$  равна единице при  $x > 0$ , и нулю при  $x < 0$ .

Выясним теперь условия применимости использованного выше метода возмущений. Необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $|\hat{\mathbf{A}}_0^{(0)}(\mathbf{r})| \gg |\hat{\mathbf{A}}_1^{(n)}(\mathbf{r})|$ . Рассмотрим для определенности тот случай, когда частота изменения внешнего сильного поля  $\Omega \gg \delta\nu_{\text{эфф}}$ , где  $\delta$ —средняя относительная доля энергии, теряемой электроном при одном соударении с тяжелой частицей, а  $\nu_{\text{эфф}}$ —эффективная частота соударений. При этом симметричная часть функции распределения по скоростям  $f_0(v)$  не зависит от времени, и весь эффект периодической нестационарности плазмы обусловлен внешним магнитным полем  $H(t) = H_0 \cos(\Omega t)$  [1]. Будем считать, что  $|e|H_0/mc\Omega \sim 1$  (сильная нестационарность) и  $\Omega \ll \omega$ . Тогда (см. [1]) среднее (по объему) значение компоненты  $\hat{\sigma}_{ik}^{(n)}$ —порядка  $\omega_0^2/4\pi|\omega - \omega_H|$ , если  $|\omega - \omega_H| \gg \nu_{\text{эфф}}$  и  $|\omega - \omega_H| \pm \Omega \gg \nu_{\text{эфф}}$  („условие А“), и порядка  $\omega_0^2/4\pi\nu_{\text{эфф}}$ , если либо  $|\omega - \omega_H| \ll \nu_{\text{эфф}}$ , либо  $|\omega - \omega_H \pm \Omega| \ll \nu_{\text{эфф}}$  („условие Б“). Здесь  $\omega_0^2 = 4\pi e^2 \bar{N}/m$ .

Полное условие малости первого приближения зависит, во-первых, от того, находится ли источник поля вне или внутри объема плазмы, и, во-вторых, от значения величины  $ka$  (где  $a \sim V^{1/3}$ ). В том случае, когда источник находится вне объема плазмы, будем считать, что его расстояние от этого объема  $L$  удовлетворяет условиям  $L/ka^2 \gg 1$  и  $kL \gg 1$ . Искомые условия выглядят следующим образом.

1) Источник вне объема плазмы:

a)  $ka \ll 1$

$$(\omega_0^2/\omega \cdot |\omega - \omega_H|) (ka^2/L) (ka) \ll 1 \quad (\text{при условии А}),$$

$$(\omega_0^2/\omega \cdot v_{\text{эфф}}) (ka^2/L) (ka) \ll 1 \quad (\text{при условии В});$$

b)  $ka \gg 1$

$$(\omega_0^2/\omega \cdot |\omega - \omega_H|) (ka^2/L) (ka)^{-1} \ll 1 \quad (\text{при условии А}),$$

$$(\omega_0^2/\omega \cdot v_{\text{эфф}}) (ka^2/L) (ka)^{-1} \ll 1 \quad (\text{при условии В}).$$

2) Источник внутри объема плазмы:

a)  $ka \ll 1$

$$(\omega_0^2/\omega \cdot |\omega - \omega_H|) \ln a \bar{N}^{1/3} \ll 1 \quad (\text{при условии А}),$$

$$(\omega_0^2/\omega \cdot v_{\text{эфф}}) \ln a \bar{N}^{1/3} \ll 1 \quad (\text{при условии В});$$

b)  $ka \gg 1$

$$(\omega_0^2/\omega \cdot |\omega - \omega_H|) [ka + |\ln k \bar{N}^{-1/3}|] \ll 1 \quad (\text{при условии А}),$$

$$(\omega_0^2/\omega \cdot v_{\text{эфф}}) [ka + |\ln k \bar{N}^{-1/3}|] \ll 1 \quad (\text{при условии В}).$$

При получении условий пункта 2 мы предполагали, что  $a \bar{N}^{1/3} \gg 1$  и  $k \bar{N}^{-1/3} \ll 1$ . Заметим, что для изотропной плазмы, когда  $\omega_H = 0$ , условий А и В не существует, и отношения  $\omega_0^2/\omega \cdot |\omega - \omega_H|$  и  $\omega_0^2/\omega \cdot v_{\text{эфф}}$  должны быть заменены на  $(\omega_0/\omega)^2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. В. Бункин, ЖЭТФ, 41, 1859 (1961).
2. А. М. Марковкин, Радиотехника и электроника, 4, 785 (1959).
3. В. Н. Луговой, ЖЭТФ, 41, 1562 (1961).
4. М. А. Леонович, ЖЭТФ, 40, 907 (1961).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, 1959.
6. R. F. Harrington, A. T. Villeneuve, IRE Trans., MTT—6, 308 (1958).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
23 декабря 1961 г.

#### TO THE ELECTRODYNAMICS OF MEDIA WITH TIME PERIODIC PROPERTIES

*F. V. Bunkin*

Some general properties of the solution of nonuniform problem in electrodynamics of periodic non-stationary media are outlined. As an example a sufficiently rarefied plasma is considered which is placed in a strong external electric and magnetic fields changing periodically in time.

## ПОЛЕ НАД ПЛОСКОСТЬЮ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ\*

В. И. Таланов

Методом интегральных уравнений исследуется скалярное волновое поле над плоскостью с неоднородным поверхностным импедансом. Рассмотрена задача об отражении волны от плоскости, поверхностный импеданс которой описывается дробно-линейной и, как частный случай, линейной функцией координат. Рассчитаны диаграммы направленности точечного источника, расположенного над плоскостью с таким импедансом.

### 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ НАД ПЛОСКОСТЬЮ С НЕОДНОРОДНЫМ ИМПЕДАНСОМ

Некоторые задачи электродинамики и акустики о поле заданных источников над плоскостью, характеризуемой поверхностным импедансом, могут быть сведены к отысканию решения волнового уравнения\*\*

$$\Delta\psi + k^2\psi = -f, \quad (1.1)$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности и граничному условию

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + kq(y, z)\psi = 0 \quad (1.2)$$

на плоскости  $x=0$  (рис. 1). Здесь  $\psi(x, y, z)$  — скалярная функция, описывающая поле (компоненту напряженности поля или вектора-потенциала — в электродинамике, давление — в акустике);  $f(x, y, z)$  — функция, характеризующая плотность распределения источников;  $k=2\pi/\lambda_0$  ( $\lambda_0$  — длина волны в среде). Безразмерный параметр  $q(y, z)$  связан с поверхностным импедансом и является заданной функцией координат  $y, z$  на плоскости  $x=0$ \*\*\*.

Диссипация энергии внешнего поля в реальной поверхности может быть учтена условием

$$\operatorname{Im} q(y, z) < 0. \quad (1.3)$$

В дальнейшем для краткости параметр  $q$  будет называть просто поверхностным импедансом.

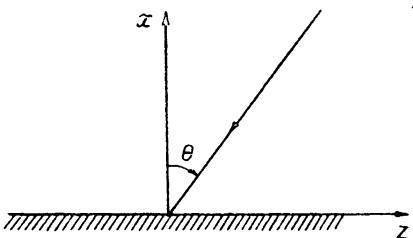


Рис. 1.

\* Результаты настоящей работы доложены на Научной сессии НТО им. А. С. Попова, М., 1958.

\*\* Фактор зависимости от времени  $\exp(i\omega t)$  всюду опускается.

\*\*\* Возможность сведения электродинамических задач к системе (1.1) и (1.2) налагает определенные ограничения не только на распределение источников, но и на характер зависимости поверхностного импеданса от координат.

Записав граничное условие (1.2) в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + k \alpha \psi = -k[q(y, z) - \alpha] \psi, \quad (1.4)$$

где  $\alpha$ —некоторое постоянное значение поверхностного импеданса, и применяя теорему Грина к функции  $\psi$  и функции Грина  $G$ , удовлетворяющей однородному краевому условию \*

$$\frac{\partial G}{\partial x} + k \alpha G = 0, \quad (1.5)$$

получим следующее выражение для поля над плоскостью с импедансом  $q(y, z)$ :

$$\begin{aligned} \psi(r) = & \frac{1}{4\pi} \int_V f(r') G(r, r') dr' + \\ & + \frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma} [q(\rho) - \alpha] \psi(0, \rho) G(r, 0, \rho) ds. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь  $\rho$ —радиус-вектор точки интегрирования  $y_s, z_s$  на плоскости  $x=0$ ,  $ds=dy_s dz_s$ ,  $\Sigma$ —участок плоскости  $x=0$  с  $q(\rho) \neq \alpha$ .

Полагая в (1.6)  $x=0$ , приедем к интегральному уравнению для  $\psi(0, \rho) \equiv \psi(\rho)$ :

$$\psi(\rho) = \psi_0(\rho) + \frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma} [q(\rho') - \alpha] \psi(0, \rho') G(0, \rho, 0, \rho') ds', \quad (1.7)$$

где

$$\psi_0(\rho) = \frac{1}{4\pi} \int_V f(r') G(0, \rho, r') dv' \quad (1.8)$$

—поле источников  $f(r)$  на плоскости с всюду однородным импедансом  $q(\rho) = \alpha$ .

Уравнение (1.7) и его аналог для двухмерных полей (не зависящих от  $y$ )

$$\psi(z) = \psi_0(z) + \frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma} [q(z') - \alpha] \psi(z') G(z-z') dz' \quad (1.9)$$

являются исходными для исследования поля над плоскостью с неоднородным импедансом \*\*. Эти уравнения изучались в ряде работ [1-6] как строгими методами при конкретных зависимостях  $q(y, z)$ , так и приближенно при некоторых общих предположениях относительно величины и характера зависимости поверхностного импеданса от координат \*\*\*. Мы применим здесь уравнение (1.9) к исследованию поля над плоскостью с дробно-линейной и линейной зависимостью импеданса от координаты  $z$ .

\* Вывод функции Грина  $G$  для полупространства, ограниченного плоскостью с однородным поверхностным импедансом, дан в Приложении.

\*\* Заметим, что в этих уравнениях  $\alpha$ —произвольный параметр, которым всегда можно распорядиться таким образом, чтобы максимально облегчить решение задачи.

\*\*\* К подобным уравнениям приходят в теории распространения радиоволн над неоднородной плоской земной поверхностью [7]. Но развитые там методы приближенного решения этих уравнений (например, метод кусочно-неоднородной трассы) в силу

## 2. ПОЛЕ НАД ПЛОСКОСТЬЮ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ИМПЕДАНСА

Ограничиваюсь рассмотрением двухмерных полей, получим решение интегрального уравнения (1.9) в случае, когда импеданс не зависит от координаты  $y$  и описывается дробно-линейной функцией вида

$$q(z) = q_0 + \frac{p}{z - z_\infty}, \quad (2.1)$$

где  $q_0$ ,  $p$ ,  $z_\infty$  — некоторые фиксированные параметры. Исследование поля при такой зависимости  $q(z)$  представляет интерес для изучения антенн поверхностных волн с медленно меняющимися параметрами, в частности, антенн, излучающих вдоль своей оси.

Точка  $z=z_\infty$  является для импеданса (2.1) полюсом первого порядка. Поскольку при наличии даже сколь угодно малого, но конечного поглощения импеданс не может обращаться в бесконечность ни при каких действительных частотах, он должен быть и регулярной функцией вещественной переменной  $z$ . Поэтому будем предполагать, что  $\operatorname{Im} z_\infty \neq 0$ . Считая для простоты параметр  $p$  вещественным и учитывая, что поглощение должно возрастать в „резонансной“ области вблизи  $z = \operatorname{Re} z_\infty$ , нетрудно убедиться, что неравенство (1.3) будет выполнено, если

$$p \operatorname{Im} z_\infty < 0. \quad (2.2)$$

Таким образом, знак  $\operatorname{Im} z_\infty$  в (2.1) зависит от знака  $p$ . Заметим, что  $p>0$  соответствует преимущественно убывающий с ростом  $z$ , а  $p<0$  — возрастающий ход зависимости  $\operatorname{Re} q(z)$  за исключением узкой (при малой величине  $\operatorname{Im} z_\infty$ ) области  $|z - \operatorname{Re} z_\infty| \leq \operatorname{Im} z_\infty$  вблизи  $z = \operatorname{Re} z_\infty$ .

Внешнее поле зададим в виде волны

$$\psi_n = e^{-ih_0z + ix_0x}, \quad (2.3)$$

падающей на плоскость  $x=0$  под углом  $\theta$ , так что

$$h_0 = -k \sin \theta, \quad x_0 = k \cos \theta. \quad (2.4)$$

Полагая в (1.9)  $\alpha=q_0$  и учитывая, кроме того, что

$$\psi_0(z) = \frac{2ix_0}{iz_0 - kz_0} e^{-ih_0z} \equiv ae^{-ih_0z}, \quad (2.5)$$

получим после подстановки (2.1) в (1.9) следующее интегральное уравнение для определения функции  $\psi(z)$ :

$$\psi(z) = ae^{-ih_0z} + \frac{kp}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(z')}{z' - z_\infty} G(z - z') dz'. \quad (2.6)$$

---

ряда ограничений, обусловленных спецификой электрических свойств реальной земной поверхности (малая величина модуля поверхностного импеданса  $q$ ;  $\operatorname{Re} q = \operatorname{Im} q$ ), не могут быть непосредственно использованы для решения уравнений (1.7) или (1.9) в случае произвольной функции  $q(y, z)$ . Более того, при тех зависимостях  $q(y, z)$ , которые представляют интерес, например, для техники СВЧ, существенную роль в общей картине поля, как уже отмечалось, начинают играть поверхностные волны, не рассматриваемые обычно в теории распространения радиоволн. В частности, здесь может оказаться некорректным пренебрежение влиянием областей, лежащих вне основной трассы луча, из-за большого отражения поверхностной волны от неоднородностей импеданса, расположенных в этих областях.

Для решения этого уравнения функцию  $\psi(z)/z - z_\infty$  представим в виде контурного интеграла

$$\psi(z)/z - z_\infty = \int_C P(h) e^{-ih(z-z_\infty)} dh. \quad (2.7)$$

Множитель  $\exp(ihz_\infty)$  выделен в (2.7) для упрощения дальнейших выкладок. Контур  $C$  для случая  $p < 0$  (и, следовательно, в силу (2.2),  $\operatorname{Im} z_\infty > 0$ ) показан на рис. 2а, а для  $p > 0$  на рис. 2б. Он охватывает луч  $(h_0, +\infty)$  при  $p < 0$  и  $(h_0, -\infty)$  при  $p > 0$ .

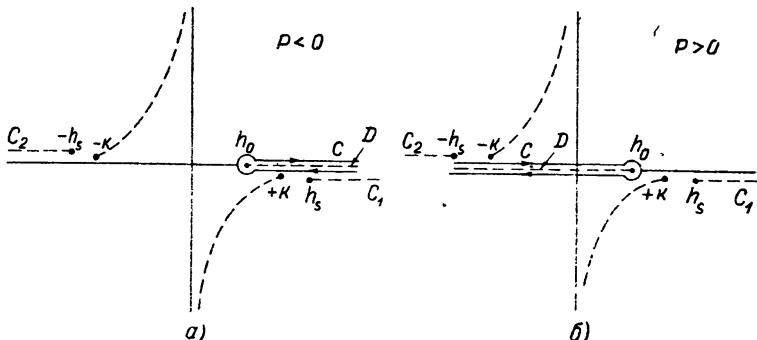


Рис. 2.

Предположим, что полное приращение функции  $P(h) \exp[-ih \times (z - z_\infty)]$  при обходе контура  $C$  равно нулю, т. е.

$$P(h) e^{-ih(z-z_\infty)}|_C = 0. \quad (2.8)$$

При указанном выборе контура  $C$  условие (2.8) будет выполнено, если

$$|P(h)| < O(e^{-h|\operatorname{Im} z_\infty}|)_{h \rightarrow \infty} \quad \text{при } p < 0 \quad (2.9)$$

$$|P(h)| < O(e^{h|\operatorname{Im} z_\infty|})_{h \rightarrow -\infty} \quad \text{при } p > 0. \quad (2.10)$$

Как будет показано, функция  $P(h)$ , удовлетворяющая этим условиям, действительно может быть найдена.

Принимая во внимание (2.8), найдем после однократного интегрирования (2.7) по частям, что

$$\psi(z) = -i \int_C P'(h) e^{-ih(z-z_\infty)} dh. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.7) и (2.11) в (2.6), получим уравнение для определения функции  $P(h)$ :

$$\int_C \left[ P'(h) + \frac{ikp}{kq_0 - ix} P(h) \right] e^{-ih(z-z_\infty)} dh = iae^{-ih_0 z}, \quad (2.12)$$

где  $x^2 = k^2 - h^2$ . Здесь мы учли, что \*

\* Для вывода (2.13) можно воспользоваться формулами для функции Грина при  $\operatorname{Re}\alpha = \operatorname{Re}q_0 > 0$ , приведенными в Приложении. Важно, однако, отметить, что выражение (2.13) для фурье-трансформанты функции Грина справедливо при любом знаке  $\operatorname{Re}q_0$ .

$$\int_{-\infty}^{\tilde{z}} G(z-z') e^{-ihz'} dz' = \frac{4\pi}{iz-kq_0} e^{-ihz}. \quad (2.13)$$

Подынтегральное выражение в (2.12) содержит двухзначную функцию  $x = \sqrt{k^2 - h^2}$  с точками ветвления  $h = \pm k$ . Поэтому на плоскости  $h$  проведем разрезы  $\text{Im} \sqrt{k^2 - h^2} = 0$  (рис. 2), считая при этом, что среда обладает сколь угодно малым, но конечным поглощением, так что  $\text{Im } k = -k_1 < 0$ . В окончательных результатах можно будет положить  $k_1 = 0$ . Пусть контур  $C$  лежит на том из листов римановой поверхности, где  $\text{Im } x < 0$ . Заметим, что особые точки коэффициента при  $P(h)$  в (2.12)  $h = \pm h_s = \pm k \sqrt{1 + q_0^2}$  будут расположены на рассматриваемом листе лишь при  $\text{Re } kq_0 > 0$ . Положение их относительно контура  $C$  в этом случае показано на рис. 2а и 2б.

Функция  $P(h)$ , являющаяся решением интегрального уравнения (2.12), должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$P'(h) + \frac{ikp}{kq_0 - ix} P(h) = -\frac{a}{2\pi} \frac{e^{-ih_0 z_\infty}}{h - h_0} + A(h), \quad (2.14)$$

где  $A(h)$  — произвольная функция, голоморфная внутри области, ограниченной контуром  $C$ , включая бесконечно удаленную точку. Очевидно, что все частные решения уравнения (2.14) при различных функциях  $A(h)$  приводят к одному и тому же выражению для  $\psi(z)$ . Поэтому можно положить  $A(h) \equiv 0$  и в качестве решения выбрать функцию

$$P(h) = -\frac{a}{2\pi} e^{-ih_0 z_\infty} \int_{h_1}^h \exp \left[ -\int_{h'}^h \frac{ikpdh''}{kq_0 - ix(h'')} \right] (h' - h_0)^{-1} dh'. \quad (2.15)$$

Здесь  $h_1$  — произвольная точка на плоскости  $h$ , не совпадающая с особыми точками подынтегрального выражения.

Чтобы сделать интегралы, входящие в (2.15), однозначными функциями, проведем следующие разрезы плоскости  $h$ : из  $h_0$  в  $+\infty$  при  $p <$  и в  $-\infty$  при  $p > 0$  (см. рис. 2), а также при  $\text{Re } q_0 > 0$  разрезы  $C_1$  и  $C_2$ , как показано на тех же рисунках. Заметим, что определенная таким образом функция  $P(h)$  удовлетворяет условиям (2.9), (2.10).

Подставляя (2.15) в (2.11), находим, что

$$\psi(z) = \psi_0(z) - \int_C \frac{kp}{kq_0 - ix} P(h) e^{-ih(z-z_\infty)} dh. \quad (2.16)$$

Поле при  $x \geq 0$  получим из (1.6):

$$\psi(x, z) = \psi_0(x, z) - \int_C \frac{kp}{kq_0 - ix} P(h) e^{-ih(z-z_\infty) - ix} dh, \quad (2.17)$$

где

$$\psi_0(x, z) = e^{-ih_0 z + ix_0 x} + \frac{ix_0 + kq_0}{ix_0 - kq_0} e^{-ih_0 z - ix_0 x}. \quad (2.18)$$

При выводе (2.17) использовано соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz'} G(r, 0, z') dz' = \frac{4\pi}{i\omega - kq_0} e^{-i\omega x - i\omega z}, \quad (2.19)$$

которое может быть доказано аналогично (2.13).

Выражение для  $\psi(x, z)$  представляется в другом виде, если от интегрирования по контуру  $C$  перейти к интегрированию по одному берегу разреза  $D$ . В результате получим, что

$$\psi(x, z) = \psi_0(x, z) + \int_{h_0}^{\infty} F(h) e^{-ihz - i\omega x} dh \quad (p < 0); \quad (2.20)$$

$$\psi(x, z) = \psi_0(x, z) - \int_{-\infty}^{h_0} F(h) e^{-ihz - i\omega x} dh \quad (p > 0),$$

где

$$F(h) = \frac{iakp}{kq_0 - i\omega} \exp \left[ -ikp \int_{h_0}^h \frac{dh'}{kq_0 - i\omega} + i(h - h_0) z_\infty \right]. \quad (2.21)$$

Формулы (2.20) дают решения в виде разложения поля  $\psi(x, z)$  по плоским волнам, причем спектр постоянных распространения  $h$  этих волн оказывается ограниченным (при  $p < 0$  снизу, а при  $p > 0$  — сверху) постоянной распространения  $h_0$  падающей волны. Это означает, что отраженное поле рассеивается по всем направлениям, лежащим в угле между зеркально отраженным лучом и направлением преобладающего роста импеданса. Отметим также, что рассеянное поле содержит как „быстрые“ ( $|h| < k$ ), так и „медленные“ ( $|h| > k$ ) волны. Первые образуют пространственное, а вторые — поверхностное поле, локализованное вблизи плоскости. Появление поверхностного поля обусловлено неоднородным характером импеданса. Над плоскостью с всюду однородным импедансом это поле обращается в нуль.

Частным случаем рассмотренной зависимости импеданса (2.1) является линейная функция

$$q = q_1 + p_1 z, \quad (2.22)$$

где, в силу (1.3), следует считать, что

$$\operatorname{Im} q_1 < 0, \quad \operatorname{Im} p_1 = 0.$$

Из (2.1) формула (2.22) может быть получена предельным переходом

$$z_\infty \rightarrow \infty \quad \text{при } p = -p_1 z_\infty^2, \quad q_0 = q_1 - p_1 z_\infty. \quad (2.23)$$

Предельный переход (2.23) приводит в рассматриваемом случае к следующим выражениям для  $\psi(x, z)$ :

$$\psi(x, z) = \psi_0(x, z) + \int_{h_0}^{\infty} F(h) e^{-ihz - i\omega x} dh \quad (p_1 > 0); \quad (2.24)$$

$$\psi(x, z) = \psi_0(x, z) - \int_{-\infty}^{h_0} F(h) e^{-ihz - i\omega x} dh \quad (p_1 < 0),$$

где

$$\psi_0(x, z) = 2ie^{-ih_0z} \sin(z_0 x), \quad (2.25)$$

$$F(h) = \frac{2z_0}{kp_1} \exp \left[ -\frac{1}{kp_1} \int_{h_0}^h (x + ikq_1) dh \right]. \quad (2.26)$$

Характер рассеянного поля при  $p_1 > 0$  и  $p_1 < 0$  полностью аналогичен характеру поля в случае дробно-линейной зависимости импеданса соответственно при  $p < 0$  и  $p > 0$ . Это легко понять, если учесть, что может быть осуществлено преобразование импеданса (2.1) в (2.22) с помощью однородной пластиинки конечной толщины  $L$ . Такая трансформация импедансов, как известно, описывается формулой

$$q(L) = Z_0 \frac{Z_0 \sin(k_x L) + q(0) \cos(k_x L)}{Z_0 \cos(k_x L) - q(0) \sin(k_x L)}, \quad (2.27)$$

где  $Z_0$  — характеристическое сопротивление, а  $k_x$  — постоянная распространения волн в пластинке в направлении  $x^*$ . Формула (2.27) при  $q(0) = q_0$  и  $\operatorname{tg}(k_x L) = Z_0/q_0$  (для простоты предполагается, что  $Z_0$ ,  $q_0$  и  $k_x$  — действительные величины) переводит зависимость (2.1) в (2.22), при следующих соотношениях параметров:

$$q_1 = -q_0 + \frac{z_\infty}{p} (Z_0^2 + q_0^2); \quad p_1 = -\frac{Z_0^2 + q_0^2}{p}. \quad (2.28)$$

Из (2.28) непосредственно видно, что условию  $p \operatorname{Im} z_\infty < 0$  соответствует условие  $\operatorname{Im} q_1 < 0$ , а  $p \geq 0$  — условие  $p_1 \leq 0$ , что согласуется с приведенными результатами.

### 3. ПОЛЕ ВБЛИЗИ ИМПЕДАНСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Выше было отмечено, что поле над неоднородной импедансной плоскостью представляет собой, вообще говоря, суперпозицию поверхностной и пространственной волн. Чтобы получить представление о характере этих волн вблизи плоскости  $x = 0$ , рассмотрим случай, когда поверхностный импеданс — достаточно медленно меняющаяся функция  $z$  (ниже это понятие будет уточнено). В качестве примера исследуем поле над плоскостью при линейной зависимости импеданса (2.22). Для определенности будем считать, что  $p_1 < 0$  (импеданс убывает в направлении положительной полуоси  $z$ ), причем  $|p_1|$  — достаточно малая величина.

Интеграл в (2.24) при  $p_1 < 0$  представим в виде суммы двух интегралов, разбив путь интегрирования соответственно на участки: от  $-\infty$  до  $-k$  и от  $-k$  до  $h_0$ .

Рассмотрим сначала поле  $\psi_1$ , описываемое вторым интегралом, представив его в виде:

$$\psi_1 = -\frac{2z_0 e^{-ih_0z}}{kp_1} \int_{-k}^{h_0} \exp \left[ -\frac{1}{kp_1} \int_{h_0}^h x dh' - i \times x - i \frac{q(z)}{p_1} (h - h_0) \right] dh. \quad (3.1)$$

При  $|p_1|/k \ll 1$  основной вклад в интеграл (3.1) дает область значений  $h$  вблизи  $h = h_0$ . Разлагая показатель экспоненты под интегралом в ряд

\* Как и в общем случае, при использовании импедансных граничных условий здесь следует считать, что  $Z_0$  и  $k_x$  являются постоянными величинами, не зависящими от структуры определяемого поля.

по степеням  $h - h_0$  и ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получим:

$$\begin{aligned} \psi_1 = & -\frac{2x_0 e^{-ih_0 z - ix_0 x}}{kp_1} \int_{-k}^{h_0} \exp \left\{ - \left[ \frac{x_0}{kp_1} + i \frac{h_0}{x_0} x - i \frac{q(z)}{p_1} \right] \times \right. \\ & \left. \times (h - h_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{h_0}{x_0 kp_1} + ix \frac{k^2}{x_0^3} \right) (h - h_0)^2 + \dots \right\} dh. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Вклад квадратичного члена в действительную часть показателя экспоненты будет мал в области

$$|h - h_0| \ll |x_0^2/h_0|. \quad (3.3)$$

При этом подынтегральное выражение в (3.2) уменьшится в  $e$  раз на интервале

$$|h - h_0| = |kp_1/x_0|. \quad (3.4)$$

Поэтому при выполнении неравенства

$$|p_1/x_0| \ll |x_0^2/kh_0|, \quad (3.5)$$

а также условия на координату  $x$

$$\frac{k^2 x}{x_0^3} \left( \frac{kp_1}{x_0} \right)^2 \ll 1, \quad (3.6)$$

квадратичным членом в показателе экспоненты в (3.2) можно пренебречь. Тогда после интегрирования получим:

$$\psi_1 \simeq \frac{2x_0}{kp_1} \frac{1 - \exp \{ [(kp_1)^{-1}(x_0 + ikq(z)) - ih_0 x / x_0] (h_0 + k) \}}{(kp_1)^{-1} [x_0 + ikq(z)] - ih_0 x / x_0} e^{-ih_0 z - ix_0 x}. \quad (3.7)$$

Если помимо всего выполняется условие

$$\exp \frac{x_0}{kp_1} (h_0 + k) \ll 1, \quad (3.8)$$

то для точек вблизи плоскости ( $|x_0 k q(z) / kp_1| \gg |h_0 x|$ ) выражение (3.7) может быть упрощено:

$$\psi_1 \simeq \frac{2x_0}{x_0 + ikq(z)} e^{-ih_0 z - ix_0 x}. \quad (3.9)$$

Величина  $\psi_1$  в сумме с  $\psi_0$  дает поле

$$\psi_R = \psi_1 + \psi_0 = e^{-ih_0 z - ix_0 x} + \frac{x_0 - ikq(z)}{x_0 + ikq(z)} e^{-ih_0 z - ix_0 x}, \quad (3.10)$$

зависящее только от локального значения импеданса в рассматриваемой области, причем коэффициент

$$\Gamma(z) = \frac{x_0 - ikq(z)}{x_0 + ikq(z)} \quad (3.11)$$

играет роль локального коэффициента отражения.

Фактически мы получили выражение для поля в приближении геометрической оптики. Очевидно, формула (3.11) применима лишь

при условии, что фаза коэффициента отражения  $\Gamma(z)$  — медленно меняющаяся функция  $z$ :

$$[\arg \Gamma(z)]_z' \ll k. \quad (3.12)$$

Нетрудно убедиться, что при  $|p_1/k| \ll 1$  это условие выполняется. Заметим, что в силу (3.5) и (3.8), приближенное выражение (3.10) не применимо для скользящих углов падения волны  $\psi_n$ .

Рассмотрим теперь поле  $\psi_s$ , описываемое интегралом по контуру  $(-\infty, -k)$ , которое мы представим аналогично (3.1):

$$\psi_s = -\frac{2x_0}{kp_1} e^{-ih_0 z} \int_{-\infty}^{-k} \exp \left\{ -\frac{1}{kp_1} \int_{h_0}^h [x + ikq(z)] dh' - i \times x \right\} dh. \quad (3.13)$$

Интеграл в (3.13) для точек вблизи плоскости  $x = 0$  вычислим приближенно по методу стационарной фазы. При малых значениях  $x$  показатель экспоненты в (3.13) стационарен в точке  $x = -ikq(z)$  ( $h_c(z) = -k\sqrt{1+q^2(z)}$ ). При  $q(z) < 0$  (мы здесь пренебрегаем поглощением) стационарная точка находится вне контура интегрирования (на другом листе римановой поверхности). Поэтому при достаточно малых  $|p_1|/k$   $\psi_s \approx 0$ . Напротив, при  $q(z) > 0$  стационарная точка  $h_c(z)$  лежит на контуре интегрирования. При этом приближенно имеем:

$$\begin{aligned} \psi_s = & -\frac{2x_0}{kp_1} \sqrt{\frac{\pi |kp_1| q(z)}{\sqrt{1+q^2(z)}}} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4} + F(v_0) \right] \times \\ & \times \exp \left[ -ih_0 z - kq(z)x - \frac{1}{kp_1} \int_{h_0}^{h_c} (x + ikq(z)) dh \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$v_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{1+q^2(z)}}{\pi |kp_1| q(z)}} (|h_c| - k);$$

$$F(v_0) = \int_0^{v_0} \exp \left( i \frac{\pi}{2} v^2 \right) dv.$$

При  $v_0 \gg 1$

$$F(v_0) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4};$$

$$\begin{aligned} \psi_s \approx & 2x_0 \sqrt{\frac{2\pi q(z)}{kp_1 \sqrt{1+q^2(z)}}} \exp \left\{ -kq(z)x - \right. \\ & \left. - \frac{1}{kp_1} \int_{h_0}^{h_c} (x + ikq(z)) dh - ih_0 z + i \frac{\pi}{4} \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отсюда видно, что при  $q(z) > 0$  поле  $\psi_s$  действительно локализовано вблизи границы и быстро спадает при удалении от нее.

Выражение (3.15) можно записать в несколько ином виде. Если рассмотреть функцию

$$\beta(z) = -\frac{1}{kp_1} \int_{h_0}^{h_c} [\dot{x} + ikq(z)] dh - ih_0 z,$$

то нетрудно убедиться, что

$$\beta'(z) = -ih_c(z)$$

и, следовательно,

$$\beta(z) = -i \int h_c(z) dz + c.$$

Постоянную  $c$  определим по значению  $\beta$  в точке  $z_1 = -q_1/p_1$ , где  $q(z_1) = 0$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} \psi_s \simeq 2x_0 \sqrt{\frac{2\pi q(z)}{kp_1 \sqrt{1+q^2(z)}}} \exp \left[ -kq(z)x - i \int_{z_1}^z h_c(z') dz' + \right. \\ \left. + \frac{k}{2p_1} \left( \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + ikz_1 \sin \theta + i \frac{\pi}{4} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Следовательно, поле  $\psi_s$  имеет характер поверхностной волны с медленно меняющимися фазовой скоростью и амплитудой, причем последняя, как это видно из сравнения (3.16) и (3.9), вообще говоря, мала по сравнению с амплитудой поля  $\psi_1$ , за исключением случая скользящего падения ( $\theta \approx \pi/2$ ), когда  $\psi_1 \rightarrow 0$ .

Таким образом, поле вблизи плоскости с достаточно плавно меняющимся импедансом складывается из поля  $\psi_R$ , определяемого локальным значением коэффициента отражения (3.6), и поверхностного поля  $\psi_s$ , причем второе поле практически отлично от нуля лишь над той частью плоскости, где импеданс положителен. Аналогичный результат может быть получен и в случае дробно-линейной зависимости импеданса от  $z$  для всех точек, где выполнено условие (3.12). При  $|kp| \gg 1$  (что, в силу сделанного выше замечания о трансформации импедансов, соответствует неравенству  $|p_1/k| \ll 1$  для линейного импеданса) это условие выполняется на всей плоскости  $x=0$ . Поле пространственной волны при этом будет описываться тем же выражением (3.10). Что же касается поверхностного поля, то, в частности, при  $p > 0$  и  $q_0 = 0$  для него получим:

$$\begin{aligned} \psi_s \simeq -kp \sqrt{\frac{2\pi q(z)}{kp \sqrt{1+q^2(z)}}} \exp [ikz_\infty \sin \theta + kp(\theta - \pi/2)] \times \\ \times \exp \left[ -kq(z)x + ik \int_{z_0}^z \sqrt{1+q^2(z')} dz' - ikp \operatorname{arsh} q(z) + \right. \\ \left. + ik(z_0 - z_\infty) \sqrt{1+q^2(z)} \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $z_0$  — произвольная точка. При выводе (3.17) предполагалось, что

$$\sqrt{\frac{kp \sqrt{1+q^2(z)}}{\pi q(z)}} \operatorname{arsh} q(z) \gg 1.$$

Из (3.17) видно, что при  $p > 0$  поле  $\psi_s$  будет практически отлично от нуля лишь при углах падения волны, близких к  $\theta = \pi/2$ .

#### 4. ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ ИСТОЧНИКОВ НАД ПЛОСКОСТЬЮ С НЕОДНОРОДНЫМ ИМПЕДАНСОМ

Поверхностные поля, возбуждаемые падающей плоской волной вблизи неоднородной импедансной плоскости, в ряде случаев дают значительный вклад в суммарное поле. Поэтому, в силу теоремы взаимности, диаграммы направленности источников, расположенных вблизи такой плоскости, будут существенно отличаться (по крайней мере, в некотором интервале углов) от диаграммы направленности тех же источников над плоскостью с однородным импедансом. Для рассмотренных выше зависимостей  $q(z)$  это отличие должно наиболее заметно сказываться при углах  $\theta$ , близких к  $\pi/2$  (при  $p > 0$  или  $p_1 < 0$ ) и  $-\pi/2$  (при  $p < 0$  или  $p_1 > 0$ ).

Проиллюстрируем это на примере линейного источника, расположенного над плоскостью с импедансом

$$q(z) = \frac{p}{z - z_\infty} \quad (p > 0), \quad (4.1)$$

обращающимся в нуль при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Пусть источник расположен в точке  $(x_0, z_0)$ . По теореме взаимности поле этого источника в достаточно удаленной точке в некотором направлении  $\theta$  пропорционально полю, создаваемому в точке расположения источника  $(x_0, z_0)$  плоской волной, приходящей с этого направления. Поэтому для расчета диаграммы направленности мы можем

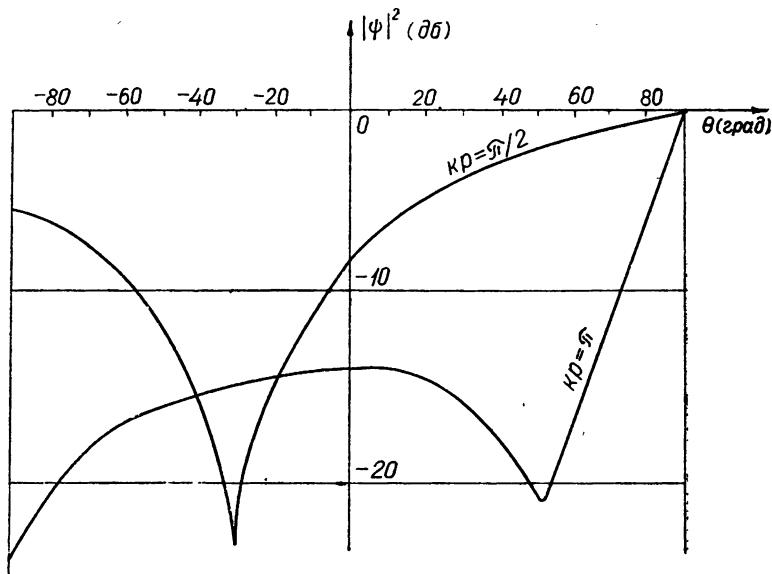


Рис. 3.

воспользоваться формулой (2.20), положив там  $x = x_0$ ,  $z = z_0$ ,  $q_0 = 0$  и приняв во внимание соотношения (2.5). На рис. 3 приведены рассчитанные по формуле (2.20) нормированные диаграммы направленности  $|\psi(\theta)|^2$  источника, расположенного непосредственно на плоскости  $x = 0$

в точке  $z_0$  с импедансом  $q(z_0)=1$  при двух значениях  $k\rho=\pi$  и  $k\rho=\pi/2$ . Видно, что для большего значения  $k\rho=\pi$  диаграмма приобретает явно выраженный осевой характер, причем максимум излучения направлен в сторону убывания импеданса. При  $k\rho=\pi/2$  направленный характер излучения выражен менее резко. При перемещении источника по  $z$  в сторону убывания импеданса, направленность излучения тоже будет уменьшаться, а диаграмма будет стремиться к диаграмме направленности точечного источника над плоскостью с всюду однородным импедансом.

Итак, изучение полей заданных источников над плоскостью с неоднородным поверхностным импедансом позволяет сделать следующие выводы.

1. Поле над неоднородной импедансной плоскостью представляет собой, вообще говоря, сумму пространственной волны и поверхностного поля, локализованного вблизи плоскости. Вклад последнего в общее поле особенно заметен в областях с положительным импедансом.

2. Поверхностные поля играют существенную роль в формировании диаграмм направленности источников, расположенных вблизи плоскости с неоднородным импедансом. В частности, эти поля обуславливает направленный характер излучения изотропного излучателя, расположенного над плоскостью с положительным, но монотонно убывающим до нуля поверхностным импедансом.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ПОЛЕ НАД ПЛОСКОСТЬЮ С ОДНОРОДНЫМ ИМПЕДАНСОМ

Задача о поле произвольной системы источников над плоскостью с однородным импедансом

$$q(y, z) = \alpha = \text{const}$$

рассматривалась рядом авторов. Один из наиболее простых способов ее решения был развит Малюжинцем [8]. Принятое в [8] условие поглощения ( $\text{Im } \alpha < 0$ ) позволяет использовать полученное там решение при любом знаке  $\text{Re } \alpha$ . Особый интерес с точки зрения ряда приложений представляет случай

$$\text{Re } \alpha > 0, \quad (\text{A.1})$$

когда возможно возбуждение на плоскости поверхностной волны. Поскольку в [8] этот случай специально не дискутируется, рассмотрим его здесь несколько подробнее, причем в отличие от [8] в ходе самого решения в выражении для функции Грина явно выделим поверхностное поле, учитывая условие (A.1). Это позволит нам проиллюстрировать некоторые важные соотношения ортогональности между поверхностными и пространственными полями. Решение будет получено в форме, пригодной и для чисто реактивных плоскостей:  $\text{Im } \alpha = 0^*$ .

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi = \left( \frac{\partial}{\partial x} + k\alpha \right) \psi \equiv \hat{M} \psi. \quad (\text{A.2})$$

Поставленная выше задача (уравнения (1.1) и (1.2) при  $q=\alpha$ ) сводится к отысканию решения уравнения

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = -\hat{M} f, \quad (\text{A.3})$$

\* Такая идеализация часто оказывается полезной при изучении импедансных структур, построенных на основе искусственных диэлектриков.

удовлетворяющего граничному условию

$$\varphi = 0 \Big|_{x=0} \quad (\text{A.4})$$

и условию излучения. Это решение можно записать через функцию Грина  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  для полупространства  $x \geq 0$ , на границе которого ( $x=0$ ) задано условие (A.4):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{V'}^{\wedge} M f(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv'. \quad (\text{A.5})$$

Здесь  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{r}$ —радиусы-векторы соответственно точки источника  $(x', y', z')$  и точки  $(x, y, z)$ , где определяется поле,  $dv' = dx' dy' dz'$ , интегрирование производится по области  $V'$ , занятой источниками.

Обратное преобразование  $\psi = \hat{M}^{-1} \varphi$  с учетом (A.1) может быть представлено в виде:

$$\psi = u(y, z) e^{-kax} + \int_{-\infty}^{x''} \varphi(x'', y, z) e^{ka(x'' - x)} dx''. \quad (\text{A.6})$$

Уравнение для функции  $u(y, z)$  получим, подставляя (A.6) в (1.1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + h_s^2 u = -\frac{k\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x', y, z) e^{-kax'} dx', \quad (\text{A.7})$$

где  $h_s = k \sqrt{1+\alpha^2}$ . Решением уравнения (A.7), удовлетворяющим условию излучения, является функция

$$u = \frac{k\alpha}{2i} \int_{V'} f(\mathbf{r}') e^{-kax'} H_0^{(2)}(h_s r) dv', \quad (\text{A.8})$$

где  $r^2 = (y - y')^2 + (z - z')^2$ ;  $H_0^{(2)}(h_s r)$  — функция Ханкеля 2-го рода. В окончательном виде решение может быть представлено следующим образом:

$$\psi = \psi_s + \psi_R = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv', \quad (\text{A.9})$$

где

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + G_R(\mathbf{r}, \mathbf{r}'); \quad (\text{A.10})$$

$$G_s = \frac{2\pi k\alpha}{i} e^{-k\alpha(x+x')} H_0^{(2)}(h_s r); \quad (\text{A.11})$$

$$G_R = G_1 + G_2 - 2k\alpha \int_{-\infty}^k G_2(x'', y, z, \mathbf{r}') e^{k\alpha(x'' - x)} dx''; \quad (\text{A.12})$$

$$G_{1,2} = \frac{e^{-ikR_{1,2}}}{R_{1,2}}; \quad R_{1,2}^2 = (x \mp x')^2 + r^2.$$

Мы получили решение в виде суммы двух полей  $\psi_s$  и  $\psi_R$ , причем  $G_s(r, r')$  и  $G_R(r, r')$  играют для них роль функций Грина. Можно показать, что

$$\int_0^{\infty} G_s(r, r') G_R(r, r') dx = 0, \quad (\text{A.13})$$

так что разбиение суммарного поля на  $\psi_s$  и  $\psi_R$  вполне оправдано. Поле  $\psi_s(r)$  представляет собой поверхностную волну. Вследствие (A.13) поле  $\psi_R(r)$  можно назвать пространственной волной. Имеет место и более общее условие ортогональности

$$\int_0^{\infty} G_s(r', r) G_R(r, r'') dx = 0. \quad (\text{A.13a})$$

Соотношения (A.13) и (A.13a) являются частным случаем теоремы об ортогональности поверхностной и пространственной волн [9].

Для двухмерных полей и распределений источников, не зависящих от координаты  $u$ , решение имеет тот же вид (A.9), но при этом

$$G_s = \frac{4\pi k \alpha}{i h_s} e^{-k\alpha(x+x') - i\hbar|z-z'|};$$

$$G_{1,2} = \frac{\pi}{i} H_0^{(2)}(kr_{1,2}); \quad r_{1,2}^2 = (x \pm x')^2 + (z - z')^2.$$
(A.14)

Полученные формулы позволяют рассчитывать независимо поверхностные и пространственные поля, возбуждаемые над импедансной плоскостью произвольным распределением источников, если только эти поля описываются одной скалярной функцией \*.

Вообще говоря, использованный здесь метод решения может быть обобщен в известной степени и на случай векторных электромагнитных трехмерных полей над плоскостью с анизотропным импедансом. Однако сравнительно легко при этом находится лишь поле в волновой зоне. Отметим, что приведенными выражениями для функции Грина можно воспользоваться и при  $\operatorname{Re} \alpha < 0$ , положив  $\psi_s = 0$  и заменив нижний предел интегрирования в (A.12) на  $+\infty$ . При учете поглощения можно, конечно, использовать и более общие формулы работы [8].

## ЛИТЕРАТУРА

- Г. А. Гриффберг, В. А. Фок, Исследования по распространению радиоволн, сб. под. ред. Б. А. Введенского, 2, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
- G. Weill, Annal. Radioel., 10, 228, (1955).
- Н. Г. Тренев, Радиотехника и электроника, 3, 27 (1958).
- Ю. П. Лысанов, Акуст. ж., 2, 47 (1958).
- J. R. Wait, Canad. J. Phys., 33, 383 (95).
- В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 802 (1960).

\* В теории распространения радиоволн над земной поверхностью, как правило, не возникает необходимости в таком разделении поверхностного и пространственного полей, так как электродинамические свойства земной поверхности таковы, что фактически не происходит пространственного разграничения областей, занятых этими полями. По иному обстоит дело в случае искусственных импедансных структур, используемых, например, в антенной технике. Здесь уже представление решения в форме (A.9) имеет прямой физический смысл, так как могут быть выделены области преимущественного преобладания поля той или иной структуры.

7. Е. Л. Фейнберг, Сб. Исследования по распространению радиоволн, под ред. Б. А. Введенского, 2, изд. АН СССР, М—Л., 1948.
8. Г. Д. Малюжинец, ДАН СССР, **60**, 367 (1948).
9. G. Goubou, Proc. IRE, **40**, 865 (1952)

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
7 декабря 1961 г.

## FIELD ABOVE A PLANE WITH NONUNIFORM SURFACE IMPEDANCE

*V. I. Taranov*

A scalar wave field above a plane with a nonuniform surface impedance is studied by an integral equation method. The problem has been considered of a wave reflection from a plane the surface impedance of which is a general-linear (in a particular case, a linear) transformation of coordinates. Radiation patterns have been calculated of a point source placed above the plane with such an impedance.

---

## К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ, НАПРАВЛЯЕМЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ СТАТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

*M. I. Петелин*

Рассматривается распространение электромагнитных волн в волноводе, который пронизывается криволинейным электронным потоком, направляемым электрическим или магнитным статическим полем, периодически меняющимся вдоль волновода и имеющим квадрупольную структуру в поперечном сечении.

В работе Мотца и Накамуры [¹] рассматривалось возбуждение волновода тонким криволинейным электронным пучком, направляемым периодическим статическим полем. Вид этого поля не конкретизировался, а электронный ток, возбуждаемый электромагнитной волной, находился методом Пирса [²]. Известно, что характер взаимодействия высокочастотного поля со стационарными потоками заряженных частиц существенно зависит от вида действующих на них статических полей, поскольку для нахождения высокочастотного тока необходимо знать интегралы невозмущенного движения частиц как по траекториям, совпадающим с тонким пучком, так и по близким к нему траекториям [³]. Приведенное соображение заставляет усомниться в применимости метода, использованного в работе [¹], к расчету взаимодействия электромагнитных волн с криволинейными электронными потоками в пространственно-периодических статических полях.

В настоящей работе при рассмотрении простейшей идеализированной системы этого типа используется метод кинетического уравнения, представляющий собой видоизменение метода Шафранова [⁴]. Полученный этим способом результат отличается от результата расчета той же модели методом, предложенным в работе [¹].

1. Рассмотрим распространение электромагнитных волн в волноводе, который пронизывается нерелятивистским моноэнергетическим электронным потоком в случае, когда на электроны действует периодическое статическое поле одного из следующих двух типов\*:

а) квадрупольное магнитное поле, скалярный потенциал которого вблизи оси  $z$ , направленной вдоль волновода, имеет вид:

$$\varphi^m = xy\Psi(z); \quad (1)$$

б) квадрупольное электрическое поле, скалярный потенциал которого вблизи оси  $z$  имеет вид:

$$\varphi^e = (y^2 - x^2)\Psi(z). \quad (2)$$

В формулах (1) и (2)  $\Psi$ —периодическая четная функция  $z$ .

Ток, возникающий в электронном потоке под действием высокочастотного поля, в приближении теории малого сигнала (в линейном

\* Эти типы полей были предложены для фокусировки пучков заряженных частиц Курантом, Ливингстоном, Снайдером [⁵] и Блеветом [⁶].

приближении) может быть найден интегрированием кинетического уравнения для электронов в переменных Лагранжа (см. Приложение):

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2}{m} \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{v} \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \xi_\beta} \int_{-\infty}^t E_\alpha(\tau) A_{\alpha\beta}(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Здесь  $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  — невозмущенная функция распределения электронов в пространстве координат и скоростей,  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона, переменные  $\xi_\beta$  совпадают с координатами и скоростями электронов,  $A_{\alpha\beta}(\tau)$  — алгебраическое дополнение к элементу  $\partial v_\alpha(\tau)/\partial \xi_\beta$  в матрице  $\|\partial \xi_\gamma(\tau)/\partial \xi_\delta\|$ , где  $\xi_\gamma(\tau)$  — координаты и скорости электронов в момент  $\tau$  как функции координат и скоростей в момент  $t$ . Нижний предел интегрирования по времени в выражении (3) выбран в соответствии с предположением о том, что амплитуда высокочастотного поля, действующего на каждый электрон, нарастает во времени.

Для вычисления тока (3) необходимо знать решение уравнений движения частицы в полях (1) и (2). Ограничивааясь рассмотрением параксиальных пучков (в соответствии с допущениями о структуре полей (1) и (2)), будем считать, что отклонение электронов от оси  $z$  много меньше размеров неоднородности статического поля и что продольная скорость электронов много больше поперечной. Кроме того, для простоты положим  $y=0$  (плоское движение).

При этих допущениях движение электронов в  $z$ -направлении можно считать равномерным, а поперечная координата  $x$  удовлетворяет уравнению Хилла:

$$x'' + \Phi(\zeta)x = 0, \quad (4)$$

где  $\zeta = kz$ ,  $k = 2\pi/d$ ,  $d$  — период статического поля, штрих означает производную по  $\zeta$ . Функции  $\Phi(\zeta)$  для магнитного (1) и электрического (2) полей равны соответственно

$$\Phi^m = -\frac{e}{mk^2cv_z}\Psi, \quad \Phi^e = -\frac{2e}{mk^2v_z^2}\Psi,$$

где  $c$  — скорость света в вакууме.

Будем предполагать, что параметры статического поля и продольная скорость электронов таковы, что система является фокусирующей, т. е. общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$x(\zeta) = Ae^{i\beta\zeta} \sum_r C_r e^{ir\zeta} + Be^{-i\beta\zeta} \sum_r C_r e^{-ir\zeta} \equiv A\psi_1(\zeta) + B\psi_2(\zeta); \quad (5)$$

$$\text{Im } \beta = 0; \quad 0 < \beta < 1; \quad \beta \neq 1/2.$$

Здесь  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Функции  $\psi_1(\zeta)$  и  $\psi_2(\zeta)$  удобно нормировать так, чтобы выполнялось соотношение  $\psi_1\psi'_2 - \psi_1'\psi_2 = 1$ . Как видно из выражения (5), поперечное движение электрона представляет собой совокупность гармонических колебаний с частотами  $r\Omega \pm \Omega_1$  ( $r=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), где  $\Omega = kv_z$ ,  $\Omega_1 = \beta kv_z$ .

Координаты и скорость частицы в момент  $\tau$  могут быть выражены через координаты и скорость в момент  $t$  следующим образом:

$$\begin{aligned} z(\tau) &= z + v_z \bar{\tau}; \quad v_z(\tau) = v_z; \\ x(\tau) &= A\psi_1(\zeta + kv_z \bar{\tau}) + B\psi_2(\zeta + kv_z \bar{\tau}); \\ v_x(\tau) &= kv_z [A\psi'_1(\zeta + kv_z \bar{\tau}) + B\psi'_2(\zeta + kv_z \bar{\tau})], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$A = x\psi_2'(\zeta) - (v_x/kv_z)\psi_2(\zeta); \quad B = (v_x/kv_z)\psi_1(\zeta) - x\psi_1'(\zeta); \quad \bar{\tau} = \tau - t. \quad (7)$$

2. Предположим, что электроны образуют тонкий пучок:

$$\begin{aligned} f_0 &= \rho \delta(v_z - v_{\parallel}) \delta[x - x^+(z)] \delta[v_x - v_x^+(z)] \delta(y) \delta(v_y); \\ x^+(z) &= A^+ \psi_1(kz) + B^+ \psi_2(kz); \\ v_x^+(z) &= kv_{\parallel} [A^+ \psi_1'(kz) + B^+ \psi_2'(kz)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\rho$  — погонная плотность пучка,  $v_{\parallel}$  — продольная скорость электронов,  $A^+$  и  $B^+$  — постоянные,  $\delta(x)$  — дельта-функция.

Считая, что плотность пучка достаточно мала, ограничимся рассмотрением случая резонансного взаимодействия электронов с полем, близким к  $p$ -ой нормальной волне „холодного“ волновода  $E_p = E_p^0(x, y) e^{ih_p z - i\omega t}$ :

$$E \simeq C_p E_p. \quad (9)$$

Здесь

$$C_p \simeq C_p^0 e^{i(h-h_p)z}, \quad |h - h_p| \ll h_p.$$

Согласно [7], выражение для коэффициента  $C_p$  имеет вид:

$$C_p = \frac{1}{N_p} \int_{-\infty}^z dz \iint dx dy j E_{-p}, \quad (10)$$

где  $N_p$  — норма волны,  $E_{-p}$  — поле волны типа  $p$ , распространяющейся в направлении, противоположном направлению распространения волны  $E_p$ .

Разложив поле  $E_p$  в ряд по степеням  $x$ , на основании соотношений (3), (6), (7) нетрудно показать, что выражение для тока, возникающего в пучке под действием поля (9), содержит члены со знаменателями  $[\omega - hv_{\parallel} - (m\Omega + n\Omega_1)]$  и  $[\omega - hv_{\parallel} - (m\Omega + n\Omega_1)]^2$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), причем последние, получающиеся при интегрировании по времени выражений вида  $\int_{-\infty}^0 d\tau \exp \{i[\omega - hv_{\parallel} - (m\Omega + n\Omega_1)]\tau\}$ , присутствуют лишь при условии, что электрическое поле  $p$ -ой волны имеет  $z$ -компоненту. Если при этом частота волны с поправкой на допплер-эффект близка к одной из комбинационных частот  $m\Omega + n\Omega_1$ :

$$|\omega - hv_{\parallel} - (m\Omega + n\Omega_1)| \ll \omega, \Omega_1,$$

то на основании общей теории взаимодействия высокочастотного поля с системами возбужденных осцилляторов (см. [3]) следует ожидать, что поле волны будет нарастать вдоль волновода. Ниже будет рассмотрен частный случай такого рода резонансного взаимодействия поля с пучком электронов\*.

Считая, что размах поперечных колебаний электронов много меньше поперечных размеров неоднородности высокочастотного поля  $\lambda_{\perp}$ ,

\* Отметим, что резонансные частоты  $m\Omega + n\Omega_1$ , вообще говоря, неэквидистантны вследствие того, что невозмущенное движение электронов в общем случае не является периодическим. Эта особенность отличает рассматриваемую систему от систем, основанных на взаимодействии электромагнитных волн с потоками электронов, движущихся по прямолинейным траекториям в периодическом электростатическом поле (см., например, [8]), где спектр резонансных частот является эквидистантным.

ограничимся в выражениях для полей  $E_{\perp p, z}^0$  и  $E_{-p, x}^0$  первыми членами разложения по параметру  $|x|_{\max}/\lambda_{\perp}$ :

$$E_{p, z}^0 = E_{-p, z} = \varepsilon_z + \varepsilon'_z x + \frac{1}{2} \varepsilon''_z x^2;$$

$$E_{-p, x}^0 = \varepsilon_x + \varepsilon'_x x.$$

Заметим, однако, что учет в этом разложении членов, пропорциональных  $|x|_{\max}^2/\lambda_{\perp}^2$ , при использовании приближенных решений (6) уравнений движения электронов является корректным лишь в том случае, если размер неоднородности высокочастотного поля  $\lambda_{\perp}$  много меньше размеров неоднородности статического поля  $l$ . Это условие будет предполагаться выполненным.

Проинтегрируем выражение (10) с подставленным в него током (3), опуская члены высокого порядка малости по параметрам  $|x|_{\max}/\lambda_{\perp}$  и  $|\lambda_{\perp}|/l$ , а также члены, не содержащие множителей  $[\omega - hv_{\parallel} - (m\Omega + n\Omega_1)]^{-2}$ . В результате имеем:

$$\bar{C}_p = R \frac{C_p e^{i(h-h_p)z}}{h - h_p} \left\{ - \frac{h_p \varepsilon_z^2}{(\omega - hv_{\parallel})^2} + \right. \\ \left. + \sum_m K_m \left[ \frac{1}{(\omega - hv_{\parallel} - \Omega_1 - m\Omega)^2} - \frac{1}{(\omega - hv_{\parallel} + \Omega_1 + m\Omega)^2} \right] \right\}, \quad (11)$$

где

$$K_m = A^+ B^+ k C_m^2 \left[ \varepsilon_z \varepsilon'_z (\beta + m) - \frac{d\beta}{dv_{\parallel}} v_{\parallel} \varepsilon_z'^2 \right]. \quad (12)$$

3. Рассмотрим два случая резонансного взаимодействия электронов с высокочастотным полем.

а) Если скорость электронов и параметры волны удовлетворяют условию:

$$|\omega - h_p v_{\parallel}| \ll \omega, \Omega_1, \quad (13)$$

то, положив

$$h = h_p + \Delta h, \quad |\Delta h| \ll h_p, \quad (14)$$

на основании соотношений (9) и (11) можно получить уравнение для поправки к постоянной распространения  $\Delta h$ :

$$\Delta h (\Delta h - \varepsilon)^2 = -R h_p \varepsilon_z^2 / v_{\parallel}^2, \quad (15)$$

где  $\varepsilon = \omega/v_{\parallel} - h_p$ . В данном случае рассматриваемая система не отличается от обычной лампы с бегущей волной [2].

б) При условиях

$$|\omega - h_p v_{\parallel} \pm (\Omega_1 + q\Omega)| \ll \omega, \Omega_1 \quad (q=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (16)$$

поправка к постоянной распространения удовлетворяет уравнениям:

$$\Delta h (\Delta h - \varepsilon)^2 = \mp R K_q / v_{\parallel}^2, \quad (17)$$

где  $\varepsilon = \omega/v_{\parallel} - h_p \pm (\beta + q) k$ .

Волны последнего типа существуют лишь в том случае, когда поперечная составляющая скорости электронов отлична от нуля.

При соответствующем выборе параметров системы, например, при  $\varepsilon=0$ , уравнения (17) имеют комплексно-сопряженные корни, т. е. соответствующие волны нарастают вдоль  $z$ . В этом случае механизмом, обеспечивающим усиление, является группировка электронов под дей-

ствием неоднородного по поперечному сечению волновода продольного электрического поля волны, сопровождающаяся когерентным излучением образовавшихся электронных сгустков.

Существенно, что при условии (16) нарастание поля вдоль волновода может иметь место и при взаимодействии пучка с незамедленной волной. В этом отношении рассмотренная система сходна с другими системами, основанными на непрерывном взаимодействии высокочастотного поля с системами возбужденных моноэнергетических осцилляторов [3].

Интересно сравнить дисперсионное уравнение (17) с уравнением для постоянной распространения, которое может быть получено при тех же условиях методом, предложенным в работе [1]. Последнее имеет вид:

$$\Delta h(\Delta h - \epsilon)^2 = -R\bar{K}_q/v_{\parallel}^2,$$

где  $\bar{K}_q = A^+ B^+ \Sigma_z'^2 C_q^2 [h \pm k(\beta + q)]$ . Отличие этого уравнения от уравнения (17) обусловлено тем, что при его выводе принималась во внимание только неоднородность высокочастотного поля в поперечном сечении волновода, в то время как непосредственное влияние неоднородности статического поля на группировку электронов не учитывалось.

Принятые в настоящей работе ограничения в значительной степени сужают область применимости приведенных расчетов к реальным системам. Однако с помощью использованного здесь метода могут быть рассмотрены и более сложные модели электронных приборов.

Приношу благодарность А. В. Гапонову за руководство настоящей работой.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Метод интегрирования кинетического уравнения в переменных Лагранжа был использован Шафрановым для нахождения тензора диэлектрической проницаемости однородной плазмы, функции распределения компонент которой по координатам и импульсам в нулевом приближении не зависят от времени [4]. Этот метод может быть применен и в том случае, когда распределение частиц является неоднородным и нестационарным.

Если сила, действующая на частицы, представляет собой сумму двух членов, один из которых много больше другого:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1, \quad |\mathbf{F}_0| \gg |\mathbf{F}_1|,$$

то функцию распределения частиц можно искать в виде функции нулевого приближения и малой поправки:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad f_0 \gg |f_1|,$$

где  $f_0$  и  $f_1$  удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0; \quad (1\Pi)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_0 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = -\mathbf{F}_1 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2\Pi)$$

Здесь  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{p}$  — координаты, скорости и импульсы частиц.

Чтобы найти функцию  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , выразим из уравнения движения

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_0$$

координаты  $r(\tau)$  и импульс  $p(\tau)$  частицы на траектории невозмущенного движения в момент  $\tau$  как функции  $r, p, \tau$ ,

в результате чего уравнения (1П) и (2П) принимают вид\*:

$$\frac{df_0}{d\tau} = 0; \quad (1\text{Па})$$

$$\frac{df_1}{d\tau} = -F_1 \frac{\partial f_0}{\partial p(\tau)} = -\sum_{\alpha\beta} F_{1,\alpha}(\tau) \frac{A_{\alpha\beta}(\tau)}{D[r(\tau), p(\tau)]/D(r, p)} \frac{\partial f_0(r, p, t)}{\partial \xi_\beta}, \quad (2\text{Па}),$$

где переменные  $\xi_\beta$  представляют собой совокупность координат  $r$  и импульсов  $p$  частиц,  $D[r(\tau), p(\tau)]/D(r, p)$ —якобиан преобразования от переменных  $r(\tau), p(\tau)$  к переменным  $r, p$ ,  $A_{\alpha\beta}(\tau)$ —алгебраическое дополнение к элементу  $\partial p_\alpha(\tau)/\partial \xi_\beta$  в матрице  $\|\partial \xi_\gamma(\tau)/\partial \xi_\delta\|$ . По теореме Лиувилля  $D[r(\tau), p(\tau)]/D(r, p) = 1$ .

Функция  $f_1(r, p, t)$  может быть найдена интегрированием уравнения (2Па):

$$f_1(r, p, t) = f_1(t_1) - \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial f_0(r, p, t)}{\partial \xi_\beta} \int_{t_1}^t F_{1,\alpha}(\tau) A_{\alpha\beta}(\tau) d\tau. \quad (3\text{П})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. H. Motz, M. Nakamura, Proc. of the Symposium on Millimeter Waves, N. J. Brooklin, 1959, p. 155.
2. Дж. Р. Пирс, Лампа с бегущей волной, изд. Сов. радио, М., 1952.
3. А. В. Гапонов, ЖЭТФ, 39, 326 (1960).
4. В. Д. Шафранов, Сб. Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций, 4, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 416.
5. E. D. Courant, M. S. Livingston, H. S. Snyder, Phys. Rev., 88, 1190 (1952).
6. J. R. Blewett, Phys. Rev., 88, 1197 (1952).
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
8. В. А. Солнцев, А. С. Тагер, Труды НИИ МРПП, № 7, 3 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
13 декабря 1961 г.

## TO THE INTERACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES WITH AN ELECTRON BEAM GUIDED BY A PERIODIC DC FIELD

M. I. Petelin

Electromagnetic wave propagation is considered in a waveguide which is pierced by a curve electron beam guided by an electric or magnetic dc field, the latter changing periodically along the waveguide and having a quadrupole structure in a cross-section.

\* Уравнение для функции  $f_1$  может быть проинтегрировано и в других переменных. Например, для системы частиц, которые в нулевом приближении совершают одномерное финитное движение в потенциальном поле, удобно выразить  $x(\tau)$  и  $p(\tau)$  как функции энергии частицы и времени ее пролета от некоторого фиксированного сечения.

## О ТРИГГЕРНЫХ СВОЙСТВАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМ

C. A. Ахманов, Р. В. Хохлов

Отмечена пространственно-временная аналогия между процессом распространения волн в волноводной системе с нелинейной емкостью и установлением (во времени) колебаний при параметрическом резонансе. Указана возможность осуществления пространственных аналогов динамических триггеров с сосредоточенными постоянными на основе нелинейных линий (с нелинейной реактивностью и с нелинейным активным сопротивлением).

Предложенный в недавнее время новый принцип кодирования информации для цифровых устройств в виде амплитудной, фазовой или частотной модуляции несущей (см., например, [1] и обзор [2]) вызвал значительный интерес к проблеме создания соответствующих динамических триггеров, устойчивые состояния которых характеризуются различными значениями амплитуды, частоты или фазы несущей. Разработанные к настоящему времени триггеры указанного типа являются чаще всего двухполюсниками с сосредоточенными постоянными, что в значительной мере ограничивает возможности сокращения времени, занимаемого одним битом информации, и во многих случаях приводит к существенным трудностям при использовании таких триггеров в логических схемах и системах переработки информации. В качестве примера можно указать на известные трудности использования параметрических генераторов субгармоник в логических схемах, где приходится принимать специальные меры для осуществления направленного движения информации, связанные с необходимостью понижения быстродействия (так называемая „трехфазная“ накачка).

Цель настоящей заметки — обратить внимание на своеобразные триггерные свойства нелинейных волноводных систем, позволяющих построить пригодные для переработки информации пространственные аналоги динамических триггеров с сосредоточенными постоянными. При этом преимуществами соответствующих волноводных систем оказываются возможность значительного сокращения времени, затрачиваемого на один бит информации, и то обстоятельство, что волноводные системы являются четырехполюсниками.

В качестве примера покажем, что линия с распределенной нелинейной емкостью, возбуждаемая на одном конце одновременно мощным сигналом (накачкой) частоты  $\omega_n = 2\omega$  и сигналом частоты  $\omega_c = \omega$ , является пространственным аналогом параметрического генератора 2-ой субгармоники. Процессы в рассматриваемой линии описываются дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - L \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - L \frac{\partial G V}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где  $V$  — напряжение в линии,  $L$  — погонная индуктивность линии,  $Q$  — погонный заряд,  $G$  — погонная проводимость,  $z$  — координата,  $t$  — время. Заряд  $Q$  и проводимость  $G$  в дальнейшем будем полагать нелинейными функциями  $V$ .

Если предположить, что фазовая скорость волн в линии слабо зависит от частоты в интервале  $0 \div 2\omega$  и сильно изменяется при дальнейшем увеличении частоты, а нелинейность и затухание малы, то решение уравнения (1) при краевом условии в точке  $z=0$

$$V(0, t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi_0) + V_n \sin(2\omega t)$$

можно искать в виде

$$V = V_1(\epsilon z) \sin[\omega t - \beta_1 z + \varphi_1(\epsilon z)] + V_n \sin[2\omega t - \beta_2 z], \quad (2)$$

где  $\epsilon$ —малый параметр (т. е. амплитуда и фаза сигнала являются медленными функциями координаты\*),  $\beta_1$  и  $\beta_2$ —волновые числа. Положим  $\beta_2 = 2\beta_1 + \Delta$ , где  $\Delta$  позволяет учесть слабую дисперсию в линии. То обстоятельство, что амплитуда и фаза волны накачки в (2) полагаются неизменными, означает, что реакция волны сигнала на волну накачки считается пренебрежимо малой.

Представляя  $Q(V)$  в виде:

$$Q(V) = CV + DV^2, \quad (3)$$

где  $D \sim \epsilon$ , подставляя (2), (3) в (1) и пользуясь обычными приемами метода медленно меняющихся амплитуд, приходим к так называемым укороченным уравнениям, описывающим изменение медленно меняющихся амплитуды и фазы сигнала в пространстве:

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} + [\delta - m_0 V_n \cos(2\varphi)] V_1 = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Delta + m_0 V_n \sin(2\varphi) = 0, \quad (5)$$

где  $m_0 = LDu\omega/4$ ,  $\delta = LGu/4$  ( $u$  — фазовая скорость волны сигнала).

Легко видеть, что уравнения (4), (5) совершенно аналогичны широко известным укороченным уравнениям, характеризующим изменение во времени амплитуды и фазы колебаний, параметрически возбуждаемых в линейном резонаторе (см., например, [4] или [5], где уравнения параметрически возбуждаемого контура записаны в форме, аналогичной (4), (5)). При этом в пространственной задаче роль частот играют волновые числа, а роль начальных условий — краевые условия. Поэтому при анализе (4), (5) можно воспользоваться результатами теории параметрического генератора. Экспоненциальное нарастание волны сигнала (неустойчивость в пространстве\*\*) имеет место при

$$\Delta < \sqrt{m_0^2 V_n^2 - \delta^2}.$$

Если  $V_n = \text{const}$ , ограничение экспоненциального роста  $V_1$  может происходить (подобно тому, как это имеет место в параметрических генераторах) либо за счет возрастания проводимости (диссипативное ограничение) при больших  $V_1$ , либо за счет высших членов в нелинейной характеристике  $Q(V)$  (реактивное ограничение), учет которых

\* Сказанное означает, что задача о распространении сигналов в нелинейных линиях решается методом медленно меняющихся амплитуд; анализ применимости такого подхода дан в [3].

\*\* По аналогии с терминологией, принятой в теории плазменных волн [6], такую неустойчивость можно назвать конвективной неустойчивостью, в отличие от «абсолютной» неустойчивости (во времени) для параметрически возбуждаемого контура.

эквивалентен увеличению  $\Delta$ . В обоих случаях при достаточно больших  $z$  для волны сигнала возможны лишь два устойчивых состояния, характеризуемых различными значениями установившейся фазы

$$\sin(2\varphi_{\text{уст}}) = -\Delta/m_0 V_{\text{n}}, \quad (6)$$

отсчитываемых относительно фазы накачки и сдвинутых друг относительно друга на  $\pi$ .

Последнее обстоятельство представляет наибольший интерес с точки зрения задачи переработки информации и поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь „фазового“ уравнения (5). Из (5) видно, что выбор того или иного устойчивого состояния, реализуемого в момент времени  $t$  в точке  $z$ , определяется исключительно значением краевой фазы  $\varphi_0$  в момент  $t_0 = t - z/u$  (внешних сил в (4), (5) нет); области притяжения стационарных состояний на плоскости начальных фаз разделены корнями уравнения (6), в которых  $\cos(2\varphi) < 0$ .

Таким образом, с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с волной сигнала, изменение амплитуды и фазы происходит точно так же, как изменение во времени этих величин для наблюдателя, изучающего переходный процесс в параметрическом генераторе. Иными словами, рассматриваемая нелинейная волноводная система „запоминает“ краевое условие и устойчиво хранит записанную информацию, перемещающуюся непрерывно вдоль линии.

Следует подчеркнуть при этом, что устойчивыми являются как фаза, так и амплитуда установившейся волны; важным является и то обстоятельство, что процесс распространения волны в линии сопровождается усилением.

Вместе с тем, разомкнутая линия с нелинейной емкостью не является элементом памяти в обычном смысле\*, поскольку результат, получаемый на неподвижном считающем устройстве, как следует из вышеизложенного, изменяется во времени в полном соответствии с изменением во времени краевых условий. Последнее обстоятельство, однако, может представить интерес с точки зрения переработки информации. Действительно, сказанное означает, что разомкнутая линия рассматриваемого типа конечной длины непрерывно перерабатывает подаваемую на вход информацию совершенно в том же смысле, в котором ее перерабатывает дискретными порциями (при многократных запусках) параметрический генератор 2-й субгармоники. На основе такой линии может быть осуществлена логическая схема, широко используемая в цифровых машинах с фазовой записью информации на параметрических генераторах — так называемая мажоритарная схема (все остальные логические операции могут быть легко получены из мажоритарной схемы).

Напомним, что для осуществления такой схемы (более подробно см., например, [1, 2]) нужно располагать элементом, имеющим много входов и один выход; фаза выходного сигнала, определяющая его логическое значение, должна быть равна фазе на большинстве входов. Нетрудно видеть, что отрезок линии рассматриваемого типа удовлетворяет перечисленным требованиям; при этом в отличие от случая параметрического генератора здесь не нужно принимать специальных мер для осуществления направленного движения информации, поскольку усиление сигналов в линии имеет место лишь в одном направлении, определяемом направлением движения волны накачки.

Для проведения конкретных оценок следует более подробно рас-

\* С этой точки зрения может представлять интерес вариант рассматриваемой системы, свернутой в кольцо.

смотреть фазовое уравнение (5). Полагая в нем для простоты  $\Delta = 0$ , имеем:

$$\varphi(z, t) = \operatorname{arctg} [e^{-4m_0 V_n z/u} \operatorname{tg} \varphi_0(t - z/u)]. \quad (7)$$

Таким образом, минимальная длина линии, на которой устанавливаются устойчивые состояния (6),

$$z_0 \simeq u/m_0 V_n. \quad (8)$$

Если пользоваться (7), то для времени, которое занимает один бит информации  $T_1$ , имеет место соотношение:

$$T_1 \simeq 1/2\omega. \quad (9)$$

Следует отметить, что в реальных системах  $T_1$  может несколько превышать значение, даваемое формулой (9); для его расчета следует рассмотреть конкретный вид дисперсионной характеристики системы. Характерной особенностью систем рассматриваемого типа является то обстоятельство, что переработка информации в них неизбежно связана с задержкой сигнала на время

$$\tau_3 = z_0/u = 1/m_0 V_n = 4C/\Delta C_\omega, \quad (10)$$

где  $\Delta C/C = DV_n/C$  — коэффициент модуляции распределенной емкости линии. Поскольку  $\Delta C/C < 1$ , время задержки может превышать минимальное время, затрачиваемое на один бит информации.

В заключение отметим, что рассмотренной системой отнюдь не ограничиваются возможности создания пространственных аналогов динамических триггеров с сосредоточенными постоянными. В качестве примера укажем на возможность создания распределенного аналога генератора с жестким возбуждением на основе линии, распределенная проводимость которой зависит от напряжения следующим образом:

$$G(V) = G_0 - G_2 V^2 + G_4 V^4. \quad (11)$$

Для волны, распространяющейся в такой линии, возможны лишь два устойчивых состояния, характеризуемых различными значениями амплитуды  $V_{10} \neq 0$  и  $V_{20} = 0$ . С точки зрения цифрового устройства амплитуде  $V_{10}$  можно приписать логическое значение 1, а  $V_{20}$  — 0.

Важным вопросом для систем рассматриваемого типа является вопрос о самопроизвольных переходах их из одного устойчивого состояния в другое, совершаемых под воздействием собственных шумов. Соответствующие расчеты для линии с нелинейной емкостью были проведены в [7], где показано, что при  $m_0 V_n / \delta > 1$  такие переходы весьма редки. Методика расчета, приведенная в [7], позволяет рассмотреть также и задачу о перебросах волноводных триггеров из одного устойчивого состояния в другое за счет внешней силы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. Wignington, Proc. IRE, 47, 516 (1959).
2. С. А. Ахманов, А. С. Рошаль, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 203 (1961).
3. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 917 (1961).
4. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, ЖТФ, 3, 5 (1934).
5. С. А. Ахманов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 769 (1961).
6. R. Sturrock, Phys. Rev., 112, 1488 (1958).
7. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 6, 1813 (1961).

## ON TRIGGER PROPERTIES OF NON-LINEAR WAVEGUIDE SYSTEMS

*S. A. Akhmanov, R. V. Khokhlov*

The space and time analogy is noted between the wave propagation in a waveguide system with non-linear capacitance and forming (in time) of oscillations at parametric resonance. An opportunity is pointed out in the realization of the spatial analogs of dynamic triggers with lumped parameters on the base of the lines with non-linear reactance and non-linear resistance.

## О РАДИОИЗЛУЧЕНИИ ПРИ ТРЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, НАХОДЯЩИХСЯ ПОД РАЗЛИЧНЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

B. T. Федин

Кратко излагаются некоторые результаты экспериментального исследования радиоизлучения в трехсанитметровом диапазоне волн, возникающего при трении металлических поверхностей с различными электрическими потенциалами. В частности, приводится порядок эффективной радиотемпературы, измеренной при помощи радиометра.

Трущиеся металлические поверхности, находящиеся под различными электрическими потенциалами, являются источниками относительно мощного радиоизлучения флюктуационного характера. Мощность этого излучения (природа которого в настоящий момент недостаточно ясна) может быть значительной при малых соприкасающихся поверхностях и малых токах, протекающих через места соприкосновения.

В проведенных нами экспериментах была приближенно оценена интенсивность радиоизлучения, возникающего при трении в трехсанитметровом диапазоне. В качестве измерителя излучения использовался приемник слабых флюктуационных сигналов — радиометр, имеющий следующие значения основных параметров: а) полоса пропускания по высокой частоте  $\Delta f = 8 \text{ мгц}$ ; б) центральная частота УПЧ  $f_0 = 9375 \text{ мгц} \pm 5\%$  ( $\lambda_0 = 3,2 \text{ см}$ ); в) флюктуационный порог чувствительности не более  $1,5^\circ\text{K}$  ( $1,5 \cdot 10^{-16} \text{ вт}$ ) при постоянной времени прибора 64 сек. Прибор позволял устанавливать одно из следующих значений постоянной времени  $\tau$ : 4, 16, 32 и 64 сек.

Блок-схема одной из экспериментальных установок, с помощью которой было обнаружено и изучалось явление излучения при трении в районе длин волн порядка 3 см, показана на рис. 1.

Источником излучения служила в одном случае пара „вращающейся диск—торец сплошного или полого цилиндра“, в другом случае—пара „вращающееся кольцо—металлическая щетка“. Было исследовано несколько вариантов конфигураций и материалов трущихся пар. Скорость относительного перемещения трущихся поверхностей изменялась в пределах  $0,5 \div 1 \text{ м}\cdot\text{сек}^{-1}$ ; площадь соприкосновения — в пределах  $0,2 \div 1 \text{ см}^2$ .

Интенсивность радиоизлучения оценивалась в эффективной радиотемпературе, считываемой с выходного прибора радиометра, который в свою очередь был прокалиброван по эталонному излучателю\*.

При количественных измерениях, результаты которых представлены на рис. 2, источник излучения помещался в непосредственной близости (на расстоянии  $10 \div 20 \text{ см}$ ) от рупорной антенны радиометра. Излучатель и рупор заключались в замкнутую алюминиевую полость. Окружающая температура была близка к  $300^\circ\text{K}$ . В этих условиях

\* Под эффективной радиотемпературой здесь понимается температура абсолютно чёрного тела, обуславливающая мощность излучения, равную средней мощности излучения, которая попадает в радиометр от трущейся пары.

антенная температура радиометра была близка к эффективной температуре излучателя.

Поверхность излучения на основании проведенных экспериментов оценить трудно. Единственной величиной, как-то характеризующей площадь излучения, является площадь соприкосновения трещущихся поверхностей. Замеры эффективной температуры (рис. 2) выполнены при площади соприкосновения около  $0,25 \text{ см}^2$ .

Естественно, первым этапом экспериментов, связанных с описываемым явлением, были опыты, которые доказывали, что данное явление

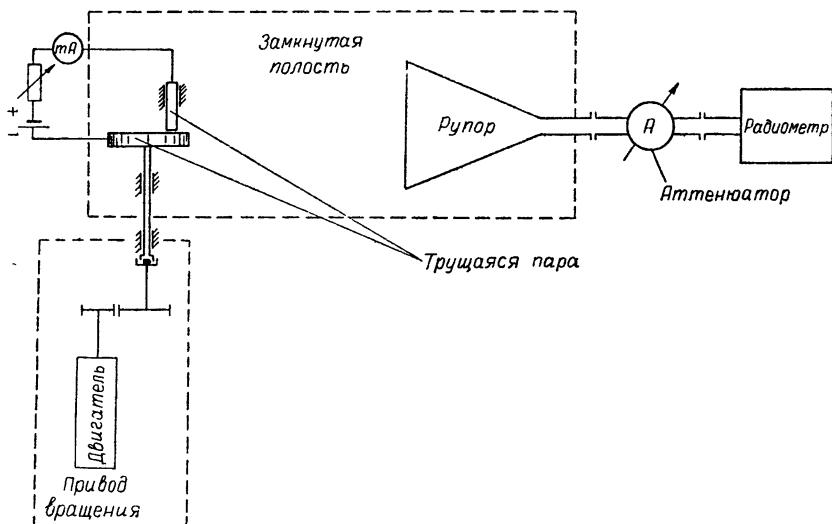


Рис. 1. Блок-схема основной экспериментальной установки, с помощью которой было обнаружено и изучалось явление радиоизлучения при трении.

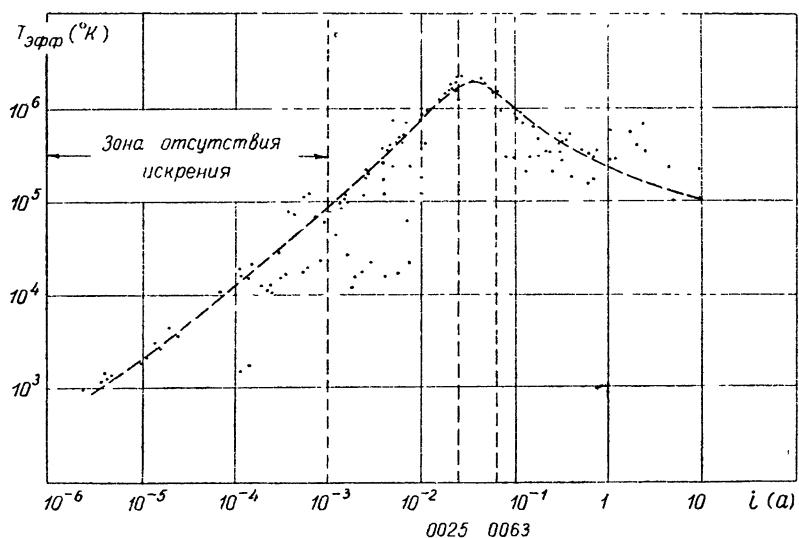


Рис. 2. Зависимость эффективной радиотемпературы излучения от величины среднего тока, протекающего через место соприкосновения трещущихся поверхностей.

связано со сверхвысокочастотным электромагнитным излучением на волнах порядка 3 см и не представляет собой помехи, проникающие по цепи питания через УПЧ или низкочастотные цепи. Во первых, это специфическое явление само по себе было обнаружено на механической вращающейся паре, совершенно не связанной с электрической цепью. Затем было обнаружено, что интенсивность излучения изменяется, если к месту соприкосновения трущихся поверхностей приложить разность потенциалов.

Следующий шаг состоял в исследовании степени влияния величины разности потенциалов между трущимися поверхностями на интенсивность излучения. Оказалось, что более удобно оперировать со средними токами, протекающими через место соприкосновения. Этот параметр и был положен в основу количественных измерений (рис. 2).

Следует подчеркнуть, что цепь приложения разности потенциалов к трущимся поверхностям тщательно контролировалась. Эта цепь была совершенно свободна от индуктивностей и питалась от отдельной батареи (рис. 1), т. е. была совершенно изолирована от цепей питания радиометра.

Доказательством испускания трущейся парой электромагнитных волн в диапазоне 3 см служило введение сверхвысокочастотного аттенюатора в волноводный тракт на участке между рупорной антенной и входом радиометра (рис. 1). Установка аттенюатора на полное поглощение сводило до нуля показания выходного прибора радиометра.

Наконец, был разработан специальный излучатель, основанный на обнаруженном явлении, который устанавливался в фокусе параболического отражателя. Тем самым образовался источник направленного излучения. Излучатель представлял собой пару „вращающееся латунное кольцо — металлическая щетка“ с площадью соприкосновения порядка 0,5 см<sup>2</sup>. Для изготовления излучателя использовался коллекторный узел небольшого электрического двигателя. Коллектор двигателя был расточен и на него было напрессовано сплошное латунное кольцо. Угольная щетка была заменена металлической. Ротор двигателя приводился во вращение механическим путем посредством гибкого валика от отдельного привода. Через место соприкосновения пропускался постоянный ток порядка десятков микроампер (для этой цели использовалась сухая батарея).

С помощью такой установки был осуществлен направленный прием описываемого излучения в комнатных условиях на расстоянии нескольких десятков метров. Однако какие-либо количественные измерения в этом случае не проводились. Перечисленные опыты доказывают, что обнаруженное явление представляет собой именно СВЧ электромагнитное излучение в диапазоне радиометра, т. е. в районе 3,2 см.

Кратко результаты исследования можно сформулировать следующим образом.

Трущиеся металлические поверхности, находящиеся под различными потенциалами (переменными во времени или постоянными), излучают электромагнитную энергию в трехсантиметровом диапазоне волн.

Средний уровень тока, протекающего через место соприкосновения трущихся поверхностей, оказывает значительное влияние на уровень излучения. Имеет место максимум излучения по току.

Зависимость эффективной радиотемпературы излучения от величины среднего тока, протекающего через место соприкосновения трущихся поверхностей, изображена на рис. 2. Эта зависимость получена для пары „вращающийся стальной диск — легкая стальная луженая щетка“ при контактном давлении порядка 7 г. Скорость относительного

перемещения трущихся поверхностей  $V$  здесь была равна примерно  $0,8 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ; площадь соприкосновения поверхностей  $S$  — порядка  $0,25 \text{ см}^2$ ; полоса пропускания радиометра  $\Delta f$  — около  $8 \text{ мгц}$ ; постоянная времени  $\tau = 4 \text{ сек}$ . Точками на рисунке обозначены результаты отдельных измерений радиотемпературы. Разброс значений обусловлен колебаниями среднего уровня излучения. Пунктирная линия дает примерное среднее значение уровня излучения.

Наивысшая эффективная радиотемпература исследуемого излучения, зарегистрированная в наших экспериментах, была порядка  $2,2 \cdot 10^6 \text{ К}^*$ .

Высокочастотное электромагнитное излучение имеет место как при наличии искрового разряда в месте контакта поверхностей, так и при отсутствии видимого искрения. Даже при среднем значении тока, протекающего через место соприкосновения трущихся поверхностей, порядка  $2,5 \text{ мка}$ , эффективная радиотемпература излучения в наших условиях примерно равна  $900^\circ\text{K}$  (рис. 2).

Видимого изменения в уровне излучения при переходе в область искрового разряда не наблюдается.

Сорт материала трущихся поверхностей и различные сочетания материалов не оказывают сколь-либо заметного влияния на интенсивность излучения. В некоторой степени на интенсивность излучения влияет чистота обработки поверхностей соприкосновения. Наибольшая интенсивность излучения при прочих равных условиях наблюдается при средней чистоте обработки.

Проведенные эксперименты наводят на мысль о том, что на объектах, имеющих трущиеся поверхности, могут быть очаги шумового радиоизлучения значительной мощности.

Данная работа была выполнена по инициативе и при непосредственном участии А. А. Красовского.

Поступила в редакцию  
23 декабря 1961 г

## ON THE RADIOEMISSION OF FRICTING METALLIC SURFACES WITH VARIOUS ELECTRIC POTENTIALS

*V. T. Fedin*

A brief account is given of experimental investigation of radiation in 3 cm band generated by friction of metallic surfaces with various electric potentials. In particular there given an estimation of an effective radio temperature measured by radiometer.

---

\* Фактически эффективная радиотемпература трущейся пары значительно выше температуры, определенной экспериментально, так как не весь поток излучения попадает в радиометр как по причине рассеивания части этого потока, так и по причине неизбежного рассогласования между входом радиометра и источником излучения.

## ДИНАМИКА ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ С ЛЮФТОМ

B. A. Брусин

Рассматривается простейшая модель следящей системы с люфтом. Устанавливается возможность выбора параметров системы, при которых она устойчива и ошибка слежения при входном сигнале типа кусочно-линейного и квадратичного не превосходит заданной величины.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе исследуется простейшая модель следящей системы с люфтом и коррекцией по производной (рис. 1), в предположении, что

1) момент инерции нагрузки на выходном валу равен нулю и нагрузка не оказывает обратного влияния на вал исполнительного двигателя;

2) на выходном валу существует достаточно большое сухое трение, так что он мгновенно останавливается после снятия воздействия исполнительного двигателя. На рисунке 1 через  $2\Delta$  обозначена величина зазора,  $k/(T_2 p^2 + T_1 p)$  — коэффициент передачи исполнительного двигателя,  $T_3$  — параметр, характеризующий величину отрицательной обратной связи по производной.

Общий коэффициент передачи линейной части системы можно привести к виду:

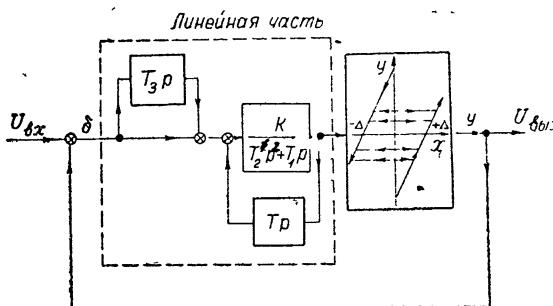


Рис. 1.

$$K(p) = \frac{k(1 + T_3 p)}{T_2 p^2 + T_1 p}.$$

Тогда уравнения движения записываются следующим образом:

$$T_2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} = k(U_{bx} - y + T_3(\dot{U}_{bx} - \dot{y})); \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = \begin{cases} \dot{x}, & \text{если } \begin{cases} x - y = \Delta \text{ и } \dot{x} \geq 0 \text{ или} \\ x - y = -\Delta \text{ и } \dot{x} \leq 0 \end{cases} \\ 0, & \text{если } \begin{cases} |x - y| < \Delta \text{ или} \\ x - y = \Delta \text{ и } \dot{x} < 0, \text{ или} \\ x - y = -\Delta \text{ и } \dot{x} > 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Режим с  $\dot{y} = \dot{x}$  будем называть режимом выбранного люфта, режим с  $\dot{y} = 0$  — режимом выбирания люфта.

Анализ следящей системы с люфтом, как и вообще любой следящей системы, состоит из двух частей: анализа системы при постоянном во времени входном сигнале и анализа поведения системы при переменном входном сигнале. В первой части исследуется вопрос об устойчивости состояния равновесия и о выборе параметров, при которых эта устойчивость имеет место. Во второй части исследуется точность работы следящей системы при подаче на вход ее типичных входных сигналов.

Проблема исследования следящих систем с люфтом при входном сигнале  $U_{\text{вх}} = \text{const}$  рассматривалась в [1], где была показана возможность существования в таких системах незатухающих колебаний. В работе [2] методом гармонического баланса был проведен приближенный анализ модели системы с люфтом. В дальнейшем различные модели такой системы при  $U_{\text{вх}} = \text{const}$  рассматривались в работах [3, 4, 7, 9], где с помощью метода гармонического баланса отыскивались области устойчивости состояния равновесия и периодического режима.

В настоящей работе проводится исследование следящей системы при различных типах входных сигналов. Исследование системы при  $U_{\text{вх}} = \text{const}$  выполнено методом точечных отображений [8]; в результате получено разбиение пространства параметров на области различных режимов. Точное исследование показало, в частности, что применение метода гармонического баланса к системам с люфтом даже в простейшей модели (что было сделано, например, в [9]) приводит к неверным результатам (например, в вопросе о количестве предельных циклов).

Результаты исследования для  $U_{\text{вх}} = \text{const}$  (общий вид фазового пространства и разбиение пространства параметров) совпадают с полученными ранее в [6].

Поведение следящей системы изучалось также и при подаче на ее вход сигналов, изменяющихся во времени линейно, кусочно-линейно и по квадратичному закону. Исследование проводилось методом сшивания решений для различных участков линейности системы. В результате показана принципиальная возможность обеспечения желаемой точности системы путем надлежащего выбора параметров; на численном примере дана методика их отыскания.

## 2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ, ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ ПРИ ПОСТОЯННОМ ВХОДНОМ СИГНАЛЕ

Без ограничения общности можно положить  $U_{\text{вх}} = 0$ . Из (1.1), полагая  $U_{\text{вх}} = 0$ , получим уравнения движения системы. Из этих уравнений видно, что закон изменения  $x(t)$  однозначно определяется заданием в начальный момент трех величин:  $x(t_0)$ ,  $\dot{x}(t_0)$  и  $y(t_0)$ . Однако, если положить, что движения системы начинаются с режима

выбранного люфта, то закон изменения  $x(t)$  будет однозначно определяться лишь двумя величинами:  $x(t_0)$  и  $\dot{x}(t_0)$ , так как в этом случае  $y(t_0)$  можно будет однозначно определить через  $x(t_0)$  и  $\dot{x}(t_0)$ . Следовательно, при данном предположении движение системы можно рассматривать на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$ , которая, однако, будет состоять из двух листов (рис. 2). На листе I изображаются траектории движений в режиме выбирания люфта, на листе II — траектории движений с выбранным люфтом. Переход с листа I на лист II происходит по оси

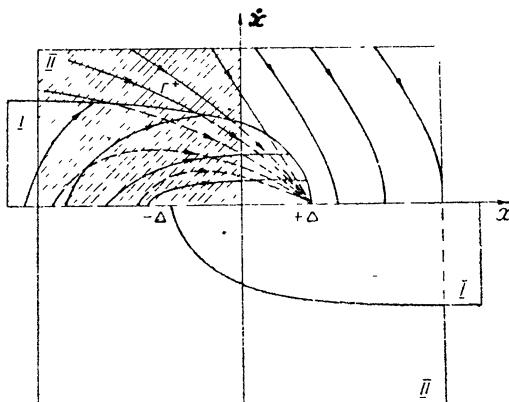


Рис. 2.

$\dot{x} = 0$ , а с листа I на лист II — по кривым  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$ , уравнения которых получаются из условий:

$$x(t) - y(t) = \Delta, \quad \dot{x} \geq 0 \quad (2.1)$$

для  $\Gamma^+$ ,

$$x(t) - y(t) = -\Delta, \quad \dot{x} < 0 \quad (2.1a)$$

для  $\Gamma^-$ . Сделаем замену переменной  $t = \sqrt{T_2/k}\tau$  и обозначим:

$$\delta_1 = \frac{T_1}{2T_2} \sqrt{\frac{T_2}{k}}; \quad \delta_2 = \frac{kT_3}{2T_2} \sqrt{\frac{T_2}{k}}; \quad \delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Тогда уравнения движения примут следующий вид:

$$\dot{x} + 2\delta_1 \dot{x} = -y_0 \quad (2.2)$$

— для движения в режиме выбирамого люфта,

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + x = \pm \Delta, \quad \dot{x} \geq 0 \quad (2.3)$$

— для движения в режиме выбранного люфта.

На основании (2.2) имеем:

$$\dot{x} = -\frac{y_0}{2\delta_1} (1 - e^{-2\delta_1 t}). \quad (2.4)$$

Так как значение соответствует окончанию одного из двух движений с выбранным люфтом, то из (2.3) следует, что  $y_0 = x_0 - \Delta$  при  $x_0 > \Delta$  и  $y_0 = x_0 + \Delta$  при  $x_0 < -\Delta$ . Для  $x_0 > \Delta$  закон изменения  $x$  напишется в виде:

$$x(t) = -\frac{1}{2\delta_1} (x_0 - \Delta) \left[ t + \frac{1}{2\delta_1} (e^{-2\delta_1 t} - 1) \right] + x_0. \quad (2.5)$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что  $x$  и  $\dot{x}$  монотонно убывают (для  $x_0 < -\Delta$  они будут монотонно возрастать); поэтому условия (2.1) и (2.1а) эквивалентны следующим:

$$x_0 - x(t) = 2\Delta; \quad (2.6)$$

$$x_0 - x(t) = -2\Delta. \quad (2.6a)$$

Используя (2.4) и (2.5), (2.6) и (2.6а), можно получить уравнения  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  в параметрической форме. Для  $\Gamma^-$ , например, имеем:

$$x = x_0 - 2\Delta = \frac{4\delta_1 \Delta}{t + (1/2\delta_1)(e^{-2\delta_1 t} - 1)} - \Delta; \quad (2.7)$$

$$z = \dot{x} = \frac{1}{2\delta_1} (1 - e^{-2\delta_1 t}) (-x_0 + \Delta) \quad \text{найдено из (2.6a)}$$

(уравнения для  $\Gamma^+$  выводятся аналогично). Параметр  $t$  пробегает значения от 0 до  $\infty$ ;

$$x(0) = \infty, \quad z(0) = -2\Delta, \quad x_0(\infty) = \Delta, \quad z(\infty) = 0, \quad x(\infty) = \Delta,$$

$$\frac{dz}{dx} = \chi(t) = \frac{1}{2\delta_1} \frac{2\delta_1 t e^{-2\delta_1 t} + e^{-2\delta_1 t} - 1}{1 - e^{-2\delta_1 t}}, \quad \chi(\infty) = -\frac{1}{2\delta_1}, \quad \chi(0) = 0, \quad \chi'(t) < 0,$$

т. е.

$$\min_{0 \leq t < \infty} dz/dx = -1/2\delta_1.$$

Разбиение листа I на траектории для  $\dot{x} > 0$  приводится на рис. 2 (для  $\dot{x} < 0$  разбиение имеет симметричный вид).

Для дальнейшего изучения фазового пространства целесообразно пространство параметров системы  $(\delta_1, \delta_2)$  разбить на области  $G_0, G_1$  и  $G_2$ , которые определяются следующими неравенствами (см. рис. 3):

$$G_0: \delta > 1, \quad \delta + \sqrt{\delta^2 - 1} > 1/2\delta_1;$$

$$G_1: \delta > 1, \quad \delta + \sqrt{\delta^2 - 1} < 1/2\delta_1;$$

$$G_2: \delta < 1.$$

**1. Область  $G_0$ .** Разбиение листа II на траектории для  $x > 0$  приведено на рис. 2. Прямая  $x = -q_2(x - \Delta)$  (где  $q_2 = \delta + \sqrt{\delta^2 - 1}$  — наибольший по модулю корень уравнения  $p^2 + 2\delta p + 1 = 0$ ) делит полуплоскость  $x > 0$  на две части: траектории одной части (заштрихованной) стремятся к узлу  $x = \Delta, \dot{x} = 0$ ; траектории другой приходят за конечный про-

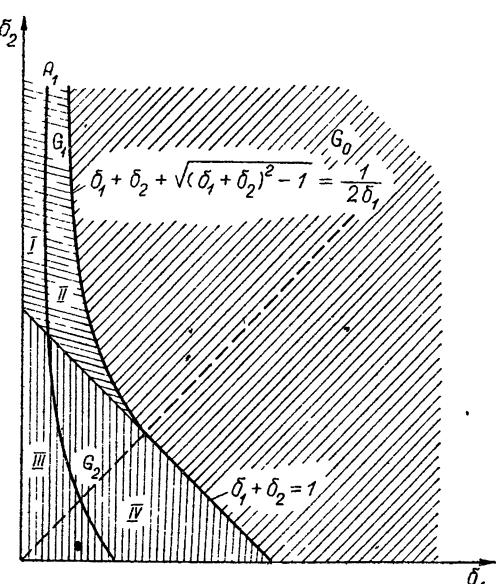


Рис. 3.

межуток времени на ось  $\dot{x}=0$ ,  $x > \Delta$ . Разбиение полуплоскости  $\dot{x} < 0$  II листа имеет симметричный вид. Поскольку  $q_2 > 1/2\delta_1$ , кривая  $\Gamma^+$  имеет с прямой  $z = -q_2(x \pm \Delta)$  только одну общую точку. В этом случае фазовая плоскость  $(x, z)$  разделяется на две части —  $g^+$  и  $g^-$ : движения, начинающиеся (с режима выбранного люфта) в  $g^+$ , стремятся к узлу  $x=\Delta$ , а движения, начинающиеся в  $g^-$  — к узлу  $x=-\Delta$  (рис. 4а).

2. *Области  $G_1$  и  $G_2$ .* В области  $G_1$  разбиение листа II на траектории такое же, как в области  $G_0$  (рис. 2), т. е. и в этом случае всегда существует в фазовом пространстве область, траектории которой идут при  $t \rightarrow \infty$  в одно из состояний равновесия  $x=\Delta$  или  $x=-\Delta$ . Однако в рассматриваемом случае может существовать и устойчивый предельный цикл, охватывающий отрезок  $[-\Delta; \Delta]$  (рис. 4б, г).

Для исследования этой возможности и для получения разбиения пространства параметров  $(\delta_1, \delta_2)$  на области различных установившихся режимов применим аппарат точечных преобразований. Составим точечное отображение луча  $\Delta < x_0 < \infty$ ,  $z_0=0$  в луч  $-\infty < x_2 < -\Delta$ ,  $z_2=0$ , определяемое траекториями уравнений (2.2), (2.3). Каждой точке  $(x_0, 0)$  на этом луче соответствует взаимно-однозначно точка  $(x_1, z_1)$  кривой  $\Gamma^-$ ; каждой точке на  $\Gamma^-$  также взаимно-однозначно соответствует точка  $(x_2, 0)$  на втором луче. Формулы этого точечного преобразования получаются из (2.7) и (2.3):

$$\begin{aligned} x_0 - \Delta &= \frac{4\delta_1 \Delta}{(1/2\delta_1)[t + (1/2\delta_1)(e^{-2\delta_1 t} - 1)]}; \\ x_1 &= x_0 - 2\Delta; \\ z_1 &= -(1/2\delta_1)^2(1 - e^{-2\delta_1 t})(x_0 - \Delta); \\ x_2 + \Delta &= \frac{[z_1 + q_2(x_1 + \Delta)]e^{-q_1 \tau} - [z_1 + q_1(x_1 + \Delta)]e^{-q_2 \tau}}{q_2 - q_1}; \\ [z_1 + q_2(x_1 + \Delta)]q_1 e^{-q_1 \tau} - [z_1 + q_1(x_1 + \Delta)]q_2 e^{-q_2 \tau} &= 0 \end{aligned}$$

( $q_i$  — корни характеристического уравнения  $p^2 + 2\delta p + 1 = 0$ ).

Введем замену:

$$x_0 - \Delta = \xi_0, \quad x_1 + \Delta = \xi_1, \quad x_2 + \Delta = -\xi_2, \quad \alpha = (1/2\delta_1)(1 - e^{-2\delta_1 t}).$$

Нетрудно видеть, что  $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \geq 0$ . Тогда точечное преобразование (2.8) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= F(\xi_0) = \Phi(\tau) \xi_0; \\ \Phi(\tau) &= \frac{\alpha - q_2}{q_2} e^{-q_1 \tau} = \frac{(q_2 - q_1)e^{-(q_2 + q_1)\tau}}{q_1 e^{-q_1 \tau} - q_2 e^{-q_2 \tau}}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

где  $\tau$  находится как наименьший положительный корень уравнения

$$(-\alpha + q_2)q_1 = (-\alpha + q_1)q_2 e^{-(q_2 - q_1)\tau}. \tag{2.10}$$

Найдем пределы изменения  $\tau$ . Пусть  $\tau_{\min}$  — минимальное значение  $\tau$  при данных значениях параметров. Его можно найти из (2.10), если вместо  $\alpha$  подставить его значение  $\alpha = \alpha_{\max} = 1/2\delta_1$ , т. е.  $\tau_{\min}$  — наименьший положительный корень уравнения

$$(1/2\delta_1 - q_2)q_1 = (1/2\delta_1 - q_1)q_2 e^{-(q_2 - q_1)\tau}. \tag{2.11}$$

(Для случая, рассмотренного выше,  $\tau_{\min} = \infty$ .) Легко получить так же и верхний предел  $-\tau_{\max}$ . Значение  $\tau_{\max}$  получается из (2.10), если

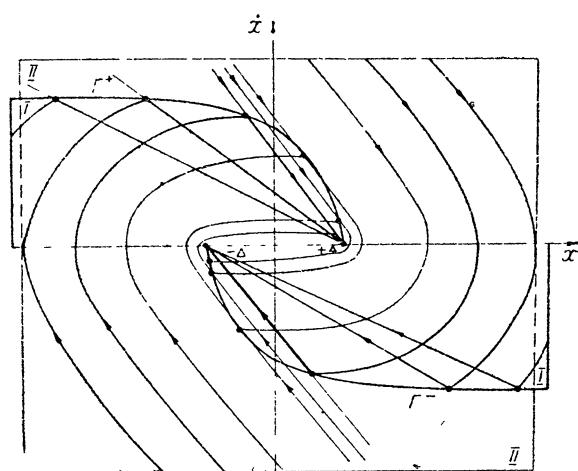
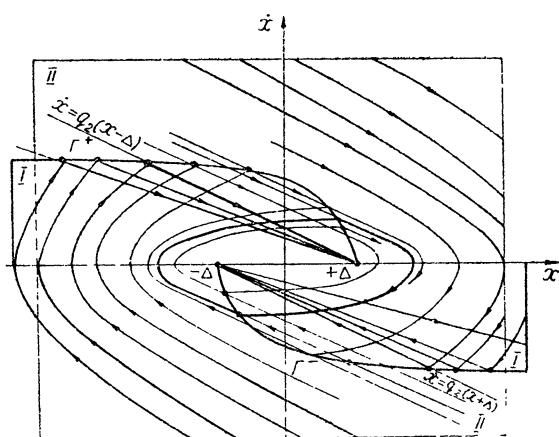
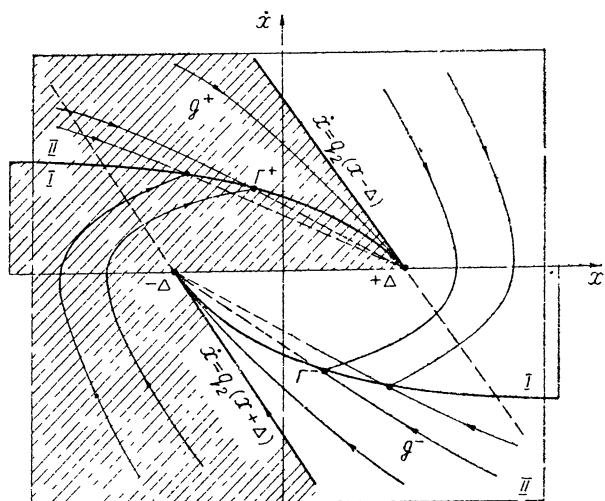


Рис. 4а, б, в,

вместо  $\alpha$  подставить его значение, равное  $\alpha = \alpha_{\min} = 0$ . Тогда получим для  $\delta > 1$   $\tau_{\max} = \infty$ , для  $\delta < 1$   $\tau_{\max} = \pi/\omega$ .

Легко заметить, что условие существования предельного цикла эквивалентно условию существования корня  $\tau^*$  уравнения  $\Phi(\tau) = 1$ , принадлежащего отрезку  $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ . Анализ этого уравнения показывает, что при фиксированных  $\delta_1$  и  $\delta_2$  может существовать только один такой корень, причем для значений параметров, лежащих либо в  $G_1$ , либо в  $G_2$ . При этом будут справедливы неравенства:  $\Phi(\tau) < 1$  при  $\tau_{\min} < \tau < \tau^*$ ;  $\Phi(\tau) > 1$  при  $\tau^* < \tau < \tau_{\max}$ . Эти неравенства, в частности, означают, что если существует предельный цикл, то он обязательно устойчивый. Далее, если такого корня не существует, то имеет место неравенство  $\Phi(\tau) < 1$  для всех  $\tau \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ . Для области  $G_1$  и  $G_2$  пространства параметров это означает, что отрезок  $[-\Delta, \Delta]$  является элементом притяжения траекторий, которые „наматываются“ на него.

Пусть  $A_1$  — кривая, ограничивающая в пространстве параметров область существования предельного цикла. Из предыдущего следует, что для точек этой кривой справедливо равенство  $\Phi(\tau_{\min}) = 1$ . Из этого равенства, учитывая (2.9) и (2.11), получим уравнение кривой  $A_1$  в параметрической форме:

$$(q_2 - q_1)e^{-(q_2 + q_1)\tau} = \\ = q_1e^{-q_1\tau} - q_2e^{-q_2\tau}; \quad (2.12)$$

$$\left( \frac{1}{2\delta_1} - q_1 \right) q_2 e^{-(q_2 - q_1)\tau} = \\ = \left( \frac{1}{2\delta_1} - q_2 \right) q_1.$$

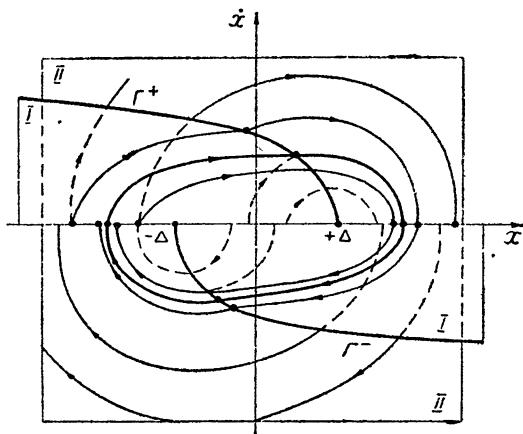


Рис. 4г.

Согласно изложенному выше, разбиение пространства параметров на области, соответствующие различным установившимся движениям следящей системы, будет иметь вид, приведенный на рис. 3. Здесь  $G_0$  — область существования двух устойчивых состояний равновесия  $x = \pm \Delta$ ,  $\dot{x} = 0$ . При любых начальных отклонениях система монотонно стремится к режиму  $y=0$ . Вид фазового пространства, соответствующий этому случаю, изображен на рис. 4а. Далее, I — область существования устойчивых состояний равновесия  $x = \pm \Delta$ ,  $\dot{x} = 0$  и устойчивого предельного цикла. Вид фазового пространства изображен на рис. 4б. В зависимости от начальных условий система стремится либо к режиму  $y=0$  (монотонно), либо к периодическому режиму с амплитудой, большей, чем  $\Delta$ . II — область существования устойчивого отрезка состояния равновесия  $[-\Delta, \Delta]$  и двух устойчивых состояний равновесия типа узла. В зависимости от начальных условий система стремится к установившемуся режиму либо монотонно, либо немонотонно (рис. 4в). III — область существования абсолютно устойчивого предельного цикла. При любых начальных отклонениях система стремится к периодическому режиму с амплитудой, большей, чем  $\Delta$  (рис. 4г). IV — область существования абсолютно устойчивого отрезка состояний равновесия. Фазовое пространство в этом случае изображено на рис. 4д. Переходный процесс в этом случае имеет колебательную форму с бесконечно уменьшающейся амплитудой и бесконечно возрастающим периодом.

Из описания возможных режимов в рассматриваемой системе с люфтом следует, что для работы следящей системы наилучшим является режим, соответствующий параметрам  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , принадлежащим области  $G_0$  (рис. 3). Из картины разбиения пространства параметров видно, что чем больше значение  $\delta_2$ , тем меньшее значение  $\delta_1$  требуется для того, чтобы попасть в область  $G_0$ . Для обеспечения точности работы следящей системы необходимо, чтобы параметр  $T_1$  был мал. Из указанного выше следует, что каким бы малым, но отличным от нуля ни был параметр  $T_1$ , можно выбрать  $T_3$  настолько большим, чтобы режим  $y = 0$  стал устойчив при любых отклонениях от него:

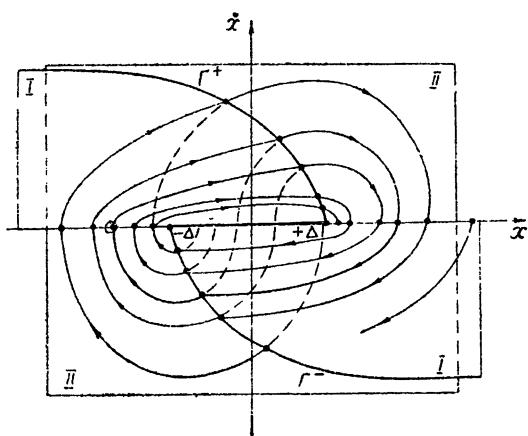


Рис. 4д.

### 3. ДИНАМИКА СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ

1. *Линейный закон изменения сигнала:*  $U_{\text{вх}} = \sigma t$ . Из уравнения (1.1) получим, что для движения с выбранным люфтом эти уравнения имеют вид ( $v = x = y$ ):

$$T_2 \ddot{v} + (T_1 + kT_3)\dot{v} + kv = k\sigma, \quad (3.1)$$

а для движений в режиме люфта ( $\dot{y} = 0$ ):

$$T_2 \ddot{v} + T_1 \dot{v} = k\sigma. \quad (3.2)$$

Можно показать, что в случае, когда корни характеристического уравнения  $T_2 p^2 + (T_1 + kT_3)p + k = 0$  действительны, при подаче рассматриваемого входного сигнала устанавливается режим выбранного люфта, т. е. система становится линейной. Учитывая это, получим:

$$\lim \delta(t) = \delta_{\text{уст}} = T_1 \sigma / k, \quad (3.3)$$

где

$$\delta(t) = U_{\text{вх}} - y(t).$$

Таким образом,  $\delta_{\text{уст}}$  не зависит от  $T_3$ . Чтобы  $\delta_{\text{уст}}$  было достаточно мало, нужно, чтобы  $T_1$  также было достаточно малым. (Регулирование значения  $T_1$  производится отрицательной обратной связью по скорости, охватывающей линейный элемент (рис. 1).) Поскольку  $T_3$  не влияет на  $\delta_{\text{уст}}$ , его можно выбрать так, чтобы система удовлетворяла условиям устойчивости режима  $y = C$  при  $U_{\text{вх}} = C$ .

2. *Кусочно-линейный закон изменения сигнала.* Рассмотрим работу системы, когда

$$U_{\text{вх}} = \begin{cases} -\sigma t & \text{при } t < t^* \\ \sigma t & \text{при } t > t^* \end{cases}$$

Предположим, что к моменту времени  $t^*$  (который без ограничения общности можно положить равным нулю) все переходные процессы закончены, т. е.  $\delta_0 = -T_1 \sigma / k$ ,  $\dot{\delta}_0 = -\sigma$ .

Дальнейшее движение системы происходит в трех интервалах: 1) интервал от 0 до  $t_1$ , когда продолжается еще движение с выбранным люфтом при  $\dot{y} < 0$ ; 2) интервал от  $t_1$  до  $t_2$ , когда идет движение в режиме люфта, и 3) интервал от  $t_2$  до  $\infty$ , когда идет движение с выбранным люфтом при  $\dot{y} < 0$  (рис. 5).

Для первого отрезка  $[0, t_1]$  справедливо уравнение:

$$T_2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} = k[\sigma t - y + T_3(\sigma - \dot{y})] \quad (\dot{y} = \dot{x}) \quad (3.4)$$

при начальных условиях

$$y(0) = T_1\sigma/k, \quad \dot{y}(0) = \dot{x}(0) = -\sigma.$$

Интегрируя, получим, что

$$y(t) = 2\sigma \frac{e^{-q_2 t} - e^{-q_1 t}}{q_2 - q_1} + \frac{T_1\sigma}{k} + \sigma t. \quad (3.5)$$

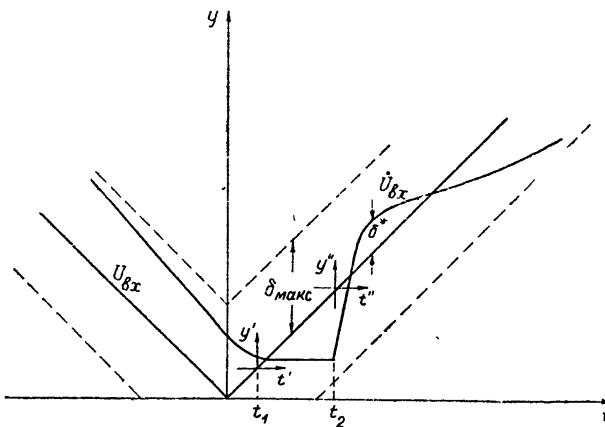


Рис. 5.

Предположим, что  $q_2 > q_1$ . Тогда момент  $t_1$  определяется из условия  $y(t_1) = 0$ , которое приводится к виду:

$$2(q_2 e^{-q_2 t_1} - q_1 e^{-q_1 t_1}) = q_2 - q_1. \quad (3.6)$$

Ошибка  $\delta$  в момент  $t_1$  вычисляется по формуле:

$$\delta(t_1) = \sigma t_1 - y(t_1) = -2\sigma \frac{e^{-q_2 t_1} - e^{-q_1 t_1}}{q_2 - q_1} - \frac{T_1\sigma}{k}. \quad (3.7)$$

Легко показать, что при условии  $k/T_1 < q_2$  (необходимом для устойчивости при всех начальных отклонениях режима  $y = C$ ;  $U_{bx} = C$ ) имеет место  $\delta(t_1) < 0^*$ .

Рассмотрим поведение системы на отрезке времени от  $t_1$  до  $t_2$ . Запишем уравнение движения, причем для удобства изменим начало

\* Действительно, так как  $k/T_1 < q_2$ ,

$$e^{-q_1 t} - 1/2 < q_2 T_1 2/k,$$

откуда, используя равенство (3.6), получим:

$$(e^{-q_1 t} - e^{-q_2 t})/(q_2 - q_1) < T_1/2k,$$

т. е.  $\delta(t_1) < 0$ .

отсчета  $t_1$ , положив  $t_1=0$ ,  $t_2-t_1=t'_1$  и проведя замену:  $y-U_{\text{вх}}(t'_1)=y'$  (в дальнейшем при промежуточных выкладках штрихи опускаются).

Тогда для движения в режиме выбора люфта имеем:

$$T_2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} = k [\sigma t - \delta(0) + T_3 \delta]; \quad (3.8)$$

$$\dot{y} = 0$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} y(0) &= x(0) + \Delta = \delta(0); \\ \dot{x}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Момент  $t_1$  находится из условия  $x(t_1)-x(0)=2\Delta$ . Интегрируя (3.8) при данных начальных условиях, получим:

$$\dot{x}(t_1) = \frac{k\sigma(T_3 - \beta - T_2/T_1)}{T_1} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{T_1}{T_2} t_1\right) \right] + \frac{k\sigma t_1}{T_1}, \quad (3.9)$$

где  $\beta = \delta_0/\sigma$ .

Величина  $t_1$  находится как наименьший положительный корень уравнения

$$\Psi \equiv \frac{k\sigma(T_3 - \beta - T_2/T_1)}{T_1} \left[ t_1 + \frac{T_2}{T} \exp\left(-\frac{T_1}{T_2} t_1\right) - \frac{T_2}{T_1} \right] + \frac{k\sigma}{2T_1} t_1^2 = 2\Delta. \quad (3.10)$$

Так как  $\dot{x}(t_1) \geq 0$ , то максимальная ошибка второго отрезка равна  $\delta(t_1) = \sigma t_1 + \delta_0$ , т. е. пропорциональна длине интервала времени. Производные  $\partial\Psi/\partial T_3$  и  $\partial\Psi/\partial t_1$  имеют, как легко показать непосредственным вычислением, разные знаки; поэтому при увеличении  $T_3$  корень  $t_1$  уравнения  $\Psi=0$  уменьшается, и при  $T_3 \rightarrow \infty$   $t_1 \rightarrow 0$ . Следовательно,  $T_3$  можно выбрать так, чтобы

$$\sigma t'_1 = \sigma(t_2 - t_1) \ll \delta_{\max}. \quad (3.11)$$

При удовлетворении условия (3.11) будет справедливо неравенство  $\delta(t') \leq \delta(t'_1) < \delta_{\max}$  для  $t' \in [0, t'_1]$  — в силу того, что  $\delta(0) < 0$ .

Перейдем теперь к третьему отрезку времени. Сделаем новую замену  $t'' = t' - t_1$ ,  $y'' = y' - U_{\text{вх}}(t'_1)$ . Тогда уравнение движения запишется в виде:

$$\begin{aligned} T_2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} &= k [\sigma t - y + T_3(\sigma - \dot{y})]; \\ \dot{y} &= \dot{x}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{y}(t'_1); \quad y(0) = -\delta(t'_1),$$

где  $\dot{y}(t'_1)$  и  $\delta(t'_1)$  — значения  $\dot{y}$  и  $\delta$  в конце второго отрезка ( $t'$  — время в системе координат второго отрезка). Из уравнения (3.12) получим:

$$\begin{aligned} T_2 \ddot{\delta} + (T_1 + kT_3)\dot{\delta} + k\delta &= T_1\sigma; \\ \dot{\delta}(0) &= \delta(t'_1); \\ \ddot{\delta}(0) &= \sigma - \dot{y}(t'_1). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.13) и (3.11) видно, что  $\dot{\delta} \rightarrow T_1\sigma/k - 0$ . Если значение  $\sigma_{\max} \ll \sigma$ , то из (3.11) следует, что  $t'_1$  будет мало; тогда, согласно (3.9),  $y(t'_1)$  — величина, большая по сравнению с  $\sigma$ , так что  $\sigma(0) < 0$ .

Требование, чтобы ошибка слежения не превосходила  $\delta_{\max}$ , эквивалентно требованию, чтобы при условии (3.11) траектория уравнения (3.13), соответствующая заданным начальным значениям, не выходила за пределы полосы  $[-\delta_{\max}; \delta_{\max}]$  (рис. 5). Если  $\delta^*$  — координата  $\delta$  этой траектории при  $\dot{\delta}=0$ , то это условие эквивалентно следующему:

$$\delta^* \geq -k\sigma/T_1 = -\delta_{\max}. \quad (3.14)$$

Покажем, что при достаточно большом  $T_3$  величина  $\delta^*$  будет удовлетворять этому неравенству. Очевидно, что  $\delta^* < \delta^{**}$  (рис. 5), где  $\delta^{**}$  равна

$$\delta^{**} = \frac{T_2 \dot{\delta}_0^2}{(T_1 + kT_3)\dot{\delta}_0 + k\delta_0 - T_1\sigma} + \delta_0.$$

Докажем, что при  $T_3 \rightarrow 0$   $\delta^{**} \rightarrow \delta_0 - 0$ ; тем самым мы докажем и наше утверждение, поскольку выполняется (3.11). Для больших  $T_3$  и, следовательно, малых  $t_1$  уравнения (3.9) и (3.10) можно с точностью до величин более высокого порядка малости, чем  $t_1$ , записать в виде:

$$t_1 = \sqrt{\frac{4T_2\Delta}{k\sigma(T_3 - \beta)}}; \quad v(t_1) = 2\sqrt{\frac{k\sigma(T_3 - \beta)\Delta}{T_2}}.$$

Тогда

$$\delta(0) = \sigma \left[ \sqrt{\frac{4T_2\Delta}{k\sigma(T_3 - \beta)}} + \beta \right]; \quad \dot{\delta}(0) = \sigma - \sqrt{\frac{4\Delta k\sigma(T_3 - \beta)}{T_2}}.$$

Учитывая это, получим:

$$\lim_{T_3 \rightarrow \infty} \frac{T_2 \dot{\delta}_0^2}{(T_1 + kT_3)\dot{\delta}_0 + k\delta_0 - T_1\sigma} = -0.$$

Итак, выбирая  $T_1$  достаточно малым, а параметр  $T_3$  — достаточно большим, можно добиться, чтобы ошибка  $\delta$  при  $t > t^*$  была по модулю меньше, чем заданное значение  $\delta_{\max}$  (рис. 6).

3. Квадратичный закон изменения сигнала. Пусть  $U_{\text{вх}} = \gamma/2t^2$ ,  $\gamma > 0$ . Тогда уравнение движения с выбранным люфтом:

$$T_2 \ddot{w} + (T_1 + kT_3) \dot{w} + kw = k\gamma, \quad (3.15)$$

а уравнение движения в режиме люфта запишется в виде:

$$T_2 \ddot{w} + T_1 \dot{w} = k\gamma \quad (w = \dot{x}). \quad (3.16)$$

Можно показать, что если корни уравнения  $T_2 p^2 + (T_1 + kT_3)p + k = 0$  действительны, то установившимся движением будет движение с выбранным люфтом и, следовательно,

$$w_{\text{уст}} = \gamma, \quad v_{\text{уст}} = \gamma t.$$

Выражение для установившейся ошибки имеет вид:

$$\delta_{\text{уст}} = T_1 \gamma t/k + T_2 \gamma/k - (T_1 + kT_3) T_1 \gamma/k^2. \quad (3.17)$$

В конкретных задачах величина скорости входного сигнала ограничивается некоторым значением  $v_{\max}$ . В данном случае это означает, что длительность сигнала  $U_{\text{вх}} = \frac{\gamma}{2} t^2$  не может превышать  $t_{\max} = v_{\max}/\gamma$ .

Из этого следует, что для  $\delta_{\text{уст}}$  справедливо неравенство:

$$\delta_{\text{уст}} \leq T_1 v_{\max}/k + T_2 \gamma/k - (T_1 + kT_3) T_1 \gamma/k^2. \quad (3.18)$$

В общем случае, подбирая параметры  $T_1$  так, чтобы правая часть неравенства (3.18) была меньше  $\delta_{\max}$  (что возможно, если известна  $v_{\max}$ ), мы получим, что  $\dot{\delta}_{\text{уст}}$  будет меньше  $\delta_{\max}$ . Обычно величина ускорения  $\gamma$  значительно меньше, чем  $v_{\max}$ , так что в неравенстве (3.18) основную роль играет первое слагаемое. Поэтому  $\dot{\delta}_{\text{уст}}$  можно сделать достаточно малым, уменьшая параметр  $T_1$ .

Пусть  $U_{\text{вх}} = \gamma t^2/2 + \beta t$ ;  $\text{sgn } \gamma = \text{sgn } \beta$ ;  $\gamma > 0$  и  $\beta > 0$ . Сигнал  $U_{\text{вх}}$  — нарастающий, т. е. скорость его непрерывно увеличивается. Поэтому в системе после выбора люфта устанавливается движение  $y > 0$ . Анализ этого случая приводит к той же оценке величины установившейся ошибки, что и в предыдущем случае.

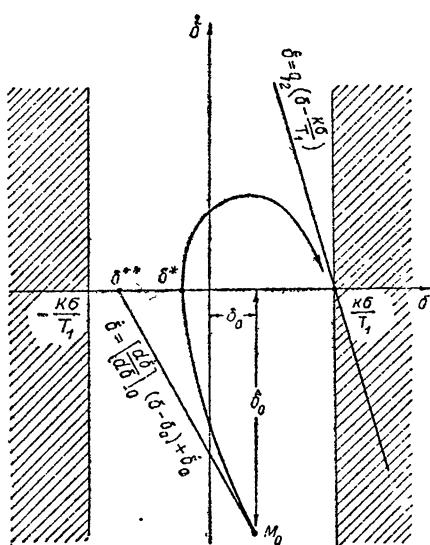


Рис. 6.

достаточно малым, а параметр  $T_3$  — достаточно большим, можно добиться, чтобы  $|\dot{\delta}(t)| < \delta_{\max}$ . В данном случае, где скорость входного сигнала меняется плавно, это тем более справедливо (во всяком случае при  $\gamma \ll v_{\max}$ ), причем значение  $T_3$ , при котором начинает удовлетворяться неравенство, будет значительно меньше аналогичной величины для  $U_{\text{вх}} = \text{sgn}(t - t^*)$ .

Так же, как и в предыдущих случаях, можно составить уравнение движения на отрезке от  $t_0=0$  до  $t_1$ . Интегрируя его, получаем:

$$y = At^2 + Bt + C, \quad (3.19)$$

где

$$A = \gamma/2; \quad B = -\beta - T_1\gamma/k; \quad C = (T_1\beta + T_1T_3\gamma - T_2\gamma)/k + T_1^2\gamma/k^2.$$

Момент  $t_1$  определяется из условия  $\dot{y}(t_1) = 0$ ; с учетом (3.19)  $t_1 = \beta/\gamma + T_1/k$ . Отсюда же получим

$$\dot{\delta}(t_1) = (T_2 - T_1T_3\gamma)/k. \quad (3.20)$$

Сделаем замену переменных

$$t' = t - t_1, \quad y' = y - U_{\text{вх}}(t_1)$$

(там, где возможно, штрихи опускаются). Тогда уравнение движения на втором отрезке примет вид:

$$T_2 \ddot{x} + T_1 \dot{x} = k \left[ \frac{\gamma}{2} t'^2 + \frac{\gamma T_1}{k} t' + \dot{\delta}(0) + T_3 \left( \gamma t' + \frac{\gamma T_1}{k} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Поскольку  $y(t=0) = U_{\text{вх}}(t=0) = -\dot{\delta}(0) = -\dot{\delta}(0)$ , где  $\dot{\delta}(0)$  равно правой части (3.20), начальные условия имеют вид:

Если  $U_{\text{вх}} = \frac{\gamma t^2}{2} - \beta t + \alpha$  и для

определенности  $\gamma > 0$ ;  $\beta > 0$ ;  $\alpha > 0$ , то (как и в разделе 2) движение в этом случае происходит в трех интервалах: с  $y < 0$  от  $t_0=0$  до  $t=t_1$ , с  $y = 0$  от  $t_1$  до  $t_2$  и с  $\dot{y} > 0$  от  $t_2$  до  $t_{\max}$ . Здесь  $t_{\max}$  — максимальная длительность сигнала  $U_{\text{вх}}$ , которая определяется условием  $|\dot{U}_{\text{вх}}| \leq v_{\max}$ .

В разделе 2, где рассматривался входной сигнал со скачкообразным изменением скорости, было установлено, что выбирая параметр  $T_1$

$$\begin{aligned}x(0) &= y(0) - \Delta = -\delta(0) - \Delta; \\ \dot{x}(0) &= 0.\end{aligned}$$

Из уравнения (3.21) получим:

$$\begin{aligned}v(t) = \dot{x}(t) &= \left\{ \frac{k\delta_0}{T_1} + T_3\gamma - \frac{\gamma(T_1 + kT_3)}{T_1^2} T_2 + \frac{kT_2^2}{T_1^3} \gamma \right\} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{T_1}{T_2} t\right) \right] + \\ &+ \frac{k\gamma}{2T_1} t^2 + \left[ \frac{\gamma(T_1 + kT_3)}{T_1} - \frac{k\gamma T_2}{T_1^2} \right] t.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Интегрируя  $\dot{x}(t)$  при заданном  $x(0)$ , найдем закон изменения  $x(t)$ . Значение  $t'_1 = t_2$  определяется из условия

$$x(t'_1) - x_0 = 2\Delta$$

как наименьший положительный корень из этого уравнения.

Уравнение для  $t_2$  — момента окончания движения в режиме люфта — имеет вид (учитывая (3.20)):

$$\begin{aligned}\frac{k\gamma}{6T_1} t_2^3 + \frac{1}{2} \left[ \frac{\gamma(T_1 + kT_3)}{T_1} - \frac{k\gamma T_2}{T_1^2} \right] t_2^2 + \left[ \frac{T_2}{T_1} \gamma - \right. \\ \left. - \frac{\gamma(T_1 + kT_3)T_2}{T_1^2} + \frac{kT_2^2}{T_1^3} \gamma \right] \left\{ t_2 + \frac{T_2}{T_1} \left[ \exp\left(-\frac{T_1}{T_2} t_2\right) - 1 \right] \right\} = 2\Delta.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Так же, как это делалось и в отношении уравнения (3.10), можно показать, что с увеличением  $T_3$   $t_2$  уменьшается; из (3.22) следует, что  $v(t_2)$  при этом увеличивается.

Далее легко получить выражение  $\delta(t)$  для второго отрезка:

$$\delta(t) = \frac{\gamma}{2} t^2 + \frac{\gamma T_1}{k} t + \delta_0.$$

Для того, чтобы  $\delta(t)$ , где  $t \in [t_1, t_2]$ , было по модулю меньше  $\delta_{\max}$ , необходимо и достаточно соблюдение неравенства

$$\delta(t'_1) = \frac{\gamma}{2} t_1^2 + \frac{\gamma T_1}{k} t_1 + \delta(t'_0) \leq \delta_{\max}. \quad (3.24)$$

Здесь  $t'_1$  — наименьший положительный корень уравнения (3.23), а  $\delta(t'_0) = \delta(t_1)$  определяется соотношением (3.20).

Рассмотрим теперь третий отрезок, где происходит движение с выбранным люфтом при  $y' > 0$ . После замены  $t'' = t' - t_1$ ,  $y'' = y' - U_{\text{вх}}(t'_1)$  уравнения движения на третьем участке приводятся к виду:

$$T_2 \ddot{\delta} + (T_1 + kT_3) \dot{\delta} + k\delta = T_1 \gamma t + T_2 \gamma + T_1 v \quad (3.25)$$

с начальными условиями

$$\delta(0) = \delta_1; \quad \dot{\delta}(0) = \gamma t'_1 - v(t'_1)$$

( $v(t'_1)$  находится из (3.22) при  $t'_1$ , являющемся наименьшим положительным корнем (3.23)).

Получим выражение для  $\delta(t'')$ :

$$\delta(t'') = -\frac{q_2 B + A - (\dot{\delta}_0 + q_2 \delta_0)}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t''} + \frac{q_1 B + A - (\dot{\delta}_0 + q_1 \delta_0)}{q_2 - q_1} \times \\ \times e^{-q_1 t''} + At + B, \quad (3.26)$$

где

$$A = T_1 \gamma / k, \quad B = T_2 \gamma / k + T_1 v / k - (T_1 + k T_3) \gamma / k^2.$$

Так как  $|\dot{U}_{\text{вх}}| < v_{\text{макс}}$ ,  $t''$  должно удовлетворять неравенству:

$$t'' = t - t_2 < \frac{v_{\text{макс}} - \gamma t'_1}{\gamma} = t^*. \quad (3.27)$$

Когда  $t'_1$  удовлетворяет условию (3.24), задача будет решена, если  $\delta(t'') < \delta_{\text{макс}}$  при  $t'' < t^*$ . Аналогичным образом, как и для кусочно-линейного входного сигнала, показывается, что при достаточно большом  $T_3$  это неравенство будет выполнено.

*Пример.* Пусть

$$K(p) = \frac{10}{0,1 p^2 + T_1 p}; \quad \delta_{\text{макс}} = 0,02; \quad 2\Delta = 0,08; \quad v_{\text{макс}} = 0,5; \quad \gamma = 0,01.$$

Нужно определить  $T_3$  и  $T_1$ . Возьмем  $T_1 = 0,1$ ; тогда из (3.18) следует, что при  $T_3 < 1$   $\delta_{\text{уст}} < \delta_{\text{макс}}$ . Подставляя  $T_1$  в формулу (3.20), получим:

$$\delta(t'_1) \approx 0. \quad \text{Из (3.24) } \frac{\gamma}{2} t'^2_1 + \frac{\gamma T_1}{k} t'_1 \leq 0,02, \quad \text{так что } t'_1 \leq 2.$$

Последовательность действий для нахождения  $T_3$  может быть следующей. Выбирая различные  $t'_i$ , подставляем их в (3.23). Тогда получим относительно  $T_3$  уравнение первой степени, решив которое, находим  $T_3(t'_i)$ . Нужно учесть, однако, что  $T_3$  должно удовлетворять условию  $(T_1 + k T_3)^2 > 4kT_2$ , или  $T_3 > 2$ . (Например, для  $t=1$   $T_3=0,75$ .)

Далее из (3.24) и (3.22) находятся  $\delta(t'_1)$  и  $v(t'_1)$ . Для данных значений  $T_3$  и  $t$   $\delta(t'_1) = 0,005$ ,  $v(t'_1) \approx 0,18$ , откуда получаем, что  $\delta(t''=0) = 0,005$ ,  $\delta(t''=0) = 0,17$ . Решая характеристическое уравнение, находим:  $q_2 = 73$ ,  $q_1 = 1,5$ . Из уравнения (3.26) получим, что  $\delta(t) < \delta_{\text{макс}} = 0,02$  при  $t'' \in [0, t^* = 50]$  и, следовательно,  $|\delta(t)| < 0,02$  при всех  $t < t^*$ .

В заключение автор приносит глубокую благодарность Ю. И. Неймарку за постановку задачи, ценные советы и замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

- Р. Ольденбург и Г. Сарториус, Динамика автоматического регулирования, Госэнергоиздат, М., 1949.
- Л. С. Гольдфарб, Автоматика и телемеханика, 8, 349 (1947).
- С. Н. Thomas, Trans. ASME, 76, 13c5 (1954).
- К. Н. Satyendra, Trans. AIEE, 75, 243 (1956).
- R. E. Kalman, Trans. ASME, 79, 553 (1957).
- H. T. Magcsy, M. Yachtger, J. Lauderger, Trans. AIEE, 68, 778 (1949).
- К. Н. Шэн, Труды I международного конгресса ИФАК, 1, изд. АН СССР, М., 1961, стр. 413.
- А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Х. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1947.
- Е. И. Попов, И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, М., 1960.
- М. В. Мирров, Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности, Физматгиз, М., 1959.

11. А. Г. Иосифьян и Б. М. Каган, Основы следящего привода, Госэнергоиздат, М.—Л., 1954.

Научно-исследовательский физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
8 декабря 1961 г.

## DYNAMICS OF THE SIMPLEST MODEL OF SERVOSYSTEM WITH A BACKLASH

*V. A. Brusin*

The simplest model of the servosystem with a backlash is considered. The possibility is stated of system parameter choice making the system stable when the control error is bounded by a prescribed value, the input signal being of piece-linear or quadratic types.

---

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА  
С СИНУСОИДАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

К. Г. Валеев

Исследуется устойчивость систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с синусоидальными коэффициентами. Особое внимание уделяется изучению резонансных случаев, отысканию характеристических показателей решений в состоянии системы, близком к резонансному, и вырождению областей неустойчивости в пространстве параметров. Указываются способы построения решений как в нерезонансных, так и в резонансных случаях.

В настоящей статье рассматривается вопрос об устойчивости решений важного с практической точки зрения линейного уравнения второго порядка, когда в коэффициенты уравнения входят лишь синусы и косинусы одной гармоники. В работе приведены удобные для вычислений трансцендентные уравнения для определения характеристических показателей и границ областей неустойчивости в пространстве параметров; дан простой критерий устойчивости решений дифференциального уравнения (условие устойчивости выражается непосредственно через коэффициенты уравнения) и рассмотрено вырождение областей неустойчивости на плоскости двух параметров в линию.

Основные результаты статьи могут быть получены из работы [1] (лемма 10.1). Однако для того, чтобы облегчить пользование этими результатами, здесь дается непосредственное их доказательство, не использующее сложных выводов [1]. В заключение указаны обобщения приведенных выводов для исследования устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с синусоидальными коэффициентами. Для таких систем также обсуждаются вопросы о нахождении характеристических показателей при состоянии системы, близком к резонансному, о нахождении границ областей неустойчивости и о вырождении этих областей.

1. Рассматривается дифференциальное уравнение вида:

$$\begin{aligned} & [1 + 2\mu a \cos(\Theta t) + 2\mu b \sin(\Theta t)] \frac{d^2x}{dt^2} + \\ & + \mu [c + 2d \cos(\Theta t) + 2e \sin(\Theta t)] \frac{dx}{dt} + \\ & + [\lambda + 2\mu f \cos(\Theta t) + 2\mu g \sin(\Theta t)] x = 0 \quad (\mu \geq 0, \Theta > 0, c \geq 0). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $x(t)$ —неизвестная функция,  $a, b, \dots, g$ —вещественные постоянные,  $\lambda, \mu \geq 0$ —вещественные параметры.

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде ряда

$$x(t) = e^{pt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{\omega_k t} \quad (\omega = \Theta i). \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в уравнение (1.1) и приравнивая коэффициенты при экспонентах вида  $\exp\{(p+\omega k)t\}$ , получаем систему соотношений между коэффициентами  $x_k$ :

$$f_1(p+(k+1)\omega)x_{k+1} + f_0(p+k\omega)x_k + f_{-1}(p+(k-1)\omega)x_{k-1} = 0 \quad (1.3)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где

$$f_0(p) = p^2 + \mu cp + \lambda; \quad (1.4)$$

$$f_1(p) = \mu [(a + ib)p^2 + (d + ie)p + (f + ig)];$$

$$f_{-1}(p) = \mu [(a - ib)p^2 + (d - ie)p + (f - ig)].$$

Поделим соотношение (1.3) на  $x_k$ ; тогда для соотношений  $x_k/x_{k-1}$  и  $x_k/x_{k+1}$  получим рекуррентные формулы:

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = - \frac{f_{-1}(p+(k-1)\omega)}{f_0(p+k\omega) + f_1(p+(k+1)\omega)x_{k+1}/x_k}; \quad (1.5)$$

$$\frac{x_k}{x_{k+1}} = - \frac{f_1(p+(k+1)\omega)}{f_0(p+k\omega) + f_{-1}(p+(k-1)\omega)x_{k-1}/x_k}. \quad (1.6)$$

С помощью самих формул (1.5), (1.6) можно из них исключить отношения  $x_{k+1}/x_k$ ,  $x_{k-1}/x_k$  и т. д. При этом соотношение (1.5) удобно применять при  $k > 0$ , а (1.6)—при  $k < 0$ .

Рассмотрим две непрерывные функциональные дроби  $w(p)$ ,  $v(p)$ , где

$$w(p) = - \frac{f_{-1}(p)}{f_0(p+\omega) - \frac{f_{-1}(p+\omega)f_1(p+2\omega)}{f_0(p+2\omega) - \frac{f_{-1}(p+2\omega)f_1(p+3\omega)}{f_0(p+3\omega) - \dots}}; \quad (1.7)$$

$$v(p) = - \frac{f_1(p)}{f_0(p-\omega) - \frac{f_1(p-\omega)f_{-1}(p-2\omega)}{f_0(p-2\omega) - \frac{f_1(p-2\omega)f_{-1}(p-3\omega)}{f_0(p-3\omega) - \dots}}. \quad (1.8)$$

Непрерывные дроби  $w(p)$ ,  $v(p)$  сходятся на всей плоскости комплексной переменной  $p$ , если выполнено соотношение (см. [3], стр. 1114):

$$4\mu(a^2 + b^2) < 1. \quad (1.9)$$

Далее считаем, что  $\mu$  удовлетворяет условию (1.9). Если характеристический показатель  $p_1$  известен, то из (1.5)–(1.8) следует, что

$$x_{k+1} = w(p_1 + k\omega)x_k \quad (k \geq 0); \quad (1.10)$$

$$x_{k-1} = v(p_1 + k\omega)x_k \quad (k \leq 0).$$

Согласно (1.10),

$$x_k = w(p_1)w(p_1 + \omega) \dots w(p_1 + (k-1)\omega)x_0 \quad (k > 0); \quad (1.11)$$

$$x_k = v(p_1)v(p_1 - \omega) \dots v(p_1 - (k+1)\omega)x_0 \quad (k < 0).$$

Величину  $x_0$  можно считать произвольной постоянной. Выражая при  $k=0$   $x_1$  и  $x_{-1}$  в соотношении (1.3) через  $x_0$  из (1.10) и сокращая на  $x_0 \neq 0$ , получим уравнение

$$D(p) \equiv f_1(p + \omega) w(p) + f_0(p) + f_{-1}(p - \omega) v(p) = 0, \quad (1.12)$$

которое может служить для определения характеристических показателей  $p_1, p_2$ .

Предыдущий результат хорошо известен [3-7]. Уравнение (1.12) использовал Айнс [4] при составлении таблиц функций Матье; оно удобно для отыскания численных значений характеристических показателей.

*Пример 1.1.* Найдем характеристические показатели решений уравнения Матье:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [0,64 + 0,1 \cos(2t)] x = 0. \quad (1.13)$$

Здесь  $\Theta=2$ ,  $\omega=2i$ . Тогда уравнение (1.12) примет вид:

$$\begin{aligned} p^2 + 0,64 - \frac{0,0025}{(p+2i)^2 + 0,64 - \frac{0,0025}{(p+4i)^2 + 0,64 - \dots}} - \\ - \frac{0,0025}{(p-2i)^2 + 0,64 - \frac{0,0025}{(p-4i)^2 + 0,64 - \dots}} = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Положив в качестве первого приближения  $p_1=i0,8$ , получаем из (1.14) последовательными итерациями более точные значения  $p_1=i0,8021$ ;  $i0,80219$ ; и  $p_2=-i0,80219$ .

Уравнение (1.12) можно использовать для отыскания границ областей неустойчивости; оно особенно удобно для определения границы нулевой области неустойчивости, где один из характеристических показателей равен нулю. Таким образом, уравнение  $D(0)=0$  (1.12) является уравнением границы нулевой области неустойчивости.

Пусть величины  $|\lambda|$ ,  $\mu>0$  в (1.1) достаточно малы; тогда  $f_0(k\omega)\neq 0$  при  $k\neq 0$ . Из (1.7)-(1.9) следует, что  $w(0)$ ,  $v(0)$ —регулярные функции  $\mu$  и  $\lambda$  в достаточно малой окрестности точки  $\mu=0$ ,  $\lambda=0$ . Для  $\mu=0$ ,  $D(0)=\lambda$  решения уравнения (1.1) устойчивы при  $\lambda>0$  и неустойчивы при  $\lambda<0$ . Так как величина  $D(0)$  непрерывно зависит от  $\mu$  и  $\lambda$  и может обратиться в нуль лишь на границе области неустойчивости, то получаем следующую теорему.

*Теорема 1.1.* Пусть в уравнении (1.1) величины  $|\lambda|$ ,  $\mu>0$  достаточно малы. Решения уравнения (1.1) устойчивы, если  $D(0)>0$  (1.12), и неустойчивы, если  $D(0)\leqslant 0$ \*.

*Пример 1.2.* Найдем границу нулевой области неустойчивости решений дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu[c + 2d \cos(\Theta t)] \frac{dx}{dt} + \lambda x = 0 \quad (1.15)$$

$$(c > 0).$$

Из (1.4) имеем:

$$\begin{aligned} f_0(p) = p^2 + \mu cp + \lambda; \quad f_1(p) = f_{-1}(p) = \mu dp; \\ v(0) \equiv w(0) \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

\* Неустойчивость решений уравнения (1.1) на границе области неустойчивости при  $D(0)=0$  следует из теоремы Хаупта [4] или из работ Ляпунова (см. [8]).

Так как  $D(0) \equiv \lambda$ , то решения уравнения (1.15) устойчивы при  $\lambda > 0$  и неустойчивы при  $\lambda \leq 0$ , если величины  $|\lambda|, \mu > 0$  достаточно малы.

2. При попытке распространить теорему 1.1 для определения границ других областей неустойчивости встречаются затруднения, так как при

$$0 < \mu \leq \epsilon, \quad |\lambda - 0,25\gamma^2| \leq \epsilon, \quad |p - 0,5\gamma i| \leq \epsilon \quad (2.1)$$

$$(\gamma = 1, 2, \dots, \epsilon > 0)$$

и любом  $\epsilon > 0$  функция  $v(p)$  перестает непрерывно зависеть от  $p, \mu, \lambda$ . В непрерывной дроби  $v(p)$  одновременно частный числитель  $f_1(p - (\gamma - 1)\omega) f_{-1}(p - \gamma\omega)$  и частный знаменатель  $f_0(p - \gamma\omega)$  могут обращаться в нуль.

Пусть  $\gamma = 1$ . Уравнение (1.12) после умножения на  $f_0(p - \omega) + f_{-1}(p - 2\omega)v(p - \omega)$  преобразуется к виду:

$$[f_0(p) + f_1(p + \omega)w(p)][f_0(p - \omega) + f_{-1}(p - 2\omega)v(p - \omega)] = \\ = f_1(p)f_{-1}(p - \omega), \quad (2.2)$$

где уже отсутствует указанный недостаток. При больших значениях  $\gamma$  такое преобразование становится затруднительным.

Применим другой, комбинированный способ исключения коэффициентов  $x_k$  из соотношений (1.3). Часть из них исключим с помощью непрерывных дробей (1.7), (1.8), а остальные с помощью определителя.

Введем обозначения

$$h_1(p) \equiv f_0(p) + f_1(p + \omega)w(p); \quad (2.3)$$

$$h_2(p) \equiv f_0(p) + f_{-1}(p - \omega)v(p).$$

Два уравнения в системе (1.3) при  $k = 0$  и  $k = -\gamma$  с использованием обозначений (2.3) принимают вид:

$$h_1(p)x_0 + f_{-1}(p - \omega)x_{-1} = 0; \quad (2.4)$$

$$f_1(p - (\gamma - 1)\omega)x_{1-\gamma} + h_2(p - \gamma\omega)x_{-\gamma} = 0.$$

Для отыскания величин  $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-\gamma}$  получаем конечную однородную систему линейных алгебраических уравнений, определитель которой

$$\Delta(p) \equiv \begin{vmatrix} h_1(p) & f_{-1}(p - \omega) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ f_1(p) & f_0(p - \omega) & f_{-1}(p - 2\omega) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_1(p - (\gamma - 2)\omega) & f_0(p - (\gamma - 1)\omega) & f_{-1}(p - \gamma\omega) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_1(p - (\gamma - 1)\omega) & h_2(p - \gamma\omega) \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

должен равняться нулю.

Для вычислений можно использовать непосредственно уравнение (2.5), которое мы преобразуем к более удобному для вычислений виду. Введем обозначение:

$$\Delta_k(p) \equiv \begin{vmatrix} f_0(p) & f_{-1}(p - \omega) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ f_1(p) & f_0(p - \omega) & f_{-1}(p - 2\omega) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_1(p - (k - 2)\omega) & f_0(p - (k - 1)\omega) & f_{-1}(p - k\omega) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f_1(p - (k - 1)\omega) & f_0(p - k\omega) \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Для удобства полагаем по определению

$$\Delta_0(p) \equiv f_0(p), \quad \Delta_{-1}(p) \equiv 1, \quad \Delta_k(p) \equiv 0 \quad (k = -2, -3, \dots). \quad (2.7)$$

Раскрывая детерминант  $\Delta_k(p)$  (2.6) по элементам верхней или нижней строки, получим следующие соотношения:

$$\Delta_k(p) = f_0(p) \Delta_{k-1}(p-\omega) - f_{-1}(p-\omega) f_1(p) \Delta_{k-2}(p-2\omega); \quad (2.8)$$

$$\Delta_k(p) = f_0(p-k\omega) \Delta_{k-1}(p) - f_{-1}(p-k\omega) f_1(p-(k-1)\omega) \Delta_{k-2}(p) \quad (2.9)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

Введем обозначения:

$$v_k(p) \equiv f_{-1}(p-\omega) f_2(p) \frac{\Delta_{k-1}(p-2\omega)}{\Delta_k(p-\omega)} \quad (k=0, 1, 2, \dots); \quad v_{-1}(p) \equiv 0; \quad (2.10)$$

$$w_k(p) \equiv f_1(p+\omega) f_{-1}(p) \frac{\Delta_{k-1}(p+(k-1)\omega)}{\Delta_k(p+(k-1)\omega)} \quad (k=0, 1, 2, \dots); \quad w_{-1}(p) \equiv 0. \quad (2.11)$$

Из соотношений (2.8), (2.9) для функций  $v_k(p)$ ,  $w_k(p)$  следуют рекуррентные формулы:

$$v_k(p) = \frac{f_{-1}(p-\omega) f_1(p)}{f_0(p-\omega) - v_{k-1}(p-\omega)} \quad (k=0, 1, 2, \dots); \quad v_{-1}(p) \equiv 0; \quad (2.12)$$

$$w_k(p) = \frac{f_1(p+\omega) f_{-1}(p)}{f_0(p+\omega) - w_{k-1}(p+\omega)} \quad (k=0, 1, 2, \dots); \quad w_{-1}(p) \equiv 0. \quad (2.13)$$

Формулы (2.12), (2.13) могут служить для вычисления функций  $v_k(p)$ ,  $w_k(p)$ , которые являются подходящими дробями (2) для сходящихся при выполнении условия (1.9) непрерывных дробей  $v_\infty(p)$ ,  $w_\infty(p)$ .

Из (1.7), (1.8), (2.3), (2.12), (2.13) следует, что

$$h_1(p) = f_0(p) - w_\infty(p), \quad h_2(p) = f_0(p) - v_\infty(p). \quad (2.14)$$

Уравнение (2.5) после деления его на  $\Delta_{\gamma-2}(p-\omega) \neq 0$  при условии (2.1), раскрытия определителя по первой и последней строке и использования обозначений (2.6), (2.10), (2.11) принимает вид:

$$[f_0(p) - w_\infty(p) - v_{\gamma-2}(p)] [f_0(p - \gamma\omega) - v_\infty(p - \gamma\omega) - w_{\gamma-2}(p - \gamma\omega)] = (\Delta_{\gamma-2}(p-\omega))^{-2} \prod_{k=0}^{\gamma-1} f_1(p-k\omega) \prod_{l=1}^{\gamma} f_{-1}(p-l\omega) \quad (2.15)$$

$$(\gamma = 1, 2, 3, \dots).$$

Все функции, входящие в (2.15), непрерывны в области (2.1) при достаточно малом  $\epsilon > 0$ . Положив в уравнении (2.15)  $p = 0,5\gamma i + z$ , получим при  $\gamma = 1, 2, 3, \dots$

$$[\gamma iz + \lambda - 0,25\gamma^2 + O(\mu)] [-\gamma iz + \lambda - 0,25\gamma^2 + O(\mu)] = O(\mu^2). \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) имеет два корня  $z_1(\mu, \lambda)$ ,  $z_2(\mu, \lambda)$ , разлагающиеся в ряды по возрастающим степеням  $\mu$ ,  $(\lambda - 0,25\gamma^2)$  без свободного члена. Тогда имеем теорему.

**Теорема 2.1.** Если величина  $\epsilon > 0$  достаточно мала, то в резонанс-

ном случае, когда  $\lambda$  и  $\mu$  удовлетворяют условиям (2.1), характеристические показатели  $p_1, p_2$  решений уравнения (1.1), близкие к значению  $0.5\gamma i$ , являются корнями уравнения (2.15), в которое входят функции, голоморфные в области (2.1).

Заметим, что при отыскании величин  $x_k$  (1.2) в резонансном случае (2.1) удобно  $x_k$  ( $k = 0, -1, \dots, -\gamma$ ) находить из системы уравнений (1.3) ( $k = -1, \dots, -\gamma + 1$ ) и (2.4) с определителем  $\Delta(p)$ , взяв в качестве неизвестных алгебраические дополнения элементов первой строки определителя  $\Delta(p)$  (2.5). Величины  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots; k = -\gamma - 1, -\gamma - 2, \dots$ ) удобнее отыскивать из формул (1.10).

3. На границе области неустойчивости в пространстве параметров  $\lambda, \mu$ , которые удовлетворяют условиям (2.1), существует периодическое или полупериодическое решение, т. е.  $p=0.5\gamma\omega$ . Поэтому уравнением границы  $\gamma$ -ой области неустойчивости может служить уравнение  $\Delta(0.5\gamma\omega)=0$  (2.5).

Введем обозначения, использующие (1.4), (2.6), (2.12), (2.13):

$$a_\gamma(\lambda, \mu) \equiv f_0(0.5\gamma\omega) - w_\infty(0.5\gamma\omega) - v_{\gamma-2}(0.5\gamma\omega); \quad (3.1)$$

$$b_\gamma(\lambda, \mu) \equiv (\Delta_{\gamma-2}((0.5\gamma-1)\omega))^{-1} \prod_{k=0}^{\gamma-1} f_2((0.5\gamma-k)\omega) \quad (3.2)$$

$$(\gamma = 1, 2, \dots).$$

После подстановки в (2.15) значения  $p=0.5\gamma\omega$  получим в обеих частях уравнения произведение двух комплексных сопряженных множителей  $a_\gamma \bar{a}_\gamma = b_\gamma \bar{b}_\gamma$ . Окончательно уравнение границы  $\gamma$ -ой области неустойчивости в обозначениях (3.1), (3.2) примет вид:

$$|a_\gamma(\lambda, \mu)|^2 = |b_\gamma(\lambda, \mu)|^2. \quad (3.3)$$

*Пример 3.1.* Найдем уравнение границы 2-ой области неустойчивости решений дифференциального уравнения

$$(1 + 2\mu \cos t) \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x = 0. \quad (3.4)$$

Здесь  $\gamma=2$ ,  $\lambda \approx 1$ ,  $\mu \approx 0$ ,  $\Theta=1$ ,  $\omega=i$ ,  $f_0(p) = p^2 + \lambda$ ,  $f_1(p) = f_{-1}(p) = \mu p^2$ . Непосредственно убеждаемся, что  $b_2(\lambda, \mu) \equiv 0$  (3.2). Уравнение (3.3) принимает вид:

$$\lambda - 1 + \frac{1 \cdot 2\mu^2}{\lambda - 2^2 + \frac{2 \cdot 3\mu^2}{\lambda - 3^2 + \frac{3 \cdot 4\mu^2}{\lambda - 4^2 + \dots}}} = 0. \quad (3.5)$$

Из (3.5) получаем уравнение границы вырожденной области неустойчивости, разрешенное относительно  $\lambda$ :

$$\lambda = 1 + \frac{2}{3}\mu^2 - \frac{1}{48}\mu^4 + O(\mu^6). \quad (3.6)$$

*Пример 3.2.* Напишем уравнение (3.3) ( $\gamma = 1, 2, 3, \dots$ ) границ областей неустойчивости решений уравнения Маттье [4]:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [\lambda + 2\mu \cos(2t)] x = 0. \quad (3.7)$$

Выражения для  $a_\gamma$ ,  $b_\gamma$  (3.1), (3.2) оказываются вещественными. Извлекая квадратный корень из (3.3), получаем из (2.12), (2.13), (3.1), (3.2) уравнение границы  $\gamma$ -области неустойчивости:

$$\begin{aligned} \lambda - \gamma^2 - \frac{\mu^2}{\lambda - (\gamma+2)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda - (\gamma+4)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda - (\gamma+6)^2 - \dots}}} \\ - \frac{\mu^2}{\lambda - (\gamma-2)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda - (\gamma-4)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda - (2-\gamma)^2}}} = \pm \mu^{\gamma} [\Delta_{\gamma-2}((\gamma-2)i)]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Определитель  $\Delta_{\gamma-2}((\gamma-2)i)$  имеет вид ( $\Delta_{-1} \equiv 1$  (2.7)):

$$\Delta_{\gamma-2}((\gamma-2)i) = \begin{vmatrix} \lambda - (\gamma-2)^2 & \mu & \dots & 0 & 0 \\ \mu & \lambda - (\gamma-4)^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - (4-\gamma)^2 & \mu \\ 0 & 0 & \dots & \mu & \lambda - (2-\gamma)^2 \end{vmatrix}. \quad (3.9)$$

*Пример 3.3.* Найдем уравнение границы второй области неустойчивости уравнения Маттье с трением при  $\lambda \approx 4$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu c \frac{dx}{dt} + [\lambda + 2\mu \cos(2t)] x = 0 \quad (c \geq 0). \quad (3.10)$$

Имеем:  $\Theta = 2$ ,  $\omega = 2i$ ,  $f_0(p) = p^2 + \mu cp + \lambda$ ,  $f_2(p) \equiv f_1(p) = \mu$ ,  $\gamma = 2$ . Уравнение (3.3) тогда принимает вид:

$$\left| \lambda - 4 + 2\mu ci - \frac{\mu^2}{\lambda - 16 + 4\mu ci - \frac{\mu^2}{\lambda - 36 + 6\mu ci - \dots}} - \frac{\mu^2}{\lambda} \right|^2 = \frac{\mu^4}{\lambda^2}. \quad (3.11)$$

Из (3.11) получаем в первом приближении:

$$\lambda = 4 + \frac{\mu^2}{6} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\mu^4 - 64\mu^2 c^2}. \quad (3.12)$$

Если равенство (3.3) не выполняется, то параметры  $\lambda$ ,  $\mu$  находятся внутри области устойчивости или внутри области неустойчивости. Если  $|a_\gamma| > |b_\gamma|$ , из (2.16) следует ( $z = 0$ ), что можно, не нарушая неравенства, непрерывно изменять параметры  $\lambda$ ,  $\mu$  так, чтобы  $\mu$  обратилось в нуль. Это соответствует области устойчивости. Если  $|a_\gamma| < |b_\gamma|$ , то, увеличивая или уменьшая  $\lambda$ , мы можем добиться выполнения неравенства  $|a_\gamma| > |b_\gamma|$ . Так как при  $\lambda$ , удовлетворяющих условию  $|a_\gamma| = |b_\gamma|$ , существует периодическое или полупериодическое решение (1.1), то из теоремы Хаупта [4] следует, что при  $|a_\gamma| < |b_\gamma|$  решения уравнения (1.1) неустойчивы.

*Теорема 3.1.* Пусть параметры  $\lambda$ ,  $\mu$  уравнения (1.1) удовлетворяют условию (2.1), где  $\epsilon > 0$  достаточно мало. Тогда

- 1) если  $c > 0$ ,  $|a_\gamma| > |b_\gamma|$ , то решения уравнения (1.1) асимптотически устойчивы;

2) если  $c < 0$  или  $|a_1| < |b_1|$ , то решения уравнения (1.1) неустойчивы;

3) если  $c > 0$ ,  $|a_1| = |b_1|$ , то решения уравнения (1.1) устойчивы; существует периодическое или полупериодическое решение периода  $2\pi\theta^{-1}$ ;

4) если  $c = 0$ ,  $|a_1| > |b_1|$ , то решения уравнения (1.1) устойчивы и являются почти периодическими функциями;

5) если  $c = 0$ ,  $|a_1| = |b_1| \neq 0$ , то решения уравнения (1.1) неустойчивы и имеют вид  $\Psi_1(t), t\Psi_1(t) + \Psi_2(t)$ , где  $\Psi_1(t), \Psi_2(t)$  — периодические или полупериодические функции периода  $2\pi\theta^{-1}$ ;

6) если  $c = 0$ ,  $|a_1| = |b_1| = 0$ , то решения уравнения (1.1) устойчивы; существуют два периодических или полупериодических решения периода  $2\pi\theta^{-1}$ .

**Пример 3.4.** Рассмотрим вопрос об устойчивости решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [\lambda + 2\mu \cos(2t)] x = 0, \quad (3.13)$$

при  $\lambda = 1$  и  $\mu = 0.1$ . В этом случае имеем:  $\theta = 2$ ,  $\omega = 2i$ ,  $\gamma = 1$ ,  $f_0(p) = -p^2 + \lambda$ ,  $f_1(p) \equiv f_{-1}(p) = \mu$ . Величины  $a_1(\lambda, \mu)$ ,  $b_1(\lambda, \mu)$  (3.1), (3.2) принимают вид:

$$a_1(\lambda, \mu) = \lambda - 1 - \frac{\mu^2}{\lambda - 9 - \frac{\mu^2}{\lambda - 25 - \dots}}; \quad b_1(\lambda, \mu) = \mu; \quad (3.14)$$

так что  $a_1(1, 0.1) = 0.00125$ ;  $b_1(1, 0.1) = 0.1$ . Из пункта 2 теоремы 3.1 следует, что решения уравнения (3.13) неустойчивы.

4. Рассмотрим вопрос о вырождении области неустойчивости уравнения (1.1) на плоскости параметров  $\lambda, \mu$  в линию, на которой существуют периодические или полупериодические решения уравнения (1.1). Из теоремы 3.1 ясно, что в этом случае должны выполняться условия пункта 6. Простое рассмотрение показывает, что функция  $a_1(\lambda, \mu)$  (3.1) должна быть вещественной для того, чтобы выбором  $\lambda$  величину  $|a_1(\lambda, \mu)|^2$  можно было обратить в нуль. Из (3.2) следует, что величина  $b_1(\lambda, \mu)$  может обратиться в нуль, если

$$\prod_{k=0}^{\gamma-1} f_1((0.5\gamma - k)\omega) = 0. \quad (4.1)$$

Так как  $f_1((0.5\gamma - k)\omega)$  не зависит от  $\lambda$  и содержит  $\mu \neq 0$  множителем, то, согласно (4.1), уравнение

$$\mu^{-1}f_1(p) \equiv (a + ib)p^2 + (d + ie)p + (f + ig) = 0 \quad (4.2)$$

должно иметь один из корней вида  $p = (0.5\gamma - k)\theta i$  ( $k = 0, 1, \dots, \gamma - 1$ ).

**Теорема 4.1.** Для того, чтобы область неустойчивости решений уравнения (1.1) при  $\lambda, \mu$ , удовлетворяющих условиям (2.1), вырождалась в линию, необходимо и достаточно, чтобы  $\operatorname{Im} a_1(\lambda, \mu) \equiv 0$  и чтобы уравнение (4.2) имело один из корней вида

$$p = (0.5\gamma - k)\theta i \quad (k = 0, 1, \dots, \gamma - 1).$$

Рассмотрим совокупность чисел  $p_{1k} = (0.5\gamma - k)\theta i$ :

\* Последние два пункта теоремы 3.1 следуют из теоремы Хаупта [4] или работ Ляпунова [8].

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 1; \quad p_{10} = 0,5\theta i; \\
 \gamma &= 2; \quad p_{20} = \theta i, \quad p_{21} = 0; \\
 \gamma &= 3; \quad p_{10} = 1,5\theta i, \quad p_{31} = 0,5\theta i, \quad p_{32} = -0,5\theta i; \\
 \gamma &= 4; \quad p_{40} = 2\theta i, \quad p_{41} = \theta i, \quad p_{42} = 0, \quad p_{43} = -\theta i; \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Очевидно, что если уравнение (4.2) имеет одним из корней число  $p_{\gamma k}$ , то оно будет иметь корнем число  $p_{\gamma+2, k+1} = p_{\gamma k}$ . Поэтому при вырождении в линию  $\gamma$ -области неустойчивости вырождаются одновременно  $\gamma+2, \gamma+4, \gamma+6, \dots$ -области неустойчивости.

Если вырождение началось с области с номером  $\gamma$ , то уравнение (4.2) должно иметь корнем числа  $0,5\theta i$  или  $(1-0,5\gamma)\theta i$ .

Рассмотрим уравнение относительно  $y$ :

$$4(f+ig) + 2\theta(di-e)y - \theta^2(a+ib)y^2 = 0. \tag{4.4}$$

Из теоремы 4.1 следует, что для вырождения областей неустойчивости уравнения (1.1) в линию необходимо, чтобы уравнение (4.4) имело целый корень  $y_0$ . При  $y_0 \geq 1$   $\gamma = y_0$ , а при  $y_0 \leq 1$   $\gamma = 2 - y_0$ , т. е.

$$\gamma = 1 + |y_0 - 1|.$$

В результате получаем другую формулировку теоремы 4.1: для того, чтобы области неустойчивости решений уравнения (1.1) вырождались в линию, необходимо и достаточно, чтобы  $\operatorname{Im} a_1(\lambda, \mu) \equiv 0$  (3.1), а уравнение (4.4) имело целый корень  $y_0$ . При этом области неустойчивости вырождаются через одну, начиная с номера  $\gamma = 1 + |y_0 - 1|$ .

Заметим, что если условие  $\operatorname{Im} a_1(\lambda, \mu) \equiv 0$  не выполняется, то  $|a_1(\lambda, \mu)| > 0$  при  $\operatorname{Im} a_1(\lambda, \mu) \neq 0$ . Из пункта 4 теоремы 3.1 следует, что в этом случае решения уравнения (1.1) устойчивы.

Если в уравнении (1.1)  $f = g = 0$ , то уравнение (4.4) имеет целый корень  $y_0 = 0$ ; поэтому решения уравнения (1.1) всегда устойчивы при  $\lambda \approx k^{2\theta^2}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $\mu \approx 0$  ( $\mu \geq 0, c \geq 0$ ). Если  $\operatorname{Im} a_{2k}(\lambda, \mu) \equiv 0$ , то все четные области неустойчивости, за исключением нулевой, вырождаются в линии. Это имеет место, например, для уравнения (1.15) или уравнения

$$(1 + 2\mu \cos t) \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x = 0. \tag{4.5}$$

Последнее было рассмотрено Н. Е. Кошиным, отметившим факт вырождения четных областей неустойчивости в линии.

*Пример 4.1.* Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$(1 + 2\mu \cos t) \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \sin t \frac{dx}{dt} + \lambda x = 0. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.4) тогда принимает вид ( $e = 0,5, a = 1$ ):

$$-y - y^2 = 0; \tag{4.7}$$

его корни:  $y_1 = 0, y_2 = -1$ . Отсюда следует, что все области неустойчивости решений уравнения (4.6), за исключением нулевой и первой областей, вырождаются в линии.

*Пример 4.2.* Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$(1 + 2\mu \cos t) \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \sin t \frac{dx}{dt} + (\lambda + \mu \cos t)x = 0. \tag{4.8}$$

Уравнение (4.4), составленное для (4.8), имеет корни 1 и 2. Поэтому все области неустойчивости, за исключением нулевой и второй, вырождаются в линии.

*Пример 4.3.* Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$(1 + 2\mu \cos t) \frac{d^2x}{dt^2} - \mu \sin t \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.4) для (4.9) имеет корни 0 и 1. Поэтому все области неустойчивости, за исключением нулевой, вырождаются в линии. Можно непосредственно убедиться, что для уравнений (4.5), (4.6), (4.8), (4.9)  $\operatorname{Im} a_1(\lambda, \mu) \equiv 0$ .

5. Почти все вышеизложенное легко обобщается для системы  $m$  дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка с синусоидальными коэффициентами [3]. Здесь дается краткое обобщение результатов предыдущих пунктов для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с синусоидальными коэффициентами вида:

$$\begin{aligned} &[E + 2\mu A \cos(\theta t) + 2\mu B \sin(\theta t)] \frac{d^2X}{dt^2} + \mu [C + 2D \cos(\theta t) + \\ &+ 2F \sin(\theta t)] \frac{dX}{dt} + [\Lambda + 2\mu G \cos(\theta t) + 2\mu H \sin(\theta t)] X = 0 \\ &(\mu \geq 0; \theta > 0). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $X$  — искомый  $m$ -мерный вектор,  $E, A, \dots, H$  — постоянные вещественные матрицы размера  $m \times m$ ,  $E$  — единичная матрица,  $\theta, \mu$  — вещественные параметры.

Ищем решение системы уравнений (5.1) в виде ряда

$$X = e^{pt} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{\omega k t} \quad (\omega = \theta i). \quad (5.2)$$

Подставляя (5.2) в (5.1), получим рекуррентные соотношения между постоянными векторами  $X_k$ :

$$L_1(p + (k+1)\omega) X_{k+1} + L_0(p + k\omega) X_k + L_{-1}(p + (k-1)\omega) X_{k-1} = 0 \quad (5.3).$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где обозначено

$$\begin{aligned} L_0(p) &= Ep^2 + \mu Cp + \Lambda; \\ L_1(p) &= \mu[(A + iB)p^2 + (D + iF)p + (G + iH)]; \\ L_{-1}(p) &= \mu[(A - iB)p^2 + (D - iF)p + (G - iH)]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Введем в рассмотрение непрерывные матричные дроби  $W(p), V(p)$ , определяемые рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} W(p) &= -(L_0(p + \omega) + L_1(p + 2\omega) w(p + \omega))^{-1} L_{-1}(p); \\ V(p) &= -(L_0(p - \omega) + L_{-1}(p - 2\omega) v(p - \omega))^{-1} L_1(p). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из работы [3] следует, что матричные непрерывные дроби (5.5) сходятся при всех конечных значениях, если будет выполнено условие

$$2\mu(|A| + |B|) < 1. \quad (5.6)$$

Здесь символ  $|A|$  обозначает норму матрицы  $A = \|a_{sj}\|_1^m$ :

$$|A| = \max_s \sum_{j=1}^m |a_{sj}|. \quad (5.7)$$

Непосредственной подстановкой в (5.3) можно убедиться, что соотношения (5.3) при  $k \neq 0$  будут тождественно удовлетворяться, если

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= W(p + k\omega)X_k \quad (k \geq 0); \\ X_{k-1} &= V(p + k\omega)X_k \quad (k \leq 0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Подставляя  $X_1$  и  $X_{-1}$ , выраженные через  $X_0$ , в соотношение (5.3) при  $k = 0$ , получим однородную систему уравнений для отыскания компонент вектора  $X_0$ :

$$D(p, \theta, \mu)X_0 = 0. \quad (5.9)$$

Здесь

$$D(p, \theta, \mu) \equiv L_1(p + \omega)W(p) + L_0(p) + L_{-1}(p - \omega)V(p). \quad (5.10)$$

Поскольку мы считаем, что  $X_0 \neq 0$ , необходимо соблюдение равенства

$$\det D(p, \theta, \mu) = 0. \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) позволяет определить характеристические показатели. Из системы (5.9) находим вектор  $X_0$ , а векторы  $X_k$  ( $k \neq 0$ ) определяем из соотношений (5.8).

Рассмотрим уравнение (5.11) при  $\mu = 0$ . Тогда

$$\det L_0(p)|_{\mu=0} \equiv \det (Ep^2 + \Lambda) = 0. \quad (5.12)$$

Обозначим корни уравнения (5.12) через  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2m}$ . Если между числами  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2m}$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \rho_j - \rho_h &\neq k\theta_0 \quad (j, h = 1, 2, \dots, 2m; k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \\ (\theta_0 &> 0), \end{aligned} \quad (5.13)$$

то из (5.5) можно установить, что матрицы  $W(p), V(p)$  будут аналитичны по  $p, \mu, \theta$  в многосвязной области

$$\begin{aligned} |p - \rho_j - k\omega| &\leq \epsilon, \quad 0 \leq \mu \leq \epsilon, \quad |\theta - \theta_0| \leq \epsilon \\ (j &= 1, 2, \dots, m; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (5.14)$$

если величина  $\epsilon > 0$  достаточно мала. В этом случае нахождение решения  $X$  (5.2) не вызывает трудностей.

*Пример 5.1.* Найдем приближенные значения характеристических показателей решений системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} j + \omega_j^2 x_j + 2\mu \cos(\theta t) \sum_{s=1}^m q_{js} x_s &= 0 \\ (j &= 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (5.15)$$

в случае, когда для чисел  $\omega_j$  выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \pm \omega_j \pm \omega_h &\neq k\theta \\ (j, h &= 1, 2, \dots, m; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (5.16)$$

В соответствии с (5.1) введем в рассмотрение матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \omega_m^2 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Уравнение (5.11) принимает вид:

$$\det \langle Ep^2 + \Lambda - \mu G ([E(p + \theta i)^2 + \Lambda + O(\mu^2)]^{-1} + [E(p - \theta i)^2 + \Lambda + O(\mu^2)]^{-1}) G \rangle = 0. \quad (5.18)$$

Пусть  $p \approx \omega i$ . При этом из (5.18) следует, что в матрице  $D(p, \theta, \mu)$  (5.10) все элементы, стоящие вне главной диагонали, порядка  $O(\mu^2)$ . При раскрытии определителя (5.18) они дадут члены  $O(\mu^4)$ . Поэтому из (5.18) получаем, что следует приравнять нулю элемент в (5.18), стоящий в  $j$ -ом столбце:

$$p^2 + \omega_j^2 + \mu^2 \sum_{k=1}^m \frac{2(\omega_k^2 - \omega_j^2 - \theta^2) g_{jk} g_{kj}}{(\omega_k^2 + \omega_j^2 - \theta^2)^2 - 4\omega_k^2 \omega_j^2} + O(\mu^4) = 0. \quad (5.19)$$

Если соотношения (5.16) выполнены, то при достаточно малых значениях  $\mu$

$$p_j^\pm = \pm i \left[ \omega_j + \frac{\mu^2}{\omega_j} \sum_{k=1}^m \frac{(\omega_k^2 - \omega_j^2 - \theta^2) g_{jk} g_{kj}}{(\omega_k^2 + \omega_j^2 - \theta^2)^2 - 4\omega_k^2 \omega_j^2} + O(\mu^4) \right]. \quad (5.20)$$

6. В практических расчетах большое внимание уделяется случаю, когда условие (5.13) не выполняется и дроби  $w(p), v(p)$  (5.5) перестают непрерывно зависеть от  $\mu, \theta, p$  в области (5.14). Применим тогда другой способ исключения векторов  $X_k$  из соотношений (5.3). Предварительно разобьем совокупность чисел  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2m}$  на непересекающиеся группы равных между собой чисел по  $\text{mod}(\theta_0 i)$ . Рассмотрим одну из этих групп, расположив их в порядке невозрастания и перенумеровав их заново цифрами  $1, 2, \dots, s$ ; пусть это будут числа  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$  ( $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_s$ ).

Рассмотрим целые неположительные числа

$$\eta_j = (\rho_j - \rho_1) \theta_0^{-1}; \quad 0 \equiv \eta_1 \geq \eta_2 \geq \eta_3 \geq \dots \geq \eta_s \equiv -\gamma \quad (6.1)$$

и введем обозначения

$$\begin{aligned} H_1(p) &= L_0(p) + L_1(p + \omega) W(p); \\ H_2(p) &= L_0(p) + L_{-1}(p - \omega) V(p). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из (5.8) следует, что соотношения (5.3) при  $k = 0, k = -\gamma$  с учетом обозначений (6.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} H_1(p) X_0 + L_{-1}(p - \omega) X_{-\gamma} &= 0; \\ L_1(p + (1 - \gamma)\omega) X_{1-\gamma} + H_2(p - \gamma\omega) X_{-\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Исключая векторы  $X_0, X_{-1}, \dots, X_{-\gamma}$  из соотношений (5.3) и (6.3) при  $k = -1, -2, \dots, -\gamma + 1$ , получаем необходимое условие для существования ненулевых векторов  $X_0, X_{-1}, \dots, X_{-\gamma}$ :

$$\Delta(p) \equiv \begin{vmatrix} H_1(p) & L_{-1}(p - \omega) & \dots & 0 & 0 \\ L_1(p) & L_0(p - \omega) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & L_0(p + (1 - \gamma)\omega) & L_{-1}(p - \gamma\omega) \\ 0 & 0 & \dots & L_1(p + (1 - \gamma)\omega) & H_2(p - \gamma\omega) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.4)$$

При  $\mu = 0, \theta = \theta_0$  определитель  $\Delta(p)$  имеет в точке  $p = p_1$  нуль порядка  $s$ . Так как все выражения, входящие в  $\Delta(p)$ , непрерывно зависят от  $p, \mu, \theta$  при  $p \approx p_1, \mu \approx 0, \theta \approx \theta_0$ , то уравнение (6.4) имеет ровно  $s$  корней  $p_1, \dots, p_s$ , расположенных вблизи точки  $p = p_1$  (если величины  $\mu \geq 0, |\theta - \theta_0|$  достаточно малы). Если же все числа  $p_1, \dots, p_s$  различны, векторы  $X_0, X_{-1}, \dots, X_{-\gamma}$  отыскиваем из соотношений (5.3) и (6.3), подставляя вместо  $p$  одно из значений  $p_1, \dots, p_s$ ; векторы  $X_1, X_2, \dots, X_{-\gamma-1}, X_{-\gamma-2}, \dots$  находим из соотношений (5.8).

Обозначим блочную матрицу определителя  $\Delta(p)$  (6.4) через  $K(p)$ . Если некоторые из чисел  $p_1, \dots, p_s$  совпадают (пусть это будут  $p_1 = p_2 = \dots = p_{s_1}$ ) и соответствующие нулю элементарные делители (9) матрицы  $K(p_1)$  простые, то удается найти  $s_1$  линейно независимых решений вида (5.2). Если матрица  $K(p_1)$  имеет элементарные делители, соответствующие нулю степени выше первой, то решение системы уравнений (5.1) следует искать в виде ряда

$$X(t) = e^{p_1 t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\theta_0 t} (X_{1k} + tX_{2k} + \dots + t^{s_2} X_{s_2 k}), \quad (6.5)$$

где  $s_2$  — некоторое число, не превосходящее  $s_1$ . Наиболее просто разобраться во всех возникающих при этом случаях можно на основе статьи [3].

Для исследования устойчивости необходимо различать случаи, когда решения, соответствующие характеристическому показателю  $p_1$ , имеют вид (5.2) или (6.5) при  $s_2 \neq 0$ . Приведем без доказательства следующую теорему.

**Теорема 6.1.** Пусть числа  $\eta_1, \dots, \eta_s = -\gamma$  (6.1) — целые ( $\gamma \geq 0$ ) и для чисел  $\rho_1, \dots, \rho_{2m}$  выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \rho_j - \rho_h &\neq k\theta_0 \quad (j = 1, \dots, s; h = s+1, \dots, 2m; \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \theta_0 > 0). \end{aligned}$$

Если величины  $|\mu|, |\theta - \theta_0|$  достаточно малы, то уравнение (6.4) имеет ровно  $s$  корней  $p_1, \dots, p_s$ , достаточно близких к  $\rho_1$ . Пусть  $p_1 = p_2 = \dots = p_{s_1}$ . Если наивысший порядок полюсов элементов матрицы  $D^{-1}(p)$  в точке  $p = p_1$  равен  $s_2 + 1$ , то решение уравнения (5.1), соответствующее характеристическому показателю  $p_1$ , имеет вид (6.5).

Доказательство этой теоремы может быть получено на основе работ [1, 3]. Заметим, что для того, чтобы решение  $X$  (5.1) не содержало вековых членов (в (6.5)  $s_2 = 0$ ), необходимо и достаточно, чтобы элементы матрицы  $D^{-1}(p)$  имели в точках  $p = p_1, \dots, p_s$  полюса порядка не выше первого. Последнее утверждение можно легко показать с помощью теории элементарных делителей [9].

Аналогично рассматриваются другие группы, составленные из чисел  $\rho_1, \dots, \rho_{2m}$ .

**Пример 6.1.** Найдем в первом приближении характеристические показатели решений системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \mu c_{11} \frac{dx_1}{dt} + \omega_1^2 x_1 + 2\mu [g_{12} \cos(\theta t) + h_{12} \sin(\theta t)] x_2 &= 0; \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \mu c_{22} \frac{dx_2}{dt} + \omega_2^2 x_2 + 2\mu [g_{21} \cos(\theta t) + h_{21} \sin(\theta t)] x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Пусть параметры  $\mu, \theta$  в (6.6) близки к состоянию комбинационного резонанса  $\theta_0 = \omega_1 + \omega_2$ . Из (5.4) имеем:

$$L_0(p) = \begin{pmatrix} p^2 + \mu c_{11}p + \omega_1^2 & 0 \\ 0 & p^2 + \mu c_{22}p + \omega_2^2 \end{pmatrix}; L_1(p) \equiv L_{-1}(p) = \mu \begin{pmatrix} 0 & g_{12} + ih_{12} \\ g_{21} + ih_{21} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Числа  $\rho_1, \dots, \rho_4$  (5.12), (5.13) имеют вид:  $\rho_1 = \omega_1$ ,  $\rho_2 = -\omega_2$ ,  $\rho_3 = \omega_2$ ,  $\rho_4 = -\omega_1$ . Согласно (6.1),  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = (\rho_2 - \rho_1)\theta_0^{-1} = 1$ . Уравнение (6.4) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{44} - a_{14}a_{41})(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = 0, \quad (6.8)$$

где

$$a_{22} = a_{14} = \mu(g_{12} + ih_{12}); \quad a_{23} = a_{41} = \mu(g_{21} - ih_{21}); \quad (6.9)$$

$$a_{11} = p^2 + \mu c_{11}p + \omega_1^2 + O(\mu^2); \quad a_{44} = (p - \theta i)^2 + \mu c_{22}(p - \theta i) + \omega_2^2 + O(\mu^2).$$

Положим  $p = i\omega_1 + \mu z$ ,  $\theta = \theta_0 + \mu \lambda$  в первом множителе (6.8). Отбрасывая члены в (6.9) порядка выше первого и сокращая на  $\mu^2$ , получаем уравнение для  $z$ :

$$(2i\omega_1 z + c_{11}i\omega_1)(-2i\omega_2 z - c_{22}\omega_2 i - 2\omega_2 \lambda) = (g_{12} + ih_{12})(g_{21} - ih_{21}). \quad (6.10)$$

Разрешая его относительно  $z$ , получим:

$$p_{1,2} = i\omega_1 + \frac{2i\lambda - c_{11} - c_{22}}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4}((c_{11} - c_{22} + 2i\lambda)^2 + 4\omega_1^{-1}\omega_2^{-1}(g_{12} + ih_{12})(g_{21} - ih_{21})}. \quad (6.11)$$

7. Рассмотрим вопрос об устойчивости решений системы уравнений (5.1) в предположении, что система (5.1) приводится к каноническому виду  $C \equiv 0$  или не меняется при замене  $t$  на  $-t$ . В последнем случае  $B \equiv C \equiv D \equiv H \equiv 0$ . Эти требования сводятся к тому, чтобы определитель  $\Delta(p)$  (6.4) был вещественным на мнимой оси  $p$ .

Введем в элементы положительно определенной матрицы  $\Lambda$  непрерывным и дифференцируемым образом новый параметр  $\lambda$  (можно ввести несколько параметров). Найдем уравнение для границы главного резонанса. На границе области неустойчивости у системы (5.1) имеются характеристические показатели  $p_{1,2} = \pm 0,5\gamma\theta i$ . Поэтому из (6.4) следует, что уравнение

$$\Delta(0,5\gamma\theta i) = 0 \quad (7.1)$$

является уравнением границы области главного параметрического резонанса.

*Пример 7.1.* Найдем границу области неустойчивости главного резонанса для системы уравнений ( $\lambda \approx 1$ ;  $\mu \approx 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \lambda x_1 + 2\mu \cos(2t)x_2 &= 0; \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \nu x_2 + 2\mu \cos(2t)x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Из (5.4) имеем:  $\theta = 2i$ ,  $\gamma = 1$ ,  $p = i$ ,

$$L_0(p) = \begin{pmatrix} p^2 + \lambda & 0 \\ 0 & p^2 + \mu \end{pmatrix}, \quad L_1(p) \equiv L_{-1}(p) = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Уравнение (7.2) принимает при  $p = i$  вид (6.8), где, согласно (6.4), (6.2),

$$a_{11} = a_{33} = \lambda - 1 - \frac{\mu^2}{\nu - 9 - \frac{\mu^2}{\lambda - 25 - \frac{\mu^2}{\nu - 49 - \dots}}}; \quad (7.4)$$

$$a_{22} = a_{44} = \nu - 1 - \frac{\mu^2}{\lambda - 9 - \frac{\mu^2}{\nu - 25 - \frac{\mu^2}{\lambda - 49 - \dots}}};$$

$$a_{14} \equiv a_{23} \equiv a_{32} \equiv a_{41} = \mu.$$

Уравнение области неустойчивости (7.1), (6.8) при  $\lambda \approx 1$ ,  $\nu^2 \neq k^2$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) и достаточно малых значениях  $|\mu|$  дает для  $\lambda$  два одинаковых значения:

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{\mu^2}{\nu - 9} + \frac{\mu^2}{\nu - 1} - \frac{\mu^4}{24(\nu - 9)^2} - \frac{\mu^4}{8(\nu - 1)^2} + O(\mu^6). \quad (7.5)$$

В этом случае область неустойчивости вырождается. Однако, если  $\lambda \equiv \nu$ , то получаем две различные границы для  $\lambda$ :

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \mu - \frac{\mu^2}{8} \pm \frac{\mu^3}{64} + O(\mu^4). \quad (7.6)$$

Рассмотрим подробнее вопрос о вырождении областей неустойчивости в плоскости параметров  $\lambda$ ,  $\mu$  при закрепленном  $\theta = \theta_0$  для системы уравнений

$$[E + 2\mu A \cos(\theta t)] \frac{d^2X}{dt^2} + 2\mu F \sin(\theta t) \frac{dX}{dt} + [\Lambda(\lambda) + 2\mu G \cos(\theta t)] X = 0. \quad (7.7)$$

Пусть при  $\lambda = \lambda_0$  корни  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2m}$  уравнения (5.12) удовлетворяют условиям:  $\rho_1, \dots, \rho_{2m}$  — чисто мнимые числа,

$$\rho_1 = -\rho_2 = 0,5 \gamma \theta_0 i, \quad \rho_j - \rho_h \neq k \theta_0 i \quad (7.8)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; j = 1, 2, \dots, 2m; h = 3, 4, \dots, 2m).$$

Здесь  $\gamma$  — натуральное число, т. е. рассматривается простейший случай главного резонанса. Из (6.1) получаем:  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = -\gamma$ . Предположим, что при  $\lambda = \lambda_0$  одна из матриц

$$L_1((0,5\gamma - j)\theta_0) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, \gamma - 1; \mu \neq 0) \quad (7.9)$$

вырождается в нулевую матрицу. Из (5.4) следует, что одновременно вырождается одна из матриц  $L_{-1}(-(0,5\gamma - j)\theta_0 i)$ . Эти вырожденные матрицы в случае  $\gamma = 3$  могут занимать в квазиматрице определителя  $\Delta(0,5\gamma\theta_0 i)$  (6.4)

$$K(1,5\theta_0i) = \begin{pmatrix} H_1(1,5\theta_0i) & L_{-1}(0,5\theta_0i) & 0 & 0 \\ L_1(1,5\theta_0i) & L_0(0,5\theta_0i) & L_{-1}(-0,5\theta_0i) & 0 \\ 0 & L_1(0,5\theta_0i) & L_0(-0,5\theta_0i) & L_{-1}(-1,5\theta_0i) \\ 0 & 0 & L_1(-0,5\theta_0i) & H_2(-1,5\theta_0i) \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

одно из следующих положений:

- a)  $L_1(1,5\theta_0i) = L_{-1}(-1,5\theta_0i) = 0;$
  - б)  $L_1(0,5\theta_0i) = L_{-1}(-0,5\theta_0i) = 0;$
  - в)  $L_1(-0,5\theta_0i) = L_{-1}(0,5\theta_0i) = 0.$
- (7.11)

Все элементы матрицы  $K(p)$  — вещественные при чисто мнимом  $p$ .

Покажем, что решения системы уравнений (7.7) устойчивы при  $p = 0,5\gamma\theta_0i$ . Матрица  $K(0,5\gamma\theta_0i)$  определителя  $\Delta(0,5\gamma\theta_0i)$  (6.4) распадается на несколько блоков, из которых два расположены на главной диагонали и имеют нулевые определители. Поэтому всегда можно подобрать два линейно независимых периодических решения вида (5.2). При соответствующем выборе  $p$  в (5.2) одно из периодических решений содержит в сумме (5.2) слагаемые с  $k > 0$ , другое — с  $k < 0$ .

На примере (7.10), (7.11) при  $\gamma = 3$  имеем для случая а):

$$\begin{aligned} 1a) \quad X_{-1} &= X_{-2} = X_{-3} = \dots = 0, \quad H_1(1,5\theta_0i)X_0 = 0; \\ 2a) \quad X_{-2} &= X_{-1} = X_0 = X_1 = \dots = 0, \quad H_2(-1,5\theta_0i)X_{-3} = 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Для 1a) величины  $X_0 \neq 0, X_1, X_2, \dots$  находим из (5.8). Аналогично поступаем в других случаях.

Покажем, что область неустойчивости на плоскости параметров  $\lambda, \mu$ , примыкающая к точке  $\lambda = \lambda_0, \mu = 0$ , вырождается в линию, если  $\partial\rho_1/\partial\lambda \neq 0$ , где  $\rho_1 = \rho_1(\lambda, \mu)$ .

Раскрывая определитель (6.4) в точке  $p = 0,5\gamma\theta_0i$  по степеням  $z = p - 0,5\gamma\theta_0i$ , получим уравнение вида:

$$\Delta(p) = [(z - i\alpha(\lambda, \mu))(z + i\alpha(\lambda, \mu)) + \mu^2 z^2 \Psi_1(z, \lambda, \mu)] \Psi_2(z, \lambda, \mu) = 0. \quad (7.13)$$

Здесь  $\Psi_1(z, \lambda, \mu)$ ,  $\Psi_2(z, \lambda, \mu)$  — непрерывные функции в точке  $z = 0$ ,  $\lambda = \lambda_0, \mu = 0$ , вещественные при чисто мнимом  $z$ ;  $\alpha(\lambda, \mu)$  — вещественная непрерывная функция в точке  $\lambda = \lambda_0, \mu = 0$ :

$$\alpha(\lambda, 0) = \frac{\partial\rho_1(\lambda^*, 0)}{\partial\lambda} (\lambda - \lambda_0) \quad (\lambda^* \in (\lambda_0, \lambda)). \quad (7.14)$$

Если величина  $|\mu|$  достаточно мала, то уравнение (7.13) может иметь лишь два чисто мнимых различных корня или корни, одновременно равные нулю. В обоих случаях решения системы уравнений (7.7) устойчивы.

**Теорема 7.1.** Пусть при  $\lambda = \lambda_0, \theta = \theta_0$  корни  $\rho_1, \dots, \rho_{2m}$  уравнения (5.12), составленного для системы (7.7), удовлетворяют условиям (7.8). Если при  $\lambda = \lambda_0$  одна из матриц (7.9) вырождается в нулевую, то решения системы уравнений (7.7) устойчивы при достаточно малых величинах  $|\mu|, |\lambda - \lambda_0|$  и  $\theta = \theta_0$ .

Заметим, что в примере 7.1 приведен случай вырождения области главного резонанса для системы уравнений (7.2), не удовлетворяющей условиям теоремы 7.1 (так как  $L_1(p) \neq 0$  при  $\mu \neq 0$ ). Поэтому теорема 7.1 дает лишь достаточные условия вырождения областей неустойчивости.

*Пример 7.2.* Рассмотрим систему уравнений

$$[E + 2\mu A \cos(\theta t)] \frac{d^2 X}{dt^2} + \Lambda X = 0, \quad (7.15)$$

где  $A$ ,  $\Lambda$  — постоянные вещественные матрицы (собственные числа матрицы  $\Lambda$  суть  $\omega_1^2, \dots, \omega_m^2$ ;  $\omega_j > 0$ ). Замена  $\theta t = \tau$ ,  $\tau = t$  приводит к системе уравнений:

$$(E + 2\mu A \cos t) \frac{d^2 X}{dt^2} + \theta^{-2} \Lambda X = 0. \quad (7.16)$$

Из (5.4) имеем:  $L_1(p) = \mu A p^2$ ;  $L_1(0) = 0$ . В совокупность чисел  $(0,5\gamma - j)i = p_j$  ( $j = 0, 1, \dots, \gamma - 1$ ) обязательно войдет 0, если  $\gamma$  — четное число. Из теоремы 7.1 следует, что если  $\theta_0 = \gamma^{-1}\omega_j$  ( $\gamma = 1, 2, \dots$ ) и одновременно  $\pm \omega_s \pm \omega_h \neq k\theta_0$  ( $s, h \neq j$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); то область неустойчивости на плоскости  $\theta$ ,  $\mu$ , примыкающая к точке  $\theta_0 = \gamma^{-1}\omega_j$ ,  $\mu = 0$ , вырождается в линию.

*Пример 7.3.* Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(E + 2\mu A \cos t) \frac{d^2 X}{dt^2} - \mu A \sin t \frac{dX}{dt} + \lambda^2 \Lambda X = 0. \quad (7.17)$$

Пусть собственные числа матрицы  $\Lambda$  имеют вид  $\omega_i^2$  ( $i = 1, \dots, m$ ), причем  $\omega_1^2 > \omega_2^2 > \dots > \omega_m^2 > 0$  и числа  $\omega_j$  рационально несопримеры. Из (5.4) имеем для  $L_1(p)$ :

$$L_1(p) = \mu [A_p^2 - 0,5 i A p]. \quad (7.18)$$

Эта матрица вырождается в нулевую при  $p = 0$ ,  $p = 0,5i$ , т. е. при всех  $\gamma = 1, 2, \dots$  среди матриц (7.9) найдется одна нулевая. Корни уравнения (5.12) имеют вид:  $\rho_j = \pm \lambda \omega_j i$ ,  $\theta_0 = 1$ . Если при некотором  $\lambda_0$

$$\lambda_0 \omega_j = 0,5 \gamma \quad (\gamma = 1, 2, \dots),$$

то в силу несопримерности чисел  $\omega_j$  выполняются условия (7.8). Поэтому все области главного параметрического резонанса, примыкающие к точкам  $\mu = 0$ ,  $\lambda = 0,5 \omega_j^{-1} \gamma$  ( $j = 1, \dots, m$ ;  $\gamma = 1, 2, \dots$ ), вырождаются на плоскости  $\lambda$ ,  $\mu$  в линии. Для системы уравнений (7.17) может иметь место лишь комбинационный резонанс при

$$\lambda = (\omega_j \pm \omega_h)^{-1} \gamma \quad (1 \leq j < h \leq m; \quad \gamma = 1, 2, \dots). \quad (7.19)$$

В заключение автор выражает благодарность А. И. Лурье за внимание и помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К. Г. Валеев, Прикладная математика и механика, 24, 585 (1960).
2. А. Н. Хованский, Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, ГИТЛ, М., 1956.
3. К. Г. Валеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 1113 (1960).
4. М. Д. Стретт, О функциях Ляме, Матье и родственных им в физике и технике, ОНТИ, Харьков, 1955.
5. I. Patry, Über die linearen Differentialgleichungen mit sinusförmigen Koeffizienten, Prom. Nr. 2618, Juris—Verlag—Zürich, 1957.
6. G. Hergovay, Quart. Appl. Math., 4, 178 (1947).
7. N. W. McLachlan, J. Appl. Phys., 18, 723 (1947).
8. К. Р. Коваленко и М. Г. Крейн, ДАН СССР, 25, 495 (1950).
9. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, ГИТЛ, М., 1954, стр. 111—145.

# ON THE STABILITY OF SOLUTION OF THE SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SINUSOIDAL COEFFICIENTS

*K. G. Valejev*

Stability of systems described by the linear differential equations of the second order with sinusoidal coefficients is examined. Special attention is drawn to an investigation of resonance cases, to determining the characteristic power indexes of the solution for near resonance state as well as to degeneration of instability regions in the space of parameters. The methods of solution compositions are pointed out both in non-resonant and resonant cases.

---

## РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СХЕМ

Д. А. Поступов

Рассмотрена реализация логических функций в классе феррит-транзисторных схем, не использующих цепей запрета, и метода сложения токов. Для сохранения универсальности схем, построенных по такому принципу, вводится парафазный код. Приведены схемы реализации основных логических функций.

При проектировании различных устройств автоматики и вычислительной техники в настоящее время широко применяются схемы, выполненные на ферритах и транзисторах [1]. В литературе весьма подробно рассматривались вопросы, связанные с логикой построения схем на подобных элементах: однотактные схемы, выполненные на ферритах и транзисторах, подробно обсуждались в [2, 3], двухтактные феррит-транзисторные схемы с использованием цепей запрета исследовались в [4], схемы, использующие только ферриты и диоды, — в [5-7].

В настоящей работе рассматривается логика двухтактных феррит-транзисторных схем, построенных без использования цепей запрета по принципу токовых многополюсников. Практическая разработка таких схем была проведена в 1958—60 г.г. в Московском энергетическом институте под руководством А. Г. Шигина.

### 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФЕРРИТ-ТРАНЗИСТОРНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ И СХЕМАХ

Основным элементом феррит-транзисторных схем является феррит-транзисторная ячейка, принципиальная схема которой показана на рис. 1. Такая ячейка представляет систему с двумя устойчивыми со-

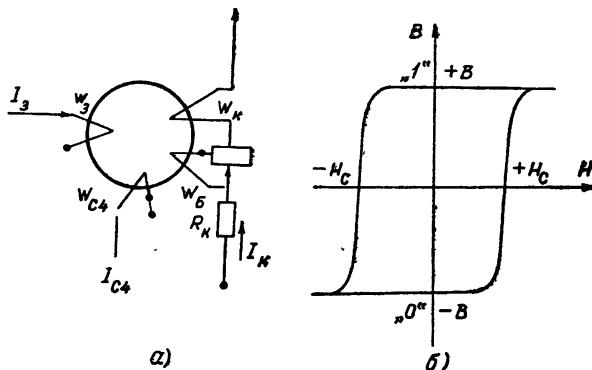


Рис. 1.

стояниями, которые соответствуют устойчивым состояниям ферритового сердечника с прямоугольной петлей гистерезиса.

Сопоставим намагничиванию сердечника при остаточной индукции

$+B$  значение 1, а состоянию сердечника при остаточной индукции —  $-B$  значение 0. Перемагничивание сердечника из одного состояния в другое происходит под влиянием тока в обмотке записи или в обмотке считывания. На одном сердечнике может быть размещено несколько обмоток считывания и записи.

Если в обмотке записи имеется импульс тока  $I_3$ , то сердечник перемагничивается в состояние 1. При этом транзистор остается запертым и в нагрузке тока нет. При наличии импульса тока в обмотке считывания происходит перемагничивание сердечника в состояние 0. Если при этом сердечник до считывания уже находился в состоянии 0, то в обмотке  $W_B$  ЭДС не наводится и импульс коллекторного тока не возникает. В противном случае ЭДС, наведенная при перемагничивании сердечника в обмотке  $W_B$ , открывает транзистор и в его коллекторной цепи появляется импульс тока, который является управляющим для других феррит-транзисторов и нагрузки.

Таким образом, работа феррит-транзисторной ячейки носит двухтактный характер.

Для повышения надежности логических схем на ячейках описанного типа необходимо отказаться от зависимости работы элементов схемы от точных значений амплитуды, формы и длительности токов, протекающих в считающих и записывающих обмотках. В связи с этим оказываются неприемлемыми схемы, использующие принцип суммирования перемагничивающих токов или работающие на принципе компенсации токов [1].

Для всех схем, рассматриваемых в этой статье появление импульса тока в любой из обмоток считывания или записи сердечника приводит к перемагничиванию сердечника в соответствующее положение.

В целях повышения надежности в рассматриваемых схемах не используются цепи запрета, так как наличие последних требует четкого временного совпадения импульсов и предъявляет довольно жесткие требования к длительности импульсов. Отсутствие цепей запрета приводит к необходимости каким-то образом восстановить логическую универсальность схем, построенных на феррит-транзисторных элементах. Для этих целей вводится парафазный код, дающий на входе и выходе схемы наряду с двоичной переменной  $x$  ее отрицание  $\bar{x}$ .

Основным логическим элементом описываемых схем является транзисторный клапан, работающий в режиме насыщенного ключа. Такой клапан является аналогом замыкающего контакта в релейно-контактных схемах. Объединение цепей, содержащих феррит-транзисторные ячейки и транзисторные клапаны, возможно как с помощью соединительных трансформаторов, выполняемых на оксиферах, так и непосредственно (при необходимости применения диоды).

Условимся о следующих обозначениях, которые будем применять при построении функциональных схем. На рис. 2 показано обозначение феррит-транзисторной ячейки, служащей для запоминания информации. Цепи  $A\bar{A}$  и  $B\bar{B}$  являются обмотками записи и считывания. Характер обмотки определяется направлением тока на функциональной схеме. Цепь  $C$  соответствует выходной обмотке феррит-транзисторного элемента. На рис. 3 показано условное обозначение транзисторного клапана с  $k$  управляющими цепями  $B_1\bar{B}_1, B_2\bar{B}_2, \dots, B_k\bar{B}_k$  и с одной неуправляющей цепью  $C\bar{C}$ . Такой клапан выполняется в виде импульсного трансформатора с  $k$  входами и одним или несколькими выходами, открывающими ключ в цепи  $A\bar{A}$ . Направление тока в цепи  $B_i\bar{B}_i$  от  $B_i$

к  $\bar{B}_l$  (в точку) является отпирающим, а направление от  $\bar{B}_l$  к  $B_l$  (из точки)—запирающим. Все остальные условные обозначения, которые будут использоваться при построении функциональных схем, являются общепринятыми. Отметим некоторые особенности построения схем рассматриваемого класса.

При синтезировании схем необходимо следить, чтобы выполнялось следующее правило: если при данном состоянии схемы через некоторый элемент нагрузки проходит какая-либо цепь тока, то через него проходят все цепи тока, образующиеся при данном состоянии схемы

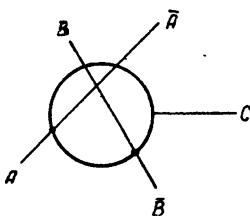


Рис. 2.

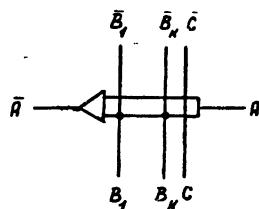


Рис. 3.

и имеющие общие точки с этой выделенной цепью. Выполнение этого правила гарантирует от шунтирования нагрузки и появления внутри схемы параллельной нагрузки.

Необходимо проверять синтезированную схему для выявления замкнутых порочных цепей (когда несколько клапанов управляют друг другом, т. е. выходные цепи одного клапана служат управляющими цепями для другого клапана, а выходная цепь последнего управляет первым клапаном).

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

При непарафазном коде функции дизъюнкции и конъюнкции реализуются весьма просто. Из таблицы задания этих функций следует,

что реализация дизъюнкций сводится либо к использованию клапана, управляемого двумя управляющими обмотками  $x_1$  и  $x_2$ , каждая из которых отпирает клапан (рис. 4а), либо к параллельному соединению двух клапанов, каждый из которых содержит одну управляющую обмотку (рис. 4б). И в том, и в другом случае появление импульса тока на выходе схемы связано с наличием или отсутствием импульсов тока в управляющих обмотках.

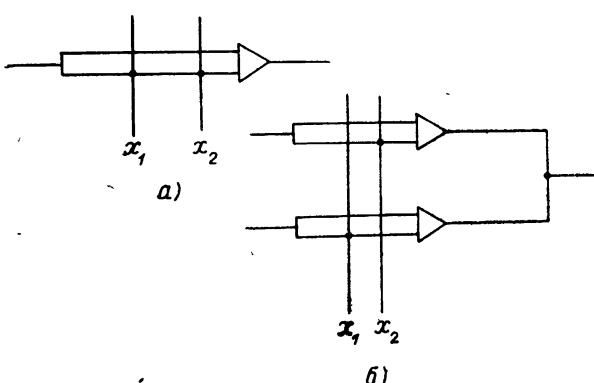


Рис. 4.

Для реализации конъюнкций можно применить схему, состоящую из двух клапанов, включенных последовательно (рис. 5). Каждый из клапанов имеет одну управляющую обмотку. Импульс тока на выходе схемы появится только в том случае, когда будут открыты оба

клапана, т. е. будет выполняться равенство

$$x_1 = x_2 = 1.$$

Однако при непарафазном коде без цепей запрета не удается реализовать функцию отрицания, определяемую следующей таблицей.

Таким образом, схемы, построенные на непарафазном коде и не имеющие цепей запрета, оказываются неприспособленными для реализации целого ряда логических функций.

Введем теперь в рассмотрение парафазный код. Для каждой переменной  $x_i$  используем две фазы  $x_i^1$  и  $x_i^0$ , которые будем называть единичной и нулевой. Тогда ра-

$x$	$\bar{x}$
0	1
1	0

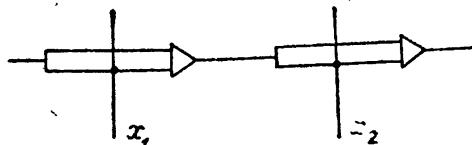


Рис. 5.

венство  $x_i = 1$  означает, что  $x_i^1 = 1$ , а  $x_i^0 = 0$ . Если же  $x_i = 0$ , то  $x_i^1 = 0$ , а  $x_i^0 = 1$ . Таким образом, фазовые значения переменной  $x_i$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x_i^0 \vee x_i^1 = 1; \quad (1)$$

$$x_i^0 \cdot x_i^1 = 0;$$

$$x_i = x_i^1;$$

$$\bar{x}_i = x_i^0. \quad (2)$$

Единичная и нулевая фазы каждого переменного  $x_i$  выполняются в виде самостоятельных токовых цепей. Каждая фаза ( $x_i^1$  или  $x_i^0$ ) может рассматриваться как обычная непарафазная двоичная переменная.

Рассмотрим теперь реализацию функций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции в случае парафазного кода. Будем обозначать буквами  $z^1$  и  $z^0$  единичную и нулевую фазы функции

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тогда для функции отрицания на основании таблицы ее задания можно написать следующее соотношение, связывающее фазы аргумента  $x$  и функции  $z$ :

$$\begin{aligned} z^1 &= x^0; \\ z^0 &= x^1. \end{aligned} \quad (3)$$

Схемная реализация функции отрицания сводится к простой перекоммутации фаз (рис. 6).

Для моделирования дизъюнкции необходимо найти связь между

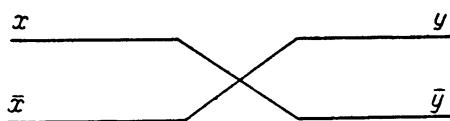


Рис. 6.

фазами аргументов и фазами функций. Используя соотношения (1) и (2), получаем эту связь в следующем виде:

$$\begin{aligned} z^1 &= x_1^1 \vee x_2^1; \\ z^0 &= \overline{x_1^1 \vee x_2^1}, \end{aligned} \quad (4)$$

или, применяя для  $z^0$  формулу

$$\overline{x_1^1 \vee x_2^1} = \overline{x_1^1} \cdot \overline{x_2^1}$$

и учитывая (1), получаем следующее выражение:

$$\overline{x_1^1 \vee x_2^1} = \overline{x_1^1} \cdot \overline{x_2^1} = x_1^0 \cdot x_2^0.$$

Произведя соответствующую замену в (4), приходим к следующей системе равенств, определяющих дизъюнкцию  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{aligned} z^1 &= x_1^1 \vee x_2^1; \\ z^0 &= x_1^0 \cdot x_2^0. \end{aligned} \quad (5)$$

Функциональная схема, построенная на основании этих равенств, дана на рис. 7.

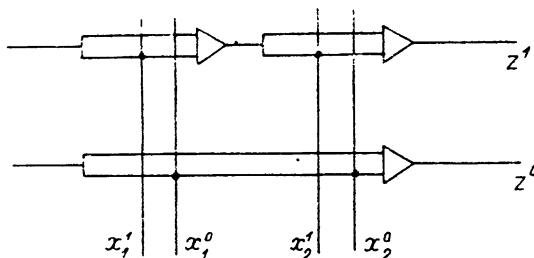


Рис. 7.

Для моделирования конъюнкции имеем следующее соотношение, связывающее фазы аргументов и функций:

$$\begin{aligned} z^1 &= x_1^1 \cdot x_2^1; \\ z^0 &= \overline{x_1^1 \cdot x_2^1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя к нулевой фазе функции  $z$  формулу  $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ , получим:

$$\begin{aligned} z^1 &= x_1^1 \cdot x_2^1; \\ z^0 &= \overline{x_1^1 \cdot x_2^1} = \overline{x_1^1} \vee \overline{x_2^1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Функциональная схема, реализующая соотношения (7), приведена на рис. 8.

Как известно [8], функции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции образуют полную систему функций. Это означает, что любая функция алгебры логики может быть реализована на элементах, обрабатывающих эти три функции. Таким образом, приходим к заключению о возможности реализации в рассматриваемом классе функциональных схем любой функции алгебры логики.

Если в рассматриваемый класс функциональных схем включить еще в качестве логического элемента временные задержки, то такими функциональными схемами можно будет реализовать любую времененную логическую функцию [4].

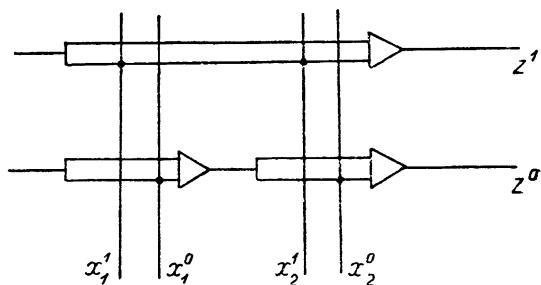


Рис. 8.

Токовые многополюсники, использующие парафазный код, во многом сходны с релейно-контактными схемами, имеющими только замыкающие контакты. Это позволяет надеяться, что для подобного класса функциональных схем окажутся применимыми большинство методов, развитых для релейно-контактных схем. Интересно отметить, что в отличие, например, от схем, построенных на электронных лампах, рассматриваемые схемы допускают хорошую интерпретацию понятия структурно-избыточной надежности [9], чему будет посвящена специальная статья.

В заключение приведем схему одноразрядной суммирующей схемы, являющейся частью сумматора, спроектированного В. М. Захаровым (рис. 9). На этом рисунке  $x_i$  и  $y_i$  означают единичные фазы слагаемых  $i$ -го разряда,  $p_i$  — единичную фазу переноса в  $i$ -ый разряд из

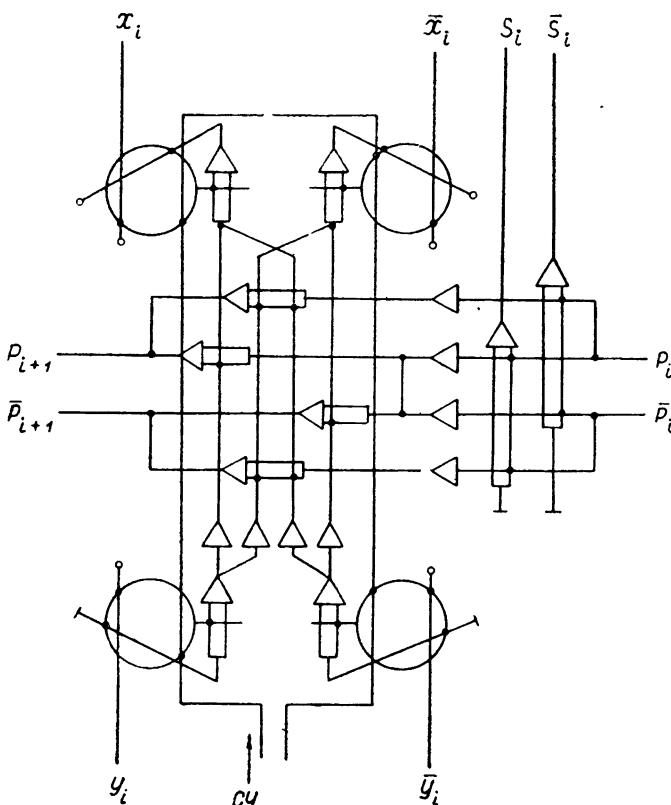


Рис. 9.

$(i-1)$ -го,  $p_{i+1}$  и  $s_i$  — единичные фазы переноса в  $(i+1)$ -ый разряд и сумму в  $i$ -ом разряде. Все нулевые фазы отмечены теми же буквами, но со знаком отрицания. Структура такого сумматора является аналогом мостиковых релейно-контактных схем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. О. Карно, сб. Применение транзисторных и магнитных элементов в цифровых вычислительных машинах, изд. Сов. радио, М., 1960.
2. S. Gutentag, R. Kodis, S. Ruhman, IRE National Convention Record, 2, 124 (1954).
3. R. Kodis, S. Ruhman, W. Woo, IRE National Convention Record, 1, 23 (1953).

4. М. Л. Цетлин, Л. М. Шехтман, Проблемы кибернетики, № 2, 139 (1959).
5. Л. П. Афиногенов, Научно-техн. информ. бюллетень Ленинградского политехн. ин-та им. М. И. Калинина, № 8, 109 (1960).
6. А. М. Нечаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 892 (1960).
7. D. Armstrong, T. Crowley, U. Gianola, E. Newhall, Trans. IRE Electronic Computers, EC-9, 30 (1960).
8. С. В. Яблонский, Труды математич. ин-та им. В. А. Стеклова, 51, 5 (1958).
9. М. А. Гаврилов, Первый международный конгресс ИФАК, М., 1960.
10. О. Б. Лупанов, Проблемы кибернетики, № 3, 61 (1960).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
12 сентября 1961 г.

## REALIZATION OF LOGIC FUNCTIONS IN ONE CLASS OF FUNCTIONAL SCHEMES

*D. A. Pospelov*

The realization is considered of logical functions in the class of ferrite-transistor circuits without using the restrictive networks and the method of current summation. To preserve universality of circuits constructed according to such a principle a paraphase code is introduced. The circuits are given for realization of main logic functions.

## РЕАЛИЗАЦИЯ ТРОИЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ТРЕХФАЗНЫХ КОДОВ

*Д. А. Поспелов, В. Н. Фальк*

Рассмотрены основные соотношения в троичной логике  $-1, 0, 1$  и моделирование основных логических троичных функций путем введения трехфазного кода. Приведена схема одноразрядного комбинационного троичного сумматора.

В настоящее время считается, что наиболее экономичными по составу оборудования и наиболее простыми по логике операций были бы вычислительные машины дискретного действия, использующие троичную систему счисления [1,2]. Конструктивная проверка этого утверждения пока еще невозможна, так как не существует элементов на три устойчивых состояния с достаточной скоростью срабатывания. Действующая в настоящее время машина „Сетунь“ хотя и работает в троичной системе счисления, но использует для этой цели сдвоенные двоичные элементы, в результате чего расход оборудования возрастает.

В то же время существует способ реализации троичных функций, который основан на весьма удобном принципе моделирования логических функций на ферритах в виде токовых многополюсников. Способ построения логических схем по типу токовых многополюсников описан, например, в [3-5]. Распространяя его на случай трехфазных схем, мы можем получить удобную реализацию троичных логических функций на феррит-транзисторах.

Настоящая статья состоит из двух частей: в первой части излагаются основные соотношения троичной логики, во второй приводится схемная реализация основных троичных логических функций.

### 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТРОИЧНОЙ ЛОГИКИ С КОДОМ $-1, 0, 1$

Рассмотрим наборы следующего вида:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle. \quad (1)$$

В этих наборах компоненты  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) могут принимать значения  $-1, 0, 1$ . Число различных наборов (1) равно  $3^n$ . Число различных троичных логических функций, зависящих от  $n$  аргументов, равно  $3^{3^n}$ .

Рассматриваемая троичная логика более удобна для использования в вычислительных машинах, чем традиционная троичная логика с кодом  $0, 1, 2$ . В этой логике более просты операции машинного вычитания и умножения. Для представления отрицательных чисел в машине нет нужды вводить знаковый разряд и специальные коды.

Введем основные логические функции в рассматриваемой логике. Для удобства записи в дальнейшем вместо  $-1$  будем писать  $\bar{1}$ .

Определим следующие четыре функции одного переменного.

$x$	$\varphi$	$\varphi-1$	$\varphi_0$	$\varphi_1$
$\bar{1}$	1	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$
0	0	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$
1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1

Функцию  $\varphi$  мы будем называть отрицанием и записывать следующим образом:

$$\varphi(x) = \tilde{x}.$$

Функции  $\psi_{-1}$ ,  $\psi_0$  и  $\psi_1$  мы назовем характеристическими функциями минус первого, нулевого и первого порядка соответственно.

Эти функции в дальнейшем будут играть весьма важную роль.

Введем еще две функции двух переменных.

Функция  $\chi_1$  называется конъюнкцией  $x_1$  и  $x_2$ ; запишем ее следующим образом:

$x_1$	$x_2$	$x_1$	$x_2$	$\chi_1(x_1, x_2) = x_1 \& x_2$
1	1	1	1	
1	0	1	0	Функция $\chi_2$ называется дизъюнкцией $x_1$ и $x_2$
1	1	1	1	и записывается так:
0	1	1	0	$\chi_2(x_1, x_2) = x_1 V x_2$ .
0	0	0	0	Функции $\chi_1$ и $\chi_2$ удовлетворяют известным соотношениям:
0	1	0	1	$\chi_1(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2);$
1	1	1	1	$\chi_2(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2).$
1	0	0	1	
1	1	1	1	

Отметим, что введенные функции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания связаны между собой известным соотношением:

$$\begin{aligned} x_1 \& x_2 &= \tilde{\tilde{x}}_1 V \tilde{\tilde{x}}_2; \\ x_1 V x_2 &= \tilde{\tilde{x}}_1 \& \tilde{\tilde{x}}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, указанные функции обладают следующими весьма важными свойствами:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{x}} &= x; \\ x V x &= x; \\ x \& x &= x; \\ x V 1 &= 1; \\ x \& \bar{1} &= \bar{1}; \\ x \& 1 &= x; \\ x V \bar{1} &= x. \end{aligned} \quad (4)$$

*Теорема 1.* Для любой троичной логической функции имеет место соотношение:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ &= [\psi_{-1}(x_i) \& \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{1}, x_{i+1}, \dots, x_n)] V \\ &\vee [\psi_0(x_i) \& \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i + 1, \dots, x_n)] V \\ &\vee [\psi_1(x_i) \& \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Справедливость сказанного следует из способа задания характеристических функций и свойств (4).

**Теорема 2.** Любая троичная логическая функция представима следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = V \psi_{\alpha_1}(x_1) \& \psi_{\alpha_2}(x_2) \& \dots \& \psi_{\alpha_n}(x_n) \& \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned} \quad (6)$$

по всем  
( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ )

Для доказательства этого утверждения заметим, что имеет место соотношение:

$$\psi_{\alpha_i}(x_i) = \begin{cases} \bar{1} & (x_i \neq \alpha_i) \\ 1 & (x_i = \alpha_i) \end{cases}.$$

Отсюда следует, что для любого троичного набора  $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$  одна и только одна конъюнкция  $\& \psi_{\alpha_i}(x_i)$  в формуле (6) равна плюс единице, а все остальные равны минус единице. Однако в силу (4)

$$x \& \bar{1} = \bar{1};$$

$$x \& 1 = x;$$

$$x V \bar{1} = x$$

и в правой части соотношения (6) при любом наборе  $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$  остается лишь одна конъюнкция, которая совпадает с  $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ . Полученное тождество доказывает теорему.

Теорема 2 означает, что функции конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и характеристические функции образуют в классе троичных логических функций полную систему функций [6]. Существуют и другие полные системы [6-8], но полученная система является наиболее удобной для схемной реализации.

Заметим, что соотношение (6) есть аналог дизъюнктивной совершенной нормальной формы функций алгебры логики. К троичным функциям, заданным с помощью (6), можно применять любые методы минимизации, известные для двоичной логики [6].

## 2. РЕАЛИЗАЦИЯ ТРОИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ТРЕХФАЗНЫМИ СХЕМАМИ, ПОСТРОЕННЫМИ ПО ПРИНЦИПУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКОВ

Введем следующее определение:  $k$ -фазным кодом  $k$ -значной переменной называется совокупность  $k$ -двоичных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , для которых выполняется соотношение\*:

$$V x_1^{\alpha_1} \& x_2^{\alpha_2} \& \dots \& x_k^{\alpha_k} = 1, \quad (7)$$

по всем  
 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \rangle$   
таким, что  $\alpha_i=1, \alpha_j=0 \quad (i \neq j)$

причем каждому из этих переменных соответствует одно и только одно значение истинности  $k$ -значной переменной.

Данное определение  $k$ -значной переменной  $x$  (со значениями истинности 1, 2, ...,  $k$ ) соответствует двухзначному характеру высказываний вида:

„ $x$  принимает значение  $i$ “ —  $x_i = 1$ ;  
„ $x$  принимает значение  $j \neq i$ “ —  $x_i = 0$ .

\* Здесь, как всегда,

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i & (\alpha_i = 1) \\ \bar{x}_i & (\alpha_i = 0) \end{cases}$$

Другими словами,  $k$ -фазный код позволяет сводить реализацию  $k$ -ичных логических функций к реализации двоичных логических функций. В частности, из определения  $k$ -фазного кода следует, что обычный парапазанный код [5] двоичной переменной  $x$  получается путем сопоставления значению „1“ самой переменной  $x$ , а значению „0“ — ее отрицания (или наоборот).

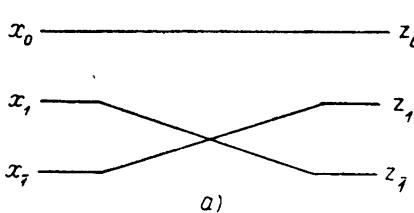
Для трехфазного кода на основании (7) получим следующее соотношение, связывающее фазы  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ :

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 V \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 V \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 = 1. \quad (8)$$

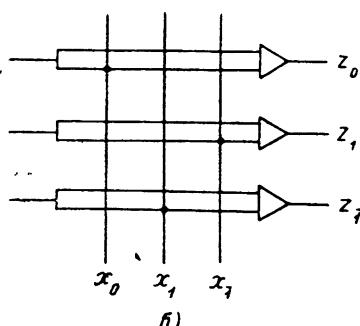
Для значений истинности  $\bar{1}$ ,  $0$ ,  $1$  соответствующие фазы будем обозначать как  $x_{-1}$ ,  $x_0$ ,  $x_1$ .

Рассмотрим теперь реализацию полной системы троичных функций, обсуждавшейся в первой части статьи. Эту реализацию будем проводить в классе феррит-транзисторных схем, построенных по принципу, подробно рассмотренному в [5]. Из этой же работы использованы обозначения для схем.

Обозначим буквами  $x_{-1}$ ,  $x_0$ ,  $x_1$  и  $y_{-1}$ ,  $y_0$ ,  $y_1$  соответствующие фазы аргументов, а буквами  $z_{-1}$ ,  $z_0$ ,  $z_1$  — фазы функций. Связь между

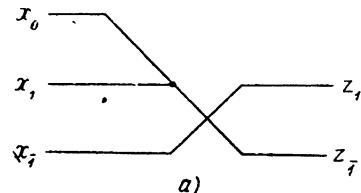


a)

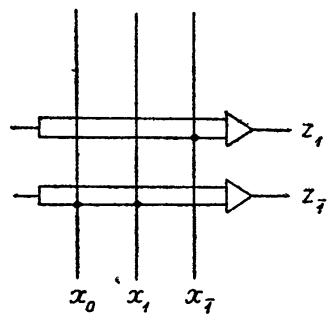


б)

Рис. 1.



a)



б)

Рис. 2.

фазами функции и фазами аргументов для всех функций из рассмотренной полной системы определяется на основании таблиц задания этих функций и имеет следующий вид.

1. Функция отрицания:  $z = x$ . Из таблицы задания функции отрицания получаем:

$$z_1 = x_{-1};$$

$$z_0 = x_0;$$

$$z_{-1} = x_1.$$

Коммутация фаз показана на рис. 1а, а функциональная схема, отрабатывающая отрицание, на рис. 1б.

2. Характеристические функции. Для характеристической функции минус первого порядка из таблицы задания функции получаем следующее соотношение для фаз:

$$z_1 = x_{-1};$$

$$z_0 = 0;$$

$$z_{-1} = x_0 \vee x_1.$$

В статье [5] показано, что для используемого класса функциональных схем дизъюнкция фаз означает их прямое объединение. В соответствии с этим на рис. 2а дана схема коммутации фаз, а на рис. 2б—функциональная схема, отрабатывающая функцию  $\psi_{-1}(x)$ .

Для характеристических функций нулевого и первого порядков получаются соотношения фаз, аналогичные соотношению фаз для  $\psi_{-1}(x)$ :

$$z_1 = x_0;$$

$$z_0 = 0;$$

$$z_{-1} = x_1 \vee x_{-1},$$

для  $\psi_1(x)$

$$z_1 = x_1;$$

$$z_0 = 0;$$

$$z_{-1} = x_0 \vee x_{-1}.$$

Соответствующие схемы приведены на рис. 3, 4.

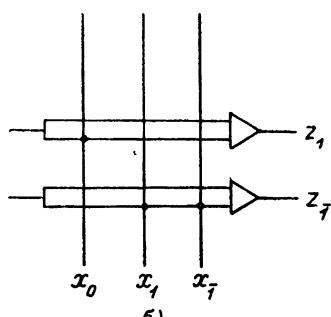
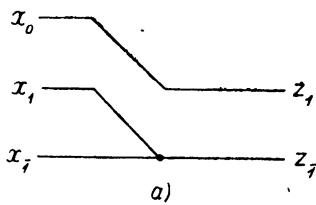


Рис. 3.

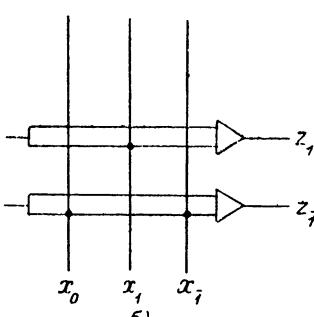
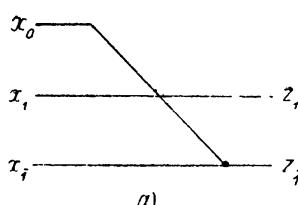


Рис. 4.

3. Функция дизъюнкции. Из таблицы задания функции следует, что

$$z_1 = x_1 \vee y_1;$$

$$z_0 = (x_0 \& y_{-1}) \vee (x_0 \& y_0) \vee (x_{-1} \& y_0);$$

$$z_{-1} = x_{-1} \& y_{-1}.$$

Соответствующая функциональная схема дана на рис. 5. Конъюнкция фаз осуществлена последовательным включением клапанов, дизъюнкция фаз — либо простым объединением, либо с помощью клапанов, управляемых несколькими аргументами.

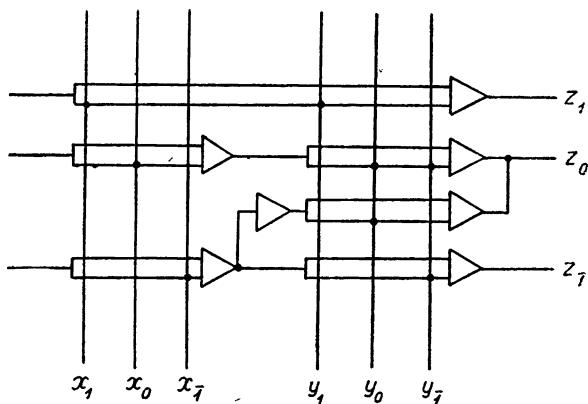


Рис. 5.

4. Функция конъюнкции. Применим формулы (3) к фазовым соотношениям, определяющим дизъюнкцию. Тогда получим:

$$z_1 = x_1 \& y_1;$$

$$z_0 = (x_0 \& y_1) V (x_0 \& y_0) V (x_1 \& y_0);$$

$$z_{\bar{1}} = x_{\bar{1}} V y_{\bar{1}}.$$

Соответствующая функциональная схема дана на рис. 6.

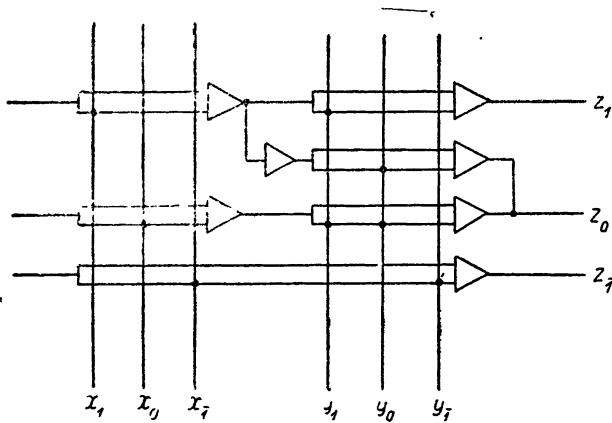


Рис. 6.

Схемная реализация троичных функций, образующих полную систему, свидетельствует о возможности реализации с помощью трехфазных токовых многополюсников на феррит-транзисторах любых троичных логических функций. В качестве примера на рис. 7 приведена функциональная схема одноразрядного троичного сумматора, построенного на основании таблицы, определяющей правила сложения

в одном разряде троичного сумматора (с учетом переноса из младшего разряда и получения переноса в старший разряд сумматора). Эта таблица имеет следующий вид.

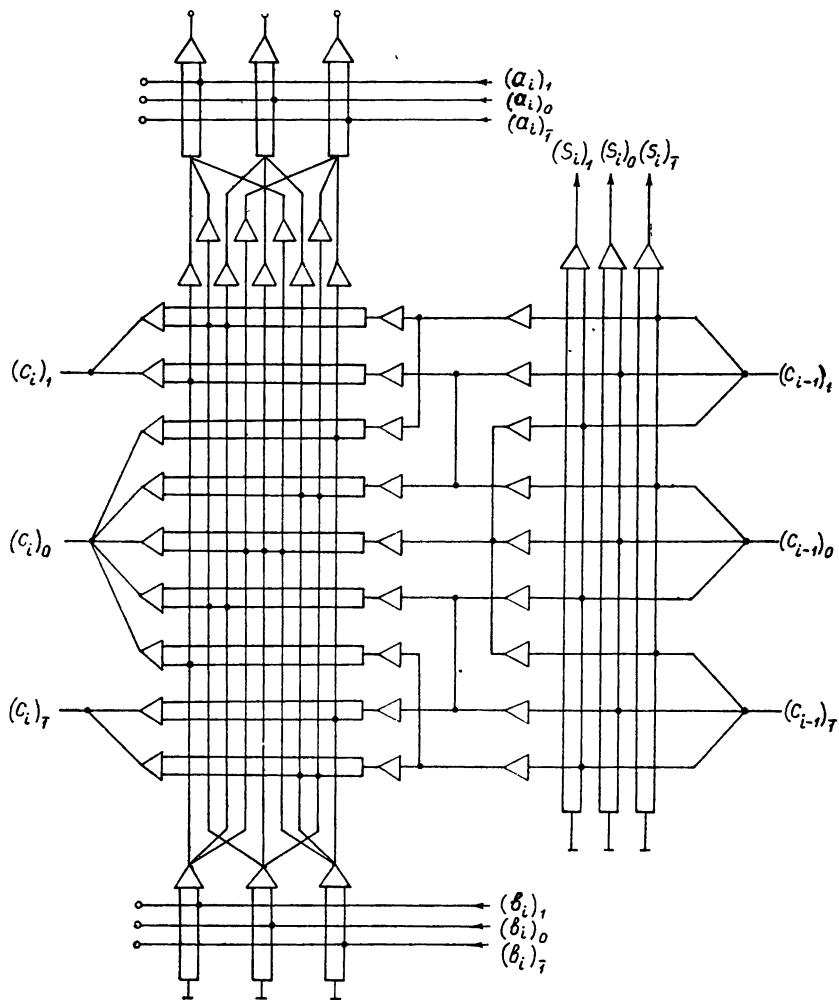


Рис. 7.

$a_i$	$b_i$	$c_{i-1}$	$s_i$	$e_i$
1	1	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

$a_i$	$b_i$	$c_{i-1}$	$s_i$	$c_i$
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Здесь  $a_i$  — значение цифры первого слагаемого в  $i$ -ом разряде,  $b_i$  — значение цифры второго слагаемого в  $i$ -ом разряде,  $c_{i-1}$  — перенос из  $(i-1)$ -го разряда в  $i$ -ый,  $c_i$  — перенос в  $(i+1)$ -ый разряд из  $i$ -ого,  $s_i$  — значение суммы в  $i$ -ом разряде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Карцев, Арифметические устройства электронных цифровых машин, Физматгиз, М., 1958.
2. Д. А. Постелов, Арифметические и логические основы вычислительных машин, дискретного действия, ч. 1, изд. МЭИ, М., 1960.
3. Л. П. Афиногенов, Научно-технич. информ. бюллетень Ленинградского политехнического ин-та им. М. И. Калинина, № 8, 109 (1960).
4. И. О. Карно, сб. Применение транзисторных и магнитных элементов в цифровых вычислительных машинах, изд. Сов. радио, М., 1960.
5. Д. А. Постелов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 784 (1962).
6. С. В. Яблонский, Труды математич. ин-та им. В. А. Стеклова, 51, 5 (1958).
7. R. D. Beglin, Trans. IRE Electronic Computers, 7, 213 (1958).
8. D. Webb, Proc. National Academy Sci. USA, 21, 252 (1953).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
12 сентября 1961 г.

#### REALIZATION OF TERNARY FUNCTIONS BY MEANS OF THREE-PHASE CODE

D. A. Pospelov, V. N. Falk

The basic relationships in ternary logics —1, 0, 1 are considered as well as modelling of the main logical ternary functions by means of introduction of a three-phase code. A circuit of a single-digit coincidence ternary summator is presented.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

### СТРОЕННЫЙ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТР

*В. И. Бабий и А. Г. Суховей*

Для наблюдений затмения Крабовидной туманности сверхкороной Солнца [1] в метровом диапазоне волн ранее использовали радиоинтерферометры с одной базой. Однако определение формы рассеянного источника\* (его размеров в различных направлениях) заставляет использовать радиоинтерферометры с базами различной ориентации [3,4]. С этой целью в Крымской станции ФИАН в мае 1961 года был создан строенный радиоинтерферометр на  $\lambda = 5 \text{ м}$ .

При создании подобных систем возникают трудности, связанные с разделением интерференционных картин, полученных на трех различно ориентированных базах. В описываемой системе эти трудности преодолены применением разделительных головок, в которых разделение осуществляется на частоте сигнала. Блок-схема системы имеет вид, показанный на рис. 1. Три антенны, расположенные в вершинах треугольника, образуют три различно ориентированные интерференционные базы.

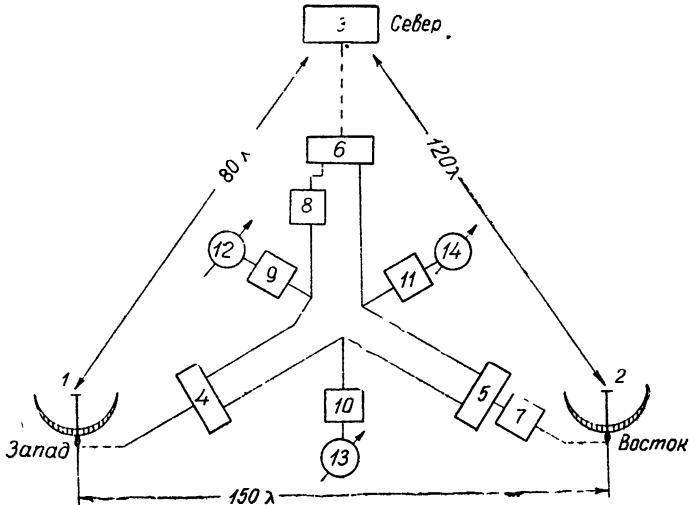


Рис. 1. Блок-схема строенного радиоинтерферометра:  
1, 2, 3 — антенны; 4, 5, 6 — разделительные головки; 7, 8 — фазовые модуляторы;  
9, 10, 11 — супергетеродинные приемники; 12, 13, 14 — регистрирующие приборы.

В качестве антенн 1 и 2 используются неподвижные параболоиды диаметром 30 м, ось которых наклонена на  $22^\circ$  к югу от зенита (на склонение Крабовидной туманности). Антенной 3 служит синфазная решетка из восьми вибраторов. От каждой из антенн сигнала по кабелю подается на вход соответствующей разделительной головки, собранной по схеме „заземленный катод — заземленная сетка“ с шум-фактором  $2 \frac{1}{3}$ . Схема разделительной головки показана на рис. 2. Развязка между выходами одной головки — более 50 дБ по мощности. Выравнивание коэффициентов усиления по каждому каналу разделительных головок осуществляется подбором связи с выходным контуром. Все три головки идентичны и питаются от отдельного стабилизированного блока. Прием-

\* Форма этого источника не имеет центральной симметрии [2].

ники—обычные супергетеродины с фазовой модуляцией; промежуточная частота  $9 \text{ мгц}$ , полоса пропускания  $0,6 \text{ мгц}$ , постоянная времени  $20 \text{ сек}$ . С целью уменьшения числа фазовых модуляторов один из нихключен до разделительной головки и осуществляет одновременную модуляцию по двум базам. Модуляция по третьей базе осуществляется вторым модулятором, включенным после разделительных головок. Оба фазовых модулятора синхронизованы об общего генератора опорного напряжения с частотой  $72 \text{ гц}$ . Питание приемников стабилизировано электронными стабилизаторами по каналу и анонду. Регистрация ведется на трех самописцах со скоростью записи  $1 \text{ см} \cdot \text{мин}^{-1}$ .

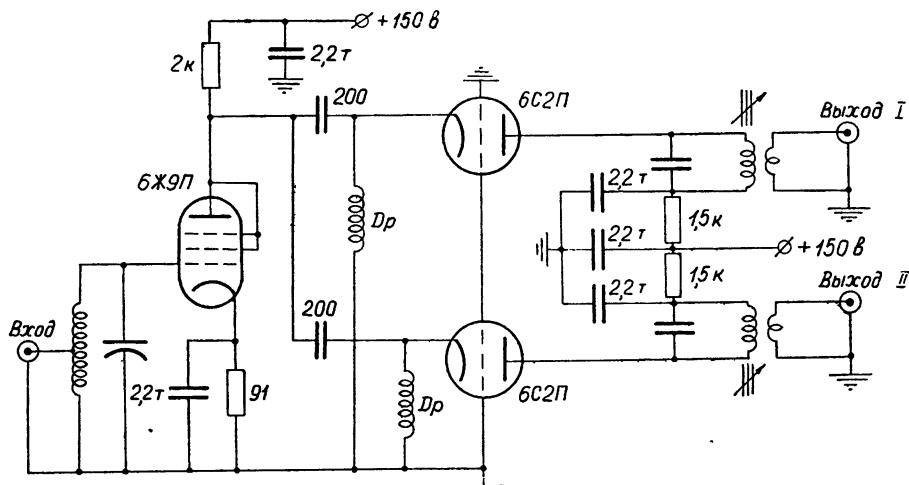


Рис. 2. Схема разделительной головки (омическое сопротивление дросселей в катодах ламп 6С2П создает автоматическое смещение на их сетки).

Примеры внезатменных одновременных записей по трем базам излучения Крабовидной туманности приведены на рис. 3. Юстировка интерференционных баз выполнена по дискретным радиоисточникам Дева-А, Лебедь-А и Кассиопея-А без смещения

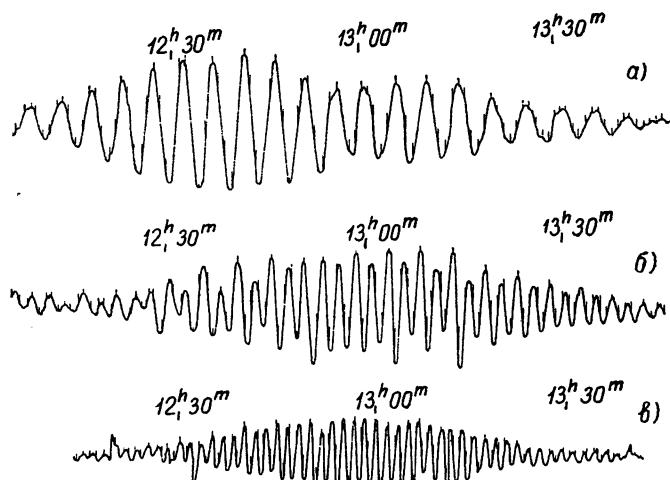


Рис. 3. Пример одновременной записи на трех интерференционных базах источника Телец-А 8 июня 1961 г.:

а) база с.-з.; б) база с.-в.; в) база в.-з.

Смещение максимума на записи а) и изрезанность лепестков на записях б) и в) обусловлены влиянием Солнца.

диаграмм направленности антенн. Калибровка усиления аппаратуры проводилась ежедневно перед началом и в конце записи по шумовому генератору. Общий коэффициент усиления по каждой интерференционной базе

$$K_{\text{общ}} = K_{\text{пр}} \sqrt{K_1 K_2},$$

где  $K_{\text{пр}}$ —усиление супергетеродинного приемника,  $K_1$  и  $K_2$ —усиление разделительных головок, входящих в каждую базу. Чувствительностьстроенного радиоинтерферометра составляет  $5 \cdot 10^{-25} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$

Настроенном радиоинтерферометре были определены форма и величина рассеяния источника при прохождении радиоволн через сверхкорону Солнца во время затмения Крабовидной туманности в июне 1961 года [5].

Подобные системы могут использоваться для решения и других задач, например, для определения координат и динамики солнечных радиопятен, определения величины и направления нестационарной рефракции в ионосфере по источникам космического радиоизлучения и т. д.

Авторы выражают признательность Л. И. Матвеенко за участие в настройке синфазной решетки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Виткевич, ДАН СССР, 27, 585 (1951).
2. В. Виткевич, Труды 5-го совещания по вопросам космогонии, М—Л., 203 (1956).
3. В. Виткевич, Б. Н. Пановкин, А. Г. Суховей, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 1005 (1959).
4. S. Gorgolewski, A. Hewish, Observatory, 80, 99 (1960).
5. В. Виткевич, В. И. Бабий, А. Г. Суховей, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
29 декабря 1961 г.

## ВЫБОР ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ ДЛЯ РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТРА

*В. И. Бабий*

При применении интерференционного метода, получившего широкое распространение в радиоастрономии, возникает вопрос о выборе оптимальной постоянной времени  $\tau_{\text{опт}}$ , при которой случайная флюктуационная ошибка становится минимальной.

Для интерферометра с длинной базой изменение мощности сигнала на выходе детектора близко к синусоидальному с угловой частотой  $\omega = 2\pi/t_{\text{л}}$ , где  $t_{\text{л}}$ —“период” лепестков интерференции. Тогда для простой  $RC$ -цепи, которая обычно применяется как интегрирующая, значение сигнала на выходе

$$T_c \sim [1 + 4\pi^2(\tau/t_{\text{л}})^2]^{-1/2}, \quad (1)$$

где  $\tau$ —постоянная времени  $RC$ -цепи. Флюктуационная чувствительность  $\Delta T \sim \tau^{-1/2}$ . Случайная флюктуационная ошибка

$$\delta = \Delta T/T_c = \alpha [1 + 4\pi^2(\tau/t_{\text{л}})^2]^{1/2} \tau^{-1/2}, \quad (2)$$

где  $\alpha$ —постоянная, определяемая параметрами интерферометра. Из условия  $\delta' |_{\tau=\tau_{\text{опт}}} = 0$  находим:

$$\tau_{\text{опт}} = t_{\text{л}}/2\pi. \quad (3)$$

Для  $\tau_{\text{опт}}$  сдвиг интерференционной картины по фазе  $\varphi = -\arctg(\omega\tau_{\text{опт}}) = -45^\circ$  и уменьшение амплитуды лепестков по сравнению с истинным (при  $\tau = 0$ ) значением

$$|K| = [1 + \omega^2\tau_{\text{опт}}^2]^{-1/2} = 0,707. \quad (4)$$

Величину  $|K|$  необходимо учитывать при определении интенсивности излучения источников, а также при калибровке антенн по известным источникам интерференционным методом.

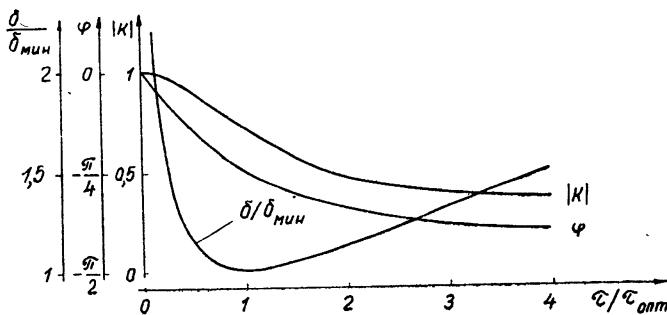


Рис. 1.

На рис. 1 приведен график зависимости относительной точности  $\delta/\delta_{\min}$ , величины  $|K|$  и запаздывания фазы  $\varphi$  от  $t/\tau_{\text{опт}}$ . Найденное соотношение для  $\tau_{\text{опт}}$  носит общий характер и применимо при регистрации других гармонических процессов.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
29 декабря 1961 г.

## ПРЕЦИЗИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНЕ $\lambda = 3,2 \text{ см}$

*Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, В. А. Порфирьев, К. М. Стрежнева*

В данной работе использован метод непрерывного эталонирования антенной системы с помощью поглощающего диска, расположенного в дальней зоне. Метод позволяет проводить абсолютные измерения температуры дискретных источников без значительных пересчетов на диаграмму антенны с точностью  $(1 \pm 2)\%$ . Полная методика и ее обоснование описаны в [1]. Настоящая работа отчасти повторяет прецизионные измерения [1] радиоизлучения Луны на волне 3,2 см с малым зеркалом (интегральные измерения), однако в других условиях измерений и влияния фона. Кроме того, проведено измерение на той же волне с большим зеркалом с целью приблизиться к определению яркостной температуры центра диска Луны и для сравнения с результатами, полученными в работе [2].

Методика измерений абсолютной радиотемпературы Луны состояла в следующем. Поочередно измерялась разность сигналов при антенне, направленной на центр поднятого диска и при опущенном диске, и разность сигналов при антенне, направленной на Луну, и при антенне, отведенной на  $2 \pm 3^\circ$  от Луны. Весь цикл измерений составлял  $3 \pm 4$  часа, в течение которых измерялись  $5 \pm 6$  раз сигналы Луны и диска. Для проверки стабильности работы аппаратуры в начале и в конце наблюдений проводилась тепловая калибровка по собственным шумам аппаратуры.

Измерения температуры Луны выполнялись на двух радиотелескопах с флюктуационным порогом  $1^\circ$  при постоянной времени 1 сек. Антенны представляли собой параболические зеркала диаметром 1,5 м и 4 м; ширина диаграмм направленности на уровне половинной интенсивности— $87'$  и  $40'$  соответственно; КПД антенных систем—70%.

Эталон представлял собой диск диаметром 4,2 м, собранный из шести секций, покрытых поглощающим материалом. Кроме того, имелись дополнительные секции, позволяющие увеличивать диаметр диска до 4,4 м и 4,6 м в соответствии с изменением угловых размеров Луны. Угловые размеры поглощающего диска выбраны были таким образом, чтобы поправка на разность угловых размеров измеряемого источника и эталона была минимальной. Диск располагался на фоне неба на расстоянии  $L = 471,8 \pm 1$  м, где сформирована диаграмма направленности, под углом места  $19^\circ$ , где поправка на дифракцию (из-за близости горизонта) составляла менее  $0,5\%$ . Отклонение нормали к диску от направления на станцию было не больше  $3^\circ$ ; соответствующая ошибка из-за сокращения угловых размеров диска по высоте составляла не более  $0,1\%$ .

Температура радиоизлучения Луны, согласно [1], определялась по формуле:

$$T_{LF} = \frac{n_L}{n_d} \alpha T_d e^{-\Delta \gamma} \left[ 1 + \frac{T_d - T_{BH}}{T_d} \gamma + \frac{32}{T_d} \gamma_d \right]. \quad (1)$$

\* Высота Луны в период измерений превышала  $23^\circ$ .

Результаты измерений  $T_{LF}$  Луны с помощью 1,5 м и 4 м зеркал приведены соответственно на рис. 1 и 2\*. Кривые радиоизлучения на рис. 1 и 2 аппроксимируются следующими выражениями:

$$T_{LF} = 213^\circ + 14^\circ \cos(\Omega t - 26^\circ); \quad T_{LF} = 216^\circ + 16^\circ \cos(\Omega t - 15^\circ).$$

Средняя дисперсия единичного замера от среднего за день значения составляет 2%. Точность относительных измерений, характеризуемая средней дисперсией отдельных точек от аппроксимирующей кривой, не хуже 1% (1,5 м зеркало) и 1,5% (для 4 м зеркала). Общая (систематическая и случайная) погрешность измерений радиоизлучения не превосходит  $1,5 \pm 2\%$  (на 1,5 м зеркале) и  $2,5 \pm 3\%$  (на 4 м зеркале).

Найденная постоянная составляющая радиотемпературы Луны  $213^\circ$  (1,5 м зеркало) хорошо согласуется с результатами [1]; постоянная составляющая  $216^\circ \pm 6^\circ$  (4 м зеркало) в пределах 15% совпадает с результатами в [2]. Большая величина постоянной составляющей, как и следует, соответствует более узкой диаграмме, по-

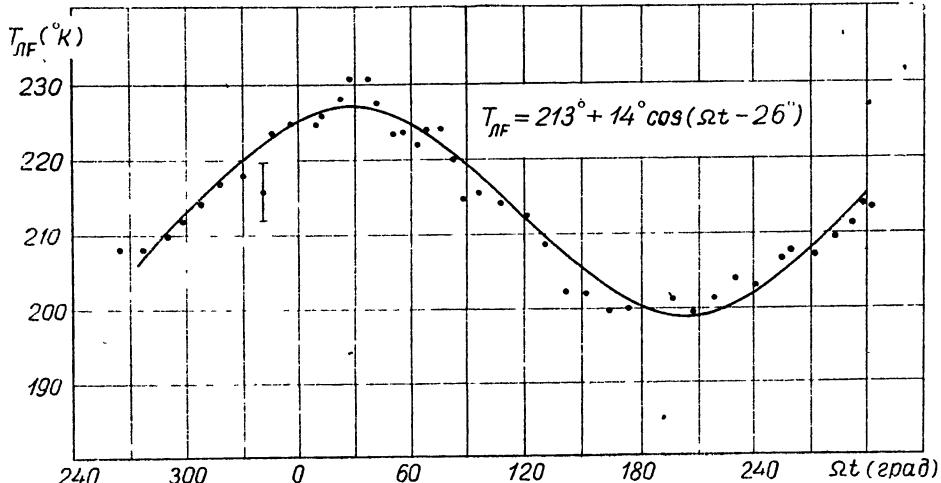


Рис. 1.

скольку усредненная по диаграмме температура в этом случае приближается к средней яркостной температуре центра диска Луны.

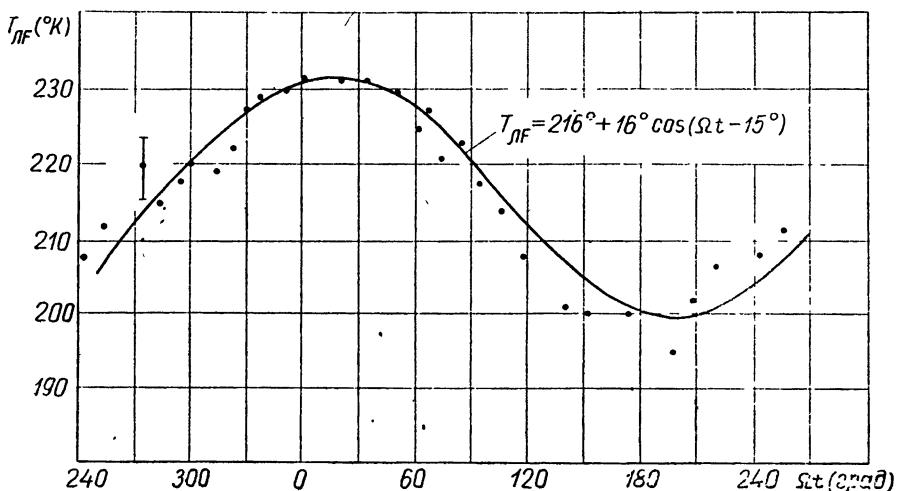


Рис. 2.

\* Вертикальными отрезками на рис. 1, 2 отмечена средняя за месяц дисперсия единичных измерений от среднего значения за день.

Что касается значительно меньшего отставания фазы по сравнению со значениями, полученными в работах [1] и [2], то, поскольку точность определения фазового сдвига в цитируемых работах и настоящей статье одна и та же и равна  $\pm (6^\circ \pm 8^\circ)$ , данные результаты не являются следствием ошибок эксперимента, а, вероятно, связаны с различными периодами наблюдения Луны. Различные значения фазового сдвига—опытный факт, объяснение которого требует дополнительных экспериментальных исследований, а также громоздких теоретических расчетов с применением электронных счетных машин, что будет выполнено не скоро.

В процессе измерений радиоизлучения Луны был обнаружен эффект „потепления“ диска, по-видимому, связанный с отражением диском излучения Земли, „засвечиваемой“ радиоизлучением Солнца. На рис. 3а приведена зависимость от времени  $t$  экспериментальных значений антенных температур; на рис. 3б—теоретическая зависимость антенной температуры  $T_{a,d} = A [T_{o,d} - T_h(h_d)]$  (где  $T_h(h_d) = (T_o - 35^\circ) \gamma_d$ ) от времени, а на рис. 3в—отношение экспериментальной антенной температуры от диска к  $T_{a,d}$ , вычисленной по формуле (2). Значение антенных температур на рис. 3а и 3б указаны в относительных единицах. По нашим оценкам эффект „потепления“ при определении постоянной составляющей радиотемпературы Луны вносит погрешность не более 0,8%.

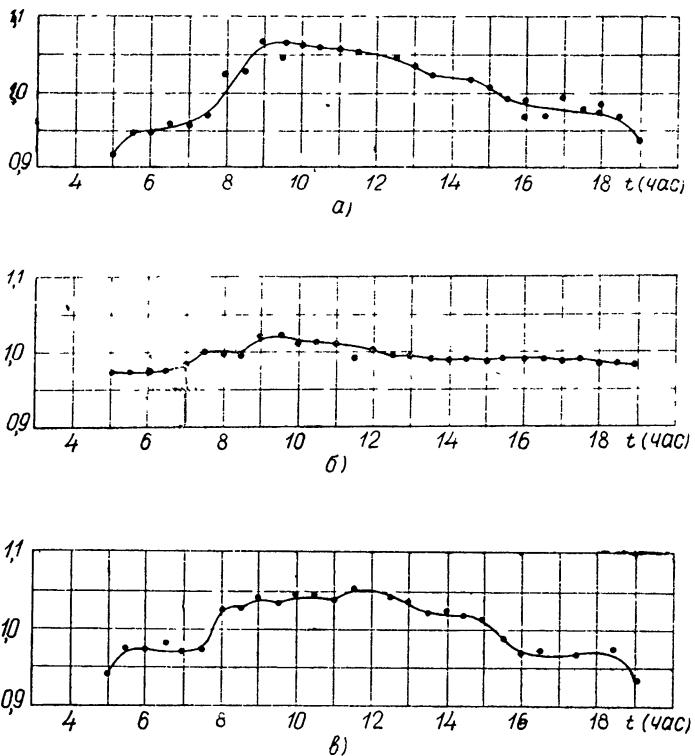


Рис. 3.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
2. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 600 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
18 декабря 1961 г.

## НАБЛЮДЕНИЯ НА БОЛЬШОМ ПУЛКОВСКОМ РАДИОТЕЛЕСКОПЕ НА $\lambda = 33 \text{ см}$ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ДЛИННОВОЛНОВОЙ ГРАНИЦЫ ЕГО ДИАПАЗОНА

*В. Я. Гольцев, Н. Л. Кайдановский, В. Г. Малумян*

Верхняя граница  $\lambda_{\max}$  диапазона, в котором используются антенны переменного профиля [1, 2], зависит от вертикального размера отражающей поверхности  $H$ , фокусного расстояния  $f$  и определяется из условия  $\lambda_{\max} < H^2/f$ . По мере увеличения длины волны коэффициент использования площади антенн уменьшается за счет переоблучения по вертикали. Волна 33 см находится за пределами рабочего диапазона Большого пулковского радиотелескопа, высота отражающей поверхности которого  $H = 3 \text{ м}$ , а фокусное расстояние  $f \approx 50 \text{ м}$ .

Согласно численному расчету, коэффициент использования площади Большого пулковского радиотелескопа, достигающий 0,5 в диапазоне  $5 \pm 15 \text{ см}$ , на этой волне не превышает 0,32 при наблюдении близ горизонта и около 0,23—при угле места  $70^\circ$ . Таким образом, при геометрической площади  $300 \pm 320 \text{ м}^2$  эффективная площадь равна соответственно 95 и  $75 \text{ м}^2$ .

Несмотря на то, что существует много радиотелескопов значительно большей площади, использование Пулковской антенны для радиоастрономических наблюдений на волне 33 см представляет некоторый интерес, так как ни один из радиотелескопов не обладает равной ей разрешающей способностью. Раствор горизонтальной диаграммы направленности антенны при раскрытии 128 м составляет  $12'$  (по точкам половинной интенсивности), что позволяет измерить координаты и распределение яркости некоторых протяженных источников радиоизлучения.

Для наблюдений на  $\lambda = 33 \text{ см}$  радиотелескоп был снабжен приемником прямого усиления на трех последовательно включенных лампах бегущей волны с общим усилием по высокой частоте 70 дБ и полосой пропускания 60 мгц. На входе приемника имелся механический коаксиальный модулятор, переключавший канал антенны на симметричный канал эквивалента с равной температурой, а на выходе—широкополосный видеодетектор, фильтр частоты модуляции, синхронный детектор и самописец. Для калибровки приемника применялся диодный шумовой генератор с аттенюатором, который, в свою очередь, калибровался по нагреваемой нагрузке. Чувствительность приемника при постоянной времени выходного фильтра 6 сек достигала  $0,1^\circ\text{K}$ . Приемник не был температурно стабилизован и поэтому отличался медленным увеличением коэффициента усиления и шум-фактора с течением времени. Для устранения дрейфа время прогрева приемника выбиралось так, чтобы изменением коэффициента усиления за короткое время измерений можно было пренебречь, а шум-фактор еще заметно не вырос. Приемник прост и надежен в работе, но страдает общим недостатком широкополосных устройств—чувствительностью к помехам.

С помощью описанной аппаратуры был исследован ряд галактических источников. Образцы некоторых записей радиоизлучения галактических источников представлены на рис. 2—4. Эффективная площадь радиотелескопа, измеренная по известным

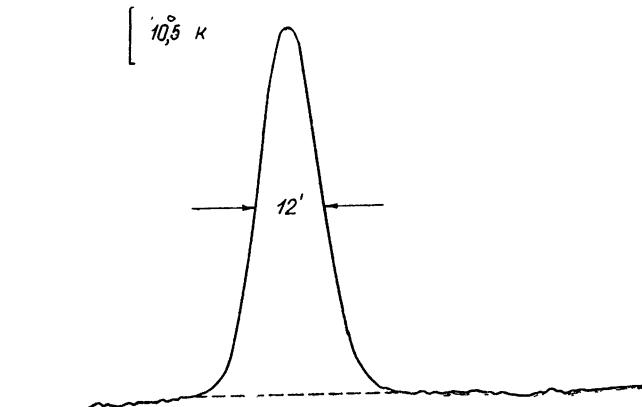


Рис. 1.

потокам радиоизлучения от дискретных источников, оказалась равной  $80 \pm 95 \text{ м}^2$ , что находится в хорошем соответствии с расчетными данными. Для суждения о разрешающей силе и чувствительности радиотелескопа может служить запись радиоизлучения источника Лебедь-А, (рис. 1).

Проведенные наблюдения позволили разрешить источник Стрелец-А [3] (рис. 1) и показать, что спектр галактического ядра не может быть объяснен только тепловым механизмом излучения [4]. Источники NGC6523 и NGC6514, записи излучения которых показаны на рис. 2, отличаются по склонению всего на  $51'$  и поэтому оба захватываются вертикальной диаграммой направленности, ширина которой при низких высотах наблюдения достигает  $10^\circ$ . Это, однако, не помешало определить прямое восхождение источников с точностью  $\pm 7,5$  сек и одномерные распределения яркости.

Наблюдения туманности NGC6618 (рис. 4) на волне  $33$  см подтвердили прежде выполненные измерения на волнах  $3$  и  $10$  см [5], в согласии с которыми центр тяжести излучения смещен относительно видимого ядра туманности.

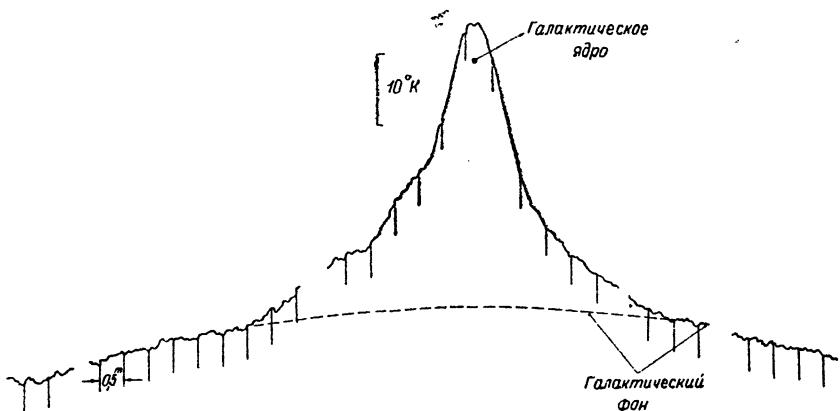


Рис. 2.

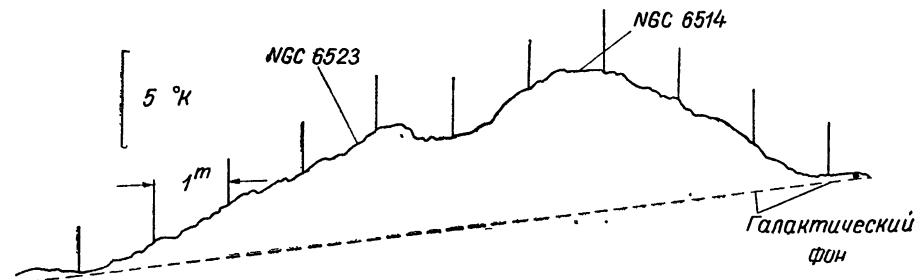


Рис. 3.

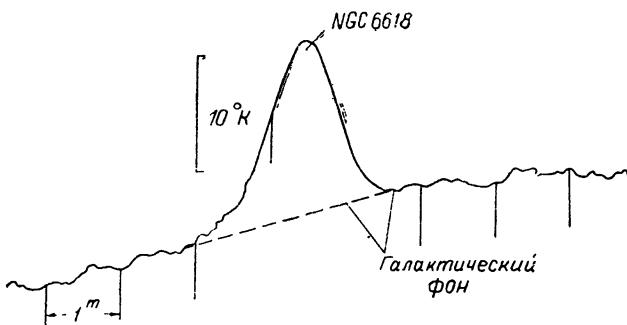


Рис. 4.

## ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Хайкин и Н. Л. Кайдановский, ПТЭ, № 2, 19 (1959).
2. С. Э. Хайкин, Н. Л. Кайдановский, Н. А. Есепкина и О. Н. Шиврис, Изв. ГАО, 21, № 164, 3 (1960).
3. В. Г. Малумян, ДАН СССР, 129, 1003 (1959).
4. В. Г. Малумян, Астрон. ж. (в печати).
5. Ю. Н. Парийский, Изв. ГАО, 21, № 164, 45 (1960).

Главная астрономическая обсерватория  
АН СССР

Поступила в редакцию  
28 декабря 1961 г.

### НАБЛЮДЕНИЕ ЗАТМЕНИЯ СОЛНЦА 15 февраля 1961 г. НА ВОЛНАХ 3,2 см и 1,6 см

*Су Ши-вень, Сяо Гуан-цзя, У Хуай-вей, Тун-ву, У Цзинь-ци,  
В. С. Троицкий, В. Л. Рахлин, К. М. Стрежнева, М. Р. Зелинская*

Наблюдения проводились в Ялте (Крым) в полосе полной фазы на волнах 3,2 см и 1,6 см и близ Горького при фазе затмения 0,937 на волне 3,2 см.

В радиотелескопах использовались модуляционные радиометры, разработанные и изготовленные в НИРФИ [1]. Флюктуационный порог чувствительности при постоянном времени выходного прибора 1 сек был равен соответственно 0,35 и 10°К на волнах 3,2 см и 1,6 см в Ялте и около 2° на волне 3,2 см в Горьком. В качестве антенн на 3,2 см использовались полутораметровое (Ялта) и однометровое (Горький) параболические зеркала с открытым концом волновода в качестве облучателя. Ширина диаграммы направленности на уровне 0,5 по мощности составляла при этом около 1°30' и 2° соответственно. На волне 1,6 см использовалось параболическое зеркало диаметром 4 м с облучателем в виде уплотненного рупора, что обеспечило ножевую диаграмму с шириной лепестка около 35' по углу места и около 1°20' по азимуту.

Погрешность абсолютных измерений для трехсантиметровой установки в Ялте составляла  $3 \pm 5\%$ ; для остальных радиотелескопов она была около 15%. Абсолютная температура Солнца в Ялте на 3,2 см определялась по сравнению с „искусственной Луной“ [2], на 1,6 см—по сравнению с радиоизлучением Луны, с учетом его фазового хода в соответствии с работой [3].

Результаты измерений солнечного радиоизлучения и расчетная кривая оптического затмения для полной фазы в Ялте приведены на рис. 1, 2; для частной фазы в Горьком—на рис. 3. По оси ординат отложена эффективная температура радиоизлучения Солнца  $T_{\odot}$ , по оси абсцисс—время. Пропуски на кривых радиозатмения соответствуют моментам контрольных калибровок аппаратуры по собственным шумам [4] и тепловому излучению нагретого черного тела.

На кривые на рис. 1–3 внесены все необходимые поправки, в том числе на радиоизлучение Луны и на поглощение в атмосфере (затмение началось при сравнительно небольшой, особенно в Горьком, высоте Солнца).

Кривые затмения на волнах 1,6 см и 3,2 см, полученные в результате измерений в Ялте, отличаются спокойным спадом и подъемом. Это указывает на то, что активных радиообластей на Солнце в день затмения не было. Не было в этот день сколько-нибудь значительных очагов повышенной активности и в видимом участке спектра. Ход затмения на рис. 1 и 2 мало отличается от рассчитанного для однородного диска радиусом  $R_{\text{эфф}} = 1,05 R_{\odot}$ , где  $R_{\odot}$ —оптический радиус Солнца (сплошные кривые на рисунках). Ход затмения на рис. 3, полученный в Горьком, в силу менее совершенной аппаратуры и влияния помех, а также более низкого положения Солнца (в Горьком наблюдения начались при высоте Солнца 9°, окончились при 21°, в Ялте высота менялась от 17° до 30°), оказался сильнее изрезанным\*. В начале максимальной фазы и 20 мин спустя ход кривой в Горьком искажен был явной помехой (на рис. 3 этому соответствуют пропуски с 8 час 20 мин до 8 час 30 мин и с 8 час 50 мин до 8 час 55 мин). Определить остаточное излучение  $\eta$ , а по нему и величину эффек-

\* Кривая на рис. 3 воспроизведена без сглаживания флюктуаций, на рис. 1 и 2 флюктуации сглажены.

тивного радиорадиуса Солнца  $R_{\text{эфф}}$  по горьковским измерениям удалось поэтому только со стороны верхней границы:  $\eta < 11,45\%$  (фаза 0,937),  $R_{\text{эфф}} \leq 1,05 R_{\odot}$ . Судя по крымским данным (полная фаза) на 3,2 см  $\eta = 5,7\%$  и  $R_{\text{эфф}} = 1,05$ ; на 1,6 см  $\eta = 4,3\%$ ,  $R_{\text{эфф}} = 1,048 R_{\odot}$ .

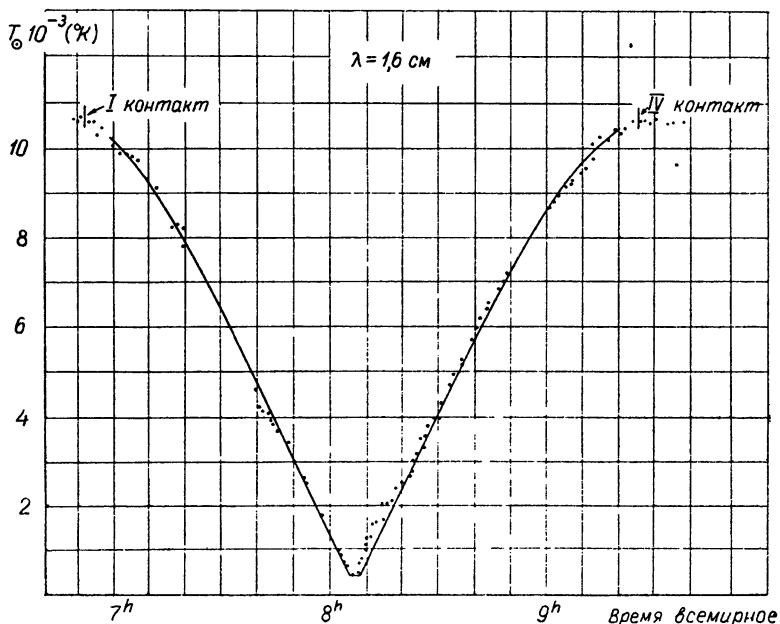


Рис. 1.

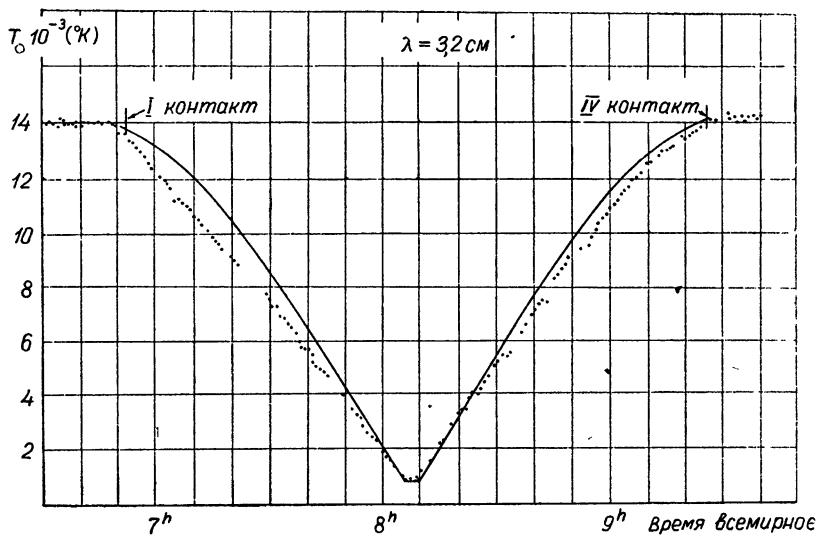


Рис. 2.

Абсолютная температура незатемненного Солнца 15 февраля 1961 г. на волне 3,2 см  $T_{\odot} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ }^{\circ}\text{K} \pm 5\%$  (Ялта);  $T_{\odot} = 1,28 \cdot 10^4 \text{ }^{\circ}\text{K} \pm 15\%$  (Горький); на волне 1,6 см  $T_{\odot} \approx 1,1 \cdot 10^4 \text{ }^{\circ}\text{K} \pm 10\%$  (Ялта).

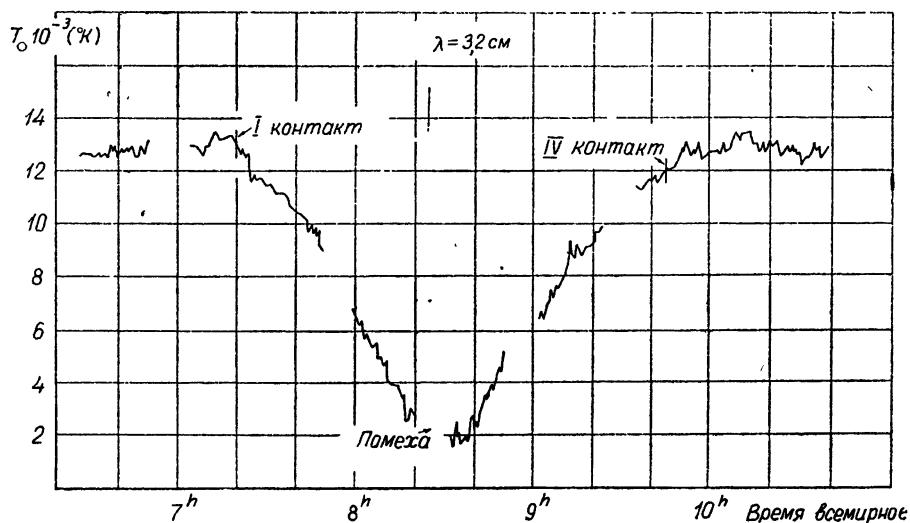


Рис. 3.

В таблице приведены значения остаточной интенсивности в максимальной фазе и рассчитанных по ним эффективных радиодиаметров Солнца, полученные за последние 10 лет по нашим наблюдениям затмений [6-8]. В последнем столбце указана радиотемпература Солнца  $T_{\odot}^*$ .

Год и характер затмения	Длина волны (см)	Остаточная интенсивность (%)	$R_{\text{эфф}}/R_{\odot}$	$T_{\odot}$ (°К)
1952 (полное)	3,2 10	5,2 15	1,057 1,12	$14 \cdot 10^3$ $49 \cdot 10^3$
1954 (полное)	3,2 10	0,71 5,94	1,038 1,067	$14 \cdot 10^3$ $55 \cdot 10^3$
1956 (частное)	3,2 10	43 43	1,1 1,1	$19 \cdot 10^3$ $70 \cdot 10^3$
1958 (кольцообразное)	1,6 3,2 10		1,03 1,05 1,05	$9 \cdot 10^3$ $21 \cdot 10^3$ $100 \cdot 10^3$
1961 (частное)	1,6 3,2	$\leq 11,45$	$\leq 1,05$	$13 \cdot 10^3$
1961 (полное)	1,6 3,2	4,3 5,7	1,048 1,050	$11 \cdot 10^3$ $15 \cdot 10^3$

Как видно из таблицы, температура и эффективные размеры Солнца на радиоволнах менялись в течение солнечного цикла. Особенно резко изменялась температура Солнца. Радиодиаметр за 9 лет на волне 3,2 см в среднем был равен 1,049 с минимальным значением 1,038 в 1954 г.\*\*. Следует заметить, что как на 3,2 см, так и на 10 см эффективные размеры Солнца в 1952 г. во время несколько повышенной по сравнению с 1954 г. солнечной деятельности (см., например, числа Вольфа

\* Значения эффективных температур, полученных в 1952, 1954 и 1956 гг. увеличены в соответствии с выводами работы [5].

\*\* Максимальное значение  $R_{\text{эфф}}=1,1 R_{\odot}$ , полученное в 1956 г., вследствие небольшой фазы затмения является ненадежным.

за 1952 г. и 1954 г.) были заметно увеличены, хотя эффективная температура в это время была минимальной и почти не отличалась от значений 1961 г. Можно полагать, тем не менее, что сжатие и расширение ответственных за сантиметровое излучение верхних слоев хромосферы и нижних слоев короны в течение всего солнечного цикла проходит, по-видимому, намного слабее, чем развитие общей активности Солнца.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Рахлин, Приборы и техника эксперимента (в печати).
2. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика (в печати).
3. М. Р. Зелинская, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Астрон. ж., 31, 643 (1959).
4. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1, 601 (1956); 2, 935 (1957).
5. Н. М. Цейтлин, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 389 (1961).
6. В. С. Троицкий, М. Р. Зелинская, В. Л. Рахлин, В. Т. Бобрик, Труды 5 совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956.
7. Д. Леня-о, А. Н. Малахов, В. М. Плечков, В. А. Разин, В. Л. Рахлин, К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева, Тан Шоу-Пэ, В. С. Троицкий, В. В. Хрулев, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 154 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
6 марта 1962 г.

## К ВОПРОСУ ОБ АБСОЛЮТНОМ ИЗМЕРЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

*Н. М. Цейтлин*

Существующие экспериментальные данные об абсолютной величине интенсивности распределенного космического радиоизлучения весьма неточны (погрешность обычно составляет  $20 \pm 50\%$  для наименьшей на данной частоте температуры радиоизлучения)\*. Основной причиной этого является трудность учета фонового радиоизлучения, попадающего в боковые и задние лепестки антенной диаграммы. При измерениях величины превышения интенсивности радиоизлучения одной области над интенсивностью излучения из какой-либо "опорной" области неба (относительные измерения) мешающее фоновое излучение удается в значительной степени ослабить, что обеспечивает большую точность измерений. Однако и при относительных измерениях необходимо учитывать параметры антенны (фактор рассеяния  $\beta$  и коэффициент полезного действия  $\eta$ ) и проводить тепловую калибровку, что снижает точность измерений (при этом, естественно, остается нерешенным вопрос об интенсивности излучения самой "опорной" области). Общеизвестен метод измерения путем сравнения с эталонным излучением, в качестве которого может быть использовано, например, излучение покрытого поглощающим материалом диска, закрывающего главный лепесток диаграммы (или его часть). При этом исключается фоновое радиоизлучение (что повышает точность измерений), но остается необходимость учета параметров антенны и проведения тепловой калибровки.

Можно, однако, исключить при измерениях также и необходимость в тепловой калибровке и учете параметров антенны, если воспользоваться нулевым методом измерений, т. е. исследовать те области неба, температура излучения которых равна (или близка) яркостной температуре замещающего эти области "черного" диска. Заметим, что, так как яркостная температура "черного" диска — порядка окружающей температуры, то указанные измерения могут проводиться лишь в узком диапазоне метровых длин волн (ориентировочно от 1 до 2,5 м, где есть области с яркостной температурой порядка 300°K). Погрешность абсолютного измерения интенсивности излучения из этих областей будет определяться только неточностью в значении яркостной температуры "черного" диска, не превышающей нескольких процентов.

Целью настоящей заметки является обратить внимание на эту возможность точных абсолютных измерений и рассмотреть вопросы ее практической реализации.

\* Например, на волне 1,5 м температура радиоизлучения из области Полярной звезды составляет, согласно [1], около 100°K, в то время как, согласно [2], она равна 200°K.

Рассмотрим прием антеннной радиоизлучения „черного“ диска с постоянной по диску яркостной температурой  $T_d$ , видимого из антенны в телесном угле  $\Omega_d$ , и радиоизлучения из исследуемой области неба с усредненной по части телесного угла диаграммы  $\Omega_a = \Omega_d$  температурой излучения  $\bar{T}_x^*$ . Отклик антенны на радиоизлучение диска и неба, как известно (см., например, [3, 4]), равен соответственно:

$$T_{a_d} = T_d (1 - \beta) \eta + T_{b_1} \beta \eta + T_0 (1 - \eta); \quad (1)$$

$$T_{a_x} = \bar{T}_x (1 - \beta) \eta + T_{b_2} \beta \eta + T_0 (1 - \eta), \quad (2)$$

где  $\beta = \int F d\Omega / \int F d\Omega$  — фактор рассеяния относительно телесного угла  $\Omega_a$  (доля мощности, излучаемой антенной вне  $\Omega_a$ ),  $T_0$  — температура материала антенны, а  $T_{b_1}$  и  $T_{b_2}$  — соответственно усредненное по боковым и задним лепесткам диаграммы фоновое радиоизлучение\*\*. При наблюдении диска под тем же углом, что и исследуемая область неба (т. е. при замещении диском этой области),  $T_{b_1} = T_{b_2}$  и, следовательно,

$$\Delta T_{a_d-x} = T_{a_d} - T_{a_x} = (T_d - \bar{T}_x) (1 - \beta) \eta. \quad (3)$$

Из (3) видно, что погрешность в искомой величине  $\bar{T}_x$  при известной  $T_d$  определяется неопределенностью параметров антенны  $\beta$  и  $\eta$ , а также погрешностью тепловой калибровки аппаратуры. Эти ошибки можно исключить, используя нулевой метод, а именно, отыскивая на небе область, при наблюдении которой  $T_{a_d} - T_{a_x} = 0$ .

При этом  $\bar{T}_x = T_d$ , и погрешность в определении  $\bar{T}_x$  определяется лишь неопределенностью в величине  $T_d$ , не превышающей нескольких процентов. Практически можно заранее направить антенну в область с близкой к  $T_0 = 300^\circ\text{K}$  температурой и наблюдать прохождение областей неба через неподвижную диаграмму, систематически контролируя  $\Delta T_{a_d-x}$  до получения  $\Delta T_{a_d-x} = 0$ \*\*\*.

При проведении измерений с использованием „черного“ диска желательно, чтобы диск, располагаясь в дальней зоне антенны (на расстоянии  $r \approx D^2/\lambda$ , где  $D$  — диаметр раскрыва,  $\lambda$  — длина волн), закрывал практически весь главный лепесток ( $\Omega_{gl}$ ) для исключения дифракционных явлений на диске; линейные размеры диска при этом — порядка  $d_d \approx 2D^{***}$ , что технически трудно осуществимо при больших антенах. Можно, однако, использовать диск, закрывающий лишь часть главного лепестка диаграммы, аналогично тому, как это делается на сантиметровых и дециметровых волнах (см. [4–6]). Возникающие при этом дифракционные явления на диске (дифракционная диаграмма, по которой принимается излучение земли и фона за диском) при нулевом методе измерений не могут привести к существенным ошибкам, так как и диск, и фон за диском, и земля имеют примерно одинаковую яркостную температуру, близкую к  $300^\circ\text{K}$ . Поэтому измерения желательно проводить на вертикальной поляризации (на которой земля „ближе“ к „черному“ телу) и наблюдать диск на таких углах к горизонту, когда главный лепесток диаграммы практически уже не касается земли.

Если расположить диск на расстоянии  $r \approx D^2/\lambda$  от антенны под видимым из антенны углом места, равным полуширине главного лепестка диаграммы (до первого нуля)  $\Delta\theta \approx 1,2\lambda/D$ , то высота расположения диска будет равна

\* Величина  $\bar{T}_x = \int T_x F d\Omega / \int F d\Omega$ , где  $T_x$  — яркостная температура неба,  $F$  — диаграмма антенны по мощности.

\*\* Как видно из (2), погрешность при абсолютных измерениях  $\bar{T}_x$ , как уже сказано, определяется не только неточностью в  $\beta$  и  $\eta$ , но и неопределенностью фоновых шумов  $T_b$ . При относительных измерениях  $\Delta T_{a_x} \approx (\bar{T}_x - T_{on}) (1 - \beta) \eta$  и погрешность в величине  $(\bar{T}_x - T_{on})$  определяется лишь неточностью  $\beta$  и  $\eta$ ; однако при этом неизвестна величина  $T_{on}$  — температура излучения опорной области. В обоих случаях необходима тепловая калибровка, что тоже вносит определенную погрешность.

\*\*\* Заметим, что, как следует из (3), относительная погрешность  $\gamma_{\bar{T}_x}$  в определении  $\bar{T}_x$  при прочих равных условиях существенно уменьшается с уменьшением  $\Delta T_{a_d-x}$ .

Очевидно, что если  $[\Delta T_{a_d-x}/(1-\beta)] \eta \approx \frac{1}{n} T_d \ll T_d$ , то  $\gamma_{\bar{T}_x} \approx \frac{1}{n} (\gamma_{\Delta T_a} + \gamma_{(1-\beta)} + \gamma_\eta)$ ,

где через  $\gamma_{\Delta T_a}$ ,  $\gamma_{(1-\beta)}$  и  $\gamma_\eta$  обозначены относительные ошибки в значениях  $\Delta T_a$ ,  $(1-\beta)$  и  $\eta$ . Из сказанного следует, что можно достаточно точно измерять  $T_x \approx 250^\circ\text{K} \neq T_d$  при  $\Delta T_{a_d-x} \neq 0$ .

\*\*\*\* Кроме того,  $d_d \geq (5 \div 10) \lambda$ .

$$h \simeq r\Delta\vartheta = 1,2D. \quad (4)$$

Согласно (4), целесообразно проводить измерения с малыми антеннами. При этом, однако, надо учесть, что измеряется температура неба, усредненная по телесному углу видимого из антенны диска. Принимая в качестве угловых размеров области усреднения величину  $10 \div 15^\circ$ , а в качестве диаметра диска  $d_d = 5\lambda \simeq 5 \div 10 \text{ м}$ , получаем, что диск должен быть расположен на расстоянии  $r \simeq 25\lambda$ . Если предположить, что это расстояние равно  $D^2/\lambda$  (т. е. диск расположен в дальней зоне антенны), то для диаметра антенны получаем:

$$D = d_d = 5\lambda. \quad (5)$$

Таким образом, на волнах  $1 \div 2,5 \text{ м}$  целесообразно использовать антенны с диаметром раскрыва  $D = 5 \div 12 \text{ м}$  и соответствующие диски с  $d_d = D$ , расположенные на расстоянии  $25 \div 60 \text{ м}$  от антенны на высоте  $h = 6 \div 14 \text{ м}$ , что технически нетрудно осуществить. Видимый угловой размер диска при этом составит примерно половину главного лепестка диаграммы, а диск наблюдается под углом около  $15^\circ$ , что делает дифракционные поправки еще менее существенными (см. [5])\*.

При проведении измерений с использованием замещающего „черного“ диска можно располагать диск и в области френелевой дифракции (что практически легче осуществимо), подобрав размеры диска так, чтобы через него проходила вся мощность, идущая в главный лепесток диаграммы (при этом исключаются возможные дифракционные явления на диске). Соответствующий расчет нетрудно провести, используя результаты работы [7]. При этом могут возникнуть дополнительные погрешности за счет перераспределения в пространстве боковых лепестков во френелевой зоне по сравнению с фраунгоферовой. Однако эти погрешности, по-видимому, несущественны в силу изотропности в пространстве боковых и задних лепестков.

Описанный метод измерений позволяет весьма точно проэталонировать величину интенсивности космического радиоизлучения из отдельных областей неба в диапазоне волн  $1 \div 2,5 \text{ м}$ , что дает возможность, во-первых, использовать эти области в качестве „опорных“ при измерениях изофот космического радиоизлучения и, во-вторых, исправить существующие радиоизофоты. При наличии идентичных по своим параметрам антенн на различных волнах указанного диапазона использование проэталонированных областей и „черного“ диска может оказаться полезным при измерении спектрального индекса интенсивности космического радиоизлучения в этом диапазоне (см. [8]).

Применение больших антенн с диаметром раскрыва  $50 \div 100 \text{ м}$  позволяет использовать в качестве „черного“ диска Луну, средняя температура которой в метровом диапазоне—около  $220^\circ\text{K}$  с возможной ошибкой порядка  $10\%$ . Таким образом могут быть проэталонированы сублии с температурой радиоизлучения около  $220^\circ\text{K}$ , что в сочетании с измерениями посредством малых антенн дает уже две опорные области неба.

Автор благодарен В. С. Троицкому за обсуждение настоящей заметки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. C. Allen, C. Gunt, Aust. J. Sci. Res., A8, 233 (1950).
2. F. Dröge, W. Rieger, Zeit. Astrophys., 40, 236 (1956).
3. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 334 (1960).
4. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 393 (1961).
5. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 759 (1961).
6. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
7. M. K. Hu, Radio Propagation, 65D, № 2, 137 (1961).
8. Г. Г. Гетманцев, В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 марта 1962 г.

---

\* При нулевом методе нет необходимости в точном измерении углового диаметра диска  $\vartheta_d$ , так как он определяет лишь область усреднения  $T_x$ . При ненулевых сравнительных измерениях надо знать  $\vartheta_d$  для определения величины  $\beta$  вне этого угла.

## О ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

*E. E. Ловецкий*

В работе [1] получено выражение для комплексной диэлектрической проницаемости полностью ионизованной разреженной плазмы в области частот, значительно превышающих ленгмюровскую частоту электронов. Вычисления проводились для изотермической плазмы. Настоящее сообщение посвящено вопросу о высокочастотной диэлектрической проницаемости неизотермической плазмы, в которой  $T_e > T_i$ , где  $T_e$  и  $T_i$ —температуры электронов и ионов. Нас будет интересовать область частот, в которой переменная частота  $\omega$  значительно превышает ленгмюровскую частоту электронов  $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi N_e e^2/m}$ , будучи в то же время много меньше  $\omega_{\max} = T_e^{3/2} / |ee_i| \sqrt{2m}$ . В этой области частот для изотропной плазмы, как известно [2], существует мнимая поправка к диэлектрической проницаемости, квадратичная по числу частиц в единице объема и зависящая от частоты по закону  $\omega^{-3} \ln(\omega/\omega_{\max})$ . Ниже получена соответствующая действительная поправка, зависимость которой от частоты имеет вид  $\omega^{-3} \operatorname{sgn} \omega$ ; найдена также поправка к тензору диэлектрической проницаемости плазмы, находящейся в сильном магнитном поле  $B$ . При этом переменная частота должна быть много больше электронной ленгмюровской частоты, но может быть как больше, так и меньше гироскопических частот плазмы. Плазма находится в пространственно однородном электрическом поле, периодически зависящем от времени. Для получения диэлектрической проницаемости плазмы было решено кинетическое уравнение для установленных быстропеременных процессов [1] методом возмущений по малому интегралу столкновений.

Поскольку способ исследования, применяемый в настоящей работе, и основные предположения такие же, как в работе [1], мы прямо перейдем к изложению результатов.

В случае изотропной неизотермической плазмы с одним сортом ионов, пренебрегая членами с положительным отношением массы электрона к массе иона, для диэлектрической проницаемости получим:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} + i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^3} \nu_{\text{эфф}}(\omega) - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^3} \omega_{\text{эфф}} \operatorname{sgn} \omega, \quad (1)$$

где

$$\nu_{\text{эфф}}(\omega) = \frac{4}{3} \left( \frac{2\pi}{m} \right)^{1/2} \frac{(ee_i)^2 N_i}{T_e^{3/2}} \ln \left| \frac{T_e^{3/2}}{\gamma \omega (2m)^{1/2} |ee_i|} \right|; \quad (2)$$

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{(2\pi)^{3/2} (ee_i)^2 N_i}{3m^{1/2} T_e^{3/2}}. \quad (3)$$

Индекс  $e$  относится к электронам,  $i$ —к ионам,  $e$ —заряд,  $N$ —концентрация частиц,  $m, M$ —массы электрона и иона,  $\gamma = 1,731$ . Существенное отличие формулы (1) от полученной ранее заключается в том, что выражение для диэлектрической проницаемости определяется температурой электронов, а не средней температурой частиц плазмы. Это может существенно изменить величину поправок к  $\epsilon(\omega)$  в случае большой разности температур электронов и ионов.

Для неизотермической плазмы, помещенной в постоянное магнитное поле, эрмитовская часть поправки к тензору диэлектрической проницаемости, возникающая при учете интеграла столкновений, имеет вид:

$$\delta\epsilon_{ij}^{(3)} = -\frac{3}{2} \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{\text{эфф}}}{\omega^3} \operatorname{sgn} \omega \left\{ \frac{B_i B_j}{B^2} + T_{ij}^\perp \ln \left| \frac{\Omega_e}{\omega} \right| \right\} \quad (4)$$

в области частот  $\Omega_e \gg \omega \gg \Omega_e (m T_i / M T_e)^{1/2}$ ;

$$\delta\epsilon_{ij}^{(3)} = -\frac{3}{2} \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{\text{эфф}}}{\omega^3} \operatorname{sgn} \omega \left\{ \frac{B_i B_j}{B^2} + \frac{1}{2} T_{ij}^\perp \left( \ln \frac{4 M T_e}{m T_i} + 2 \frac{T_e}{T_i} - 5 \right) \right\} \quad (5)$$

в области  $\Omega_e (m T_i / M T_e)^{1/2} \gg \omega \gg \Omega_i$  и

$$\delta\epsilon_{ij}^{(3)} = -\frac{\omega_{Le}^2 \omega_{\text{эфф}}}{\omega^3} \operatorname{sgn} \omega \left\{ \frac{B_i B_j}{B^2} + T_{ij}^\perp \ln \left| \frac{\Omega_i}{\omega} \left( \frac{M T_e}{m T_i} \right)^{1/2} \right| \right\}, \quad (6)$$

если  $\Omega_i \gg \omega$ . Здесь

$$T_{ij}^{\perp} = -\frac{2i\omega^3}{\Omega_e^2} e_{ijk} \frac{B_k}{B} \left( \frac{\Omega_e}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\Omega_i}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right) \left( \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right) - \\ - \frac{\omega^2}{\Omega_e^2} \frac{B_i B_j - \delta_{ij} B^2}{B^2} \left\{ \omega^2 \left( \frac{\Omega_e}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\Omega_i}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right)^2 + \left( \frac{\Omega_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right)^2 \right\}. \quad (7)$$

Для антиэрмитовской части поправки к тензору диэлектрической проницаемости получено выражение:

$$\delta\varepsilon_{ij}^{(a)} = i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^3} \left\{ \frac{B_i B_j}{B^2} (\nu_{\text{ЭФФ}} + \delta\nu_{||}) + T_{ij}^{\perp} (\nu_{\text{ЭФФ}} + \delta\nu_{\perp}) \right\}, \quad (8)$$

где

$$\nu_{\text{ЭФФ}} = \frac{4}{3} \left( \frac{2\pi}{m} \right)^{1/2} \frac{(ee_i)^2 N_i}{T_e^{3/2}} \ln \frac{T_e^{1/2}}{\gamma \Omega_e (2m)^{1/2} |ee_i|}; \quad (9)$$

$$\delta\nu_{||} = 2 \left( \frac{2\pi}{m} \right)^{1/2} \frac{(ee_i)^2 N_i}{T_e^{3/2}} \ln \left| \frac{\Omega_e}{\gamma \omega} \right|;$$

$$\delta\nu_{\perp} = \left( \frac{2\pi}{m} \right)^{1/2} \frac{(ee_i)^2 N_i}{T_e^{3/2}} \left( \ln \left| \frac{\Omega_e}{\omega} \right| \right)^2; \quad (10)$$

если  $\Omega_e \gg \omega \gg \Omega_e (m T_i / M T_e)^{1/2}$ ;

$$\delta\nu_{\perp} = \left( \frac{2\pi}{m} \right)^{1/2} \frac{(ee_i)^2 N_i}{T_e^{3/2}} \left\{ \ln \left| \frac{\Omega_e}{\omega} \right| \left( \ln \frac{4 M T_e}{m T_i} + 2 \frac{T_e}{T_i} - 3 \right) - \frac{1}{4} \left( \ln \frac{M T_e}{m T_i} \right)^2 \right\} \quad (10a)$$

при  $\Omega_e (m T_i / M T_e)^{1/2} \gg \omega \gg \Omega_i$ ;

$$\delta\nu_{\perp} = \left( \frac{2\pi}{m} \right)^{1/2} \frac{(ee_i)^2 N_i}{T_e^{3/2}} \left\{ \left( \ln \left| \frac{\Omega_i}{\omega} \right| \right)^2 + \ln \left| \frac{\Omega_e}{\omega} \right| \ln \frac{M T_e}{m T_i} - \frac{1}{4} \left( \ln \frac{M T_e}{m T_i} \right)^2 \right\} \quad (10b)$$

для  $\Omega_i \gg \omega$ .

В формулы (4)–(6) и (8), полученные при условии  $M T_i / m T_e \gg 1$ , входит отношение температур  $T_e / T_i$ . В случае сильно неизотермической плазмы это отношение может значительно изменить величину поправки к тензору диэлектрической проницаемости.

В случае  $M T_i / m T_e \ll 1$  соответствующие поправки к тензору диэлектрической проницаемости будут иметь вид:

$$\delta\varepsilon_{ij}^{(a)} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{\text{ЭФФ}}}{\omega^3} \operatorname{sgn} \omega \left( \frac{B_i B_j}{B^2} + T_{ij}^{\perp} \ln \left| \frac{\Omega_e}{\omega} \right| \right)^*; \quad (11)$$

$$\delta\varepsilon_{ij}^{(a)} = i \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^3} \left\{ \frac{B_i B_j}{B^2} (\nu_{\text{ЭФФ}} + \delta\nu_{||}) + T_{ij}^{\perp} \left[ \nu_{\text{ЭФФ}} + \left( \frac{2\pi}{m} \right)^{1/2} \frac{(ee_i)^2 N_i}{T_e^{3/2}} \left( \ln \left| \frac{\Omega_e}{\omega} \right| \right)^2 \right] \right\} \quad (12)$$

$(\Omega_e \gg \omega)$ .

В этом случае поправки к тензору диэлектрической проницаемости определяются только температурой электронов.

Приношу глубокую благодарность В. П. Силину за обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, О высокочастотной диэлектрической проницаемости плазмы, ЖЭТФ, 41, 861 (1961).
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.

# О ВОЗМОЖНОСТИ НАБЛЮДЕНИЯ СЛОЖНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО СОСТАВА ИЗЛУЧЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА В СРЕДЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ АБСОЛЮТНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

Г. Л. Сукин

В 1942 г. Франком было впервые показано [1], что движущийся в диспергирующей среде источник может одновременно излучать в одном направлении несколько частот (сложный Допплер-эффект и сложный эффект Вавилова—Черенкова). Позднее [2] им же была выяснена связь условий возникновения сложного Допплер-эффекта

$$\frac{v \cos \theta}{W(\omega_0)} > 1; \quad W^{-1}(\omega) = \frac{1}{c} \left[ n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right] \quad (1)$$

с групповой скоростью  $W_{\text{grp}}$ .

Однако, насколько нам известно, сложный спектральный состав допплеровского излучения и излучения Вавилова—Черенкова не только до сих пор экспериментально никем не обнаружен, но в значительной мере остается неясным тот круг явлений, где его возникновение может оказаться существенным. В частности, Франк [2] отмечал, что на опыте должен наблюдаться случай сложного эффекта Вавилова—Черенкова, однако вторая частота обычно лежит в области аномальной дисперсии и не обнаруживается ввиду сильного поглощения. Это обстоятельство, по нашему мнению, следует целиком отнести за счет того, что ранее сложный спектральный состав излучения движущегося источника рассматривался лишь в поглощающих средах при положительной абсолютной температуре  $T$  [3]. Цель работы—показать, что сложный спектральный состав излучения сохраняется и в средах с  $T < 0$ , где он, по-видимому, может наблюдаться с меньшими трудностями.

Действительно, показатель преломления  $n(\omega)$  и коэффициент поглощения  $k(\omega)$  в случае, например, газов, могут быть записаны в виде:

$$n(\omega) = 1 + \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{n < m} \frac{\omega_{mn} |d_{mn}|^2 (\omega_{mn}^2 - \omega^2)}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_{mn}^2 \omega^2} (N_n - N_m);$$

$$k(\omega) = \frac{4\pi}{\hbar} \sum_{n < m} \frac{\gamma_{mn} \omega_{mn} \omega |d_{mn}|^2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_{mn}^2 \omega^2} (N_n - N_m), \quad (2)$$

где  $d_{mn}$ —матричный элемент дипольного момента,  $N_n$ ,  $N_m$ —число осцилляторов на нижнем и на верхнем уровне соответственно.

Если  $T > 0$ , то в равновесных состояниях, в силу распределения Больцмана,  $N_m < N_n$ . В интервалах порядка  $|\omega_{mn} - \omega| < \gamma_{mn}$  дисперсия аномальная, а вне его—нормальная ( $k(\omega) > 0$ —поглощение).

Пусть в области вблизи фиксированной частоты  $\omega_{mn}^0$  имеет место неравенство  $N_m^0 > N_n^0$ , а остальные частоты  $\omega_{mn}$  достаточно удалены и их влиянием можно пренебречь. Тогда в интервале частот порядка  $|\omega_{mn}^0 - \omega| < \gamma_{mn}^0$ , согласно (2), дисперсия нормальная, вне его—аномальная, переходящая далее снова в нормальную ( $k_0(\omega) < 0$ —отрицательное поглощение). Как известно (см., например, [4]), для такой системы можно определить отрицательную абсолютную температуру  $T$ . Справедливость приведенного выше рассуждения не ограничивается случаем разреженного газа и его можно надлежащим образом обобщить на произвольные среды (твердое тело, плазма и т. д.). Известны разнообразные системы (молекулярные, параметрические, ферритовые усилители, лазеры и т. д.), в которых среда тем или иным способом искусственно поддерживается при  $T < 0$  в определенном интервале частот.

При малых интенсивностях  $n(\omega)$ ,  $k(\omega)$  не зависят от полей  $E$  и  $H$ ; поэтому в силу линейности уравнений Максвелла все основные результаты работ [1, 2] и следствия из них [3] остаются справедливыми при  $T < 0$ , с той лишь разницей, что меняется ход дисперсионной кривой. Сложный состав излучения движущегося источника в этом случае попадает в область с отрицательным поглощением. Излучение при этом не ослабляется средой, как это имело место при  $T > 0$ , а, наоборот, усиливается. Так, в параметрических либо ферромагнитных кристаллах при  $T < 0$  усиленное излучение движущейся частицы сохраняет все особенности, присущие случаю анизотропной среды [3]. Если при  $T < 0$  в области аномальной дисперсии  $n(\omega) < \omega |dn/d\omega|$ , т. е. в силу наличия отрицательного поглощения ( $k(\omega) < 0$ ) в принципе возможно наблюдение эффектов, связанных с отрицательной групповой скоростью [3].

Используя (1), (2) при  $|\omega_{mn}^0 - \omega_\theta| \ll \gamma_{mn}^0$  и  $n < \omega |dn/d\omega|$ , для газов получим:

$$\frac{8\pi\omega_\theta |d_{mn}|^2 v \cos \theta}{c\hbar (\gamma_{mn}^0)^2} (N_m - N_n) \geq 1. \quad (3)$$

Для сложного эффекта Вавилова—Черенкова [2] условие (3) может быть сравнительно легко выполнено за счет больших скоростей движения заряженной частицы. Оно, по-видимому, может выполняться и для молекулярных газов при скоростях порядка тепловых.

Так, для молекул аммиака (инверсионный переход  $J = 3$ ,  $K=3$ ,  $d_{mn} \sim 1.5 \cdot 10^{-18}$ ,  $f_{mn}^0 \sim 2.4 \cdot 10^{10}$  гц,  $\gamma_{mn}^0 \sim 12\pi \cdot 10^4$ ) условие (3) выполняется для  $v \sim 5 \cdot 10^4$  см · сек<sup>-1</sup> при  $(N_m - N_n) \sim 10^{13} \div 10^{14}$ , что, по всей вероятности, вряд ли достижимо. Однако, если имеется достаточно монокинетический молекулярный пучок ( $v_m \sim \text{const}$ ), то вполне реально получение более узких линий. При  $\gamma_{mn}^0 \sim 2\pi \cdot 10^2$  ( $N_m - N_n \sim 10^7 \div 10^8$ ). Допуская, что центральная из трех частот  $\omega_{\theta 1} = \omega_{mn}$ , и используя (2) для  $\omega_{mn} - \omega_{\theta 2,3} < \gamma_{mn}^0$  при  $\cos \theta \sim 0.3$ ,  $|\omega_{mn} - \omega_\theta| \sim 2\pi \cdot 10^4$ , получим, что разнос боковых частот от центральной  $\Delta f_{1l}$  составляет в рассматриваемом примере  $\pm 50$  гц. Рассуждения, полностью аналогичные использованным в [1], при  $k(\omega) \neq 0$ ;  $\beta n \cos \theta \ll 1$ ;  $\beta k \cos \theta \ll 1$ ;  $\beta \omega_\theta \gg 1$  приводят к выражению для ширины линии в спектре сложного состава излучения в виде\*

$$\Delta f_\theta \approx \frac{k(\omega_\theta)}{2\pi \left( \frac{dn}{d\omega} - \frac{dk}{d\omega} \right) \omega_\theta},$$

откуда  $\Delta f_\theta \sim 5 \div 10$  гц. Поэтому  $\Delta f_\theta < \Delta f_{1l}$  и спектральные компоненты при фиксированном  $\Theta$  оказываются разрешимыми. Тем самым появляется возможность наблюдения сложного спектрального состава излучения движущихся осцилляторов. Аналогичным путем можно провести оценки для других случаев (твердое тело, плазма и т. д.).

Таким образом, в среде при  $T < 0$  устраивается поглощение, мешавшее ранее наблюдению. Одновременно условие  $T < 0$  очерчивает тот круг физических явлений, где сложный спектральный состав излучения движущейся частицы существенен (в частности, он, по-видимому, весьма важен для лазеров, молекулярных усилителей и т. д.).

В заключение мы пользуемся случаем выразить благодарность И. М. Франку за внимание к работе, а также участникам семинара ФИАН, руководимого В. Л. Гинзбургом, в частности, Б. М. Болотовскому за стимулирующее обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Франк, Изв. АН СССР, сер. физ., 6, 1 (1942)
2. И. М. Франк, ЖЭТФ, 36, 823 (1959).
3. П. А. Черенков, И. Е. Тамм, И. М. Франк, Нобелевские лекции, Физматгиз, М., 1962, стр. 35.
4. Ч. Киттель, Элементарная статистическая физика, ИЛ, М., 1960

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
19 февраля 1962 г.

*Примечание при корректуре.* На необходимость учета уширения линии обратил  
наше внимание К. А. Барсуков.

## К ТЕОРИИ ВНЕШНЕГО ФОТОЭФФЕКТА С ПОЛУПРОВОДНИКОВ С БОЛЬШОЙ ГЛУБИНОЙ ВЫХОДА ФОТОЭЛЕКТРОНОВ

З. И. Урицкий и В. Б. Тулвинский

Внешний фотоэффект с полупроводниками в случае, когда эффективная глубина выхода фотоэлектронов много больше длины свободного пробега электронов в кристалле, будет определяться процессами переброса электронов светом из валентной

зоны в зону проводимости. При этом следует рассматривать кинетическое уравнение для электронов. Если эффективная глубина выхода много меньше эффективной глубины поглощения, в уравнении можно не учитывать неоднородность по координатам.

Предполагая, что участием вылетевших фотоэлектронов в установлении равновесия можно пренебречь, будем описывать стационарное распределение фотоэлектронов внутри полупроводника найденной Фрелихом функцией распределения [1]:

$$f(E) = \frac{2}{V\pi} \frac{n}{D_0} (1-\gamma) e^{-E/kT} + \frac{n}{D_0} \gamma \left( \frac{kT}{E_0} \right)^{3/2} \begin{cases} \exp \left( \gamma \frac{E-E_0}{E_0} \right) & (E < E_0) \\ \exp \left( -\frac{E-E_0}{kT} \right) & (E > E_0) \end{cases}. \quad (1)$$

Здесь  $n$  — число электронов, возбужденных светом внутри полупроводника,  $D_0 = 4\pi(2m_-kT)^{3/2}\Omega/\hbar^3$ ,  $\Omega$  — объем полупроводника,  $E_0 = \frac{m_-}{m_-} h(v-v_0)$  — энергия фотоэлектрона в момент возбуждения,  $m_-$  — эффективная масса электрона проводимости,  $m$  — приведенная эффективная масса электрона и дырки,  $h\nu_0$  — ширина запрещенной зоны,  $v$  — частота света,  $\gamma = \tau_G/\tau_R$  ( $\tau_R$  — среднее время пребывания электрона в зоне проводимости,  $\tau_G$  — время „остывания“ электрона). Это распределение существенно отличается от рассмотренного в [2] в случае высокого уровня возбуждения, когда немонотонность функции распределения Фрелиха становится значительной и дает ощущимый вклад в характеристики фотоэмиссии.

*Распределение эмитированных электронов по импульсам.* Как и в [2], определим число эмитированных фотоэлектронов, считая, что плоскость  $x=0$  совпадает с поверхностью полупроводника:

$$n(p_x) = \frac{2p_x}{\hbar^3} \int \int f(E) dp_y dp_z; \quad E = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m_-} + W.$$

Отсюда следует, что в случае а)  $E_0 < W$  ( $W$  — термоэлектронная работа выхода)

$$\frac{n_1(p_x)}{n_0} = \left[ ae^{-W/kT} + \left( \frac{kT}{E_0} \right)^{3/2} e^{(E_0-W)/kT} \right] p_x e^{-p_x^2/2m_-kT};$$

$$n_0 = \frac{m_- k T n \gamma}{2\pi^2 \hbar^3 D_0}; \quad a = \frac{2(1-\gamma)}{\gamma V \pi}, \quad (2)$$

т. е. немонотонность функции распределения оказывается несущественной (см. [2]); б)  $E_0 > W$

$$\frac{n_{2a}(p_x)}{n_0} = p_x \left\{ ae^{-W/kT - p_x^2/2m_-kT} + \left( \frac{kT}{E_0} \right)^{3/2} \left[ \frac{E_0}{\gamma k T} \left( 1 - e^{-\gamma + \gamma W/E_0 + p_x^2/2m_-E_0} \right) + 1 \right] \right\};$$

$$\frac{p_x^2}{2m_-} < E_0 - W;$$

$$\frac{n_{2b}(p_x)}{n_0} = \left[ ae^{-W/kT} + \left( \frac{kT}{E_0} \right)^{3/2} e^{(E_0-W)/kT} \right] p_x e^{-p_x^2/2m_-kT}; \quad (2a)$$

$$\frac{p_x^2}{2m_-} > E_0 - W,$$

причем в точке смыкания  $p_c = \sqrt{2m_-(E_0 - W)}$  имеют место соотношения:  $n_{2a}(p_c) = n_{2b}(p_c)$ ,  $\frac{\partial n_{2a}}{\partial p_x}(p_c) = \frac{\partial n_{2b}}{\partial p_x}(p_c)$ .

При больших энергиях падающего света ( $E_0 - W \gg kT$ ) кривая  $n_2(p_x)$  (рис. 1) имеет выпуклость в окрестности  $\sqrt{m_- k T}$  и достигает максимума при  $\sqrt{\frac{2}{3} m_- (E_0 - W)}$ .

При уменьшении  $E_0 - W$  точка смыкания  $p_c$  перемещается влево по кривой, становясь при  $E_0 - W = kT/2$  точкой максимума  $n_2(p_x)$ . При этом максимум также смещается

влево по кривой  $n_2(p_x)$ , уменьшаясь по величине от значения  $\sqrt{\frac{2}{3} m_- (E_0 - W)}$

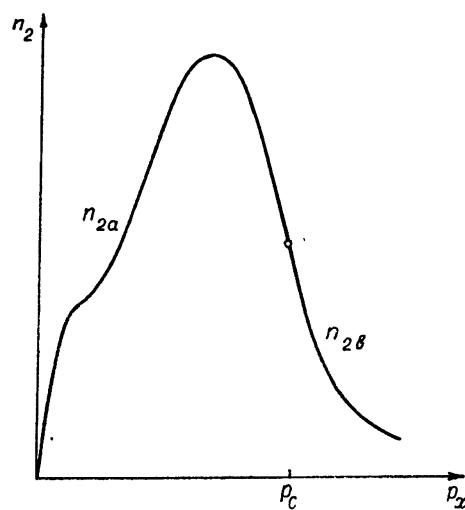


Рис. 1.

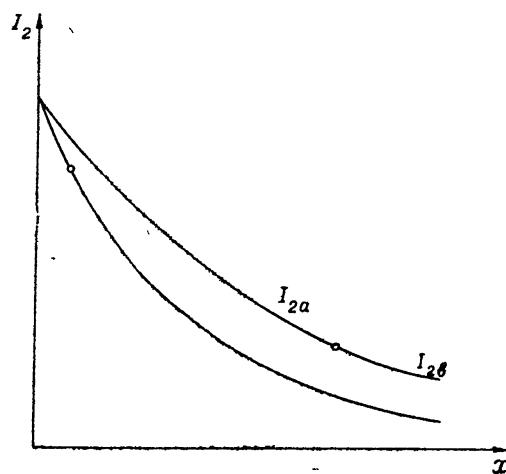


Рис. 2.

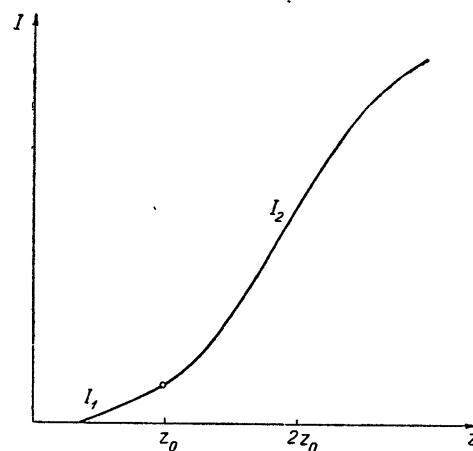


Рис. 3.

при  $E_0 - W \gg kT$  до  $\sqrt{m-kT}$  при  $E_0 - W = kT/2$ ; дальнейшее ослабление света на положение максимума почти не влияет. Это соответствует наблюдаемому на опыте [3]. Сравнивая с [2], видим, что при  $E_0 - W \gg kT$  результаты существенно различны.

*Вольтамперная характеристика фототока.* Вольтамперную характеристику получим из (2), (3), (3a):

$$I(V) = \int_{eV}^{\infty} n(W + \varepsilon) d\varepsilon; \quad \varepsilon = p_x^2 / 2m_- . \quad (4)$$

a) Если  $E_0 < W$ , то

$$\begin{aligned} I_1(x)/I_0 &= [ae^{-W/kT} + (kT/E_0)^{3/2} e^{(E_0-W)/kT}] e^{-x}; \\ I_0 &= m_- e(kT)^2 n \gamma / 2\pi^2 h^3 D_0; \quad x = eV/kT. \end{aligned} \quad (5)$$

b) Если  $E_0 > W$ , то

$$I_{2a}(x)/I_0 = (kT/E_0)^{3/2} (A - Bx + Ce^{-x} + De^{x/\alpha}); \quad x < (E_0 - W)/kT; \quad (6)$$

$$I_{2b}(x)/I_0 = [ae^{-W/kT} + (kT/E_0)^{3/2} e^{(E_0-W)/kT}] e^{-x}; \quad x > (E_0 - W)/kT;$$

$$\alpha = E_0/\gamma kT; \quad A = 1 + Bx_c - \alpha^2 < 0; \quad B = 1 + \alpha; \quad (6a)$$

$$C = \alpha (E_0/kT)^{3/2} e^{-W/kT}; \quad D = \alpha^2 e^{-1+\gamma W/E_0}.$$

В точке сшивания  $x_c = (E_0 - W)/kT$

$$I_{2a}(x_c) = I_{2b}(x_c); \quad \partial I_{2a}(x_c)/\partial x = \partial I_{2b}(x_c)/\partial x.$$

На рис. 2 приведены вольтамперные характеристики для двух предельных случаев: верхняя — для  $E_0 - W \gg kT$ , нижняя — для  $E_0 - W \ll kT$ . Видно, что с уменьшением  $x$  крутизна характеристики увеличивается, что имеет место и на опыте [3]. Нижняя кривая соответствует результату работы [2].

*Спектральная характеристика фотоэмиссии.* При  $x = 0$  ( $V = 0$ ) из (5), (6), (6a) получим спектральную характеристику тока фотоэмиссии. Вводя обозначения  $z = E_0/kT$ ,  $z_0 = W/kT$ , находим, что

$$I_1(z)/I_0 = (\alpha + z^{-3/2} e^z) e^{-z_0} \quad (z < z_0); \quad (7)$$

$$\frac{I_2(z)}{I_0} = z^{-3/2} \left\{ 1 - z_0 + \left( 1 - \frac{z_0}{\gamma} \right) z + \frac{z^2}{\gamma} + \alpha z^{3/2} e^{-z_0} - \frac{z^3}{\gamma^2} (1 - e^{-1+\gamma z_0/z}) \right\} \quad (z > z_0);$$

$$I_1(z_0) = I_2(z_0); \quad \partial I_1(z_0)/\partial z = \partial I_2(z_0)/\partial z. \quad (7a)$$

Как видно из графика (рис. 3), фототок до  $z_0$  растет почти линейно с  $z$ , затем быстро увеличивается, достигая максимальной крутизны в точке перегиба  $z_{\text{пер}} \sim 2z_0$ , затем рост фототока замедляется до  $I \sim z^{1/2}$ .

*Фотоэлектрическая работа выхода.* Из соотношения Эйнштейна следует, что фотоэлектрическая работа выхода

$$\varphi = h\nu - E_{\text{макс}}, \quad E_{\text{макс}} = p_{\text{макс}}^2 / 2m_-.$$

Значение  $p_{\text{макс}}$  определяется из кривой распределения эмитированных фотоэлектронов по импульсам. В случае  $E_0 - W \gg kT$  (см. рис. 1) ввиду большой крутизны правой ветви кривой распределения можно взять в первом приближении  $p_{\text{макс}} = p_c$ , тогда  $E_{\text{макс}} = E_0 - W$  и  $\varphi = W + (m/m_-)h\nu_0 + (1 - m/m_-)h\nu$ . При более точной экстраполяции  $\varphi = h\nu + W + f(\nu)$ , т. е. линейность несколько нарушается. Для  $E_0 - W \sim kT$  (или  $E_0 - W \ll kT$ )  $p_{\text{макс}}$  можно определить как точку пересечения оси  $p_x$  и касательной к кривой распределения в точке перегиба  $p_{\text{пер}} = \sqrt{3m_- kT}$  [2]:

$$p_{\text{макс}} = \frac{3}{2} \sqrt{3m_- kT}; \quad \varphi = h\nu - \frac{27}{8} kT.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. H. Fröhlich, Phys. Zeitschrift der SU, 8, 501 (1935).
2. З. И. Урицкий и Е. Н. Иванов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, 197 (1962).
3. А. Н. Арсеньева-Гейль, Внешний фотоэффект с полупроводниками и диэлектриками, ГИТЛ, М., 1957.

**МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ГЕНЕРАТОР НА ПУЧКЕ МОЛЕКУЛ ФОРМАЛЬДЕГИДА  
в 4-мм ДИАПАЗОНЕ**

*А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов*

Разработан и запущен молекулярный генератор на частоту 72838 мгц, работающий на переходе  $1_{01}-0_{00}$  молекулы  $\text{CH}_2\text{O}$ . Молекулярный генератор выполнен по обычной схеме пучкового мазера с использованием резонатора на моду  $E_{010}$  на установке, описанной авторами ранее [1]. Для наблюдения применялся супергетеродинный приемник, гетеродинный клистрон стабилизировался по объемному резонатору, в качестве сигнала использовалась девятая гармоника 3-см клистрона, стабилизированного

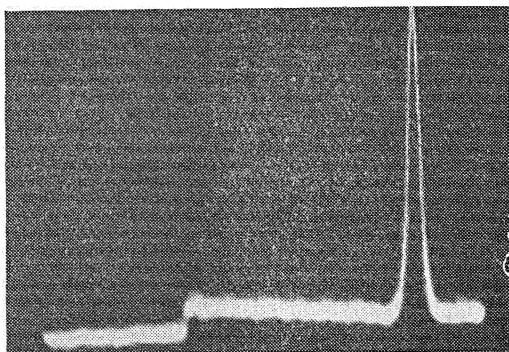


Рис. 1.

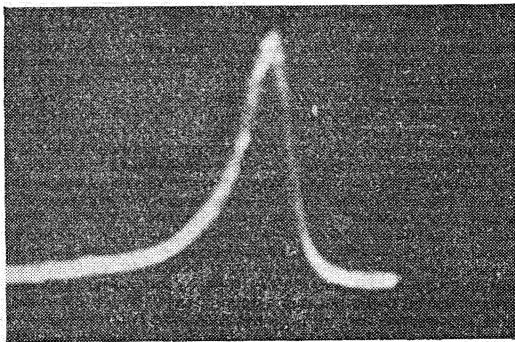


Рис. 2.

кварцем по схеме ФАП. На рис. 1 приводится фотография линии излучения на фоне сигнала (ступенька на фотографии). На рис. 2 дается фотография, полученная при выключении сигнала и качании частоты гетеродинного клистрона. Мазер при этом работал в режиме генерации.

Авторы благодарят В. И. Сысоева за помощь в эксперименте.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. А. Ф. Крупнов, Б. А. Скворцов, Изв. высш. уч. з ав.—Радиофизика, 5, 611 (1962).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
15 июня 1962 г.

## ИНФОРМАЦИЯ

## ВТОРОЙ ВСЕСОЮЗНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ДИФФРАКЦИИ ВОЛН

С 4 июня по 9 июня 1962 г. в г. Горьком проходил Второй Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, организованный Акустической комиссией АН СССР совместно с Научно-исследовательским радиофизическим институтом (НИРФИ) при Горьковском госуниверситете им. Н. И. Лобачевского. На симпозиуме обсуждались весьма разнообразные научные проблемы, касающиеся дифракции волн различной физической природы (акустические, электромагнитные и упругие волны), а также вопросы распространения этих волн в неоднородных средах. Всего было заслушано 118 докладов и сообщений. Работа симпозиума проводилась утром на пленарных заседаниях и во второй половине дня — на секциях, имевших определенную тематику.

После открытия и вступительного слова Г. Д. Малюжинца симпозиум приступил к работе.

На пленарных заседаниях было заслушано девять докладов. Первый доклад Г. И. Макарова «Некоторые вопросы дифракции и распространения радиоволн» касался исследований поведения фазы приземной электромагнитной волны при распространении ее над землей с неоднородной электропроводностью. Учтено влияние сферичности земли и индукционных квазистатических полей в ближней зоне на характер фазовых соотношений в волне. Результаты этих исследований имеют прямое отношение к расчету радионавигационных систем.

В докладе П. Я. Уфимцева «Физическая теория дифракции» был дан обзор результатов приближенного решения некоторых дифракционных задач для выпуклых идеально проводящих тел с изломами. При решении этих задач, помимо использования хорошо разработанных математических методов теории дифракции, широко привлекаются наглядные физические соображения о характере формирования рассеянного поля.

В. Д. Купрадзе исследовал дифракцию упругих колебаний в установившемся режиме. В своем докладе «Об одном методе приближенного решения некоторых дифракционных задач» он показал, что решение эллиптических дифференциальных уравнений теории дифракции можно представить в виде известных интегральных уравнений с последующим сведением их к системе линейных уравнений. Дальнейшее решение сравнительно легко произвести с помощью вычислительных быстродействующих машин.

В докладе В. С. Булдырева и И. А. Молоткова «Исследование неаналитических частей волнового поля в нестационарных задачах дифракции» предлагается метод выделения и исследования особенностей волнового поля в нестационарных задачах дифракции. Отмечено, что развиваемые авторами методы могут быть применены и к другим задачам дифракции, решения которых представляются в виде бесконечных рядов или несобственных интегралов.

Л. Д. Бахрах и Я. Н. Фельд доложили о современном состоянии теории синтеза антенн. Данна классификация задач синтеза, указаны возможные пути решения ряда задач, отмечены некоторые трудности, встречающиеся в теории и практике синтеза антенн.

Доклад В. А. Фока, Л. А. Вайнштейна и Г. Д. Малюжинца «Поперечная диффузия при дифракции коротких волн на спиральном цилиндре» был посвящен разработке метода решения двухмерных задач дифракции волн на поверхностях с переменной кривизной. Указано, что при решении задач этого типа удобно вводить лучевые координаты для записи параболического уравнения дифракции. Используя записанное в такой форме уравнение поперечной диффузии лучей и обобщение принципа локальности, можно получить асимптотическое выражение для дифракционного поля в зоне тени и полутиени через известную универсальную функцию Фока. В качестве примера рассмотрена задача о дифракции цилиндрической волны на спиральном цилиндре.

Г. Н. Крылов сделал доклад на тему «Численные методы в задачах распространения стационарных и нестационарных сигналов над плоской Землей». Докладчик рассмотрел различные методы табулирования стационарного и нестационарного решения для всех компонент электромагнитного поля. Это исследование позволяет выбрать оптимальный метод при вычислении величины различных компонент поля.

В докладе В. И. Таланова «Применение интегральных уравнений типа Винера-Хопфа-Фока в некоторых задачах дифракции» сделан обзор исследований по теории дифракции волн на полубесконечных импедансных структурах, вдоль которых возможно распространение поверхностных волн. В частности, рассмотрены задачи о возбуждении поверхностных волн открытым концом волновода, дифракция на скачке поверхностного импеданса в экранированных системах и дифракция на импедансной полуплоскости.

На заключительном пленарном заседании был заслушан доклад А. Г. Ситенко «К теории дифракционных ядерных процессов». Докладчик указал, что взаимодействие высокозергичных нуклонов с ядрами носит дифракционный характер. При этом дифракционный метод решения задач о взаимодействии ядерных частиц развит по аналогии с оптическим принципом Гюйгенса. Обобщения этого метода позволяют учесть полупрозрачность ядер, кулоновское и спин-орбитальное взаимодействие нуклонов с ядрами.

Помимо пленарных проводились также секционные заседания. Одновременно работали четыре секции. На секции А обсуждались избранные вопросы математической теории дифракции волн асимптотические методы и нестационарные задачи, встречающиеся как в теории дифракции, так и в теории распространения волн в неоднородных средах. На секции В в основном рассматривались вопросы дифракции волн на различных телах и численные методы применительно к задачам дифракции и распространения. Заседания секции С были посвящены исследованиям по распространению волн в слоисто-неоднородных средах и волноводах, по взаимодействию волн с периодическими волнистыми поверхностями и решетками. На этой секции рассматривалось также распространение радиоволны вдоль земной поверхности с учетом различных изломов на ней и вопросы моделирования процессов распространения волн. На секции Д обсуждались в основном исследования по распространению волн в плазме, в гиротропных средах, дифракция электромагнитных волн на различных плазменных объектах, излучение волн, а также некоторые статистические задачи теории дифракции. Ввиду большого количества секционных докладов и сообщений мы вынуждены ограничиться краткой характеристикой только некоторых из них, руководствуясь в основном интересами читателей журнала «Радиофизика».

Г. Д. Малючин рассказал об обобщении принципа локальности Фока применительно к плоской задаче дифракции при определении поля в области тени. Б. Е. Кинбер и А. А. Федоров исследовали методом лучевых координат асимптотическое решение задачи о дифракции на сфере и параблоиде вращения. При этом они получили эффекты фокусировки и поляризационной диффузии. Б. Я. Гельчинский исследовал поле акустической волны, отразившейся от границы под углом падения, близкими к предельному. Некоторые теоремы о существовании и единственности решений дифракционных задач рассмотрены Д. З. Авазашвили, а для граничных задач теории колебаний И. А. Урусовским.

Б. Вайнберг сделал интересное сообщение «Об условиях типа Зоммерфельда для эллиптических операторов любого порядка». С большим интересом также был заслушан доклад В. А. Боровикова о дифракции сферической волны на бесконечной призме, в основании которой лежит произвольный многоугольник. Использованный им метод решения этой трехмерной задачи дифракции позволяет найти любой член асимптотики диффрагмированного поля. В. А. Хромов обобщил формулу Кирхгофа на случай произвольно движущейся поверхности и обсудил полученное выражение для закона Кирхгофа в применении к некоторым задачам дифракции и излучения волн. Доклады М. В. Федорюка и В. Н. Дреекова были посвящены применению и развитию метода стационарной фазы для вычисления асимптотических значений многомерных интегралов. И. В. Олимпиев сообщил о новом выводе одной асимптотической формулы дифракции, впервые полученной Г. Д. Малючинцем.

Р. Г. Баранцев использовал разложение решения уравнения Гельмгольца по сферическим функциям на сфере, окружающей тело с произвольной поверхностью  $S$ . Таким способом ему удалось свести задачу о рассеянии на поверхности  $S$  к задаче решения конечной системы линейных алгебраических уравнений, число которых определяется отношением характеристического размера тела к длине волны. Дифракция волн на поверхности жидкого слоя рассматривалась Л. Н. Сретенским, А. В. Васильевым и С. С. Войтом. В докладе В. М. Травинина «Дифракция волн около полупогруженного эллиптического цилиндра» анализируется задача о расчете возмущающих сил при движении судна на волнении.

П. И. Цой исследовал дифракцию плоских звуковых волн на движущемся торе с эллиптическим сечением. Л. А. Черчес рассмотрел приближенные решения задач дифракции на телах с размерами больше длины волны, имеющих изломы с кромкой клиновидной формы. Б. Е. Кинбер сделал два содержательных доклада «О дифракции на открытом конце плоского секториального рупора» и «О некоторых общих закономерностях дифракции плоской и цилиндрической волны на отверстии в экране». Б. Е. Кинбер показал, что поле вблизи фокуса сходящейся волны, дифрактировавшейся на отверстии в экране, существенно зависит от закона освещенности падающей волной отверстия на экране. Н. Г. Бондаренко и В. И. Таланов со-

общили о результатах анализа характеристик лучевого волновода с фазовыми преобразователями в виде зеркал специальной формы. При расчете параметров этого волновода учтены дифракционные и омические потери в преобразователях. Е. Н. Васильев и А. Д. Серегина рассказали об одном методе решения задачи о возбуждении цилиндра конечной длины. Использовались интегральные уравнения второго рода для азимутальных гармоник поверхностного электрического тока. Интегральные уравнения решались численно. Исследованы различные типы возбуждения цилиндра. О. А. Гермогенова и Г. В. Розенберг исследовали рассеяние неоднородных электромагнитных волн шарообразными частицами. З. А. Янсон и В. С. Булдырев рассмотрели интерференционные волны в упругом сферическом слое, покрывающем упругий шар.

В докладе Е. А. Иванова приведено строгое решение задачи о дифракции электромагнитных волн, излучаемых диполем, расположенным в зазоре между двумя идеально проводящими бесконечно тонкими дисками. Даны результаты численного решения указанной задачи для волновой зоны при некоторых значениях параметров, определяющих дифракционное поле. И. Н. Корбанский вычислил сопротивление излучения диполя Герца, расположенного вблизи идеально проводящего параболоида вращения. Асимптотическое решение представляет возможность исследовать изменение сопротивления излучения диполя при различной ориентации его относительно параболоида. Н. А. Яблочкин доложил о решении внешней электромагнитной задачи дифракции для целого ряда идеально проводящих тел сложной формы. М. Д. Хаскинд сделал доклад о дифракции электромагнитных волн на ленте и щели. Решению различных задач о дифракции на клине и родственным им вопросам были посвящены доклады В. А. Афанасьева, А. Ф. Филиппова, Д. М. Сазонова, Р. П. Старовойтовой и М. С. Бобровникова, И. А. Гилинского, Д. П. Коузова, А. А. Леманского и Л. Н. Захарьева.

Я. И. Секерж-Зенькович сделал доклад по теории стоячих волн конечной амплитуды в тяжелой, идеальной, несжимаемой жидкости, состоящей из двух слоев. Получена приближенная формула, связывающая частоту колебаний с амплитудой и длиной волны. Е. Ю. Завадский рассмотрел дисперсию и затухание релеевской волны при распространении ее вдоль плоской свободной поверхности неоднородного упругого полупространства. В. Н. Красильников провел аналитическое и численное исследование задачи о распространении упругих волн от сосредоточенных источников в жидким полупространстве, ограниченном упругим слоем. Исследованы дисперсионные свойства незатухающей поверхностью волны. В докладе Л. В. Иогансена обсуждается интересный эффект так называемой резонансной дифракции акустических волн в плоскослоистых системах. Эффект имеет место при наклонном падении волн любой природы на плоскослоистую структуру и заключается в том, что в такой неоднородной среде происходит резонансное накопление энергии волны.

А. Д. Лапин исследовал вопрос о дифракции плоской волны на пилообразной поверхности с прямоугольными зубцами. Для амплитуд дифракционного спектра получена бесконечная система алгебраических уравнений, которая решается численно редукционным методом при выбранных значениях основных параметров задачи. Аналогичному вопросу были посвящены доклад Г. В. Подубного «К вопросу о рассеянии электромагнитных волн периодической поверхностью» и сообщение Ю. Н. Черкашина «Дифракция звука на внутренней волне».

Статистическая теория дифракции волн рассматривалась в докладах Н. Г. Денисова, Л. С. Долина, В. А. Зверева, В. И. Михайлова, Р. Г. Брянцева, Э. П. Гулина, Л. Н. Юрковой и И. Н. Тамойкиной. Так, в обзорном докладе Н. Г. Денисова и Л. С. Долина изложена дифракция немонохроматического излучения на регулярных объектах. С подобными задачами приходится часто сталкиваться в оптике и радиоастрономии. В. А. Зверев указал на то, что дифракция модулированной волны на неоднородностях трассы распространения приводит к изменению характера модуляции. Количественные характеристики этого явления можно определить, используя фазовый инвариант (фаза несущей минус полу-сумма фаз боковых частот). Величина эффекта зависит от соотношений между длиной волны и размером неоднородностей. Доклад вызвал большой интерес у присутствовавших.

Л. А. Вайнштейн в докладе «К теории бесконтактных поршней» сообщил о теоретических исследованиях реактивных поршней в коаксиальных линиях. Данная физическая интерпретация механизма запирающего действия бесконтактных поршней и проведен анализ поправок, необходимых при учете дифракции волны на поршне. Доклад был прослушан с большим интересом. А. С. Ильинский и А. Г. Свешников исследовали вопросы согласования волноводов с существенно различными попечерными сечениями. На вычислительной машине проведен расчет переходного устройства между круглым и квадратным волноводами. Н. П. Керненцева сделала доклад «Преобразование электромагнитных волн в волноводе с медленно меняющимся импедансом». В докладе приведены численные и экспериментальные данные о преобразовании волн в гофрированном волноводе с переменной глубиной гофра.

Несколько докладов относились к теории и эксперименту по распространению радиоволн вдоль земной поверхности. В. Н. Троицкий и С. А. Аманов рассказали об экспериментах по влиянию горных хребтов на распространение УКВ. В кратком сообщении Г. Н. Крылова и А. Д. Петровского «О точных и приближенных граничных условиях в задачах распространения электромагнитных волн» обсуждался вопрос о выборе приведенного поверхностного импеданса в приближенных граничных условиях Леонтиевича для поверхности земли.

Вопросы лабораторного моделирования и изучения условий распространения волн различной природы были освещены в докладах А. Н. Бархатова, А. Д. Петровского, Г. П. Прудковского, О. Г. Шаминой, а также Г. Н. Грудинской, Ю. К. Калинина и Я. С. Родионова. Большой интерес вызвал доклад Г. Н. Грудинской, Ю. К. Калинина и Я. С. Родионова. Ими была создана установка на  $\lambda = 3,2 \text{ см}$  моделирующая условия распространения радиоволн над неоднородной трассой. В частности, смоделировано и исследовано распространение радиоволн вдоль береговой линии и над неровной земной поверхностью. Отмечено хорошее соответствие между теорией и результатами этих экспериментов. В своем обзоре «Моделирование распространения звука в слоисто-неоднородных средах» А. Н. Бархатов рассказал о работах по моделированию, выполненных в 1954—1961 гг. на кафедре акустики Горьковского госуниверситета. Изготовленная установка позволяла моделировать условия распространения звука в средах антиканального типа, в частности, в среде с билинейным профилем распределения скорости звука и в звуковом канале. Исследовано влияние неровной поверхности на звуковое поле в слоисто-неоднородной среде.

А. Д. Петровский сделал обзор по «Проблеме дифракции электромагнитных волн в методе радиоволнового просвечивания». Докладчик рассказал о применении радиотехнических методов при поиске различных руд, отметил специфику задач дифракции в подобных условиях (дифракция на полубесконечных телах, помещенных в поглощающую неоднородную среду).

Значительная часть докладов на секции Д была посвящена распространению и дифракции электромагнитных волн в плазме. Следует отметить, что на Первом симпозиуме по дифракции эта тематика полностью отсутствовала, несмотря на ее большое и очевидное практическое значение. Безусловно, что задачи распространения и дифракции волн в плазме и плазмоподобных средах значительно сложнее тех дифракционных задач, которыми в основном интересовались исследователи до настоящего времени.

Г. И. Макаров рассмотрел задачу о распространении плоской электромагнитной волны в симметричном ионизированном слое, в котором диэлектрическая проницаемость зависит от одной координаты. Решение задачи находилось методом эталонного уравнения. Показано, что при достаточной медленности изменения свойств слоя (на расстояниях, равных длине волны в вакууме) эталонными являются функции Уиттекера с аргументом, определяемым из некоторого трансцендентного уравнения. Найден коэффициент отражения от слоя. В. Б. Гильденбург и И. Г. Кондратьев провели исследование некоторых вопросов, связанных с особенностями отражения и преломления электромагнитных волн неоднородными плазменными слоями при наклонном падении. Большое внимание уделяется анализу резонансных эффектов, возникающих при отражении. В докладе Н. А. Кузьмина приведены результаты численных расчетов дисперсионных характеристик магнитоактивной плазмы.

В. В. Железняков и Е. Я. Злотник в докладе «К вопросу о взаимодействии электромагнитных волн в плазме» исследовали переход плазменных волн в электромагнитные как в изотропной, так и в анизотропной плазменной среде. Анизотропия свойств в одной задаче обусловлена неоднородным движением, а в другой — неоднородным внешним магнитным полем. М. Е. Герценштейн и В. И. Пустовойт сделали интересный доклад о «Распространении звуковых волн в кристаллах при наличии постоянного электрического тока». Показано, что продольные звуковые волны при наличии электрического тока в кристаллах при выполнении определенных условий могут нарастать со временем. Это нарастание обусловлено обменом энергии между направленным движением ионов и звуковой волной. Механизм усиления этих волн наиболее эффективен в пьезополупроводниках. Отмечено, что в пьезокристаллах с определенным типом симметрии возможен аналогичный механизм возбуждения первичных упругих волн.

А. В. Гуревич в сообщении «О диффузии в ионосфере» указал на то обстоятельство, что под влиянием магнитного поля процесс диффузии в плазме значительно усложняется, так что нельзя пользоваться обычным уравнением анизотропной амбиополярной диффузии. В. Я. Эйдман рассказал об излучении плазменных волн зарядом, движущимся в магнитоактивной плазме. Получено спектральное и угловое распределение энергии излучаемой волны. В. Я. Эйдман указал также на возможный механизм генерации электромагнитных волн солнечными корпускулярными потоками во внешней атмосфере Земли. В докладе А. П. Казанцева и Г. И. Сурдитовича «Излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи металлического экрана» исследовано

переходное излучение электромагнитных волн при пролете заряда около края полу бесконечного идеально проводящего экрана. Вычислена полная энергия излучения электрона. В. П. Докучаев рассказал о сверхзвуковом и переходном излучении звуковых волн малыми телами в газообразных средах.

Вопросам дифракции электромагнитных волн на плазменных объектах были посвящены доклады М. Д. Хаскинда, Ю. К. Калинина, Ю. С. Саясова, В. А. Пермякова, В. Б. Гильденбурга и И. Г. Кондратьева. В докладах М. Д. Хаскинда и Ю. К. Калинина рассматривалась дифракция волн на плазменных цилиндрах применительно к рассеянию на ионизированных метеорных следах. Ю. С. Саясов исследовал рассеяние электромагнитных волн поглощающими плазменными объектами. При решении использован метод эйконала для неоднородной среды с комплексной диэлектрической проницаемостью.

Симпозиум в целом прошел на достаточно высоком научном уровне и был полезен для установления научных контактов между специалистами, занимающимися изучением или использованием дифракционных явлений в различных областях физики, математики и техники. Несомненно, что проведение симпозиума будет способствовать дальнейшему развитию теоретических и экспериментальных исследований по дифракции.

На заключительном пленарном заседании Симпозиума были подведены итоги его работы и принято решение обратиться в Академии наук Грузинской ССР к Тбилисскому государственному университету и Грузинскому политехническому институту с просьбой взять на себя организацию З Симпозиума по дифракции волн весной 1964 г.

В решении указывается также на целесообразность увеличения числа обзорных докладов, содержащих возможно полное отражение современного состояния вопроса.

Вл. ДОКУЧАЕВ.

