

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Генкин В. Н., Ханин Я. И. Лазеры (обзор)	423
Гетманцев Г. Г. О диффузии космических лучей в межзвездном магнитном поле	459
Митяков Н. А., Рапопорт В. О. О возможности измерения электронной концентрации в верхней ионосфере и межпланетном пространстве по излучению плазменных волн	464
Виленский И. М. К вопросу о взаимодействии радиоволн в ионосфере	468
Гинзбург В. Л. О законе сохранения энергии в электродинамике сред с пространственной дисперсией	473
Эйдман В. Я. О переходном излучении на границе с плазмой при учете пространственной дисперсии	478
Пафомов В. Е. Переходное излучение при наклонном падении	484
Татарский В. И. Второе приближение в задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями	490
Гречишкин В. С. и Сойфер Г. Б. Воздействие дефектов кристаллической решетки на интенсивность и форму линий ядерного квадрупольного резонанса в кристаллах	508
Малахов А. Н. Влияние флуктуаций параметров автогенератора на его поведение вблизи точки бифуркации	516
Зайцев А. А. и Васильева М. Я. Колебания ионизации при разряде в смесях инертных газов с парами ртути	523
Нечаев В. Е. Приближенный анализ процессов в многорезонаторном магнетроне	534
Медведев Г. А. Воздействие импульсных потоков Пальма на радиосхемы с емкостными накопителями. II	549
Рубаник В. П. О влиянии запаздывания на процесс синхронизации автоколебаний внешней периодической силой	561
Гудзенко Л. И. Статистический метод определения характеристик нерегулируемой автоколебательной системы	572
Эйнгорин М. Я. О синтезе некоторых управляющих устройств с обратными связями на основе симметричных систем уравнений алгебры логики	588

·Краткие сообщения и письма в редакцию

Троицкий В. С. Влияние внутреннего потока тепла Луны на ее радиоизлучение	602
Кротиков В. Д. Прецизионное измерение радиоизлучения Луны на волне 9,6 см	604
Малахов А. Н. О чувствительности одного метода обнаружения	607
Станкевич К. С. О чувствительности радиометров с парамагнитными усилителями	609
Крупнов А. Ф., Скворцов В. А. Наблюдение линии излучения молекулы формальдегида на частоте 72,8 ггц	611

Информация

Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геоматнетизм и аэрономия», т. II, № 4, 1962 г.	613
Содержание №№ 4, 5, 6 журнала «Известия вузов МВ и ССО СССР» по разделу «Радиотехника» за 1961 г.	614

ЛАЗЕРЫ

В. Н. Генкин, Я. И. Ханин

(Обзор)

ВВЕДЕНИЕ

Со дня опубликования первого сообщения об успешной реализации квантового генератора оптического диапазона (лазера*) прошло около двух лет. Исключительная перспективность устройств подобного типа обусловила дальнейший бурный темп развертывания исследовательских работ, благодаря чему за небольшой срок в этом направлении достигнут значительный прогресс.

Продвижение квантовых методов из радиодиапазона в область оптических частот не является неожиданным. Еще на заре развития квантовой радиофизики В. А. Фабрикантом и его сотрудниками была выдвинута идея молекулярного усиления света [1]. Конкретная постановка вопроса о квантовых генераторах и усилителях света [2] была подготовлена успехами в области эксперимента и теории мазеров, с одной стороны, и оптического возбуждения атомов, с другой. Интересно отметить, что здесь в какой-то мере повторилась история создания трехуровневого мазера: первые предложения и оценки базировались на использовании газообразных рабочих веществ [2,3], а первая действующая модель создана на твердом теле. Дело в том, что создание необходимой избыточной населенности на оптическом возбужденном уровне требует большой мощности возбуждающего света, сосредоточенной в спектральной полосе используемого вспомогательного перехода. Газы характеризуются сравнительно узкими спектральными линиями и для их возбуждения необходимо предварительно решить проблему мощного монохроматического источника света. В твердых же телах имеются широкие полосы поглощения и от источника не требуется особой монохроматичности.

Работа лазера основана на использовании явления индуцированного испускания возбужденных квантовых объектов. Соответственно этому при их разработке приходится решать те же задачи, что и при создании мазеров: выбор рабочих веществ и методов их возбуждения, выбор электродинамических систем, обеспечивающих эффективное взаимодействие поля с веществом. В современных лазерах наряду с люминесцентными монокристаллами, возбуждаемыми некогерентным светом, используются также газы и смеси газов. В последнем случае возбуждение осуществляется с помощью газового разряда. Оба упомянутых механизма возбуждения являются некогерентными.

Наиболее радикально специфика диапазона сказывается на конструкции электродинамической части системы. Резонаторы, работающие на низших типах колебаний, в оптике оказываются непригодными из-за микроскопических размеров. В резонаторе разумных размеров рабочая

* Термин „лазер“ (laser) составлен из первых букв Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

частота соответствует очень высоким типам колебаний, благодаря чему в пределы ширины спектральной линии вещества попадает большое число собственных частот резонатора. Уменьшение этого числа достигается применением открытых резонаторов, например, типа интерферометра Фабри—Перо.

Специфика оптического диапазона проявляется также и при анализе роли различных релаксационных механизмов. Последнее связано, во-первых, с тем, что $\hbar\omega_{ij} \gg kT$ (ω_{ij} —рабочая частота, T —температура вещества), и, во-вторых, с существенной ролью спонтанного излучения. В радиодиапазоне же реализуется обратный случай. Такая особенность исключает непосредственное перенесение результатов, полученных в теории лазера, на оптический случай и значительно усложняет построение адекватной теории. Вторая, более серьезная трудность обусловлена тем, что многочисленные моды резонатора связаны друг с другом через само рабочее вещество и через стенки резонатора. Пренебрежение этой связью в задаче нахождения амплитуды генератора и его спектра вряд ли корректно. Поэтому, если в настоящее время и можно говорить о некоторых успехах теории, то они касаются, главным образом, линейных задач. Резюмируя общее положение с теорией лазера, можно сказать, что к настоящему времени она значительно отстает от эксперимента.

Глава I

МЕТОДЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ И РАБОЧИЕ ВЕЩЕСТВА

Основным компонентом лазера, естественно, является рабочее вещество, т. е. ансамбль квантовых объектов (атомов, молекул, ионов), обладающих подходящей структурой энергетических уровней. Для получения эффектов усиления или генерации необходимо создать в системе неравновесное состояние, характеризующееся большей населенностью некоторого возбужденного уровня по сравнению с каким-либо из нижележащих, иными словами, создать состояние с отрицательной температурой. Только в этом случае индуцированные переходы сопровождаются увеличением энергии поля. Рассмотрим методы возбуждения квантовых систем, используемые в современной технике лазеров.

1. Механизмы возбуждения

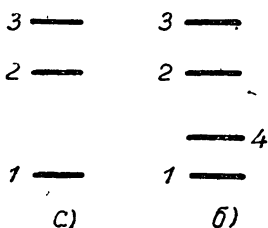


Рис. 1.

Сущность метода оптического возбуждения может быть пояснена на примере системы молекул с тремя энергетическими уровнями (рис. 1а). Вспомогательное поле, называемое часто полем накачки, индуцирует переходы между уровнями 1 и 3, благодаря чему меняются населенности всех трех уровней. Эти изменения можно оценить, пользуясь уравнениями баланса населенностей каждого из уровней, подобно тому как это делал Бломберг для лазера [4]:

$$\begin{aligned} \dot{n}_3 &= W_{13}(n_1 - n_3) - \frac{n_3 - n_2 e^{-\hbar\omega_{32}/kT}}{T_{32}^*} - \frac{n_3 - n_1 e^{-\hbar\omega_{31}/kT}}{T_{31}^*} - \frac{n_3}{\tau_{31}} - \frac{n_3}{\tau_{32}}; \\ \dot{n}_2 &= \frac{n_3 - n_2 e^{-\hbar\omega_{32}/kT}}{T_{32}^*} - \frac{n_2 - n_1 e^{-\hbar\omega_{21}/kT}}{T_{21}^*} - \frac{n_2}{\tau_{21}} + \frac{n_3}{\tau_{32}}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = N.$$

Здесь n_i — населенность уровня, N — полное число частиц системы, W_{13} — вероятность перехода под действием поля накачки, ω_{ij} — частоты квантовых переходов, τ_{ij} и T_{ij}^* — соответственно времена спонтанного излучения и релаксации. Стационарными решениями (1) при учете $\hbar\omega_{ij} \gg kT$ и в наиболее интересном частном случае $n_1 \gg n_3$ являются

$$\begin{aligned} n_3 &= N \frac{W_{13} T_{31} T_{32}}{T_{31} + T_{32} + W_{13} T_{31} (T_{21} + T_{32})}; \\ n_2 &= N \frac{W_{13} T_{31} T_{21}}{T_{31} + T_{32} + W_{13} T_{31} (T_{21} + T_{32})}; \\ n_1 &= N \frac{T_{31} + T_{32}}{T_{31} + T_{32} + W_{13} T_{31} (T_{21} + T_{32})}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $T_{ij}^{-1} = T_{ij}^{*-1} + \tau_{ij}^{-1}$. Задаваясь требуемой разностью населенностей, например, $\Delta n = n_2 - n_1$, из (2) можно определить необходимую для этого мощность, поглощаемую веществом:

$$\begin{aligned} P &= W_{13} n_1 \hbar \omega_{13}; \\ W_{13} &= \frac{(N + \Delta n)(T_{31} + T_{32})}{NT_{31} T_{21} - \Delta n T_{31} (T_{21} + T_{32})}. \end{aligned} \quad (3)$$

Например, для выравнивания населенностей в случае розового рубина ($N = 10^{19} \text{ см}^{-3}$; $T_{31} = 25 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$; $T_{32} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$; $T_{21} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$; $\omega_{31}/2\pi = 6,6 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1}$) поглощаемая мощность должна составлять по порядку величин $\text{квт} \cdot \text{см}^{-3}$. Порог генерации в лазерах обычно достигается при $\Delta n \ll N$, т. е. при такого же порядка мощностях накачки, которые требуются для выравнивания населенностей.

Мощность источника накачки должна существенно превышать величину, определяемую формулой (3)^{*}. Так, в первых экспериментах с рубином она достигала миллионов ватт. Современная техника не располагает столь мощными источниками монохроматического света. Поэтому наиболее выгодны материалы, обладающие широкой полосой поглощения; тогда роль третьего уровня выполняет энергетическая зона. Эффективность механизма перекачки электронов с уровня 1 на 2 зависит от величин T_{ij} . Оптимальным является случай $T_{32} \ll T_{31}$, T_{21} , поскольку при этом атомы, заброшенные на уровень 3, в основном переходят на 2, где и накапливаются. Выражение (3) для данного случая упрощается:

$$W_{13} \approx \frac{N + \Delta n}{N - \Delta n} T_{21}^{-1}. \quad (4)$$

Перечисленным требованиям хорошо удовлетворяет ряд люминесцентных монокристаллов, о которых подробнее будет сказано ниже.

Поскольку рабочий режим лазера достигается при $\Delta n \ll N$, можно значительно уменьшить мощность накачки, применяя вещества, позволяющие работать по четырехуровневой схеме. Ее отличие от трехуровневой состоит в том, что используются переходы с возбуждаемого уровня 2 (рис. 16) на дополнительный уровень 4, достаточно далеко отстоящий от основного уровня 1 ($\hbar\omega_{14} \gg kT$) и поэтому малонаселенный.

* Если длительность вспышки меньше T_{21} , удобной характеристикой накачки является также и энергия в джоулях, израсходованная на вспышку.

Если, к тому же, время жизни $T_{41} \ll T_{24}$ и, следовательно, $\Delta n = n_2 - n_4 \approx n_2$, то расчет, аналогичный вышеизложенному, приводит к соотношению

$$W'_{13} = \frac{(T_{31} + T_{32})\Delta n}{NT_{31}T_{21} - \Delta n T_{31}(T_{21} + T_{32})}. \quad (3a)$$

Легко видеть, что из $\Delta n \ll N$ при прочих равных условиях следует: $W'_{13}/W_{13} \sim \Delta n/N \ll 1$.

В качестве источников возбуждающего света обычно используются ксеноновые газоразрядные лампы импульсного или непрерывного действия, в зависимости от требуемой мощности. Форма лампы, ее расположение относительно кристалла, а также выбор таких конструктивных элементов как рефлекторы или линзы, подчинены требованию максимального снижения необходимой мощности лампы. Один из вариантов конструктивного оформления лазера на рубине дан на рис. 2а. Обычно

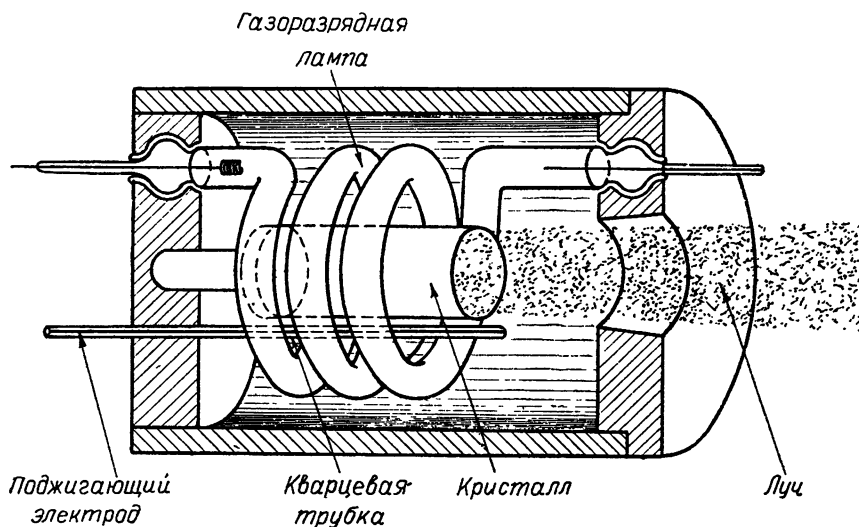


Рис. 2а.

кристалл берется в форме стержня. Лампа в виде спирали, окружающей кристалл, применялась в большинстве первых экспериментов [5]. Для повышения КПД прибора лампа помещается в цилиндрическую отражающую полость. Для достижения пороговой разности населенностей при такой конструкции необходима затрата энергии порядка 1000 дж. Существует и конструкция с лампой карандашного типа, расположенной непосредственно вблизи кристалла [6]; пороговая энергия в этом случае составляет 200 дж. Таких ламп вокруг кристалла может быть помещено несколько. Хотя суммарная пороговая энергия в этом случае возрастает, однако на долю одной лампы приходится меньшая энергия. Одной из наиболее удачных является конструкция с рефлектором в виде эллиптического цилиндра, вдоль фокальных осей которого располагают лампу и кристалл. Хорошие фокусирующие свойства такой системы позволили снизить пороговую энергию до 150 дж [7].

Целый ряд кристаллов может быть использован в лазерах лишь при условии глубокого охлаждения. Для этого их приходится помещать в криостаты, что несколько ограничивает возможные оптические

схемы возбуждения. На рис. 2б приведена схема [8] для возбуждения кристалла $\text{CaF}_2:\text{Sm}^{++}$, охлаждаемого жидким водородом. Свет от ксеноновой лампы концентрируется на кристалле с помощью регулируемой системы софокусных сферических зеркал. Последнее особенно удобно при точном определении пороговой мощности. Для предупреждения излишнего нагревания дьюар экранируется от прямых лучей лампы.

Возможность оптического возбуждения молекул газа обсуждалась некоторыми авторами [2, 3, 34]. Использование газов при низких давлениях сулит ряд преимуществ, связанных со слабой зависимостью свойств среды от физических условий, которые могут изменяться неконтролируемым образом (например, от температуры). Однако в спектрах газов отсутствуют широкие полосы поглощения, что осложняет задачу получения необходимой разности населенностей по изложенной выше методике. В работе [9] предложено использовать для целей оптического возбуждения газов явление фотодиссоциации молекул. Один из продуктов диссоциации может образовать систему с отрицательной температурой.

Достоинством предлагаемого принципа является то, что здесь, как и в случае люминесцентных кристаллов, возможно использование немонохроматических источников света.

В современных газовых лазерах для возбуждения используется механизм соударений атомов рассматриваемого газа с частицами другого сорта. В работах [10-12] рассмотрено возбуждение газа за счет соударений с электронами, образующимися в газовом разряде. Неупругие столкновения молекул с электронами приводят к перераспределению населенностей различных уровней. Времена жизни Θ_{21} и Θ_{12} каких-либо двух уровней по отношению к переходам между ними за счет соударений с электронами удовлетворяют соотношению

$$\Theta_{21}/\Theta_{12} = e^{\hbar\omega_{12}/kT_e} \quad (5)$$

Равенство (5) следует из принципа детального равновесия [13] в предположении максвелловского распределения электронов с температурой T_e , которая в разряде может значительно превосходить кинетическую температуру молекул. Для нахождения населенностей различных молекулярных уровней следует записать систему уравнений баланса типа (1), из которой в стационарном случае получается:

$$N_2/N_1 = e^{-\hbar\omega_{12}/kT_e} \quad (6)$$

Рассмотрим теперь трехуровневую систему (рис. 1а), в которой помимо соударений с электронами действуют и другие механизмы обеднения уровней 2 и 3, например, спонтанное излучение с переходом на уровень 1. Если при этом

$$\tau_{21} \ll \Theta_{21}, \quad \tau_{31} \ll \Theta_{31}, \quad \Theta_{32}, \quad (7)$$

то уравнения баланса дают:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\tau_{21}}{\Theta_{21}} e^{-\hbar\omega_{12}/kT_e}, \quad \frac{N_2}{N_3} = \frac{\tau_{31}\Theta_{21}}{\tau_{21}\Theta_{31}} e^{-\hbar\omega_{32}/kT_e} \quad (8)$$

При определенных соотношениях между параметрами (малое τ_{21} , боль-

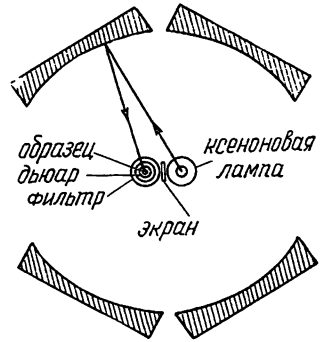


Рис. 2б.

шое τ_{31} , высокая температура электронов и т. д.) уровни 2 и 3 могут оказаться в состоянии с отрицательной температурой. Условие (7) налагает ограничения на допустимые плотности электронов.

Практически гораздо легче достичь отрицательных температур, используя газовый разряд в соответствующим образом подобранной смеси газов. Заселению нужного уровня основного газа A в этом случае способствуют неупругие столкновения с возбужденными молекулами примесного газа B . Последние возбуждаются путем электронного удара, как это было описано выше. Сечения процессов передачи энергии от B к A и обратно удовлетворяют условию, аналогичному (5):

$$\frac{W_{AB}}{W_{BA}} = \frac{n_2^B}{n_1^B} e^{-\Delta E_{AB}/kT}. \quad (9)$$

Здесь n_1^B — населенность основного и n_2^B — возбужденного уровней примесного газа, $\Delta E_{AB} = E_2^B - E_3^A$ (см. рис. 3), T — температура газа. Сечения эти заметно отличаются от нуля, когда ΔE_{AB} по порядку величины не превосходит kT . Наиболее благоприятными для получения отрицательной температуры являются условия $\Delta E_{AB} > 0$ и $\Delta E_{AB} \ll kT$. Кроме того, концентрация газа B должна быть значительно больше A . В противном случае состояние газа A будет определяться столкновениями с электронами.

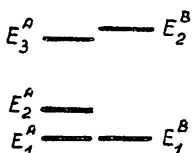


Рис. 3.

Вторым условием эффективности излагаемого метода является $E_3^A - E_2^A \gg kT$. В противном случае соударения приведут к примерно равному заселению E_3^A и E_2^A .

Заметим также, что если уровень E_2^B является резонансным, то его можно возбуждать и с помощью вспомогательного резонансного излучения [37]. Преимуществом такого процесса является отсутствие электронов, обедняющих E_3^A . Примесный газ, если один из его уровней имеет энергию, близкую к E_2^A , и обладает достаточно коротким временем жизни, способствует созданию отрицательной температуры путем обеднения уровня E_2^A .

2. Рабочие вещества

а) Люминесцентные кристаллы. Среди материалов, используемых в лазерах, наиболее популярным является рубин. Он представляет собой кристалл Al_2O_3 , в котором часть трехвалентных ионов Al замещена трехвалентными же ионами Cr . Розовый рубин содержит $0,05 \div 0,07\%$ Cr_2O_3 по весу относительно Al_2O_3 . В красном рубине количество Cr_2O_3 доходит до $0,5 \div 0,7\%$.

Подробному теоретическому и экспериментальному анализу спектра рубина посвящены работы [14–17]. Особенности спектра, существенные при использовании рубина в квантовых приборах, обсуждаются в целом ряде статей [18–22]. Для работы лазера используется часть энергетических уровней ионов хрома в розовом рубине, показанная на рис. 4а. Эффект генерации получается на частоте R_1 -линии ($\lambda = 6942,3 \text{ \AA}$ при $20^\circ C$). Это одна из двух наиболее интенсивных, узких люминесцентных линий. Вторую линию R_2 ($\lambda = 6927,4 \text{ \AA}$) пока использовать не удалось вследствие сильной релаксации между уровнями $2\bar{A}$ и \bar{E} . Время релаксации, согласно [5], не превышает 10^{-6} сек. Поло-

жение R -линий зависит от температуры; так, при температуре жидкого азота $\lambda_{R_1} = 6934 \text{ \AA}$ и $\lambda_{R_2} = 6920 \text{ \AA}$. Для целей возбуждения используется широкая зона 4F_2 , связанная с уровнями 2E безызлучательным переходом. Переходы с основного 4A_2 -уровня в зону 4F_2 лежат в зеленой части спектра ($\lambda \sim 5600 \text{ \AA}$). Для накачки можно использовать и фиолетовый свет, вызывающий переходы в зону 4F_1 . Однако

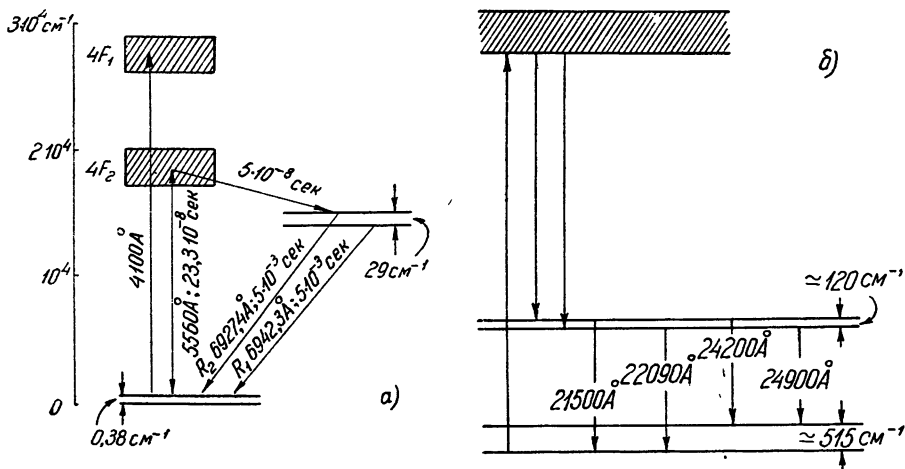


Рис. 4.

такой путь невыгоден по двум причинам. Во-первых, безызлучательный переход с 4F_1 на 2E сопровождается значительным нагревом кристалла. Во-вторых, фиолетовый свет частично увлекает в зону 4F_1 и электроны с 2E -уровней. Электроны из зоны 4F_2 через $T_{32} \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ сек}$ совершают безызлучательный переход на люминесцентные уровни 2E или через время порядка $2 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$ спонтанно излучают, возвращаясь в основное состояние. Эти цифры свидетельствуют о высоком квантовом выходе люминесценции*, близком, согласно эксперименту, к 70%. Время жизни в 2E -состоянии порядка $3 \div 5 \text{ мсек}$.

В спектре красного рубина появляются дополнительно еще две люминесцентные линии N_1 и N_2 [14, 15, 23–26]. Соответствующие им длины волн при температуре 78°K

равны 7041 \AA и 7009 \AA . Природа N -линий связана с парным обменным взаимодействием ионов хрома, и, следовательно, интенсивность их сильно зависит от концентрации. Факт появления двух линий объясняется возможностью образования неэквивалентных хромо-вых пар. Спектр эмиссии красного рубина при температурах 300° и 78°K приведен на рис. 5. Выход люминесценции на N -линиях составляет всего 0,1%,

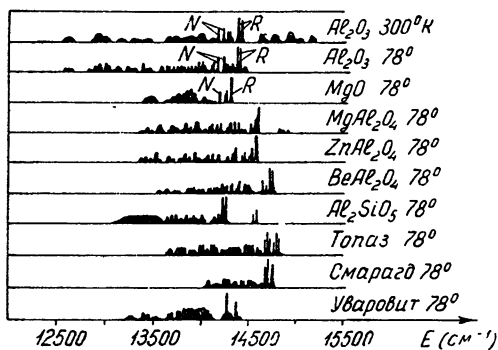


Рис. 5.

* Под квантовым выходом люминесценции понимается отношение числа фотонов, испущенных люминесцирующим веществом, к числу поглощенных фотонов возбуждающего света.

что на 3 порядка ниже, чем для R -линий. Однако порог генерации достигается довольно легко уже при азотных температурах, так как нижние уровни переходов лежат на 100 см^{-1} выше основного состояния и поэтому заселены слабо [24–26]. Генерация может быть получена одновременно на обеих линиях [26], ибо они связаны с разными ионными комплексами.

Кроме рубина существует еще целый ряд кристаллов, ионы хрома в которых обладают подходящим спектром. К ним относятся MgO , шпинели $\text{Mg Al}_2\text{O}_4$; $\text{Zn Al}_2\text{O}_4$; $\text{Be Al}_2\text{O}_4$; Al_2SiO_5 , а также некоторые естественные минералы: топаз $\text{Al}(\text{OH}\cdot\text{F})_2\text{SiO}_4$, смарагд $\text{Be}_3\text{Al}_2(\text{SiO}_3)_6$, уваровит $\text{Ca}_3(\text{Al}_2\text{Cr})_2(\text{SiO}_4)_3$. Все они обладают широкими полосами поглощения, их люминесцентные переходы дают линии, лежащие в красной области спектра и являющиеся достаточно узкими и интенсивными, особенно при низких температурах. Эмиссионные спектры ионов хрома в указанных веществах приведены на рис. 5 [14, 15].

Весьма удачным материалом для создания лазера оказался флюорит CaF_2 , активированный трехвалентным ураном U^{3+} . Исследованию спектра такого кристалла при содержании урана 0,1–0,3% посвящены работы [27, 28]. Схема уровней U^{3+} изображена на рис. 4б.

Более поздние исследования показали [73], что структура основного уровня несколько сложнее, чем это показано на рис. 4б, и при концентрации U^{3+} порядка 0,05% удается наблюдать пять люминесцентных линий в интервале от 2,14 до 2,5 $\mu\text{к}$. Увеличение концентрации до 0,1% влечет за собой появление дополнительной линии с $\lambda = 2.6 \mu\text{к}$. Время жизни U^{3+} на люминесцентном уровне $\tau_{24} \sim 100 \text{ мксек}$. Генерация была получена [29] на инфракрасных переходах*, нижний уровень которых приподнят на 500 см^{-1} над основным и при азотных температурах практически незаселен. Используемая для накачки полоса поглощения находится в зеленой части спектра.

Лазер на длину волны 7083 \AA был создан на базе флюорита, активированного самарием [30]. Схема расположения уровней иона Sm^{++} очень напоминает изображенную на рис. 4б схему уровней U^{3+} . Нижний уровень рабочего перехода отделен от основного интервалом в 263 см^{-1} . Более полные данные по спектру Sm^{++} можно найти в работах [8, 31].

Недавно появилось сообщение о создании лазера, использующего спектр ионов Nd^{3+} в кристалле CaWO_4 (0,14%) [32]. Интервал в 2000 см^{-1} , отделяющий нижний уровень рабочего перехода от основного, позволяет обходиться умеренными мощностями накачки даже при комнатных температурах. Лазер работает на волне 1064 \AA . Данные о структуре энергетического спектра иона приведены в работах [33].

Очень большой интерес представляет возможность использования люминесцентных материалов типа стекла, поскольку им может быть придана любая геометрическая форма. На этом пути уже имеются первые успехи. Пригодным для работы лазера материалом оказался раствор Nd в стекле ($\lambda = 1,06 \mu\text{к}$) [39]. Положительный результат достигнут и в случае применения органических стекол [40]. С помощью оптической накачки удалось добиться генерации на переходах молекул бензофенона и нафталина, заключенных в стеклянной массе в количестве 0,02%. Длина волны использованного люминесцентного перехода нафталина составляла 4700 \AA .

б) Газы. Список практически осуществленных приборов, использующих газообразные рабочие вещества, ограничивается пока лазером

* Генераторы инфракрасного диапазона иногда называют ирзерами.

на смеси неона и гелия [35, 70–72]. Рабочим переходом может служить любой из разрешенных переходов с четырех $2s$ на десять $2p$ подуровней неона (рис. 6а). Имеется 30 таких переходов, и все они лежат в диапазоне $9000 \div 17000 \text{ \AA}$. Гелий здесь играет роль того самого при-
месного газа, о котором говорилось выше. Электроны, образующиеся в газовом разряде, при соударениях с атомами гелия возбуждают метастабильное 2^3s -состояние последнего. Непосредственно механизмом получения избыточной населенности являются неупругие соударения между метастабильными атомами гелия и невозбужденными атомами неона. Сечение этого процесса не очень велико ($3,7 \cdot 10^{-17}$ при температуре 300°K), поскольку разность энергий $E_{\text{He}} - E_{\text{Ne}} \sim \sim 323 \text{ см}^{-1}$ значительно превышает kT . С точки зрения сечения можно указать и более удачные смеси; однако инертные газы имеют целый ряд очевидных преимуществ при постановке эксперимента. Малая эффективность механизма возбуждения в какой-то мере компенсируется большим временем жизни Ne в $2s$ -состоянии по сравнению с $2p$ -состоянием. Так, например, подуровень $2s_5$,

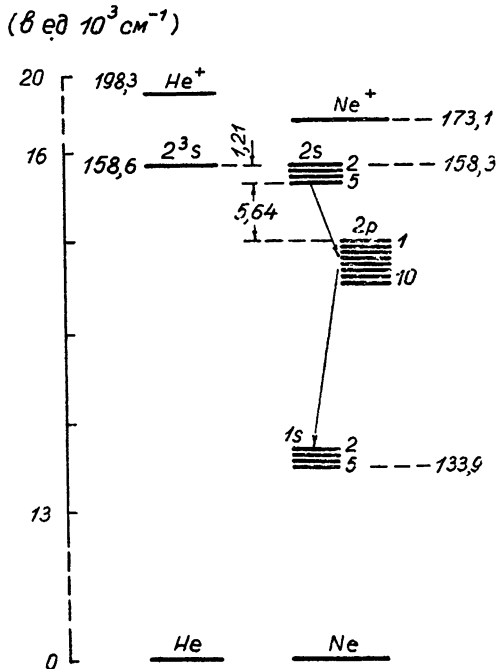


Рис. 6а.

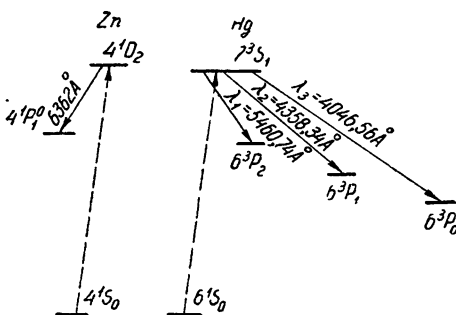


Рис. 6б.

связанный оптическим переходом только с $2p_9$, имеет в 25 раз большее время жизни, чем последний.

Некоторые осложнения связаны с наличием $1s$ -подуровней неона, которые заселяются при переходах с $2p$. Правда, соударения с электронами разрушают $1s$ -состояния, однако этот процесс сопровождается нежелательным возбуждением $2p$ -состояний и делает довольно критичной зависимость распределения населенностей от концентрации электронов.

Несмотря на малую величину сечения неупругих соударений между атомами неона и гелия, играющих основную роль в процессе возбуждения необходимого уровня неона, практически удается создать состояние с отрицательной температурой. Парциальные давления компонент смеси, по-видимому, наиболее выгодно выбирать порядка $0,1 \text{ мм Hg}$ для Ne и 1 мм Hg для He [35].

В качестве рабочего вещества для лазера предлагается также [36] смесь паров цинка и ртути, энергетические уровни которых приведены

на рис. 6б. Отрицательную температуру в разряде удалось получить на уровнях цинка $4^1P_0^1$ и 4^1D_2 . Избыточная населенность 4^1D_2 -уровня поддерживается за счет столкновений с атомами ртути в возбужденном 7^3S_1 -состоянии. Энергетический интервал между 7^3S_1 Hg и 4^1D_2 Zn равен 133 см^{-1} , что порядка kT уже при комнатных температурах. Поэтому процесс неупругого соударения имеет большое сечение. Число атомов Hg гораздо больше числа атомов Zn, и на опыте при различных условиях удавалось получить на $\lambda=6362 \text{ \AA}$ коэффициенты усиления от 1,5 до 10. Отсюда для плотности атомов Zn в возбужденном 4^1D_2 -состоянии получаются значения до $5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Эта оценка согласуется с измерениями абсолютной интенсивности излучения на 6362 \AA .

Другим примером является смесь паров натрия и ртути [37]. Уровень 8^2P Na лежит на 113 см^{-1} ниже 6^3P_1 -уровня Hg, и сечение соударения с возбуждением первого из них по оценкам не менее $3 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$. Поскольку указанный 6^3P_1 -уровень ртути резонансный, эффективным методом его возбуждения является оптическая накачка с помощью излучения с $\lambda=2537 \text{ \AA}$ от ртутной лампы низкого давления. Такие лампы позволяют получать поток энергии около $10^{-2} \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$, что, судя по оценкам, обеспечивает $N_{8P} = 3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ в смеси с концентрациями атомов натрия и ртути $5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и $2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ соответственно (температура смеси $T=600^\circ\text{K}$). Наиболее удобными для целей генерации и усиления оказываются переходы 8^2P-8^2S ($\lambda = 30,2 \text{ мк}$) и 8^2P-7^2S ($\lambda=777 \text{ мк}$), для которых значения отрицательного коэффициента поглощения суть 2 и 0,02.

Примером, когда отрицательная температура достигается путем обеднения нижнего рабочего уровня, может служить смесь паров ртути с молекулярным водородом [38]. Наличие водорода приводит к интенсивному разрушению возбуждаемых в разряде 6^3P -состояний. В результате вышележащий 7^3S_1 -уровень оказывается более заселенным. Переходы между этими уровнями лежат в коротковолновой части видимого спектра (рис. 6б). На линии с $\lambda = 5460,74 \text{ \AA}$ было получено экспериментально усиление 1,14, а на линии с $\lambda = 4358,34 \text{ \AA}$ усиление равнялось 1,1.

Глава II

РЕЗОНАТОРЫ

Эффективное взаимодействие поля излучения с веществом происходит при помещении вещества в резонатор. До последнего времени техника резонаторов развивалась для диапазона СВЧ, где размеры систем—порядка длины волны и собственные частоты различных типов колебаний (мод), как правило, существенно отличаются, что позволяет в конкретных задачах ограничиваться рассмотрением небольшого числа мод или даже одной моды. Иное положение складывается в оптическом и инфракрасном диапазонах, где из-за малости длины волны использование таких систем становится практически невозможным. Дело не только в трудности изготовления малых резонаторов, но и в недостаточной вместимости полости резонатора и низкой его добротности. Все это вызывает необходимость использования в указанных диапазонах резонаторов, размеры которых велики по сравнению с длиной волны, и, следовательно, необходимость работы на высших типах колебаний.

Наиболее широко в лазерах используются в качестве резонаторов

интерферометры Фабри—Перо*. Иногда эти резонаторы называют дисковыми. Система представляет собой два параллельных зеркала (рис. 7а). В настоящее время исследуются резонаторы с отражателями более сложной формы, например, софокусные резонаторы.

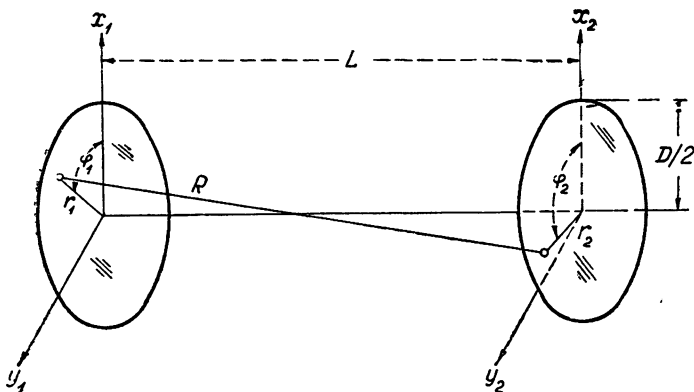


Рис. 7а.

Поскольку диаметр зеркал D и расстояние между ними значительно превышают длину волны λ , элементарную теорию резонатора Фабри—Перо можно построить на базе геометрической оптики [2, 12]. В элементарной теории принимается, что собственными волнами резонатора являются плоские однородные волны. Потери энергии обусловлены двумя принципиальными причинами: поглощением в зеркалах при отражении волны и излучением через открытую боковую поверхность. Естественно, что потери на излучение убывают с уменьшением угла θ между волновым вектором и нормалью к отражателю, сводясь при $\theta=0$ к дифракционным потерям. Как показано в [2, 12], убывание энергии поля в силу каждой из этих причин происходит по экспоненциальному закону с некоторым характерным временем затухания t_0 . Величиной t_0 определяется полоса резонатора на рассматриваемой моде $\Delta\omega=1/t_0$, и, следовательно, добротность

$$Q = \omega t_0. \quad (10)$$

Расчет потерь при отражении приводит к значению добротности

$$Q_r = L\omega/c(1 - \alpha), \quad (11)$$

где c —скорость света в заполняющей резонатор среде и α —коэффициент отражения по мощности. Дифракционные потери описываются добротностью

$$Q_d = D^2\omega^2/2\pi c^2. \quad (12)$$

Из сравнения (11) и (12) следует, что относительная роль указанных источников потерь зависит от рабочей частоты: при $\omega > \omega_{гр}$ преобладают потери на отражение, а при $\omega < \omega_{гр}$ — дифракционные потери. Приравнявая Q_r и Q_d , находим:

$$\omega_{гр} = \frac{\pi c}{1 - \alpha} \frac{L}{D^2}. \quad (13)$$

* Предложения об использовании интерферометра Фабри—Перо в качестве резонатора принадлежат Прохорову [41] и Дику [42].

Преобладание дифракционных потерь фактически означает неприменимость оптико-геометрического подхода, и этот случай не имеет смысла рассматривать в рамках элементарной теории. Для примера зададимся близкими к реальным значениями $\alpha=0,98$, $L=1$ см, $D=1$ см, которые приводят к $\omega_{гр}/2\pi = 7,5 \cdot 10^{11}$ ($\lambda_{гр} = 400$ мк). При $\omega/2\pi = 3 \cdot 10^{14}$ ($\lambda = 1$ мк) имеем: $Q_r \approx 3 \cdot 10^6$, $Q_d \approx 10^9$. С возрастанием L до 100 см добротность Q_r достигает $3 \cdot 10^8$.

Кроме указанных принципиальных причин, потери могут быть связаны и с непараллельностью зеркал. Соответствующая добротность

$$Q' = (\omega/c)(2LD/\beta)^{1/2}. \quad (14)$$

Непараллельность зеркал не скажется существенно на общей добротности, если $Q' < Q_r$. Это накладывает ограничение на предельно допустимое значение угла перекося β_{\max} . Для приведенных выше значений параметров $\beta_{\max} = 3'$ при $L=1$ см и $\beta_{\max} \sim 3''$ при $L=100$ см.

Волны, распространяющиеся под углом $\theta \neq 0$, затухают более интенсивно, нежели нормальные, так как для них возрастают потери на излучение через боковую поверхность. Эти дополнительные потери описываются добротностью

$$Q'' = \omega D/c\theta. \quad (15)$$

Моды, обладающие добротностью больше $Q_r/2$, лежат в пределах телесного угла $2\pi\theta_{\max}^2$. Величину угла θ_{\max} можно оценить из условия $Q'' = Q_r$, которое приводит к выражению

$$Q_{\max} = \omega D/cQ_r. \quad (16)$$

Число мод с высокой добротностью оценивается по формуле плотности осцилляторов поля в объеме $V \sim LD^2/4$ свободного пространства, что с учетом (16) дает:

$$p = LD^4\omega^4\Delta\omega/2\pi^2c^5Q_r^2. \quad (17)$$

Под $\Delta\omega$ здесь естественно понимать ширину спектральной линии рабочего вещества. Для люминесцентных линий кристаллов $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-3}$. В случае газа наибольший вклад в ширину линии для рассматриваемых диапазонов дает доплеровский механизм, и при комнатных температурах $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-6}$. Для резонатора с $L=1$ см, $D=1$ см, $\alpha=0,98$ при $\omega=2\pi \cdot 3 \cdot 10^{14}$ гц и $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-3}$ формула (17) приводит к $p \sim 5 \cdot 10^6$. Задавшись $L=100$ см и $\Delta\omega/\omega=10^{-6}$, получаем $p=50$.

Поглощение при отражении является доминирующим источником потерь в резонаторах Фабри—Перо инфракрасного и оптического диапазонов. Этим объясняются высокие требования к качеству отражающих поверхностей. Если рабочим веществом лазера является монокристалл, то в качестве отражающих поверхностей резонатора обычно используются его противоположные грани. Для этого они подвергаются тщательной обработке с последующим покрытием слоем металла или многослойной диэлектрической пленкой. Для связи полей внутри и вне резонатора одно из зеркал делается слегка прозрачным с коэффи-

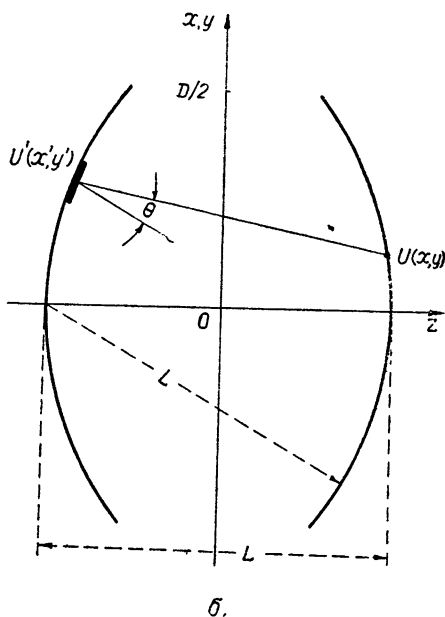


Рис. 76.

циентом прохождения порядка $0,1 \div 5\%$. Иногда для этой цели в покрытии зеркала оставляется небольшое отверстие.

Описанная выше элементарная теория дискового резонатора является довольно нестрогой ввиду конечных размеров резонатора. Из-за краевых эффектов собственные волны должны отличаться от плоских однородных волн. Кроме того, по своей сути элементарная теория не может правильно оценить диффракционные потери. Более последовательный анализ характера собственных волн и роли потерь на диффракцию проведен Фоксом и Ли [43, 44]. Задача решалась на основе принципа Гюйгенса методом последовательных приближений. Использование принципа Гюйгенса в скалярной формулировке оправдано, если $\lambda \ll D$ и электромагнитное поле является квазиперпендикулярным с однородной поляризацией. Полученные результаты подтверждают допустимость сделанных предположений о характере поля.

Сущность метода заключается в следующем. Задав поле U_0 на поверхности одного из зеркал, можно найти, пользуясь принципом Гюйгенса, поле U_1 на поверхности другого в виде поверхностного интеграла

$$U_1 = \frac{ik^3}{4\pi} \int_s U_0 \frac{e^{-ikR}}{R} (1 + \cos\Theta) ds, \quad (18)$$

где k —постоянная распространения волны в заполняющей резонатор среде, R —расстояние от текущей точки на поверхности интегрирования до точки, в которой вычисляется поле, Θ —угол между направлением R и нормалью к поверхности. Геометрия задачи поясняется рисунком 7а на примере круглых зеркал. Далее нужно взять поле U_1 в качестве исходного и найти отраженное поле на поверхности первого зеркала. Процедура многократно повторяется, и каждый раз поле U_{q+1} определяется через U_q , где индекс q указывает число отражений. Естественно, что после большого числа прохождений распределение поля по поверхности зеркал перестает меняться от отражения к отражению и

$$U_q = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^q v. \quad (19)$$

Здесь v —стационарная функция распределения поля и γ —не зависящий от координат комплексный коэффициент, связанный с отражением. Подстановка (19) в (18) приводит к интегральному уравнению

$$v = \gamma \int K v ds, \quad (20)$$

ядро которого $K = (ik/4\pi R)(1 + \cos\Theta)e^{-ikR}$.

На первом этапе решается в сущности задача о прохождении волны через серию диафрагм, имеющих форму зеркал интерферометра и разделенных интервалами, равными L . Аналогом этой задачи является исследование распространения волн в неограниченном волноводе. Как в том, так и в другом случае определяются конфигурации поля и постоянные распространения собственных волн системы. В отличие от случая волновода здесь удается найти лишь распределение поля в плоскости диафрагм, которое описывается собственными функциями v уравнения (20). Логарифм собственного значения γ дает потери и фазовый сдвиг, вызываемый каждой диафрагмой, т. е. определяет постоянную распространения волн в данной структуре. Следует отметить, что эффективная фазовая скорость волн превышает c . Скорости различных собственных волн не совпадают.

В [44] рассмотрены системы с плоскими зеркалами прямоугольной и круглой формы, причем на параметры наложены условия:

$$D \ll L, \quad D^2/4L\lambda \ll (2L/D)^2. \quad (21)$$

При этих условиях упрощается вид ядра K , ибо в его амплитудной части можно положить $R=L$, а в фазовом множителе после разложения R в ряд ограничиться двумя членами разложения. Собственные функции v_{mn} и собственные значения γ_{mn} характеризуются двумя индексами m и n . В случае прямоугольных зеркал эти индексы связаны с вариациями поля $v_{mn}(x, y)$ вдоль осей x и y соответственно, а в случае круглых — с вариациями $v_{mn}(r, \varphi)$ вдоль радиуса r и по азимутальному углу φ (рис. 7а). Собственные функции удовлетворяют условию ортогональности на поверхности:

$$\int_s v_{nm} v_{n'm'} ds = 0, \quad (22)$$

если $m \neq m'$ и $n \neq n'$. Учитывая квазипоперечность поля, Фокс и Ли обозначают связанную с v_{mn} моду посредством TEM_{mn} .

Численное решение (20) проводилось на счетной машине указанным методом последовательных приближений. При заданном равномерном распределении поля вдоль зеркала стационарное распределение амплитуды и фазы после 300 отражений имеет вид, показанный на рис. 8. На этом рисунке представлено распределение для плоских круглых зеркал при трех значениях параметра $N=D^2/4L\lambda$, поскольку в случае выполнения условий (21) решение определяется лишь этим параметром. Характерен значительный спад амплитуды к краю зеркала, усиливающийся с ростом N . Благодаря этому обстоятельству величина диффракционных потерь оказывается меньшей, чем следует из (12). В рассматриваемой задаче зеркала приняты идеально отражающими, поскольку элементарная теория достаточно верно учитывает потери на отражение. Второй существенной

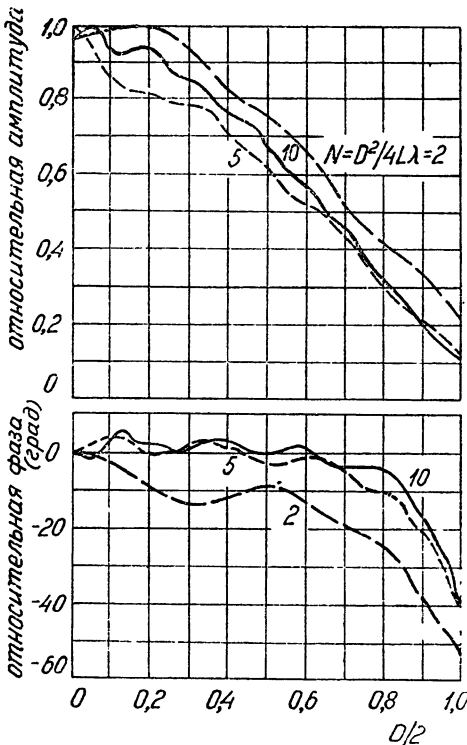


Рис. 8.

особенностью полученного решения является относительно небольшой сдвиг фаз к краю зеркала. Разность фаз между различными точками поверхности не превышает $\lambda/8$, что при диаметре в десятки λ дает лишь слабое искривление волнового фронта. Данный результат оправдывает предположение о квазипоперечности собственных волн. Полученная мода, согласно упомянутой классификации, может быть названа TEM_{00} .

Для нахождения остальных мод необходимо задаваться другими начальными распределениями. Так, равномерное на одной половине

зеркала и такое же по амплитуде, но противоположное по фазе, поле на другой половине приводит к нечетно-симметричной моде TEM_{10} . Зависимости от параметра N -потерь и фазового сдвига $\Delta\varphi$ -волны при отражении приведены на рис. 9. Характерно, что усложнение конфигурации поля связано с ростом потерь, благодаря чему доминирующей является волна TEM_{00} .

Следует, однако, отметить, что всегда имеется несколько волн, слабо отличающихся по затуханию от рассматриваемой. Именно поэтому для выявления стационарного распределения авторам [44] пришлось доводить численный расчет до трехсотого приближения. Учет граничных условий на идеально отражающих поверхностях зеркал аналогичен переходу от волновода к резонатору; при этом спектр собственных частот становится дискретным. Условие резонанса выполняется лишь для тех волн, для которых электрическая длина резонатора $L_r = q\lambda/2$, где q —целое число, или, что то же самое,

$$L = \frac{\lambda}{2} \left(q - \frac{\Delta\varphi}{\pi} \right). \quad (23)$$

Несмотря на несовпадение плоскости зеркала (или диафрагмы) с поверхностью равных фаз, фазовый сдвиг $\Delta\varphi$ не зависит от координаты точки в этой плоскости, что связано с собственным характером стационарных распределений поля.

Добротность каждой моды определяется потерями на отражение и на диффракцию:

$$Q^{-1} = Q_r^{-1} + Q_d^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi L} (\delta_r + \delta_d),$$

где δ_r и δ_d —соответствующие коэффициенты поглощения. Если $\delta_r = 1 - \alpha$ и выражение для Q_r совпадает с (11), то для нахождения Q_d придется воспользоваться графиком на рис. 9а, который для основной моды дает

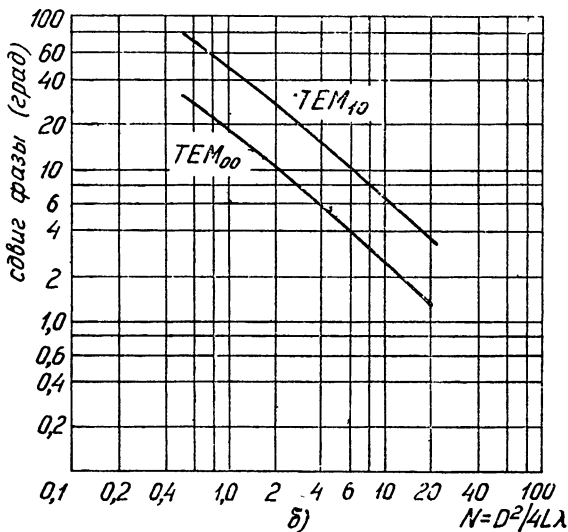
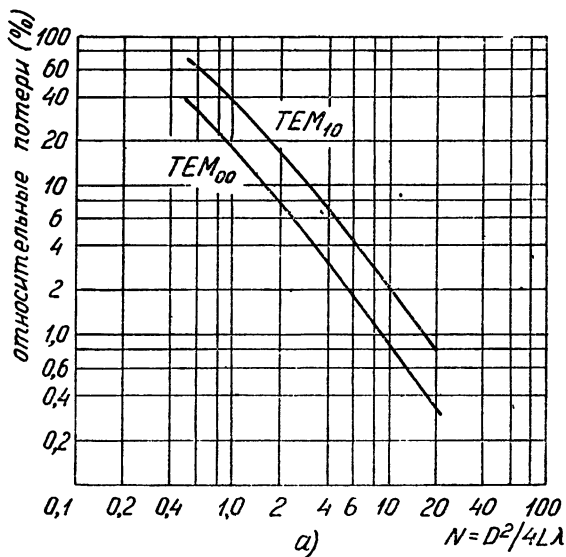


Рис. 9.

$$\delta_d = 0,207 (4L\lambda/D^2)^{1,4}. \quad (24)$$

Резонатор с $L=20$ см, $D=1$ см удовлетворяет для $\lambda=5 \cdot 10^{-5}$ см условию (21). Вычисление потерь по форме (24) приводит к величине $\delta_d=0,9 \cdot 10^{-4}$, что в пять раз меньше, чем дает (12) при тех же данных. Поскольку потери на отражение гораздо больше, ими и будет определяться добротность резонатора на данной моде, а следовательно, и ширина ее полосы $\Delta\lambda/\lambda \approx Q^{-1}$. Соответствующее поlose изменение электрической длины, как нетрудно убедиться, есть

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{L}{\lambda} \right) \frac{1}{Q} = \delta_r + \delta_d. \quad (25)$$

Для рассматриваемого примера $Q_r=1,25 \cdot 10^8$ и $\Delta\varphi=0,02$ радиан, когда $\delta_r=0,02$. Найденный по рис. 96 фазовый сдвиг моды TEM_{00} составляет $0,11^\circ$ и моды TEM_{01} — $0,3^\circ$. Расстояние между модами равно $0,19^\circ$ или $3,3 \cdot 10^{-3}$ радиан, что значительно меньше ширины полосы. Таким образом, моды TEM_{00} и TEM_{01} не разрешаются.

Обычно в пределы полосы одной моды интерферометра попадает большое число соседних мод. В таком интерферометре плоская волна претерпевает лишь незначительные искажения. Иная ситуация возникает при заполнении резонатора активной средой, которая может в значительной мере скомпенсировать потери, разделив соседние моды. В этом случае рассмотренная теория оказывается особенно существенной.

К резонаторам Фабри—Перо примыкают системы с отражателями более сложной формы. Резонатором такого типа является, в частности, система из двух сферических софокусных зеркал (рис. 76); его теория изложена в работах [44, 45]. Задача заключается в отыскании собственных значений и собственных функций уравнения (20) при заданной конфигурации зеркал. Интересно, что в этом случае она оказывается более простой и допускает аналитическое решение. Для зеркал с квадратной апертурой уравнение (11) записывается в виде:

$$\sigma_m \sigma_n f_m(x) g_n(y) = \int_{-D/2}^{D/2} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{ik}{2\pi R} e^{-ikR} f_m(x') g_n(y') dx' dy', \quad (26)$$

где $\sigma_m \sigma_n = \gamma_{mn}$. Соотношение (26) написано в предположении $D \ll L$, позволяющем считать $\cos \theta = 0$. Дальнейшее использование условий (21) еще более упрощает уравнение (26). Если разложить R в степенной ряд и ограничиться двумя членами разложения* то,

$$\frac{R}{L} = 1 - \frac{xx' + yy'}{L^2}. \quad (27)$$

Тогда после введения безразмерных переменных

$$C = D^2 k / 4L = 2\pi(D^2/4L\lambda), \quad X = 2x\sqrt{C}/D, \quad Y = 2y\sqrt{C}/D \quad (28)$$

уравнение приводится к виду, допускающему разделение переменных:

$$\sigma_m \sigma_n F_m(X) G_n(Y) = \frac{ie^{-ikL}}{2\pi} \int_{-\sqrt{C}}^{\sqrt{C}} F_m(X') e^{iXX'} dX' \int_{-\sqrt{C}}^{\sqrt{C}} G_n(Y') e^{iYY'} dY. \quad (29)$$

* В этом приближении сферические зеркала не отличаются от параболических.

Задача, таким образом, сводится к решению однородного уравнения Фредгольма второго рода с ядром $e^{iXX'}$:

$$F_m(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\chi_m} \int_{-V\bar{C}}^{V\bar{C}} F_m(X') e^{iXX'} dX. \quad (30)$$

Решение (21) было получено в работе [46]:

$$F_m(C, \eta) \sim S_{0m}(C, \eta); \quad (31)$$

$$\chi_m = \sqrt{\frac{2C}{\pi}} i^m R_{0m}^{(1)}(C, 1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\eta = X/\sqrt{C} = 2x/D$ или $\eta = Y/\sqrt{C} = 2y/D$, $S_{0m}(C, \eta)$ и $R_{0m}^{(1)}(C, 1)$, согласно [47], суть угловая и радиальная волновые функции в вытянутой сфероидальной системе координат. Собственными функциями (29) являются сфероидальные волновые функции $S_{0m}(C_1, 2x/D)$, $S_{0n}(C_1, 2y/D)$. Их действительность означает, что поверхности зеркал совпадают с поверхностями равных фаз волны.

Условие резонанса требует, чтобы набег фазы волны, пришедшей в исходную точку после отражения от обоих зеркал, был кратен 2π ; он равен удвоенному фазовому углу собственных значений

$$\sigma_m \sigma_n = \chi_m \chi_n i e^{-ikL} \quad (32)$$

и в силу (22) составляет $(m+n)\pi/2 - kL + \pi/2$. Условия резонанса, таким образом, записываются в виде:

$$2\pi q = 2|\pi/2 - kL + (m+n)\pi/2| \quad (33)$$

или

$$4L/\lambda = 2q + (1 + m + n).$$

Индексы m и n описывают вариации поля в направлении осей X и Y , величина q равна числу полуволн, укладываемому вдоль оси резонатора. Совокупность этих трех целых чисел полностью характеризует моду, которая может быть обозначена TEM_{mnq} , поскольку продольные компоненты полей малы. На основании (33) можно заключить, что в спектре софокусного резонатора имеют место случаи вырождения.

Диффракционные потери на одно отражение даются выражением

$$\delta_d = 1 - |\sigma_m \sigma_n|^2 = 1 - |\chi_m \chi_n|^2. \quad (34)$$

Потери эти значительно меньше, чем в случае параллельных плоских зеркал, и расчет их величины в [46] находится в согласии с результатами [44].

Аналитическое выражение функции распределения поля получено для любого перпендикулярного оси сечения. Поле достаточно быстро (по закону, близкому к $e^{-C\eta^2}$) спадает к краям. Радиус интенсивно освещенного пятна, в пределах которого поле спадает в e раз, равен

$$w_s = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi} (1 + \xi^2)}. \quad (35)$$

Здесь $\xi = 2z_0/L$, причем начало координат помещено в фокусе. Наименьшим размер пятна будет в фокальной плоскости, где $w_s = \sqrt{\lambda L/2\pi}$, и наибольшим — вблизи зеркал, где $w_s = \sqrt{L\lambda/\pi}$. Разумеется, формула (35) имеет смысл лишь при условии $w_s \ll D$.

Поскольку софокусный резонатор обладает сферическими поверх-

ностями равных фаз, полученные результаты можно использовать для приближенного описания поля резонатора, сферические отражатели которого разнесены на расстояние $L \ll 2b$ (b —радиус кривизны). Радиус интенсивно освещенного пятна на зеркале

$$\omega'_s = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \left[2 \frac{L}{b} - \left(\frac{L}{b} \right)^2 \right]^{-1/4}, \quad (27)$$

что эквивалентно софокусному резонатору с апертурой $D' = D\omega'_s/\omega'_s$. При заданных L и D минимум потерь достигается, естественно, при $b=L$. Объем, занятый полем, дается выражением

$$V = \pi\omega'_s L = \lambda L^2 \left[2 \frac{L}{b} - \left(\frac{L}{b} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (37)$$

справедливым при условии $\omega'_s \ll D$. Резонанс в рассматриваемой системе наступает, когда

$$\frac{4L}{\lambda} = 2q + (1 + m + n) \left(1 - \frac{4}{\pi} \arctg \frac{b-L}{b+L} \right). \quad (38)$$

Поскольку последний член (38) не является целым, вырождение по λ снимается.

Основным преимуществом системы со сферическими зеркалами перед плоско-параллельным резонатором является гораздо менее жесткое требование к точности изготовления и юстировки. При процентных отклонениях радиуса кривизны зеркал и расстояния между ними от значений, соответствующих условию софокусности, параметры резонатора меняются еще не очень существенно. При таких отклонениях вырождения в спектре собственных частот снимаются, и он приближается к спектру плоского резонатора. Точки пересечения оси софокусного резонатора с поверхностями зеркал должны быть достаточно удалены от их краев. Тогда дифракционные потери значительно меньше, чем в дисковом резонаторе. Малость потерь связана с сильной концентрацией поля вблизи оси. Небольшой объем поля моды является серьезным достоинством софокусного резонатора, поскольку уменьшается необходимое количество рабочего вещества и требуемая мощность для его возбуждения. Положительным качеством софокусной системы является также большая, по сравнению с плоской, разница дифракционных добротностей основной и соседней мод.

Экспериментальное исследование софокусного резонатора было выполнено Кристианом и Губо на частоте 23 кмгц [48]. Основные размеры их резонатора: $L = 3 \cdot 10^3$ см, $D = 92$ см. При такой геометрии интенсивно освещено почти все зеркало. Теоретический анализ этого случая проведен в работе [49], посвященной возможности создания лучевых волноводов СВЧ-диапазона. Спадение интенсивности к краям и в этом случае следует закону Гаусса, хотя и появляется зависимость от размеров зеркал. Теоретические и экспериментальные результаты хорошо согласуются между собой.

Кроме рассмотренных резонаторов оптического и инфракрасного диапазонов мыслимы и иные типы. Так, в работе [50] теоретически исследуются свойства биконического сферического резонатора.

Резонаторы указанных типов перспективны также в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах, где они начинают применяться для создания лазеров. На миллиметровых волнах были проведены экспериментальные исследования резонаторов Фабри—Перо. Измерения Барчукова и Прохорова [51] дают картину поля в резонаторе, качественно

согласующуюся с теорией Фокса и Ли [44]*. Собственные волны близки к плоским неоднородным волнам, поляризованным параллельно плоскости зеркал. Амплитуда поля резко падает к краям резонатора. Добротность оказалась порядка $5 \div 7 \cdot 10^3$. Слабая зависимость ее от расстояния между пластинами, по-видимому, связана с преобладающей ролью диффракционных потерь, что вполне естественно в диапазоне $3 \div 12,5$ мм при размерах $D=15\lambda$ и $L \sim 2 \div 3\lambda$. Действующий интерферометр диапазона 6 мм, позволяющий измерять длины волн с точностью до 0,04%, описан в [52]; добротность его достигала 10^5 .

В работах [53] содержится предложение об использовании отрезков диэлектрических волноводов в качестве резонаторов лазеров. Если диаметр такого волновода достаточно мал, то в нем может распространяться небольшое число типов волн. Волновод оптического диапазона должен иметь диаметр порядка микрон, т. е. представляет собой тонкое диэлектрическое волокно.

Основное преимущество волоконного резонатора перед остальными заключается в меньшем числе собственных типов волн. Благодаря этому уменьшается вероятность спонтанного излучения, являющегося существенным источником потерь в лазере. Условия самовозбуждения лазера с волоконным резонатором должны выполняться при меньшем уровне мощности подсветки. Одно волокно не может, естественно, содержать большого количества рабочего вещества и обеспечить большую мощность генератора: для достижения этой цели требуется пучок волокон. Ослабление связи между полями отдельных волокон в этом случае может быть достигнуто нанесением тонких пленок с меньшим коэффициентом преломления на их поверхности.

Практическое использование техники волоконных резонаторов наталкивается на некоторые трудности. Из-за сильного отражения от границ трудно вводить возбуждающий свет внутрь волокна. Наилучшим материалом для лазера на базе волоконных резонаторов является стекло. Как было указано в предыдущей главе, такие материалы уже созданы [39, 40]. Монокристаллы типа рубин в форме волокон изготовить невозможно. Использование газов в этом случае, по-видимому, будет лимитироваться соударениями со стенками.

Глава III

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В предыдущих разделах были рассмотрены три основных компонента лазеров: рабочие вещества, устройства для создания в них состояний с отрицательной температурой и резонаторы. Остановимся теперь на описании действующих приборов и основных экспериментальных результатов.

а) Лазер на рубине. Розовый рубин является тем материалом, который был использован при разработке первых лазеров [54, 55]. И это не случайно. С одной стороны, рубин является одним из самых изученных, причем очень разносторонне, кристаллов. С другой стороны, корунды нашли широкое применение в самых разнообразных областях техники, что, несомненно, стимулировало совершенствование технологии их выращивания. Достоинством рубина является и возможность работы лазера при комнатных температурах.

В настоящее время известен ряд конструктивных вариантов рубинового лазера. Во всех конструкциях возбуждающий свет проникает

* Количественное сравнение лишено смысла, поскольку исследовавшиеся резонаторы не удовлетворяют условиям (12).

внутри кристалла через боковую поверхность; торцевые же поверхности используются для создания резонатора. С этой целью их тщательно обрабатывают, делают по возможности более плоскими и наносят на них отражающие покрытия. Покрытия чаще всего изготавливаются из серебра, хотя применяются и более трудоемкие в изготовлении многослойные диэлектрические пленки.

Существенным недостатком рубина как рабочего вещества является потребность в сравнительно больших энергиях возбуждения.

Характер выходного излучения при высоких интенсивностях возбуждающего света зависит, в первую очередь, от качества применяемого образца рубина. В работах [54, 55] описан случай отсутствия резкого порога генерации. Наблюдавшееся при этом сужение R_1 -линии не превышало $4 \div 5$ раз при гладкой форме излучаемого импульса. Угловой раcтвор пучка был порядка радиана. Последующее исследование использовавшихся кристаллов указало на наличие в них больших внутренних напряжений. Отрицательную роль играют и такие факторы, как вариации направления оптической оси и неравномерность распределения ионов хрома по образцу.

Накопленный экспериментальный материал позволил сформулировать следующие требования к рубиновым элементам лазеров [56]:

- 1) вариации направления оптической оси не должны превышать $10'$;
- 2) отклонения формы поверхности торцов от плоской—не более $\lambda/10$;
- 3) параллельность торцов выдерживается в пределах $2''$;
- 4) угол между плоскостью торца и образующей цилиндра—не более $\pm 1'$;
- 5) допуск на длину стержня $\pm 0,13$ мм;
- 6) допуск на диаметр стержня $\pm 0,025$ мм.

Форма и размеры рубинового стержня выбираются в зависимости от характера лампы, оптической системы подсветки и способа охлаждения. Все указанные требования подчинены задаче достижения порога генерации при возможно меньших мощностях источника возбуждения.

Главной отличительной чертой высококачественного кристалла является наличие резко выраженного порога генерации. На малых уровнях мощности наблюдается обычная люминесценция. Интенсивности обеих R -линий одного порядка и их отношение не зависит от направления приема. Для излучения через боковую поверхность это отношение остается неизменным при большей мощности накачки. По иному ведет себя излучение с торца. Начиная с определенного уровня, интенсивность R_1 резко возрастает благодаря включению механизма индуцированного испускания. На рис. 10 приведена зависимость излученной лазером энергии от энергии, рассеиваемой лампой накачки. Этот график взят из работы [5]*. Начальный пологий участок соответствует

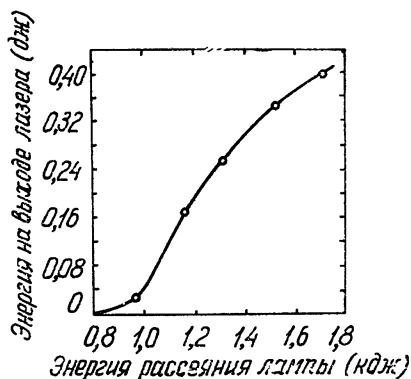


Рис. 10.

допороговой люминесценции. Предельной энергии импульса излучения в $0,4$ дж отвечает пиковая мощность 3 квт (на других образцах до-

* Количественно экспериментальные данные разных авторов, как правило, не совпадают, что связано с отличием в параметрах кристаллов. Мы, главным образом, будем придерживаться работы [5], оговариваясь во всех иных случаях.

стигалась мощность и в 5 квт). Методика всех временных измерений состоит в приеме излучения на фотоумножитель с последующей регистрацией сигнала на осциллографе. Перед ФЭУ ставится фильтр, не пропускающий прямого излучения с лампы накачки, и аттенюатор. Для целей измерения мощности ФЭУ калибруется с помощью термопары по стандартной лампе.

Излучаемый импульс запаздывает по отношению к возбуждающему на время порядка 300 мксек, необходимое для образования нужной разности населенностей. При малой инерционности приемной аппаратуры и большой скорости развертки наблюдаемый на экране осциллографа импульс оказывается не монолитным, а состоящим из нерегулярной последовательности коротких импульсов (рис. 11а). Частота их повторения растет с усилением накачки. Длительность отдельного импульса не превышает микросекунды при времени нарастания около 0,1 мксек.

Интересными особенностями отличается пространственная структура луча лазера. Выше порога генерации угол расхождения пучка уменьшается до величины порядка $0,1 \div 1^\circ$. Распределение интенсивности по сечению луча, выходящего через полупрозрачное покрытие торца кристалла, показано на рис. 11б. Интенсивное центральное пятно окружено характерными для систем типа Фабри—Перо полосами. С ростом мощности размер центрального пятна увеличивается. Освещенность в пределах пятна и полос не является однородной. В работе [57] приводятся данные, свидетельствующие о мозаичной структуре луча: пятно оказывается состоящим из большого числа зерен, имеющих на два порядка меньшие размеры по сравнению с самим пятном.



Рис 11а.

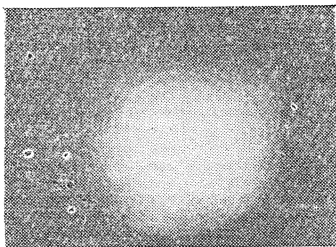


Рис. 11б.

Спектральный анализ луча осуществляется с помощью интерферометра Фабри—Перо. Ширина полос интерференции связана со спектральной шириной излучаемой линии. Согласно [5], спектр состоит из узкой линии с шириной 10^{-3} см^{-1} и более широкого фона; по измерениям [57] ширина генерируемой линии составляет $0,2 \text{ см}^{-1}$. Авторами [57] замечено, что при больших уровнях накачки одновременно наблюдается несколько систем интерференционных полос разной яркости. В [5] указывается на невозможность отдельной интерференционной картины как по числу полос, так и по их яркости.

Для излучения лазера характерна пространственная когерентность. Экспериментальные доказательства содержатся в работах [57, 58]. В [57] описан эксперимент по наблюдению фраунгоферовой диффракции на прямоугольном отверстии $50 \times 150 \text{ мк}$, оставленном в металлическом покрытии торца кристалла. Полученная диффракционная картина соответствует освещению апертуры волной, близкой к плоской и когерентной. Эта картина исчезает при снижении мощности накачки до величин ниже пороговых. На эксперименте наблюдалась и интерференционная картина от двух параллельных щелей в одной из пластин резонатора [58]. Щели толщиной в $7,5 \text{ мк}$ были расположены на расстоянии $54,1 \text{ мк}$ друг от друга и ориентированы в направлении диаметра стержня. Снимок интерференционной картины дан на рис. 12.

Указанные экспериментальные результаты при учете геометрии отверстий позволяют сделать заключение о пространственной когерентности волны на расстоянии до 100λ вдоль торца стержня. На рис. 12 видны две системы интерференционных полос. Их может быть и больше, причем число систем растет при возрастании мощности над пороговой. При фиксированной паре щелей детали картины воспроизводятся от эксперимента к эксперименту; однако сколько-нибудь регулярной закономерности в расположении этих деталей заметить не удастся. Перемещение щелей по торцу приводит к появлению других серий полос. Такая множественность систем интерференционных полос связана с тем, что в излучении участвует не весь образец, а лишь отдельные его части. Соответственно освещенными являются только небольшие участки поверхности кристалла. Измеренные размеры активной области оказались порядка $0,05$ см. Кстати, раствор пучка в $0,08^\circ$, зафиксированный при полупрозрачном равномерном покрытии торца, как раз совпадает с углом дифракции на апертуре диаметром $0,05$ см.

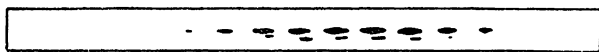


Рис. 12.

Таковы основные экспериментальные результаты, полученные с рубиновым лазером, генерирующем R_1 -линию. К их обсуждению мы вернемся в конце настоящей главы.

Эксперимент по генерации N -линий описан всего в одной работе [26], основное внимание в которой уделяется эффекту появления генерации. Опыт проводился при температуре жидкого азота. В большинстве образцов генерация наблюдалась по мере увеличения мощности подсветки сначала на линии $N_1—7041 \text{ \AA}$ с характерным увеличением интенсивности излучения с торцов и сужением пучка до 1° , причем пороговая мощность была меньше той, которая необходима для генерации R_1 -линии в розовом рубине, так как кристалл работает в этом случае по четырехуровневой схеме. При увеличении мощности накачки порог достигается и для линии $N_2—7009 \text{ \AA}$. Это единственный случай, когда на твердом теле получена генерация одновременно для двух линий. Такой эффект объясняется особенностями спектра красного рубина (см. главу I). Относительная интенсивность линии случайно менялась от образца к образцу, и в одном случае генерация достигалась даже сначала на $N_2—7009 \text{ \AA}$ -линии и лишь потом на $N_1—7041 \text{ \AA}$. Этот образец обладал самым высоким порогом.

б) *Лазеры на флюорите.* Для целей генерации использовались спектры трехвалентных ионов урана и двухвалентных ионов самария в решетке флюорита. Описание и анализ работы лазера на $\text{CaF}_2:\text{Sm}^{++}$ содержится в [8]. В эксперименте использован стержень диаметром $0,3$ см и длиной 2 см, содержащий $2,6 \cdot 10^{18}$ ионов $\text{см}^{-3} \text{Sm}^{++}$. Качество обработки кристалла было примерно таким же, как и в случае рубина. Кристалл помещался в специально сконструированный дьюар и охлаждался до температуры жидкого водорода (20°K). Система подсветки образца показана на рис. 26. Для выделения нужного участка из спектра лампы накачки дьюар с кристаллом окружался фильтром (для подсветки в полосе около 16000 см^{-1} фильтром служит раствор эозина). В эксперименте использовались лампы различной мощности при раз-

личных длительностях вспышки (от микросекунд до квазинепрерывного режима). Измерение мощности, падающей на кристалл при достижении порога генерации, дало цифру 13 вт или $21 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$ в единицах освещенности.

Основные экспериментальные данные получены при длительности вспышки около миллисекунды на аппаратуре с постоянной времени $2 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$. Характерной особенностью является гладкая форма излученного импульса: ни в одном случае на нем не появлялись релаксационные колебания амплитуды. Другой особенностью является зависимость длительности импульса лазера от мощности накачки. Вблизи порога момента начала и окончания генерации соответствуют одинаковые значения возбуждающей мощности. При значительном превышении порога излученный импульс оказывается значительно короче благодаря более раннему срыву колебаний. Анализируя причину этого явления, авторы [8] останавливаются на объяснении его изменением параметров кристалла (таких как ширины спектральных линий) при нагревании последнего возбуждающим светом.

Фотографические исследования структуры луча по методике и результатам очень близки к случаю рубина. Угол расхождения пучка несколько возрастает с ростом мощности (приблизительно он равен $0,5^\circ$). Поперечное сечение луча на всех снимках обнаруживает мозаичную структуру. Картина эта воспроизводима; однако относительная яркость отдельных зерен зависит от интенсивности подсветки и ее распределения по кристаллу. Зерна остаются и после прохождения лучом эталона Фабри—Перо. В этом случае они концентрируются в пять полос, отождествляемых с пятью дискретными частотами. Соответствующая полная ширина спектра равна $0,5 \text{ см}^{-1}$.

В [8] предлагается гипотеза, связывающая каждое зерно с отдельной модой резонатора лазера. Некоторым аргументом в пользу такой гипотезы является совпадение рассчитанного числа мод и наблюдаемого количества зерен в единице телесного угла (каждой моде резонатора соответствует плоская волна на выходе; направления их распространения группируются в кольце Фабри—Перо подобно тому, как это показано на рис. 116 для рубинового лазера).

По некоторым сообщениям [59], кристалл $\text{CaF}_2:\text{Sm}^{++}$ может быть использован для генерации в сине-зеленой области спектра. Эта область интересна тем, что в ней наблюдается наибольшая прозрачность морской воды. Поэтому лазеры указанного диапазона предполагается использовать для целей подводного обнаружения и подводной связи.

Генератор на длину волны $2,49 \text{ мк}$ создан на базе кристалла $\text{CaF}_2:\text{U}^{3+}$ [29]. Образец с размерами $D=0,95 \text{ см}$, $L=3,75 \text{ см}$ охлаждался в дьюаре, не находясь в непосредственном контакте с жидким гелием. Наблюдалось запаздывание начала генерации по отношению к вспышке на 450 мксек . Вблизи порога на излученном импульсе видны релаксационные колебания. Число видимых осцилляций падает с ростом накачки, а затем осцилляции исчезают. Расхождение пучка составляло $0,5^\circ$.

В [29] указывается на возможность достижения режима непрерывной генерации с помощью этого кристалла.

Для достижения генерации на $\lambda = 2,6 \text{ мк}$ на торцы кристалла наносилось не серебро, как в предыдущем случае, а многослойное диэлектрическое покрытие с высоким коэффициентом отражения [73]. Картина релаксационных колебаний оказалась весьма регулярной (рис. 13а): при небольшом превышении порога это—серия убывающих во времени пиков. Дальнейшее увеличение возбуждающей мощности приводит к появлению новых последовательностей импульсов, накладывающихся на первую (рис. 13б). Регулярный характер колебаний ав-

торы объясняют высокими качествами кристалла, а наличие нескольких последовательностей—одновременной независимой генерацией в пространственно изолированных оптических каналах (нитях).

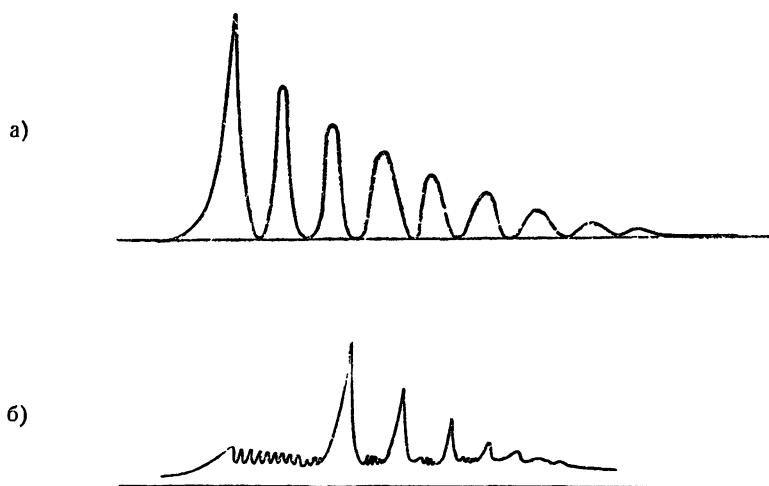


Рис. 13.

в) Газовый лазер. Газовый лазер, возбуждаемый с помощью газового разряда, создан на смеси неон-гелий [35]. Некоторое представление о конструкции прибора дает рис. 14. Для возбуждения разряда использован генератор на 28 мгц при рассеиваемой мощности около 50 вт. Резонатор образован парой высококачественных зеркал. Коэффициент отражения 98,9% при прозрачности в 0,3% достигнут путем нанесения диэлектрических слоев на поверхность пластины из плавленого кварца. Плоскость поверхности выдержана с точностью до 0,01λ. Отражательные свойства зеркал, оставаясь высокими в интервале длин волн $11000 \pm 12000 \text{ \AA}$, быстро ухудшаются вне этого интервала.

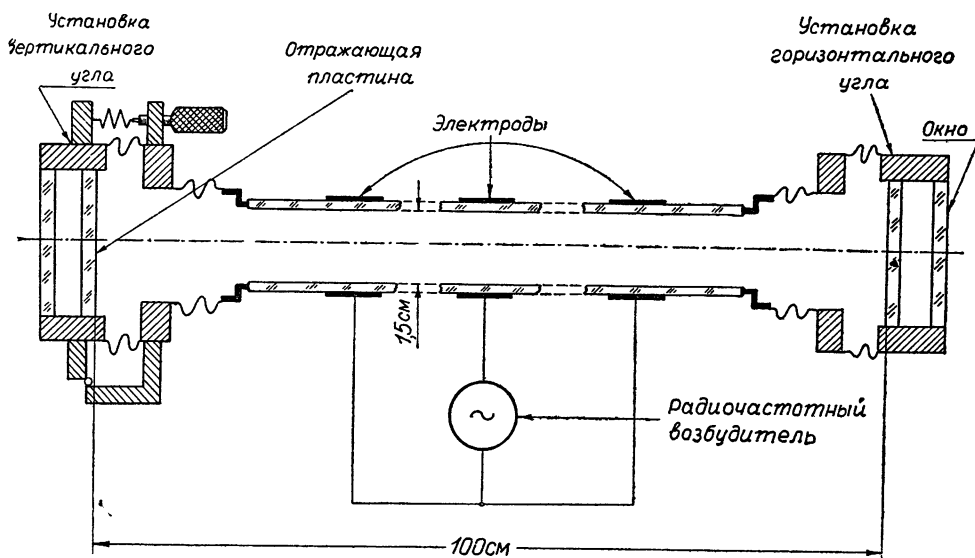


Рис. 14.

Лазер, созданный Джаваном, Бенеттом и Хэрриотом, явился первым оптическим генератором непрерывного действия. Из пяти длин волн, на которых наблюдалась одновременная генерация (11180, 11530, 11600, 11990 и 12070 Å), наиболее мощные колебания с выходом в 15 мвт имели место на 11530 Å. Ширина диаграммы направленности не превышала 1'.

Любопытно изменение поперечной структуры луча при увеличении угла между зеркалами. На рис. 15 показано сечение луча в случае параллельных зеркал (а) и при наличии между ними угла 6" (б). Ясно видно, что равномерно освещенное пятно уступает место более сложной структуре. Возможно, что последнее связано с одновременным возбуждением нескольких мод. На эту же мысль наводят и результаты спектральных исследований.

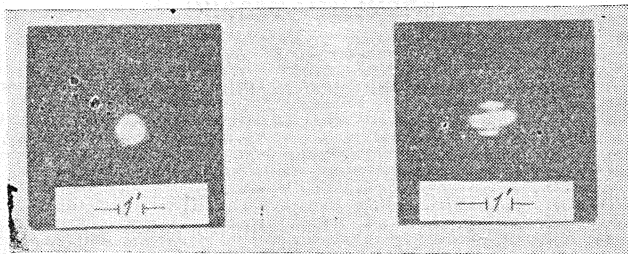


Рис. 15.

Надо отметить, что необычайно малая ширина спектра не позволила получить результаты с помощью оптических методов спектрального анализа. Наиболее удачным оказался способ, связанный с использованием нелинейных свойств фотоумножителя. Последний представляет собой квадратичный детектор, и спектр на его выходе определяется биением различных частотных компонент входного сигнала между собой. Наличие нескольких линий, по-видимому, связано с биениями между различными модами. Ширина индивидуальной линии порядка 100 кГц отвечает ширине линии излучения лазера, лежащей в интервале от 10 до 80 кГц.

Вариации фазы по сечению луча исследовались посредством наблюдения диффракции на системе девяти щелей, перекрывающей около 1,1 см по апертуре луча. Большая четкость картины свидетельствует о малости фазовых вариаций, т. е. о значительной пространственной когерентности излучения.

По всем параметрам, за исключением мощности, газовый лазер превосходит любой прибор, использующий твердые рабочие вещества.

Совокупность экспериментальных данных указывает, что на работе лазеров существенно сказываются неоднородности, имеющиеся в кристаллах. Исследование структуры кристаллов, использованных в лазерах, действительно показывает, что они далеко не идеальны. Структура кристаллов зависит от условий выращивания и не повторяется в деталях для различных образцов. Это объясняет известную разноречивость в результатах различных авторов. С неоднородностями связан также случайный характер изменения амплитуд соседних релаксационных пиков, которое лишь в среднем подчиняется динамическим закономерностям. Пространственная неоднородность кристалла приводит к искривлению траекторий луча, что делает понятным наличие оптимальных для генерации оптических каналов, которые проявляются в виде ярких участков

на торцах. Неоднородности приводят также к связи между различными модами резонатора, с чем, возможно, и связана мозаичная структура. Ясно, что расположение светящихся областей, их форма и особенности мозаичной структуры меняются случайным образом не только от образца к образцу, но и для одного образца по мере нагревания или изменения условий возбуждения. Характерно, что в газовом лазере, где условия гораздо ближе к идеальным, чем в кристаллах, таких нерегулярных эффектов не наблюдалось и, по-видимому, в автоколебательном режиме возбуждалась только одна мода. Вышеизложенное наводит на мысль, что будущая теория лазеров на твердом теле должна содержать элементы статистики.

Глава IV

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

Первоочередной задачей теории является написание основных уравнений движения рассматриваемой физической системы. В общем виде они очевидны: это уравнение для матрицы плотности плюс система уравнений электромагнитного поля. Однако указанная совокупность уравнений еще не отражает специфики, присущей именно лазерам, и нуждается в дальнейшей конкретизации. Первым шагом на этом пути является ограничение рассмотрения случаев двухуровневых квантовых объектов (молекул). На первый взгляд такая идеализация кажется некорректной, поскольку в работе лазера существенно участвуют более двух уровней. Тем не менее, она возможна, и это связано с некогерентностью механизмов возбуждения. Единственным когерентным движением является самосогласованный процесс индуцированного излучения. А в этом случае задача сводится к двухуровневой с начальными или эквивалентными им условиями, определяемыми всей совокупностью энергетических уровней и действующих механизмов возбуждения.

Исследованию взаимодействия двухуровневых молекулярных систем с электромагнитным полем посвящена обширная литература. Правда, большинство авторов ограничиваются рамками радиодиапазона, т. е. малым объемом вещества и взаимодействием его с одной модой резонатора. Наиболее близкими к случаю лазера представляются полученные в [60] уравнения для компонент энергетического спина S_i системы слабо взаимодействующих молекул:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 + \omega_0 S_2 + \frac{1}{T_2} S_1 + \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} A_{\lambda}(r) e_2 q_{\lambda} S_3 &= 0; \\ \dot{S}_2 - \omega_0 S_1 + \frac{1}{T_2} S_2 - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} A_{\lambda}(r) e_1 q_{\lambda} S_3 &= 0; \\ \dot{S}_3 &= \frac{1}{T_1} (S_3^0 - S_3) - \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} A_{\lambda}(r) (e_1 S_2 - e_2 S_1) q_{\lambda}; \\ \ddot{q}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}}{Q_{\lambda}} \dot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} &= \int_V A_{\lambda}(r) (e_1 S_1 + e_2 S_2) dV. \end{aligned} \tag{39}$$

Здесь ω_0 —частота молекулярного перехода, ω_{λ} —собственные частоты резонатора, Q_{λ} —соответствующие этим частотам добротности, T_1 и T_2 —

феноменологические времена релаксации, e_1 и e_2 —молекулярные векторные константы.

Продольная компонента энергетического спина определяет плотность активных молекул, т. е. разность населенностей $n = 2S_3$. Величина S_3^0 имеет смысл равновесной разности в отсутствие генерации, но при действующих механизмах возбуждения.

При написании (39) использовано разложение вектор-потенциала поля по собственным функциям резонатора, заполненного средой:

$$A(r, t) = \sum_{\lambda} A_{\lambda}(r) q_{\lambda}(t); \quad \int_V A_{\lambda}^2 dV = 4\pi c^2. \quad (40)$$

Дискуссионным моментом является учет релаксационных процессов. Соответствующие члены S_1/T_1 , S_2/T_2 и $(S_3^0 - S_3)/T_1$ введены в (39) феноменологически, и принятый их вид вполне оправдан для спектральных линий, лежащих в радиодиапазоне. В оптике наряду с безызлучательными „спин-спиновыми“ и „спин-решеточными“ процессами в качестве релаксационных следует рассматривать и процесс спонтанного излучения, причем последний может играть доминирующую роль. Поэтому пользоваться системой (39) можно лишь при рассмотрении таких вопросов, в которых конкретная форма релаксационных членов играет второстепенную роль. Задачами подобного рода мы и ограничимся, полагая T_1 и T_2 эмпирическими константами. Одной из них является задача об условии самовозбуждения лазера.

1. Условие самовозбуждения

Критическое число активных молекул, начиная с которого в лазере возникает самоподдерживающийся процесс генерации, оценивалось в нескольких работах [2, 61, 62]. В [2] этот критерий получен из элементарных качественных соображений энергетического баланса. Сводятся они к тому, что мощность излучения активной среды, заключенной в резонатор, должна превосходить мощность всех потерь. Вывод, специализированный для случая резонаторов Фабри—Перо, проведен в [61], где более детально учитываются различные по природе источники потерь.

В работе [62] этот же вопрос решается в общем виде на основе системы уравнений (39). В обозначениях

$$\begin{aligned} A_{\lambda} e_1 / \hbar = \sigma_{1\lambda}, \quad A_{\lambda} e_2 / \hbar = \alpha_{2\lambda}, \quad \alpha_{2\lambda} - i\alpha_{1\lambda} = \sigma_{\lambda}, \\ S_1 + iS_2 = P_1, \quad S_1 - iS_2 = P_2 \end{aligned} \quad (41)$$

система (39) принимает вид:

$$\dot{P}_1 + (T_2^{-1} - i\omega_0) P_1 + \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} q_{\lambda} S_3 = 0;$$

$$\dot{P}_2 + (T_2^{-1} + i\omega_0) P_2 + \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}^* q_{\lambda} S_3 = 0;$$

$$\dot{S}_3 = \frac{1}{T_1} (S_3^0 - S_3) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (P_1 \alpha_{\lambda}^* + P_2 \alpha_{\lambda}) q_{\lambda}; \quad (42)$$

$$\ddot{q}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}}{Q_{\lambda}} \dot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} = -\frac{i\hbar}{2} \int_V (P_1 \alpha_{\lambda}^* - P_2 \alpha_{\lambda}) dV.$$

Используемый далее прием разложения P_1 и P_2 по системе функций α_λ и α_λ^* является эффективным лишь в случае совпадения объемов вещества и поля и равномерного распределения активных молекул. Полнота и ортогональность системы α_λ следует из свойств системы A_λ (во всяком случае, если углы между A_λ и e_1 , A_λ и e_2 не меняются при переходе от точки к точке). Произведя разложение

$$P_1(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}(r) P_{1\lambda}(t), \quad P_2(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}^*(r) P_{2\lambda}(t) \quad (43)$$

и воспользовавшись ортогональностью собственных функций, можно перейти от (42) к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{1\lambda} + (T_2^{-1} - i\omega_0) P_{1\lambda} + S_3^0 q_{\lambda} &= 0; \\ \dot{P}_{2\lambda} + (T_2^{-1} + i\omega_0) P_{2\lambda} + S_3^0 q_{\lambda} &= 0; \\ V\dot{S}_3 &= \frac{a^2}{2} \sum_{\lambda} (P_{1\lambda} + P_{2\lambda}) q_{\lambda}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\dot{q}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}}{Q_{\lambda}} \dot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} = \frac{i\hbar a^2}{2} (P_{2\lambda} - P_{1\lambda}),$$

где $a^2 = \int_V \alpha_{\lambda} \alpha_{\lambda}^* dV$.

Эти уравнения легко могут быть исследованы на устойчивость по отношению к малым колебаниям. Граница устойчивой области, получаемая при таком анализе, в наиболее простом случае $e_1 \parallel e_2 \parallel A_{\lambda}$ выражается соотношением:

$$N_{\text{мин}} = \hbar/4\pi|\mu|^2 Q_{\lambda} T_2. \quad (45)$$

Результат этот совпадает с критерием, написанным в [2].

Предположение о совпадении объемов поля и рабочего вещества строго выполняется лишь в случае замкнутой полости с идеально проводящими стенками. Реальные резонаторы, во-первых, не являются замкнутыми и, во-вторых, изготовлены из материала с конечной проводимостью. Поэтому сделанное предположение может быть лишь приближенно справедливым и необходимо оценить границы его пригодности. (При выводе (45) оно использовалось для перехода от (42) к (44), связанного с взятием интегралов типа $\int_{V_s} \sum_{\mu} A_{\lambda} A_{\mu} dV$.)

Собственные функции поля A_{λ} ортогональны в объеме $V_p = V_s + v_0$, и поэтому можно записать:

$$\int_{V_s} \sum_{\mu} A_{\lambda} A_{\mu} dV = \int_{V_p} A_{\lambda}^2 dV - \int_{v_0} \sum_{\mu} A_{\lambda} A_{\mu} dV. \quad (46)$$

Здесь V_s —объем, занятый веществом, V_p —объем резонатора. Из (46) следует, что предположение об ортогональности в объеме V_s имеет место, если только

$$\left| \int_{v_0} \sum_{\mu} A_{\lambda} A_{\mu} dV \right| \ll \int_{V_p} A_{\lambda}^2 dV. \quad (47)$$

Поскольку

$$\left| \int_{v_0} \sum_{\mu} A_{\lambda} A_{\mu} dV \right| \leq \sum_{\mu} \int_{v_0} |A_{\lambda} A_{\mu}| dV \leq \sum_{\mu} \int_{v_0} \{ \max A_{\mu} \}^2 dV = n \{ \max A_{\lambda} \}^2 v_{\text{эфф}},$$

можно заменить (47) более жестким условием:

$$n \{ \max A_{\lambda} \}^2 v_{\text{эфф}} \leq \int_{V_n} A_{\lambda}^2 dV. \quad (48)$$

Здесь под n следует понимать число возбужденных мод в резонаторе. Неравенство (48) имеет следующий физический смысл: вся энергия поля резонатора, сосредоточенная вне объема вещества, должна быть меньше полной энергии колебаний одной моды. Если наличие $v \neq 0$ связано лишь со скин-эффектом, то $v_{\text{эфф}}^2 = V_{\text{ск}}$. Используя условие нормировки и известное соотношение [63] $V_A/V_{\text{ск}} \sim Q_r$, можно для этого случая записать (48) в виде

$$Q_r \gg n. \quad (49)$$

В резонаторе Фабри—Перо боковая поверхность вообще не металлизирована. Поскольку закон спадания поля вне объема между зеркалами, вообще говоря, неизвестен, прямая оценка $v_{\text{эфф}}$ представляется затруднительной. Однако излучение через боковую поверхность представляет собой диффракционные потери, и $v_{\text{эфф}}^d$ можно оценить из соотношения $V_A/v_{\text{эфф}}^d \sim Q_d$. Из теории резонаторов следует, что в оптическом диапазоне $Q_d \gg Q_r$, откуда $v_{\text{эфф}}^d \ll V_{\text{ск}}$, и критерий (49) остается в силе. Вычисляя Q_r по формуле (11) и оценивая n согласно (17), можно получить при $L=4$ см, $D=0,5$ см, $\alpha=0,95$, $\omega=3 \cdot 10^{15}$, $\Delta\omega/\omega=10^{-3}$, что $Q_r/n \sim 0,2$. Следовательно, в красной области спектра неравенство (49) еще может быть удовлетворено.

2. Упрощенные уравнения лазера

Выяснение вопроса о существовании стационарного режима лазера, нахождение амплитуды колебаний и их спектра, в принципе, может быть осуществлено путем решения системы (39). Сложность задачи связана с нелинейностью и большим числом „зацепляющихся“ уравнений. На практике для разного рода оценок часто пользуются уравнениями для баланса населенностей уровней и энергии поля [8, 64–66]. Законность такого подхода нуждается в обосновании.

Рассмотрим для простоты систему (42) в случае возбуждения только одной моды резонатора с $\omega_{\lambda} = \omega_0$. Для перехода к уравнениям баланса необходимо исключить поперечные компоненты спина и опустить при этом производные порядков выше первого. Расчет облегчает непринципиальное предположение о действительности α_{λ} ($\alpha_{\lambda} = \alpha_{\lambda}^*$). Оно означает, что собственными являются волны с линейной поляризацией, ибо $e_{\perp} = 0$. Решение (42) будем искать в виде колебаний с медленно меняющейся амплитудой:

$$P_1 = p(t) e^{i\omega_0 t}; \quad P_2 = p(t) e^{-i\omega_0 t}; \quad q = q_0(t) \cos(\omega_0 t). \quad (50)$$

Характерное время изменения амплитуд $1/\Omega \gg 1/\omega_0$, и членами порядка Ω можно пренебречь по сравнению с ω_0 . Учитывая также, что $Q \gg 1$, получаем из (42) следующую систему:

$$\dot{p} = -pT_2^{-1} - \frac{1}{2} \alpha q_0 S_3; \quad (51)$$

$$\dot{S}_3 = (S_3^0 - S_3) T_1^{-1} + \frac{1}{2} \alpha q_0 p; \quad (51a)$$

$$\dot{q}_0 = -\frac{\omega_0 q_0}{2Q} - \frac{\hbar}{2\omega_0} \int \alpha p dV. \quad (51b)$$

Исключая p из (51) и (51б), приходим к уравнению:

$$\ddot{q}_0 + \dot{q}_0 \left(\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{T_2} \right) + q_0 \left(\frac{\omega_0}{2T_2 Q} - \frac{\hbar}{4\omega_0} \int_{V_A} \alpha^2 S_3 dV \right) = 0. \quad (52)$$

Вторая производная может быть отброшена, если только (52) описывает аperiodический процесс, т. е.

$$\left| \left(\frac{\omega_0}{2T_2 Q} - \frac{\pi}{4\omega_0} \int \alpha^2 S_3 dV \right)^{1/2} \right| \ll \frac{\omega_0}{2Q} + \frac{1}{T_2}. \quad (53)$$

В этом случае (52) сводится к

$$\frac{d}{dt} q_0^2 = (1+u)^{-1} \left\{ \frac{\hbar T_2}{2\omega_0} \int \alpha^2 S_3 dV - \frac{\omega_0}{Q} \right\} q_0^2, \quad (54)$$

где $u = \omega_0 T_2 / 2Q$.

Преобразуем уравнение (54), приведя его к более принятой в уравнениях баланса форме. Если учесть, что вероятность индуцированного перехода под действием линейно-поляризованного поля $W(r) = H'^2(r) T_2 / 2\hbar^2$ (см., например, [4]), где H' — энергия взаимодействия молекулы с полем, то в используемых обозначениях $H' = \alpha q_0 \hbar / 2$ (см. [60]) получим:

$$\alpha^2 q_0^2 T_2 = 8W(r). \quad (55)$$

Величина q_0^2 пропорциональна числу фотонов m , и в случае $u \ll 1$ с учетом сделанных замечаний можно записать:

$$\dot{m} = 2 \int W S_3 dV - \frac{\omega_0}{Q} m, \quad (54a)$$

а вместо (53)

$$\frac{1}{m} \int W S_3 dV \ll T_2^{-1}. \quad (53a)$$

Второе уравнение, связывающее q_0 и S_3 , можно получить, комбинируя (51) и (51a):

$$\begin{aligned} \ddot{S}_3 + \dot{S}_3 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{\dot{q}_0}{q_0} \right) + S_3 \left(\frac{\alpha^2 q_0^2}{4} + \frac{1}{T_1 T_2} - \frac{1}{T_1} \frac{\dot{q}_0}{q_0} \right) = \\ = \frac{S_3^0}{T_1} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{\dot{q}_0}{q_0} \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Отношение \dot{q}_0/q_0 , согласно (53a), много меньше T_2^{-1} и поэтому членом \dot{q}_0/q_0 можно пренебречь. При условии

$$\left(\frac{\alpha^2 q^2}{4} + \frac{1}{T_1 T_2} \right)^{1/2} \ll \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \quad (57)$$

вторую производную также можно отбросить. Полное число активных

молекул $n=2\int S_3 dV$, и, следовательно, после интегрирования (56) по объему с учетом (55) и (57) получим:

$$\dot{n} = 4 \int W S_3 dV + \frac{n_3 - n_3^0}{T_1}. \quad (58)$$

Соотношения (54) и (58) переходят в обычно используемые уравнения, если положить $2 \int W S_3 dV = W_{12}n$, где W_{12} — некая усредненная по объему величина, рецепт нахождения которой остается неопределенным*.

Таким образом, использование уравнений баланса для описания режима генерации оправдано, во всяком случае, когда возбуждается только одна мода, и для всех тех случаев, когда

$$T_2 \ll T_1, \quad 2Q/\omega, \quad 1/2 W_{12}. \quad (59)$$

Для случая твердых тел, где $T_2 \ll 10^{-10}$ сек⁻¹, неравенство (59) заведомо выполняется при всех практически достижимых разностях населенностей и амплитудах поля.

3. Релаксационные колебания амплитуды генератора

В предыдущей главе приведен ряд примеров, когда имели место релаксационные колебания амплитуды генерируемого лазером сигнала. Так, излучение рубина всегда представляется в виде серии коротких импульсов. На экспериментах с $\text{CaF}_2:\text{U}^{3+}$ релаксационные колебания обнаруживаются лишь при определенных значениях возбуждающей мощности; в газовом лазере подобные явления не отмечены вообще.

Одной из возможных причин нестационарности процесса излучения может быть недостаточно высокая скорость накачки. Другими словами, механизм возбуждения не успевает компенсировать убыль числа возбужденных молекул вследствие индуцированного испускания. Поэтому через некоторое время после возникновения генерации ее амплитуда спадает. При этом вероятность индуцированного излучения убывает до тех пор, пока приход частиц на возбужденный уровень не начинает превышать их уход.

Качественный анализ описанного процесса может быть сделан на основе уравнений (54) и (58) [8, 64, 66, 67]. Мы будем пользоваться такой формой их записи, при которой все члены, зависящие от накачки, сгруппированы вместе (ниже они обозначаются индексом J):

$$\dot{n} = J - \varepsilon B n t - \frac{n}{\tau}, \quad (60)$$

$$\dot{m} = B n t - \frac{\omega}{Q} m.$$

Запись $Bm = W_{12}$ применена для явного выделения переменной m . Система (60) нелинейна и ее аналитическое решение в общем виде не найдено. Результаты машинного счета для значений параметров, соответствующих лазеру на рубине, приведены в [64]. Сводятся они к тому, что после включения возбуждающего света происходит процесс установления равновесных величин n и m . Процесс этот характеризуется резкими осцилляциями, амплитуда и период которых убы-

* Заметим, что это упрощение не совсем корректно, так как W_{12} может оказаться зависящим от времени.

вают с течением времени. Стационарные значения находятся из (60) при условии равенства нулю производных:

$$\bar{n} = \frac{\omega}{BQ}, \quad \bar{m} = \frac{JQ}{\varepsilon\omega} - \frac{1}{\varepsilon B\tau}. \quad (61)$$

В случае малых колебаний около стационарного уровня система (60) может быть линеаризована, после чего легко найти аналитическое решение. Подстановка в (60) $n = \bar{n} + \eta$ и $m = \bar{m} + \xi$ и пренебрежение затем членами порядка η^2 и ξ^2 приводят к уравнению

$$\ddot{\eta} + \frac{1}{\tau} \frac{J}{J_t} \dot{\eta} + \frac{\omega}{Q\tau} \left(\frac{J}{J_t} - 1 \right) \eta = 0, \quad (62)$$

где $J_t = \omega/BQ\tau$ — пороговое значение параметра J . Точно такому же уравнению удовлетворяет переменная ξ . Решение (62) будет осцилляторным, если мнимая часть корня характеристического уравнения (т. е. частота) по модулю превышает действительную (т. е. затухание):

$$\frac{\omega}{Q\tau} \left(\frac{J}{J_t} - 1 \right) - \frac{1}{4\tau^2} \left(\frac{J}{J_t} \right)^2 > \frac{1}{4\tau^2} \left(\frac{J}{J_t} \right)^2. \quad (62a)$$

Последнее соответствует изменениям интенсивности возбуждения в пределах

$$\left| \frac{J}{J_t} - \frac{\omega\tau}{Q} \right| < \sqrt{\left(\frac{\omega\tau}{Q} \right)^2 - \frac{2\omega\tau}{Q}}. \quad (63)$$

Отрицательность подкоренного выражения в (63)

$$\omega\tau/Q < 2 \quad (64)$$

означает невозможность релаксационных колебаний ни при каких значениях возбуждающей мощности.

Результаты расчета согласуются с имеющимися в литературе скудными экспериментальными данными. Так, для рубина $\omega = 2,7 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, $\tau = 3 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$ и (64) может быть выполнено лишь при $Q > 10^{11}$, т. е. практически колебания будут наблюдаться. Частота релаксационных колебаний в рубине, оцениваемая по формуле

$$[(\omega/Q\tau)(J/J_t - 1) - (1/4\tau^2)(J/J_t)^2]^{1/2},$$

оказывается порядка 10^6 сек^{-1} , что также согласуется с экспериментом [5, 57]. Мощности возбуждения, при которых решение (64) становится аperiодическим, на много порядков превосходят J_t . Для лазера на $\text{Ca F}_2 : \text{Sm}^{++}$ в [8] приводятся значения параметров $\omega/Q \sim 10^9$, $\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$. Релаксационные колебания должны иметь место при $J/J_t < 2 \cdot 10^3$, однако их частота оказывается порядка 10^7 сек^{-1} , что находится на пределе разрешающей способности аппаратуры. Интересный результат приведен в [29] для лазера на $\text{Ca F}_2 : U^{+++}$, где колебания амплитуды зарегистрированы на малых уровнях мощности и отсутствуют при больших. Следует указать, что в известной мере колебания мощности излучения могут быть связаны с нелинейными явлениями, которые вполне возможны в таких сильных полях, какие имеют место при работе генератора.

4. Ширина спектра

Определение спектра генерации лазера путем непосредственного решения уравнений типа (39) связано с большими математическими

трудностями. Специфика задачи не допускает линеаризации системы. Это обстоятельство предопределило попытки проведения оценок менее сложными путями, хотя бы и в ущерб строгости рассмотрения. Один из таких подходов развит в [65, 68]. Для оценки ширины спектра использован, по сути дела, тот же прием, который ранее был предложен [69] для аналогичной цели в теории молекулярного генератора.

Как уже говорилось выше, все моды резонатора могут быть условно разбиты на две категории в соответствии с их добротностью. Так, поскольку индуцированное испускание имеет заметную величину только для совокупности мод с наибольшей добротностью, то в стационарном режиме будет иметь место следующее уравнение энергетического баланса:

$$\frac{\omega u}{Q_L} = f \tau_{21}^{-1} N_2 \hbar \omega + W_{12} (N_2 - N_1) \hbar \omega. \quad (65)$$

В левой части равенства стоит мощность всех потерь в единице объема резонатора, определяемая плотностью энергии u и нагруженной добротностью Q_L . Правая часть представляет собой сумму спонтанного и индуцированного излучения единицы объема рабочего вещества. Множитель f имеет смысл отношения числа добротных мод к общему их числу. В предположении о лоренцовой форме спектральной линии с шириной $\Delta\omega$ (воспользовавшись приведенной в [65] связью между W_{21} и спектральной плотностью энергии поля $\rho(\omega)$ для последней) можно из (65) получить выражение:

$$\rho(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{f N_2 \tau_{21}^{-1} \hbar \Delta\omega Q_L}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Delta\omega/2)^2 (1 + Q_L/Q_M)}. \quad (66)$$

Входящая в последнюю формулу величина

$$Q_M = 2\pi\varepsilon^{1/2}/\alpha\lambda \quad (67)$$

обычно называется добротностью рабочего вещества; ε — диэлектрическая проницаемость, а α — коэффициент поглощения единицы объема. Выражение (66) для излучения лазера описывает лоренцову линию с полушириной

$$B = \frac{\Delta\omega}{2} \left(1 + \frac{Q_L}{Q_M} \right)^{1/2}. \quad (68)$$

Особенность наблюдается при $Q_M = -Q_L$, что соответствует порогу генерации. При этом, согласно (68), $B \rightarrow 0$ и, согласно (66), $\rho(\omega)$ и $P_C = \omega V/Q_L \int \rho(\omega) d\omega$ обращаются в бесконечность. В действительности полная мощность излучения рабочего вещества должна оставаться в конечных пределах, определяемых мощностью возбуждения с учетом потерь при безызлучательном переходе:

$$N_1 W_{13} \hbar \omega V = P_C + (1-f) N_2 \tau_{21}^{-1} \hbar \omega V. \quad (69)$$

Интегрирование обеих частей (69) по всему спектру приводит к выражению для полосы лазера

$$B = f N_2 \tau_{21}^{-1} \hbar \omega \Delta\omega V / 2\pi P_C. \quad (70)$$

Основной физической идеей является невозможность обращения P_C в бесконечность. Следовательно, в (70) нельзя произвольно задавать Q_L/Q_M , а следует считать независимым параметром P_C (опреде-

ляемый, например, из (69)). При этом полоса B также остается конечной, и на основании (70) и (69)

$$B = \frac{f \Delta \omega / 2\pi}{(W_{13} / A_{21}) (N_1 / N_2) - (1 - f)}. \quad (71)$$

Представляемая (71) зависимость приведена на рис. 16 для нескольких значений параметра f . Поскольку развиваемый метод оперирует величинами P_C и B , изменяющимися в области конечных значений, порога генерации в том смысле, которым мы пользовались ранее, здесь нет. Предполагается, что (70) справедливо и в режиме генерации.

Отметим, что величина f связана со степенью однородности кристалла. Чем больше искажений, тем больше число колебаний будет иметь одинаковую добротность и, следовательно, порог будет выражен менее резко. Такая зависимость действительно имеет место [65].

Из изложенного в этой главе ясно, что теория квантовомеханических генераторов находится еще в зачаточном состоянии и далеко отстает от эксперимента, довольствуясь в боль-

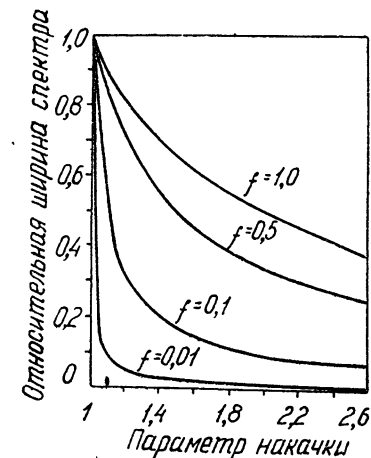


Рис. 16.

шинстве случаев грубо оценочными или просто качественными выводами.

Квантовомеханические оптические и инфракрасные генераторы значительно превосходят все другие источники в этом диапазоне как по когерентности и монохроматичности, так и по спектральной плотности излучения. Эти качества лазеров открывают перспективы широкого использования их в науке и технике. Говоря о применениях и дальнейших путях развития лазеров, можно выделить три основных момента.

Во-первых, создание когерентного источника практически решает вопрос об использовании оптического и инфракрасного диапазонов для целей связи. Не говоря о колоссальном увеличении числа каналов связи, переход в оптический диапазон сулит существенное увеличение дальности связи, поскольку излучение лазера может быть сконцентрировано в чрезвычайно узкий пучок. Ориентировочный расчет [74] показывает, что на волне 5000 \AA при ширине спектра 1 мГц и мощности 10 квт в непрерывном режиме использование дополнительной линзы диаметром 5 м позволит увидеть луч невооруженным глазом на расстоянии $0,1$ светового года. На расстоянии в 10 световых лет для регистрации сигнала на фотопластинке потребуется экспозиция в 1 минуту. Разумеется, для передачи информации необходимо научиться модулировать и демодулировать световой луч. На основании ряда публикаций можно заключить, что в этой области уже имеются некоторые успехи. В наземных условиях лазеры нашли применение при разработке оптических локаторов и дальномеров [75].

Во-вторых, фокусируя луч лазера, можно достичь огромной плотности энергии в малых объемах. С помощью высококонцентрированной энергии луча можно производить чисто механическую работу и, что гораздо интереснее, исследовать и использовать нелинейные свойства вещества. В частности, уже удалось осуществить удвоение частоты рубинового лазера [76] и сложить частоты двух лазеров [77]. Эффект преобразования частоты может быть усилен при использовании резонансных свойств вещества, т. е. при совмещении частот падающих и преобразованных излучений с частотами квантовых переходов [78].

В-третьих, принцип работы лазера открывает известные перспективы и для дальнейшего освоения далекого инфракрасного диапазона, в котором пока используются только тепловые генераторы.

Перечень возможных применений лазера может быть значительно расширен. Однако даже из сказанного очевидна исключительная важность этого нового направления в квантовой радиофизике [74].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фабрикант, М. М. Вудынский, Ф. А. Бутаева, Авт. свид., № 123209 (3. № 576749), 1951.
2. A. L. Schawlow, C. H. Townes, *Phys. Rev.*, **112**, 1940 (1958).
3. S. M. Bergmann, *J. Appl. Phys.*, **31**, 275 (1960).
4. N. Bloembergen, *Phys. Rev.*, **104**, 324 (1956).
5. T. H. Maiman, R. H. Hoskins, I. J. D'Haensens, C. K. Asawa, V. Evtuhov, *Phys. Rev.*, **123**, 1151 (1961).
6. P. A. Miles, H. E. Edgerton, *J. Appl. Phys.*, **32**, 740 (1961).
7. M. Ciftan, C. F. Luck, C. G. Shafer, H. Statz, *Proc. IRE*, **49**, 960 (1961).
8. W. Kaiser, C. G. B. Garrett, D. L. Wood, *Phys. Rev.*, **123**, 766 (1961).
9. С. Г. Раутиан, И. И. Соболевман, *ЖЭТФ*, **41**, 2018 (1961).
10. A. Javan, *Phys. Rev. Letters*, **3**, 87 (1959).
11. J. H. Sanders, *Phys. Rev. Letters*, **3**, 86 (1959).
12. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Ю. М. Попов, *УФН*, **72**, 161 (1960).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Гостехиздат, М., 1948.
14. O. Deutschbein, *Ann. Phys.*, **14**, 712 (1932).
15. O. Deutschbein, *Ann. Phys.*, **20**, 828 (1934).
16. S. Sugana, Y. Tanabe, *J. Phys. Soc. Japan*, **13**, 880 (1958).
17. S. Sugana, I. Tsujikawa, *J. Phys. Soc. Japan*, **13**, 884 (1958).
18. E. O. Schulz-DuBois, *Bell Syst. Tech. J.*, **38**, 271 (1959).
19. Л. П. Пашин, А. М. Прохоров, *ЖЭТФ*, **34**, 777 (1958).
20. J. H. Pace, D. F. Samson, J. S. Thorp, *Phys. Rev. Letters*, **4**, 18 (1960).
21. F. Varsanyi, D. L. Wood, A. L. Schawlow, *Phys. Rev. Letters*, **3**, 544 (1959).
22. T. H. Maiman, *Phys. Rev. Letters*, **4**, 564 (1960).
23. C. E. Mendenhall, R. W. Wood, *Phyl. Mag.*, **30**, 316 (1915).
24. A. L. Schawlow, D. L. Wood, A. M. Clogston, *Phys. Rev. Letters*, **3**, 271 (1959).
25. I. Wieder, L. R. Sarles, *Phys. Rev. Letters*, **6**, 95 (1961).
26. A. L. Schawlow, G. E. Devlin, *Phys. Rev. Letters*, **6**, 96 (1961).
27. Л. Н. Галкин, П. П. Феофилов, *ДАН СССР*, **114**, 745 (1957).
28. Л. Н. Галкин, П. П. Феофилов, *Оптика и спектроскопия*, **7**, 840 (1959).
29. P. P. Sorokin, M. J. Stevenson, *Phys. Rev. Letters*, **5**, 557 (1960).
30. P. P. Sorokin, M. J. Stevenson, *IBM J. Research and Development*, **5**, 56 (1961).
31. П. П. Феофилов, *Оптика и спектроскопия*, **1**, 992 (1956).
32. L. F. Johnson, K. Nasai, *Proc. IRE*, **49**, 1704 (1961).
33. E. Carlson, G. H. Dicke, *J. Chem. Phys.*, **29**, 229 (1958).
34. H. Z. Cummins, I. Abella, O. S. Heavens, N. Knabe, C. H. Townes, *Advances in Quantum Electronics*, New York and London, 1961.
35. A. Javan, W. R. Bennett, D. R. Herriott, *Phys. Rev. Letters*, **6**, 106 (1961).
36. В. И. Аблоков, М. С. Песин, И. Л. Фобелинский, *ЖЭТФ*, **39**, 892 (1960).
37. С. Г. Раутиан, И. И. Соболевман, *ЖЭТФ*, **39**, 217 (1960).
38. Ф. А. Бутаева, В. А. Фабрикант, *Исследования по экспериментальной и теоретической физике, Сб. памяти Г. С. Ландсберга*, изд. АН СССР, М., 1959.
39. *Electronic News*, № 288, 44 (1961).
40. D. J. Morantz, B. G. White, A. J. C. Wright, *Phys. Rev. Letters*, **8**, 23 (1962).
41. А. М. Прохоров, *ЖЭТФ*, **34**, 1658 (1958).

42. R. H. Dicke, U. S. Patent, 2, 851, 652, September 9, 1958.
43. A. G. Fox, T. Li, Proc. IRE, 48, 1904 (1960).
44. A. G. Fox, T. Li, BSTJ, 40, 453 (1960).
45. G. D. Boyd, J. P. Gordon, BSTJ, 40, 489 (1961).
46. D. Slepian, H. O. Pollak, BSTJ, 40, 43 (1961).
47. C. Flammer, Spheroidal Wave Functions, Stanford Univ. Press, Palo Alto, Calif., 1957.
48. I. P. Christian, G. Goubau, IRE Trans., AP-9, 256 (1961).
49. G. Goubau, F. Schwing, IRE Trans., AP-9, 248 (1961).
50. W. Culshaw, IRE Trans., MTT-9, 135 (1961).
51. А. И. Барчуков, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, 4, 2094 (1959), Quantum Electronics, New York, 1960.
52. W. Culshaw, IRE Trans., MTT-8, 182 (1960).
53. E. Snitzer, J. Appl. Phys., 32, 36 (1961); J. Opt. Soc. Am., 49, 1128 (1959).
54. T. H. Maiman, Nature, 187, 493 (1960).
55. T. H. Maiman, Brit. Comm. and Electr., 7, 674 (1960).
56. N. B. Piper, Electronics, 34, 66 (1961).
57. R. J. Collins, D. F. Nelson, A. L. Schawlow, W. Bond, C. G. B. Garrett, W. Kaiser, Phys. Rev. Letters, 5, 303 (1960).
58. D. F. Nelson, R. J. Collins, J. Appl. Phys., 32, 739 (1961).
59. Electronics News, 249, № 6, 1 (1961).
60. В. М. Файн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 167 (1959).
61. J. Kotik, M. C. Newstein, J. Appl. Phys., 32, 178 (1961).
62. В. М. Файн, Я. И. Ханин, ЖЭТФ, 41, 1498 (1961).
63. А. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, ГИТТЛ, М., 1952.
64. R. Dushman, J. Electr. and Control, 10, 458 (1961).
65. T. H. Maiman, Phys. Rev., 123, 1145 (1961).
66. R. W. Hellwarth, Phys. Rev. Letters, 6, 9 (1961).
67. H. Stutz, C. de Mars, Quantum Electronics, New York, 1960.
68. W. G. Wagner, G. Birnbaum, J. Appl. Phys., 32, 11 (1961).
69. J. P. Gordon, H. Z. Zeiger, C. H. Townes, Phys. Rev., 99, 1264 (1955).
70. A. Javan, Advances in Quantum Electronics, New York and London, 1961.
71. W. R. Bennett, Advances in Quantum Electronics, New York and London, 1961.
72. D. R. Herriott, Advances in Quantum Electronics, New York and London, 1961.
73. P. P. Sorokin, M. J. Stevenson, Advances in Quantum Electronics, New York and London, 1961.
74. C. H. Townes, Advances in Quantum Electronics, New York and London, 1961.
75. D. A. Buddenhagen, B. A. Lengyel, F. J. McClung, C. F. Smith, IRE Inter. Conv. Rep., 5, 285 (1961).
76. P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, G. Weinreich, Phys. Rev. Letters, 7, 118 (1960).
77. M. Bass, P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, G. Weinreich Phys. Rev. Letters, 8, 18 (1962).
78. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Э. Г. Яшин, ЖЭТФ, 41, 986 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 марта 1962 г.

О ДИФфуЗИИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В МЕЖЗВЕЗДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Г. Г. Гетманцев

Рассматривается движение космических частиц вдоль хаотически искривленных силовых линий межзвездного магнитного поля. Наряду с «трехмерной диффузией», связанной с хаотическим разбросом направлений силовых линий межзвездного магнитного поля, учитывается также «одномерная диффузия» вдоль выделенных силовых трубок межзвездного поля. Наличие одновременно «одномерной» и «трехмерной диффузий» приводит к существенному уменьшению скорости переноса космических частиц в межзвездном пространстве. Найдено выражение для среднего квадрата смещения частицы. В предельных случаях получены также выражения для плотности вероятности смещения частицы.

Известно, что наличие в межзвездном пространстве даже весьма слабого магнитного поля $H \approx 3 \cdot 10^{-6}$ эрстед существенно сказывается на движении космических частиц. Последнее связано с тем, что радиус кривизны траектории частиц $r = \epsilon \sin \theta / eH$ (ϵ — энергия частицы, θ — угол между вектором ее скорости и направлением магнитного поля) значительно меньше характерного масштаба неоднородностей магнитного поля $l_2 \sim 10^{20}$ см (при $\epsilon \sim 10^{15}$ эв $H \sim 3 \cdot 10^{-6}$ эрстед, $r \sim 10^{18}$ см). Поскольку скорость переноса космических лучей перпендикулярно градиенту магнитного поля $v_d \sim (r/l_2)v$ (где $v \sim c$ — скорость релятивистских космических частиц), то основная доля космических частиц с $\epsilon \sim 10^9$ эв в течение «времени существования» Галактики $T \sim 10^{17}$ сек сместится на расстояние $v_d T \sim 10^{19}$ см, которое еще значительно меньше среднего масштаба неоднородностей магнитного поля. В результате в межзвездном пространстве космические лучи движутся по винтовым траекториям вдоль силовых линий «замороженного» магнитного поля, и перенос космических лучей в Галактике на значительные расстояния определяется, следовательно, особенностями пространственного распределения магнитного поля*.

До сих пор (в том числе и в работах автора [1,2]) движение космических частиц в межзвездном магнитном поле рассматривалось в приближении «трехмерной диффузии». Предполагалось, что направления силовых линий магнитного поля в разных квазиоднородных областях распределены в пространстве случайным образом и поэтому последовательные перемещения космических частиц вдоль силовых линий в смысле направлений в пространстве случайны и равновероятны. В [2] мы уже отмечали, что подобная схема движения космических частиц в межзвездном поле является лишь весьма грубым приближением к действительности. В частности, в [2] отмечалось, что из-за наличия в межзвездном пространстве областей с повышенной напряженностью

* Мы предполагаем, что межзвездное магнитное поле имеет квазистатический характер, т. е. за «время жизни» Галактики ($\sim 10^{17}$ сек) отдельные трубки силовых линий магнитного поля сохраняют свою индивидуальность, несмотря на наличие движений в межзвездном газе. Нарушение топологии магнитных силовых линий («перехват»), разумеется, должно влиять на характер движения космических лучей в Галактике, что требует особого рассмотрения. В конце статьи приводятся некоторые предварительные соображения о влиянии «перехвата» на полученные здесь результаты.

поля заряженные космические частицы могут „отражаться“ от них и двигаться затем в обратном направлении вдоль тех же самых силовых трубок. При этом скорость диффузионного переноса космических частиц должна, разумеется, значительно снизиться.

„Отражение“ космических частиц от областей с повышенной напряженностью магнитного поля должно, очевидно, иметь место, если при движении частиц в поле сохраняется величина $\sin^2\theta/H$ („адиабатический инвариант“), где θ —угол между направлением H и вектором скорости v . Вместе с тем наличие в межзвездной среде газоманнитных разрывов, на которых магнитное поле резко меняется на расстояниях, значительно меньших гирорадиуса траектории космических лучей, также должно привести к „отражениям“ космических лучей, причем адиабатический инвариант в этом случае, очевидно, уже не должен сохраняться. Если считать, что, подойдя к газоманнитному разрыву, частица с равной вероятностью может или пройти через него или „отразиться“ от разрыва, то движение космических лучей вдоль выделенной трубки магнитных силовых линий приобретает характер одномерной диффузии со средней длиной свободного пробега l_1 , равной по порядку величины среднему расстоянию между разрывами, отсчитываемому вдоль силовых линий. При этом движение космических лучей в межзвездном поле фактически складывается из двух диффузионных движений: „одномерной диффузии“ со средней длиной свободного пробега l_1 и „трехмерной диффузии“, связанной с хаотическими изменениями направления магнитного поля в пространстве при средней длине квазизнородного участка l_2 . Для такой модели движения космических частиц, являющейся, по нашему мнению, лучшим приближением к действительности, чем модель простой трехмерной диффузии, ниже будут найдены плотность вероятности смещения частицы и средний квадрат ее смещения за определенный промежуток времени.

Плотность вероятности смещения частицы в случае одномерной диффузии определяется хорошо известным выражением [3]

$$W_1(x, t) = \frac{1}{2(\pi Dt)^{1/2}} e^{-x^2/4Dt}, \quad Dt = \frac{1}{2} N_1 l_1, \quad (1)$$

где координата x в нашем случае отсчитывается вдоль силовых линий межзвездного магнитного поля, а N_1 —число „соударений“ космической частицы с газоманнитными разрывами за время t . Плотность вероятности смещения частицы от некоторого выделенного центра на расстояние R за время t в результате трехмерной диффузии может быть записана в виде [3]:

$$W_2(R, t) = \frac{1}{2\pi N_2 (l_2^2/3)^{3/2}} e^{-3R^2/2N_2 l_2^2}, \quad (2)$$

где $N_2 l_2 = x$ —полный путь, проходимый космической частицей вдоль силовой линии магнитного поля за время t . Диффузионный путь x , проходимый частицей вдоль силовой линии, удовлетворяет, очевидно, неравенству

$$R < x < N_1 l_1,$$

и, следовательно, искомая плотность вероятности $W_3(R, t)$ может быть найдена путем интегрирования произведения $W_1 W_2$ по интервалу, определяемому приведенным выше неравенством, в котором реализуются допустимые значения x :

$$N_{i, l_1} = \frac{2Dt}{l_1}$$

$$W_3(R, t) dR = dR \int_R W_1 W_2 dx. \quad (3)$$

Путем несложных преобразований интеграл в (3) может быть приведен к виду:

$$W_3 = \frac{2}{\gamma \sqrt{\beta} R^{1/2}} \int_0^{\sqrt{\beta}} e^{-\left(\frac{\lambda^2}{z^4} + z^2\right)} dz, \quad (4)$$

где

$$\beta = 3R/2l_2 \gg 1, \quad \lambda^2 = 9R^4/16Dt l_2^2, \quad \gamma = (4\pi^2/3) (2/3)^{1/2} (Dt)^{1/2} l_2^{3/2}.$$

Интеграл в (4) удастся вычислить приближенно методом перевала лишь в предельных случаях $\lambda^{1/3} \gg 1$. Первая производная функции $f = (\lambda^2/z^4 + z^2)$, стоящей в показателе экспоненты, обращается в нуль при $z_0 = 2^{1/6} \lambda^{1/3}$ и $f''(z_0) = 12$. При этом $f'''(z_0)/3! = 10/\lambda^{1/3}$ и если $\lambda^{1/3} \gg 1$, то в степенном ряде, представляющем показатель экспоненты в (4), можно ограничиться членом с $f''(z_0)$. Выполнив интегрирование в (4), мы получим искомое выражение для W_3 :

$$W_3 \approx \frac{\sqrt{3}}{2^{3/2} \pi^{3/2} (Dt)^{1/2} R l_2} e^{-\frac{9}{4} \left(\frac{R^4}{3l_2^2 Dt}\right)^{1/3}}, \quad (5)$$

справедливое при $(R^4/Dt l_2^2)^{1/6} \gg 1$. При $\lambda^{1/3} \ll 1$ подынтегральное выражение в (4) e^{-f} максимально при $z = z_0 \ll 1$, но в то же время очевидно, что значение интеграла определяется, в основном, областью $z \simeq 1$, где $\lambda^2/z^4 \ll 1$. Поэтому слагаемое λ^2/z^4 может быть при интегрировании отброшено в показателе экспоненты. Выполнив интегрирование в (4), для W_3 в рассматриваемом предельном случае получаем выражение:

$$W_3 \simeq \frac{3}{4\pi^{3/2} (Dt)^{1/2} R l_2}. \quad (6)$$

Интересной особенностью выражений (5) и (6) для W_3 является наличие множителя $1/R$, т. е. наличие особенности при $R \rightarrow 0$ (разумеется, в (5) и (6) нельзя полагать $R=0$; по смыслу задачи на правильный в статистическом смысле результат можно рассчитывать лишь при $R/l_2 \gg 1$). Произведение $W_3 dR$, очевидно, определяет вероятность нахождения частицы по истечении времени t в шаровом слое $4\pi R^2 dR$ с центром в начале отсчета, где частица находилась при $t=0$. Интегрируя (5) по объему (от нуля до бесконечности по R), легко убедиться в том, что результат интегрирования не зависит ни от времени, ни от параметров l_1 и l_2 , характеризующих диффузию, хотя он и не равен единице, поскольку найденные выше выражения W_3 не справедливы на всем интервале изменения R от нуля до бесконечности.

Помимо выражений для плотности вероятности смещения частицы представляет также интерес значение среднего квадрата смещения частицы за время t . Значение \bar{R}^2 может быть без труда найдено, если воспользоваться выражением (4) и произвести в нем сначала интегрирование по R , а затем по z . Соответствующие вычисления элементарны и приводят к выражению

$$\bar{R}^2 = (Dt)^{1/2} l_2 / \sqrt{\pi}, \quad (7)$$

одна из особенностей которого состоит в том, что средний квадрат смещения оказывается пропорциональным $t^{1/2}$, в отличие от случаев обычной одномерной или трехмерной диффузии, для которых $\bar{R}^2 \sim t^*$. Из выражения (7) вытекает, в частности, что если для межзвездного пространства принять $l_1 \sim 10^{21}$ см, $l_2 \sim 10^{20}$ см, то за время $t \sim 10^{17}$ сек, близкое к времени существования Галактики, космические лучи сместятся в среднем на расстояние $\sqrt{\bar{R}^2} \sim 10^{22}$ см, которое в несколько раз меньше радиуса гало. Это обстоятельство более подробно обсуждается в [4,5] и является одним из аргументов против существования непосредственной связи между современными в космологическом смысле источниками космических лучей, сосредоточенными в плоскости Галактики, и космическими лучами, заполняющими гало.

Выше мы совершенно не принимали во внимание движение намагниченных межзвездных газовых масс, следствием которого могут быть изменения топологии межзвездного магнитного поля, вызванные „перехватом“ магнитных силовых линий. Нам представляется, однако, что этот процесс не должен заметным образом влиять на характер диффузии космических лучей в межзвездном магнитном поле. Действительно, при средней скорости хаотических движений намагниченных газовых масс в Галактике $v \sim 10$ км·сек⁻¹ заметные изменения топологии межзвездного магнитного поля вследствие „перехвата“ могут иметь место лишь за времена, большие, чем $l_2/v \sim 10^{14}$ сек. За это время полный путь, проходимый релятивистскими частицами вдоль силовых линий магнитного поля, будет больше $(l_2/v)c \sim 10^{24}$ см. Поскольку „средняя длина свободного пробега“ космических лучей вдоль силовых линий в одномерном диффузионном приближении l_1 не может быть больше $10^{21} \div 10^{22}$ см (в противном случае, как показано в [4,5], наблюдалась бы заметная анизотропия первичных космических лучей), медленные изменения магнитного поля во времени не должны заметным образом влиять на процесс одномерной диффузии космических лучей. Во всяком случае, как нам представляется, по порядку величины полученные выше результаты должны быть справедливы и при наличии макроскопических изменений межзвездного магнитного поля во времени.

Автор признателен Н. Г. Денисову за советы, использованные при работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Гетманцев, Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 606.
2. Г. Г. Гетманцев, *Астроном. ж.*, 35, 722 (1958).
3. С. Чандрасекар, *Стохастические проблемы в физике и астрономии*, ИЛ, М., 1947, стр. 12 и 29.
4. Г. Г. Гетманцев, *Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика*, 5, 172 (1962).
5. Г. Г. Гетманцев, *Астроном. ж.* (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
2 ноября 1961 г.

* Выражение (7) приближенно легко получить из элементарных соображений, если в формулу для \bar{R}^2 при обычной трехмерной диффузии в качестве пути, проходимого частицей за время t , подставить диффузионный путь, определяемый одномерной диффузией.

ON COSMIC RAYS DIFFUSION IN INTERSTELLAR
MAGNETIC FIELD*G. G. Getmantsev*

The motion of cosmic particles is considered along random lines of force in interstellar magnetic field. The „three-dimensional“ diffusion owing to random spread of force line direction of interstellar magnetic field as well as a „one-dimensional“ diffusion along chosen field tubes of an interstellar field are taken into account. Simultaneous action of „one-dimensional“ and „three-dimensional“ diffusion yields the essential decrease of the speed of cosmic particles transfer in the interstellar space. The expression has been obtained for a mean square particle displacement. In limit cases the expressions for probability density of particle displacement have been obtained.

О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В ВЕРХНЕЙ ИОНОСФЕРЕ И МЕЖПЛАНЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПО ИЗЛУЧЕНИЮ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Н. А. Митяков, В. О. Рапопорт

Обсуждаются возможности измерения электронной концентрации в верхней ионосфере и межпланетном пространстве с использованием излучения плазменных волн. В случае слабой анизотропии приводится выражение для сопротивления излучения элементарного диполя. Приведены графики зависимости сопротивления излучения от частоты.

Известно, что в настоящее время не существует сколько-нибудь удовлетворительных методов измерения электронной концентрации в верхней ионосфере и межпланетном пространстве.

В. Л. Гинзбургом была высказана идея о возможности измерения электронной концентрации межпланетного газа путем измерения сопротивления излучения антенны на плазменных волнах. Как известно, в случае слабой анизотропии показатель преломления плазменных волн $n_3 \gg 1$ в довольно узком интервале частот вблизи плазменной частоты. Поэтому сопротивление излучения диполя должно иметь резкий максимум на этих частотах. Кроме того, сопротивление излучения антенны при слабом поглощении определяется достаточно большой областью пространства, размеры которой значительно больше размеров дебаевской экранировки. Именно эти обстоятельства приводят к тому, что данный метод имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами локального измерения электронной концентрации, в которых существенное значение приобретает дебаевская экранировка тела, помещенного в плазму, а также возмущения, связанные с движением тела.

Что же касается измерений сопротивления излучения поперечных волн, то этот метод практически не пригоден ввиду малости сопротивления излучения элементарного диполя на поперечных волнах (см. ниже).

Задача о сопротивлении излучения диполя на плазменных волнах в изотропном случае была решена Андроновым и Городинским [1]. Более общая задача об излучении электрона в анизотропной среде рассмотрена Эйдманом [2]. Результаты, полученные в этой работе, можно использовать для определения сопротивления излучения элементарного диполя в анизотропном случае*. Мощность, излучаемая рядом q в плазменную волну [2],

$$W = \frac{q^2 r_0^2 \omega^2 |\omega^2 - \omega_H^2|}{4\beta_T^2 c^3 V} \int \frac{n_3 \sin^2 \vartheta d(\cos \vartheta)}{|R|}, \quad (1)$$

где $n_3 = (F/RV\beta_T^2)^{1/2}$ — показатель преломления плазменной волны,

* В дальнейшем всюду под сопротивлением излучения диполя имется в виду сопротивление излучения диполя на плазменных волнах.

$$F = 1 - u - V + uV \cos^2 \vartheta ;$$

$$R = 3 \sin^4 \vartheta / (1 - 4u) + [1 + (5 - u)/(1 - u)^2] \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + 3(1 - u) \cos^4 \vartheta ;$$

$$V = \omega_0^2 / \omega^2 ; \quad u = \omega_H^2 / \omega^2 ,$$

r_0 — радиус вращения заряда в магнитном поле, ω , ω_0 , ω_H — соответственно рабочая, плазменная и гирочастота, ϑ — угол между направлением волнового вектора \mathbf{K} и направлением силовых линий магнитного поля, $\beta_T = v_T/c$ — отношение тепловой скорости электронов плазмы к скорости света в вакууме. Выражение для излучаемой мощности в [2] получено в следующих предположениях:

$$\beta_T^2 \ll 1 ; \quad (v_T K \sin \vartheta / \omega_H)^2 \ll 1 ; \quad (\beta_T n_3 \cos \vartheta)^2 \ll 1 ;$$

$$(1 - \omega_H^2 / \omega^2)^3 \gg \beta_T^2 ; \quad (1 - 4\omega_H^2 / \omega^2) \gg \beta_T^2 ; \quad F \gg \beta_T .$$

Для элементарного диполя с длиной r_0 и дипольным моментом qr_0 сопротивление излучения

$$R_{\Sigma} = \frac{W}{J^2} = \frac{r_0^2 |\omega^2 - \omega_H^2| \int_{\cos \vartheta_1}^{\cos \vartheta_2} n_3 \sin^2 \vartheta}{8\beta_T^2 c^3 V |R|} d(\cos \vartheta) . \quad (2)$$

Пределы интегрирования в выражении (2) можно найти из следующих соображений. Распространение плазменных волн возможно при условии

$$F > 0 ; \quad (3)$$

$$F < 0,02R V^2 . \quad (3a)$$

Неравенство $F > 0$ очевидно. Условие (3a) связано с наличием затухания Ландау. Действительно, полагая минимальную длину плазменной волны $\lambda_{кр} = 63D$ [3], где D — дебаевский радиус*, имеем: $n_{3кр}^2 = \lambda_0^2 / \lambda_{кр}^2$ ($\lambda_0 = 2\pi c / \omega$). Используя неравенство $n_3^2 = F/RV\beta_T^2 < n_{3кр}^2$, получаем условие (3a).

Наибольший интерес в задаче об измерении электронной концентрации в ионосфере и межпланетном пространстве представляет случай слабой анизотропии ($u/V \ll 1$, $V < 1$). Этот случай, согласно модели ионосферы, приведенной в [4], реализуется для интервала высот 300—1000 км и на расстояниях, больших $2,5 \pm 3$ радиусов Земли. При этом выражение (2) может быть значительно упрощено. При условии $u/V \ll 1$ и $V < 1$ получаем:

$$R_{\Sigma} = \frac{r_0^2 \omega^2}{24\sqrt{3} v_T^3 V^{3/2}} I ; \quad (4)$$

$$I = \sqrt{u} \int_{\cos \vartheta_1}^{\cos \vartheta_2} \sqrt{V'/u - \sin^2 \vartheta} \sin^2 \vartheta d(\cos \vartheta) , \quad (5)$$

где $V' = 1 - V \approx 2\Delta\omega/\omega_0$, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Пределы интегрирования в выражении (5) легко определяются из условий (3) и (3a).

* В случае сильной анизотропии вопрос о величине $\lambda_{кр}$ требует особого рассмотрения.

На рис. 1 приведены результаты расчета зависимости I от V' при различных значениях u . Из рисунка видно, что величина I изменяется при малых расстройках значительно быстрее, чем множитель перед I в выражении (4) для сопротивления излучения. Поэтому можно счи-

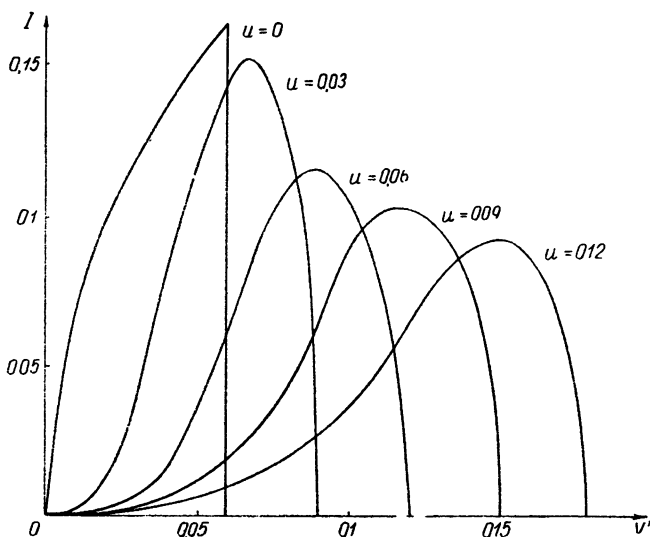


Рис. 1.

тать, что изменение сопротивления излучения с частотой характеризуется зависимостью $I(V')$. Следует отметить, что максимальное значение I и характер кривой $I(V')$ (ширина кривой, скорость нарастания вблизи максимума) мало зависят от величины u . Поведение кривых на спадающем участке обусловлено затуханием Ландау и зависит от выбора $\lambda_{кр}$. Значение максимума величины I , а следовательно, и сопротивления излучения для различных u , соответствует различным V'_0 , причем $V'_0 \approx u + 0,03$. Таким образом, максимальное значение сопротивления излучения получается на частотах, близких к плазменной частоте.

Измерения зависимости сопротивления излучения от частоты дают возможность определить значение плазменной частоты и, тем самым, электронную концентрацию плазмы. Погрешности, связанные с наличием постоянного магнитного поля, малы и могут быть легко учтены, если известна величина магнитного поля. Кроме того, измерения абсолютного значения сопротивления излучения на восходящей ветви кривой $R_z(V')$ позволяют определить тепловую скорость электронов v_T (см. (4)), а следовательно, и температуру электронного газа.

Расчет сопротивления излучения элементарного диполя для верхней части F -слоя ($N=3,5 \cdot 10^5$ эл.см $^{-3}$, $T=10^3$ °К) дает величину порядка $5 \cdot 10^4$ ом при длине диполя 5 см. Аналогичный расчет для межпланетного газа с $N=10^2$ эл.см $^{-3}$ и $T=10^4$ °К приводит к такому же значению R_z при длине диполя $r_0=10^3$ см. Для сравнения укажем, что сопротивление излучения таких диполей для поперечных волн на тех же частотах составляет тысячные доли ома.

В действительности при изменении частоты излучения или плотности электронного газа будет наблюдаться резкий переход от слабого

излучения поперечных волн к весьма интенсивному излучению плазменных волн. Со стороны низких частот излучение плазменных волн ограничено резким спадом показателя преломления n_z , со стороны высоких частот—сильным влиянием механизма затухания Ландау. В сравнительно узком интервале частот ($\Delta\omega/\omega \approx 0,03$) сопротивление излучения плазменных волн достигает громадной величины (для приведенных выше случаев оно составляет $\sim 10^5$ ом). Вполне естественно, что такие сопротивления излучения могут быть легко измерены с помощью простейших радиотехнических средств.

Возможное влияние на излучение плазменных волн дебаевской экранировки и возмущений плазмы, связанных с движением тела и пондермоторным действием самого поля антенны*, будет проявляться, по-видимому, в том, что в непосредственной близости от антенны вследствие более низкой электронной концентрации возрастет влияние затухания Ландау. Это может привести не только к уменьшению активной части сопротивления излучения R_z , но и к появлению реактанса. Однако поскольку величина возмущенной области не превышает значительно размеров дебаевского радиуса, то для плазменных волн, длина которых сравнима с размерами этой области, эффект изменения сопротивления излучения вряд ли будет велик. Привести количественные оценки этого эффекта в настоящей статье не представляется возможным. Однако даже в том случае, если из-за различных побочных факторов сопротивление излучения уменьшится на один-два порядка, это, по-видимому, не снизит точность измерений электронной концентрации, так как оставшаяся часть сопротивления излучения будет представлять значительную величину.

В заключение авторы выражают благодарность Г. Г. Гетманцеву, В. Л. Гинзбургу и В. Я. Эйдману за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов и Г. В. Городинский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 234 (1962).
2. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 41, 1971 (1961).
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
4. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн в ионосфере, изд. АН СССР, М., 1960.
5. Г. Г. Гетманцев, Н. Г. Денисов, Геомагнетизм и аэронавигация (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 января 1962 г.

TO THE POSSIBILITY OF ELECTRON CONCENTRATION MEASUREMENT IN THE UPPER IONOSPHERE AND INTERSTELLAR SPACE FROM PLASMA WAVES RADIATION

N. A. Mityakov, V. O. Rapoport

The possibilities are discussed of electron concentration measurement in the upper ionosphere and interstellar space by means of plasma waves radiation. In the case of weak anisotropy there given an expression for an elementary dipole radiation impedance. There are diagrams of radiation impedance vs frequency in the paper.

* Пондермоторное действие высокочастотного поля антенны может приводить к существенным возмущениям плазмы вблизи антенны (см [5]).

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

И. М. Виленский

Показано, что при взаимодействии двух радиоволн в ионосфере («сильной» модулированной по амплитуде и «слабой» немодулированной) «слабая» волна будет промодулирована не только по амплитуде, но и по фазе. Приведены оценки индекса фазовой модуляции. Показано, что экспериментальное изучение фазовой модуляции даст возможность определить некоторые ионосферные параметры.

1. Обычно при рассмотрении взаимодействия двух радиоволн в ионосфере — «слабой» немодулированной и «сильной» модулированной по амплитуде звуковой частотой — ограничиваются рассмотрением амплитудной модуляции, наводимой «сильной» волной на «слабую» (перекрестная модуляция). Последняя, как известно, обусловлена тем, что под воздействием «сильной» волны изменяется эффективное число соударений, в силу чего меняется и коэффициент поглощения «слабой» волны. Однако от эффективного числа соударений зависит, вообще говоря, не только коэффициент поглощения, но и диэлектрическая постоянная. В силу этого, очевидно, «слабая» волна будет промодулирована не только по амплитуде, но и по фазе.

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть в ионосфере распространяется модулированная по амплитуде волна, поле которой на нижней границе ионосферы имеет вид:

$$E_1 = E_{10}[1 + M \cos(\Omega t)] \cos(\omega_1 t). \tag{1}$$

Изменившееся под влиянием этой волны эффективное число соударений может быть записано в виде:

$$\nu_{эфф} = \nu_0 + \Delta\nu_0 + \Delta\nu_\Omega + \Delta\nu_{\omega_1}. \tag{2}$$

Здесь ν_0 — значение $\nu_{эфф}$ при $E_1 = 0$, $\Delta\nu_0$ — не зависящая от времени поправка к ν_0 , $\Delta\nu_\Omega$ — поправка к ν_0 , содержащая периодические члены звуковой частоты Ω , 2Ω , $\Delta\nu_{\omega_1}$ — поправка, содержащая периодические члены высокой частоты $2\omega_1$.

Будем считать, что поле E_1 не очень велико, так что можно ограничиться учетом нелинейности в первом приближении. Кроме того, пренебрежем членом $\Delta\nu_0$ (в рассматриваемом приближении $\Delta\nu_0 \ll \nu_0$), а также обычно малым членом $\Delta\nu_{\omega_1}$; тем самым, мы не будем рассматривать возникающие при взаимодействии волны с комбинационными несущими частотами [1]. При рассмотрении ограничимся рамками «элементарной» теории*. Наконец, будем считать, что $\omega_1 \ll \omega_H$ (ω_H — гиромагнитная частота). Тогда для $\Delta\nu_\Omega$ имеем [2]:

$$\begin{aligned} \Delta\nu_\Omega &= M_1 \cos(\Omega t - \varphi_1) + M_2 \cos(2\Omega t - \varphi_2); \\ M_1 &= \frac{e^2 E_{10}^2 \nu_0^2 M \cos^2 \beta}{m^2 \nu^2 (\omega_1^2 + \nu_0^2) \sqrt{\Omega^2 + (\delta\nu_0)^2}}; \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{\Omega}{\delta\nu_0}; \end{aligned} \tag{3}$$

* Известно, что если интересоваться только изменениями по звуковой частоте, то нет необходимости решать нелинейное волновое уравнение: достаточно ограничиться «квазистационарным» решением линейного. Это мы и делаем ниже.

$$M_2 = \frac{e^2 E_{10}^2 v_0^2 M^2 \cos^2 \beta}{4 m^2 v^2 (\omega_1^2 + v_0^2) \sqrt{4 \Omega^2 + (\delta v_0)^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{2 \Omega}{\delta v_0},$$

где приняты следующие обозначения: e , m — заряд и масса электрона, v — средняя скорость его движения, δ — средняя доля энергии, теряемая электроном при соударении с тяжелыми частицами (молекулами или ионами), β — угол между E_1 и H_0 (H_0 — напряженность магнитного поля Земли).

Проходящая возмущенную область ионосферы „слабая“ волна $E_2 = E_{20} \cos(\omega_2 t - \varphi)$ окажется промодулированной по амплитуде и, как мы указывали выше, по фазе. Рассмотрим фазу волны более подробно. Будем для простоты предполагать, что распространение волны происходит в однородной среде (ниже при численных оценках мы уточним модель ионосферы). Тогда для фазы φ можно написать:

$$\varphi = \frac{\omega_2}{c} n(\omega_2) z, \quad (4)$$

где $n(\omega_2)$ — показатель преломления волны E_2 , c — скорость света, z — путь волны.

При условии $|\varepsilon(\omega)| \gg 4 \pi \sigma(\omega)/\omega$, которое обычно выполняется (за исключением области отражения), имеем:

$$n(\omega_2) = \sqrt{\varepsilon(\omega_2)} = \sqrt{1 - \frac{a}{\omega_2^2 + v_{\text{эфф}}^2}}, \quad (5)$$

где $a = 4 \pi e^2 N/m$, N — концентрация электронов. Заменяя $v_{\text{эфф}} = v_0 + \Delta v_{\Omega}$ и ограничиваясь учетом членов, содержащих Δv_{Ω} в первой степени, после несложных преобразований получим:

$$n(\omega_2) \simeq n_0 + \frac{a v_0 \Delta v_{\Omega}}{(\omega_2^2 + v_0^2)^2 n_0}; \quad (6)$$

$$n_0 = \sqrt{1 - \frac{a}{\omega_2^2 + v_0^2}}.$$

Тогда, согласно (4), для фазы волны имеем:

$$\varphi = \frac{\omega_2}{c} n_0 z + \Delta \varphi, \quad (7)$$

а для $\Delta \varphi$ после подстановки всех величин получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{\omega_2}{c} z \frac{a v_0 \Delta v_{\Omega}}{(\omega_2^2 + v_0^2)^2 n_0} = \beta_{\Omega} \cos(\Omega t - \varphi_1) + \beta_{2\Omega} \cos(2 \Omega t - \varphi_2); \\ \beta_{\Omega} &= \frac{\omega_2}{c} z \frac{4 \pi e^4 N v_0^3 E_{10}^2 M \cos^2 \beta}{m^3 v^2 (\omega_1^2 + v_0^2) (\omega_2^2 + v_0^2)^2 \sqrt{4 \Omega^2 + (\delta v_0)^2} n_0}; \\ \beta_{2\Omega} &= \frac{\omega_2}{c} z \frac{\pi e^4 N v_0^3 E_{10}^2 M^2 \cos^2 \beta}{m^3 v^2 (\omega_1^2 + v_0^2) (\omega_2^2 + v_0^2)^2 \sqrt{4 \Omega^2 + (\delta v_0)^2} n_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, волна частоты ω_2 в месте приема окажется промодулированной не только по амплитуде, но и по фазе с частотами моду-

ляции Ω , 2Ω . Индексы фазовой модуляции β_Ω и $\beta_{2\Omega}$ определяются выражением (8).

Сделаем несколько замечаний относительно тех допущений, которые были сделаны при выводе выражений (8).

То обстоятельство, что, полагая $\Delta\nu \ll \nu_0$, мы ограничились учетом лишь членов, содержащих $\Delta\nu$ в степени не выше первой, накладывает ограничения на напряженность поля „возмущающего“ передатчика E_{10} . Можно считать, что формулы (8) справедливы с достаточной точностью тогда, когда мощность этого передатчика не превышает $100 \div 200$ квт (см., например, [3]).

Далее, при рассмотрении мы пользовались формулами элементарной теории. В ряде работ (см., например, [1,2]) было показано, что если положить в (3) и, следовательно, в (8) $v^2 = \bar{v}^2 = 8kT/\pi m$ или $v^2 = \bar{v}^2 = 3kT/m$, то эти формулы будут отличаться от соответствующих формул кинетической теории (по крайней мере, для случая соударений электронов с молекулами) лишь на численный множитель, близкий к единице. Это обстоятельство в нашем случае несущественно.

Наконец, относительно предположения об однородности среды. Если учесть неоднородность среды, то в приближении геометрической оптики (последнее вполне достаточно, если в среде нет резких неоднородностей) вместо (8), очевидно, получим:

$$\beta_\Omega = \frac{\omega_2}{c} \frac{4\pi e^4 M}{m^3} \int_s \frac{N \nu_0^3 E_{10}^2 \cos^2 \beta}{v^2 (\omega_1^2 + \nu_0^2) (\omega_2^2 + \nu_0^2)^2 \sqrt{\Omega^2 + (\delta \nu_0)^2 n_0}} ds;$$

$$\beta_{2\Omega} = \frac{\omega_2}{c} \frac{\pi e^4 M^2}{m^3} \int_s \frac{N \nu_0^3 E_{10}^2 \cos^2 \beta}{v^2 (\omega_1^2 + \nu_0^2) (\omega_2^2 + \nu_0^2)^2 \sqrt{4\Omega^2 + (\delta \nu_0)^2 n_0}} ds,$$
(8a)

где s — путь волны E_2 в области ионосферы, „возмущенной“ действием волны E_1 . Этими формулами мы и будем пользоваться ниже при проведении конкретных расчетов.

2. Интересно сопоставить величину фазовой модуляции с глубиной амплитудной модуляции, наводимой на волну E_2 волнами мешающей станции E_1 . Для глубины перекрестной амплитудной модуляции в рассматриваемом приближении имеем [2]:

$$M_\Omega = \frac{e^2 E_{10}^2 \nu_0 M \cos^2 \beta \int \kappa_0 ds}{m^2 v^2 (\omega_1^2 + \nu_0^2) \sqrt{\Omega^2 + (\delta \nu_0)^2}}.$$

В случае однородной среды $\int \kappa_0 ds$ заменяется на $\kappa_0 z$. Далее, для амплитудного коэффициента поглощения κ_0 воспользуемся выражением [2]

$$\kappa_0(\omega_2) = \frac{2\pi \sigma(\omega_2)}{c n_0(\omega_2)},$$

где $\sigma(\omega_2) = e^2 N \nu_0 / m(\omega_2^2 + \nu_0^2)$ — проводимость ионосферы. Тогда для M_Ω получим:

$$M_\Omega \simeq \frac{z}{c} \frac{2\pi e^4 N \nu_0^2 E_{10}^2 M \cos^2 \beta}{m^2 v^2 (\omega_1^2 + \nu_0^2) (\omega_2^2 + \nu_0^2)^2 \sqrt{\Omega^2 + (\delta \nu_0)^2 n_0}}.$$
(9)

Из (8) и (9) найдем:

$$\frac{\beta_\Omega}{M_\Omega} \simeq \frac{2\omega_2 \nu_0}{\omega_2^2 + \nu_0^2}.$$
(10)

В случае неоднородной среды соотношение (10) остается, очевидно, справедливым, если под ν_0 иметь в виду некоторое среднее значение этой величины в области взаимодействия.

Из (10) ясно, что если одновременно с измерением глубины паразитной амплитудной модуляции измерить и индекс фазовой модуляции, то легко определить величину ν_0 . Далее, изучая зависимость M_Ω или β_Ω от частоты модуляции Ω , можно, как известно, экспериментально определить величину $\delta\nu_0$. Следовательно, из этих опытов можно будет с достаточной точностью определить и значение параметра δ непосредственно в условиях ионосферы.

Выясним вопрос о том, достаточно ли велик индекс паразитной фазовой модуляции для непосредственных измерений.

Уже из формулы (10) видно, что при условии $\omega_2 \sim \nu_0$ величины β_Ω и M_Ω будут одного порядка. Для M_Ω экспериментально были получены значения $M_\Omega \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$ (для ночных условий). При соответствующих условиях следует ожидать, что индекс фазовой модуляции будет величиной того же порядка. Заметим, что фазометрические устройства могут обладать значительно большей чувствительностью (см., например, [4]). Поэтому возможность экспериментального изучения паразитной фазовой модуляции не вызывает сомнения.

Были произведены более подробные расчеты ожидаемых величин β_Ω и M_Ω в двух случаях.

а) Ночные условия. Принята следующая модель слоя: слой начинается с высоты 70 км. От 70 до 80 км $N = N_0 = 100$ эл.см⁻³, от 80 км изменение N происходит по линейному закону, причем на высоте 90 км N достигает значения $N = 2,5 \cdot 10^3$ эл.см⁻³. Относительно ν_0 принято, что оно изменяется по экспоненциальному закону от значения $\nu_0 = 10^7$ сек⁻¹ при $z = 70$ км до $\nu_0 = 8 \cdot 10^5$ сек⁻¹ при $z = 90$ км. Далее, считается, что мощность „мешающего“ передатчика 100 квт, частота его $f_1 = \omega_1/2\pi = 200$ кгц, коэффициент направленного действия антенны — единица. Частота „модулируемого“ передатчика $f_2 = \omega_2/2\pi = 400$ кгц, расстояние между ним и местом приема 250 км, причем „мешающий“ передатчик расположен посередине между „модулируемым“ передатчиком и пунктом приема.

Путь волны ω_2 аппроксимировался в виде боковых сторон равнобедренного треугольника. Для выполнения численного интегрирования в формуле (8а) ионосфера разбивалась на слои толщиной по 2 км, причем значения параметров для каждого слоя принимались равными их значениям в его средней части. При этом было получено, что $\beta_\Omega \approx 9 \cdot 10^{-2}$. Аналогичный расчет M_Ω дал следующий результат: $M_\Omega \approx 8,7 \cdot 10^{-2}$, что близко к значениям, наблюдаемым в конкретных условиях.

б) Дневные условия. Принята следующая модель нижней ионосферы: от 55 до 70 км N изменяется по линейному закону от $N = 0$ до $N_{70} = 10^3$ эл.см⁻³. Далее до 80 км считаем $N = \text{const}$ (более высокие слои нас не интересуют, так как волна ω_2 отражается ниже $z = 80$ км). Остальные параметры приняты такими же, как и в случае а).

Расчеты дали следующие результаты: $\beta_\Omega \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$; $M_\Omega \approx 5 \cdot 10^{-3}$. Следует заметить, что если наблюдать и измерять перекрестную амплитудную модуляцию, глубина которой меньше 0,5%, представляется нам весьма затруднительным, то измерить индекс паразитной фазовой модуляции порядка $10^{-3} \div 10^{-4}$ вполне возможно.

Конечно, приведенные выше численные расчеты следует считать лишь ориентировочными. Однако они с несомненностью свидетельствуют о том, что изучение паразитной фазовой модуляции может

существенно дополнить те сведения о нижней ионосфере, которые получаются при анализе данных о перекрестной модуляции. Особенно важно то обстоятельство, что паразитная фазовая модуляция, по видимому, может быть измерена в дневных условиях: соответствующие экспериментальные данные дали бы ценные сведения о D -слое, который в настоящее время весьма мало изучен.

Заметим в заключение, что нами была сделана попытка изучить паразитную фазовую модуляцию, возникающую из-за нелинейности ионосферы (самовоздействие). Эта попытка не увенчалась успехом потому, что сам передатчик имел паразитную фазовую модуляцию, отделить которую от фазовой модуляции, возникшей в ионосфере, оказалось невозможным.

При исследовании взаимодействия радиоволн таких трудностей не будет, так как принимаемая волна ω_2 на передатчике не модулируется, а небольшая паразитная фазовая модуляция „возмущающей“ волны ω_1 практически не скажется на конечном результате.

В проведении расчетов принимала участие И. А. Миняйчева, которой автор выражает благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Виленский, ЖЭТФ, 22, 544 (1952).
2. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, ч. II, § 64, Гостехиздат, М., 1953.
3. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, 201, 393 (1960)
4. Д. И. Шейнман, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника (в печати).

Новосибирский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
20 ноября 1961 г.

ON RADIO WAVE INTERACTION IN IONOSPHERE

I. M. Vilenski

It is shown that when two radio waves are interacting in ionosphere („strong“ amplitude-modulated wave acts on a „weak“ non-modulated one) the „weak“ wave will be not only amplitude-modulated but also phase-modulated. Estimations of phase modulation index are given. It is shown that experimental study of phase modulation reveals the possibility to determine some ionospheric parameters.

О ЗАКОНЕ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ СРЕД С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

В. Л. Гинзбург

Проведено усреднение соотношения Пойнтинга по высокой частоте для сред с пространственной дисперсией. Обсуждается вопрос о физическом смысле различных членов, входящих в полученное уравнение.

Насколько нам известно, в литературе еще недостаточно полно рассмотрен вопрос о законе сохранения энергии в электродинамике сред с пространственной дисперсией. Так, в [1] получено лишь выражение для тепла, выделяющегося в единицу времени во всем пространстве. В этом случае для полей типа $e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})}$ при вещественных ω_0 и \mathbf{k}_0 тепло, отнесенное к единице объема, равно (см. [1], формула (4.10)):

$$q = -\frac{i\omega_0}{16\pi} \{ \varepsilon'_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0) - \varepsilon'_{ji}(\omega_0, \mathbf{k}_0) \} E_{0i} E_{0j}^* = \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0) E_{0j} E_{0i}^*. \quad (1)$$

В настоящей статье, как и в [1], используются уравнения поля в виде

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2)$$

При переходе к немагнитной среде без пространственной дисперсии $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ и $\partial \mathbf{D}' / \partial t = \partial \mathbf{D} / \partial t + 4\pi \mathbf{j}$, где \mathbf{j} — плотность тока проводимости. Вместе с тем здесь используются некоторые несовпадающие с [1] обозначения: вещественное поле записывается в форме (4) (см. ниже) и полагается $D'_j(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon'_{ij} E_j(\mathbf{k}, \omega)$, $\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - i4\pi\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})/\omega$, где ε_{ij} и σ_{ij} — эрмитовы тензоры.

Поскольку (1) есть интегральная величина, возникает вопрос о локальном выражении для тепла и других величин. Кроме того, при наличии не стремящегося к нулю поглощения или для непрозрачной непоглощающей среды вектор \mathbf{k}_0 является комплексным. Поэтому, если относить выражение (1) к малому элементу объема, нужно понять его смысл и возможность использования при комплексном \mathbf{k}_0 (достаточно сказать, что при отсутствии поглощения и комплексном \mathbf{k}_0 величина q заведомо не является теплом).

Возникающая перед нами задача состоит в учете пространственной дисперсии при получении выражения для закона сохранения энергии в электродинамике или, точнее, при усреднении по высокой частоте соотношения Пойнтинга

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{B^2}{8\pi} = -\frac{c}{4\pi} \text{div } [\mathbf{E}\mathbf{B}], \quad (3)$$

вытекающего из уравнений поля (2).

Нижеследующие вычисления близки к проводимым без учета пространственной дисперсии и подробно изложенным в [2], в силу чего можно не приводить некоторых деталей расчета.

Рассмотрим квазимонохроматическое поле

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{E_0(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})} + E_0^*(\mathbf{r}, t) e^{-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r})}\} =$$

$$= \int \{g(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})} + g^*(\omega, \mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})}\} d\omega d\mathbf{k}. \quad (4)$$

Здесь амплитуда E_0 медленно изменяется за время порядка $1/\omega_0$. Вместе с тем на изменение E_0 в пространстве наложим менее жесткое ограничение, а именно, будем считать, что $E_0(\mathbf{r}, t) = E_{00}(\mathbf{r}, t) e^{-\mathbf{k}_2 \mathbf{r}}$, где амплитуда и фаза величины E_{00} медленно изменяется соответственно на расстояниях порядка $1/k_2$ и $1/k_1$ (другими словами, поле E зависит от \mathbf{r} по закону, близкому к $e^{-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} = e^{-\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}}$, где $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 - i\mathbf{k}_2$ при вещественных векторах \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2). Частота ω_0 считается вещественной в соответствии с определенной постановкой физической задачи. Вычисления, аналогичные нижеследующим, можно провести для комплексной частоты ω_0 при вещественном \mathbf{k}_0 и усреднении по пространству, но мы на этой задаче останавливаться не будем. Заметим также, что приводимые ниже выражения имеют смысл, только если соответствующие интегралы существуют, а функция $\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ разлагается в ряд около точки \mathbf{k}_0 , причем законно ограничение двумя первыми членами ряда.

При сделанных выше предположениях функция $g(\omega, \mathbf{k})$ имеет острый максимум при $\omega = \omega_0$ и $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 - i\mathbf{k}_2$. Интегрирование по ω в (4) нужно проводить по вещественной оси от 0 до ∞ , а при интегрировании по \mathbf{k} выбирать контур или область интегрирования, содержащие точку \mathbf{k}_0 . Далее будет положено

$$\omega \varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = a_{ij} = \omega_0 (\varepsilon'_{ij})_0 + \left(\frac{\partial (\omega \varepsilon'_{ij})}{\partial \omega} \right)_0 \Omega + \omega_0 \left(\frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial \mathbf{k}_l} \right) q_l,$$

где $\omega = \omega_0 + \Omega$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}$ и значок 0 отвечает значениям соответствующей величины при $\omega = \omega_0$ и $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. Очевидно, что

$$\frac{\partial D'_i}{\partial t} = \int \{i\omega \varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) g_j(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})} - i\omega \varepsilon'^*_{ij}(\omega, \mathbf{k}) g_j^*(\omega, \mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})}\} d\omega d\mathbf{k}. \quad (5)$$

Подставим (4), (5) в (3) и проведем усреднение по времени на интервале, большом по сравнению с $2\pi/\omega_0$ и малом по сравнению с характерным временем изменения функции $E_0(\mathbf{r}, t)$. В результате получаем:

$$\frac{1}{4\pi} E \frac{\partial D'}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int \{i a_{ij} g_j(\Omega, \mathbf{q}) g_i^*(\Omega', \mathbf{q}') e^{-2\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} e^{i[(\Omega - \Omega')t - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \mathbf{r}]} -$$

$$- i a_{ij}^* g_j^*(\Omega, \mathbf{q}) g_i(\Omega', \mathbf{q}') e^{-2\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} e^{-i[(\Omega - \Omega')t - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \mathbf{r}]} \} d\Omega d\Omega' d\mathbf{q} d\mathbf{q}'. \quad (6)$$

Легко установить, что

$$E_{0i} E_{0j}^* = 4 \int g_i(\Omega, \mathbf{q}) g_j^*(\Omega', \mathbf{q}') e^{-2\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} e^{i[(\Omega - \Omega')t - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \mathbf{r}]} d\Omega d\Omega' d\mathbf{q} d\mathbf{q}';$$

$$E_{0i} \frac{\partial E_{0j}^*}{\partial x_l} = 4 \int (i q_l^* - k_{2,l}) g_i(\Omega', \mathbf{q}') g_j^*(\Omega, \mathbf{q}) e^{-2\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} e^{-i[(\Omega - \Omega')t - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \mathbf{r}]} d\Omega d\Omega' d\mathbf{q} d\mathbf{q}'; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (E_{0i} E_{0j}^*) = 4 \int \{i q_l^* g_i(\Omega', \mathbf{q}') g_j^*(\Omega, \mathbf{q}) e^{-2\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} e^{-i[(\Omega - \Omega')t - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \mathbf{r}]} -$$

$$- (i q_l + 2k_{2,l}) g_i(\Omega, \mathbf{q}) g_j^*(\Omega', \mathbf{q}') e^{-2\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} e^{i[(\Omega - \Omega')t - (\mathbf{q} - \mathbf{q}') \mathbf{r}]} \} d\Omega d\Omega' d\mathbf{q} d\mathbf{q}'.$$

Аналогичных выражений для $E_{0i} \frac{\partial E_{0j}^*}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial t} (E_{0i} E_{0j}^*)$ мы не выписываем (см. [2]).

Теперь остается разделить в (6) тензор $a_{ij} = b_{ij} - ic_{ij}$ на эрмитову и антиэрмитову части в соответствии с разделением $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij} - i4\pi\sigma_{ij}/\omega$ при эрмитовых ε_{ij} и σ_{ij} . При этом обозначим

$$\left(\frac{\partial \varepsilon'_{ij}}{\partial k_l}\right)_0 = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial k_l}\right)_0 - i \frac{4\pi}{\omega_0} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial k_l}\right)_0; \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial k_l}\right)_0^* = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial k_l}\right)_0$$

и т. д., хотя при комплексном \mathbf{k}_0 нужно просто брать эрмитову и антиэрмитову части $(\partial \varepsilon'_{ij}/\partial k_l)_0$ и их комплексно-сопряженные выражения, а не производные типа $(\partial \varepsilon_{ij}/\partial k_l)_0$. Используемые обозначения не лишены удобства, поскольку при вещественном \mathbf{k}_0 мы действительно имеем дело с производными по k_l от ε_{ij} и σ_{ij} (то же, конечно, имеет место в случае производных по ω при вещественной частоте ω_0). После этого, используя (7), приходим к окончательному выражению:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial (\omega \varepsilon_{ij})}{\partial \omega} \right)_0 E_{0j} E_{0i}^* + \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^* \right\} + \frac{1}{2} (\sigma_{ij})_0 E_{0j} E_{0i}^* - \\ & - \frac{i}{4} \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\partial E_{0i}}{\partial t} E_{0j}^* - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial t} E_{0j} \right\} + \\ & + \frac{i}{4} \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial k_l} \right)_0 \frac{\partial E_{0i}}{\partial x_l} E_{0j}^* - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial k_l} \right)_0 \frac{\partial E_{0i}^*}{\partial x_l} E_{0j} \right\} - \\ & - \frac{\omega_0}{16\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial k_l} \right)_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l} (E_{0j} E_{0i}^*) + 2k_{2,l} E_{0j} E_{0i}^* \right\} = \\ & = - \frac{c}{16\pi} \operatorname{div} \{ [E_0^* \mathbf{B}_0] + [E_0 \mathbf{B}_0^*] \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Это уравнение можно, разумеется, записать и в несколько иной форме, учитывая, например, что

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\partial E_{0i}}{\partial t} E_{0j}^* = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\partial E_{0i}}{\partial t} E_{0j}^* = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \omega} \right)_0 \frac{\partial E_{0j}}{\partial t} E_{0i}^*$$

и т. п. При отсутствии пространственной дисперсии для немагнитной среды $\partial \sigma_{ij}/\partial k_l = 0$, $\partial \varepsilon_{ij}/\partial k_l = 0$ и выражение (8), разумеется, переходит в известное (см., например, формулу (Д.10) с $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ в [2])^{*}.

Совершенно очевиден также смысл соотношения (8) при $\mathbf{k}_2 = 0$, т. е. при вещественном значении $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1$. В этом случае $(\varepsilon_{ij})_0$, $(\sigma_{ij})_0$ и соответствующие производные берутся при вещественных ω_0 и \mathbf{k}_0 ^{**}. Вместе с тем, поле \mathbf{E} может, конечно, слабо затухать или нарастать во времени и в пространстве (в частности, формула (8) при вещественных ω_0 и \mathbf{k}_0 пригодна для полей типа $E_{00} e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_0)} e^{-\mathbf{k}_2 \mathbf{r} e^{\pm \gamma t}}$ при $|\gamma| \ll \omega_0$ и $k_2 \ll k_0$).

^{*} В формуле (Д.10) в [2] имеется опечатка: коэффициенты $d\sigma_{ki}/d\omega$ и $d\lambda_{ki}/d\omega$ нужно заменить на $d\sigma_{ik}/d\omega$ и $d\lambda_{ik}/d\omega$.

^{**} Значение σ_{ij} при вещественных ω_0 и \mathbf{k}_0 может не равняться нулю, поскольку при отсутствии пространственной дисперсии σ_{ij} вообще не зависит от \mathbf{k} .

Выражение

$$\bar{S}_i = - \frac{\omega_0}{16\pi} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial k_i} \right)_{\omega_0, \mathbf{k}_0} E_{0j} E_{0i}^*$$

для прозрачной среды представляет собой средний по времени поток энергии, связанный с движением в среде (полный поток равен $\bar{S} + \bar{S}_p$, где $\bar{S}_p = \frac{c}{16\pi} \{ [E_0^* B_0] + [E_0 B_0^*] \}$ — средний вектор Пойнтинга; см. также [3,4]).

Выражение (1), как это следует из (8) и [2], может рассматриваться в качестве выделяющегося тепла только для монохроматического поля, т. е. при $\partial E_{0i} / \partial t = 0$ и при пренебрежении членами с производными по x_i или, в определенных условиях, после интегрирования по объему (так это делалось в [1]).

Недопустимость в общем случае интерпретации выражения (1) как тепла, помимо сказанного выше и в [2], особенно ясна из формулы (8) при $\mathbf{k}_2 \neq 0$, когда $(\sigma_{ij})_0 = \sigma_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_1 - i\mathbf{k}_2)$. Пусть, например, $\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega) + \alpha_{ijlm}(\omega) k_l k_m$ с вещественными $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ и α_{ijlm} (при вещественных ω) [5]. В этом случае диссипация отсутствует и при вещественном \mathbf{k} тензор $\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$. Однако при комплексном \mathbf{k} тензор $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ для такой среды уже отличен от нуля. Для поля

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ E_{00} e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} + \text{к. с.} \},$$

где $E_{00} = \text{const}$ и $E_0 = E_{00} e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}}$, уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{1}{2} (\sigma_{ij})_0 E_{0j} E_{0i}^* = - \frac{c}{16\pi} \text{div} \{ [E_0^* B_0] + [E_0 B_0^*] \}.$$

Таким образом, при отсутствии диссипации выражение $\frac{1}{2} (\sigma_{ij})_0 E_{0j} E_{0i}^*$ имеет в данном случае смысл потока энергии (при отсутствии пространственной дисперсии и отсутствии диссипации $(\sigma_{ij})_0 = 0$ и в рассматриваемом примере нужно считать, что $\mathbf{k}_2 = 0$ или $\bar{S}_p = 0$; разумеется, это и получается автоматически при использовании уравнений поля).

Отметим, во избежание недоразумений, что выше мы считали отсутствующими внешние источники, существование которых иногда нужно принимать во внимание.

В заключение пользуюсь возможностью поблагодарить В. П. Силина за обсуждение вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин и А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, М., 1961
2. В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 74 (1961).
3. Б. Н. Гершман и В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 31 (1962)
4. М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 26, 680 (1954).
5. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 34, 1593 (1958).

TO THE ENERGY CONSERVATION LAW IN ELECTRODYNAMICS
OF MEDIA WITH SPATIAL DISPERSION

V. L. Ginzburg

High frequency averaging of Poynting's equation was carried out for media with spatial dispersion. The physical interpretation is given for various terms of the equation obtained.

О ПЕРЕХОДНОМ ИЗЛУЧЕНИИ НА ГРАНИЦЕ С ПЛАЗМОЙ ПРИ УЧЕТЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИИ

В. Я. Эйдман

Методом кинетического уравнения рассматривается переходное излучение, возникающее на границе с изотропной плазмой. Получены выражения для энергии переходного излучения, а также для энергии черенковского излучения на продольных волнах, выходящего из плазмы в вакуум.

Излучение электромагнитных волн зарядом, проходящим через границу раздела двух сред, впервые рассмотренное Гинзбургом и Франком [1], дискутировалось затем в ряде работ (см., например, [2]). Однако в этих работах, как правило, не учитывалась пространственная дисперсия. Учет же пространственной дисперсии может оказаться в ряде случаев весьма существенным. Так, появляется возможность излучения продольной волны, вклад в излучаемую энергию от которой может быть значительным. В статье [3] решается задача о переходном излучении с учетом пространственной дисперсии феноменологически. Вводимые при этом дополнительные граничные условия, как указывается автором, могут служить лишь для качественных оценок. В работе [4] исследуется переходное излучение на границе с плазмой, описываемой гидродинамическими уравнениями. В настоящей статье методом кинетического уравнения решается задача об излучении заряда, проходящего границу плазма—вакуум. При этом предполагается, что на границе электроны плазмы претерпевают зеркальное отражение.

1. Как известно, уравнения поля в изотропной плазме имеют вид (см., например, [5]):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0; & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi (\rho + \rho_0); \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= e \int \mathbf{v} \varphi d\mathbf{v}; & \rho &= e \int \varphi d\mathbf{v}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_r \varphi + \frac{e\mathbf{E}}{m} \nabla_v f_0 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где пренебрегается движением ионов и соударениями частиц плазмы. Допустим, что заряд движется вдоль оси Oz , а плазма заполняет пространство $z > 0$ или $z < 0$. Тогда

$$\rho_0 = e\delta(x)\delta(y)\delta(z-v_0t); \quad \mathbf{j}_0 = e\mathbf{v}_0\delta(x)\delta(y)\delta(z-v_0t).$$

Уравнения (1), (2) необходимо дополнить граничными условиями. Как уже отмечалось, будем предполагать, что частицы плазмы отра-

жаются от границы зеркально. Тогда функция распределения на границе удовлетворяет условию

$$\varphi(\rho, z=0, \mathbf{u}, \mathbf{v}_z) = \varphi(\rho, z=0, \mathbf{u}, -\mathbf{v}_z), \quad (3)$$

где ρ, \mathbf{u} есть соответственно проекции векторов \mathbf{z} и \mathbf{v} на плоскость xu , т. е. $\rho = \{x, y, 0\}$; $\mathbf{u} = \{v_x, v_y, 0\}$. Из (2), (3) следует, что

$$j_z(\rho, z=0, \mathbf{v}) = 0. \quad (4)$$

Наряду с граничным условием (4) из уравнений Максвелла вытекают два независимых условия, например, непрерывность на границе $z=0$ тангенциальной составляющей электрического поля \mathbf{E} и нормальной составляющей электрической индукции \mathbf{D} .

Из предположения о зеркальности отражения электронов от границы следует еще одно важное обстоятельство. Как указывается в [6] (см. также [7]), в этом случае характер функции распределения не искажается границей раздела. Ввиду этого для фурье-компонент можно записать: $\mathbf{D} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \varepsilon_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$, $\mathbf{j} = \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \sigma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$, где \mathbf{E}_{\perp} , \mathbf{E}_{\parallel} — перпендикулярная и параллельная волновому вектору \mathbf{k} компоненты поля, причем диэлектрические проницаемости ε_{\perp} , ε_{\parallel} — такие же, как в безграничной плазме [5]:

$$\varepsilon_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + i \frac{4\pi\sigma_{\perp}(\omega, \mathbf{k})}{\omega}; \quad \varepsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + i \frac{4\pi\sigma_{\parallel}(\omega, \mathbf{k})}{\omega},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left\{ -i V_{\pi}^{-} \frac{\omega}{k v_T} W\left(\frac{\omega}{k v_T}\right) \right\}; \\ \varepsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2\omega^2}{k^2 v_T^2} \left\{ -i V_{\pi}^{-} \frac{\omega}{k v_T} W\left(\frac{\omega}{k v_T}\right) - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $v_T = \sqrt{2T/m}$ — средняя тепловая скорость электронов плазмы,

$$W(x) = e^{-x^2} + \frac{2i}{V_{\pi}} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

Разлагая все величины в четырехкратные интегралы Фурье (например, $\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\omega \mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}r - \omega t)} d\mathbf{k}d\omega$, $\varphi = \int \varphi_{\omega \mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}r - \omega t)} d\mathbf{k}d\omega$) и используя указанные выше граничные условия, получим таким же образом, как в [2], для фурье-компонент полей однородных уравнений следующие выражения:

$$E_{i\mathbf{k}\omega}^{\pm} = \frac{eiv_0\delta(\omega - k_z v_0)}{2\pi^2 k^2} \zeta_i^{\pm} \quad (i = 1, 2);$$

$$\zeta_1^{\pm} = \frac{\chi \lambda_{\perp}}{\delta \lambda_{\perp} - \varepsilon(k_{\perp}) \lambda_2} \left\{ \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\delta_1}{\varepsilon_{\parallel}(k)} - 1 \right) + \frac{\omega}{c^2} \left[\frac{-k_z + \lambda_2}{k^2 - \omega^2/c^2} + \frac{k_z + \delta_2 - \lambda_2 \varepsilon_{\perp}(k)}{k^2 - (\omega^2/c^2) \varepsilon_{\perp}(k)} \right] \right\}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \zeta_2^{\pm} &= \frac{\chi \lambda_2}{\delta \lambda_{\perp} - \varepsilon(k_{\perp}) \lambda_2} \left\{ \frac{\varepsilon_{\perp}(k_{\perp}) k_z}{\omega} \left(\frac{\delta_1}{\varepsilon_{\parallel}(k)} - 1 \right) + \frac{\omega}{c^2} \left[\frac{-k_z \varepsilon_{\perp}(k_{\perp}) + \delta \lambda_{\perp}}{k^2 - \omega^2/c^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k_z \varepsilon_{\perp}(k_{\perp}) - \delta \lambda_{\perp} \varepsilon_{\perp}(k) + \delta_2 \varepsilon_{\perp}(k_{\perp})}{k^2 - (\omega^2/c^2) \varepsilon_{\perp}(k)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь индекс „+“ относится к случаю движения заряда из вакуума в плазму, индекс „—“ — из плазмы в вакуум;

$$\mathbf{k}_\perp = \{k_x, k_y, \lambda_\perp\}; \quad \mathbf{k}_\parallel = \{k_x, k_y, \lambda_\parallel\}; \quad \mathbf{x} = \{k_x, k_y, 0\},$$

причем $\lambda_\perp, \lambda_\parallel, \lambda_2$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_\perp(\omega, \mathbf{x}, \lambda_\perp) - x^2 - \lambda_\perp^2 = 0; \quad (7)$$

$$\varepsilon_\parallel(\omega, \mathbf{x}, \lambda_\parallel) = 0; \quad (7a)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - x^2 - \lambda_2^2 = 0. \quad (7b)$$

Знаки корней $\lambda_\perp, \lambda_\parallel, \lambda_2$ уравнений (7)—(7b) выбираются в зависимости от того, где расположена плазма*. Если плазма расположена в полупространстве $z > 0$ (индекс „+“ в (6)), то $\text{Re } \lambda_\perp > 0, \text{Re } \lambda_\parallel > 0, \lambda_2 < 0$. Если же плазма находится в полупространстве $z < 0$ (индекс „—“ в (6)), то $\text{Re } \lambda_\perp < 0, \text{Re } \lambda_\parallel < 0, \lambda_2 > 0$. Значение $i = 1$ относится к полю в плазме, $i = 2$ — к полю в вакууме,

$$\delta = 1 + \frac{x^2 \sigma_\perp(k_\perp)}{\lambda_\parallel \sigma_\parallel(k_\parallel) \lambda_\perp}; \quad \delta_1 = 1 - \frac{\sigma_\parallel(k) k_z}{\lambda_\parallel \sigma_\parallel(k_\parallel)}; \quad \delta_2 = \frac{x^2 \sigma_\perp(k)}{\lambda_\parallel \sigma_\parallel(k_\parallel)}.$$

Легко видеть, что для холодной плазмы ($v_T = 0, \varepsilon_\parallel = \varepsilon_\perp = 1 - \omega_0^2/\omega^2; \lambda_\parallel \rightarrow \infty$) выражение (6) переходит в соответствующую формулу работы [2].

Используя выражение для фурье-компонент полей (6), можно также вычислить величину излучаемой энергии при переходе заряда через границу плазма—вакуум.

2. Рассмотрим сначала поля излучения в вакууме. Допустим, что заряд выходит из плазмы в вакуум. Тогда, следуя работе [2]**, легко получить выражение для компоненты электрического поля параллельной плоскости $z = 0$ при $R \rightarrow \infty$ в следующем виде***:

$$E_{r^2}^- = -\frac{e}{cR\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0^2 \varepsilon_\perp^-(x_0, \omega) \cos \theta d\omega}{k^2(x_0)} e^{i\omega(R/c-t)} - \frac{ei}{v_0} \sqrt{\frac{2}{\pi R \sin \theta}} e^{-\frac{3}{4}\pi i} \int \frac{V_{x_1}^-}{k^2(x_1)} \frac{\lambda_2 x \varepsilon_\perp(k_\perp(x_1))}{[\delta \lambda_\perp - \lambda_2 \varepsilon_\perp(k_\perp(x_1))]} \frac{e^{i[f_1(x_1)R - \omega t]}}{|d\varepsilon_\parallel(k)/dx|_{x=x_1}} d\omega. \quad (8)$$

Здесь $R = z^2 + \rho^2$ — расстояние от точки наблюдения до точки выхода частицы из плазмы ($z = -R \cos \theta$). Первый член в (8), отвечающий сферической волне, обязан переходному излучению ($x_0 = (\omega/c) \sin \theta$). Второй член представляет из себя черенковское излучение на продольной

* Это связано с тем, что необходимо оперировать лишь с запаздывающими волнами

** Заметим, что интегрирование по переменной x осуществляется методом перевала, причем наряду с разрезами в комплексной плоскости $x = x_1 + ix_2$, указанными в [2], здесь ввиду неаналитичности функций $\varepsilon_\parallel(\omega, k), \varepsilon_\perp(\omega, k)$ необходимо сделать разрез по линии $x_1 = 0; |x_2| > \omega/v_0$. Вместе с тем следует сделать разрез, обеспечивающий однозначность функций $\lambda_\parallel^i(x)$, определяемой уравнением (7b).

*** Компонента электрического поля, нормальная границе раздела E_{z2} , вычисляется аналогичным образом.

волне, возникшее в плазме и вышедшее затем в вакуум. При этом x_1 определяется из уравнения $(f_1(x_1) = x_1 \sin \theta + \lambda_2(x_1) \cos \theta)$

$$\varepsilon_{\parallel}(k(x_1), \omega) = 0. \quad (9)$$

Отметим, что черенковская волна слабо затухает (так же как и в случае движения частицы в безграничной плазме) при условии $\omega \gg kv_T$, т. е. при $v_0 \gg v_T$.

Перейдем к определению энергетических величин. Энергия переходного излучения, испущенного за все время пролета частицы в телесном угле $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, будет равна

$$\frac{dW_{2\text{пер}}^-}{d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi^2 c} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 |\zeta_2^-(x_0, \omega)|^2 d\omega}{k^4(x_0, \omega)}. \quad (10)$$

Что касается черенковского слагаемого в (8), то оно будет давать вклад в излучаемую энергию ($R \rightarrow \infty$) лишь при слабом затухании ($v \gg v_T$), когда

$$\varepsilon_{\parallel} \approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{k^2 v_T^2}{\omega^2} \right). \quad (11)$$

В этом случае величина черенковской энергии, излучаемой за все время пролета частиц через круговую площадку ρ , $\rho + d\rho$, будет

$$\frac{dW_{2\text{чер}}^-}{d\rho} = \frac{4ce^2}{v_0^2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{|\alpha|^2}{\cos \vartheta(\omega)} d\omega, \quad (12)$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{x_1}}{k^2(x_1)} \frac{1}{|d\varepsilon_{\parallel}(k)/dx|_{x=x_1}} \frac{\lambda_2 x_1 \varepsilon_{\perp}(k_{\perp})}{[\delta\lambda_{\perp} - \lambda_2 \varepsilon_{\perp}(k_{\perp})] \sqrt{\sin \theta}}, \quad k_{\perp} = k_{\perp}(x_1).$$

Предел интегрирования $\omega_1 = \omega_0$ определяется из требования действительности корней уравнения (9); значение $\omega_2^2 = \omega_0^2 / (1 - \beta_T^2 \sin^2 \theta)$ определяется из условия $(\omega^2 - \omega_0^2) / v_T^{*2} = x_1^2 \leq x_0^2 = (\omega^2 / c^2) \sin^2 \theta$, $\beta_T = v_T^* / c$, $v_T^* = \frac{3}{2} v_T$.

Это условие просто означает, что в вакуум могут выйти лишь те черенковские волны, угол падения которых на границу плазмы меньше угла полного внутреннего отражения (см. также [2,3]):

$$\text{tg } \vartheta(\omega) = x_1 / \lambda_2(x_1), \quad \cos \vartheta(\omega) = (1 / \omega \beta_T) \sqrt{\omega^2 (\beta_T^2 - 1) + \omega_0^2}.$$

Заметим, что направление распространения черенковских волн в плазме характеризуется углом $\vartheta_{\text{пл}}$:

$$\text{tg } \vartheta_{\text{пл}} = \frac{x_1}{\omega / v} = \frac{v}{v_T^* \omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Если заряд входит из вакуума в плазму, то, разумеется, черенковское излучение в вакуум отсутствует, а переходное излучение определяется формулой (10) с заменой ζ_2^- на ζ_2^+ (см. (6)).

3. Поля и величина излучаемой энергии в плазме вычисляются аналогичным предыдущему случаю образом. При этом в отличие от

излучения электромагнитных волн в вакууме здесь появляется возможность переходного излучения плазменной волны*. Ввиду отмеченного обстоятельства представляет интерес привести соответствующие формулы. Так, для случая входа заряда в плазму при $R \rightarrow \infty$ имеем:

$$E_{\parallel \rho}^+ = -\frac{e}{\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2(\tilde{z})} e^{i(-\omega t + \gamma R)\zeta_1^+(\tilde{z})} \gamma \cos\theta d\omega, \quad (13)$$

где, например, при условии $v_0 \gg v_T$ (см. (11))

$$\tilde{z} = \gamma \sin\theta, \quad \gamma^2 = (\omega^2/c^2) n_3^2, \quad n_3^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)/\beta_T^2 \omega_0^2.$$

Тогда величина энергии переходного излучения слабозатухающей продольной волны в элементе телесного угла $d\Omega$ есть

$$\frac{dW_{\parallel \text{пер}}^+}{d\Omega} = \frac{e^2}{2c\pi^2} \int_{\omega_0}^{\omega_m} \frac{n_3 |\zeta_1^+(\tilde{z})|^2 (\omega^2 - \omega_0^2) \cos^2\theta d\omega}{k^4(\tilde{z})}; \quad (14)$$

значение частоты ω_m определяется из условия применимости макроскопической электродинамики: $n_3^2(\omega_m) \omega_m^2/c^2 = k_m^2 \ll 1/D^2 \cong \omega_0^2/v_T^2$ (D — дебаевский радиус), т. е. $\omega_m - \omega_0 \ll \omega_m$.

Если заряд выходит из плазмы в вакуум, то формула для энергии переходного излучения продольной волны получается из (14) заменой ζ_1^+ на ζ_1^- .

Используя (6), легко оценить величину переходного излучения в случае, когда $\beta_T \rightarrow 0$ ($n_3^2 \gg 1$). В результате элементарных преобразований при $\beta^2 n_3^2 \cos^2\theta \gg 1$, $\beta^2 n_3^2 \sin^2\theta \gg 1$, $\beta = v_0/c$ получим:

$$\frac{dW_{\parallel \text{пер}}^+}{d\Omega} \cong \frac{e^2 \omega_0}{2\pi^2 v_0^2} \frac{c}{n_3} \frac{1}{\cos^2\theta \sin^2\theta}. \quad (15)$$

Таким образом, в отличие от случаев возбуждения плазменной волны, рассмотренных в [8,9], здесь $dW_{\parallel}^+/d\Omega \rightarrow 0$ при $\beta_T \rightarrow 0$. Это связано с тем, что переходное излучение возбуждается, грубо говоря, лишь в момент прохода зарядом границы, тогда как в [8,9] сила, возбуждающая продольную волну, действует во всем промежутке времени $-\infty < t < +\infty$. Из (10), (15) следует, в частности, что $dW_{\parallel \text{пер}}/dW_{\perp \text{пер}} \cong 1/n_3 \ll 1$ при $\beta_T \rightarrow 0$.

Что касается черенковского излучения продольной волны, то при сделанных выше предположениях (см. (11), (12)) в некотором интервале частот** оно дает основной вклад в излучаемую энергию (см. также [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург и И. М. Франк, ЖЭТФ, **16**, 15 (1946).
2. Г. М. Гарибьян, ЖЭТФ, **33**, 1403 (1957).
3. Б. Л. Желнов, ЖЭТФ, **40**, 170 (1960).
4. В. М. Яковенко, ЖЭТФ, **41**, 385 (1961).

* Заметим, что черенковское излучение продольной волны в плазме, вообще говоря, складывается из падающей и отраженной волн.

** Например, для излучения в вакуум указанный интервал частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$.

5. В. Д. Шафранов, Электромагнитные волны в плазме, изд. Ин-та атомной энергии им. И. В. Курчатова, АН СССР, М., 1960.
6. В. Д. Шафранов, ЖЭТФ, **34**, 1475 (1958).
7. Ю. И. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, **39**, 845 (1960).
8. А. А. Андронов, Г. В. Городинский, Изв. выс. уч. зав.—Радиофизика **5**, 234 (1962).
9. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, **41**, 1971 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 ноября 1961 г.

ON TRANSIENT RADIATION AT BOUNDARY WITH SPACE DISPERSIVE PLASMA

V. Ya. Eidman

By the kinetic equation method the transient radiation is considered which arises at the boundary with isotropic plasma. The expressions of radiation energy out of plasma into vacuum for transient as well as for Cherenkov's radiation of longitudinal waves have been obtained.

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ

В. Е. Пафомов

Рассматривается переходное излучение, возникающее при пролете заряженной частицы через границу раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями (наклонно к границе раздела).

Известно, что заряженная частица, пролетающая через границу раздела двух сред, излучает электромагнитные волны. Теория этого эффекта, получившего название переходного излучения, была дана Гинзбургом и Франком [1]. В [1] было вычислено поле и исследовалось угловое распределение энергии излучения при пролете частицы перпендикулярно к плоской границе раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями. Там было, в частности, показано, что переходное излучение может рассматриваться как результат интерференции излучения, возникающего при остановке (или выбрасывании) частицы на границе раздела вместе с ее электрическим изображением. В последующих работах [2-5] рассматривалось переходное излучение на ферродиеlectricaх и диэлектрических кристаллах, а также исследовались особенности излучения релятивистских частиц.

Переходному излучению при наклонном падении на границу раздела посвящены работы [6-9]. Из них лишь в [6] вычисляется поле излучения на больших расстояниях от границы и угловое распределение энергии излучения. Однако полученные там результаты некорректны. Дело в том, что в [6] рассматривались только электрические изображения, которыми в случае наклонного падения нельзя удовлетворить граничным условиям: необходимо введение еще и магнитных изображений (в предельном случае движения частицы вдоль границы раздела это было показано в [10]). Далее, следует заметить, что в [6], по существу, обобщается метод [1], основанный на использовании теоремы взаимности. Однако при таком подходе необходимо провести отдельное рассмотрение для волн, поляризованных в плоскости падения и в перпендикулярной плоскости, так как им соответствуют различные коэффициенты Френеля, что в [6] не учитывалось (см. Примечание при корректуре I). Компоненты Фурье поля излучения найдены в статье [7]. Результаты наших вычислений (8) совпадают с полученными в [7].

Работы [8] и [9] посвящены излучению релятивистских частиц на больших (по сравнению с оптическими) частотах. В [8] в качестве исходных брались результаты, полученные в [6]; некорректность последних в данном случае оказалась мало существенной. В работе [9] также исследовалась интенсивность излучения релятивистской частицы при наклонном падении на границу раздела, однако без необходимых для этого вычислений поля на больших расстояниях от границы и углового распределения энергии переходного излучения.

В настоящей работе найдено точное решение задачи о переходном излучении при наклонном падении, вычислены сферическая волна поля переходного излучения и угловое распределение энергии излучения. Полученные результаты могут быть использованы, например, для сравнения теории с результатами возможных экспериментов по пере-

ходному излучению при наклонном падении заряженной частицы на мишень, а также для детального количественного анализа спектра и углового распределения энергии излучения релятивистских частиц при скользящем пролете через границу.

Первый шаг при решении задачи состоит в том, чтобы найти коэффициенты Фурье поля излучения. Последние были получены в работе [7] при непосредственном „сшивании“ компонент электромагнитного поля на границе раздела. Известно, что нахождение компонент Фурье сводится к решению системы алгебраических уравнений и является простой, но несколько громоздкой задачей. Оказывается, что введение вектора Герца, как и в других расчетах, здесь также дает известные преимущества, а сведение задачи к нахождению его компонент для поля излучения делает вычисления более компактными.

Итак, приступим к нахождению компонент вектора Герца, параллельно вводя используемые в дальнейшем обозначения. При решении задачи будем разлагать все величины в интегралы Фурье вида $\Pi = \int \Pi_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}$ (см. [11]). Введем вектор Герца Π' по формулам:

$$H_k = \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c} [k\Pi'_k]; \quad E_k = \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2 \Pi'_k - \frac{\mathbf{k}(k\Pi'_k)}{\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})} \quad (\mu = 1). \quad (1)$$

Тогда уравнения Максвелла будут эквивалентны следующему уравнению:

$$\left[\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{c}\right)^2 \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}) - k^2 \right] \Pi'_k = i \frac{e\mathbf{v}}{2\pi^2(\mathbf{k}\mathbf{v})} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}, \quad (2)$$

откуда

$$\Pi'_k = i \frac{e}{2\pi^2\omega} \frac{\mathbf{v}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)} e^{-i\omega t}, \quad (3)$$

где введено обозначение $\omega = (\mathbf{k}\mathbf{v})$. Фурье-компонента вектора Π свободного поля удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \Pi_k - \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \Pi_k = 0, \quad (4)$$

решение которого запишем в виде:

$$\Pi_k = \Pi_k^0 e^{i(\lambda - k_z)z - i\omega t}, \quad \lambda = \pm \sqrt{\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}. \quad (5)$$

Пусть плоскость $z = 0$ совпадает с границей раздела двух с различными диэлектрическими проницаемостями ε_1 ($z < 0$) и ε_2 ($z > 0$), будем отмечать соответствующим образом компоненты векторов. При наличии затухания ($\text{Im} \varepsilon_{1,2} > 0$) и во всем пространстве приводит к тому

$$\lambda_1 = -\sqrt{\varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}; \quad \lambda_2 =$$

где мнимые, а следовательно, и действительные.

Вычислим компоненты свободного поля. Частица движется в плоскости yz , т. е. $v_x = 0$.

и $\Pi_{1,2xk} = 0$. Остальные четыре компоненты Π_{1yk} , Π_{1zk} , Π_{2yk} и Π_{2zk} определяются из условий непрерывности тангенциальных составляющих электромагнитного поля. Последние эквивалентны тому, что на границе раздела должны быть выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Pi'_{1yk} + \Pi_{1yk} &= \Pi'_{2yk} + \Pi_{2yk}; & \Pi'_{1zk} + \Pi_{1zk} &= \Pi'_{2zk} + \Pi_{2zk}; \\ k_z \Pi'_{1yk} + \lambda_1 \Pi_{1yk} &= k_z \Pi'_{2yk} + \lambda_2 \Pi_{2yk}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varepsilon_2 (k_y \Pi'_{1,k} + k_y \Pi_{1yk} + k_z \Pi'_{1zk} + \lambda_1 \Pi_{1zk}) = \varepsilon_1 (k_y \Pi'_{2yk} + k_y \Pi_{2yk} + k_z \Pi'_{2zk} + \lambda_2 \Pi_{2zk}).$$

Решение этой системы уравнений имеет следующий вид:

$$\Pi_{1yk} = \eta v_y (\lambda_2 - k_z) (\varepsilon_1 \lambda_2 - \varepsilon_2 \lambda_1) e^{i\lambda_1 z};$$

$$\Pi_{2yk} = \eta v_y (\lambda_1 - k_z) (\varepsilon_1 \lambda_2 - \varepsilon_2 \lambda_1) e^{i\lambda_2 z};$$

$$\Pi_{1zk} = \eta \left[\omega (\lambda_2 - \lambda_1) \left(\frac{\varepsilon_1 \lambda_2 v_z}{\omega} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + k^2 \frac{c^2}{\omega^2} \right) + k_y v_y (\varepsilon_2 \lambda_2 - \varepsilon_1 \lambda_1 - \varepsilon_2 k_z + \varepsilon_1 k_z) \right] e^{i\lambda_1 z}; \quad (8)$$

$$\Pi_{2zk} = \eta \left[\omega (\lambda_2 - \lambda_1) \left(\frac{\varepsilon_2 \lambda_1 v_z}{\omega} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + k^2 \frac{c^2}{\omega^2} \right) + k_y v_y (\varepsilon_2 \lambda_2 - \varepsilon_1 \lambda_1 - \varepsilon_2 k_z + \varepsilon_1 k_z) \right] e^{i\lambda_2 z};$$

$$\eta = \frac{i e \omega}{2 \pi^2 c^2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(k^2 - \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{-1} \left(k^2 - \varepsilon_2 \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{-1} (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} (\varepsilon_1 \lambda_2 - \varepsilon_2 \lambda_1)^{-1} e^{-i k_z z - i \omega t}.$$

На достаточно больших расстояниях от границы раздела поле переходного излучения (8), очевидно, должно формироваться в сферическую волну. Для ее нахождения воспользуемся методом стационарной фазы (см., например, [12]). Применяя его в формуле $\Pi = \int \Pi_k e^{i k r} dk$ (где $\Pi_k = \Pi_{1k}$ или Π_{2k}) дважды (при интегрировании по k_x и по k_y), легко проверить, что результат сводится к умножению на $2 \pi \omega \sqrt{\varepsilon} \cos \gamma_3 / i R c$ и замене k_y на $\sqrt{\varepsilon} (\omega/c) \cos \gamma_2$, а k_x — на $\sqrt{\varepsilon} (\omega/c) \cos \gamma_1$, где γ_1 , γ_2 и γ_3 — углы волнового вектора с осями x , y и z . Учитывая также, что $(k v) = \omega$, откуда $dk_z = d\omega/v_z$, получим сферическую волну поля излучения; например, во второй области ($z > 0$). Последняя имеет следующий вид*:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\omega e^{-i \omega t} d\omega; & \Pi_\omega &= \frac{e c \beta_z \sqrt{\varepsilon_2} \cos \gamma_3}{\pi R \omega^2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \{ \beta_y \beta_z (\beta_z^2 \eta_1 - \xi_3) \times \\ &\times (\varepsilon_1 \eta_2 - \varepsilon_2 \eta_1) + k [(\eta_2 - \eta_1) (\varepsilon_2 \beta_z^2 \eta_1 - \varepsilon_1 \beta_z^2 - \varepsilon_2 \beta_z^2 + \xi_1) + \xi_2 \beta_y \beta_z (\varepsilon_2 \beta_z \eta_2 - \\ &- \varepsilon_1 \beta_z \eta_1 - \varepsilon_2 \xi_3 + \varepsilon_1 \xi_3)] \} (\xi_1 - \varepsilon_1 \beta_z^2)^{-1} (\xi_1 - \varepsilon_2 \beta_z^2)^{-1} (\eta_2 - \eta_1)^{-1} (\varepsilon_1 \eta_2 - \varepsilon_2 \eta_1)^{-1} e^{i \omega V \varepsilon_2 R/c}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\xi_1 = (1 - \sqrt{\varepsilon_2} \beta_y \cos \gamma_2)^2 + \varepsilon_2 \beta_z^2 \sin^2 \gamma_3; \quad \xi_2 = \sqrt{\varepsilon_2} \cos \gamma_2; \quad (10)$$

$$\xi_3 = 1 - \sqrt{\varepsilon_2} \beta_y \cos \gamma_2; \quad \eta_1 = -\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \gamma_3}; \quad \eta_2 = \sqrt{\varepsilon_2} \cos \gamma_3.$$

* В [9] было сделано заключение, что λ_2 в некоторой области углов может оказаться чисто мнимой и поскольку поле содержит $\exp(i \lambda_2 z)$, оно должно экспоненциально затухать. Это утверждение основано на недоразумении, заключающемся в отождествлении переменной k_y с компонентой волнового вектора излучаемых волн, и возникло из-за отсутствия вычислений сферической волны переходного излучения. В результате проведенного нами интегрирования по k оказывается, что на больших расстояниях $k_y \rightarrow (\omega/v \beta_z) (\sqrt{\varepsilon_2} \beta_z^2 \cos \gamma_2 - \beta_y)$ и λ_2 приобретает смысл компоненты волнового вектора излучаемых сферических волн по оси z ; поэтому в прозрачной среде нет такой области углов, где λ_2 была бы мнимой, и поле не затухает.

В формуле (9) \mathbf{j} и \mathbf{k} — орты осей y и z , $\beta_y = v_y/c$, $\beta_z = v_z/c$, R — расстояние от начала координат до точки наблюдения. Воспользовавшись вторым соотношением из (1), легко сделать заключение о поляризации излучаемых волн: они оказываются поляризованными в плоскости, проходящей через волновой вектор волны и вектор Π_ω .

Спектральная плотность энергии излучения на единицу телесного угла определяется по формуле:

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{\omega^4 \sqrt{\epsilon_2} R^2}{c^3} [|\Pi_\omega|^2 - |(\mathbf{n}\Pi_\omega)|^2], \quad (11)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении наблюдения и предполагается, что $\text{Im } \epsilon_2 = 0$.

Из формулы (9) видно, что амплитуда сферической волны стремится к нулю, если $\beta_z \rightarrow 0$. Это и понятно, так как при $\beta_z = 0$ частица движется вдоль границы раздела и переходное излучение должно исчезать. Заметим, что вдоль границы раздела ($\gamma_3 = \pi/2$) Π_ω обращается в нуль (если только $\epsilon_1 \neq \infty$). Этот результат связан с тем, что волна, движущаяся вдоль границы раздела, либо не может удовлетворить граничным условиям (что при $\epsilon_2 < \epsilon_1$ очевидно из-за большой фазовой скорости), либо втягивается в среду „1“ (если $\epsilon_2 > \epsilon_1$).

Результаты (9) и (11) справедливы для любого направления движения частицы. Если $\beta_z > 0$, то частица движется из первой среды во вторую; при $\beta_z < 0$ (9) и (11) описывают излучение при пролете частицы из второй среды в первую.

В частном случае движения частицы через границу раздела между вакуумом и средой результаты (9) и (11) несколько упрощаются и для излучения в вакуум ($\epsilon_2 = 1$) принимают следующий вид:

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{\omega^4 R^2}{c^3} [|\Pi_\omega|^2 - |(\mathbf{n}\Pi_\omega)|^2];$$

$$\begin{aligned} \Pi_\omega = & \frac{ec\beta_z\eta_2}{\pi R\omega^2} (1 - \epsilon) \{ \mathbf{j}\beta_y\beta_z(\beta_z\eta_1 - \xi_3)(\epsilon\eta_2 - \eta_1) + \\ & + \mathbf{k}[(\eta_2 - \eta_1)(\beta_z^2\eta_1 - \epsilon\beta_z^2 - \beta_z^2 + \xi_1) + \xi_2\beta_y\beta_z(\beta_z\eta_2 - \epsilon\beta_z\eta_1 - \xi_3 + \\ & + \epsilon\xi_3)] (\xi_1 - \epsilon\beta_z^2)^{-1} (\xi_1 - \beta_z^2)^{-1} (\eta_2 - \eta_1)^{-1} (\epsilon\eta_2 - \eta_1)^{-1} e^{i\omega R/c}; \quad (12) \end{aligned}$$

$$\xi_1 = (1 - \beta_y \cos \gamma_2)^2 + \beta_z^2 \sin^2 \gamma_3; \quad \xi_2 = \cos \gamma_2; \quad \xi_3 = 1 - \beta_y \cos \gamma_2;$$

$$\eta_1 = -\sqrt{\epsilon - \sin^2 \gamma_3}; \quad \eta_2 = \cos \gamma_3.$$

Отметим, что результат (12) описывает угловое распределение энергии излучения на таких расстояниях от точки пролета частицы через границу раздела, на которых все поле излучения формируется в сферическую волну, в том числе и выходящее в вакуум излучение Вавилова—Черенкова, генерируемое в среде. Поскольку траектория частицы предполагается в настоящей задаче бесконечной, то все поле излучения будет формироваться в сферическую волну на некотором конечном расстоянии лишь при наличии затухания. Это связано с тем, что только в этом случае излучение Вавилова—Черенкова, генерируемое на больших расстояниях от границы раздела, поглощается в среде и не выходит в вакуум, в результате чего „светящаяся“ область поверхности раздела ограничена, а ограниченный источник света на достаточно больших расстояниях всегда излучает сферическую волну независимо от конфигурации поля излучения на малых расстояниях от источника.

Иллюстрируя это очевидное утверждение, сравним амплитуды сферической и цилиндрической волн. В простейшем случае перпендикулярного падения заряженной частицы на границу раздела ($v_y = 0$) в направлении распространения преломленного черенковского излучения ϑ_r ($\vartheta_r = \arcsin \frac{1}{\beta} \sqrt{\epsilon' \beta^2 - 1}$, $\epsilon' = \text{Re } \epsilon$) все поле формируется в сфе-

рическую волну на расстояниях $R \gg \frac{c}{\omega \epsilon''^2} \sin^2 2 \vartheta_r$ ($\epsilon'' = \text{Im } \epsilon$). Это неравенство следует из условия применимости метода стационарной фазы. Перепишем его в виде: $R \gg (\omega s_1^2 / c) \sin^2 \vartheta_r$, где через s_1 мы обозначили кажущуюся (из-за преломления волн) длину траектории частицы, с которой излучение доходит до границы раздела ($s_1 \sim \frac{c}{\omega \epsilon''} \cos \vartheta_r$). Если учесть, что цилиндрическая волна черенковского излучения существует в области углов $\vartheta > \vartheta_r + \epsilon'' / \sin(2 \vartheta_r)$, где полюс подынтегрального выражения (23) [2] лежит ниже линии перевала, то оказывается, что отношение амплитуды черенковской цилиндрической волны к амплитуде сферической меньше или порядка

$$\sqrt{\frac{\omega R}{c}} \frac{\epsilon''}{\sin(2 \vartheta_r)} e^{-R \omega \epsilon''^2 / c \sin^2(2 \vartheta_r)}.$$

На расстояниях $R \gg (c / \omega \epsilon''^2) \sin^2(2 \vartheta_r)$ эта величина гораздо меньше единицы, что и свидетельствует о полной трансформации цилиндрической волны в сферическую (см. Примечание при корректуре. II).

Заметим, что при малом затухании в направлении преломленного черенковского угла (12) имеет смысл на весьма больших по сравнению с длиной волны расстояниях. Наряду с преломленным черенковским направлением область формирования поля излучения в сферическую волну может быть довольно большой и под малыми углами к траектории частицы, если последняя является релятивистской. Известно, что в этом случае основная часть поля излучения генерируется в направлении $\vartheta \sim \sqrt{1 - \beta^2}$ на пути в вакууме. Последний равен пути когерентного взаимодействия частицы с волной $s \sim v / \omega(1 - \beta^2)$ и, по существу, играет роль размера „источника“ излучения. Из простых интерференционных соображений легко заключить, что соответствующее поле излучения должно формироваться в сферическую волну на расстояниях $R \gg (\omega s^2 / c)(1 - \beta^2)$. Это соотношение вытекает и из строгих расчетов и является необходимым требованием для применимости метода стационарной фазы. Поскольку полученные соотношения просты и физически легко интерпретируются, то мы не будем загромождать изложение их строгим выводом.

Рассмотрим некоторые простейшие частные случаи полученных результатов.

Если в (12) устремить ϵ к бесконечности, то получим угловое распределение энергии излучения в случае вакуум—идеальный проводник*:

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{e^2 \beta_z^2}{\pi^2 c} \frac{[(1 - \beta_y \cos \gamma_2)^2 - (1 - \beta_v^2) \cos^2 \gamma_3]}{[(1 - \beta_y \cos \gamma_2)^2 - \beta_z^2 \cos^2 \gamma_3]^2}. \quad (13)$$

* В рассматриваемом частном случае магнитные изображения отсутствуют, отражение волн зеркально и результат (13) совпадает с полученным в [6].

Рассмотрим переходное излучение нерелятивистской частицы. Пренебрегая в (9) всеми членами, содержащими множитель β , видим, что вектор Π_ω совпадает с нормалью к границе раздела, т. е. так же, как в случае нормального падения частицы на границу. Отсюда и поляризация излучаемых волн — такая же, как и в случае нормального падения. Угловое распределение энергии излучения определяется по формуле:

$$\frac{dW_\omega}{d\Omega} = \frac{e^2 \beta_z^2}{\pi^2 c} \frac{\varepsilon_2^{1/2} |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2 \sin^2 \gamma_3 \cos^2 \gamma_3}{|\varepsilon_1 \cos \gamma_3 + \sqrt{\varepsilon_2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \gamma_3)|^2}. \quad (14)$$

Мы видим, что полученный результат отличается от случая перпендикулярного падения лишь множителем $(\beta_z/\beta)^2$. Это обусловлено тем, что амплитуда волны переходного излучения, генерируемого нерелятивистской частицей, пропорциональна нормальной компоненте скорости.

В заключение автор выражает благодарность В. Л. Гинзбургу и Б. М. Болотовскому за полезные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ЖЭТФ, 16, 15 (1946).
2. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 33, 1403 (1957).
3. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 36, 1853 (1959).
4. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 37, 527 (1959).
5. К. А. Барсуков, ЖЭТФ, 37, 1106 (1959).
6. Н. А. Корхмязян, Изв. АН Арм. ССР, 11, № 6, 87 (1958).
7. Г. М. Гарибян, Изв. АН Арм. ССР, 11, № 4, 7 (1958).
8. Н. А. Корхмязян, Изв. АН Арм. ССР, 13, № 2, 139 (1960).
9. Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 38, 1814 (1960).
10. А. Г. Ситенко, В. С. Ткалич, ЖТФ, 29, 1074 (1959).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1957, стр. 440.
12. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн, Гостехиздат, М., 1953, стр. 46.
13. Н. А. Корхмязян, Изв. АН Арм. ССР, 15, № 1, 115 (1962).
14. Э. А. Канер, В. М. Яковенко, ЖЭТФ, 42, 471 (1962).

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию
14 октября 1961 г.

TRANSIENT RADIATION AT OBLIQUE INCIDENCE

V. E. Paphomov

A transient radiation is considered which arises when a charged particle passes through the boundary surface of two media with different permittivities (obliquely to boundary surface).

Примечание при корректуре. I. В последнее время Корхмязяном задача о переходном излучении при наклонном падении была решена заново в [13].

Примечание при корректуре. II. Тот факт, что полюс лежит между линией перевала и действительной осью, использовался и в [3], где так же, как и в настоящей статье, не предполагаются какие-либо ограничения на малость поглощения. Это позволяет осуществить предельный переход к случаю абсолютно прозрачной среды, рассмотренному Гарибяном [2]. При сколь угодно малом затухании первый интеграл

в (27) [2] существует на всей полусфере радиуса $R \gg \frac{c}{\omega \varepsilon''_2} \sin^2(2\vartheta_r)$ ($R \rightarrow \infty$ при $\varepsilon'' \rightarrow 0$)

и описывает как переходное, так и черенковское излучение, а цилиндрическая волна, т. е. второй интеграл в (27) [2], исчезает. В последнее время вопрос о пространственных областях существования цилиндрической и сферической волн исследован также в статье Канера и Яковенко (см. [14]).

ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. И. Татарский

Рассматривается второе приближение метода «плавных возмущений», применяемого к решению задачи о распространении коротких волн в среде со случайными неоднородностями. Найдены поправки второго порядка (по малым нелинейным членам уравнения) к средним значениям, спектрам и корреляционным (структурным) функциям амплитуды и фазы волны. На основе анализа этих решений исследуются границы применимости метода «плавных возмущений».

1. При расчетах флюктуаций, возникающих в проходящей через среду со случайными неоднородностями волне, получил применение метод плавных возмущений, предложенный в работах Рытова [1], Обухова [2], а затем использовавшийся в работах Чернова [3], автора [4] и многих других. В работах [2-4] указывалось, что границы применимости этого метода не связаны условием малости флюктуаций амплитуды и фазы, а ограничены требованием малости дополнительного набега фазы и изменения амплитуды на длине волны. Однако в работе Писаревой [5] указывалось, что метод плавных возмущений при больших значениях волнового параметра ограничен малостью флюктуаций фазы, а при малых его значениях — малостью флюктуаций амплитуды. В статье Широковой [6] было вычислено среднее значение поправки второго приближения и сделан вывод о ее несущественности. Вопрос о границах применимости метода плавных возмущений рассмотрен также в монографии Фейнберга [7], в которой сделан вывод, совпадающий с выводом работы [5].

В настоящей работе найдены поправки второго приближения как к средним значениям амплитуды и фазы волны, так и к спектрам их флюктуаций и к корреляционным функциям. При этом мы ограничиваемся случаем скалярного уравнения и предполагаем, что поля зависят от времени посредством множителя e^{-ikt} .

2. Пусть E — комплексная амплитуда волнового поля. Найдем уравнение для логарифма этой величины $\psi = \ln E$. Поле E удовлетворяет волновому уравнению (скалярному)

$$\Delta E + k^2(1 + \delta\epsilon)E = 0, \quad (1)$$

в котором $\delta\epsilon$ — отклонение диэлектрической проницаемости от среднего значения, равного единице. Тогда ψ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi + (\nabla\psi)^2 + k^2 + k^2\delta\epsilon(\mathbf{r}) = 0. \quad (2)$$

Относительно $\delta\epsilon(\mathbf{r})$ мы предполагаем, что это случайное поле не зависит от времени, причем его среднее значение (которое будет обозначаться скобками $\langle \rangle$) равно нулю:

$$\langle \delta\epsilon(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим плоскую волну $E_0 = A_0 e^{ikz}$, $\psi_0 = \ln A_0 + ikz$ и примем ее в качестве падающей волны. Тогда

$$\psi = \ln A_0 + ikz + \psi_1, \quad (4)$$

где ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi_1 + 2ik \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + (\nabla\psi_1)^2 + k^2\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) мы будем решать при помощи спектральных разложений. Пусть

$$\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} v(\alpha_1, \alpha_2, z) d^2\alpha; \quad (6)$$

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} \varphi(\alpha_1, \alpha_2, z) d^2\alpha. \quad (7)$$

Обозначим плоский вектор (α_1, α_2) через α , вектор $(x, y, 0)$ — через ρ ; тогда $v(\alpha_1, \alpha_2, z) = v(\alpha, z)$, $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, z) = \varphi(\alpha, z)$. Вычисляя $(\nabla\psi_1)^2$, получаем:

$$\begin{aligned} (\nabla\psi_1)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\rho} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial\varphi(\alpha_1, z)}{\partial z} \frac{\partial\varphi(\alpha - \alpha_1, z)}{\partial z} - \alpha_1(\alpha - \alpha_1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \varphi(\alpha_1, z)\varphi(\alpha - \alpha_1, z) \right] d^2\alpha_1 \right\} d^2\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (6), (7) и (8) в уравнение (5), найдем уравнение для спектральных плотностей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi(\alpha, z)}{\partial z^2} - \alpha^2\varphi(\alpha, z) + 2ik \frac{\partial\varphi(\alpha, z)}{\partial z} + k^2v(\alpha, z) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial\varphi(\alpha_1, z)}{\partial z} \frac{\partial\varphi(\alpha - \alpha_1, z)}{\partial z} - \alpha_1(\alpha - \alpha_1)\varphi(\alpha_1, z)\varphi(\alpha - \alpha_1, z) \right] d^2\alpha_1 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) является точным следствием волнового уравнения (1) или уравнения (5). В приближенном методе плавных возмущений вместо (9) используется уравнение [4]:

$$2ik \frac{\partial\varphi(\alpha, z)}{\partial z} - \alpha^2\varphi(\alpha, z) = -k^2v(\alpha, z). \quad (10)$$

Нашей дальнейшей задачей является исследование поправок к решению, основанному на уравнении (10), вызванных теми членами уравнения (9), которые отброшены в (10). Мы будем предполагать, что выполняется условие $\lambda = 2\pi/k \ll l_0$, где l_0 — размер минимальных неоднородностей. Это означает, что при всех значениях α , при которых $v(\alpha, z)$ отлично от нуля, выполняется условие $|\alpha| \ll k$.

Оставляя в левой стороне (9) те же члены, что и в (10), и перенося дополнительные слагаемые в правую часть, запишем (9) в форме:

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial\varphi(\alpha, z)}{\partial z} - \alpha^2\varphi(\alpha, z) = -k^2v(\alpha, z) - \frac{\partial^2\varphi(\alpha, z)}{\partial z^2} - \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial\varphi(\alpha_1, z)}{\partial z} \frac{\partial\varphi(\alpha - \alpha_1, z)}{\partial z} - \alpha_1(\alpha - \alpha_1)\varphi(\alpha_1, z)\varphi(\alpha - \alpha_1, z) \right] d^2\alpha_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнение

$$2ik \frac{\partial \varphi}{\partial z} - x^2 \varphi(x, z) = f(x, z); \quad \varphi(x, 0) = 0 \quad (12)$$

имеет решение:

$$\varphi(x, z) = \frac{1}{2ik} \int_0^z e^{-ix^2 \zeta / 2k} f(x, z - \zeta) d\zeta. \quad (13)$$

Применяя (13) к уравнению (11), получим нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(x, z) = & \frac{ik}{2} \int_0^z e^{-ix^2 \zeta / 2k} \psi(x, z - \zeta) d\zeta - \frac{1}{2ik} \int_0^z e^{-ix^2 \zeta / 2k} \frac{\partial^2 \varphi(x, z - \zeta)}{\partial z^2} d\zeta - \\ & - \frac{1}{2ik} \int_0^z e^{-ix^2 \zeta / 2k} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} d^2 x_1 \left[\frac{\partial \varphi(x_1, z - \zeta)}{\partial z} \frac{\partial \varphi(x - x_1, z - \zeta)}{\partial z} - \right. \\ & \left. - x_1(x - x_1) \varphi(x_1, z - \zeta) \varphi(x - x_1, z - \zeta) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Уравнение (14) удобно решать при помощи последовательных итераций. Полагая

$$\varphi_1(x, z) = \frac{ik}{2} \int_0^z e^{-ix^2 \zeta / 2k} \psi(x, z - \zeta) d\zeta \quad (15)$$

и подставляя это выражение в правую часть (14), получим:

$$\varphi_2(x, z) = \varphi_1(x, z) + \delta \varphi_1(x, z) + \delta \varphi_2(x, z), \quad (16)$$

где

$$\delta \varphi_1(x, z) = \frac{i}{2k} \int_0^z e^{-ix^2 \zeta / 2k} \frac{\partial^2 \varphi_1(x, z - \zeta)}{\partial z^2} d\zeta; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_2(x, z) = & \frac{i}{2k} \int_0^z e^{-ix^2 \zeta / 2k} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi_1(x_1, z - \zeta)}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1(x - x_1, z - \zeta)}{\partial z} - \right. \\ & \left. - x_1(x - x_1) \varphi_1(x_1, z - \zeta) \varphi_1(x - x_1, z - \zeta) \right] d^2 x_1. \quad (18) \end{aligned}$$

Первый член в правой части (16) дает решение, получаемое методом плавных возмущений; второй член $\delta \varphi_1$ связан с поправкой, возникающей при пренебрежении в этом методе второй производной вдоль луча; третий член $\delta \varphi_2$ — поправка, связанная с отбрасыванием в методе плавных возмущений нелинейного члена.

3. В настоящей работе мы исследуем лишь нелинейную поправку $\delta \varphi_2(x, z)$. Подставляя (15) в (18) и учитывая, что $\partial \varphi_1 / \partial z = ik \psi / 2 - ix^2 \varphi_1 / 2k$, получим:

$$\delta \varphi_2(x, z) = \delta \varphi_{21}(x, z) + \delta \varphi_{22}(x, z) + \delta \varphi_{23}(x, z); \quad (19)$$

$$\delta\varphi_{21}(\mathbf{x}, z) = -\frac{i}{2k} \int_0^z e^{-ix^2\zeta/2k} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \frac{1}{4k^2} x_1^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 \right] \times$$

$$\times \varphi_1(\mathbf{x}_1, z - \zeta) \varphi_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, z - \zeta) d^2x_1; \quad (20)$$

$$\delta\varphi_{22}(\mathbf{x}, z) = \frac{1}{4k} \int_0^z e^{-ix^2\zeta/2k} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \nu(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, z - \zeta) \varphi_1(\mathbf{x}_1, z - \zeta) d^2x_1; \quad (21)$$

$$\delta\varphi_{23}(\mathbf{x}, z) = -\frac{ik}{8} \int_0^z e^{-ix^2\zeta/2k} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\mathbf{x}_1, z - \zeta) \nu(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, z - \zeta) d^2x_1. \quad (22)$$

Заметим, что в силу условия $|\mathbf{x}| \ll k$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)| \gg \frac{1}{4k^2} x_1^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2. \quad (23)$$

Поэтому слагаемое в (20), связанное с этим малым членом, имеет следующий порядок малости по $(x/k)^2$ и в рассматриваемом приближении может быть отброшено. Тогда

$$\delta\varphi_{21}(\mathbf{x}, z) \simeq -\frac{i}{2k} \int_0^z e^{-ix^2\zeta/2k} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \varphi_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, z - \zeta) \varphi_1(\mathbf{x}_1, z - \zeta) d^2x_1 =$$

$$(24)$$

$$= -\frac{i}{2k} \int_0^z e^{-ix^2(z-\zeta)/2k} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \varphi_1(\mathbf{x}_1, \zeta) \varphi_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \zeta) d^2x_1.$$

Подставим в (24) выражение (15) для φ_1 , представленное в виде

$$\varphi_1(\mathbf{x}_1, \zeta) = \frac{ik}{2} \int_0^{\zeta} e^{-ix_1^2\zeta'/2k} \nu(\mathbf{x}_1, \zeta - \zeta') d\zeta' = \frac{ik}{2} \int_0^{\zeta} e^{-ix_1^2(\zeta - \zeta')/2k} \nu(\mathbf{x}_1, \zeta') d\zeta' =$$

$$(25)$$

$$= \frac{ik}{2} \int_0^{\zeta} \Theta(\zeta - \zeta') e^{-ix_1^2(\zeta - \zeta')/2k} \nu(\mathbf{x}_1, \zeta') d\zeta';$$

$$\varphi_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \zeta) = \frac{ik}{2} \int_0^{\zeta} \Theta(\zeta - \zeta'') e^{-i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2(\zeta - \zeta'')/2k} \nu(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \zeta'') d\zeta'', \quad (26)$$

где введена ступенчатая функция

$$\Theta(\zeta - \zeta') = \begin{cases} 1 & \text{при } \zeta' \leq \zeta; \\ 0 & \text{при } \zeta' > \zeta. \end{cases} \quad (27)$$

Подставляя (25) и (26) в (24) и меняя порядок интегрирования (это выполняется очень просто, так как, введя функции Θ , мы сделали все пределы интегрирования одинаковыми), получаем:

$$\delta\varphi_{21}(\mathbf{x}, z) = \frac{ik}{4} \int_0^z d\zeta' \int_0^z d\zeta'' \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\nu(\mathbf{x}_1, \zeta')\nu(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1, \zeta'') \times$$

$$\times e^{-(i/2k)[x^2z - x_1^2\zeta' - (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2\zeta'']} \int_0^z \Theta(\zeta-\zeta')\Theta(\zeta-\zeta'') e^{(i/k)\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta'} d\zeta. \quad (28)$$

Внутренний интеграл по ζ вычисляется следующим образом. Обозначим $\zeta_0 = \max(\zeta', \zeta'') = \zeta'\Theta(\zeta'-\zeta'') + \zeta''\Theta(\zeta''-\zeta')$. Тогда, очевидно,

$$I = \int_0^z \Theta(\zeta-\zeta')\Theta(\zeta-\zeta'') e^{(i/k)\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta} d\zeta = \int_0^z e^{(i/k)\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta} d\zeta =$$

$$= \frac{k}{i\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)} \left[e^{(i/k)\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)z} - e^{(i/k)\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta_0} \right]. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (28), найдем, что

$$\delta\varphi_{21}(\mathbf{x}, z) = \frac{k^2}{4} \int_0^z d\zeta' \int_0^z d\zeta'' \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{x}_1 \nu(\mathbf{x}_1, \zeta') \nu(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1, \zeta'') \times$$

$$\times \left\{ e^{-\frac{(i/2k)[x_1^2(z-\zeta') + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2(z-\zeta'')]}{k}} - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{(i/2k)[x_1^2(z-\zeta') + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2(z-\zeta'') + 2\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)(z-\zeta_0)]}{k}} \right\}. \quad (30)$$

Производя замену переменных $\zeta_1 = z + \zeta_1$, $\zeta_2 = z + \zeta_2$, при которой $z - \zeta_0 = z - \max(\zeta', \zeta'') = -\max(\zeta_1, \zeta_2)$, получим, обозначая $\zeta_0 = \max(\zeta_1, \zeta_2)$:

$$\delta\varphi_{21}(\mathbf{x}, z) = \frac{k^2}{4} \int_0^z d\zeta_1 \int_0^z d\zeta_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{x}_1 \nu(\mathbf{x}_1, z + \zeta_1) \nu(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1, z + \zeta_2) \times$$

$$\times \left\{ e^{\frac{(i/2k)[x_1^2\zeta_1 + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2\zeta_2]}{k}} - e^{\frac{(i/2k)[x_1^2\zeta_1 + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2\zeta_2 + 2\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta_0]}{k}} \right\}. \quad (31)$$

Подставим теперь выражение (15) в формулу (21) для $\delta\varphi_{22}$:

$$\delta\varphi_{22}(\mathbf{x}, z) = \frac{i}{8} \int_0^z d\zeta \int_0^{z-\zeta} d\zeta' \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \nu(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1, z-\zeta) \nu(\mathbf{x}_1, z-\zeta-\zeta') \times$$

$$\times e^{-(i/2k)[x^2\zeta + x_1^2\zeta']} d^2\mathbf{x}_1. \quad (32)$$

Сравнивая выражения (31), (32) и (22), убеждаемся, что $|\delta\varphi_{22}/\delta\varphi_{21}| \sim \lambda^2/k^2$ и $|\delta\varphi_{23}/\delta\varphi_{21}| \sim (kz)^{-1}$. Следовательно, при выполнении условий $\lambda_{\max} \ll k$ и $kz \gg 1$

$$|\delta\varphi_{21}| \gg |\delta\varphi_{22}|, |\delta\varphi_{23}|; \quad (33)$$

$$\delta\varphi_2(\mathbf{x}, z) \simeq \delta\varphi_{21}(\mathbf{x}, z).$$

Тот факт, что при $\lambda \ll l_0$ $|\delta\varphi_{21}|$ много больше $|\delta\varphi_{22}|$ и $|\delta\varphi_{23}|$, означает,

что в нелинейном члене $(\nabla\psi_1)^2 = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)^2$ основную роль играет „поперечный“ градиент $\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2$, а член $\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)^2$ мал по сравнению с ним.

4. Выпишем теперь выражения для поправок к спектральным плотностям логарифма амплитуды и фазы волны. Обозначая их через $\delta\varphi_a(\mathbf{x}, z)$ и $\delta\varphi_S(\mathbf{x}, z)$, получим (см. [4]):

$$\delta\varphi_a(\mathbf{x}, z) = \frac{\delta\varphi_2(\mathbf{x}, z) + \delta\varphi_2^*(-\mathbf{x}, z)}{2}; \quad \delta\varphi_S(\mathbf{x}, z) = \frac{\delta\varphi_2(\mathbf{x}, z) - \delta\varphi_2^*(-\mathbf{x}, z)}{2i}. \quad (34)$$

Записав выражение для $\delta\varphi_2^*(-\mathbf{x}, z)$, совершив в интегралах по \mathbf{x}_1 замену переменных $\mathbf{x}_1 \rightarrow -\mathbf{x}_1$ и учтем равенство $v(\mathbf{x}, z) = v^*(-\mathbf{x}, z)$, выражающее действительность поля $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$. Тогда $\delta\varphi_2^*(-\mathbf{x}, z)$ будет выражаться таким же интегралом, как (31), но с измененными знаками в экспонентах, и мы получим:

$$\delta\varphi_a(\mathbf{x}, z) = \frac{k^2}{4} \int_0^z d\zeta_1 \int_0^z d\zeta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\mathbf{x}_1, z + \zeta_1) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, z + \zeta_2) \times \\ \times \left[\cos \frac{x_1^2 \zeta_1 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 \zeta_2}{2k} - \cos \frac{x_1^2 \zeta_1 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 \zeta_2 + 2\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\zeta_0}{2k} \right] d^2x_1 = \quad (35)$$

$$= \frac{k^2}{2} \int_0^z d\zeta_1 \int_0^z d\zeta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\mathbf{x}_1, z + \zeta_1) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, z + \zeta_2) \sin \frac{\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\zeta_0}{2k} \times \\ \times \sin \frac{x_1^2 \zeta_1 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 \zeta_2 + \mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\zeta_0}{2k} d^2x_1;$$

$$\delta\varphi_S(\mathbf{x}, z) = -\frac{k^2}{2} \int_0^z d\zeta_1 \int_0^z d\zeta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(\mathbf{x}_1, z + \zeta_1) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, z + \zeta_2) \times \\ \times \sin \frac{\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\zeta_0}{2k} \cos \frac{x_1^2 \zeta_1 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 \zeta_2 + \mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\zeta_0}{2k} d^2x_1. \quad (36)$$

Прежде всего, найдем средние значения этих величин. Поскольку

$$\langle v(\mathbf{x}_1, z_1) v(\mathbf{x}_2, z_2) \rangle = F_e(\mathbf{x}_1, |z_1 - z_2|) \delta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2), \quad (37)$$

где $F_e(\mathbf{x}, \zeta)$ — двумерная спектральная плотность флуктуаций $\delta\varepsilon$ (см. [4]),

$$\langle v(\mathbf{x}_1, z + \zeta_1) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, z + \zeta_2) \rangle = \delta(\mathbf{x}) F_e(\mathbf{x}_1, |\zeta_1 - \zeta_2|). \quad (38)$$

Подставляя (38) в (35) и (36) и полагая $\mathbf{x} = 0$, получим:

$$\langle \delta\varphi_a(\mathbf{x}, z) \rangle = -\delta(\mathbf{x}) \frac{k^2}{2} \int_0^z d\zeta_1 \int_0^z d\zeta_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_e(\mathbf{x}_1, |\zeta_1 - \zeta_2|) \times \\ \times \sin \frac{x_1^2 \zeta_0}{2k} \sin \frac{x_1^2(\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_0)}{2k} d^2x_1; \quad (39)$$

$$\langle \delta \varphi_S(\mathbf{x}, z) \rangle = \delta(\mathbf{x}) \frac{k^2}{2} \int_0^z d\zeta_1 \int_0^z d\zeta_2 \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, |\zeta_1 - \zeta_2|) \times \\ \times \sin \frac{\alpha_1^2 \zeta_0}{2k} \cos \frac{\alpha_1^2 (\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_0)}{2k} d^3 x_1. \quad (40)$$

Введем новые переменные $\xi = \zeta_1 - \zeta_2$ и $\eta = (\zeta_1 + \zeta_2)/2$. Тогда $\zeta_0 = \max(\zeta_1, \zeta_2) = \eta + \frac{1}{2} |\xi|$. Учтем свойство функции $F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \xi)$, заключающееся в том, что она отлична от нуля лишь в области, где $|\mathbf{x}| |\xi| \ll 1$. В этой области $|\alpha_1^2 \xi / 2k| \ll |\alpha_1 / 2k| \ll 1$ и, следовательно, величиной $\alpha_1^2 \xi / 2k$ можно пренебрегать под знаком тригонометрических функций. Учитывая указанное свойство функции $F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \xi)$, пределы интегрирования по ξ можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$. В результате получим:

$$\langle \delta \varphi_a(\mathbf{x}, z) \rangle = -\delta(\mathbf{x}) \frac{k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 x_1 \int_0^z d\eta \sin^2 \frac{\alpha_1^2 \eta}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, |\xi|) d\xi = \\ = -\delta(\mathbf{x}) \frac{\pi}{2} k^2 z \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{k}{\alpha_1^2 z} \sin \frac{\alpha_1^2 z}{k} \right] \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1) d^2 x_1, \quad (41)$$

где

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \xi) d\xi \quad (42)$$

— трехмерный спектр (энергетический) флуктуаций $\delta\varepsilon$. Аналогично

$$\langle \delta \varphi_S(\mathbf{x}, z) \rangle = \delta(\mathbf{x}) \pi k^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 \frac{\alpha_1^2 z}{2k} \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1) \frac{d^2 x_1}{\alpha_1^2}. \quad (43)$$

Для случая статистически изотропных неоднородностей $\Phi(\mathbf{x}_1) = \Phi(\alpha_1)$ можно выполнить одно интегрирование по угловой переменной:

$$\langle \delta \varphi_a(\mathbf{x}, z) \rangle = -\delta(\mathbf{x}) \pi^2 k^2 z \int_0^\infty \left[1 - \frac{k}{\alpha_1^2 z} \sin \frac{\alpha_1^2 z}{k} \right] \Phi_\varepsilon(\alpha_1) \alpha_1 d\alpha_1; \quad (44)$$

$$\langle \delta \varphi_S(\mathbf{x}, z) \rangle = \delta(\mathbf{x}) 2\pi^2 k^3 \int_0^\infty \sin^2 \frac{\alpha_1^2 z}{2k} \Phi_\varepsilon(\alpha_1) \frac{d\alpha_1}{\alpha_1}. \quad (45)$$

Перейдем от выражений (44) и (45) к поправкам к логарифму амплитуды и фазы. Так как, согласно (7), ψ_1 является преобразованием Фурье от φ , то такие же формулы справедливы и для логарифма амплитуды и фазы волны:

$$\left\langle \delta \ln \frac{A}{A_0} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x_1 x + \gamma_2 y)} \langle \delta \varphi_a(\mathbf{x}, z) \rangle d^2 x_1,$$

$$\left\langle \delta \ln \frac{A}{A_0} \right\rangle = -\pi^2 k^2 z \int_0^\infty \left[1 - \frac{k}{x_1^2 z} \sin \frac{x_1^2 z}{k} \right] \Phi_\varepsilon(x_1) x_1 dx_1. \quad (46)$$

Теперь заметим, что в первом приближении метода плавных возмущений имеет место формула [4]:

$$\chi^2 \equiv \left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)_1^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \pi^2 k^2 z \int_0^\infty \left[1 - \frac{k}{x_1^2 z} \sin \frac{x_1^2 z}{k} \right] \Phi_\varepsilon(x_1) x_1 dx_1, \quad (47)$$

где индекс 1 при $\left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2$ указывает, что эта величина вычислена в первом приближении. Подставляя (47) в (46), получим:

$$\left\langle \delta \ln \frac{A}{A_0} \right\rangle = -2\chi^2(z) \quad (48)$$

или

$$\langle \ln A \rangle = \ln A_0 - 2\chi^2(z) + \dots \quad (48a)$$

Это соотношение не зависит от вида спектральной плотности флуктуаций. Оно описывает убывание амплитуды регулярной (предсказуемой) компоненты волнового поля за счет перекачки энергии во флюктуационную компоненту поля.

Аналогичным образом из (45) следует, что среднее значение дополнительного набега фазы равно

$$\langle \delta S \rangle = 2\pi^2 k^3 \int_0^\infty \sin^2 \frac{x_1^2 z}{2k} \Phi_\varepsilon(x_1) \frac{dx_1}{x_1}. \quad (49)$$

Поскольку $\Phi \geq 0$, то, очевидно, $\langle \delta S \rangle \geq 0$, т. е. за счет нелинейных поправок фаза волны увеличивается. Эквивалентное выражение для оптического пути имеет вид:

$$\langle L_{\text{опт}} \rangle = z + 2\pi^2 k^2 \int_0^\infty \sin^2 \frac{x_1^2 z}{2k} \Phi_\varepsilon(x_1) \frac{dx_1}{x_1}. \quad (50)$$

Заметим, что интеграл (49) сходится и в том случае, если спектр неоднородностей имеет в нуле особенность типа $\Phi_\varepsilon(x) \sim x^{-(\mu+3)}$, где $\mu < 1$. Это означает, что вклад в $\langle \delta S \rangle$ крупномасштабных неоднородностей исчезающе мал, в то время как их вклад в спектр флуктуаций фазы в первом приближении метода является определяющим.

В качестве примера мы рассмотрим спектр неоднородностей

$$\Phi_\varepsilon(x) = A x^{-(\mu+3)}, \quad (51)$$

соответствующий структурной функции $\delta\varepsilon$ вида

$$\langle [\delta\varepsilon(\mathbf{r}_1) - \delta\varepsilon(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle = C_\varepsilon^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^\mu, \quad (52)$$

где

$$C_\varepsilon^2 = A 4\pi^2 / \Gamma(\mu + 2) \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right).$$

Спектры реальных неоднородностей при $|x| < \frac{2\pi}{L_0}$ (L_0 — внешний масштаб турбулентности) имеют „насыщение“. Однако в случае, если

при $\chi \sim \frac{2\pi}{L_0}$ величина $\frac{\chi^2 z}{2k} = \frac{2\pi^2 z}{kL_0^2} \ll 1$, то за счет обращения в нуль подинтегральных весовых функций в (47) и (49) это насыщение не сказывается на величине интегралов. В этом случае $\left\langle \delta \ln \frac{A}{A_0} \right\rangle$ и $\langle \delta S \rangle$ от L_0 не зависят и расчет можно провести для спектра (51). Воспользовавшись формулой (48) и расчетами, содержащимися в работе [8], где для спектра (51) и $z=L$ получена формула

$$\chi^2 = \left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)_1^2 \right\rangle = A(\mu) C_\varepsilon^2 k^{(3-\mu)/2} L^{(3+\mu)/2}, \quad (53)$$

найдем:

$$\langle \ln A \rangle = \ln A_0 - 2A(\mu) C_\varepsilon^2 k^{\frac{3-\mu}{2}} L^{\frac{3+\mu}{2}}, \quad (54)$$

где

$$A(\mu) = \pi \Gamma(\mu + 2) \sin \frac{\pi \mu}{2} / 8 \Gamma\left(\frac{\mu+5}{2}\right) \cos[\pi(1-\mu)/4].$$

Вычисляя интеграл (49) для спектра (51), найдем:

$$\langle \delta S \rangle = B(\mu) k^{\frac{3-\mu}{2}} L^{\frac{3+\mu}{2}} C_\varepsilon^2, \quad (55)$$

где

$$B(\mu) = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi(1-\mu)}{4} A(\mu) = N(\mu) A(\mu).$$

Таким образом, для степенных спектров

$$\langle \delta S \rangle = N \chi^2 \quad (56)$$

и разложение среднего значения фазы имеет вид:

$$\langle S \rangle = kL + N \chi^2(L) + \dots \quad (57)$$

Формулы (48а) и (57) дают первые члены разложений средних значений логарифма амплитуды и набега фазы в ряд. Если мы потребуем, чтобы нелинейные поправки были малы по сравнению с основным членом (для амплитуды) и по сравнению с 2π для фазы, то получим одно и то же условие

$$\chi^2 = \left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)^2 \right\rangle \ll 1. \quad (58)$$

Заметим, что поправка к среднему значению фазы $\langle \delta S \rangle$ зависит лишь от координаты z . Поэтому в том случае, если мы интересуемся лишь разностями фаз в двух точках плоскости $z = \text{const}$, перпендикулярной лучу, то $\langle \delta S \rangle$ выпадает из этой разности и условие $\chi^2 \ll 1$ оказывается несущественным для разности фаз (см. ниже формулу (96)).

Заметим, что для некоторых видов спектра соотношение (56) нарушается. Например, если $\Phi_\varepsilon(x) = \langle \delta \varepsilon^2 \rangle a^3 \exp[-x^2 a^2/4]/8\pi \sqrt{\pi}$, что соответствует гауссовой корреляционной функции $B(r) = \langle \delta \varepsilon^2 \rangle e^{-r^2/a^2}$, то

$$\langle \delta S \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \langle \delta \varepsilon^2 \rangle (ka)^3 \ln \sqrt{1 + (4z/ka^2)^2},$$

т. е. в этом случае $\langle \delta S \rangle$ растет с расстоянием медленнее, чем

$$\left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)_1^2 \right\rangle.$$

5. Рассмотрим теперь поправки к спектральным плотностям флюктуаций фазы и амплитуды. Мы вычислим величины

$$A = \langle \delta\varphi_a(\mathbf{x}, z)\delta\varphi_a(\mathbf{x}', z) \rangle - \langle \delta\varphi_a(\mathbf{x}, z) \rangle \langle \delta\varphi_a(\mathbf{x}', z) \rangle; \quad (59)$$

$$B = \langle \delta\varphi_S(\mathbf{x}, z)\delta\varphi_S(\mathbf{x}', z) \rangle - \langle \delta\varphi_S(\mathbf{x}, z) \rangle \langle \delta\varphi_S(\mathbf{x}', z) \rangle, \quad (60)$$

которые связаны с поправками к двумерным спектральным плотностям флюктуаций фазы и амплитуды соотношениями:

$$A = \delta(\mathbf{x}+\mathbf{x}')\delta F_a(\mathbf{x}, 0); \quad B = \delta(\mathbf{x}+\mathbf{x}')\delta F_S(\mathbf{x}, 0). \quad (61)$$

При вычислении этих величин нам потребуются выражения для четвертых моментов поля v . Предположим, что спектральная плотность флюктуаций $\delta\varepsilon$ является гауссовым случайным полем. Это означает, в частности, что его четвертые моменты выражаются через вторые при помощи формулы

$$\begin{aligned} & \langle v(\mathbf{x}_1, z_1) v(\mathbf{x}_2, z_2) v(\mathbf{x}_3, z_3) v(\mathbf{x}_4, z_4) \rangle = \\ & = \langle v(\mathbf{x}_1, z_1) v(\mathbf{x}_2, z_2) \rangle \langle v(\mathbf{x}_3, z_3) v(\mathbf{x}_4, z_4) \rangle + \\ & + \langle v(\mathbf{x}_1, z_1) v(\mathbf{x}_3, z_3) \rangle \langle v(\mathbf{x}_2, z_2) v(\mathbf{x}_4, z_4) \rangle + \\ & + \langle v(\mathbf{x}_1, z_1) v(\mathbf{x}_4, z_4) \rangle \langle v(\mathbf{x}_2, z_2) v(\mathbf{x}_3, z_3) \rangle, \end{aligned} \quad (62)$$

а третьи моменты равны нулю. Подставив выражение (35) в (59), используя (37), будем иметь:

$$\begin{aligned} A = & \frac{k^4}{4} \int_0^z d\zeta_1 \int_0^z d\zeta_2 \int_0^z d\zeta'_1 \int_0^z d\zeta'_2 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{x}_1 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{x}'_1 \sin \frac{\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta_0}{2k} \times \\ & \times \sin \frac{\mathbf{x}'_1(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_1)\zeta'_0}{2k} \sin \frac{\mathbf{x}_1^2\zeta_1 + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2\zeta_2 + \mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta_0}{2k} \times \\ & \times \sin \frac{\mathbf{x}'_1{}^2\zeta'_1 + (\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_1)^2\zeta'_2 + \mathbf{x}'_1(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_1)\zeta'_0}{2k} \times \\ & \times [F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \zeta_1-\zeta'_1) F_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1, \zeta_2-\zeta'_2) \delta(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}'_1) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1+\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_1) + \\ & + F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \zeta_1-\zeta'_2) F_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1, \zeta_2-\zeta'_1) \delta(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}'-\mathbf{x}'_1) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1+\mathbf{x}'_1)]. \end{aligned} \quad (63)$$

Выполняя интегрирование по \mathbf{x}'_1 и меняя в интеграле, связанном со вторым слагаемым, $\zeta'_2 \leftrightarrow \zeta'_1$, получим два одинаковых интеграла. Учитывая (61), найдем:

$$\begin{aligned} \delta F_a(\mathbf{x}, 0) = & \frac{k^4}{2} \int_0^z d\zeta_1 \int_0^z d\zeta_2 \int_0^z d\zeta'_1 \int_0^z d\zeta'_2 \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\mathbf{x}_1 \sin \frac{\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta_0}{2k} \times \\ & \times \sin \frac{\mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta'_0}{2k} \sin \frac{\mathbf{x}_1^2\zeta_1 + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2\zeta_2 + \mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta_0}{2k} \times \\ & \times \sin \frac{\mathbf{x}_1^2\zeta'_1 + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)^2\zeta'_2 + \mathbf{x}_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\zeta'_0}{2k} F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \zeta_1-\zeta'_1) F_\varepsilon(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1, \zeta_2-\zeta'_2). \end{aligned} \quad (64)$$

Введем новые переменные интегрирования

$$\begin{aligned} \zeta_1 - \zeta'_1 &= \xi_1; & \zeta_1 &= \eta_1 + \frac{1}{2} \xi_1; \\ \zeta_1 + \zeta'_1 &= 2\eta_1; & \zeta'_1 &= \eta_1 - \frac{1}{2} \xi_1; \\ \zeta_2 - \zeta'_2 &= \xi_2; & \zeta_2 &= \eta_2 + \frac{1}{2} \xi_2; \\ \zeta_2 + \zeta'_2 &= 2\eta_2; & \zeta'_2 &= \eta_2 - \frac{1}{2} \xi_2. \end{aligned}$$

Так как под знаком интеграла в (64) стоят функции $F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \xi_1)$ и $F_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \xi_2)$, то в области, где эти функции отличны от нуля, $x_1 \xi_1 \ll 1$ и $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| \xi_2 \ll 1$. Следовательно, под знаком тригонометрических функций можно пренебречь величинами $x_1^2 \xi_1 / 2k$, $\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \xi_1 / 2k$, $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 \xi_2 / 2k$, $\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \xi_2 / 2k$ ввиду неравенств $x/k \ll 1$.

Выразим также ζ_0 и ζ'_0 через новые переменные:

$$\zeta_0 = \max(\zeta_1, \zeta_2) = \max\left(\eta_1 + \frac{1}{2} \xi_1, \eta_2 + \frac{1}{2} \xi_2\right).$$

Так как ζ_0 входит лишь в виде $\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\zeta_0/2k$, то в ζ_0 можно пренебречь членами $\xi_1/2$, $\xi_2/2$ и $\zeta_0 \approx \max(\eta_1, \eta_2)$. Точно так же $\zeta'_0 \approx \max(\eta_1, \eta_2)$, т. е. $\zeta_0 \approx \zeta'_0$.

Учитывая свойства функций $F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \xi_1)$, $F_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \xi_2)$, распространим интегрирование по ξ_1, ξ_2 на пределы $(-\infty, \infty)$. В результате всех преобразований получим:

$$\begin{aligned} \delta F_a(\mathbf{x}, 0) &= \frac{k^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 F_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \xi_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 F_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \xi_2) \times \\ &\times \int_0^z d\eta_1 \int_0^z d\eta_2 \sin^2 \frac{\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \max(\eta_1, \eta_2)}{2k} \times \\ &\times \sin \frac{x_1^2 \eta_1 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 \eta_2 + \mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \max(\eta_1, \eta_2)}{2k}. \end{aligned} \quad (65)$$

С учетом (42)

$$\delta F_a(\mathbf{x}, 0) = 2\pi^2 k^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d^2 x_1 \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) X_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1), \quad (66)$$

где через X_a обозначена функция

$$\begin{aligned} X_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \int_0^z d\eta_1 \int_0^z d\eta_2 \sin^2 \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \max(\eta_1, \eta_2)}{2k} \sin^2 \frac{x_1^2 \eta_1 + x_2^2 \eta_2 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \max(\eta_1, \eta_2)}{2k} = \\ &= z^2 \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \sin^2 \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 z \max(t_1, t_2)}{2k} \sin^2 \frac{z}{2k} [x_1^2 t_1 + x_2^2 t_2 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \max(t_1, t_2)]. \end{aligned} \quad (67)$$

Выражение, аналогичное (66), имеет место и для поправки к спектру фазы волны:

$$\delta F_S(\mathbf{x}, 0) = 2\pi^2 k^4 \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{x}_1 \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) X_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1), \quad (68)$$

где

$$X_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = z^2 \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \sin^2 \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 z \max(t_1, t_2)}{2k} \times \\ \times \cos^2 \frac{z}{2k} [x_1^2 t_1 + x_2^2 t_2 + \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \max(t_1, t_2)]. \quad (69)$$

Произведя в (67) и (69) интегрирование, можно получить формулу

$$X_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \frac{z^2}{4} \tilde{X}_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1), \quad (70)$$

где \tilde{X}_S имеет вид (введено обозначение $\varphi(x) = \sin x/x$):

$$\tilde{X}_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \left[1 - 2\varphi\left(\frac{\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)z}{k}\right) + \varphi^2\left(\frac{\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)z}{2k}\right) \right] \pm \\ \pm \frac{x^2 - 2\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{4x_1^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2} \left[(x_1^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2) \varphi^2\left(\frac{x_1^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2}{2k} z\right) + \right. \\ \left. + x^2 \varphi^2\left(\frac{x^2 z}{2k}\right) - 2(x^2 - \mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)) \varphi^2\left(\frac{x^2 - \mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{2k} z\right) \right] \mp \\ \mp \frac{1}{4} \left[\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2}{x_1^2} \varphi^2\left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 z}{2k}\right) + \frac{x_1^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2} \varphi^2\left(\frac{x_1^2 z}{2k}\right) \right] \mp \\ \mp \frac{1}{4} \left[\frac{2\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + x_1^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2} \varphi^2\left(\frac{2\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + x_1^2}{2k} z\right) + \right. \\ \left. + \frac{2\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2}{x_1^2} \varphi^2\left(\frac{2\mathbf{x}_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2}{2k} z\right) \right] \pm \\ \pm \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{x} \mathbf{x}_1}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2} \varphi^2\left(\frac{\mathbf{x} \mathbf{x}_1 z}{2k}\right) + \frac{\mathbf{x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{x_1^2} \varphi^2\left(\frac{\mathbf{x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) z}{2k}\right) \right]. \quad (71)$$

В (71) каждая группа членов в квадратных скобках симметрична по $\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$. Из выражений (67), (69) видно, что при $|\mathbf{x}_1| \rightarrow 0$ $X_S \sim (\mathbf{x} \mathbf{x}_1)^2$, а при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| \rightarrow 0$ $X_S \sim [\mathbf{x}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)]^2$. При $x_1 \rightarrow \infty$ $\tilde{X} \rightarrow 1$, что следует из (71).

6. Рассмотрим теперь поправки к среднему квадрату флюктуаций логарифма амплитуды и к структурной функции фазы волны. Пусть $\delta\chi^2$ — поправка второго приближения к $\chi^2 = \left\langle \left(\ln \frac{A}{A_0} \right)_1^2 \right\rangle$. Тогда (см. [4])

$$\delta\chi^2 = 2\pi \int_0^\infty x \delta F_a(\mathbf{x}, 0) dx. \quad (72)$$

Рассмотрим случай статистически изотропных неоднородностей,

когда $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \Phi_\varepsilon(|\mathbf{x}|)$. В этом случае $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \Phi_\varepsilon(\sqrt{x^2 + x_1^2 - 2xx_1 \cos \varphi})$, где φ — угол между \mathbf{x} и \mathbf{x}_1 . Вводя в (66) полярные координаты по \mathbf{x}_1 с полярной осью по вектору \mathbf{x} , получим:

$$\delta F_a(\mathbf{x}, 0) = \frac{\pi^2}{2} k^4 z^2 \int_0^\infty x_1 dx_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi_\varepsilon(x_1) \Phi_\varepsilon(\sqrt{x^2 + x_1^2 - 2xx_1 \cos \varphi}) \tilde{X}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1). \quad (73)$$

Подставляя (73) в (72), найдем:

$$\delta \chi^2 = \pi^3 k^4 z^2 \int_0^\infty x dx \int_0^\infty x_1 dx_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi_\varepsilon(x_1) \Phi_\varepsilon(\sqrt{x^2 + x_1^2 - 2xx_1 \cos \varphi}) \tilde{X}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1).$$

Рассмотрим случай степенного спектра (51). Тогда

$$\delta \chi^2 = \pi^3 k^4 z^2 A^2 \int_0^\infty x dx \int_0^\infty x_1 dx_1 \int_0^{2\pi} d\varphi x_1^{-(\mu+3)} (x^2 + x_1^2 - 2xx_1 \cos \varphi)^{-\frac{\mu+3}{2}} \tilde{X}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1). \quad (74)$$

Прежде всего исследуем сходимость интеграла. В точке $x_1 = 0$ $\tilde{X}_a \sim x_1^2$ и подынтегральное выражение имеет вид $x_1^{-\mu}$. Следовательно, в точке $x_1 = 0$ интеграл сходится при $\mu < 1$. Ввиду симметрии то же будет и в точке $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ ($x_1 = x$, $\varphi = 0$). Следовательно, крупномасштабные составляющие не играют существенной роли при вычислении $\delta \chi^2$. На бесконечности сходимость интеграла при всех возможных значениях $0 < \mu < 1$ обеспечена.

Как ясно из интегрального представления (67) (или из (71)), \tilde{X}_a можно представить в виде:

$$\tilde{X}_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = Q_a \left(\frac{x^2 z}{2k}, \frac{x_1^2 z}{2k}, \frac{xx_1 z \cos \varphi}{2k} \right). \quad (75)$$

Произведем в (74) замену переменных, положив

$$x = \sqrt{\frac{2k}{z}} p \cos \theta; \quad x_1 = \sqrt{\frac{2k}{z}} p \sin \theta \quad (76)$$

$$(0 < p < \infty; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2).$$

Тогда (74) превращается в

$$\delta \chi^2 = \frac{\pi^3 M}{2^{\mu+1}} k^{3-\mu} z^{3+\mu} A^2, \quad (77)$$

где через $M(\mu)$ обозначена численная константа, зависящая лишь от μ :

$$M(\mu) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{(\sin \theta)^{\mu+2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - \sin(2\theta) \cos \varphi)^{(\mu+3)/2}} \int_0^\infty p^{-(2\mu+3)} \times \quad (78)$$

$$\times Q_a \left[p^2 \cos^2 \theta; \quad p^2 \sin^2 \theta; \quad \frac{1}{2} p^2 \sin(2\theta) \cos \varphi \right] dp.$$

Сходимость интеграла (78) была обоснована выше. Сравним выражение (77) с формулой (53) для χ^2 . Ясно, что

$$\delta \chi^2 = a(\mu)(\chi^2)^2, \quad (79)$$

где

$$a(\mu) = \frac{\pi^3 M_a}{2^{\mu+1}} \left[\frac{\Gamma(\mu + 2) \sin(\pi\mu/2)}{4\pi^2 A(\mu)} \right]^2 \quad (80)$$

—константа, зависящая от μ . Таким образом, поправка второго приближения пропорциональна квадрату основного члена и

$$\langle [\ln A - \langle \ln A \rangle]^2 \rangle = \chi^2(L) + a(\mu)[\chi^2(L)]^2 + \dots \quad (81)$$

В случае, когда для флуктуаций $\delta\varepsilon$ справедлив „закон 2/3“, $\chi^2(L) \cong \cong 0,08 C_\varepsilon^2 k^{7/6} L^{11/6}$ и поправка растет с расстоянием как $L^{11/3}$.

Перейдем теперь к поправкам к структурной функции фазы. Воспользуемся соотношением [4]

$$\delta D_S(\rho) = 4\pi \int_0^\infty [1 - J_0(x\rho)] \delta F_S(x, 0) x dx. \quad (82)$$

Подставляя в него (68) (где введены полярные координаты по \mathbf{x}_1 и использовано выражение (51) для спектра), получим:

$$\delta D_S(\rho) = 2\pi^3 k^4 z^2 A^2 \int_0^\infty [1 - J_0(x\rho)] x dx \int_0^\infty x_1 dx_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \times \quad (83)$$

$$\times x_1^{-(\mu+3)} (x^2 + x_1^2 - 2xx_1 \cos \varphi)^{-\frac{\mu+3}{2}} Q_S \left(\frac{x^2 z}{2k}, \frac{x_1^2 z}{2k}, \frac{xx_1 \cos \varphi z}{2k} \right).$$

Здесь

$$Q_S \left(\frac{x^2 z}{2k}, \frac{x_1^2 z}{2k}, \frac{xx_1 \cos \varphi z}{2k} \right) = \tilde{X}_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1). \quad (84)$$

Введем, как и выше, новые переменные ρ , θ согласно (76). Тогда

$$\delta D_S(\rho) = \frac{\pi^3}{2^\mu} k^{3-\mu} z^{3+\mu} A^2 W \left(\sqrt{\frac{2k\rho^2}{z}} \right), \quad (85)$$

где

$$W(R) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{(\sin \theta)^{\mu+2}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 - \sin(2\theta)\cos\varphi)^{\frac{\mu+3}{2}}} \int_0^\infty p^{-(2\mu+3)} \times \quad (86)$$

$$\times Q_S \left(p^2 \cos^2 \theta, p^2 \sin^2 \theta, \frac{p^2 \sin(2\theta) \cos \varphi}{2} \right) [1 - J_0(Rp \cos \theta)] dp$$

$$\left(R = \sqrt{\frac{2k\rho^2}{z}} \right).$$

Нас будет интересовать асимптотика (86) при $R \gg 1$ (т. е. $\rho \gg \sqrt{\lambda z}$). Интеграл по ρ в (86) представляется линейной комбинацией интегралов типа

$$p_\mu(R) = \int_0^\infty [1 - J_0(Rp \cos \theta)] \frac{\sin^2[p^2 f(\theta, \varphi)]}{p^{2\mu+7}} dp. \quad (87)$$

Заметим, что (87) сходится лишь при $-3 < \mu < 0$, в то время как нас интересуют значения $0 < \mu < 1$, при которых (86) сходится и имеет

физический смысл. Однако можно пользоваться выражениями типа (87), так как в их линейной комбинации, входящей в (87), особенность при $\mu=0$ исчезает, и возможно аналитическое продолжение по μ (см. [9]).

Интеграл (87) может быть вычислен при помощи формулы*

$$\int_0^{\infty} J_0(A\chi) e^{-\lambda^2 \chi^2} \frac{d\chi}{\chi^{2\mu+7}} = \frac{1}{2} \lambda^{2(\mu+3)} \Gamma(-\mu-3) {}_1F_1\left(-\mu-3, 1, -\frac{A^2}{4\lambda^2}\right)$$

(${}_1F_1$ —вырожденная гипергеометрическая функция) и принципа аналитического продолжения [9]:

$$p_\mu(R) = \frac{\Gamma(-\mu-3)}{4} \left\{ f^{\mu+3} \operatorname{Re} \left[e^{\frac{i\pi(\mu+3)}{2}} {}_1F_1\left(-\mu-3, 1, \frac{iA^2}{4f}\right) \right] - \left(\frac{A}{2}\right)^{2(\mu+3)} \frac{1}{\Gamma(\mu+4)} - f^{\mu+3} \cos \frac{\pi(\mu+3)}{2} \right\} \quad (88)$$

$$(A = R \cos \theta).$$

Нас интересует случай $R \gg 1$. Воспользуемся асимптотическим разложением функции ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ при $|z| \gg 1$, приведенным в [11]:

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} G(\alpha, \alpha-\gamma+1, -z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{zz^2-\gamma} G(\gamma-\alpha, 1-\alpha, z), \quad (89)$$

где

$$G(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\gamma}{1!z} + \frac{\alpha(\alpha+1)\gamma(\gamma+1)}{2!z^2} + \dots$$

Так как в нашем случае $\alpha = -\mu-3 < 0$, то основное значение имеет первый член в (89) и

$${}_1F_1\left(-\mu-3, 1, \frac{iA^2}{4f}\right) \approx \frac{1}{\Gamma(\mu+4)} \left(-\frac{iA^2}{4f}\right)^{\mu+3} \left[1 - \frac{4i(\mu+3)f}{A^2} - \frac{16(\mu+2)(\mu+3)f^2}{A^4} + \dots \right]. \quad (90)$$

Подставляя (90) в (88) и оставляя первый неисчезающий (по степеням A) член, соответствующий третьему члену в (90), найдем:

$$p_\mu(R) = \operatorname{const}(\mu) A^{2(\mu+1)} f^2 \sim R^{2(\mu+1)} = \left(\frac{2k\rho^2}{z}\right)^{\mu+1}. \quad (91)$$

Подставляя (91) в (86), получим, что при $R \gg 1$

$$W(R) \approx M_S(\mu) R^{2(\mu+1)}, \quad (92)$$

где $M_S(\mu)$ —численная константа. Подставляя (92) в (85), получим при $\rho \gg \sqrt{i}z$:

$$\delta D_S(\rho) \approx 2\pi^3 M_S(\mu) k^4 z^2 A^2 \rho^{2(\mu+1)}. \quad (93)$$

Поскольку, согласно [8], в первом приближении метода плавных возмущений

$$[D_S(\rho)]_1 = B_1(\mu) k^2 z A \rho^{\mu+1}, \quad (94)$$

* См. [10], где эта формула приведена, однако с опечаткой.

где

$$B_1(\mu) = \frac{4\pi^2 \sqrt{\pi} \Gamma(1+\mu/2)}{\Gamma(\mu+2) \Gamma\left(\frac{\mu+3}{2}\right) \cos(\pi\mu/2)},$$

то из сопоставления (93) и (94) следует, что

$$\delta D_S(\rho) = \frac{2\pi^3 M_S(\mu)}{[B_1(\mu)]^2} [D_S(\rho)]_1^2; \quad (95)$$

$$D_S(\rho) = [D_S(\rho)]_1 + \frac{2\pi^3 M_S}{B_1^2} [D_S(\rho)]_1^2 + \dots \quad (96)$$

В случае $\mu=2/3$, отвечающем колмогоровской схеме турбулентности,

$$D_S(\rho) \simeq 0,75 C_\epsilon^2 k^2 L \rho^{5/3}.$$

7. Пусть при помощи интерферометра с базой ρ измеряется угол прихода α . Очевидно, что флуктуации α в случае, если база интерферометра перпендикулярна направлению на источник, связаны с $D_S(\rho)$ соотношением

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{D_S(\rho)}{k^2 \rho^2} = \frac{[D_S(\rho)]_1}{k^2 \rho^2} + \frac{2\pi^3 M_S}{B_1^2} k^2 \rho^2 \left[\frac{D_S(\rho)}{k^2 \rho^2} \right]_1^2 + \dots \quad (97)$$

или

$$\langle \alpha^2 \rangle = \langle \alpha_1^2 \rangle + \frac{2\pi^3 M_S}{B_1^2} k^2 \rho^2 [\langle \alpha_1^2 \rangle]^2 + \dots, \quad (98)$$

где $\langle \alpha_1^2 \rangle$ — флуктуации угла прихода, вычисленные в первом приближении. Выпишем условие, при котором поправка в (98) мала по сравнению с основным членом:

$$k^2 \rho^2 \langle \alpha_1^2 \rangle \ll 1$$

или

$$\langle \sigma_1^2 \rangle \ll \frac{1}{k^2 \rho^2} = \gamma^2. \quad (99)$$

Величина $\gamma=1/k\rho$ — ширина диаграммы направленности лепестка интерферометра (или угловая ширина дифракционной картины от объектива телескопа). Условие (99) означает, что нелинейными поправками для фазовых флуктуаций можно пренебречь, если флуктуации угла прихода малы по сравнению с шириной диаграммы направленности приемника.

Сравним расстояния, на которых поправки к флуктуациям амплитуды или разности фаз становятся существенными. Как следует из формул (81) и (96), эти расстояния (L_1 для амплитуды и L_2 для фазы) можно определить как корни уравнений

$$\chi^2(L_1) = 1; \quad D_S(\rho, L_2) = 1 \quad (100)$$

или

$$0,08 C_\epsilon^2 k^{7/6} L_1^{11/6} = 1; \quad 0,75 C_\epsilon^2 L_2 k^2 \rho^{5/3} = 1.$$

Следовательно,

$$L_1 \simeq \frac{3}{C_\epsilon^{12/11} k^{7/11}}; \quad L_2 \simeq \frac{1,3}{C_\epsilon^2 k^2 \rho^{5/3}}. \quad (101)$$

Из (101) видно, что прежде всего в структурной функции фазы поправки становятся существенными в области больших масштабов (для больших ρ L_2 —наименьшее).

Рассмотрим отношение L_1/L_2 ; подставляя (101), получим:

$$\frac{L_1}{L_2} = \text{const} (C_e^2 \rho^{2/3})^{5/11} (k\rho)^{15/11}. \quad (102)$$

В зависимости от соотношения безразмерных параметров $C_e^2 \rho^{2/3}$ и $k\rho$ могут осуществляться как случай $L_1 \ll L_2$, так и $L_1 \gg L_2$. Пусть, например, $C_e = 10^{-8} \text{ см}^{-1/3}$ (типичное тропосферное значение), $\rho = 10^3 \text{ см}$ (диаметр объектива телескопа), $k = 10^5 \text{ см}^{-1}$ (свет). Тогда $L_1/L_2 \approx 600$, т. е. область применимости первого приближения для флюктуаций амплитуды света намного шире, чем для фазы (в этом случае $L_1 \approx 1 \text{ км}$). В случае же радиоволн сантиметрового диапазона ($k = 2 \text{ см}^{-1}$), когда $\rho = 20 \text{ м}$ (диаметр зеркала радиотелескопа) и $C_e = 10^{-8} \text{ см}^{-1/3}$, $L_1/L_2 = 4 \cdot 10^{-2}$, т. е. область применимости первого приближения для флюктуаций фазы намного шире области применимости для флюктуаций амплитуды. В последнем примере

$$L_2 \approx 10^4 \text{ км}, \quad L_1 \approx 300 \text{ км}.$$

Таким образом, первое приближение метода плавных возмущений вполне пригодно для расчетов флюктуаций радиоволн в тропосфере, но, по-видимому, нуждается в уточнениях применительно к флюктуациям разности фаз света.

Заметим, что ограничение (58), полученное выше для среднего значения фазы волны, не является необходимым для применения к флюктуациям разности фаз, поскольку при одинаковых расстояниях точек наблюдения от источника дополнительный набег фазы за счет нелинейности выпадает из рассматриваемой разности фаз.

В заключение сформулируем основные выводы относительно границ применимости метода плавных возмущений.

1) Поправки второго порядка к различным параметрам волны становятся существенными на различных расстояниях от источника излучения.

2) Поправки к средним значениям фазы и амплитуды, а также к среднему квадрату флюктуаций амплитуды несущественны, если мал средний квадрат флюктуаций амплитуды, вычисленный в первом приближении (независимо от величины флюктуаций разности фаз, которая может быть и не малой).

3) Поправка к среднему квадрату флюктуаций разности фаз, вычисленному в первом приближении D_{S1} , мала, если $D_{S1} \ll \pi$ (независимо от величины флюктуаций амплитуды и среднего набега фазы, которые могут и не быть малыми). При измерениях флюктуаций угла прихода это условие эквивалентно условию малости флюктуаций угла прихода по сравнению с шириной диаграммы направленности антенны.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 С. М. Рытов, Изв. АН СССР, сер. физ., 2, 223 (1937).
- 2 А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геофиз., 2, 155 (1953).
- 3 Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
- 4 В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.

5. В. В. Писарева, Акустич. ж., **6**, 87 (1960).
6. Т. А. Широкова, Акустич. ж., **5**, 485 (1959).
7. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
8. В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 551 (1960).
9. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958.
10. Рыжик и Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М., 1951.
11. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Гостехиздат, М., 1948, стр 557.

Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию
16 октября 1961 г.

SECOND APPROXIMATION IN THE PROBLEM OF WAVE PROPAGATION IN MEDIA WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

V. I. Tatarsky

The second approximation is considered of „smooth perturbation“ method being applied for solving the problem of short waves propagation in media with random inhomogeneities. The second order corrections have been found (in small non-linear terms) to mean values, spectra and correlation functions of wave amplitude and phase. On the basis of these solutions the region of validity of the „smooth perturbation“ method is investigated.

ВОЗДЕЙСТВИЕ ДЕФЕКТОВ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ И ФОРМУ ЛИНИЙ ЯДЕРНОГО КВАДРУПОЛЬНОГО РЕЗОНАНСА В КРИСТАЛЛАХ

В. С. Гречишкин, Г. Б. Сойфер

Изучено воздействие рентгеновского излучения и γ -лучей Co^{60} на интенсивность и ширину линий ядерного квадрупольного резонанса в кристаллах. Разработана схема сверхрегенератора с самогашением для наблюдения резонансов брома в диапазоне частот $200 \div 300$ мГц. Наблюдалось сильное влияние неоднородности облучения образцов, а также зависимость погрешности измерений от режима сверхрегенератора. Обнаружено частичное восстановление интенсивности сигналов через некоторое время после облучения. При исследовании твердых растворов нескольких веществ в $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Br}_2$ отмечено изменение интегральной интенсивности линий ядерного квадрупольного резонанса с увеличением концентрации примеси. Эксперименты с примесями распространены на монокристаллы.

Метод ядерного квадрупольного резонанса (якр) оказался весьма эффективным при изучении реального кристалла. Воздействие примесей и ионизирующих излучений на ширину и интенсивность линий якр исследовалось в ряде работ [1-5]. Дрейфус [5] изучил твердые растворы $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$, $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{J}_2$ и $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{ClBr}$ в $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Br}_2$. В этой работе подробно обсуждаются динамические и статические эффекты, вызываемые примесями в решетке молекулярного кристалла. В противоположность Сегелю и Лютцу [3] Дрейфус наблюдал изменение интегральной интенсивности линий якр с увеличением концентрации примеси.

В подобного рода экспериментах обычно приходится измерять интенсивность линий и их ширину; поэтому даже незначительные недостатки регистрирующего прибора могут привести к большому разбросу результатов измерений. При изучении же воздействия ионизирующих излучений существенное влияние может оказать и неоднородность облучения образца. Отметим, что различные авторы, как правило, очень скупко сообщают о методике приготовления образцов; в связи с различиями в способах изготовления образцов не приходится удивляться противоречивости результатов. В настоящей работе на значительном количестве образцов мы попытались выяснить возможности метода и произвели измерения при минимально возможных ошибках. Подобные измерения, кроме того, впервые проделаны на монокристаллах.

Заметим, что дефектность кристаллической решетки мы создавали либо путем воздействия ионизирующих излучений, либо путем внедрения примесей, что позволяет изменять концентрацию дефектов.

1. МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Для наблюдения якр применялся спектрометр с записью первой, второй и третьей производной линии поглощения [6,7]. В диапазоне от 10 до 60 мГц использовался как сверхрегенератор с самогашением, так и регенератор. Следует отметить, что регенератор позволяет по-

лучить более точные результаты, но в силу плохой чувствительности он становится непригодным, если объем образца мал.

Для обнаружения резонансов брома (диапазон частот $200 \div 300$ мГц) была разработана простая схема сверхрегенератора с самогашением, приведенная на рис. 1. В качестве резонансной системы применена

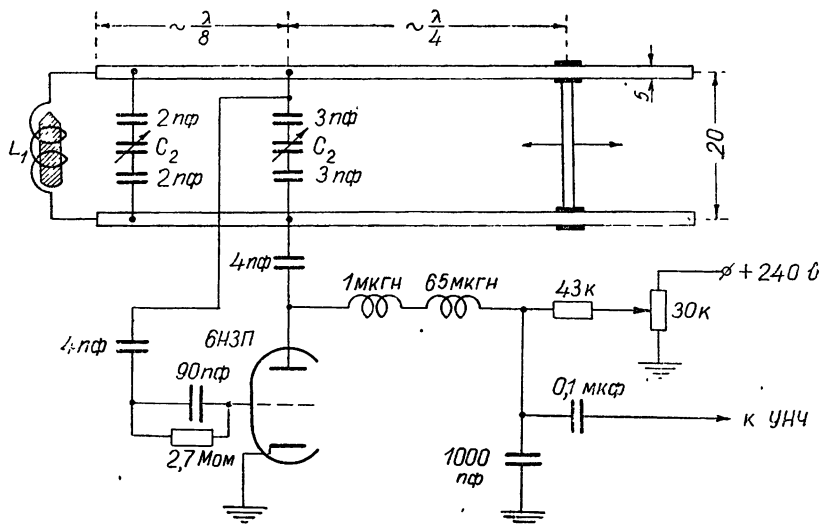


Рис. 1. Схема сверхрегенератора с самогашением для наблюдения резонансов брома.

двухпроводная линия, что позволило получить частоты от 160 до 340 мГц. Компенсация реактивной составляющей индуктивной нагрузки, представлявшей собой катушку с образцом (диаметр катушки 0,5 см, число витков $4 \div 5$, длина намотки 1 см), достигается с помощью емкости и трансформатора сопротивлений длиной $\lambda/8$.

Изменение длины согласующих отрезков $\lambda/8$ производилось грубо и лишь при значительных перестройках частоты. Сигналы ярк наблюдались как на экране осциллографа, так и записывались на ленте самописца. Измерения частот поглощения осуществлялись с помощью волномера. При записи на самописец глубина модуляции выбиралась меньше ширины линии поглощения.

2. ВЛИЯНИЕ ИОНИЗИРУЮЩИХ ИЗЛУЧЕНИЙ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ И ШИРИНУ ЛИНИЙ ЯРК

Изучено воздействие γ -излучения Co^{60} и лучей Рентгена (напряжение на трубке 40 кВ, молибденовый антикатод, ток 10 ма) на интенсивность и ширину линий ярк в 8 различных кристаллах. Результаты эксперимента, проведенного на сверхрегенераторе, перекрывающего диапазон частот от 10 до 100 мГц, представлены в таблице 1, где A_n —пиковая интенсивность контрольного образца (необлученного); $A_{об}$ —пиковая интенсивность облученного образца; $\Delta\nu_n$, $\Delta\nu_{об}$ —ширины линий на уровне 1/2.

При облучении хлоратов наблюдалось окрашивание кристаллов (цвет окрашивания указан в таблице). Во всех случаях с увеличением дозы обнаружено уменьшение интенсивности сигналов ярк и увеличение ширины линий поглощения. Приблизительно через неделю после

облучения отмечается частичное восстановление сигналов ярк (увеличение интенсивности на $15 \div 20\%$).

При облучении образца могут возникать как неустойчивые дефекты (вакансии, дислокации), так и устойчивые (макродефекты).

Т а б л и ц а 1

Вещество; окрашивание после облучения	Вид облучения, доза	$\frac{A_n}{A_{об}}$	$\frac{\Delta\gamma_{об}}{\Delta\gamma_{н}}$
KClO ₃ (желтый)	Co ⁶⁰ , 150000 r	1,6	1,2
	Co ⁶⁰ , 300000 r	1,9	1,3
	Рентген, 6 часов	4	1,6
NaClO ₃ (желтый)	Co ⁶⁰ , 150000 r	1,2	1,2
	Co ⁶⁰ , 300000 r	1,6	1,3
	Рентген, 6 часов	2,8	1,4
Mg(ClO ₃) ₂ (розовый)	Co ⁶⁰ , 150000 r	1,1	1,1
	Рентген, 6 часов	1,6	1,1
Ca(ClO ₃) ₂ (розовый)	Co ⁶⁰ , 150000 r	1,1	1,1
	Рентген, 6 часов	1,3	1,1
Sr(ClO ₃) ₂ (розовый)	Co ⁶⁰ , 150000 r	1,1	1,1
	Рентген, 6 часов	2	1,2
n-C ₆ H ₄ Cl ₂	Co ⁶⁰ , 150000 r	1,2	1
	Co ⁶⁰ , 300000 r	2,1	1,2
	Рентген, 6 часов	3	1,3
CCl ₃ COH · H ₂ O	Co ⁶⁰ , 150000 r	2	1,1
C ₂ Cl ₆	Co ⁶⁰ , 150000 r	1	1

Неустойчивые дефекты могут со временем исчезать, что и обуславливает наблюдавшееся частичное восстановление интенсивности линий ярк. Макродефекты (например, частичное разложение образца) вызывают, по всей вероятности, необратимые изменения в форме и интенсивности линий. Таким образом, если производить измерения через некоторое время после облучения образцов, то удастся фиксировать в основном необратимые изменения в кристаллической решетке. В этом смысле ядерный квадрупольный резонанс открывает новые возможности при изучении реального кристалла, поскольку он позволяет проследить процесс регрессии неустойчивых дефектов.

Известно, что коэффициент поглощения рентгеновских и γ -лучей пропорционален λ^3 , где λ —длина волны. За одно и то же время облучения эффективность окраски при облучении лучами Рентгена была больше, чем при облучении γ -лучами от источника Co⁶⁰. Интенсивность окраски зависит также от характера приготовления образца для облучения. Все образцы (~2 г) разбивались на 4 порции, распределяемые тонким слоем в бумажных пакетиках в непосредственной близости (10 см) от окон рентгеновской трубки. Если брать большие образцы, то окрашивается только поверхностный слой. Для устранения неоднородности облучения через каждые 2 часа производилось перемешивание образцов.

Окрашивание кристаллов, обусловленное образованием парамагнитных центров, продолжает сохраняться в течение нескольких месяцев. Хорошо известно, что перекристаллизация уменьшает дефектность кристаллической решетки. Поэтому эффективность восстановления сигналов после облучения можно повысить за счет перекристалли-

зации образца. Например, после переплавки облученного $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$ интенсивность сигнала якр практически не отличалась от контрольного необлученного образца (во всех случаях контрольные и облученные образцы в одинаковом количестве помещались в ампулы одинакового размера из одного и того же стекла). Поскольку облученный и необлученный образцы переплавлялись при одинаковых условиях, то влияние мозаичности кристалла было устранено.

Следует отметить, что применение сверхрегенератора часто может приводить к ошибочным результатам. Если выделяется сигнал дисперсии, то облучение влияет на сигнал гораздо слабее, чем при выделении сигнала поглощения; кроме того, имеет место сильный разброс результатов измерений. Поэтому контрольные эксперименты мы провели на регенераторе. При этом пришлось взять несколько большее количество образца (4 г). Если такой образец разбить на 4 части и производить облучение с перемешиванием, то уменьшение интенсивности при одной и той же дозе облучения оказывается меньше, чем в случае маленького образца; однако характер регрессии можно проследить более точно.

На рис. 2 представлены результаты измерений для KClO_3 . Из рисунка видно, что за 9 дней после облучения сигнал увеличивался на 20–40%, однако, полного восстановления интенсивности для больших доз облучения даже за большее время не происходило. Величина регрессии оказалась больше при меньших дозах, когда наблюдалось практически полное восстановление сигнала. Таким образом, при малых дозах облучения образуются в основном неустойчивые дефекты (вакансии, дислокации).

Следует отметить, что при каждой записи спектра производилась калибровка чувствительности прибора по контрольному образцу. При многократных записях спектра одного и того же облученного образца в течение получаса разброс не превышал 2–3%. Однако при многочисленных повторениях облучений образцов (в фиксированных условиях) на сверхрегенераторе наблюдался разброс результатов, достигавший 30%. Это позволяет сделать вывод, что сверхрегенератор при длительных измерениях может дать лишь порядок величины наблюдаемых эффектов.

Еще большая ошибка возникает за счет неоднородного облучения, если производится сравнительное изучение устойчивости различных кристаллов по отношению к радиационным повреждениям. В связи с этим соображение относительно большей радиационной прочности монокристаллов по сравнению с порошком, высказанное в работе [8], представляется сомнительным, поскольку, подобного рода сравнения вряд ли можно делать в силу неоднородностей облучения*. Мы произвели облучение монокристалла $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$ в течение 8 часов с поворотами на 90° через каждые 2 часа, но вообще не смогли заметить какого-либо эффекта, так как неоднородность облучения здесь слишком велика. Если же производить сравнение с переплавленным поликристаллическим блоком, то эффект уменьшения интенсивности сигнала якр может быть обнаружен лишь при огромных дозах облучения.

В результате многочисленных экспериментов на протяжении целого года мы пришли к выводу, что следует очень критически относиться к результатам тех работ, где не указана методика приготовления образцов.

* В работе [8] сообщалось, что авторы предполагают произвести облучение монокристалла $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$ и сравнить с поликристаллическим образцом.

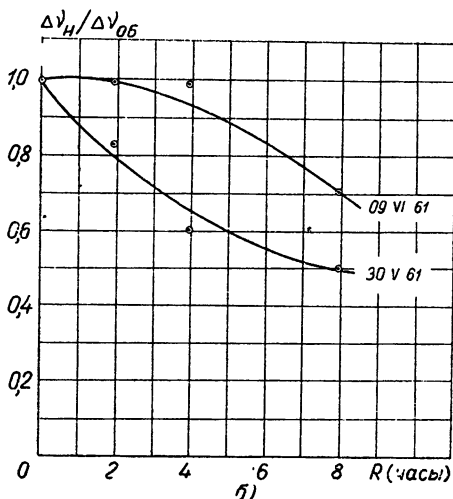
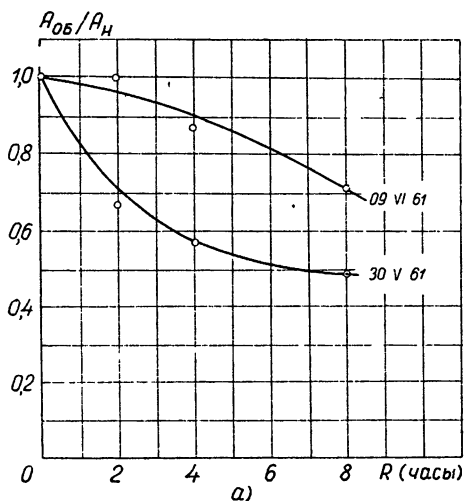


Рис. 2. Зависимость интенсивности и ширины линии якр Cl^{35} в KClO_3 от дозы облучения лучами Рентгена. Эксперимент выполнен на регенераторе.

3. ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСЕЙ

Изучалось влияние различных примесей на якр Vr^{81} в $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Vr}_2$ (см. рис. 3 и 4) и на якр Cl^{35} в монокристаллах $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$. В первом случае примесь $n\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$ оказывала весьма сильное влияние на пиковую интенсивность сигнала. В отличие от Сегеля и Лютца [3] мы наблюдали сильное изменение интегральной интенсивности линий (см. рис. 4), что свидетельствует о том, что сдвиг частот молекул, непосредственно окружающих молекулу примеси, больше ширины линии*.

* По-видимому, Сегель и Лютц пользовались прибором, который давал сильные искажения формы линии.

Когда молекула примеси попадает в решетку кристалла, то вокруг нее образуется локальное нарушение кристаллической решетки, которое в первом приближении может быть описано с помощью понятия „критической сферы“ [5]. Таким образом, некоторый объем кри-

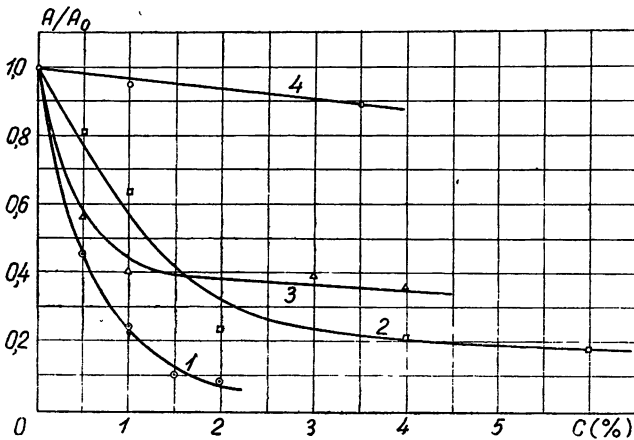


Рис. 3. Зависимость пиковой интенсивности линии якр Vg^{81} в $n-C_6H_4Vg_2$ от концентрации примесей C (в молярных %): 1—примесь $n-C_6H_4Cl_2$; 2—примесь $m-C_6H_4(NO_2)_2$; 3—примесь C_6Cl_6 ; 4—примесь $C_6H_5N=NNHC_6H_5$.

сталла вокруг молекулы примеси „выводится из игры“ и перестает давать вклад в интенсивность линии якр. Если сдвиги частот молекул, входящих в этот объем, больше чем начальная ширина линии, то

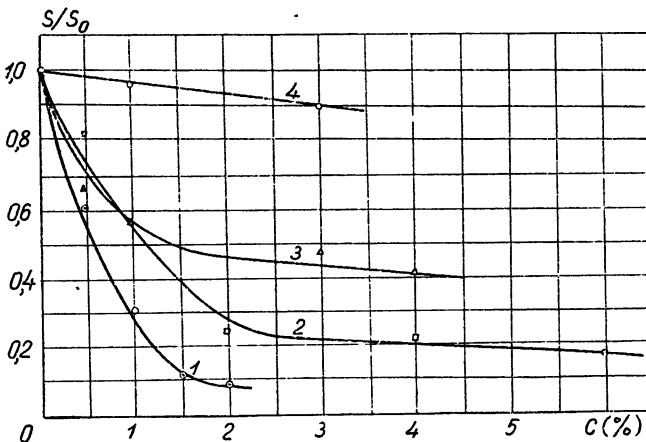


Рис. 4. Зависимость интегральной интенсивности линии якр Vg^{81} в $n-C_6H_4Vg_2$ от концентрации примесей. Обозначения те же, что и на рис. 3.

должно наблюдаться изменение интегральной интенсивности линий, поскольку вклады от молекул „критической сферы“ пропадают в шумах на „хвостах“ линии. Известно, что пара-дихлорбензол не-

ограниченно растворим в пара-дибромбензоле. Примеси, частично растворимые в пара-дибромбензоле ($C_6H_4(NO_2)_2$, C_6Cl_6), оказывают значительно более слабое влияние на интенсивность линии. Совершенно нерастворимые примеси не влияют совсем ($C_6H_5N = NNHC_6H_5$). Этот тривиальный факт для случая резонансов хлора ранее был отмечен в работе [9].

В случае монокристаллов $n-C_6H_4Cl_2$ было обнаружено, что из расплава вырастает β -модификация, имеющая лишь одно положение главной оси z градиента электрического поля в кристалле. Небольшая же добавка примеси (0,1%) $n-C_6H_4Br_2$ приводит к образованию α -модификации, которая имеет два неэквивалентных положения резонирующих ядер в решетке кристалла. Однако сравнение интенсивностей в монокристаллах затруднено, так как в каждом случае необходимо строго ориентировать монокристалл по отношению к радиочастотному полю*. При небольшом количестве примеси, когда интенсивность сигнала еще велика, это можно было сделать, наблюдая характер расщепления линий в постоянном магнитном поле. При 3% примеси сделать это уже очень трудно, так как компоненты мультиплета слишком слабы.

В монокристалле $n-C_6H_4Br_2$ при 1% примеси $n-C_6H_4Cl_2$ отношение интенсивностей $A_{пр}/A_0=0,55$, тогда как в поликристаллическом блоке при тех же условиях $A_{пр}/A_0=0,24$. Этот результат показывает, что характер образующегося твердого раствора зависит от условий его приготовления. В случае поликристаллов мы готовили твердые растворы путем переплавки. Монокристаллы были выращены из расплава. Вполне возможно, что при выращивании монокристаллов происходило частичное „выпадение“ примеси. Во всяком случае этот вопрос требует дополнительного изучения.

Наблюдение ярк на молекулах примеси в монокристаллах открывает новые структурные возможности. Например, мы наблюдали сигнал ярк Cl^{35} в монокристалле $n-C_6H_4Br_2$ (примесь—3,5% $n-C_6H_4Cl_2$). Наложение внешнего магнитного поля показало, что молекулы примеси имеют значительный разброс ориентаций осей градиентов электрического поля. Хотя расщепление линии ярк при наложении магнитного поля и наблюдалось (в отсутствие магнитного поля отношение сигнал/шум ~ 10), но происходило и уширение линий. Это уширение не могло быть объяснено неоднородностью магнитного поля. Исследование зееман-расщеплений линий ярк на примесях в монокристаллах позволяет определять ориентацию молекул примеси в решетке, их структурную неэквивалентность.

Проведенная работа показала, что исследование ярк позволяет получить количественные данные о дефектах в кристаллах, если используется калиброванный спектрометр и обращается тщательное внимание на технику приготовления образцов. Однако точность результатов еще оставляет желать лучшего, поскольку современная аппаратура не обладает достаточной стабильностью при длительных измерениях. Особенно это замечание относится к сверхрегенератору, использование которого возможно лишь при непрерывной калибровке воспроизводимости формы и линии чувствительности.

В заключение авторы выражают признательность за выращивание монокристаллов Г. В. Коробейниковой.

* Контрольный кристалл в α -модификации был получен из β -модификации после облучения ультразвуком.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Ducnesne, M. Monfils, J. Garsou, J. Chem. Phys., **23**, 1969 (1955).
2. J. Ducnesne, M. Monfils, J. Depireux, Comptes Rendus, **243**, 256 (1955).
3. S. L. Segel, B. C. Lutz, Phys. Rev., **98**, 1183 (1955).
4. C. Dean, J. Chem. Phys., **23**, 1734 (1955).
5. B. Dreyfus, Ann. Phys., **3**, 683 (1958).
6. В. С. Гречишкин, ПТЭ, **2**, 31 (1959).
7. В. С. Гречишкин, Вестник ЛГУ, **10**, 14 (1959).
8. А. И. Китайгородский, Э. И. Федин, ДАН СССР, **130**, 1005 (1960).
9. Э. И. Федин, А. И. Китайгородский, Кристаллография, **6**, 406 (1961).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
23 октября 1961 г.

INFLUENCE OF CRYSTAL LATTICE DEFECTS ON INTENSITY AND FORM OF NUCLEAR QUADRUPOLE RESONANCE LINE IN CRYSTALS

V. S. Grechishkin, G. B. Solfer

The influence has been studied of X-ray emission and γ -rays of Co^{60} on intensity and width of nuclear quadrupole resonance lines in crystals. The circuit of self-quenched superregenerator has been worked out for bromine resonance observation in 200–300 Mc/s band. It has been observed a strong influence of non-uniform illumination of the samples as well as the dependence of measurement error on superregenerator regime. A partial signal intensity restoration some time after radiation has been detected. The investigation of solid solutions of several substances in $p\text{-C}_6\text{H}_4\text{Br}_2$ indicates a change of an integral intensity of the nuclear quadrupole resonance due to increase of impurity concentration. Experiments with impurities are extended on monocrystals.

ВЛИЯНИЕ ФЛЮКТУАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ АВТОГЕНЕРАТОРА НА ЕГО ПОВЕДЕНИЕ ВБЛИЗИ ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ

А. Н. Малахов

Методом возмущений рассматривается зависимость энергии автоколебаний генератора от флуктуаций крутизны для случая, когда точка бифуркации может лежать внутри интервала флуктуаций крутизны.

В литературе уже рассматривалось влияние флуктуаций параметров на поведение автоколебательных систем [1]. Однако в работе [1] изменения параметров предполагались такими, что движение автоколебательной системы не изменяло своего характера. Тем самым, результат работы [1] не может быть применен к тем случаям, когда в интервалах изменений параметров лежит хотя бы одна точка бифуркации.

Настоящая работа посвящена исследованию поведения автогенератора, обладающего мягким режимом возникновения генерации, вблизи порога самовозбуждения. Исследуемым параметром является крутизна, которая, как известно [2], испытывает определенные флуктуации около среднего значения.

1. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим схему LC генератора с контуром в цепи анода (рис. 1). Пусть крутизна лампы испытывает флуктуации $s(t)$ около среднего значения S_0 :

$$S = S(t) = S_0 + s(t) = S_0 [1 + \delta s(t)].$$

Дифференциальное уравнение генератора имеет вид (v — напряжение на сетке):

$$\dot{v} + \omega_0^2 \int v dt = \omega_0^2 v (MS - rC) - \omega_0^2 MS\beta v^3, \quad (1)$$

где $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$, характеристика лампы $i = Sv(1 - \beta v^2)$.

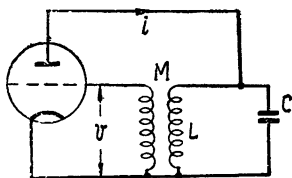


Рис. 1.

Будем искать приближенное решение этого уравнения* в виде:

$$v = A \cos(\omega_0 t), \quad (2)$$

где $A = A(t)$ — медленная по сравнению с $\cos(\omega_0 t)$ функция времени.

Мы рассматриваем флуктуации крутизны $s(t)$, медленные по сравнению с $\cos(\omega_0 t)$; считая, однако, что соотношение медленности $s(t)$ и $A(t)$ может быть произвольным.

* Правую часть уравнения (1) считаем достаточно малой.

Подставляя (2) в (1), для A можно найти известными методами следующее укороченное уравнение:

$$2 \frac{dA}{dt} = \omega_0^2 (MS - rC) A - \frac{3}{4} \omega_0^2 MS \beta A^3.$$

Обозначая

$$\omega_0^2 (MS_0 - rC) = \gamma, \quad \frac{3}{4} \omega_0^2 MS_0 \beta = \rho, \quad \mu = MS_0 \omega_0^2, \quad (3)$$

получим:

$$\omega_0^2 Ms(t) = \mu \delta s(t), \quad \frac{3}{4} \beta \omega_0^2 Ms(t) = \rho \delta s(t), \quad \gamma = \mu - rC \omega_0^2.$$

Тогда предыдущее уравнение переходит в

$$2 \frac{dA}{dt} = A (\gamma - \rho A^2) + A (\mu - \rho A^2) \delta s(t).$$

Вводя в рассмотрение квадрат амплитуды $B = B(t) = A^2(t)$, для B получим уравнение

$$\frac{dB}{dt} = \gamma B - \rho B^2 + (\mu B - \rho B^2) \delta s(t). \quad (4)$$

Если флюктуаций крутизны нет, то

$$B = B_0, \quad \frac{dB_0}{dt} = \gamma B_0 - \rho B_0^2.$$

Решением этого уравнения является (кроме тривиального $B_0 = 0$)

$$B_0 = \frac{\gamma/\rho}{1 + k \exp(-\gamma t)}, \quad (5)$$

где k определяется начальным условием.

Для установившегося движения (при $t \rightarrow \infty$)

$$B_0(t \rightarrow \infty) \equiv B_{0\infty} = \gamma/\rho,$$

так что устойчивое движение имеет вид:

$$B_{0\infty} = \begin{cases} 0 & (\gamma \leq 0) \\ \gamma/\rho & (\gamma > 0) \end{cases}. \quad (6)$$

Безусловный интерес представляет определение вероятностных характеристик асимптотического движения $B_\infty \equiv B(t \rightarrow \infty)$ при наличии флюктуаций крутизны $\delta s(t)$. В общем случае, однако, эта задача достаточно сложна. Мы рассмотрим здесь лишь ее простейший вариант — нахождение установившегося среднего (среднестатистического) движения $\bar{B}_\infty \equiv (B)_{t \rightarrow \infty}$. Совершенно ясно, что в общем случае $\bar{B}_\infty \neq B_{0\infty}$.

2. РЕШЕНИЕ ФЛЮКТУАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение (4). Будем считать флюктуации крутизны малыми и заменим $\delta s(t)$ на $\lambda \delta s(t)$, где λ — малый параметр. Тогда (4) примет вид:

$$\frac{dB}{dt} = \gamma B - \rho B^2 + \lambda (\mu B - \rho B^2) \delta s(t). \quad (7)$$

Рассмотрим случай малых флюктуаций, т. е. предположим, что при $\delta s(t) \neq 0$ B отличается от B_0 на достаточно малую величину. Другими словами, будем искать решение в виде:

$$B = B_0 + \lambda B_1(t, \delta s) + \lambda^2 B_2(t, \delta s) + \dots \quad (8)$$

с начальными условиями

$$B(t=0) = B_0(t=0), \quad B_1(t=0) = B_2(t=0) = \dots = 0.$$

Поскольку $B_0(t)$ не зависит от флуктуаций крутизны и при больших t стремится к $B_{0\infty}$, постольку, рассматривая асимптотическое движение и считая, что момент включения генератора равен $t_0 = -\infty$, можно полагать без потери общности, что $B_0(t=0) = B_{0\infty}$. Тем самым в уравнении (8) для $t > 0$ можно, следовательно, B_0 заменить на $B_{0\infty}$. Искомое решение принимает вид:

$$B = B_{0\infty} + \lambda B_1(t, \delta s) + \lambda^2 B_2(t, \delta s) + \dots \quad (9)$$

В согласии с вышеизложенным, интересующее нас установившееся среднее движение системы определяется рядом

$$\begin{aligned} \bar{B}_\infty &= B_{0\infty} + \lambda \bar{B}_{1\infty} + \lambda^2 \bar{B}_{2\infty} + \dots; \\ \bar{B}_{k\infty} &\equiv \overline{[B_k(t, \delta s)]}_{t \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{dB}{dt} = \lambda \frac{dB_1}{dt} + \lambda^2 \frac{dB_2}{dt} + \dots;$$

$$B^2 = B_{0\infty}^2 + \lambda (2B_{0\infty}B_1) + \lambda^2 (B_1^2 + 2B_{0\infty}B_2) + \dots$$

Подставляя (9) и ряды для dB/dt и B^2 в (7), приравнивая члены при равных степенях λ , получим:

$$\frac{dB_1}{dt} = -\gamma B_1 + a \delta s(t); \quad (11)$$

$$\frac{dB_2}{dt} = -\gamma B_2 - \rho B_1^2 + b B_1 \delta s(t); \quad (12)$$

.....

где $a = \gamma(\mu - \gamma)/\rho$, $b = \mu - 2\gamma$. Решение уравнения (11) может быть записано (с учетом начальных условий) в виде:

$$B_1(t, \delta s) = e^{-\gamma t} \int_0^t a \delta s(x) e^{\gamma x} dx. \quad (13)$$

Усредняя обе части (13) и принимая во внимание, что $\overline{\delta s} = 0$, легко получить: $\bar{B}_1(t, \delta s) = 0$, а следовательно, и

$$\bar{B}_{1\infty} = 0. \quad (14)$$

Таким образом, согласно (14), в среднем в первом порядке малости поправка к $B_{0\infty}$ отсутствует.

Перейдем к B_2 . Усредняя (12), имеем:

$$\frac{d\bar{B}_2}{dt} = -\gamma \bar{B}_2 - \rho \bar{B}_1^2 + b \overline{B_1 \delta s(t)}. \quad (15)$$

Установившееся предельное значение $\bar{B}_{2\infty}$, которое от времени не зависит, будет, согласно (15), определяться уравнением:

$$\gamma \bar{B}_{2\infty} = -\rho (\bar{B}_1^2)_\infty + b \overline{(B_1 \delta s(t))}_\infty. \quad (16)$$

Для отыскания $\overline{B_{2\infty}}$ нужно, следовательно, найти $(\overline{B_1^2})_\infty$ и $(\overline{B_1 \delta s(t)})_\infty$. На основании (13) нетрудно получить:

$$\begin{aligned} \overline{B_1^2} &= a^2 e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t \overline{\delta s(x) \delta s(y)} e^{\gamma(x-y)} dx dy = \\ &= a^2 e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t \Phi_{\delta s}(x-y) e^{\gamma(x+y)} dx dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что $\Phi_{\delta s}(\tau)$ (функция корреляции относительных флуктуаций крутизны) есть четная функция, двойной интеграл можно преобразовать и (17) перейдет в

$$\begin{aligned} \overline{B_1^2} &= a^2 e^{-2\gamma t} \frac{1}{\gamma} \int_0^t \Phi_{\delta s}(y) [e^{2\gamma t} e^{-\gamma y} - e^{\gamma y}] dy = \\ &= \frac{a^2}{\gamma} \int_0^t \Phi_{\delta s}(y) e^{-\gamma y} dy - \frac{a^2}{\gamma} e^{-2\gamma t} \int_0^t \Phi_{\delta s}(y) e^{\gamma y} dy. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку $\Phi_{\delta s}(\tau)$ — функция не возрастающая, то при $t \rightarrow \infty$ в (18) останется только первое слагаемое:

$$(\overline{B_1^2})_\infty = \frac{a^2}{\gamma} \int_0^\infty \Phi_{\delta s}(y) e^{-\gamma y} dy. \quad (19)$$

Умножая (13) на $\delta s(t)$, усредняя и совершая замену переменных, получим:

$$\overline{B_1 \delta s(t)} = a e^{-\gamma t} \int_0^t \overline{\delta s(t) \delta s(x)} e^{\gamma x} dx = a \int_0^t \Phi_{\delta s}(y) e^{-\gamma y} dy; \quad (20)$$

$$(\overline{B_1 \delta s(t)})_\infty = a \int_0^\infty \Phi_{\delta s}(y) e^{-\gamma y} dy = \frac{\gamma}{a} (\overline{B_1^2})_\infty.$$

В общем случае (19) отлично от нуля. Следовательно, $\overline{B_{2\infty}}$ в (16) также отлично от нуля и в среднем для $\overline{B_\infty}$ имеется поправка к $B_{0\infty}$ во втором порядке малости.

Пусть, например,

$$\Phi_{\delta s}(\tau) = \overline{\delta s^2} e^{-\alpha|\tau|}, \quad (21)$$

Тогда

$$(\overline{B_1^2})_\infty = a^2 \overline{\delta s^2} / \gamma(\gamma + \alpha); \quad (22)$$

$$(\overline{B_1 \delta s(t)})_\infty = a \overline{\delta s^2} / (\gamma + \alpha). \quad (23)$$

Объединяя (16), (22) и (23), найдем, что

$$\overline{B_{2\infty}} = -a \overline{\delta s^2} / (\gamma + \alpha).$$

Таким образом, с учетом этой поправки установившаяся величина средней энергии автоколебаний будет равна

$$\bar{B}_\infty = B_{0\infty} + \lambda^2 \bar{B}_{2\infty}. \quad (24)$$

Делая обратную замену $\lambda \delta s$ на δs , получим окончательно:

$$\bar{B}_\infty = \frac{\gamma}{\rho} \left[1 + (\gamma - \mu) \frac{\overline{\delta s^2}}{\gamma + \alpha} \right]. \quad (25)$$

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Введем коэффициент обратной связи p соотношениями

$$p = MS/rC, \quad p = \bar{p}(1 + \delta p), \quad \delta p = \delta s, \quad \bar{p} = MS_0/rC \quad (26)$$

и относительное время корреляции флюктуаций крутизны $\theta = \sigma/rC\omega_0^2 = \tau_\kappa/\tau_\phi$ как отношение постоянной времени колебательного контура $\tau_\kappa = (rC\omega_0^2)^{-1}$ к $\tau_\phi = \alpha^{-1}$ — времени корреляции флюктуаций крутизны. Принимая во внимание (3) и (26), из (25) нетрудно получить (для $\bar{p} > 1^*$):

$$\bar{B}_\infty = \frac{4}{3\beta} \frac{\bar{p} - 1}{\bar{p}} \left[1 - \frac{\overline{\delta p^2}}{\bar{p} - 1 + \theta} \right]. \quad (27)$$

На основании предыдущих предположений очевидно, что формула (27) справедлива лишь для

$$\overline{\delta p^2} \ll \bar{p} - 1 + \theta. \quad (28)$$

Это условие есть фактически условие малости флюктуаций крутизны. Будем в дальнейшем считать его выполненным.

Исследуем влияние флюктуаций параметра на поведение \bar{B}_∞ . Из (27) видно прежде всего, что наличие флюктуаций коэффициента обратной связи уменьшает среднюю энергию (а следовательно, и амплитуду) колебаний. При постоянной дисперсии флюктуаций параметра увеличение времени корреляции флюктуаций τ_ϕ также уменьшает среднюю энергию колебаний. Наконец, приближение коэффициента обратной связи \bar{p} к критическому значению $\bar{p} = 1$, также ведет к большему (относительному) уменьшению средней энергии колебаний. На рис. 2 показана зависимость \bar{B}_∞ от \bar{p} для $\overline{\delta p^2} = 0$ и $\overline{\delta p^2} > 0$. Особо

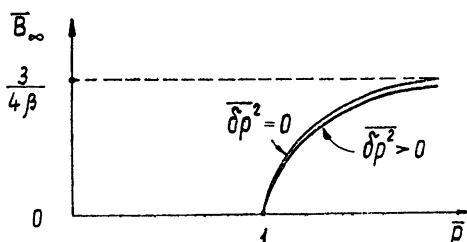


Рис. 2.

следует отметить то, что при $\sqrt{\overline{\delta p^2}} > \bar{p} - 1$ коэффициент обратной связи p при случайном изменении во времени может принимать значения

* Можно показать, что для $\bar{p} \leq 1$ $\bar{B}_\infty = 0$.

$p < 1$, соответствующие режиму отсутствия колебаний. Другими словами, точка бифуркации $p=1$ может оказаться внутри интервала возможных флюктуаций p . При этом формула (27) остается верна, если, по-прежнему, $\bar{p} > 1$ и справедливо (28). Тем самым и в этом случае флюктуации p лишь уменьшают среднюю энергию колебаний генератора, но не срывают их.

В заключение рассмотрим два предельных случая. Первый случай—сколь угодно медленные флюктуации. В этом квазистатическом случае $\tau_{\phi} = \infty$, $\theta = 0$ и формула (27) переходит в

$$\bar{B}_{\infty} = \frac{4}{3\beta} \frac{\bar{p}-1}{\bar{p}} \left[1 - \frac{\delta p^2}{\bar{p}-1} \right]. \quad (29)$$

Условие (28) принимает вид:

$$\delta p^2 \ll \bar{p} - 1. \quad (30)$$

Можно показать, что (29) легко получается из уравнения

$$B_{\infty} = \frac{4}{3\beta} \frac{p-1}{p}, \quad (31)$$

определяющего асимптотическое значение энергии колебаний при отсутствии флюктуаций. Для этого следует в (31) p заменить на $p(1+\delta p)$ и усреднить обе части (31).

Второй предельный случай соответствует дельта-коррелированным (сколь угодно быстрым) флюктуациям. Функцию корреляции для подобных флюктуаций параметра обратной связи можно записать так:

$$\Phi_{\delta p}(\tau) = D\delta(\tau), \quad (32)$$

где D — интенсивность флюктуаций, а $\delta(\tau)$ — дельта-функция. Выше мы полагали (см. (21) и (26)), что

$$\Phi_{\delta p}(\tau) = \overline{\delta p^2} e^{-\alpha|\tau|}. \quad (33)$$

Чтобы от (33) перейти к (32) при $\alpha \rightarrow \infty$, следует положить

$$\overline{\delta p^2} = \frac{\alpha}{2} D. \quad (34)$$

Подставляя (34) в (27) и принимая во внимание, что $\theta = \sigma/\Pi$, где $\Pi = rC\omega_0^2$ — полоса контура, легко получить при предельном переходе $\alpha \rightarrow \infty$:

$$\bar{B}_{\infty} = \frac{4}{3\beta} \frac{\bar{p}-1}{\bar{p}} \left[1 - \frac{1}{2} \Pi D \right]. \quad (35)$$

Ясно, что в этом случае флюктуации параметра считаются малыми, если

$$\Pi D \ll 2,$$

а относительное уменьшение средней энергии колебания из-за флюктуаций параметра не зависит от значения $\bar{p} > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. М а л а х о в, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 241 (1960).
2. А. Н. М а л а х о в, Радиотехника и электроника, 2, 438 (1957).

THE EFFECT OF AUTOOSCILLATOR PARAMETER FLUCTUATIONS ON GENERATOR BEHAVIOUR NEAR BIFURCATION POINT

A. N. Malakhov

The dependence of generator autooscillation energy upon slope fluctuations is considered by perturbation method in the case when a bifurcation point may lay within the interval of slope fluctuations.

КОЛЕБАНИЯ ИОНИЗАЦИИ ПРИ РАЗРЯДЕ В СМЕСЯХ ИНЕРТНЫХ ГАЗОВ С ПАРАМИ РТУТИ

А. А. Зайцев и М. Я. Васильева

Приводятся результаты исследования колебаний ионизации в области анода (анодные колебания) и в положительном столбе (подвижные страты) при разряде в смесях гелия, неона, аргона и криптона с парами ртути.

Колебательные явления в смесях инертных газов с парами ртути до сих пор изучены недостаточно полно, несмотря на то, что такие смеси находят применение во многих газоразрядных приборах. В целом ряде случаев использования газового разряда, а также при физических исследованиях плазмы желательно получить однородную по плотности и свободную от колебаний плазму. В немногочисленных работах, относящихся к исследованиям колебаний ионизации в инертных газах с примесью ртути, в частности, в [1], рассматривались только анодные колебания. Лишь в статье [2] содержатся некоторые сведения о подвижных стратах в положительном столбе при таких условиях.

Целью настоящей работы является изучение влияния примеси ртути к инертным газам на анодные колебания и на характер подвижных страт. Основное внимание было уделено стратам. При этом предполагалось, что это изучение даст возможность, по крайней мере, качественно рассмотреть некоторые черты явления подвижных страт на фоне особенностей элементарных процессов, имеющих место при разряде в смесях газов.

1. МЕТОДИКА ОПЫТА

Исследовались разряды постоянного тока и пятидесятипериодного переменного тока в трубках длиной 60 см, диаметрами 2,2 и 3,6 см, наполненных смесью гелия, неона, аргона и криптона с парами ртути. Давление паров задавалось температурой стенок трубки, которая менялась с изменением силы тока приблизительно в пределах от 20 до 40°C. Таким образом, крайние значения давления паров составляли $1 \cdot 10^{-3}$ и $6 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. Перед измерениями разряд при заданном токе выдерживался в течение нескольких минут, пока не устанавливалась соответствующая этому току температура стенок.

Использованные трубки, кроме сорта наполнения, отличались еще конструкцией одного из электродов. В одном случае электродами служили две вольфрамовые спирали, покрытые оксидной массой, аналогичные применяемым в люминесцентных лампах (электроды типа С). В других случаях одна спираль была окружена цилиндром (электрод типа СЦ) или конусом (электрод типа СК), изготовленными из тантала. Последние имели электрическое соединение со спиралью внутри трубки. Диаметр цилиндра и основания конуса 1,7 см, высота их 1 и 2,5 см соответственно. Наконец, в трубках, предназначенных для исследования подвижных страт, анодом служил конус без спирали (электрод К).

Колебания напряжения на электродах и силы тока в цепи разряда изучались с помощью электронного осциллографа. Подвижные страты

исследовались обычным способом [3] с применением фотоумножителя, соединенного с пластинами явления осциллографа.

Для разряда постоянного тока с помощью цилиндрических зондов были измерены электронная температура и среднее значение продольного градиента потенциала в положительном столбе.

2. АНОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

На рис. 1 приведены осциллограммы тока и напряжения при разряде переменного тока в смеси Ag-Hg при давлении аргона 3,5 мм рт. ст. В случае разряда между электродами типа С в обоих полупериодах тока наблюдаются колебания, имеющие релаксационный характер (рис. 1а). Размах колебаний от пика до пика растет с ростом тока и в момент максимума тока (120 ма) достигает 7 в. Имеется заметная разница в значениях частот (приблизительно равных $2,3 \cdot 10^3$ и $3 \cdot 10^3$ гц) при перемене знака на электродах. Так как другие условия в разрядном промежутке постоянны, то необходимо предположить, что наблюдаемая разница в частотах обусловлена некоторым различием в условиях у электродов или вблизи них.

Рис. 1б показывает картину колебаний при разряде между электродами С и СЦ. В тот полупериод, когда анодом служит электрод С, картина аналогична предыдущей. Но в обратный полупериод (анодом является электрод СЦ) колебания наблюдаются лишь в продолжение времени нарастания тока после зажигания разряда. При достижении током величины, близкой к максимальной, колебания внезапно прекращаются. Когда затем во второй половине полупериода ток проходит через те же самые значения, уменьшаясь до нуля, колебания не возникают.

Осциллограммы для случая разряда между электродами С и СК приведены на рис. 1в. Здесь асимметрия условий на электродах сказывается в колебательных явлениях еще более резко. При одной определенной полярности, а именно, когда анодом служит электрод СК, колебания рассматриваемого типа отсутствуют полностью. Слабые колебания с частотой около 10^3 гц, обнаруживаемые на участках осциллограмм, соответствующих этой полярности, связаны с подвижными стратами*.

Таким образом, ясно, что за появление колебаний ответственны процессы в анодной области. Использование разряда переменного тока позволило весьма наглядно выявить влияние геометрии анода на эти колебания. Практически интересным является результат, показывающий возможность получения разрядов, свободных от анодных колебаний.

В дальнейшем изучение анодных колебаний было продолжено на разряде постоянного тока в различных газах [4]. Они показали, что колебания большой амплитуды возникают в случае, когда величина анодного падения напряжения приближается к значениям ионизационного потенциала. Вопрос о влиянии формы анода на величину анодного падения напряжения рассматривался в работах [5,6]. Анодные колебания представляют собой колебания ионизации, связанные с периодически повторяющимся процессом пробоя электронного слоя на аноде.

* При зажигании разряда в каждый полупериод тока страты образуются со стороны катода. Скорость продвижения фронта расслоения в Ag-Hg при данных условиях опыта составляет примерно $40 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ [3]. Продвигаясь с такой скоростью в направлении к аноду, фронт расслоения за 0,01 сек проходит расстояние 0,4 м и, следовательно, не успевает приблизиться непосредственно к аноду (длина трубки 60 см). Между тем некоторое число страт, возникших раньше на катодной стороне столба, успевает за это время переместиться к границе катодной области разряда. Это обстоятельство проявляется в слабых колебаниях.

В случае разряда постоянного тока анодные колебания могут наблюдаться одновременно с подвижными стратами. На рис. 2 показана осциллограмма колебаний напряжения на электродах для такого случая. При увеличении величины тока до некоторого значения (см. раздел 3) страты исчезают, но анодные колебания все еще продолжают существовать. Наблюдения, проводившиеся при таких условиях с применением электрического и оптического методов, не обнаружили каких-либо явлений, указывающих на распространение волнообразных процессов от анода как от источника. Таким образом, анодные колебания являются локальными колебаниями ионизации газа в области, прилегающей к аноду (этот результат противоречит результату, полученному в работе [1]). При прочих равных условиях введение ртути приводит к понижению частоты размаха колебаний по сравнению с чистым газом.

3. ПОДВИЖНЫЕ СТРАТЫ В СМЕСЯХ ИНЕРТНЫХ ГАЗОВ С ПАРАМИ РТУТИ

а) *Влияние примеси ртути на условия существования подвижных страт в инертных газах.* Как известно [7], в инертных газах существуют верхние (предельные) значения силы тока ($i_{\text{пред}}$), выше которых подвижные страты не наблюдаются. В работе были измерены значения $i_{\text{пред}}$ в смесях He—Hg, Ne—Hg, Ar—Hg и Kr—Hg. В литературе не имеется прямых данных по этому вопросу.

Опыты с подвижными стратами производились на разрядах постоянного тока, создаваемого между электродами С (катод) и К (анод).

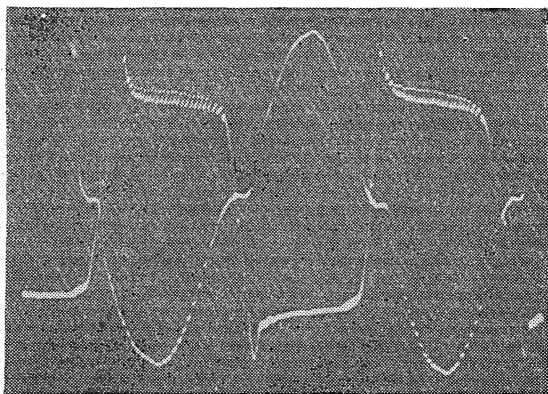
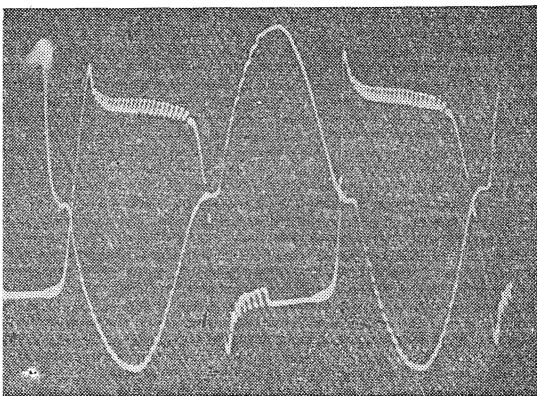
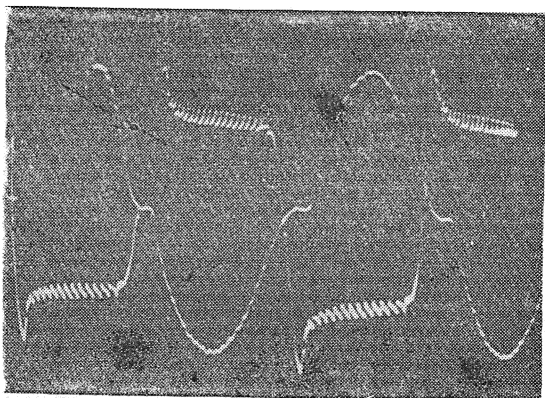


Рис. 1. Осциллограммы тока и напряжения при разряде в смеси аргона (3,5 мм рт. ст.) и паров ртути (50-периодный переменный ток, максимальное значение $i = 120$ ма):

а) С—С, б) С—СН, в) С—СК, радиус трубки 1,1 см.

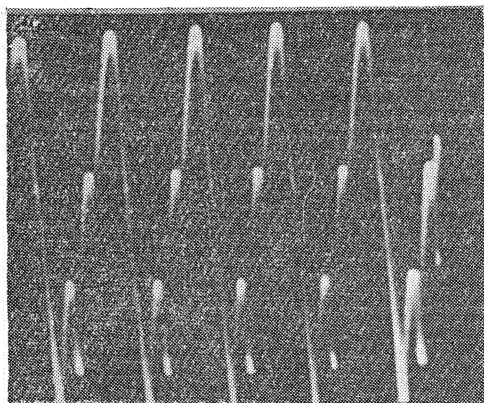


Рис. 2. Осциллограммы двух колебаний, наложенных одно на другое, при разряде в смеси аргона (3,5 мм рт. ст.) и ртути. Разряд происходит между электродами С — 0, $i = 30$ ма; радиус трубки 1,1 см.

Ртуть вводилась в трубки со стороны анода*. Сводка полученных данных приведена в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Значения предельных токов для смесей инертных газов с парами ртути и в чистых газах

Газ	Давление (мм рт. ст.)	$i_{\text{пред}} (a)$	$i_{\text{пред}}$ в чистых газах (a)	Отношение $i_{\text{пред}}$ в газе к $i_{\text{пред}}$ в смеси
He—Hg	3,5	0,002	2,8	$1,4 \cdot 10^3$
	2	0,004	6	$1,2 \cdot 10^3$
Ne—Hg	3,5	0,015	1,4	93
	2	0,007	2,9	414
Ar—Hg	3,5	0,09	0,8	9
	2	0,185	1,2	6,5
	0,7	0,35	2,6	7,4
	0,5	0,45	3,5	7,8
Kr—Hg	3,5	0,1	0,6	6
	2	0,22	1	4,5

Из этой таблицы видно, что величины $i_{\text{пред}}$ в смесях резко отличаются от приведенных в четвертой колонке для соответствующих чистых газов, свободных от Hg (данные для чистых газов заимствованы из работы [7]). Таким образом, присутствие Hg серьезно влияет на условия существования подвижных страт. Влияние это особенно значительно в случае He и Ne, где добавление Hg уменьшает значение $i_{\text{пред}}$ на $2 \div 3$ порядка. Далее, нетрудно заметить, что эффект уменьшается с уменьшением ионизационного потенциала газа.

Так как вклад атомов Hg в полное эффективное сечение для столкновений электронов здесь мал, то радиальная диффузия и аксиальный дрейф носителей заряда определяется столкновениями с инертным газом [8]. Поэтому только что указанный эффект должен быть рассмотрен

* При прохождении постоянного тока через смеси газов, имеющих различный ионизационный потенциал, происходит разделение газа (электрофорез). Поддержанию однородного состава смеси газ—пары Hg способствует наличие ртути в жидкой фазе около анода.

с точки зрения тех изменений, которые вносятся добавлением ртути в ионизационные условия в плазме.

Если ионизация происходит только при однократном соударении между электроном и атомом в основном состоянии, то скорость ионизации, отнесенная к одному электрону, при наличии максвелловского распределения электронов по энергиям определяется выражением

$$\chi^0 = 9 \cdot 10^7 a p e^{\epsilon_i/\epsilon_0} \left(\frac{kT_e}{e} \right)^{1/2} U_i, \quad (1)$$

где a — константа относительной ионизации, U_i и kT_e/e выражены в вольтах, p — в мм рт. ст.; $\epsilon_i/\epsilon_0 = eU_i/kT_e$ [9]. С помощью формулы (1), пользуясь приведенными в таблице 2 данными для электронной температуры, можно вычислить число образуемых одним электроном в единицу времени ионов газа и ионов ртути в различных смесях.

Таблица 2

Электронная температура T_e в смеси Ne—Hg, Ar—Hg, Kr—Hg в зависимости от величины анодного тока (получено из зондовых измерений). Радиус трубки 1,1 см

Газ	Давление (мм рт. ст.)					
			i (ма)			
Ne—Hg	3,5		20	50	100	200
		T_e (°K)	16800	15000	14300	13000
	2,0		20	40	100	200
		T_e (°K)	21000	20500	18500	16700
Ar—Hg	3,5		30	70	100	200
		T_e (°K)	14400	13400	12400	11600
Kr—Hg	2,0		60	100	200	
		T_e (°K)	13200	12900	12300	

Вычисления показывают, что в смесях неона (3,5 и 2 мм рт. ст.) с парами ртути при силе тока в 200 ма вследствие только прямых ионизирующих соударений в 1 сек образуется в 5 ÷ 10 раз больше ионов Hg, чем ионов Ne. При силе тока в 20 ма число возникающих таким путем ионов ртути χ_{Hg}^0 немного больше, но того же порядка величины, что и число ионов неона χ_{Ne}^0 . Давления паров ртути были приняты равными $2 \cdot 10^{-3}$ и $6 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. соответственно для токов 20 ма и 200 ма. Следует иметь в виду, что атомы ртути ионизируются еще ступенчатым путем (χ_{Hg}^*) и путем неупругих соударений второго рода с метастабильными атомами Ne (χ_{Hg}^{**}). Эти величины должны быть прибавлены к χ_{Hg}^0 . Отсюда скорость ионизации ртути $\chi_{\text{Hg}} = \chi_{\text{Hg}}^0 + \chi_{\text{Hg}}^* + \chi_{\text{Hg}}^{**}$. В смеси Ar + Hg при указанных в таблице условиях значения χ_{Hg}^0 оказываются приблизительно на порядок величины меньшими, чем χ_{Ar}^0 . Но положение со скоростью ионизации компонент смеси существенно меняется и здесь, если привлечь к рассмотрению ступенчатую ионизацию*.

В связи с применением смеси Ar—Hg для наполнения люминесцентных ламп вопросам возбуждения и ионизации атомов ртути в та-

* Мы предполагаем, что в смеси ступенчатая ионизация атомов неона или аргона не играет заметной роли (см. раздел 36). Столкновения между метастабильными атомами газа и атомами ртути могут привести к ионизации Hg (эффект Пеннинга), но количественная оценка величины χ_{Hg}^{**} здесь не производится.

кой смеси было уделено большое внимание [10–11]. Кенти исследовал [11] разряд в смеси 3,5 мм рт. ст. Ag + $6 \cdot 10^{-3}$ Hg в трубке диаметром 3,6 см. Результаты показали, что при силе тока 0,4 а в положительном столбе ионизируются почти исключительно атомы ртути ступенчатым путем с участием в качестве промежуточной ступени возбужденных уровней $6^3P_{2,1,0}$. Два из этих уровней — 6^3P_2 и 6^3P_0 — метастабильные, а 6^3P_1 является верхним уровнем для резонансной линии. Из опыта с абсорбцией линий ртути 5461Å и 4047Å, поглощаемых атомами в состояниях $6^3P_{2,0}$, в зависимости от силы тока было получено, что концентрации N_{Hg}^* атомов на метастабильных уровнях, возрастая с величиной тока, достигают при $i = 100$ ма значений насыщения, равных $7,6 \cdot 10^{11}$ и $3,5 \cdot 10^{11}$ ат·см⁻³ соответственно для уровней 6^3P_2 и 6^3P_0 . Наибольшая концентрация среди уровней 6^3P получается на самом высоком уровне 6^3P_2 .

Эти данные о значениях N_{Hg}^* были использованы в настоящей работе для приближенной оценки скорости χ_{Hg}^* ступенчатой ионизации ртути в смеси Ag—Hg. Оценка производилась в следующих предположениях: 1) сечение ионизации с уровней 6^3P на порядок величины больше, чем для ионизации невозбужденных атомов [12]; 2) скорость ионизации для случая столкновений электрона с возбужденными атомами выражается формулой (1) со значением ионизационного потенциала, равным $U_i - U_a$; 3) ионизация происходит только с наиболее заселенного уровня 6^3P_2 . Результаты показывают, что значение величины χ_{Hg}^* при $i = 30$ ма ($N_{\text{Hg}}^* \approx 3,5 \cdot 10^{11}$ ат·см⁻³) примерно в три раза меньше, а при $i = 200$ ма ($N_{\text{Hg}}^* \approx 7,4 \cdot 10^{11}$ ат·см⁻³) — в два раза больше, чем χ_{Ag} .

Таким образом, смеси Ne—Hg и Ag—Hg имеют ту общую черту, что в них при токах, превышающих значения $i_{\text{пред}}$, основными носителями положительного заряда являются ионы ртути. Можно предположим, что это положение верно и для смесей Ne—Hg и Kr—Hg. Однако это не исчерпывает всех особенностей ионизации в смесях.

Мы видим, что в смесях Ag—Hg условие $\chi_{\text{Hg}} > \chi_{\text{Ag}}$ достигается в результате возрастающей роли ступенчатой ионизации атомов ртути при больших токах. До тех пор, пока концентрация N_{Hg}^* растет с ростом концентрации электронов n_e (плотности тока), вклад ступенчатой ионизации в скорость χ нарастает при возрастании n_e . В области насыщенной концентрации метастабильных атомов χ_{Hg}^* от n_e не зависит. Тогда величина χ^* является функцией только электронной температуры так же, как это имеет место для χ_{Hg}^0 и χ_{Hg}^{**} . Особо интересным является тот факт, что в смеси 3,5 мм рт. ст. Ag—Hg подвижные страты исчезают при тех же значениях тока ($i = 90$ ма), при которых (по данным работы [11]) величина N_{Hg}^* приближается к значениям насыщения.

В связи с этим отметим, что недавно при теоретическом рассмотрении подвижных страт, выполненном в работах Робертсона [13] и Ротера [14], была показана роль, которую может играть ступенчатая ионизация в механизме этого явления. Из проведенных ими анализов следует, что если скорость ионизации изменяется с изменением концентрации электронов, то возможны процессы усиления слабых возмущений ионной плотности, определяемые диффузией. При таких условиях однородная форма положительного столба неустойчива и появляются подвижные страты.

б) Влияние на подвижные страты освещения разряда интенсивным излучением ртути. Изучалось действие на подвижные страты

освещения разряда излучением, поглощение которого разрушает метастабильные атомы. Такое освещение уменьшает концентрацию метастабильных атомов, вследствие чего ступенчатая ионизация будет ослаблена.

Исследовались трубки, наполненные неоном и аргоном при давлении 3,5 мм рт. ст. с примесью $3 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. Hg. В качестве источника излучения использовались разряды в Ne и Ar при давлении 1 мм рт. ст. и в парах Hg при давлении несколько тысячных мм рт. ст. (радиус трубки был 2 см, величина тока 1,2 а). Было найдено, что освещение трубки излучением ртути ослабляет колебания напряжения на электродах, связанных с подвижными стратами, и увеличивает частоту страт. Заметного влияния освещения излучением инертных газов на страты не наблюдалось. В качестве примера в таблице 3 приведены значения размаха колебаний ΔU напряжения горения без освещения и при наличии освещения для случая разряда в смеси Ne—Hg. В этой же таблице даны значения колебаний яркости свечения газа S в области столба, вызванных наличием страт.

Таблица 3

Влияние освещения разряда в смеси 3,5 мм рт. ст. Ne + $3 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. Hg излучением ртути на колебания напряжения горения. Радиус трубки 1,1 см

i (ма)	2	4	6	9	12	14
S без освещения (произвольная ед.)	40	30	27	19	—	7
ΔU без освещения (вольты)	3,5	2,7	1,9	1,4	1	0,7
ΔU при освещении (вольты)	1,7	1,8	1,5	1,1	0,8	0,6

Как видно, величина ΔU убывает при уменьшении колебаний яркости свечения газа, которые, в свою очередь, характеризуют резкость границ подвижных страт. Таким образом, разрушающее действие излучения ртути на метастабильные атомы Hg создает условия, при которых страты ослабляются (делаются расплывчатыми) и распределение пространственного заряда принимает более однородный характер. Из опытов следует, что влияние освещения довольно велико при сравнительно низких токах и оно уменьшается, сходя на нет, при приближении величины тока к предельному значению для существования подвижных страт ($i_{\text{пред}} = 15$ ма). Менее значительный, но аналогичный по своему характеру эффект обнаруживается также и в смеси Ar—Hg ($i_{\text{пред}} = 90$ ма).

В таблице 4 приведены данные, показывающие увеличение частоты ν подвижных страт на $\Delta\nu$ под действием освещения.

Явление ослабления подвижных страт в результате освещения можно, по-видимому, обсудить на основе вывода работы [14], согласно которому возможность усиления страт обусловливается наличием в положительном столбе ступенчатой ионизации. По нашему мнению, это положение нельзя принимать как общее правило для любого случая. Но при некоторых обстоятельствах, позволяющих пренебречь другими факторами, также могущими влиять на процесс усиления, оно может соответствовать фактам. В последнем случае освещение должно вести к ослаблению страт.

Наблюдаемый при освещении рост частоты ν , по-видимому, связан с повышением напряженности электрического поля в положительном

Таблица 4

Влияние освещения на частоту подвижных страт в разряде в Ne и Ar при давлении 3,5 мм рт. ст. с примесью $3 \cdot 10^{-3}$ мм рт. ст. Hg. Радиус трубки 1,1 см, ν — частота в отсутствие освещения

Газ	i (ма)	4	6	9	12	14
		Ne—Hg	ν (гц) 610	790	1070	1140
	$\Delta\nu$ (гц)	100	95	70	40	30
Ar—Hg	i (ма)	2	6	10	15	30
	ν (гц)	425	630	780	870	950
	$\Delta\nu$ (гц)	45	24	20	15	10

столбе*. В упомянутой выше работе [14] дается дисперсионное соотношение (уравнение (12)) для подвижных страт. Из него следует, что при неизменной длине страт частота их должна расти с ростом электрического поля.

в) Длина страт и падение напряжения на длине страт. На рис. 3, 4 показаны кривые зависимости длины страт L от величины

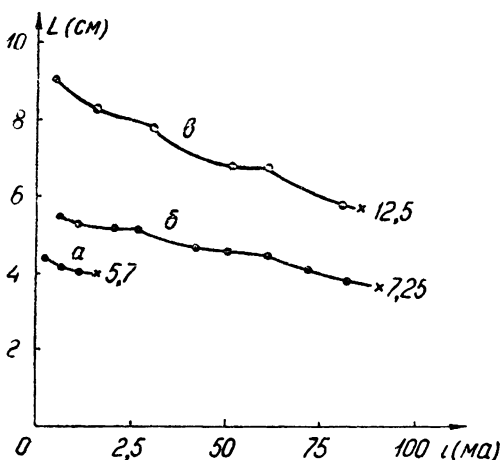


Рис. 3. Длина подвижных страт L в зависимости от величины тока i при разряде в смеси:

а) неона (3,5 мм рт. ст.) с ртутью; б) аргона (3,5 мм рт. ст.) с ртутью; в) аргона (3,5 мм рт. ст.) с ртутью. Радиус трубки R в случаях а и б — 1,1 см, в случае в — 1,8 см.

тока i . На них положения крестиков соответствуют предельным значениям силы тока. Для сравнения цифрами у кривых представлены длины страт в см для чистых газов при этих предельных токах. Можно видеть, что вблизи $i_{\text{пред}}$ длина L в смесях получается значительно меньше, нежели в чистых газах.

Определение падения напряжения на длине страт U_L связано с измерением напряженности электрического поля E в положительном столбе. Такие измерения велись в Ar—Hg и Kr—Hg с помощью пары зондов. Значения $U_L = EL$ приведены на рис. 5 и 6 (цифры у кривых дают значения U_L в вольтах для чистых газов).

* Освещение вызывает некоторое уменьшение тока. В опытах величина тока при каждом измерении приводилась к одному значению путем увеличения напряжения на электродах.

Обычно принято считать, что для неподвижных страт U_L мало зависит от тока и приблизительно совпадает с наимизшим потенциалом возбуждения газа. К неподвижным стратам подобное соображение в общем случае, безусловно, неприменимо. Как показали наблюдения

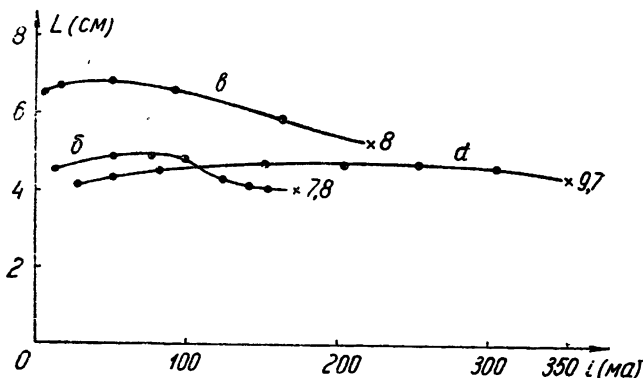


Рис. 4. Длина подвижных страт L в зависимости от величины тока i при разряде в смеси:

а) аргона (0,7 мм рт. ст.) с ртутью, б) аргона (2 мм рт. ст.) с ртутью, в) криптона (2 мм рт. ст.) с ртутью. Радиус трубки 1,1 см.

одного из авторов, в аргоне при давлении 2 мм рт. ст. ($R=1,5$ см) величина U_L непрерывно уменьшается с ростом тока от 11,3 в при токе 200 ма до 3,6 в при 900 ма. Для подвижных страт в неоне при

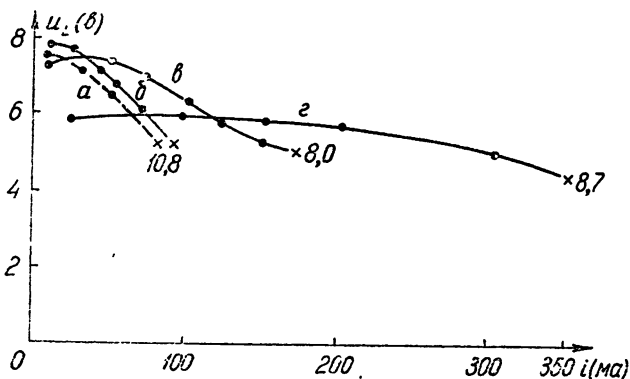


Рис. 5 Падение напряжения U_B на длине страты при разряде в смеси аргона с ртутью при давлении газа:

а) 3,5 мм рт. ст. ($R=1,8$ см), б) 3,5 мм рт. ст. ($R=1,1$ см); в) 2 мм рт. ст. ($R=1,1$ см), г) 0,7 мм рт. ст. ($R=1,1$ см).

давлении 2 мм рт. ст. ($R=1$ см) при токах 10, 18 и 100 ма U_L имеет соответственно значения 9,2, 18,6 и 17,2 в.

Вместе с тем было обнаружено, что в достаточно широкой области

токов (от нескольких десятков до нескольких сот *ма*) по крайней мере для случаев He, Ne и Ag величина U_L изменяется в том же порядке, в каком изменяется ионизационный потенциал газа.

Возвращаясь к рис. 5 и 6, заметим, что для весьма различных условий, указанных на этих рисунках, величины U_L при токах исчезновения страт заключены в пределах 4,7—5,2 в. Они близки к резонансному потенциалу 6^3P_1 (4,9 в) и метастабильным потенциалам 6^3P_2 и 6^3P_0 (5,4 и 4,6 в) ртути. Этот результат можно рассматривать как следствие преобладающей роли ионизации атомов ртути в ионизационных процессах в положительном столбе при токах порядка и выше $i_{\text{пред}}$. Это заключение находится в соответствии с выводом, сделанным в разделе 3а, о преобладании ионов ртути в смеси при таких условиях.

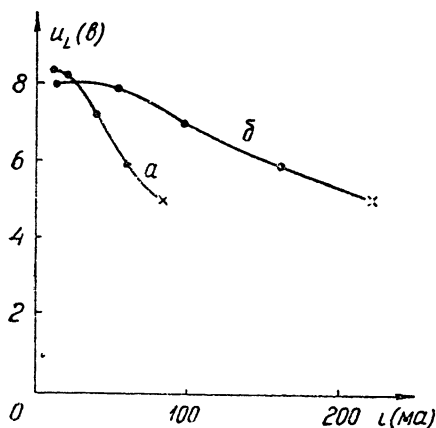


Рис. 6. Падение напряжения на длине страты. Радиус трубки 1,1 см:
а) 3,5 мм Кг+Hg, б) 2 мм Кг+Hg.

Проведенные эксперименты обладали некоторыми недостатками, связанными с отсутствием термостатированных трубок: вследствие нагревания стенок давление паров менялось с изменением величины тока в разряде. Между тем, поддержание постоянной плотности паров имеет существенное значение для получения вполне определенных результатов. Так, в случае 4 мм рт. ст. Ag+Hg ($R = 1,1$ см), когда ток повышался постепенно, так что стенки успевали при этом принимать температуру, соответствующую изменившемуся току, страты исчезали при $i = 90$ ма. Но когда ток увеличивался достаточно быстро, страты наблюдались вплоть до $i = 150$ ма. Это обстоятельство указывает как раз на то, что с повышением плотности ртути при прочих равных условиях величина предельного тока заметно уменьшается.

Однако полученные данные позволяют составить общее представление о характере влияния примеси ртути к инертным газам на условия существования в них подвижных страт и на их свойства. Найдено, что добавление ртути приводит к уменьшению величины верхнего предельного значения для тока, при котором подвижные страты существуют. Имеется определенная связь между этим явлением и вкладом ионизации атомов ртути в ионизационный баланс в положительном столбе. Ориентировочные оценки показывают, что страты исчезают, когда ионизация Hg становится преобладающим фактором в процессах образования носителей зарядов. Подобное заключение качественно подтверждается еще тем, что при таких исчезновениях страт падение напряжения на длине страт в смесях Ag—Hg и Кг—Hg получаются близкими по величине к потенциалам возбуждения уровней 6^3P ртути.

Не является невероятным, что в механизме усиления страт определенную роль играет ступенчатая ионизация, согласно гипотезе, высказанной в [14]. Это заключение относится к случаям смесей газов с парами Hg; однако его преждевременно распространять на все случаи.

Добавление ртути к Ag и Ne уменьшает частоту и размах коле-

баний анодного падения напряжения по сравнению с колебаниями в чистых газах, свободных от Hg. Путем надлежащего выбора конструкции анода колебания ионизации в анодной области могут быть полностью устранены.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Josimoto, J. Phys. Soc., **8**, 59 (1953); **8**, 69 (1953).
2. C. Kenty, Phys. Rev., **80**, 95 (1950).
3. А. А. Зайцев и М. Я. Васильева, ДАН СССР, **127**, 63 (1959).
4. А. А. Зайцев и К. Эфендиев, Изв. АН СССР, сер. физ., **23**, 1012 (1959).
5. Б. Н. Клярфельд и Л. И. Первова, ЖТФ, **15**, 640 (1945).
6. Б. Н. Клярфельд и Н. А. Неретина, ЖТФ, **28**, 296 (1958); **29**, 15 (1959).
7. W. Purr, Phys. Zts., **33**, 844 (1932).
8. B. Naumonth, F. Bitter, J. Appl. Phys., **27**, 122 (1956).
9. А. Энгель, Ионизированные газы, Физматгиз, М., 1959.
10. В. А. Фабрикант, Сб. Электронные и ионные приборы, Гос. энерг, изд, М, 1940.
11. C. Kenty, J. Appl. Phys., **21**, 1309 (1950).
12. Б. Н. Клярфельд, ЖТФ, **5**, 913 (1939); ДАН СССР, **24**, 251 (1939).
13. H. Robertson, Phys. Rev., **105**, 368 (1957).
14. H. Rother, Ann. Phys., **4**, 373 (1959); **5**, 252 (1950).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
5 ноября 1961 г.

THE OSCILLATIONS OF IONIZATION IN DISCHARGE IN MIXTURES OF INERT GASES AND MERCURY VAPOUR

A. A. Zaitsev, M. Ya. Vasiljeva

Results are given of the investigation of ionization oscillations both in anode region (anode oscillations) and a positiv column (moving strata) when discharge takes place in mixtures of mercury vapour and helium, neon, argon or krypton.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ В МНОГОРЕЗОНАТОРНОМ МАГНЕТРОНЕ (плоская модель)

В. Е. Нечаев

На основе плоской модели рассматривается движение электронов в пространстве взаимодействия многорезонаторного магнетрона. Проводится анализ усредненных траекторий электронов с различными фазами вылета из катода. Рассматривается группировка электронов в «спицы» пространственного заряда при различных электрических режимах. Производится расчет высокочастотной мощности, отдаваемой электронами полю, и тока, наведенного на колебательную систему.

Исследование автоколебаний магнетронного генератора связано, в первую очередь, с выяснением зависимости тока, наведенного на колебательную систему, от величины напряжения на последней. Задача о наведенном токе решалась приближенно в монографии [1]; полученные при этом соотношения легли в основу всех дальнейших расчетов в этой работе. Следует отметить, что все решение в [1] справедливо только в установившемся режиме автоколебаний, а форма облака пространственного заряда и характер движения электронов заданы весьма приближенно. Решение содержит в качестве параметров величины полного анодного тока и угла рассогласования электронной «спицы» с волной высокочастотного поля. Последние сами зависят от величины высокочастотного напряжения на резонаторном блоке, и выяснение этих зависимостей необходимо для исследования поведения изображающей точки на фазовой плоскости автогенератора (хотя бы вблизи предельного цикла).

Ниже излагается приближенный способ расчета величин наведенного тока и мощности для плоской модели многорезонаторного магнетрона*. Расчет проводится на основе предварительного рассмотрения задачи о движении электронов в заданных полях системы и не содержит параметров, зависящих от высокочастотного напряжения. Вопросы, связанные с особенностями автоколебаний магнетронного генератора, здесь рассматриваться не будут; по своему характеру они могут служить предметом отдельного исследования.

Точные решения задачи о движении электронов в пространстве взаимодействия многорезонаторного магнетрона и о группировании пространственного заряда в «спицы» могут быть получены только численными методами [2]. Использование этих решений для дальнейших расчетов на каждой конкретной модели весьма затруднительно. Ценность приближенных аналитических решений связана именно с возможностями последующего анализа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Пренебрегая действием полей пространственного заряда, рассмотрим в нерелятивистском приближении движение электронов в плоской мо-

* Автор намерен опубликовать аналогичный анализ для цилиндрической модели.

дели многорезонаторного магнетрона (рис. 1). Следующие уравнения описывают движение электронов в принятых идеализациях:

$$\frac{m}{|e|} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} - B \frac{dx}{dt}; \quad (1)$$

$$\frac{m}{|e|} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{dy}{dt}, \quad (1a)$$

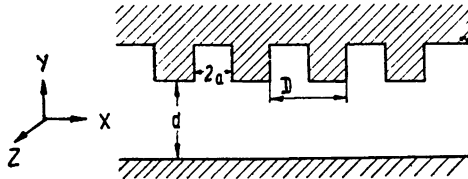


Рис 1 Выбор координатной системы и геометрических параметров пространства взаимодействия.

где $|e|/m$ — удельный заряд электрона. B — магнитная индукция, U — скалярный электрический потенциал. Для колебаний π -вида потенциал может быть представлен в виде:

$$U(x, y, t) = U_0 \frac{y}{d} - 2 \frac{U_1}{\pi} \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\sin(m\beta a)}{m\beta a} \frac{\text{sh}(m\beta y)}{\text{sh}(m\beta d)} \times \\ \times \sin(m\beta x) \cos(\omega t) = U_0 \frac{y}{d} + \frac{U_1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)} \times \\ \times \frac{\sin[(2n+1)\beta a]}{(2n+1)\beta a} \frac{\text{sh}[(2n+1)\beta y]}{\text{sh}[(2n+1)\beta d]} \sin[\omega t - (2n+1)\beta x]. \quad (2)$$

Здесь ω — круговая частота колебаний, U_1 — амплитуда высокочастотного напряжения между соседними сегментами резонаторного блока, U_0 — постоянное напряжение между анодом и катодом, $\beta = \pi/D$, а геометрические параметры D , d и a определены согласно рис. 1.

Переходя к сопровождающей системе отсчета, связанной с основной пространственной гармоникой волны поля, и принимая во внимание только действие на электроны со стороны основной гармоники, можно преобразовать (1) и (1a) к виду:

$$-\frac{\omega}{\omega_H} \dot{X} + \dot{Y} = \alpha_1 \text{sh} Y \cos X; \quad (3)$$

$$\frac{\omega}{\omega_H} \ddot{Y} + \dot{X} = \alpha_0 - \alpha_1 \text{ch} Y \sin X, \quad (3a)$$

где $\omega_H = \frac{|e|}{m} B$ — циклотронная частота, а точка означает дифференцирование по $T = \omega t$. Здесь введены и всюду далее употребляются следующие безразмерные параметры и переменные:

$$\alpha_1 = \frac{U_1}{U_{0n}} \frac{d}{D} \left(\frac{\sin \beta a}{\beta a} \right) \frac{1}{\text{sh} \beta d}; \quad \alpha_0 = \frac{U_0 - U_{0n}}{U_{0n}}, \quad (4)$$

где $U_{оп} = dV\omega/\beta$,

$$Y = \beta y, \quad X = \beta x - \omega t. \quad (5)$$

2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Введем новые переменные $Z = X + jY$ и $\Theta = \omega_H t$. Тогда уравнения движения (3) и (3а) сводятся к уравнению:

$$\frac{d^2 Z}{d\Theta^2} + j \frac{dZ}{d\Theta} = j \frac{\omega}{\omega_H} (\alpha_0 - \alpha_1 \sin Z^*). \quad (6)$$

Если бы правая часть (6) была равна нулю, то электрон в сопровождающей системе отсчета двигался бы по кругу с безразмерным радиусом ω/ω_H и безразмерной скоростью ω/ω_H (начальная скорость).

Если правая часть (6) мала по сравнению с ω/ω_H , то движение несколько отличается от движения по кругу с циклотронной частотой. Для большинства магнетронов, как показывает расчет*, в режиме установившихся автоколебаний величина правой части (6), соответствующая наиболее интенсивному переменному полю непосредственно у поверхности анода, составляет $(0,3 \div 1,0) \omega/\omega_H$, а отступя от поверхности анода на одну треть расстояния анод-катод $(0,08 \div 0,3) \omega/\omega_H$. Из сказанного видно, что в большей части пространства взаимодействия, где происходит процесс формирования „спицы“ пространственного заряда, предположение о малом отличии истинного движения от движения по кругу с циклотронной частотой приближенно выполняется.

Известно [3], что электроны в системах со слабо неоднородными электрическим и магнитным полями совершают движения по окружностям, центр которых медленно дрейфует в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. В нашем случае, однако, действующее на электрон электрическое поле (статическое в выбранной системе координат) заметно меняется на протяжении описываемой электроном петли траектории. Но в силу малости правой части (6) мы будем все же предполагать, что движение электрона представляет собой квазиравномерное вращение с периодом, почти равным периоду циклотронной частоты, по кривой, близкой к окружности, центр которой медленно смещается в плоскости (X, Y) , т. е.

$$Z = r + Re^{-j(\Theta + \psi)},$$

где r — координата центра окружности радиуса R , передающая среднее движение электрона, а ψ — некоторая медленно изменяющаяся фаза. Интегрируя (6) в пределах (Θ_0, Θ) , можно получить при условии $|dr/d\Theta|$, $dR/d\Theta \ll R$ и $d\psi/d\Theta \ll 1$:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\Theta} = \frac{dr}{d\Theta} + \frac{d}{d\Theta} [Re^{-j(\Theta + \psi)}] = \frac{dZ}{d\Theta} \Big|_{\Theta = \Theta_0} e^{-j(\Theta - \Theta_0)} + \sigma_0 \frac{\omega}{\omega_H} (1 - e^{-j(\Theta - \Theta_0)}) + \\ + \alpha_1 \frac{\omega}{\omega_H} e^{-j(\Theta + \psi)} \{ \cos(r^* + Re^{j(\Theta + \psi)}) - \cos(r^* + Re^{j(\Theta_0 + \psi)}) \}. \end{aligned} \quad (7)$$

* Способ формального перехода от цилиндрических конструкций к плоской модели указан ниже, в разделе 3

Усредняя (7) по периоду вращения электрона, получим:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\omega}{\omega_H} (\sigma_0 - \alpha_1 \sin r^*) \quad (8)$$

или

$$\dot{r} = \sigma_0 - \alpha_1 \sin r^*. \quad (8a)$$

Разделяя действительную и мнимую части (8a), для составляющих средней скорости получим:

$$\dot{X} = \alpha_0 - \alpha_1 \operatorname{ch} Y \sin X; \quad (9)$$

$$\dot{Y} = \alpha_1 \operatorname{sh} Y \cos X. \quad (9a)$$

В (9), (9a) и всюду далее опущен индекс усреднения, так как лишь движение по усредненной траектории будет приниматься во внимание.

Видно, что (9) и (9a) можно получить из (3) и (3a) отбрасыванием членов, отражающих ускорение. Несмотря на то, что электрическое поле нельзя считать однородным на протяжении петли траектории, уравнения для дрейфа в первом приближении получились такими же, как если бы условие квазиоднородности электрического поля выполнялось*. Отметим также, что часто налагаемое в сходных задачах требование „квизизамкнутости“ петли траектории $|dr/d\theta| \ll R/2\pi$ является более жестким, чем условие $|dr/d\theta| \ll R$, при котором справедливы полученные выше соотношения для средних скоростей.

Система уравнений (9), (9a) автономна и допускает простое интегрирование. Дифференциальное уравнение для средней траектории получим, поделив (9) на (9a):

$$\frac{dX}{dY} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 \operatorname{ch} Y \sin X}{\alpha_1 \operatorname{sh} Y \cos X}. \quad (10)$$

Интегрируя (10) в квадратурах, легко найти уравнение средней траектории:

$$\alpha_0 Y - \alpha_1 \operatorname{sh} Y \sin X = \text{const.} \quad (11)$$

3. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Проведем анализ уравнений (9), (9a), (10) и (11), определяющих характер движения электронов в пространстве взаимодействия.

Как видно из (11), средняя траектория электрона определяется отношением α_0/α_1 и выбором начальной точки. Если высокочастотное напряжение отсутствует ($\alpha_1 = 0$), то траектория электрона является циклоидой, которая в сопровождающей системе отсчета в случае $\alpha_0 = 0$ представляет собой круг, а при $\alpha_0 \neq 0$ — трохоиду, так что средняя траектория тогда представляет собой прямую линию $Y = (\omega/\omega_H)(1 + \alpha_0)$. В качестве начальной координаты Y_0 средней траектории при наличии высокочастотного поля будем выбирать $Y_0 = (\omega/\omega_H)(1 + \alpha_0)$, предполагая, что высокочастотное поле незначительно изменяет движение по первой петле траектории. Начальная координата X_0 средней траектории может быть, естественно, любой. Из (9a) видно, что электроны, вылетевшие из катода в „благоприятной“ фазе $2\pi(n + 1/4) \geq X_0 \geq 2\pi(n - 1/4)$,

* Возможно, этот результат является следствием специального характера поля в данной задаче; однако ясно, что условие квазиоднородности поля на петле траектории является достаточным, но не обязательным для получения решения в первом приближении в том же виде.

где n —любое целое число, начинают двигаться в направлении к аноду и отдавать энергию высокочастотному полю.

На рис. 2 представлены средние траектории электронов, вылетевших при различных начальных фазах, для нескольких значений отношения σ_0/α_1 . Здесь указаны и линии синхронизма (пунктиром), т. е. кривые

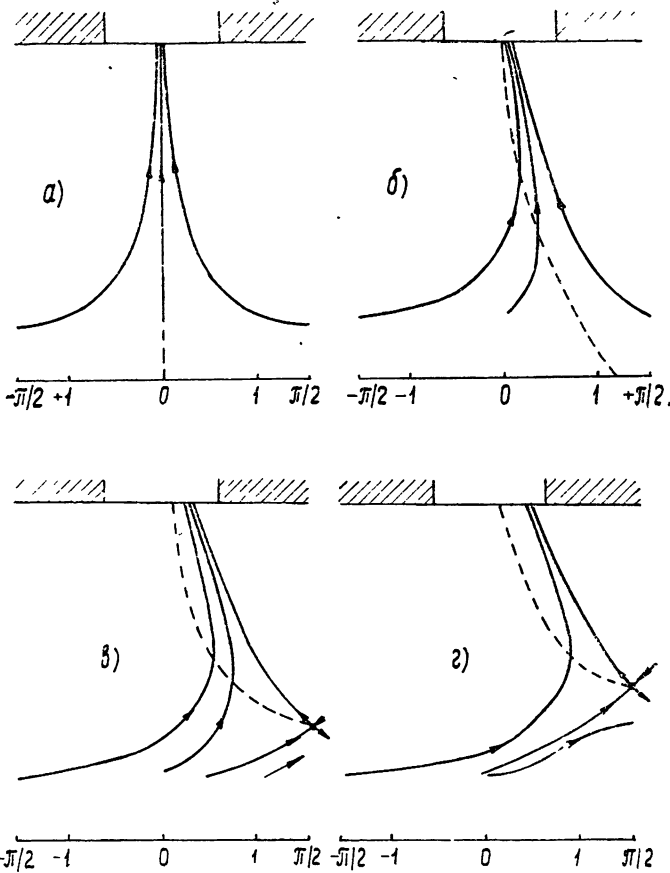


Рис. 2. Средние траектории электронов при $\beta d = 3,6$; $\omega/\omega_H = 0,6$;
 $\alpha_1 = 1/\text{sh } \beta d = 1/18,3$;
 а) $\alpha_0 = 0$; б) $\alpha_0 = 0,05$; в) $\alpha_0 = 0,1$; г) $\alpha_0 = 0,15$

$\dot{X} = 0$. Как видно из (9) и (10), лишь траектория одного электрона (с $X_0 = 0$) и только в случае $\alpha_0 = 0$ совпадает с линией синхронизма. Все электроны слева от линии синхронизма имеют $\dot{X} > 0$, а справа $\dot{X} < 0$. Однако линию $\dot{X} = 0$ можно считать геометрической осью „спицы“ только в случае $\alpha_0 = 0$ (рис. 2а). Когда последнее условие не выполнено, средние траектории (рис. 2б, в, г) пересекают линию синхронизма и располагаются по одну сторону от нее вблизи анода. Поэтому линия $\dot{X} = 0$ является только фазовой, но не геометрической, осью „спицы“ пространственного заряда в общем случае. Траектории крайних электронов в „спице“ (когда особой точки нет, о чем см. ниже) определяются соотношением:

$$\sin X_{\text{кр}} = \frac{(\alpha_0/\alpha_1) (Y - Y_0) \pm \text{sh } Y_0}{\text{sh } Y}. \quad (12)$$

Уравнение траектории среднего электрона ($X_0 = 0$) имеет вид:

$$\sin X_{\text{cp}} = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \frac{(Y - Y_0)}{\text{sh } Y_0}. \quad (13)$$

Из (13) видно, что понятие угла рассогласования „спицы“ с волной поля имеет относительную ценность, поскольку X -координата среднего электрона может сильно зависеть от координаты Y . Однако если определить угол рассогласования как сдвиг середины „спицы“ по отношению к волне поля вблизи анода, то этот угол имеет значение:

$$X_p = \arcsin \left(\frac{Y_a - Y_0}{\text{sh } Y_a} \right), \quad (14)$$

где $Y_a = \beta d$. Что касается ширины „спицы“, то надо отметить, что вблизи анода она определяется, в первую очередь, амплитудой вращательного движения электронов, а не крайними усредненными траекториями, которые вблизи анода отстоят друг от друга очень мало (рис. 2) (для разумных геометрических параметров, соответствующих реальным системам, $d \approx D$ или d немного больше D). Из (11) можно видеть, что средние траектории не пересекаются. Это обстоятельство будет принято во внимание при расчете наведенного тока и высокочастотной мощности, отдаваемой электронами полю.

Наличие медленного дрейфа электронов относительно основной гармоники волны поля показывает, что часто налагаемое требование жесткого синхронизма электронов с волной поля на самом деле не выполняется. Обычный вывод порогового соотношения [1,4] поэтому выглядит искусственным. Ниже будет показано, что сколь угодно малое высокочастотное поле не может обеспечить попадание электронов на анод в случае $\alpha_0 \neq 0$ (а в случае цилиндрической конструкции — ни при каких постоянных напряжениях на аноде). Поэтому определение порогового напряжения как напряжения, при котором сколь угодно слабое высокочастотное поле способно доставить электроны из прикатодной области на анод, вряд ли отвечает физической сущности явлений. Магнетрон никогда не генерирует в установившемся режиме колебаний π -вида сколь угодно малой величины (т. е. является генератором с жестким возбуждением), и в этом случае переменное поле в пространстве взаимодействия всегда достаточно для увлечения электронов к аноду. Что касается неустановившегося режима (нарастание колебаний), то постоянная составляющая наведенного тока может существовать в этом случае и без непосредственного оседания электронов на аноде.

Прежде чем получить условие попадания электронов на анод в плоской модели магнетрона, рассмотрим особые точки уравнения (10). При $X = \pm \pi/2$ всегда $\dot{Y} = 0$. Когда линия синхронизма $\dot{X} = 0$ пересекает любую из прямых $X = \pm \pi/2$, тогда уравнение средней траектории имеет особую точку типа седла (рис. 2в). Особая точка существует, если $|\alpha_0/\alpha_1| \geq 1$, при $Y' = \text{arch } |\alpha_0/\alpha_1|$. Если $Y' > Y_0$, то часть электронов, вылетевших в „благоприятной“ фазе, переходит через линию $X = \pi/2$ (или $X = -\pi/2$ — в зависимости от знака α_0) в область „неблагоприятных“ фаз и движется там к катоду таким образом, что средние траектории являются зеркальным отражением средних траекторий в области „благоприятных“ фаз относительно линии $X = \pi/2$. Если учесть, что электрон совершает быстрое вращательное движение относительно медленного переносного, то ясно, что электроны, перешедшие в область „неблагоприятных“ фаз, значительно усиливают бомбардировку катода по сравнению с электронами, эмиттированными в „неблагопри-

ятной“ фазе и возвращающимися на катод в конце первой петли траектории.

Одна из асимптот (интегральная кривая, проходящая через особую точку семейства кривых, определяемых (11)) может пересечь линию $Y = Y_0$ при некотором $X = X_0$ в области „благоприятных“ фаз. Тогда все усредненные траектории по одну сторону асимптоты повернут к аноду (т. е. электроны будут „захвачены“ высокочастотным полем), а по другую сторону (рис. 2 в, г) совершенно симметрично относительно прямой $X = \pi/2$ (или $X = -\pi/2$, если $\alpha_0 < 0$) повернут к катоду. Уравнение асимптоты имеет вид:

$$\sin X = \frac{(\alpha_0/\alpha_1)(Y - Y') + \operatorname{sh} Y'}{\operatorname{sh} Y}. \quad (15)$$

Если σ_0/α_1 увеличивать, то координата Y' особой точки может настолько возрасти, что асимптота перестанет пересекать линию $Y = Y_0$, т. е. существует некоторое критическое значение отношения $(\sigma_0/\alpha_1)_k$, соответствующее моменту, когда электроны перестанут попадать на анод. Таким образом, электроны могут быть „захвачены“, увлечены высокочастотным полем на анод, только начиная с определенного конечного α_1 при $\sigma_0 \neq 0^*$.

Оценим полное время пролета электронов от катода до анода. Как видно из (9а), быстрее других движется к аноду электрон, средняя траектория которого имеет меньшее значение X . Пусть $\sigma_0 = 0$ (при $\sigma_0 \neq 0$ время пролета увеличивается); тогда самый „быстрый“ электрон расположен в центре „спицы“. Для выбранного электрона усредненное уравнение движения имеет очень простой вид:

$$\dot{Y} = \alpha_1 \operatorname{sh} Y. \quad (16)$$

Интегрируя (16), легко получить выражение для числа периодов циклотронной частоты, в течение которых электрон доходит до анода:

$$n = \frac{1}{2\pi\alpha_1} \frac{\omega_H}{\omega} \ln \frac{\operatorname{th} Y_a/2}{\operatorname{th} Y_0/2}. \quad (17)$$

Можно выполнить формальный переход от цилиндрической конструкции к плоской модели, если принять:

$$d = r_a - r_k; \quad D = \pi(r_a + r_k)/N; \quad Y_a = (r_a - r_k)N/(r_a + r_k); \quad (18)$$

$$U_{0n} = (r_a^2 - r_k^2)\omega B/N; \quad \beta a = N\varphi/2,$$

где r_a, r_k — радиусы анода и катода, N — число резонаторов блока, φ — угловая полуширина щелей резонаторов.

Оценки, выполненные для типичных рабочих режимов магнетронов, данные о которых приведены в [1], показывают, что самые быстрые электроны совершают свой путь от катода до анода за 5 + 15 периодов циклотронной частоты (3 + 8 периодов рабочей частоты).

4. РАСЧЕТ МОЩНОСТИ, ОТДАВАЕМОЙ ЭЛЕКТРОНАМИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМУ ПОЛЮ

На основании результатов анализа фазовой фокусировки электронов в пространстве взаимодействия можно рассчитать величину мощности, отдаваемой электронами высокочастотному полю, выбрав при этом

* Величины α_0 и α_1 связаны при автоколебаниях определенной зависимостью, выяснение которой выходит за пределы настоящей статьи.

в качестве параметра среднюю величину плотности пространственного заряда у основания „спицы“.

Можно показать, что электрон, движущийся по кругу, центр которого, согласно (8), медленно дрейфует в плоскости (X, Y) в полях междуэлектродного пространства магнетрона (2), отдает в среднем за период вращательного движения такую же мощность, что и электрон, движущийся по линии дрейфа (в тех же предположениях, в которых справедливо решение в разделе 2). Поэтому для расчета величины мощности примем следующую модель. Заменим истинное движение электронов движением их по усредненным траекториям. Выделим из „спицы“ пространственного заряда некоторую двухмерную трубку тока, что всегда можно сделать, поскольку средние траектории не пересекаются. Пусть это будет трубка, ограниченная двумя сколь угодно близкими траекториями, такими, что постоянные в правой части (11) соответственно равны G и $G + \Delta G$. Тогда расстояние между ними в плоскости, параллельной электродам, равно

$$\Delta X = -\Delta G/\alpha_1 \operatorname{sh} Y \cos X. \quad (19)$$

Принимая во внимание закон сохранения тока в трубке:

$$\rho \dot{Y} \Delta X = \text{const}, \quad (20)$$

где ρ —плотность пространственного заряда, можно видеть из (9а), (19) и (20), что плотность внутри трубки тока остается неизменной, т. е. электрическая жидкость в выбранной модели ведет себя как несжимаемая. Если далее предположить, что вдоль основания „спицы“ плотность неизменна, то тогда всюду внутри „спицы“ она остается одной и той же и совпадает по величине с плотностью при $Y = Y_0$ ($\rho = \rho_0$)*.

Величина мощности, отдаваемой электронами одной „спицы“ высокочастотному полю, учитывая предыдущее, может быть представлена в виде:

$$P = - \int_V (\mathbf{J}\mathbf{E}) dV = - |\rho_0| \int_V (\mathbf{v}\nabla U) dV, \quad (21)$$

где \mathbf{J} —плотность тока, \mathbf{E} —высокочастотное электрическое поле, \mathbf{v} —средняя скорость электронов, V —объем „спицы“ (границы интегрирования $Y_a \geq Y \geq Y_0$, $X_{\text{кр}2} \geq X \geq X_{\text{кр}1}$; здесь $X_{\text{кр}1,2}$ определены из (12)). Если режим таков, что (10) имеет особую точку типа седла, то в качестве одной из границ надо, естественно, взять асимптоту (15). Электроны, переходящие в этом случае в область „неблагоприятных“ фаз, вклада в (21) не дадут.

Из (21), (2) и (9), (9а) нетрудно получить для средней за период мощности выражение

$$P = \alpha_1 \frac{\hbar \omega^2}{\beta^4} |\rho_0| B (1 + \sigma_0) [Y_a - Y_0] 2 \operatorname{sh} Y_0, \quad (22)$$

когда особой точки нет или особая точка есть, но $Y' \leq Y_0$, и

$$P = \alpha_1 \frac{\hbar \omega^2}{\beta^4} |\rho_0| B (1 + \sigma_0) [Y_a - Y_0] \left\{ \frac{|\alpha_0|}{\alpha_1} \times \right. \\ \left. \times (Y_0 - Y') + \operatorname{sh} Y' + \operatorname{sh} Y_0 \right\}, \quad (22a)$$

* Здесь имеется в виду не истинная плотность пространственного заряда, а плотность мысленно введенных зарядов, движущихся по линиям дрейфа. Поскольку скорость отбора электронов полем из прикатодного слоя зависит от координаты X_0 , указанное предположение может быть справедливо только в режиме ограничения катодного тока пространственным зарядом.

когда особая точка есть и $Y' \geq Y_0$. Здесь h — высота блока по z . Если α_0/α_1 увеличивать, то величина в фигурных скобках в (22а) будет изменяться, уменьшаясь до нуля, когда электроны перестанут попадать на анод, в соответствии с графиком рис. 3. Ясно, что такой характер

зависимости мощности „накачки“ от амплитуды переменного напряжения должен приводить к устойчивому предельному циклу при достаточно добротной колебательной системе.

Чтобы сопоставить полуценную формулу мощности (22), (22а) с уже известными соотношениями, выразим величину мощности через полный ток, для чего определим сначала связь полного анодного тока с амплитудой высокочастотного поля. Нетрудно видеть, что в выбранной модели постоянный анодный ток, создаваемый электронами одной „спицы“, равен

$$I_0 = |\rho_0| \frac{\hbar\omega}{\beta^2} \alpha_1 \operatorname{sh} Y_0 2, \quad (23)$$

Рис. 3. Зависимость мощности, отдаваемой электронами высокочастотному полю, от величины высокочастотного напряжения при различных анодных напряжениях.

когда $Y' \leq Y_0$ или нет особой точки, и

$$I_0 = |\rho_0| \frac{\hbar\omega}{\beta^2} \alpha_1 \left\{ \frac{|\alpha_0|}{\alpha_1} (Y - Y') + \operatorname{sh} Y' + \operatorname{sh} Y_0 \right\}, \quad (23a)$$

когда $Y' \geq Y_0$. Из (22), (23а) и (23), (23а), исключая ρ_0 , нетрудно получить:

$$P = I_0 U_0 (1 - Y_0/Y_a). \quad (24)$$

Формула (24) дает для величины мощности значения, почти вдвое большие, чем это следует из формулы (2.91) монографии [1]. Возможно, что расхождение обусловлено занижением средней плотности в [1], поскольку вместо среднего значения величины радиальной скорости в „спице“ в указанной работе выбрано максимальное значение, соответствующее моменту прохождения „спицы“ под серединой щели резонатора.

Из (24) видно, что электронный коэффициент полезного действия равен

$$\eta_e = 1 - Y_0/Y_a. \quad (25)$$

Если, как обычно, ввести потенциал синхронизации $U_c = \omega^2 m/2 |e| \beta^2$, то (25) нетрудно привести к виду:

$$\eta_e = 1 - 2U_c U_0 / U_{0n}^2. \quad (26)$$

Следует отметить, что очень хорошего согласия с результатами экспериментов ожидать в данном случае трудно, так как в реальных цилиндрических конструкциях распределение постоянной во времени части потенциала может отличаться от линейного (для большей части пространства взаимодействия оно близко к логарифмическому) и, кроме

того, синхронизм электронов по всей высоте электронной „спицы“ ни при каких электрических режимах не выполняется*.

Сопоставим результаты экспериментов, данные о которых опубликованы в [2,4], с результатами расчета по следующей формуле, которая получается из (26) формальным переходом (18) к цилиндрической модели:

$$\eta_e = 1 - \frac{4r_a^2 U_0}{(r_a^2 - r_k^2)^2 |e/m| B^2}, \quad (27)$$

так как в этом случае $U_c = (2\omega r_a / N)^2 / 2 |e/m|$. Результаты расчета по (27) и экспериментальные данные содержатся в таблице 1.

Таблица 1

Тип лампы	r_a/r_k	η_e эксп	η_e теор
4J52	1,53	6 %	73 %
2J55	2,02	50 %	57 %
4J45	2,65	68 %	79 %
LCW	1,65	70 %	77 %
725A	2,00	52 %	75 %
HP10V	1,98	40 %	57 %

Из таблицы видно, что в „квазиплоских“ случаях формулы (26) и (27) достаточно точно (в пределах 10%) передают величину электронного КПД. Поэтому можно считать, что принятая для расчета модель оправдана. Однако нужно еще раз подчеркнуть, что хороших количественных совпадений результатов приближенной теории с экспериментом можно ожидать только из анализа цилиндрической конструкции. Плоская модель качественно правильно передает зависимость отдаваемой электронами мощности от параметров и может быть поэтому использована для рассмотрения некоторых вопросов, связанных с колебаниями магнетронного автогенератора.

Отметим, что в случае линейного распределения постоянного потенциала вклад в полезную мощность от всех горизонтальных слоев „спицы“ равной ширины по u одинаков (в этом можно убедиться при интегрировании (21), т. е. при выводе соотношений (22), (22а)). Энергообмен электронов с полем, таким образом, происходит с равной эффективностью по всей высоте „спицы“ пространственного заряда. Электроны по мере движения к аноду попадают в области все более сильного поля, но при этом их радиальная скорость сильно возрастает и плотность (истинная) уменьшается. Поэтому нельзя ожидать хороших результатов от рассмотрения моделей с дискретным взаимодействием электронного потока в магнетроне с сосредоточенным полем щелей резонаторов.

5. РАСЧЕТ ОСНОВНОЙ ГАРМОНИКИ НАВЕДЕННОГО ТОКА

Зависимость основной гармоники наведенного тока от параметров системы и от величины высокочастотного напряжения на резонаторном блоке интересна для более подробного рассмотрения поведения системы вблизи предельного цикла (сюда примыкают вопросы электронной перестройки, флуктуации амплитуды и фазы и т. д.). Наведенный ток, как и в [1], рассчитаем по теореме Шокли—Рамо. В лабораторной системе

* Результаты анализа для цилиндрической модели вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

отсчета потенциал, удовлетворяющий условиям теоремы Шокли—Рамо (с учетом только основной пространственной гармоника стоячей волны), имеет вид:

$$U^0 = -\frac{2}{\pi} \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} \frac{\text{sh}(\beta y)}{\text{sh}(\beta d)} \sin(\beta x). \quad (28)$$

Заметим, что напряжение на колебательной системе, согласно (2), имеет временной множитель $\cos(\omega t)$. В соответствии с этим будем выбирать активную и реактивную компоненты наведенного тока. Наведенный электронами одной „спицы“ ток равен

$$I_H = |\rho_0| \int_{V_1} (\mathbf{v}_1 \text{ grad } U^{(0)}) dV_1. \quad (29)$$

Здесь v_1 —средняя скорость электронов, а V_1 —объем „спицы“, ограниченный в лабораторной системе отсчета:

$$X_{\text{кр } 2} + T \geq \beta x \geq X_{\text{кр } 1} + T, \quad (30)$$

так что в момент $T = 0$ „спица“ сгруппирована вблизи $X = 0$, как это и должно быть, поскольку в этом случае потенциал (2) пропорционален $-\sin(\beta x)$.

Нетрудно тогда получить для наведенного тока из (29), (30), (28) и (9), (9а):

$$I_H = -\frac{2|\rho_0| \omega \hbar}{\pi \beta^2 \text{sh} \beta d} \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} \{i_a(\sigma_0, \alpha_1) \cos(\omega t) + i_p(\sigma_0, \alpha_1) \sin(\omega t)\}. \quad (31)$$

Величины $i_a(\alpha_1, \alpha_0)$ и $i_p(\alpha_1, \sigma_0)$ имеют вид:

$$i_a(\alpha_1, \sigma_0) = \int_{Y_c}^{Y_a} (1 + \sigma_0) \text{sh } Y [\sin X_{\text{кр } 2} - \sin X_{\text{кр } 1}] dY; \quad (32)$$

$$i_p(\alpha_1, \alpha_0) = \int_{Y_0}^{Y_a} \{ (1 + \alpha_0) \text{sh } Y [\cos X_{\text{кр } 2} - \cos X_{\text{кр } 1}] + \alpha_1 \text{sh } Y \text{ch } Y (X_{\text{кр } 2} - X_{\text{кр } 1}) \} dY. \quad (32a)$$

Активная составляющая наведенного тока равна

$$I_{H a} = -\frac{2|\rho_0| \omega \hbar}{\pi \beta^2 \text{sh} \beta d} \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} (1 + \sigma_0) 2 \text{sh } Y_0 \cos(\omega t), \quad (33)$$

когда $Y' \leq Y_0$ или Y' не существует, и

$$I_{H a} = -\frac{2|\rho_0| \omega \hbar}{\pi \beta^2 \text{sh} \beta d} \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} (1 + \sigma_0) \left\{ \frac{|\sigma_0|}{\alpha_1} (Y_0 - Y') + \text{sh } Y' + \text{sh } Y_0 \right\}, \quad (33a)$$

когда $Y' \geq Y_0$. Нетрудно видеть, что формулы (33), (33a) согласуются с (22), (22a). На рис. 4 приводятся результаты расчета величины $i_a(\sigma_0, \alpha_1)$.

Величину реактивной составляющей наведенного тока не удастся рассчитать аналитически. Результаты численного расчета, выполненного на электронной вычислительной машине, представлены на рис. 5. Как интересную особенность можно сразу же отметить тот факт, что в слу-

чае $\alpha_0 = 0$ наведенный ток, несмотря на геометрическую симметрию „спицы“ и отсутствие ее смещения по отношению к нулевой фазе основной гармоники волны поля, обладает некоторой реактивной составляющей. Величина ее пропорциональна амплитуде высокочастотного поля, так что своим происхождением реактивная составляющая, по-види-

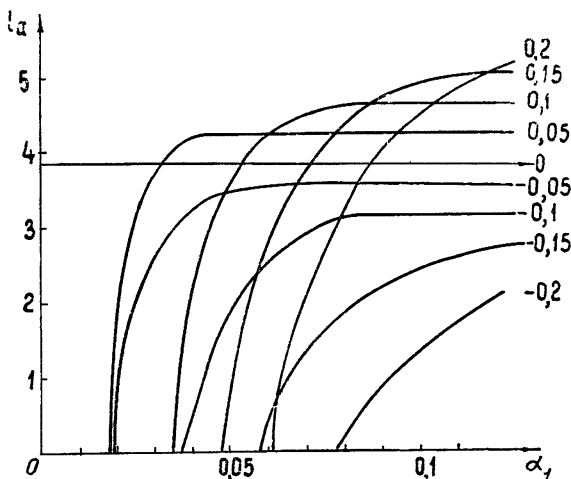


Рис. 4. Зависимость величины i_a от α_1 при различных α_0 ($\beta d = 3,6$; $\omega/\omega_H = 0,6$).

мому, в отмеченном случае обязана дрейфу электронов внутри „спицы“ пространственного заряда. В работе [5] приведены результаты измерений реактивной составляющей электронной проводимости. Неожиданно оказалось, что она всегда имеет емкостный характер. Результаты расчета

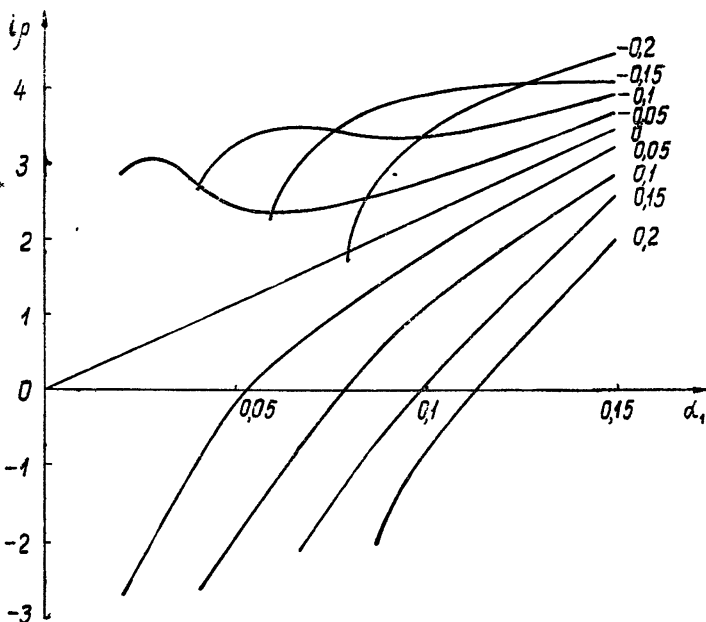


Рис. 5. Зависимость величины i_p от α_1 при различных α_0 ($\beta d = 3,6$; $\omega/\omega_H = 0,6$).

по (32а), представленные на рис. 5, также показывают, что наведенный ток, а следовательно, и реактивная компонента проводимости, имеют емкостный характер всюду, кроме случаев, когда $\alpha_0 > 0$ и α_1 достаточно мало. Поскольку при автоколебаниях с ростом U_0 величина U_1 растет очень быстро (как показывают эксперименты), то реализовать на практике такой режим трудно.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от известных работ [1,4,6] весь анализ выполнен без предположения о точном синхронизме отдельных электронов с высокочастотной волной поля. Поведение электронов в пространстве взаимодействия рассмотрено при различных соотношениях постоянного и переменного напряжений; в частности, показано, как изменяется „захват“ электронов полем волны в зависимости от отклонения постоянного напряжения от $U_{0п}$. Это напряжение и должно пониматься как пороговое для плоской модели, так как при меньших напряжениях колебательная система не может быть выведена из состояния равновесия (если не принимать во внимание колебаний других видов). Установившиеся колебания могут существовать в некоторой области изменения параметра σ_0 , в том числе и при $\alpha_0 < 0$, так что (как и обычно при жестком возбуждении) существует некоторый гистерезис по параметру σ_0 . Эти явления значительно усложняются при учете колебаний других видов. Мы ограничимся здесь этими замечаниями относительно свойств магнетронного генератора, так как подробное рассмотрение целесообразно провести отдельно.

Весь выполненный анализ исходит из малости правой части (6). Для некоторых конструкций это требование может нарушаться вблизи анода. Однако неточности в нахождении средней траектории не должны заметно сказаться на величине наведенного тока и мощности, поскольку вблизи анода, где поправки к вычисленной в первом приближении траектории наибольшие, тангенциальная составляющая основной гармоники волны поля, ответственная за отбор мощности, меняется вблизи $X = 0$ весьма медленно ($\sim \cos X$). Кроме того, энергообмен электронов с волной поля происходит равномерно по всей высоте „спицы“, как отмечалось в разделе 4.

Уравнение следующего приближения для средней скорости электронов имеет вид:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\omega}{\omega_H} (\sigma_0 - \alpha_1 \sin r^*) + j \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)^2 \alpha_1 [\alpha_0 - \alpha_1 \sin r] \cos r^*. \quad (34)$$

Для составляющих скорости это дает:

$$\dot{X} = \sigma_0 - \alpha_1 \operatorname{ch} Y \sin X + \frac{\omega}{\omega_H} \alpha_1 [\sigma_0 \operatorname{sh} Y \sin X - \alpha_1 \operatorname{sh} Y \operatorname{ch} Y]; \quad (35)$$

$$\dot{Y} = \sigma_1 \operatorname{sh} Y \cos X + \frac{\omega}{\omega_H} \alpha_1 [\sigma_0 \operatorname{ch} Y \cos X - \alpha_1 \cos X \sin X]. \quad (35a)$$

Для средней траектории справедливо соотношение

$$\sigma_0 Y - \alpha_1 \operatorname{sh} Y \sin X + \alpha_1 \frac{\omega}{\omega_H} \left[\alpha_0 \operatorname{ch} Y \sin X - \frac{\alpha_1}{2} \sin^2 X - \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{sh}^2 Y \right] = \text{const.} \quad (36)$$

Поскольку величина $\sigma_1 (\omega/\omega_H) \operatorname{sh} Y$ вблизи анода составляет на практике $0,15 \div 0,6$, то в случае $\alpha_0 = 0$, как можно видеть из (36), вблизи анода траектория сместится на $X \leq 0,3$, а тангенциальная составляющая электрического поля будет отличаться от поля при $X=0$ не более, чем на 5%.

В работе [6] указывалось, что учет встречной („минус первой“) гармоники волны поля приводит к изменению характеристик магнетрона. Отметим, что предположения о неизменности радиальной координаты и сохранении фазы электрона относительно волны поля в течение полупериода колебаний, которые лежат в основе анализа в [6], выглядят искусственными и не соответствуют действительности. К сожалению, анализ движения электронов с учетом встречной волны поля (когда в правую часть уравнения (6) добавляется член $-j (\omega/\omega_H) \sigma_1 \sin (Z^* + 2T)$), затруднителен, если действующее на электрон электрическое поле заметно меняется на протяжении петли траектории. Если же поле слабо изменяется за период движения, то движение распадается на дрейф и два вращения с частотами ω_H и 2ω . Тогда усредненная траектория совпадает с (11). В общем случае действие несинхронных гармоник поля на электроны не должно заметно изменять средние траектории, если частоты ω и ω_H не находятся в некоторых кратных отношениях. Поскольку, как отмечалось выше, магнетрон является прибором с непрерывным взаимодействием, эффективно происходящим по всей высоте „спицы“ пространственного заряда, то ясно, что при расчете мощности, отдаваемой электронами высокочастотному полю, можно не учитывать в первом приближении несинхронные гармоники поля.

Результаты настоящей статьи могут найти применение при исследовании автоколебаний магнетронного генератора. Для этого, прежде всего, необходимо установить зависимость параметра ρ_0 , отображающего некоторую среднюю плотность пространственного заряда в прикатодной области, от электрического режима.

Автор благодарен М. И. Кузнецову, прочитавшему статью в рукописи и сделавшему ряд важных замечаний, и Л. В. Родыгину за полезные обсуждения.

Значительная часть результатов настоящей работы была доложена на сессии Научно-технического общества радиотехники и электросвязи им. А. С. Попова в мае 1960 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Бычков, Вопросы теории и практического применения многорезонаторных магнетронов, ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, Л., 1958.
2. Магнетроны сантиметрового диапазона, изд. Сов. радио, М., 1, 1950; 2, 1951.
3. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
4. В. Ф. Коваленко, Введение в электронику сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1955.
5. С. G. Lehr, A. J. Kalnajs, J. Electronics and Control, 8, 19 (1960).
6. Э. А. Гельвич, Электроника, № 6, 45 (1959).

APPROXIMATE ANALYSIS OF PROCESSES IN MULTICAVITY MAGNETRON (plane model)

V. E. Nechajev

On the basis of plane model electron motion is considered in the working space of multicavity magnetron. The analysis is carried out of averaged electron trajectories with various phases of emission from cathode. The formation of electrons into „spokes“ of a space charge at various electrical regimes is considered. The calculation is made of the high frequency power supplied by electrons to the field and the current inducted in the oscillating system.

ВОЗДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ПОТОКОВ ПАЛЬМА НА РАДИОСХЕМЫ С ЕМКОСТНЫМИ НАКОПИТЕЛЯМИ. II

Г. А. Медведев

Общие соотношения, полученные в [1], применяются для исследования воздействия простейшего импульсного потока на импульсный детектор без фильтра и усилитель с АРУ, содержащий в цепи АРУ указанный детектор. В первом случае найдены асимптотические законы распределения вероятностей для выходного напряжения детектора, а также выражения для его моментов. Во втором случае рассматривается воздействие простейшего потока коротких импульсов на усилитель с АРУ, работающий в двух режимах: при больших и малых амплитудах импульсов входящего потока.

Настоящая работа является непосредственным продолжением ранее опубликованной статьи [1]. Поэтому здесь использованы обозначения, принятые в [1]. Ссылки на рисунки и формулы из [1] даются с указанием цифры I после номера рисунка или формулы.

1. ИМПУЛЬСНЫЙ ДЕТЕКТОР БЕЗ ФИЛЬТРА

Рассмотрим случай, когда импульсный поток поступает на детектор без фильтра (в этом случае четырехполосник на рис. 1.I отсутствует). Напряжение на выходе детектора при этом характеризуется соотношениями, полученными в разделе 3 статьи [1].

Будем считать, что на вход детектора поступает простейший поток импульсов (об определении простейшего потока см. [2]). В этом случае распределение интервалов между импульсами потока имеет вид:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda(t - \tau_n)} \quad (t > \tau_n),$$

где $\lambda = (T - \tau_n)^{-1}$, а уравнения (15) I и (16) I, определяющие функции распределения $W(u)$ и $W_0(u)$, переписываются в следующем виде:

$$W_0(u) = nu^{n-1} r^n \int_j^V \frac{W_0(x) dx}{(x + V(r-1))^n}; \quad (1)$$

$$W(u) = \frac{1}{1 + \lambda\tau_n} \left[\frac{m}{V-u} \int_j^u W_0(x) dx + nr^n u^{n-1} \int_j^V \frac{W_0(x) dx}{(x + V(r-1))^n} \right],$$

или, используя (1),

$$W(u) = \frac{1}{1 + \lambda\tau_n} \left[W_0(u) + \frac{m}{V-u} \int_j^u W_0(x) dx \right]. \quad (2)$$

Здесь

$$m = \lambda/q, \quad n = \lambda/p; \quad j = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < ru < V(r-1), \\ ur - V(r-1) & \text{при } V(r-1) < ru < Vr. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (1). Обозначим

$$w_0 = \int_0^V \frac{r^n W_0(x) dx}{(x + V(r-1))^n}.$$

Тогда для $u \in [0, V(1-1/r)]$ $W_0(u)$ имеет простой вид:

$$W_0(u) = w_0 nu^{n-1}, \quad (3)$$

где w_0 — константа, подлежащая определению. Уравнение (1) для $u \in [V(1-1/r), V]$ может быть записано в виде:

$$W_0(u) = nu^{n-1} \left[w_0 - \int_0^{ru-V(r-1)} \frac{r^n W_0(x) dx}{(x + V(r-1))^n} \right]. \quad (4)$$

Переменная интегрирования под интегралом в правой части (4) изменится в пределах от 0 до $(ru - V(r-1))$. В свою очередь, функция $W_0(u)$, стоящая под интегралом, определяется из (3) для значений x в интервале $[0, V(1-1/r)]$. Поэтому из (4) может быть получено выражение $W_0(u)$ для u из интервала $[V(1-1/r), V(1-1/r)(1+1/r)]$ опять-таки с точностью до постоянного множителя w_0 . Зная функцию $W_0(u)$ на интервале $[0, V(1-1/r)(1+1/r)]$, можно получить выражение $W_0(u)$ для u из интервала $[V(1-1/r)(1+1/r), V(1-1/r)(1+1/r+1/r^2)]$ и т. д.

Поскольку $r > 1$, верхний предел последовательных промежутков сходится к величине V и, таким образом, $W_0(u)$ определяется для всех значений u , сколь угодно близких к V . Например, для $r=10$ из (3) определяется $W_0(u)$ для $u \leq 0,9V$, первое применение (4) уже дает функцию $W_0(u)$ для $u \leq 0,99V$, второе — для $u \leq 0,999V$ и т. д. Константа w_0 находится из условия нормировки:

$$\int_0^V W_0(u) du = 1.$$

Нахождение функции $W(u)$ из (2) не представляет труда, если из (3) и (4) вычислена функция $W_0(u)$. В частности, для $u \in [0, V(1-1/r)]$ $W(u)$ имеет вид:

$$W(u) = \frac{w_0 u^n}{1 + \lambda \tau_n} \left(\frac{n}{u} + \frac{m}{V-u} \right). \quad (5)$$

Из (4) ясно, что для $u \in [V(1-1/r), V(1-1/r)(1+1/r)]$ $W_0(u)$ находится с помощью соотношения

$$\begin{aligned} W_0(u) &= w_0 nu^{n-1} \left[1 - \int_0^{ru-V(r-1)} \frac{r^n nx^{n-1} dx}{(x + V(r-1))^n} \right] = \\ &= w_0 nu^{n-1} \left[1 - r^n \int_0^z \frac{nx^{n-1}}{(1+x)^n} dx \right], \end{aligned} \quad (6)$$

в котором $z = (ru/V(r-1)) - 1$. Поскольку интеграл в правой части (6)

$$I_n = \int_0^z \frac{nx^{n-1}}{(1+x)^n} dx = \frac{z^n}{(1+z)^n} + \frac{n}{n+1} \int_0^z \frac{(n+1)x^n dx}{(1+x)^{n+1}} =$$

$$= \frac{z^n}{(1+z)^n} + \frac{n}{n+1} I_{n+1},$$

имеет место неравенство

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{k+n} \left(\frac{z}{1+z}\right)^{n+k} < (1+z) \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$$

в рассматриваемом интервале изменения u ($0 < z < 1/r$). Учитывая это и имея в виду, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n I_n < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(rz)^n}{(1+z)^{n-1}},$$

а $r^n I_n$ — неотрицательная величина, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n I_n = 0.$$

Таким образом, для достаточно больших n интегралом в правой части (6) можно пренебречь. Тогда $W_0(u)$ и в интервале $V(r-1) < ru < < V(r-1)(1+1/r)$ имеет вид (3).

Пусть $W_0(u)$ выражается в виде (3) в интервале $0 < ru < V(r-1) \times \times \sum_{i=0}^k (1/r)^i$. Покажем, что в случае, когда $n \rightarrow \infty$, в интервале $V(r-1) \times \times \sum_{i=0}^k (1/r)^i < ru < V(r-1) \sum_{i=0}^{k+1} (1/r)^i$ функция $W_0(u)$ выражается также в виде (3). Функция $W_0(u)$ удовлетворяет в этом случае соотношению (6), в котором величина z находится в интервале

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{r}\right)^i < z = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{r}\right)^i + e < \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{r}\right)^i, \quad er < \left(\frac{1}{r}\right)^k.$$

В этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(rz)^n}{(1+z)^{n-1}} = (1+z) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^{k-1} (1/r)^i + er}{1 + \sum_{i=1}^k (1/r)^i + e} \right)^n = 0.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом интервале изменения u вид $W_0(u)$ при $n \rightarrow \infty$ приближается к виду (3).

Этим самым мы показали, что при $n \rightarrow \infty$ функция $W_0(u)$ асимптотически приближается к виду, определяемому соотношением (3) на всем интервале изменения u , т. е. $0 < u < V$. В то же время функция $W(u)$ асимптотически приближается к виду (5) на этом интервале. Используя это обстоятельство, можно написать асимптотические выражения для моментов величины u в виде:

$$\bar{u}^k = \int_0^V u^k W(u) du = \frac{V^k}{1 + \lambda \tau_n} \left[\frac{n}{n+k} + m \int_0^1 \frac{x^{k+n} dx}{1-x} \right]. \quad (7)$$

На рис. 1 и 2 представлены функции плотности распределения вероятностей $W_0(u)$ и $W(u)$ для $r=10$ и нескольких значений n и m .

Рассмотрим еще один часто встречающийся на практике случай — случай коротких импульсов. Предположим, что $\tau_n/T \ll 1$, но q таково, что взаимодействием каждого импульса на схему пренебречь нельзя. Иными словами, r заметно отличается от единицы, так что $q\tau_n = \ln r$ не является малой величиной. Оставляя $\ln r$ постоянным и уменьшая τ_n/T , можно при достаточно малых τ_n/T записать уравнения (15) I и (16) I в виде:

$$W_0(u) = \frac{1}{pu} \int_0^u W_0(x) f\left(\frac{1}{p} \ln \frac{x + V(r-1)}{ur}\right) dx; \quad (8)$$

$$W(u) = \frac{1}{puT} \int_0^u W_0(x) \Phi\left(\frac{1}{p} \ln \frac{x + V(r-1)}{ur}\right) dx. \quad (9)$$

Когда исследуется воздействие на RC -цепочку простейшего импульсного потока, состоящего из достаточно коротких импульсов, в выражениях (2), (5), (7) могут быть опущены члены, содержащие множителем величину m .

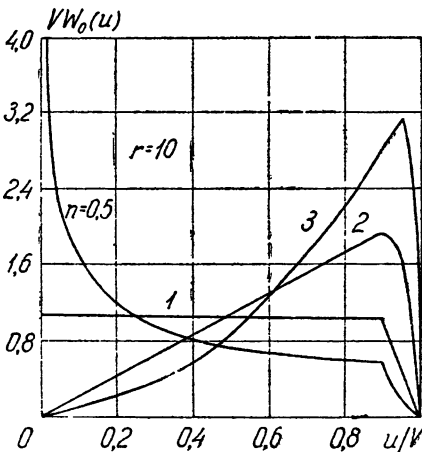


Рис. 1. Функция плотности распределения вероятностей $W_0(u)$.

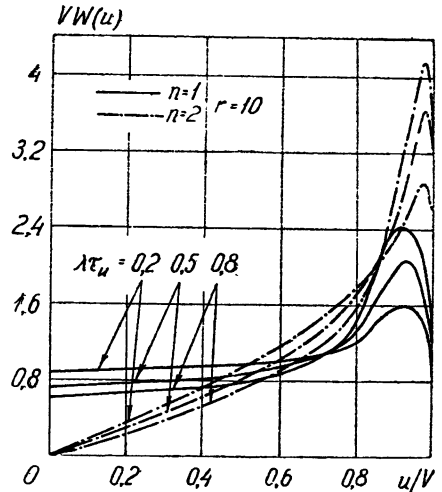


Рис. 2. Функция плотности распределения вероятностей $W(u)$ для простейшего входящего потока.

Как видно из (8) и (9), в случае достаточно коротких импульсов для импульсных потоков, в которых

$$\Phi(t) = 1 - F(t) = Tf(t), \quad (10)$$

имеет место соотношение: $W(u) = W_0(u)$. Соотношение (10) эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{df}{dt} + \frac{f(t)}{T} = 0.$$

Функция $f(t)$, удовлетворяющая (10), имеет вид: $f(t) = \text{const} e^{-t/T}$, т. е. $f(t)$ является функцией пуассоновского распределения вероятностей, а импульсный поток — простейшим.

Заметим, что моменты величины $U(t)$ в случае, когда на RC -цепь действует поток Пальма коротких импульсов, найдены в работах [3] и [4]. В работе [5] рассматриваются вопросы нахождения моментов величины $U(t)$ для импульсных потоков, состоящих из импульсов со случайными длительностями.

2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОТОКОВ ПАЛЬМА НА УСИЛИТЕЛЬ С АРУ

Рассмотрим воздействие импульсных потоков Пальма на усилитель с АРУ, построенный по схеме, изображенной на рис. 3, в случае, когда в качестве импульсного детектора применена схема, рассмотренная в предыдущем разделе. Будем также считать, что импульсы входящего потока являются достаточно короткими для описания указанной схемы импульсного детектора уравнениями (8) и (9).

Относительно других элементов схемы, приведенной на рис. 3, примем следующие предположения. Пусть безынерционный усилитель

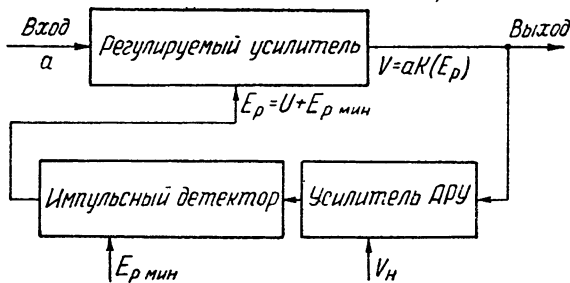


Рис. 3. Исследуемая схема, содержащая цепь АРУ.

импульсов охвачен обратной связью через схему АРУ, состоящую из усилителя с постоянным коэффициентом усиления $K_0 \geq 1$ и импульсного детектора, таким образом, что коэффициент усиления усилителя зависит от выходного напряжения схемы АРУ $E_{p_{\max}}$ по линейному закону:

$$K'(E_p) = K_{\max} \frac{E_{p_{\max}} - E_p}{E_{p_{\max}} - E_{p_{\min}}} \quad (11)$$

Напряжение E_p является суммой двух напряжений: напряжения на выходе импульсного детектора, образующегося под действием импульсов, поступающих на вход схемы АРУ, и постоянного напряжения $E_{p_{\min}}$, задающего максимальный коэффициент усиления.

Будем предполагать, что схема АРУ есть схема с задержкой. Это значит, что напряжение U будет отлично от нуля только тогда, когда амплитуда a импульсов на входе усилителя такова, что максимально возможные напряжения на его выходе (aK_{\max}) больше некоторого номинального значения V_H , которое в дальнейшем будем называть напряжением задержки. Напряжение ограничения усилителя (максимально возможное напряжение на выходе усилителя) обозначим через V_{\max} . Очевидно, что схема АРУ должна быть построена так, чтобы напряжение U на выходе детектора не превышало величины $U_{\max} = E_{p_{\max}} - E_{p_{\min}}$ даже в том случае, когда на выходе регулируемого

усилителя амплитуды импульсов имеют величину $V_{\text{макс}}$. Соотношение (11) может быть переписано в виде

$$K(U) = K_{\text{макс}} \left(1 - \frac{U}{U_{\text{макс}}} \right). \quad (12)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае, несмотря на то, что входящий поток является потоком Пальма, импульсный поток на выходе усилителя уже не будет таковым, так как в результате наличия схемы АРУ амплитуды импульсов на выходе усилителя являются случайными величинами (т. е. на выходе мы получаем поток неодинаковых импульсов). Учитывая этот факт и учитывая, что схема АРУ, как сказано ранее, является схемой с задержкой, мы должны принять во внимание то обстоятельство, что амплитуда импульсов V на выходе усилителя может оказаться недостаточно большой и подзарядки конденсатора в RC -цепи детектора не произойдет даже при появлении импульса на входе усилителя. В этом случае для $K_0 \{aK [U(t_0)] - V_n\} < U(t_0)$

$$U(t) = U(t_0) e^{-\rho s}, \quad (13)$$

для $K_0 \{aK [U(t_0)] - V_n\} > U(t_0)$

$$U(t) = [A + BU(t_0)] e^{-\rho s}, \quad (13a)$$

где

$$A = \frac{K_0}{r} (r-1) (aK_{\text{макс}} - V_n);$$

$$B = \frac{1}{r} - (1-1/r) K_0 K_{\text{макс}} a / U_{\text{макс}};$$

$$s = (t - t_0 - \tau_n)$$

и момент t_0 совпадает с передним фронтом импульса на входе усилителя; остальные обозначения использовались ранее.

Условие $K_0 \{aK [U(t_0)] - V_n\} > U(t_0)$ может быть переписано в виде:

$$U(t_0) < \frac{K_0 (aK_{\text{макс}} - V_n)}{1 + K_0 K_{\text{макс}} \frac{a}{U_{\text{макс}}}} = \frac{A}{1-B} = U_0.$$

Величина U_0 является величиной порогового напряжения: если $U(t_0) > U_0$, то импульс, поступающий на вход схемы в момент времени t_0 на интегрирующую RC -цепь детектора схемы АРУ, не оказывает действия, в то время как при $U(t_0) < U_0$ поступление импульса вызывает изменение напряжения на конденсаторе RC -цепи в соответствии с (13a).

Характер изменения напряжения U , как оказывается, может носить различный характер для различных величин амплитуд входных импульсов. Будем рассматривать случай только таких a , для которых $aK_{\text{макс}} > V_n$, так как противный случай является тривиальным в том смысле, что при этом всегда (в установленном режиме) $U = 0$, $K(U) = K_{\text{макс}}$.

Если

$$a < \frac{1}{r-1} \frac{U_{\text{макс}}}{K_0 K_{\text{макс}}},$$

то $0 < B < 1$ и $A < U_0$. Этот случай будем называть случаем малых амплитуд входных импульсов.

Если

$$a > \frac{1}{r-1} \frac{U_{\max}}{K_0 K_{\max}},$$

$B < 0$ и $A > U_0$. Тогда мы будем говорить, что имеет место случай больших амплитуд.

В реальных системах могут встречаться как оба случая вместе, так и один из них. Например, при условии

$$\frac{1}{r} > \frac{V_{\max}}{2V_{\max} - V_n}$$

имеет место только случай малых амплитуд. Мы рассмотрим ниже общий случай. Будем рассматривать такую систему, в которой оба режима возможны. Для этого на характеристики системы и величины входных импульсов наложим условия:

$$K_0 V_n < \frac{1}{r-1} U_{\max} < K_0 V_{\max};$$

$$V_n < a K_{\max} < V_{\max}.$$

Поскольку на детектор АРУ действует не каждый из поступающих на вход импульсов, распределение интервалов между двумя последовательными импульсами, действующими на детектор, отличается от подобного распределения во входящем импульсном потоке. Поэтому при преобразовании уравнений (12) I и (14) I для рассматриваемого конкретного случая необходимо учитывать этот факт.

Рассмотрим случай малых амплитуд ($B > 0$). В этом случае, как это видно из (13), напряжение $U(t)$ в установившемся режиме может принимать значения из интервала $[0, U_0]$. Поэтому любой импульс, поступивший на вход схемы, оказывает действие на RC -цепь детектора, и проблема нахождения функции плотности распределения вероятностей величины напряжения U в случае малых амплитуд сводится к рассмотренной в разделе 3 статьи [1] задаче. Области S , S_1 и S_2 в уравнениях (12) I и (14) I находятся из тех же соображений, что и в разделе 3, и для потока достаточно коротких импульсов мы имеем:

$$W_0(u) = \frac{1}{pu} \int_j^{u_0} W_0(x) f\left(\frac{1}{p} \ln \frac{A+Bx}{u}\right) dx; \quad (14)$$

$$W(u) = \frac{1}{puT} \int_j^{u_0} W_0(x) \Phi\left(\frac{1}{p} \ln \frac{A+Bx}{u}\right) dx,$$

где

$$j = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < u < A, \\ \frac{u-A}{B} & \text{при } A < u < U_0. \end{cases}$$

В случае больших амплитуд не все импульсы, пришедшие на вход усилителя, вызовут изменение напряжения на конденсаторе RC -цепи детектора, а только те из них, в момент прихода которых напряжение на конденсаторе U будет меньше величины U_0 . В связи с тем, что в случае больших амплитуд $B < 0$, напряжение $U(t)$ может принимать

значения, лежащие в интервале $[0, A]$, как это следует из (13). Однако напряжение $U(t_0)$ (под t_0 будем понимать здесь момент времени, совпадающий с передним фронтом импульса, оказывающего действие на RC -цепь детектора) может принимать значения только из интервала $[0, U_0]$ (см. (13)). Из (13) также видно, что длительность временного интервала между двумя последовательными импульсами, воздействующими на RC -цепь детектора, равна сумме k интервалов между импульсами входящего потока, таких, что сумма $(k-1)$ первых интервалов, непосредственно примыкающих к импульсу, оказавшему действие, т. е. к моменту времени t_0 , меньше, чем $\frac{1}{p} \ln \frac{A+BU(t_0)}{U_0}$. Сказанное поясняется рис. 4.

Учитывая это обстоятельство, нетрудно найти уравнение для определения $W_0(u)$ в виде:

$$W_0(u) = \frac{1}{pu} \int_0^{U_0} dx W_0(x) \left[f\left(\frac{1}{p} \ln \frac{A+Bx}{u}\right) + \frac{1}{p} \ln \frac{A+Bx}{U_0} \int_0^{\frac{1}{p} \ln \frac{A+Bx}{u}} f\left(\left(\frac{1}{p} \ln \frac{A+Bx}{u}\right) - t\right) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) dt \right], \quad (15)$$

где

$$f_1(t) = f(t), \quad f_k(t) = \int_0^t f(t-x) f_{k-1}(x) dx \quad (k > 1).$$

Для нахождения соотношения, соответствующего (14) I, и для определения функции $W(u)$ рассмотрим некоторые дополнительные вопросы. Заметим следующее: поскольку интервалы между импульсами, оказывающими воздействие на схему АРУ, имеют статистические характеристики, отличные от статистических характеристик интервалов между

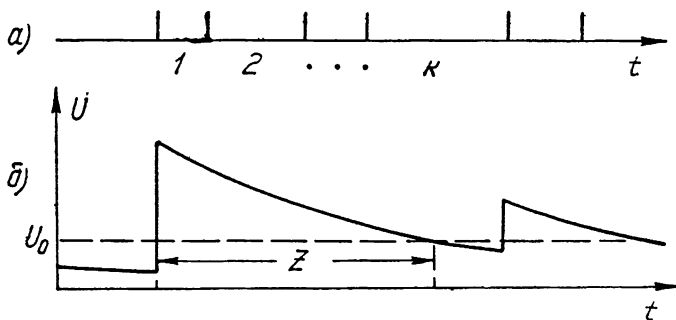


Рис. 4. а) Входящий поток импульсов; б) управляющее напряжение.

импульсами во входящем потоке, то средняя величина длительности интервалов T' между двумя последовательными импульсами, оказывающими воздействие на схему АРУ, вообще говоря, будет отлична от T . Найдем величину T' .

Из рис. 4 видно, что рассматриваемый интервал является, по существу, суммой k интервалов входящего потока, таких, что сумма первых

$(k-1)$ интервалов меньше, чем длительность временного интервала, в течение которого напряжение $U(t)$ больше величины U_0 . Условная плотность вероятности того, что величина рассматриваемого интервала равна t при условии, что длительность временного интервала, в течение которого напряжение $U(t)$ больше величины U , равна z , выражается соотношением:

$$p(t/z) = f(t) + \int_0^z f(t-x) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx, \quad (16)$$

где $f_k(x)$ определены выше (см. (15)).

В свою очередь, величина z связана с величиной напряжения $U(t_0)$ (о моменте времени t_0 см. выше) следующим образом:

$$z = \frac{1}{p} \ln \frac{A + BU(t_0)}{U_0};$$

$U(t_0)$ — случайная величина, закон распределения вероятностей которой определяется функцией $W_0(u)$. Поэтому распределение вероятностей величины z запишется в виде:

$$p(z) = \frac{pU_0}{B} e^{pz} W_0\left(\frac{U_0 e^{pz} - A}{B}\right). \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что величина z изменяется в пределах

$$0 \leq z \leq \frac{1}{p} \ln \frac{A}{U_0}.$$

Используя теорему о полной вероятности, с помощью (16) и (17) получаем плотность распределения вероятностей величины временного интервала между двумя последовательными импульсами, оказывающими воздействие на схему АРУ, в виде:

$$g(t) = \int_j^{U_0} \left[f(t) + \frac{1}{p} \ln \frac{A+Bv}{U_0} \int_0^v f(t-x) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx \right] W_0(y) dy, \quad (18)$$

где

$$j = \begin{cases} \frac{1}{B} (U_0 e^{pt} - A) & \text{при } t < \frac{1}{p} \ln \frac{A}{U_0}, \\ 0 & \text{при } \frac{1}{p} \ln \frac{A}{U_0} \leq t. \end{cases}$$

Функция $W_0(y)$ удовлетворяет уравнению (15). Зная $g(t)$, легко определить среднюю величину длительности интервала $T' = \int_0^{\infty} t g(t) dt$.

Произвольный момент времени t , напряжением в котором мы интересуемся, может оказаться, в общем случае, в k -ом по счету интервале из примыкающих друг к другу интервалов, первый из которых начинается в ближайший к t предшествующий момент t_0 . Первые $(k-1)$ интервалов должны быть такими, чтобы сумма их длительностей не превышала $\frac{1}{p} \ln \frac{A + BU(t_0)}{U_0}$, если в момент времени t напряжение u было в интервале $[0, U_0]$, и не превышала $\frac{1}{p} \ln \frac{A + BU(t_0)}{u}$,

если в этот момент времени u было в интервале $[U_0, A]$ (в случае больших амплитуд, как видно из определения $U_0, A > U_0$). При этом сумма длительностей k интервалов должна превышать величину $\frac{1}{p} \ln \frac{A+B U(t_0)}{u}$

в обоих случаях.

Приведенные соображения позволяют написать выражение для $W(u)$ для входящих потоков достаточно коротких импульсов в следующем виде:

$$W(u) = \frac{1}{u p T'} \int_0^j dx W_0(x) \int_{\frac{1}{p} \ln \frac{A+Bx}{u}}^{\infty} dt \left[f(t) + \int_0^z f(t-s) \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) ds \right], \quad (19)$$

где

$$j = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 < u < U_0 \\ \frac{u-A}{B} & \text{при } U_0 < u < A \end{cases}; \\ z = \begin{cases} U_0 & \text{при } 0 < u < U_0 \\ u & \text{при } U_0 < u < A \end{cases};$$

$$f_1(t) = f(t); \quad f_k(t) = \int_0^t f(t-x) f_{k-1}(x) dx \quad (k > 1).$$

Поскольку интеграл от квадратной скобки в (19) для случая, когда $z=u$, учитывает все возможные ситуации, которые могут осуществиться, то он равен единице, т. е.

$$\int_{\frac{1}{p} \ln \frac{A+Bx}{u}}^{\infty} dt \left[f(t) + \int_0^u f(t-s) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) ds \right] = 1.$$

Поэтому для случая, когда $u \in [U_0, A]$, мы имеем:

$$W(u) = \frac{1}{p u T'} \int_{\frac{u-A}{B}}^{\frac{u-A}{B}} W_0(x) dx, \quad (20)$$

причем для любых импульсных потоков в этом случае $W(U_0) = 1/U_0 p T'$.

Рассмотрим в качестве примера воздействие на рассматриваемую схему усилителя с АРУ простейшего потока импульсов. В этом случае

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

где $\lambda = 1/T$ — интенсивность потока. В случае малых амплитуд входных импульсов уравнения (14) принимают вид, по существу не отличающийся от вида уравнений (1) и (2) при $m \ll 1$:

$$W_0(u) = n u^{n-1} \int_j^{U_0} \frac{W_0(x) dx}{(A+Bx)^n}, \\ W(u) = W_0(u). \quad (21)$$

Здесь $n = \lambda/p$,

$$j = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < u < A, \\ \frac{u-A}{B} & \text{при } A < u < U_0. \end{cases}$$

Поэтому все сказанное в разделе 1 относительно метода решения (1) может быть полностью перенесено на решение (21), так что распределения, представленные на рис. 1, характеризуют также рассматриваемую усилительную схему при $A=0,9U_0$, $B=0,1$.

Рассмотрим теперь случай больших амплитуд. Для простейшего потока $f_k(t)$ легко находится в виде

$$f_k(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \quad (k > 0).$$

С учетом этого (15) приводится к виду:

$$W_0(u) = \frac{n}{U_0} \left(\frac{u}{U_0} \right)^{n-1} \int_0^{U_0} W_0(x) dx$$

и, наконец,

$$W_0(u) = \frac{n}{U_0} \left(\frac{u}{U_0} \right)^{n-1}. \quad (22)$$

Из (19) и (20) легко получаем:

$$W(u) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda T'} \frac{n}{U_0} \left(\frac{u}{U_0} \right)^{n-1} & \text{при } 0 < u < U_0, \\ \frac{1}{\lambda T'} \frac{n}{u} \left(\frac{u-A}{BU_0} \right)^n & \text{при } U_0 < u < A. \end{cases} \quad (23)$$

В случае простейшего входящего потока функция распределения вероятностей $g(t)$, определяемая (4.8), выражается в виде:

$$g(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{n}{-B} \int_1^j x^n \left(\frac{A/U_0 - x}{-B} \right)^{n-1} dx, \quad (24)$$

где

$$j = \begin{cases} e^{\lambda t} & \text{при } t < \frac{1}{p} \ln \frac{A}{U_0}, \\ A/U_0 & \text{при } t > \frac{1}{p} \ln \frac{A}{U_0}. \end{cases}$$

Поэтому

$$T' = T \left[1 + \int_1^{\frac{A}{U_0}} \frac{n}{x} \left(\frac{A/U_0 - x}{-B} \right)^n dx \right],$$

а

$$\lambda T' = 1 + \int_1^{\frac{A}{U_0}} \frac{n}{x} \left(\frac{A/U_0 - x}{-B} \right)^n dx = 1 - n \sum_{i=1}^{\infty} B^i (i-1)! \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+i+1)}.$$

Моменты величины u находятся с помощью соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{u^k} &= \frac{n}{\lambda T'} U_0^k \left\{ \frac{1}{k+n} - B \int_0^1 x^n \left(\frac{A}{U_0} + Bx \right)^{k-1} dx \right\} = \\ &= \frac{n}{\lambda T'} U_0^k \left\{ \frac{1}{k+n} + \sum_{i=1}^k (-B)^i \frac{(k-1)! \Gamma(n+1)}{(k-i)! \Gamma(n+i+1)} \right\}. \end{aligned}$$

В частности,

$$\overline{u} = \frac{nU_0}{\lambda T'} \frac{1-B}{1+n}; \quad (25)$$

$$\overline{u^2} = \frac{nU_0^2}{\lambda T'} \frac{1}{n+2} \left(1-B - \frac{B(1-B)}{1+n} \right).$$

На рис. 5 представлены функции плотности распределения вероятностей $W(u)$ для случая больших амплитуд при $B=-1$ и нескольких значений параметра n .

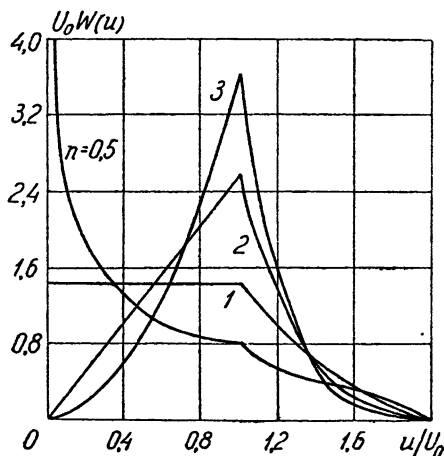


Рис. 5. Функция $W(u)$ в случае больших амплитуд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Медведев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 275 (1961).
2. А. Я. Хинчин, Труды математич. ин-та им. В. А. Стеклова, 49 (1955).
3. Я. И. Хургин, Радиотехника и электроника, 4, 1927 (1959).
4. Г. А. Медведев, Ю. И. Паравев, Радиотехника и электроника, 5, 1745 (1960).
5. Д. В. Васильев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 1010 (1960).

Сибирский физико-технический
научно-исследовательский институт

Поступила в редакцию
11 октября 1961 г.

PALMA'S PULSE FLOWS ACTION ON RADIO CIRCUITS WITH STORAGE CAPACITIES. II

G. A. Medvedev

General expressions obtained in [1] are applied to investigate the influence of the simplest pulse flow upon a pulse detector without filter and on AGS amplifier containing such detector in AGS circuit. In the first case asymptotic formulas have been found of probability distribution for detector output voltage as well as expressions for its moments. In the second case the action of the simplest flow of short pulses is considered on the amplifier with AGS operating in two regimes: at high and low pulse amplitudes of input flow.

О ВЛИЯНИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА ПРОЦЕСС СИНХРОНИЗАЦИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ ВНЕШНЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИЛОЙ

В. П. Рубаник

Рассматриваются процессы синхронизации в простейшей автоколебательной системе — осцилляторе Ван-дер-Поля — при наличии запаздываний в элементах системы. Исследуется изменение процессов синхронизации в зависимости от величин запаздываний.

Как показано в ряде работ ([1-4] и др.), при воздействии на автоколебательную систему внешней периодической силы с частотой, близкой к частоте автоколебаний, или с частотой, находящейся приблизительно в простом рациональном отношении к частоте автоколебаний, происходит явление захватывания или синхронизации автоколебаний вынужденными колебаниями: автоколебания подавляются, а в системе возникают интенсивные периодические колебания с частотой внешней силы, в точности равной дробной части частоты внешней силы, близкой к частоте автоколебаний. Вне интервала синхронизации вынужденные колебания существуют совместно с автоколебаниями системы, и в системе образуется режим биений, который описывается почти периодической функцией.

Во многих реальных колебательных системах, встречающихся в науке и технике, имеют место запаздывания в некоторых элементах системы. Так, в работе [5] рассмотрена автоколебательная система с запаздывающей подталкивающей силой. В этой работе доказано наличие синхронизации автоколебаний внешней гармонической силой при наличии определенного запаздывания подталкивающей силы. Однако в [5] не выясняется вопрос, как изменяется процесс синхронизации в зависимости от величины запаздывания.

В настоящей статье мы рассмотрим влияние запаздываний аргумента в различных членах уравнения, которое описывает простейшую автоколебательную систему — осциллятор Ван-дер-Поля, на процесс синхронизации автоколебаний малой внешней гармонической силой.

Будем рассматривать уравнение:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t - \Delta_1) = \mu [1 - \alpha x^2(t - \Delta_2)] \frac{dx(t - \Delta_3)}{dt} + h \cos(pt), \quad (1)$$

где μ и α — положительные параметры ($\mu \ll \omega_0$), $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ — неотрицательные, а ω_0, h, p — положительные числа. Как показано в работе [6], для некоторых значений запаздывания аргумента при отсутствии внешней возмущающей силы в системе устанавливается режим автоколебаний с частотой, близкой к ω_0 ; при других же величинах запаздывания аргумента автоколебания в системе отсутствуют.

Рассмотрим процесс синхронизации автоколебаний внешней силой

при условии, что частота внешней силы p близка к частоте автоколебаний ω_0 . Для удобства введем безразмерные переменные:

$$\tau = \omega_0 t, \quad y = \sqrt{\alpha} x.$$

Тогда уравнение (1) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + y(\tau - \delta_1) = \varepsilon [1 - y^2(\tau - \delta_2)] \frac{dy(\tau - \delta_3)}{d\tau} + b \cos(\nu\tau), \quad (2)$$

где

$$\delta_k = \omega_0 \Delta_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad \varepsilon = \mu/\omega_0, \quad b = h\sqrt{\alpha}/\omega_0^2, \quad (3)$$

$$\nu = p/\omega_0, \quad \nu \approx 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

При наличии в системе явления синхронизации в области захвата должны существовать устойчивые стационарные периодические решения уравнения (2) с частотой ν и с некоторым сдвигом фаз φ , который, в частности, может быть равен нулю. Однако стационарный режим установится в системе лишь при некоторых вполне определенных начальных условиях. При начальных условиях, несколько отличных от тех, которые порождают стационарный режим, в системе будут происходить нестационарные колебания с медленно изменяющимися во времени амплитудой и сдвигом фаз, которые будут приближаться к устойчивым стационарным колебаниям.

Для того, чтобы определить не только стационарный режим синхронизованных колебаний системы, но и процесс его установления, будем искать решение уравнения (2) в виде:

$$y(\tau) = a(\tau) \cos[\nu\tau + \varphi(\tau)], \quad (4)$$

где $a(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ — постоянные или медленно изменяющиеся функции времени. В этом случае величины $da/d\tau$ и $d\varphi/d\tau$ будут малыми, а старшие производные будут величинами высшего порядка малости; поэтому в дальнейшем ими будем пренебрегать.

Для определения величин $a(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ применяем известный метод осреднения, применимость которого к системам с запаздыванием указанного вида обоснована в работе Халаяна [7].

На основании указанного метода получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} = & -\frac{2\nu}{D} \left\langle b \sin\varphi - a \sin(\nu\delta_1) - \varepsilon\nu a \cos(\nu\delta_3) + \frac{\varepsilon\nu a^3}{4} \{2\cos(\nu\delta_3) - \right. \\ & \left. - \cos[\nu(\delta_3 - 2\delta_2)]\} \right\rangle - \frac{\delta_1}{D} \left\langle b \cos(\varphi - \nu\delta_1) + a[1 - \nu^2 \cos(\nu\delta_1)] - \right. \\ & \left. - \varepsilon\nu a \sin[\nu(\delta_3 - \delta_1)] + \frac{\varepsilon\nu a^3}{4} \{2\sin\nu(\delta_3 - \delta_1) + \sin[\nu(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)]\} \right\rangle; \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = & -\frac{2\nu}{Da} \left\langle b \cos\varphi + a[\nu^2 - \cos(\nu\delta_1)] + \right. \\ & \left. + \varepsilon\nu a \sin(\nu\delta_3) - \frac{\varepsilon\nu a^3}{4} \{2\sin(\nu\delta_3) + \sin[\nu(\delta_3 - 2\delta_2)]\} \right\rangle + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ \frac{\delta_1}{Da} \left\langle b \sin(\varphi - \nu\delta_1) - \nu^2 a \sin(\nu\delta_1) - \varepsilon \nu a \cos[\nu(\delta_3 - \delta_1)] + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon \nu a^3}{4} [2\cos[\nu(\delta_3 - \delta_1)] - \cos[\nu(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)]] \right\rangle ;$$

$$D = 4\nu^2 + 4\nu\delta_1 \sin(\nu\delta_1) + \delta_1^2 > 0.$$

Для того, чтобы выполнялись указанные выше требования относительно характера изменения $a(\tau)$ и $\varphi(\tau)$, мы должны предположить, что величины b , δ_1 и $1 - \nu^2$ являются малыми одного порядка с ε . В дальнейшем будем считать эти условия выполненными.

Для определения стационарного режима периодических колебаний захвата полагаем:

$$\frac{da}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = 0.$$

Из этих условий получаем следующую систему уравнений:

$$2\nu \left\langle b \sin\varphi - a \sin(\nu\delta_1) - \varepsilon \nu a \cos(\nu\delta_3) + \frac{\varepsilon \nu a^3}{4} [2\cos(\nu\delta_3) - \right. \\ \left. - \cos[\nu(\delta_3 - 2\delta_2)]] \right\rangle + \delta_1 \left\langle b \cos(\varphi - \nu\delta_1) + a[1 - \nu^2 \cos(\nu\delta_1)] - \right. \\ \left. - \varepsilon \nu a \sin[\nu(\delta_3 - \delta_1)] + \frac{\varepsilon \nu a^3}{4} [2\sin[\nu(\delta_3 - \delta_1)] + \sin[\nu(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)]] \right\rangle = 0; \quad (6)$$

$$2\nu \left\langle b \cos\varphi + a[\nu^2 - \cos(\nu\delta_1)] + \varepsilon \nu a \sin(\nu\delta_3) - \frac{\varepsilon \nu a^3}{4} [2\sin(\nu\delta_3) + \right. \\ \left. + \sin[\nu(\delta_3 - 2\delta_2)]] \right\rangle - \delta_1 \left\langle b \sin(\varphi - \nu\delta_1) - \varepsilon \nu a \cos[\nu(\delta_3 - \delta_1)] - \right. \\ \left. - \nu^2 a \sin(\nu\delta_1) + \frac{\varepsilon \nu a^3}{4} [2\cos[\nu(\delta_3 - \delta_1)] - \cos[\nu(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)]] \right\rangle = 0.$$

Система (6) после некоторого преобразования и исключения неизвестной φ приводится к одному алгебраическому уравнению:

$$a^2 \left\langle \varepsilon \nu \cos(\nu\delta_3) + \sin(\nu\delta_1) - \frac{\varepsilon \nu a^2}{4} [2\cos(\nu\delta_3) - \right. \\ \left. - \cos[\nu(\delta_3 - 2\delta_2)]] \right\rangle^2 + a^2 \left\langle \nu^2 - \cos(\nu\delta_1) + \varepsilon \nu \sin(\nu\delta_3) - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon \nu a^2}{4} [2\sin(\nu\delta_3) + \sin[\nu(\delta_3 - 2\delta_2)]] \right\rangle^2 = b^2, \quad (7)$$

связывающему амплитуду a стационарных периодических колебаний с приведенной частотой ν внешней возмущающей силы.

Нам необходимо выделить лишь устойчивые периодические колебания. Для этого следует исследовать на устойчивость решения системы (6). При исследовании устойчивости, мы ограничимся лишь анализом уравнений первого приближения. Для этого составим систему

уравнений в вариациях, соответствующую системе (5). После некоторых преобразований с учетом уравнений (6) уравнения в вариациях принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{1}{D} & \left\langle 2\varepsilon v^2 \cos(v\delta_3) + 2v \sin(v\delta_1) - \frac{3\varepsilon v^2 a^2}{2} \{2\cos(v\delta_3) - \right. \\
 & \left. - \cos[v(\delta_3 - 2\delta_2)]\} - \delta_1 [1 - v^2 \cos(v\delta_1)] + \varepsilon v \delta_1 \sin[v(\delta_3 - \delta_1)] - \right. \\
 & \left. - \frac{3\varepsilon v \delta_1 a^2}{4} \{2\sin[v(\delta_3 - \delta_1)] + \sin[v(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)]\} \right\rangle \xi + \\
 & + \frac{a}{D} \left\langle 2v[v^2 - \cos(v\delta_1)] + 2\varepsilon v^2 \sin(v\delta_3) - \frac{\varepsilon v^2 a^2}{2} \{2\sin(v\delta_3) + \right. \\
 & \left. + \sin[v(\delta_3 - 2\delta_2)]\} + v^2 \delta_1 \sin(v\delta_1) + \varepsilon v \delta_1 \cos[v(\delta_3 - \delta_1)] - \right. \\
 & \left. - \frac{\varepsilon v \delta_1 a^2}{4} \{2\cos[v(\delta_3 - \delta_1)] - \cos[v(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)]\} \right\rangle \eta ; \\
 \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{1}{Da} & \left\langle 2v[\cos(v\delta_1) - v^2] - 2\varepsilon v^2 \sin(v\delta_3) + \right. \\
 & \left. + \frac{3\varepsilon v^2 a^2}{2} \{2\sin(v\delta_3) + \sin[v(\delta_3 - 2\delta_2)]\} - v^2 \delta_1 \sin(v\delta_1) - \right. \\
 & \left. - \varepsilon v \delta_1 \cos[v(\delta_3 - \delta_1)] + \frac{3\varepsilon v \delta_1 a^2}{4} \{2\cos[v(\delta_3 - \delta_1)] - \cos[v(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)]\} \right\rangle \xi + \\
 & + \frac{1}{D} \left\langle 2\varepsilon v^2 \cos(v\delta_3) + 2v \sin(v\delta_1) - \frac{\varepsilon v^2 a^2}{2} \{2\cos(v\delta_3) - \cos[v(\delta_3 - 2\delta_2)]\} - \right. \\
 & \left. - \delta_1 [1 - v^2 \cos(v\delta_1)] + \varepsilon v \delta_1 \sin[v(\delta_3 - \delta_1)] - \right. \\
 & \left. - \frac{\varepsilon v \delta_1 a^2}{4} \{2\sin[v(\delta_3 - \delta_1)] + \sin[v(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)]\} \right\rangle \eta .
 \end{aligned} \tag{8}$$

Характеристическое уравнение системы (8) имеет вид:

$$\lambda^2 - \frac{A}{D} \lambda + \frac{B}{D^2} = 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 A = 4\varepsilon v^2(1 - a^2)\cos(v\delta_3) + 4v\sin(v\delta_1) + 2\varepsilon v^2 a^2 \cos[v(\delta_3 - 2\delta_2)] + \\
 + 2\delta_1[v^2 \cos(v\delta_1) - 1] + 2\varepsilon v \delta_1(1 - a^2)\sin[v(\delta_3 - \delta_1)] - \varepsilon v \delta_1 a^2 \sin[v(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)]; \\
 B = \frac{3}{16} \varepsilon^2 v^2 a^4 \{20v^2 - 16v^2 \cos[2v(\delta_3 - \delta_1)] + 16v \delta_1 \sin[v(\delta_1 - 2\delta_2)] + \\
 + 16v \delta_1 \sin[v(2\delta_3 - \delta_1)] - 4v \delta_1 \sin[v(2\delta_3 - 4\delta_2 + \delta_1)] - 4\delta_1^2 \cos[2v(\delta_3 - \delta_2)] + \\
 + 5\delta_1^2\} - \varepsilon v a^2 \{8\varepsilon v^3 + 8v^4 \sin(v\delta_3) + 4v^4 \sin[v(\delta_3 - 2\delta_2)] - 4\varepsilon v^3 \cos[2v(\delta_3 - \delta_1)] - \\
 - 8v^2 \sin[v(\delta_3 - \delta_1)] - 4v^2 \sin[v(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)] + 8v^3 \delta_1 \cos[v(\delta_3 - \delta_1)] + 2\varepsilon v \delta_1^2 - \\
 - 8v \delta_1 \cos(v\delta_3) + 8\varepsilon v^2 \delta_1 \sin[v(2\delta_3 - \delta_1)] + 4v \delta_1 \cos[v(\delta_3 - 2\delta_2)] - \\
 - 4v^3 \delta_1 \cos[v(\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1)] - 4\varepsilon v^2 \delta_1 \sin[v(2\delta_3 - \delta_1)] + 2v^2 \delta_1^2 \sin(v\delta_3) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \nu^2 \delta_1^2 \sin[\nu(\delta_3 - 2\delta_2)] - \varepsilon \nu \delta_1^2 \cos[2\nu(\delta_3 - \delta_2)] - 2\delta_1^2 \sin[\nu(\delta_3 - \delta_1)] - \\
 & - \delta_1^2 \sin[\nu(\delta_3 - 2\delta_2 - \delta_1)] + 4\nu^6 - 8\nu^4 \cos(\nu\delta_1) + 4\nu^2 + 8\varepsilon \nu^5 \sin(\nu\delta_3) - \\
 & - 8\varepsilon \nu^3 \sin[\nu(\delta_3 - \delta_1)] + 4\varepsilon^2 \nu^2 + \delta_1^2 + \nu^4 \delta_1^2 - 2\varepsilon \nu \delta_1^2 + \varepsilon^2 \nu^2 \delta_1^2 - \\
 & - 2\nu^2 \delta_1^2 \cos(\nu\delta_1) + 4\nu^5 \delta_1 \sin(\nu\delta_1) + 8\varepsilon \nu^4 \delta_1 \cos[\nu(\delta_3 - \delta_1)] - 8\varepsilon \nu^2 \delta_1 \cos(\nu\delta_3) + \\
 & + 4\varepsilon^2 \nu^3 \delta_1 \sin[\nu(2\delta_3 - \delta_1)] - 2\varepsilon \nu \delta_1^2 \sin[\nu(\delta_3 - \delta_1)] + 2\varepsilon \nu^3 \delta_1^2 \sin(\nu\delta_3).
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы исследуемое стационарное решение было устойчивым, достаточно, чтобы корни характеристического уравнения (9) лежали в левой полуплоскости; для этого необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$A < 0, \quad B > 0 \tag{10}$$

($D > 0$ по определению). По условиям (10) мы и будем дальше определять области устойчивых и неустойчивых стационарных решений.

Перейдем теперь к исследованию процессов синхронизации при различных значениях запаздываний аргумента $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Для этого с помощью уравнения (7) построим амплитудно-частотные кривые стационарных периодических режимов и выделим из них устойчивые ветви на основании условий (10). Каждый раз мы будем строить амплитудно-частотные кривые, соответствующие трем значениям амплитуды внешней возмущающей силы: $b_1 = 0,05$ (кривые I, II); $b_2 = 0,2$ (кривая III); $b_3 = 0,5$ (кривая IV); параметр ε положим равным 0,1. Сплошными линиями станем отмечать устойчивые ветви амплитудно-частотных кривых, пунктирными — неустойчивые ветви, штриховкой — области неустойчивости.

При отсутствии в системе запаздываний ($\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$) процессы синхронизации представлены на рис. 1.

Из рисунка ясно, что при значительных амплитудах внешней силы ($b=0,2; b=0,5$) в областях синхронизации ($[\nu_3, \nu_4]$ и $[\nu_5, \nu_6]$) каждой частоте внешней силы ν соответствует одно устойчивое периодическое решение. При выходе из области синхронизации стационарное периодическое решение становится неустойчивым. Как показано в [1, 4], при выходе из области синхронизации устойчивый периодический режим переходит в устойчивый квазипериодический режим, который получается в результате наложения автоколебаний и синхронизованных вынужденных колебаний. При малых амплитудах внешней возмущающей силы (в нашем примере при $b=0,05$) в области синхронизации $[\nu_1, \nu_2]$ наряду с устойчивым периодическим режимом существуют два неустойчивых периодических режима. Согласно [1], при выходе из области синхронизации эти неустойчивые режимы переходят в устойчивый квазипериодический режим. Появление квазипериодического режима по времени в точности совпадает с моментом исчезновения устойчивого периодического режима.

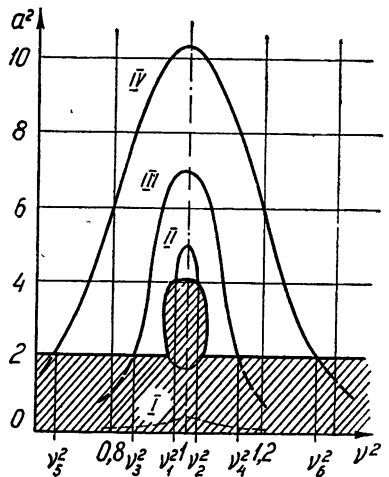


Рис. 1.

На рис. 2 показаны процессы синхронизации при $\delta_2 = \delta_3 = 0$ и $\delta_1 \ll 1$

(на рис. 2а — при $\delta_1=0,05$, на рис. 2б при $\delta_1=0,2$). Как видно из этих рисунков, малое запаздывание восстанавливающей силы δ_1 не изменяет характера процессов синхронизации, но вызывает сужение областей синхронизации и увеличение амплитуд синхронизованных колебаний при неизменных амплитудах внешней силы.

Исследования процессов синхронизации при больших δ_1 не проводилось, так как наш метод исследования в этом случае неприменим.

На рис. 3 показаны процессы синхронизации при $\delta_1=\delta_3=0$ и $\delta_2 \neq 0$ (рис. 3а соответствует $\delta_2=\pi/6$, рис. 3б — $\delta_2=\pi/2$ и рис. 3в — $\delta_2=3\pi/4$). Как видно из этих рисунков, запаздывание δ_2 вызывает некоторое расширение областей синхронизации с одновременным уменьшением амплитуд синхронизованных колебаний. При этом в интервале $0 < \delta_2 < \pi/2$ области синхронизации и максимумы амплитуд сдвигаются влево, а в интервале $\frac{\pi}{2} < \delta_2 < \pi$ — вправо. При $\delta_2=\pi$ получаем такую же картину синхронизации, как и в отсутствие запаздывания. При дальнейшем увеличении δ_2 , очевидно, будет повторяться такая же картина синхронизации, как и при $\delta_2 \in [0, \pi]$.

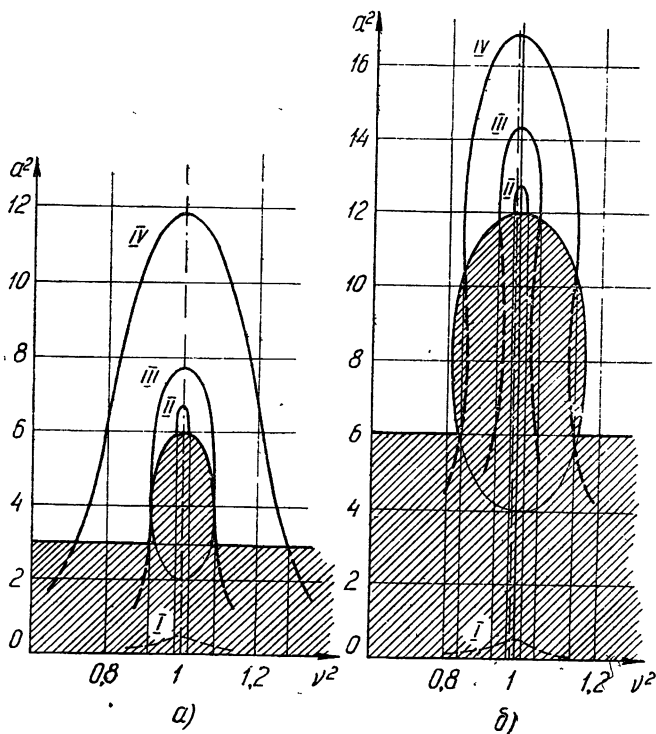


Рис. 2

На рис. 4, 5, 6 показаны процессы синхронизации при $\delta_1=\delta_2=0$, $\delta_3 \neq 0$.

Рис. 4 иллюстрирует процессы синхронизации соответственно при $\delta_3=0,2$, $\delta_3=\pi/6$ и $\delta_3=\pi/3$: увеличение запаздывания δ_3 от 0 до $\pi/3$ вызывает значительное увеличение областей синхронизации и амплитуд синхронизованных колебаний, а также значительный сдвиг областей синхронизации и особенно максимумов амплитуд вправо. Кроме того, при увеличении δ_3 появляются области частот, в которых существует

не один, а два или даже три устойчивых периодических режима, и все они практически осуществимы. Какой из этих режимов устанавливается в системе, зависит от предыдущих состояний системы.

С приближением δ_3 к $\pi/2$ картина синхронизации существенно изменяется: как видно из рис. 5, в этом случае появляется новая область неустойчивости, лежащая выше прямой $a^2=2$ справа от линии $\nu=\pi/2\delta_3$ (прямая MN). Справа от MN и ниже прямой $a^2=2$ появляется область устойчивости. При приближении δ_3 к $\pi/2$ прямая MN быстро приближается к прямой $\nu=1$. В этом случае вершины амплитудно-частотных кривых попадают в область неустойчивости, и область синхронизации быстро уменьшается. При этом в области $\nu > \pi/2\delta_3$ появляются устойчивые периодические колебания с амплитудами $a < \sqrt{2}$. Эти колебания носят иной характер, чем в процессе синхронизации: они ведут себя как обычные вынужденные колебания в диссипативной системе. Таким образом, по отношению к внешним возмущениям с частотами $\nu > \pi/2\delta_3$ система ведет себя совершенно иначе, чем по отношению к возмущениям с частотами $\nu < \pi/2\delta_3$.

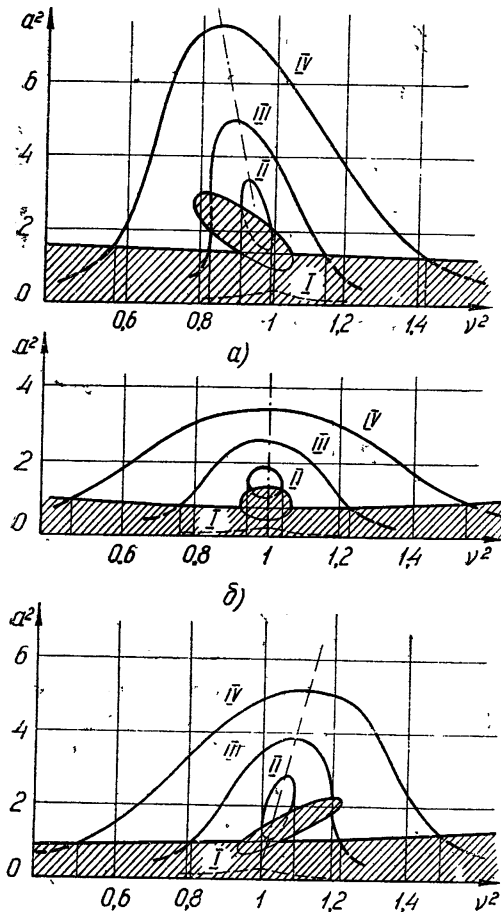


Рис. 3.

При $\delta_3=\pi/2$ (рис. 6а) синхронизация происходит лишь на частотах $\nu < 1$ и при значительных амплитудах внешней силы. На частотах, зна-

чительно больших 1 , имеют место колебания с малыми амплитудами, как и в предыдущем случае. Однако в отличие от предыдущего случая между областями существования устойчивых периодических колебаний имеется область частот, в которой периодические колебания отсутствуют. Как показывает качественное исследование уравнений (5) на фазовой плоскости, в этой области частот около неустойчивой точки покоя существует устойчивый предельный цикл, которому соответствует устойчивый режим квазипериодических колебаний системы. Это значит, что в этой области частот внешняя сила наряду с синхронными вынужденными колебаниями возбуждает незатухающие собственные колебания, которые не погашаются, а накладываются на вынужденные колебания и образуют режим биений. При очень малых

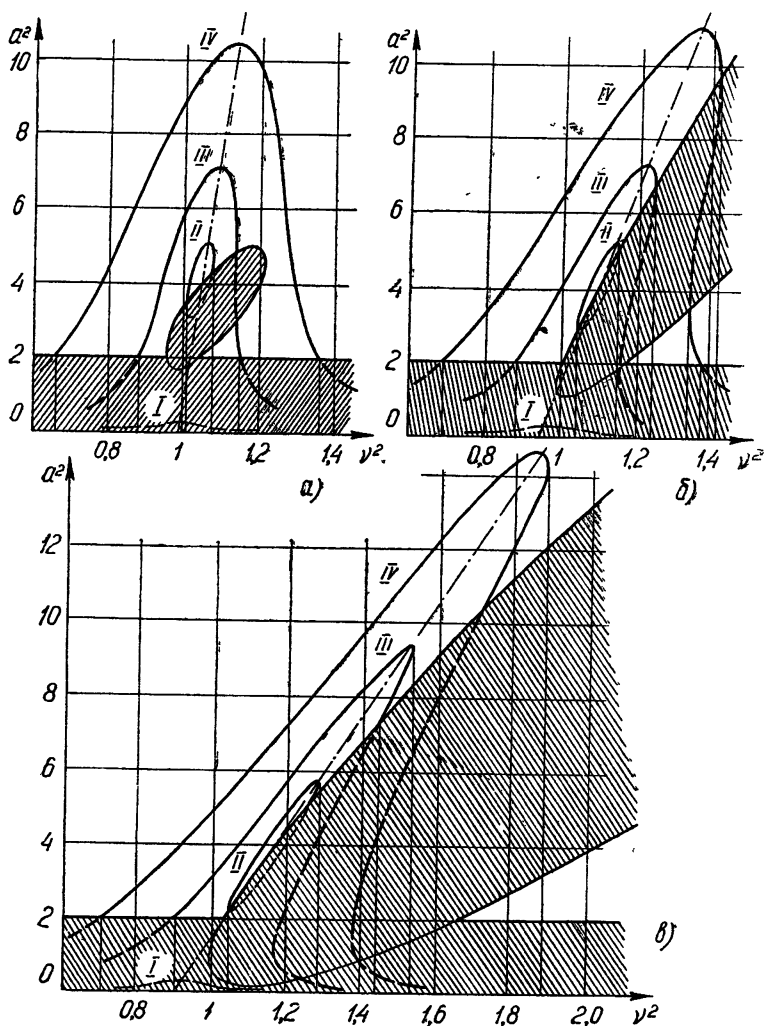


Рис. 4.

амплитудах внешней силы (в нашем примере—при $b=0,05$) синхронизация отсутствует: на частотах $v > 1$ существуют вынужденные периодические колебания с малыми амплитудами (кривая I и устойчивый

отрезок кривой II), а при $\nu < 1$ периодических колебаний не существует—существуют лишь устойчивые квазипериодические колебания.

При $\delta_3 > \pi/2$ система теряет автоколебательный характер и синхронизация отсутствует (рис. 6б и 6в, которым соответствуют $\delta_3 = 3\pi/4$ и $\delta_3 = \pi$). В этих случаях при очень малых амплитудах внешней силы на всех частотах существуют лишь вынужденные периодические колебания весьма малой амплитуды. При больших амплитудах внешней силы периодические колебания существуют лишь при больших расстройках частот; при ν , близких к 1, устойчивые периодические колебания отсутствуют. Как показывает качественное исследование системы (5) на фазовой плоскости, в этом случае появляются устойчивые квазипериодические колебания.

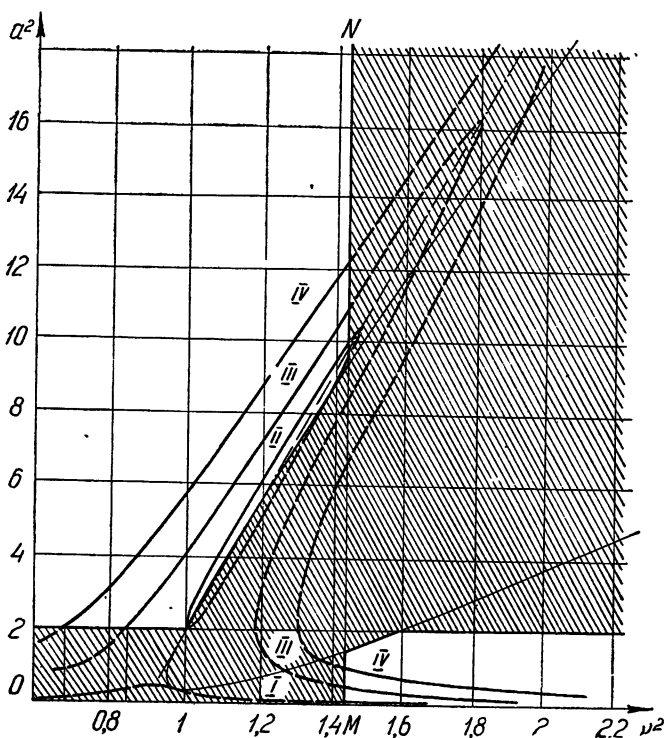


Рис. 5.

Это явление можно объяснить следующим образом: при указанных величинах запаздываний аргумента ($\delta_1 = \delta_2 = 0$; $\delta_3 \in (\pi/2, 3\pi/2)$) система перестает быть автоколебательной, но она становится потенциально автоколебательной; при малых внешних возмущениях или при большой расстройке частот она ведет себя как диссипативная система, а при значительной величине внешней возмущающей силы и при малой расстройке частот в системе возбуждаются незатухающие собственные колебания, которые не захватываются вынужденными колебаниями, а накладываются на вынужденные колебания и образуют квазипериодический режим биений.

На рис. 7 показаны процессы синхронизации при $\delta_2 = \delta_3 = \pi/6$, $\delta_1 = 0$. В этом случае действие запаздывания δ_2 несколько компенсирует действие запаздывания δ_3 , и картина синхронизации приблизительно такая же, как при $\delta_2 = 0$ и $\delta_3 < \pi/6$.

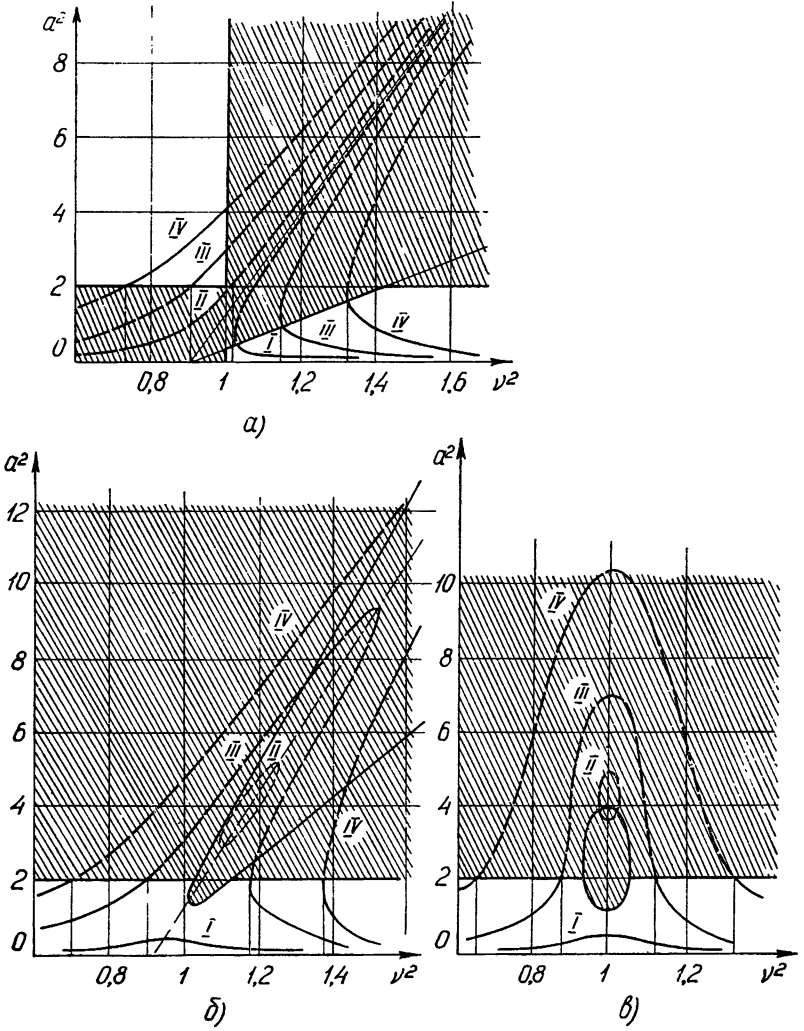


Рис. 6.

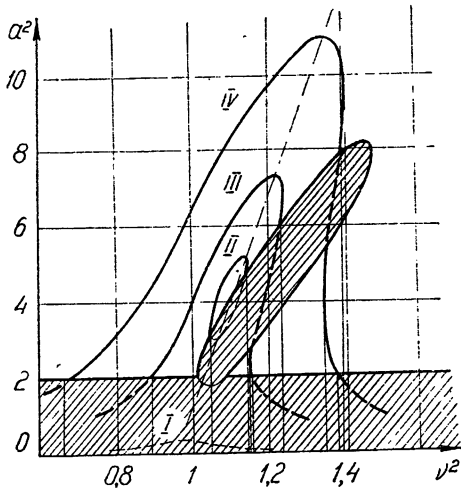


Рис. 7.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что наличие запаздываний в элементах автоколебательной системы существенно влияет на процессы синхронизации автоколебаний внешней периодической возмущающей силой.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, А. А. Витт, Журн. прикл. физики, 7, 3 (1930).
2. E. V. Appleton, Proc. Cambr. Philos. Soc., 21, 38 (1922).
3. N. Minorsky, Introduction to non-linear mechanics, Arbor, Mich., 1947.
4. C. Hayashi, H. Shibayama, Y. Nishikawa, IRE Trans. of the Professional Group on Circuit Theory, CT-7, 413 (1960).
5. Н. В. Бутенин, К теории принудительной синхронизации, Сб. памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М, 1955.
6. В. П. Рубаник, Укр. матем. журн., 11, 4, 446 (1950).
7. А. Халанай, Revue de Mathemat. pures et Appl., 4, 3 (1959).

Черновицкий государственный университет

Поступила в редакцию
9 ноября 1961 г.

TO DELAY INFLUENCE ON PROCESS OF AUTOOSCILLATION SYNCRHONIZATION BY EXTERNAL PERIODIC FORCE

V. P. Rubanic

Synchronization processes are considered in the simplest autooscillating system Van-der-Pol oscillator, when delays being in the system elements. The delay values dependence is studied of the variation of synchronization processes.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕРЕГУЛИРУЕМОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Л. И. Гудзенко

Излагаются основы корреляционного метода, позволяющего находить уравнения автоколебательной системы по ее сигналу. При этом не предполагаются известными какие-либо конкретные данные о модели системы. Обсуждаемый метод может найти применение при изучении некоторых астрофизических и биологических объектов.

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Обычный путь анализа сложной системы состоит из нескольких последовательных этапов: 1) изучения свойств простых составных частей, 2) описания взаимодействия частей, 3) экспериментальной проверки решений уравнений. Такой путь непригоден, если нет достаточных сведений о характере и взаимосвязи процессов, формирующих основные свойства анализируемой системы; при этом естественно попытаться найти уравнения, не задавая конкретную моделью, а исходя лишь из самых общих свойств, непосредственно вытекающих из опыта, и проводя соответствующую обработку экспериментальных данных. Полученные таким образом уравнения уже сами по себе представляют определенную ценность, более того — в ряде задач они являются конечной целью исследования. Эти уравнения имеют и эвристическое значение; при дальнейшем изучении системы они должны рассматриваться как экспериментальный материал, позволяющий сузить класс возможных моделей системы, а также определить значения параметров каждой модели.

Здесь обсуждается возможность решения одной из простейших задач такого типа — получения уравнений нерегулируемой (т. е. не подчиняющейся воздействию экспериментатора) автономной колебательной системы [1,2].

До изложения принципиально очень простого, но трудоемкого метода необходимо выписать динамические характеристики автоколебательной системы общего типа, а также пояснить смысл флюктуационных составляющих сигнала системы.

2. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

По предположению, в некоторой области начальных условий решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (2.1)$$

динамической модели системы с одной степенью свободы становятся при неограниченном росте времени сколь угодно близкими к периодической функции

$$x = x_0(t), \quad x_0(t + T) = x_0(t). \quad (2.2)$$

Будем рассматривать систему (2.1) на фазовой плоскости, выбрав x и $y = dx/dt$ в качестве декартовых координат. При этом уравнение (2.1) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y). \quad (2.3)$$

Установившимся колебаниям (2.2) на фазовой плоскости соответствует устойчивый предельный цикл

$$x = x_0(t), \quad y = y_0(t) = \frac{dx_0}{dt}(t). \quad (2.4)$$

Функцию $f(x, y)$ будем считать дважды дифференцируемой по обоим аргументам, так что (2.4) — гладкая кривая. Ограничившись рассмотрением установившихся колебаний системы, введем в окрестности кривой (2.4) локальные координаты [3,4], связанные с периодическим движением изображающей точки динамической системы по циклу (2.4).

Выделим окрестность A , состоящую из точек, расстояния которых до (2.4) меньше соответствующих радиусов кривизны. Для каждой такой точки M однозначно определена ближайшая точка $M_0(M)$ кривой (2.4) — проекция M на эту кривую. Расстояние $\overline{M_0M}$ с точностью до знака равно ортогональной координате $n(M)$ точки M : $n(M) = \pm \overline{M_0M}$; знак „—“ соответствует точкам M , лежащим внутри области, охватываемой на фазовой плоскости циклом (2.4). Тангенциальная координата $\theta(M)$ равна времени движения (2.4) от произвольно фиксированной точки цикла $M_0^{(0)}$ до проекции $M_0(M)$ точки M . Уравнения самого цикла в локальных координатах имеют вид

$$n = 0, \quad \theta = t + \theta(0). \quad (2.5)$$

В окрестности A якобиан $J(n, \theta) = \partial(x, y)/\partial(n, \theta)$ не обращается в нуль; это позволяет провести замену переменных. Тогда вместо (2.3) получаем

$$\frac{dn}{dt} = N_1(n, \theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = \Theta_1(n, \theta), \quad (2.6)$$

где

$$N_1(n, \theta) = \frac{1}{J(n, \theta)} \left\{ y(n, \theta) \frac{\partial y}{\partial \theta}(n, \theta) - f[x(n, \theta), y(n, \theta)] \frac{\partial x}{\partial \theta}(n, \theta) \right\};$$

$$\Theta_1(n, \theta) = -\frac{1}{J(n, \theta)} \left\{ y(n, \theta) \frac{\partial y}{\partial n}(n, \theta) - f[x(n, \theta), y(n, \theta)] \frac{\partial x}{\partial n}(n, \theta) \right\}.$$

Нас интересует поведение динамической системы вблизи установления периодических колебаний. Введя малый параметр λ , положим поэтому

$$n(t) = \lambda \rho(t), \quad \theta(t) = t + \theta(0) + \lambda \sigma(t). \quad (2.7)$$

Подстановка (2.7) в уравнение (2.6) дает в первом приближении относительно $\lambda \rho$:

$$\lambda \frac{d\rho}{dt}(t) = N_1(0, \theta) + \lambda \rho(t) \frac{\partial N_1}{\partial n}(0, \theta);$$

$$1 + \lambda \frac{d\sigma}{dt}(t) = \Theta_1(0, \theta) + \lambda \rho(t) \frac{\partial \Theta_1}{\partial n}(0, \theta),$$

откуда непосредственно следует:

$$N_1(0, \theta) \equiv 0, \quad \Theta_1(0, \theta) = 1.$$

Пусть начала отсчета тангенциальной координаты и времени согласованы; тогда

$$\theta(0) = 0, \quad \sigma(0) = 0, \quad \theta = t + \lambda\sigma.$$

Введем обозначения:

$$N(\theta) = -\frac{\partial N_1}{\partial n}(0, \theta), \quad \Theta(\theta) = \frac{\partial \Theta_1}{\partial n}(0, \theta)$$

и заменим в уравнениях аргумент t на θ . В первом приближении относительно λ получаем:

$$\frac{d\rho}{d\theta}(\theta) + N(\theta)\rho(\theta) = 0, \quad \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta) = \Theta(\theta)\rho(\theta). \quad (2.8)$$

Уравнения (2.8) связывают скорость приближения к циклу изображающей точки и скорость набега ее тангенциальной координаты с расстоянием от точки до предельного цикла. Исходя из их физического смысла, периодические (с периодом T) функции $N(\theta)$ и $\Theta(\theta)$, характеризующие динамическую систему (2.1) вблизи ее установившихся колебаний, будем называть соответственно жесткостью и неизохронностью цикла в точке θ . Средняя жесткость

$$N_0 = \frac{1}{T} \int_0^T N(\theta) d\theta$$

определяет степень устойчивости предельного цикла. В дальнейшем будем предполагать выполненным условие

$$N_0 > 0, \quad (2.9)$$

обеспечивающее асимптотическую орбитальную устойчивость цикла (2.2).

Кратко остановимся на динамической системе с $q/2$ степенями свободы, где $q > 2$ — целое число. Ее уравнение имеет вид:

$$\frac{d^q x}{dt^q}(t) = f \left[x(t), \frac{dx}{dt}(t), \dots, \frac{d^{q-1}x}{dt^{q-1}}(t) \right], \quad (2.10)$$

а решения описываются движением изображающих точек в q -мерном фазовом пространстве $\{x\}$, где

$$x = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(q)}\}, \quad x^{(1)} = x, \quad x^{(2)} = \frac{dx^{(1)}}{dt}, \dots, \quad x^{(q)} = \frac{d^{q-1}x}{dt^{q-1}}.$$

Пусть

$$x = x_0(t) \quad (2.11)$$

— устойчивый предельный цикл системы (2.10). В его окрестности перейдем к локальным координатам (θ, n) , связанным с периодическим движением (2.11). Тангенциальная координата $\theta(M)$ точки равна времени динамического движения (2.11) от фиксированной точки кривой (2.11) до проекции $M_0(M)$ точки M на эту кривую. В гиперплоскости, проведенной через M ортогонально кривой (2.11), введем ортогональные декартовы координаты. Проекция

$$n^{(1)}(M), n^{(2)}(M), \dots, n^{(q-1)}(M)$$

вектора $n = M_0 M$ на координатные оси являются, по определению, ортогональными координатами точки M . В первом приближении отно-

сительно малого отклонения $n = \lambda p$ изображающей точки от кривой (2.11) движение динамической системы (2.10) удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{d\rho}{d\theta} + N[\rho] = 0, \quad \frac{d\sigma}{d\theta} = \Theta(\rho), \quad (2.12)$$

где $\lambda\sigma = \theta - t$ — разность тангенциальных координат изображающих точек динамической системы, отклоненной от цикла и движущейся по циклу, $N = [N_p^{(r)}(\theta)]$ — тензор жесткости цикла в точке θ , $\Theta(\theta)$ — вектор неизохронности.

Если имеется возможность придания системе различных начальных состояний (регулируемая система), то определение ее характеристик $N(\theta)$ и $\Theta(\theta)$ не встречает принципиальных затруднений. Особый интерес представляет определение характеристик в задачах, где анализируемая система не подчиняется вмешательству экспериментатора или не может регулироваться без нарушения существенных связей. Сюда относится ряд важных проблем из самых различных областей естественной науки. В астрофизике — это задача о свойствах периодического изменения активности Солнца, а также задача об автоколебаниях переменных звезд. В биологии и медицине к задачам такого рода можно отнести изучение синусного узла сердца, а также анализ автоколебаний всего сердца в целом.

Установившиеся колебания (2.2) или (2.11) динамической системы не несут никакой информации о жесткости и неизохронности предельного цикла, так что в рамках динамической теории обсуждаемая возможность определения этих характеристик (по установившимся колебаниям) отсутствует. Но для установившегося движения реальной автоколебательной системы всегда характерны небольшие случайные отклонения от чисто периодического движения. Последние связаны с тем, что динамическая модель с небольшим числом степеней свободы — это лишь математически удобная идеализация, реальная же система имеет бесконечное число степеней свободы. Более точно свойства колебаний реальной системы отражены в динамической модели, находящейся под действием флуктуационной силы. Именно наличие такой силы, все время „сбивающей“ изображающую точку с предельного цикла динамической модели, позволяет определить как интересные нас динамические характеристики автоколебательной системы, так и статистические свойства сигнала генератора.

3. ФЛЮКТУАЦИОННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С целью уточнения модели кратко остановимся на схеме статистической механики (точнее — классической статистики). Пусть анализируемая система изолирована и имеет большое число Q степеней свободы; ее состояния полностью описываются совокупностью Q обобщенных координат (ξ_1) и Q обобщенных импульсов (ξ_2) :

$$\xi = \{ \xi_1^{(1)}, \dots, \xi_1^{(Q)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_2^{(Q)} \} = \{ \xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(2Q)} \}.$$

Микропараметры $\xi^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\xi_1^{(k)}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_2^{(k)}}, \quad \frac{d\xi_2^{(k)}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \xi_1^{(k)}} \quad (k = 1, \dots, Q), \quad (3.1)$$

где $H = H(\xi)$ — гамильтонова функция системы. Допустим, кроме того, что в макроскопическом смысле система обладает $q/2$ степенями

свободы, т. е. существует небольшое число q ($q \ll Q$) параметров системы

$$x = \{x^{(1)}, \dots, x^{(q)}\}, \quad x^{(\alpha)} = x^{(\alpha)}(\xi) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, q),$$

описывающих ее макросостояние с достаточно высокой точностью. Используя функции $x^{(\alpha)}(\xi)$ и проводя в (3.1) замену переменных:

$$\xi \rightarrow \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(q)}, \xi^{(q+1)}, \dots, \xi^{(2Q)}\} = \{x, \xi^{(q+1)}, \dots, \xi^{(2Q)}\},$$

получим уравнения двух типов:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, \xi^{(q+1)}, \dots, \xi^{(2Q)}); \quad (3.2)$$

$$\frac{d\xi^{(k)}}{dt} = \Xi^{(k)}(x, \xi^{(q+1)}, \dots, \xi^{(2Q)}) \quad (k = q + 1, \dots, 2Q). \quad (3.3)$$

Из уравнений (3.3) находим:

$$\xi^{(k)} = \xi^{(k)}(x, \xi_0^{(q+1)}, \dots, \xi_0^{(2Q)}, t - t_0) \quad (k = q + 1, \dots, 2Q), \quad (3.4)$$

где $\xi_0^{(k)}$ — значения микропараметров $\xi^{(k)}(t)$ при $t = t_0$. Величины $\xi_0^{(k)}$ будем считать случайными. Подстановка (3.4) в (3.2) дает:

$$\frac{dx}{dt} = X_1(x, t). \quad (3.5)$$

Определяющие поведение макропараметров x уравнения (3.5) естественно назвать макроуравнениями рассматриваемой изолированной системы. Их правые части, в отличие от микроуравнений (3.1), содержат в явном виде зависимость от t . Последняя отражает неполноту динамического описания реальной системы одними макропараметрами. При статистическом усреднении уравнений (3.5) по распределениям $\xi_0^{(q+1)}, \xi_0^{(q+2)}, \dots, \xi_0^{(2Q)}$, проведенном при заданных значениях $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(q)}$, зависимость правых частей от t исчезает, так как в противном случае установившееся движение изолированной системы оказалось бы регулярно зависящим от времени. Вводя обозначения

$$\langle X_1(x, t) \rangle = X(x),$$

перепишем (3.5) в виде

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \lambda F(x, t), \quad (3.6)$$

где λ — малый параметр, а векторный случайный процесс

$$\lambda F(x, t) = X_1(x, t) - X(x, t)$$

имеет флюктуационный характер, т. е. $\langle F(x, t) \rangle \equiv 0$.

Таким образом, макроуравнения (3.6) описывают малое флюктуационное возмущение динамической системы. Малость возмущения обусловлена тем, что по предположению рассматриваемая изолированная система с высокой точностью описывается макропараметрами x . Динамическая система ($\lambda = 0$) соответствует идеализированной модели с $q/2$ степенями свободы, лишенной флюктуаций и приближенно описывающей среднестатистическое поведение макропараметров реальной системы*. Флюктуационную силу, в согласии со сказанным, нужно

* Динамическая система совпадает с уравнениями для средних статистических значений макропараметров только при линейности динамических уравнений.

считать заданной в фазовом пространстве $\{x\}$ динамической системы в виде поля q -мерной векторной стационарной случайной функции времени.

В приведенном рассуждении не использовался конкретный вид уравнений (3.1); существенны лишь свойства системы, позволяющие перейти от точной характеристики с помощью большого числа параметров („микропараметров“) к приближенному описанию существенно меньшим числом „макропараметров“. Более того, „макроуравнения“ сохраняют вид (3.6), если вместо изолированной системы взять автономную (относительно „макропараметров“) систему, находящуюся в „микровзаимодействии“ с „нагревателем“ и „холодильником“*.

Используя сказанное, напомним уравнения автоколебательной системы с одной степенью свободы в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + \lambda F^{(x)}(x, y, t); \\ \frac{dy}{dt} &= f(x, y) + \lambda F^{(y)}(x, y, t),\end{aligned}\quad (3.7)$$

где $f(x, y)$ — нелинейная характеристика динамической системы (2.3), $F^{(x)}(x, y, t)$ и $F^{(y)}(x, y, t)$ — составляющие поля стационарных флуктуаций, λ — малый параметр. Переходя в (3.7) к координатам n, θ , связанным с динамическим движением вблизи предельного цикла (2.4), получим:

$$\frac{dn}{dt} = N_1(n, \theta) + \lambda F^{(n)}(n, \theta, t); \quad (3.8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta_1(n, \theta) + \lambda F^{(\theta)}(n, \theta, t). \quad (3.9)$$

При этом N_1 и Θ_1 определяются формулами (2.6); $\lambda F^{(n)}$ — ортогональная, $\lambda F^{(\theta)}$ — тангенциальная составляющие флуктуационной силы, равные соответственно:

$$\begin{aligned}\lambda F^{(n)} &= \frac{\lambda}{J(n, \theta)} \left\{ F^{(x)}[x(n, \theta), y(n, \theta), t] \frac{\partial y}{\partial \theta}(n, \theta) - \right. \\ &\quad \left. - F^{(y)}[x(n, \theta), y(n, \theta), t] \frac{\partial x}{\partial \theta}(n, \theta) \right\}; \\ \lambda F^{(\theta)} &= -\frac{\lambda}{J(n, \theta)} \left\{ F^{(x)}[x(n, \theta), y(n, \theta), t] \frac{\partial y}{\partial n}(n, \theta) - \right. \\ &\quad \left. - F^{(y)}[x(n, \theta), y(n, \theta), t] \frac{\partial x}{\partial n}(n, \theta) \right\}.\end{aligned}$$

Устойчивость предельного цикла при достаточно малой интенсивности ортогональной составляющей $\lambda F^{(n)}$ приводит к тому, что изображающая точка с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, остается внутри малой окрестности кривой (2.4). Будем рассматривать поведение системы лишь на конечном интервале времени и ограничимся

* Для изолированной системы (а также для системы в термостате) установившийся режим соответствует устойчивому равновесию макропараметров. Автоколебания возможны лишь при наличии нагревателя и холодильника.

первым приближением относительно λ . Положив $n(t) = \lambda \rho(t)$, $\theta(t) = t + \lambda \sigma(t)$ и заменив аргумент t на θ , получим аналогично (2.8):

$$\frac{d\rho}{d\theta}(\theta) + N(\theta)\rho(\theta) = F^{(p)}(\theta); \quad (3.10)$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \Theta(\theta)\rho(\theta) + F^{(s)}(\theta), \quad (3.11)$$

где $F^{(p)} = F^{(n)}(0, \theta, \theta)$, $F^{(s)} = F^{(0)}(0, \theta, \theta)$ — значения составляющих флюктуационной силы, вычисляемые в проекции изображающей точки системы на кривую (2.4). Поскольку $F(n, \theta, t)$ — периодические функции θ и стационарные случайные функции t , составляющие $F^{(p)}(\theta)$ и $F^{(s)}(\theta)$ являются периодически нестационарными случайными процессами.

При рассмотрении автоколебательной системы с $q/2$ степенями свободы подобным образом приходим к q уравнениям:

$$\frac{d\rho}{d\theta} + N[\rho] = F^{(p)}(\theta); \quad (3.12)$$

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = (\Theta \rho) + F^{(s)}(\theta), \quad (3.13)$$

где $N(\theta)$ — тензор жесткости, $\Theta(\theta)$ — вектор неизохронности цикла в точке θ . Для определения динамических характеристик надо найти положение предельного цикла в фазовом пространстве динамической системы, а затем, анализируя движение системы вблизи цикла, вычислить жесткость и неизохронность. Эти функции характеризуют установившиеся колебания системы при малых флюктуациях.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАЛЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ЦИКЛА

Из уравнений (3.12) в силу линейности оператора $N[\rho]$ находим, что среднестатистическое отклонение от цикла $r(\theta) = \lambda \langle \rho(\theta) \rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dr}{d\theta} + N[r] = 0. \quad (4.1)$$

Сравнивая с (2.9), получаем, что в первом приближении относительно λ среднестатистическое движение совпадает с динамическим. При асимптотической устойчивости цикла отсюда следует, что установившаяся среднестатистическая траектория совпадает с предельным циклом. Для оценки точности определения положения цикла в фазовом пространстве системы важно знать функцию распределения малых флюктуационных отклонений изображающей точки от кривой (2.11) предельного цикла. Это распределение существенно зависит от характера ортогональной составляющей флюктуационной силы, в связи с чем приходится несколько конкретизировать свойства анализируемой системы.

В радиофизике различают „естественные“ и „технические“ источники флюктуаций [5]. Первые, будучи связаны с тепловым шумом и дробовым эффектом, характеризуются короткими интервалами корреляций: если τ_1 — время корреляции „естественных“ флюктуаций, T — период автоколебаний, то $\tau_1/T \ll 1$. Вторые обусловлены влиянием на генератор медленно меняющихся по случайному закону условий

опыта; время корреляции таких флуктуаций τ_2 существенно больше периода ($\tau_2/T \gg 1$). Корреляционная функция $\Psi(t, \tau) = \langle F(t)F(t+\tau) \rangle$ действующей на радиотехнический автогенератор флуктуационной силы $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ состоит из „пика“ и „пьедестала“ (рис. 1). Пик определяется „естественной“ (F_1), а пьедестал — „технической“ (F_2) составляющими флуктуационной силы, причем

$$\langle F_1(t)F_2(t+\tau) \rangle \approx 0, \quad \Psi \approx \Psi_1 + \Psi_2, \quad \Psi_a \approx \begin{cases} \Psi_a(t, 0), & |\tau| \ll \tau_a; \\ 0, & |\tau| \gg \tau_a. \end{cases}$$

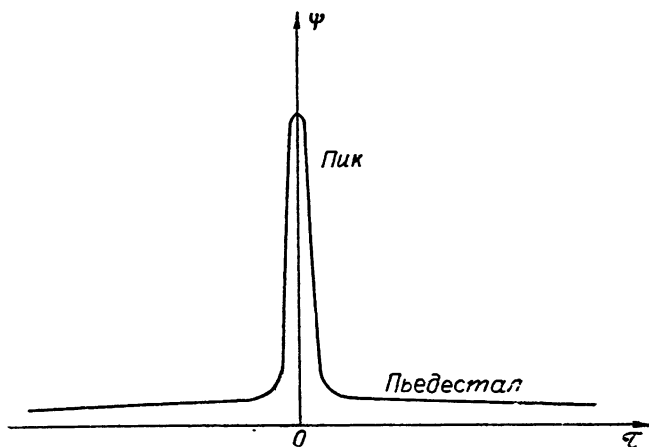


Рис. 1.

Такого же более или менее резкого разбиения флуктуационной силы на быструю и медленную составляющие можно ожидать в самых различных автономных системах*. Характер спектра флуктуационной силы вне полос пропускания линейной системы (3.12) не влияет на отклик, так что по действию на систему коротко-коррелированная сила практически не отличается от δ -коррелированного „белого шума“ — случайного процесса с равномерным спектром. Протекающие в системе процессы, непосредственно не связанные с возникновением автоколебаний, а также всевозможные внешние воздействия могут привести к необходимости учета неравномерностей спектра флуктуационной силы. В частности, наличие существенной неравномерности спектра на интервале частот около нуля связано с процессами „старения“ системы и медленными изменениями внешних условий: соответствующая флуктуационная сила приводит к появлению пьедестала корреляционной функции. Будем считать, что существенные неравномерности спектра флуктуационной силы возможны лишь в одной — примыкающей к нулевой частоте — полосе пропускания системы (3.12); необходимость учета неравномерностей в других полосах возникает при анализе неавтономной системы, т. е. выходит за рамки данной статьи.

При анализе распределения уходов от цикла, формирующихся на не слишком больших интервалах времени, основную роль играет коротко-коррелированная составляющая $F_1(t)$. Поэтому характер воз-

* Поясним это на примере. Простейшая и в принципе довольно общая модель автоколебательной системы — это сосуд с газом, находящимся под действием нагревателя, холодильника и внешнего поля тяжести. Макроскопические колебания в таком сосуде обусловлены конвекцией, при этом малость времени корреляции флуктуационной силы ($\tau_1/T \ll 1$) следует из малости среднего отношения конвекционной составляющей U_k скорости к полной скорости U молекул газа.

мушения системы (3.10) низкочастотной составляющей $F_2(t)$ поясним совсем кратко. Положим в уравнении (3.10) $F^{(p)} = F_2$ и пусть Δt — интервал времени, удовлетворяющий условию $T \ll \Delta t \ll \tau_2$. Практическое постоянство на таком интервале пьедестала корреляционной функции $\Psi_2(t, \tau) \simeq \Psi_2(\tau) \simeq \Psi_2(0)$ при $|\tau| \leq \Delta t$ означает, что на интервалах $\Delta t \ll \tau_2$ процесс $F_2(t)$ эквивалентен случайной величине. В силу малости флюктуационного возмущения системы отсюда следует, что наличие составляющей $F_2(t)$ приводит к медленным (по сравнению с динамическим автоколебательным движением) случайным изменениям параметров системы — смещениям предельного цикла и изменениям его жесткости и неизохронности. Несмотря на малую (по сравнению с пиком) интенсивность низкочастотной составляющей $F_2(t)$ ее большой интервал корреляции может привести к существенным „медленным флюктуациям“ сигнала системы.

Рассмотрим отклонения от цикла, вызываемые коротко-коррелированной составляющей F_1 . Остановимся на системе с одной степенью свободы. Обозначим через

$$dP = p'(\theta', \rho'; \theta, \rho) d\rho$$

вероятность отклонения $\rho(\theta)$ при условии, что тангенциальной координате θ' ($\theta' < \theta$) соответствует отклонение ρ' . При достаточно коротком интервале корреляции входящей в (3.10) силы $F^{(p)}$ функцию $\rho(\theta)$ можно считать непрерывным марковским процессом. Соответствующее (3.10) уравнение Эйнштейна—Фоккера имеет вид:

$$\frac{\partial p'}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \rho} (N \rho p') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (B p'), \quad (4.2)$$

где

$$B(\theta) = \int_{-\tau}^{\tau} \langle F^{(p)}(\theta + \tau) F^{(p)}(\theta) \rangle d\tau \quad (\tau_1 \ll T' \ll T).$$

Одномерная плотность вероятности p' должна быть неотрицательным решением этого уравнения, нормируемым к единице на полном интервале $-\infty < \rho < \infty$ и удовлетворяющим условию

$$p'(\theta, \rho'; \theta, \rho) = \delta(\rho - \rho'). \quad (4.3)$$

Поскольку нас интересует установившаяся плотность вероятности, ограничимся рассмотрением функции

$$p(\theta, \rho) = \lim_{\theta' \rightarrow -\infty} p'(\theta', \rho'; \theta, \rho);$$

эта функция также удовлетворяет уравнению (4.2) и условиям

$$p(\theta, \rho) \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(\theta, \rho) d\rho = 1. \quad (4.4)$$

Вместо (4.3) функция $p(\theta, \rho)$ имеет очевидные свойства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho p(\theta, \rho) d\rho = 0, \quad p(\theta + T, \rho) = p(\theta, \rho). \quad (4.5)$$

Условия (4.4) и (4.5) определяют единственное решение уравнения (4.2)

$$p(\theta, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D(\theta)}} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2D(\theta)} \right], \quad (4.6)$$

где

$$D(\theta) = \left\{ \exp \left[2 \int_{\theta}^{\theta} N(\xi) d\xi \right] - 1 \right\}^{-1} \int_{\theta-T}^{\theta} B(\xi) \exp \left[2 \int_{\theta-T}^{\xi} N(\eta) d\eta \right] d\xi.$$

Таким образом, установившееся одномерное распределение отклонений от цикла подчиняется нормальному закону с периодической дисперсией; аналогичный результат получается и в случае системы с $q/2$ ($q > 2$) степенями свободы. Этот вывод, существенно связанный с предположением о малости и короткой коррелированности возмущающей силы, может быть каждый раз проверен построением функции $p(\theta, \rho)$ по экспериментальным данным.

В соответствии с формулой (4.6) на предельном цикле осуществляется максимум плотности вероятностей положения изображающей точки автоколебательной системы: это свойство можно использовать для нахождения в первом приближении кривой предельного цикла. Более точно положение цикла определяется методом последовательных приближений как среднестатистическая траектория системы.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦИКЛА

Ограничимся задачей, в которой эксперимент дает в качестве источника информации об автоколебательной системе (т. е. в качестве сигнала системы) единственную случайную функцию $x(t)$. Для динамической модели с одной степенью свободы имеем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right).$$

С учетом флуктуаций

$$\frac{dx}{dt} = y + \lambda F^{(x)}(x, y, t); \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y) + \lambda F^{(y)}(x, y, t). \quad (5.1)$$

Преобразуем эти уравнения к виду, более удобному для непосредственной обработки сигнала. Выясним, насколько однозначна запись (5.1) при заданном сигнале $x(t)$, если ограничиться первым приближением относительно λ . Из уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y_1 + \lambda F_1^{(x)}(x, y_1, t); \quad (5.2)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(x, y_1) + \lambda F_1^{(y)}(x, y_1, t)$$

следует $y_1(t, \lambda = 0) \equiv y(t, \lambda = 0)$ и, таким образом, $f_1(x, y) = f(x, y)$, т. е. динамические характеристики (предельный цикл, его жесткость и неизохронность) не изменяются при переходе от x, y к x, y_1 . Из (5.1), (5.2) получаем далее:

$$y_1 = y + \lambda [F^{(x)}(x, y, t) - F_1^{(x)}(x, y, t)]; \quad (5.3)$$

$$F_1^{(y)}(x, y, t) = F^{(y)}(x, y, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) [F_1^{(x)}(x, y, t) - F^{(x)}(x, y, t)].$$

Нетрудно показать, что и обратно — при одинаковых начальных условиях ($x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$) — равенство (5.3) обеспечивает совпадение решений $x(t)$ уравнений (5.1) и (5.2) с точностью до λ^2 .

В частности, положив в (5.3) $F_1^{(x)}(x, y, t) \equiv 0$, получаем:

$$F_1^{(y)} = F^{(y)} - \frac{\partial f}{\partial y} F^{(x)}. \quad (5.4)$$

При этом флюктуационная сила оказывается поляризованной параллельно оси Oy , и уравнения (5.2) имеют вид*

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y) + \lambda F^{(y)}(x, y, t); \quad (5.5)$$

существенно, что входящая в эти уравнения функция $y(t)$ непосредственно вычисляется по сигналу: $y(t) = \frac{dx}{dt}(t)$. Построение предельного цикла можно поэтому проводить следующим образом. Сигналу $x(t)$ и его производной $y(t)$ на фазовой плоскости (x, y) соответствует траектория генератора; предполагается, что она образует большое число ($s \gg 1$) витков (рис. 2), т. е. интервал наблюдения содержит много периодов. В качестве первого приближения предельного цикла

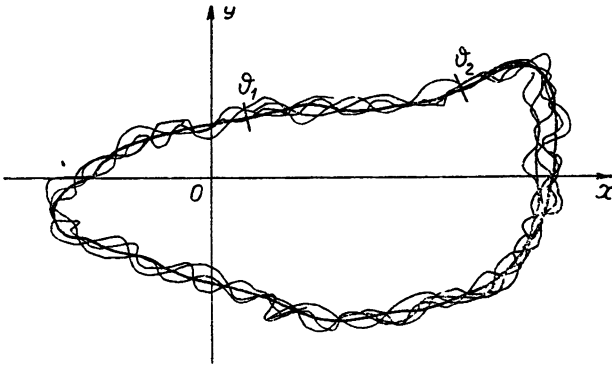


Рис. 2.

удобно взять гладкую кривую, проведенную через точки (x, y) , соответствующие состояниям максимального времени пребывания генератора. Для построения по уже полученному k -му приближению предельного цикла

$$x = \bar{x}^{(k)}(\xi), \quad y = \bar{y}^{(k)}(\xi) \quad (5.6)$$

его $(k+1)$ -го приближения проведем в каждой точке ξ нормаль к кривой (5.6). Обозначив через

$$\{(x_m^{(k)}(\xi), \quad y_m^{(k)}(\xi)), \quad m = 1, 2, \dots, s\}$$

совокупность близких к ξ точек пересечения траектории системы с этой нормалью, определим $(k+1)$ -ое приближение цикла как геометрическое место „центров тяжести“ таких совокупностей:

$$\bar{x}^{(k+1)}(\xi) = \frac{1}{s} \sum_{m=1}^s x_m^{(k)}(\xi), \quad \bar{y}^{(k+1)}(\xi) = \frac{1}{s} \sum_{m=1}^s y_m^{(k)}(\xi).$$

С ростом номера k разница между k -ым и последующими приближениями неограниченно уменьшается; предельная кривая

$$x_0(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}^{(k)}(\xi), \quad y_0(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{y}^{(k)}(\xi) \quad (5.7)$$

* Из (5.4) следует, что эквивалентное (по сигналу генератора) изменение поляризации флюктуационной силы ($F \rightarrow F_1$) не приводит к увеличению ее времени корреляции τ_1 .

описывает предельный цикл. Действительно, среднее отклонение траектории генератора по нормали от этой кривой в каждой точке равно нулю.

Для динамической модели генератора с $q_0/2$ степенями свободы ($q_0 > 2$) в последовательности

$$x(t), \quad \frac{dx}{dt}(t), \dots, \quad \frac{d^r x}{dt^r}(t), \dots$$

максимальное число q независимых функций не превышает q_0 :

$$\frac{d^q(x)}{dt^q} = f\left(x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{q-1}x}{dt^{q-1}}\right) \quad (q \leq q_0).$$

В случае $q < q_0$ сигнал $x(t)$ не определяет полностью состояние всей системы, но пока $x(t)$ является единственным источником информации, остается довольствоваться этим уравнением и анализировать модель с $q/2$ степенями свободы. Учитывая флуктуации, следует писать:

$$x^{(1)} = x(t), \quad \frac{dx^{(r)}}{dt} = x^{(r+1)} + \lambda F^{(r)}(x, t) \quad (r = 1, 2, \dots, q-1);$$

$$\frac{dx^{(q)}}{dt} = f(x) + \lambda F^{(q)}(x, t), \quad x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(q)}).$$

Как и для системы с одной степенью свободы, поляризация флуктуационной силы λF в фазовом пространстве динамической системы с $q/2$ степенями свободы совершенно произвольна. При сохраняющем сигнал генератора $x(t)$ изменении поляризации $F \rightarrow F_1$ должно выполняться условие

$$\sum_{r=0}^{q-1} \frac{d^r}{dt^r} (F^{(q-r)} - F_1^{(q-r)}) = \sum_{p=r}^q \frac{\partial f}{\partial x^{(p)}} \sum_{r=1}^p \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} (F^{(p-r)} - F_1^{(p-r)}). \quad (5.8)$$

Полагая в (5.8)

$$F_1^{(r)} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, q-1); \quad F_1^{(q)} = F(x, t),$$

получаем:

$$F = F^{(q)} + \sum_{r=1}^{q-1} \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \left(\frac{d}{dt} F^{(q-r)} - \sum_{p=r+1}^q \frac{\partial f}{\partial x^{(p)}} F^{(p-r)} \right).$$

При этом уравнения автогенератора принимают удобный для обработки вид:

$$\begin{aligned} x^{(1)} = x(t), \quad \frac{dx^{(r)}}{dt} = x^{(r+1)} \quad (r = 1, 2, \dots, q-1); \\ \frac{dx^{(q)}}{dt} = f(x) + \lambda F(x, t); \end{aligned} \quad (5.9)$$

все составляющие вектора x равны соответствующим производным сигнала генератора $x(t)$. Совокупность этих функций

$$x(t) = \left\{ x(t), \quad \frac{dx}{dt}(t), \dots, \frac{d^{q-1}x}{dt^{q-1}}(t) \right\}; \quad t_0 < t < t_0 + \Delta t,$$

где Δt — интервал наблюдения, определяет траекторию генератора в фазовом пространстве динамической системы. За первое приближение кривой предельного цикла можно взять любую гладкую замкнутую кривую, проходящую вблизи точек скопления состояний генератора.

Для построения $(k+1)$ -го приближения через каждую точку кривой k -го приближения цикла проведем ортогональную гиперплоскость. Для точек пересечения траектории системы с гиперплоскостью найдем центр тяжести. Совокупность центров тяжести, построенных в каждой гиперплоскости, образует кривую $(k+1)$ -го приближения цикла. Когда кривые двух последовательных приближений оказываются достаточно близкими между собой, построение дальнейших приближений можно прекратить — полученная кривая представляет искомый предельный цикл.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ И НЕИЗОХРОННОСТИ ЦИКЛА

Остановимся сначала на системе с одной степенью свободы. Перепишем уравнения (5.9) в локальных координатах $\gamma = \theta - t$, n и введем вместо t аргумент θ . Линеаризованное уравнение для ортогональных отклонений принимает вид:

$$\frac{dn}{d\theta}(\theta) + N(\theta)n(\theta) = \alpha(\theta)\Phi(\theta), \quad (6.1)$$

а уравнение для тангенциальных уходов —

$$\frac{d\gamma}{d\theta}(\theta) = \Theta(\theta)n(\theta) + \beta(\theta)\Phi(\theta). \quad (6.2)$$

Здесь $\alpha = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{Oy})$, $\beta = \sin(\mathbf{n}, \mathbf{Oy})$, $\mathbf{n}(\theta)$ — вектор нормали к циклу, $\Phi = \lambda F(\theta)$ — значение флюктуационной силы (поляризация которой приведена к оси Oy) в точке θ цикла, N — жесткость, Θ — неизохронность цикла. Интегрирование (6.1) дает:

$$n(\theta) = \exp\left[-\int_{\theta_0}^{\theta} N(\xi) d\xi\right] \left\{ \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\xi)\Phi(\xi) \exp\left[\int_{\theta_0}^{\xi} N(\eta) d\eta\right] d\xi + n(\theta_0) \right\}. \quad (6.3)$$

Положив*

$$\langle \Phi(\xi)\Phi(\xi + \tau) \rangle = C(\xi)\delta(\tau),$$

получаем при $\tau \gg \tau_1$ (τ_1 — время корреляции флюктуационной силы) для корреляционной функции установившихся отклонений траектории генератора по нормали от цикла выражение:

$$\Psi(\theta, \tau) = \langle n(\theta)n(\theta + \tau) \rangle = C_1(\theta) \exp\left[-\int_{\theta}^{\theta+\tau} N(\xi) d\xi\right], \quad (6.4)$$

где

$$C_1(\theta) = C(\theta) \exp\left[-2 \int_{\theta_0}^{\theta} N(\xi) d\xi\right] \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha^2(\xi) \exp\left[2 \int_{\theta_0}^{\xi} N(\eta) d\eta\right] d\xi.$$

С помощью равенства

$$\Psi(\theta, \tau) = \Psi(\theta + \tau, -\tau)$$

* См. сноску на стр. 582.

из формулы (6.4) находим выражение для жесткости цикла:

$$N(\theta) = -\frac{\Psi_1(\theta, -\tau)}{\Psi(\theta, -\tau)}; \quad \Psi(\theta, \tau) = \left\langle \frac{dn}{d\theta}(\theta) n(\theta + \tau) \right\rangle. \quad (6.5)$$

Входящие сюда функции определяются по экспериментальным данным*:

$$\Psi(\theta, \tau) \approx \frac{1}{s} \sum_{m=1}^s n_m(\theta + \tau) n_m(\theta); \quad \Psi_1(\theta, \tau) \approx \frac{1}{s} \sum_{m=1}^s \frac{dn_m}{d\theta}(\theta) n_m(\theta + \tau),$$

при этом $n_m(\theta)$ ($m = 1, 2, \dots, s$) — отклонение траектории генератора по нормали от цикла.

Из (6.3) при $\tau \gg \tau_1$ следует

$$\langle n(\theta + \tau) \Phi(\theta) \rangle = 0;$$

используя это, на основании (6.2) получаем выражение для неизохронности цикла

$$\Theta(\theta) = \frac{\varphi(\theta, -\tau)}{\Psi(\theta, -\tau)},$$

где

$$\varphi(\theta, \tau) = \left\langle \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta) n(\theta + \tau) \right\rangle \approx -\frac{1}{s} \sum_{m=1}^s \frac{dt_m}{d\theta}(\theta) n_m(\theta + \tau),$$

$t_m(\theta)$ — моменты времени, соответствующие пересечениям траектории системы с нормалью к циклу в точке θ .

Для генератора с $\frac{q}{2}$ ($q > 2$) степенями свободы

$$\frac{dn^{(r)}}{d\theta} + \sum_{l=1}^{q-1} N_l^{(r)} n^{(l)} = \alpha^{(r)} \Phi \quad (r = 1, 2, \dots, q-1); \quad (6.6)$$

$$\frac{d\gamma}{d\theta} = \sum_{l=1}^{q-1} \Theta_l n^{(l)} + \beta \Phi, \quad (6.7)$$

где $\alpha^{(r)} = \cos(\mathbf{n}^{(r)}, O\mathbf{x}^{(q)})$, $\beta = \cos(\boldsymbol{\theta}, O\mathbf{x}^{(q)})$, $\mathbf{n}^{(r)}$ и $\boldsymbol{\theta}$ — векторы ортогонального базиса и касательной в точке цикла. Из (6.6) для установившихся отклонений траектории по нормали следует:

$$n^{(r)}(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} H^{(r)}(\theta - \xi) \alpha^{(r)}(\xi) \Phi(\xi) d\xi,$$

где

$$H(\theta) = \{H^{(1)}(\theta), H^{(2)}(\theta), \dots, H^{(q-1)}(\theta)\}$$

— отклик системы (6.6) на δ -импульс, т. е. на силу $\Phi(\theta) = \delta(\theta)$. Отсюда вытекает, что составляющие отклонения некоррелированы с запаздывающими на τ ($\tau \gg \tau_1$) значениями флюктуационной силы:

$$\langle n^{(r)}(\theta - \tau) \Phi(\theta) \rangle = 0. \quad (6.8)$$

* Здесь и ниже используется эргодичность периодически нестационарного случайного процесса [6]:

$$\mathbf{n}(\theta) = \left(n(\theta), \frac{dn}{d\theta}(\theta), \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta) \right).$$

Из формул (6.6), (6.8) следует:

$$\Psi_1^{(r, p)}(\theta, -\tau) = - \sum_{l=1}^{q-1} N_l^{(r)}(\theta) \cdot \Psi^{(l, p)}(\theta, -\tau), \quad (6.9)$$

где

$$\Psi_1^{(r, p)}(\theta, \tau) = \left\langle \frac{dn^{(r)}}{d\theta}(\theta) n^{(p)}(\theta + \tau) \right\rangle \approx \frac{1}{s} \sum_{m=1}^s \frac{dn_m^{(r)}}{d\theta}(\theta) n_m^{(p)}(\theta + \tau);$$

$$\Psi^{(l, p)}(\theta, \tau) = \langle n^{(l)}(\theta) n^{(p)}(\theta + \tau) \rangle \approx \frac{1}{s} \sum_{m=1}^s n_m^{(l)}(\theta) n_m^{(p)}(\theta + \tau).$$

На основании (6.7) и (6.8) находим также:

$$\varphi^{(r)}(\theta, -\tau) = \sum_{l=1}^{q-1} \Theta_l^{(r)}(\theta) \Psi^{(l, r)}(\theta, -\tau). \quad (6.10)$$

При этом

$$\varphi^{(r)}(\theta, \tau) = \left\langle \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta) n^{(r)}(\theta + \tau) \right\rangle \approx - \frac{1}{s} \sum_{m=1}^s \frac{dt_m}{d\theta}(\theta) n_m^{(r)}(\theta + \tau).$$

Уравнения (6.9) и (6.10) позволяют найти элементы тензора жесткости $N_l^{(r)}(\theta)$ и вектора неизохронности $\Theta_l^{(r)}$ как решение (для соответствующей точки цикла) систем линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты этих уравнений вычисляются по сигналу генератора, переписанному в локальных координатах.

Определение положения предельного цикла, а также жесткости и неизохронности в каждой его точке эквивалентно получению линеаризованных вблизи цикла уравнений динамической модели автономного генератора в координатах (θ, \mathbf{n}) . Исходя из любого уравнения (6.6), (6.7) и используя вычисленные значения $N_l^{(r)}(\theta)$ или $\Theta_l^{(r)}$, нетрудно найти также статистические свойства флюктуационной силы $\Phi(\theta)$. Обратный переход от локальных координат к декартовым

$$(\theta, \mathbf{n}) \rightarrow (\mathbf{x})$$

дает уравнения анализируемой автоколебательной системы в виде:

$$\frac{d^q \mathbf{x}}{dt^q} = f(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \left\{ x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{q-1}x}{dt^{q-1}} \right\}, \quad \langle \Phi(\mathbf{x}, t) \rangle = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Мандельштам, Полное собр. трудов, 5, изд. АН СССР, М., 1950, стр. 347.
2. А. С. Понтрягин, А. А. Андронов, А. А. Витт, ЖЭТФ, 3, 165 (1933).
3. И. Г. Петровский, Матем. сборник, 41, 107 (1934).
4. Л. И. Гудзенко, ДАН СССР, 125, 62 (1959).
5. Г. С. Горелик, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 186 (1950).
6. Л. И. Гудзенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 267 (1961).

THE STATISTICAL METHOD OF DETERMINATION OF CHARACTERISTICS OF A NON-CONTROL AUTOOSCILLATING SYSTEM

L. I. Gudsenko

Principles of a correlation method are presented which reveal the possibility to obtain equations of an autooscillating system according to its signal. Any data concerning the model of the system are not supposed to be known. The method discussed may be applied for studying some astrophysical and biological objects.

О СИНТЕЗЕ НЕКОТОРЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ УСТРОЙСТВ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ НА ОСНОВЕ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

М. Я. Эйнгорин

Рассмотрены некоторые типы систем уравнений алгебры логики, позволяющие выполнять синтез дискретных систем с устойчивыми состояниями равновесия: исследовано их моделирование на разнообразных элементах (с оценкой необходимого оборудования). В заключение приведены результаты экспериментов.

1. СИММЕТРИЧНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим систему уравнений алгебры логики, разрешенную относительно переменных [1], которая в общем случае может быть записана в виде:

$$x_j = f_j(X) \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}; \quad x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \quad f_j(X) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Решениями системы (1.1) назовем такие наборы значений переменных

$$\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0\}, \quad (1.2)$$

которые удовлетворяют этой системе. Система (1.1) будет совместной, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система несовместна. Две системы уравнений назовем эквивалентными, если все решения этих систем совпадают.

Систему уравнений вида (1.1) назовем распадающейся, если она может быть разбита на такие подсистемы, для которых переменные, входящие в каждую из этих подсистем, не входят в уравнения других подсистем. В дальнейшем будем рассматривать нераспадающиеся системы.

Скажем, что система уравнений (1.1) существенно не зависит от переменного x_j , если решения

$$\begin{aligned} & \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_{j-1}^0, 0, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0\}; \\ & \{x_1^0, x_2^0, \dots, x_{j-1}^0, 1, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

одинаково удовлетворяют системе. В дальнейшем будем считать, что в уравнениях или системе уравнений несущественных переменных нет.

Введем понятие дизъюнктивных и конъюнктивных систем. Система уравнений алгебры логики записана в дизъюнктивной (конъюнктивной) [2] форме, если двоичные функции, входящие в систему (1.1), заданы в дизъюнктивной (конъюнктивной) форме. Все утверждения относительно свойств систем уравнений, их решений и преобразований будем давать по отношению к дизъюнктивным системам. Одновременно заметим, что аналогичные утверждения могут быть сделаны при пред-

ставлении системы уравнений в конъюнктивной форме [8] или в каком-либо другом базисе.

Назовем систему уравнений алгебры логики вида (1.1) симметричной, если при всех перестановках $\left\{ \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \end{matrix} \right\}$ переменных X система переходит в себя.

Если представить все $f_j(X)$ ($j=1, 2, \dots, n$) в дизъюнктивной форме, то нетрудно показать, что каждая конъюнкция, входящая в функции $f_j(X)$ симметричной системы уравнений, будет иметь одно и то же число переменных x_j . Откуда следует, что число всевозможных конъюнкций, которые могут быть образованы из n переменных по m в каждой конъюнкции, будет

$$N = C_n^m. \quad (1.4)$$

Обозначим через Y'_l ($l=1, 2, \dots, N$) — инверсные, а через Y''_l — безынверсные конъюнкции. Назовем систему уравнений (1.1) инверсной* (безынверсной), если все конъюнкции системы инверсны: $Y'_l = \bigwedge_{i=1}^m \bar{x}_{i_l}$ (безынверсны: $Y''_l = \bigwedge_{i=1}^m x_{i_l}$). В этом случае система (1.1) может быть переписана в форме:

$$x_j = \bigvee_{l=1}^N a_{jl} Y'_l \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (1.5)$$

где

$$a_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{x}_j \notin \{Y'_l\} \\ 0 & \text{при } \bar{x}_j \in \{Y'_l\} \end{cases} \quad (1.6)$$

для инверсных, и в форме:

$$x_j = \bigvee_{l=1}^N a_{jl} Y''_l \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (1.7)$$

где

$$a_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при } x_j \in \{Y''_l\} \\ 0 & \text{при } x_j \notin \{Y''_l\} \end{cases} \quad (1.8)$$

для безынверсных систем уравнений ($\{Y'_l\}$ — набор переменных конъюнкции Y_l). Нетрудно показать, что в этом случае в каждую функцию $f_j(X)$ будет входить $C_{n-1}^{m'}$ различных инверсных или $(n-1) C_{n-1}^m$ безынверсных конъюнкций Y_l , что легко может быть получено из условий (1.6) и (1.8).

Для случая симметричных систем уравнений вида (1.5) или (1.7) при условии (1.6) или (1.8) соответственно легко могут быть сформулированы теоремы, определяющие число и вид решений.

Теорема 1. Каждой конъюнкции Y'_l симметричной инверсной системы уравнений вида (1.5) при условии (1.6) соответствует решение вида

$$\{x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_{m-1}}^0, x_{i_m}^1, x_{i_{m+1}}^0, \dots, x_{i_n}^0\}_l = \{0, 0, \dots, 0, 0, 1, \dots, 1\}_l, \quad (1.9)$$

* Для инверсных систем число переменных в конъюнкции будем обозначать через m' , для безынверсных — через m .

в котором

$$x_{i_k}^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{x}_{i_k} \notin \{Y'_i\} \\ 0 & \text{при } \bar{x}_{i_k} \in \{Y'_i\} \end{cases} \quad (1.10)$$

Число решений системы $N_1 = C_n^{m'}$. Других решений система не имеет.

Замечание. Система имеет наибольшее число решений при $m' = E(n/2)$.

Теорема 2. Каждой конъюнкции симметричной безынверсной системы уравнений вида (1.7) при условии (1.8) соответствует основное решение вида:

$$\{x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_{m-1}}^0, x_{i_m}^0, x_{i_{m+1}}^0, \dots, x_{i_n}^0\}_l = \{1, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots, 0\}_l, \quad (1.11)$$

в котором

$$x_{i_k}^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } x_{i_k} \in \{Y''_i\} \\ 0 & \text{при } x_{i_k} \notin \{Y''_i\} \end{cases}, \quad (1.12)$$

нулевое решение и еще дополнительные решения, являющиеся различными почленными дизъюнкциями основных решений (1.11). Число основных решений $N_2 = C_n^m$. Других решений система не имеет.

Замечание. Система имеет наибольшее число основных решений, так же как и в теореме 1, при $m = E(n/2)$.

Теорема 3. Умножение произвольной конъюнкции Y'_i инверсной системы уравнений (1.5) при условии (1.6) на произвольную безынверсную функцию, переменные x_{i_p} которой принадлежат $\{X\}/\{Y'_i\}$, не изменит решений системы, за исключением того, что система может приобрести нулевое решение. В частности, если все конъюнкции системы (1.5) при условии (1.6) умножить на безынверсные конъюнкции вида

$$Y''_i = \bigwedge_{p=1}^{n-m} x_{i_p} \quad (l=1, 2, \dots, N), \quad (1.13)$$

где

$$x_{i_p} \in \{X\}/\{Y'_i\},$$

то новая система приобретает нулевое решение. В этом случае систему (1.5) назовем системой с полными конъюнкциями.

Теорема 4. Умножение произвольной конъюнкции Y''_i безынверсной системы уравнений (1.7) при условии (1.8) на произвольную инверсную функцию, переменные x_{i_p} которой принадлежат $\{X\}/\{Y''_i\}$, исключит из решений системы те дополнительные решения, образованные с конъюнкцией Y'_i , для которых новое логическое произведение ортогонально хотя бы к одной из конъюнкций, образующих каждое из указанных решений. В частности, в качестве произвольных функций могут быть взяты конъюнкции

$$Y'_i = \bigwedge_{p=1}^k x_{i_p} \quad (l=1, 2, \dots, N), \quad (1.14)$$

где $k=1, 2, \dots, n-m$ и переменные $\bar{x}_{i_p} \in \{X\}/\{Y''_i\}$. Заметим, что системы инверсных и безынверсных уравнений с полными конъюнкциями при $k=n-m$ совпадают.

Теорема 5. Система уравнений алгебры логики имеет нулевое решение в том и только в том случае, если в каждую конъюнкцию системы входит по крайней мере одно безынверсное переменное.

Заметим, что, согласно теореме 5, для исключения из числа решений системы нулевого решения достаточно к каждой функции $f_j(X)$ ($j=1, 2, \dots, n$) дизъюнктивно прибавить конъюнкцию $\bigwedge_{i=1}^n \bar{x}_i$.

Теорема 6. Система уравнений алгебры логики имеет единичное решение в том и только в том случае, если в каждую функцию правой части $f_j(X)$ ($j=1, 2, \dots, n$) системы входит по крайней мере одна безынверсная конъюнкция Y'_α .

Приведем два примера симметричных систем уравнений.

1. Симметричная инверсная система уравнений с $n=5$, $m'=2$. Тогда

$$\begin{aligned} Y'_1 &= \bar{x}_1 \bar{x}_2; & Y'_2 &= \bar{x}_1 \bar{x}_3; & Y'_3 &= \bar{x}_1 \bar{x}_4; & Y'_4 &= \bar{x}_1 \bar{x}_5; & Y'_5 &= \bar{x}_2 \bar{x}_3; \\ Y'_6 &= \bar{x}_2 \bar{x}_4; & Y'_7 &= \bar{x}_2 \bar{x}_5; & Y'_8 &= \bar{x}_3 \bar{x}_4; & Y'_9 &= \bar{x}_3 \bar{x}_5; & Y'_{10} &= \bar{x}_4 \bar{x}_5; \\ x_j &= \bigvee_{l=1}^{10} a_{jl} Y'_l & (j=1, 2, 3, 4, 5). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Решениями системы (1.15) являются десять наборов

$$\begin{aligned} \{x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0\} &= \{0, 0, 1, 1, 1\}; \quad \{0, 1, 0, 1, 1\}; \quad \{0, 1, 1, 0, 1\}; \\ &\{0, 1, 1, 1, 0\}; \quad \{1, 0, 0, 1, 1\}; \quad \{1, 0, 1, 0, 1\}; \quad \{1, 0, 1, 1, 0\}; \\ &\{1, 1, 0, 0, 1\}; \quad \{1, 1, 0, 1, 0\}; \quad \{1, 1, 1, 0, 0\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

2. Симметричная безынверсная система уравнений с $n=5$, $m=2$. Система имеет конъюнкции

$$\begin{aligned} Y''_1 &= x_1 x_2; & Y''_2 &= x_1 x_3; & Y''_3 &= x_1 x_4; & Y''_4 &= x_1 x_5; & Y''_5 &= x_2 x_3; \\ Y''_6 &= x_2 x_4; & Y''_7 &= x_2 x_5; & Y''_8 &= x_3 x_4; & Y''_9 &= x_3 x_5; & Y''_{10} &= x_4 x_5. \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$x_j = \bigvee_{l=1}^{10} a_{jl} Y''_l \quad (j=1, 2, 3, 4, 5).$$

Основными решениями системы (1.17) являются наборы

$$\begin{aligned} \{x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0\} &= \{1, 1, 0, 0, 0\}; \quad \{1, 0, 1, 0, 0\}; \quad \{1, 0, 0, 1, 0\}; \\ &\{1, 0, 0, 0, 1\}; \quad \{0, 1, 1, 0, 0\}; \quad \{0, 1, 0, 1, 0\}; \quad \{0, 1, 0, 0, 1\}; \quad \{0, 0, 1, 1, 0\}; \\ &\{0, 0, 1, 0, 1\}; \quad \{0, 0, 0, 1, 1\}, \end{aligned}$$

дополнительные наборы

$$\begin{aligned} \{x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0\} &= \{1, 1, 1, 0, 0\}; \quad \{1, 1, 0, 1, 0\}; \quad \{1, 1, 0, 0, 1\}; \quad \{1, 0, 1, 1, 0\}; \\ &\{1, 0, 1, 0, 1\}; \quad \{1, 0, 0, 1, 1\}; \quad \{0, 1, 1, 1, 0\}; \quad \{0, 1, 1, 0, 1\}; \quad \{0, 1, 0, 1, 1\}; \\ &\{0, 0, 1, 1, 1\}; \quad \{1, 1, 1, 1, 0\}; \quad \{1, 1, 1, 0, 1\}; \quad \{1, 1, 0, 1, 1\}; \quad \{1, 0, 1, 1, 1\}; \\ &\{0, 1, 1, 1, 1\}; \quad \{1, 1, 1, 1, 1\} \end{aligned}$$

и еще нулевое решение $\{0, 0, 0, 0, 0\}$.

Теорема 7. Система уравнений вида (1.5) при условии (1.6) или (1.7) при условии (1.8) может быть разбита на подсистемы

и неинвертированного переменного, г) — усилитель с Z-характеристикой.

Приведем ряд примеров составления по системам уравнений схем моделей.

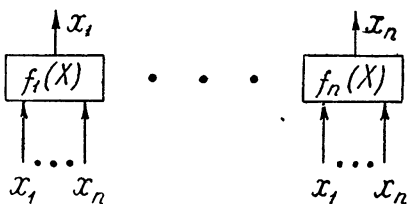


Рис. 1.

1. $n=1, m=1$. Система сводится к тождеству

$$x = x \tag{2.1}$$

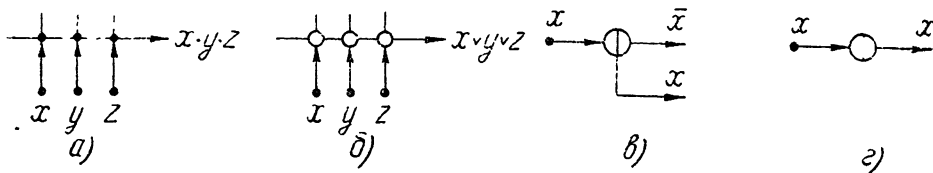


Рис. 2.

и имеет решения $\{x^0\} = \{1\}; \{0\}$. Схема моделей показана на рис. 3а.

2. $n=2, m'=1$. Система имеет два уравнения

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_2 \\ x_2 = \bar{x}_1 \end{cases} \tag{2.2}$$

и два решения $\{x_1^0, x_2^0\} = \{0,1\}; \{1,0\}$. Схема модели показана на рис. 3б и соответствует физической модели, сходной с обыкновенным триггером.

Для случая полных конъюнкций система имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \bar{x}_2 \\ x_2 = \bar{x}_1 x_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Кроме решений системы (2.2), появляется нулевое решение. Схема модели показана на рис. 3в.

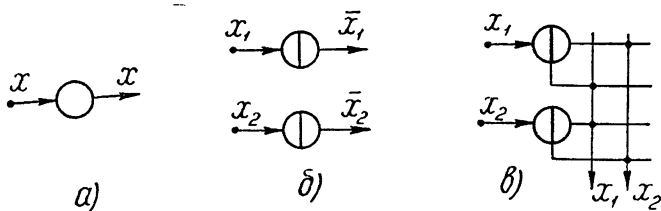


Рис. 3.

3. Для ряда практических целей представляет интерес синтез систем, имеющих десять стационарных состояний равновесия. Подобные системы могут быть выполнены с $n=5$ и $m'=2$ или $m'=3$.

а) Случай $n=5$ и $m'=2$ рассмотрен в главе 1. Система уравнений (1.15) имеет решения (1.16) и схему модели, показанную на рис. 4а. Та же система, но в случае безынверсных конъюнкций, имеет вид (1.17) и решения, данные в главе 1. Схема модели показана на рис. 4б.

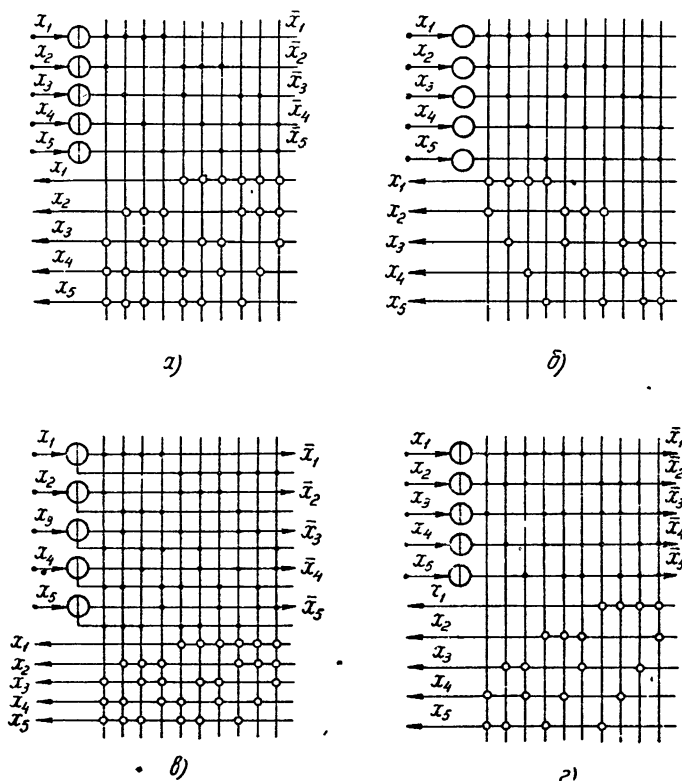


Рис. 4.

Решения (1.16) и еще нулевое решение имеет система уравнений $n=5$, $m'=2$ в случае полных конъюнкций. Схема модели показана на рис. 4в.

б) $n=5$, $m'=3$. Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \\ x_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \\ x_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \\ x_4 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \\ x_5 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Схема имеет решения

$$\{x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0\} = \{1, 1, 0, 0, 0\}; \{1, 0, 1, 0, 0\}; \{1, 0, 0, 1, 0\}; \\ \{1, 0, 0, 0, 1\}; \{0, 1, 1, 0, 0\}; \{0, 1, 0, 1, 0\}; \{0, 1, 0, 0, 1\}; \{0, 0, 1, 1, 0\}; \\ \{0, 0, 1, 0, 1\}; \{0, 0, 0, 1, 1\}$$

и схему модели, показанную на рис. 4г.

При помощи рассмотренных систем уравнений алгебры логики можно получить большое число разнообразных новых схем. Приведенные примеры показывают, как в каждом конкретном случае в зависимости от необходимого числа состояний и их вида могут быть составлены соответствующие уравнения и построена схема модели для дальнейшего физического моделирования. По полученным схемам моделей в зависимости от принятых конкретных физических реализаций элементарных логических операций дизъюнкции, конъюнкции и инверсии могут быть получены разнообразные схемы с устойчивыми состояниями равновесия, отличающиеся временами перехода из одного состояния в другое, различным потреблением энергии, характером выхода и т. д.

3. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ СХЕМ МОДЕЛЕЙ

Физическое моделирование рассмотренных симметричных систем уравнений алгебры логики может быть выполнено на весьма разнообразных полных наборах моделей элементарных логических операторов. Рассмотрим четыре из них.

1. Моделирование на электронных лампах и кристаллических диодах. Схемы элементов, на которых проводились эксперименты, даны в работе [1]. На этом наборе элементов были выполнены системы, имеющие от двух до десяти устойчивых состояний равновесия. Для получения физических моделей достаточно подставить в схемы рис. 3 и 4 схемы, данные в работе [1]. Со входов инверторов снимались наборы, эквивалентные решениям систем уравнений, с выходов инверторов дополнительные наборы к решениям, со всех конъюнкций — наборы, в которых одна единица (для всех основных решений) и $C_n^m - 1$ нулей. Каждому основному решению соответствует свой единственный набор.

2. Моделирование на кристаллических диодах и триодах. Схемы элементов даны на рис. 5. На рис. 5д и 5е приведены амплитудные характеристики схем рис. 5г и 5в соответственно.

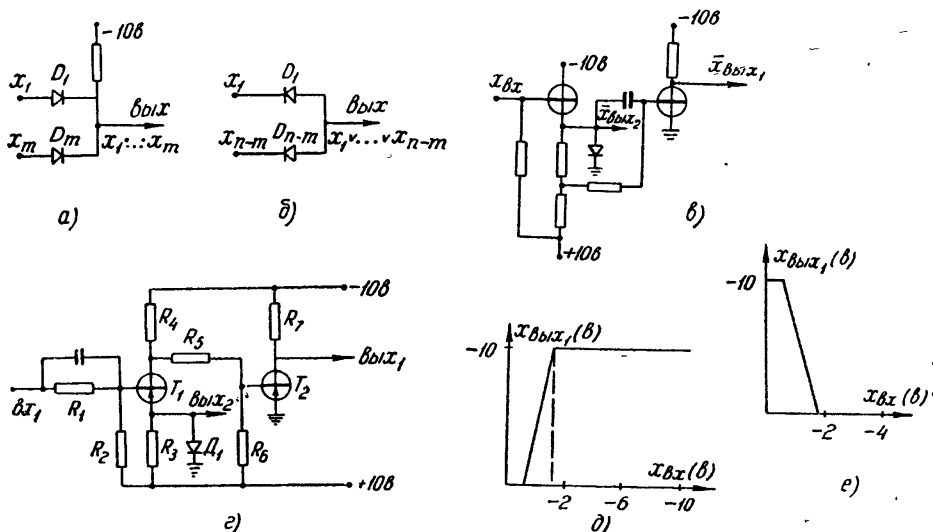


Рис. 5.

Для моделирования были взяты те же схемы, что и в случае моделирования на электронных лампах. В этих схемах состоянию нуль соответствовал нулевой потенциал, состоянию единицы — напряжение около -10 в. С моделей снимались те же наборы состояний, что и в случае моделирования на электронных лампах. Время перехода из одного состояния в другое для выбранных схем и типов триодов — около $1 \div 2$ мксек.

3. Моделирование на электромагнитных реле. В этом случае имеется ряд вариантов выполнения схем. Рассмотрим три из них.

а) Моделирование на электромагнитных реле (рис. 6в) и кристаллических диодах. Все конъюнкции выполнены на контактах электро-

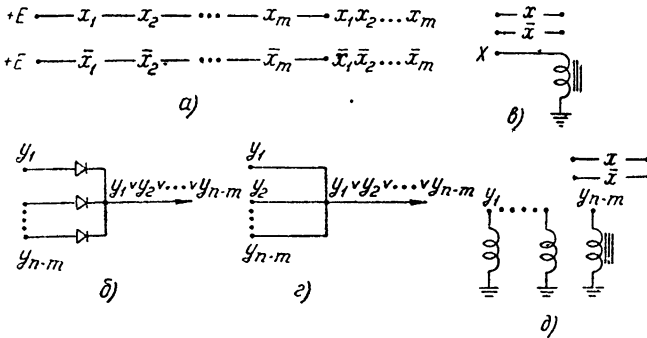


Рис. 6.

магнитных реле (рис. 6а), дизъюнкции — на диодах (рис. 6б). В качестве примера приведем моделирование схемы рис. 4г на десять состояний равновесия. Проводя минимизацию моделируемой схемы, можно значительно сократить количество контактов на реле. Минимизированная схема дана на рис. 7а и имеет 19 контактов вместо 39, требующихся при непосредственном моделировании.

б) Моделирование схем на электромагнитных реле (рис. 6в). Схема элемента конъюнкции дана на рис. 6а, дизъюнкции — на рис. 6б. В этом случае число однотипных конъюнкций в физических моделях $k = n - m$ — при моделировании системы (1.5) и m — системы (1.7). Моделирование схемы рис. 4г показано на рис. 7б. С учетом минимизации схема имеет вдвое больше число контактов, чем предыдущая (т. е. 38 контактов). В результате эксперимента выяснено, что получающиеся физические модели на электромагнитных реле весьма устойчивы. Перевод устройств из одного состояния в другое требует тока, не превышающего ток срабатывания выбранного для моделирования типа электромагнитного реле.

в) Моделирование на многообмоточных реле (рис. 6е). В этом случае каждое реле должно иметь $M = C_n^m - C_{n-1}^{m-1}$ обмоток. Элемент конъюнкции выполняется по схеме рис. 6а. Конъюнктивная часть схемы может быть минимизирована. Приведем один пример моделирования той же схемы (рис. 4г). Схема модели показана на рис. 7в.

4. Моделирование на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса и полупроводниковых триодах. Моделирование может быть осуществлено на одноктактных, двухтактных, трехтактных и многотактных схемах. Рассмотрим пример моделирования схем со многими состояниями равновесия на двухтактных ферритовых ячейках.

Пусть I — ток, достаточный для перевода феррита из одного насыщенного состояния в другое. Примем, что одно насыщенное со-

стояние эквивалентно единице, другое—нулю. Для удобства начертания схем на ферритовых сердечниках введем следующие обозначения: тороид феррита будем обозначать прямой жирной линией; проводник, ток в котором совпадает с током установления в феррите, „1“ („0“),—

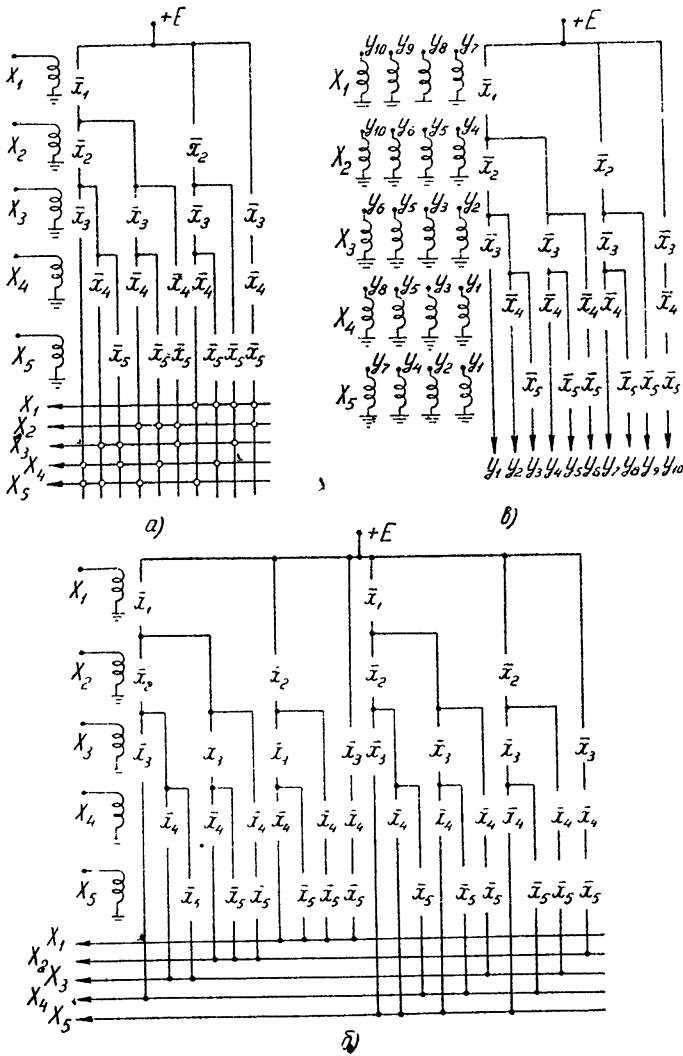


Рис. 7.

прямой, пересекающей феррит, со стрелкой, направленной к ферриту (из феррита); считывающую обмотку—прямой с двумя стрелками, направленными навстречу друг другу, и проводник, не проходящий через кольцо феррита,—прямой, пересекающей феррит без стрелки. В этом случае элементы могут быть условно изображены так, как это показано на рис. 8.

Для примера дадим физические модели двух систем уравнений вида (2.3) и (1.15) на полных конъюнкциях, схемы моделей которых приведены на рис. 3в и 4в. Соответствующие схемы на ферритах и транзисторах показаны на рис. 9а и 9б, где t_1 и t_2 —тактовые импульсы,

сдвинутые друг относительно друга на половину периода их следования. Для работы схемы необходимо установить на ферритах групп конъюнкций или дизъюнкций одно из возможных решений моделируемой системы уравнений алгебры логики. Для простоты на схемах

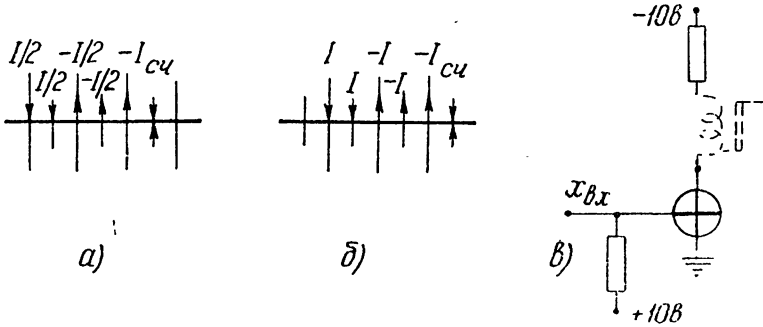


Рис. 8.

упрощены изображения импульсных усилителей, а также не указаны диоды, стоящие последовательно со всеми выходными обмотками элементов конъюнкций, и сопротивления в цепях коллекторов, обеспечивающие необходимые токи в обмотках. Заметим, что обмотки, ток

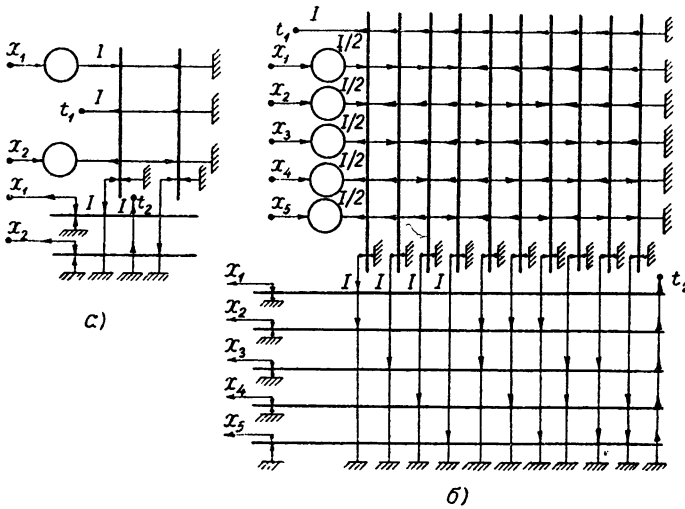


Рис. 9.

в которых совпадает по направлению с током импульсов t_1 ферритов моделирующих конъюнкций, могут быть опущены. В этом случае, число обмоток на каждом таком феррите может быть уменьшено с C_n^m до C_{n-1}^{m-1} .

Обычно ферритовые сердечники используются в схемах, имеющих не более двухкратного, в крайнем случае, трехкратного совпадения тока. Используя в рассматриваемых схемах полные конъюнкции, кратность совпадения тока может быть увеличена. Для выяснения этого обстоятельства рассмотрим режим, когда через сердечник течет m токов, из которых $m-\beta$ — в направлении установления единицы и β — в направлении установления нуля.

Введем величину $\alpha = 1 - 2\beta/m$, характеризующую отношение тока, текущего через нерабочий сердечник в направлении установления единицы, ко всему току рабочего сердечника. Наихудший случай будет при $\beta = 1$. Величины m для нескольких принятых значений α наихудшего случая даны в таблице 1. Ясно, что чем ближе величина α к нулю, тем более устойчивой будет работа модели.

Заметим, что во всех ферритовых схемах усилители, стоящие в цепях обратных связей, могут быть убраны за счет введения постоянного смещения, совпадающего по направлению с током установления единицы в феррите (в связи с тем, что энергия, необходимая для перевода ферритов из одного состояния в другое, берется из источников, питающих цепи сброса импульсами t_1 и t_2).

Аналогичным образом может быть выполнен синтез других необходимых систем уравнений алгебры логики на любых наборах элементов, обеспечивающих полный набор логических функций и достаточное усиление.

Таблица 1

α	m
0	2
1/3	3
1/2	4
3/5	5

4. ОБОРУДОВАНИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ НА ФИЗИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ

На основе рассмотренных выше схем могут быть построены многие узлы дискретных вычислительных и управляющих устройств. Эти схемы дают значительную экономию деталей по сравнению с устройствами, в которых используются обычные двоичные триггеры. Рассмотрим оборудование, необходимое для моделирования вышеописанных систем с устойчивыми состояниями равновесия на рассмотренных элементах.

1. Моделирование на электронных лампах (см. работу [1]) и кристаллических триодах (рис. 5). В обоих рассматриваемых случаях инверторы моделируются на триодах, элементы конъюнкции и дизъюнкции — на диодах.

Для построения элемента дизъюнкции или конъюнкции на W входов требуется W диодов. В этом случае для построения модели по уравнению (1.5) при условии (1.6) необходимо

$$N_1 = mC_n^m + nC_{n-1}^m = nC_n^m \quad (4.1)$$

диодов, где mC_n^m — число диодов, необходимое для построения всех конъюнкций Y_i ; $l=1, 2, \dots, C_n^m$, а nC_{n-1}^m — число диодов, необходимое для построения всех дизъюнкций. Наименьшее число диодов, необходимое для запуска моделей, равно

$$N_2 = 2C_n^m. \quad (4.2)$$

Наименьшее число инверторов, необходимое для моделирования,

$$N_3 = n. \quad (4.3)$$

Аналогичные формулы легко могут быть даны для моделирования систем уравнений вида (1.7) при условии (1.8). Для систем с полными конъюнкциями

$$N_1 = nC_n^m + nC_{n-1}^m; \quad (4.4)$$

формулы для N_2 и N_3 совпадают с (4.2) и (4.3).

2. Моделирование на электромагнитных реле (рис. 6). Наиболее удобным для использования являются, по-видимому, модели на основе элементов рис. 6а, б и в. В этом случае число контактов, необходимых при моделировании всех конъюнкций,

$$N'_1 = mC_n^m. \quad (4.5)$$

Число диодов, необходимое для моделирования всех дизъюнкций,

$$N''_1 = nC_{n-1}^m \quad (4.6)$$

и необходимое число реле определяется формулой (4.3).

3. Моделирование систем уравнений алгебры логики с полными конъюнкциями на ферритах с прямоугольной петлей гистерезиса. В этом случае необходимое число ферритов равно

$$N_4 = C_n^m + n, \quad (4.7)$$

где C_n^m — число ферритов, необходимое для моделирования всех конъюнкций, и n —число ферритов, необходимое для моделирования всех дизъюнкций. Число не указанных в схемах диодов определяется формулой:

$$N_5 = C_n^m. \quad (4.8)$$

Моделирование конъюнкций системы (1.5) при условии (1.6) на основе схем рис. 5, 6 и 8 является, по существу, моделированием всех симметричных функций алгебры логики от n аргументов при m аргументах в каждой конъюнкции вида

$$Y'_l = \bigwedge_{i=1}^{m'} \bar{x}_{i_l} \quad (l = 1, 2, \dots, C_n^{m'}). \quad (4.9)$$

Данная функция может быть минимизирована, причем наименьшее число контактов или диодов, необходимое для построения всех функций (4.9), может быть найдено по следующему* алгоритму:

$$N_1 = S_n^m + \bar{S}_n^m,$$

где $m=2, 3, \dots, n$ —любое число, не равное 0, $m < n$,

$$S_n^m = (n - m) + \sum_{i=1}^{n-m} S_{n-i}^{m-1}; \quad S_n^2 = n - 2;$$

$$\bar{S}_n^m = m + \sum_{i=1}^{n-m} \bar{S}_{n-i}^{m-1}; \quad \bar{S}_n^2 = 2 + \sum_{i=2}^{n-1} i.$$

Пример. $n=5, m'=3$. По формуле (4.5) требуется 30 контактов по минимизированной схеме—19. Метод построения минимальной функции ясен из рассмотрения примера рис. 7. Аналогичным образом могут быть минимизированы конъюнктивные части устройств, выполненные на других элементах.

Рассмотренные схемы обладают рядом преимуществ по сравнению с триггерами и пересчетными кольцами, используемыми в дискретной технике. Основные преимущества заключаются в следующем.

1. Все системы с заранее заданным числом устойчивых состояний равновесия выполняются на стандартных функциональных блоках. Число различных типов блоков—от двух до четырех.

* Данный алгоритм дан Т. Н. Эйнгориной.

2. Применение стандартных функциональных блоков с единым для входов и выходов уровнем отсчета напряжения или тока дает возможность стандартизировать синтез и упростить использование синтезируемых систем в дискретных устройствах.

3. Если считать, что экономичность систем определяется числом активных элементов (усилителей, инверторов, реле) и обыкновенный триггер на два состояния равновесия требует двух инверторов, то для получения $N=2^n$ состояний равновесия требуется n триггеров или $2n$ инверторов. Для получения того же числа состояний на рассматриваемых схемах (при достаточно больших N) требуется около n инверторов, т. е. вдвое меньше, чем при синтезе на триггерах. Уже для получения системы с $N=10$ требуется не 10 инверторов, как в пересчетных десятичных кольцах, а всего лишь 5.

Рассмотренные устройства, кроме выходов $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0\}_l$ ($l=1, 2, \dots, N$), дают еще выходы с элементов конъюнкций $\{Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_l^0, \dots, Y_N^0\}_l$, в каждом из которых одно переменное $Y_l^0 = 1$, а все остальные—нулю. Таким образом, осуществляется одновременная дешифрация, что особенно важно при построении различных вычислительных и управляющих устройств.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 169 (1958).
- 2 С. В. Яблонский, Функциональные построения в многозначной логике, Труды МИАН, 51, 158 (1958).
- 3 Д. Гильберт, В. Аккерман, Основы теоретической логики, ИЛ, М., 1957.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 августа 1961 г.

ON SYNTHESIS OF SOME FEEDBACK CONTROL DEVICES ON THE BASIS OF SYMMETRICAL SYSTEMS OF ALGEBRA LOGIC EQUATIONS

M. Ya. Eingorin

Some types of equation systems of algebra logics are considered revealing the possibility to realize synthesis of discrete systems with stable states of equilibrium. Their modelling by means of various elements has been studied (facilities are taken into account). In conclusion experimental results are given.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕГО ПОТОКА ТЕПЛА ЛУНЫ НА ЕЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ

В. С. Троицкий

Измерение радиотемпературы Луны на различных волнах, как известно, позволяет получить данные о температуре ее поверхностных слоев до значительных глубин. Однако для этого требуется проведение прецизионных измерений интенсивности радиоизлучения [1] в широком диапазоне волн, что еще далеко не завершено: в этом направлении сделаны лишь первые шаги [2-4]. В связи с открывшимися возможностями точного измерения температуры Луны на различных глубинах нам представляется целесообразным рассмотреть вопрос о влиянии возможного потока тепла изнутри на результаты подобных измерений.

Так как ожидаемый поток Q порядка $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ [5] во много раз меньше потока тепла от Солнца ($\sim 0,033 \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$), то его влияние на поверхностную температуру пренебрежимо мало (за исключением полюсов). Обозначим постоянную составляющую температуры элемента поверхности Луны на широте ψ через T_0 ; тогда на глубине y постоянная составляющая температуры будет в общем случае равна

$$T(y) = T_0 + t(y), \tag{1}$$

где $t(0) = 0$. Добавочная температура $t(y)$ определяется потоком тепла и величиной теплопроводности, которая в общем случае зависит от y :

$$t(y) = Q \int \frac{dy}{k(y)}. \tag{2}$$

Полагая, что $t(y)$ мало отличается от линейной функции, запишем $T(y)$ в виде:

$$T(y) = T_0 + ay + by^2.$$

Как известно [5], постоянная составляющая радиотемпературы элемента поверхности с долготой φ и широтой ψ равна

$$\begin{aligned} T_\lambda(\varphi, \psi) &= [1 - R(\rho)] \int_0^\infty (T_0 + ay + by^2) \kappa \sec \rho' e^{-y \kappa \sec \rho'} dy = \\ &= (1 - R)[T_0 + al_3 \cos \rho' + 2bl_3^2 \cos^2 \rho'], \end{aligned} \tag{3}$$

где ρ — угол луча зрения с нормалью к поверхности (угол преломления излучения), ρ' — угол падения излучения, равный по закону преломления $\cos \rho' = \sqrt{1 - \sin^2 \rho / \epsilon}$, $l_3 = 1/\kappa$ — толщина радиоизлучающего слоя (κ — коэффициент затухания электромагнитной волны), R — коэффициент отражения от поверхности по мощности. Для центра диска

$$T_\lambda(0, 0) = (1 - R_\perp)(T_0 + al_3 + 2bl_3^2). \tag{4}$$

Так как l_3 пропорционально λ , то, согласно (3), (4), при наличии внутреннего потока тепла распределение постоянной составляющей радиояркости по диску Луны по мере увеличения длины волны становится все более неравномерным. Яркость центральной части увеличивается, в то время как яркость вблизи лимба при малых значениях ϵ остается практически неизменной. Это, очевидно, связано с тем, что излучение вблизи лимба ($\rho \approx 90^\circ$) идет из глубины $l_3 \sqrt{1 - \sin^2 \rho / \epsilon}$, меньшей, чем l_3 .

Для не очень длинных волн (по-видимому, не длиннее $10 \div 20 \text{ см}$) $l_3 = 2\lambda_T$ [6], где

l_T — глубина проникновения тепловой волны в см, равная $l_T = \sqrt{2k(0)/\Omega c\rho}$ (ρ — плотность, c — теплоемкость, Ω — угловая скорость вращения Луны). Тогда радиотемпература центра диска

$$T_\lambda(0, 0) = (1 - R_\perp) (T_0 + 2a\lambda l_T + 8b\lambda^2 l_T^2). \quad (5)$$

Поскольку для этого же диапазона волн вторым членом можно пренебречь (глубина проникновения не настолько велика, что сказывается изменение теплопроводности $k(y)$ -слоя), градиент температуры будет определяться через измеряемые на двух волнах постоянные составляющие радиотемператур:

$$\text{grad } T = \frac{T_{\lambda_2} - T_{\lambda_1}}{(1 - R_\perp) 2l_T (\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (6)$$

Умножая (6) на теплопроводность $k(0)$ и делая необходимые преобразования, получим для потока тепла

$$Q = \frac{(T_{\lambda_2} - T_{\lambda_1}) \sqrt{\Omega/2}}{(1 - R_\perp) 2(\lambda_2 - \lambda_1) \gamma}, \quad (7)$$

где $\gamma = (k\rho c)^{-1/2}$ — непосредственно измеряемый тепловой параметр.

Сделаем некоторые оценки величин, исходя из имеющихся неполных данных. Приблизительно вместо яркостных температур можно взять средние по диску температуры. Прецизионные измерения средней по диску постоянной составляющей радиотемпературы дают $\bar{T}_{3,2} = 211^\circ \pm 3^\circ\text{K}$ и $\bar{T}_{9,6} = 218^\circ \pm 4^\circ\text{K}$ [2^{-4}], откуда $(\bar{T}_{9,6} - \bar{T}_{3,2})/(9,6 - 3,2) < 2 \text{ град} \cdot \text{м}^{-1}$, и, учитывая, что $\gamma = 350$ [7], получим оценку потока:

$$0 \leq Q \leq 4 \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Градиент температуры вглубь поверхности Луны при $l_T = 30 \text{ см}$ будет лежать в пределах

$$0 \leq \text{grad } T \leq 3 \text{ град} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Заметим, что аналогичные оценки сделаны в работе [8] на основании значения радиотемпературы Луны на волне около $1,7 \text{ м}$, найденной равной $233^\circ \pm 8^\circ\text{K}$. По нашему мнению, данные радиоизлучения на этой волне не имеют столь высокой точности, так как метод измерения радиотемпературы Луны был основан на точном знании абсолютного значения фона радиоизлучения. Вряд ли значение последнего можно гарантировать с большей точностью, чем $\pm 10\%$, что дает неопределенность в радиотемпературе Луны уже $\pm 3^\circ\text{K}$. Кроме того, на такой волне неизвестна глубина проникновения l_λ , которая может быть много меньше, чем это следует из закона $l_\lambda \sim \lambda$, принятого в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 4004 (1961).
2. С. А. Каменская, Б. И. Семенов, В. С. Троицкий, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
3. Л. Н. Бондарь, К. М. Стрженева, М. Р. Зелинская, В. А. Порфирьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
4. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 604 (1962).
5. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 511 (1954).
6. В. С. Троицкий, Изв. Комиссии по физике планет, № 3, 1962.
7. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж. (в печати).
8. I. E. Baldwin, Aph. J., 122, 513 (1961).

ПРЕЦИЗИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ НА ВОЛНЕ 9,6 см

В. Д. Кротиков

Для использования Луны в качестве эталона радиоизлучения при абсолютных радиоастрономических измерениях, а также для ответа на некоторые вопросы о природе поверхностного покрова Луны, необходимо точное знание ее эффективной температуры на различных длинах волн. На волне 10 см радиоизлучение Луны исследовалось различными авторами [2-4], но применяемые (в этих работах) методы калибровки радиотелескопов не обеспечивали достаточной точности абсолютных радиоизмерений. В работах [2,3] фазовая зависимость радиотемпературы Луны на волне 10 см не была обнаружена. В статье [4] приводится фазовая зависимость радиоизлучения Луны, но данные этой работы противоречат как теоретическим оценкам, так и результатам измерений на более коротких волнах (см., например, [5-8]) и являются, по-видимому, ошибочными. Разработанный в [1] новый метод абсолютных радиоизмерений позволил провести прецизионные измерения радиотемпературы Луны и уверенно обнаружить ее фазовый ход на $\lambda = 9,6$ см*.

1. Методика измерений

Измерения радиоизлучения Луны проводились на горизонтальной поляризации с помощью радиотелескопа, состоящего из четырехметрового параболического рефлектора, облучаемого открытым концом волновода, и модуляционного радиометра с флюктуационным порогом чувствительности $0,4^\circ\text{K}$ при постоянной времени 16 сек. Ширина диаграммы антенны на половинном уровне мощности составляла $1^\circ 40'$ (ордината диаграммы на лимбе Луны равна 0,93), поэтому измеряемая температура практически равна усредненной по диску яркостной температуре.

Согласно [1], излучение Луны сравнивалось с тепловым излучением эталона — абсолютно черного диска диаметром 190 см с видимым угловым размером $32,25'$, который располагался во фраунгоферовой зоне антенны на угловой высоте 25° (горный фон за диском по высоте не превышал $5\sim 7^\circ$). При этих условиях ошибка в определении температуры, вносимая диффракцией радиоизлучения Земли на эталоне, как показано в [1], не превосходит 1%.

Процесс измерений заключался в следующем: антенна наводилась на область неба рядом с Луной, расположенную на высоте Луны на 4° к востоку от ее края, и записывался нулевой уровень в течение трех минут; затем антенна наводилась на центр диска Луны и записывалось приращение температуры также в течение трех минут, после чего снова записывался нулевой уровень. Постоянная времени записи составляла 16 сек. При измерениях с эталонным диском отведения антенны в опорную область не производилось, так как при этом заметно влияние опор и окружающего рельефа. Нулевой уровень записывался при отсутствии эталона, а сигнал — при его установке в зону диаграммы антенны. Температура антенны от Луны составляла в среднем $8,5^\circ$, от диска 13° . Было обращено особое внимание на то, чтобы при подъеме и опускании эталона никаких дополнительных местных предметов или опорных сооружений в диаграмме антенны не появлялось. В результате одного дня наблюдений получалась серия из 8-10 чередующихся замеров (Луна, диск), которые подвергались обработке и последующему усреднению. Обработка результатов производилась по формуле (см. [1,5]):

$$\bar{T}_L = T_0 \frac{n_L}{n_d} \alpha e^{-\Delta\gamma},$$

где $\bar{T}_L = \int_{\Omega_L} TF_0^2 d\Omega / \int_{\Omega_L} F_0^2 d\Omega$ — средняя по диску радиотемпература Луны при наблюдении

вне атмосферы Земли, T_0 — температура эталона, выраженная в градусах Кельвина, n_L — отклонение выходного прибора при наведении антенны на Луну, n_d — отклонение выходного прибора при наведении антенны на эталонный диск, α — коэффициент, учитывающий разницу в угловых размерах Луны и диска, $e^{-\Delta\gamma}$ — коэффициент, учитывающий поглощение в атмосфере. Для используемой антенны

$$\alpha \approx \frac{1}{1 - 2 F_0^2(d_d) \Delta d / F_0^2(d_{cp}) d_d} = \frac{1}{1 - 0,608 \Delta d}.$$

* Недавно появилось сообщение [4] о том, что обнаружена фазовая зависимость радиоизлучения Луны на волне 10,2 см, однако подробные результаты в [4] не приводятся.

Здесь $\Delta d = d_d - d_L$ — разность угловых диаметров диска и Луны. Радиотемпературы, определенные в течение дня (8—10 значений), подвергались усреднению. Окончательные результаты представлены на рис. 1. Экспериментальные результаты аппроксимируются кривой:

$$\bar{T}_L = 218^\circ + 7^\circ \cos(\Omega t - 40^\circ).$$

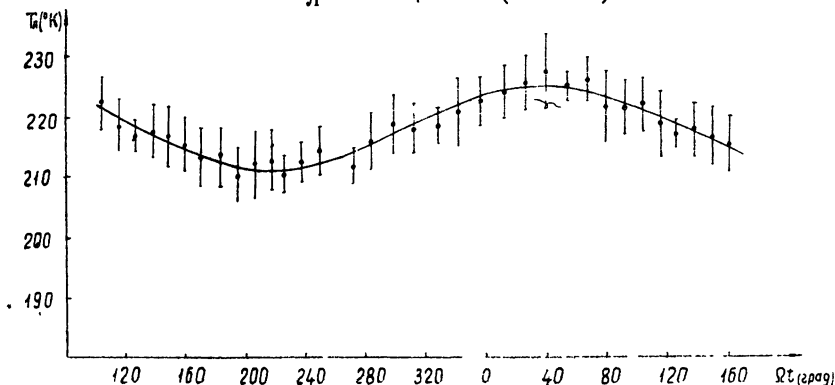


Рис. 1. Зависимость радиотемпературы Луны от оптической фазы. Сплошная кривая соответствует $\bar{T}_L = 218^\circ + 7^\circ \cos(\Omega t - 40^\circ)$.

2. Оценка точности измерений

Погрешность относительных измерений, характеризуемая разбросом экспериментальных точек относительно аппроксимирующей кривой, равна 1%. Эта погрешность определяет точность, с которой измерена амплитуда переменной составляющей радиотемпературы. Отсюда следует, что ее значение равно $7^\circ \pm 2,5^\circ$.

Случайная ошибка, определяемая в основном шумами аппаратуры и уходами нуля, для каждой точки (дневное измерение) не превосходит $\pm 3\%$. Отсюда случайная ошибка для среднего значения радиотемпературы составляет $\pm 0,6\%$.

Наибольшая систематическая ошибка абсолютных измерений возникает за счет неопределенности положения точки отсчета расстояния от радиотелескопа до эталона, а также за счет неточности замера расстояния от принятой точки отсчета (раскрыв параболоида) до эталона. Однако эта ошибка не превосходит $1 \div 1,5\%$.

Поскольку для волны 9,6 см поглощение в атмосфере мало и определяется в основном содержанием кислорода, а не парами воды [9], величина $\Delta \gamma$ для всего периода измерений по абсолютной величине не превосходила 0,015. Отсюда систематическая ошибка за счет неточности учета влияния метеословий составляет не более $\pm 0,5\%$. Величина α изменялась в пределах $0,92 \leq \alpha \leq 1,18$; поэтому неточность ее определения приводит к систематической ошибке, не превышающей, по нашим оценкам, $\pm 1\%$.

Как показывают оценки (см. [1]), дифракционная поправка должна привести к повышению средней радиотемпературы на 1%. Но так как используемый для эталона материал не является абсолютно черным (средний коэффициент отражения по мощности равен 0,01), учет этого обстоятельства при условии отражения фона излучения Земли приводит к понижению среднего значения меньше, чем на 1%. Поскольку эти поправки близки друг другу, но действуют в противоположных направлениях, средняя радиотемпература определялась без их учета. Таким образом, полная среднеквадратичная ошибка в определении постоянной составляющей вместе с флюктуационной равна $\sqrt{0,6^2 + 1,5^2 + 1^2 + 0,5^2} \approx \pm 2\%$. Погрешность в определении сдвига фазы составляет $\pm 10^\circ$.

3. Обсуждение результатов

Результаты, полученные на волне 9,6 см, интересно сравнить с результатами измерения средней по диску радиотемпературы Луны на волне 3,2 см [4]. Сравнение удобно произвести, пересчитав результаты к центру диска Луны. Пересчет средней по диску эффективной радиотемпературы был выполнен на машине; при этом была также вычислена радиотемпература для $\epsilon = 1$, т. е. для случая, если Луна была абсолютно черной [10]. Распределение поверхностной температуры по диску Луны принималось, согласно [12, 13], равным

$$\gamma(\psi) = \cos^{1/2} \psi.$$

Расчет отношения глубины проникновения электрической волны к глубине проникновения тепловой волны производился следующим образом. Согласно теории однородной модели Луны [11]

$$T_{цл} = (1 - R_{\perp})(T_n + a_1\theta) + (1 - R_{\perp}) \frac{a_1\theta}{\sqrt{1 + 2\delta + 2\delta^2}} \cos(\Omega t - \xi), \quad (1)$$

где $T_n + a_1\theta$ — средняя за период лунации температура поверхности центра диска Луны, $a_1\theta$ — первая гармоника разложения поверхностной температуры в ряд Фурье, R_{\perp} — коэффициент отражения при перпендикулярном падении.

Как показывает расчет (см. также [12]), $T_n + a_1\theta = 230^\circ\text{K}$, $a_1\theta = 156^\circ$ и, следовательно,

$$T_{цл} = 230^\circ + \frac{156^\circ}{\sqrt{1 + 2\delta + 2\delta^2}} \cos(\Omega t - \xi). \quad (2)$$

Сравнивая экспериментально полученное значение переменной составляющей, приведенное к центру диска Луны, с теоретическим значением (2), можно определить величину δ . Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Таблица 1

$\lambda_{с.м}$	$\bar{T}_л$	$\bar{T}_л ч$	δ	δ/λ
3,2	210°	218°	7,0	2,2 ± 0,4
9,6	218°	218°	15	1,6 ± 0,6 -0,5

Из таблицы видно, что полученная на волне 9,6 см радиотемпература совпадает с радиотемпературой для случая абсолютно черной Луны, рассчитанного в [10]. Кроме того, параметр δ/λ , который на волнах короче 3,2 см оставался постоянным в пределах точности измерений, на волне 9,6 см заметно меньше. Полученное расхождение можно объяснить как наличием температурного градиента внутрь Луны, так и уплотнением слоев с глубиной. Более уверенное суждение о наличии температурного градиента может быть сделано лишь при получении точного значения температуры на более длинных волнах.

В заключение приношу глубокую благодарность В. С. Троицкому, под руководством которого выполнена данная работа, и всем сотрудникам, принимавшим участие в наблюдениях и помогавшим в обработке экспериментальных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 1004 (1961).
2. Н. Л. Кайдановский, М. Т. Турусбеков, С. Э. Хайкин, Труды 5 совещания по вопросам космогонии, изд. АН СССР, М., 1956, стр. 347.
3. В. Н. Кощенко, А. Д. Кузьмин, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 424 (1961).
4. К. Акабанае, Proc. Japan. Acad., 31, 161 (1955).
5. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 600 (1961).
6. В. Н. Кощенко, Б. Я. Лосовский, А. Е. Саломонович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 593 (1961).
7. М. Р. Зелинская, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Астрон. ж., 31, 643 (1959).
8. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 433 (1961).
9. С. А. Жевакин, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1; № 1, 20 (1958).
10. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж. (в печати).
11. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 31, 511 (1954).
12. В. С. Троицкий, Изв. комиссии по физике планет, изд-во Харьк. ун-та, № 3, 1961.
13. А. Е. Саломонович, В. Н. Кощенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 591 (1961).
14. J. A. W a a k, Astron. J., 66, 298 (1961).

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОДНОГО МЕТОДА ОБНАРУЖЕНИЯ

А. Н. Малахов

Рассмотрим следующую блок-схему приемной системы (рис. 1). Здесь R —элемент системы, осуществляющий преобразование поступающего на вход сигнала в регулярную последовательность одинаковых импульсов, имеющих достаточно малую длительность τ^0 . Число порождаемых сигналом и выходящих из R импульсов в единицу времени n_c может в общем случае как-то сложно зависеть от I —интенсивности сигнала, поступающего на вход. Ограничиваясь рассмотрением достаточно слабых сигналов (малых значений I), можно ограничиться соответственно линейной зависимостью между I и n_c :

$$n_c = aI. \quad (1)$$

Элемент системы S введен в блок-схему рис. 1 для общности; основная его роль выяснится в последующей блок-схеме, а в данном случае он никакой роли не играет и не препятствует прохождению импульсов от R к A .

Элемент системы A является воспринимающим элементом блок-схемы и реагирует на среднее число импульсов в единицу времени n , поступающих на его вход. Величина n получается при временном усреднении самой системой A за ее собственное время T числа приходящих за T импульсов N . Другими словами,

$$n = T^{-1} N. \quad (2)$$

Кроме импульсов, выходящих из R в результате воздействия на него сигнала, имеются импульсы той же длительности τ^0 , выходящие из R хаотически, так что в каждую единицу времени число импульсов, равное $n_{ш}$, является случайной величиной. Среднее статистическое значение $n_{ш}$ равно $\bar{n}_{ш}$. Эти импульсы представляют собственный шум R .

Таким образом, на вход A поступает хаотическая последовательность шумовых импульсов элемента R и регулярная последовательность сигнальных импульсов общим числом

$$n = n_c + n_{ш}.$$

Рассматривая, однако, лишь слабые сигналы, для которых $n_c \ll n_{ш}$, можно считать фактически $n = n_{ш}$ и в формуле (2) под N понимать число шумовых импульсов $N_{ш}$, приходящих в A за время T .

Будем считать, что элемент системы A замечает сигнал (1), если он замечает изменение \bar{n} на величину

$$\sqrt{(n_{ш} - \bar{n}_{ш})^2} \equiv \sqrt{Dn_{ш}}.$$

Тем самым, пороговый сигнал I^0 определяется соотношением

$$aI^0 = \sqrt{Dn_{ш}}.$$

Имея в виду (2), получим для порогового сигнала выражение

$$I^0 = \frac{1}{aT} \sqrt{DN_{ш}}. \quad (3)$$

Рассмотрим $N_{ш}$ —число шумовых импульсов за время T . Каждый импульс имеет длительность τ^0 ; будем полагать, что за это время другой импульс возникнуть не может. Пусть $T = M\tau^0$, $M \gg 1$ и предположим, что за время τ^0 импульс может возникнуть в канале y с вероятностью p_y . Вероятность отсутствия шумового сигнала за τ^0 равна $q_y = 1 - p_y$. Нетрудно видеть, что $N_{ш}$ имеет биномиальное распределение: вероятность появления N импульсов за время T равна

$$C_M^N p_y^N q_y^{M-N}. \quad (4)$$

Для биномиального распределения, как известно [1],

$$DN_{ш} = p_y q_y M = p_y q_y T / \tau^0, \quad \bar{N}_{ш} = p_y M = p_y T / \tau^0. \quad (5)$$

Объединяя (3) и (5), имеем:

$$I^0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{p_y q_y}{T \tau^0}}. \quad (6)$$

Если предположить, что шумовые импульсы являются достаточно редкими ($p_y \ll 1$), то

$$I^0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{p_y}{T\tau^0}}. \quad (7)$$

Теперь необходимо учесть то обстоятельство, что шумовые импульсы, поступающие на вход A в системе рис. 1, являются в точности шумовыми импульсами, выходящими из R . Если обозначить через p_x вероятность появления за время τ^0 шумового импульса на выходе R , то легко видеть, что

$$p_x = \bar{n}_{ш} \tau^0, \quad q_x = 1 - \bar{n}_{ш} \tau^0.$$

Кроме того, для схемы рис. 1 $p_y = p_x$. Это дает окончательную формулу для чувствительности системы рис. 1:

$$I_1^0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{p_x}{T\tau^0}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\bar{n}_{ш}}{T}}. \quad (8)$$

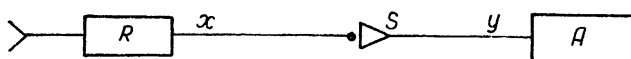


Рис. 1.

Рассмотрим теперь схему рис. 2 с k -входами, где R_1, \dots, R_k — идентичные элементы ($p_{x_1} = p_{x_2} = \dots = p_{x_k} = p_x$), а S — схема совпадений с k -входами, вырабатывающая на выходе импульс длительности τ^0 при одновременном* поступлении импульсов на все k входов. Для сигнала, поступающего одновременно на все входы, элемент S по-прежнему не играет никакой роли и пороговый сигнал опять определяется формулой (6), где теперь (см. [2]) для $p_x \ll 2/3$

$$p_y = k p_x^k, \quad q_y = 1 - k p_x^k. \quad (9)$$

Полагая по-прежнему $p_y \ll 1$ и используя (7) и (8), получим для порогового сигнала I_k^0 системы рис. 2:

$$I_k^0 = \frac{I_1^0}{Q_k}, \quad Q_k = \frac{1}{\sqrt{k p_x^{k-1}}}. \quad (10)$$

Величину Q_k можно назвать выигрышем в чувствительности системы рис. 2 по сравнению с системой рис. 1.

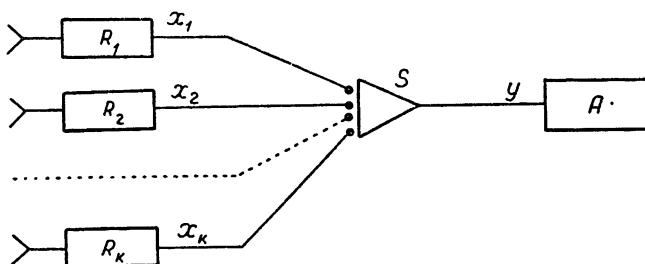


Рис. 2.

Если взять, например, $p_x = 10^{-2}$, то легко получить следующую зависимость Q_k от k :

* Импульсы считаются одновременными, если они сдвинуты во времени (по отношению к какому-либо одному импульсу) не более чем на их длительность τ^0 .

$$k = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ \dots \ 100;$$

$$Q_k = 1 \ 7 \ 58 \ 500 \ 4470 \ \dots \ 10^{68}.$$

Таким образом, схема рис. 2 при достаточно малом p_x обеспечивает существенный выигрыш в чувствительности даже при небольшом значении k , не требуя увеличения полосы пропускания элементов R и увеличения постоянной времени выходного прибора T .

Остановимся теперь на вопросе реализации метода обнаружения слабых сигналов по схеме рис. 2. Нетрудно видеть, что весь вопрос заключается в реализации элементов R , превращающих интенсивность поступающего сигнала в поток одновременных (для разных R) импульсов. Пока еще трудно сказать, как можно, например, реализовать элемент R для сигнала, представляющего собой электромагнитные колебания в области низких, высоких или сверхвысоких частот. Заметим, однако, что подобные системы, по-видимому, уже существуют—это органы чувств животных. Элементы R суть рецепторы. Известно, что рецепторы передают информацию о воздействии на них сигналов с помощью потока коротких импульсов, распространяющихся по нервному волокну в центральную нервную систему. Элемент S есть синапс—место перехода импульсов возбуждения от одного нервного волокна к другому. Синапсы обладают многими сложными свойствами, в частности, они могут функционировать и как схемы совпадений (см., например, [3]). Элемент A является центральной нервной системой, производящей те или иные (простые или сложные) процессы обработки поступающей информации.

Таким образом, система рис. 2 осуществляет моделирование, разумеется, весьма ограниченнее того метода обнаружения слабых сигналов, который, возможно, имеет место в живых организмах.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. Арлей, К. Бух, Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, ИЛ, М., 1951.
- 2 Н. М. Седякин. Научн. докл. высш. шк.—Радиотехника и электроника, № 1, 90 (1958).
- 3 Сб. Автоматы, ИЛ, М., 1956.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
12 марта 1962 г.

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РАДИОМЕТРОВ С ПАРАМАГНИТНЫМИ УСИЛИТЕЛЯМИ

К. С. Станкевич

Для конструирования радиометра с парамагнитным усилителем резонаторного типа, который бы имел максимально возможную чувствительность, важно правильно выбрать величину коэффициента усиления парамагнитного усилителя и ширину полосы пропускания усилителя промежуточной частоты. В литературе [1–3] этот вопрос затрагивается в связи с оценкой чувствительности радиометров и наиболее подробно разобран в [4]. В этой работе предполагается, что частотная характеристика усилителя совпадает с резонансной кривой одиночного колебательного контура, и спектр шумов на выходе усилителя имеет вид:

$$S_1(f) = T_1 G_0 F_1(f) = T_1 G_0 \frac{\Delta f_1^2 f^2}{\Delta f_1^2 f^2 + (f_0^2 - f^2)^2}, \quad (1)$$

где T_1 — спектральная плотность шумов на входе радиометра, G_0 — усиление мазера по мощности, $F_1(f)$ — частотная характеристика резонаторного парамагнитного усилителя, Δf_1 — ширина полосы пропускания парамагнитного усилителя.

Этот же спектр шумов (1) рассматривается далее на входе следующего за усилителем приемника. Однако поскольку в радиометрах используются резонаторные парамагнитные усилители отражательного типа, включенные в схему с помощью циркулятора, имеющего полосу пропускания по прямому прохождению Δf , обычно значительно превышающую Δf_1 , то спектр шумов на входе приемника будет опреде-

ляться не только частотной характеристикой усилителя, но и частотной характеристикой циркулятора. На частотах $|f - f_0| \gg \Delta f_1$, соответствующих крыльям резонансной кривой, практически можно считать, что имеется полное отражение от плеча, в который включен усилитель, и, следовательно, на этих частотах сигнал со входа радиометра, отражаясь без потерь, поступает также на вход приемника, следующего за усилителем. Предположим, что все плечи циркулятора имеют одинаковые характеристики по прямому и обратному прохождению в полосе Δf , и обозначим коэффициент передачи от одного плеча к другому через $F(f)$. Тогда коэффициент передачи мазера и циркулятора по мощности имеет вид:

$$F^2(f) + (G_0 - 1) F_1(f) F^2(f). \quad (2)$$

Если обозначить спектральную плотность квадрата напряжения шумов, возникающих из-за потерь в тракте циркулятора, через T_2 , то на вход приемника поступают шумы со спектральной плотностью

$$S_2(f) = (T_1 + T_2) [F^2(f) + (G_0 - 1) F_1(f) F^2(f)]. \quad (3)$$

Исключая из рассмотрения флюктуации коэффициента усиления мазера и приемника, будем иметь на входе квадратичного детектора шумовой сигнал со спектральной плотностью

$$S(f) = F_2(f) [T_n + (T_1 + T_2) [F^2(f) + (G_0 - 1) F_1(f) F^2(f)]], \quad (4)$$

где T_n — спектральная плотность шумов приемника, приведенная к его входу, и $F_2(f)$ — коэффициент передачи приемника по мощности.

В результате квадратичного, детектирования будем иметь постоянную составляющую тока $I = \int_0^{\infty} S(f) df$ и спектральную плотность шумов вблизи нулевых частот

$$J(0) = 2 \int_0^{\infty} S^2(f) df.$$

Пользуясь определением чувствительности, таким же, как в [1], можно получить выражение для минимально обнаружимой температуры антенны радиометра с мазером в виде:

$$\Delta T = a(T_1 + T_2) \sqrt{\frac{\Delta \Omega}{A}}, \quad (5)$$

$\Delta \Omega$ — полоса узкополосного фильтра на выходе радиометра, A — величина, характеризующая парамагнитный усилитель (при $G_0 \gg 1$ $A = \sqrt{G_0 \Delta f_1}$).

Для вычисления коэффициента a рассмотрим случай, когда циркулятор и приемник имеют прямоугольные частотные характеристики с полосами пропускания $\Delta f > \Delta f_2$ и, кроме того, в полосе Δf_2 спектральная плотность шумов приемника постоянна: $T_n = \text{const}$. В этих предположениях коэффициент

$$a = 2G_0^{1/4} \frac{[(G_0 + \beta^2 + \beta) \xi + G_0(G_0 + 2\beta) \arctg \xi]^{1/2}}{\xi + G_0 \arctg \xi}. \quad (6)$$

Выше были использованы следующие обозначения:

$$\beta = \frac{T_n}{T_1 + T_2}, \quad \xi = 2 \frac{\Delta f_2}{\Delta f_1}.$$

Исследование выражения (6) показывает, что $a(\xi, G_0)$ принимает минимальное значение при $G_{0m} \approx \beta$, и, следовательно, радиометр имеет наилучшую чувствительность при этом коэффициенте усиления. Величина β всегда известна. Так, при измерении слабых сигналов, когда $T_1 \ll T_2$,

$$\beta \approx \frac{T_n}{T_2} = \frac{(N-1)T_0}{\gamma T_0} = \frac{N-1}{\gamma},$$

где N — шум-фактор приемника и γ — коэффициент потерь в волноводном тракте на входе мазера. Полоса пропускания мазера при этом равна $\Delta f_1 = \frac{A}{\sqrt{\beta}}$.

Первый член в знаменателе выражения (6) появляется в результате учета прохождения шумового сигнала со входа радиометра через циркулятор вне полосы усиления мазера, и при соотношении полос приемника и усилителя $\Delta f_2/\Delta f_1 \sim G_0$ оба члена в знаменателе становятся одного порядка. Из выражения (6) можно видеть,

что $a(\xi, G_0)$ монотонно убывает с ростом ξ . Поскольку Δf_1 строго определена, то отсюда следует, что при увеличении полосы Δf_2 следующего за усилителем приемника чувствительность радиометра увеличивается. Однако значительное увеличение Δf_2 связано с определенными трудностями при настройке приемника и циркулятора, поэтому в практических системах достаточно иметь $\Delta f_2 \sim A$: при дальнейшем увеличении полосы $\Delta f_2 \sim 10 A$ чувствительность возрастает всего в 1,3 раза, а при $\Delta f_2 = \Delta f_1$ чувствительность ухудшается примерно в это же число раз.

При выбранных выше параметрах радиометра выражение для чувствительности (5) принимает вид:

$$\Delta T_{\min} \approx 3(N-1)^{1/4} \tau^{3/4} T_0 \sqrt{\frac{\Delta Q}{A}}. \quad (7)$$

Оптимальные параметры радиометра, полученные из выражения (6), существенно отличаются от получаемых в [1]; из последних следует, в частности, что $a(\xi, G_0)$ имеет минимум при изменении ξ . При этом наилучшая чувствительность радиометра получается при $\Delta f_2 = 6 \Delta f_1$ и $G_0 = 4,5 \beta$.

Полученные выше рекомендации необходимо также учитывать при конструировании радиометров с параметрическими усилителями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Карлов, Ю. П. Пименов, А. М. Прохоров, Радиотехника и электроника, **6**, 416 (1961).
2. J. A. Giordmaine, L. E. Alsop, C. H. Mayer, C. H. Townes, Proc. IRE, **47**, 1062 (1959).
3. J. J. Cook, L. G. Cross, M. E. Bair, R. W. Terhune, Proc. IRE, **49**, 768 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
27 января 1962 г.

НАБЛЮДЕНИЕ ЛИНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ МОЛЕКУЛЫ ФОРМАЛЬДЕГИДА НА ЧАСТОТЕ 72,8 гГц

А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов

Наблюдался переход $J_{01} \rightarrow O_{00}$ молекулы CH_2O на длине волны около 4 мм. В качестве сигнала использовалась вторая гармоника нестабилизированного 8 мм клистрона. Сигнал подавался на резонатор обычного газового лазера, который собран в корпусе аммиачного молекулярного генератора, состоящего из источника пучка — отверстия диаметром 1 мм, квадрупольной сортирующей системы и цилиндрического резонатора на E_{010} -моду. С помощью кранового переключателя сигнал мог подаваться либо на приемник прямого усиления, либо на супергетеродинный радионастроимический приемник с полосой УПЧ 50 мГц. Осциллограф, на который подавались сигналы с волномера и приемника прямого усиления, позволял контролировать частоту настройки резонатора, а также устанавливать волномер по линии поглощения. Второй осциллограф использовался с супергетеродинным приемником.

Сначала наблюдалась линия поглощения в газе в резонаторе. На приемнике прямого усиления линия наблюдалась очень слабо: судя по экрану осциллографа, отношение сигнал/шум — порядка единицы при давлении газа порядка 10^{-1} мм рт. ст. На супергетеродинном приемнике соотношение сигнал/шум было порядка 10 в интервале давлений $10^{-1} - 10^{-3}$ мм рт. ст. При дальнейшем уменьшении давления линия терялась в шумах. При повышении давления выше 10^{-1} мм рт. ст. линия сильно расширялась и наблюдение ее становилось затруднительным*. Чувствительность аппаратуры снижалась чрезмерно широкой полосой УПЧ, сузиг которую без стабилизации частоты гетеродина было нельзя.

Затем дьюар вымораживался жидким азотом, создавался пучок молекул формаль-

* Ширина линии определялась столкновениями молекул ($\Delta\nu = 10,3$ мГц·мм⁻¹ рт. ст. [1]) и лишь при давлениях около 10^{-3} мм рт. ст. начинали влиять столкновения со стенками резонатора.

дегида (без пучка в системе было давление порядка $6 \cdot 10^{-6}$ мм рт. ст.) и подавалось высокое напряжение на фокусирующую систему. При этом на экране осциллоскопа наблюдалась линия излучения отсортированных молекул формальдегида, которая не имела обычной резонансной формы (см. рис. 1) и наблюдалась на склоне кривой резонатора с соотношением сигнал/шум ~ 5 . При точной настройке резонатора на частоту линии она терялась в шумах.

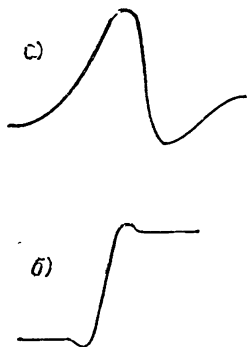


Рис. 1.

Линия излучения наблюдалась на обоих склонах резонансной кривой резонатора; начиная с 12 кв слабо зависела от напряжения на сортирующей системе, имела оптимум по давлению пучка при пучке, соответствующем вакууму в системе порядка $6 \cdot 10^{-5}$ мм рт. ст., насыщалась при значениях мощности, много меньших тех, при которых происходило насыщение линии поглощения. По частоте линия излучения совпадала с линией поглощения в пределах точности волномера.

В настоящее время авторами ведутся работы по совершенствованию как радиоаппаратуры, так и конструкции пучкового мазера.

Авторы благодарят А. М. Прохорова за советы по выбору вещества, А. Г. Кислякова за предоставленную 4-миллиметровую аппаратуру, Н. Н. Семьянского и В. И. Сысоева за помощь в эксперименте.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Горди, В. Смит, Р. Трамбаруло, Радиоспектроскопия, ГИТТЛ, М., 1955, стр. 200.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 декабря 1961 г.