

СОДЕРЖАНИЕ

Чаевский Е. В., Брауде С. Я. О спектре радиоизлучения дискретного источника Кассиопея-А на низких частотах	211
Сидоров В. В., Фахрутдинов Р. Ю. О распределении электронов по радиусу метеорного следа	216
Виленский И. М. Об искажении модуляции мощных радиоволн при их распространении в ионосфере (экспериментальное исследование). II	221
Андронов А. А. и Городинский Г. В. Дипольное излучение продольных волн . .	231
Арсенин В. В. Распространение электромагнитных возмущений вдоль магнитного поля в разреженной плазме	240
Брауде С. Я., Канер Э. А. Флюктуации радиоволны различной частоты в тропосфере	216
Басс Ф. Г., Канер Э. А., Поспелов Л. А. Флюктуации радиоволны в ближней зоне над плоской поверхностью раздела	255
Никонов В. Н. Режим стационарного одночастотного колебания магнетронного генератора	263
Никонов В. Н. Флюктуации амплитуды и частоты магнетронного генератора . .	270
Мень А. В. Исследование пространственно-временных корреляционных функций флюктуаций амплитуд при измерениях на пересекающихся трассах	287
Логачев В. А., Поздеев О. Д., Троицкий В. С. Влияние фликкер-эффекта на флюктуации амплитуды колебаний лампового генератора	307
Терещенко А. И., Шеин А. Г. Исследование анодного блока магнетронного типа с резонаторами каплевидной формы поперечного сечения	311
Юзвинский В. И. О коэффициенте шума приемника с одноконтурным параметрическим усилителем на входе	319
Булгаков А. К., Рысаков В. М. Экспериментальное исследование нестационарного излучения вертикальной антенны	328
Малеев В. Я. Дисперсионное уравнение магнетрона	333
Дудник Р. А. О волнах пространственного заряда в системе электронных пучков конечной длины	343
Синица С. П. Метод сдвига вольт-амперных характеристик в применении к $p-n$ переходам	352
Труженикова В. Н. Условия рождения периодического движения из состояния равновесия	356
Аронович Г. В. О влиянии волновых явлений в напорном трубопроводе на оптимальное управление	362
Алексеев А. С. Метод точечных преобразований в задаче составления оптимального графика ритмичного производства произвольного количества типов изделий на одном оборудовании при изменении рабочих заделов	370
Эйнгорин М. Я. О некоторых операциях, реализуемых вычислительной машиной последовательного типа	385
Чеботарев Р. П. Применение логических устройств в метеорном радиолокаторе	397
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Виткевич В. В. О нарушениях регулярной структуры магнитного поля в сверхкороне Солнца	402
Виткевич В. В. О возможности существования естественных радиоизлучающих плазма-спутников, движущихся вокруг Солнца	404
Герштейн Л. И., Плечков В. М. Эталон частоты с использованием молекулярного генератора	406
Басс Ф. Г., Ханкина С. И. Об энергетических потерях заряда при движении над анизотропной средой	408
Соина Н. В. К исследованию колебаний в системе двух связанных контуров с переменной емкостью в одном из них	411
Горюхов Н. А., Дрягин Ю. А., Федосеев Л. И. Радиоизлучение Солнца на волне $\lambda = 1,8 \text{ м.м.}$	413
Аннотации статей, опубликованных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. I, № 6, 1961	414

О СПЕКТРЕ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ИСТОЧНИКА КАССИОПЕЯ-А НА НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

E. B. Чаевский, C. Я. Брауде

Наблюдаемый частотный спектр дискретного источника Кассиопея-А сравнивается с двумя теоретическими спектрами; первый из них учитывает поглощение в слоях ионизированного водорода, второй—отличие показателя преломления от единицы внутри излучающего объекта. Из этого сравнения следует, что обе модели в равной мере могут служить для объяснения экспериментальных данных. Чтобы выяснить, какая из этих моделей имеет место, необходимо провести измерения на частотах ниже 10 мгц.

Для изучения механизма генерации дискретных источников космического радиоизлучения необходимо иметь данные о спектральном составе этого излучения в возможно более широком диапазоне частот. Такие измерения в диапазоне частот от 12 до 10000 мгц были проведены в последние годы [1-5] для дискретного источника Кассиопея-А. Результаты измерений нанесены кружками на рис. 1 и 2. Как следует

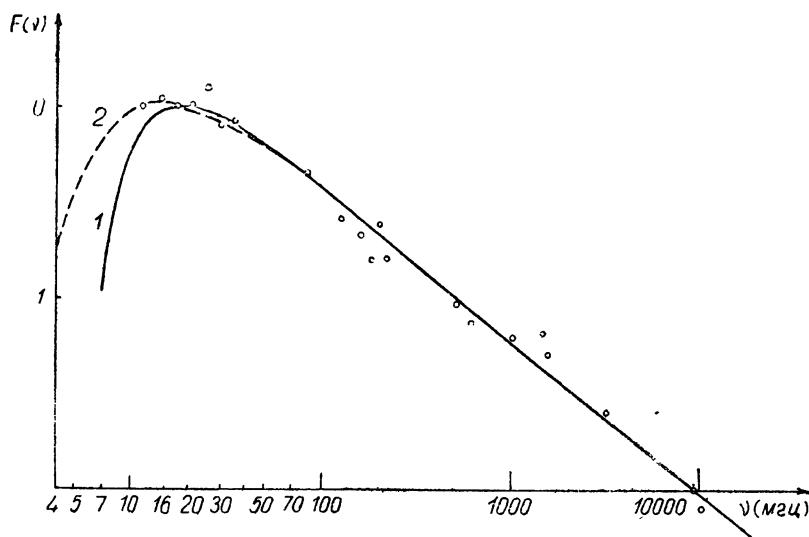


Рис. 1. Зависимость F от ν :

$$1\text{—функция } F^{(H)} = \lg \frac{I^{(H)}(\nu)}{I_{\max}^{(H)}}; \quad 2\text{—функция } F^{(n)} = \lg \frac{I^{(n)}(\nu)}{I_{\max}^{(n)}}.$$

из рисунка 1, частотный спектр $I(\nu)$ Кассиопеи-А обладает двумя характерными особенностями. На частотах $\nu \geq 50$ мгц $I(\nu) \sim \nu^{-\alpha}$, где $\alpha=0,8$; при $\nu < 50$ мгц спектральный индекс α уменьшается, и в интервале частот от 30 до 12 мгц можно приближенно считать $\alpha \approx 0$, $I(\nu) \approx I_{\max} = \text{const}$.

По современным представлениям, радиоизлучение дискретных источников связано с генерацией радиоволн релятивистскими электронами, движущимися в космических магнитных полях. Если электрон

излучает в вакууме, то энергия, генерируемая им за одну секунду в интервале частот 1 Гц , равна [6]

$$P(\nu) = 16(e^2/c) \omega_0 (\omega/2\omega_0)^{1/3} U\{\(\omega/2\omega_1)^{2/3}\}, \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi\nu$, $\omega_0 = (eH/mc)(mc^2/E)\sin\Theta$, $\omega_1 = (eH/mc)(E/mc^2)^2\sin\Theta$, (E —энергия, e —заряд, m —масса электрона, c —скорость света в вакууме, H —напряженность магнитного поля, Θ —угол между направлением скорости электрона и направлением магнитного поля, U —протабулированная в [6] функция). Если же электрон излучает в среде с показателем преломления n и $1-n \ll 1$, то, согласно [7, 8],

$$P(\nu) = 16(e^2/c) \omega_0 (\omega/2\omega_0)^{1/3} U\{\(\omega/2\omega_1)^{2/3}[1 + (1 - n^2)(E/mc^2)^2]\}. \quad (2)$$

Следуя [9], будем считать, что показатель преломления среды равен показателю преломления электронно-ионной плазмы при отсутствии внешнего поля, т. е.

$$n^2 = 1 - e^2 N_e / \pi m \nu^2,$$

где N_e —концентрация свободных электронов в среде. Тогда

$$P(\nu) = 16(e^2/c) \omega_0 (\omega/2\omega_0)^{1/3} U\{\(\omega/2\omega_1)^{2/3}[1 + (e^2 N_e / \pi m \nu^2)(E/mc^2)^2]\}. \quad (2a)$$

Пусть энергетический спектр электронов в источнике $N(E)$ имеет вид $N(E) \sim E^{-2\alpha-1}$. Из (1) и (2a), учитывая, что

$$I(\nu) \sim \int_{mc^2}^{\infty} P(\nu E) N(E) dE, \quad (3)$$

получим: для электронов, излучающих в вакууме,

$$I(\nu) \sim \nu^{-\alpha}; \quad (4)$$

для электронов, излучающих в ионизированной среде,

$$I^{(n)}(\nu) \sim \nu^{-\alpha} \int_0^{\infty} U\left(x + \frac{ecN_e}{\nu H_1 V_x}\right) x^{\frac{3\alpha-1}{2}} dx. \quad (5)$$

Здесь $H_1 = H \sin \Theta$, но, поскольку H в дальнейшем оценивается лишь ориентировочно, ниже везде вместо H_1 будем писать просто H .

Обычно для объяснения наблюдаемых спектров излучения дискретных источников используется следующая модель [4, 10, 11]: электроны излучают в вакууме, их энергетический спектр $N(E) \sim E^{-2\alpha-1}$; проходя через области ионизированного водорода, излучение частично поглощается, так что для измеряемого потока $I^{(H)}(\nu)$ имеем:

$$I^{(H)}(\nu) \sim K(\nu) \nu^{-\alpha} \sim e^{-\beta/\nu^2} \nu^{-\alpha}. \quad (6)$$

В (6) учтено, что $K(\nu)$ —коэффициент поглощения в областях H_{II} определяется соотношениями [12]

$$K(\nu) = e^{-\frac{\beta}{\nu^2}}; \quad \beta = 0,18 T^{-3/2} \int_0^D N_e^2 dl. \quad (7)$$

Здесь D —толщина слоя с концентрацией электронов N_e , T —кинетическая температура газа, $\int_0^D N_e^2 dl = ME$ —„мера эмиссии“.

Если принять эту модель, то из эксперимента можно установить меру эмиссии; для этого достаточно согласовать экспериментальную

и теоретическую кривые. Проведем такое согласование. Из (6) дифференцированием определим положение максимума кривой $I^{(H)}(\nu)$:

$$I_{\max}^{(H)} = I^{(H)}(\nu_0), \quad \beta = \alpha\nu_0^2/2. \quad (8)$$

Кривая $F^{(H)}(\nu) = \lg I^{(H)}(\nu) - \lg I_{\max}^{(H)}$ определяется, таким образом, соотношением

$$F^{(H)}(\nu) = \alpha \lg \frac{\nu_0}{\nu} + \frac{\alpha}{2} \lg e \left[1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \right].$$

Полагая $\alpha = 0,8$, получим:

$$F^{(H)}(\nu) = 0,8 \lg \frac{\nu_0}{\nu} + 0,17 \left(1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \right). \quad (9)$$

Следуя [2], для $\nu \geq 50$ мгц экспериментальную кривую $F(\nu)_{\text{эксп}}$ можно аппроксимировать прямой. Будем считать, что к этой прямой асимптотически стремится $F^{(H)}(\nu)$ с повышением частоты. При больших ν уравнение (9) имеет вид:

$$F^{(H)}(\nu) \approx 0,8 \lg \frac{\nu_0}{\nu} + 0,17.$$

Из рис. 1 ясно, что прямая, соответствующая $F(\nu)_{\text{эксп}}$ при больших частотах, пересекается с нулевым уровнем в точке $\nu = 30$ мгц (этую точку можно определить и непосредственно из [2]). Следовательно,

$$F^{(H)}(3 \cdot 10^7) = 0,8 \lg \frac{\nu_0}{3 \cdot 10^7} + 0,17 = 0,$$

откуда $\nu_0 = 20$ мгц.

Из (7), (8), полагая $T = 10^4$ °К, находим: $ME = 300$ (здесь l — в парсеках), а из (9) получаем уравнение для теоретической кривой $F^{(H)}(\nu)$. На рис. 1 изображен вид $F^{(H)}(\nu)$ для интервала частот $7 \div 10000$ мгц. Учитывая, что точность эксперимента на низких частотах — порядка $\pm 15\%$ (см. рис. 2), следует считать совпадение теоретической и экспериментальной кривых удовлетворительным.

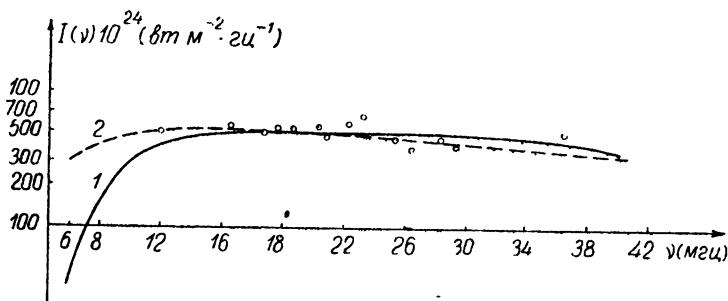


Рис. 2. Частотный спектр радиоизлучения $I(\nu)$.

Однако, как нам представляется, нельзя считать вполне доказанной единственность описанной выше модели. Можно показать, что электроны с энергетическим спектром $N(E) \sim E^{-2\alpha-1}$, излучающие

в среде с показателем преломления, отличным от единицы, и без дополнительного поглощения в слоях ионизированного водорода H_{II} могут генерировать излучение $I^{(n)}(\nu)$, частотный спектр которого близок к наблюдаемому.

Как и выше, проведем согласование теоретической и экспериментальной кривых. Согласно (5), функция $I^{(n)}(\nu)$ для этой модели имеет вид:

$$I^{(n)}(\nu) \sim \nu^{-0.8} \int_0^{\infty} U\left(x + \frac{ecN_e}{\nu H Vx}\right) x^{0.7} dx.$$

Следуя [7], построим график функции*

$$F^{(n)}(\nu') = \lg \frac{I^{(n)}(\nu')}{I_{\text{макс}}^{(n)}}, \quad \nu' = \frac{\nu H}{ecN_e}. \quad (10)$$

При достаточно больших ν' функция $F^{(n)}(\nu')$ хорошо аппроксимируется прямой. Продолжим эту прямую до пересечения с уровнем максимума. В этой точке $\nu' = \nu'_1 = 7.6$. В соответствии с изложенным выше, считаем, что точке ν'_1 соответствует частота 30 мгц. Тогда из (10) следует:

$$ecN_e = 4 \cdot 10^6 H; \quad \nu' = 2.5 \cdot 10^{-7} \nu. \quad (11)$$

Теперь кривая $F^{(n)}(\nu)$ полностью определена. Как видно из рис. 1, 2, во всем исследованном интервале частот она отличается от экспериментальной не больше, чем теоретическая кривая предыдущей модели. При точности, с которой проводятся современные радиоастрономические наблюдения, кривые $F^{(H)}$ и $F^{(n)}$ различны лишь на частотах ниже 10 мгц, где отсутствуют экспериментальные данные.

Заметим, что если при понижении частоты будет получен такой же быстрый спад $F_{\text{эксп}}$, как у $F^{(H)}$, вероятность реализации первой модели увеличится, хотя к тому же эффекту может привести и реабсорбция релятивистских электронов [7, 14]. Если же интервал частот, для которых $\alpha \approx \text{const}$, окажется большим, чем у $F^{(H)}$, это будет аргументом в пользу второй модели.

В то время как первая модель дает интегральную связь между плотностью свободных электронов в слое и толщиной слоя, вторая модель дает локальную связь между плотностью свободных электронов и напряженностью магнитного поля в источнике. Согласно (11), $H = 3.7 \cdot 10^{-6} N_e$.

Если исходить из ориентировочных оценок для плотности вещества в Кассиопее-А ($\rho \approx 10^{-22} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ [13]) и некоторых косвенных оценок для N_e ($N_e \leq 60 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$ [7]), то можно принять, что $N_e \leq 10^2 \text{ см}^{-3}$. Тогда из (11) $H \leq 3.7 \cdot 10^{-4} \text{ эрстед}$. Хотя из энергетического соотношения $\mu u^2/2 \approx H^2/8\pi$ (здесь u — скорость хаотических движений газа) получается $H_{\text{макс}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ эрстед}$ [13], нет оснований считать, что в Кассиопее-А величина H достигает максимального значения; поэтому указанная энергетическая оценка не противоречит нашей.

Разумеется, если из каких-то других экспериментов будет следовать, что отношение H/N_e для Кассиопеи-А не может достигать величины $3 \cdot 10^5$ (как следует из (11)), то отличие показателя преломления от единицы можно не учитывать

* Он получается из графика $f(\nu' \alpha)$ [7] при $\alpha = 1$ поворотом около точки $\nu' = 1$, $f(\nu') = 8.7 \cdot 10^{-2}$ на угол $\pi/4 - \Theta$, где $\tan \Theta = 0.8$.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. W. Wells, J. Geophys. Res., **61**, 541 (1956).
2. C. R. Whithfield, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., **117**, 680 (1957).
3. H. W. Wells, Proc. IRE, **46**, 235 (1958).
4. A. C. B. Lowell, H. W. Wells, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., **121**, 111 (1960).
5. С. Я. Брауде, А. В. Мень, И. Н. Жук, К. А. Бабенков, ДАН УССР, **4**, 469 (1961).
6. В. В. Владимирский, ЖЭТФ, **18**, 393 (1948).
7. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 584 (1960).
8. В. А. Разин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, 921 (1960).
9. В. Л. Гинзбург, УФН, **51**, 343 (1953).
10. R. J. Lamden, A. C. B. Lowell, Phil. Mag., **8**, 1725 (1956).
11. С. Я. Брауде, А. В. Мень, И. Н. Жук, К. А. Бабенков, Астрон. ж. (в печати).
12. В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, М., 1949.
13. В. Л. Гинзбург, УФН, **62**, 37 (1957).
14. R. Q. Twiss, Phil. Mag., **45**, 249 (1954).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
10 августа 1961 г.

ON RADIO EMISSION SPECTRUM OF DISCRETE SOURCE KASSIOPIA-A AT LOW FREQUENCIES

E. V. Chaevski, S. Ya. Braude

The observed frequency spectrum of discrete source Kassiopia-A is being compared with two calculated spectra; the first of them takes into account the absorption in the ionized hydrogen layers, the second — the difference of refractive index from the unit within the radiating object. The conclusion that both the models may be equally used for explaining the experimental data can be drawn from the comparison. To clear up which of these models is to be used one has to carry out observations on the frequencies below 10 Mc/s.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ ПО РАДИУСУ МЕТЕОРНОГО СЛЕДА

B. B. Сидоров, P. Ю. Фахрутдинов

Обсуждается двухчастотный метод радиолокации метеоров с точки зрения его возможностей для оценки характера распределения электронной плотности по радиусу метеорного следа. В случае переуплотненных метеорных следов падающая волна не может проникать в центральную часть следа, который при этом ведет себя как металлический цилиндр некоторого эффективного радиуса, являющегося функцией частоты облучения. Предложен метод измерения разности эффективных радиусов на кратных частотах. Показано, что зависимость этой разности от времени находится в тесной связи с распределением электронной плотности по радиусу следа.

Распределение плотности электронов по радиусу метеорного следа существенно влияет на поведение радиоотражений [1, 2, 3]. Прямые измерения этих распределений не производились. В настоящей работе обсуждается когерентный двухчастотный метод с точки зрения его возможностей для изучения закономерности распределения электронов по радиусу метеорного следа. Привлечение двухчастотного метода к решению задачи об электронном профиле следа напрашивается из аналогии с ионосферным зондированием, когда радиоволны различных частот отражаются от различных участков ионизированного слоя в зависимости от их электронной плотности. Такой метод невозможен в случае, когда след полностью „просвечивается“ излучением, т. е. является недоуплотненным. Для переуплотненного следа разность эффективных радиусов $\Delta r_c = r_{c_1} - r_{c_2}$, от которых происходит полное отражение на разных частотах, будет определяться характером распределения электронов в следе. Задача состоит в том, чтобы обнаружить эту разность.

Предлагаемый метод предусматривает облучение метеорного следа радиочастотами ν и 2ν , выбранными в диапазоне от 4 до 10 м и излучаемыми когерентными источниками (например, двумя передатчиками с общим возбуждением). В случае переуплотненных метеорных следов падающая волна не может проникнуть в центральную часть следа, и след ведет себя как металлический цилиндр критического радиуса r_c . Если расстояние от антенн передатчиков до оси метеорного следа равно R , то излучение с частотой ν пройдет расстояние $2(R - r_{c_\nu})$, а излучение с частотой 2ν — расстояние $2(R - r_{c_{2\nu}})$. Вследствие разности хода для этих радиосигналов, равной $2(r_{c_\nu} - r_{c_{2\nu}})$, будет иметь место запаздывание фазы сигнала с частотой 2ν на величину

$$\Delta\varphi = \frac{8\pi\nu(r_{c_\nu} - r_{c_{2\nu}})}{C}. \quad (1)$$

Радиоотражения предполагается принимать на супергетеродинные приемники, смесители которых питаются от когерентных гетеродинов с частотой ν_r и $2\nu_r$. Промежуточная частота приемника ν после удвоения и эффективного ограничения подается на фазовый детектор в ка-

честве опорного напряжения. С другой стороны на этот фазовый детектор подается сигнал промежуточной частоты со второго канала. Результирующее напряжение с выхода фазового детектора должно затем записываться регистрирующим устройством как функция времени.

Известно, что при преобразовании частоты начальная фаза сигнала сохраняется [4], другие цепи передающих и приемных трактов могут создать лишь постоянный фазовый сдвиг, который можно либо учесть, либо скомпенсировать фазовращателями. Умножение частоты сводит измерение фазы к одному масштабу, который определяется частотой 2ν . Следовательно, мы будем регистрировать реальные разности фаз сигналов, поступающих на входы приемников. Фактически к интересующей нас разности хода, обусловленной характером отражения, будет добавляться разность хода, зависящая от углов прихода радиоотражения и связанная с тем, что для разных частот предполагается использовать разные антенны с конечным расстоянием между ними. Эта дополнительная разность фаз не будет иметь временного хода и проявится как произвольный сдвиг начала отсчета от одного измерения к другому. В принципе ее можно было бы учесть, используя данные об углах прихода радиоотражения или применяя для обеих частот общую широкополосную антенну. Однако, как будет показано ниже, в таких решениях, которые сами по себе представляют значительную техническую проблему, нет нужды, так как основной интерес представляет зависимость измеряемой разности хода от времени.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО РАДИУСА

Согласно Кайзеру и Клоссу [3], критический радиус метеорного следа определяется соотношением

$$\epsilon(r_c) (2\pi r_c / \lambda)^2 = -1, \quad (2)$$

где $\epsilon(r)$ —диэлектрическая проницаемость на расстоянии r от оси следа, λ , ν —длина волны и частота зондирования.

Рассмотрим две возможности.

1. „Тонкий след“. В этом случае $(2\pi r_c / \lambda)^2 \ll 1$, рассеяние при перпендикулярной поляризации будет резонансным и применение геометрической оптики недопустимо.

2. „Толстый след“. Тогда $(2\pi r_c / \lambda)^2 \gg 1$ и, следовательно, $|\epsilon(r_c)| \ll 1$. Несмотря на то, что этот случай не является преобладающим, он наиболее интересен, так как позволяет воспользоваться приближением геометрической оптики. Последнее коренным образом упрощает расчеты.

Выражая $\epsilon(r)$ через объемную электронную плотность $n(r)$, можно придать условию (2) следующий вид:

$$\epsilon(r_c) = 1 - \frac{n(r_c) e^2}{\pi m \nu^2} = 0, \quad (3)$$

e , m —заряд и масса электрона. Вычисления эффективного радиуса проведем для случая обобщенного экспоненциального распределения, которое в [3] берется в виде:

$$n = n_0 \exp \left[- \left(\frac{r}{r_t} \right)^s \right], \quad (4)$$

где $r_t = \sqrt{4Dt + r_0^2} = \sqrt{4Dt'}$ —диффузный радиус следа в момент t , D —коэффициент диффузии, s —параметр распределения, r_0 —начальный радиус. Электронная плотность на оси

$$n_0 = \frac{\alpha}{\pi r_t^2 \Gamma(1+2/s)} \quad (5)$$

определяется из условия нормировки

$$\alpha = 2\pi \int_0^\infty n(r) dr, \quad (6)$$

выражающего тот факт, что число электронов на единицу длины остается постоянным и равным α . $\Gamma(x)$ —гамма-функция. Эффективный радиус находится из (3) после подстановки (4) (с учетом (5)) и имеет вид:

$$r_c = r_t \left[\ln \frac{\alpha e^2}{\Gamma(1+2/s) r_t^2 \pi^2 m v^2} \right]^{\frac{1}{s}}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что эффективный радиус достигает максимального значения

$$r_{c_{\max}} = \left(\frac{2}{s} \right)^{\frac{1}{s}} \sqrt{\frac{\alpha e^2 \exp(-2/s)}{\Gamma(1+2/s) \pi^2 m v^2}} \quad (8)$$

в момент

$$\tau = \frac{\alpha e^2 \exp(-2/s)}{\Gamma(1+2/s) 4\pi^2 m v^2 D}. \quad (9)$$

Время жизни переуплотненного следа, определяемое из условия $r_c = 0$, будет равно

$$\tau_{\text{ж}} = \frac{\alpha e^2}{\Gamma(1+2/s) 4\pi^2 m v^2 D}. \quad (10)$$

Введем обозначение

$$\Theta = \alpha e^2 / 4\pi^2 m v^2 D. \quad (11)$$

Тогда для случая экспоненциального распределения $|s| = 1$ получим:

$$n = \frac{\alpha}{2\pi r_t^2} \exp\left(-\frac{r}{r_t}\right); \quad (12)$$

$$r_c = r_t \ln \frac{\Theta}{2t}; \quad (13)$$

$$\tau_{\text{ж}} = 0,5 \Theta; \quad \tau = 0,07 \Theta; \quad r_{c_{\max}} = 0,14 r_\Theta. \quad (14)$$

Для гауссовского распределения ($s = 2$)

$$n = \frac{\alpha}{\pi r_t^2} \exp\left[-\left(\frac{r}{r_t}\right)^2\right]; \quad (15)$$

$$r_c = r_t \sqrt{\ln \frac{\Theta}{t}}; \quad (16)$$

$$\tau_{\text{ж}} = \Theta; \quad \tau = 0,37 \Theta; \quad r_{c_{\max}} = 0,61 r_\Theta; \quad (17)$$

для $s = 16$

$$n = \frac{1,06}{\pi r_t^2} \exp\left[-\left(\frac{r}{r_t}\right)^{16}\right]; \quad (18)$$

$$r_c = r_t \left[\ln \frac{1,06 \Theta}{t} \right]^{1/16}; \quad (19)$$

$$\tau_{\text{ж}} = 1,06 \Theta; \quad \tau = 0,94 \Theta; \quad r_{c_{\text{макс}}} = 0,82 r_{\Theta} \quad (20)$$

и, наконец, для случая линейного распределения

$$n = \begin{cases} \frac{3\alpha}{\pi r_t^2} \left(1 - \frac{r}{r_t} \right) & (r \leq r_t); \\ 0 & (r > r_t) \end{cases} \quad (21)$$

$$r_c = r_t \left(1 - \frac{t}{3\Theta} \right); \quad (22)$$

$$\tau_{\text{ж}} = 3\Theta; \quad \tau = \Theta; \quad r_{c_{\text{макс}}} = 0,33 r_{\Theta}. \quad (23)$$

На рис. 1 приведен временной ход эффективного радиуса, а на рис. 2— зависимость от времени разности хода $\Delta r_c = r_{c_{2\nu}} - r_c$, радио-

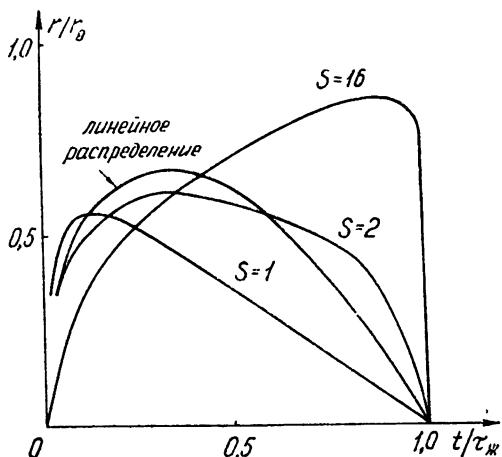


Рис. 1.

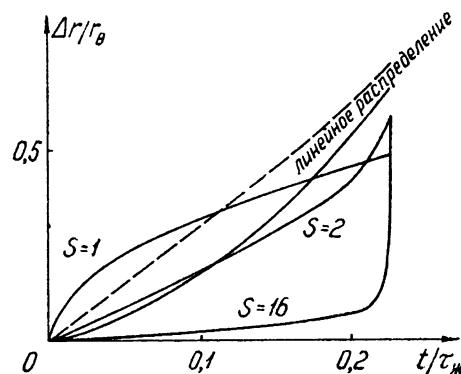


Рис. 2.

Рис. 1. Зависимость эффективного радиуса (в относительных единицах) от времени для различных распределений.

Рис. 2. Временной ход разности эффективных радиусов (в относительных единицах) на двух частотах для различных распределений.

частот ν и 2ν . Масштабы по осям деформированы таким образом, чтобы исключить влияние условий эксперимента.

При экспериментальном определении разности глубин проникновения различных радиочастот измеряется запаздывание сигнала на частоте 2ν по отношению к сигналу на частоте ν за счет разности хода, вызываемого разницей эффективных радиусов на этих частотах. Но время запаздывания зависит еще и от групповой скорости U сигнала в ионизированном следе [4], которая равна

$$U = C \sqrt{1 - \frac{ne^2 n(r)}{\pi m \nu^2}}. \quad (24)$$

Поэтому Δt выразится интегралом

$$\Delta t = 2 \int_{r_{c_{2v}}}^A \frac{dr}{U(r; 2v)} - 2 \int_{r_{cv}}^A \frac{dr}{U(r; v)}, \quad (25)$$

где A —достаточно удаленная от оси следа точка, в которой $U(A; 2v) \approx U(A; v)$.

Дополнительное замедление радиоволн во внешней части следа дает эффект кажущегося увеличения разницы критических радиусов. Временной ход этой "кажущейся" разницы отмечен пунктирной линией на рис. 2 для случая гауссовского распределения ($s = 2$). Нетрудно видеть, что этот эффект приведет к более сильной зависимости временного хода запаздывания от характера распределения электронов по радиусу следа, что облегчает возможность его экспериментального изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Feinstein, J. Geophys. Res., **56**, 37 (1951).
2. N. Herlofson, Arkiv. For. Fysik, **3**, 247 (1951).
3. T. R. Kaiser, R. L. Closs, Phil. Mag., **43**, 1 (1952).
4. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Попалекси, Авт свидетельство, **27**, 639 (1930)
5. Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Файнберг, Распространение радиоволн, ГИТГЛ, М., 1953.

Казанский государственный университет

Поступила в редакцию
3 февраля 1961 г.

ON THE RADIAL ELECTRON DISTRIBUTION IN A METEOR TRAIL

V. V. Sidorov, R. Yu. Phakhrutdinov

Two-frequency method of radiodetection of meteors is discussed from the point of view of its application to the estimation the distribution law of radial electron density in a meteor trail. In the case of overdense meteor trails the incident wave cannot penetrate into the central region of the trail, the latter being similar a metallic cylinder with some effective radius depending on the radiation frequency. A method is suggested for calculating the effective radii difference at multiple frequencies. It is shown that the time dependence of the difference is closely connected with radial distribution of electron density.

ОБ ИСКАЖЕНИИ МОДУЛЯЦИИ МОЩНЫХ РАДИОВОЛН ПРИ ИХ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ИОНОСФЕРЕ (ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ). II

И. М. Виленский

Приводятся дальнейшие результаты экспериментального исследования искажения модуляции радиоволн при их распространении в ионосфере. Обсуждаются некоторые вопросы методики исследования.

В работе [1] были приведены предварительные результаты экспериментального исследования явления „самовоздействия“, полученные в период с 24. IV. 1959 по 18. VI. 1959. При этих измерениях использовался мощный передатчик с частотой 236 кгц, который давал несущую, модулированную по амплитуде чистыми тонами звуковой частоты. Глубина модуляции измерялась вблизи передатчика и поочередно в 3-х промежуточных пунктах, удаленных от передатчика на расстоянии 400, 750 и 1500 км. Кроме того, все передачи принимались в четвертом пункте, удаленном на расстояние 2100 км. Все пункты были расположены приблизительно на одной широте.

К числу наиболее интересных фактов, обнаруженных при этих измерениях, следует отнести, во-первых, значительную величину демодуляции (до $15 \div 17\%$) и, во-вторых, нелинейность зависимости величины демодуляции от мощности передатчика. Качественно полученная при этих измерениях зависимость демодуляции от мощности передатчика согласуется с теоретическими результатами [2].

Следует отметить, что поскольку при указанных измерениях были выбраны сравнительно длинные трассы, то искажения модуляции из-за нелинейности ионосферы частично маскировались, особенно при больших значениях частоты модуляции, искажениями из-за интерференции нескольких лучей, приходящих в пункты измерения разными путями и, следовательно, имеющих разные фазы модуляции.

В дальнейшем еще один цикл исследований демодуляции был проведен на сравнительно длинной трассе, расположенной вблизи широтного круга (см. раздел 1), и несколько циклов — на более коротких трассах, расположенных примерно вдоль меридiana (см. раздел 2). Выбор меридианного направления был обусловлен тем, что в этом случае при теоретическом анализе экспериментальных данных можно с достаточной точностью пользоваться формулами квазипродольного распространения (см., например, [3]). При этом нетрудно получить приближенные формулы для величины демодуляции с учетом влияния магнитного поля Земли. В случае же поперечного распространения это сделать, видимо, значительно сложнее.

1. ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕМОДУЛЯЦИИ НА «ДЛИННОЙ» ТРАССЕ

При измерениях использовался передатчик средней мощности с длиной волны 1500 м. Измерения глубины модуляции производились с помощью аппаратуры, описанной в [1]. Один измерительный пункт находился в непосредственной близости от передатчика, по показаниям установленного в нем модулометра определялась глубина модуляции волн, излучаемых передатчиком. Остальные измерительные пункты

были расположены примерно вдоль широтного круга и удалены от передатчика на расстояния 400 км (пункт 1), 800 км (пункт 2) и 1400 км (пункт 3).

Сеансы проводились в ночное время с 8. X. 1959 по 31. X. 1959. Всего за указанное время было проведено 24 сеанса; в пункте 1 принималось радиоизлучение в течение первых 12 сеансов, в пункте 2 — во время остальных 12 сеансов, а в пункте 3 — в период всех 24 сеансов. Во время каждого сеанса давалась несущая, модулированная по-очередно звуковыми частотами $F=40, 80, 160$ и 600 гц при полной и при половинной мощностях.

Основные результаты, полученные при измерениях на рассматриваемой трассе, могут быть сформулированы следующим образом.

1) В пункте 1 на всех частотах в подавляющем большинстве случаев было обнаружено уменьшение модуляции до $78-67\%$ от начальных 80%. При этом изменения модуляции при $F=40 \text{ гц}$ оказались меньшими, чем при $F=600 \text{ гц}$. В разные дни эти изменения были существенно различны, тогда как на передатчике глубина модуляции менялась весьма незначительно.

2) В пункте 2 наблюдалось не только уменьшение, но и возрастание модуляции. Последнее имело место практически на всех частотах примерно в 30% случаев.

3) В пункте 3 на частотах 80, 160 и 600 гц также довольно часто наблюдалось возрастание модуляции, а на частоте 40 гц — значительная демодуляция (до 45%).

4) Ясно выраженной зависимости величины демодуляции от мощности передатчика обнаружено не было: в некоторых случаях имело место некоторое уменьшение демодуляции при уменьшении мощности, в других — наоборот.

Сказанное свидетельствует о том, что нелинейные искажения как в удаленных, так и в ближе расположенных пунктах приема были в значительной мере замаскированы интерференционными искажениями*.

Интерференционные искажения модуляции в рассматриваемом случае оказались выраженным значительно сильнее, чем во всех других выполненных нами измерениях. Например, при измерениях, результаты которых изложены в [1], в ближайшем приемном пункте, удаленном от передатчика также на 400 км, интерференционные искажения модуляции были выражены слабо.

Мы не имеем возможности дать исчерпывающее объяснение резкого проявления интерференционных искажений модуляции в рассматриваемом случае, но одну из возможных причин хотелось бы отметить. Дело в том, что передатчик был расположен в гористой местности и это моглоказать существенное влияние на характер распространения волн, излучаемых передатчиком. Имея это в виду, мы при дальнейших измерениях избегали пользования передатчиками, расположенными в непосредственной близости к горам.

* В работе [1] Карлеваро развивает теорию, согласно которой в результате само-воздействия может иметь место не только уменьшение модуляции, но и при некоторых условиях — возрастание ее. Известно (см., например, [5]), что возрастание модуляции может иметь место только при условии $\omega^2 < \omega_{\text{эфф}}^2$, где ω — несущая круговая частота, $\omega_{\text{эфф}}$ — эффективное число соударений. Последний случай в [1] не рассматривался. (Результаты работы [1] следует считать ошибочными, так как в ней используется «квазистационарный» метод рассмотрения явления, на недостаточность которого неоднократно указывалось в литературе (см., например, [3]).) В работе [6] приводятся результаты экспериментального исследования изменений модуляции, полученные на сравнительно длинных трассах. Нам представляется, что наблюдаемые в [6] изменения модуляции в значительной мере обусловлены интерференционными искажениями.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕМОДУЛЯЦИИ НА ВОЛНЕ 2000 м

На передатчике с длиной волны 2000 м было проведено 3 цикла измерений: первый цикл — с 30 августа по 7 сентября 1959 г., второй — с 15 июля по 1 августа 1960 г. и третий — с 9 декабря по 19 декабря 1960 г.

Остановимся прежде всего на первом цикле измерений. За период с 30 августа по 7 сентября 1959 г. было произведено 5 сеансов передач в ночное время. Во время каждого сеанса, как и раньше, давалась несущая, модулированная поочередно частотами 40, 80, 160 и 600 гц при мощности 100% и то же самое — при мощности 50%. Передачи принимались одновременно в двух пунктах, расположенных примерно вдоль параллели и удаленных от передатчика на расстояниях 600 км (пункт 1) и 1700 км (пункт 2).

Прием в пункте 1 производился на рамочную антенну, настроенную на прием пространственного луча, в пункте 2 — на ненаправленную антенну. Для измерений глубины модуляции использовалась аппаратура, описанная в [1].

Результаты измерений приведены в таблице 1, где $\Delta M/M$ — среднее относительное изменение модуляции за 1 сеанс (во время сеанса на каждой частоте производилось 15–20 замеров глубины модуляций). Положительным $\Delta M/M$ соответствует уменьшение глубины модуляции, отрицательным — возрастание. На рис. 1, 2 приведены графики зависимости $\Delta M/M$ от частоты модуляции $F = \Omega/2\pi$, построенные по средним значениям всех сеансов.

Таблица 1

Значения демодуляции $\Delta M/M$ (в %) при измерениях на волне 2000 м (первый цикл).

Дата	Мощность (в %)	Пункт 1				Пункт 2			
		$F=40$ (гц)	$F=80$ (гц)	$F=160$ (гц)	$F=600$ (гц)	$F=40$ (гц)	$F=80$ (гц)	$F=160$ (гц)	$F=600$ (гц)
30. VIII 1959	100	—	17,6	13,9	—	23,7	2,0	23,1	17,9
	50	19,0	—	3,3	6	34,8	25,6	24,6	14,0
31. VIII 1959	100	19,3	15,5	8,3	-5,1	11,7	20,7	0,9	17,0
	50	17,2	13,6	-1,8	-0,6	16,2	12,7	14,4	24,7
4. IX 1959	100	18,0	8,0	11,8	1,9	28,6	11,4	10,7	19,5
	50	20,0	16,2	-2,8	—	25,2	13,8	25,0	29,6
6. IX 1959	100	9,1	15,1	13,6	-7,4	8,2	16,8	5,7	14,6
	50	19,4	14,5	1,8	-9,1	19,3	9,7	0	19,2
7. IX 1959	100	20,2	12,2	8,8	1,5	12,9	17,5	12,2	25,4
	50	15,1	11,0	9,8	-3,7	—	—	—	—
Среднее значение $\Delta M/M$	100	16,6	13,7	11,3	-2,3	17,0	13,7	10,5	18,9
	50	18,1	13,8	2,1	-1,9	23,9	15,5	16,0	21,9

Из таблицы 1 и рис. 1, 2 можно сделать вывод о том, что в данном случае интерференционные явления играли хотя и меньшую, чем в предыдущем случае, но все же заметную роль. Действительно, зависимость демодуляции от частоты модуляции качественно получается такой же, как это следует из теории нелинейных эффектов (уменьшение демодуляции с ростом частоты модуляции), если пренебречь значениями демодуляции при $F = 600$ гц (на этой частоте, естественно, интерференционные искажения модуляции должны сказываться значительно сильнее). Однако отсутствие явно выраженной зависимости

демодуляции от мощности свидетельствует о том, что даже в пункте 1 изменения модуляции обусловлены не только нелинейностью ионосферы, но и интерференцией. Большие значения демодуляции в пункте 2 также, очевидно, являются следствием интерференционных искажений.

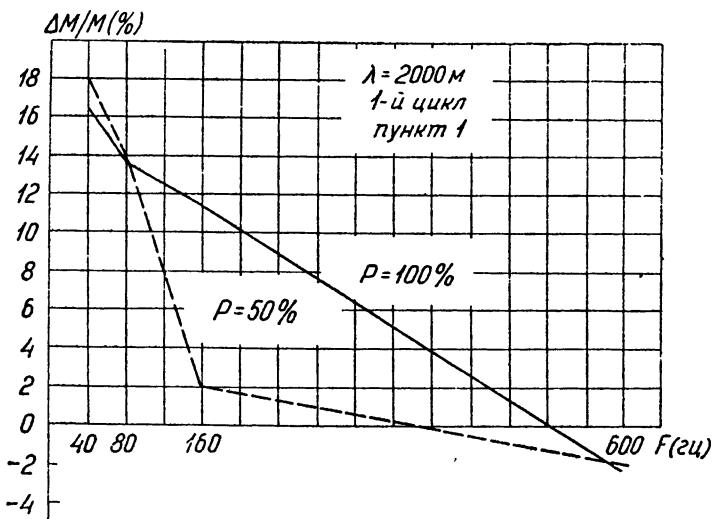


Рис. 1.

Второй цикл измерений на данной частоте был проведен с 15 июля по 1 августа 1960 г. Пункты приема были расположены вдоль мери-

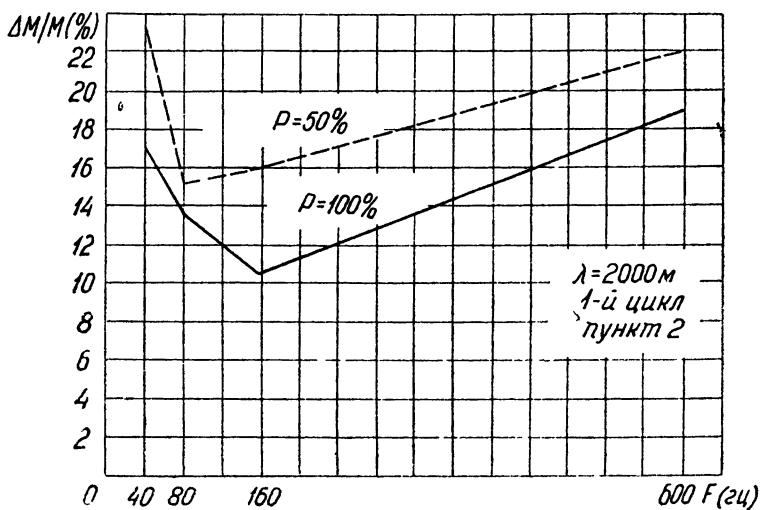


Рис. 2.

диана на расстояниях 140 км (пункт 1) и 230 км (пункт 2). В течение указанного периода было произведено 9 сеансов измерений. Программа каждого сеанса была следующей: а) сначала передавались чистые тона модуляции по 3 минуты на каждую частоту (основной сеанс); частоты те же, что и в первом цикле, б) после этого производилась в течение 12 минут передача с частотой модуляции 80 гц (дополнительный сеанс).

Каждый сеанс начинался примерно за 40 мин до восхода Солнца на поверхности Земли и, следовательно, распространение радиоволн во время сеансов происходило по уже освещенной Солнцем ионосфере. Целью первых 12 минут было, как и выше, изучение зависимости демодуляции от частоты модуляции, оставшиеся 12 минут использовались для выяснения зависимости демодуляции от времени. К сожалению, по независящим от нас причинам, эти измерения нельзя было сделать более длительными.

Мощность во время измерений поддерживалась постоянной.

Результаты измерений приведены в таблице 2 и на рис. 3, 4. В таблице 2 при $F=80$ гц в первом столбце приведены данные, полученные во время „основного“ сеанса, а в остальных четырех столб-

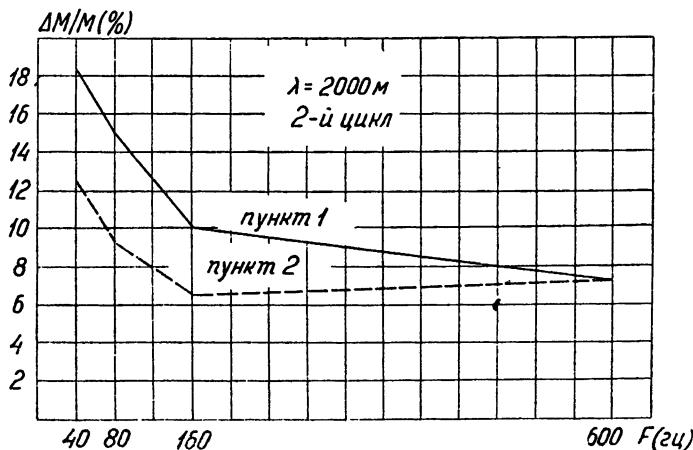


Рис. 3.

цах—усредненные за каждые 3 минуты данные „дополнительного“ сеанса (как во время „основного“, так и во время „дополнительного“ сеансов производилось 4–5 измерений в минуту).

Приведенные данные характерны, прежде всего, тем, что как во время каждого сеанса, так и от одного сеанса к другому демодуляция мало меняется. Например, лишь в одном случае (25. VII. 1960 г. в пункте 1 при $F=160$ гц) $\Delta M/M$ составляла 5,9% при $(\Delta M/M)_{ср} = 9,9\%$, в остальных же случаях отклонения от среднего были значительно меньше. Это свидетельствует о том, что в данном случае, в отличие от рассмотренных выше, интерференционные искажения

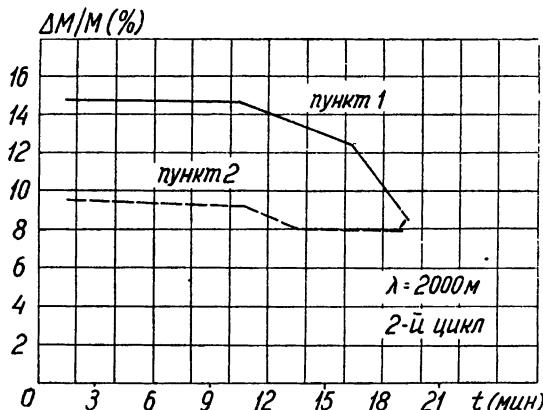


Рис. 4.

Таблица 2

Значения демодуляции $\Delta M/M$ (в %) при измерениях на волне 2000 м (второй цикл).

Дата	П у н к т 1					П у н к т 2						
	$F=40$ (2u)		$F=80$ (2u)			$F=40$ (2u)		$F=80$ (2u)			$F=160$ (2u)	
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
15. VII 1963	19,5	15,9	16,7	13,9	12,2	9,3	9,2	7,6	12,1	9,2	11,1	8,5
17. VII 1963	18,0	15,7	13,2	12,5	10,4	6,7	9,2	6,5	13,5	8,9	8,6	8,4
18. VII 1963	18,0	15,2	14,4	10,6	8,8	7,5	11,1	7,8	12,2	9,4	7,7	8,3
22. VII 1963	17,9	14,1	13,2	14,0	13,2	8,8	12,3	6,9	12,3	9,3	7,9	8,3
24. VII 1963	18,0	16,6	14,3	13,4	13,1	8,1	9,9	7,1	12,3	9,9	8,9	7,7
25. VII 1963	18,0	12,9	15,4	15,3	11,1	7,5	5,9	8,6	12,0	9,3	10,3	8,8
29. VII 1963	18,5	13,7	13,5	13,5	12,6	7,2	10,9	10,1	13,8	10,6	9,5	8,4
31. VII 1963	19,6	16,0	14,8	13,5	14,9	10,0	10,8	6,7	14,6	9,4	9,2	7,1
01. VIII 1963	18,3	15,2	16,5	15,4	16,0	11,7	10,2	5,9	12,8	10,6	9,5	8,2
Среднее значение $\Delta M/M$	18,3	15,0	14,7	13,6	12,5	8,5	9,9	7,5	12,8	9,6	9,2	8,1

6,5
7,5

5,4

6,4

5,6

5,5

6,7

7,1

7,8

6,1

5,4

9,8

7,6

9,9

модуляции играют второстепенную роль и изменения модуляции обусловлены главным образом нелинейностью ионосферы.

Рассмотрим теперь, насколько полученная экспериментально зависимость $\Delta M/M$ от частоты модуляции $F = \Omega/2\pi$ согласуется с теоретической. Согласно [5], для не очень мощных станций

$$\frac{\Delta M}{M} \simeq 2\gamma (\delta v_{\text{эфф}})^2 \left\{ \frac{1 - M^2/2}{\Omega^2 + (\delta v_{\text{эфф}})^2} + \frac{M^2}{8[4\Omega^2 + (\delta v_{\text{эфф}})^2]} \right\};$$

$$\gamma = \frac{\pi e^2 E_0^2 (\omega^2 - v_{\text{эфф}}^2)}{32\delta m k T (\omega^2 + v_{\text{эфф}}^2)^2} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{2\omega}{c} kz \right) \right\}.$$
(1)

Отсюда, пренебрегая вторым членом в фигурных скобках формулы для $\Delta M/M$ (учет его может дать лишь поправку порядка 1%), можно написать:

$$\frac{M}{\Delta M} \simeq \frac{1}{2\gamma (\delta v_{\text{эфф}})^2 \left(1 - \frac{M^2}{2} \right)} \left\{ \Omega^2 + (\delta v_{\text{эфф}})^2 \right\}.$$
(2)

Таким образом, зависимость $M/\Delta M$ от Ω^2 должна быть близка к линейной.

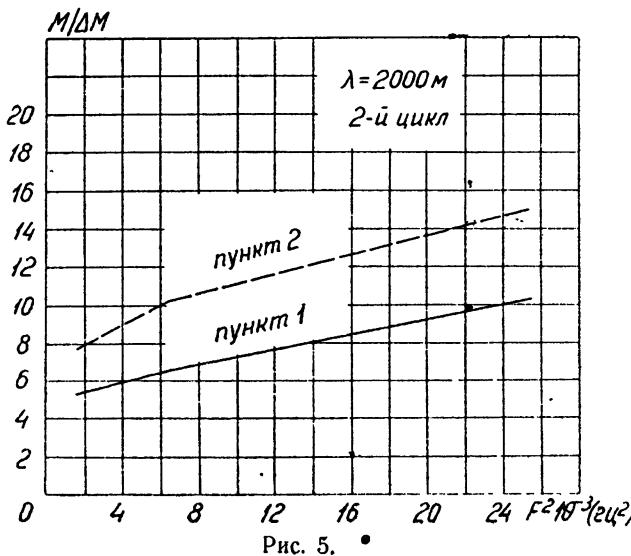


Рис. 5.

На рис. 5 приведены графики этой зависимости, построенные по экспериментальным значениям (см. таблицу 2). Можно утверждать, что экспериментальные значения демодуляции при частотах $F = 40, 80, 160$ гц для пункта 1 хорошо и для пункта 2 удовлетворительно ложатся на теоретическую кривую. По соображениям масштаба на графиках отсутствуют точки, соответствующие $F = 600$ гц. Однако следует заметить, что полученные на этой частоте значения $\Delta M/M$ заметно отличаются от теоретических. Это относится не только к пункту 2, где величина $\Delta M/M$ при $F = 600$ гц оказалась даже больше, чем при $F = 160$ гц, но и к пункту 1. Отсюда ясно, что на этой частоте даже на коротких трассах необходимо считаться с интерференционными искажениями модуляции.

Зная экспериментальные значения $\Delta M/M$, нетрудно определить величину $\delta v_{\text{эфф}}$. Действительно, согласно (2),

$$(\delta v_{\text{эфф}})^2 = \frac{(\Delta M/M)_1 \Omega_1^2 - (\Delta M/M)_2 \Omega_2^2}{(\Delta M/M)_2 - (\Delta M/M)_1}, \quad (3)$$

где $(\Delta M/M)_1$, $(\Delta M/M)_2$ — экспериментальные значения демодуляции, соответствующие частотам Ω_1 , Ω_2 . Используя экспериментальные данные (см. таблицу 2), получим для пункта 1 следующие значения (δv_0) : для частот $F=40 \pm 80 \text{ гц}$ $\delta v_{\text{эфф}}=900$; для частот $F=80 \pm 160 \text{ гц}$ $\delta v_{\text{эфф}}=-1170$; для частот $F=40 \pm 160 \text{ гц}$ $\delta v_{\text{эфф}}=1020$.

Для пункта 2 соответствующие значения $\delta v_{\text{эфф}}$ равны 890, 1120 и 1030.

В последующем цикле измерений были получены примерно такие же значения $(\delta v_{\text{эфф}})$. Малый разброс полученных значений $\delta v_{\text{эфф}}$ для разных пунктов опять-таки свидетельствует о достаточно хорошем согласии экспериментальных значений демодуляции с теорией нелинейных явлений.

Остановимся теперь на зависимости $\Delta M/M$ от времени. Из таблицы 2 и рис. 4 видно, что за время измерений (21 мин) величина $\Delta M/M$ уменьшается на $\sim 6\%$ в пункте 1, на $\sim 1,5\%$ в пункте 2. То обстоятельство, что в пункте 2 эти изменения происходят несколько медленнее, чем в пункте 1, связано, очевидно, с тем, что в последний приходят волны, отраженные от более высокой области ионосферы, раньше освещаемой Солнцем.

Как уже указывалось выше, начало измерений в данном цикле практически совпадало с восходом Солнца в области отражения радиоволн. Поскольку при наличии D -слоя следует ожидать весьма малых искажений модуляций, то можно сделать вывод о том, что образование D -слоя происходит достаточно медленно. Очевидно, что проведение более длительных измерений демодуляции после восхода Солнца могло бы дать сведения о динамике образования D -слоя.

Третий цикл измерений на волне 2000 м был проведен в зимних условиях в декабре 1960 г. Целью этих измерений было а) выяснить, изменится ли демодуляция в зимних условиях; б) повторно исследовать влияние мощности передатчика на величину демодуляции. Кроме того, была предпринята попытка измерения паразитной фазовой модуляции.

За период измерений было осуществлено 10 сеансов передач по следующей программе.

1) При мощности $P=100\%$ модуляция чистыми тонами 40, 80, 160 и 600 гц—по 3 минуты на каждую частоту.

2) То же самое при $P=50\%$.

3) Мощность $P=100\%$, модуляция чистым тоном частоты 160 гц—6 минут (для измерения паразитной фазовой модуляции).

Все измерения происходили в ночное время. Прием производился одновременно в трех пунктах, расположенных по меридиану. Первые два пункта были расположены в тех же местах, что и во втором цикле, третий—на расстоянии 300 км от передатчика.

Результаты измерений демодуляции приведены в таблице 3 и на рисунках 6, 7. Прежде всего необходимо отметить, что средняя величина демодуляции, полученная в этих измерениях, весьма мало отличается от результатов, полученных ранее на той же трассе (второй цикл). В таблице 4 приведены значения $\Delta M/M$ для второго и третьего

Таблица 3

Значения демодуляции $\Delta M/M$ (%) при измерениях на волне 2000 м (третий цикл).

Дата	Мощность (в %)	П у н к т 1				П у н к т 2				П у н к т 3			
		$F=40$ (z_u)	$F=80$ (z_u)	$F=160$ (z_u)	$F=600$ (z_u)	$F=40$ (z_u)	$F=80$ (z_u)	$F=160$ (z_u)	$F=600$ (z_u)	$F=40$ (z_u)	$F=80$ (z_u)	$F=160$ (z_u)	$F=600$ (z_u)
9. XII 1950	100 50	18,6 15,8	12,1 12,2	— —	5,8 2,2	10,7 9,3	8,7 6,2	— —	4,9 2,6	— —	— —	— —	— —
11. XII 1960	100 50	20,2 15,5	17,3 14,0	14,0 7,3	9,0 4,2	9,6 7,5	8,5 3,1	6,0 2,1	4,9 2,1	10,5 9,8	10,4 4,6	6,6 4,5	-0,5 0,3
12. XII 1960	100 50	19,4 16,2	17,2 10,6	10,0 5,0	6,0 2,1	15,0 12,7	13,0 8,1	10,6 6,2	1,2 9,9	10,5 4,6	10,2 4,5	7,1 4,5	0,6 -0,4
15. XII 1960	100 50	17,4 11,8	14,3 4,1	10,6 3,0	4,6 3,4	— —	— —	— —	— —	9,3 9,9	8,1 5,2	6,4 4,1	0,8 0,9
16. XII 1950	100 50	18,7 15,9	16,0 12,9	10,8 2,2	6,5 1,8	19,0 9,2	9,4 8,1	5,2 10,1	5,3 3,1	11,2 10,2	8,7 6,0	7,9 —	1,3 2,0
16. XII 1960	100 50	19,6 17,3	16,8 9,0	7,2 2,0	6,0 1,8	16,6 12,7	9,6 8,4	— —	-1,1 1,3	-4,7 4,7	10,8 11,1	8,5 7,1	5,1 3,6
18. XII 1960	100 50	18,9 15,0	15,9 9,4	7,2 2,0	5,3 1,2	19,5 15,1	14,1 10,5	9,5 5,1	2,7 -0,5	10,5 9,8	8,5 4,5	5,5 4,5	1,6 0,8
18. XII 1960	100 50	20,1 —	15,6 6,2	8,3 2,3	6,2 2,6	21,0 —	10,0 11,0	8,0 4,3	1,9 0,4	10,7 —	5,1 5,2	6,1 6,1	0,9 0,4
19. XII 1960	100 50	18,8 16,3	14,5 9,5	11,0 3,3	5,3 1,6	10,0 9,5	10,0 8,9	6,0 6,5	5,5 2,3	9,5 9,4	9,9 4,5	7,2 5,8	0 -0,6
19. XII 1960	100 50	21,0 16,6	17,6 11,2	4,2 3,2	4,2 3,3	12,0 11,5	10,3 10,2	7,4 7,0	7,5 3,5	11,2 9,8	9,3 4,7	7,2 3,7	2,3 0,6
Среднее значение $\Delta M/M$	100 50	19,3 15,6	15,7 9,9	9,3 3,4	5,9 2,4	14,8 10,9	10,4 8,7	6,5 5,7	3,2 2,7	10,5 10,0	8,9 5,2	6,5 4,6	0,9 0,5

циклов. Из таблицы видно, что лишь при $F=600$ гц в пункте 2 имела место заметная разница в величинах демодуляции, но это опять-таки следует отнести за счет интерференционных эффектов.

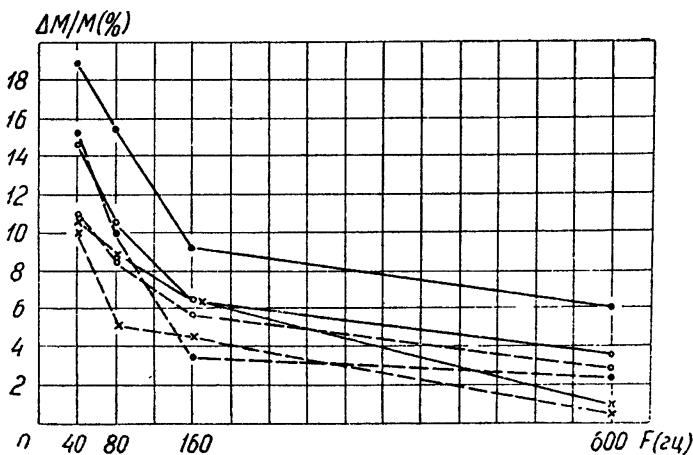


Рис. 6. Зависимость $\Delta M/M$ от F ($\lambda = 2000$ м, 3-й цикл:
 $P=100\%$ —сплошная линия, $P=50\%$ —пунктир);
●—пункт 1; ○—пункт 2; ×—пункт 3.

Небольшое различие в величинах $\Delta M/M$ в этих двух циклах измерений показывает, что состояние нижней ионосфера летом сразу

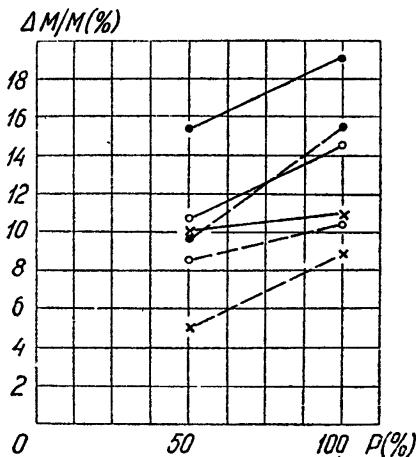


Рис. 7. Зависимость $\Delta M/M$ от P ($\lambda = 2000$ м.
3-й цикл; $F=40$ гц — сплошная линия;
 $F=80$ гц — пунктир);
●—пункт 1; ○—пункт 2, ×—пункт 3.

же после восхода Солнца мало отличается от состояния ионосферы зимой в ночное время. (Заметим, что величина $\Delta M/M$, как показывают

Таблица 4
Средние значения демодуляции во втором и третьем циклах
($\lambda = 2000$ м; $P = 100\%$).

	Пункт 1				Пункт 2			
	$F=40$ (гц)	$F=80$ (гц)	$F=160$ (гц)	$F=600$ (гц)	$F=40$ (гц)	$F=80$ (гц)	$F=160$ (гц)	$F=600$ (гц)
второй цикл	18,3	15,0	9,9	7,5	12,8	9,6	6,5	7,5
третий цикл	19,3	15,7	9,3	5,9	14,8	10,4	6,5	3,2

численные расчеты, очень чувствительна к значениям ионосферных параметров.)

Как видно из таблицы 3, а также из рис. 7, величина $\Delta M/M$ с изменением мощности передатчика во всех пунктах меняется значительно медленнее, чем это следует, например, из формулы (1): согласно (1), зависимость $\Delta M/M$ от E_0^2 и, следовательно, от мощности P должна изображаться прямой, проходящей через начало координат. Мы имели возможность получить только два значения зависимости $\Delta M/M$ от E_0^2 ; однако ясно видно, что эти точки и начало координат не лежат на прямой. Демодуляция с изменением мощности возрастает медленнее, чем это следует из формул, полученных с учетом нелинейности в первом приближении.

Следует заметить, что качественно экспериментальная зависимость $\Delta M/M$ от P согласуется с теоретическими результатами, полученными в [2]. Более детальное количественное обсуждение этих результатов мы надеемся привести в следующей статье, где будут приведены дополнительные данные о зависимости $\Delta M/M$ от P .

Обсудим теперь полученную в рассматриваемом цикле зависимость демодуляции от частоты модуляции. Из таблицы 3 и из рис. 6 видно, что во всех пунктах и при обоих значениях мощности величина $\Delta M/M$ уменьшается с ростом частоты модуляции, что согласуется качественно с формулой (1).

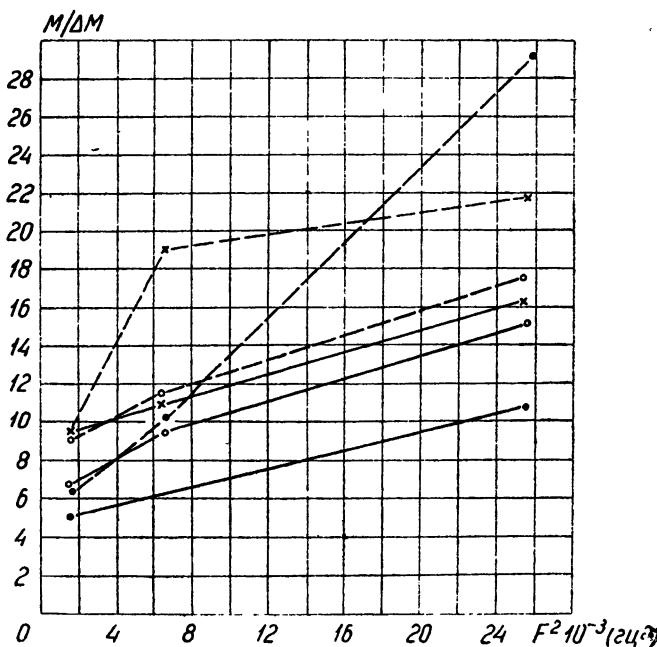


Рис. 8. Зависимость $M/\Delta M$ от F^2 ($\lambda = 2000$ м, 3-ий цикл; $P=100\%$ — сплошная линия; $P=50\%$ — пунктир);
● — пункт 1; ○ — пункт 2; × — пункт 3.

На рис. 8 приведена зависимость между величиной $M/\Delta M$ и F^2 , которая, как уже указывалось выше, согласно формуле (2), должна быть линейной. Для пункта 1 эта линейность, особенно при $P=100\%$, явно имеет место, для пункта 2 отклонение от линейности также невелико, тогда как для пункта 3 при $P=100\%$ линейность сохраняется, а при $P=50\%$ — резко нарушается. Нарушение линейности, особенно

в пункте 3, следует отнести за счет интерференционных изменений модуляции.

Согласно (2), наклон прямой, изображающей зависимость между $M/\Delta M$ и $F^2 = (\Omega/2\pi)^2$, зависит от напряженности поля ($\gamma \sim E_0^2 \sim P$ в знаменателе) и от величины $\delta v_{\text{эфф}}$. Даже при линейной зависимости между $\Delta M/M$ и P (а мы уже убедились, что эта зависимость более слабая) тангенс угла наклона прямых для каждого пункта должен изменяться в 2 раза. Согласно же рис. 8 в пункте 1 он меняется при переходе от $P=100\%$ к $P=50\%$ значительно сильнее. Следовательно, величина $\delta v_{\text{эфф}}$ также не остается при этом неизменной. Это подтверждается конкретными расчетами величины $\delta v_{\text{эфф}}$, проведенными по формуле (3) с помощью экспериментальных данных таблицы 3. (При этом значения $\Delta M/M$ при $F=600$ гц не использовались по причинам, указанным выше.) Для пункта 1 получены следующие результаты: $\delta v_{\text{эфф}} \approx 900$ при $P=100\%$ и $\delta v_{\text{эфф}} \approx 470$ при $P=50\%$. Столь разные значения $\delta v_{\text{эфф}}$ и, следовательно, $v_{\text{эфф}}$ при разных мощностях (величина δ вряд ли может меняться существенно) свидетельствуют о том, что в данном случае имеет место значительное изменение средней тепловой скорости ионосферных электронов под действием радиоволн*.

Для пункта 2 величина $\delta v_{\text{эфф}}$ равна 850 ± 1000 как при $P=1000\%$, так и при $P=50\%$. Отсутствие существенных изменений $\delta v_{\text{эфф}}$ с изменением мощности в пункте 2 обусловлено тем, что средняя напряженность поля радиоволн в ионосфере в этом случае заметно меньше, чем в пункте 1. Большее же значение $\delta v_{\text{эфф}}$ при $P=50\%$ в пункте 2 по сравнению с пунктом 1 связано с тем, что в пункт 2 приходят радиоволны, отраженные от более низкой области ионосферы. В пункте 3 изменений $\delta v_{\text{эфф}}$ с изменением мощности не было обнаружено.

Одновременно с изменением глубины амплитудной модуляции в данном цикле была предпринята попытка измерения возникающей из-за нелинейности ионосферы паразитной фазовой модуляции [5]. Принцип работы разработанных для этой цели фазометров описан в [1]. Один комплект фазометров располагался недалеко от передатчика, второй — в пункте 1. Во время измерений оказалось, что индекс паразитной фазовой модуляции в обоих пунктах по порядку величины одинаков. Очевидно, это обусловлено наличием некоторой паразитной модуляции в передатчике, избавиться от которой практически невозможно. Поэтому исследования паразитной фазовой модуляции, возникающей из-за эффекта „самовоздействия“, нами были прекращены,

Необходимо, однако, заметить следующее. При взаимодействии двух радиоволн в ионосфере наряду с появлением паразитной амплитудной модуляции должно иметь место и возникновение фазовой модуляции у „слабых“ немодулированных волн [8]. В этом случае экспериментальное изучение паразитной фазовой модуляции должно быть более простым, чем ее изучение при „самовоздействии“. Особенно важным представляется исследование паразитной фазовой модуляции

* Как указывалось, зависимость демодуляции от мощности в наших опытах оказалась нелинейной. Это обстоятельство, а также наличие заметного изменения скоростей электронов, показывают, что напряженность поля в ионосфере в рассматриваемом случае была настолько велика, что развитая в [5] теория, основанная на учете нелинейности в первом приближении, оказалась недостаточной. Тем не менее, при анализе зависимости демодуляции от частоты модуляции мы пользуемся формулами, полученными в [5]. Дело в том, что зависимости демодуляции от частоты модуляции в «линейной» теории [5] и в «существенно нелинейной» теории [2] для не очень мощных станций, по-видимому, мало отличаются друг от друга (это, по существу, подтверждается и нашими экспериментальными данными). Заметим, что когда мы производили опыты с еще более мощным передатчиком, зависимость демодуляции от частоты модуляции уже существенно отличалась от формул, приведенных в [5].

днем, при наличии *D*-слоя, когда изучение амплитудной модуляции весьма затруднительно из-за малости последней (фазометры обладают весьма большой чувствительностью).

Некоторые дополнительные результаты теоретической обработки приведенных выше экспериментальных данных будут даны в следующей статье.

Автор выражает благодарность Д. И. Шейнману и В. П. Чернышеву, разработавшим аппаратуру, использованную при измерениях, С. И. Волосникову, Б. И. Подлипалину, [Г. М. Филимонову], В. А. Кочергину, Л. Н. Ручкану, С. И. Семенову, А. И. Землякову и В. А. Тумиловичу, принимавшим участие в измерениях и в регулировке аппаратуры. Автор весьма благодарен А. В. Гуревичу за внимательное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Виленский, В. П. Чернышев, Д. И. Шейнман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 367 (1960).
2. А. В. Гуревич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 21 (1958).
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
4. M. Carlevago, Nuovo Cimento, 4, Supl. 4, serie X, 1422 (1956).
5. И. М. Виленский, Н. А. Зыкова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 543 (1959).
6. M. Cutolo, M. Cioffi, M. Grimaldi, M. Storto, Scient. Rep., № 1, Istituto di Fisica Tecnica University of Naples, № 1 (1959), № 2 (1960).
7. Д. И. Шейнман, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника (в печати).
8. И. М. Виленский, Диссертация, Горький, 1952.

Новосибирский электротехнический институт связи

Поступила в редакцию
4 июля 1961 г.

ON MODULATION DISTORTION OF STRONG RADIO WAVES PROPAGATING IN THE IONOSPHERE (experimental investigation). II

I. M. Vilenski

The further results are given of experimental research of radio waves modulation distortion when propagating in the ionosphere. Some problems of research methods are being discussed.

ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

A. A. Андронов и Г. В. Городинский

Рассматривается излучение продольных волн в изотропной среде с пространственной дисперсией. Вычислена интенсивность продольных волн, излучаемых элементарным диполем. Отмечается что излучение продольных волн значительно превосходит соответствующую величину для поперечных волн.

Вопросы, связанные с распространением электромагнитных волн в средах с пространственной дисперсией (в частности, в плазме при учете теплового движения частиц), детально рассматривались в ряде работ (см., например, [1-4]), тогда как излучение электромагнитных волн в подобных средах обсуждалось в литературе лишь в некоторых частных случаях. Так, в [4-7] рассматривалось черенковское излучение в средах с пространственной дисперсией. В данной работе мы рассмотрим также частный случай излучения электромагнитных волн в средах с пространственной дисперсией: излучение продольных волн в изотропной прозрачной среде с пространственной дисперсией*.

1. В изотропной негиротропной прозрачной среде при малой пространственной дисперсии связь между электрической индукцией \mathbf{D} и электрическим полем \mathbf{E} для процессов, зависящих от времени по закону $e^{i\omega t}$ (на частотах ω , близких к частоте ω_0 , для которой $\epsilon_0(\omega_0) = 0$; $\epsilon_0(\omega)$ —диэлектрическая проницаемость без учета пространственной дисперсии), имеет вид:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(\omega) \mathbf{E} + L_1^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} + L_2^2 \Delta \mathbf{E}. \quad (1)$$

Здесь L_1 и L_2 —параметры, абсолютная величина которых по порядку величины совпадает с характерным микроразмером среды (см. [1-3])**.

Если воспользоваться кулоновской калибровкой потенциалов электромагнитного поля, то продольное поле \mathbf{E}^e определяется лишь скалярным потенциалом φ ($\mathbf{E}^e = -\nabla\varphi$), который (для синусоидальной зависимости от времени) удовлетворяет уравнению:

$$\epsilon_0(\omega) \Delta \varphi + L^2 \Delta (\Delta \varphi) = -4\pi\rho, \quad (2)$$

в котором $L^2 = L_1^2 + L_2^2$, ρ —плотность заряда. Уравнение (2) можно записать в форме уравнения Пуассона:

$$\hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{k}) \Delta \varphi = -4\pi\rho, \quad (2a)$$

где

$$\hat{\epsilon}(\omega, \mathbf{k}) = \hat{\epsilon}_0(\omega) - L^2 \hat{\mathbf{k}}^2 \quad (3)$$

* В последнее время в работе [13] найдена сила реакции излучения при движении заряда в магнитоактивной плазме (с учетом теплового движения). Для продольных волн в изотропной плазме полученные в [13] результаты совпадают с нашими результатами.

** Чтобы не загромождать изложение, мы не пользуемся здесь продольной и поперечной диэлектрическими проницаемостями (см. [4]).

—оператор диэлектрической проницаемости среды с учетом пространственной дисперсии, имеющий определенное числовое значение для процессов, зависящих от координат и времени по закону $\exp\{i\omega t - ik\mathbf{r}\}$ (\mathbf{k} —волновой вектор, \mathbf{r} —радиус-вектор). Дисперсионное уравнение для продольных волн определяется условием $\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0$ [4].

Найдем функцию Грина уравнений (2), (2а), т. е. функцию, с помощью которой решение уравнений (2), (2а) в свободном пространстве записывается в виде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \rho(\mathbf{r}_0) d^3 r_0. \quad (4)$$

Функция $G(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению (см. [8])*

$$L^2 \{ \Delta [\Delta G(\mathbf{r}) + k_0^2 G(\mathbf{r})] \} = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad (5)$$

где $k_0^2 = \epsilon_0(\omega)/L^2$, $\delta(\mathbf{r})$ —дельта-функция. Для решения уравнения (5) воспользуемся методом Фурье. Взяв компоненту Фурье от обеих сторон уравнения (5), получим:

$$G_k = \frac{1}{2\pi^2 L^2} \frac{1}{k^2(k_0^2 - k^2)}; \\ G(\mathbf{r}) = \int G_k e^{ik\mathbf{r}} d^3 k = \frac{1}{2\pi^2 L^2} \int \frac{e^{ik\mathbf{r}} d^3 k}{k^2(k_0^2 - k^2)}. \quad (6)$$

В сферической системе координат k, Θ, φ , где направление $\Theta=0$ совпадает с вектором \mathbf{r} ,

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2 L^2} \int \frac{e^{ikr \cos \Theta} \sin \Theta dk d\varphi d\Theta}{k_0^2 - k^2} = \\ = \frac{1}{\pi L^2} \int_0^\pi \int \frac{e^{ikr \cos \Theta} \sin \Theta d\Theta dk}{k_0^2 - k^2} = \frac{2}{\pi L^2 r} \int \frac{\sin kr dk}{k(k_0^2 - k^2)}. \quad (7)$$

Интегрирование по k в (7) необходимо выполнить в комплексной области, обходя особенность подынтегрального выражения таким образом, чтобы получить расходящуюся волну**:

$$G(\mathbf{r}) = \frac{2}{\pi L^2 r} \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin kr}{k(k_0^2 - k^2)} dk + \frac{1}{2} \text{вычет} \left[\frac{\sin kr}{k(k_0^2 - k^2)} \right] \right\}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что [9]***

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1 - e^{-ikr}}{\epsilon_0(\omega) r}. \quad (9)$$

* Заметим, что непосредственное получение из уравнения (2) интегрального представления функции Грина с помощью обычного решения уравнения Пуассона и неоднородного уравнения Гельмгольца невозможно, так как в результате получается расходящееся выражение (этим замечанием мы обязаны М. А. Миллеру).

** Заметим, что пределы интегрирования по k в (7), (8) должны быть равны 0, $k_L = 2\pi/L$, поскольку соотношение (1) (а следовательно, и уравнения (2), (5)) справедливо лишь при малой пространственной дисперсии; другими словами, $\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_0(\omega) - L^2 k^2$ лишь при $k \ll k_L$ (см. [1, 4]). Однако, производя в (8) замену переменных $kr = t$ и рассматривая значения $t \gg L$, можно положить верхний предел интегрирования по t равным бесконечности. Таким образом, полученная функция $G(\mathbf{r})$ имеет смысл только в „макроскопической“ области $r \gg L$.

*** Как указал М. А. Миллер, функцию Грина (9), являющуюся линейной комбинацией функций Грина уравнений Пуассона и Гельмгольца, можно получить непосредственно, воспользовавшись тем, что левая часть уравнения (5) представляет из себя произведение операторов $(L^2 \Delta)$ и $(\Delta + k_0^2)$.

2. Интенсивность излучения продольных волн определяется плотностью потока энергии этих волн—произведением плотности энергии на групповую скорость (см. в этой связи [10]). Плотность электрической энергии в среде с пространственной дисперсией [4]

$$W = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} [\epsilon(\omega, k)] |E|^2; \quad (10)$$

для продольных волн

$$W = \frac{1}{16\pi} \omega \frac{\partial \epsilon_0(\omega)}{\partial \omega} |E|^2. \quad (11)$$

Поскольку групповая скорость продольных волн

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = - \frac{\partial \epsilon(\omega, k)}{\partial k} / \frac{\partial \epsilon(\omega, k)}{\partial \omega} = 2L^2 k / \frac{\partial \epsilon_0(\omega)}{\partial \omega}, \quad (12)$$

для плотности потока энергии получим выражение

$$\Pi = \frac{\partial \omega}{\partial k} W = \frac{1}{8\pi} \frac{L^2 \omega^2 n}{c} |E|^2, \quad (13)$$

в котором $n = ck/\omega = c\sqrt{\epsilon_0(\omega)}/\omega L$ —показатель преломления продольных волн, c —скорость света.

3. В качестве примера рассмотрим излучение продольных волн элементарным диполем (размеры диполя много меньше длины продольной волны). В этом случае дипольный момент можно записать в виде:

$$\mathbf{p}(r) = p_0 \delta(r) e^{i\omega t}. \quad (14)$$

Используя уравнение непрерывности для тока, нетрудно выразить плотность заряда ρ через дипольный момент:

$$\rho = -(p_0 \nabla) \delta(r) e^{i\omega t}. \quad (15)$$

На больших расстояниях ($r \gg \lambda = 2\pi/k$), отбрасывая члены порядка $1/r^2$ в выражениях для φ , E и члены порядка $1/r^3$ в выражении для Π , с помощью выражений (3), (9), (13) и (15) получим:

$$\varphi(r) = -ip_0 \cos \Theta_0 \frac{k_0 e^{ik_0 r}}{\epsilon_0(\omega) r}; \quad (16)$$

$$E(r) = \frac{p_0 \cos \Theta_0}{L^2 r} e^{ik_0 r} \frac{r}{r}; \quad (17)$$

$$\Pi = \frac{1}{8\pi} \frac{p_0^2 \cos^2 \Theta_0 \omega^2 n}{c L^2 r^2}, \quad (18)$$

где Θ_0 —угол между векторами p_0 и r . Как видно из соотношения (18), для продольных волн, в отличие от поперечных, плотность потока энергии в направлении, перпендикулярном вектору p_0 , равна нулю. Проинтегрировав плотность потока энергии продольных волн по поверхности удаленной сферы, для полной интенсивности излучения продольных волн получим:

$$P = \frac{p_0^2 \omega^2 n}{6c L^2}. \quad (19)$$

Отношение интенсивности дипольного излучения продольных волн к интенсивности дипольного излучения поперечных волн в среде с пространственной дисперсией на частоте ω равно*

$$\frac{P}{P_{\perp}} = \frac{c^3}{4L^3\omega^3} \approx \frac{1}{1000(L/\lambda_0)^3}; \quad \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \quad (20)$$

Для плазмы, используя известные выражения для L и n (см., например, [2]), имеем:

$$P = \frac{P_0^2 \omega^4 \sqrt{\epsilon_0(\omega)}}{18\sqrt{3} c^3 (V_T/c)^3}; \quad (19a)$$

$$\frac{P}{P_{\perp}} = \frac{1}{20(V_T/c)^3}, \quad (20a)$$

где V_T — средняя тепловая скорость электронов.

4. Из выражений (19a)–(20a) видно, что интенсивность дипольного излучения продольных волн значительно превосходит интенсивность дипольного излучения поперечных волн и неограниченно возрастает при фиксированной частоте и фиксированном дипольном моменте, когда L (или V_T) стремится к нулю**.

Возрастание интенсивности продольных волн при $L \rightarrow 0$ формально связано с тем, что, когда $L \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Заметим, что при $L \rightarrow 0$ пространственная дисперсия остается малой, так как произведение kL для фиксированной частоты не зависит от L и мало по сравнению с единицей, если при некотором $L = L_0$ справедливо условие малости пространственной дисперсии $kL_0 \ll 1$.

Существование особенности в выражении для интенсивности продольных волн при $L = 0$ указывает на ограниченность полученных результатов. Отметим факторы, которые устраняют наличие подобной особенности.

Прежде всего, ограничение может быть связано с невозможностью обращения L в нуль. Действительно, для твердых тел и жидкостей $L \sim a$, где a — атомный или молекулярный размер***. В плазме при абсолютной температуре $T \rightarrow 0$ наступает вырождение: в вырожденной плазме V_T и L не зависят от T [12]. Однако, если $T \rightarrow 0$, ограничение роста интенсивности обычно наступает, когда $T \gg \Theta$, где Θ — температура вырождения: при $T \rightarrow 0$ нарушается газокинетическое приближение для плазмы, в котором L равно дебаевскому радиусу D . В условиях, когда $D \leq N^{-1/3}$ (где N — число электронов в 1 см³), возможно, что L становится порядка $N^{-1/3}$; однако этот вопрос требует дополнительного исследования.

С другой стороны, рост интенсивности ограничивается поглощением. В дисперсионном уравнении для продольных волн

$$\epsilon(\omega, k) = 0, \quad (21)$$

* Учет пространственной дисперсии для поперечных волн приводит лишь к незначительным поправкам, которыми мы пренебрегаем.

** Аналогичная ситуация имеет место для теплового излучения продольных волн: интенсивность теплового излучения продольных волн, полученная с использованием соотношения (3), неограниченно возрастает при L (или V_T), стремящемся к нулю.

*** Мы отвлекаемся от возможной частотной дисперсии параметра L .

при малой пространственной дисперсии с учетом проводимости среды

$$\epsilon(\omega, k) = \epsilon_0(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} - L^2 k^2. \quad (22)$$

Из (21) и (22) легко показать, что коэффициент поглощения продольных волн $\mu \sim 1/L$. Такая же зависимость от L имеет место и для специфического затухания Ландау в плазме (см., например, [4]). Следовательно, при $L \rightarrow 0$ величина $\Pi \rightarrow 0$ в любой фиксированной точке пространства. Более того, если $L \rightarrow 0$ для заданных источников поля $\rho(r)$ и частоте ω из-за нарушения дипольного приближения (при $L \rightarrow 0$ длина волны $\lambda = 2\pi/k \rightarrow 0$) и указанной зависимости коэффициента поглощения μ от L , предел интегрального потока энергии продольных волн для любой поверхности, сколь угодно близкой к источнику, равен нулю, а предел величин φ и E равен продольному полю φ_0 и E_0 в среде без пространственной дисперсии с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega) = \epsilon_0(\omega) + i 4\pi\sigma/\omega$. Это легко показать, учитывая, что для достаточно малых L объем источника, дающий вклад в величину Π вблизи границы источника, пропорционален L^3 .

Для плазмы при $T \rightarrow 0$ поглощение растет, так как увеличивается эффективная частота соударений $\nu_{\text{эфф}}$ (см. [3]). Если $D \sim N^{-1/3}$, то $\nu_{\text{эфф}} \sim \omega_0$, т. е. излучение затухает на расстояниях порядка длины волны. В этом случае говорить о распространении волн, очевидно, нет смысла и выражения (13), (19), (20) оказываются неприменимыми.

Таким образом, формулы (19)–(20a) для интенсивности излучения продольных волн справедливы только при таких L , для которых справедливо условие $kl \ll 1$ (где l — размер источника), и на таких расстояниях r , чтобы выполнялись неравенства $\mu r \ll 1$ и $kr \gg 1$.

Используя полученное выше выражение для функции Грина (9), можно рассмотреть излучение продольных волн произвольным источником электромагнитного поля, помещенным в изотропную среду; однако мы не будем останавливаться на этом вопросе.

В заключение считаем своим долгом выразить благодарность В. Л. Гинзбургу за предложенную тему, а также Б. Н. Гершману, Г. Г. Гетманцеву и особенно М. А. Миллеру за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ, 34, 1593 (1958).
2. В. М. Агранович, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 35, 982 (1958).
3. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1961.
4. В. П. Силин и А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмолободных сред, Атомиздат, М., 1961.
5. В. М. Агранович и А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 35, 1171 (1958).
6. В. М. Агранович, В. Е. Пафомов, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 36, 238 (1959).
7. А. А. Андронов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 861 (1961).
8. Ф. М. Морси Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1958.
9. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
10. В. Л. Гинзбург и Б. Н. Гершман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 31 (1962); В. Л. Гинзбург, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
11. В. П. Силин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 766 (1961).
12. И. И. Гольдман, ЖЭТФ, 17, 681 (1947).
13. В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 41, 1971 (1961).

DIPOLE RADIATION OF LONGITUDINAL WAVES

A. A. Andronov and G. V. Gorodinsky

The radiation of longitudinal waves is examined in an isotropic medium with space dispersion. The intensity of longitudinal waves radiating by elementary dipole has been calculated. It is noticed that the radiation of longitudinal waves can be exceedingly great than that of the transverse waves.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВДОЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

B. B. Арсенин

Рассмотрено затухание начальных электромагнитных возмущений, распространяющихся в разреженной плазме вдоль внешнего магнитного поля. Действием магнитного поля волны пренебрегается. Обсуждается вопрос об обратимости движения во времени.

Известно, что электромагнитные волны поглощаются магнитоактивной плазмой даже в отсутствие парных столкновений между зарядами. Поглощение происходит благодаря тепловому движению частиц. В настоящей заметке мы покажем, что хотя электромагнитные возмущения по истечении достаточно большого времени и затухают, движение является обратимым. Предварительно рассмотрим затухание начальных возмущений.

1. ЗАТУХАНИЕ НАЧАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Электромагнитные волны в плазме обычно исследуются на основе линеаризованных кинетических уравнений с самосогласованными полями. Можно, однако, решить задачу о распространении поперечной волны вдоль постоянного магнитного поля, не прибегая к процедуре линеаризации, но пренебрегая действием магнитного поля волны (Сагдеев [1]). Такой подход позволяет проследить судьбу диссирируемой энергии. В работе [1] затухание возмущения рассмотрено не до конца. Мы сделаем это более детально.

Пусть ось z направлена вдоль постоянного однородного магнитного поля \mathbf{H}_0 и поперечное начальное возмущение зависит только от координаты z . Для нахождения поля воспользуемся системой уравнений, состоящей из кинетических уравнений для электронов и ионов и уравнений Максвелла. В пренебрежении столкновениями и магнитным полем волны эта система уравнений имеет вид (f_e и f_i —соответственно электронная и ионная функции распределения):

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_e}{\partial z} + \frac{e}{m} \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_0] \right) \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + v_z \frac{\partial f_i}{\partial z} - \frac{e}{M} \left(E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}_0] \right) \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = 0; \quad (2)$$

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi en}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int \mathbf{v} f_e d\mathbf{v} - \int \mathbf{v} f_i d\mathbf{v} \right]. \quad (3)$$

Примем начальные функции распределения электронов и ионов максвелловскими:

$$f_{0e} = \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2T_e} v^2 \right), \quad f_{0i} = \left(\frac{M}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{M}{2T_i} v^2 \right).$$

В начальный момент времени $t=0$ имеется электромагнитное возмущение. Рассмотрим его дальнейшее поведение. Так как парных столкновений нет, можно проследить за движением каждой частицы. Поэтому можно написать решения уравнений (1)–(2) в виде:

$$\begin{aligned} f_e &= \left(\frac{m}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2T_e} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_e)^2 \right]; \\ f_i &= \left(\frac{M}{2\pi T_i} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{M}{2T_i} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_i)^2 \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где, например, \mathbf{V}_e — скорость, приобретенная электроном в поле возмущения. Легко видеть, что

$$(V_x + iV_y)_e = \frac{e}{m} \int_0^t \mathcal{E} [\mathbf{z}(t'), t'] e^{i\omega_e(t' - t)} dt'. \quad (5)$$

Здесь $\mathcal{E} = E_x + iE_y$, $\omega_e = eH_0/mc$ — гирочастота, $\mathbf{z}(t')$ — положение в момент t' частицы, которая в момент t имеет координату \mathbf{z} и скорость \mathbf{v} . Подставляя (4) в (3), получим уравнение для определения поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi e^2 n}{mc^2} \int d\mathbf{v} f_{0e}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathcal{E} [\mathbf{z} - \mathbf{v}_z(t-t'), t'] e^{i\omega_e(t-t')} dt' + \\ &+ \frac{4\pi e^2 n}{Mc^2} \int d\mathbf{v} f_{0i}(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathcal{E} [\mathbf{z} - \mathbf{v}_z(t-t'), t'] e^{i\omega_i(t-t')} dt'. \end{aligned} \quad (6)$$

Сделав в (6) преобразование Фурье по координате и Лапласа по времени, получим следующее выражение для изображения $\mathcal{E}(k, p)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(k, p) &= [p\mathcal{E}(k)|_{t=0} + \partial\mathcal{E}(k)/\partial t|_{t=0}] \left\{ (kc)^2 + p^2 + \right. \\ &+ p\omega_0^2 \int_0^\infty \exp[-(k^2 T_e/2m)\tau^2 - (i\omega_e + p)\tau] d\tau + \\ &\left. + p \frac{m}{M} \omega_0^2 \int_0^\infty \exp[-(k^2 T_i/2M)\tau^2 - (i\omega_i + p)\tau] d\tau \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\omega_0 = (4\pi e^2 n/m)^{1/2}$ — электронная плазменная частота.

Задача сводится, таким образом, к отысканию поля $\mathcal{E}(z, t)$ по изображению (7).

Обратим внимание на то, что уравнение (6) линейно. Оно может быть получено из линейной теории с использованием линеаризации кинетического уравнения, которая, как известно, проводится при условии

$$\frac{V}{VT/m} \ll 1. \quad (8)$$

Мы же пренебрегли лишь действием магнитного поля волны, что справедливо при условии $(v/c)H \ll E$, т. е.

$$|kv| \ll |p|, \quad (9)$$

где v — тепловая скорость частиц или скорость, приобретенная ими в поле волны (в зависимости от того, что больше по порядку величины). Таким образом, область применимости линейной теории оказывается шире области, определяемой условием (8).

Ниже мы покажем, что фурье-изображение $\mathcal{E}(k, t)$ равно сумме вычетов функции $\mathcal{E}(k, p)e^{pt}$ в ее полюсах, определяемых из уравнения

$$(kc)^2 + p^2 + \frac{m}{M} \omega_0^2 p \int_0^\infty \exp \left[-\frac{k^2 T_e}{2M} \tau^2 - (i\omega_i + p)\tau \right] d\tau + \\ + \omega_0^2 p \int_0^\infty \exp \left[-\frac{k^2 T_e}{2m} \tau^2 - (i\omega_e + p)\tau \right] d\tau \equiv K(k, p) = 0. \quad (10)$$

Если пренебречь тепловым движением ($T_e = T_i = 0$), то фурье-изображение $\mathcal{E}(k, t)$ содержит 4 незатухающих волны типа $e^{p_n t}$, где p_n — корни уравнения:

$$(kc)^2 + p^2 + \frac{m}{M} \frac{\omega_0^2 p}{p + i\omega_i} + \frac{\omega_0^2 p}{p + i\omega_e} = 0.$$

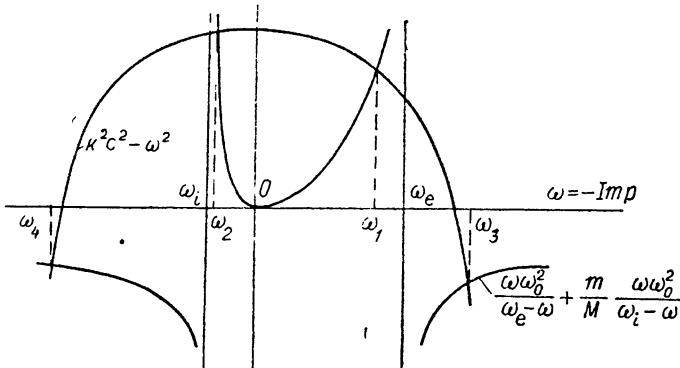


Рис. 1. Корни дисперсионного уравнения (10) при пренебрежении тепловым движением.

С учетом теплового движения корни ω_1 и ω_2 (см. рис. 1) смещаются в левую полуплоскость $\text{Re } p < 0$, так что колебания с частотами ω_1 и ω_2 становятся затухающими. Затухание происходит из-за того, что частицы со скоростями v_z , близкими к $\frac{\omega - \omega_e}{k}$ или $\frac{\omega - \omega_l}{k}$, находятся в резонансе с волной (механизм Ландау [2]). Требование, чтобы условие (9) соблюдалось, например, и для электронов, ответственных за затухание, т. е. находящихся в резонансе с волной, приводит к условию $|\omega_1| \gg |\omega_1 - \omega_e|$ [3]. Оно удовлетворяется при $(kc)^2 \gg \omega_e^2$, когда $\omega_1 \approx \omega_e$. Неравенство (9) для плазмы в целом принимает вид:

$$\frac{\omega_0^2}{(kc)^2} \frac{H_0^2}{8\pi} \gg nT_e. \quad (11)$$

Что касается волн с частотами ω_3 и ω_4 , то электроны, ответственные за их затухание, должны были бы иметь скорости порядка скорости света. Поэтому в рамках нерелятивистской теории затухание этих волн не может быть найдено.

Кроме рассмотренных 4 корней, дисперсионное уравнение (10)

имеет еще бесконечно много корней в левой полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$. Для простоты в дальнейшем тепловым движением ионов будем пренебречь ($T_i = 0$). Для определения положения корней воспользуемся асимптотическим выражением входящего в (10) интеграла вероятности J при $|p| \rightarrow \infty$ в области $3\pi/2 - \delta > \arg(p + i\omega_e) > \pi/2 + \delta$:

$$J = \frac{1}{\alpha} \exp\left(\frac{p+i\omega_e}{2\alpha}\right)^2 \int_{(p+i\omega_e)/2\alpha}^{\infty} e^{-x^2} dx \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left(\frac{p+i\omega_e}{2\alpha}\right)^2, \quad \alpha^2 = \frac{k^2 T_e}{2m}.$$

Из сравнения модулей и аргументов выражений $\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \omega_0^2 \exp\left(\frac{p+i\omega_e}{2\alpha}\right)^2$ и $\frac{1}{p} \left[(kc)^2 + p^2 + \frac{p(m/M)\omega_0^2}{p + i\omega_i} \right]$ находим, что для достаточно больших $|p_n|$, когда $|p_n/2\alpha| \gg 1$ и $|p_n|^2 \gg (kc)^2$, распределение полюсов определяется соотношениями (см. рис. 2):

$$|p_n| \simeq \sqrt{8\pi n} \alpha; \quad \arg p_n \simeq \pi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4\pi n} \ln \frac{\sqrt{8\pi n} \alpha^2}{\omega_0^2} \right). \quad (12)$$

Для сведения интеграла

$$\mathcal{E}(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{E}(k, p) e^{pt} dp \quad (13)$$

к сумме вычетов используем следующие контуры интегрирования (см. рис. 2). На участках (I) и (III) модуль

$$|\alpha J| = |\alpha \int_0^{\infty} \exp[-\alpha^2 \tau^2 - (p + i\omega_e)\tau] d\tau| = 1/A < 1,$$

на участке (II) $|\alpha J| = A$. С ростом A контур удаляется от начала координат.

Интеграл (13), понимаемый в смысле главного значения, существует, а сумма вычетов его подынтегрального выражения сходится абсолютно. Поэтому существует предел последовательности интегралов по криволинейным контурам при $A \rightarrow \infty$. Выбрав значения A так, чтобы контуры проходили в достаточноном удалении от полюсов, нетрудно убедиться в том, что этот предел равен нулю.

Таким образом, фурье-изображение $\mathcal{E}(k, t)$ представляется суммой

$$\mathcal{E}(k, t) = \sum_n \frac{p_n \mathcal{E}(k)|_{t=0} + \partial \mathcal{E}(k)/\partial t|_{t=0}}{K'(k, p_n)} e^{p_n t}. \quad (14)$$

Для полюсов, определяемых из соотношений (12), $K'(k, p_n) \simeq p_n^3/2\alpha^2$. Можно показать, что при $T_e \rightarrow 0$ вклад в электрическое поле от полюсов, расположенных в левой полуплоскости, стремится к нулю.

2. ОБРАТИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ВО ВРЕМЕНИ

В первом разделе мы рассмотрели поведение начального возмущения в плазме с максвелловским распределением частиц по скоростям.

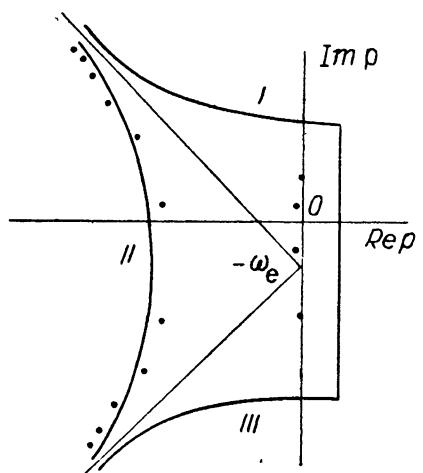


Рис. 2. Контуры интегрирования (13). Точками отмечены полюсы изображения $\mathcal{E}(k, p)$.

Начальные возмущения электромагнитного поля являются затухающими, их энергия передается частицам плазмы. Поэтому максвелловская функция распределения искажается.

Пусть, например, начальное возмущение—плоская волна ($\mathcal{E}(k)|_{t=0} = 2\pi \mathcal{E}_0 \delta(k - l)$). Тогда при $t \rightarrow \infty$ электронная функция распределения представляет собой периодическую функцию времени и координаты z :

$$f_e(z, v, t) = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2T} (v - V)^2 \right\}, \quad (15)$$

где

$$V_x + iV_y = - \frac{e}{m} e^{ilz - (ilv_z + i\omega_e)t} \sum_n \frac{p_n \mathcal{E}_0 + \partial \mathcal{E}_0 / \partial t|_{t=0}}{(ilv_z + i\omega_e + p_n) K'(l, p_n)}.$$

Периодическая зависимость функции распределения от времени объясняется тем, что к плоскости с координатой z приходят из других областей частицы, изменившие в поле возмущения компоненты скорости v_x и v_y .

Напротив, если начальное возмущение локально, то, как легко видеть из (5), при любом конечном z $\lim_{t \rightarrow \infty} (V_x + iV_y) = 0$. Однако стремление функции $f_e(z, v, t)$ к максвелловской при $t \rightarrow \infty$ не является равномерным относительно z . Искажения функции распределения уходят на бесконечность вместе с частицами, испытавшими на себе действие волн. Найти асимптотический вид функции распределения при $t \rightarrow \infty$ в этом случае сложно.

Поскольку столкновений нет, решения уравнений динамики плазмы обратимы во времени, т. е. можно представить себе такое движение, когда электромагнитное поле нарастает. В некоторый момент времени, который мы примем за нулевой, функция распределения установится максвелловской. Далее электромагнитное поле будет затухать. Конечно, такое возмущение не возникает „из ничего“. Каково бы ни было t , существует область, где функция распределения заметно отличается от максвелловской.

Оказывается, что если $\mathcal{E}(k, t)$ —фурье-изображение электрического поля $\mathcal{E} = E_x + iE_y$ при $t > 0$, то $\mathcal{E}(k, -t) = \pm \overline{\mathcal{E}(k, t)}$ (черта означает комплексное сопряжение). В самом деле, уравнение для определения $\mathcal{E}(k, t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} -(kc)^2 \mathcal{E}(k, t) - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(k, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{e, i} \omega_0^2 \int_0^t \exp \left[-\frac{k^2 T}{2m} (t-t')^2 + \right. \\ \left. + i\omega(t' - t) \right] \mathcal{E}(k, t') dt'. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $t = -\tau$, $\tau < 0$. Для нахождения $\mathcal{E}(k, \tau)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} -(kc)^2 \mathcal{E}(k, -t) - \frac{\partial^2 \mathcal{E}(k, -t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{e, i} \omega_0^2 \int_0^t \exp \left[-\frac{k^2 T}{2m} (t-t')^2 - \right. \\ \left. - i\omega(t' - t) \right] \mathcal{E}(k, -t') dt', \quad t > 0, \end{aligned}$$

которое совпадает с уравнением (16) для $\overline{\mathcal{E}(k, t)}$.

Рассмотренная задача демонстрирует обратимость решений урав-

нений динамики плазмы в отсутствие столкновений. Отметим, что движение обратимо, хотя тензор диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} имеет антиэрмитову часть. Это связано с отсутствием истинной диссипации энергии.

Автор пользуется случаем выразить благодарность В. И. Когану и Р. З. Сагдееву за предложенную тему и обсуждение. Автор благодарен также М. А. Леоновичу за интерес к работе и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Сагдеев, Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 4, М., 1958, стр. 422
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
3. Р. З. Сагдеев, Диссертация, ИАЭ, 1959.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
4 августа 1961 г.

ELECTROMAGNETIC DISTURBANCES PROPAGATION ALONG MAGNETIC FIELD IN RAREFIED PLASMA

V. V. Arsenin

The attenuation has been considered of initial electromagnetic disturbances propagating in a rarefied plasma along an external magnetic field. The action of the wave magnetic field are not taken into account. The problem of a motion reversibility in time is discussed.

ФЛЮКТУАЦИИ РАДИОВОЛН РАЗЛИЧНОЙ ЧАСТОТЫ В ТРОПОСФЕРЕ

С. Я. Брауде, Э. А. Канер

Исследована зависимость корреляции флюктуаций радиосигналов различных частот в тропосфере от частотного резонанса δ (в предельных случаях ближней и дальней зон как в свободном пространстве, так и при наличии плоской поверхности раздела). Показано, что в ближней зоне коэффициент корреляции не зависит от частотной девиации δ , тогда как в дальней зоне имеется резкая зависимость от δ в области малых значений δ . В этой области коэффициент корреляции резко падает и в некоторых случаях даже меняет знак. Сопоставление результатов расчета с некоторыми экспериментальными данными в дальней зоне подтверждает выводы теории о практической полной декорреляции сигналов при малых δ .

1. При распространении радиоволн в тропосфере возникают амплитудные и фазовые флюктуации, которые связаны со случайными изменениями диэлектрической проницаемости воздуха. Изучению влияния флюктуаций на процессы, связанные с распространением радиоволн в неограниченной среде и над плоской поверхностью раздела, посвящено много работ, основные результаты которых обобщены в монографиях и обзورах [1-4]. В этих исследованиях определены интенсивности амплитудных и фазовых флюктуаций, вычислены автокорреляционные функции, частотные спектры, корреляция флюктуаций в различных точках пространства и т. п. Все эти величины рассчитаны для радиоволн одной частоты. Менее подробно изучены вопросы о флюктуациях сигналов различных частот, распространяющихся в неоднородной среде. Такие исследования проведены лишь для дальнего тропосферного распространения [5] и для частотно-разнесенного приема при прохождении радиоволн через ионосферу [6].

Наряду с этими решенными задачами представляется целесообразным рассмотреть вопрос о флюктуациях амплитуд и фаз радиоволн различной частоты в тропосфере в зоне прямой видимости. Этому вопросу и посвящена настоящая статья.

2. Рассматривая сначала случай неограниченной среды, вычислим корреляцию флюктуаций в одной точке для двух волн различной частоты, распространяющихся в неоднородной тропосфере (при условии, что передатчики и приемник расположены на одной прямой). Примем, что для флюктуаций показателя преломления воздуха $\mu(r)$ имеет место гауссов закон корреляций:

$$B(r) = \overline{\mu(r) \mu(0)} = \mu^2 \exp(-r^2/l^2), \quad (1)$$

где l — характерный размер неоднородностей. Тогда, пользуясь результатами работы [6] в случае $n_1 = n_2 = 1 + \mu(r)$, для корреляции фаз $R_{\varphi_1\varphi_2}$ и уровней амплитуд $R_{L_1L_2}$ двух различных сигналов получим следующее выражение:

$$\left. \begin{aligned} R_{\varphi_1\varphi_2} \\ R_{L_1L_2} \end{aligned} \right\} = \frac{(1-\delta^2)^{1/2} [\delta^{-1} \operatorname{arctg} [D\delta/(1+\delta^2)] \pm \operatorname{arctg} [D/(1-\delta^2)]]}{\{[r_1 D/r_2 (1-\delta) \pm \operatorname{arctg} [r_1 D/r_2 (1-\delta)]] [D/(1+\delta) \pm \operatorname{arctg} [D/(1+\delta)]]\}}^{1/2};$$

$$R_{\varphi_1 \varphi_2} = \overline{\varphi_1 \varphi_2} / (\overline{\varphi_1^2} \overline{\varphi_2^2})^{1/2}; \quad R_{L_1 L_2} = \overline{L_1 L_2} / (\overline{L_1^2} \overline{L_2^2})^{1/2}; \\ L = \ln (A/A_0).$$

Здесь $r_1, r_2 (r_2 < r_1)$ — длины трасс передатчиков с частотами ω_1 и ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) до общей точки приема, в которой определяются $R_{\varphi_1 \varphi_2}$, $R_{L_1 L_2}$,

$$\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2, \quad \delta = (\omega_2 - \omega_1)/2\omega, \quad D = 2\lambda r_2/\pi l^2, \\ \lambda = 2\pi c/\omega.$$

Из (2) получаем для ближней зоны ($D \ll 1$):

$$R_{\varphi_1 \varphi_2} = (r_2/r_1)^{1/2}, \quad R_{L_1 L_2} = (r_2/r_1)^{3/2}. \quad (4)$$

Как видно из (4), в ближней зоне коэффициент корреляции фаз и уровней определяется только длинами трасс и не зависит от частоты сигналов [7].

В дальней зоне ($D \gg 1$) результат оказывается иным:

$$R_{\varphi_1 \varphi_2} = R_{L_1 L_2} = (r_2/r_1)^{1/2} \operatorname{arctg} [D\delta/(1-\delta^2)]/[D\delta/(1-\delta^2)]. \quad (5)$$

Из (5) следует, что в зависимости от значения частотного разноса δ величины $R_{\varphi_1 \varphi_2}$ и $R_{L_1 L_2}$ могут даже при $r_1 = r_2$ значительно отличаться

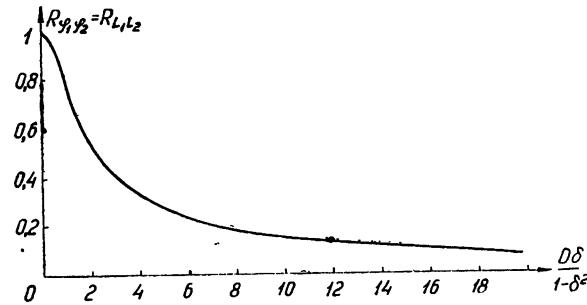


Рис. 1. Зависимость коэффициентов корреляции фаз и уровней амплитуд в свободном пространстве от частотного разноса δ при $r_1 = r_2$.

от единицы. На рис. 1 приведена зависимость $R_{\varphi_1 \varphi_2}$ и $R_{L_1 L_2}$ от величины $D\delta/(1-\delta^2)$ при $r_2 = r_1$.

Как следует из (5) и видно из рис. 1, резкая декорреляция двух сигналов различных частот наступает при таком относительном частотном разносе δ_0 , когда

$$\delta_0 \sim D^{-1}; \quad (6)$$

поскольку $D \gg 1$, величина $\delta_0 \ll 1$.

Таким образом, в неоднородной среде, где показатель преломления не зависит от частоты, в дальней зоне уже при небольшом частотном разносе возникает декорреляция амплитуд и фаз сигналов разных частот, распространяющихся вдоль одной и той же трассы. Физически этот эффект связан с тем, что в дальней зоне проявляется дифракция радиоволн на неоднородностях тропосферы, существенно различная на разных частотах.

Хотя прямых экспериментов, подтверждающих наличие в дальней зоне декорреляции амплитуд и фаз сигналов двух частот с разносом $\delta = \delta_0$, в литературе нам обнаружить не удалось, имеются косвенные

указания, свидетельствующие о наличии такого эффекта. В работе [8] сообщается об измерениях селективных замираний при распространении радиоволн, частоты которых могли изменяться в пределах от 3750 до 4190 мгц. Эксперименты проводились на земной трассе протяженностью 49,3 км. Рельеф трассы был таков, что коэффициент отражения не превосходил 0,1, поэтому влиянием поверхности раздела можно пренебречь. Как показали опыты, корреляция между замираниями сигналов практически отсутствовала: а) когда замирания достигали 10 дБ хотя бы на одной из частот (если разнос частот обоих сигналов был не менее 40 мгц), б) если же замирания достигали 20 дБ, то в этом случае разнос частот должен был составлять 120 мгц. В этих же условиях существовала заметная корреляция при частотном разноросе 80 мгц и менее. Если воспользоваться приведенными данными, то для случая а) $\delta_0 \sim 0,5\%$, а для случая б) $\delta_0 \sim 2\%$. В условиях опыта при $\omega/2\pi \approx 4000$ мгц величина $D = 2L\lambda/\pi l^2$ при $l \approx 5 \div 10$ м [4] равна $D \approx 25 \div 100$ и, в соответствии с (6), $\delta_0 \sim 1 \div 4\%$. Таким образом, имеет место хорошее совпадение расчетных и указанных экспериментальных данных.

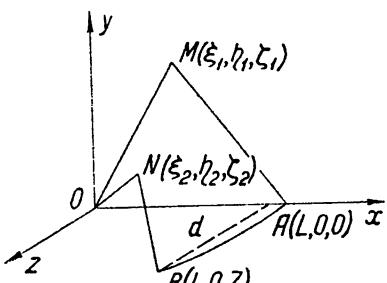


Рис. 2.

3. Рассмотрим теперь вопрос о флюктуациях уровней амплитуд и фаз сигналов различных частот в разнесенных точках пространства. Пусть источник колебаний с частотами ω_1 , ω_2 находится в начале координат — точке 0 (рис. 2), а приемники размещены в точках $A(L, 0, 0)$ и $B(L, 0, Z)$.

Тогда в случае крупномасштабных неоднородностей ($l \gg \lambda$) для флюктуаций уровней амплитуд и фаз в точках M и N (рис. 2) получаем следующие выражения [9]:

$$\varphi_i = k_i \int_0^L d\xi_i \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_i d\zeta_i \Phi_1(a_i, \rho_i) \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i);$$

$$L_i = \ln(|E_i| / |E_{i0}|) = k_i \int_0^L d\xi_i \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_i d\zeta_i \Phi_2(a_i, \rho_i) \mu(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad (7)$$

$$(k_i = 2\pi/\lambda_i).$$

Здесь $i=1$ соответствует частоте ω_1 , а $i=2$ — частоте ω_2 ;

$$\Phi_1(a_i, \rho_i) = (2\pi a_i)^{-1} \sin(\rho_i^2 / 2a_i); \quad \Phi_2(a_i, \rho_i) = (2\pi a_i)^{-1} \cos(\rho_i^2 / 2a_i);$$

$$\rho_1^2 = \eta_1^2 + \zeta_1^2; \quad \rho_2^2 = \eta_2^2 + (\zeta_2 - H)^2; \quad H = (d/l)\xi_2; \quad (8)$$

$$a_i = \xi_i(L - \xi_i)/k_i L.$$

Пользуясь (1), где $r = [(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2]^{1/2}$, найдем выражение для корреляционных функций $\frac{\varphi_1 \varphi_2}{L_1 L_2}$. Из (7) получим:

$$\left. \frac{\varphi_1 \varphi_2}{L_1 L_2} \right\} = \bar{\mu}^2 k_1 k_2 \int_0^L d\xi_1 d\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\eta_2 d\zeta_1 d\zeta_2 \times \quad (9)$$

$$\times \exp(-r^2/l^2) \Phi_1(a_1, \rho_1) \Phi_1(a_2, \rho_2).$$

Для вычисления интегралов, входящих в (9), проведем замену переменных, положив [10]

$$\eta = \eta_1 - \eta_2, \quad \zeta = \zeta_1 - \zeta_2, \quad y = \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_2), \quad z = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2),$$

и проинтегрируем по y и z . Тогда из (9) найдем, что

$$\overline{\frac{\varphi_1 \varphi_2}{L_1 L_2}} = \frac{1}{4\pi} \bar{\mu}^2 k_1 k_2 (I_1 \pm I_2); \quad (10)$$

$$I_i = \int_0^{LL} d\xi_1 d\xi_2 \exp[-(\xi_1 - \xi_2)^2/l^2] \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 d\zeta_1 [a_2 \pm a_1]^{-1} \times \\ \times \sin \left[\frac{\eta^2 + (\zeta + H)^2}{l^2 (a_2 \pm a_1)} \right] \exp[-(\eta^2 + \zeta^2)/l^2]. \quad (11)$$

В (11) знак минус относится к I_1 , знак плюс — к I_2 . После вычисления интегралов по η и ζ получим:

$$I_i = 2\pi \int_0^{LL} d\xi_1 d\xi_2 \frac{\exp[-(\xi_1 - \xi_2)^2/l^2]}{1 + 4(a_2 \pm a_1)^2/l^4} \exp \left[-\frac{H^2}{l^2} \left(1 + \frac{4(a_2 \pm a_1)^2}{l^4} \right)^{-1} \right] \times \\ \times \left\{ \cos \left[\frac{2H^2 l^{-4} (a_2 \pm a_1)}{1 + 4(a_2 \pm a_1)^2 l^{-4}} \right] + 2(a_2 \pm a_1)/l^2 \sin \left[\frac{2H^2 l^{-4} (a_2 \pm a_1)}{1 + 4(a_2 \pm a_1)^2 l^{-4}} \right] \right\}. \quad (12)$$

Так как $L \gg l \gg \lambda_i$, то, вводя в (12) новые координаты $\xi = \xi_1 - \xi_2$ и $x = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)$, можно раздвинуть пределы интегрирования по ξ от $-\infty$ до $+\infty$. В результате для I_i легко получить следующие формулы:

$$I_1 = 2\pi^{3/2} LL \operatorname{Re} \int_0^1 dt [1 + iD\delta t (1-t)/(1-\delta^2)]^{-1} \times \\ \times \exp[-t^2 d^2 l^{-2} (1 + iD\delta t (1-t)/(1-\delta^2))^{-1}]; \quad (13)$$

$$I_2 = 2\pi^{3/2} LL \operatorname{Re} \int_0^1 dt [1 + iDt(1-t)]^{-1} \exp[-t^2 d^2 l^{-2} / (1 + iDt(1-t))], \quad (14)$$

где D и δ имеют прежний смысл (3).

В случае ближней зоны ($D \ll 1$) выражения для I_1 и I_2 можно получить разложением в ряд по степеням D ; тогда функции корреляции фазы и уровня амплитуд определяются формулами:

$$\overline{\varphi_1 \varphi_2} = 2\pi^3 \bar{\mu}^2 (LL/\lambda_1 \lambda_2) \Phi(d/l); \quad (15)$$

$$\overline{L_1 L_2} = 8\pi \bar{\mu}^2 (L/l)^3 L(d/l), \quad (16)$$

где

$$\Phi(x) = \operatorname{erf} x/x; \quad \operatorname{erf} x = 2\pi^{-1/2} \int_0^x d\tau e^{-\tau^2}; \quad (17)$$

$$L(x) = \pi^{-1/2} \int_0^1 d\tau \tau^2 (1-\tau)^2 \left[1 - 2x^2 \tau^2 + \frac{1}{2} x^4 \tau^4 \right] \exp(-x^2 \tau^2) = \\ = \frac{1}{32 \sqrt{\pi} x^4} \left\{ \frac{9-2x^2}{2x} \sqrt{\pi} \operatorname{erf} x - (4x^2+9) \exp(-x^2) \right\}. \quad (18)$$

Выражения для коэффициентов корреляции легко получить из формул (15) и (16), если воспользоваться известными из работы [9] соотношениями:

$$\bar{\phi}_i^2 = 4\pi^{5/2} \bar{\mu}^2 \left(\frac{lL}{\lambda_i^2} \right);$$

$$\bar{L}_i^2 = \frac{4}{15} \pi^{1/2} \bar{\mu}^2 (L/l)^3.$$

В результате ^{*}

$$R_{\varphi_1 \varphi_2} = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \operatorname{erf}(d/l)/(d/l); \quad (19)$$

$$R_{L_1 L_2} = 30\pi^{1/2} L (d/l). \quad (20)$$

При малых значениях d/l коэффициенты корреляции близки к единице:

$$R_{\varphi_1 \varphi_2} \approx 1 - \frac{1}{3} (d/l)^2, \quad R_{L_1 L_2} \approx 1 - \frac{6}{7} (d/l)^2,$$

а при больших d/l

$$R_{\varphi_1 \varphi_2} \approx \frac{\pi^{1/2} l}{2d}, \quad R_{L_1 L_2} \approx -\frac{15}{16} \pi^{1/2} (l/d)^3. \quad (21)$$

Интересно отметить, что коэффициент корреляции уровня $R_{L_1 L_2}$, при $d/l \approx 1,9$ проходит через нуль и меняет знак. График функции $R_{L_1 L_2}$ приведен на рис. 3.

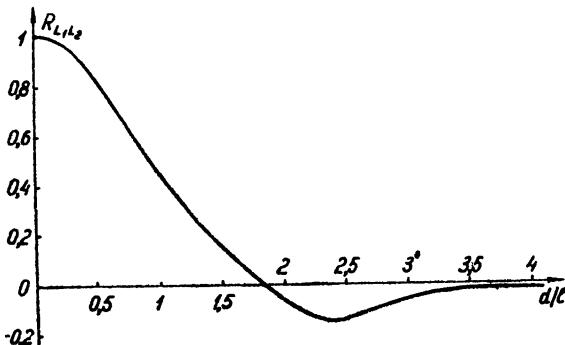


Рис. 3. Зависимость коэффициента корреляции уровней амплитуд в ближней зоне от пространственного разноса d .

Обратимся теперь к исследованию флюктуаций в дальней зоне, когда $D \gg 1$. При этом представляют интерес два предельных случая. Первый из них соответствует малому разносу частот, когда величина $D\delta \ll 1$. В этом случае величиной I_2 можно пренебречь по сравнению с I_1 , а коэффициенты корреляции фазы и уровня равны, не зависят от разноса частот и определяются формулой (19). Фактически в этом случае можно пренебречь и различием в частотах. По мере увеличе-

* Следует подчеркнуть, что частоты входят только в выражения для функций корреляции. Коэффициенты корреляции зависят лишь от d/l , причем так же, как и при $\omega_1 = \omega_2$ [9].

ния частотного разноса (при $\delta \sim D^{-1} \ll 1$) происходит резкое уменьшение коэффициента корреляции.

Рассмотрим предельный случай $D\delta \gg 1$. Будем предполагать также, что $d/l \ll D\delta$. Так как $D\delta$ велико, то это не накладывает особых ограничений на величину d/l . Результат вычислений интегралов I_1 и I_2 таков:

$$I_1 = 2\pi^{5/2} LL \frac{(1-\delta^2)}{D\delta} = \frac{2\pi^{7/2} l^3}{|\lambda_1 - \lambda_2|}; \quad (22)$$

$$I_2 = 2\pi^{5/2} LL/D = \frac{1}{2} \pi^{7/2} l^3 (\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1}). \quad (23)$$

Отсюда следует, что функции корреляции равны

$$\overline{\varphi_1 \varphi_2} = \pi^{9/2} \mu^2 (l/\lambda)^3 \delta^{-1} (1 - \delta^2) (1 - \delta^2 + \delta); \quad (24)$$

$$\overline{L_1 L_2} = \pi^{9/2} \mu^2 (l/\lambda)^3 \delta^{-1} (1 - \delta^2) (1 - \delta^2 - \delta). \quad (25)$$

Из формул (24), (25) ясно, что при малых δ ($D^{-1} \ll \delta \ll 1$) флюктуации уровней амплитуд и фаз равны между собой: $\overline{\varphi_1 \varphi_2} = \overline{L_1 L_2} = \pi^{9/2} \mu^2 (l/\lambda)^3 \delta^{-1}$. Пользуясь значениями $\varphi_1 \varphi_2 = \overline{L_1 L_2}$ и учитывая [9], что $\overline{\varphi_i^2} = \overline{L_i^2} = 2\pi^{5/2} \mu^2 LL/\lambda_i^2$, получаем для коэффициентов корреляции соотношение

$$R_{\varphi_1 \varphi_2} = R_{L_1 L_2} \simeq \pi^2 l^2 / 2\delta \lambda L. \quad (25a)$$

4. Рассмотрим влияние плоской границы раздела на корреляцию флюктуаций радиосигналов различных частот. Здесь ограничимся лишь исследованием предельного случая дальней зоны. Предположим, что в одной точке с координатами $(0, 0, z_0)$ находятся два излучателя различных частот ω_1 , ω_2 , а прием осуществляется в точке $(L, 0, z)$, причем $z, z_0 \ll L$. Ось Oz направлена вдоль внешней нормали к границе раздела, Ox — вдоль проекции, соединяющей корреспондирующие пункты.

Если решить уравнения Максвелла для флюктуационных составляющих электромагнитного поля, аналогично тому, как это было сделано в работе [4], и вычислить флюктуации амплитуд и фаз в горизонтально-поляризованной волне, можно получить следующие выражения для $\overline{\varphi_1 \varphi_2}$ и $\overline{L_1 L_2}$ *:

$$\begin{aligned} \left. \overline{\varphi_1 \varphi_2} \right\} &= \left(\frac{k_1 k_2 L}{\pi} \right)^2 \frac{\mu^2}{2 \sin(k_1 z z_0/L) \sin(k_2 z z_0/L)} \int_0^L \int_0^L \frac{dx' dx''}{x' x'' (L-x')(L-x'')} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dy' dy'' \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dz' dz'' \exp(-|r'-r''|^2/l^2) \times \\ &\times \sin \frac{k_1 z z'}{L-x'} \sin \frac{k_1 z_0 z'}{x'} \sin \frac{k_2 z z''}{L-x''} \sin \frac{k_2 z_0 z''}{x''} [\cos(\psi_1 - \psi_2) \pm \cos(\psi_1 + \psi_2)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Знак плюс относится к флюктуациям фазы, минус — к флюктуациям амплитуды;

* В случае малых флюктуаций флюктуации уровня амплитуды $L = \ln A/A_0 \simeq \delta A/A_0$, совпадают с флюктуациями относительной амплитуды $\delta A/A_0$ [6].

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2} k_1 \left\{ \frac{L(y'^2 + z'^2)}{x'(L-x')} + \frac{1}{L} \left(\frac{z^2 x'}{L-x'} + \frac{z_0^2(L-x')}{x'} \right) \right\}; \\ \psi_2 &= \frac{1}{2} k_2 \left\{ \frac{L(y''^2 + z''^2)}{x''(L-x'')} + \frac{1}{L} \left(\frac{z^2 x''}{L-x''} + \frac{z_0^2(L-x'')}{x''} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (27)$$

Формула (26) справедлива вдали от нулей среднего поля, где $\sin(k_i z z_0/L) = 0$. Аналогично тому, как это было сделано в случае свободного пространства, можно во всех функциях, кроме $\exp[-(x'-x'')^2/l^2]$, заменить x'' на x' , а по x'' проинтегрировать в бесконечных пределах. Относительная точность такого приближения не ниже, чем $1/kl \ll 1$. Далее, интегралы по y' и y'' можно взять точно. В результате для $\varphi_1 \varphi_2$ и $L_1 L_2$ получим следующие формулы:

$$\overline{\frac{\varphi_1 \varphi_2}{L_1 L_2}} = \frac{\mu^2 (k_1 k_2)^{3/2} l^3}{\pi^{1/2} \sin(4h h_0 / D_1) \sin(4h h_0 / D_2)} \operatorname{Re}(B_1 \pm B_2), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}B_{1,2} &= \left(\frac{1}{i} \right) \int_0^1 \frac{dt}{t(1-t)} \frac{\exp[2it^{-1}(1-t)^{-1}[h^2 t^2 + h_0^2(1-t)^2](D_1^{-1} \mp D_2^{-1})]}{\left[1 + \frac{1}{2} i(D_2 \mp D_1)t(1-t) \right]^{1/2}} \times \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty d\zeta' d\zeta'' \sin \frac{4h\zeta'}{D_1(1-t)} \sin \frac{4h\zeta''}{D_2(1-t)} \sin \frac{4h_0\zeta'}{D_1 t} \sin \frac{4h_0\zeta''}{D_2 t} \times \\ &\times \exp[-(\zeta' - \zeta'')^2 + 2it^{-1}(1-t)^{-1}(\zeta'^2 D_1^{-1} \mp \zeta''^2 D_2^{-1})]\end{aligned}\quad (29)$$

(верхние знаки относятся к B_1 , нижние — к B_2), $D_i = 4L/k_i l^2$, $h = z/l$, $h_0 = z_0/l$. При получении формулы (29) мы сделали замену переменных $x' = Lt$, $\zeta' = z'/l$, $\zeta'' = z''/l$.

Формулы (28), (29) справедливы при любом частотном разносе как в случае ближней, так и в случае дальней зоны, поскольку при их выводе использовались лишь условия $\lambda_i \ll l \ll L$, $z, z_0 \ll L$. Применим эти формулы к исследованию того случая, когда:

$$D^{-1} \ll \delta \ll 1, \quad \frac{1}{2} |D_2 - D_1| = D\delta/(1-\delta^2) \gg 1. \quad (30)$$

При этих условиях флюктуации амплитуды и фазы равны, а величиной B_2 (так же, как величиной I_2 в случае свободного пространства) можно пренебречь по сравнению с B_1 . Кроме того, будем считать, что h^2 и h_0^2 малы по сравнению с $D\delta$ (это — несущественное ограничение на отношения z/l и z_0/l). При выполнении указанных ограничений в выражении для B_1 синусы можно заменить их аргументами, а экспоненту, содержащую h^2 , h_0^2 , заменить единицей, поскольку в интеграл по t вносят вклад все значения t между 0 и 1. Кроме того, во всех функциях, кроме $\exp[-(\zeta' - \zeta'')^2/l^2]$, ζ'' можно заменить на ζ' , а по ζ'' проинтегрировать в бесконечных пределах. В результате выражение для B_1 приобретает вид:

$$B_1 = \frac{3\pi(hh_0)^2}{D^{3/2} \delta^{5/2}} \exp(5\pi i/4) \int_0^1 dt \{ t(1-t) [1 + iD\delta t(1-t)] \}^{-1/2}. \quad (31)$$

Интеграл в формуле (31) является эллиптическим, однако при больших $D\delta$ его легко вычислить. С логарифмической точностью ($\ln(D\delta) \gg 1$) выражение для B_1 имеет вид:

$$B_1 \sim -\frac{6\pi(hh_0)^2}{D^2\delta^3} \ln(D\delta). \quad (32)$$

Функции корреляции флюктуаций амплитуд и фаз:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_1\varphi_2} = \overline{L_1L_2} &= -3\sqrt{\pi}\bar{\mu}^2(2\pi l/|\lambda_1-\lambda_2|)^3 \ln(D\delta) = \\ &= -3\pi^{7/2}\bar{\mu}^2(l/\lambda\delta)^3 \ln(D\delta). \end{aligned} \quad (33)$$

Из сравнения формулы (33) с (24) и (25) видно, что флюктуации над поверхностью раздела, грубо говоря, в δ^{-2} раз больше, чем в свободном пространстве. Интересно отметить, что при рассматриваемом разносе $\delta \gg D^{-1}$ корреляция флюктуаций отрицательна; изменение знака корреляции происходит при $\delta \sim D^{-1}$. К сожалению, в этой области из-за отсутствия малого параметра исследование весьма затруднено.

С помощью формулы (33) нетрудно написать выражение для коэффициентов корреляции амплитуд и фаз при частотном разносе. Для этого величины $\varphi_1\varphi_2$ и L_1L_2 надо разделить соответственно на $(\bar{\varphi}_1^2\bar{\varphi}_2^2)^{1/2}$ и $(\bar{L}_1^2\bar{L}_2^2)^{1/2}$. Выражения для $\bar{\varphi}_i^2$ и \bar{L}_i^2 имеются в работе [4].

Приведем соответствующие формулы в простейшем случае достаточно больших высот, когда $1 \ll h, h_0 \ll D^{1/2}$. Тогда, используя соотношение

$$\bar{\varphi}_i^2 = \bar{L}_i^2 = \frac{1}{4}\pi^{1/2}\bar{\mu}^2 L^3 l/(zz_0)^2, \quad (34)$$

для $R_i = R_L = R$ получаем:

$$R = -12\pi^3 \frac{(zz_0l)^2}{(\lambda L\delta)^3} \ln(D\delta) = -6 \left(\frac{4hh_0}{D\delta} \right)^2 \frac{\ln(D\delta)}{D\delta}. \quad (35)$$

Из формулы (35) видно, что абсолютная величина коэффициента корреляции мала по сравнению с единицей.

Аналогичным образом можно показать (вычислений приводить не будем), что в ближней зоне коэффициент корреляции радиосигналов разных частот над поверхностью раздела равен единице.

5. Сформулируем основные выводы работы. Теоретическое рассмотрение корреляции случайных флюктуаций радиосигналов различных частот показывает, что в случае ближней зоны коэффициент корреляции фазы и уровня равен единице и не зависит от частотного разноса δ , тогда как в дальней зоне имеется существенная зависимость от δ . В этой области существенная корреляция имеет место лишь при весьма малых значениях $\delta = (\omega_2 - \omega_1)/(\omega_2 + \omega_1) \ll D^{-1} \ll 1$. При $\delta \gg D^{-1}$ коэффициент корреляции резко падает, проходит через нуль и при $\delta \gg D^{-1}$ наступает практически полная декорреляция сигналов. Указанный качественный вывод работы не связан с наличием поверхности раздела и, как было показано выше, находится в хорошем согласии с экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
2. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд. АН СССР, М., 1959.
3. R. B. Mischmoge, A. D. Wheeler, Proc. IRE, **43**, 1437 (1955).
4. Ф. Г. Басс, С. Я. Брауде, Э. А. Канер, А. В. Мень, УФН, **73**, 89 (1961).
5. M. Hirai, M. Fukushima, Y. Kirohaga, J. Rad. Res. Lab. Japan, **7**, 509 (1960).
6. М. Ф. Бахарева, Радиотехника и электроника, **4**, 88 (1959).
7. А. В. Мень, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, 395 (1959).
8. R. L. Kaylog, BSTJ, **32**, 1187 (1953).
9. В. Н. Каравайников, Акуст. ж., **3**, 165 (1957).
10. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. геогр., **2**, 155 (1953).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
22 августа 1961 г.

THE FLUCTUATIONS OF DIFFERENT FREQUENCY RADIO WAVES IN THE TROPOSPHERE

S. Ya. Braude, E. A. Kaner

The dependence has been considered of the correlation of different frequency radio waves in the troposphere on the frequency deviation δ (in the limit cases of a near and far zone as well as in presence of a plane intersurface). It is shown that in a near zone the coefficient of the correlation is independent on the frequency deviation δ , while in a far zone there is a sharp dependence on δ when the latter is small. The correlation factor decreases sharply in this region and changes even its sign. By comparison between the results of the calculation and some experimental data one may confirm the theoretical conclusions on practically full signal de-correlation when δ being small.

ФЛЮКТУАЦИИ РАДИОВОЛН В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ НАД ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ РАЗДЕЛА

Ф. Г. Басс, Э. А. Канер, Л. А. Поспелов

Исследуются флюктуации фазы и относительные флюктуации амплитуды радиоволны в тропосфере над идеально проводящей плоской поверхностью раздела. В предельном случае ближней зоны флюктуации амплитуды и фазы определяются парциальными фазовыми флюктуациями на различных участках прямого и отраженного от поверхности сигналов. Найден закон распределения флюктуационных компонент поля, их фаз и амплитуд, а также зависимости среднеквадратичных флюктуаций от частоты, длины трассы, поляризации излучения и высот приемника и передатчика над поверхностью раздела. Вычислена корреляция флюктуаций фаз и амплитуд в поперечном направлении и исследована область вблизи нулей среднего поля (минимумов лепестков). Показано, что существование поверхности раздела в случае ближней зоны приводит к целому ряду качественно иных зависимостей флюктуационных характеристик по сравнению со случаями безграничного пространства и дальней зоны при налинии поверхности раздела.

В работах [1-4] рассматривались флюктуации амплитуды и фазы электромагнитного поля в дальней зоне над идеально проводящей поверхностью раздела. В статье [5] были получены для гауссова вида функции корреляции флюктуаций в тропосфере формулы, применимые в ближней зоне вдали от минимумов лепестков. Однако этот случай в [5] не был подробно исследован. Настоящая работа посвящена изучению флюктуаций в ближней зоне, когда источник и приемник радиоизлучения частоты ω расположены в среде со случайными флюктуациями диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon$ (координаты источника— $(0, 0, z_0)$, приемника— $(L, 0, z)$; ось z направлена по нормали к поверхности раздела). Флюктуации $\delta\epsilon$ представляют собой случайный процесс, стационарный во времени и однородный в пространстве, так что среднее значение $\overline{\delta\epsilon(r, t)\delta\epsilon(r', t)}$ не зависит от времени, а зависимость от координат входит лишь в виде разности $r - r'$. Нас интересуют такие статистические характеристики поля излучения, как среднеквадратичные флюктуации его фазы и амплитуды. Ниже проводится исследование этих флюктуаций для ближней зоны, когда размер первой зоны Френеля мал по сравнению с размером неоднородности, и выполняются следующие неравенства:

$$\lambda' \ll \sqrt{\lambda' L} \ll z_0, z, l; \quad z_0, z, l \ll L.$$

Здесь $2\pi\lambda'$ — длина радиоволны, L — расстояние по горизонтали между корреспондирующими пунктами, z, z_0 — соответственно высоты приемника и передатчика над поверхностью, l — радиус корреляции флюктуаций диэлектрической проницаемости $\delta\epsilon$.

Как было показано в [1-4], флюктуационное поле, распространяющееся над идеально проводящей плоскостью, имеет следующий вид:

$$\xi_{\pm}(r) = k^2 p_{\pm} \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_0^{\infty} dz' \varphi_{\pm}(r, r') \varphi_{\pm}(r_0, r') \delta\epsilon(r'), \quad (2)$$

где ξ_{\pm} — флюктуационное поле в точке приема $\mathbf{r}(L, 0, z)$ (знак плюс относится к вертикальной поляризации излучения, знак минус — к горизонтальной), $k = \lambda'^{-1}$, p_{\pm} — дипольный момент вертикально или горизонтально поляризованного диполя, $\varphi_{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \pm \pm \varphi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|)$ — соответствующая функция Грина, точка \mathbf{r}_1 — зеркальное отображение точки \mathbf{r} в плоскости $z=0$, $\varphi(\rho) = \exp ik\rho/4\pi\rho$. В точке $\mathbf{r}_0(0, 0, z_0)$ расположен излучатель.

В силу неравенств (1), $\delta\varepsilon(\mathbf{r}')$ является медленно меняющейся функцией координат по сравнению с другими сомножителями, стоящими в подынтегральном выражении в формуле (2). Используя это обстоятельство, формулу (2) после довольно простых преобразований можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi_{\pm} = & \frac{2\pi ikp_{\pm}}{(4\pi)^2 L} \left\{ e^{ikR} \int_0^L dx' \delta\varepsilon \left(x', 0, z_0 \left(1 - \frac{x'}{L} \right) + z \frac{x'}{L} \right) \pm \right. \\ & \left. \pm e^{ikR_1} \int_0^L dx' \delta\varepsilon \left(x', 0, \left| z_0 \left(1 - \frac{x'}{L} \right) - z \frac{x'}{L} \right| \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$R = \sqrt{L^2 + (z - z_0)^2}, \quad R_1 = \sqrt{L^2 - (z + z_0)^2}.$$

Рассмотрим сначала флюктуации вблизи минимумов лепестков среднего поля. Как известно, минимумы лепестков для горизонтальной поляризации определяются соотношением $kR_1 = kR + 2\pi n$, а для вертикальной — соотношением $kR_1 = kR + 2\pi n + \pi$ (n — целое число). Заменим в (3) kR_1 на kR с помощью этих формул:

$$\begin{aligned} \xi_{\pm} = & \frac{2\pi kp_{\pm}}{(4\pi)^2 L} e^{i(\pi/2 + kR)} \int_0^L dx' \left\{ \delta\varepsilon \left(x', 0, z_0 \left(1 - \frac{x'}{L} \right) + z \frac{x'}{L} \right) - \right. \\ & \left. - \delta\varepsilon \left(x', 0, z_0 \left(1 - \frac{x'}{L} \right) - z \frac{x'}{L} \right) \right\} = ae^{i(\pi/2 + kR)}, \end{aligned} \quad (4)$$

Множитель a , стоящий перед $\exp[i(\pi/2 + kR)]$, по предположению, является вещественным ($\delta\varepsilon$ — вещественно). Так как длина трассы L велика по сравнению с радиусом корреляции тропосферных неоднородностей, то в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей случайная величина a распределена по закону Гаусса с дисперсией

$$\overline{a^2} = \frac{kp_{\pm}^2 \overline{\delta\varepsilon^2}}{16L\pi^3} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^1 dt \{ W(\xi, 0, 0) - W(\xi, 0, \bar{z}t) \}, \quad (5)$$

где $W(\rho)$ — коэффициент корреляции $\delta\varepsilon$, $2/\bar{z} = (1/z + 1/z_0)$. Из формулы (4) видно, что фаза флюктуационного поля, которую мы из соображений удобства определяем в интервале $(-\pi/2 < \varphi < 3\pi/2)$, в минимумах лепестков равна

$$\varphi = \varphi_0 + \pi\rho(a \sin kR), \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \operatorname{tg}(kR + \pi/2). \quad (6)$$

Здесь $\rho(x)$ — функция единичного скачка ($\rho(x) = 1$ при $x > 0$, $\rho(x) = 0$ при $x < 0$).

Проведя усреднение с помощью функции распределения $f(a) = (\pi \bar{a}^2)^{-1/2} e^{-a^2/\bar{a}^2}$, для средней фазы и среднего квадрата флюктуаций фазы $\overline{\delta\phi^2} = (\varphi - \bar{\varphi})^2$ находим следующие выражения:

$$\bar{\varphi} = \varphi_0 + \pi/2; \quad \overline{\delta\phi^2} = \pi^2/4. \quad (7)$$

Вдали от минимумов лепестков распределение флюктуаций фазы и амплитуды $\delta A/|E|$ является нормальным. Выражения для $\overline{\delta\phi^2}$ и $\overline{\delta A^2}/|E^2|$ определяются формулами (1.5), (1.7) работы [2]. Подставляя в эти формулы выражения для реальной и мнимой частей ξ_{\pm} из (3), находим:

$$\overline{\delta\phi_{\pm}^2} = \frac{k^2 \overline{\delta\varepsilon^2} L}{4} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^1 dt \{ W(\xi, 0, 0) + W(\xi, 0, \bar{z}t) \}; \quad (8)$$

$$\frac{\overline{\delta A_{\pm}^2}}{|E_{\pm}^2|} = \frac{k^2 \overline{\delta\varepsilon^2} L}{4} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^1 dt \{ W(\xi, 0, 0) - W(\xi, 0, \bar{z}t) \} \operatorname{tg}^{\pm 2} \left(\frac{kzz_0}{L} \right). \quad (9)$$

Из формулы (8) следует, что вдали от минимумов лепестков $\overline{\delta\phi^2}$ и $\overline{\delta A^2}/|E^2|$ являются линейными функциями длины трассы L .

Исследуем высотную зависимость флюктуаций амплитуды и фазы. В минимумах лепестков средний квадрат амплитуды поля в предельных случаях больших и малых \bar{z}/l определяется следующими выражениями. Если $\bar{z} \gg l$, т. е. $z, z_0 \gg l$, то

$$\bar{a}^2 = \frac{\overline{\delta\varepsilon^2} k p_{\pm}^2}{16\pi^3 L} \bar{l}, \quad (10)$$

где $\bar{l} = \int_0^{\infty} d\xi W(\xi, 0, 0)$. Отметим, что \bar{l} по порядку величины совпадает с l . Когда $\bar{z} \ll l$, т. е. когда хотя бы одна из высот мала по сравнению с вертикальным размером неоднородности,

$$\bar{a}^2 = \frac{\overline{\delta\varepsilon^2} k p_{\pm}^2 \bar{z}^2}{24\pi^3 L} \int_0^{\infty} d\xi \left| \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} W(\xi, 0, \zeta) \right|_{\zeta=0}, \quad (11)$$

поскольку $\partial W(\xi, 0, 0)/\partial\zeta = 0$.

Вдали от минимумов лепестков в случае больших высот ($\bar{z} \gg l$)

$$\overline{\delta\phi_{\pm}^2} = \frac{\overline{\delta\varepsilon^2} k^2 L \bar{l}}{4}; \quad \frac{\overline{\delta A_{\pm}^2}}{|E_{\pm}^2|} = \frac{\overline{\delta\varepsilon^2} k^2 L \bar{l}}{4} \operatorname{tg}^{\pm 2} \left(\frac{kzz_0}{L} \right); \quad (12)$$

если же хотя бы одна из высот мала ($\bar{z} \ll l$), то

$$\overline{\delta\phi_{\pm}^2} = \frac{\overline{\delta\varepsilon^2} k^2 L \bar{l}}{2}; \quad (13)$$

$$\frac{\overline{\delta A_{\pm}^2}}{|E_{\pm}^2|} = \frac{\overline{\delta\varepsilon^2} k^2 L \bar{l}}{24} \int_0^{\infty} d\xi \left| \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} W(\xi, 0, \zeta) \right|_{\zeta=0} \operatorname{tg}^{\pm 2} \left(\frac{kzz_0}{L} \right).$$

Во всех формулах для флюктуаций амплитуды на малых высотах $\bar{z} \ll l$ имеются еще добавочные слагаемые (так же, как и в свободном пространстве), связанные со следующими членами разложения флюктуационного поля ξ по степеням „волнового параметра“ $D \sim \sqrt{\kappa' L/l}$. Условия применимости формул (11) и (13) состоят в том, что этими слагаемыми можно пренебречь по сравнению с выписанными. Это справедливо при $L/kz^2 \ll 1$, что совпадает с исходными предположениями.

Нетрудно получить выражения для пространственных корреляционных функций флюктуаций фазы и амплитуды в различных точках пространства: в точке 1 с координатами $(L; -b/2; z - d/2)$ и в точке 2 с координатами $(L; b/2; z + d/2)$ (поперечная корреляция). Продольная корреляция, как показано в [3], имеет место на расстояниях порядка kl^2 ; поэтому в ближней зоне, где $L \ll kl^2$, вдоль трассы имеет место полная корреляция.

Обычным путем для корреляционных функций флюктуаций фазы $\overline{\delta\varphi_{\pm 1} \delta\varphi_{\pm 2}}$ и относительных флюктуаций амплитуды находим:

$$\overline{\delta\varphi_{\pm 1} \delta\varphi_{\pm 2}} = \frac{\overline{\delta\varepsilon^2} k^2 L}{8} (J_1 + J_2); \quad (14)$$

$$\frac{\overline{\delta A_{\pm 1}}}{|E_{\pm 1}|} \frac{\overline{\delta A_{\pm 2}}}{|E_{\pm 2}|} = \frac{\overline{\delta\varepsilon^2} k^2 L}{8} (J_1 - J_2) \operatorname{tg}^{\pm 1} \frac{kz_0(z - d/2)}{L} \operatorname{tg}^{\pm 1} \frac{kz_0(z + d/2)}{L}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\infty d\xi \int_0^1 dt \left[W(\xi, bt, dt) + W\left(\xi, bt, \left|z_0(1-t) - \left(z - \frac{d}{2}\right)t\right|\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left|z_0(1-t) - \left(z - \frac{d}{2}\right)t\right|\right]; \\ J_2 &= \int_0^\infty d\xi \int_0^1 dt \left\{ W\left(\xi, \frac{tbz_0}{z+z_0+d/2}, \frac{2zz_0t}{z+z_0+d/2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + W\left(\xi, \frac{tbz_0}{z+z_0-d/2}, \frac{2zz_0t}{z+z_0-d/2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Из (14), (15) следует, что декорреляция статистических характеристик поля имеет место примерно на тех же расстояниях, что и декорреляция флюктуаций диэлектрической проницаемости (см. [1, 3, 4]).

Приведенные выше результаты можно получить также другим, более наглядным, хотя и более громоздким путем. Так как в ближней зоне справедливо приближение геометрической оптики, то достаточно решить уравнения эйконала для прямого и отраженного лучей (для последнего — с учетом граничных условий), а затем вычислить суммарные флюктуации амплитуды и фазы. Как видно из окончательных формул, суммарные флюктуации как амплитуды, так и фазы поля над поверхностью раздела определяются лишь парциальными фазовыми флюктуациями на отдельных участках трассы. Это следует из того факта, что найденная нами зависимость $|\xi_i^2|, |\xi_r^2| \sim L$ — такая же, как и для среднеквадратичных фазовых флюктуаций.

Парциальные амплитудные и смешанные амплитудно-фазовые флюктуации в приближении геометрической оптики, очевидно, дают

более высокую степень зависимости от L (L^3 —для амплитуд, L^2 —для автокорреляционных функций).

Таким образом, наличие поверхности раздела благодаря интерференционным эффектам, в отличие от случая свободного пространства, приводит к качественно новым зависимостям флюктуационных характеристик.

В заключение авторы благодарят А. В. Меня за ценное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, ДАН СССР, 127, 792 (1959).
2. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 553 (1959).
3. Ф. Г. Басс, Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 565 (1959).
4. Ф. Г. Басс, С. Я. Брауде, А. В. Мень, Э. А. Канер, УФН, 23, 89 (1961).
5. А. В. Мень, В. И. Горбач, С. Я. Брауде, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 388 (1959).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
2 сентября 1961 г.

FLUCTUATIONS OF RADIO WAVES IN NEAR ZONE OVER THE PLANE INTERFACE

F. G. Bass, E. A. Kaner, L. A. Pospelov

An examination has been made of phase fluctuations and relative amplitude fluctuations of radio wave in the troposphere over the perfectly conducting plane interface. In the limit case of near zone the amplitude and phase fluctuations are being determined by partial phase fluctuations in different places of the signals both direct and reflected. The law has been found of the fluctuation field components distribution, as well as their phases and amplitudes, the dependence of the root-mean-square fluctuations on the frequency, path length, polarization of radiation and heights of the receiver and transmitter over the interface. It has been calculated the correlation of phase and amplitude fluctuations in a transverse direction and the region has been examined in vicinity of the zeroes of the mean field (minima of lobes). It is shown that the existence of interface in the case of near zone causes a number of qualitatively different dependences of fluctuation characteristics in comparison with the case of an infinite space or in a far zone in presence of the interface.

РЕЖИМ СТАЦИОНАРНОГО ОДНОЧАСТОТНОГО КОЛЕБАНИЯ МАГНЕТРОННОГО ГЕНЕРАТОРА*

B. N. Никонов

Магнетронный генератор рассматривается как автоколебательная система с одной степенью свободы. Определяется зависимость наведенного тока от амплитуды колебания. Исследуется устойчивость амплитуды стационарных автоколебаний.

При исследовании стационарного режима колебания автогенераторов и воздействия регулярных и случайных возмущений на генератор необходимо переходить от полных уравнений, описывающих систему, к так называемым „укороченным“ уравнениям для амплитуды и фазы колебания [1–3]. В случае магнетронного генератора задача составления полных уравнений, описывающих магнетрон как автоколебательную систему, сложна и в настоящее время еще не решена. С другой стороны, существует приближенная теория установившегося динамического режима, наиболее полно изложенная в монографии Бычкова [4]; выводы теории находятся в удовлетворительном количественном согласии с экспериментальными результатами исследования магнетрона.

Целью настоящей статьи является построение „модели“, соответствующей одночастотному колебанию магнетронного генератора в непрерывном режиме генерации, и получение приближенных „укороченных“ уравнений для амплитуды и фазы колебания. Построение ведется на основе расчетов наведенных токов в многорезонаторных магнетронах, выполненных в [4]. Дополнительное предположение о связи плотности заряда в основании „спицы“ с плотностью заряда в предосцилляционный период в прикатодном слое электронов позволяет получить зависимость наведенных токов от амплитуды колебания. Это дает возможность оценить устойчивость амплитуды стационарных колебаний магнетрона и ввести параметр, эквивалентный параметру, характеризующему в теории автоколебательных систем прочность предельного цикла. В конце статьи проводится сопоставление теоретической и экспериментальной зависимостей параметра p от режима генерации.

1. УРАВНЕНИЕ ОДНОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАГНЕТРОНА

Предположим, что магнетрон сделан совершенно симметричным и что нам известны все собственные частоты и собственные функции сложного резонатора, образованного внутренней полостью магнетрона (см. рис. 1). Примем для описания магнетрона цилиндрическую систему координат r , z и φ (ось z перпендикулярна плоскости рисунка) и введем следующие обозначения: r_a —радиус анодного блока, r_k —радиус катода, h —высота анодного блока, N —число резонаторов в анодном блоке, 2θ —угловой размер щели резонатора. Собственные функ-

* Результаты работы доложены на научной сессии общества им. А. С. Попова, М., 1961.

ции $E_v(r)$ и $H_v(r)$ удовлетворяют граничным условиям на поверхности резонатора $E_{vt}=0$, $H_{vn}=0$ (E_{vt} — тангенциальная составляющая поля $E_v(r)$, H_{vn} — нормальная составляющая поля $H_v(r)$ на поверхности) и нормированы на некоторый линейный размер Γ :

$$\int_V E_v E_v dv = \Gamma \delta_{vv}; \quad (1)$$

$$\int_V H_v H_v dv = \Gamma \delta_{vv}$$

($\delta_{vv}=1$ при $v=v$ и $\delta_{vv}=0$ при $v \neq v$).

Как известно*, электромагнитное поле внутри резонатора при наличии зарядов может быть представлено в виде:

$$E = E' + E^0 \quad (\operatorname{div} E' = 0, \operatorname{rot} E^0 = 0);$$

$$E' = \sum e_v(t) E_v(r); \quad E^0 = -\operatorname{grad} \Phi;$$

$$H = \sum h_v(t) H_v(r), \quad (2)$$

где E^0 — потенциальная часть поля E , $e_v = -(1/\omega_v) dh_v/dt$ и h_v — амплитуды поля, а потенциал Φ удовлетворяет уравнению $\Delta \Phi = -4\pi r$ с граничными условиями $\Phi = 0$ на поверхности резонатора. Тогда, согласно [7], задача о возбуждении резонатора потоками электронов сводится к решению системы уравнений:

$$\frac{d^2 i_v}{dt^2} + \omega_v^2 i_v = -\frac{\omega_v}{Q_v} \frac{di_v}{dt} + \omega_v^2 \int_V j E_v(r) dv \quad (v = 1, 2, \dots, \infty); \quad (3)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{e}{m} (E_\Sigma + [u H_\Sigma]), \quad (4)$$

где $i_v = \omega_v h_v \Gamma / 4\pi$, V — объем внутренней полости магнетрона, Q_v — добротность резонатора, соответствующая v -колебанию, $E_\Sigma = E_0 + E' + E^0$, $H_\Sigma = H_0 + H$, H_0 , и E_0 — постоянные магнитное и электрическое поля. Уравнение (4) определяет движение электрона в поле резонатора (u — скорость электрона), а следовательно, и зависимость плотности тока j от поля резонатора.

Пусть в магнетроне происходят одночастотные автоколебания, соответствующие противофазному виду колебания. В этом случае для описания автоколебания будем иметь вместо системы (3) одно уравнение для i_π (см., например, [1, 8]):

$$\frac{d^2 i_\pi}{dt^2} + \omega_\pi^2 i_\pi = -\frac{\omega_\pi}{Q_\pi} \frac{di_\pi}{dt} + \omega_\pi^2 \int_V j E_\pi(r) dv, \quad (5)$$

а в (4) вместо E' и H должны быть поставлены соответственно

$$-\frac{4\pi}{\omega_\pi^2} \frac{1}{\Gamma} \frac{di_\pi}{dt} E_\pi(r) \quad \text{и} \quad \frac{4\pi}{\omega_\pi} \frac{1}{\Gamma} i_\pi H_\pi(r).$$

* См., например, [5-7].

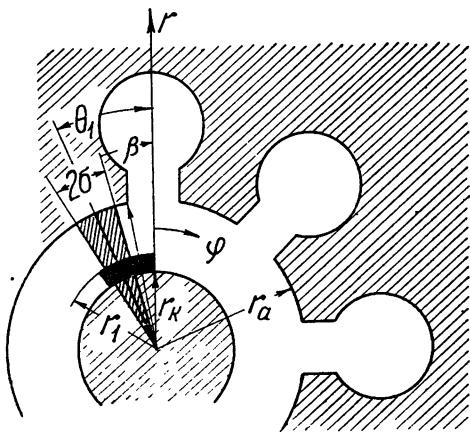


Рис. 1. Структура резонаторной системы магнетрона и идеализированная форма "спицы" пространственного заряда, принятая при расчетах.

Интеграл в (5) берется по объему, занятому пространственным зарядом, и поэтому для определения $i_\pi(t)$ достаточно было бы знать $E_\pi(r)$ в пространстве взаимодействия магнетрона. Вычисление $E_\pi^*(r)$ при нормировке собственных функций на объем резонатора проведено в работе [9] приближенным методом частичных областей.

Согласно [9], составляющие собственной функции E_π^* в пространстве взаимодействия могут быть записаны в системе цилиндрических координат в виде:

$$E_{\varphi\pi}^*(r, \varphi) = \frac{2N\beta}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\gamma\beta)}{\gamma^\beta} \frac{Z'_\gamma(kr)}{Z'_\gamma(kr_a)} \cos(\gamma\varphi); \quad (6)$$

$$E_{r\pi}^*(r, \varphi) = \frac{2N\beta}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin(\gamma\beta)}{\gamma^\beta} \frac{1}{kr} \frac{Z_\gamma(kr)}{Z'_\gamma(kr_a)} \sin(\gamma\varphi); \quad (7)$$

$$E_{z\pi}^*(r, \varphi) = 0; \quad \gamma = mN + N/2,$$

где $Z'_\gamma(kr)$ — производная функции $Z_\gamma(kr)$, являющейся линейной комбинацией функций Бесселя $J_\gamma(kr)$ и Неймана $N_\gamma(kr)$:

$$Z_\gamma(kr) = J_\gamma(kr) - \frac{J'_\gamma(kr_k)}{N'_\gamma(kr_k)} N_\gamma(kr). \quad (8)$$

При $kr_a \ll N/2$

$$\frac{Z'_\gamma(kr)}{Z'_\gamma(kr_a)} \simeq \left(\frac{r}{r_a} \right)^{\gamma-1} \left[\frac{1 - (r_k/r)^{2\gamma}}{1 - (r_k/r_a)^{2\gamma}} \right] = F_1(r); \quad (8a)$$

$$\frac{1}{kr} \frac{Z_\gamma(kr)}{Z'_\gamma(kr_a)} \simeq \left(\frac{r}{r_a} \right)^{\gamma-1} \left[\frac{1 + (r_k/r)^{2\gamma}}{1 - (r_k/r_a)^{2\gamma}} \right] = F_2(r). \quad (8b)$$

Поделив E_π^* на ширину щели отдельного резонатора $d = 2\beta r_a$, получим новое $E_\pi(r)$, соответствующее нормировке (1) на линейный размер Γ , теперь вполне определенный и равный $V/4\beta^2 r_a^2$. Составляющие E_π по осям координат будут равны

$$E_{\varphi\pi} = \frac{E_{\varphi\pi}^*}{2\beta r_a}; \quad E_{r\pi} = \frac{E_{r\pi}^*}{2\beta r_a}; \quad E_{z\pi} = 0. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что при выборе нормировки в виде (1) переменная i_π и интеграл в правой части уравнения (5) имеют размерность тока.

Таким образом, исходя из уравнения (5), при рассмотрении одиночестотного автоколебания в первом приближении можно заменить магнетрон эквивалентным контуром с резонансной частотой $\omega_0 = \omega_\pi$, добротностью $Q_0 = Q_\pi$ и волновым сопротивлением $z_0 = z_\pi$. При этом величину i_π можно рассматривать как ток в цепи контура, возбуждаемый током $I = \int_V j E_\pi(r) dv$.

Введем следующее значение эквивалентной сосредоточенной емкости:

$$C_0 = \frac{1}{4\pi} \int_V E_\pi E_\pi dv = \frac{V}{16\beta^2 r_a^2 \pi}. \quad (10)$$

Тогда

$$L_s = 4\pi \left(\omega_0^2 \int_V E_\pi E_\pi dv \right)^{-1}$$

будет эквивалентной индуктивностью,

$$z_0 = 4\pi \left(\omega_0 \int_V E_\pi E_\pi dv \right)^{-1}$$

— волновым сопротивлением эквивалентного контура,

$$R_s = z_0 / Q_s$$

— эквивалентным сопротивлением потерь, а $z_s = z_0 Q$ — резонансным сопротивлением эквивалентного контура.

Вместо уравнения (5) можно записать систему двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 y - \frac{\omega_0}{Q_s} x; \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega_0 x + \frac{1}{C_s} \int_V jE_\pi dv, \quad (11a)$$

где $z_0 i_\pi = x = h_\pi$, y — напряжение на эквивалентной емкости контура C_s . Поле в резонаторе в этом случае будет выражаться через E_π и H_π следующим образом:

$$E' = -\frac{1}{\omega_\pi} \frac{dx}{dt} E_\pi(r); \quad H = x H_\pi(r).$$

Подставив в (11a) значение E_π , определяемое (9), положив $k r_a \ll N/2$ (условие квазистационарности) и оставив в (11a) только квазистационарный член, нетрудно убедиться, что интеграл в (11a) представляет собой величину, вводимую Бычковым [4] в качестве наведенного тока I_n .

Переходя в (11) и в (11a) к полярным координатам $y = U \cos \vartheta$, $x = U \sin \vartheta$ и применяя метод усреднения по ϑ за период колебаний, получим „укороченные“ уравнения для определения амплитуды и фазы колебания:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q_s} U + \frac{1}{2\pi C_s} \int_0^{2\pi} I_n(U \cos \vartheta, U \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = \Phi(U); \quad (12)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 - \frac{1}{2\pi C_s} U \int_0^{2\pi} I_n(U \cos \vartheta, U \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \omega_0 + \Psi(U) = \omega_1. \quad (12a)$$

Из (12) и (12a) нетрудно видеть, что для определения $\Phi(U)$ и $\Psi(U)$ достаточно найти лишь первую гармонику I_n .

2. НАВЕДЕНИЙ ТОК

Расчет наведенного тока электронными потоками в многосегментном магнетроне выполнен в [4], где на основании физических соображений и вычислений траекторий электронов в динамическом режиме магнетрона предполагается, что в результате взаимодействия высокочастотных полей с электронами в магнетроне происходит дифракция на ячееках магнетрона.

частотного поля с пространственным зарядом в магнетроне образуются спицы заряда. При этом в [4] 1) рассматривается только π -вид колебания; 2) считается, что заряды распределены равномерно вдоль оси магнетрона и электроны движутся в плоскости, перпендикулярной к оси магнетрона, т. е. пренебрегается краевыми эффектами; 3) пространственный заряд не влияет на распределение высокочастотного поля в синхронной области ($r_a > r > r_1$); 4) пренебрегается влиянием высокочастотного магнитного поля на движение электронов; 5) предполагается, что $\omega_u/\omega_0 \gg 1$ (где ω_u — циклотронная частота, ω_0 — частота генерируемых колебаний); 6) электроны движутся вдоль анодного блока в среднем синхронно с СВЧ полем.

При этих предположениях и введении усредненных значений скоростей электронов и плотности заряда при идеализированной геометрической форме границ пространственного заряда (см. рис. 1) получено следующее выражение для первой гармоники I_n :

$$I_n = I_{n\varphi} + I_{nr} = \frac{2\pi f_0 B_m (r_a^2 - r_1^2) I_0}{NU \cos(\Theta_1 N/2)} \cos \left[\vartheta + \frac{\Theta_1 N}{2} \right] + \\ + \frac{I_0}{2\pi \cos(\Theta_1 N/2)} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \Psi_{r_1}(S_a, S_1) \sin[\vartheta + \Theta_1 N], \quad (13)$$

где I_0 — анодный ток магнетрона, B_m — индукция магнитного поля, $f_0 = \omega_0/2\pi$, r_1 — радиус прикатодного слоя пространственного заряда, $\Theta_1 N/2$ — фазовый сдвиг между высокочастотным напряжением и наведенным током*, 2σ — угловая ширина идеализированной „спицы“ пространственного заряда,

$$\Psi_{r_1}(S_a, S_1) = 1 - \frac{S_1^{N/2} - S_a^{-N/2}}{S_a^{N/2} - S_a^{-N/2}} \simeq 1; S_a = \frac{r_a}{r_k}; S_1 = \frac{r_1}{r_k}.$$

При синхронном движении „спицы“ $\vartheta = N\varphi_0/2 - \Theta_1 N/2$ (φ_0 — угол, характеризующий положение центральной линии „спицы“). Первое слагаемое в (13) связано с тангенциальным, а второе — с радиальным перемещением электронов в магнетроне.

3. УСТАНОВИВШИЙСЯ РЕЖИМ

Подставляя (13) в (12), (12a) и проводя интегрирование по ϑ , получим выражения для $\Phi(U)$ и ω_1 :

$$\Phi(U) = -\frac{\omega_0}{2Q_a} U + \frac{\pi f_0 B_m (r_a^2 - r_1^2) I_0}{C_s N U} + \frac{I_0}{2C_s \pi} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \times \\ \times \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \Psi_{r_1}(S_a, S_1) \sin \Theta_s; \quad (14)$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\pi f_0 B_m (r_a^2 - r_1^2) I_0}{C_s N U^2} \operatorname{tg} \Theta_s - \frac{I_0}{4\pi C_s U} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \times \\ \times \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \Psi_{r_1}(S_a, S_1) \frac{\cos(2\Theta_s)}{\cos \Theta_s}, \quad (14a)$$

* Фазовый сдвиг получается потому, что в момент времени, когда напряжение на резонаторе имеет максимальное значение, «спица» пространственного заряда смешена относительно середины щели сегмента на некоторый угол Θ_1 (рис. 1).

где $\Theta_s = \Theta_1 N/2$. Стационарные амплитуды автоколебаний U_i определяются из условия $\Phi(U) = 0$, если при этом так называемая „прочность предельного цикла“ $p = -[\partial\Phi(U)/\partial U]_{U_i} > 0$.

Как показано в [4], при малых токах I_0 в левых частях рабочих характеристик магнетрона, т. е. при отрицательных Θ_s , можно пренебречь влиянием радиального наведенного тока на работу магнетрона. Из (14) легко видеть, что это можно сделать по крайней мере при определении амплитуды колебания. Учитывая сказанное, будем иметь для установившейся амплитуды, мощности и частоты следующие выражения:

$$U_1^2 = \frac{2\pi f_0 B_m (r_a^2 - r_1^2) I_0 z_s}{N}, \quad P_g = \frac{U_1^2}{2z_s} = \frac{\pi f_0 B_m (r_a^2 - r_1^2) I_0}{N}, \quad (15)$$

где $z_s = Q_s / \omega_0 C_s$ и P_g — мощность колебаний,

$$\omega_1 = \omega_0 \left[1 + \frac{1}{2Q_s} \operatorname{tg} \Theta_s \right]. \quad (16)$$

В случае, когда нельзя пренебречь влиянием радиальной компоненты на частоту генератора, (16) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2Q_s} \left[\operatorname{tg} \Theta_s - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2I_0 z_s N}{\pi f_0 B_m (r_a^2 - r_1^2)}} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \Psi_{r_1}(S_a, S_1) \frac{\cos(2\Theta_s)}{\cos \Theta_s} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Эти выражения полностью совпадают с результатами, полученными в [1], за исключением зависимости последнего члена в (17) от угла Θ_s .

4. ЗАВИСИМОСТЬ ТОКА ОТ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЯ

Для вычисления коэффициента, характеризующего „прочность предельного цикла“, необходимо учесть фактическую зависимость I_0 от амплитуды колебания. В установившемся режиме систематического изменения общего заряда в „спице“ происходить не может и, следовательно, для идеализированной формы границ „спицы“ [1] (рис. 1) конвекционный ток I_k из прикатодной области должен быть равным конвекционному току в любом сечении „спицы“. Вводя обозначения: ρ — плотность заряда в „спице“ при радиусе r , ρ_1 и ρ_a — плотности заряда соответственно у границы с прикатодным слоем и у анода, $\bar{v}_{rm}(r)$ — среднее значение радиальной скорости перемещения электронов в „спице“ на радиусе r , можно записать:

$$\begin{aligned} I_0 = I_k = N \sigma r_1 h \bar{v}_{rm}(r_1) \rho_1 = N \sigma r_a h \bar{v}_{rm}(r_a) \rho_a; \\ \rho = \rho_1 \bar{v}_{rm}(r_1) r_1 / \bar{v}_{rm}(r) r. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражение для средней радиальной скорости \bar{v}_{rm} дано в [4] в виде:

$$\bar{v}_{rm}(r) = \frac{\bar{E}_\varphi(r)}{B_m} = \frac{2E_{\varphi m}(r)}{\sigma NB_m} \sin(\sigma N/2) \cos \Theta_s, \quad (18a)$$

где E_φ — тангенциальная составляющая $E'_n(r, \varphi)$,

$$E_{\varphi m}(r) = \frac{NU}{\pi r_a} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} F_1(r).$$

Подставляя (18а) в (18), получим:

$$I_0 = I_k = \frac{2hN}{\pi B_m} \frac{r_1}{r_a} F_1(r_1) \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \sin(\sigma N/2) \rho_1 U \cos \Theta_s. \quad (19)$$

Для $I_{\text{нф}}$ и $I_{\text{нр}}$, заданных соотношением (13), будем иметь:

$$I_{\text{нф}} = 2Nh f_0 (r_a^2 - r_1^2) \frac{r_1}{r_a} F_1(r_1) \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \rho_1 \sigma \times \\ \times \cos(\varphi_0 N/2); \quad (20)$$

$$I_{\text{нр}} = \frac{hN^2}{B_m \pi^2} \frac{r_1}{r_a} F_1(r_1) \left[\frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \right]^2 \rho_1 \sigma \times \\ \times U \sin(\varphi_0 N/2 + \Theta_s). \quad (21)$$

Кроме явной зависимости от амплитуды колебания (20) и (21) зависят от U , очевидно, через величины ρ_1 и σ . Действительно, изменение плотности пространственного заряда при изменении амплитуды колебания обеспечивается законами движения электронов в магнетроне. Электроны, возвращающиеся на катод, отнимают энергию у высокочастотного поля и передают ее катоду, дополнительно разогревая его. Под действием этих электронов происходит также вторичная эмиссия с катода. Все это ведет к увеличению плотности заряда в „спицах“ при возрастании амплитуды колебания. Естественно, что ρ_1 будет пропорциональна предосцилляционной плотности заряда ρ_0 в прикатодном слое. Угловой же размер σ , характеризующий ширину спицы, очевидно, с нарастанием амплитуды колебания будет уменьшаться.

Исходя из вышесказанного, предположим, что зависимость от амплитуды произведения $\rho_1 \sigma$ может быть аппроксимирована следующим соотношением:

$$\rho_1 \sigma = \rho_0 S_0 U [1 - S_1 U^2 / V_0^2], \quad (22)$$

где S_0 и S_1 —постоянные, V_0 —напряжение на аноде магнетрона. Нелинейная зависимость (22) может обеспечиваться и явлением ограничения тока с катода пространственным зарядом прикатодного слоя, и кинематикой движения электронов в магнетроне. Подставив (22) в (19), (20) и (21) и полагая, что функция $\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2}$ в процессе установления амплитуды колебания остается неизменной, получим зависимость токов $I_k = I_0$, $I_{\text{нф}}$ и $I_{\text{нр}}$ от амплитуды колебания.

5. «ПРОЧНОСТЬ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА»

Подставляя (20) и (21) (с учетом (22)) в (14), получим для определения стационарной амплитуды колебания следующее соотношение:

$$\Phi(U) = -\frac{\omega_0}{2Q_s} U + \frac{M_1}{C_s} \rho_0 S_0 \cos \Theta_s U \left[1 - \frac{S_1 U^2}{V_0^2} \right] + \\ + \frac{M_2}{C_s} \rho_0 S_0 \sin(2\Theta_s) U^2 \left[1 - \frac{S_1 U^2}{V_0^2} \right] = 0, \quad (23)$$

где

$$M_1 = 2hNf_0(r_a^2 - r_1^2) \frac{r_1}{r_a} F_1(r_1) \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2}; \quad (23a)$$

$$M_2 = \frac{hN^2}{B_m \pi^2} \frac{r_1}{r_a} F_1(r_1) \left[\frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \right]^2 \Psi_{r_1}. \quad (23b)$$

Учитывая сказанное ранее о малом влиянии радиальной составляющей наведенного тока и решая уравнение (23) относительно U , получим для стационарной амплитуды:

$$U_1^2 = \frac{V_0^2}{S_1} \frac{M_1 \rho_0 S_0 \cos \Theta_s - (\omega_0/2Q_s) C_s}{M_1 \rho_0 S_0 \cos \Theta_s}. \quad (24)$$

Для устойчивости стационарной амплитуды одночастотного колебания генератора необходимо, чтобы $p = [\partial\Phi(U)/\partial U]_{U=U_t} > 0$. Дифференцируя $\Phi(U)$ (23), получим для коэффициента, характеризующего „прочность предельного цикла“:

$$p = \frac{\omega_0}{Q_s} \left\{ (2M_1 S_0 \rho_0 \cos \Theta_s z_s - 1) \left(1 + 2 \frac{M_2}{M_1} U \sin \Theta_s \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{M_2}{M_1} U \sin \Theta_s \right\}. \quad (25)$$

Сравнивая (24) с (15) и выражая $\rho_0 S_0$ через анодный ток магнетрона, можно записать выражение p через рабочие и конструктивные параметры магнетронного генератора:

$$p = \frac{\omega_0}{Q_s} \left\{ \left[\frac{1}{1 - (2S_1 P_r z_s / V_0^2 I_0) I_0} - 1 \right] \left[1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2z_s I_0}{P_r}} \sqrt{I_0} \sin \Theta_s \times \right. \right. \\ \times \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \Psi_{r_1}(S_a, S_1) \left. \right] - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2z_s I_0}{P_r}} \sqrt{I_0} \sin \Theta_s \times \\ \times \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \Psi_{r_1}(S_a, S_1) \left. \right\}. \quad (26)$$

Следует отметить, что определение коэффициента S_0 в (22) при помощи (24) и (15) приводит к тому, что уравнение (12) справедливо лишь вблизи режима стационарного автоколебания с амплитудой, определяемой соотношением (15). Вследствие этого уравнение (12) может быть использовано лишь для описания поведения магнетронного генератора при малых отклонениях режима от стационарного.

Из (26) нетрудно видеть, что p состоит из двух слагаемых, первое из которых содержит в себе неопределенный параметр S_1 , а второе полностью определяется конструктивными и рабочими параметрами магнетрона. В частности, при достаточно малых S_1 p может быть записано в виде:

$$p = -\frac{\omega_0}{Q_s} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2z_s I_0}{P_r}} \sqrt{I_0} \sin \Theta_s \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \Psi_{r_1}(S_a, S_1). \quad (26a)$$

Нетрудно видеть, что в этом случае стационарная амплитуда одночастотного колебания будет устойчивой при отрицательных углах Θ_s , и может стать неустойчивой при положительных Θ_s . Это обстоятель-

ство может служить объяснением неустойчивости автоколебаний некоторых типов магнетронных генераторов в области больших анодных токов.

На рис. 2 построено семейство кривых pQ/ω_0 в зависимости от угла Θ_3 , при различных значениях S_1 для магнетрона, с которым было проведено экспериментальное исследование зависимости p от режима работы. При построении кривых была использована приближенная аналитическая зависимость угла рассогласования Θ_3 от тока I_0 , принятая в [1] при описании электронного смещения частоты. Вид отдельной

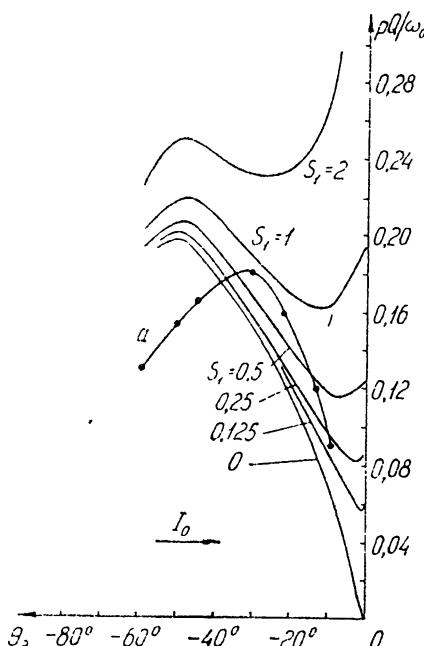


Рис. 2. Зависимость pQ/ω_0 от режима работы магнетрона.

также, что если исключить смещение теоретических кривых по углу, то между экспериментальными и теоретическими результатами будет и приближенное количественное соответствие.

Причина смещения теоретических кривых по отношению к экспериментальной кривой может заключаться как в тех допущениях и предположениях, которые были положены в основу динамической модели магнетрона, так и в приближенном характере используемой зависимости Θ_3 от I_0 .

Таким образом, из вышеизложенного можно заключить следующее.

а) В качестве модели магнетрона в режиме одночастотного автоколебания может быть выбрана автоколебательная система с одной степенью свободы, уравнение которой имеет вид (5).

б) При исследовании устойчивости амплитуды одночастотного режима автоколебаний нельзя рассматривать в (14) анодный ток магнетрона в качестве независимого параметра, так как I_0 является функцией амплитуды колебания. Стационарное значение I_0 , как нетрудно видеть из (24) и (15), пропорционально квадрату амплитуды.

* Результаты экспериментального исследования флюктуаций колебаний магнетрона приведены в статье «Флюктуации амплитуды и частоты магнетронного генератора», помещенной в этом же выпуске журнала (стр. 270).

в) Зависимость тока через магнетрон и наведенных токов от амплитуды колебания определяется изменением пространственного заряда в „спицах“.

г) При нахождении параметра p , характеризующего „прочность“ предельного цикла, оказывается существенным учет радиального движения электронов, приводящий при рассмотрении взаимодействия СВЧ поля с электронами к характерному изменению p (максимум на кривой pQ/ω_0 рис. 2) при изменении режима генерации.

Проведенный анализ одночастотного режима колебания магнетронного генератора не может претендовать на полноту в силу предположительного характера соотношения (22), но, по-видимому, некоторые моменты работы генератора, по крайней мере, качественно он передает правильно и может служить основой для дальнейших исследований в этом направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Богоявленов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958
2. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 145 (1950).
3. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 20 (1958).
4. С. И. Бычков, Вопросы теории и практического применения многорезонаторных магнетронов, ЛКБВИА им. А. Ф. Можайского, 1958
5. А. Г. Гуревич, Полярные резонаторы и волноводы, изд. Сов. радио, М., 1952.
6. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, изд. ВКАС, М., 1949.
7. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, Гостехиздат, М., 1953.
8. А. А. Андронов, А. А. Витт, ЖТФ, 4, 122 (1934)
9. Магнетроны сантиметрового диапазона, часть 1, изд. Сов. радио, М., 1950.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 июля 1961 г.

A REGIME OF STATIONARY SINGLE-FREQUENCY OSCILLATION OF A MAGNETRON OSCILLATOR

V. N. Nikonov

A magnetron oscillator has been considered as an autooscillating system with one degree of freedom. The dependence of an induced current on an oscillation amplitude is determined. The stability of stationary oscillation amplitude has been studied.

ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ МАГНЕТРОННОГО ГЕНЕРАТОРА*

B. H. Никонов

Исследованы «естественные» флюктуации колебания магнетронного генератора. Получены выражения для функций корреляций амплитуды и частоты, а также их взаимной функции корреляции. Приведены данные экспериментального изучения флюктуаций и результаты сопоставления их с теорией.

Вопрос о флюктуациях в автоколебательных системах в общем виде решен в работах [1–4]. В работах [5–7] рассмотрены также флюктуации в различных конкретных генераторах. В то же время теории флюктуаций в магнетронном генераторе в настоящее время не существует. Работа [8], посвященная рассмотрению флюктуаций в магнетроне, не опирается на конкретную электронную модель, и, следовательно, ее выводы не могут быть применены для объяснения экспериментальных результатов исследования флюктуаций магнетронного генератора.

Целью настоящей статьи является изучение флюктуаций магнетронного генератора в непрерывном режиме работы. В конце статьи приведены результаты экспериментального исследования флюктуаций магнетрона и проведено сопоставление с развиваемой ниже теорией.

1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФЛЮКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЯ

Построение теории флюктуаций колебания магнетронного генератора производится на основании принятой в [9] автоколебательной модели магнетрона. Согласно [9], одночастотные автоколебания магнетрона приближенно описываются системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 y - \frac{\omega_0 x}{Q_s}; \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\omega_0 x + \frac{1}{C_s} I_n(x, y), \quad (1a)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{L_s C_s}$, $Q_s = \omega_0 L_s / R_s$, L_s , C_s и R_s — параметры эквивалентного контура магнетронного генератора; $x = (L_s/C_s)^{1/2} i$; i и $y = v$ — соответственно ток и напряжение на эквивалентной емкости контура, $I_n(x, y)$ — наведенный ток.

В качестве источников флюктуаций колебания рассматриваются тепловые флюктуации в контуре эквивалентного генератора и дробовой эффект потока электронов. Учет тепловых флюктуаций резонатора может быть проведен методом поверхностных случайных ЭДС [15]. Уравнение (1) с учетом тепловых флюктуаций запишется в виде:

* Результаты работы доложены на научной сессии общества им. А. С. Попова, М., 1961.

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 y - \frac{\omega_0 x}{Q_s} + \omega_0 \xi_1(t), \quad (2)$$

где $\xi_1(t)$ — ЭДС, развивающаяся в эквивалентном контуре сопротивлением R_s , находящимся при температуре анодного блока магнетрона, и имеющая спектральную плотность

$$w_{\xi_1} = 4kT_a R_s,$$

где k — постоянная Больцмана, T_a — абсолютная температура анодного блока.

При учете дробового эффекта потоков электронов будем пренебречь дробовым эффектом тех электронов, которые в результате взаимодействия с высокочастотным полем попадают на катод. Электроны, отдающие энергию высокочастотному полю, образуют $N/2$ „спицы“. Так как отдельные спицы пространственно разделены, то естественно считать дробовые эффекты в потоках электронов, попадающих в различные спицы, совершенно независимыми. Неравномерный выход электронов с катода проявится в образовании в потоке электронов уплотнений и разрежений. Эти разрежения и уплотнения, перемещаясь со спицей, взаимодействуют с высокочастотным полем, обусловливая прямое воздействие дробового эффекта на колебания магнетрона.

Таким образом, очевидно, уравнение (1а) с учетом дробового эффекта может быть записано в виде:

$$\frac{dy}{dt} = -\omega_0 x + \frac{1}{C_s} I_n(y, x) + \frac{1}{C_s} \xi'_n(t, x, y), \quad (2a)$$

где $\xi'_n(t, x, y)$ — случайная составляющая наведенного тока, обусловленная дробовым эффектом в потоке электронов. Легко видеть, что $\xi'_n(t, x, y)$ должна быть функцией y и x , так как при отсутствии колебаний отсутствует и пространственный заряд, сформированный в спицы и обуславливающий наведенный ток $I_n(x, y)$.

Переходя в (2) и (2а) к полярным координатам $x = U \sin \vartheta$, $y = U \cos \vartheta$ и применяя, как обычно, метод усреднения [3,5], получим:

$$\frac{dU}{dt} = -\Phi(U) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\omega_1 \xi_1(t) \sin \vartheta + \frac{1}{C_s} \xi'_n(t, U \cos \vartheta, U \sin \vartheta) \cos \vartheta \right] d\vartheta; \quad (3)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_1 + \Psi(U) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\omega_1 \xi_1(t) \cos \vartheta}{U_0} - \frac{1}{C_s U} \xi'_n(t, U \cos \vartheta, U \sin \vartheta) \sin \vartheta \right] d\vartheta. \quad (3a)$$

Наличие флюктуационных сил в уравнениях (3)–(3а) приводит к случайной модуляции амплитуды и фазы колебания вида $U = U_0 [1 + \alpha(t)]$ и $\vartheta = \vartheta_0 + \varphi(t)$, где $\alpha(t)$ — случайная глубина модуляции амплитуды и $\varphi(t)$ — случайная фаза колебания. Положив $|\alpha(t)| \ll 1$ и $d\vartheta_0/dt = \omega_1 + \Psi(U)$ и произведя линеаризацию уравнений (3)–(3а) по $\alpha(t)$, получим уравнения для малых флюктуаций амплитуды и фазы колебаний:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\omega_1 \xi_1(t)}{U_0} \sin \vartheta + \right. \quad (4)$$

$$\left. + \frac{1}{C_s U_0} \xi'_n(t, U_0 \cos \vartheta, U_0 \sin \vartheta) \cos \vartheta \right] d\vartheta;$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \nu(t) = \Delta\alpha(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\omega_1 \xi_1(t)}{U_0} \cos \vartheta - \right. \quad (4a)$$

$$\left. - \frac{1}{C_s U_0} \xi'_n(t, U_0 \cos \vartheta, U_0 \sin \vartheta) \sin \vartheta \right] d\vartheta,$$

где

$$p = p(U_0) = - \left[\frac{\partial \Phi(U)}{\partial U} \right]_{U=U_0}; \quad \Delta = U_0 q(U_0) = U_0 \left[\frac{\partial \Psi(U)}{\partial U} \right]_{U=U_0}.$$

Согласно работе [3], (4) и (4a) можно переписать в виде:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha(t) + \frac{\omega_1 \xi_1(t)}{U_0} \sin \vartheta + \frac{1}{C_s U_0} \xi'_n(t, U_0 \cos \vartheta, U_0 \sin \vartheta) \cos \vartheta; \quad (5)$$

$$\nu(t) = \Delta\alpha(t) + \frac{\omega_1 \xi_1(t)}{U_0} \cos \vartheta - \frac{1}{C_s U_0} \xi'_n(t, U_0 \cos \vartheta, U_0 \sin \vartheta) \sin \vartheta, \quad (5a)$$

если при этом считать, что спектры подынтегральных функций в (4) и (4a) отличны от нуля в интервале частот от 0 до $0,1 \omega_1$.

2. РАСЧЕТ СЛУЧАЙНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ НАВЕДЕННОГО ТОКА

Согласно [10], ток, наводимый на резонансной системе магнетрона одной „спицей“ $i_n(t)$ (динамическая функция времени), может быть представлен в виде:

$$i_n(t) = i_\varphi + i_r(t) = h \int_{r_1}^{r_a} \int_{\varphi_0 - \sigma}^{\varphi_0 + \sigma} r \rho v_\varphi E_{0\varphi}^{(1)} dr d\varphi + h \int_{r_1}^{r_a} \int_{\varphi_0 - \sigma}^{\varphi_0 + \sigma} r \rho v_r E_{0r}^{(1)} dr d\varphi, \quad (6)$$

где h — длина анодного блока, r_1 — радиус прикатодного слоя пространственного заряда, 2σ — угловая ширина спицы, φ_0 — угловая координата, определяющая положение центра спицы, ρ — плотность пространственного заряда, v_φ и v_r — соответственно тангенциальная и радиальная составляющие скорости движения заряда, $E_{0\varphi}^{(1)}$ и $E_{0r}^{(1)}$ — первые гармоники тангенциальной и радиальной составляющих напряженности статического поля, вычисление которых проведено в [10].

Исходя из того, что дробовой эффект катода приводит к образованию уплотнений и разрежений в потоках электронов, входящих в спицы, положим, что пространственная плотность заряда, выходящего в спицу, может быть представлена в виде:

$$\rho_1 = \bar{\rho}_1 + \rho_1(t),$$

где $\rho_1(t)$ — случайная функция времени и $\bar{\rho}_1(t) = 0$ *.

* Чертка сверху обозначает временное усреднение

Для средних значений плотности заряда $\bar{\rho}$ на некотором расстоянии r от катода и ρ_1 в стационарном режиме генерации справедливо соотношение (см. [9])

$$\bar{\rho} = \rho_1 r_1 \bar{v}_r(r_1) / r \bar{v}_r(r).$$

Нетрудно заметить, что и для случайных составляющих плотности заряда будет иметь место аналогичное соотношение

$$\rho(t) = \rho_1(t_1) \frac{r_1 \bar{v}_r(r_1)}{r \bar{v}_r(r)} = \frac{i_0(t_1)}{2\sigma h r \bar{v}_r(r)}, \quad (7)$$

где $i_0(t_1)$ — случайная составляющая конвекционного тока, проходящего через поверхность, расположенную при r_1 и перпендикулярную радиусу магнетрона, а t и t_1 связаны между собой соотношением

$$t = t_1 + t_{np}$$

(t_{np} — время пролета электронов от r_1 до r).

Подставляя в выражение для наведенного тока (6) вместо ρ — $\bar{\rho} + \rho(t)$ и выделяя случайную составляющую тока, наводимого одной спицей, получим:

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = & \xi_\varphi(t) + \xi_\rho(t) = h \int_{r_1}^{r_a} \int_{\varphi_0 - \sigma}^{\varphi_0 + \sigma} r \rho(t) v_\varphi E_{0\varphi}^{(1)} dr d\varphi + \\ & + h \int_{r_1}^{r_a} \int_{\varphi_0 - \sigma}^{\varphi_0 + \sigma} r \rho(t) v_r E_{0r}^{(1)} dr d\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя в (8) (7), вместо v_φ и v_r усредненные выражения [10]

$$\bar{v}_\varphi = \frac{4\pi f_0 r}{N}; \quad \bar{v}_r(r) = \frac{\bar{v}_{rm}(r)}{\cos \Theta_s} \Phi_1(\varphi_0, \Theta_s),$$

где

$$\Theta_s = \Theta_1 N/2;$$

$$\bar{v}_{rm}(r) = \frac{E_{\varphi m}(r)}{B_m} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2}; \quad \Phi_1(\varphi_0, \Theta_s) = \cos\left(\frac{\varphi_0 N}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_0 N}{2} - \Theta_s\right),$$

и учитывая, что, согласно [10],

$$E_{0\varphi}^{(1)} = \frac{N}{\pi r_a} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \left(\frac{r_1}{r_a}\right)^{N/2-1} \left[\frac{1 - (r_k/r)^N}{1 - (r_k/r_a)^N} \right] \cos \frac{N\varphi}{2};$$

$$E_{0r}^{(1)} = \frac{N}{\pi r_a} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \left(\frac{r_1}{r_a}\right)^{N/2-1} \left[\frac{1 + (r_k/r)^N}{1 - (r_k/r_a)^N} \right] \sin \frac{N\varphi}{2},$$

формула (8) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \xi_n(t) = & \xi_\varphi(t) + \xi_\rho(t) = \frac{\pi f_0 B_m}{U_0 \sin(\sigma N/2) \cos \Theta_s} \int_{r_1}^{r_a} \int_{\varphi_0 - \sigma}^{\varphi_0 + \sigma} i_0(t_1) r \cos \frac{\varphi N}{2} dr d\varphi + \\ & + \frac{N}{\pi r_a 2\sigma \cos \Theta_s} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \Phi_1(\varphi_0, \Theta_s) \int_{r_1}^{r_a} \int_{\varphi_0 - \sigma}^{\varphi_0 + \sigma} i_0(t_1) F_2(r) \sin \frac{\varphi N}{2} dr d\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

После проведения интегрирования по φ будем иметь:

$$\xi_n(t) = \xi_\varphi + \xi_p = -\frac{4\pi f_0 B_m}{NU_0 \cos \Theta_0} \cos \frac{\varphi_0 N}{2} \int_{r_1}^{r_a} i_0(t_1) r dr + \\ + \frac{N}{2\pi r_a \cos \Theta_0} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \Phi_2(\varphi_0, \Theta_0) \int_{r_1}^{r_a} i_0(t_1) F_2(r) dr, \quad (10)$$

где

$$\Phi_2(\varphi_0, \Theta_0) = \sin(\varphi_0 N) \cos(\varphi_0 N/2 - \Theta_0).$$

При синхронном движении спицы

$$\varphi_0 N/2 = \omega_0 t + \Theta_0 = \vartheta + \Theta_0.$$

Проведем вычисление функции корреляции $\xi_\varphi(t)$ — случайной составляющей тока, наводимой за счет тангенциального движения электронов. На примере этого расчета вводятся основные предположения, при которых выше будет произведен расчет функций, характеризующих флюктуации амплитуды и частоты колебания магнетрона.

Записывая выражение для $\xi_\varphi(t)$ (10) в момент $t + \tau$, перемножая его с выражением $\xi_\varphi(t)$ в момент t и произведя временное усреднение, получим:

$$\Phi_{\xi_\varphi}(\tau) = \frac{8\pi^2 f_0^2 B_m^2}{N^2 U_0^2 \cos^2 \Theta_0} \int_{r_1}^{r_a} \int_{r_1}^{r_a} \Phi_{i_0}[\tau - (t_{np\tau} - t_{np_0})] r_0 r_\tau dr_0 dr_\tau |\cos \omega_0 \tau|, \quad (11)$$

где $\Phi_{i_0}(\tau)$ — функция корреляции случайной составляющей тока, проходящей через поверхность, перпендикулярную радиусу r и расположенную при значении $r = r_1$. Для дальнейших вычислений предположим, что $\Phi_{i_0}(\tau)$ представляет собой дельта-функцию, т. е.

$$\Phi_{i_0}(\tau) = 4\pi e I_1 \delta(\tau) \quad (12)$$

(где $I_1 = 2I_0/N$, I_0 — анодный ток магнетрона). Индекс 0 и τ при r означает, что эти значения радиуса характеризуют соответственно положение электронов в момент t и в момент $t + \tau$.

Подставляя (12) в (11), нетрудно видеть, что интеграл будет отличен от нуля при выполнении условия

$$t_{np\tau} - t_{np_0} = \tau. \quad (13)$$

Время пролета от r_1 до r , очевидно, можно определить в виде интеграла

$$t_{np} = \int_{r_1}^r \frac{dr}{v_r(r)} = F(r) - F(r_1). \quad (14)$$

Тогда $t_{np\tau} - t_{np_0} = F(r_\tau) - F(r_0)$ и (13) может быть переписано в виде:

$$F(r_\tau) - F(r_0) = \tau. \quad (13a)$$

Однако при зависимости \bar{v}_r от r , определенной в [10], соотношение (13a) для установления вида функции $r_\tau(r_0)$ является трансцендентным и интеграцию в (15) довести до конца не удается. Для дальнейших вычислений вместо $\bar{v}_r(r)$ будем подставлять некоторое усредненное значение \bar{v}_r . Усреднение $\bar{v}_r(r)$ производится за все время пролета от r_1

до анода. Таким образом, в дальнейшем считается, что электроны движутся равномерно от r_1 до r_a . Тогда $t_{np} = (r - r_1) / \bar{v}_r$, $T_{np} = (r_a - r_1) / \bar{v}_r$ — полное время пролета от r_1 до r_a , и вместо (13а) будем иметь соотношение

$$r_\tau - r_0 = \bar{v}_r \tau, \quad (14a)$$

а для функции корреляции — выражение

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi_\varphi}(\tau) = 2\pi \frac{16\pi^2 f_0^2 B_m^2 e I_1}{N^2 U_0^2 \cos^2 \Theta_s} \frac{(r_a^2 - r_1^2)^2}{3} \frac{[1 + r_1/r_a + (r_1/r_a)^2]}{(1 + r_1/r_a)^2} \times \\ \times \frac{|\cos(\omega_0 \tau)|}{T_{np}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[\frac{1 + (r_1/r_a)^2}{1 + r_1/r_a + (r_1/r_a)^2} \right] \frac{|\tau|}{T_{np}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{(1 - r_1/r_a)^2}{1 + r_1/r_a + (r_1/r_a)^2} \right] \left(\frac{|\tau|}{T_{np}} \right)^3 \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

3. ФУНКЦИИ КОРРЕЛЯЦИИ И ОПЕКТРЫ

Записывая случайную составляющую тока, наводимого $N/2$ спицами, в виде суммы величин $\xi_{n_i}(t)$ (10) и отождествляя эту сумму с $\xi'_i(t, U_0 \cos \vartheta, U_0 \sin \vartheta)$ в (5) и (5а), получим следующие уравнения для флюктуаций амплитуды и фазы колебания:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -p\alpha(t) + \frac{\omega_1}{U_0} \xi_1(t) \sin \vartheta + \frac{1}{C_s U_0} \sum_{i=1}^N [\xi_{\varphi i}(t) + \xi_{\rho i}(t)] \cos \vartheta; \quad (16)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \nu(t) = \Delta\alpha(t) + \frac{\omega_1}{U_0} \xi_1(t) \cos \vartheta - \frac{1}{C_s U_0} \sum_{i=1}^N [\xi_{\varphi i}(t) + \xi_{\rho i}(t)] \sin \vartheta, \quad (16a)$$

где $\xi_{\varphi i}$ и $\xi_{\rho i}$ заданы соотношением (10), индекс i указывает на номер спицы, а суммирование ведется по номерам спицы. Для полного описания флюктуаций колебания генератора необходимо знать функции корреляции амплитудных флюктуаций $\Phi_\alpha(\tau)$, частотных флюктуаций $\Phi_\nu(\tau)$, а также их взаимную функцию корреляции $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$ или их спектральные плотности (соответственно $w_\alpha(\Omega)$, $w_\nu(\Omega)$ и $w_{\alpha\nu}(\Omega)$).

Амплитудные флюктуации. Решая (16) относительно $\alpha(t)$ (см. [11]), будем иметь:

$$\alpha(t) = \int_0^\infty f(t - \theta) e^{-p\theta} d\theta, \quad (17)$$

где

$$f(t) = \frac{\omega_1}{U_0} \xi_1(t) \sin \vartheta + \frac{1}{C_s U_0} \sum_{i=1}^N [\xi_{\varphi i}(t) + \xi_{\rho i}(t)] \cos \vartheta. \quad (17a)$$

Записав выражение (17) для момента $t + \tau$, перемножив его с (17) и произведя временное усреднение, получим для функции корреляции амплитудных флюктуаций:

$$\Phi_\alpha(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_f(\tau + \theta - \eta) e^{-p(\theta-\eta)} d\theta d\eta, \quad (18)$$

где $\Phi_f(\tau)$ — функция корреляции $f(t)$.

Функция корреляции $f(t)$ после проведения вычислений при тех же упрощающих расчет допущениях, что и при вычислении (15), может быть представлена в виде:

$$\Phi_f(\tau) = 2\pi D_0 \delta(\tau) \cos \omega_0 \tau + \frac{2\pi}{C_s^2 U_0^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\lambda_{ii}}{T_{np}} \left[1 - \sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \left| \frac{\tau}{T_{np}} \right|^n \right] \right), \quad (19)$$

где $i = 1, 2, 3$; $M_1 = 3$, $M_2 = N - 1$, $M_3 = N/2 + 1$. При $\tau = T_{np}$ (19) обращается в нуль. Подставляя (19) в (18), получим после вычисления интеграла:

$$\Phi_a(\tau) = 2\pi \frac{D_0 e^{-p|\tau|}}{2p} + \frac{2\pi}{C_s^2 U_0^2} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_{ii}}{T_{np} p^2} \times$$

$$\times \begin{cases} \left[\left(1 - \sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \left| \frac{\tau}{T_{np}} \right|^n \right) + e^{-pT_{np}} \operatorname{ch}(p|\tau|) \sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)! p^k T_{np}^k} - \sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \sum_{k=2}^n (k=2m) \frac{n! |\tau|^{n-k}}{(n-k)! p^k T_{np}^n} - e^{-p|\tau|} \sum_{n=1}^{M_i} (n=2m-1) \frac{n! D_{nl}}{p^n T_{np}^n} \right] \\ \text{при } \tau \leqslant T_{np}; \\ \left[e^{-p|\tau|} \left[\operatorname{ch}(pT_{np}) \left(\sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \sum_{k=1}^n (k=2m-1) \frac{n!}{(n-k)! p^k T_{np}^k} \right) - \sum_{n=1}^{M_i} (n=2m-1) \frac{n! D_{nl}}{p^n T_{np}^n} - \operatorname{sh}(pT_{np}) \left(\sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \sum_{k=0}^n (k=2m) \frac{n!}{(n-k)! p^k T_{np}^k} - 1 \right) \right] \right] \\ \text{при } \tau > T_{np}, \end{cases} \quad (20)$$

где круглые скобки после знака суммы обозначают индексы, по которым ведется суммирование ($i = 1, 2, 3$).

Выражение (20) может быть существенно упрощено, если учесть, что для магнетронных генераторов соблюдается обычно условие $pT_{np} \ll 1$ (с увеличением времени пролета p обычно уменьшается). Разлагая (20) в ряд по степеням pT_{np} и отбрасывая члены ряда выше pT_{np} , получим для функции корреляции амплитудных флюктуаций:

$$\Phi_a(\tau) = 2\pi D_0 \frac{e^{-p|\tau|}}{2p} + \frac{2\pi}{C_s^2 U_0^2} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_{ii}}{2p} \left(\sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \frac{n}{n+1} \right) \begin{cases} 1 \text{ при } \tau \leqslant T_{np}; \\ e^{-p|\tau|} \text{ при } \tau > T_{np}. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь

$$D_0 = \omega_1^2 2kT_a R_s / U_0^2;$$

$$\lambda_{i1} \sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \frac{n}{n+1} = \frac{2\pi^2 f_0^2 B_m^2 e I_l [r_a^2 - r_1^2]^2}{N^2 U_0^2};$$

$$\lambda_{i2} \sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \frac{n}{n+1} = \frac{c I_l}{4\pi^2} \left[\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \right]^2 A_a(r_1, r_a) \sin^2 \Theta_s;$$

$$\lambda_{i3} \sum_{n=1}^{M_i} D_{nl} \frac{n}{n+1} = \frac{4e I_l B_m f_0 (r_a^2 - r_1^2)}{N U_0} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} B_a(r_1, r_a) \sin \Theta_s;$$

$$A_a(r_a, r_1) = \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_a} \right)^{N/2} \right]^2 \simeq 1; \quad B_a(r_a, r_1) = \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_a} \right)^{N/2} \right] \simeq 1.$$

Считая, что каждая „спица“ вносит одинаковую долю в анодный ток I_0 магнетрона, производя суммирование по i в (21) и учитывая, что

$$U_0^2 = 2P_r z_3, \quad \frac{R_3}{z_3} = \frac{1}{Q_3^2}, \quad C_3 = \frac{Q_3}{\omega_0 z_3},$$

получим вместо (21):

$$\begin{aligned} \Phi_a(\tau) = & 2\pi \frac{\omega_0^2}{Q_3^2} \left[\frac{kT_a}{2P_r} \frac{e^{-p|\tau|}}{p} + \left(\frac{e}{4I_0} + \frac{eI_0 z_3}{8\pi^2 P_r} \left[\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \right]^2 \times \right. \right. \\ & \times A_a(r_1, r_a) \sin^2 \Theta_3 + \frac{e \sqrt{z_3}}{2\pi \sqrt{2P_r}} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} B_a(r_1, r_a) \sin \Theta_3 \Big) \Big] \times \\ & \times \begin{cases} 1/p \text{ при } |\tau| \leq T_{np}; \\ (1/p)e^{-p|\tau|} \text{ при } |\tau| > T_{np}, \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

где P_r — мощность генерации магнетрона, z_3 — эквивалентное резонансное сопротивление. Выражение (22) для функции корреляции записано через величины, которые характеризуют конструкцию магнетрона и режим работы и могут быть легко измерены. Используя известное соотношение между функцией корреляции и спектральной плотностью

$$w(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau, \quad (23)$$

получим для спектра флюктуаций амплитуды:

$$\begin{aligned} w_a(\Omega) = & \frac{\omega_0^2}{Q_3^2} \left\{ \frac{kT_a}{P_r} \frac{1}{p^2 + \Omega^2} + \frac{A}{p} \left[\frac{e^{-pT_{np}}}{p^2 + \Omega^2} (p \cos \Omega T_{np} - \Omega \sin \Omega T_{np}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\sin \Omega T_{np}}{\Omega} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Разложив (24) в ряд по степеням pT_{np} и отбросив все члены ряда выше первой степени, будем иметь:

$$\begin{aligned} w_a(\Omega) = & \left(\frac{\omega_0}{Q_3} \right)^2 \left\{ \frac{kT_a}{P_r} + \frac{e}{2I_0} \left[1 + \frac{\sqrt{2z_3 I_0}}{2\pi \sqrt{P_r}} \sqrt{I_0} \sin \Theta_3 B_a(r_a, r_1) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \right]^2 \right\} \frac{1}{p^2 + \Omega^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Первый член в (25) представляет собой результат воздействия тепловых флюктуаций блока магнетрона, а второй член, стоящий в квадратных скобках в (25), — дробовой эффект катода. Первый член в квадратных скобках обусловлен тангенциальными движениями электронов, второй — радиальным, а третий член является результатом полной корреляции первого и второго.

Из (25) легко видеть, что влияние дробового эффекта на амплитуду колебания магнетрона при $\sin \Theta_3 = 0$ осуществляется только за счет тангенциального движения электронов. Зависимость $w_a(\Omega)$ от Ω

в случае магнетронного генератора при $pT_{\text{пп}} \ll 1$ аналогична зависимости спектра амплитудных флюктуаций от частоты в случае обычных ламповых генераторов.

Оценим удельную роль тепловой и дробовой составляющей $w_\alpha(\Omega)$ (25) при $\sin \Theta_s = 0$. При $T_a = 300^\circ$ будем иметь

$$\frac{w_{\alpha \text{ дроб}}}{w_{\alpha \text{ тепл}}} = \frac{e}{2kT_a} \frac{P_r}{I_0} = 20 \frac{P_r}{I_0}.$$

Отношение P_r/I_0 для большинства реальных магнетронов больше 100. Таким образом, тепловыми шумами резонаторов анодного блока магнетрона практически всегда можно пренебречь по сравнению с его дробовым шумом.

Частотные флюктуации. Используя (22а), нетрудно получить функцию корреляции частотных флюктуаций

$$\Phi_\psi(\tau) = \Phi_\psi(\tau) + \Delta^2 \Phi_\alpha(\tau) + \Delta [\Phi_{\alpha\psi}(\tau) + \Phi_{\psi\alpha}(\tau)]. \quad (26)$$

В (26) $\Phi_\psi(\tau)$ — функция корреляции функции

$$\Psi(t) = \frac{\omega_1}{U_0} \xi_1(t) \cos \vartheta - \frac{1}{C_s U_0} \sum_{i=1}^N [\xi_{\varphi i}(t) + \xi_{pi}(t)] \sin \vartheta; \quad (26a)$$

$$\Phi_{\alpha\psi}(\tau) + \Phi_{\psi\alpha}(\tau) = \int_0^\infty [\Phi_{f\psi}(\tau + \Theta) + \Phi_{\psi f}(\tau - \Theta)] e^{-p\Theta} d\Theta, \quad (27)$$

где $\Phi_{\alpha\psi}(\tau)$ — взаимная функция корреляции амплитудных флюктуаций $\alpha(t)$ и функции $\Psi(t)$, $\Phi_{f\psi}$ — взаимная функция корреляции $f(t)$ и $\Psi(t)$. Таким образом, функция корреляции частотных флюктуаций колебания состоит из суммы трех функций: $\Phi_\psi(\tau)$, характеризующей непосредственное воздействие тепловых и дробовых шумов на частоту колебания, $\Delta^2 \Phi_\alpha(\tau)$ и $\Delta [\Phi_{\alpha\psi} + \Phi_{\psi\alpha}]$, появляющейся вследствие неизохронности генератора.

Вычисление функции корреляции $\Phi_\psi(\tau)$ аналогично вычислению функции $\Phi_f(\tau)$ (19):

$$\Phi_\psi(\tau) = \overline{\Psi(t) \Psi(t + \tau)} = 2\pi D_0 \delta(\tau) \cos(\omega_0 \tau) + \\ + \frac{2\pi}{C_s^2 U_0^2} \sum_{i=1}^N \frac{\gamma_i}{T_{\text{пп}}} \left[1 - \sum_{n=1}^{M_i} D_{ni} \left| \frac{\tau}{T_{\text{пп}}} \right|^n \right] \quad . \quad (28)$$

$$(l = 1, 2, 3; M_1 = 3, M_2 = N - 1, M_3 = N/2 + 1).$$

Учитывая, что при практических режимах работы магнетрона $T_{\text{пп}}$ — малая величина ($pT_{\text{пп}} \ll 1$) и что обычно представляет интерес спектр флюктуаций в диапазоне частот $0 \div p$, можно заменить (28) предельной функцией корреляции. Совершая предельный переход в (28) при $T_{\text{пп}} \rightarrow 0$, получим после выполнения суммирования:

$$\Phi_\psi(\tau) = 2\pi \frac{\omega_0^2}{Q_s^2} \left\{ \frac{kT_a}{2P_r} \cos(\omega_0 \tau) + \frac{e}{4I_0} \operatorname{tg}^2 \Theta_s + \frac{eI_0 z_s}{32\pi^2 P_r} \times \right. \\ \times \left[\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \right]^2 A_\alpha(r_1, r_a) \frac{|1 - \operatorname{tg}^2 \Theta_s|^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_s} - \frac{eVz_s}{4\pi\sqrt{2P_r}} \times \quad (29) \\ \times \left. \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} B_\alpha(r_1, r_a) \operatorname{tg} \Theta_s \frac{\cos(2\Theta_s)}{\cos \Theta_s} \right\} \delta(\tau),$$

где $A_a(r_1, r_a)$ и $B_a(r_1, r_a)$ задаются выражениями (21). Из (29) следует, что в отличие от случая амплитудных флюктуаций (22) непосредственное влияние дробового эффекта на частоту колебания магнетрона при $\Theta_s = 0$ осуществляется только за счет радиального движения электронов.

Рассчитывая аналогично $\Phi_f(\tau)$ и $\Phi_\psi(\tau)$ функции $\Phi_{f\psi}(\tau)$ и $\Phi_{\psi f}(\tau)$ и подставляя их в (27), получим после интегрирования для функции $\Phi_{a\psi}(\tau) + \Phi_{\psi a}(\tau)$ в том же приближении, что и (22):

$$\begin{aligned} \Phi_{a\psi}(\tau) + \Phi_{\psi a}(\tau) = & -2\pi \frac{\omega_0^2}{Q_s^2} \left\{ \frac{e}{4I_0} \operatorname{tg} \Theta_s - \frac{eI_0 z_s}{16\pi^2 P_r} \left[\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \right. \right. \\ & \times \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \left. \right]^2 A_a(r_1, r_a) \operatorname{tg} \Theta_s \cos(2\Theta_s) - \frac{e\sqrt{2z_s}}{4\pi\sqrt{P_r}} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \times \\ & \times \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} B_a(r_1, r_a) \frac{\cos(3\Theta_s)}{\cos^2 \Theta_s} \left. \right\} \begin{cases} 1 & \text{при } |\tau| \leq T_{np}; \\ e^{-p|\tau|} & \text{при } |\tau| > T_{np}. \end{cases} \quad (30) \end{aligned}$$

Полная функция корреляции частотных флюктуаций $\Phi_v(\tau)$ колебания получится в результате подстановки (22), (29) и (30) в (26). Подставляя функцию $\Phi_v(\tau)$ в (23) и производя интегрирование, найдем выражение для спектральной плотности частотных флюктуаций $w_v(\Omega)$:

$$\begin{aligned} w_v(\Omega) = & \frac{\omega_0^2}{Q_s^2} \left[\frac{kT_a}{P_r} \left[1 + \frac{\Delta^2/p^2}{1+\Omega^2/p^2} \right] + \frac{e}{2I_0} \operatorname{tg}^2 \Theta_s \frac{(1+\Delta/p \operatorname{tg} \Theta_s)^2 + \Omega^2/p^2}{1+\Omega^2/p^2} + \right. \\ & + \frac{eI_0 z_s}{16\pi^2 P_r} \left[\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \right]^2 A_a \frac{(1-\operatorname{tg}^2 \Theta_s)^2}{1+\operatorname{tg}^2 \Theta_s} \frac{(1-\Delta \operatorname{tg}(2\Theta_s)/p)^2 + \Omega^2/p^2}{(1+\Omega^2/p^2)} + \\ & \left. + \frac{e\sqrt{z_s}}{2\pi\sqrt{2P_r}} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} B_a \left[-\operatorname{tg} \Theta_s \frac{\cos(2\Theta_s)}{\cos \Theta_s} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2(\Delta^2/p^2) \sin \Theta_s - \Delta \cos(3\Theta_s)/p \cos^2 \Theta_s}{1+\Omega^2/p^2} \right] \right], \quad (31) \end{aligned}$$

где, согласно [9],

$$\begin{aligned} p = & - \left[\frac{\partial \Phi(U)}{\partial U} \right]_{U=U_0} = \frac{\omega_0}{Q_s} \left\{ \left(\frac{1}{1-2S_1 P_r z_s / V_0^2} - 1 \right) \times \right. \\ & \times \left[1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2z_s I_0}{P_r}} \sqrt{I_0} \sin \Theta_s \Phi_{p_1} \right] - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2z_s I_0}{P_r}} \sqrt{I_0} \sin \Theta_s \Phi_{p_2} \left. \right\}; \quad (31a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta = U_0 \left[\frac{\partial \Psi(U)}{\partial U} \right]_{U=U_0} = & - \frac{\omega_0}{Q_s} \left\{ \left(\frac{1}{1-2S_1 P_r z_s / V_0^2} - 1 \right) \times \right. \\ & \times \left[\operatorname{tg} \Theta_s - \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2z_s I_0}{P_r}} \sqrt{I_0} \frac{\cos(2\Theta_s)}{\cos \Theta_s} \Phi_{p_1} \right] + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{2z_s I_0}{P_r}} \sqrt{I_0} \frac{\cos(2\Theta_s)}{\cos \Theta_s} \Phi_{p_2} \left. \right\}. \quad (31b) \end{aligned}$$

Из (31a) и (31b) нетрудно видеть, что в случае магнетронного генератора не выполняется соотношение $\Delta = -p \operatorname{tg} \Theta_s$, которое обычно справедливо в первом приближении для ламповых генераторов и кристаллов. В случае, когда $\Delta = 0$, (31) запишется в виде:

$$w_s(\Omega) = \left(\frac{\omega_0}{Q_s} \right)^2 \left\{ \frac{kT_a}{P_r} + \frac{e}{2I_0} \left[\operatorname{tg} \Theta_s - \frac{1}{4\pi} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times B_\alpha(r_a, r_i) \sqrt{\frac{2I_0 z_s}{P_r}} \sqrt{I_0} \frac{\cos(2\Theta_s)}{\cos \Theta_s} \right]^2 \right\}. \quad (32)$$

Оценим удельную роль тепловой и дробовой составляющих $w_s(\Omega)$ (32) при $\operatorname{tg} \Theta_s = 0$. Полагая

$$\left[\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \right]^2 A_\alpha(r_1, r_a) = 0.5,$$

будем иметь для $T_a = 300^{\circ}\text{K}$

$$\frac{w_{\text{в дроб}}}{w_{\text{в тепл}}} = \frac{0,5}{16\pi^2} \frac{eI_0}{kT_a} z_3 \approx 0,1 I_0 z_3 .$$

При $z \approx 10^3$ ом и $I_0 = 10$ ма это отношение равно единице. Для большинства реальных магнетронов это отношение равно или больше 10, так что в первом приближении тепловыми шумами можно пренебречь по сравнению с дробовыми шумами магнетрона.

Взаимная функция корреляции амплитудных и частотных флюктуаций. Умножая (17) на (16а), взятое в момент времени $t + \tau$, и усредняя, получим с учетом (26а):

$$\Phi_{\alpha\nu}(\tau) = \Delta\Phi_\alpha(\tau) + \Phi_{\alpha\Psi}(\tau), \quad (33)$$

где $\Phi_\alpha(\tau)$ задано (22), а

$$\Phi_{\alpha\Psi}(\tau) = \int_0^\infty \Phi_{f\Psi}(\tau + \theta) e^{-\rho\theta} d\theta. \quad (34)$$

После проведения расчета $\Phi_{f_3}(\tau)$ может быть представлена в виде:

$$\Phi_{f\psi}(\tau) = 2\pi D_0 \hat{\delta}(\tau) \sin(\omega_0 \tau) + \frac{2\pi}{C_3^2 U_0^2} \sum_{l=1,l}^N \frac{S_{ll}}{T_{np}} \left[1 - \sum_{n=1}^{M_l} D_{nl} \left| \frac{\tau}{T_{np}} \right|^n \right] \quad (35)$$

(l = 1, 2, 3).

Подставляя (35) в (34), получим после вычисления интеграла:

$$\Phi_{\alpha\psi}(\tau) = \frac{2\pi}{C_9^2 U_0^2} \sum_{i=1,l}^N \frac{S_{il}}{T_{np} p} \left\{ \begin{array}{l} \left[1 - \sum_{n=1}^{M_l} D_{nl} \left| \frac{\tau}{T_{np}} \right|^n \right] - \sum_{n=1}^{M_l} D_{nl} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\tau^{n-k}}{p^k T_{np}^n} + \\ + e^{-p(T_{np}-\tau)} \sum_{n=1}^{M_l} D_{nl} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{p^k T_{np}^k} \text{ при } \tau > 0, |\tau| < T_{np}; \\ 0 \text{ при } \tau > 0, |\tau| > T_{np}. \end{array} \right. \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sum_{n=1}^{M_l} D_{nl} \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{p^k T_{np}^k} - 2e^{p|\tau|} \sum_{n=1}^{M_l} (2m+1) D_{nl} \times \\
 & \times \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{p^n T_{np}^n} \quad \text{при } \tau < 0, |\tau| < T_{np}; \\
 & e^{-p|\tau|} \left[\operatorname{ch}(pT_{np}) \left(\sum_{n=1}^{M_l} D_{nl} \sum_{k=1}^n (2m+1) \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{p^k T_{np}^k} \right) - \right. \\
 & - \sum_{n=1}^{M_l} (2m+1) \frac{n! D_{nl}}{p^n T_{np}^n} + \operatorname{sh}(pT_{np}) \left(\sum_{n=1}^{M_l} D_{nl} \sum_{k=0}^n (2m) \times \right. \\
 & \times \left. \left. \frac{n!}{(n-k)! p^k T_{np}^k} - 1 \right) \right] \quad \text{при } \tau < 0, |\tau| > T_{np} \\
 & (l = 1, 2, 3),
 \end{aligned}$$

Если $(pT_{np}) \ll 1$, то вместо (36) можно записать приближенное выражение для $\Phi_{\alpha\psi}(\tau)$. Учитывая также, что T_{np} — малая величина порядка периода колебания и что обычно интересуются спектром флюктуаций в диапазоне частот $0 \div p$, будем в дальнейшем использовать для $\Phi_{\alpha\psi}(\tau)$ предельное значение, которое получается из (36) при предельном переходе при $T_{np} \rightarrow 0$. Совершая предельный переход в (36) и производя суммирование с учетом (22), получим:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\alpha\psi}(\tau) = & 2\pi \frac{\omega_0^2}{Q_s^2} \left[\frac{e}{4I_0} \operatorname{tg} \Theta_s - \frac{eI_0 z_s}{32\pi^2 P_r} \left[\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \right]^2 \times \right. \\
 & \times A_z(r_1, r_s) \operatorname{tg} \Theta_s \cos(2\Theta_s) - \frac{e\sqrt{z_s}}{2\pi\sqrt{2P_r}} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \times \quad (36a) \\
 & \left. \times B_a(r_1, r_s) \frac{\cos(3\Theta_s)}{\cos^2 \Theta_s} \right] \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } \tau > 0; \\ e^{+p\tau} & \text{при } \tau < 0. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Подставляя (36a) и (22) в (33), получим для взаимной функции корреляции амплитудных и частотных флюктуаций

$$\Phi_{\alpha\psi}(\tau) = 2\pi \frac{\omega_0^2}{Q_s^2} \left[W_0 \frac{\Delta}{p} e^{-p|\tau|} + K_0 \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } \tau > 0 \\ e^{-p|\tau|} & \text{при } \tau < 0 \end{array} \right. \right], \quad (37)$$

где через W_0 и K_0 обозначены выражения, стоящие в квадратных скобках соответственно в (22) и (36a).

При написании (37) вместо (22) подставлено значение $\Phi_\alpha(\tau)$, получающееся в результате предельного перехода в (22) при $T_{np} \rightarrow 0$. Функция $\Phi_{\alpha\psi}(\tau)$ имеет как четную, так и нечетную части и может быть представлена, согласно [11], в виде:

$$\Phi_{\alpha\psi}(\tau) = \Phi_{\alpha\psi}^0(\tau) + \Phi_{\alpha\psi}^1(\tau), \quad (38)$$

где

$$\Phi_{\alpha\psi}^0(\tau) = 2\pi \frac{\omega_0^2}{Q_s^2} \left(W_0 \frac{\Delta}{p} + \frac{K_0}{2} \right) e^{-p|\tau|} \quad (38a)$$

— четная и

$$\Phi_{\alpha\nu}^1(\tau) = -2\pi \frac{\omega_0^2}{Q_s^2} \left(\frac{K_0}{2} \operatorname{sgn} \tau \right) e^{-p|\tau|} \quad (386)$$

—нечетная части функции корреляции. Согласно [11], функции корреляции (38а), (38б) связаны с соответствующими спектральными плотностями следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} w_{\alpha\nu}^0(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\alpha\nu}^0(\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau; \\ w_{\alpha\nu}^1(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\alpha\nu}^1(\tau) \sin(\Omega\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя (38) в (39) и производя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned} w_{\alpha\nu}^0(\Omega) &= \frac{\omega_0^2}{Q_s^2} \left\{ \frac{\Delta kT_a}{P_r} + \frac{e}{2I_0} \left[\Delta - \frac{p}{2} \operatorname{tg} \Theta_s \right] + \frac{eI_0 z_s}{16\pi^2 P_r} \times \right. \\ &\times \left[\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \right]^2 A_\alpha(r_1, r_a) [\Delta + p \operatorname{ctg}(2\Theta_s)] \sin^2 \Theta_s + \\ &+ \frac{e\sqrt{z_s}}{\pi\sqrt{2P_r}} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} B_\alpha(r_1, r_a) \left[\Delta \sin \Theta_s + \right. \\ &\left. \left. + \frac{p}{2} \frac{\cos(3\Theta_s)}{\cos^2 \Theta_s} \right] \right\} \frac{1}{p^2 + \Omega^2}; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} w_{\alpha\nu}^1(\Omega) &= -\frac{\omega_0^2}{Q_s^2} \left\{ \frac{e}{4I_0} \operatorname{tg} \Theta_s - \frac{eI_0 z_s}{32\pi^2 P_r} \left[\frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} \right]^2 A_\alpha(r_1, r_a) \times \right. \\ &\times \operatorname{tg} \Theta_s \cos(2\Theta_s) - \frac{e\sqrt{z_s}}{2\pi\sqrt{2P_r}} \frac{\sin(\sigma N/2)}{\sigma N/2} \frac{\sin(\beta N/2)}{\beta N/2} B_\alpha(r_1, r_a) \times \\ &\times \left. \frac{\cos(3\Theta_s)}{\cos^2 \Theta_s} \right\} \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2}. \end{aligned} \quad (41)$$

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛЮКТУАЦИЙ КОЛЕБАНИЙ МАГНЕТРОННОГО ГЕНЕРАТОРА

При измерениях флюктуаций колебания магнетрона был использован метод линии задержки, теория которого изложена в работах [1, 12, 13]. Исследовались магнетроны одного типа на волне 3,2 см; длина линии задержки 15 м. Диапазон частот от 0,1 до 10 мгц в случае частотных и от 1 до 10 мгц в случае амплитудных флюктуаций. Измерения проводились при различных режимах непрерывной генерации магнетрона.

Амплитудные флюктуации. Экспериментально полученные кривые спектральной плотности глубины случайной амплитудной модуляции колебания допускают удовлетворительную аппроксимацию функцией вида:

$$w_\alpha(F) = B [1 + (2\pi F/p)^2]^{-1},$$

где B определяет интенсивность, а $p/2\pi$ — полосу флюктуаций амплитуды. На рис. 1, 2 изображены зависимости BI_0 и $\beta = pQ_0 / \omega_0$ (кривые 1) от угла рассогласования Θ_s , полученные путем обработки экспериментальных данных. На этих же рисунках приведены теоретические зависимости nBI_0 и β от угла Θ_s (кривые 2), где B и β заданы соответственно соотношениями (25) и (31а), а $n \approx 4$. При построении кривых была использована зависимость Θ_s от тока I_0 , приведенная в [10].

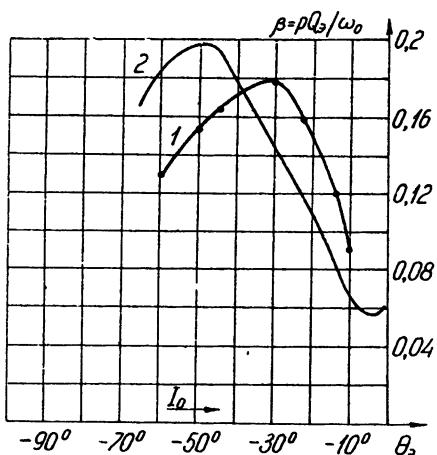


Рис. 1. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) зависимости параметра $\beta = pQ_0 / \omega_0$ от режима колебания магнетрона.

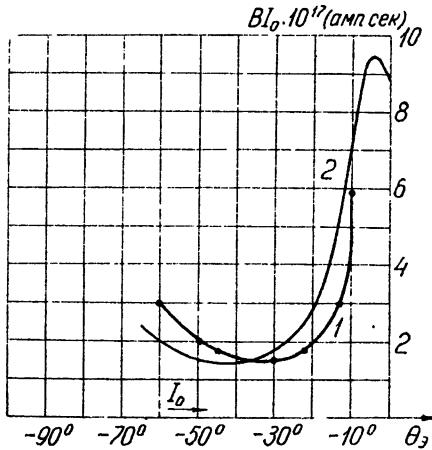


Рис. 2. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) зависимости величины BI_0 от режима колебания магнетрона.

Как легко видеть из рисунков, с увеличением угла Θ_s (или ростом тока I_0) β сначала увеличивается, достигает максимума, а затем уменьшается. Для BI_0 имеет место прямо противоположная зависимость от Θ_s . Сравнивая между собой кривые на рис. 1 с кривыми на рис. 2, нетрудно заметить, что 1) положение минимумов BI_0 приближенно совпадает с положением максимумов β ; 2) с изменением режима генерации BI_0 изменяется согласно соотношению $BI_0 = A\beta^{-2}$; 3) смещенное положение минимума экспериментальной кривой BI_0 по отношению к теоретической зависимости nBI_0 объясняется смещением максимумов кривых β . Как было отмечено в [9], такое смещенное положение кривых является следствием приближенного характера рассмотрения динамического режима магнетрона.

Частотные флюктуации. Экспериментальные кривые $w_s(F)$ в диапазоне исследованных частот от 0,1 мГц до 10 мГц не зависят от частоты F и могут быть представлены в виде:

$$w_s(F) = D = \text{const.}$$

На рис. 3 изображена зависимость DP_r (кривая 1) от угла Θ_s , полученная на основе экспериментальных данных. Как показывают эксперименты, величина DP_r с уменьшением угла Θ_s (уменьшением тока I_0) монотонно возрастает, достигая максимума при $\Theta_s \approx -60^\circ$, потом резко падает до величины, равной 70, а затем опять возрастает. Величина DP_r при изменении угла Θ_s изменяется в десятки тысяч раз, принимая наименьшее значение при $\Theta_s = -10^\circ$. Падающая ветвь кривой DP_r (пунктирная часть) является неустойчивой. Отметим, что

для различных экземпляров генераторов положение максимума кривой DP_r находится при различных Θ_s , но всегда при $\Theta_s < -45^\circ$.

На том же рисунке приведена теоретическая зависимость nDP_r от угла Θ_s (кривая 2), где D задано (32), $\Delta \approx 0$, так как во всем исследованном диапазоне Θ_s изменения частоты колебания малы, а n , как и в случае амплитудных флюктуаций, равно 4. Сравнивая между собой кривые 1 и 2, нетрудно видеть, что в диапазоне Θ_s от -8° до -45° теоретическая зависимость от Θ_s совпадает с экспериментально полученной зависимостью DP_r от Θ_s . При дальнейшем уменьшении Θ_s теоретическая кривая 2 возрастает медленнее, чем экспериментальная, и не имеет особенностей, присущих экспериментальной кривой. Расхождение теоретической и экспериментальной зависимостей DP_r от Θ_s может быть связано с тем, что при значении угла $\Theta_s \approx -60^\circ$ происходит скачок частоты. Если отождествить положение пунктирной ветви кривой 1 с положением скачка частоты, то из сравнения кривых на рисунке можно сделать следующее заключение: по мере приближения режима генерации к режиму, при котором происходит скачкообразное изменение частоты колебания, частотные флюктуации магнетрона резко возрастают. Неустойчивость падающей ветви кривой 1 (пунктир) свидетельствует о том, что имеют место переходы от одного режима к другому и обратно, вызываемые флюктуациями в магнетронном генераторе.

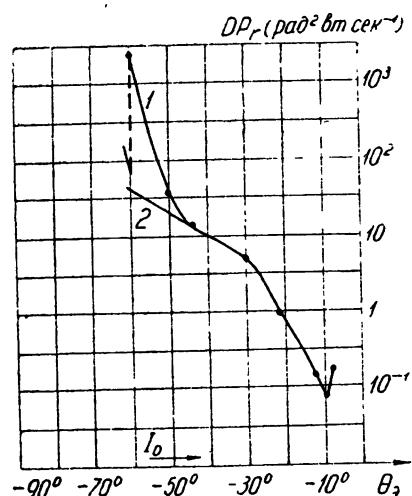


Рис. 3. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) зависимости величины DP_r от режима колебания магнетрона.

Корреляционные спектры. Полученные на опыте зависимости $w_{\alpha v}^0$ и $w_{\alpha v}^1$ от частоты F допускают удовлетворительную аппроксимацию функциями вида:

$$w_{\alpha v}^0(F) = \frac{W^0}{[1 + (2\pi F/p)^2]} ; \quad w_{\alpha v}^1(F) = \frac{W^1 F}{[1 + (2\pi F/p)^2]} ,$$

где W^0 и W^1 — некоторые величины, характеризующие интенсивность спектров и не зависящие от F . Нечетную часть корреляционной спектральной плотности $w_{\alpha v}^1(F)$ удается выделить при частотах $F \approx 2$ мгц и выше. При более низких частотах $w_{\alpha v}^1(F)$ становится малой по сравнению с $w_{\alpha v}^0(F)$.

На рис. 4 и рис. 5 изображены соответственно зависимости $W^0 I_0$ и $w_{\alpha v}^1(5$ мгц) I_0 (кривые 1) от угла Θ_s , полученные на опыте. Как нетрудно видеть из рисунков, обе величины изменяются с изменением угла Θ_s одинаково. С уменьшением Θ_s они сначала уменьшаются, достигая минимума, затем увеличиваются и при $\Theta_s \approx -60^\circ$ имеет место резкое уменьшение такого же характера, как и в случае частотных флюктуаций.

На этих же рисунках приведены теоретические зависимости $W^0 I_0$ и $w_{\alpha v}^1(5$ мгц) I_0 от угла Θ_s (кривые 2), построенные на основании (40) и (41) при $\Delta=0$. Сравнение между собой кривых 1 и 2 на рис. 4 и рис.

5 показывает, что в диапазоне Θ_3 $[-8^\circ \div -20^\circ]$ теоретические и экспериментальные зависимости $W^0 I_0$ и $w_{av}^1 (5 \text{ мгц}) I_0$ от угла Θ_3 близки между собой. При дальнейшем уменьшении Θ_3 наблюдается все возрастающее отклонение кривой 1 от кривой 2; которое, очевидно, может быть объяснено теми же причинами, что и расхождение кривых 1 и 2 на рис. 6 в случае частотных флюктуаций.

1. Из вышеизложенного следует, что теория флюктуаций колебаний магнетронного генератора, развитая на основе модели магнетрона, принятой в [9], качественно верно дает картину поведения флюктуаций в магнетронном генераторе при изменении режима работы.

2. Интенсивность амплитудных флюктуаций B с увеличением тока (мощности колебаний) убывает обратно пропорционально величине

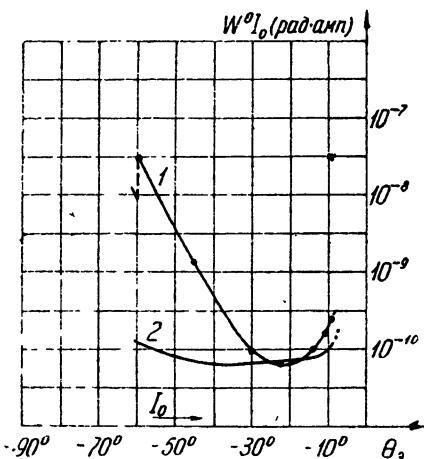


Рис. 4. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) зависимости величины $W^0 I_0$ от режима колебания магнетрона.

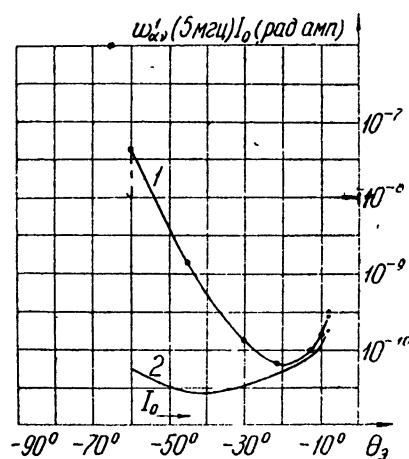


Рис. 5. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) зависимости величины $w_{av}^1 (5 \text{ мгц}) I_0$ от режима колебания магнетрона.

$I_0 \beta^2 (J_0)$. Все особенности изменения B (наличие минимумов и максимумов) объясняются характером изменения прочности „предельного цикла“ $p = (\omega_0/Q_3) \beta (I_0)$ с ростом тока. Результаты измерений амплитудных флюктуаций магнетрона, приведенные в работе [14], находятся также в удовлетворительном согласии с развитой выше теорией. (Ход кривых в [14] качественно соответствует ходу кривой 2 на рис. 2.)

3. Изменение интенсивности частотных флюктуаций с изменением режима генерации качественно хорошо описывается (32) в диапазоне Θ_3 от 0° до -45° . Минимальным значениям интенсивности частотных флюктуаций соответствуют режимы при Θ_3 от 0° до -10° . Результаты измерений частотных флюктуаций магнетрона, приведенные в работе [14], так же, как и в случае амплитудных флюктуаций, находятся в удовлетворительном согласии с развивающейся теорией.

Отмеченное выше расхождение теоретической и экспериментальной зависимостей частотных флюктуаций от режима работы является следствием ограниченности теории одночастотных колебаний магнетрона, не учитывающей скачков частоты. Несомненно, для практики представляют большой интерес экспериментальное исследование режимов,

при которых происходят скачки частоты, для различных типов магнетронов.

4. Как показывают теория и проведенные эксперименты, в случае магнетронного генератора всегда имеется корреляция между амплитудными и частотными флюктуациями, причем функция корреляции $\Phi_{\alpha\nu}(\tau)$ всегда имеет как четную, так и нечетную части.

5. Форма спектров амплитудных и частотных флюктуаций $w_a(F)$ и $w_\nu(F)$ свидетельствует, что условие $pT_{\text{пр}} \ll 1$ выполняется при всех исследованных режимах генерации магнетрона. Следовательно, вместо сложных формул для функций корреляций (20), (28) и (36), описывающих флюктуации в магнетроне, могут быть использованы в первом приближении упрощенные формулы (22), (29) и (36а).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, ДАН СССР, 20, 11 (1938); Изв АН СССР, сер. физ, 24, 145 (1950).
2. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 29, 304, 315 (1955).
3. В. С. Троицкий, Изв высш уч зав — Радиофизика, 1, № 1, 20 (1958); 2, 573 (1959).
4. А. Н. Малахов, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, 1, № 2, 79 (1958); 3, 242 (1960).
5. И. Л. Берштейн, ДАН СССР, 106, 453 (1956).
6. Л. И. Гудзенко, Радиотехника и электроника, 1, 1240 (1956).
7. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 3, 1299 (1958).
8. D. Middleton, Trans. IRE, ED-1, 56 (1951).
9. В. Н. Никонов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 5, 260 (1962).
10. С. И. Бычков, Вопросы теории и практического применения многорезонаторных магнетронов, ЛКВВИА им А. Ф. Можайского, 1958.
11. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 4, 104 (1961).
12. В. С. Троицкий, Радиотехника и электроника, 1, 818 (1956).
13. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, Т. Д. Разина, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 4, 1052 (1961).
14. W. M. Gottschalk, Trans. IRE, ED-1, 91 (1954).
15. С. М. Рытов, Теория электрических флюктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, М., 1953.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
10 июля 1961 г.

AMPLITUDE AND FREQUENCY FLUCTUATIONS OF MAGNETRON OSCILLATOR

V. N. Nikonov

Natural fluctuations of the oscillation of a magnetron oscillator have been studied. The expressions for the amplitude and frequency correlation functions as well as their mutual correlation function have been obtained. It has been given the experimental data of fluctuations investigation and the results of the comparison with the theory.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ
КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ФЛЮКТУАЦИЙ АМПЛИТУД
ПРИ ИЗМЕРЕНИЯХ НА ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТРАССАХ**

A. B. Мень

Описывается результаты измерения корреляции флюктуаций амплитуд радиоволн при распространении на пересекающихся трассах. Полученные данные в большинстве случаев свидетельствуют о значительном влиянии эффекта переноса неоднородностей на временные характеристики флюктуаций. Результаты радионаблюдений сопоставляются с данными метеоизменений.

Эта статья служит продолжением работы [5]. Используемые ниже обозначения совпадают с обозначениями в [5]. Ссылки на расчетные соотношения и рисунки статьи [5] даются с индексом I.

Теоретическое исследование временных (автокорреляционных и спектральных) характеристик флюктуаций, возникающих при распространении волн в неоднородной турбулентной среде, обычно проводится путем использования их связи с пространственными корреляционными функциями на основе учета эффекта переноса „замороженной“ турбулентности, когда среда в процессе переноса предполагается неизменной [1–4]. Справедливость этого предположения *a priori* во многих случаях неочевидна; более того, как следует из качественных оценок для турбулентной среды [4], при измерениях в дальней зоне ($L \gg 0,5\pi l^2/\lambda$) ряд процессов, протекающих в турбулентной среде (турбулентные движения, диффузия, теплопроводность и т. п.), может оказывать более существенное влияние на изменения флюктуаций во времени, чем эффект переноса.

В этой связи желательно проведение экспериментальных измерений, позволяющих непосредственно определить влияние тех или иных процессов, в частности, эффекта переноса, на характеристики флюктуаций. Как показано в [5], в качестве таких измерений целесообразно использовать определение корреляции флюктуаций сигналов, распространяющихся на разнесенных в пространстве трассах, описываемых пространственно-временными корреляционными функциями $K(d, \tau)$. Приведенные в [5] расчетные соотношения позволяют путем сопоставления с экспериментом определить наличие эффекта переноса неоднородностей среды как в случае „замороженной“ турбулентности, так и в более общем случае переноса „размороженной“ турбулентности, когда феноменологически учитываются также протекающие в среде процессы, приводящие к ее качественным изменениям. Следует отметить, что определение пространственно-временных корреляционных функций $K(d, \tau)$ проведено в [5] применительно к случаю распространения в неограниченной неоднородной среде; однако использованная при этом связь временных и пространственных корреляционных функций (соотношения (4)–(46) I) и основные результаты в принципе могут быть распространены на более общий случай измерений над поверхностью раздела. Более того, указанные расчеты можно использовать не только в „освещенной“ области, но и в области „полутени“ и „тени“, когда

нет прямой видимости между источником и приемниками (например, в случае сферической поверхности раздела). При этом, естественно, в расчетных соотношениях (4)–(46) I для определения пространственных коэффициентов корреляции должны быть использованы соответствующие выражения, полученные с учетом влияния поверхности раздела.

Заметим, что учет плоской поверхности раздела при распространении на параллельных трассах не приводит к новым результатам, если разнесенные в пространстве трассы располагаются в одной плоскости, параллельной поверхности раздела, поскольку при этом вид пространственных корреляционных функций остается таким же, как и в случае неограниченной среды [6]. При пересекающихся трассах изменится точный вид выражения $K(d, \tau)$ (см. соотношения (6а), (13а) I), что связано с нарушением линейной зависимости интенсивности флюктуаций от дальности ($\bar{v}^2 \sim L^a$, где $3 > a > 1$) [7–9]. Однако и в этом случае сохраняется их качественный вид, в частности, остаются справедливыми выражения (7) I и (7а) I.

Экспериментальная проверка полученных в [5] результатов проводилась путем исследования флюктуаций амплитуд вертикально поляризованных радиоволн длиной $\lambda = 10$ см при распространении над морской поверхностью. Измерения велись на фиксированной трассе длиной около 30 км, соответствовавшей приему в „дальней“ зоне как в области прямой видимости, так и в области „полутени“ и „тени“. Последнее обеспечивалось различной высотой подъема антенн передатчика (35, 18 и 9 м над уровнем моря). Приемные антенны располагались на высоте около 4 м при удалениях друг от друга от 2 до 100 м вдоль прямой линии, перпендикулярной к направлению приема, что соответствовало измерению „поперечной“ корреляции на пересекающихся трассах (рис. 1 в I).

Методика измерений состояла в синхронной и практически безынерционной фотозаписи флюктуаций амплитуд сигналов одновременно в двух приемных пунктах, где были установлены линейные приемники с дифференциальным выходом [10, 11]. В этих приемниках выходной сигнал регистрируется после предварительного устранения среднего уровня. При проведении каждой записи дублировалась запись флюктуаций сигналов на выходе первого (опорного) приемника, причем для каждой из высот передатчика такие измерения велись с пятью приемными антennами, отнесенными на расстояния 2, 5, 10, 30 и 100 м относительно опорной антенны.

Длительность записей обычно составляла от трех до пяти минут с такими же интервалами между ними, так что общее время измерений не превышало $30 \div 90$ минут.

Проводившаяся многократно запись сигналов на выходе опорной антенны позволяла оценить происходящее обычно изменение характеристик флюктуаций во времени, связанное с нестационарностью; подобное изменение отмечалось также в более ранних работах [11–14]. С этой же целью обработка опытных данных проводилась для различных длительностей от одной до пяти минут.

Измерения велись в течение длительного времени летом и осенью; всего было проведено более 40 опытов при различных метеорологических условиях. Одновременно с радиоизмерениями проводились также обычные метеорологические измерения ветра, температуры, осадков, давления, волнения моря в двух пунктах, расположенных на концах трассы.

По результатам радиоизмерений пространственно-временные корреляционные функции флюктуаций $K(d, \tau)$ находились путем последу-

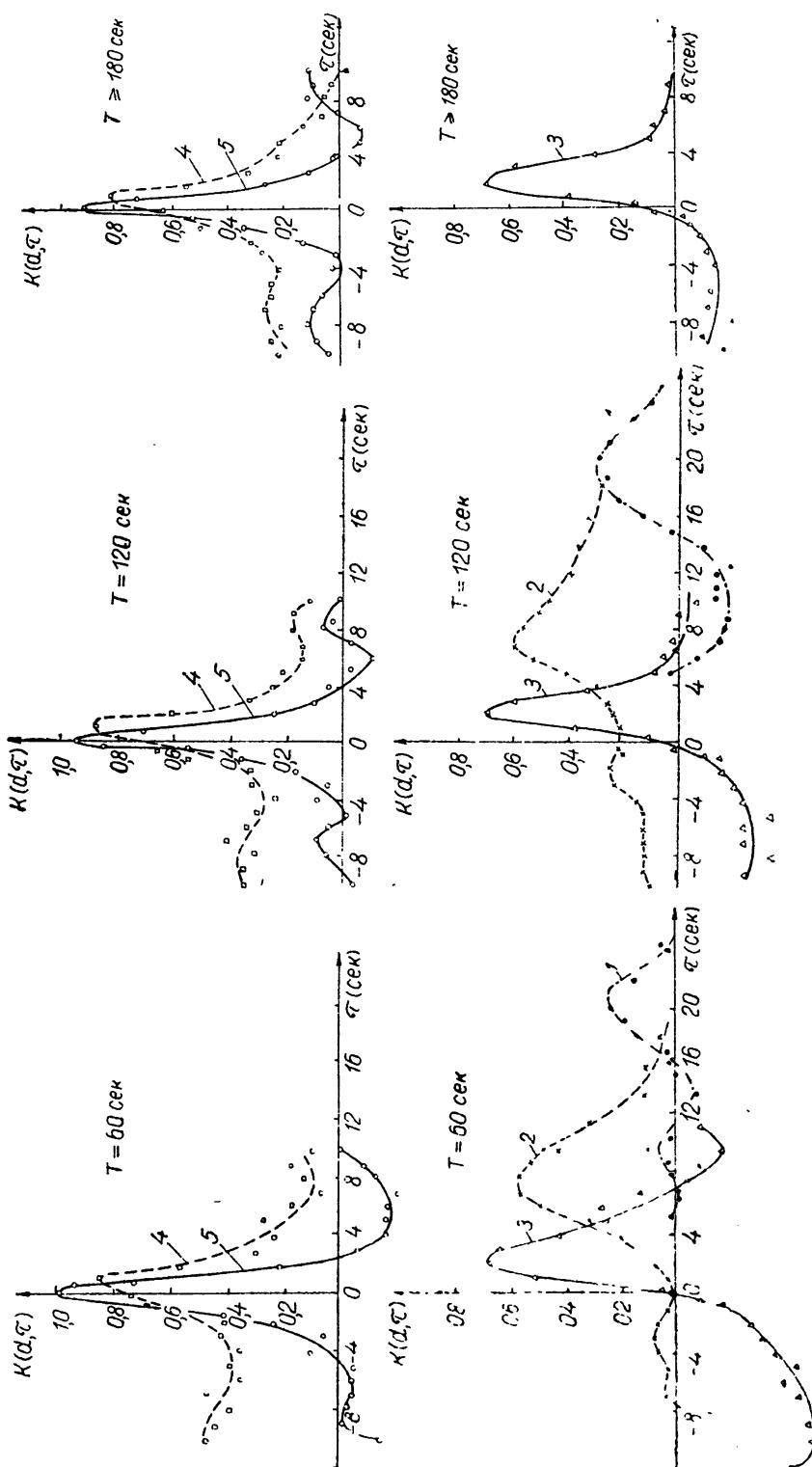


Рис. 1а. Нормированные пространственно-временные функции $K(d, \tau)$ при измерениях в зоне прямой видимости (перенос „замороженной“ турбулентности).

Высота передатчика $h_0 = 35$ м, высота приемников $h = 4$ м, $T = 60, 120, 180$ с. Кривые 1, 2, 3, 4, соответствуют измерениям при $d = 100, 30, 10$ и 2 м.

ющей обработки записей флюктуаций на механическом корреляторе непрерывного действия. При этом, в частности, определялись также автокорреляционные функции (времена автокорреляции $\tau_{0,5}$, $\tau_{1/4}$), пространственные корреляционные функции (характерный масштаб l) и скорости поперечного переноса неоднородностей v_n .

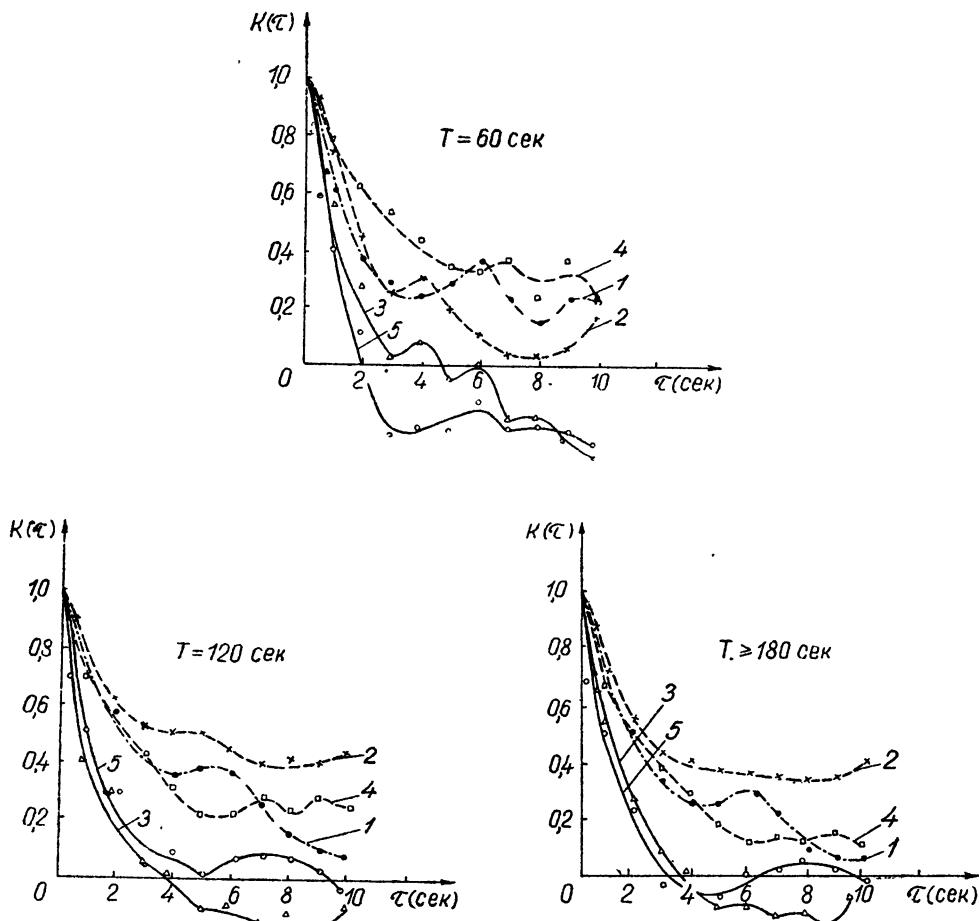


Рис. 16. Нормированные временные (автокорреляционные) функции $K(\tau)$ при изменениях в зоне прямой видимости (перенос „замороженной“ турбулентности). Высота передатчика $h_0 = 35$ м, высота приемников $h = 4$ м, $T = 60, 120, 180$ сек. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют измерениям при $d = 100, 30, 10, 5$ и 2 м.

Типичные результаты измерений для интервалов обработки T длительностью от 1 до 3 минут иллюстрируются рисунками 1—5. На рис. 1а—За приведены значения коэффициентов пространственно-временной корреляции $K(d, \tau)$ амплитудных флюктуаций для разных значений базы $2 \leq d \leq 100$ м как в области прямой видимости, так и в районе „тени“ и „полутени“; на рис. 1б—3б указаны соответствующие этим измерениям коэффициенты автокорреляции $K(\tau)$, т. е. результаты аналогичных измерений при $d = 0$. Как следует из рисунков, во всех случаях (независимо от высот корреспондирующих пунктов) отмечается характерное смещение максимумов функций $K(d, \tau)$, связанное с наличием эффекта переноса неоднородностей. В данном случае это смещение происходит в область положительных значений временных сдвигов.

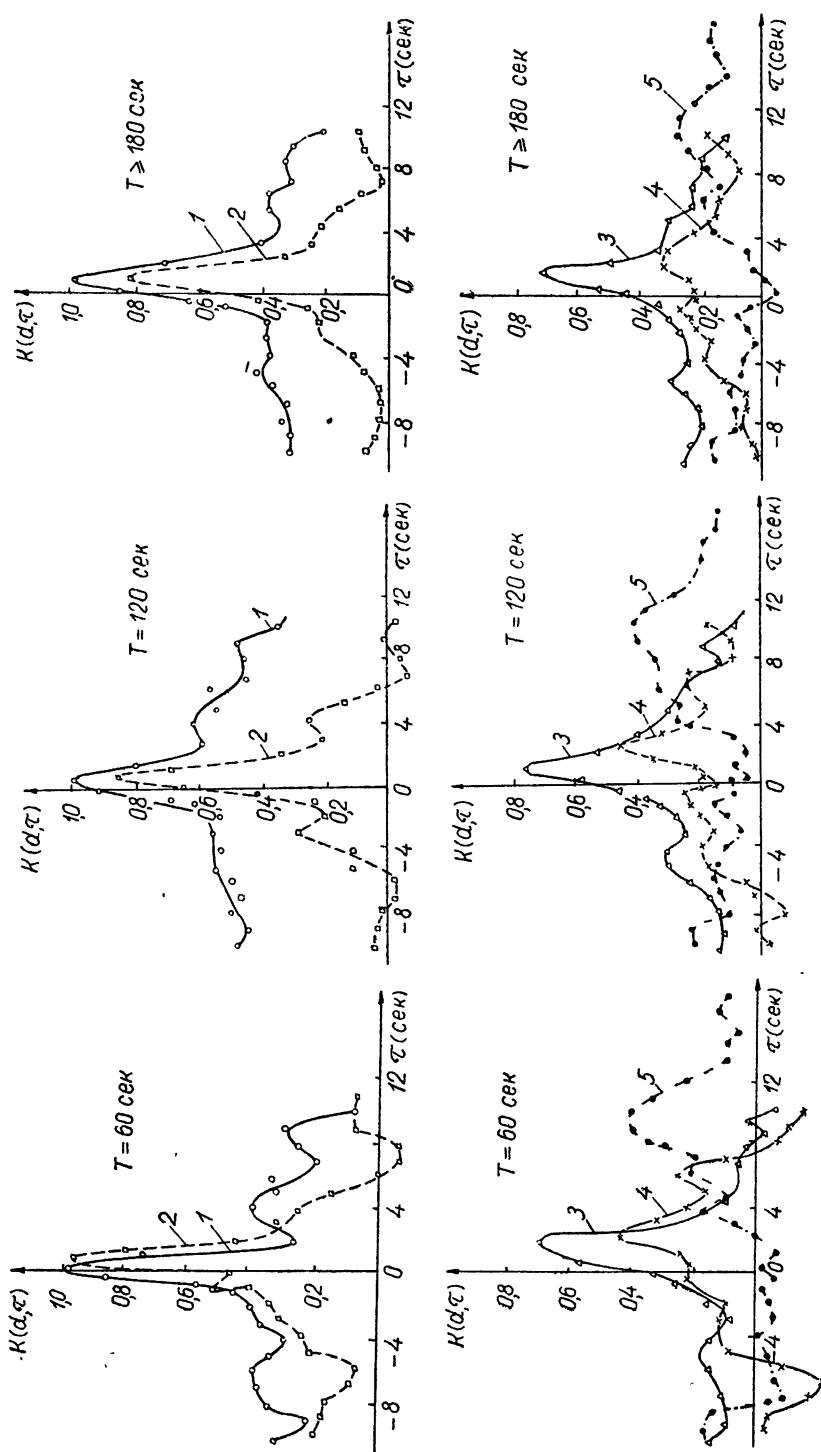


Рис. 2а. Результаты измерений $K(d, \tau)$ в зоне "тени" (перенос "замороженной" турбулентности):
 $h_0=9$ м, $h=4$ м, $T=60, 120, 180$ сек. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют измерениям при $d=2, 5, 10, 30, 100$ м.

гов τ , что согласуется с направлением переноса среды от первой (опорной) антенны к последующим.

Определенная из эксперимента зависимость $\tau_{\max}(d)$ в первых двух опытах (рис. 4а, б) соответствует, согласно теории (рис. 3, 4 I), наличию только эффекта переноса „замороженной“ турбулентности с величиной

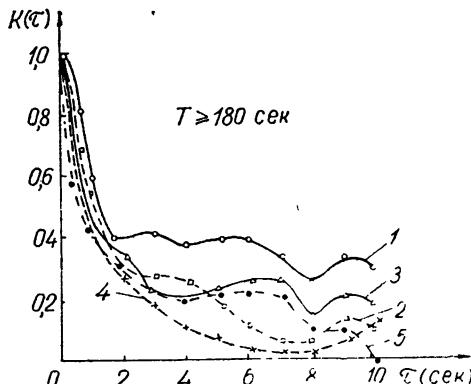
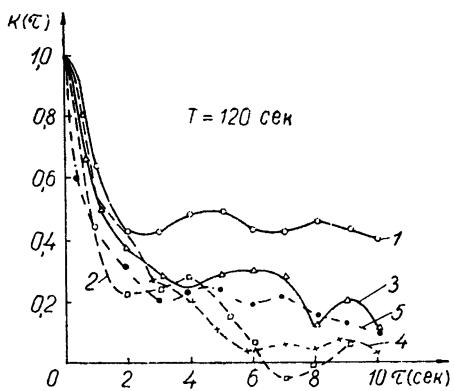
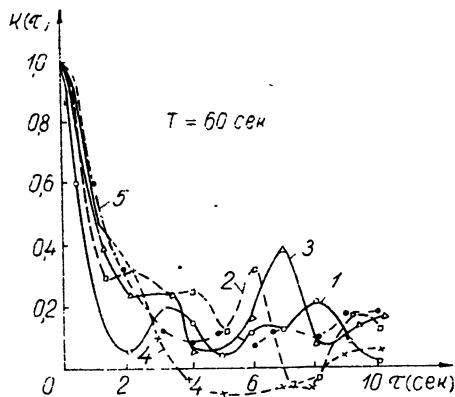


Рис. 26. Результаты измерений $K(\tau)$ в зоне „тени“ (перенос „замороженной“ турбулентности).

$h_0 = 9 \text{ м}$, $h = 4 \text{ м}$, $T = 60, 120, 180 \text{ сек}$. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют измерениям при $d = 2, 5, 10, 30, 100 \text{ м}$.

скорости в $+2,5$ и $+5,35 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ соответственно. В третьем измерении (рис. 4в) наряду с переносом отмечается влияние побочных процессов, приводящих к качественным изменениям в среде и вследствие этого к нарушению линейности зависимости $\tau_{\max}(d)$. При этом величина эквивалентной скорости переноса изменяется от $4,3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ($d \rightarrow 0$) до $9,2 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ ($d = 100 \text{ м}$). В соответствии с расчетом (13а) I и (16) I последний случай отвечает постоянным τ_0 , τ_a , характеризующим скорость переноса и качественные изменения, происходящие в среде, равным $1,1 \text{ сек}$ и 5 сек соответственно.

Во всех случаях в согласии с расчетами по мере увеличения d наблюдается свойственное измерениям на пересекающихся трассах падение величины корреляционных коэффициентов в области максимальных значений $K(d, \tau)$, так что при $d > 30 \text{ м}$ ($d/l > 10 \div 20$)* величина

* Пространственный масштаб корреляции l в первом опыте (рис. 1) составляет $4,5 \text{ м}$, во втором и третьем (рис. 2, 3) $3,5$ и 4 м соответственно.

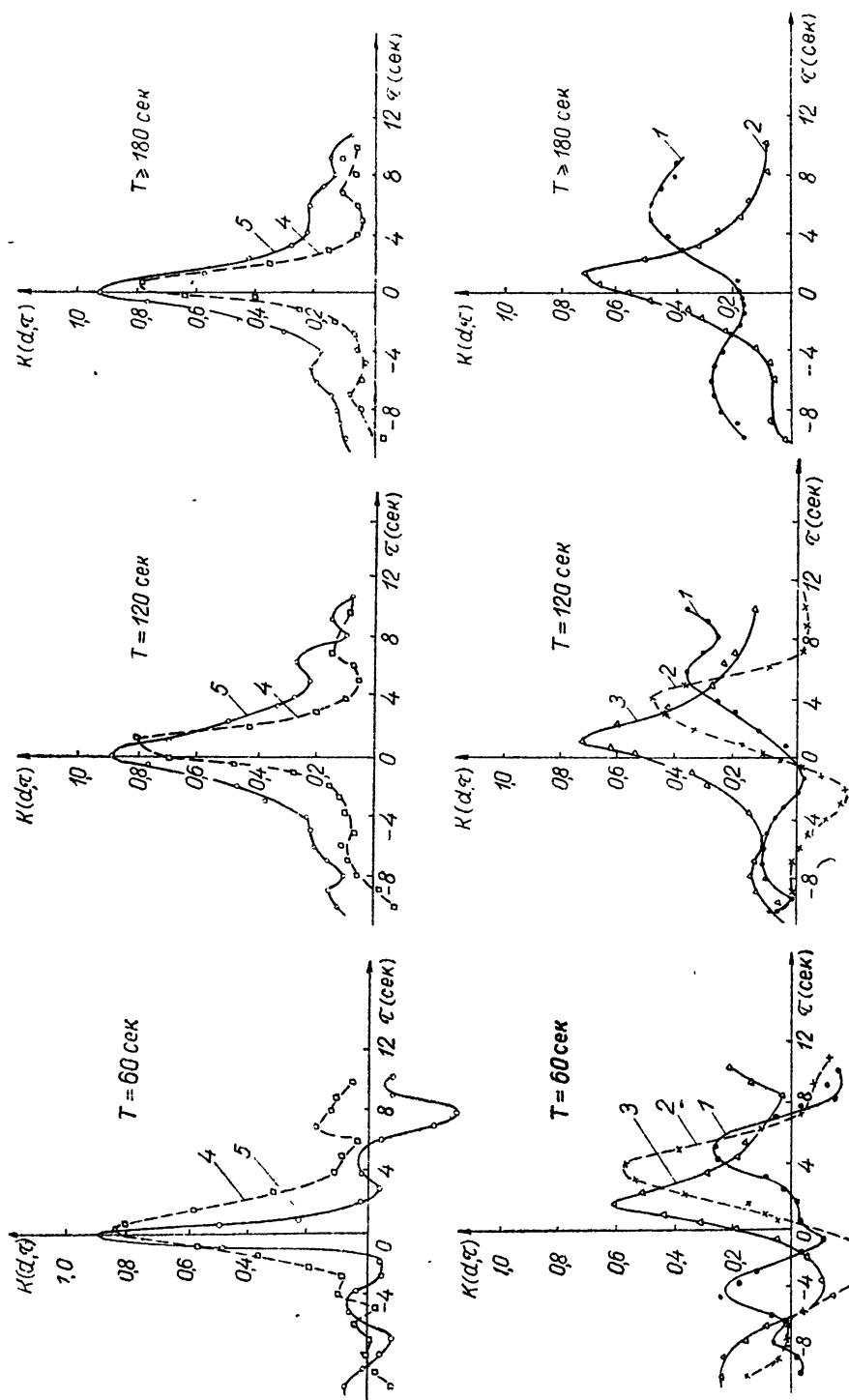


Рис. 3а. Результаты измерений $K(d, \tau)$ в зоне "полутени" (перенос "размороженной" турбулентности): $h_0 = 18 \text{ м}$, $h = 4 \text{ м}$, $T = 60, 120, 180 \text{ сек}$. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют измерениям при $d = 100, 30, 10, \frac{5}{2} \text{ и } \frac{1}{2} \text{ м}$.

$K_{\max}(d, \tau)$ не превышает $0,2 \div 0,3$. Вследствие этого при больших d существенно возрастают различные погрешности (рис. 4б); поэтому измерения с $d > 100$ м становятся нецелесообразными.

Характерно, что вид экспериментальных кривых $K(d, \tau)$ и $K(\tau)$ зачастую существенно отличается от „гладких“ расчетных зависимостей, приведенных в [5]. Отмечаемые на скатах кривых осцилляции

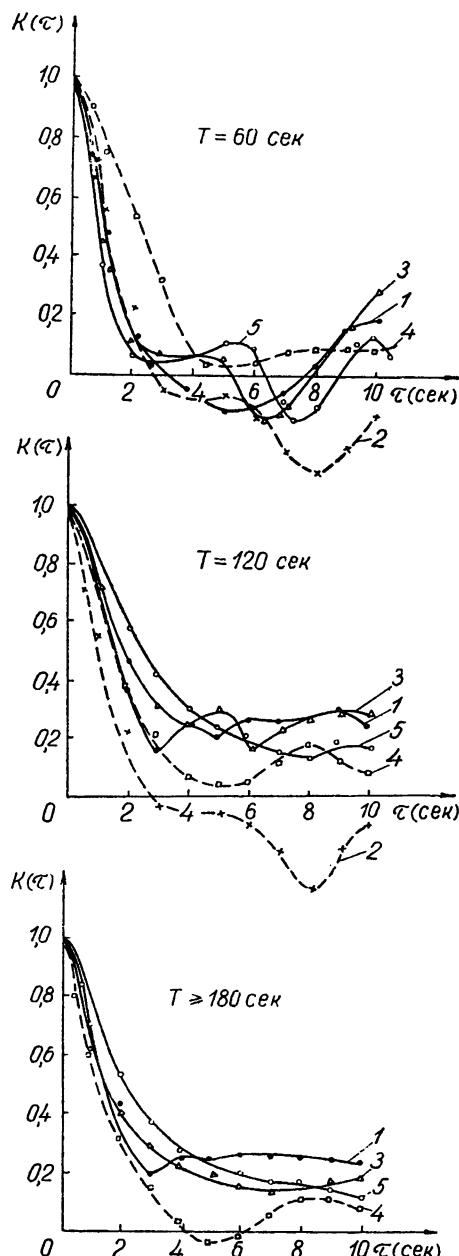


Рис. 36. Результаты измерений $K(\tau)$ в зоне „половинки“ (перенос „размороженной“ турбулентности):

$h_0 = 18$ м, $h = 4$ м, $T = 60, 120, 180$ сек. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют измерениям при $d = 100, 30, 10, 5$ и 2 м.

и „выбросы“, хотя и могут быть в некоторой степени отнесены за счет погрешности измерений и обработки, в основном, как подтверждают многократные повторные измерения (например, коэффициентов автокорреляции, рис. 1б–3б), связанны с нестационарностью флюктуаций для приведенных интервалов измерений. Об этом свидетельствует также

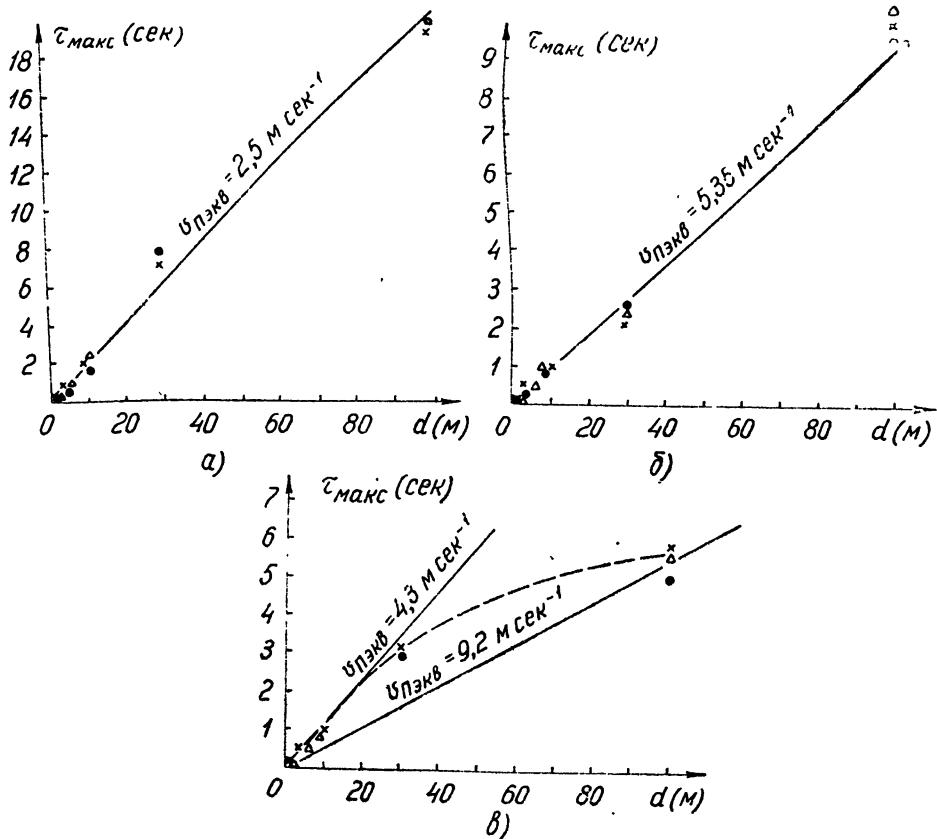


Рис. 4. Зависимость временных сдвигов τ_{\max} , соответствующих максимумам функций $K(d, \tau)$, от величины базы d ; рис. а, б, в отвечают опытам, приведенным на рис. 1, 2, 3 соответственно:

... — $T = 60$ сек; $\times \times \times$ — $T = 120$ сек, $\Delta \Delta \Delta$ — $T = 180$ сек.

зависимость экспериментальных данных от длительности интервала измерений T .

Анализ большого числа данных, полученных в работе, свидетельствует о наличии эффекта переноса в большинстве проведенных измерений: около 50% опытов соответствовало измерениям с наличием лишь эффекта переноса (перенос „замороженной“ турбулентности) и более 40% — измерениям, где наряду с явным переносом отмечалось существенное влияние и других процессов, протекающих в среде. Следует отметить, что приведенные характеристики флюктуаций, как правило, оставались качественно подобными как в освещенной зоне, так и в области „полутени“ и „тени“, хотя величина ненормированных корреляционных функций (интенсивность флюктуаций) обычно резко возрастала с понижением высот корреспондирующих пунктов [11, 13].

Примерно в 10% случаев эффект переноса при наблюдениях не отмечался в явном виде. Примером одного из таких измерений может явиться опыт, приведенный на рис. 5. Здесь практически отсутствует

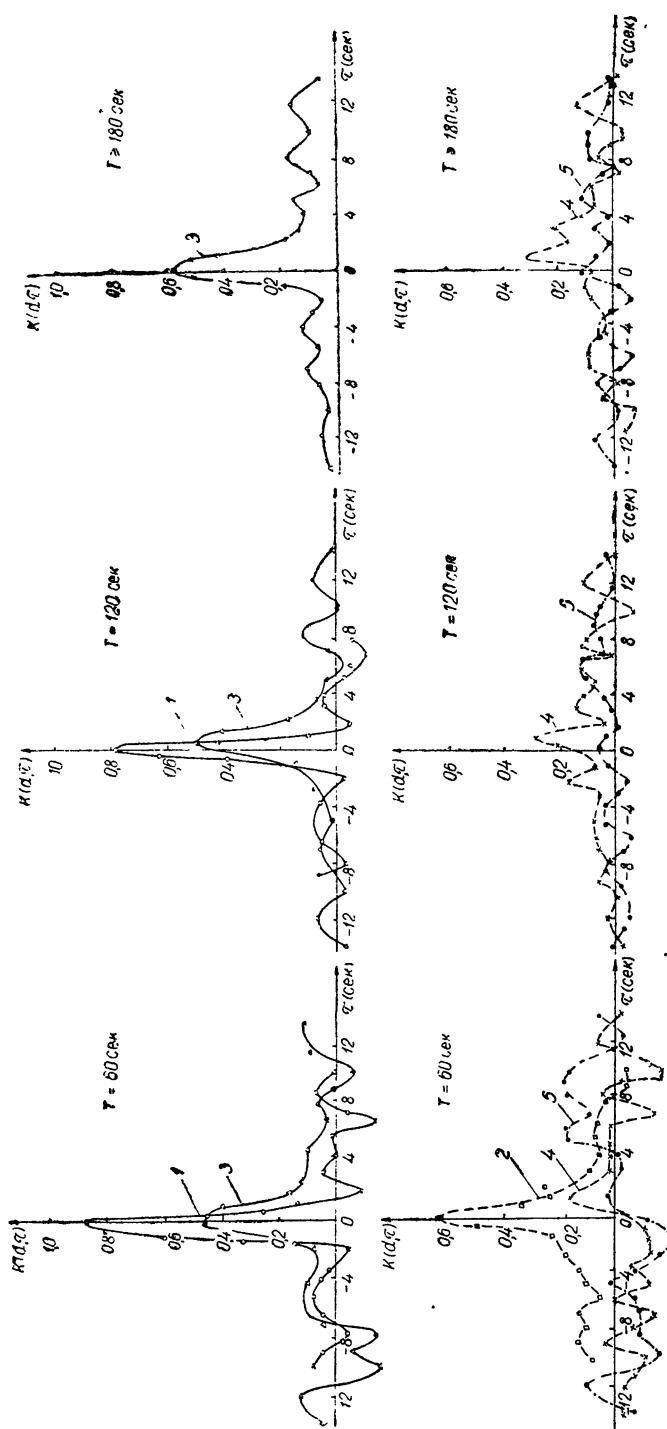


Рис. 5а. Результаты измерений $K(d, \tau)$ при отсутствии в явлном виде эффекта переноса неоднородностей в пространстве:
 $d/\tau_0 \ll 1$, $h_0 = 18$ м, $T = 60, 120, 180$ сек. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют измерениям при $d=2, 5, 10, 30$ и 100 м.

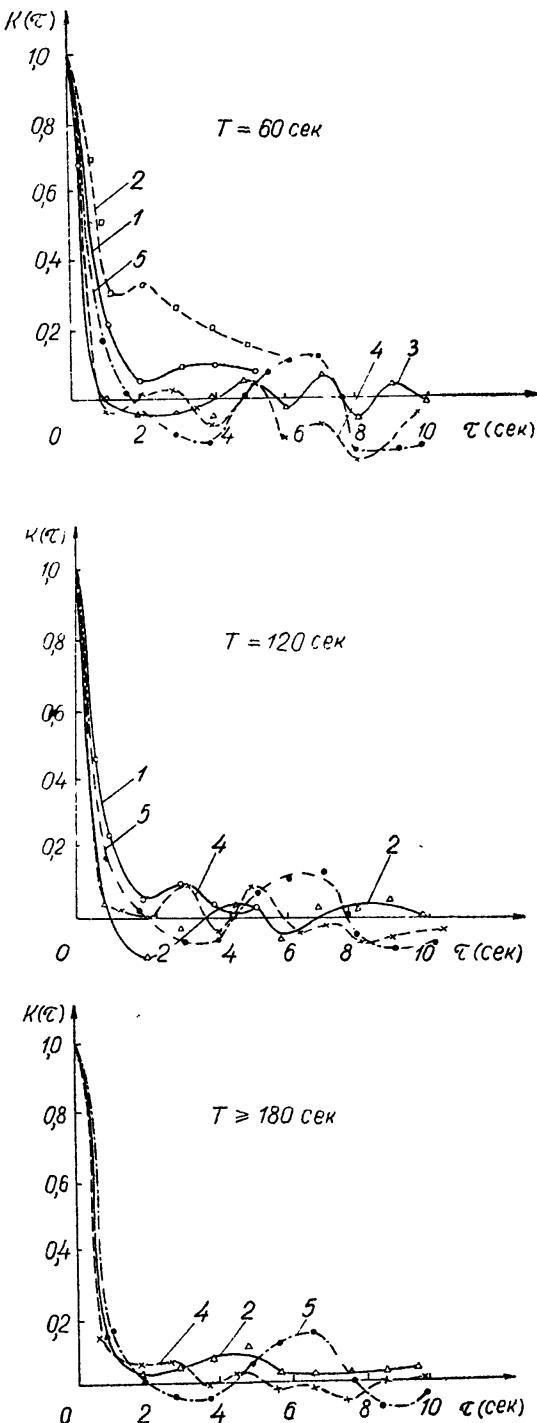


Рис. 56. Результаты измерений $K(\tau)$ при отсутствии в явном виде эффекта переноса неоднородностей в пространстве:

$\tau_a/\tau_0 \ll 1$, $h_0 = 18$ м, $h = 4$ м, $T = 60, 120, 180$ сек Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют измерениям при $d = 2, 5, 10, 30$ и 100 м.

характерное для переноса смещение во времени максимумов функций $K(d, \tau)$, так что увеличение базы d приводит лишь к уменьшению величины $K_{\max}(d, \tau)$. В этом случае, в отличие от ранее приведенных результатов измерений, величина эквивалентной скорости переноса, определенная по автокорреляционным измерениям ($v_{n_{\text{экв},k}} = 5 \div 6,5 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$), существенно отличается от скорости, найденной по взаимнокорреляционным измерениям ($v_{n_{\text{экв},k}} = 12 \div 15 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$).

Следует отметить, что рассматриваемый опыт относится к измерениям, когда эффект переноса в принципе имел место, хотя и не оказывал существенного влияния на временные характеристики флюктуаций ($\tau_a/\tau_0 \ll 1$), которые определялись здесь более быстрыми процессами, вызывающими образование и диссиацию неоднородностей ($\tau_k = 0,6 \div 0,8 \text{ сек}$).

К этим измерениям относились также два опыта, в одном из которых эффект переноса явно отсутствовал, а в другом отмечалось некоторое возрастание корреляции флюктуаций как при положительных, так и при отрицательных временных сдвигах. Характерно, что в последнем случае на концах трассы нормальная к ней компонента ветра была направлена в противоположные стороны. Возможно, что здесь также имел место эффект переноса, направленный, однако, в разные стороны на отдельных участках трассы.

Следует отметить, что сделанные при расчетах корреляционных функций $K(d, \tau)$ в [5] предположения об однородности и стационарности флюктуаций и постоянстве на трассе поперечной компоненты скорости переноса v_n не позволяют однозначно интерпретировать результаты измерений последнего типа. Можно полагать, что в ряде случаев расхождение эксперимента с расчетом обусловливается также нерегулярными по величине и направлению изменениями на трассе скорости v_n .

Таким образом, из проведенных измерений следует, что при распространении в тропосфере вблизи поверхности раздела в подавляющем числе случаев ($\sim 90\%$) имеет место эффект переноса неоднородностей в пространстве. Представляет интерес определить степень его влияния на временные (автокорреляционные) характеристики флюктуаций. Сопоставление опытных данных с результатами расчета, учитывающего лишь эффект переноса, иллюстрируется рис. 6, где приведена зависимость определенного из эксперимента радиуса автокорреляции $\tau_{0,5}$ ($K(\tau_{0,5}) = 0,5$) от величины перпендикулярной к трассе скорости ветра $v_{n,k}$ (рис. 6а), определенной независимо радиометодом по смещению максимумов функций $K(d, \tau)$, а также от величины $v_{n,k}$ („радиоветра“), нормированной на характерный масштаб l (рис. 6б):

$$\frac{v_{n,k}}{l} = \frac{a}{\tau'_{0,5}}. \quad (1)$$

Здесь $\tau'_{0,5}$ — расчетное значение радиуса автокорреляции, указанное на рис. 6б сплошной линией для гауссова закона корреляции ($a = 0,84$). На рисунках значения радиуса автокорреляции $\tau_{0,5}$ для каждого опыта нанесены в виде вертикальных линий, учитывающих разброс экспериментальных данных.

Как следует из приведенного, за исключением опытов, отмеченных знаками $\langle \rangle$, где эффект переноса не отмечался*, в большинстве случаев наблюдается хорошее соответствие величин автокорреляцион-

* Сюда также отнесены измерения с большой погрешностью в определении v_n при $\tau_a/\tau_0 \ll 1$.

ногого радиуса, определенных расчетным и экспериментальным путем. В некоторых случаях расхождение с экспериментом расчетных величин $\tau'_{0,5}$, учитывающих в данных измерениях лишь перенос в плоскости, параллельной поверхности раздела, может быть обусловлено нерегулярными процессами, а также вертикальным переносом (конвекцией).

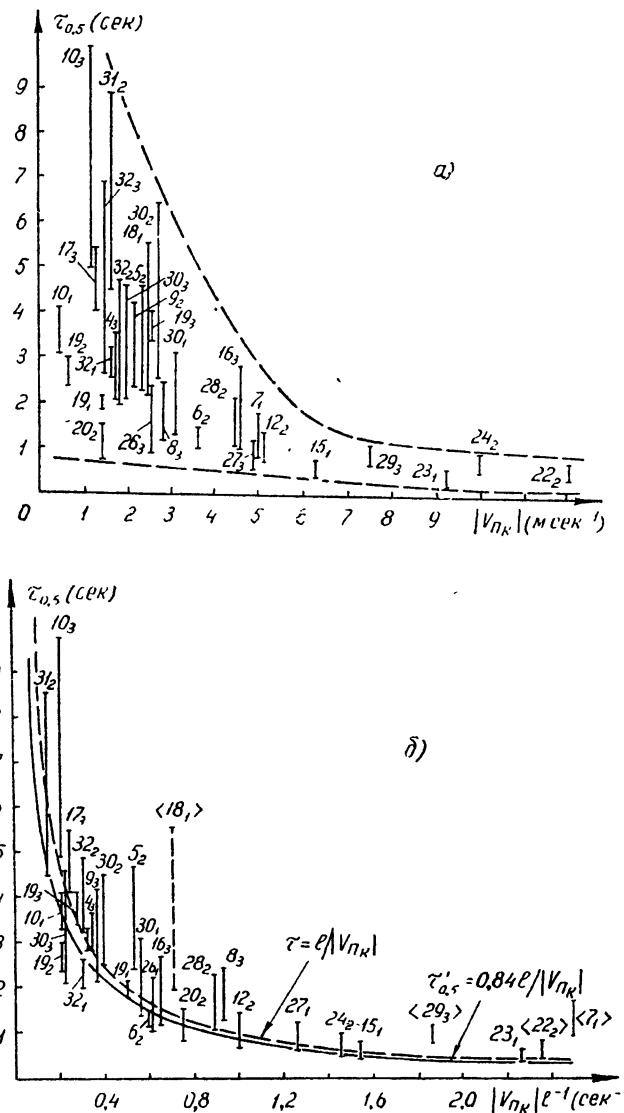


Рис. 6. Сопоставление экспериментальной величины радиуса автокорреляции флюктуаций $\tau_{0,5}$ с модулем поперечной к трассе компоненты ветра $|v_{n_k}|$ и с расчетной величиной радиуса автокорреляции $\tau'_{0,5}$ при определении скорости переноса радиометодом. Цифры-номера опытов, индексы 1, 2, 3 соответствуют приему в области „тени“, „полутени“ и прямой видимости.

Полученные результаты показывают, что в большинстве случаев перенос неоднородностей в пространстве оказывает наиболее существенное влияние на временные характеристики флюктуаций, вследствие

чего оказывается возможным рекомендовать расчетное определение радиусов автокорреляции с учетом лишь этого эффекта. Отметим, однако, что сопоставление расчета с экспериментом желательно проводить при достаточно больших значениях коэффициентов автокорреляции $K(\tau) > 0,25 \pm 0,5$, когда малы ошибки измерения. Кроме того, вне этой области точный вид автокорреляционных функций, особенно при малых значениях $K(\tau)$, может существенно отличаться от расчетных зависимостей, независимо от вида исходных функций корреляции, которые обычно используются в теории [1-6] для феноменологического описания неоднородной турбулентной среды.

Кроме осцилляций и нерегулярных отклонений (выбросов), связанных, как указывалось, с недостаточной статистикой измерений и с нестационарностью флюктуаций [11, 12, 14, 15], во многих случаях имеет место более пологий ход „хвостов“ экспериментальных автокорреляционных зависимостей $K(\tau)$, по сравнению с расчетными кривыми. Причина этих расхождений, по-видимому, заключается не столько в точном виде исходных функций корреляции*, сколько в приближенном характере описания реальной неоднородной среды „одномасштабными“ функциями с одним параметром (l или τ_0). При „многомасштабном“ описании среды (например, в простейшем случае двухмасштабной функции пространственной корреляции $\Phi(\Delta r/l_1, \Delta r/l_2)$ [15]) в рамках гипотезы переноса „замороженной“ турбулентности можно показать, что если в области больших значений $K(\tau)$, соответствующих $\tau < \tau_{0,5}$, ход автокорреляционной функции определяется одним значением параметра l ($l_1 < l < l_2$), то на „хвостах“ этой зависимости при $\tau \gg \tau_{0,5}$ существенен лишь больший из масштабов l_2 ($l \approx l_2$). Поэтому параметр $\tau_0 = l/v_n$, характеризующий временную зависимость, при постоянной v_n соответственно возрастает, приводя к более медленному спаданию функции автокорреляции. Физически это связано с тем, что автокорреляция флюктуаций при больших сдвигах времени $\tau \gg \tau_{0,5}$ соответствует большим разносам между трассами в пространстве, когда корреляция определяется уже исключительно крупномасштабными образованиями.

Для реальной неоднородной среды, представляющей фактически совокупность (спектр) образований различных размеров [13, 15]**, расчет результирующей автокорреляционной функции при учете лишь переноса неоднородностей должен проводиться для переменного временного масштаба τ_0 , возрастающего при увеличении сдвига во времени:

$$K(\tau) = K\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right), \quad (2)$$

где $\tau_0 = f(\tau)$. В этом случае результирующая автокорреляционная функция на различных участках приближенно может быть представлена одномасштабными зависимостями, причем этот эффект может усугубляться в случае непостоянства скорости переноса v_n , когда более крупные образования перемещаются медленнее, чем мелкие.

* Полученные экспериментальные данные практически не позволяют отдать предпочтения какому-либо из приведенных в [2, 5] видов этой функции.

** Отметим, что наличие в реальной среде неоднородностей различных размеров, означающее фактически ее неоднородность в пространстве, как можно показать, непосредственно связано также с нестационарностью флюктуаций во времени, приводящей к большому разбросу экспериментальных данных. Характерно, что подобный результат, приведенный в [12] при определении радиусов автокорреляции на трассе переменной длины, объясняется в [13] исключительно неточностью взаимного движения кораблей, на которых располагались корреспондирующие пункты, хотя аналогичные данные имеют место и на фиксированных трассах при неподвижном положении антенн.

Отмечаемое на экспериментальных зависимостях $K(\tau)$ возрастание временного масштаба τ_0 при увеличении τ приводит, при определении по ним эквивалентной скорости поперечного переноса путем сопоставления с расчетом (см. соотношения (17), (18) I), основанным на однодиагональных корреляционных функциях ($l = \text{const}$), к уменьшению величины $v_{\text{п,экв}}$ по сравнению с истинным значением скорости переноса v_{n_0} . Это расхождение увеличивается по мере уменьшения уровня отсчета на кривой $K(\tau)$.

Таким образом, при определении скорости переноса по автокорреляционным ($v_{n_{\text{экв}}} \ll v_{n_0}$) и взаимно-корреляционным ($v_{n_{\text{экв}}} \geq v_{n_0}$) функциям могут иметь место разного рода погрешности.

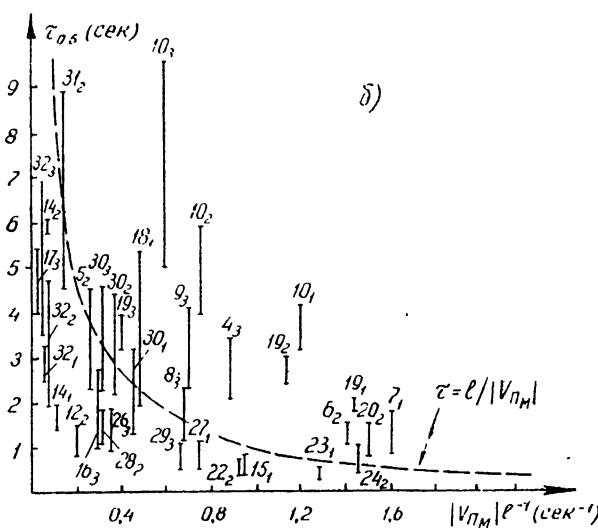
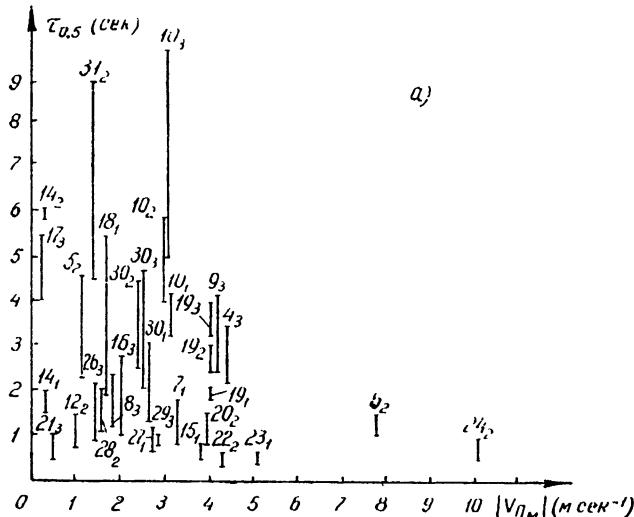


Рис. 7а, б. Сопоставление экспериментальных значений радиуса автокорреляции флюктуаций $\tau_{0,5}$ с модулем поперечной по отношению к трассе компоненты скорости ветра $|v_{\perp M}|$, а также с соответствующими расчетными значениями радиуса автокорреляции при метеорологическом определении ветра.

Представляет интерес сопоставить результаты радиоизмерений этими двумя методами, в частности, радиусов автокорреляции и скорости поперечного переноса, с метеоизмерениями силы и направления ветра. Подобное сопоставление приведено на рис. 7, 8. На рис. 7, а, в, д показана зависимость экспериментальных радиусов автокорреляции от величины поперечной, продольной компонент и модуля полной скорости ветра по данным метеоизмерений на трассе. Аналогичные результаты при нормировке соответствующих скоростей ветра на характерные масштабы l , измеренные в этих опытах, указаны на рис. 7 б, г, е. Как

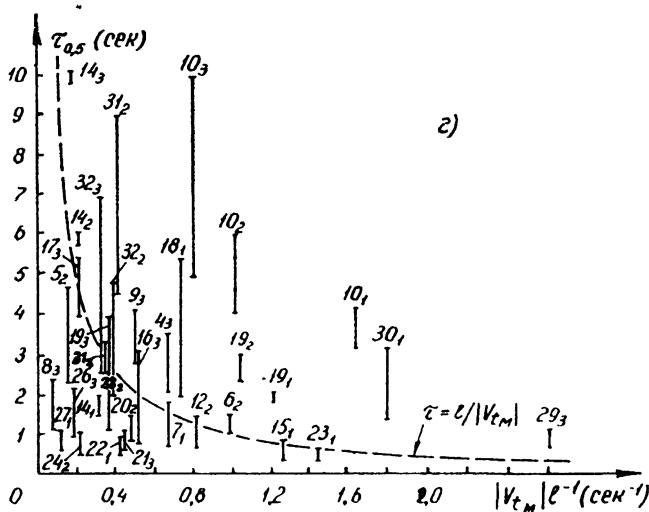
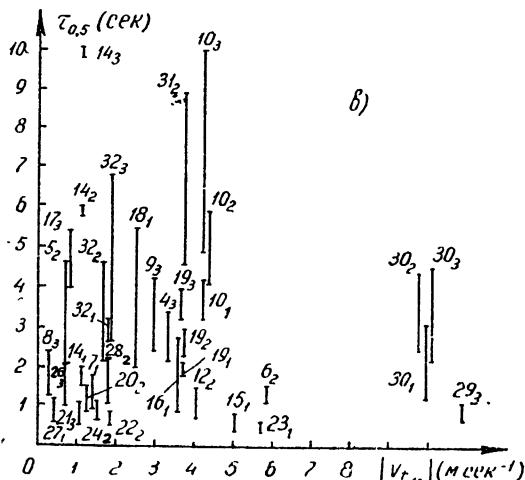


Рис. 7в, г. Сопоставление экспериментальных значений радиуса автокорреляции флюктуаций $\tau_{0.5}$ с модулем продольной по отношению к трассе компоненты скорости ветра $|v_{t_m}|$, а также с соответствующими расчетными значениями радиуса автокорреляции при метеорологическом определении ветра.

следует из рисунков, явной зависимости $\tau_{0.5}$ от v_n/l такой, как в случае рис. 6, не отмечается. Хотя в ряде опытов значения $\tau_{0.5}$ совпадают с данными соответствующих расчетов по формуле $\tau'_{0.5} = al/v_{t_m}$, использующих величину v_n из метеоизмерений (пунктирная зависимость на

рис. 7б), в большинстве проведенных измерений отмечается существенный разброс экспериментальных данных относительно расчетных, причем $\tau_{0,5} \geqslant \tau_{0,5}$. Практически подобные результаты имеют место и при сопоставлении $\tau_{0,5}$ с продольной компонентой метеоветра v_t и v_t/l , хотя, как следует из теоретического рассмотрения, продольный перенос не может оказывать влияния на флюктуации.

Из рис. 7 также следует, что обычно при определении радиуса автокорреляции с учетом величины модуля полной скорости ветра v_m , определенного при метеоизмерениях,

$$\tau_{0,5} > \tau' = l/v_m \quad (3)$$

(см. рис. 7е). Следует отметить, что на рис. 7 использованы усредненные значения метеоданных, определенных на концах трассы; однако аналогичные результаты имеют место и в случае сопоставления радиуса автокорреляции с экспериментом при метеоизмерениях.

Отмеченное здесь существенное расхождение расчетной величины автокорреляционных радиусов с экспериментом при метеоизмерениях

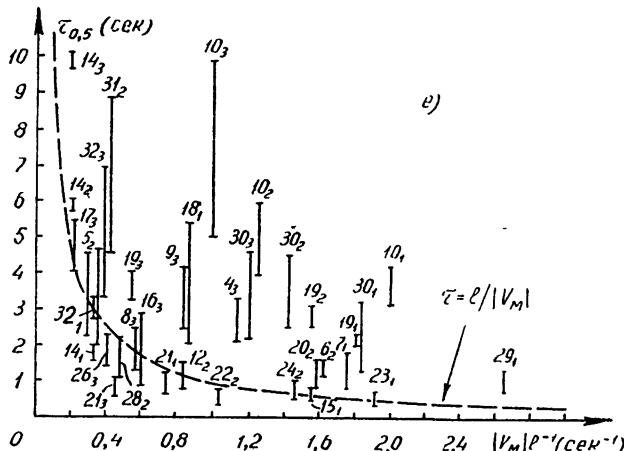
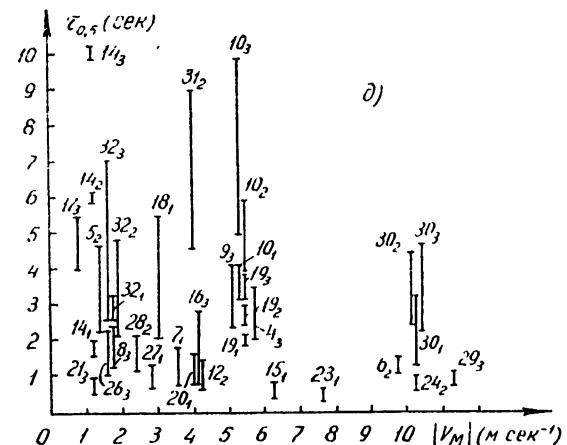


Рис. 7 д, е. Сопоставление экспериментальных значений радиуса автокорреляции флюктуаций $\tau_{0,5}$ с модулем скорости ветра $|v_m|$, а также с соответствующими расчетными значениями радиуса автокорреляции при метеорологическом определении ветра.

величины поперечной скорости переноса v_{n_k} , по-видимому, не связано с методикой расчета, основанной на учете эффекта переноса неоднородностей в пространстве, поскольку аналогичные соотношения при радиоизмерениях v_{n_k} хорошо согласуются с опытом (рис. 6б)*.

Из приведенного следует, что причина этих расхождений заключается прежде всего в методике определения величины и направления ветра, обуславливающего эффект переноса, которая приводит во многих случаях к различным результатам при радио и метеорологических измерениях. Для подтверждения этого вывода на рис. 8 сопоставлены результаты определения в ряде опытов усредненной величины попереч-

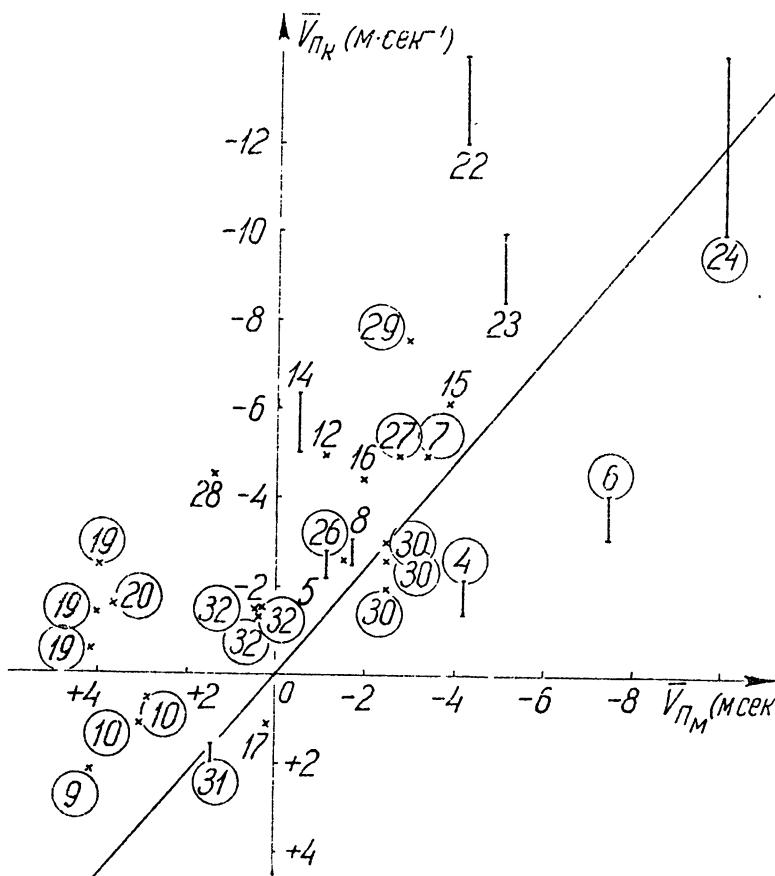


Рис. 8. Скорость поперечного к трассе переноса неоднородностей по результатам радио и метеоразмерений:

v_{n_k} — скорость „радиоветра“, v_{nM} — скорость „метеоветра“. Цифры — указаны номера опытов; кружками отмечены те опыты, для которых скорости v_{nM} на концах трассы примерно совпадали.

ной скорости переноса при метеонаблюдениях (v_{nM}) и радиометодом — по смещению максимумов функции $K(d, \tau)$ (v_{n_k}), причем кружками отмечены опыты, когда метеоразмерения ветра на концах трассы примерно совпадали. Как следует из рисунка, при радио и метеоразмере-

* Отсутствие явной корреляционной связи временных (спектральных) характеристик флюктуаций с метеоразмерениями ветра отмечается в [1-15] при аналогичном исследовании флюктуаций разностей фаз

ниях направления (знаки) скорости переноса в большинстве случаев совпадают, в то время как модули скорости существенно различны*. В отдельных случаях может отличаться даже знак v_n ; при этом перенос среды по данным метеорологических и радиоизмерений происходит в противоположных направлениях.

Таким образом, в проведенных измерениях при обычном метеорологическом определении ветра, несмотря на наличие явно выраженного эффекта переноса, не может быть получено хорошее совпадение эксперимента с выводами теории. Причины такого расхождения, кроме обычных погрешностей, связанных с неконтролируемыми нами ошибками при проведении метеоизмерений, некоторой разницей во времени, высоте метео и радиоизмерений и т. п., могут быть обусловлены также принципиальным различием в методике этих измерений. Действительно, эффект переноса неоднородностей и обусловленные этим флюктуации радиосигналов определяются процессами, протекающими на всей трассе. Вследствие этого при непостоянстве на трассе нормальной компоненты скорости v_n в каждый данный момент существенной является ее величина, усредненная в пространстве; например, для статистически однородной среды

$$\overline{(v_n)_L} \sim \frac{1}{L} \int_L v_n dl, \quad (4)$$

которая, собственно, и определяется при радиоизмерениях. В то же время при метеоизмерениях, проводимых обычно в локальной точке пространства, величина скорости ветра усредняется во времени:

$$\overline{(v_n)_T} \sim \frac{1}{T} \int_T v_n dt. \quad (5)$$

Совпадение этих величин может иметь место как при постоянстве v_n во времени и пространстве, так и при ее изменениях, когда выполняется условие эргодичности, справедливое в случае стационарных процессов.

Однако анализ полученных радиоданных и сопоставление между собой метеоизмерений, проведенных на концах трассы, приводят к выводу о существенной нестационарности процессов, протекающих в среде, когда условие эргодичности может и не выполняться, по крайней мере, при измерениях на длинных трассах**.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность В. И. Горбачу, О. М. Лебедевой, Б. Ф. Веберу и В. Ф. Шульге, принявшим большое участие в проведении экспериментальных измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А Красильников, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 13, № 1, 33 (1949).
2. R. B. Murchmoge, A. D. Wheelon, Proc. IRE, 43, 1437 (1955).
3. Л. А Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд АН СССР, М., 1958.
4. В. И. Татарский, Теория флюктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, изд АН СССР, М., 1959

* Аналогичный эффект отмечается в [10], где приводятся некоторые данные о корреляции флюктуаций на параллельных трассах, правда, при измерениях на различных частотах

** Характерно, что при радиоизмерениях скорости поперечного переноса (по смыслу функций взаимной корреляции) в ряде опытов наблюдалось различие в скоростях при изменении высот антенн от 9 до 35 м. Кроме того, зачастую отмечались случаи, когда скорость переноса существенно изменялась в ходе одного измерения, т. е. в течение нескольких минут («порывы радиоветра»).

5. А. В. Мень, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, 70 (1962).
6. Ф. Г. Басс, Э. А. Канер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 565 (1959);
Ф. Г. Басс, С. Я. Брауде, Э. А. Канер, А. В. Мень, УФН, 73, 89 (1961).
7. А. В. Мень, С. Я. Брауде, В. И. Горбач, ДАН УССР, № 7, 740 (1959).
8. А. В. Мень, В. И. Горбач, С. Я. Брауде, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 388 (1959).
9. Э. А. Канер, Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 553 (1959).
10. J. W. Herbstreit, M. C. Thompson, Proc. IRE, 43, 1391 (1955).
11. А. В. Мень, Радиотехника и электроника 7, 232 (1962).
12. D. Mintzer, J. Acoust. Soc. America, 26, 186 (1954).
13. А. В. Мень, С. Я. Брауде, В. И. Горбач, ДАН СССР, 125, 1019 (1959); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 848 (1959).
14. А. В. Мень, Радиотехника и электроника, 6, 1625 (1961).
15. А. В. Мень, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 521 (1961).

A STUDY OF SPACE AND TIME CORRELATION FUNCTIONS OF AMPLITUDE FLUCTUATIONS IN THE MEASUREMENTS ALONG CROSSED PATHES

A. V. Men'

The results are described of correlation measurement of radio wave amplitude fluctuations when propagating along crossed pathes. In the most cases the obtained data indicate a considerable influence of inhomogeneities transfer effect on the time fluctuation characteristics. The radio observation results are compared with the astronomical data.

ВЛИЯНИЕ ФЛИККЕР-ЭФФЕКТА НА ФЛЮКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ ЛАМПОВОГО ГЕНЕРАТОРА

В. А. Логачев, О. Д. Поздеев, В. С. Троицкий

В результате экспериментального исследования низкочастотных ($1 \div 100$ гц) флюктуаций амплитуды колебаний показано, что как спектр, так и интенсивность флюктуаций амплитуды определяются в основном фликкер-шумом лампы в соответствии с теоретическими соотношениями, полученными ранее

В работах [1,2] исследовалась задача о воздействии фликкер-шума лампы на амплитуду и частоту колебаний лампового генератора. Расчет, проведенный для генератора с контуром в цепи анода при аппроксимации анодно-сеточной характеристики лампы полиномом третьей степени, дает следующее выражение для спектральной плотности амплитудных флюктуаций, обусловленных фликкер-шумом лампы:

$$w_a(f) = \frac{\omega_0^2}{4p^2Q^2} w_i(f). \quad (1)$$

Здесь $w_a(f)$ — спектральная плотность относительных флюктуаций амплитуды колебаний, ω_0 — частота колебаний, Q — добротность контура, p — прочность предельного цикла, $w_i(f)$ — спектральная плотность относительных флюктуаций анодного тока лампы, вызванных ее фликкер-шумом.

Задачей настоящего исследования является выяснение зависимости величины амплитудных флюктуаций от шумовых свойств лампы и параметров генератора и сравнение этой зависимости с теоретической.

Аппаратура для измерения амплитудных флюктуаций состояла из исследуемого генератора, амплитудного детектора и анализатора спектра. Генератор был собран на лампе 6Ж1П по схеме с контуром в цепи анода и индуктивной обратной связью с принудительным смещением. Частота колебаний генератора 300 гц. Амплитуда колебаний могла плавно меняться путем изменения коэффициента взаимоиндукции. Для устранения паразитных источников флюктуаций и помех были приняты меры: уделялось большое внимание качеству деталей и монтажа, питание генератора осуществлялось от аккумуляторов, обладающих наименьшим уровнем шумов по сравнению с другими источниками питания [3], и т. д. Для уменьшения влияния механических вибраций генератор тщательно амортизировался; для устранения внешних помех вся установка помещалась в металлическую будку, а основные измерения проводились в ночное время.

Применялся анализатор спектра, аналогичный описанному в [4], обладающий узкой полосой пропускания в диапазоне $1 \div 100$ гц при собственном уровне шума $10^{-13} \text{ вт}^2 \cdot \text{гц}^{-1}$ на частоте 1 гц. Напряжение на выходе анализатора измерялось ламповым вольтметром с постоянной времени 5 сек.

1. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения проводились с несколькими экземплярами лампы 6Ж1П, обладающими различными величинами фликкер-шума. На рис. 1 в логарифмическом масштабе построена спектральная плотность относительных амплитудных флюктуаций при различных амплитудах колебаний генератора для двух ламп: сплошные линии—для лампы № 1 с фликкер-шумом на частоте 1 гц, равным $1,5 \cdot 10^{-13} \text{ гц}^{-1}$, пунктирные—для лампы № 2 с меньшим фликкер-шумом, равным $1,8 \cdot 10^{-14} \text{ гц}^{-1}$.

Зависимость спектральной плотности флюктуаций амплитуды от частоты имеет вид $w_a(f) = Af^{-\alpha}$, где $\alpha \approx 1$, а величина A зависит от амплитуды колебаний и параметров генератора. Для проверки выводов работ [1,2] по измеренной спектральной плотности $w_a(f)$ с помощью формулы (1) вычислялась спектральная плотность относительных флюктуаций тока лампы $\dot{w}_i(f)$ и сравнивалась со спектральной плотностью флюктуаций тока той же лампы, измеренной непосредственно по методу, описанному в [4]. Нужные для вычисления величины—прочность предельного цикла p и добротность контура Q —определялись экспериментально. Прочность предельного цикла определялась по изменению амплитуды колебаний в зависимости от активного сопротивления контура, которое регулировалось переменным сопротивлением, включенным последовательно с индуктивностью контура [5].

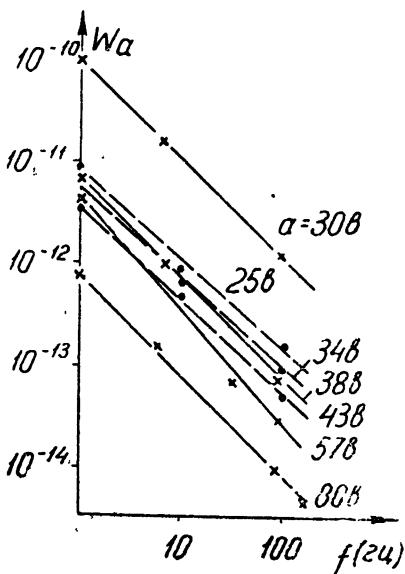


Рис. 1.

Рис. 1. Спектр относительных амплитудных флюктуаций $w_a(f)$. Сплошные линии относятся к лампе № 1, пунктирные линии—к лампе № 2.

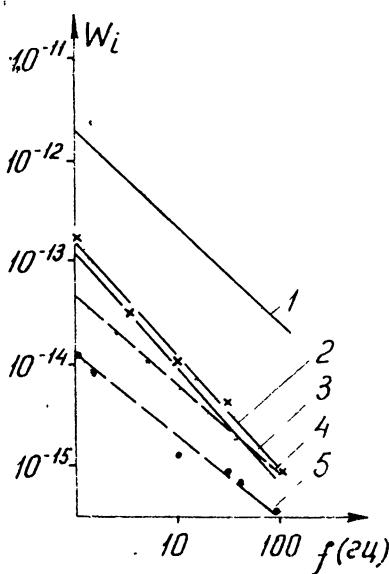


Рис. 2.

Рис. 2. Спектр относительных флюктуаций тока лампы генератора $w_i(f)$. 1—лампа № 1—спектр вычислен из амплитудных флюктуаций при амплитуде напряжения на контуре 80 в; 2—лампа № 1—спектр вычислен из амплитудных флюктуаций при небольших амплитудах колебаний; 3—лампа № 1—спектр снят экспериментально, 4—лампа № 2—спектр вычислен из амплитудных флюктуаций; 5—лампа № 2—спектр снят экспериментально.

Результаты сравнения приведены на рис. 2, из которого видно, что спектр амплитудных флюктуаций и фликкер-шума лампы одинаков и хорошо описывается функцией Af^{-1} .

Для лампы № 1 с большим фликкер-шумом при малых амплитудах колебаний (менее 60 в) получилось хорошее количественное совпадение вычисленной и измеренной непосредственно спектральной плотности флюктуаций тока (отличие в $1,5 \div 2$ раза лежит в пределах точности измерения). Для лампы № 2 с малым уровнем фликкер-шума величина $w_a(f)$, вычисленная из амплитудных флюктуаций, примерно в три раза превышает величину спектральной плотности флюктуаций тока, измеренную непосредственно.

Из полученных экспериментальных данных построена зависимость $w_a(f)$ при $f=1$ гц от прочности предельного цикла p . Как видно из формулы (1), зависимость $w_a(p)$ при $f=\text{const}$, построенная в логарифмическом масштабе, должна иметь вид прямой линии с тангенсом угла наклона, равным -2 . Зависимость $w_a(p)$ для лампы № 1 приведена на рис. 3, откуда видно, что экспериментальные точки близки к прямой при малых амплитудах колебаний. Для лампы № 2 экспериментальная зависимость $w_a(p)$ имеет качественно такой же вид. Таким образом, w_a в соответствии с теорией меняется пропорционально p^{-2} .

Хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов при малых амплитудах колебаний, в особенности для лампы с большим фликкер-шумом, подтверждает справедливость выводов работ [1,2] в отношении влияния фликкер-шума на амплитудные флюктуации. При больших амплитудах колебаний получается расхождение теории с экспериментом. Расхождение также наблюдается и при небольших амплитудах для лампы с малым уровнем фликкер-шума. Возможно, что в схеме имелись другие источники шума, имеющие спектр, подобный спектру фликкер-шума, влияние которых при малом фликкер-шуме лампы становится значительным. Несовпадение теории с экспериментом при больших амплитудах колебаний, возможно, объясняется несправедливостью в этой области динамической теории, положенной в основу расчета флюктуаций в [1,2].

Для проверки пределов применимости динамической теории экспериментально снималась зависимость квадрата амплитуды a^2 напряжения

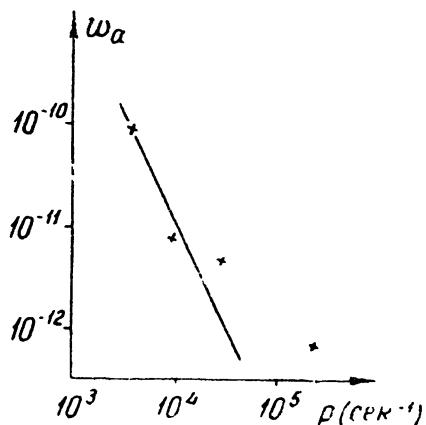


Рис. 3. Зависимость спектральной плотности амплитудных флюктуаций w_a от прочности предельного цикла p .

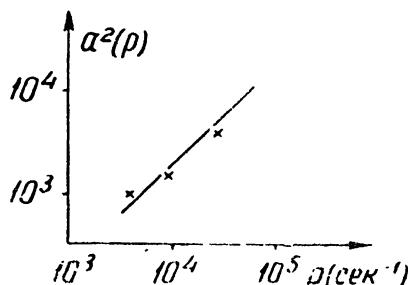


Рис. 4. Зависимость квадрата амплитуды напряжения a^2 на контуре генератора от прочности предельного цикла p

на контуре от прочности предельного цикла p . Расчет амплитуды колебаний для генератора с кубической характеристикой показывает, что квадрат амплитуды должен быть пропорционален прочности предельного цикла p . Расчетная зависимость $a^2(p)$, построенная в логарифмическом масштабе, приведена на рис. 4 (сплошная прямая). При малых амплитудах экспериментальные точки, снятые для лампы № 1, лежат достаточно близко к прямой. Тот факт, что большие отклонения экспериментальных точек от теоретической зави-

симости начинаются примерно при тех же амплитудах колебаний и прочностях предельного цикла, при которых наблюдается несоответствие теоретических и экспериментальных результатов на графиках рис. 2 и 3, свидетельствует о том, что причиной отличия теоретических и экспериментальных результатов при больших амплитудах может быть несправедливость для этого случая динамической теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 1, 21 (1958).
2. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, 574 (1959).
3. А. Н. Малахов, Радиотехника и электроника, 2, 738 (1957).
4. А. Н. Малахов, Приборы и техника эксперимента, № 1, 79 (1958).
5. И. Л. Берштейн, Изв. АН СССР, сер. физ., 14, 145 (1950).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 августа 1961 г.

THE INFLUENCE OF FLICKER-EFFECT ON THE FLUCTUATIONS OF OSCILLATION AMPLITUDES OF A TUBE GENERATOR

V. A. Logachev, O. D. Pozdeev, V. S. Troitski

Basing on the experimental investigation of low frequency (1 ± 100 c/sec) fluctuations of oscillation amplitude it is shown that both the spectrum and the intensity of amplitude fluctuations are in the main determined by a flicker-noise of a tube in accordance with the theoretical expressions obtained earlier.

ИССЛЕДОВАНИЕ АНОДНОГО БЛОКА МАГНЕТРОННОГО ТИПА С РЕЗОНАТОРАМИ КАПЛЕВИДНОЙ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

А. И. Терещенко, А. Г. Шеин

Приводятся результаты теоретического и экспериментального исследования анодных блоков с резонаторами каплевидной формы поперечного сечения, имеющей определенные преимущества по сравнению с обычно применяемыми типами резонаторов (более высокая добротность, улучшенное разделение частот). Формулы для расчета резонансных длин волн и разделения частот анодного блока получены в общем виде; приведены также первое и второе приближения при расчете. Эксперимент, дающий хорошее совпадение с теорией, подтверждает целесообразность применения анодных блоков с каплевидными резонаторами.

В настоящее время в анодных блоках магнетронов широко используются резонаторы типа щель, щель-отверстие и секторообразные (лопаточные) резонаторы [1, 5]. Выбор указанных форм резонаторов обусловлен простотой технологии изготовления анодных блоков. В то же время с точки зрения параметров резонаторных систем указанные типы резонаторов не являются оптимальными. Не имея возможности аналитически поставить и решить задачу о нахождении наилучшей геометрии резонаторной системы при заданных требованиях к ней со стороны электроники, мы рассмотрим один из вариантов конструкции анодного блока магнетронного типа, обладающий некоторыми преимуществами по сравнению с обычно применяемыми. Такой анодный блок отличается особой формой резонаторов (рис. 1), которую мы в дальнейшем будем называть каплевидной. Упоминание о возможности применения этой формы резонаторов содержится в патенте Спенсера [2], предложившего резонаторы секторообразного типа.

Из общих физических соображений ясно, что каплевидный резонатор можно рассматривать как некоторое „улучшение“ формы лопаточного резонатора и приближение к наилучшему по ряду параметров цилиндрическому резонатору. При этом каплевидный резонатор имеет преимущества и перед цилиндрическим, обеспечивая большую связь между резонаторами в анодном блоке и позволяя разместить достаточно большое число резонаторов вдоль периферии анодного блока. Указанные соображения побудили нас предпринять исследование анодных блоков с резонаторами каплевидной формы, краткие результаты которого излагаются ниже.

Резонаторы каплевидной формы поперечного сечения (рис. 1) отличаются от резонаторов секторообразной формы тем, что одна из границ их не совпадает с координатной плоскостью $r = \text{const}$ в цилиндрической системе координат, связанной с центром сектора, и представляет собой часть цилиндра, сопряженного с сектором определенного угла. В связи с этим решить волновое уравнение для этой области очень трудно, так как в цилиндрической системе координат точное решение, как известно [3], получить нельзя (граница не совпадает с координатной плоскостью). Если же ввести специальную систему координат, координатные плоскости которой являются и граничными,

то оказывается, что волновое уравнение получается чрезвычайно сложным. Ввиду неортогональности выбранной системы координат решить его в явном виде не представляется возможным.

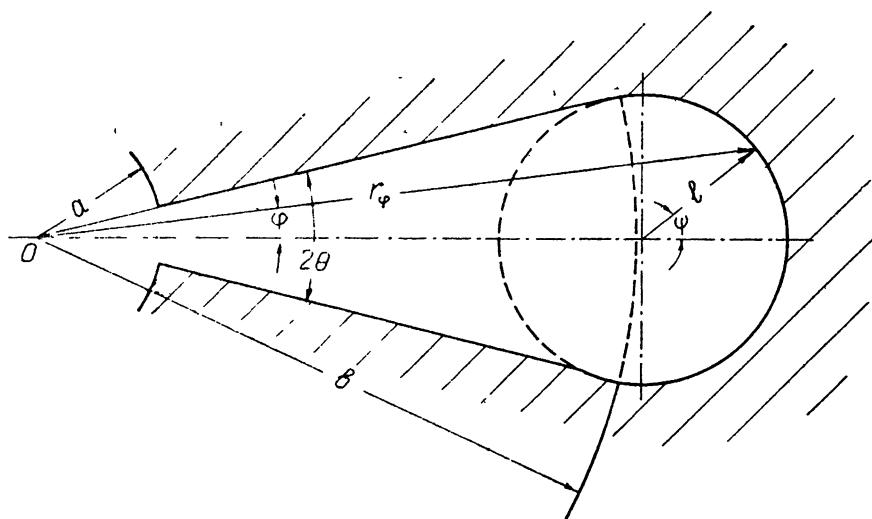


Рис. 1. Резонатор каплевидной формы поперечного сечения.

Поэтому приходится определять поля в резонаторе каплевидной формы приближенно, считая, что решение может быть найдено в цилиндрической системе координат. В этом случае, если в качестве начала отсчета взять точку 0, выражение для границы запишется в виде:

$$r_\varphi = \frac{l}{\sin \theta} [\cos \varphi + \sqrt{\sin(\theta - \varphi) \sin(\theta + \varphi)}]. \quad (1)$$

Из сравнения резонаторов каплевидной и секторообразной форм следует необходимое условие, чтобы при предельном переходе границы r_φ в $r=\text{const}$ все решения, полученные для исследуемого типа резонатора, переходили в уравнения, полученные для секторообразного резонатора [1].

Было рассмотрено несколько способов расчета полей в каплевидном резонаторе; однако ниже мы остановимся только на том способе, который дает наилучшие результаты при сравнении с экспериментом.

Решения уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат для резонатора каплевидной формы могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} E_r &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \sum_p \frac{p}{kr} [A_p J_p(kr) + B_p N_p(kr)] e^{ip\varphi} - \right. \\ &\quad \left. - j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{kr} D_n \frac{Z_{nn}(kr, kb)}{N_n(kb)} \frac{\cos[n(|\varphi| - \theta)]}{\cos(n\theta)} \right\}; \\ E_\varphi &= j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left\{ \sum_p [A_p J'_p(kr) + B_p N'_p(kr)] e^{ip\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{Z'_{nn}(kr, kb)}{N_n(kb)} \frac{\sin[n(|\varphi| - \theta)]}{\cos(n\theta)} \right\}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$H_z = \sum_p [A_p J_p(kr) + B_p N_p(kr)] e^{ip\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{Z_{nn}(kr, kb)}{N_n(kb)} \frac{\sin[n(|\varphi| - \theta)]}{\cos(n\theta)},$$

где

$$\begin{aligned} Z_{ij}(x, y) &= J_i(x)N_j(y) - J_j(y)N_i(x), \\ Z'_{ij}(x, y) &= J'_i(x)N_j(y) - J_j(y)N'_i(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь сделаны обычные предположения:

$$E_z = 0, \quad E(z) = \text{const} \quad (\partial E / \partial z = 0).$$

Первые суммы выражений (2) для компонент полей определяют решение во всей исследуемой области. Вторые суммы определены только в области „сопряженного цилиндра“ (область 2 на рис. 2) и выбраны из условия, чтобы при $r \rightarrow b$ и $|\varphi| \rightarrow 0$ выражения компонент полей переходили к случаю секторообразного резонатора. Так как система симметрична относительно $\varphi = 0$, нас интересует только величина угла φ в дополнительной сумме, а не ее знак. В области 1 при $r \leq b - 0$ все коэффициенты второй суммы D_n равны нулю.

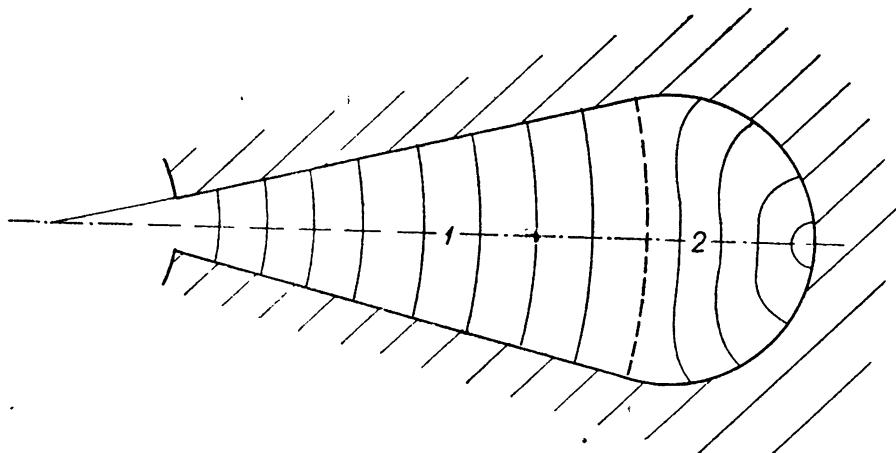


Рис. 2. Ожидаемая картина электрического поля в резонаторе каплевидной формы:
1—область, соответствующая секторообразному резонатору, 2—область „сопряженного цилиндра“

Если сравнить картины полей в резонаторах секторообразной (область 1) и каплевидной (области 1 и 2) форм, станет ясным, что их отличие заключается только в появлении небольшой радиальной составляющей поля E_r в области 2. В связи с этим, для того, чтобы в любом приближении сохранялась составляющая E_r в области 2, суммирование производится только начиная с $n=1, 2, \dots$

Границные условия для резонатора каплевидной формы записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= j \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \quad E = \text{const} \quad \text{при } r = a < b; \\ E_r &= 0 \quad \text{при } \varphi = \pm \theta, \quad a < r \leq b - 0; \\ E_t &= 0 \quad \text{при } r = r_\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Тангенциальная составляющая электрического поля на границе может быть выражена в виде некоторой функции компонент E_r и E_φ :

$$E_t = E_\varphi \frac{\sqrt{\sin(\theta - \varphi) \sin(\theta + \varphi)}}{\sin \theta} - E_r \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}. \quad (5)$$

Теперь можно определить неизвестные постоянные A_p , B_p и D_n . Если учесть, что для r_0 граничное условие справедливо при любом угле φ из заданного интервала $(0, \theta)$, то, составив бесконечную систему уравнений, с учетом первого граничного условия системы (4) можно определить все коэффициенты и получить конечные выражения для полей в резонаторе каплевидной формы:

$$\begin{aligned} E_r &= -j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{kr} \frac{\Delta_M^n Z_{nn}(kr, kb)}{\Delta N_n(kb)} \frac{\cos[n(|\varphi| - \theta)]}{\cos(n\theta)}; \\ E_\varphi &= -j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} E \left[\frac{\Delta_M^A}{\Delta} \frac{Z_{11}(kr, ka)}{N_1(ka)} - \frac{N_1(kr)}{N_1(ka)} \right] + \\ &+ j \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_M^n}{\Delta} \frac{Z'_{nn}(kr, kb)}{N_n(kb)} \frac{\sin[n(|\varphi| - \theta)]}{\cos(n\theta)}; \\ H_z &= E \left[\frac{\Delta_M^A}{\Delta} \frac{Z_{01}(kr, ka)}{N_1(ka)} - \frac{N_0(kr)}{N_1(ka)} \right] + \\ &+ E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_M^n}{\Delta} \frac{Z_{nn}(kr, kb)}{N_n(kb)} \frac{\sin[n(|\varphi| - \theta)]}{\cos(n\theta)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} L^0 & \Phi_1^0 & \Phi_2^0 & \dots & \Phi_n^0 & \dots \\ L^{\varphi_1} & \Phi_1^{\varphi_1} & \Phi_2^{\varphi_1} & \dots & \Phi_n^{\varphi_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L^{\varphi_k} & \Phi_1^{\varphi_k} & \Phi_2^{\varphi_k} & \dots & \Phi_n^{\varphi_k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L^0 & \Phi_1^0 & \Phi_2^0 & \dots & \Phi_n^0 & \dots \end{vmatrix}; \\ \Delta_M^n &= \begin{vmatrix} L^0 & \Phi_1^0 & \dots & \Phi_{n-1}^0 & M^0 & \Phi_{n+1}^0 & \dots \\ L^{\varphi_1} & \Phi_1^{\varphi_1} & \dots & \Phi_{n-1}^{\varphi_1} & M^{\varphi_1} & \Phi_{n+1}^{\varphi_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L^{\varphi_k} & \Phi_1^{\varphi_k} & \dots & \Phi_{n-1}^{\varphi_k} & M^{\varphi_k} & \Phi_{n+1}^{\varphi_k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L^0 & \Phi_1^0 & \dots & \Phi_{n-1}^0 & M^0 & \Phi_{n+1}^0 & \dots \end{vmatrix}; \\ \Delta_M^A &= \begin{vmatrix} M^0 & \Phi_1^0 & \Phi_2^0 & \dots & \Phi_n^0 & \dots \\ M^{\varphi_1} & \Phi_1^{\varphi_1} & \Phi_2^{\varphi_1} & \dots & \Phi_n^{\varphi_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^{\varphi_k} & \Phi_1^{\varphi_k} & \Phi_2^{\varphi_k} & \dots & \Phi_n^{\varphi_k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M^0 & \Phi_1^0 & \Phi_2^0 & \dots & \Phi_n^0 & \dots \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$L^\varphi = \frac{Z_{11}(kr_\varphi, ka)}{N_1(ka)} \sqrt{\sin(\theta - \varphi) \sin(\theta + \varphi)};$$

$$M^\varphi = \frac{N_1(kr_\varphi)}{N_1(ka)} \sqrt{\sin(\theta - \varphi) \sin(\theta + \varphi)};$$

$$\Phi_n^\varphi = - \frac{1}{N_n(kb) \cos(n\theta)} \left\{ \frac{n}{kr_\varphi} Z_{nn}(kr_\varphi, kb) \cos[n(|\varphi| - \theta)] \sin \varphi + \right.$$

$$\left. + Z'_{nn}(kr_\varphi, kb) \sqrt{\sin(\theta - \varphi) \sin(\theta + \varphi)} \sin[n(|\varphi| - \theta)] \right\}.$$

Бесконечные определители Δ , Δ_M^n и Δ_M^A , входящие в выражения для полей, сходятся достаточно хорошо, так как с ростом номера n функции Неймана с одинаковыми аргументами быстро растут, а функции Бесселя при тех же условиях быстро убывают [4].

В результате для практически возможных значений аргумента ($x \leq 2$) бесконечные определители можно заменить конечными, учитывая в дополнительной сумме только 1,2 или более членов.

На основании полученных данных целесообразно рассмотреть более интересную для практики систему связанных резонаторов, выполненную в виде анодного блока магнетронного типа. Такая система (для случая 8 резонаторов) изображена на рис. 3. Как известно [1] резонансные частоты в данной задаче находятся приближенно из условия резонанса системы:

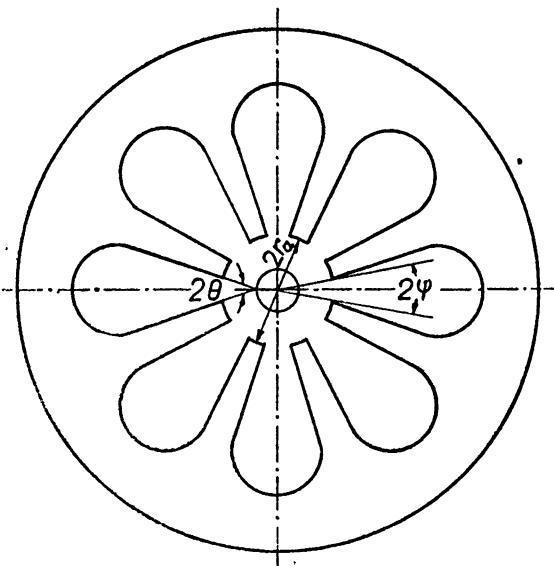


Рис. 3. Анодный блок магнетронного типа с резонаторами каплевидной формы поперечного сечения.

$$Y_n + Y_r = 0, \quad (7)$$

где Y_n — проводимость пространства взаимодействия на входе резонатора, Y_r — проводимость резонатора при $r=a$. Проводимость пространства взаимодействия равна [1]

$$Y_n = j \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{Nh}{2\pi r_a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \gamma \psi}{\gamma \psi} \right)^2 \frac{J_1(kr_a)}{J'_1(kr_a)}; \quad (8)$$

$$\gamma = s + mN; \quad m, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Проводимость отдельного резонатора определяется по известной формуле

$$Y_r = h \int_{-\theta}^{\theta} a E_\varphi^*(a, \varphi) H_z(a, \varphi) d\varphi \left| \int_{-\theta}^{\theta} a E_\varphi(a, \varphi) d\varphi \right|^{-2}$$

и равна в нашем случае

$$Y_r = -i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{h}{20a} \left\{ \frac{\Delta_m^A}{\Delta} J_0(ka) - \frac{1 + (\Delta_m^A/\Delta) J_1(ka)}{N_1(ka)} N_0(ka) \right\}. \quad (9)$$

Тогда уравнение для определения резонансных частот примет вид:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \gamma \psi}{\gamma \psi} \right)^2 \frac{J_1(kr_a)}{J'_1(kr_a)} = \frac{\pi r_a}{Na\theta} \left[\frac{\Delta_m^A}{\Delta} J_0(ka) - \frac{1 + (\Delta_m^A/\Delta) J_1(ka)}{N_1(ka)} N_0(ka) \right]. \quad (10)$$

Такое уравнение в общем виде не решается, поскольку в него входят определители бесконечного порядка. Тем не менее, с той или иной степенью точности решение можно получить, если из всего множества точек на границе точно определить его в нескольких точках. Это означает, что реальная граница в виде части окружности заменяется некоторой приближенной, сложной границей, причем число точек, в которых найдено точное решение, определяет степень приближения.

Самое простое решение (первое приближение) можно получить, если взять только две точки: $\varphi=0$ и $\varphi=\theta$. В этом случае в разложении дополнительной суммы учитывается только первый член ($n=1$), и уравнение для определения резонансных частот анодного блока с резонаторами каплевидной формы принимает вид:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \gamma \psi}{\gamma \psi} \right)^2 \frac{J_1(kr_a)}{J'_1(kr_a)} = \frac{\pi r_a}{Na\theta} \left[Z_{01}(ka, kb) - \frac{Z_{01}(ka, kc)}{Z_{11}(kc, kb)} \frac{2}{\pi kb \cos \theta} \right] \times \\ \times \left[Z_{11}(kb, ka) - \frac{Z_{11}(kc, ka)}{Z_{11}(kc, kb)} \frac{2}{\pi kb \cos \theta} \right]^{-1}. \quad (11)$$

Здесь

$$c = l \frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta}; \quad b = l \operatorname{ctg} \theta.$$

При $c = b$ уравнение (11) совпадает с приведенным в литературе [1] соотношением для анода с секторообразными резонаторами.

Если первая степень приближения нас удовлетворить не может, то, найдя дополнительно решение для точки $\varphi = \theta/2$, получим уравнение резонанса во втором приближении:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \gamma \psi}{\gamma \psi} \right)^2 \frac{J_1(kr_a)}{J'_1(kr_a)} = \\ = \frac{\pi r_a}{Na\theta} \frac{Z_{01}(ka, kb) + (\Delta_m/\Delta_b) Z_{01}(ka, km) + (\Delta_c/\Delta_b) Z_{01}(ka, kc)}{Z_{11}(kb, ka) + (\Delta_m/\Delta_b) Z_{11}(km, ka) + (\Delta_c/\Delta_b) Z_{11}(kc, ka)}, \quad (12)$$

где

$$\Delta_c = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{\pi kb} [2\Phi_1(km, kb) - \Phi_2(km, kb)];$$

$$\Delta_m = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{\pi kb} [2Z'_{11}(kc, kb) \sin \theta - Z'_{22}(kc, kb) \sin 2\theta];$$

$$\Delta_b = \Phi_2(km, kb) Z'_{11}(kc, kb) \sin \theta - \Phi_1(km, kb) Z'_{22}(kc, kb) \sin 2\theta;$$

$$m = \frac{l}{\sin \theta} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sqrt{\sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} \right).$$

Таким образом можно рассчитать резонансные частоты анодных блоков с резонаторами каплевидной формы с требуемой степенью точности.

Было проведено экспериментальное исследование ряда анодных блоков десятисантиметрового диапазона волн. Измерялись резонансные частоты и разделение видов колебаний. Поскольку использовалась стандартная схема измерений и типовая промышленная аппаратура, описывать их нет необходимости. Отметим только, что точность экспериментальных результатов была не хуже 1,5%.

На рис. 4 приведен для сравнения ряд кривых, построенных по теоретическим и экспериментальным данным. Кривые 1—3 относятся к анодному блоку с резонаторами каплевидной формы (рис. 3), у которого число резонаторов $N = 8$, $r_a = 0,5 \text{ см}$, $W = 0,23 \text{ см}$, $a = 0,3 \text{ см}$, $b = 1,29 \text{ см}$, $l = 0,53 \text{ см}$, $2\theta = \pi/4$, $\psi = 13^\circ 12'$.

Как видно из рисунка, экспериментальная кривая 3 мало отличается от теоретической кривой 1 и кривой второго приближения 2. Для π -вида максимальное расхождение теоретических и экспериментальных результатов не более 3% в первом приближении и не более 1,5% — во втором. Расчет дает разделение частот π -вида и $(N-1)/2$ -вида колебаний порядка $2,0 \pm 2,2\%$, т. е. несколько больше, чем эксперимент ($1,3 \pm 1,6\%$). На этом же рисунке нанесена экспериментальная кривая 4 для соответствующего анодного блока с секторообразными резонаторами, из которой видно, что разделение по частоте в данном случае меньше 0,9%. Кривые 5 и 6 построены по теоретическим данным для секторообразных резонаторов с $r=b$ и $r=c$ соответственно. Сопоставляя их с кривыми 1 и 2, несложно видеть различие в характере этих кривых, соответствующее различию форм резонаторов.

Таким образом, на основании теоретического и экспериментального исследования можно сделать вывод о наличии у анодных блоков с каплевидными резонаторами ряда преимуществ по сравнению с анодными блоками других типов. Так, каплевидные резонаторы позволяют получить большее разделение частот колебаний π -вида и соседнего с ним. Геометрические размеры анода при применении каплевидных резонаторов несколько увеличиваются, что полезно при конструировании систем в сантиметровом диапазоне волн. Наконец, следует отметить повышение добротности, обусловленное достаточно большим отношением объема к поверхности в резонаторе каплевидной формы. Указанные преимущества позволяют рекомендовать применение резонаторов каплевидной формы в электровакуумных приборах СВЧ.

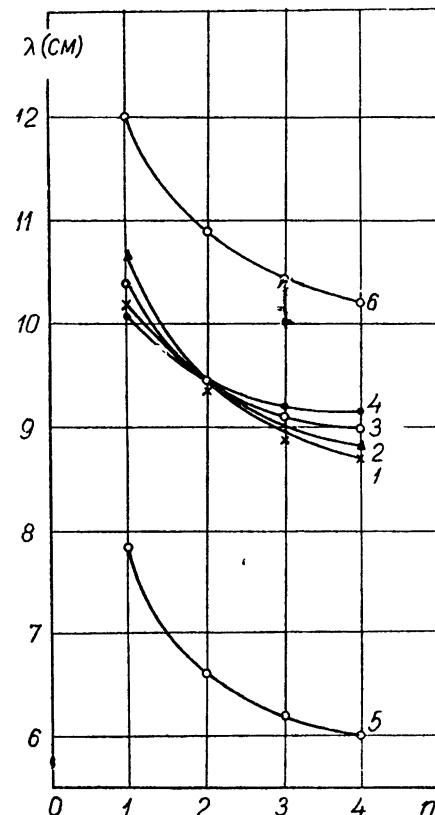


Рис. 4. Графики разделения частот анодных блоков с резонаторами каплевидной формы (кривые 1–3) и секторообразными резонаторами (кривые 4–6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Магнетроны сантиметрового диапазона, 1, изд. Сов. радио, М., 1950.
2. P. L. Spenser, USA Pat. № 2410396 (1946).
3. Ф. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, 2, ИЛ, М., 1960.
4. Б. Янке, Р. Эмд'е, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, М.—Л., 1959
5. В. Ф. Коваленко, Введение в электронику сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1955.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию
13 июля 1961 г.INVESTIGATION OF MAGNETRON TYPE ANODE UNIT WITH
„DROP“ SHAPED RESONATORS*A. I. Tereshchenko, A. G. Shein*

The results are given of theoretical and experimental study of anode units with „drop“ shaped resonators which have an advantage over the commonly used types of resonators (the higher Q-factor, the improved frequencies separation). The formulas have been obtained in a general form for resonance waves and frequencies of an anode unit; there have been given also the 1-st and the 2-d approximations. The experiment perfectly coinciding with the theory confirms the expediency of using the anode units with „drop“ shaped resonators.

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ШУМА ПРИЕМНИКА С ОДНОКОНТУРНЫМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ УСИЛИТЕЛЕМ НА ВХОДЕ*

B. И. Юзвинский

Рассматривается коэффициент шума приемника с усилителем высокой частоты в виде одноконтурного параметрического усилителя, работающего в синхронном или двухканальном режиме. Генератор и нагрузка включаются через циркулятор или раздельно через два ферритовых изолятора или без них. Показывается, что при раздельном включении подбором связей усилителя с генератором и нагрузкой может быть получено минимальное значение коэффициента шума, которое в синхронном режиме заметно меньше, чем в двухканальном. Во всех случаях заданными предполагаются параметры диода, частота сигнала и шумовые свойства приемника без усилителя, а коэффициент регенерации выбирается из соображений стабильности усилителя.

ВВЕДЕНИЕ

Одноконтурный параметрический усилитель с нелинейной емкостью, находящейся под воздействием накачки, более прост по конструкции и налаживанию, чем двухконтурный, и поэтому широко применяется на практике. Возможны два режима работы такого усилителя: синхронный и двухканальный. В первом случае колебания накачки и сигнала должны быть когерентны с отношением частот 2/1, чем ограничивается возможность применения такого режима. Кроме того, для получения максимального усиления необходимо, чтобы разность фаз этих колебаний была близка к оптимальной. При двухканальной работе усилителя его полоса пропускания выбирается достаточно большой. В ней размещаются, не перекрываясь и существенно не ослабляясь, спектры сигнального и появляющегося в усилителе комбинационного каналов. Разность несущих частот каналов выбирается, исходя из селективных свойств приемника, так, чтобы исключить биения между сигнальными и комбинационными колебаниями.

В настоящей работе рассматривается коэффициент шума приемника с усилителем высокой частоты в виде одноконтурного параметрического усилителя, работающего в синхронном или двухканальном режиме. Анализируются два случая:

- генератор сигнала и нагрузка подключены к усилителю через ферритовый циркулятор (который предполагается идеальным);
- генератор и нагрузка подключены раздельно через два ферритовых изолятора или без них.

Ниже показано, что коэффициент шума приемника с усилителем определяется параметрами, характеризующими свойства нелинейной емкости (диода) и свойства приемника без усилителя. В случае б имеются оптимальные значения связей генератора сигнала и нагрузки с усилителем, при которых коэффициент шума приемника минимален. При этом предполагается, что частота сигнала и параметры диода и приемника без усилителя являются заданными и не зависящими

* Доклад на XVI научно-технической конференции, посвященной Дню Радио, Ленинград, 1961.

от связей. Коэффициент регенерации выбирается из условия обеспечения стабильной работы усилителя и поддерживается постоянным при любых его перестройках.

Эквивалентная схема одноконтурного параметрического усилителя приведена на рис. 1. Нагрузка и генератор сигнала включены через идеальные трансформаторы, служащие для подбора связей. Если включен циркулятор, то $G_h = 0$, и общая проводимость генератора и нагрузки, разделенных циркулятором, равна G_c .

Постоянная составляющая емкости диода C_0 пересчитывается параллельно контуру. Активная проводимость контура G_k состоит из проводимости самого контура G'_k и пересчитанной проводимости диода

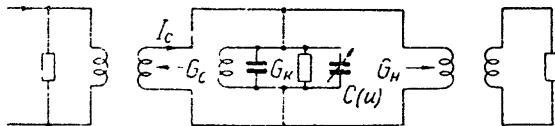


Рис. 1.

$$G_d = R_s \omega^2 C_s^2, \quad (1)$$

где R_s — последовательное сопротивление диода, $C_s^2 = C_0^2 + \frac{1}{2} C_1^2$ — емкость, расчет которой дан в приложении, C_1 — амплитуда изменения емкости с частотой накачки ω_0 , ω — частота сигнала.

Коэффициент шума приемника с параметрическим усилителем на входе определяется общим выражением [1]

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1 - t_h}{K^2}, \quad (2)$$

где F_1 — коэффициент шума усилителя (в отсутствие циркулятора нужно учитывать шум нагрузки), K^2 — коэффициент усиления по мощности, F_2 — коэффициент шума приемника без усилителя, t_h — относительная электрическая температура нагрузки усилителя, т. е. входа приемника. Величину t_h надо полагать в формуле (2) равной нулю при включении нагрузки через циркулятор и единице — при включении ее через изолятор.

1. КОЭФФИЦИЕНТ ШУМА ПРИЕМНИКА ПРИ СИНХРОННОЙ РАБОТЕ УСИЛИТЕЛЯ

При синхронной работе параметрического усилителя имеет место существенная зависимость коэффициента усиления гармонического сигнала от фазы колебаний накачки. Если контур усилителя настроен в резонанс к частоте сигнала, то амплитуда и фаза напряжения на контуре определяются выражениями [2]

$$U_m = \frac{I_c}{G} \frac{\sqrt{1 + \alpha + 2\sqrt{\alpha} \sin \varphi_0}}{1 - \alpha}; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\sqrt{\alpha} \cos \varphi_0}{1 + \sqrt{\alpha} \sin \varphi_0},$$

где I_c — ток сигнала (с нулевой начальной фазой), φ_0 — начальная фаза колебаний накачки,

$$\alpha = \left(\frac{\omega C_1}{2G} \right)^2 \quad (4)$$

— коэффициент регенерации; $G = G_k + G_c$ — полная активная проводимость контура при включении генератора и нагрузки через циркулятор или $G = G_k + G_c + G_h$ — проводимость в отсутствие циркулятора. Отсюда получим полную проводимость схемы

$$Y = \frac{I_c}{U} = \frac{G(1 - \alpha) e^{-i\varphi}}{\sqrt{1 + \alpha + 2\sqrt{\alpha} \sin \varphi_0}} \quad (5)$$

и входную проводимость усилителя

$$Y' = Y - G_c.$$

При наличии циркулятора коэффициент усиления по мощности определяется квадратом модуля коэффициента отражения в питающей линии

$$K^2 = \left| \frac{G_c - Y'}{G_c + Y'} \right|^2 = \left| \frac{2G_c}{Y} - 1 \right|^2. \quad (6)$$

При определении коэффициента шума системы необходимо применять коэффициент усиления шумового, а не гармонического сигнала. Поэтому выражение (6) надо усреднить по всем равновероятным фазам накачки φ_0 . Подставляя в (6) выражение (5), легко получить:

$$K^2 = \left[\frac{2G_c}{G(1 - \alpha)} \right]^2 (1 + \alpha + 2\sqrt{\alpha} \sin \varphi_0) + 1 - \frac{4G_c}{G(1 - \alpha)} (1 + \sqrt{\alpha} \sin \varphi_0).$$

Вводя обозначение $G_k/G_c = x$ и учитывая, что $\overline{\sin \varphi_0} = 0$, имеем:

$$\bar{K}^2 = \frac{4(1 + \alpha)}{(1 + x)^2(1 - \alpha)^2} + 1 - \frac{4}{(1 + x)(1 - \alpha)}, \quad (7)$$

где черта сверху означает усреднение по φ_0 .

Коэффициент усиления шумового тока, возникающего в проводимости контура G_k , определяется выражением:

$$\bar{K}_1^2 = 4G_c G_k |\bar{Y}|^{-2} = \frac{4x(1 + \alpha)}{(1 + x)^2(1 - \alpha)^2}. \quad (8)$$

Тогда для коэффициента шума приемника с рассматриваемым параметрическим усилителем на входе, согласно (2), получим:

$$F = 1 + \frac{t_k \bar{K}_1^2 + (F_2 - 1)}{\bar{K}^2}, \quad (9)$$

где t_k — относительная температура контура.

Выражение (4) перепишем в виде

$$\frac{x}{1 + x} = m, \quad (10)$$

где в соответствии с формулой (1)

$$m = A \sqrt{\alpha} \omega R_s C_m, \quad (11)$$

$A = 2(1 + G'_k/G_d)$ — численный коэффициент, близкий к 2 (так как практически всегда $G'_k \ll G_d$), $C_m = C_s^2/C_1$.

Таким образом, определяя x из (10) и подставляя (7) и (8) в выражение (9), получим зависимость $F(m)$ при заданных t_k , α и F_2 . Для $t_k=1$, $\alpha=0,8$, $F_2=11$ и 5 зависимости $F(m)$, а также $F_1(m)$ (пунктир) приведены на рис. 2 (три нижние кривые).

В случае, когда генератор сигнала и нагрузка включены раздельно через изоляторы или без них, коэффициент усиления шумового сигнала и коэффициент шума усилителя определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \bar{K^2} &= 4G_h G_c |Y|^{-2} = \\ &= 4G_h G_c (1 + \alpha)/G^2(1 - \sigma)^2; \end{aligned}$$

$$F_1 = 1 + t_k G_k/G_c + t_h G_h/G_c,$$

где $G = G_c + G_k + G_h$. Вводя обозначения

$$x = G_k/G_c, \quad y = G_h/G_c,$$

$$n = (F_2 - 1 - t_h)(1 - \sigma)^2/4(1 + \gamma),$$

согласно (2), получим:

$$F = 1 + t_k x + t_h y + n(1 + x + y)^2/y. \quad (12)$$

Выражение (4) в этом случае имеет вид:

$$\frac{x}{1+x+y} = m. \quad (13)$$

Определяя отсюда x или y и подставляя в (12), находим значения x_m и y_m , при которых коэффициент шума минимален:

$$\begin{aligned} x_m &= \frac{m}{1-m}(1 + y_m); \\ y_m &= \left\{ 1 + \frac{1-m}{n} [t_h - m(t_h - t_k)] \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив x_m , y_m в (12), найдем зависимость минимального значения F_m от параметров m , n , t_k и t_h . В частном случае $t_k = t_h = 1$ формула (12) дает:

$$F_m = \left[\frac{\sqrt{1-m+n} + \sqrt{n}}{1-m} \right]^2.$$

Функции $F_m(m)$ приведены на рис. 2 для $n = 0,05$ и $0,0167$ (т. е. для $\alpha = 0,8$, $F_2 = 11$ и 5), причем пунктиром указаны соответствующие зависимости $F_1(m)$ (четыре верхних кривых).

Как видно из рис. 2, в приемнике с параметрическим усилителем на входе может быть получен малый коэффициент шума, который растет с увеличением параметров m и F_2 . Применение циркулятора

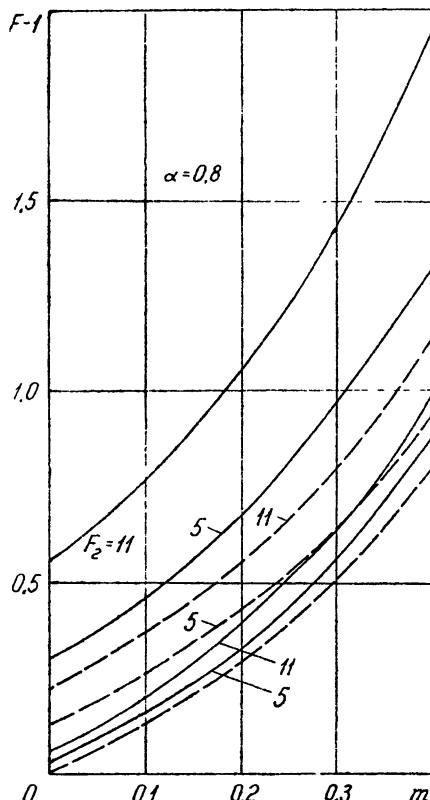


Рис. 2.

заметно снижает коэффициент шума, а также влияние величины F_2 . Необходимо только отметить, что рассматриваемый синхронный режим работы одноконтурного усилителя может применяться только в редких случаях при непрерывном сигнале, когерентном накачке. Появление в спектре сигнала колебаний, не когерентных накачке, приводит к новым комбинационным частотам, т. е. в общем случае к искажению сигнала.

2. КОЭФФИЦИЕНТ ШУМА ПРИЕМНИКА ПРИ ДВУХКАНАЛЬНОЙ РАБОТЕ УСИЛИТЕЛЯ

При двухканальной работе параметрического усилителя частота сигнала ω_1 не равна половине частоты накачки ω_0 , но близка к ней. При этом появляются колебания комбинационной частоты $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$, так что на контуре устанавливается сумма напряжений частот ω_1 и ω_2 . Комплексные амплитуды этих напряжений, так же, как в двухконтурном усилителе, определяются выражениями:

$$\begin{aligned} U_{11} &= \frac{I_c}{Y_1 - \alpha G_1 G_2 / Y_2}; \\ U_{12} &= j \frac{\omega_2 C_1}{2 Y_2} \frac{I_c e^{j\varphi_0}}{Y_1 - \alpha G_1 G_2 / Y_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$Y_{1,2} = G_{1,2} (1 + j\xi_{1,2}) \quad (16)$$

($\xi_{1,2}$ — обобщенные расстройки контура, $G_{1,2}$ — полные активные проводимости контура для частот $\omega_{1,2}$, отличающиеся составляющими $G_{d,1,2}$).

При включении генератора и нагрузки через циркулятор, когда сигнал подается и снимается на частоте ω_1 , коэффициент усиления определяется квадратом модуля коэффициента отражения

$$K^2 = \left| \frac{G_c - (Y_1' - \alpha G_1 G_2 / Y_2)}{G_c + (Y_1' - \alpha G_1 G_2 / Y_2)} \right|^2, \quad (17)$$

где $Y_1' = Y_1 - G_c$. Коэффициент шума параметрического усилителя в этом случае

$$F_1 = 1 + G_c \frac{|U_{11}|^2 + |U_{21}|^2}{kTBK^2}. \quad (18)$$

Здесь в числителе стоит сумма средних квадратов шумовых напряжений канала частоты ω_1 на выходе усилителя, вызываемых входными шумовыми токами каналов частот ω_1 и ω_2 :

$$\begin{aligned} I_{c1}^2 &= 4kT_k B G_{k1}; \\ I_{c2}^2 &= 4kT_B (G_c + t_k G_{k2}). \end{aligned}$$

Подставляя все в общую формулу (2), получим для коэффициента шума приемника следующее выражение:

$$\begin{aligned} F &= 1 + \left\{ t_k \frac{G_{k1}}{G_c} + \frac{\alpha \omega_1}{\omega_2} \frac{G_1 G_2}{|Y_2'|^2} \left(1 + t_k \frac{G_{k2}}{G_c} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (F_2 - 1) \frac{G_1^2}{G_c^2} \left| \frac{Y_1}{G_1} - \frac{\alpha G_2}{Y_2'} \right|^2 \right\} \left| 1 - \frac{G_1}{2G_c} \left(\frac{Y_1}{G_1} - \frac{\alpha G_2}{Y_2'} \right) \right|^{-2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Во всех выражениях, кроме $\xi_{1,2}$, с достаточной точностью можно положить $\omega_1 = \omega_2$. Тогда $G_1 = G_2 = G_c + G_k$ и коэффициент регенерации α определяется формулой (4). Далее предположим, что $\xi_1 = -\xi_2$ (т. е. что ω_1 и ω_2 размещаются симметрично относительно резонансной частоты контура), а также введем $\xi_0 = \xi_1 - \xi_2$ — обобщенную расстройку между несущими частотами сигнального и комбинационного каналов. Используя соотношение (10), расстройку ξ_0 заменим на

$$\xi_{0k} = \frac{G_k + G_c}{G_k} \xi_0 = \frac{1}{m} \xi_0$$

— расстройку, отнесенную к добротности самого контура (без учета вносимой добротности генератора).

Подставляя все в выражение (19), окончательно получим:

$$F = 1 + 4 \frac{t_k x + a(1+t_k x) + \frac{1}{4} (F_2 - 1) [(1-a)^2 + b^2] (1+x)^2}{[1-x+(1+x)a]^2 + (1+x)^2 b^2},$$

где

$$a = \frac{\alpha}{1 + (m\xi_{0k}/2)^2}; \quad b = \frac{m\xi_{0k}}{2} (1+a);$$

$$x = -\frac{m}{1-m}.$$

Функции $F(m)$ и $F_1(m)$ (пунктир) для $\alpha=0,8$, $\xi_{0k}=0,5$ и 1 и $F_2=11$ и 5 приведены на рис. 3.

При включении генератора и нагрузки раздельно через два изолятора или без них для коэффициентов усиления и шума параметрического усилителя имеем:

$$K^2 = \frac{4G_c G_h}{G^2} \frac{1}{|Y_1/G - \alpha G/Y_2|^2};$$

$$F_1 = \left(1 + t_k \frac{G_k}{G_c} + t_h \frac{G_h}{G_c} \right) \left(1 + \frac{\alpha G^2}{|Y|^2} \right),$$

где $G = G_c + G_k + G_h$ ($G_{k1} = G_{k2}$) и слагаемое $\alpha G^2/|Y_2|^2$ в F_1 появилось в результате учета входных шумов комбинационного канала. Используя обозначения x и y , согласно формуле (2) получим для коэффициента шума приемника выражение

$$F = \left[1 + t_k x + t_h y + n' \frac{(1+x+y)^2}{y} \right] (1+a),$$

в котором

$$n' = \frac{1}{4(1+a)} (F_2 - 1 - t_h) [(1-a)^2 + b^2].$$

Заметим, что если сигнал на усилитель, как и выше, подается на частоте ω_1 , но снимается в приемник на комбинационной частоте ω_2 , то коэффициент шума будет отличаться множителем $1/a$.

Поскольку x и y в рассматриваемом случае связаны соотношением (13), то экстремум F опять будет иметь место при значениях x_m , y_m , определяемых формулами (14) с заменой n на n' . Рассчитанные таким образом зависимости $F_m(m)$ и $F_1(m)$ при $t_k = t_h = 1$ и тех же, что и на рис. 3, значениях α , ξ_{0k} и F_2 приведены на рис. 4.

Как показывают кривые рис. 3 и 4, с увеличением m (т. е. с ростом приведения $R_s C_m$ и частоты сигнала ω_1) минимально достижимый коэффициент шума приемника быстро возрастает. При этом все большую роль приобретает влияние шумов приемника без усилителя. Очевидно также, что применение циркулятора, как и в синхронном случае, заметно снижает коэффициент шума приемника.

Существенное значение при двухканальном режиме усилителя имеет обобщенная расстройка несущих частот сигнального и комбинационного каналов ξ_{0K} , с ее ростом коэффициент шума повышается,

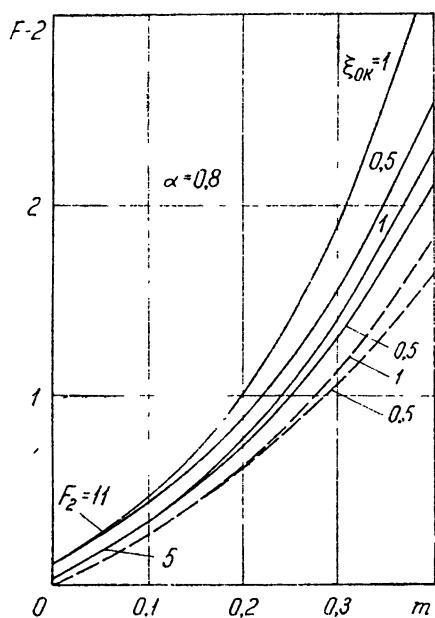


Рис. 3.

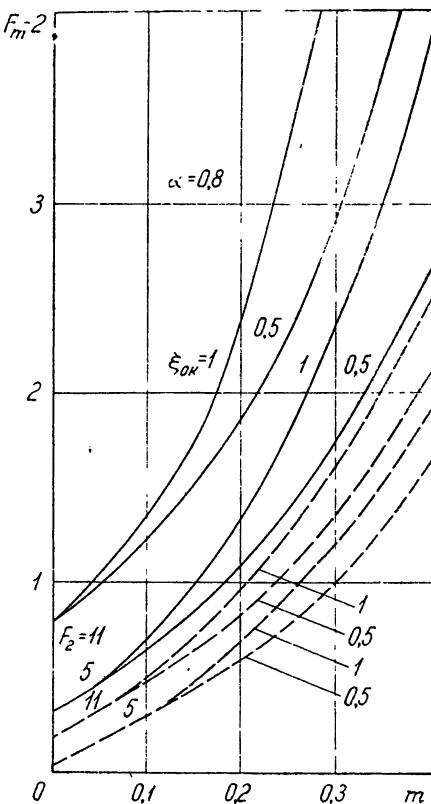


Рис. 4.

в особенности для плохих диодов (с большим m). Очевидно, разность частот $|\omega_1 - \omega_2|$ надо делать возможно меньшей, насколько это позволяет ширина спектра сигнала. Уменьшение собственной добротности контура также снижает ξ_{0K} . Однако увеличение R_s или введение дополнительных потерь в контур поведет к росту параметра m , а следовательно, и величины F . Кроме того, при этом будет затруднено получение необходимых связей генератора и нагрузки с контуром.

Сопоставление минимальных коэффициентов шума при синхронном и двухканальном режимах работы параметрического усилителя показывает существенное преимущество первого режима. На кривых рис. 3 и 4 F не становится ниже 2 при $m \rightarrow 0$, в то время как на рис. 2 F значительно ближе к 1. В двухканальном режиме происходит усиление входных шумов комбинационного канала, чего нет в других случаях, в том числе и в двухконтурном параметрическом усилителе. Заметим, что подавление этих шумов при помощи фильтра перед усилителем

вряд ли практически возможно, так как, согласно вышеизложенному, разность частот $|\omega_1 - \omega_2|$ для уменьшения F должна выбираться минимальной, исходя из селективности всего приемника.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПЕРЕСЧЕТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ ДИОДА В ПАРАЛЛЕЛЬНУЮ

Рассмотрим эквивалентную схему рис. 5, на которой диод представлен последовательным соединением нелинейной емкости $C(u)$ и активного сопротивления R_s , проводимость контура без учета параметров диода обозначена через $Y^0 = G^0 + jB^0$, а напряжение накачки — через u_0 . При достаточной селекции контура, гармонической накачке и малом сигнале ток диода i (без учета составляющих с частотой накачки ω_0) определяется уравнением с периодическими коэффициентами:

$$i + R_s \frac{d}{dt} [iC(u_0)] = \frac{d}{dt} [uC(u_0)]. \quad (20)$$

Здесь u — напряжение на контуре частоты ω в синхронном или сумма напряжений частот ω_1 и ω_2 в двухканальном режиме. Функция $C(u_0)$ представляется гармоническим рядом по частоте накачки ω_0 с коэффициентами C_0, C_1, \dots

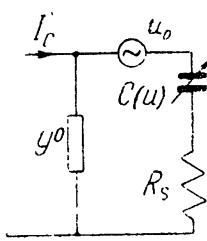


Рис. 5.

Из этих двух уравнений определяем амплитуду и фазу напряжения на контуре:

$$I = I_c - Y^0 U. \quad (21)$$

$$U_m = I_c \frac{\sqrt{G^2 + B^2 + (1/4) \omega^2 C_1^2 + \omega C_1 G \sin \varphi_0 + \omega C_1 B \cos \varphi_0}}{G^2 + B^2 - \omega^2 C_1^2 / 4};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{B + (1/2) \omega C_1 \cos \varphi_0}{G + (1/2) \omega C_1 \sin \varphi_0},$$

где

$$G = G^0 + \omega^2 R_s (C_0^2 + C_1^2 / 2);$$

$$B = B^0 + \omega C_0.$$

Предполагая в резонансе $B = 0$ и вводя обозначение (4) для коэффициента регенерации, получим выражения (3), причем пересчет последовательного сопротивления R_s в проводимость G_d производится по формуле (1).

В двухканальном режиме напряжение u представляется суммой двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2 , а ток i — бесконечной суммой составляющих с частотами $n\omega_0 + \omega_{1,2}$. Тогда уравнение (20) дает бесконечную систему линейных уравнений для определения комплексных амплитуд составляющих тока через комплексные амплитуды напряжений U_{11} и U_{12} . При малом R_s сначала определяются

амплитуды токов частот ω_1 и ω_2 , а затем, используя уравнения (21) для обеих частот, окончательно находятся амплитуды напряжений:

$$U_{11} = \frac{I_c}{Y_1 - (\omega_1 \omega_2 C_1^2 / 4Y_2^*) [1 - 2j(\omega_1 - \omega_2) R_s C_s]};$$

$$U_{12} = \frac{j\omega_2 C_1}{2Y_2} [1 + j(\omega_1 - \omega_2) R_s C_s] e^{j\varphi_0} U_1^*,$$

где

$$Y_{1,2} = Y_{1,2}^0 + j\omega_{1,2} C_0 + R_s \omega_{1,2}^2 \left(C_0^2 + \frac{1}{2} C_1^2 + \frac{1}{2} C_2^2 + \dots \right);$$

$$C_s' = \frac{1}{C_1} \left(C_0 C_1 + \frac{1}{2} C_1 C_2 + \frac{1}{2} C_2 C_3 + \dots \right).$$

Отсюда, учитывая малость R_s и разности частот $\omega_1 - \omega_2$, получаем формулы (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Sie, S. Weisbaum, IRE Nat. Conv. Rec., 3, 141 (1959).
2. Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, Изв. электропром. слабого тока, вып. 3, 1 (1935).

Поступила в редакцию
8 сентября 1961 г.

ON NOISE FIGURE OF RECEIVER WITH INPUT ONE-CIRCUIT PARAMETRIC AMPLIFIER

V. I. Yuzvinski

The noise figure is considered of the receiver with high-frequency one-circuit parametric amplifier operating in a synchronous or two-channel regime. An oscillator and a load are connected through the circulator either separately by means of two ferrite insulators or without any. It is shown that when they are switching separately one can obtain the minimum noise figure by variation of the couplings between the amplifier and the oscillator and the load. The noise figure is less in synchronous regime than in two-channel one. In all cases the diode parameters are assumed to be given as well as the signal frequency and the noise properties of the receiver without the amplifier, the regeneration factor being selected accounting for an amplifier stability.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

A. K. Булгаков, B. M. Рысаков

Проведено экспериментальное изучение характера нестационарного излучения антенны при включении в антенну тока, меняющегося по закону $I(t) \cos(\omega_0 t)$. Установлена сильная зависимость формы излучаемого импульса от величины удаления точки наблюдения от антенны и от высоты антенны. Оценена длительность переходного процесса в антenne, оказавшаяся для всех длин антенны равной десяти удвоенным временам пробега фронта импульса вдоль антенны. Предпринята попытка интерпретации наблюденных явлений.

К настоящему времени как экспериментально, так и теоретически хорошо исследовано стационарное излучение антенны [1,2]. Нестационарному излучению антенн посвящено лишь несколько теоретических работ [3,4], в которых найдено поле в зоне излучения для идеализированной модели передатчика. Об опубликованных результатах экспериментальных исследований полей антенн в нестационарном режиме авторам неизвестно.

Целью работы, проведенной авторами в 1959—1960 гг., являлось экспериментальное исследование формы импульса, излучаемого вертикальной антенной при питании основания антенны током, меняющимся по закону типа

$$I = I(t) \cos(\omega_0 t),$$

где $I(t)$ —единичная функция включения.

Было проведено две серии экспериментов. В первой из них исследовалась зависимость формы импульса от расстояния при фиксированной высоте передающей антенны, во второй—зависимость от высоты антенны при фиксированном расстоянии точки наблюдения от антенны. Частота заполнения импульса $f_0 \approx 550 \text{ кГц}$. Прием сигнала осуществлялся на короткую вертикальную антенну ($l = 0,5 \text{ м}$), переходными процессами в которой в нашем случае можно пренебречь. Далее сигнал усиливался широкополосным усилителем с полосой пропускания от 100 кГц до 5 мГц и поступал на осциллограф; во втором случае для получения на экране меток времени использовался двухлучевой осциллограф. Анализ формы импульса осуществлялся по фотографиям, полученным с экрана осциллографа. При работе на малых расстояниях от передающей антенны (в статической и индукционной зонах), где градиенты поля велики, питание осциллографа и усилителя с целью уменьшения наводок на силовые кабели осуществлялось от аккумуляторов.

В первой серии измерений в качестве излучающей антенны использовалась вертикальная телескопическая мачта высотой 18 м, так что длина антенны была много меньше резонансной для используемой частоты ($l/\lambda = 0,03$). В ходе работы было установлено, что в непосредственной близости от антенны высокочастотное заполнение импульса по форме приближается к синусоидальному (см. рис. 1, длительность развертки 10 $\mu\text{сек}$). При удалении точки наблюдения от антенны в начале импульса появляются быстро растущие высокочастотные осцил-

ляции (рис. 2, расстояние 30 м). При дальнейшем удалении рост осцилляции замедляется. Одновременно быстро уменьшается длительность первого полупериода заполнения импульса, происходит его обострение, импульс „подтягивается“ к своему фронту (рис. 3, расстояние 150 м). При выходе за пределы зоны индукции (для длины волны, на которой

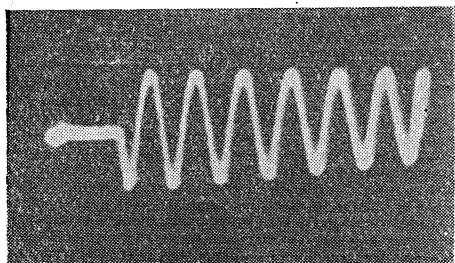


Рис. 1.

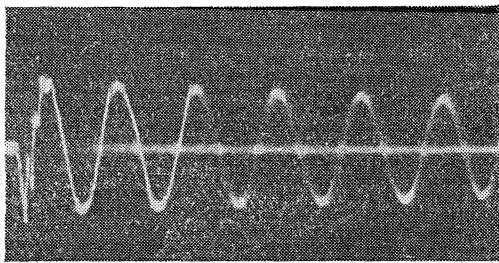


Рис. 2.

производились исследования, начиная с расстояний порядка 150 м) с дальнейшим увеличением расстояния до антенны (пока это расстояние еще сравнительно невелико) импульс практически не меняется. На больших расстояниях от антенны уже проявляется влияние свойств подстила-

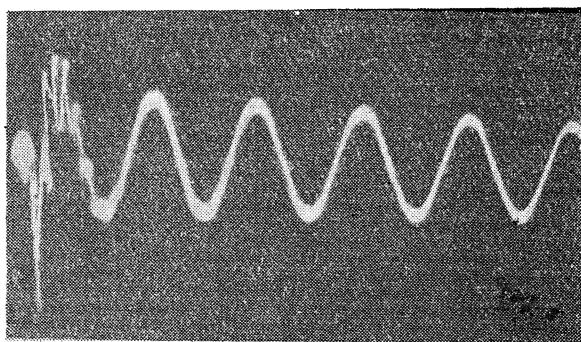


Рис. 3.

ющей поверхности, которое и определяет искажения формы импульса [5].

Высокочастотные осцилляции в начале импульса обусловлены многократными отражениями импульса от обоих концов антенны. Частота этих осцилляций определяется, в основном, временем, необходимым для прохождения фронта импульса вдоль антенны до ее верхнего конца и обратно. Относительное возрастание роли высокочастотных осцилляций при переходе из статической зоны в зону излучения можно объяснить лучшими условиями излучения более высокой частоты, так как сопротивление излучения антенны быстро возрастает с ростом частоты.

Необходимо отметить, что синусоидальное колебание, построенное на осциллограмме (рис. 3) из точки, соответствующей началу импульса, имеющее частоту, равную частоте заполнения импульса f_0 , и положительную первую полуволну, на всем протяжении импульса совпадает с ним (за исключением первого полупериода). Таким образом, фаза заполнения импульса в зоне излучения изменилась по отношению к фазе

заполнения импульса, наблюдаемого в непосредственной близости от антенны, на 180° . Такое „подтягивание“ импульса к своему фронту можно объяснить, используя в первом приближении (без учета влияния многократных отражений от концов антенны) в качестве модели реальной антенны точечный диполь. Как известно, в стационарном случае вертикальная компонента электрического поля точечного диполя E_ϑ может быть выражена следующим образом:

$$E_\vartheta = -\frac{Il}{i\omega} \left\{ k^2 - \frac{1}{R} \left(ik + \frac{1}{R} \right) \right\} \frac{e^{-i(kR-\omega t)}}{R} \cos \vartheta,$$

где I —ток в основании антенны, l —высота антенны, $\omega = 2\pi f$ —круговая частота, $k = \omega/c$ —волновое число, R —расстояние от антенны, ϑ —угол места*.

В нестационарном случае, если считать, что ток имеет вид:

$$I = I_0 \cos(\omega_0 t),$$

с помощью преобразования Лапласа легко получить следующее выражение для электрического поля:

$$E_\vartheta(t) = -\frac{1}{R} \left\{ -\frac{1}{c^2} \delta \left(t - \frac{R}{c} \right) + \frac{\omega_0}{c^2} \sin \left[\omega_0 \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] - \frac{1}{cR} \cos \left[\omega_0 \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] - \frac{1}{R^2 \omega_0} \sin \left[\omega_0 \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] \right\},$$

где c —скорость распространения электромагнитных волн в пустоте, $\delta(t)$ —функция Дирака.

В силу конечных размеров реальной антенны импульс, описываемый в приведенном выражении для точечного диполя δ -функцией, необходимо заменить на импульс, описываемый некоторой функцией от времени $\varphi(t)$, длительность которой определяется временем $\tau = 2l/c$ (l —длина антенны), а амплитуда конечна. Из приведенной выше формулы следует, что на очень малых удалениях точки наблюдения от антенны ($R \rightarrow 0$) электрическое поле определяется в основном последним членом формулы. Таким образом, импульс в точке приема, расположенной в непосредственной близости от антенны, действительно должен иметь заполнение синусоидальной формы.

В то же время на сравнительно большом удалении точки наблюдения от антенны в приведенной выше формуле основную роль играют уже первые два члена. Таким образом, для рассматриваемой антенны форма импульса в точках приема, достаточно удаленных от антенны, является результатом суммирования короткого импульса, описываемого функцией $\varphi(t)$, имеющего тот же знак, что и первая полуволна синусоидального заполнения импульса в непосредственной близости от антенны (при $R \rightarrow 0$), и синусоидального заполнения, сдвинутого по фазе на 180° . Этим и объясняется экспериментально наблюдаемое обострение первой полуволны импульса и изменение фазы его заполнения на 180° .

Физически явление „подтягивания“ импульса к своему фронту может быть объяснено, исходя из известного факта, что в зоне индукции фазовая скорость превышает скорость распространения электромагнит-

* В рассматриваемом случае $\vartheta = 0$.

ных волн c . Очевидно, что фронт импульса движется со скоростью c , в то время как установившееся значение фазы синусоидального заполнения импульса определяется фазовой скоростью $c_{\text{фаз}}$.

Во второй серии наблюдений измерения производились на той же частоте в дальней зоне на расстоянии порядка 1 км от излучающей антенны. В качестве антенны в этом случае использовался медный антенный канатик, поддерживаемый шаром-зондом. Высота антенны могла плавно изменяться от 0 до 150 метров.

При малой высоте антенны (15 м) форма импульса практически совпадала с той, которая наблюдалась в первой серии экспериментов для расстояний более 150 метров (рис. 4; длительность развертки 5 мксек)*. При увеличении высоты антенны наблюдается достаточно

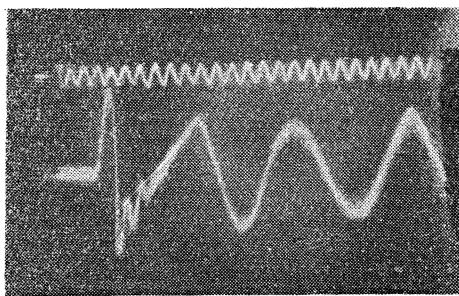


Рис. 4.

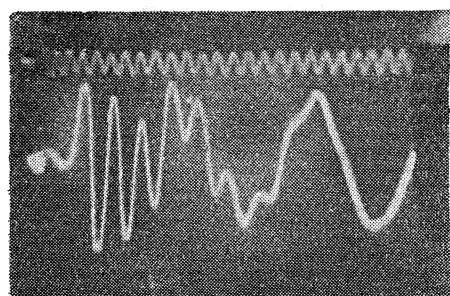


Рис. 5.

быстрое увеличение длительности переходного процесса, искажающего начало импульса (рис. 5, высота антенны 40 м, длительность развертки 5 мксек; рис. 6, высота антенны 100 м, длительность развертки 30 мксек).

В результате обработки большого количества осцилограмм выяснено, что длительность переходного процесса $\tau_{\text{пер}}$, определяемая как время, необходимое для уменьшения амплитуды высокочастотных осцилляций в e раз, во всех случаях составляет примерно 10τ , где $\tau = 2U/c$. Период высокочастотных осцилляций T во всем диапазоне изменения высоты антенны с большой точностью близок ко времени пробега фронтом волны антенны до верхнего конца антенны и обратно, несколько превышая (примерно на 20%) это значение при малых высотах (см. рис. 7).

Полученные экспериментальные результаты в настоящее время допускают в основном лишь качественные толкования. Для получения количественных оценок необходимо дальнейшее развитие теории нестационарного излучения антенн и доведение ее до численных расчетов.

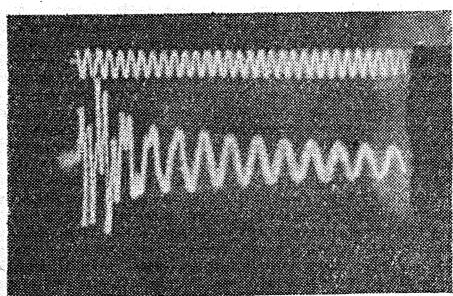


Рис. 6.

* Изменение полярности импульса на осциллографах в этой серии измерений объясняется включением добавочного усилительного каскада.

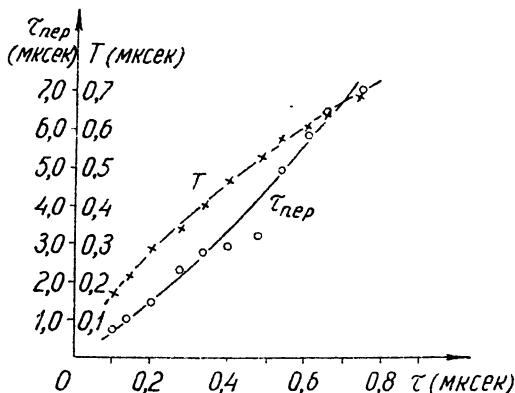


Рис. 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Щелкунов, Г. Фриис, Акстенны, изд. Сов. радио, М., 1955
2. Я. Л. Альперт, Труды ФИАН, 3, 5 (1946)
3. В. Н. Красильников, Вестник ЛГУ, сер. физ.-хим., № 16, 27 (1958).
4. K. Brundell, Ericsson Technics, 6, № 1, 137 (1960)
5. А. К. Булгаков, В. М. Рысаков, Сб. Проблемы дифракции и распространения радиоволн, 1, 151 (1962).

Поступила в редакцию
28 июля 1961 г

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF TRANSIENT RADIATION OF VERTICAL ANTENNA

A. K. Bulgakov, V. M. Rysakov

An experimental study has been made of the character of a transient antenna radiation when being fed by current of the type $I(t) \cos(\omega_0 t)$. A strong dependence of the radiated pulse form on the distance of the field point from the antenna and its height has been found. The transient time in the antenna has been estimated and turned to be equal for any length of the antenna to ten of double times of the pulse front travel along the antenna. An attempt of observed phenomena interpretation has been made.

ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ МАГНЕТРОНА

B. Я. Малеев

На основе совместного решения уравнений Максвелла и линеаризованных гидродинамических уравнений движения электронов вычислена проводимость на границе электронного облака и получено дисперсионное уравнение для цилиндрического магнетрона с поверхностной волной. При этом в качестве невозмущенного движения пучка взят режим Бриллюэна, а анодный блок заменен импедансной поверхностью.

Дисперсионное уравнение магнетрона можно получить на основе совместного решения линеаризованных уравнений движения электронов и уравнений Максвелла с учетом всех граничных условий задачи. Метод исследования электронных приборов с помощью дисперсионного уравнения оправдал себя в теории устройств О-типа. В случае магнетрона дело усложняется зависимостью от координат стационарных величин, в частности, скорости и плотности электронов. Однако, если высокочастотное поле анодного блока представляет поверхностную волну, что имеет место при больших замедлениях, достаточно знать стационарное движение электронов в узкой области, примыкающей к аноду. Как будет выяснено ниже, для магнетронов со сравнительно тонким катодом в этой области плотность и угловую скорость электронов можно считать не зависящими от радиуса. Это позволяет найти радиальное распределение высокочастотного поля, вычислить проводимость на границе электронного облака и, наконец, получить дисперсионное уравнение.

Исследование магнетрона в рамках самосогласованной задачи проводилось и ранее [1-2]. Однако в указанных работах, по-видимому, для упрощения рассматривался плоский магнетрон*. В действительности оказывается, что замена плоской моделью реальной цилиндрической конструкции не упрощает, а напротив, усложняет исследование. Дело в том, что в отличие от цилиндрического магнетрона, где имеется малый параметр σ , равный отношению радиусов катода и анода, в плоском случае ($\sigma = 1$) даже при больших замедлениях нужно учитывать зависимость скорости стационарно движущегося электронного пучка от поперечной координаты. Поэтому уравнение, определяющее поперечное распределение поля в присутствии электронов, не интегрируется в квадратурах**.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим взаимодействие плоского электронного пучка в цилиндрическом магнетроне с азимутальной E -волной. В полярной системе координат φ, r, z у такой волны отличны от нуля компоненты E_φ, E_r, H_z . Полная система исходных уравнений состоит из уравнений Максвелла:

* Подобная задача в цилиндрическом случае рассматривалась в одной из ранних работ по теории магнетрона Бунеманом [3]. Однако им не был учтен поверхностный характер высокочастотного поля, и поэтому окончательное выражение для электронной проводимости не было получено.

** Подробнее различие плоского и цилиндрического случаев обсуждается ниже.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} &= 4\pi r \rho; \\ \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi) &= -\frac{r}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial r} &= \frac{4\pi}{c} j_\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t}; \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} &= \frac{4\pi}{c} j_r + \frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t}; \end{aligned} \quad (2)$$

$$j_\varphi = \rho v; j_r = \rho u$$

(где ρ —плотность электронов, c —скорость света, v , u —тangенциальная и радиальная компоненты скорости электронного пучка), уравнений движения в гидродинамической форме:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dr} + \frac{v}{r} \frac{du}{d\varphi} - \frac{v^2}{r} &= \frac{e}{m} \left(E_r - \frac{v}{c} H_z \right); \\ \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \frac{dv}{d\varphi} + \frac{uv}{r} &= \frac{e}{m} \left(E_\varphi + \frac{u}{c} H_z \right) \end{aligned} \quad (3)$$

(e , m —заряд и масса электрона) и уравнения непрерывности

$$-r \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}(rj_r) + \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (4)$$

2. СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Найдем, прежде всего, решение исходной системы в стационарном случае ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), сделав при этом обычные в теории магнетрона предположения. Допустим, что в силу азимутальной симметрии невозмущенные величины не зависят от угла φ . При этом из (1) следует, что если на катоде $E_{0\varphi} = 0$, то всюду

$$E_{\varphi} = 0. \quad (5)$$

Из последнего уравнения системы (1) также следует, что ток в радиальном направлении отсутствует, т. е. в силу (2)

$$u_0 = 0. \quad (6)$$

Исходная система уравнений, таким образом, сводится к трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rE_{0r}) &= 4\pi r \rho_0; \\ \frac{\partial H_{z0}}{\partial r} &= \frac{4\pi}{c} \rho_0 v_0; \\ v_0^2 - \frac{eH_{z0}}{mc} rv_0 + \frac{e}{m} E_{0r}r &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что электроны движутся со скоростями, много меньшими скорости света, мы можем пренебречь влиянием собственного магнитного поля на движение электронов, т. е. в третьем уравнении

системы (7) считать, что $H_{z0} = H_0$, где H_0 —приложенное однородное магнитное поле. Система (7) является неполной, так как число неизвестных функций на единицу больше числа уравнений. Однако в стационарном случае имеется еще одно независимое уравнение, являющееся аналогом закона Бернулли для системы заряженных частиц:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + e\Phi_0(r) = \text{const}(r), \quad (8)$$

где Φ_0 —потенциал. Это уравнение выражает тот факт, что энергия сохраняется вдоль линий тока, которые при $u_0=0$ являются концентрическими окружностями.

Учитывая обычные граничные условия на катоде ($r=r_k$):

$$v_0 = 0; \quad \Phi_0 = 0; \quad E_{0r} = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial r} = 0, \quad (9)$$

нетрудно показать, что система (7)–(8) имеет единственное решение*, впервые полученное Бриллюэном из механических уравнений движения [4]:

$$\begin{aligned} v_0 &= \omega_s(r)r; \\ \rho_0 &= \frac{m\omega_L^2}{2\pi e} \left(1 + \frac{r_k^4}{r^4} \right); \\ E_{0r} &= \frac{m\omega_L^2}{e} r \left(1 - \frac{r_k^4}{r^4} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь обозначено

$$\omega_s(r) = \omega_L \left(1 - \frac{r_k^2}{r^2} \right); \quad \omega_L = \frac{eH_0}{2mc}. \quad (11)$$

Уравнение для определения v_0 (третье уравнение системы (7)) является квадратным. Условие, при котором его корни вещественны, имеет вид:

$$H \geq H_{kp} = \frac{2c}{r_a(1-\sigma^2)} \sqrt{-2\frac{m}{e}V}, \quad (12)$$

где $\sigma = r_k/r_a$, $V = \Phi_0(r_a)$ —приложенное напряжение, r_a —радиус анода. Решение (10) справедливо, таким образом, при магнитных полях, больших критического.

Из закона сохранения энергии (8) следует существование границы облака пространственного заряда. Радиус r_0 поверхности раздела пучок—вакуум как функцию геометрии лампы и приложенных полей легко найти из условия непрерывности на границе потенциала и поля:

$$r_0^2 \left\{ \left(1 - \frac{r_k^4}{r_0^4} \right) \ln \frac{r_0}{r_a} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_k^2}{r_0^2} \right)^2 \right\} = \frac{4mc^2V}{eH_0^2}. \quad (13)$$

* Известно, что механические уравнения движения допускают, кроме решения Бриллюэна, еще так называемое двухтковое решение, при котором электроны движутся по петлеобразным траекториям [5]. Многолетняя дискуссия о том, какой режим на самом деле осуществляется в магнетроне, не привела к однозначному ответу до настоящего времени. Тот факт, что гидродинамические уравнения имеют единственное решение, соответствующее режиму Бриллюэна, не означает выяснения этого вопроса, поскольку двухтковый режим не может быть описан гидродинамически.

3. ОБЛАСТЬ ЭФФЕКТИВНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Предположим, что все величины в исходной системе уравнений (1) — (4) зависят от времени t и азимутального угла φ следующим образом:

$$\sum_{\gamma} c_{\gamma}(r) \exp i(\gamma\varphi - \omega t); \quad (14)$$

здесь γ — постоянная распространения волн вдоль поверхности анодного блока (в дальнейшем мы будем считать для взаимодействующей гармоники $\gamma > 0$), ω — частота, $c_{\gamma}(r)$ — амплитуда. Поскольку пучок эффективно взаимодействует с полем, когда угловая фазовая скорость синхронной волны ω/γ близка к угловой скорости электронов ω_s , в дальнейшем достаточно рассматривать только медленные волны, для которых

$$\omega r_a / \gamma \ll c. \quad (15)$$

В случае отсутствия электронов ($\rho = 0$) из системы (1) с учетом (14) и (15) легко найти уравнение, которому удовлетворяет амплитуда гармоники $E_{\varphi\gamma}(r)$:

$$r^2 \frac{\partial^2 E_{\varphi\gamma}}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial E_{\varphi\gamma}}{\partial r} + (1 - \gamma^2)E_{\varphi\gamma} = 0. \quad (16)$$

Считая катод бесконечно проводящим цилиндром радиуса r_k , запишем на нем граничное условие, справедливое для каждой гармоники:

$$E_{\varphi\gamma}(r_k) = 0. \quad (17)$$

Учитывая, что $\omega r_a / c \sim 1$, т. е. $\gamma \gg 1$ и, следовательно, $\sigma^{2\gamma} \ll 1$, получим из (16) и (17):

$$\frac{E_{\varphi\gamma}(r)}{E_{\varphi\gamma}(r_a)} = \left(\frac{r}{r_a} \right)^{\gamma-1}. \quad (18)$$

Таким образом, при больших γ высокочастотное поле имеет характер поверхности волны, лбкализованной у анода. Нетрудно оценить размеры области, в которой сосредоточено высокочастотное поле:

$$\frac{\Delta r}{r_a} \simeq \frac{1}{\gamma}, \quad (19)$$

где $\Delta r = r_a - r_{rp}$ (r_{rp} — радиус, на котором поле спадает в e раз). В этом случае с полем эффективно взаимодействует только узкий слой электронов, прилегающий к аноду. В пределах этого слоя можно считать, как будет выяснено ниже, угловую скорость электронов и их плотность независящими от радиуса в окрестности $r = r_0$.

4. ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ ПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ЭЛЕКТРОНОВ

Будем искать решение исходной системы уравнений (1) — (4) в виде:

$$f(r, \varphi, t) = f_0(r) + \sum_{\gamma} \tilde{f}_{\gamma}(r) \exp i(\gamma\varphi - \omega t); \quad (20)$$

здесь через f обозначена любая из величин, входящих в исходную систему, f_0 — невозмущенное значение, взятое из решения стационарной задачи (5), (6), (10), \tilde{f}_{γ} — амплитуды гармоник переменной добавки, которая предполагается малой по сравнению с f_0 .

Воспользовавшись этим предположением, мы линеаризуем исходную систему, по-прежнему пренебрегая, согласно (15), релятивистскими эффектами. Полученные уравнения для каждой фурье-компоненты имеют вид*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (r E_{r\gamma}) + i\gamma E_{\varphi\gamma} &= 4\pi r \rho_\gamma; \\ i\gamma E_{r\gamma} &= \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\varphi\gamma}); \\ \frac{\partial H_{z\gamma}}{\partial r} + ikE_{\varphi\gamma} &= \frac{4\pi}{c} j_{\varphi\gamma}; \\ -i\frac{\gamma}{r} H_{z\gamma} + ikE_{r\gamma} &= \frac{4\pi}{c} j_{r\gamma}; \\ i\Gamma(r)u_\gamma + \Omega(r)v_\gamma &= \frac{e}{m} E_{r\gamma}; \\ i\Gamma(r)v_\gamma &= \frac{e}{m} E_{\varphi\gamma}; \\ i\omega r \rho_\gamma &= i\gamma j_{\varphi\gamma} + \frac{\partial}{\partial r} (r j_{r\gamma}). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} k &= \omega/c; \quad \Gamma(r) = \gamma\omega_s(r) - \omega; \quad \Omega = 2[\omega_s(r) - \omega_L]; \\ j_{r\gamma} &= \rho_0 u_\gamma; \quad j_{\varphi\gamma} = \rho_0 v_\gamma + \rho_\gamma r \omega_s, \end{aligned} \quad (22)$$

ω_s и ρ_0 определяются формулами (10).

Поскольку в области эффективного взаимодействия радиус меняется в пределах $r_0 < r < r_{rp}$, разложим $\omega_s(r)$ и $\rho_0(r)$ в окрестности $r = r_0$. Учитывая, что, согласно (19), $|r - r_0| \sim r_a/\gamma$, мы видим из (21), что при

$$|\gamma\omega_s(r) - \omega| \gg \omega_L r_k^2/r_0^2; \quad \gamma \gg r_k^4/r_0^4 \quad (23)$$

можно положить:

$$\Gamma(r) \approx \Gamma(r_0); \quad \rho_0(r) \approx \rho_0(r_0); \quad \Omega(r_0) = 0. \quad (24)$$

Неравенства (23) выполняются тем лучше, чем больше γ и чем меньше r_k/r_0 , т. е. последующее рассмотрение справедливо для магнетронов со сравнительно тонким катодом и большими замедлениями**.

Из системы (21), (22) с учетом (24) найдем, что при $\Gamma^2 \neq \omega_p^2$, где $\omega_p = \sqrt{4\pi e \rho_0/m}$ — плазменная частота, переменная составляющая плотности отсутствует:

$$\rho_\gamma = 0. \quad (25)$$

Отсюда следует, что уравнение, которому удовлетворяет $E_{\varphi\gamma}$, совпа-

* Так как в дальнейшем полные значения величин больше не понадобятся, мы опустим знак \sim над переменными амплитудами.

** Устойчивость бриллюэновского движения исследовалась также в работе Гарриса [6], который получил общее выражение для проводимости электронного облака через функцию действия. Однако, поскольку Гаррис ограничился рассмотрением сплошного магнетрона, в котором высокочастотное поле не имеет поверхностного характера, конкретный вид функций действия и, следовательно, электронной проводимости удалось получить только в случае бесконечно тонкого катода.

дает с (16), т. е. радиальное распределение поля в присутствии электронов в окрестности точки $r=r_0$ такое же, как в „холодной“ системе. В качестве граничного условия для $E_{\varphi\gamma}$ нельзя брать (17), так как вблизи катода распределение высокочастотного поля будет существенно отличаться от распределения при $r \sim r_0$, поскольку здесь ω_s и ρ_0 нельзя считать не зависящими от радиуса. Однако в силу поверхностного характера поля можно считать, что на достаточном удалении от границы облака поле исчезает. Это позволяет отбросить решения (16), пропорциональные r^{-1-1} , и положить

$$E_{\varphi\gamma} = a_\gamma r^{\gamma-1}. \quad (26)$$

Через $E_{\varphi\gamma}$ с помощью уравнений (21) легко выражаются другие компоненты поля, в частности, $H_{z\gamma}$:

$$H_{z\gamma} = \frac{r}{i\gamma^2} \left(k + \frac{\omega_p^2}{c\Gamma} \right) \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\varphi\gamma}). \quad (27)$$

Зная $E_{\varphi\gamma}$, можно найти также переменные амплитуды гидродинамических величин, из которых нам потребуется радиальная скорость u_r :

$$u_r = -\frac{e}{m\gamma\Gamma} \frac{\partial}{\partial r} (r E_{\varphi\gamma}). \quad (28)$$

5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА ВОЗМУЩЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА. ЭЛЕКТРОННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

При наличии переменных полей граница раздела между электронным пучком и вакуумом возмущается следующим образом:

$$r_0 \rightarrow r(\varphi, t) = r_0 + \sum_{\gamma} \Delta_{\gamma} \exp i(\gamma\varphi - \omega t). \quad (29)$$

Границные условия на возмущенной поверхности заключаются в непрерывности полного электрического и магнитного полей. Предполагая амплитуды возмущения Δ_{γ} малыми, эти условия можно записать для каждой фурье-компоненты переменных составляющих поля на невозмущенной поверхности раздела $r=r_0$:

$$\begin{aligned} H_{z\gamma}^{(1)}(r_0) &= H_{z\gamma}^{(2)}(r_0) + \Delta_{\gamma} \frac{\partial H_{z0}^{(2)}}{\partial r/r_0}; \\ E_{\varphi\gamma}^{(1)}(r_0) &= E_{\varphi\gamma}^{(2)}(r_0). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь индексы (1) и (2) относятся к вакууму и пучку. Деля первое из уравнений (30) на второе, получим граничное условие на поверхности раздела в виде равенства проводимостей, причем

$$Y_{\gamma} = \frac{H_{z\gamma}^{(2)}(r_0) + \Delta_{\gamma} \partial H_{z0}^{(2)} / \partial r}{E_{\varphi\gamma}^{(2)}(r_0)} \quad (31)$$

имеет смысл электронной проводимости на границе облака пространственного заряда.

Из уравнений стационарного движения (7) найдем, что

$$\frac{\partial H_{z0}^{(2)}}{\partial r/r_0} = \frac{4\pi}{c} \rho_0 r_0 \omega_s(r_0). \quad (32)$$

Добавочный член $\frac{4\pi}{c} \Delta_\gamma j_{c\varphi}$ в выражении (31) можно трактовать как гармонику магнитного поля, созданного эффективным поверхностным током [1-3].

Амплитуду возмущения Δ_γ легко найти из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) F = 0, \quad (33)$$

где $F(r, \varphi, t) = 0$ — уравнение возмущенной поверхности, \mathbf{v} — скорость перемещения точек поверхности, совпадающая со скоростью частиц [7]. Подставляя вместо F уравнение (29), получаем:

$$\Delta_\gamma = -i u_\gamma / \Gamma. \quad (34)$$

С помощью полученных выражений (32) и (34), учитывая (26), (27) и (28), окончательно находим выражение для электронной проводимости:

$$Y_\gamma = Y_{0\gamma} \left(1 - \omega_p^2 / \Gamma^2\right), \quad (35)$$

где $Y_{0\gamma} = kr_0/i\gamma$ — проводимость в точке r_0 в отсутствие пучка.

6. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Для получения дисперсионного уравнения необходимо решить уравнения Максвелла с учетом точных граничных условий на поверхности анодного блока. Такое решение в общем случае представляет значительные математические трудности. Однако при резонанском характере взаимодействия пучка с полем особую роль играет синхронная гармоника, фазовая скорость которой близка к скорости пучка. В этом случае реальную замедляющую систему можно заменить какой-либо моделью, учитывающей характерные свойства этой синхронной волны. В качестве такой модели мы выберем гладкую цилиндрическую поверхность радиуса r_a с заданным реактивным импедансом $X(\omega, \gamma)$, т. е. будем предполагать, что при $r=r_a$

$$E_{\varphi\gamma}(r_a) = iX(\omega, \gamma) H_{z\gamma}(r_a). \quad (36)$$

С помощью импеданса можно описать замедление, поверхностный характер и дисперсию синхронной волны, а также учесть роль других волн. Для „гладкой“ гребенки импеданс можно считать не зависящим от γ . В этом случае граничное условие (36) может быть обосновано [8].

Воспользовавшись (36), легко найти, учитывая (18), дисперсионное уравнение для „холодной“ системы:

$$\gamma_0 = kr_a X(\omega_0, \gamma_0). \quad (37)$$

Из уравнений Максвелла для системы без пучка с учетом граничного условия (36) нетрудно вычислить отношение $H_{z\gamma}^{(1)}/E_{\varphi\gamma}^{(1)}$ в точке $r=r_0+0$:

$$\frac{H_{z\gamma}^{(1)}}{E_{\varphi\gamma}^{(1)}} = Y_{0\gamma} \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad (38)$$

где

$$\zeta = \frac{\gamma - kr_a X}{\gamma + kr_a X} \left(\frac{r_a}{r_0}\right)^{2\gamma}.$$

Согласно (30), приравняв (38) проводимости на границе электронного облака (35) и получим дисперсионное уравнение, связывающее частоту ω и постоянную распространения γ :

$$(\gamma\omega_s - \omega)^2 \zeta(\omega, \gamma) = \frac{1}{2} \omega_p^2 [\zeta(\omega, \gamma) - 1]. \quad (39)$$

Величина ω_p характеризует степень взаимодействия между пучком и полем. В случае отсутствия такого взаимодействия $\omega_p = 0$ и уравнение (39) распадается на два уравнения:

$$(\gamma\omega_s - \omega)^2 = 0; \quad \gamma = kr_a X(\omega, \gamma); \quad (40)$$

первое определяет частоты двух электронных волн $\omega_{1,2} = \gamma\omega_s$, второе совпадает с (37), т. е. определяет собственную частоту ω_0 в „холодной“ системе.

С помощью дисперсионного уравнения (39) можно исследовать работу магнетрона с поверхностной волной, а также всех других приборов *M*-типа, в которых электронный пучок движется с постоянной угловой скоростью и имеет постоянную плотность.

7. ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим в качестве примера случай генерации в магнетроне. При этом постоянная γ фиксирована периодическими условиями по углу φ и определяется из (37), а дисперсионное уравнение является уравнением для определения частот. Будем искать его решение в виде:

$$\omega = \gamma\omega_s(1 + x), \quad (41)$$

где $|x| \ll 1$, так как взаимодействие предполагается слабым.

Предполагая также малым параметр рассинхронизации

$$\delta = \frac{\gamma\omega_s - \omega_0}{\omega_0}, \quad (42)$$

разложим $\zeta(\omega)$ в ряд по $x + \delta$ и, сохраняя члены одного порядка, получим дисперсионное уравнение для случая генерации:

$$x^2(x + \delta) = \varepsilon^2(g + x + \delta), \quad (43)$$

в котором

$$\varepsilon = \frac{\omega_p}{\omega_0 \sqrt{2}}; \quad g = \left(\frac{r_0}{r_a} \right)^{2\gamma} \frac{2\gamma}{\gamma + k_0^2 c r_a \frac{\partial X}{\partial \omega / \omega_0}}. \quad (44)$$

Из условий существования комплексных корней этого уравнения можно найти соотношение между параметрами g , δ и ε , при котором, согласно линейной теории, возможна генерация прибора. При $g \sim 1$ уравнение (43) всегда имеет нарастающие решения; напротив, при $g \ll 1$ такие решения отсутствуют.

Этот результат физически является вполне естественным, поскольку при $r_0 \sim r_a$ ($g \sim 1$) электронный пучок находится в области сильного высокочастотного поля, а с уменьшением r_0 , что отвечает, согласно (44), резкому уменьшению g , выходит из этой области. Сказанное означает, что области значений параметров H_0 и V , при которых возможна генерация, примыкают к параболе критических режимов (12). С уменьшением γ , согласно (19), увеличивается область сильного поля и области генерации в соответствии с (44) расширяются. Расширение областей неустойчивости при прочих равных условиях происходит также за счет увеличения радиуса катода, так как, согласно (13), с ростом σ увеличивается радиус облака. Заметим, однако, что σ не может быть очень большим, так как при этом нарушается условие

применимости излагаемой теории (23), которое в рассматриваемом случае имеет вид: при $g \approx 1$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\ll \gamma\varepsilon^{2/3} \\ \sigma^2 &\ll \gamma\varepsilon\end{aligned}, \quad (45)$$

на границе области неустойчивости.

8. О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ К ПЛОСКОМУ МАГНЕТРОНУ

Предельный переход к плоскому случаю означает, что во всех полученных выше формулах мы должны устремить к бесконечности радиус r . При этом $\sigma = r_k/r_a$ стремится к единице; с другой стороны, $\gamma\varepsilon \sim 1$, так как $\varepsilon \sim \omega_L/\omega$, а $\gamma \sim \omega/\omega_L$. Поэтому в плоском случае, по крайней мере, второе из неравенств (45) не выполняется, т. е. изложенная выше теория неприменима, если $\sigma \rightarrow 1$.

Физическая причина этого очевидна. В цилиндрическом магнетроне с бесконечно тонким катодом электронное облако вращается как целое с постоянной угловой скоростью ω_L . Если σ конечно, то разные слои электронного облака вращаются с различной угловой скоростью. Однако если катод достаточно тонкий, то можно считать, что в пределах узкой области сильного высокочастотного поля электроны имеют одинаковую угловую скорость. Если же $\sigma \rightarrow 1$, мы должны учитывать зависимость стационарной скорости от поперечной координаты и внутри указанной области. Это можно показать, совершив в формулах для цилиндрического магнетрона предельный переход $r \rightarrow \infty$. Стационарные величины (10) при $r \rightarrow \infty$ приобретают вид:

$$\begin{aligned}v_0 &= 2\omega_L y; \\ \rho_0 &= \frac{m\omega_L^2}{\pi e}; \\ E_{0y} &= 4 \frac{m\omega_L^2}{e} y,\end{aligned} \quad (46)$$

где $y = r - r_k$ — поперечная координата. Степенной закон убывания амплитуды высокочастотного поля в цилиндрическом случае соответствует экспоненциальному убыванию в плоском случае:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{r_a} \right)^\gamma = e^{-(d-y)/r} \quad (47)$$

(d — расстояние между катодом и анодом). Это означает, что γ должно стремиться к бесконечности одновременно с r :

$$\gamma = \beta r, \quad (48)$$

где β — постоянная распространения в плоской системе.

Повторяя выкладки раздела 4, получим из системы (21), в которой совершен предельный переход $r \rightarrow \infty$, уравнение для определения $E_{z\beta}$ (заменив $E_{r\gamma} \rightarrow E_{y\beta}$, $E_{\varphi\gamma} \rightarrow E_{z\beta}$ и т. п.):

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2 E_{z\beta}}{d\xi^2} - \frac{2}{\xi} \frac{d E_{z\beta}}{d\xi} + \left(1 - \xi^2 + \frac{2}{\xi^2} \right) E_{z\beta} = 0, \quad (49)$$

где обозначено

$$\xi = \frac{\omega - \beta v_0(y)}{\omega_p}; \quad \omega_p = 2\omega_L. \quad (50)$$

Полученное уравнение не интегрируется в квадратурах [1,2].

Результаты изложенной выше теории могут быть применимы для плоского магнетрона только при весьма больших ξ , так как условие (23) в этом случае имеет вид:

$$|\xi| \gg 1. \quad (51)$$

При этом можно пренебречь членами $1/\xi$ и $1/\xi^2$ в уравнении (49), после чего мы получим для определения $E_{z\beta}$ такое же уравнение, как и в „холодной“ системе. Условие (50), однако, является очень жестким и заведомо не выполняется на границе области неустойчивости, где, как легко показать, $|\xi| \simeq 1$.

В заключение автор выражает благодарность Э. А. Канеру, В. М. Конторовичу, Г. Я. Левину и И. Д. Трутню за интерес к работе и ценные советы; он также признателен А. В. Гапонову за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. G. Macfarlane, H. G. Hay, Proc. Phys. Soc., **63**, 409 (1950).
2. В. П. Тычинский, Радиотехника и электроника, **2**, 912 (1957).
3. G. Collins, Microwave Magnetrons, New-York—Toronto—London, 1948, p. 253.
4. Л. Бриллюэн, Теория магнетрона, изд. Сов. радио, М., 1946.
5. Г. А. Гринберг, В С Волькенштейн, ЖТФ, **8**, 19 (1938); С. Я. Брауде, ЖТФ, **10**, 217 (1940); **15**, 107 (1945).
6. L. A. Naggis, J Appl Phys., **23**, 562 (1952).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1954, § 30.
8. М. А. Миллер, ДАН СССР, 571 (1952), ЖТФ, **25**, 1972 (1955).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
19 января 1961 г.

THE DISPERSION EQUATION OF A MAGNETRON

V. Ya. Maleev

The conductance at the boundary of an electronic cloud has been calculated by means of a joint solution of Maxwell equations and linearized hydrodynamic equations of electron motions and it has been obtained a dispersion equation for a cylindrical magnetron with a surface wave. The Brillouin's regime has been taken as a nonperturbant motion of a beam and an impedance surface has been used instead of an anode.

О ВОЛНАХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

P. A. Дудник

В линейном приближении рассматривается распространение волн пространственного заряда в неограниченной системе, состоящей из одноковых электронных пучков конечной длины. Показано, что в системе могут существовать нарастающие по амплитуде волны, если путь, проходимый каждым электроном, становится больше некоторой характеристической длины. В пределе при бесконечной длине элементарных пучков система переходит в обычный плазменный поток с известными постоянными распространения волн пространственного заряда.

Известно [¹⁻³], что в статическом режиме облака пространственного заряда неразрезного магнетрона при индукции $B > B_{kp}$ электроны движутся по петлеобразным траекториям. При этом необходимо отметить, что пространственный заряд магнетрона образован электронами, взаимодействующими друг с другом в течение ограниченного промежутка времени. Для простоты и наглядности будем исходить из классического двухпоточного состояния облака неразрезного магнетрона плоского типа [²]. Вид электронных траекторий качественно изображен на рис. 1. На пологих вершинах траекторий электроны движутся почти параллельно друг другу с приблизительно одинаковыми скоростями так, что осуществляются условия для эффективного взаимодействия между ними. Плотность пространственного заряда в области I велика; поэтому волноводные

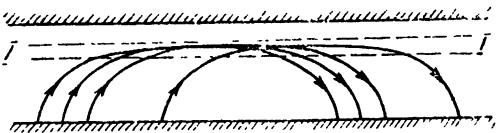


Рис. 1.

свойства облака магнетрона в режиме малых амплитуд определяются, по-видимому, процессами, происходящими в области I. Ясно, что электроны в области I находятся в течение ограниченного промежутка времени. Это должно сказаться на условиях распространения волн пространственного заряда во внешней области облака неразрезного магнетрона. Однако в известной нам литературе при расчете волноводных свойств облака учет конечного времени взаимодействия электронов, движущихся в статическом режиме по петлеобразным траекториям, не производился (см., например, [³]).

Целью настоящей работы является предварительное исследование влияния конечного времени взаимодействия электронов в простейшей системе на условия распространения волн пространственного заряда.

Задача о волноводных свойствах облака пространственного заряда неразрезного магнетрона с учетом конечного времени взаимодействия между электронами чрезвычайно сложна. Поэтому в качестве предварительного этапа целесообразно рассмотреть более простую систему.

В последнее время опубликован ряд работ [^{4, 5}], посвященных изучению взаимодействия достаточно коротких электронных потоков с двухмерными замедляющими системами. В приборах, построенных на этом принципе, потоки образованы электронами, которые взаимодействуют

ют друг с другом и с замедляющей системой в течение ограниченного промежутка времени. Так, в работе [4] предполагается, что электроны движутся по траекториям, форма которых указана на рис. 2. Протяженный катод, обладающий равномерной эмиссионной способностью, эмиттирует электроны, которые, достигнув области I, начинают двигаться параллельно оси x с постоянной скоростью; пролетев некоторое



Рис. 2.

расстояние, электроны покидают область I. Проведенный в [4] анализ не учитывает влияние пространственного заряда. Ясно, что общий характер движения электронов в области I одинаков как для магнетрона, так и для этого прибора: электроны

взаимодействуют друг с другом в течение ограниченного промежутка времени. Однако во втором случае достаточен учет только продольных колебаний электронов. Представляет определенный интерес выяснить влияние конечного времени взаимодействия между электронами на условия распространения волн пространственного заряда в такой системе. Этому и посвящена настоящая работа.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Считаем, что область типа I имеет неограниченные размеры и заполнена элементарными электронными пучками конечной длины L (рис. 3). Все пучки прямолинейны и начала их ξ равномерно распределены в пространстве (эмиссионная способность катода постоянна вдоль системы). Пусть пучки совершенно равноправны, т. е. имеют одинаковую длину L , постоянные составляющие скорости v_0 и плотность пространственного заряда ρ_0 , и в каждом из них электроны совершают колебания около стационарной траектории при нулевых начальных условиях.

Предположим также, что в пучках постоянная составляющая плотности пространственного заряда электронов скомпенсирована ионным фоном, причем плотность и скорость ионов ρ_0 , v_0 не меняются вдоль каждого пучка.

Ограничимся рассмотрением наиболее простого одномерного случая, учитывая только продольные колебания электронов.

При наличии слабых возмущений электроны в каждом элементарном пучке совершают колебания с малой амплитудой около стационарной траектории. Фаза и амплитуда этих колебаний зависят от момента и места влета в пространство взаимодействия τ и ξ , от текущего времени и координаты t и x , от начальных условий и определяются совместным действием электронов друг на друга. Ограничивааясь случаем малых амплитуд, считаем, что время пролета электрона вдоль траектории при наличии возмущения почти такое же, как и в стационарном случае: $(t - \tau) \approx (t_0 - \tau_0)$. Следовательно, максимальное время взаимодействия между электронами равно $T = L/v_0$. В предположении малого сигнала рассмотрим распространение волн пространственного заряда в этой системе электронных пучков с конечным временем взаимодействия.

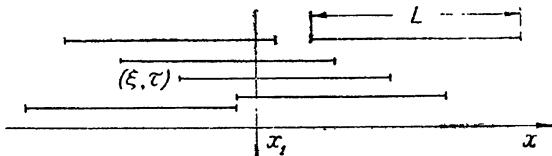


Рис. 3.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ

Колебания электронов в некотором фиксированном пучке определяются общим полем системы $E_{\text{общ}}[x, t]$, равным сумме полей элементарных пучков. Сумма берется в некоторой фиксированной плоскости x в определенный момент времени t . Поле каждого элементарного пучка является функцией трех переменных $E[\xi, x, t]$. Будем решать задачу в переменных Лагранжа, которые будем условимся записывать в круглых скобках. В наших предположениях для любого пучка траектории электронов можно записать в виде $x = v_0(t - \tau) + \xi$. Отсюда после перехода к новым переменным получаем $E[\xi, x, t] = E(\xi, \tau, t)$ — поле в момент времени t в точке, в которую приходят электроны элементарного пучка, вылетевшие из точки ξ в момент τ .

Для волн пространственного заряда напряженность электрического поля в некоторой точке пространства в случае неограниченной системы однозначно определяется возмущением плотности тока или пространственного заряда пучка в этой же точке. Поэтому вклад в общее поле системы дают те элементарные пучки, которые пересекают произвольно выбранную плоскость x (число их достаточно велико). Нетрудно видеть, что начала этих пучков ξ лежат в интервале $x - L \leq \xi \leq x$. Так как ξ равномерно распределены в пространстве, общее поле системы можно записать в следующем виде:

$$E_{\text{общ}} = \frac{1}{L} \int_{x-L}^x E(\xi, \tau, t) d\xi. \quad (1)$$

При интегрировании нужно учитывать поля только тех электронов в различных элементарных пучках, которые в фиксированный момент времени t_1 будут находиться в выбранной плоскости x_1 . Ясно, что для этих электронов существует связь между моментом τ и местом вылета ξ . Рассмотрим это более подробно. В некотором элементарном пучке выберем такую группу электронов (фиксируя ξ' и τ'), которая в момент времени t_1 приходит в плоскость x_1 , т. е. $t = t_1$, $x_1 = v_0(t_1 - \tau') + \xi'$. Тогда электроны из других пучков попадут в плоскость x_1 , т. е. $t = t_1$, $x = v_0(t_1 - \tau) + \xi = x_1$ при условии $\xi - \xi' = v_0(\tau - \tau')$ или $\Delta\xi = v_0\Delta\tau$. Тогда из (1) после замены переменной интегрирования ξ на τ получим:

$$E_{\text{общ}} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t E(\xi_\tau, \tau, t) d\tau. \quad (2)$$

Так выражается общее поле системы через поля элементарных пучков. Следовательно, уравнение движения электронов некоторого фиксированного пучка запишется в виде:

$$\frac{\partial v(\xi_\tau, \tau, t)}{\partial t} = - \frac{\eta}{T} \int_{t-T}^t E(\xi_\tau, \tau, t) d\tau, \quad (3)$$

где $v(\xi_\tau, \tau, t)$ — переменная составляющая скорости электронов, $\eta = |e|/m$ — удельный заряд электрона.

Вклад, вносимый каждым элементарным пучком, например, в общую плотность конвекционного тока системы, определяем следующим образом: $dI = i(\xi, \tau, t) d\xi / L$. Из подобных соотношений можно получить выражения для переменных составляющих плотности тока пространственного заряда всей системы, если известны соответствующие величины в каждом элементарном пучке.

Как обычно, в переменных Эйлера можно (в линейном приближении) представить переменную составляющую плотности конвекционного тока i некоторого элементарного пучка в виде:

$$i = \rho_0 v + \rho v_0,$$

где ρ_0 и ρ — соответственно постоянная и переменная составляющие плотности пространственного заряда, v_0 и v — постоянная и переменная составляющие скорости электронов пучка.

Используя уравнение полного тока

$$-i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

уравнение Пуассона

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость свободного пространства, получаем:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} v$$

или в переменных Лагранжа:

$$\frac{\partial E(\xi_\tau, \tau, t)}{\partial t} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} v(\xi_\tau, \tau, t). \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) описывают в линейном приближении поведение возмущенной системы электронных пучков с конечным временем взаимодействия. Рассмотрим эту систему уравнений при нулевых начальных условиях:

$$v(\xi_\tau, \tau, t)|_{t=\tau} = 0; \quad E(\xi_\tau, \tau, t)|_{t=\tau} = 0.$$

Этот случай наиболее просто удовлетворяет условию $I_{\text{полн}}=0$, которое используется при решении задачи.

Продифференцировав (4) по t и подставив в (3), получим:

$$\frac{\partial^2 E(\xi_\tau, \tau, t)}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{T} \int_{t-T}^t E(\xi_\tau, \tau, t) d\tau = 0 \quad (5)$$

при

$$E(\xi_\tau, \tau, \tau) = \frac{\partial E(\xi_\tau, \tau, \tau)}{\partial t} = 0, \quad (5a)$$

где $\omega_p^2 = \gamma_0 \rho_0 / \varepsilon_0$ — квадрат плазменной частоты.

Из (5) видно, что $\partial^2 E(\xi_\tau, \tau, t) / \partial t^2$ является функцией только текущего времени t . Обозначим

$$\partial^2 E(\xi_\tau, \tau, t) / \partial t^2 = \psi(t). \quad (6)$$

Используя (5а) и (6), после трехкратного дифференцирования (5) по t получаем:

$$\frac{d^3 \psi(t)}{dt^3} + \omega_p^2 \left[\frac{d\psi(t)}{dt} + \frac{d\psi(t-T)}{dt} \right] - \frac{2\omega_p^2}{T} [\psi(t) - \psi(t-T)] = 0 \quad (7)$$

—линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициен-

тами и запаздывающим аргументом (запаздывание $T = \text{const}$). Частное решение уравнения (7) по методу Эйлера ищем в виде:

$$\psi(t) = e^{\lambda t}. \quad (8)$$

Отсюда получаем трансцендентное характеристическое уравнение для λ :

$$\lambda^3 + \frac{\omega_p^2}{T} [(\lambda T + 2)e^{-\lambda T} + \lambda T - 2] = 0. \quad (9)$$

Уравнения такого типа имеют бесчисленное множество корней λ_n . Следовательно, исходная система имеет бесконечное множество линейно независимых решений, и общее решение системы дается их произвольной линейной комбинацией:

$$\psi(t) = \sum_n A_n \lambda_n^2 e^{\lambda_n t} = \partial^2 E(\xi, \tau, t) / \partial t^2. \quad (10)$$

Нас интересует возможность существования нарастающих решений. Эта задача сводится к нахождению таких λ'_n в множестве корней характеристического уравнения (9), для которых $\operatorname{Re} \lambda'_n > 0$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Переходя к переменным Эйлера, будем считать, что величины меняются во времени по закону $e^{j\omega t}$, где ω — действительная величина. Тогда нужно положить

$$\lambda_n = j\omega - \Gamma_n v_0. \quad (11)$$

Это соответствует решению типа плоской волны $e^{j\omega t - \Gamma_n x}$. Поправки γ_n к постоянным распространения Γ_n ищем в виде:

$$-\Gamma_n = -jh_e + h_e \gamma_n, \quad (12)$$

где $h_e = \omega/v_0$. Отсюда $\lambda_n = h_e v_0 \gamma_n$ и при $\operatorname{Re} \gamma_n > 0$ в системе существуют нарастающие по амплитуде волны. Дисперсионное уравнение системы, согласно (9), (11) и (12), будет иметь вид:

$$\gamma^3 + \frac{\delta^2}{\alpha} [(\alpha\gamma + 2) e^{-\alpha\gamma} + \sigma\gamma - 2] = 0, \quad (13)$$

где $\sigma = h_e L$ — безразмерная длина пучка, $\delta = \omega_p/\omega$ — параметр пространственного заряда. Для исследования (13) удобно записать в виде:

$$pz^3 + (z + 2) e^{-z} + z - 2 = 0, \quad (14)$$

где

$$p = \frac{1}{\delta^2 \sigma^2} = \frac{1}{(\omega_p L / v_0)^2} > 0; \quad (14a)$$

$z = \alpha\gamma$ может быть комплексной величиной.

Наибольший интерес представляет нахождение областей изменения параметра p , в которых система электронных пучков с конечным временем взаимодействия неустойчива, т. е. $\operatorname{Re} z > 0$. Ответ на этот вопрос получаем с помощью метода D -разбиений [6].

Параметр p временно считаем комплексным; при этом, согласно (14a), физический смысл будут иметь только действительные положительные значения параметра. Из (14) имеем:

$$p = -\frac{(z + 2) e^{-z} + z - 2}{z^3}.$$

Положив $z=2j\nu$, получаем

$$p = \frac{\nu \cos \nu - \sin \nu}{2\nu^3} e^{-j\nu} \quad (15)$$

—параметрическое уравнение кривой N , которая, когда ν пробегает все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$, разбивает плоскость параметра p на D -области. Каждая область определяет значения параметра p , соответствующие одному и тому же числу корней уравнения (14), находящихся справа от мнимой оси плоскости z . Переход корней уравнения через мнимую ось слева направо, т. е. от устойчивости к неустойчивости, возможен только при переходе точки p через кривую N также слева направо. Поэтому штрихуем левую сторону кривой N при движении вдоль нее, когда ν меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Вид кривой N показан на рис. 4. Она навивается на точку $p=0$, разбивая плоскость параметра p на бесконечное число областей. Точками пересечения с положительной действительной осью, согласно (15), будут

$$p = \frac{1}{2\pi^2 n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) . \quad (16)$$

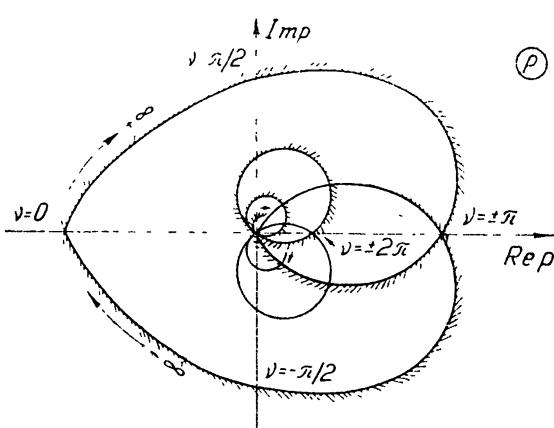


Рис. 4.

Кривая охватывает ограниченную область плоскости параметра p . Для выяснения порядка неустойчивости внешней области D -разбиения уравнение (14)* решалось численным методом при $p=1$ на быстродействующей электронной счетной машине БЭСМ-2. Оказалось, что корни с положительной действительной частью отсутствуют. Наименьший корень равен $z=x+jy=-3,7 \pm j4,55$. Следовательно, при

$$p > 1/2\pi^2 \quad (17)$$

внешняя область — система электронных пучков с конечным временем взаимодействия устойчива. Уменьшая p , мы попадаем в первую область неустойчивости

$$1/8\pi^2 < p < 1/2\pi^2, \quad (18)$$

где уравнение (14) имеет бесконечное число корней со сколь угодно большими отрицательными действительными частями и один комплексно-сопряженный корень с $\text{Re } z > 0$. При двух значениях параметра $p=0,04$ и $p=0,02$ уравнение решалось численным методом. Корнями с $\text{Re } z > 0$ будут, соответственно, $z_1 = 0,2 \pm j6,55$, $z_2 = 0,7 \pm j7,38$. Видно, что при уменьшении p в пределах одной области положительные действительные части корней возрастают.

Во второй области неустойчивости

$$1/18\pi^2 < p < 1/8\pi^2 \quad (18a)$$

появляются два комплексно-сопряженных корня с $\text{Re } z > 0$.

* Трансцендентное уравнение (14) имеет комплексно-сопряженные корни.

В пределе при $p \rightarrow 0$ получается бесконечно большое число корней с $\operatorname{Re} z > 0$.

Как следует из рис. 4, корни уравнения, модуль которых

$$|z| < \pi, \quad (19)$$

не имеют физического смысла, так как им соответствуют отрицательные значения параметра p . Действительно, решая уравнение (14) при $|z| \ll 1$, получаем $1 + p/6 = 0$. Следовательно, для корней уравнения должно выполняться условие

$$|z| = \alpha |\gamma| > \pi, \quad (19a)$$

т. е. при $\alpha \rightarrow 0$ поправка к постоянной распространения плоской волны (см. (8), (11) и (12)) $|\gamma| \rightarrow \infty$. При этом $\operatorname{Re} \gamma < 0$, так как $p \rightarrow \infty$; иными словами, в системе, состоящей из коротких элементарных пучков, волна не распространяется (очень сильное затухание).

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматриваемая система состоит из неограниченного числа элементарных пучков, а поле $E(\xi, \tau, t)$ каждого элементарного пучка является линейной комбинацией бесконечно большого числа плоских волн. Для $E(\xi, \tau, t)$, интегрируя (10) при нулевых начальных условиях (5а), после перехода к переменным Эйлера, получаем:

$$E[\xi, x, t] = \sum_n^{\infty} A_n e^{j\omega t - \Gamma_n x} \left\{ 1 - e^{h_e \gamma_n (x - \xi)} [1 + h_e \gamma_n (x - \xi)] \right\}. \quad (20)$$

Видно, что при комплексном γ_n амплитуда волны меняется как по экспонциальному закону, так и линейно с расстоянием вдоль пучка. Имеется еще две волны постоянной амплитуды с $\Gamma = jh_e^*$. Отсюда нетрудно получить выражения для ρ , v и i . Непосредственный интерес представляет общее поле системы. Согласно (2) с учетом (9), после перехода к переменным Эйлера получаем:

$$E_{\text{общ}}[x, t] = - \sum_n^{\infty} \left(\frac{\gamma_n}{\delta} \right)^2 A_n e^{j\omega t - \Gamma_n x}. \quad (21)$$

Поля с постоянными и линейно-возрастающими амплитудами интерферируют и не дают вклада в общее поле системы.

В зависимости от того, в какой области D -разбиения окажется величина параметра p , $E_{\text{общ}}[x, t]$ ведет себя по-разному. Пусть частота ω и параметр $\delta = \omega_p/\omega$ фиксированы. При достаточно коротких пучках, т. е. малых $\alpha = h_e L$, может быть $p = 1/\delta^2 \alpha^2 > 1/2\pi^2$; тогда все члены суммы (21) будут уменьшаться по амплитуде с ростом x . Если же длина пучков такова, что $p < 1/2\pi^2$, то в сумме (21) будут преобладать несколько членов. Так при $p = 0,04$ две волны — быстрая и медленная — возрастают как $e^{(10,2/L)x}$, остальные волны затухают.

Итак, при определенных α в системе могут существовать нарастающие решения. Условия их появления выражаются следующим образом через угол пролета электронов вдоль пучка относительно плазменной частоты:

$$\varphi_p = \omega_p L/v_0 > \sqrt{2}\pi. \quad (22)$$

⁷ Уравнению (5) соответствует дифференциальное уравнение пятого порядка (см. (6) и (7), два тривиальных корня $\lambda = 0$ в (9) опущены).

Итак, согласно (22), при

$$L > \lambda_p / \sqrt{2},$$

где λ_p — длина волны плазменных колебаний, система неустойчива по отношению к возмущениям типа плоской волны. Критерий (22) напоминает условие появления отрицательной электронной проводимости плоского зазора монотрона $2\pi < \varphi_0 = \omega L/v_0 < 3\pi$ [7]. Известно, что при таких углах пролета и определенных условиях в плоском монотроне можно получить усиление или генерацию. При дальнейшем увеличении угла пролета появляются новые области с отрицательной электронной проводимостью, величина которой уменьшается, т. е. пролетные эффекты сглаживаются. Рассматриваемая система элементарных пучков представляет собой набор неограниченного числа таких монотронов, равномерно распределенных в пространстве. Поэтому можно ожидать некоторую аналогию в поведении обычного монотрона и рассматриваемой системы. Так, возрастающие по амплитуде волны появляются при вполне определенных углах пролета (22). Однако в силу распределенного характера взаимодействия между элементарными пучками требуется меньшее пролетное время, и оно не ограничено сверху, как в первой области монотрона $2\pi < \varphi_0 < 3\pi$. Как и в монотроне, по мере увеличения длины пучков все пролетные эффекты сглаживаются, и рассматриваемая система переходит в пределе в однородный электронный поток. Действительно, при $\alpha \rightarrow \infty$ параметр $p \rightarrow 0$, и уравнение (14) в соответствии с D -разбиением (см. рис. 4) будет иметь бесконечное число корней с $\operatorname{Re} z > 0$. Используя это свойство, из (13) при $\alpha \rightarrow \infty$ получаем укороченное уравнение

$$\gamma^2 + \delta^2 = 0.$$

Отсюда следует, что основные поправки для постоянных распространения волн равны

$$\gamma = \pm j\delta; \quad \Gamma = j(h_e \pm h_p);$$

остальные $\gamma_n \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Таким образом, в пределе при $\alpha \rightarrow \infty$ получаем однородный электронный поток с известными постоянными распространения волн пространственного заряда.

Эффективность распределенного взаимодействия между различными элементарными пучками системы, связь между ними определяются величиной пространственного заряда: чем он больше, тем быстрее электрон может передать свое колебательное движение соседним электронам. В зависимости от времени взаимодействия электроны могут передать вполне определенную часть своей колебательной энергии в близлежащие пучки. Колебания „переходят“ с одного пучка на другой. По-видимому, когда $p < 1/2\pi^2$, движение электронов вдоль системы в некотором смысле можно считать непрерывным: с колебаниями, последовательно переходящими без затухания с одного пучка на другой, можно связать возмущенное движение некоторого „эффективного“ электрона, путь которого много больше L .

Интересно отметить следующее. Полученные результаты, по-видимому, можно применить для качественной оценки влияния конечного времени взаимодействия между электронами во внешнем крае облака пространственного заряда неразрезного магнетрона, так как при петлеобразном характере электронных траекторий в силу большой плотности пространственного заряда для внешнего края облака выполняется условие $\omega_H < \omega_p$, где ω_H — циклотронная частота. В этом случае можно пренебречь поперечными отклонениями электронов от стационарной траектории, вызванными силой Лоренца. Очевидно, качественные оцен-

ки будут тем точнее, чем лучше выполняется условие $\omega_H < \omega_p$. Можно надеяться, что пространственный заряд неразрезного магнетрона при $B > B_{kp}$, в котором электроны движутся по петлеобразным траекториям, будет до некоторой степени подобен рассмотренной системе. А именно, при фиксированных V_a и B только начиная с некоторой величины плотности пространственного заряда, определяемой эмиссионной способностью катода, возникающие в пространственном заряде возмущения будут возрастать по амплитуде. На практике во всех магнетронах пространственный заряд находится в области неустойчивости. Отсюда мы можем с некоторой степенью точности считать движение электронов во внешнем крае облака непрерывным, например, как в бриллюэновском потоке или в работе Фехнера [3]. Это помогает понять, почему результаты расчетов волноводных свойств пространственного заряда магнетрона, основанные на таких идеализациях внешнего края облака, удовлетворительно согласуются с экспериментом.

В заключение автор выражает глубокую признательность М. И. Кузнецовой за руководство работой и сотрудникам вычислительного отдела НИРФИ за численное решение дисперсионного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Q. Twiss, *Adv. in Electronics*, 5, 247 (1953).
2. С. Я. Брауде, ЖТФ, 10, 217 (1940).
- 3 P. Fechneg, *Ann. de Radioélectricité*, 7, 83 (1952).
4. D. A. Dunn, W. A. Hartman, L. M. Field, G. S. Kinloch, Proc. IRE, 44, 879 (1956).
5. Л. Н. Лошаков, Радиотехника и электроника, 5, 1448 (1960).
6. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКБВИА, Л., 1949.
7. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов СВЧ, ГИТЛ, М., 1956.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 апреля 1961 г.

ON SPACE CHARGE WAVES IN THE SYSTEM OF FINITE LENGTH ELECTRON BEAMS

R. A. Doudnik

In the linear approximation the propagation of space charge waves is considered in an infinite system consisting of equal electron beams of a finite length. It is shown that the wave growing in amplitude can exist if the path of every electron exceeds a characteristical length. In the limit case of the infinite length of elementary beams the system turns into the usual plasma flow with definite constants of the space charge wave propagation.

МЕТОД СДВИГА ВОЛЬТ-АМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРИМЕНЕНИИ К $p-n$ -ПЕРЕХОДАМ

С. П. Синица

Найдено, что энергия активации тока насыщения для $p-n$ -переходов в германии определяется не только шириной запрещенной зоны, но, по-видимому, и температурной зависимостью времени жизни неосновных носителей. Метод сдвига вольт-амперных кривых применен для изучения характеристики перехода в области низких температур.

Известно, что изучение вольт-амперных характеристик в широком интервале температур позволяет сделать некоторые выводы о строении области объемного заряда и происходящих в ней процессах. С другой стороны, подобные измерения позволяют судить о степени справедливости той или иной теории запорного слоя [1]. В данной работе рассматривались только резкие $p-n$ -переходы на германии. В этом случае вольт-амперные характеристики имеют вид:

$$i_{p-n} = q \left(\frac{D_p p_n}{L_p} + \frac{D_n n_p}{L_n} \right) (e^{qV/kT} - 1) \quad (1)$$

для $p-n$ -переходов и

$$i_{n-p} = q \left(\frac{D_p p_n}{L_p} + \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} n_n e^{-qV_k/kT} \right) (e^{qV/kT} - 1) \quad (2)$$

для запорного слоя металл—полупроводник, согласно теории, данной в работе [2]. Здесь p_n и n_n — концентрации неосновных носителей в n - и p -области соответственно, L_p и L_n — диффузионные длины неосновных носителей с зарядом q , D_p и D_n — их коэффициенты диффузии, V — приложенное к переходу напряжение, T — абсолютная температура, V_k — контактный потенциал на границе металл—полупроводник. Таким образом, в контакте металл—германий n -типа дырочная компонента тока носит диффузионный характер, а электронная компонента подчиняется диодной теории.

Противоречие, заключающееся в том, что для одного и того же запорного слоя дырочный ток носит диффузионный характер, а электронная компонента подчиняется диодной теории, является кажущимся. Параметром α , служащим критерием применения диодной или диффузионной теории выпрямления, является отношение энергии, приобретаемой электроном в запорном слое на длине свободного пробега, к энергии kT [2]. Если $\alpha > 1$, справедливо диодное приближение, в случае $\alpha < 1$ — диффузионное. Длина свободного пробега электрона в германии, вычисленная из измерения подвижности, обеспечивает применимость к запорному слою (с контактным потенциалом, значительно большим kT/q) диодной теории для весьма широкого интервала удельных сопротивлений. Дырочный ток, являясь вне перехода диффузионным, насыщается при напряжениях $(3 \div 4) kT/q$. Насыщение запорного тока, как известно, выполняется в рамках диодной теории. Таким образом, в случае контакта металл—германий обе компоненты

тока описываются диодной теорией, в то время как дырочный ток вне области объемного заряда является диффузионным током.

Поскольку электронная компонента тока насыщения зависит от высоты потенциального барьера, измерение температурной зависимости тока насыщения может при определенных условиях дать сведения о величине V_k . Такие предварительные измерения в области температур от 320° до 450°K нами были проведены. При этом было найдено (путем сравнения с соответствующими $p-n$ -переходами), что в указанном интервале температур ток насыщения представляет собой дырочный ток из германия в металл, а энергия активации этого тока не является потенциальным барьером на границе металл—полупроводник. Следовательно, остается единственная возможность: перенести измерения в область более низких температур, где можно ожидать регистрации электронной компоненты при условии, что $V_k \leq \Delta E - 2|\mu(T)|$; здесь ΔE — ширина запрещенной зоны, μ — химический потенциал.

Однако измерение токов насыщения в области низких температур сопряжено с двумя трудностями. Во-первых, для реальных переходов с обычными размерами эти токи становятся весьма малыми, что усложняет технику измерения; во-вторых, и это практически непреодолимо, токи i_{ps} или i_{ns} всегда маскируются токами через утечки, шунтирующие переход. Поэтому мы применили метод, аналогичный методу сдвига вольт-амперных характеристик в вакуумном диоде. При этом измеряется температурная зависимость напряжения, приложенного к барьеру в прямом направлении и вызывающего некоторый фиксированный ток. Если в области низких температур для контакта металл — полупроводник

$$i_{ns} \gg i_{ps},$$

то

$$i_{m-n} \approx q \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} n_n e^{-qV_k/kT} (e^{qV_k/kT} - 1).$$

Зафиксировав такое значение тока, чтобы при максимальной температуре $V \geq 3 \div 4 kT/q$, получим

$$V_k \approx V(T) - \frac{kT}{q} \ln \frac{i_{m-n}}{q \sqrt{kT/2\pi m} n_n} \quad (3)$$

— энергию активации тока в этой области.

Поскольку в области температур выше комнатной энергия активации тока насыщения известна из измерения температурной зависимости тока насыщения (который равен i_{ps}), то, сравнивая две эти величины, можно определить температуру T_0 , при которой дырочный ток через переход становится меньше электронного тока. В области температуры ниже T_0 вычисленная по (3) энергия активации будет контактным потенциалом барьера. В том случае, если изучается сплавный переход, измерение $V(T)$ позволяет судить, насколько близко $p-n$ -переход подчиняется предложенной модели в области низких температур.

Рассмотрим результаты некоторых измерений, проведенных на $p-n$ -переходах. Как и следовало ожидать, в области температур выше 300°K зависимость тока насыщения от температуры в пределах ошибки измерения является экспоненциальной. Надо отметить, что предварительные исследования контактов металла—полупроводник (Sn—Ge, Zn—Ge) дают в этой области температур результаты, полностью совпадающие со сплавными $p-n$ -переходами на материале одного удельного сопротивления, т. е. для контактов этих металлов необходимо проводить измерения в области низких температур.

Обращает на себя внимание интересная особенность рис. 1: для материала с различным удельным сопротивлением 0,4; 2 и 37 ом·см энергия активации закономерно меняется от 0,79 до 0,63 эВ.

Рассмотрим выражение для дырочной компоненты тока насыщения в $p-n$ -переходе:

$$i_{ps} = q \frac{D_p p_n}{L_p} = q \frac{D_p^{1/2}(T) N_c(T) N_v(T)}{\tau_p^{1/2}(T) n_n(T)} e^{-\Delta E/kT}. \quad (4)$$

Отличие в тангенсе угла наклона $\ln i_{ps}(1/T)$ от $-\Delta E/k$ может иметь место в том случае, если хоть одна из величин, входящих в i_{ps} , зависит от температуры по экспоненциальному закону. Этой величиной не могут быть D_p и $N_{c,v}$. Ею не может быть и n_n , так как, во-первых, в этой области температур n_n остается практически постоянной для низкоомного германия, а, во-вторых, наклон прямой может быть как меньше, так и больше $-\Delta E/k$; экспоненциальная зависимость n_n в состоянии лишь уменьшить измеряемую энергию активации. Единственной величиной, ответственной за измерение энергии активации тока насыщения, является, по-видимому, τ_p .

Статистика рекомбинации через примесные центры позволяет рассчитать ожидаемую зависимость времени жизни от температуры [3]. Оказывается, что эта зависимость для германия в исследованном температурном интервале действительно является экспоненциальной. Возможно, что для материала с различной концентрацией примеси эта зависимость может как уменьшать, так и увеличивать изме-

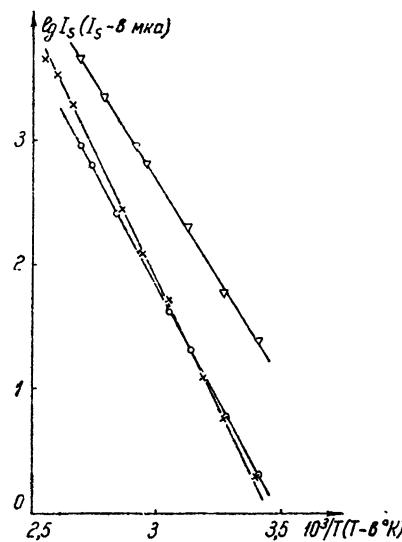


Рис. 1. Зависимость тока насыщения сплавных $p-n$ -переходов на германии от температуры:

$\times \times \times - \rho = 0,4 \text{ ом см}, \epsilon_0 = 0,79 \text{ эВ}, \circ \circ \circ - \rho = 2 \text{ ом см}, \epsilon_0 = 0,74 \text{ эВ}, \nabla \nabla \nabla - \rho = 37 \text{ ом см}, \epsilon_0 = 0,63 \text{ эВ}$.

ряемую энергию активации тока насыщения таким образом, что в исследуемом интервале температур время жизни носителей в материале с удельным сопротивлением 0,4 ом·см убывает с ростом температуры, а в материале с $\rho = 2$ ом·см и 37 ом·см возрастает с ростом температуры.

Однако для окончательного решения вопроса необходимо провести независимое исследование температурного хода τ_p . Такое исследование представляется интересным как с точки зрения возможности определения энергетического положения ловушек, так и термостабилизации тока насыщения i_s переходов.

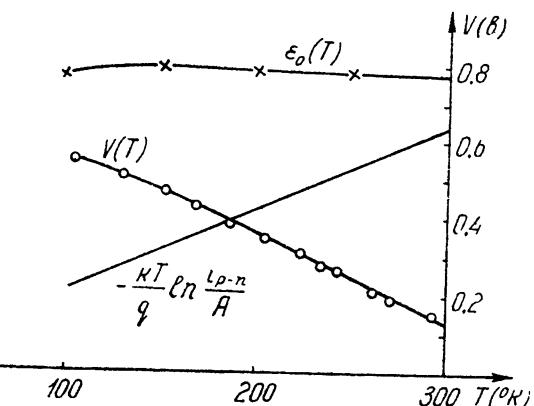


Рис. 2. Зависимость напряжения на $p-n$ -переходе от температуры при постоянном токе через переход ($i_{p-n} = 500 \text{ мкА}$, $\rho = 2 \text{ ом см}$).

Рассмотрим сдвиг вольт-амперных характеристик. Для перехода, включенного в пропускном направлении,

$$i_{p-n} \simeq A e^{-\epsilon_0/kT} e^{qV/kT}. \quad (5)$$

Здесь ϵ_0 — энергия активации тока насыщения с учетом зависимости τ_p от температуры. Следовательно,

$$\epsilon_0 \simeq V(T) - \frac{kT}{q} \ln \frac{i_{p-n}}{A}. \quad (6)$$

Величина A измеряется путем экстраполяции $\ln i_s$ в область $T \rightarrow \infty$. Если во всем исследуемом температурном диапазоне вольт-амперная характеристика перехода описывается формулой (5), то энергия активации, определенная по (6), должна быть постоянной и равной энергии активации, измеренной из тока насыщения при высоких температурах. Результаты измерений рис. 2 показывают, что вольт-амперная характеристика резкого $p-n$ -перехода на германии вплоть до температуры жидкого азота описывается формулой (1).

Таким образом, метод сдвига вольт-амперных характеристик может быть использован для определения энергии активации в области низких температур в $p-n$ -переходах, для которых можно пренебречь рекомбинационно-генерационным процессом в области объемного заряда.

В заключение приношу глубокую благодарность Ю. П. Маслаковцу за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. N. Hall, Proc. IRE, **40**, 1512 (1952) (перевод в сб. Полупроводниковые электронные приборы, ИЛ, М., 1953).
2. W. Schultz, Z. f. Physik, **138**, 598 (1954).
3. Э. И. Адирович, Г. М. Гуро, В. Ф. Кулешов, В. А. Чуенков, Труды ФИАН им П. Н. Лебедева, **8**, 129 (1956).

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию
17 июня 1961 г.

A SHIFT METHOD OF CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTICS APPLIED TO $p-n$ TRANSITIONS

S. P. Sinitsa

It has been found that the activation energy of the saturation current for the $p-n$ transitions in the germanium is determined not only by the width of a forbidden zone but probably by the temperature dependence of life time of minority carriers also. The shift-method of current-voltage characteristics is used for studying the transitions properties in a low temperature region.

УСЛОВИЯ РОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИЗ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ*

B. H. Труженикова

Методом точечных отображений получено явное для систем n -го порядка выражение величины g_0 , от знака которой зависит рождение периодического движения из состояния равновесия $x_1 = \dots = x_n = 0$ типа фокус.

В настоящей работе дается явное выражение величины g_0 , от знака которой зависит рождение периодического движения из состояния равновесия системы дифференциальных уравнений n -го порядка, когда ее параметры меняются так, что состояние равновесия теряет устойчивость. Вопрос о рождении периодического движения, как следует из работы [1], тесно связан с вопросом об опасных и безопасных (в смысле Баутина [2]) участках границы области устойчивости состояния равновесия. Именно, при $g_0 < 0$ происходит рождение периодического движения и проходящий участок границы области устойчивости является безопасным; напротив, при $g_0 > 0$ происходит стягивание периодического движения к состоянию равновесия и проходящий участок границы области устойчивости является опасным.

Вычисление g_0 основывается на сведении рассматриваемого круга вопросов к исследованию некоторого точечного отображения (см. [1]).

Явное выражение величины g_0 получено для системы уравнений n -го порядка, записанной в виде:

$$\dot{x}_i = \lambda_i(\mu) x_i + \sum_{j, k} a_{ijk}(\mu) x_j x_k + \sum_{j, k, s} a_{ijk_s}(\mu) x_j x_k x_s + \dots \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

и для системы с кусочно-гладкими правыми частями:

$$\dot{x}_i = \lambda_i(\mu) x_i + C_i(\mu) f(\sigma) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где

$$\sigma = x_1 + x_2 + \dots + x_n; \quad f(\sigma) = \begin{cases} \frac{\beta(\mu)}{\gamma(\mu)} \sigma^2 + \dots & \text{при } \sigma > 0; \\ \frac{\bar{\beta}(\mu)}{\bar{\gamma}(\mu)} \sigma^2 + \dots & \text{при } \sigma < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Найденное выражение величины g_0 для системы (1) при $n \leq 4$ совпадает с выражением, полученным Баутином [2]. В частном случае, когда $f(\sigma)$ —аналитическая функция ($\beta = \bar{\beta}$, $\gamma = \bar{\gamma}, \dots$), найденное выражение величины g_0 переходит в выражение, полученное Лурье [3].

1. ОТЫСКАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ g_0 ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (1)

Пусть $\lambda_1 = \sigma(\mu) + i\omega(\mu)$, $\lambda_2 = \sigma(\mu) - i\omega(\mu)$ и при $\mu = 0$ $\sigma(0) = 0$, $\omega(0) \neq 0$, $\operatorname{Re} \lambda_i(0) < 0$ для $i = 3, 4, \dots, n$. Решение $x_1(t), \dots, x_n(t)$ систе-

* Настоящая работа представляет собою изложение основных результатов дипломной работы, выполненной под руководством Ю. И. Неймарка

мы (1), обращающееся в x_{10}, \dots, x_{n0} при $t=0$, будем искать в виде ряда по степеням начальных условий x_{10}, \dots, x_{n0} [1].

После соответствующих вычислений получим решение системы (1) в виде:

$$\begin{aligned} x_i(t) = & x_{i0} e^{\lambda_i t} + \sum_{j, k} a_{ijk} x_{j0} x_{k0} \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k)t} - e^{\lambda_i t}}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} + \\ & + \sum_{j, k, s} a_{ijkl} x_{j0} x_{k0} x_{s0} \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_s + \lambda_k)t} - e^{\lambda_i t}}{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s - \lambda_i} + \\ & + \sum_{j, k} (a_{ijk} + a_{ikj}) x_{j0} \sum_{l, m} a_{klm} \frac{x_{l0} x_{m0}}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_k} \times \\ & \times \left(\frac{e^{(\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j)t} - e^{\lambda_i t}}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j - \lambda_i} - \frac{e^{(\lambda_k + \lambda_j)t} - e^{\lambda_i t}}{\lambda_k + \lambda_j - \lambda_i} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрение поведения фазовых траекторий в окрестности состояния равновесия сводится к изучению точечного отображения T гиперплоскости $x_1 + x_2 = 0$ в себя. Это точечное отображение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i = & x_i e^{\lambda_i \tau} + \sum_{j, k} a_{ijk} x_j x_k \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k)\tau} - e^{\lambda_i \tau}}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} + \\ & + \sum_{j, k, s} a_{ijkl} x_j x_k x_s \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s)\tau} - e^{\lambda_i \tau}}{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s - \lambda_i} + \sum_{j, k} (a_{ijk} + a_{ikj}) x_j \times \\ & \times \sum_{l, m} a_{klm} \frac{x_l x_m}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_k} \left(\frac{e^{(\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j)\tau} - e^{\lambda_i \tau}}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j - \lambda_i} - \frac{e^{(\lambda_k + \lambda_j)\tau} - e^{\lambda_i \tau}}{\lambda_k + \lambda_j - \lambda_i} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где τ —наименьший положительный корень уравнения

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0. \quad (6)$$

Согласно работе [1], для вычисления величины g_0 необходимо найти преобразование T^2 с точностью до величин третьего порядка малости включительно относительно x_i . Преобразование T^2 также может быть записано в виде (5), если только под τ понимать корень уравнения (6), близкий к $2\pi/\omega$.

При $\mu=0$, полагая $x_1=u+iv$ и $x_2=u-iv$, запишем преобразование T^2 в виде:

$$\begin{aligned} 2i\bar{v} = & 2iv \cos(\omega\tau) + B^1(\tau) v^2 + \sum_j A_j^1(\tau) vx_j + \dots; \\ \bar{x}_i = & x_i e^{\lambda_i \tau} + \sum_{j, k} a_{ijk} x_j x_k \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k)\tau} - e^{\lambda_i \tau}}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} + \dots \\ & (i = 3, 4, \dots, n), \end{aligned} \quad (7)$$

где τ —близкий к $2\pi/\omega$ корень уравнения

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = -2v \sin(\omega\tau) + v^2 B(\tau) + v^3 D(\tau) + \sum_j vx_j A_j(\tau) + \dots \quad (8)$$

Вычисление величины g_0 можно теперь провести следующим образом:

1. Найдем из уравнения (8) первые четыре коэффициента

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= 2\pi/\omega, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2\omega} B\left(\frac{2\pi}{\omega}\right), \quad \beta_j = \frac{1}{2\omega} A_j\left(\frac{2\pi}{\omega}\right), \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2\omega} \left[D\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) + \frac{1}{2\omega} B\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) B'_j\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \right]\end{aligned}\quad (9)$$

разложения τ в ряд вида

$$\tau = \sigma_0 + \sigma_1 v + \sigma_2 v^2 + \sum_j \beta_j v x_j + \dots$$

2. Решим систему уравнений $\dot{x}_i = x_i = x_i^*$ ($i = 3, 4, \dots, n$) методом итераций, приняв за нулевое приближение $x_i = 0$. Первая итерация дает требуемое выражение x_i^* с точностью до v^2 включительно:

$$x_i^* = v^2 \left[-\frac{a_{112} + a_{121}}{\lambda_i} + \frac{(\lambda_i - 2i\omega) a_{122} + a_{111}(\lambda_i + 2i\omega)}{\lambda_i^2 + 4\omega^2} \right] + \dots \quad (10)$$

3. Подставив найденные выражения τ и x_i^* в первое уравнение системы (7), найдем коэффициент при v^3 , который и будет искомой величиной g_0 .

После ряда упрощений выражение величины g_0 можно записать в виде:

$$\begin{aligned}g_0 &= \frac{\pi}{\omega} \left\{ a_{1112} + a_{1211} + a_{1121} + a_{2221} + a_{2122} + a_{2212} - \right. \\ &\quad - \frac{i}{\omega} [a_{222}(a_{212} + a_{221}) - a_{111}(a_{112} + a_{121})] - \\ &\quad - \sum_{k=3}^n \lambda_k^{-1} (a_{k12} + a_{k21}) (a_{22k} + a_{2k2} + a_{11k} + a_{1k1}) - \\ &\quad \left. - \sum_{k=3}^n \frac{a_{k22} (a_{21k} + a_{2k1}) (\lambda_k - 2i\omega) + a_{k11} (a_{12k} + a_{1k2}) (\lambda_k + 2i\omega)}{\lambda_k^2 + 4\omega^2} \right\}.\end{aligned}\quad (11)$$

2. ОТЫСКАНИЕ ВЕЛИЧИНЫ g_0 ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (2)

Систему уравнений (2) перепишем в виде:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + C_i (\bar{\beta} \sigma^2 + \bar{\gamma} \sigma^3 + \dots) \quad \text{при } \sigma > 0; \quad (12)$$

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + C_i (\bar{\beta} \sigma^2 + \bar{\gamma} \sigma^3 + \dots) \quad \text{при } \sigma < 0.$$

Так же, как и в предыдущем случае, ищем решение системы (12) при $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$ в виде степенного ряда по начальным условиям:

$$x_i = x_{i0} e^{\lambda_i t} + C_i \beta \sum_{j, k} x_{j0} x_{k0} \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k)t} - e^{\lambda_i t}}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} + \dots \quad (13)$$

Рассмотрим поведение фазовых траекторий в окрестности состояния равновесия. Для этого найдем точечное отображение, порождающее фазовыми траекториями первого уравнения (12) гиперплоскости $x_1 + x_2 = 0$ в себя:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i e^{\lambda_i \tau_1} + C_i \beta \sum_{j, k} x_j x_k \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k) \tau_1} - e^{\lambda_i \tau_1}}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} + \\ &+ C_i \gamma \sum_{j, k, s} x_j x_k x_s \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s) \tau_1} - e^{\lambda_i \tau_1}}{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s - \lambda_i} + 2C_i \beta^2 \sum_{j, k} C_k \sum_{l, m} \frac{x_j x_l x_m}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_k} \times \\ &\times \left(\frac{e^{(\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j) \tau_1} - e^{\lambda_i \tau_1}}{\lambda_j + \lambda_m + \lambda_l - \lambda_i} - \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k) \tau_1} - e^{\lambda_i \tau_1}}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

где под τ_1 понимается наименьший положительный корень уравнения $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0$.

Так же, как и в предыдущем случае, найдем, что

$$\tau_1 = \frac{\pi}{\omega} + \frac{8\beta(C_2 - C_1)}{3i\omega^2} v + \alpha_2 v^2 + \sum_j \beta_j x_j v + \dots. \quad (15)$$

Исключив τ_1 из (14), запишем отображение T в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= x_i e^{\lambda_i \pi/\omega} + x_i v \lambda_i \frac{8\beta(C_2 - C_1)}{3i\omega^2} e^{\lambda_i \pi/\omega} + \\ &+ x_i v^2 \left(\alpha_2 \lambda_i + \frac{\lambda_i^2 \alpha_1^2}{2} \right) e^{\lambda_i \pi/\omega} + \sum_{j, k} \frac{C_i \beta x_j x_k}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} \left\{ \left(e^{(\lambda_j + \lambda_k) \pi/\omega} - e^{\lambda_i \pi/\omega} \right) - \right. \\ &\left. - \alpha_1 v [(\lambda_j + \lambda_k) e^{(\lambda_k + \lambda_j) \pi/\omega} - \lambda_i e^{\lambda_i \pi/\omega}] \right\} + \\ &+ C_i \gamma \sum_{j, k, s} x_j x_k x_s \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s) \pi/\omega} - e^{\lambda_i \pi/\omega}}{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s - \lambda_i} + 2C_i \beta^2 \sum_{j, k} C_k x_j \times \\ &\times \sum_{l, m} \frac{x_l x_m}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_k} \left(\frac{e^{(\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j) \pi/\omega} - e^{\lambda_i \pi/\omega}}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j - \lambda_i} - \frac{e^{(\lambda_k + \lambda_j) \pi/\omega} - e^{\lambda_i \pi/\omega}}{\lambda_k + \lambda_j - \lambda_i} \right) + \dots. \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения величины g_0 необходимо составить произведение преобразований T_1 и T_2 , где T_1 и T_2 — преобразования гиперплоскости $x_1 + x_2 = 0$ в себя согласно первому и соответственно второму уравнениям (12). Преобразование T_2 получается из T_1 , заменой в нем $\underline{\gamma}$ на $\bar{\gamma}$, $\underline{\beta}$ на $\bar{\beta}$.

Пусть $\bar{x} = T_2(\bar{x}) = T_2(T_1(x))$. Составим произведение преобразований T_1 и T_2 :

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \left\{ x_i e^{\lambda_i \pi/\omega} + x_i v \lambda_i e^{\lambda_i \pi/\omega} \frac{8\beta(C_2 - C_1)}{3i\omega^2} + x_i v^2 e^{\lambda_i \pi/\omega} \left[\alpha_2 \lambda_i + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\lambda_i^2}{2!} \frac{64\beta^2(C_2 - C_1)^2}{(-9\omega^4)} \right] + \sum_{j, k} \frac{C_i \beta x_j x_k}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} \left[(e^{(\lambda_j + \lambda_k) \pi/\omega} - e^{\lambda_i \pi/\omega}) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{8v\beta(C_2 - C_1)}{3i\omega^2} \left[-\lambda_i e^{\lambda_i \pi/\omega} + (\lambda_k + \lambda_j) e^{(\lambda_k + \lambda_j) \pi/\omega} \right] \right] + \sum_{j, k, s} C_i \gamma x_j x_k x_s \times \right. \\ &\times \left. \left. \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s) \pi/\omega} - e^{\lambda_i \pi/\omega}}{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s - \lambda_i} + 2C_i \sum_{j, k} C_k \beta^2 \sum_{l, m} \frac{x_j x_l x_m}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_k} \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{e^{(\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j) \pi i / \omega} - e^{\lambda_i \pi i / \omega}}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j - \lambda_i} - \frac{e^{(\lambda_k + \lambda_j) \pi i / \omega} - e^{\lambda_i \pi i / \omega}}{\lambda_k + \lambda_j - \lambda_i} \right) + \dots \right\} e^{\lambda_i \pi i / \omega} + \\
& + v \lambda_i e^{\lambda_i \pi i / \omega} \frac{8 \bar{\beta} (C_2 - C_1)}{3i\omega^2} \left[x_i v \lambda_i e^{\lambda_i \pi i / \omega} \frac{8 \underline{\beta} (C_2 - C_1)}{3i\omega^2} + \right. \\
& + \sum_{j, k} \frac{C_i \underline{\beta} x_j x_k}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} \left(e^{(\lambda_j + \lambda_k) \pi i / \omega} - e^{\lambda_i \pi i / \omega} \right) \Big] + v^2 x_i e^{\lambda_i 2 \pi i / \omega} \left[\bar{\sigma}_2 \lambda_i + \right. \\
& \left. + \frac{\lambda_i^2}{2!} \frac{64 \bar{\beta}^2 (C_2 - C_1)^2}{(-9\omega^4)} \right] + \sum_{j, k} \frac{C_i 8 \bar{\beta}^2 x_j x_k v}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} e^{(\lambda_k + \lambda_j) \pi i / \omega} \frac{C_2 - C_1}{3i\omega^2} \times \\
& \times [-\lambda_i e^{\lambda_i \pi i / \omega} + (\lambda_j + \lambda_k) e^{(\lambda_j + \lambda_k) \pi i / \omega}] + \sum_{j, k} \frac{C_i \bar{\beta}}{\lambda_j + \lambda_k - \lambda_i} \times \\
& \times (e^{(\lambda_j + \lambda_k) \pi i / \omega} - e^{\lambda_i \pi i / \omega}) \sum_{l, m} \left\{ x_j e^{\lambda_j \pi i / \omega} + x_j v \lambda_j e^{\lambda_j \pi i / \omega} \times \right. \\
& \times \frac{8 \underline{\beta} (C_2 - C_1)}{3i\omega^2} + \frac{C_j \underline{\beta} x_l x_m}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_j} (e^{(\lambda_l + \lambda_m) \pi i / \omega} - e^{\lambda_j \pi i / \omega}) \Big\} \left\{ x_k e^{\lambda_k \pi i / \omega} + \right. \\
& \left. + x_k v \lambda_k e^{\lambda_k \pi i / \omega} \frac{8 \underline{\beta} (C_2 - C_1)}{3i\omega^2} + \dots \right\} + \\
& + \sum_{j, k, s} C_i \bar{\gamma} x_j x_k x_s e^{(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s) \pi i / \omega} \frac{e^{(\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s) \pi i / \omega} - e^{\lambda_i \pi i / \omega}}{\lambda_j + \lambda_k + \lambda_s - \lambda_i} + \\
& + 2C_i \sum_{j, k} C_k x_j \bar{\beta}^2 \sum_{l, m} \frac{x_j x_l x_m}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_k} e^{(\lambda_j + \lambda_l + \lambda_m) \pi i / \omega} \times \\
& \times \left(\frac{e^{(\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j) \pi i / \omega} - e^{\lambda_i \pi i / \omega}}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_j - \lambda_i} - \frac{e^{(\lambda_k + \lambda_j) \pi i / \omega} - e^{\lambda_i \pi i / \omega}}{\lambda_k + \lambda_j - \lambda_i} \right) + \dots,
\end{aligned}$$

где выражение для $\bar{\sigma}_2$ получается из выражения для α_2 заменой в нем β на $\bar{\beta}$, γ на $\bar{\gamma}$.

Проделав ряд вычислений, аналогичных вычислениям, проведенным в первом разделе, получим:

$$\begin{aligned}
g_0 = & \frac{3\pi}{2\omega} (C_1 + C_2) (\gamma + \bar{\gamma}) + 2 \sum_{k=3}^n C_k \left[-\frac{C_1 + C_2}{\lambda_k} + \right. \\
& + \frac{C_1 (\lambda_k + 2i\omega) + C_2 (\lambda_k - 2i\omega)}{\lambda_k^2 + 4\omega^2} \Big] \left[\frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + 4\omega^2} - \frac{1}{\lambda_k} \right] \times \\
& \times \left[(\beta^2 + \bar{\beta}^2) (e^{\lambda_k \pi i / \omega} - 1) + \beta \bar{\beta} (1 - e^{\lambda_k \pi i / \omega})^2 - (\beta + \bar{\beta} e^{\lambda_k \pi i / \omega}) \times \right. \\
& \times \left. \frac{(\bar{\beta} + \beta e^{\lambda_k \pi i / \omega}) (e^{\lambda_k \pi i / \omega} - 1)}{(1 + e^{\lambda_k \pi i / \omega})} \right] + \frac{(\beta^2 + \bar{\beta}^2) \pi i (C_1^2 - C_2^2)}{\omega^2} +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{16(C_2 - C_1)^2}{9\omega^2} (\beta^2 - \bar{\beta}^2) + \frac{128}{9\omega^2} (C_1^2 + C_2^2) (\beta - \bar{\beta})^2 - \sum_k C_k (\beta^2 + \bar{\beta}^2) \times \\ \times \left\{ \frac{2\pi(C_1 + C_2)}{\lambda_k \omega} + \frac{\pi}{\omega} \frac{[C_1(\lambda_k + 2i\omega) + C_2(\lambda_k - 2i\omega)]}{(\lambda_k^2 + 4\omega^2)} \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 41, № 2, 95, № 5—6, 146 (1958).
2. Н. Н. Батин, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
3. А. И. Лурье, Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, Гостехиздат, М.—Л., 1951.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 июня 1961 г.

CONDITIONS OF AN APPEARANCE OF A PERIODIC MOTION FROM
A EQUILIBRIUM STATE

V. N. Truzhennikova

By the point transformation method the explicit expression of the magnitude g_0 has been obtained for n -order systems, the sign of the g determines the appearance of the periodic motion from the equilibrium state $x_1 = \dots = x_n = 0$ of a focus type.

О ВЛИЯНИИ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ В НАПОРНОМ ТРУБОПРОВОДЕ НА ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Г. В. Аронович

Определяется влияние волновых явлений в напорном трубопроводе на оптимальное по быстродействию управление гидротурбиной. Решение описывается на принципе максимума Л. С. Понtryгина.

Рассмотрим оптимальное управление гидротурбиной при учете волновых процессов в напорном трубопроводе. Предполагается, что регулирование осуществляется регулятором скорости путем поворота лопаток направляющего аппарата (более сложный случай, когда гидротурбина имеет два регулирующих органа — направляющий аппарат и поворотные лопасти рабочего колеса — рассматривается аналогично). Вначале турбина работает в стационарном режиме, а затем пусть для определенности настройка регулятора скачкообразно меняется на постоянную величину. Требуется определить влияние волновых явлений в подводящем трубопроводе на оптимальное управление, обеспечивающее минимум времени перехода системы из исходного фиксированного состояния в задаваемое *.

Дифференциальные уравнения задачи в возмущениях будут следующими [1]: уравнение агрегата

$$T_1 \frac{d\varphi}{dt_1} = a_{1\mu} + a_2\eta + a_3\varphi; \quad (1)$$

уравнение главного сервомотора

$$T_2 \frac{d\mu}{dt_1} = \sigma_1; \quad (2)$$

уравнения движения жидкости в подводящем трубопроводе (в пренебрежении гидравлическим сопротивлением)

$$\frac{\partial q}{\partial t_1} = - \frac{gH_0}{U_0} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{gH_0 \cdot \partial \eta}{U_0 \cdot \partial t_1} = - a^2 \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (3)$$

Решение уравнений (3) должно удовлетворять следующим граничным и начальным условиям: при $x = -L$

$$\eta = 0; \quad (4)$$

при $x = 0$

$$q = b_{1\mu} + \left(b_2 + \frac{1}{2} \right) \eta + b_3\varphi; \quad (4a)$$

при $t = 0$

$$\eta = q = 0. \quad (5)$$

Здесь φ — относительное изменение стационарной угловой скорости

* Аналогично рассматривается случай скачкообразного изменения нагрузки.

вращения турбины, μ — относительное смещение поршня сервомотора, η — относительное изменение стационарного давления в трубопроводе, q — относительное изменение стационарной скорости потока в трубопроводе, σ_1 — управление объектом, причем $|\sigma_1| \leq N_1$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$, $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, $b_3 > 0$.

Решение уравнений (3) при начальных условиях (5) имеет вид:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{U_0}{H_0} \left[F_1 \left(t_1 - \frac{x}{a} \right) + f_1 \left(t_1 + \frac{x}{a} \right) \right]; \\ q &= \frac{g}{a} \left[F_1 \left(t_1 - \frac{x}{a} \right) - f_1 \left(t_1 + \frac{x}{a} \right) \right].\end{aligned}\quad (6)$$

Отсюда, используя граничное условие (4), получим (при $x=0$):

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{U_0}{H_0} [f_1(t_1) - f_1(t_1 - \tau_1)]; \\ q &= -\frac{g}{a} [f_1(t_1) + f_2(t_1 - \tau_1)],\end{aligned}\quad (7)$$

где $\tau_1 = 2L/a$.

Подставляя (7) в уравнение (1) и граничное условие (4а), придем к следующей системе дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned}T_1 \frac{d\varphi}{dt_1} &= a_1 \mu + a_2 \frac{U_0}{H_0} [f_1(t_1) - f_1(t_1 - \tau_1)] + a_3 \varphi; \\ T_2 \frac{d\mu}{dt_1} &= \sigma_1;\end{aligned}\quad (8)$$

$$b_1 \mu + b_3 \varphi + g_1 f_1(t_1) - g_2 f_1(t_1 - \tau_1) = 0,$$

где

$$g_1 = \frac{U_0}{H_0} \left(b_2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{g}{a}, \quad g_2 = \frac{U_0}{H_0} \left(b_2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{g}{a}.$$

В систему уравнений (8) введем следующие обозначения:

$$\varphi = x_1, \quad \mu = x_2, \quad f = x_3, \quad a_3 = a'_1, \quad a_1 = a'_2,$$

$$a_2 \frac{U_0}{H_0} = a'_3, \quad -a_2 \frac{U_0}{H_0} = b'_3, \quad -\frac{b_3}{b_1} = a'_1, \quad -1 = a'_2,$$

$$-\frac{g_1}{b_1} = a'_3, \quad \frac{g_2}{b_1} = b'_3, \quad u = \frac{T_1}{T_2} \sigma_1, \quad N = \frac{T_1}{T_2} N_1, \quad t = \frac{t_1}{T_1},$$

$$\tau = \frac{\tau_1}{T_1}.$$

Обозначим также, имея в виду дальнейшее,

$$h = \frac{a'_1 a'_3}{a'_3} - a'_1, \quad h_1 = \frac{a'_1 b'_3}{b'_3} - a'_1, \quad h_2 = \frac{a'_1 a'_2}{a'_2} - a'_1.$$

Тогда получим (точкой отмечены производные по безразмерному времени t):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a'_1 x_1(t) + a'_2 x_2(t) + a'_3 x_3(t) + b'_3 x_3(t - \tau); \\ \dot{x}_2(t) &= u(t); \\ 0 &= a_1^3 x_1(t) + a_2^3 x_2(t) + a_3^3 x_3(t) + b_3^3 x_3(t - \tau).\end{aligned}\quad (9)$$

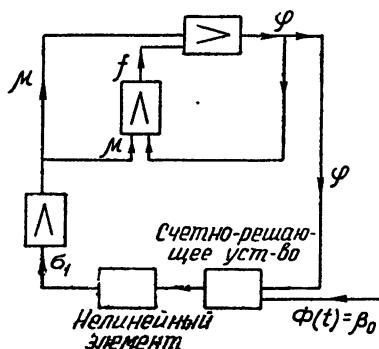


Рис. 1.

Блок-схема задачи представлена на рис. 1. Роль нелинейного элемента здесь играет золотник, управляемый счетно-решающим устройством. Управление u имеет целью ликвидировать в наикратчайший срок рассогласование между задаваемым состоянием $\Phi(t) = \beta_0 = \text{const}$ и начальным значением выходной величины линейной части системы $x_1(t)$, которое принимается за нулевое: при $-\tau \leq t \leq 0$ $x_1(t) = \dot{x}_1(t) = 0$.

С помощью преобразования Лапласа получим из (9) (при нулевых начальных условиях) следующее:

$$\bar{x}_1(p) = \frac{[a'_2(a_3^3 + b_3^3 e^{-p\tau}) - a_2^3(a'_3 + b'_3 e^{-p\tau})] \bar{u}(p)}{p[a_3^3(p+h) + b_3^3(p+h_1)e^{-p\tau}]}\quad (10)$$

или

$$\begin{aligned}\bar{x}_1(p) &= \frac{1}{p} \frac{[a'_2(a_3^3 + b_3^3 e^{-p\tau}) - a_2^3(a'_3 + b'_3 e^{-p\tau})] \bar{u}(p)}{a_3^3(p+h) \left[1 + \frac{b_3^3(p+h)}{a_3^3(p+h)} e^{-p\tau} \right]} = \\ &= \frac{1}{p} \frac{a'_2(a_3^3 + b_3^3 e^{-p\tau}) - a_2^3(a'_3 + b'_3 e^{-p\tau})}{a_3^3(p+h)} \times\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}&\times \left\{ \sum_{j=0}^n (-1)^j \left[\frac{b_3^3(p+h_1)}{a_3^3(p+h)} e^{-p\tau} \right]^j + (-1)^{n+1} \left[\frac{b_3^3(p+h_1)}{a_3^3(p+h)} e^{-p\tau} \right]^{n+1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 + \frac{b_3^3(p+h_1)}{a_3^3(p+h)} e^{-p\tau} \right]^{-1} \right\} \bar{u}(p).\end{aligned}$$

Считаем, что все полюса функции (10) имеют неположительную вещественную часть. Здесь n определяется длительностью процесса оптимального регулирования (см. ниже). Зная закон изменения $u(t)$, найдем из (10) (возвращаясь от изображений к оригиналам) уравнение переходного процесса $x_1(t)$. Закон изменения $u(t)$, соответствующий оптимальному процессу, найдем с помощью принципа максимума Понтрягина, обобщенного в работе [2] на случай процессов с запаздыванием.

Согласно [2], если линейная управляемая система имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}^i &= \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}^i x^{\alpha}(t) + \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha}^i x^{\alpha}(t - \tau) + \sum_{\beta=1}^r c_{\beta}^i u^{\beta}(t) \\ (i &= 1, \dots, n),\end{aligned}\quad (12)$$

где $x = (x', \dots, x^n) \in X^n$ и $u = (u', \dots, u^r)$ — точка выпуклого замкнутого ограниченного r -мерного многогранника Ω , оптимальному процессу по быстродействию отвечают такие $u^\beta(t)$, при которых будет максимальной величина

$$H' = \sum_{m=1}^n \psi_m \sum_{\beta=1}^r c_\beta^m u^\beta(t). \quad (13)$$

При этом система уравнений для $\psi_i(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i(t) &= - \sum_{\alpha=1}^n a_i^\alpha \psi_\alpha(t) - \sum_{\alpha=1}^n b_i^\alpha \psi_\alpha(t + \tau), \\ t_0 &\leq t \leq t_1 - \tau; \\ \dot{\psi}_i(t) &= - \sum_{\alpha=1}^n a_i^\alpha \psi_\alpha(t), \quad t_1 - \tau \leq t \leq t_1 \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (14)$$

Так как в системе (9) одно уравнение не дифференциальное, то для применения принципа максимума заменим систему уравнений (9) следующей:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a'_1 x_1(t) + a'_2 x_2(t) + a'_3 x_3(t) + b'_3 x_3(t - \tau); \\ x_2(t) &= u(t); \\ \mu x_3(t) &= a_1^3 x_1(t) + a_2^3 x_2(t) + a_3^3 x_3(t) + b_3^3 x_3(t - \tau) \end{aligned} \quad (15)$$

(где μ — произвольный положительный параметр) при начальных условиях $x_i(t) = 0$ ($-\tau \leq t \leq 0$)*. При $\mu \rightarrow 0$ система уравнений (15) совпадает с (9). В соответствии с (15) в выражении (13) $r = 1$, $m = 2$, $c_\beta^m = c_1^2 = 1$, откуда следует, что максимум H' будет иметь место при

$$u = \operatorname{sgn} \sum_{m=1}^n c_1^m \psi_m = \operatorname{sgn} \psi_2. \quad (16)$$

Уравнения для определения $\psi_i(t)$ будут следующими: при $t_0 \leq t \leq t_1 - \tau$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= - a'_1 \psi_1(t) - a_1^3 \psi_3(t); \\ \dot{\psi}_2(t) &= - a'_2 \psi_1(t) - a_2^3 \psi_3(t); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\mu \dot{\psi}_3(t) = - [a'_3 \psi_1(t) + a_3^3 \psi_3(t) + b'_3 \psi_1(t + \tau) + b_3^3 \psi_3(t + \tau)];$$

при $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= - a'_1 \psi_1(t) - a_1^3 \psi_3(t); \\ \dot{\psi}_2(t) &= - a'_2 \psi_1(t) - a_2^3 \psi_3(t); \\ \mu \dot{\psi}_3(t) &= - [a'_3 \psi_1(t) + a_3^3 \psi_3(t)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда при $\mu \rightarrow 0$ для $t_0 \leq t \leq t_1 - \tau$

* Отметим, что повышение порядка системы на единицу здесь не нарушает ее устойчивости [3].

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1(t) &= -a_1' \psi_1(t) - a_1^3 \psi_3(t); \\ \dot{\psi}_2(t) &= -a_2' \psi_1(t) - a_2^3 \psi_3(t);\end{aligned}\quad (19)$$

$$0 = a_3' \psi_1(t) + a_3^3 \psi_3(t) + b_3' \psi_1(t + \tau) + b_3^3 \psi_3(t + \tau)$$

и для $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1(t) &= -a_1' \psi_1(t) - a_1^3 \psi_3(t); \\ \dot{\psi}_2(t) &= -a_2' \psi_1(t) - a_2^3 \psi_3(t); \\ 0 &= a_3' \psi_1(t) + a_3^3 \psi_3(t).\end{aligned}\quad (20)$$

Исключая ψ_3 , получим из уравнений (19):

$$a_3^3 \dot{\psi}_1(t) + b_3^3 \dot{\psi}_1(t + \tau) - b_3^3 h_1 \psi_1(t + \tau) - a_3^3 h \psi_1(t) = 0; \quad (21)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{a_2^3}{a_1^3} [\dot{\psi}_1(t) - h_2 \psi_1(t)] \quad (t_0 \leq t \leq t_1 - \tau). \quad (22)$$

Аналогично уравнения (20) дадут:

$$\dot{\psi}_1(t) - h \psi_1(t) = 0; \quad (23)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = \frac{a_2^3}{a_1^3} [\dot{\psi}_1(t) - h_2 \psi_1(t)] \quad (t_1 - \tau \leq t \leq t_1). \quad (24)$$

В дальнейшем примем $t_0 = 0$.

Закон переключения „реле“ $u(t)$ найдем, зная $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$. Выясним поведение этих функций. Для этого применим к уравнению (21) преобразование Лапласа. Учитывая, что уравнение (21) представляет собою дифференциально-разностное уравнение с опережающим аргументом, будем иметь:

$$\bar{\psi}_1(p) = \frac{a_3^3 \psi_1(0) + b_3^3 \psi_1(\tau) + e^{p\tau} b_3^3 (p - h_1) \int_0^\tau e^{-p\xi} \psi_1(\xi) d\xi}{a_3^3 (p - h) + b_3^3 (p - h_1) e^{p\tau}} \quad (25)$$

(при $\tau \leq t \leq t_1 - \tau$). Входящая в правую часть выражения (25) под знаком интеграла функция $\psi_1(t)$ считается заданной в начальном интервале $0 \leq t \leq \tau$. Пусть при $0 \leq t \leq \tau$ функция*

$$\psi_1(t) = \psi_1(0) e^{ht}. \quad (25a)$$

Тогда

$$\psi_1(\tau) = \psi_1(0) e^{h\tau}, \quad \int_0^\tau e^{-p\xi} \psi_1(\xi) d\xi = \frac{\psi_1(0)}{h - p} (e^{(h-p)\tau} - 1)$$

и выражение (25) можно переписать в виде:

* При $0 \leq t \leq \tau$ (первая фаза гидравлического удара) в уравнениях (9) будут отсутствовать члены с b_i^j . Естественно считать, что в этом же интервале члены b_i^j будут отсутствовать также и в уравнениях (19) для $\psi_i(t)$. Учитывая это, придем к выражению (25a).

$$\begin{aligned}\psi_1(p) &= \frac{[(a_3^3 + b_3^3 e^{h\tau}) (h - p) e^{-p\tau} + b_3^3 (p - h_1) (e^{(h-p)\tau} - 1)] \psi_1(0)}{(h - p) [b_3^3 (p - h_1) + a_3^3 (p - h) e^{-p\tau}]} = \\ &= \frac{\psi_1(0)}{p - h} \left[1 + \frac{b_3^3 (h_1 - h) e^{(h-p)\tau}}{b_3^3 (p - h_1) + a_3^3 (p - h) e^{-p\tau}} \right] = \\ &= \frac{\psi_1(0)}{p - h} \left\{ 1 + \frac{(h_1 - h) e^{(h-p)\tau}}{p - h_1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left[\frac{a_3^3 (p - h)}{b_3^3 (p - h_1)} e^{-p\tau} \right]^j \right\}\end{aligned}\quad (26)$$

(считая $\left| \frac{a_3^3 (p - h)}{b_3^3 (p - h_1)} e^{-p\tau} \right| < 1$). Возвращаясь от изображения к оригиналу, получим функцию $\psi_1(t)$ в виде ряда:

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \psi_1(0) \left\{ e^{ht} + A e^{h(t-n\tau)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n \frac{\varphi_{nl}(h_1)}{(n-l)! (l-1)!} \times \right. \\ &\quad \left. \times (t - n\tau)^{n-l} e^{h_l(t-n\tau)} \right\},\end{aligned}\quad (27)$$

где

$$A = -e^{h\tau}, \quad \varphi_{11}(h_1) = e^{h\tau}, \quad (t - n\tau) > 0,$$

$$\varphi_{nl}(p) = (h_1 - h) e^{h\tau} \left(-\frac{a_3^3}{b_3^3} \right)^{n-1} \frac{d^{l-1}}{dp^{l-1}} (p - h)^{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Отметим, что ряд (27) для любого конечного t содержит конечное число членов.

В рассматриваемой задаче $-a_3^3/b_3^3 > 1$. Поэтому знаки коэффициентов $\varphi_{nl}(p)$ зависят от разности $h_1 - h$. Если $h_1 > h$, то все $\varphi_{nl}(p) > 0$ и, как следует из (27), функция $\psi_1(t)$ (при $\psi_1(0) > 0$) монотонно растет и не меняет знака.

Учитывая, что $b'_3 = -a'_3$, легко убедиться, что условие $h_1 - h > 0$ выполняется, если

$$a'_3 < b'_3,$$

что имеет место всегда. Далее из уравнения (22) следует, что $\dot{\psi}_2(t)$ меняет знак, если при некотором t правая часть уравнения (22) станет равной нулю, т. е. если

$$\dot{\psi}_1 - h_2 \psi_1 = 0. \quad (28)$$

Отсюда получим:

$$\psi_1(t) = \psi_1(0) e^{h_2 t}. \quad (29)$$

Если кривые (27) и (29) не имеют общих точек (не пересекаются), то уравнение (28) не будет удовлетворяться значениями $\psi_1(t)$ из (27) ни при каких t . Из выражений (27) и (29) следует, что кривые (27) и (29) не пересекаются, если $h > h_2$ и $h_1 > h_2$ или если $a'_3/a_3^3 < a'_2/a_2^3$ и $b'_3/b_3^3 < a'_2/a_2^3$, откуда условие сохранения знака $\psi_2(t)$ будет следующим:

$$\frac{a'_3}{a_3^3} < \frac{a'_2}{a_2^3} < \frac{a'_3}{b_3^3}. \quad (30)$$

Если условие (30) выполняется, что наиболее реально, то функция $\psi_2(t)$ может изменить знак в интервале $0 \leq t \leq t_1 - \tau$ не более одного

раза. Этот вывод справедлив и для расширенного интервала $0 \leq t \leq t_1$, так как функция $\psi_2(t)$ в интервале $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$, равная, как следует из (23), (24),

$$\psi_2(t) = \psi_2(t_1 - \tau) + B \frac{\psi_1(t_1 - \tau)}{h} (e^{h(t-t_1+\tau)} - 1) \quad (B > 0), \quad (31)$$

также является монотонно возрастающей функцией. Таким образом, выполнение условий (30) означает, что процесс оптимального регулирования состоит из двух интервалов, в каждом из которых $u(t)$ принимает свои предельные значения $\pm N$ (аналогично тому, как это следовало бы из теоремы об n -интервалах Фельдбаума [4], если бы задача описывалась системой обыкновенных дифференциальных уравнений). Дальнейшее рассмотрение задачи проведем в этом предположении.

Обозначим моменты переключений реле через t_{11} и t_{12} . В соответствии с (11) при $0 \leq t \leq t_{11}$

$$x_1(t) = \alpha \sum_{j=0}^m x_{1j}(t - j\tau),$$

где $m = [t_{11}/\tau]$, $\alpha = \pm 1$ определяет знак начального переключения реле; при $t_{11} \leq t \leq t_{12}$

$$x_1(t) = \alpha \left[\sum_{j=0}^n x_{1j}(t - jt) - 2 \sum_{j=0}^k x_{1j}(t - jt - t_{11}) \right], \quad (32)$$

где $n = [t_{12}/\tau]$, $k = n - m$, если $t_{11}/\tau + k < t_{12}/\tau$, и $k = n - m - 1$, если $t_{11}/\tau + k + 1 > t_{12}/\tau$. Здесь квадратные скобки (антые) означают целую часть стоящей в них дроби. Из приведенных выражений видно, что пределы суммирования m , n и k в (32) сами зависят от искомых моментов переключений t_{11} и t_{12} . Последние находятся из условий [5]

$$\beta_0 - x_1(t_{12}) = 0; \quad x_1(t_{12}) = 0.$$

Численный пример. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 1,5$, $a_3 = -1$, $T_1 = 10$ сек, $T_2 = 2$ сек, $b_1 = 0,4$, $b_2 = -0,2$, $b_3 = 0,2$, $U_0 = 5$ м·сек $^{-1}$, $H_0 = 20$ м.

Тогда $a'_1 = -1$, $a'_2 = 1$, $a'_3 = 0,375$, $b'_3 = -0,375$, $a_1^3 = 0,5$, $a_2^3 = -1$, $a_3^3 = -0,2125$, $b_3^3 = 0,1625$.

Пусть также $\beta_0 = 0,1$, $N = 1$. Так как условие (30) выполняется, то процесс оптимального управления состоит из двух интервалов. Для указанных значений параметров и различных τ величины t_{11} , t_{12} имеют следующие значения *.

τ	m	n	t_{11}	t_{12}
0	2	2	0,369	0,638
0,3	1	1	0,646	0,752
0,4	1	1	0,544	0,691
0,5	0	1	0,533	0,710
0,6	0	1	0,510	0,714
0,7	0	1	0,500	0,735
0,8	0	0	0,499	0,752
∞	0	0	0,499	0,752

Если $\tau = 0,2$, то $n > 4$.

Волновой процесс в трубопроводе влияет на длительность интервалов между переключениями и на длительность управления

* Соответствующий расчет выполнен В. П. Савельевым и О. С. Шороховым.

в целом. Нетрудно также убедиться, что при конечном τ и релейной характеристике нелинейного элемента система, достигнув оптимальным образом заданного состояния, после снятия управления начнет в результате волновых явлений отклоняться от достигнутого состояния. В самом деле, пусть в результате действия управления u

$$x_1 = \beta_0, \quad \dot{x}_1 = 0.$$

Отключим управление u . Тогда $x_2 = x_2(t_{12}) = \text{const}$ и из (9) получим:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1(p) &= \{[x_1(t_{12}) + a'_2 x_2(t_{12})/p] (a_3^3 + b_3^3 e^{-p\tau}) - \\ &- (a'_3 + b'_3 e^{-p\tau}) a_2^3 x_2(t_{12})/p\} [(p - a'_1) (a_3^3 + b_3^3 e^{-p\tau}) + \\ &+ (a'_3 + b'_3 e^{-p\tau}) a_1^3]^{-1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда $x_1(\infty) = p\bar{x}_1(0) = -(a'_2/a'_1)x_2(t_{12})$ (так как $b'_3 = -a'_3$). Но поскольку

$$x_2(t_{12}) = \int_0^{t_{12}} u dt = \alpha \left[\int_0^{t_{11}} N dt - \int_{t_{11}}^{t_{12}} N dt \right] = \alpha N (2t_{11} - t_{12})$$

и разность $2t_{11} - t_{12}$ в зависимости от τ может быть различной, то $x_1(t)$ после достижения заданного значения β_0 начнет от него отклоняться, стремясь к значению $-(a'_2/a'_1)x_2(t_{12})$. Практически это отклонение будет, однако, меньшим из-за потерь на трение, вызывающих затухание волнового процесса в трубопроводе. Что касается синтеза оптимальной системы с волновым звеном, то в данной задаче его можно осуществить аналогично тому, как это указано в работе [6]. Аналогично могут быть рассмотрены оптимальные процессы в ряде других динамических системах с волновыми звеньями.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Гинзбург, Уч. зап. ЛГУ, Механика, № 217, 144 (1957).
2. Г. Л. Харатишвили, ДАН СССР, 136, 39 (1961).
3. М. В. Мееров, Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности, Физматгиз, М., 1959.
4. А. А. Фельдбаум, Автоматика и телемеханика, 14, 712 (1953).
5. Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, М., 1955, гл. XII.
6. А. А. Фельдбаум, Автоматика и телемеханика, 16, 129 (1955).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
28 сентября 1961 г.

ON THE INFLUENCE OF WAVE PHENOMENA IN PRESSURE PIPE LINE ON OPTIMUM CONTROL

G. V. Aronovich

The influence has been determined of wave phenomena in a pressure pipe line on optimum relative to high speed control of a hydro-turbine. The solution bases on L. S. Pontryagin's maximum principle.

**МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ЗАДАЧЕ
СОСТАВЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАФИКА РИТМИЧНОГО
ПРОИЗВОДСТВА ПРОИЗВОЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА ТИПОВ
ИЗДЕЛИЙ НА ОДНОМ ОБОРУДОВАНИИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ
РАБОЧИХ ЗАДЕЛОВ**

A. С. Алексеев

Представление процесса производства в виде движений некоторой динамической системы и применение метода точечных преобразований позволяет дать ряд алгоритмов решения задачи составления в некотором смысле оптиимальных графиков ритмичного производства произвольного количества изделий на одном оборудовании при необходимости определенного изменения рабочих заделов в заданное время. Аналогично решается задача о нахождении оптимального процесса ликвидации срыва ритмичного производства.

При составлении графика запуска в производство определенного количества типов изделий на одном или нескольких единицах оборудования производство можно рассматривать как некоторую нелинейную динамическую систему, имеющую простую динамику, но много возможностей для выбора закона управления, определяющего характер нелинейности. Задача, прежде всего, состоит в выборе из всех возможных такого управления в системе, при котором ее движение (т. е. производство) окажется в определенном смысле оптимальным.

Без изучения статистики случайных явлений и строгого экономического анализа в каждом конкретном случае невозможно дать математическое выражение для критерия оптимальности процесса производства. Можно лишь утверждать, что в него с определенным весом и знаком входят такие показатели, как ритмичность производства, объем незавершенного производства, количество запусков, потребное для выполнения плана, запас устойчивости производства, который можно определить как максимальное время простоя (r) оборудования, не ведущее еще к срыву производства, простота расчетных формул, служащих для составления графика и определения партий запуска изделий в производство, которую можно измерять, скажем, количеством необходимого для расчета времени при имеющихся вычислительных средствах, и т. д.

Как оказалось [1], применение метода точечных преобразований дает эффективное решение задачи составления графика ритмичного производства произвольного количества типов изделий на одном оборудовании, удовлетворяющее всем вышеуказанным показателям оптимальности. В настоящей работе рассмотрена задача нахождения в соответствующем смысле оптимального графика ритмичного производства n типов изделий на одном оборудовании в том случае, когда при постоянном темпе потребления необходимо выполнить программу в течение фиксированного времени T при некоторых заданных начальных и конечных заделах. Такая задача возникает каждый раз, когда необходимо ритмично в течение заданного времени T_1 вывести производство на некоторый новый уровень (например, свернуть или расширить

производство, ликвидировать временный срыв рассчитанного с помощью [1] ритмичного графика и вывести производство к исходному режиму и т. д.). Особого внимания, очевидно, заслуживает случай ликвидации различного рода срывов, которые всегда возможны в реальных условиях.

Рассмотрение соответствующей динамической системы и применение метода точечных преобразований позволяет дать несколько алгоритмов для получения решений этой задачи, в той или иной мере удовлетворяющих намеченному критерию оптимальности, и дает возможность рассчитать то минимальное увеличение объема незавершенного производства и те минимальные дополнительные емкости складских помещений, которые необходимы, чтобы срыв производства, выражаящийся в конечном итоге в простое оборудования в течение времени, не превышающего некоторой зависящей от r (запаса устойчивости) величины, был ритмично ликвидирован путем оптимального количества „расширенных“ запусков за заранее заданное время T_1 .

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть, как и в [1], X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — количественные характеристики находящихся в данный момент в цехе изделий i -го типа, которые изготавливаются на одном оборудовании и непрерывно потребляются заказчиком с постоянным темпом потребления U_i , определяемым программой R_i на планируемый период времени T , т. е. $U_i = R_i/T$. Зная производительность оборудования по каждому из типов изделий, введем величины V_i — разности между производительностью и темпом потребления каждого из изделий, которые будут характеризовать скорость нарастания количества i -го изделия в цехе в те периоды времени, когда оно производится. Пусть далее τ_{ij} — времена переналадок оборудования с производства i -го на производство j -го изделий ($\tau_{ii} = 0$), а Q_i — определяемые лимитом незавершенного производства или условиями складирования в цехе максимально допустимые величины заделов по каждому из изделий.

Пренебрегая дискретностью изменения величин X_i , что может быть оправдано, в особенности, в случае обработки больших партий изделий, можно представить себе рассматриваемое производство как некоторую нелинейную динамическую систему и, вводя новое время $t = t_{ct}/T$, новые переменные $x_i = X_i/U_i T$ и параметры

$$p_{ij} = \tau_{ij}/T, \quad v_i = V_i/U_i, \quad q_i = Q_i/T U_i, \quad (1.1)$$

написать дифференциальные уравнения, характеризующие ее движение, в виде:

$$\dot{x}_i = \begin{cases} v_i & (\text{когда } i\text{-ое изделие производится}), \\ -1 & (\text{в противном случае}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.2)$$

Наряду с параметрами v_i удобно в дальнейшем рассматривать также параметры

$$u_i = v_i + 1, \quad z_i = 1/u_i, \quad (1.3)$$

имеющие очевидный физический смысл.

Задача составления оптимального ритмичного графика запуска в терминах этой динамической системы сводится к нахождению для нее такого управления, которое обеспечит в ней существование периодического (т. е. ритмичного) процесса, осуществляющего при заданном

запасе устойчивости (т. е. при заданной гарантии от срыва) выполнение программы за минимальное число запусков при условии минимального объема незавершенного производства (минимальных q_i), либо минимальной производительности (минимальных v_i), либо максимальных p_{ij} .

Для этого, прежде всего, должна быть решена задача выбора оптимального порядка обработки изделий, дающего минимальную сумму времен переналадок, которая сводится [1] к нахождению такого не содержащего диагональных элементов члена детерминанта $|p_{ij}|$, который даст минимальную сумму сомножителей. Считая эту задачу решенной и предполагая введенную нумерацию изделий дающей оптимальный порядок обработки, обозначим через

$$p_i = p_{i[i+1]_{\text{mod } n}}, \quad p = \sum_{i=1}^n p_i \quad (1.4)$$

времена переналадок, осуществляемых в этом порядке, и их суммарное время.

Фазовое пространство рассматриваемой системы представляет собой $(n+1)$ -слойный n -мерный „параллелепипед“, и задача нахождения периодических движений сводится к точечному преобразованию n -мерного пространства в себя. При отыскании простого периодического движения это преобразование имеет вид:

$$u_i t_i - \sum_{j=1}^n t_j = p + x_i'' - x_i^0 \quad (1.5)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

В инвариантной точке, где $x_i'' = x_i^0$, для длительностей запусков ритмичного производства получается единственное решение

$$t_i^* = \Delta_i / \Delta, \quad (1.6)$$

которое практически реализуемо, если детерминант системы (1.5)

$$\Delta = \left(1 - \sum_{i=1}^n z_i \right) \prod_{i=1}^n u_i \quad (1.7)$$

отличен от нуля и положителен. Так как

$$\Delta_i = p \prod_{j \neq i} u_j > 0, \quad (1.8)$$

то

$$t_i = \frac{p z_i}{1 - \sum_{j=1}^n z_j}. \quad (1.9)$$

В силу положительности Δ_i (1.8) условием существования и неустойчивости * предельного цикла системы с максимальными координатами

$$x_i^{**} = v_i t_i^* \quad (1.10)$$

является положительность Δ (1.7). Практически это условие определяет

* Устойчивость здесь и в дальнейшем понимается, как это пояснено в [1], по отношению лишь к определенным классам движений системы (классы K_1 и K_B), так как в системе (1.2) существуют траектории, для которых рассматриваемые здесь периодические движения не являются предельными.

возможность сколь угодно продолжительного ведения производства при заданных его параметрах (p, v_i) и ограниченных начальных заделах x_i^0 .

Следуя [1], из (1.10), задав запас устойчивости r , можно определить те минимальные величины

$$q_i^* = v_i t_i^* + r, \quad (1.11)$$

при которых в системе будет существовать единственный устойчивый простой предельный цикл с периодом

$$\Theta^* = \frac{p}{1 - \sum_{i=1}^n z_i}, \quad (1.12)$$

движение по которому будет соответствовать ритмичному производству, обеспечивающему за $k = E(1/\Theta^*)$ полных циклов (и, вообще говоря, один неполный цикл) запусков выполнение плана с заданным запасом устойчивости r и при минимальном объеме незавершенного производства.

Выражение (1.11) при заданных величинах q_i позволяет минимизировать v_i или максимизировать p_i . Пользуясь выражениями (1.9)–(1.11), нетрудно найти уравнения траектории устойчивого предельного цикла и составить график запуска в каждом конкретном случае.

Пусть теперь в наложенном вышеуказанным способом ритмичном производстве необходимо произвести какие-либо изменения, например, изменить запас устойчивости r , свернуть производство или, наоборот, вывести систему на ритмичное производство, определяемое выражениями (1.9) и (1.11), из некоторой точки \underline{x}_i , не лежащей на устойчивом предельном цикле, ликвидировать временный срыв ритмичного производства, произошедший по непредвиденным обстоятельствам из-за поломки оборудования, перебоя в подаче сырья или временного прекращения потребления, повысить производительность системы путем увеличения объема незавершенного производства и т. п. Пусть снова этот процесс требуется провести ритмично при максимально возможном запасе устойчивости, минимальном объеме незавершенного производства и в заданное время T_1 , используя минимальное изменение продолжительностей запусков.

Нетрудно видеть, что все эти задачи сводятся к нахождению такого в вышеуказанном смысле оптимального управления в системе (1.2), которое обеспечит ритмичный процесс, переводящий систему за время $\vartheta = T_1/T$ из некоторой точки $\{\underline{x}_i\}$ в заданную точку $\{\bar{x}_i\}$ фазового пространства. Таким образом, если \underline{x}_i —значения начальных рабочих заделов, то требуется ритмично организовать процесс производства так, чтобы в конце заданного промежутка времени ϑ величины заделов приобрели заданные значения \bar{x}_i . Без ограничения общности примем всюду в дальнейшем, что перед началом этого процесса оборудование наложено на производство первого изделия, а наладка оборудования в конце процесса не играет роли.

Замечание 1. Для простоты в дальнейшем будем считать, что фазовое пространство системы (см. (1.11)) не ограничено сверху. В этом случае нетрудно решить задачу о выделении в нем областей $M(t_i)$ ($t_i \geq t_i^*$) начальных состояний, из которых процесс с длительностями

запусков t_i может продолжаться сколь угодно долго. Очевидно, условие непринадлежности точки $\{\underline{x}_i^0\}$ множеству $M(t_i^*)$ свидетельствует о том, что при начальных заделах \underline{x}_i^0 производство не может быть продолжено и неминуемо пойдет к срыву.

2. ПРЯМОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РИТМИЧНОМ ИЗМЕНЕНИИ РАБОЧИХ ЗАДЕЛОВ

В терминах динамической системы (1.2) поставленная задача сводится к нахождению параметров t_i , k -кратного точечного преобразования n -мерного пространства в себя, соответствующего переводу изображающей точки системы из состояния $\{\underline{x}_i\}$ в состояние $\{x_i\}$. Это преобразование может быть записано в виде

$$\bar{x}_i - \underline{x}_i + \alpha = k \left(u_i t_i - \sum_{j=1}^n t_j - p \right) \quad (2.1)$$

$(i = 1, 2, \dots, n),$

где α — определяемая ниже постоянная, позволяющая провести процесс за время $\vartheta - \alpha$, пользуясь целым числом k полных запусков. Вводя в (2.1) новые переменные

$$\tau_i = t_i - t_i^* \quad (2.2)$$

— отклонения от основного ритмичного процесса, определяемого выражениями (1.9), и используя (1.5) при $x_i'' = x_i^0$, получим уравнения

$$u_i \tau_i - \sum_{j=1}^n \tau_j = \frac{\bar{x}_i - \underline{x}_i + \alpha}{k}, \quad (2.3)$$

определяющие при известных k и α искомые отклонения τ_i . Минимальное число k полных запусков, обеспечивающее выполнение задания за время $\vartheta - \alpha$, выбирается из условия (см. (1.12))

$$\frac{\vartheta}{k+1} < \Theta^* + \sum_{i=1}^n \tau_i \leq \frac{\vartheta}{k}, \quad (2.4)$$

которое для величины α дает выражение

$$\alpha = \vartheta - k \Theta^* - k \sum_{i=1}^n \tau_i. \quad (2.5)$$

Решая совместно (2.3) и (2.5) и учитывая (1.3), (1.9) и (1.12), получим выражения для длительностей запусков в рассматриваемом случае

$$t_i \equiv t_i^* + \tau_i = \frac{z_i}{k} (\vartheta + \bar{x}_i - \underline{x}_i), \quad (2.6)$$

которые определяют период движения

$$\bar{\Theta} = \Theta^* + \sum_{i=1}^n \tau_i = p + \frac{1}{k} \left[\vartheta \sum_{i=1}^n z_i + \sum_{i=1}^n z_i (\bar{x}_i - \underline{x}_i) \right]. \quad (2.7)$$

Обращая теперь в равенство правое условие (2.4) и пользуясь (1.12) и (2.7), найдем положительную целочисленную величину

$$k = E \left[\frac{\vartheta}{\Theta^*} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n z_i (\bar{x}_i - \underline{x}_i) \right]. \quad (2.8)$$

Очевидно, поставленную задачу следует решать, находя прежде всего число k из (2.8), затем длительности запусков из (2.6), и, наконец, используя (2.5) и (2.7), нетрудно найти время заключительного простоя α , которое равно дробной части аргумента (2.8), умноженной на p .

В тех случаях, когда эта величина, могущая приближаться к суммарному времени переналадок p ($0 \leq \alpha < p$), оказывается сравнительно большой и существенно ухудшает качество процесса, можно снизить простой, допустив в конце процесса запуск некоторого числа $m < n$ первых типов изделий. Соответствующее преобразование в этом случае может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i - \underline{x}_i + \beta &= k \left(u_i t_i - \sum_{j=1}^n t_j - p \right) + u_i t_i - \sum_{j=1}^m (t_j + p_j); \\ \bar{x}_l - \underline{x}_l + \beta &= k \left(u_l t_l - \sum_{j=1}^n t_j - p \right) - \sum_{j=1}^m (t_j + p_j) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad l = m+1, m+2, \dots, n)$$

и с учетом (2.2), (1.9) и (1.5) представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i - \underline{x}_i + \beta &= (k+1) \left(u_i \tau_i - \sum_{j=1}^n \tau_j \right) + \sum_{j=m+1}^n (t_j^* + \tau_j + p_j); \\ \bar{x}_l - \underline{x}_l + \beta &= k \left(u_l \tau_l - \sum_{j=1}^n \tau_j \right) - \sum_{j=1}^m (t_j^* + \tau_j + p_j) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad l = m+1, m+2, \dots, n),$$

где целочисленное k определяется из (2.8), а β — некоторая новая величина заключительного простоя, определяемая аналогично (2.5) выражением:

$$\begin{aligned} \beta &= \vartheta - k \left(\Theta^* + \sum_{j=1}^n \tau_j \right) - \sum_{j=1}^m (t_j^* + \tau_j + p_j) = \\ &= \vartheta - (k+1) \left(\Theta^* + \sum_{j=1}^n \tau_j \right) + \sum_{j=m+1}^n (t_j^* + \tau_j + p_j). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Решая совместно уравнения (2.10) и (2.11) при целочисленном m , подобранном так, чтобы величина β достигала минимального положительного значения, нетрудно получить длительности новых запусков:

$$\tilde{t}_i = t_i^* + \tilde{\tau}_i = \frac{z_i}{k+1} (\vartheta + \bar{x}_i - \underline{x}_i); \quad (2.12)$$

$$\tilde{t}_l = t_l^* + \tilde{\tau}_l = \frac{z_l}{k} (\vartheta + \bar{x}_l - \underline{x}_l) \quad (2.13)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad l = m+1, m+2, \dots, n).$$

Период ритмичного производства в этом случае

$$\tilde{\Theta} = \bar{\Theta} - \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^m z_j (\vartheta + \bar{x}_i - \underline{x}_i). \quad (2.14)$$

Однако рассмотренные решения будут справедливы (см. замечание 1) лишь в том случае, когда в течение всего процесса величины $x_j(t)$ будут положительными, т. е.

$$x_j(t) \in M(t_j). \quad (2.15)$$

Эти условия далеко не всегда оказываются выполненными, тем более, что рассмотренный процесс, вообще говоря, не ведется с максимальным запасом устойчивости.

3. ПРОЦЕССЫ С МАКСИМАЛЬНЫМ ЗАПАСОМ УСТОЙЧИВОСТИ

Для того, чтобы провести рассматриваемый процесс с максимальным запасом устойчивости, введем в рассмотрение n имеющих единичный наклон полупрямых P_i^0 ($i = 1, 2, \dots, n$), по которым движется система во время переналадок (на изделие с номером $i + 1$) при движении по устойчивому или неустойчивому предельным циклам.

Если участок циклической последовательности номеров изделий (длиною не более n номеров), начинающийся с номера $j \leq n$ и обрывающийся на номере $i \leq n$, взятый в прямом и обратном порядке, обозначить соответственно через n_j^i и \bar{n}_j^i , то координаты граничных точек полупрямых P_i^0 можно, согласно разделу 1, записать в виде *:

$$x_j^{0i} = \Theta^* - \sum_{l \in n_j^i} (t_l^* + p_l), \quad (3.1)$$

так как в этих точках неустойчивый предельный цикл системы (1.2) опирается на координатные гиперплоскости фазового пространства. Пользуясь для сокращения записи символом

$$\sum_{j=1}^n A_j \equiv A_1 = A_2 = \dots = A_n, \quad (3.2)$$

получим уравнения полупрямых P_i^0 в виде:

$$\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^{0i}) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.3)$$

Из изложенного в [1] и разделе 1 настоящей статьи легко усмотреть, что движение, проходящее во время переналадок по этим полупрямым или расположенному симметрично относительно их, обладает большим запасом устойчивости по сравнению с аналогичными, но смещеными движениями. Поэтому, чтобы обеспечить максимально возможный запас устойчивости и равномерную загрузку складов в течение всего процесса, следует из начального состояния $\{\underline{x}_i\}$ (предполагая в дальнейшем измененные (см. (2.2)) длительности запусков) кратчайшим путем попасть на „ближайшую“ ** из соответственно сдвинутых

* Запись $l \in n_j^i$ здесь и в дальнейшем означает, что индекс l пробегает все значения из множества n_j^i .

** Понятие «ближайшей» полупрямой переналадок зависит от того, разрешен ли только установленный порядок обработки изделий или же порядок обработки может выбираться произвольно. Во втором случае отыскание такой полупрямой представляет самостоятельную задачу.

полупрямых P_i^r , уравнения которых, согласно (2.2), (3.1) и (3.3), имеют вид:

$$\frac{n}{j=1} (x_j - x_j^{ri}) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.4)$$

где

$$x_j^{ri} = \Theta^* - \sum_{l \in n_j^i} (t_l^* + \tau_l + p_l) + \sum_{l=1}^n \tau_l. \quad (3.5)$$

Затем следует произвести аналогично разделу 2 k полных запусков, простой длительности β и выйти к концу промежутка времени ϑ в состояние $\{\bar{x}_i\}$.

Учитывая, что уравнение интегральной прямой, соответствующей запуску из состояния $\{x_j^{0m}\}$ m -го изделия в производство, имеет вид:

$$\frac{x_m^m - x_m^{0m}}{-v_m} = \frac{n}{j \neq m} (x_j^m - x_j^{0m}) \leq 0, \quad (3.6)$$

и полагая, что отыскивается „вход“ на полупрямую P_i^r за $l < n$ шагов в установленном порядке обработки, получим уравнения „входа“ в виде:

$$\frac{x_i^l - x_i^{l-1}}{-v_i} = \frac{n}{j \neq i} (x_j^l - x_j^{l-1}) \leq 0 \quad (i \in n_1^l), \quad (3.7)$$

$$\frac{n}{j=1} (x_j^l - x_j^l) \leq 0,$$

где при $k \leq l$

$$x_j^k - \sum_{i=1}^k p_i, \quad x_j = x_j^0, \quad x_j = x_j^l - \sum_{i=1}^l p_i. \quad (3.8)$$

— соответственно значение j -ой координаты в точке перед запуском $k+1$ -го изделия, в исходной и конечной точках.

Начальные точки с положительными координатами, из которых возможен l -шаговый процесс (3.7), образуют область N_1^{l+1} и, как нетрудно получить, удовлетворяют условиям

$$\frac{l}{j=1} (x_j + u_j \lambda_j - x_j^{rl}) = \frac{n}{i=l+1} (x_i - x_i^{rl}) \geq \sum_{j=1}^l (\lambda_j + p_j) \quad (3.9)$$

при любых $\lambda_j \geq 0$. Очевидно, N_1^{l+1} представляет собой часть $l+1$ -мерного линейного подпространства, а при $l=n-1$ — n -мерную часть первого листа фазового пространства системы (1.2).

При нахождении алгоритма „выхода“ с полупрямой P_m^r к конечной точке $\{\bar{x}_i\}$, очевидно, получится аналогичная (3.7) система уравнений

$$\frac{n}{j=1} (x_j^m - x_j^{rm}) \geq 0; \quad (3.10)$$

$$\frac{x_i^l - x_i^{l-1}}{-v_i} = \frac{n}{j \neq i} (x_j^l - x_j^{l-1}) \leq 0, \quad i \in n_{m+1}^s,$$

где при $k \in n_{m+1}^s$

$$\underline{x}_j^k + \sum_{i \in \bar{n}_{m+1}^k} p_i, \quad \bar{x}_j = \underline{x}_j^m + \sum_{i \in \bar{n}_{m+1}^s} p_i, \quad \bar{x}_j = \underline{x}_j^m \quad (3.11)$$

— соответственно значения j -ой координаты в точке перед запуском $k+1$ -го изделия, в исходной и конечной точках. Аналогично (3.9) область $\bar{N}_s^{m+1 \leftarrow m}$ s -того листа фазового пространства системы (1.2) определяется условиями

$$\overline{\underline{x}_j^m + u_j \bar{x}_j - \bar{x}_j} = \overline{\underline{x}_j^m - \bar{x}_j} \leq \sum_{i \in \bar{n}_s^{m+1}} (\bar{\lambda}_j + p_i) \quad (3.12)$$

при $\bar{\lambda}_j \geq 0$, и сказанное относительно уравнений (3.7) и (3.9) справедливо для (3.10) и (3.12), если иметь в виду обратный порядок применения преобразований.

Обозначая

$$a_i^l = \underline{x}_i^l - \underline{x}_i \leq 0 \quad (3.13)$$

и разрешая систему (3.7) относительно координат конечных точек $\{\underline{x}_j^k\}$ на каждом из l шагов, получим при любых $j \in n_1^l$, $k \in n_1^l$ и $\{\underline{x}_j\} \in N_1^{l \leftarrow l}$:

$$\underline{x}_j^k = \begin{cases} \underline{x}_j + \sum_{i \in \bar{n}_1^k} z_i (a_n^l - a_i^l) & \text{для } j \in n_{k+1}^l; \\ \underline{x}_j + \sum_{i \in \bar{n}_1^k} z_i (a_n^l - a_i^l) - (a_n^l - a_j^l) & \text{для } j \in n_1^k. \end{cases} \quad (3.14)$$

Аналогично обозначая

$$b_j^m = \underline{x}_j^m - \bar{x}_j, \quad (3.15)$$

получим для системы (3.10) при любых $j \in n_1^n$, $k \in \bar{n}_s^{m+1}$ и $\{\bar{x}_j\} \in \bar{N}_s^{m+1 \leftarrow m}$ решение в виде:

$$\underline{x}_j^k = \bar{x}_j + \sum_{i \in \bar{n}_s^{k+1}} z_i (b_m^m - b_i^m) - \begin{cases} 0 & \text{для } j \in n_{m+1}^k; \\ (b_m^m - b_j^m) & \text{для } j \in \bar{n}_s^{k+1}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Длительности запусков при движении, согласно уравнениям (3.7) и (3.10), и полные времена этих движений соответственно будут равны

$$\underline{t}_k = -z_k (a_n^l - a_k^l) \quad \text{для } k \in n_1^l; \quad \bar{t}_k = z_k (b_m^m - b_k^m) \quad \text{для } k \in n_{m+1}^s; \quad (3.17)$$

$$\underline{\vartheta}_1^l = \sum_{i \in n_1^l} [z_i (a_i^l - a_n^l) + p_i]; \quad \bar{\vartheta}_{m+1}^s = \sum_{i \in n_{m+1}^s} [z_i (b_i^m - b_m^m) + p_i], \quad (3.18)$$

где l и s — любые значения соответственно из n_1^{n-1} и n_{m+1}^{m-1} .

Для всего процесса, переводящего точку $\{\underline{x}_i\}$ в $\{\bar{x}_i\}$, получим следующее преобразование:

$$\bar{x}_i - \underline{x}_i + \beta = k \left(u_i t_i - \sum_{j=1}^n t_j - p \right) - \sum_{j \in n_{l+1}^m} (t_j + p_j) + \\ + \frac{i \cap n_{l+1}^m}{i} u_i t_i - \underline{\vartheta}_1^l - \bar{\vartheta}_{m+1}^s + \frac{i \cap n_1^l}{i} u_i \underline{t}_i + \frac{i \cap n_{m+1}^s}{i} u_i \bar{t}_i, \quad (3.19)$$

где, как и в дальнейшем, выражение $\frac{i \cap n_p^q}{i} = 1$, если $i \in n_p^q$, и равно нулю в противном случае,

$$\beta = \vartheta - k \left(\Theta^* + \sum_{j=1}^n \tau_j \right) - \underline{\vartheta}_1^l - \bar{\vartheta}_{m+1}^s - \sum_{j \in n_{l+1}^m} (t_j + p_j), \quad (3.20)$$

а k — максимальное целое число, оставляющее выражение (3.20) положительным. Подставляя величину β в (3.19) и используя (1.9), (1.12) и (2.2), для определения времен τ_i получим систему уравнений ($i \in n_1^n$):

$$\bar{x}_i - \underline{x}_i + \vartheta - \left(k + \frac{i \cap n_{l+1}^m}{i} \right) \Theta^* = \left(k + \frac{i \cap n_{l+1}^m}{i} \right) u_i \tau_i + \\ + \frac{i \cap n_1^l}{i} u_i \underline{t}_i + \frac{i \cap n_{m+1}^s}{i} u_i \bar{t}_i, \quad (3.21)$$

которая должна решаться в совокупности с уравнениями (3.5), (3.9), (3.12), (3.13), (3.15), (3.17) и (3.21).

Несмотря на то, что для этой системы, согласно (3.9) и (3.12),

$$\tau_j = \underline{x}_{j-1} - \underline{x}_j - \underline{t}_j^* - p_j \quad \text{при } j \in n_{l+1}^{n-1}; \quad (3.22)$$

$$\tau_j = \bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j - \bar{t}_j^* - p_j \quad \text{при } j \in n_{s+1}^{m-1},$$

решение ее затруднительно, так как неизвестны заранее значения l , m и s .

Можно значительно упростить задачу, применяя следующие алгоритмы, каждый из которых справедлив в некоторой области значений \underline{x}_i и \bar{x}_i .

Положим, например, в (3.7)–(3.21) $l = s = n - 1$ и $m = n$. Заметим, что нет никакой потери в том, что применяется „вход“ на полупрямую P_{n-1}^* за $n - 1$ шаг, так как если этот процесс в действительности может быть сделан короче, скажем, за $l_1 < n - 1$ шагов при „входе“ на $P_{l_1}^*$, то остальные $n - 1 - l_1$ шагов, в силу единственности движения, окажутся стандартными запусками искомого ритмического процесса. То же самое справедливо и для процесса „выхода“ с полупрямой P_n^* . Тогда для $\{x_i\} \in N_1^{n-1, n-1}$ и $\{\bar{x}_i\} \in \bar{N}_{n-1}^{1, n-1}$, согласно (3.21), (3.17), (3.15), (3.13) и (3.5), получим систему уравнений:

$$ku_i \tau_i + \sum_{j=1}^{n-1} \tau_j = \left(1 - \frac{z_n}{k-1} \right) [\vartheta + \bar{x}_n - \underline{x}_n - (k+1)\Theta^*] \quad (i \in n_1^{n-1}); \quad (3.23)$$

$$\tau_n = \frac{z_n}{k+1} [\vartheta + \bar{x}_n - \underline{x}_n - (k+1)\Theta^*],$$

для которой аналогично (1.9) получим решение в виде:

$$\tau_i = z_i \frac{\left(1 - \frac{z_n}{k+1}\right) [\vartheta + \bar{x}_n - \underline{x}_n - (k+1)\Theta^*]}{k + \sum_{j=1}^{n-1} z_j} \quad (i \in n_1^{n-1}); \quad (3.24)$$

при этом период ритмичного процесса

$$\bar{\Theta} = \Theta^* + \sum_{j=1}^n \tau_j = \Theta^* + \frac{[\vartheta + \bar{x}_n - \underline{x}_n - (k+1)\Theta^*] \left(\sum_{j=1}^{n-1} z_j + \frac{k}{k+1} z_n \right)}{k + \sum_{j=1}^{n-1} z_j}. \quad (3.25)$$

Учитывая, что, согласно (3.18) и (3.5),

$$\underline{\vartheta}_1^{n-1} + \bar{\vartheta}_1^{n-1} = (\underline{x}_n - \bar{x}_n + \bar{\Theta}) \sum_{i=1}^{n-1} z_i + \sum_{i=1}^{n-1} z_i (\bar{x}_i - \underline{x}_i) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} p_j, \quad (3.26)$$

для определения k из (3.20) получим выражение:

$$k = E \left[\frac{p_n}{p} + \frac{\vartheta}{\Theta^*} - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n z_i (\bar{x}_i - \underline{x}_i) - 2 \right]. \quad (3.27)$$

Можно использовать n -шаговые процессы „входа“ на полупрямую P_n^* и „выхода“ с нее, у которых имеется по одному запуску с нулевым временем (соответственно $t_\alpha = 0$ и $\bar{t}_\beta = 0$). Тогда для $\{\underline{x}_j\} \in N_{\alpha+1}^{\alpha-1-n}$ и $\{\bar{x}_j\} \in \bar{N}_{\beta-1}^{\beta+1-n}$ из (3.21) с помощью (3.17), (3.15), (3.13) и (3.5) получим преобразование

$$\begin{aligned} k u_i \tau_i + \sum_{j \in n_\alpha^n} \tau_j - \sum_{j \in n_\beta^n} \tau_j &= \bar{x}_\beta - \underline{x}_\alpha + \vartheta - k \Theta^* - \\ &- \sum_{j \in n_\alpha^n} (t_j^* + p_j) + \sum_{j \in n_\beta^n} (t_j^* + p_j), \end{aligned} \quad (3.28)$$

уравнения областей существования которого аналогично (3.9) могут быть записаны при $\underline{\lambda}_j, \bar{\lambda}_j, \underline{x}_j, \bar{x}_j \geq 0$ в виде:

$$N_{\alpha+1}^{\alpha-1-n}: \quad \underline{x}_j + u_j \underline{\lambda}_j - x_j^{\alpha-n} = \underline{x}_\alpha - x_\alpha^{\alpha-n} \geq \sum_{j \neq \alpha} (\underline{\lambda}_j + p_j); \quad (3.29)$$

$$\bar{N}_{\beta-1}^{\beta+1-n}: \quad \bar{x}_j + u_j \bar{\lambda}_j + x_j^{\beta-n} = x_\beta^{\beta-n} - \bar{x}_\beta \leq \sum_{j \neq \beta} (\bar{\lambda}_j + p_j). \quad (3.30)$$

Наиболее простым является случай $\alpha = \beta = a$, когда для (3.28) получаем:

$$\tau_i = \frac{z_i}{k} (\bar{x}_a - \underline{x}_a + \vartheta - k \Theta^*); \quad (3.31)$$

$$\bar{\Theta} = \Theta^* + \sum_{j=1}^n \tau_j = p + \frac{1}{k} (\bar{x}_a - \underline{x}_a + \vartheta) \sum_{j=1}^n z_j. \quad (3.32)$$

Суммарные времена „входа“ и „выхода“ относительно полупрямой P_n^* , согласно (3.18), будут равны

$$\underline{\vartheta}_{1a}^n + \bar{\vartheta}_{1a}^n = 2p + (\underline{x}_a - \bar{x}_a) \sum_{j=1}^n z_j + \sum_{j=1}^n (\bar{x}_j - \underline{x}_j) z_j. \quad (3.33)$$

Аналогично предыдущему в этом случае получим следующие выражения для β и k :

$$\beta = p \frac{\vartheta}{\Theta^*} - (k+2)p - \sum_{j=1}^n z_j (\bar{x}_j - \underline{x}_j), \quad (3.34)$$

$$k = E \left[\frac{\vartheta}{\Theta^*} - 2 - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n (\bar{x}_j - \underline{x}_j) z_j \right]. \quad (3.35)$$

В этих алгоритмах, первый из которых может быть назван алгоритмом „со стандартным запуском“, а второй — „с холостым запуском“, как и ранее, нахождение величин τ_i должно начинаться с подсчета величин k и β . Очевидно, роль полупрямой P_n^* может выполнять любая из полупрямых, и если номер запускаемого первым в производство изделия не играет существенной роли, то разумнее по возможности начинать и кончать процесс производством, соответственно, наименее и наиболее обеспеченного изделия.

4. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Рассмотренные в разделе 3 алгоритмы, вообще говоря, связаны с большими расчетами, так как могут приводить к перебору вариантов потому, что в них ищется „вход“ и „выход“ на полупрямые P_i^* , величины смещения которых, определяемые через τ_i , заранее неизвестны. Для того, чтобы, не теряя заметно в запасе устойчивости, существенно упростить задачу нахождения оптимальных процессов „входа“ и „выхода“, целесообразно вести их относительно полупрямых P_i^0 (3.3). С целью использования полученных в разделе 3 выражений (3.7)–(3.18) положим в них $\tau_j = 0$ для всех j , т. е. всюду для любых i, j вместо величин x_i^{0j} из (3.5) подставим величины x_j^{0i} из (3.1). Будем отмечать полученные таким образом выражения индексом нуль.

На первом этапе по заданным \underline{x}_j и \bar{x}_j с помощью уравнений (3.9)⁰ и (3.12)⁰ следует отыскать такие области $N_1^{0l} \ni \{x_j\}$ и $\bar{N}_{m+1}^{m+1,0m} \ni \{x_j\}$, которые в определяемых ими множествах n_1^l и n_{m+1}^s имеют минимальное число элементов. (Заметим, что значение s может быть фиксировано, если требуется закончить процесс производством s -ого изделия, или выбираться свободно.)

Далее, с помощью уравнений (3.7)⁰–(3.18)⁰ должны быть определены для процессов „входа“ на P_l^0 и „выхода“ с P_m^0 величины x_j^{0k} , \bar{x}_j^0 , \underline{x}_j^0 , t_j^0 , \bar{t}_j^0 , $\underline{\vartheta}_1^{0l}$ и $\bar{\vartheta}_{m+1}^{0s}$. Затем по точке $\{\hat{x}_i^0\}$ на полупрямой P_m^0 должна быть определена точка $\{\hat{x}_i^0\}$ на полупрямой P_l^0 как результат обратного преобразования со стандартными временами запусков (1.6) t_i^* при $i \in \hat{n}_m^l$ (для определения \hat{x}_i^0 можно использовать

уравнения $(3.10)^0$, $(3.11)^0$ для этих значений i при замене в них \tilde{x}_j на \hat{x}_j^0 и \bar{x}_j на \tilde{x}_j^0). Полное время этого движения

$$\hat{\vartheta}_l^{m*} = \sum_{j=l+1}^m (t_j^* + p_j). \quad (4.1)$$

Наконец, пользуясь уравнениями $(2.1) - (2.8)$, следует осуществить преобразование точки $\{\tilde{x}_j^0\}$ в $\{\hat{x}_j^0\}$ за время $\vartheta_H = \vartheta - \underline{\vartheta}_1^{0l} - \bar{\vartheta}_{m+1}^{0s} - \hat{\vartheta}_l^{m*}$ и найти число

$$k = E \left[\frac{\vartheta_H}{\Theta^*} - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^n z_j (\hat{x}_j^0 - \tilde{x}_j^0) \right] \quad (4.2)$$

циклов, длительности

$$t_i = \frac{z_i}{k} (\vartheta_H + \hat{x}_i^0 - \tilde{x}_i^0) \quad (4.3)$$

запусков и период ритмичного процесса

$$\bar{\Theta} = p + \frac{1}{k} \left[\vartheta_H \sum_{i=1}^n z_i + \sum_{i=1}^n z_i (\hat{x}_i^0 - \tilde{x}_i^0) \right] \quad (4.4)$$

при величине α , равной дробной части аргумента (4.2), умноженной на p .

5. ЗАДАЧА О ЛИКВИДАЦИИ СРЫВОВ ПРОИЗВОДСТВА

Пусть к тому моменту времени, когда представляется возможным приступить к ликвидации срыва ритмичного производства, рассчитанного с помощью [1] и раздела 1, состояние рабочих заделов характеризуется точкой $\{\underline{x}_j\}$ в фазовом пространстве системы (1.2). Процесс ликвидации срыва необходимо провести ритмично, по возможности с максимальным запасом устойчивости, с минимальными увеличениями длительностей запусков и в течение времени, не превосходящее заданное время ϑ .

Тогда рассмотренный ниже удовлетворяющий указанным требованиям алгоритм решает эту задачу в случае, если по крайней мере для одной из точек справедливо (см. (3.9)⁰):

$$\left\{ \underline{x}_j - \frac{m \alpha n_2^n}{m} p_{m-1} \right\} \in N_m^{l0l}; \quad m, l \in n_1^n \quad (p_0 \equiv p_n), \quad (5.1)$$

а получаемая ниже точка $\{\tilde{x}_j^{0l}\}$ удовлетворяет условию

$$\{\tilde{x}_j^{0l}\} \in M(t_i), \quad (5.2)$$

где t_i — времена вычисляемых ниже длительностей отдельных запусков (см. замечание 1).

Тогда прежде всего следует из областей N_m^{l0l} (5.1), пользуясь условием (3.9)⁰, выбрать такую область, у которой множество n_m^l содержит минимальное количество элементов. Затем, пользуясь уравнениями $(3.7)^0$, $(3.8)^0$, $(3.14)^0$, $(3.16)^0$ и $(3.17)^0$, нужно найти процесс „входа“ на полупрямую P_i^0 , точку $\{\tilde{x}_j^{0l}\}$ на ней

$$\tilde{x}_j^{0l} = \sum_{i \in n_m^l} [z_i (a_{l+1}^{0l} - a_i^{0l}) - p_i] + \begin{cases} x_j & \text{для } j \in n_{l+1}^{m-1}; \\ -a_{l+1}^{0l} + x_j^{0l} & \text{для } j \in n_m^l \end{cases} \quad (5.3)$$

и общее время „входа“

$$\tilde{\vartheta}_m^{0l} = \sum_{i \in n_m^l} [p_i - z_i (a_{l+1}^{0l} - a_i^{0l})]. \quad (5.4)$$

Применяя теперь k -кратное преобразование, переводящее изображающую точку системы в течение времени

$$\vartheta_l = \vartheta - \tilde{\vartheta}_m^{0l} \quad (5.5)$$

из состояния (5.3) в состояние перед запуском $l+1$ -го изделия на предельном цикле системы, характеризуемое координатами

$$\tilde{x}_j^{0l} = x_j^{0l} + r \quad . \quad (5.6)$$

(см. (1.11) и (3.1)), для величины

$$\gamma = \tilde{x}_j^{0l} - x_j^{0l} = r + a_{l+1}^{0l} + \sum_{i \in n_m^l} [z_i (a_{l+1}^{0l} - a_i^{0l}) - p_i] \quad (5.7)$$

после использования (1.5) и (2.2) получим:

$$u_i \tau_i - \sum_{j=1}^n \tau_j = \frac{\gamma}{k}, \quad i \in n_1^n. \quad (5.8)$$

Уравнения (5.8), аналогично (1.9), дают значения

$$\tau_i = \frac{z_i \gamma}{k \left(1 - \sum_{j=1}^n z_j \right)} \quad (5.9)$$

как решение поставленной задачи, если целочисленное k , выбираемое здесь также из условия (2.4) (в котором вместо ϑ должна стоять величина ϑ_l из (5.5)), равно

$$k = E \left(\frac{\vartheta_l}{\Theta^*} - \frac{\gamma}{p} \sum_{j=1}^n z_j \right). \quad (5.10)$$

В результате по истечении времени $\tilde{\vartheta}_m^{0l} + k \tilde{\Theta}$, где

$$\tilde{\Theta} = \Theta^* + \frac{\gamma \sum_{j=1}^n z_j}{1 - \sum_{j=1}^n z_j} \quad (5.11)$$

— период ритмичного процесса ликвидации срыва, система вновь будет двигаться по предельному циклу, рассмотренному в разделе 1 и соответствующему оптимальному ритмичному процессу производства.

Замечание 2. Очевидно, рассмотренный процесс ликвидации срыва производства требует для своей реализации некоторых дополнительных

возможностей складирования изделий (x_i становится больше q_i^* из (1.11)), которые нетрудно рассчитать при заданных x_i и ϑ .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Алексеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, 706 (1960).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
11 октября 1961 г.

POINT TRANSFORMATION METHOD IN THE PROBLEM OF OPTIMUM SCHEDULE COMPOSITION FOR RHYTHMICAL PRODUCTION OF ARBITRARY NUMBER OF ARTICLES USING ONE AND THE SAME EQUIPMENT WHEN CHANGING PRODUCTION LOTS

A. S. Alekseev

Presentation of production process in the form of motions of some dynamic system and using the point transformation method reveal the possibility to give several algorithms for solving the problem of composition in some degree, optimum schedule for the rhythmical production of arbitrary number of articles using one and the same equipment at the necessity of certain change of production lots at the given time. By analogous way the problem has been solved of the optimum process of the reestablishing of the rhythmical production after any stoppage.

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИЯХ, РЕАЛИЗУЕМЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ТИПА

М. Я. Эйнгорин

Рассматриваются алгоритмы выполнения основных арифметических операций для последовательной электронной вычислительной машины с произвольным положением фиксированной запятой. В качестве двоичного реверсивного счетчика при реализации алгоритмов используется сдвиговый динамический регистр, который по своим функциям может быть назван управляющим. Введение в арифметическое устройство такого регистра и разработка специальных алгоритмов выполнения операций позволило довольно просто изменять, в зависимости от решаемой задачи, фиксированное положение запятой в машине.

Наряду с большими электронными вычислительными машинами параллельного типа, которые чаще всего имеют плавающую запятую в арифметическом устройстве, большое распространение получили значительно более простые по конструкции последовательные машины с фиксированной запятой. При этом некоторые из этих машин имеют несколько возможных фиксированных положений запятой, которая в зависимости от решаемой задачи устанавливается в машине перед началом ее работы. Последний вариант выполнения арифметического устройства машины требует других алгоритмов выполнения таких операций, как умножение и деление, а также операций перевода из десятичной системы счисления в двоичную и обратно, чем в случае фиксированной запятой, расположенной перед кодом числа. Соответственно меняется и схема арифметического устройства.

В настоящей работе рассматриваются алгоритмы выполнения операций умножения, деления, перевода из десятичной системы счисления в двоичную и обратно, а также ряда других операций для случая представления отрицательных чисел в прямых кодах с дробной и целой частью трехадресной машины.

Введение в число арифметических операций, выполняемых вычислительной машиной, операций ввода и вывода кодов чисел с одновременным переводом их из одной системы счисления в другую дает возможность избавиться от специальных подпрограмм перевода, позволяет увеличить скорость ввода информации в машину, сделать ввод в машину не зависящим от состояния основного запоминающего устройства, при одной постоянной иметь до $n - 1$ положений запятой в коде числа и сократить сдвиговый регистр, стоящий во вводном и выводном устройстве машины до линии одной тетрады.

При разработке алгоритмов арифметических операций было учтено, что они должны обладать следующими свойствами: 1) все алгоритмы должны требовать для своей реализации, по возможности, одного и того же оборудования, входящего в арифметическое устройство машины; 2) положение запятой после выполнения операций в регистре результата должно совпадать с положением запятой в регистрах исходных чисел; 3) желательно иметь возможность простыми способами изменять положение запятой в машине перед решением в зависимости

от конкретной задачи; 4) при всех преобразованиях двоичного кода во время выполнения операций необходимым требованием является сохранение цифровой части кода числа.

1. АЛГОРИТМЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Рассмотрим алгоритмы выполнения указанных выше операций. Для дальнейшего заметим, что умножение кода числа, хранящегося в регистре, на любую целую положительную (отрицательную) степень α основания системы счисления g эквивалентно сдвигу кода числа в регистре при заданном положении запятой на α разрядов влево (вправо) или переносу запятой в этом регистре на α разрядов вправо (влево) в случае, если код числа в регистре не сдвигается.

Перевод кодов чисел из десятичной системы счисления в двоичную. Рассмотрим число a , представленное в двоично-десятичном коде:

$$a = \sum_{i=1}^n a_i 10^{k-i} = a_1 a_2 \dots a_d \dots a_{k-1} a_k, a_{k+1} \dots a_q \dots a_{n-1} a_n$$

и хранящееся в регистре рис. 1, где a_i — двоичная тетрада. Пусть

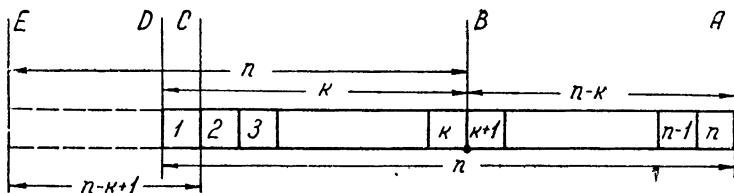


Рис. 1.

$$b = \sum_{i=1}^m b_i 2^{l-i} = b_1 b_2 \dots b_{l-1} b_l, b_{l+1} \dots b_{m-1} b_m \quad (1.1)$$

— двоичное выражение числа a , которое должно быть получено в двоичном регистре (рис. 2),

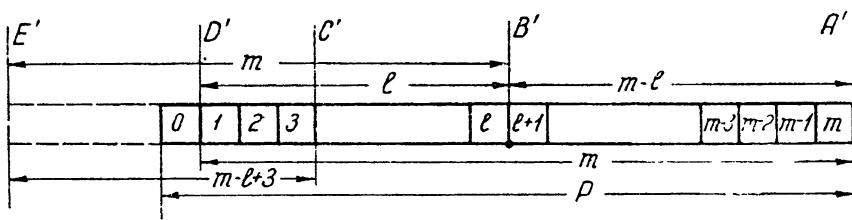


Рис. 2.

$$d = 00 \dots 010 \dots 00 \quad (1.2)$$

— код, характеризующий положение запятой в двоичном регистре (рис. 2), соответствующий положению запятой в десятичном регистре (рис. 1),

$$e^{(i)} = e_1^{(i)} e_2^{(i)} \dots e_{l-1}^{(i)} e_l^{(i)} e_{l+1}^{(i)} \dots e_{m-1}^{(i)} e_m^{(i)} \quad (1.3)$$

— вспомогательный управляющий код *, формируемый в процессе выполнения операции.

Для упрощения записи чисел, подлежащих вводу, алгоритм перевода составим так, что нули, стоящие перед первой и после последней значащей цифры переводимого десятичного числа соответственно в его целой и дробной части, писать и вводить в регистр (см. рис. 1) не будем. При этом тетрадами F и G , не входящими в десять тетрад, обозначающие цифры от 0 до 9, и воспринимаемыми машиной как управляющие коды, будем обозначать положение запятой и конец переводимого числа. Тогда, на основе сказанного, число a (рис. 1) в случае, если

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{d-1} = a_d = 0, \quad a_{q+1} = a_{q+2} = \dots = a_{n-1} = a_n = 0, \quad (1.4)$$

может быть записано в виде, данном** на рис. 3.

Перевод числа в двоичный код может быть разбит на ряд этапов, которые мы и рассмотрим. Предварительно предположим, что число, записанное в регистре (рис. 3), целое и

$$a' = a10^{n-k}. \quad (1.5)$$

1. Перевод *** целого числа a' в двоичную систему счисления до тетрады F . При приходе очередной тетрады $\lambda_h = \begin{cases} a_h \\ F \end{cases}$ и $h = d + 1, d + 2, \dots, k - 1, k$

$$\downarrow A_1(\lambda_h)p_2(\lambda_h = a_h; \quad \xrightarrow{\lambda_h = F} B_3(h) \left\{ \begin{array}{l} C_t(h) p_6 \\ D_t(h) \end{array} \right. , \quad (1.6)$$

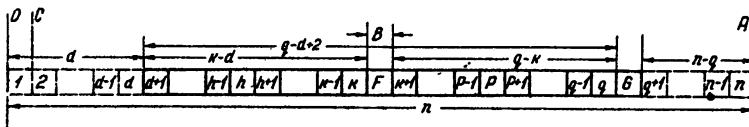


Рис. 3.

где $A(\lambda_h)$ — оператор принятия очередной вводимой тетрады; $B(h) \sim c_{h+1} + a_h = w_h$; $C(h) \sim 2w_h + 2^3w_h = c_h$; $D(h) \sim e^{(h)} = d$;

c_{h-1} , c_h и w_h — результат промежуточных вычислений при $c_a = 0$.

2. Продолжение перевода по G . При приходе очередной тетрады

$$\lambda_p = \begin{cases} a_p \\ G \end{cases} \quad \text{и} \quad p = k + 1, k + 2, \dots, q - 1, q$$

* Код вводится в управляющий регистр, обозначенный во втором разделе через P_4 . ** Регистр (рис. 3) может быть пятидорожечной перфорированной лентой телефайпа, с которой тетрады последовательночитываются при помощи фотоэлементов и вводятся в машину, начиная со старшей. Любая из тетрад F или G (например, G) может иметь два значения G_1 и G_2 , где G_1 означает положительное, а G_2 — отрицательное число. В случае использования пятидырочной перфорированной ленты четыре дорожки могут означать тетрады чисел (от 0 до 9), а наличие пробивки на пятой дорожке может означать один из 16 возможных управляющих кодов.

*** Для описания алгоритмов воспользуемся операторной записью согласно [3]. При этом обозначим через $\begin{cases} Q \\ G \end{cases}$ одновременность выполнения операторов Q и G , а через $\xrightarrow{\delta}$ рез $B(\beta = \gamma; \beta \neq \gamma)$ — переход к выполнению оператора δ при удовлетворении условия $\beta = \gamma$.

$$\downarrow \downarrow \overset{2}{A}_7(\lambda_p) p_8 (\lambda_p = a_p; \quad \overset{13}{\overleftarrow{\lambda_p = G}}) B_9(p) \begin{cases} C_{10}(p) p_{12} \\ E_{11}(p) \end{cases},$$

где оператор $E(p) \sim e(p) = 2^{-3(p-k)} d$ и $c = c_k$.

3. Окончание перевода a' с учетом (2.4) при $r = q-1, \dots, n-1, n$:

$$\downarrow \downarrow \begin{cases} C_{13}(r) \\ E_{14}(r) p_{15} (r-k < n-k; \quad r-k \xrightarrow{16} n-k) \end{cases}$$

где начальное значение $c = c_q$.

Третий этап завершает выполнение алгоритма перевода целого числа a' в двоичную систему:

$$b' = b'_1 b'_2 \dots b'_{l-1} b'_l b'_{l+1} \dots b'_{m-1} b'_m = \sum_{i=1}^n a_i (1010)^{n-i}.$$

При этом порядок управляющего кода изменяется за все три этапа на величину $(n-k)$.

4. Умножение b' на величину $\beta = 0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_l \dots \beta_{m-1} \beta_m = (4/5)^n$, где $\beta_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$:

$$\downarrow \downarrow \begin{cases} F_{16}(i) \\ g_{17}(i) p_{18} (i < m; \quad i = m) \end{cases}$$

Здесь оператор $F(i) \sim 2^{-1} w_i + b' \beta_i = w_{i-1}; g(i) \sim e^{(i)} = 2^{(i)}; i = 1, 2, \dots, m$; $w_1 = 0$ и $w_m = b''$. Умножение b' на β эквивалентно переносу запятой в регистре (рис. 1) в точку D или в регистре (рис. 2) в точку D' , так как

$$b'' = b' 10^{-n} 2^m = b' 2^{-3n} (4/5)^n 2^m = \beta b' 2^{-3n+m} = b' \beta, \quad (1.7)$$

где при $-3n+m=0$

$$m = 3n. \quad (1.8)$$

Т а б л и ц а 1

n	β
1	0,8000000000000000
5	0,3276800000000000
10	0,1073741824000000
15	0,0351843719580000
20	0,01152921474542

При этом умножение кода на 10^{-n} означает перенос запятой в точку D , умножение на 2^m — сдвиг кода числа в регистре с новым положением запятой. Величины β для некоторых значений числа разрядов регистра n (см. рис. 1) даны в таблице 1. Из формулы (1.8) видно, что число разрядов двоичного регистра должно быть не менее $3n$. С учетом множителя β это число разрядов может быть несколько увеличено.

5. Нахождение числа $[b]_2 = [a]_{10}$:

$$\downarrow \downarrow \begin{cases} H_{19}(i) \\ R_{20}(i) p_{21} (i < k; \quad i = k) \end{cases}$$

где оператор $H(i) \sim w_{i-1} + 2^{-2} w_{i-2} = w_i; R(i) \sim e^{(i)} = 2^{3i} d; i = 1, 2, \dots, k$; $w_0 = b''$ и $w_k = b$. Последнее легко показать, если учесть (1.5), (1.7) и то обстоятельство, что $[5/4]_{10} = [1,01]_2$. В этом случае

$$b = b'' 10^{-(n-k)} 10^n 2^{-l} = b'' 10^k 2^{-l} = b'' (4/5)^k \quad (1.9)$$

при $3l - k = 0$ или

$$l = 3k. \quad (1.10)$$

Из (1.8) и (1.10) легко видеть, что каждому положению запятой k в десятичном числе соответствует положение запятой в двоичном числе, определяемое соотношением (1.10) или равенством

$$m - l = 3(n - k). \quad (1.11)$$

Таким образом, для рассмотренного алгоритма 1) число разрядов в двоичном регистре определяется формулой (1.8); 2) изменению положения запятой на один разряд в десятичном числе соответствует изменение положения запятой в двоичном числе на три разряда; 3) для операции перевода требуется всего одна константа β , не зависящая от положения запятой в регистре двоичного числа; 4) наибольшее время выполнения операции без времени ожидания прихода очередной тетрады для последовательной машины $T = 2m^2\tau$, где τ — период следования тактовых импульсов в машине. На практике из $n-1$ возможных положений запятых оказывается достаточным выбрать $3 \div 5$ положений.

Перевод кодов чисел из двоичной системы счисления в десятичную. Рассмотрим двоичное число (1.1), содержащееся в двоичном регистре (см. рис. 2), код положения запятой (1.2) и вспомогательный управляющий код (1.3). Перевод может быть разбит так же, как и выше, на несколько этапов.

1. Умножение (1.1) на постоянную (1.6):

$$\downarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1(i) \\ W_2(i) p_3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \xleftarrow[1]{\quad} \\ \xrightarrow[4]{\quad} \end{array} \quad (i < m; \quad i = m),$$

где оператор $W(i) \sim e^{(i)} = 2^{-i}$; $i = 1, 2, \dots, m$; $w_1 = 0$ и $w_m = b\beta = b^*$. Как и ранее, выполнение этого умножения переводит запятую из точки B' в точку E' (см. рис. 2), ввиду того, что

$$b^* = b 10^{-n} 2^m = b (4/5)^n 2^{-3n+m} = b (4/5)^n = b\beta,$$

где $-3n+m=0$ или $m=3n$.

2. Выделение старшей целой тетрады:

$$\downarrow \downarrow \left\{ \begin{array}{l} H_4(i) \\ R_5(i) p_6 \end{array} \right. \begin{array}{l} \xleftarrow[4]{\quad} \\ \xrightarrow[7]{\quad} \end{array} \quad (i < n-k+1; \quad i = n-k+1), \quad (1.12)$$

где $i=1, 2, \dots, n-k+1$; $w_1=b^*$ и $w_{n-k+1}=b^{**}$. Данная операция переводит запятую из точки E' в точку C' двоичного регистра (см. рис. 2), ибо выполнение (1.12) эквивалентно выполнению операции:

$$b^{**} = b^* 10^{n-k+1} 2^{-(m-l+3)} = b^* 2^{3(n-k+1)-(m-l+3)} (5/4)^{n-k+1} = b^* (5/4)^{n-k+1},$$

где $3(n-k+1)-(m-l+3)=0$ или $3(n-k)=m-l$, что выполняется благодаря условиям (1.8), (1.10) и (1.11).

3. Выделение целых частей двоичного числа. Пусть $a_i=b_0^i, b_1^i, b_2^i, b_3^i, 0, \dots, 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) — целая часть (тетрада)^{*} двоичного кода, где b_j^i — содержимое j ячейки двоичного регистра (рис. 2), $j=0, 1, 2, 3$. Когда запятая переведена в точку C , то

* Так как тетрада десятичного числа имеет четыре двоичных разряда, то для n разрядов десятичного числа следует выбрать $P = 3n + 1$ -разрядный двоичный регистр, а в случае $P=3n$ — целую тетраду будем брать в регистре из ячеек $b_m b_1 b_2 b_3$, если он рециркуляционный.

$$\downarrow \downarrow \quad V_7(i) \left\{ \begin{array}{l} C_8(i) \\ N_9(i) p_{10} \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad 7 \quad} \\ \xleftarrow{3i < m; \quad 3i = m} \end{array},$$

где оператор $V(i) \sim b_{i-1} - a_{i-1} = w_i$ — выборки тетрады с ожиданием окончания ее печати выводным устройством, $N(i) \sim e^{(i)} = 2^{3i}$; $i=1,2,\dots,n$ и $b_1^{**} = b^{**}$.

Выполненный алгоритм является алгоритмом перевода двоичного числа в десятичное, который имеет вид:

$(\dots (\dots ((b^{**} - a_1) 1010 - a_2) 1010 - \dots - a_k) 1010 - \dots - a_{n-1}) 1010 - a_n$ и

$$a = \sum_{i=1}^n a_i 10^{n-i}.$$

Запятая в полученном целом числе ставится в соответствии с формулой (1.10).

Время выполнения операции без учета времени выборки целой тетрады и ее печати $T = m(5n - k + 1)$. Наибольшее время выполнения операции $T_{\max} \cong m(m + 2n)$ — меньше времени двух умножений.

Деление. Для выполнения операции деления использован известный алгоритм так называемого деления без восстановления остатка. При этом будем пользоваться следующими обозначениями:

$$a = a_1 a_2 \dots a_l, a_{l+1} \dots a_{m-1} a_m \quad (1.13)$$

для делимого,

$$b = b_1 b_2 \dots b_l, b_{l+1} \dots b_{m-1} b_m \quad (1.14)$$

для делителя,

$$c = c_1 c_2 \dots c_l, c_{l+1} \dots c_{m-1} c_m \quad (1.15)$$

для частного, (1.2) для кода положения запятой и (1.3) для вспомогательного кода. Алгоритм выполнения операции состоит из двух этапов.

1. Подготовка деления (определение места старшего разряда частного):

$$\downarrow \begin{cases} \overset{1}{\overleftarrow{Q_1(i) p_2(a - 2^i b)}} \geq 0; \quad a - 2^i b \overset{7}{<} 0 \\ I_3(i) \end{cases},$$

где оператор $Q(i) \sim a - 2^i b$; $I(i) \sim e^{(l-i)} = 2^i d$; $i=1,2,\dots,r$; $r \leq b$ и r — величина индекса i , при котором происходит переход к 2. В случае, если $i < l$, т. е. разрядная сетка машины переполнена, машина будет остановлена.

2. Непосредственное выполнение операции деления:

$$\downarrow \begin{cases} \overset{6}{\overleftarrow{M_4^1(j) p_5(j < m - l + r; j = m - l + r) \downarrow p_6}} (w_j \geq 0; w_j < 0) \\ \overset{9}{\overleftarrow{M_7^2(j) p_8(j < m - l + r; j = m - l + r) \downarrow p_9}} (w_j \geq 0; w_j < 0); \\ I'_{10}(j) \end{cases}$$

$$\downarrow c_{l-r+j} = e^{(l-r+i)}; \quad \downarrow c_{l-r+j} = 0,$$

где оператор $M^1(j) \sim 2w_{j-1} - 2^r b = w_j$; $M^2(j) \sim 2w_{j-1} + 2^r b$; $I'(j) \sim e^{(l-r+i)} = 2^{r-i} d$; $j = 1,2,\dots,m-l+r$; $w_0 = a$ и $c_1 = \dots = c_{l-r} = 0$.

Частное от деления a/b равно

$$c = \left[\bigvee_{i=1}^{m-l+r} c_{l-r+i} \right] 2^{m-l} = c_1 c_2 \dots c_l, c_{l+1} \dots c_m. \quad (1.16)$$

При этом знак дизъюнкции в формуле (1.16) означает почленное дизъюнктивное сложение двоичных кодов. Поскольку алгоритм достаточно прост, обоснование его справедливости опускаем. Формула для формирования знака частного в машине имеет вид:

$$\text{sign } c = [\text{sign } a + \text{sign } b] \bmod 2. \quad (1.17)$$

Время выполнения операции деления $T = m\tau(m - l + 2r)$, наибольшее время $T_{\max} = 2m^2\tau$ (т. е. время, соответствующее двум умножениям), наименьшее $T_{\min} \cong m(m - l)\tau$ — время, меньшее одного умножения.

Алгоритм выполнения операции умножения. Пусть код вида (1.13) — множимое, (1.14) — множитель, (1.15) — произведение, (1.2) — код, характеризующий положение запятой, $f = 10 \dots 00 \dots 00$ — вспомогательный код операций умножения и (1.3) — управляющий код. Тогда алгоритм выполнения операции состоит из трех этапов.

1. Умножение на дробную часть множителя:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 2 \left\{ \begin{array}{l} F'_1(i)p_2(i < \overbrace{m-l}^{\rightarrow}; i = \overbrace{m-l}^{\rightarrow}) \\ E'_3(i) \end{array} \right. \end{array},$$

где оператор $F'(i) \sim 2^{-1}c^{(i-1)} + ab_{m-l+1} = c^{(i)}$; $E'(i) \sim e^{(i)} = (f \vee d)2^{-i}$; $i = 1, 2, \dots, m-l$ и $c^{(0)} = 0$.

2. Умножение на разряд единиц множителя:

$$\begin{array}{c} 6 \\ \downarrow \\ 2 \left\{ \begin{array}{l} F'_4(i)p \\ E'_5(i) \end{array} \right. \end{array},$$

где оператор $F^2(i) \sim c^{(m-l)} + ab_i = c^{(m-l+j)}$; $E^2(i) \sim e^{(m-l+j)} = (f \vee d)2^{-(m-l+j)}$ и $j = 1$.

3. Умножение на целые старшие разряды множителя:

$$\begin{array}{c} 7 \ 4 \\ \downarrow \downarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} F'_6(j)p_7(j < l; j = l) \\ E'_8(j) \end{array} \right. \end{array},$$

где оператор $F^3(j) \sim c^{(m-l+j-1)} + 2^{j-1}ab_{l+j+1} = c^{(m-l+j)}$; $E^3(j) \sim e^{(m-l+j)} = (f \vee d)2^{-(m-l+j)}$; $j = 2, 3, \dots, l$ и $c^{(m)} = c$.

Рассмотренный алгоритм* достаточно прост и не требует дополнительных разъяснений. Формирование знака результата производится по формуле (1.14). Время выполнения операции умножения** $T = m^2\tau$.

Операция сложения и вычитания. При выполнении операции сложения и вычитания из первого кода числа вида (1.13) вычитается (или к первому числу прибавляется) второе вида (1.14). Если принять, что положительное (отрицательное) число имеет $\text{sign } x = 0$ ($\text{sign } x = 1$), то в зависимости от абсолютных величин и знака операции (для сложения $\text{sign } (+) = 0$, для вычитания $\text{sign } (-) = 1$) как результирующая операция, которую мы обозначим через „±“, так и знак результата могут быть различны.

Выполнение операции распадается на два этапа.

1. Выполнение арифметической операции

$$a, \pm b = c; \quad c \left\{ \begin{array}{l} \geq 0; p = 0 \text{ (окончание операции)} \\ < 0; p = 1 \text{ (переход к 2)} \end{array} \right. ; \quad e^{(1)} = 2,$$

* В зависимости от схемы реализации алгоритма (точнее, сдвиговых режимов в регистрах арифметического устройства) он может требовать трех (как это рассмотрено) или двух этапов (когда второй и третий этапы объединены).

** Время выполнения операции умножения и времена операций умножения, входящих в операции перевода из одной системы счисления в другую, могут быть уменьшены за счет пропуска всех массивов нулей множителя (см. [1]).

где знак результирующей операции $\text{sign} \pm = [\text{sign } a + \text{sign } b + + \text{sign} (\pm)] \bmod 2$. В случае $p=1$ результат имеет дополнительный код и должен быть переведен в прямой.

2. Коррекция результата

$$b - a = c; \quad e^{(2)} = 2^0 \quad (\text{окончание операции}).$$

Знак результата $\text{sign } c = [\text{sign } a + \text{sign } p] \bmod 2$. Наибольшее время выполнения операции $2m\tau$, наименьшее $m\tau$, среднее $T = 5m\tau/4$.

Операция сдвига. Рассмотрим один из возможных алгоритмов выполнения операции сдвига. Пусть $a^{(0)} = a_1^{(0)} a_2^{(0)} \dots a_g^{(0)} a_{g+1}^{(0)} \dots a_m^{(0)}$ — сдвигаемый код и $b = b_1 b_2 \dots b_r$ — двоичный код величины сдвига, где $r = ld m$ и m — число двоичных разрядов в коде числа a^* .

Для выполнения операции двоичный код сдвига b преобразуем в m -разрядный двоичный управляющий код e :

$$e^{(i)} = e_1^{(i)} e_2^{(i)} \dots e_\alpha^{(i)} e_{\alpha+1}^{(i)} \dots e_j^{(i)} \dots e_\beta^{(i)} e_{\beta+1}^{(i)} \dots e_m^{(i)}, \quad (1.18)$$

где

$$e_j^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq \alpha \text{ и } \beta \\ 1 & \text{при } j = \alpha \text{ и } \beta \end{cases}, \quad i = 0.$$

Величины α и β при $m=\sigma k$, где σ и k — целые положительные числа **, определяются выражениями: $\beta = m - k + [b]_{\bmod k}$ и $\alpha = m - b - k + [b]_{\bmod k} = \beta - b$. В этом случае код $e^{(i)}$ содержит *** две единицы, между которыми $N = b - 1$ нулей.

Пусть наибольший допустимый в арифметическом устройстве сдвиг двоичного кода a за один цикл равен одному разряду. В этом случае методику выполнения операции возможно разделить на два этапа.

1. Подготовка сдвига ***, при котором первая единица управляющего кода $e_\beta^{(i)}$ выдвигается на место $e_m^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m - \beta$):

$$a^{(i+1)} = 2^0 a^{(i)}; \quad e^{(i+1)} = e^{(j)} 2^{-1} = 2^{-i} e^{(0)}; \quad i \begin{cases} < m - \beta & (\text{переход к } i+1) \\ = m - \beta & (\text{переход к } 2) \end{cases}.$$

2. Выполнение сдвига:

$$a^{(j+1)} = a^{(j)} 2^{\pm 1}; \quad e^{(j+1)} = e^{(j)} 2^{-1} = e^{(0)} 2^{-(m-\beta)-j}; \quad j \begin{cases} < \beta - \sigma & (\text{переход к } j+1) \\ = \beta - \sigma & (\text{окончание операции}) \end{cases}.$$

Операция заканчивается, когда разряд $e_\alpha^{(0)}$ переходит на место $e_m^{(0)}$. Время выполнения операции при возможных сдвигах за цикл на $\delta = 1, 2, \dots, k$ разрядов равно

$$T = m \left[\frac{b - [b]_{\bmod k}}{k} + 1 \right] \tau.$$

Ввод инструкций. Так как адреса инструкции (например, трехадресной машины) представляют из себя целые числа, может быть использован такой управляющий код (1.3), число единиц в котором равно числу отдельных частей инструкции. При этом адреса, имеющие, вообще говоря, одинаковое число разрядов, переводились бы

* Так, например, для $m = 32, r = 5$.

** При $m = 32, r = 5$ удобно выбрать $k = 4$.

*** Управляющий код (1.18) может быть получен из кода b при помощи дешифратора (например, поиска номера дорожки магнитного барабана), разделенного на поддешифраторы, имеющие σ и k выходов. Выходы стробируются тактовыми импульсами $t_1 t_2 \dots t_k, t_{2k} t_{3k} \dots t_{(\sigma-1)k}$, синхронизирующими работу машины

**** Время выполнения операции может быть значительно уменьшено за счет увеличения величины сдвига за один цикл (см. [1]).

из десятичной системы счисления в двоичную (при вводе инструкции в машину) и обратно (при выводе инструкций из машины).

Рассмотрим один из таких алгоритмов ввода инструкции в машину, причем будем считать, как это показано на рис. 4, что каждый из адресов (зона II, III и IV) записан в двоично-десятичной, а код операции (зона I) — в двоичной системе счисления.

В зоне I записано k_1 тетрад или $4k_1 = p_1$ двоичных разрядов, в зоне II $k_2 - k_1$, в зоне III $k_3 - k_2 - k_1$ и в зоне IV $n - k_1 - k_2 - k_3$ тетрад, дающих соответственно p_2, p_3 и p_4 двоичных разрядов, определяемых из соотношений

$$2^{p_2} - 1 < 10^{k_2 - k_1} - 1 < 2^{p_2 + 1} - 1;$$

$$2^{p_3} - 1 < 10^{k_3 - k_2 - k_1} - 1 < 2^{p_3 + 1} - 1;$$

$$2^{p_4} - 1 < 10^{n - k_1 - k_2 - k_3} - 1 < 2^{p_4 + 1} - 1.$$

При переводе инструкции, изображенной на рис. 4, в двоичный код он имеет $m = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ разрядов и управляющий код в виде $e^{(0)} = e_1^{(0)} e_2^{(0)} \dots e_{p_1}^{(0)} e_{p_1+1}^{(0)} \dots e_{p_1+p_2}^{(0)} e_{p_1+p_2+1}^{(0)} \dots e_{p_1+p_2+p_3}^{(0)} e_{p_1+p_2+p_3+1}^{(0)} \dots e_m^{(0)}$, в котором разряды $e_1^{(0)}, e_{p_1+1}^{(0)}, e_{p_1+p_2+1}^{(0)}, e_{p_1+p_2+p_3+1}^{(0)}$ равны единице, а все остальные нулю. В этом случае алгоритм ввода инструкции (рис. 4) с переводом зон II, III и IV в двоичный код может быть записан (как это показано в таблице 3) под операцией Ввод_к.

Заметим, что во всех четырех рассмотренных алгоритмах операций перевода, умножения и деления, положение запятой в коде двоичного

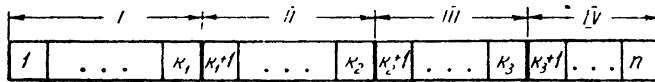


Рис. 4.

числа может быть поставлено через каждые три разряда двоичного регистра (см. рис. 2) в зависимости от заданного кода (1.2). Смена положения запятой требует минимальных схемных переключений и может производиться вручную с пульта управления машины.

2. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ В АРИФМЕТИЧЕСКОМ УСТРОЙСТВЕ МАШИНЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим один из возможных вариантов реализации рассмотренных алгоритмов для случая последовательной трехадресной электронно-вычислительной машины с запятой, задаваемой некоторым кодом, вводимым в ее арифметическое устройство перед вводом данных задачи в машину. Физическая реализация большинства функциональных узлов арифметического устройства машины может быть выполнена на основе ламповых схем моделей логических операторов и триггерных схем, описанных в работе [2].

Рассмотренные алгоритмы требуют для своей реализации следующих элементарных арифметических и логических операций: хранения кодов*, сдвига кодов влево и вправо, осуществляемых сдвиговым регистром, а также сложения, вычитания, дизъюнкции и конъюнкции кодов, осуществляемых алгебраическим сумматором.

Для выполнения этих элементарных операций и общих алгоритмов

* Имеется в виду хранение кодов чисел и констант

выбрана блок-схема арифметического устройства, которая состоит из двух узлов: собственно арифметического узла (АУ) и узла управления арифметическим устройством (УАУ).

Арифметическое устройство (АУ) выполняет произвольные комбинации из элементарных операций над кодами чисел в зависимости от алгоритмов, подлежащих реализации, и состоит из трех сдвиговых рециркуляционных регистров P_1 , P_2 , P_3 , алгебраического сумматора (АС), выполняющего функции сложения и вычитания, блоков формирования знака результирующей операции (БЗО) и знака результата (БЗР).

Если принять для трехадресной машины распределение информации по адресам инструкций, указанное в таблице 2, и считать, что при вводе кодов чисел в арифметическое устройство код первого адреса всегда попадает в регистр P_1 , код второго — в регистр P_2 , а результат операции из регистра P_3 выводится в запоминающее устройство машины, то, учитя алгоритмы, подлежащие реализации и рассмотренные в предыдущей главе, постоянные связи элементов арифметического устройства P_1 , P_2 , P_3 и сумматора могут быть выполнены так, как показано на рис. 5.

Из рассмотренных алгоритмов видно, что арифметические операции разделяются на отдельные этапы — арифметические циклы, характеризуемые различными сдвиговыми режимами в регистрах арифметического устройства и коммутациями этих

регистров по отношению к сумматору. Число арифметических циклов зависит от выполняемой операции. Продолжительность каждого арифметического цикла, переход к следующему и время окончания операции определяются характером операции, числом выполненных циклов, положением запятой, результатом сложения или вычитания, выполненного в предыдущем цикле, и внешней информацией, вводимой в машину.

Управление арифметическим устройством подает на элементы АУ сигналы, соответствующие арифметическим циклам в зависимости от указанных условий. Потенциалы арифметических циклов обеспечивают необходимые коммутации между узлами АУ, а также настраивают отдельные узлы АУ на тот или иной режим работы.

Узел управления арифметическим устройством состоит из дешифратора операций (ДО), выдающего потенциал выполняемой операции, генератора потенциалов арифметических циклов (ГАЦ), который разделяет выполняемую операцию на отдельные этапы, дешифратора потенциалов управляющих циклов (Д), задающего АУ различные режимы работы в зависимости от операции, поставленной на АУ, и арифметического цикла, дешифратора управляющих импульсов (ДУИ), формирующего импульсы, управляющие генератором потенциалов арифметич-

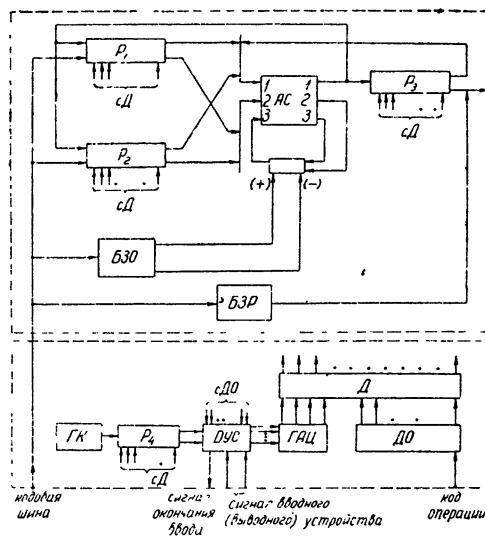


Рис. 5.

же настраивают отдельные узлы АУ на тот или иной режим работы.

Узел управления арифметическим устройством состоит из дешифратора операций (ДО), выдающего потенциал выполняемой операции, генератора потенциалов арифметических циклов (ГАЦ), который разделяет выполняемую операцию на отдельные этапы, дешифратора потенциалов управляющих циклов (Д), задающего АУ различные режимы работы в зависимости от операции, поставленной на АУ, и арифметического цикла, дешифратора управляющих импульсов (ДУИ), формирующего импульсы, управляющие генератором потенциалов арифметич-

ских циклов, управляющего сдвигового динамического регистра (P_4)*, который генерирует большинство импульсов, управляющих генератором потенциалов арифметических циклов, и генератора управляющих кодов (ГК), выдающего в управляющий регистр коды в зависимости от выполняемой операции и положения запятой.

Таблица 2

Инструкция	Ввод ₁₀	Выход ₁₀	Ввод _k	Выход _k	$a - b$	$a \times b$	a/b	Сдвиг a
Код	операции	операции	операции	операции	операции	операции	операции	операции
1 адрес	адрес результата	адрес кода b	адрес результата	адрес кода b	адрес кода a	адрес кода a	адрес кода a	адрес кода a
2 адрес	адрес кода β	адрес кода β	—	—	адрес кода b	адрес кода b	адрес кода b	адрес сдвига b
3 адрес	—	—	—	—	адрес результата c	адрес результата c	адрес результата c	адрес результата c

Регистры арифметического устройства могут иметь несколько возможных режимов рециркуляции. Обозначим через A_l^v рециркуляцию внутри регистра (см. рис. 6), B_l^v — рециркуляцию кода, когда в цепь рециркуляции регистра включен сумматор (см. рис. 7), C — режим ввода информации в регистр и D_l^v — очищение регистра. При этом индекс v указывает номер входа сумматора, к которому подключен регистр. Нижний индекс характеризует режим работы регистра: $l=m$ — нормальная рециркуляция в регистре без сдвига, $l=m-k$ ($l=m+k$) — рециркуляция в регистре со сдвигом кода в область младших (старших) разрядов на k двоичных единиц за цикл, где m — число двоичных разрядов, на которое включено арифметическое устройство (длина слова), например, $m=32$ или 64 .

В соответствии с рассмотренными алгоритмами выполнения операций регистры АУ должны иметь сдвиговые режимы с $l = m \pm 1 \pm g$, где $g=0,1,2,3,4$ — дополнительный сдвиг, обеспечивающий ускоренное выполнение таких операций, как перевод из одной системы счисления

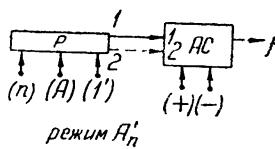


Рис. 6.

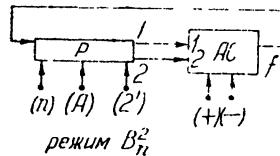


Рис. 7.

в другую, умножение и сдвиг за счет пропуска массивов нулей множителя или управляющего кода. В этом случае все рассмотренные операции могут быть легко реализованы.

* Все регистры P_1 , P_2 , P_3 и P_4 могут быть выполнены на магнитном барабане, магнитострикционной, акустической или какой-либо другой линии в виде одночисленного регистра со сдвиговой рециркуляцией.

В качестве примера в таблице 3 указаны (в принятых обозначениях) реализации некоторых из рассмотренных алгоритмов арифметического устройства, блок-схема которого приведена на рис. 5.

В заключение заметим, что почти все рассмотренные алгоритмы и блок-схема АУ реализованы в лабораторном образце машины. Ввод кодов чисел и инструкций выполняется фотоэлектрическим вводным устройством с перфорированной пятидырочной бумажной ленты, с которой информация последовательно считывается непосредственно в регистр P_3 арифметического устройства. Скорость ввода кодов чисел с переводом в двоичную систему счисления не менее 20 чисел в секунду. Для того, чтобы обеспечить достаточное время для отсылки переведенного двоичного числа в запоминающее устройство машины, между группами тетрад, соответствующих различным числам, на ленте пробивается ряд пустых рядов. Коды 0000 и 1111 являются пустыми.

Л И Т Е РА Т У Р А

- 1 М. Я. Эйнгорин, Труды конференции Пути развития математического машиностроения и приборостроения, 1, 1956.
- 2 М. Я. Эйнгорин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, 2, 169 (1958)
- 3 А. А. Ляпунов, Проблемы кибернетики, № 1, 46 (1958)

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 марта 1961 г.

ON SOME OPERATIONS REALIZED BY SERIAL DIGITAL COMPUTER

M. Ya. Eingorin

The algorithms of realization of basic arithmetical operations for serial electron digital computer having an arbitrary position of a fixed point are considered. As a binary reversible counter the shift dynamic register is used when realizing algorithms. That can be named a guiding one owing to its functions. Putting such a register into the arithmetical system and design of the special algorithms for operations reveals the possibility to change fairly easily a fixed point position in the computer taking into account the peculiarities of the given problem.

ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ В МЕТЕОРНОМ РАДИОЛОКАТОРЕ*

Р. П. Чеботарев

Приводится принцип действия и результаты работы простейшего логического устройства, уменьшающего в миллион раз регистрируемое число импульсных помех и всплесков шума без практической потери отраженных импульсов даже при работе локатора в городских условиях. Рассматриваются возможности более сложных логических устройств.

Метеоры как радиолокационные цели отличаются рядом особенностей. Важнейшие из них—это неожиданность появления, кратковременность существования сигнала, чрезвычайно большой диапазон уровней сигнала и сосредоточение наиболее полезной информации о метеоре в самом начале сигнала. В сочетании со всплесками шума приемника и импульсными помехами эти особенности существенно затрудняют автоматическую фотoreгистрацию отраженных сигналов, дающую наиболее полную информацию о метеоре. Трудности заключаются в том, что либо получается большое число ложных снимков, либо теряется большое количество информации в сравнительно небольших по амплитуде сигналах, не пропускаемых на индикатор системой помехозащиты радиолокатора.

Опубликованные в литературе [1] схемы помехозащиты используют различие в спектре сигнала и помехи или, затрачивая большую мощность при передаче, производят кодирование импульсов, уменьшая число помех в десятки и даже тысячи раз по сравнению с простым амплитудным ограничением. Однако и в том и в другом случае до обработки фотозаписей сигнала обычно невозможно определить, содержит ли данный сигнал действительно ценную информацию (например, скорость метеора).

Наиболее успешно указанные трудности могут быть преодолены применением в метеорном радиолокаторе быстродействующих логических устройств, выполняющих функции оператора обычной радиолокационной станции.

Разработанное в Рязанском радиотехническом институте простейшее быстродействующее логическое устройство метеорного радиолокатора предназначено для подавления импульсных помех и всплесков шума путем анализа вероятности корреляции шумов и сигнала в течение нескольких периодов развертки. (Заметим, что оператор выполняет этот анализ примерно в течение 0,1 сек.)

1. БЛОК-СХЕМА ПРИЕМНОЙ ЧАСТИ ЛОКАТОРА С ПРОСТЕЙШИМ ЛОГИЧЕСКИМ УСТРОЙСТВОМ

Принцип действия устройства состоит в следующем. Моменты времени, когда на выходе приемника появляются отраженные сигналы или комбинации шума и помех, похожие на сигналы, запоминаются

* Доклад на III Всесоюзном семинаре по радиотехническим методам изучения метеоров, М., 1960.

на магнитном барабане на время до 20 мсек (см. блок-схему на рис. 1). Считывающие головки барабана от каждого импульса сигнала дают на выходе единичные импульсы напряжения, сдвинутые во времени точно на две мсек (т. е. на период повторения зондирующих импульсов τ_s).

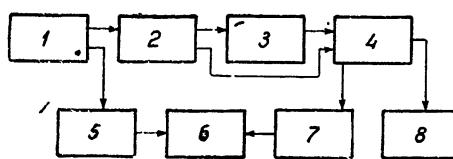


Рис. 1 Блок-схема приемной части локатора с простейшим логическим устройством:

1—приемник, 2—селектор по τ_i , 3—блок памяти на магнитном барабане, 4—логическое устройство; 5—запоминающее устройство, 6—блок индикации; 7—схема подсвета; 8—схема запуска мотора.

считывающих головок или периодов корреляции. Очевидно, что u_t может изменяться от 0, когда ни одна головка не дает импульса, до n , когда импульсы поступают со всех головок. Помехи и шумы, имеющие случайный период повторения τ_w , не соответствующий периоду корреляции τ_s , дают напряжение u_t , величина которого обратно пропорциональна вероятности появления этого напряжения.

Если в сравнивающей схеме напряжение u_t превысит одно из опорных напряжений $u_1=n-1,8$ или $u_2=n-0,9$ и если в этот момент существует отраженный импульс (еще один период корреляции в дополнительной схеме совпадений с сигналом, имеющим для записи больший „удельный вес“), то срабатывает соответствующая схема подсвета или запуска мотора фотоприставки. Очевидно, что вероятность прохождения помех через канал с уровнем u_2 значительно меньше, чем через первый канал; однако в нем возрастает число пропущенных полезных импульсов, что учитывается в схеме запуска мотора. Импульсы со схемы подсвета управляют яркостью двух лучей трубки электронного осциллографа, нормально потушенных. Один луч дает развертку по дальности, второй—дифракционную картину. Сигналы и шум с выхода приемника через задерживающее устройство управляют отклонением только второго луча, подсвечиваемого в момент поступления импульса. Фотопленка начинает протягиваться спустя 20 мсек после появления сигнала и движется до тех пор, пока существует сигнал. Одновременно фиксируется время появления сигнала. Селектор по длительности импульса τ_i собран по схеме с длинной линией и служит для предварительного уменьшения числа помех и всплесков шума примерно в 20 раз, чтобы не перегрузить блок памяти на магнитном барабане, обладающий сравнительно малой емкостью. Запоминающее устройство состоит из линии задержки и усилителей и задерживает сигнал на 7 мсек, т. е. на время, несколько большее времени срабатывания селектора по τ_i .

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА И ЭКСПЕРИМЕНТА

Расчет показывает, что при отсечке снизу в селекторе по τ_i на уровне 2,2 $u_{\text{ш}}$ белый шум превышает это значение примерно 20 тысяч раз в секунду. Это должно вызывать срабатывание схемы подсвета при $n=4$ в среднем 1 раз за 55 сек, а схемы запуска мотора еще в 140 раз реже. Таким образом, число всплесков шума, регистрируе-

Благодаря этому в суммирующей схеме логического устройства происходит взаимная корреляция единичных импульсов и на вход сравнивающего устройства в каждый момент времени поступает напряжение вида:

$$u_t = \sum_{k=1}^{k=n} u_e \varphi(t - \tau_s k).$$

Здесь u_e — напряжение единичного импульса, принимающее в зависимости от $(t - \tau_s k)$ только два дискретных значения 0 или 1, n — число

мых на индикаторе, уменьшается в миллион раз. В то же время импульсы сигнала, превышающие шум в 2,5 раза, должны вызвать срабатывание схемы подсвета в 95 случаях из 100. Экспериментально снятые зависимости числа импульсов, пропускаемых в секунду, и сред-

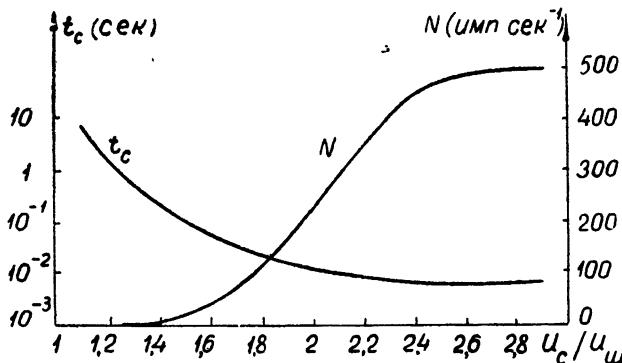


Рис. 2. Экспериментальные зависимости среднего времени срабатывания схемы t_c и числа регистрируемых индикатором импульсов сигнала N от отношения u_c/u_w ($n=4$; $F=N_{\max}=500$ имп. сек $^{-1}$; $t_c \min=6$ мсек).

него времени срабатывания схемы подсвета в зависимости от отношения u_c/u_w приведены на рис. 2 и хорошо совпадают с расчетными.

Из приведенных кривых и из данных расчета следует, что устройство чрезвычайно чувствительно к отношению u_c/u_w и уровню отсечки. При $u_c/u_w < 2,5$ резко возрастает число пропущенных импульсов и среднее время срабатывания (его минимальная величина равна 6 мсек). Изменение уровня отсечки в селекторе по τ_i на $\pm 10\%$ относительно 2,2 u_w соответственно увеличивает или уменьшает интервал между ложными срабатываниями схемы подсвета в 10 раз.

Импульсы помех практически совершенно не действуют на схему, так как экспериментально измеренное число помех с амплитудой больше 2,2 u_w в условиях города колеблется от 20 до 2000 в секунду, т. е. остается много меньше числа всплесков шума. Во времени помехи также распределены по приблизительно случайному закону. На

Рис. 3. Действие простейшей логической схемы помехозащиты. Обе развертки типа дальность-время с яркостной индикацией сняты одновременно. Дальность цели—150 км, $u_c/u_w = 1,6$ (слева без помехозащиты, справа с помехозащитой).

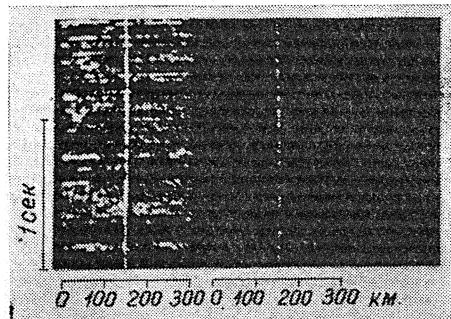


рис. 3, снятом при уровне ограничения 2,2 u_w , хорошо видно подавление помех и пропускание значительного числа импульсов из-за малого отношения $u_c/u_w=1,6^*$.

* В настоящей статье u_w —везде среднеквадратичное.

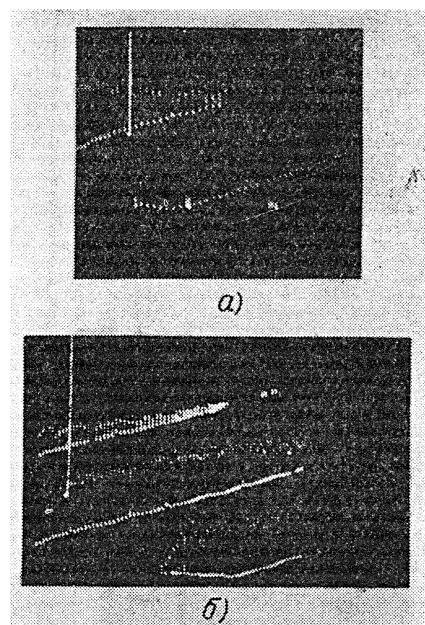


Рис. 4. Дифракционные картины от метеоров:
а) дальность 103 ± 2 км, скорость $22,3 \pm 1$ км · сек $^{-1}$, $F = 250$ имп · сек $^{-1}$; б) дальность 100 ± 2 км, скорость $44,5 \pm 3$ км · сек $^{-1}$, $F = 500$ имп · сек $^{-1}$.

Практически фотoreгистрация метеорной активности на разработанной аппаратуре проводилась дважды на частоте 38,2 мгц. Первый раз в ночь с 5 на 6 апреля 1960 г. в течение 9 часов при частоте повторения $F = 250$ сек $^{-1}$ и мощности в импульсе $P_i = 40$ квт был получен 161 снимок спорадических метеоров и, примерно, 90 ложных снимков, вызванных работой близко расположенных вещательных станций того же диапазона, которые поднимали уровень шума на выходе детектора приемника. (Это будет устранено введением в схему АРУ.) На один метеор было затрачено в среднем около 3 см фотопленки. Для 15 метеоров были определены или оценены скорости (от 12 до 36 км · см $^{-1}$).

Второй раз работа велась для проверки оборудования примерно в течение часа около полудня 8 мая при $F = 500$ сек $^{-1}$ и $P_i = 25$ квт. Были зарегистрированы 32 метеора и измерены скорости 5 метеоров (от 22 до 70 км · сек $^{-1}$), два из которых, очевидно, принадлежат потоку γ -Акварид. Дифракционные картины от следов метеоров приведены на рис. 4.

Описанное простейшее логическое устройство предназначалось только для подавления шумов и помех и для автоматического включения аппаратуры фотoreгистрации отраженным сигналом. В его блоке памяти запоминались лишь интервалы времени, в которые можно было ожидать наличие следующих импульсов. Значительно лучшие результаты можно получить с помощью более сложного логического устройства, общая блок-схема которого приведена на рис. 5. Здесь сигналы и шумы должны запоминаться в аналоговой форме на время порядка $0,1 \div 0,2$ сек. (Емкость блока памяти $20 \div 40$ тысяч семиразрядных чисел двоичной системы.) За это время логическое устройство сможет проанализировать сигналы по длительности, амплитуде, скорости нарастания и т. д. и принять соответствующее решение об индикации. Те сигналы, которые заранее не могут дать нужной информации*, после задержки в блоке памяти можно направить на упрощенный индикатор, возможно даже не фотографический. Сигналы, вернее ту их часть, в которой может содержаться большое количество информации, очевидно, придется регистрировать со всеми подробностями для последующей расшифровки наблюдателем. Регистра-

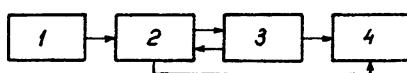


Рис. 5. Общая блок-схема сложного логического устройства:
1—приемник; 2—блок памяти на $0,1 \div 0,2$ сек; 3—логическое устройство, 4—блок индикаторов.

* Например, сигнал длительностью 0,02 сек или сигнал с $i_c/i_{sh} < 5 \div 10$, не дающие ясной дифракционной картины.

ция может начинаться благодаря задержке еще до того, как сигнал появится над уровнем шума. (Это позволит, в частности, реализовать когерентно-импульсный метод измерения скорости по биениям нисходящего тона.) Сказанное значительно облегчит обработку большого статистического материала, даваемого радиолокационными наблюдениями метеоров. Логическое устройство с блоком памяти на 0,2 сек сможет также полностью заменить операторов при визуальном наблюдении за сигналами на уровне шума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. С. Дудник, Б. Л. Кашеев, М. Ф. Лагутин, И. А. Лысенко, Радиотехника и электроника, 3, 1379 (1958).

Рязанский радиотехнический
институт

Поступила в редакцию
17 сентября 1960 г.

THE USE OF LOGICAL DEVICES IN A METEORIC RADIOLOCATOR

R. P. Tchebotaryov

The operation principle and working results are set forth of the simplest logical device which reduce one millionfold the registered quantity of pulse noises and noise splashes without any practical losses of reflected impulses even when the locator is operating under city conditions. The possibilities are examined of more complex logical devices.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О НАРУШЕНИЯХ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В СВЕРХКОРОНЕ СОЛНЦА

B. B. Виткевич

1. Вскоре после того, как были открыты электронные неоднородности наиболее внешних областей солнечной короны [1], выяснилось, что они имеют преимущественно вытянутое направление. Это дало основание к выводу о том, что в этих областях—в сверхкороне Солнца имеется магнитное поле, имеющее, грубо говоря, регулярную, преимущественно радиальную структуру. Первые результаты, опубликованные на основании наблюдений, проведенных в Оксской радиоастрономической станции ФИАН [2], были независимо подтверждены английскими исследователями [3].

Однако уже при первых систематических исследованиях направления магнитного поля оказалось, что если для одной части сверхкороны (в первую фазу затмения) наблюдается, грубо говоря, радиальность магнитного поля как по советским, так и по английским исследованиям [4,3], то в другие дни (во вторую фазу затмения, 1958 г.) были получены различные данные: если по английским наблюдениям поле было также приблизительно радиально, то по нашим наблюдениям направление магнитного поля существенно отличалось от радиального. В то время, когда были получены эти результаты, это расхождение не было объяснено.

В 1959 г. наблюдения снова проводились в двух местах и, как было установлено на заседании комиссии радиоастрономии во время XIII Генеральной ассамблеи Международного радиосоюза в Лондоне, также дали частично неодинаковые результаты. В частности, по наблюдениям Хьюиша, в первую фазу затмения, когда угловое расстояние между Крабовидной туманностью и Солнцем составляло $(22 \div 24) R_{\odot}$, направление магнитного поля резко отличалось от радиального и составляло с радиальным направлением угол, близкий к 90° ; наблюдения, проведенные в Крымской станции ФИАН, дали радиальное направление с точностью до ошибок наблюдений (около $\pm 15^\circ$)*. Таким образом, в 1959 г. Хьюиш подтвердил наш результат 1958 г., состоящий в том, что в отдельных областях сверхкороны направление магнитного поля может существенно отличаться от радиального. Кроме того, второй раз наблюдается различие в направлении магнитного поля, что заставляет подумать о причине расхождения результатов наблюдений.

2. Прежде, чем пытаясь объяснить различие в результатах, следует отметить, что результаты относятся к моментам прохождения источника через кульминацию, которые различны и отличаются примерно на 3 часа для двух станций. Таким образом, сравнивая результаты, мы должны учесть, во-первых, то, что данные результатов относятся к различным областям сверхкороны Солнца за счет изменения положения Крабовидной туманности и, во-вторых, что между наблюдениями прошло около 3 часов, так что наблюдения относятся к различному времени.

Рассмотрим два возможных объяснения различий в результатах наблюдений, считая, что наблюдения на обеих станциях надежны.

а) Предположим, что различные результаты наблюдений объясняются различными направлениями „просвечивания“ сверхкороны, считая, что быстрых изменений в ориентировке магнитного поля не происходит. Разница во времени наблюдений—3 часа соответствует относительному перемещению источника по отношению к Солнцу на $7,5'$, что соответствует расстоянию $35 \cdot 10^4 \text{ км}$. Следовательно, на расстояниях такого порядка должны быть заметны сильные возмущения магнитного поля. При этом очевидно, что они должны охватывать большую часть сверхкороны по лучу зрения.

б) Рассмотрим другую возможность. Представим себе, что магнитное поле регулярно в участках с большим характерным размером, охватывающим расстояние, например, $15 \div 30'$, что соответствует $(0,7 \div 1,4) \cdot 10^6 \text{ км}$. Представим теперь, что в силу некоторых причин, например, воздействия двигающихся облаков плазмы, изменилась

* Размеры больших полуосей эллипса рассеяния—порядка $10'$.

ориентировка поля, например, вследствие вращения соответствующего участка плазмы; тогда можно оценить скорости движений плазмы в указанных областях сверхкороны. Принимая, что за 3 часа область плазмы размером $15' - 30'$ должна повернуться на 60° (минимальная разница в значениях углов наблюдений с учетом возможных ошибок), находим, что за 3 часа перемещение должно составлять соответственно $(35 \pm 70)10^4$ км или 30 ± 60 км·сек $^{-1}$. Такого порядка минимальные скорости необходимы для объяснения указанного эффекта. При этом область вращения по „глубине“ должна охватывать большую часть сверхкороны на расстоянии $\sim 20R_\odot$, т. е. должна быть порядка $1,5 \cdot 10^6$ км. В этом состоит значительная трудность приведенных объяснений, так как трудно ожидать, что такая большая область сверхкороны, сохраняя в основном свою структуру, поворачивается вокруг некоторой оси.

3. Обратим внимание теперь на существенно другую возможность объяснения наблюдаемого эффекта.

Возможно, что магнитное поле сохраняет свое приблизительно радиальное направление. Однако наличие вытянутого плазменного образования (типа коронального луча) в сверхкороне, расположенного по пути распространения радиоволн ближе к Земле, чем рассеивающие области, создает рефракцию радиоволны, существенно различную для различных видимых областей Крабовидной туманности. В результате как бы поворачивается большая ось видимого эллипса Крабовидной туманности. Для достижения наблюдаемого эффекта необходимо, чтобы градиент рефракции составлял порядка $7' - 10'$ угловых минут на расстояниях такого же порядка. Таким образом, речь идет о наличии электронных неоднородностей сравнительно крупного размера, поворачивающих эллипс рассеяния из-за наличия градиента электронной плотности.

Оценим электронные плотности указанных неоднородностей. Выражение для рефракции имеет вид:

$$R = \frac{dL}{dx} \approx \frac{l(n_2 - n_1)}{x_0}.$$

Здесь l —длина пути луча в неоднородности, $n_2 - n_1$ —изменение показателя преломления по направлению рефракции на пути x_0 , x_0 —принятый размер неоднородности в направлении рефракции.

Если считать неоднородность изотропной: $l \approx x_0$, то $R \approx n_2 - n_1 = \Delta n$. Здесь Δn —изменение показателя преломления в середине неоднородности. Если длину волны λ выразить в метрах, то из соотношения [5]

$$R = \Delta n = 4,5 \cdot 10^{-10} N\lambda^2$$

(N —электронная концентрация), принимая $R \approx 10' \approx 3 \cdot 10^{-3}$ радиан, $\lambda = 5$ м, находим $N \approx 2,7 \cdot 10^5$ эл. см $^{-3}$. Неоднородности, имеющие максимальную электронную концентрацию указанной величины и видимые размеры около $2' \times 10'$, могут объяснить наблюдаемый эффект (рис. 1). Важно отметить, что из других данных, в частности, из результатов прямых наблюдений рефракции в сверхкороне, следует, что электронные концентрации крупных неоднородностей должны достигать $(5 \pm 10) \times 10^5$ эл. см $^{-3}$.

Таким образом, приведенное объяснение становится весьма правдоподобным. В дальнейшем, в связи с отмеченными фактами, важно было бы поставить наблюдения за сверхкороной не только во время кульминации, но и непрерывно в течение 5 ± 7 часов в сутки подряд.

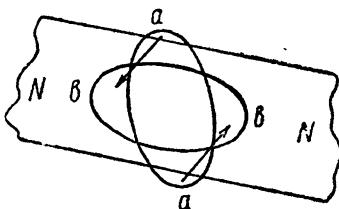


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Виткевич, ДАН СССР, 101, 429 (1955).
2. В. В. Виткевич, Б. Н. Пановкин, Астрон. ж., 34, 544 (1959).
3. И. Хьюиш, Радиоастрономия, ИЛ, М., 1958, стр. 263.
4. В. В. Виткевич, Радиоастрономия, ИЛ, М., 1958, стр. 270.
5. В. В. Виткевич, Радиотехника и электроника, 3, 478 (1958).

О ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ РАДИОИЗЛУЧАЮЩИХ ПЛАЗМА-СПУТНИКОВ, ДВИЖУЩИХСЯ ВОКРУГ СОЛНЦА

B. B. Виткевич

1. В настоящее время можно считать твердо установленным наличие движений плазмы в солнечной короне со скоростями порядка сотен и тысяч километров в секунду. Эти движения можно наблюдать различными методами.

а) Во-первых, это корпускулярные потоки, вырывающиеся со скоростью от нескольких сот до тысячи $\text{км} \cdot \text{сек}^{-1}$ и даже выше из солнечной короны и создающие магнитные возмущения.

б) Второй пример—изменение амплитуды радиоволн от Крабовидной туманности при покрытии ее сверхкороной Солнца. Наблюдаемые изменения амплитуды происходят вследствие движения плазмы в сверхкороне Солнца со скоростями порядка тысячи $\text{км} \cdot \text{сек}^{-1}$ или более [1].

в) Австралийские исследователи, применяя радиоинтерференционный метод, обнаружили движение источника радиоизлучения приблизительно радиально со скоростями от нескольких сотен до тысяч $\text{км} \cdot \text{сек}^{-1}$ [2].

г) Наконец, последние наблюдения, проведенные в Крымской и Серпуховской радиоастрономических станциях ФИАН в июне 1960 г. на трех радиоинтерференциальных базах, показали, что на волнах 6 м (обработка Л. И. Матвеенко) и 1,5 м (обработка В. И. Слыши) наблюдались быстрые движения (около 1000 $\text{км} \cdot \text{сек}^{-1}$) радиоизлучающих пятен (областей) поперек солнечного диска (эти данные будут опубликованы отдельно).

На волне 6 м движение происходило с левого края солнечного диска приблизительно параллельно экватору к правому краю диска; в начале и в конце траектории видимые высоты расположения пятна были около одного солнечного радиуса. Весьма вероятно, что указанные движения источников радиоизлучения соответствуют физическим движениям сгустков плазмы, излучающих радиоволны.

Таким образом, наличие отдельных плазменных образований, движущихся с указанными скоростями и излучающих радиоволны значительной интенсивности, является хорошо установленным.

2. Рассмотрим возможность существования движений плазменных облаков (плазмондов типа обнаруженных Бостиком или облаков, представляющих собой переплетение магнитных силовых линий, корональной материи и релятивистских электронов) в качестве спутников Солнца. Проведем элементарные расчеты.

а) *Период, скорость.* Представим себе спутник, двигающийся вокруг Солнца. Оценим его период T , используя известное соотношение

$$T_2 = T_1 (R_2/R_1)^{3/2}. \quad (1)$$

Примем $T_1 = 365$ дней—время вращения Земли вокруг Солнца, $R_1 = 213 R_{\odot}$ —радиус орбиты Земли. Тогда для различных высот h движения спутника над фотосферой могут быть вычислены период T , линейная скорость v , полуperiод $T/2$ и скорость v_i . Эти данные приводятся в таблице 1, из которой ясно,

Таблица 1

h	T (мин)	v ($\text{км} \cdot \text{сек}^{-1}$)	$T/2$ (часы)	v_i (угл. мин в минуту)
0,5	307	350	2,56	1,66
1	480	300	4	1,4
2	880	245	7,3	1,16
5	2500	190	21	0,9
10	6600	123	55	0,58

что полуperiод обращения может изменяться в весьма значительных пределах; однако он во всяком случае не меньше примерно двух часов.

б) *Время жизни* спутника можно оценить, исходя из представления о том, что он окончит свое существование в том случае, если масса, с которой он столкнется, будет соизмерима с движущейся массой плазмы. Масса „спутника“

$$M_c = N_c m_p W_c, \quad (2)$$

где W_c —объем, N_c —число частиц в 1 см^3 , m_p —масса протона. Масса, которая встречается на пути движения спутника (без учета магнитного поля), равна

$$M = N(h) m_p S_c l, \quad (3)$$

где $N(h)$ —электронная концентрация на расстоянии h от фотосфера, S_c —поперечное сечение спутника, l —длина пути траектории.

Полагая, что характеристика времени жизни определяется соотношением $M \approx 0,1$ (мы учитываем только эффекты, вызванные соударением спутника с корональной матерью, встречаемой им при движении), найдем:

$$N_c W_c = 10 N S_c l. \quad (4)$$

Полагая $W_c/S_c = l_c$, получим:

$$N_c = 10 N l / l_c; \quad l / l_c = N_c / 10 N. \quad (5)$$

Отсюда видно, что l/l_c будет заметно больше единицы, если N_c на несколько порядков выше, чем N . Так, например, при $N_c = 10^4 N(h)$ $l = 100 l_c$; если принять $l_c = R_\odot / 2$, то число оборотов n , которое совершил спутник, при $h = R_\odot$ равно примерно четырем.

Таким образом, для того, чтобы спутник совершил несколько оборотов, его электронная плотность должна быть не менее, чем на три порядка выше электронной плотности той области короны, движение в которой происходит. Это требование может быть удовлетворено. Так, например, на высоте $h = R_\odot$ $N \approx 2 \cdot 10^6 \text{ эл. см}^{-3}$ и необходимая концентрация в спутнике равна $2 \cdot 10^9 \text{ эл. см}^{-3}$. При высоте $h = 2R_\odot$ $N \approx 2 \times 10^5 \text{ эл. см}^{-3}$ и требуемая концентрация $2 \cdot 10^8 \text{ эл. см}^{-3}$. Такого рода электронные образования можно получить, считая, что они выходят из самых верхних слоев хромосферы, граничащих с короной, где электронная концентрация порядка 10^9 эл. см^{-3} .

3. Для обнаружения указанных плазма-спутников, вероятность появления которых, по-видимому, весьма мала, необходимы специальные длительные наблюдения. Их необходимо проводить так же, как это делается при исследовании за Крабовидной туманностью сверхкороны с помощью двух, а лучше всего, трех радиоинтерферометров. Одновременные наблюдения с помощью таких радиоинтерферометров, различным образом ориентированных, дадут возможность в каждый данный момент найти координату источника радиоизлучения и следить за его движением. Сейчас трудно сказать, какой диапазон метровых волн предпочтительнее. На более длинных волнах (порядка 6 м), по-видимому, легче выполняются условия генерации радиоволн в плазме и с этой точки зрения она предпочтительнее; однако на более коротких волнах (порядка 1,5 м) можно скорее обнаружить спутники, движущиеся ближе к фотосфере, так как на длинных волнах радиоизлучение может не выходить из-за рефракции в короне.

Следует обратить внимание на то, что даже наблюдения только за интенсивностью радиоизлучения могут быть полезны. При наличии спутников должны обнаружиться периодические изменения интенсивности радиоизлучения вследствие экранированного действия Солнца на спутник. В связи с этим интересно проанализировать записи радиоизлучения Солнца, полученные во время последнего максимума солнечной активности (в период МГГ).

Для длительных непрерывных наблюдений (а также для ряда других задач) весьма важно было бы организовать экспедицию и провести наблюдения за радиоизлучением Солнца из района, близкого к северному или южному полюсу Земли, так как в этом случае за Солнцем удалось бы вести непрерывную запись в течение многих месяцев подряд на одной и той же аппаратуре.

В заключение отметим, что когда удастся обнаружить указанные естественные радиоизлучающие спутники Солнца, то наблюдения за ними и изучение характера их движения принесет много существенно нового о строении верхних слоев солнечной короны (сверхкороны). Изучение периода вращения в зависимости от времени, эффектов рефракции и рассеяния радиоволн, проходящих через корону и сверхкорону Солнца, данные о размерах плазма-спутников, несомненно, приведут к новым результатам.

Мы говорили о естественном спутнике Солнца, создающем радиоизлучение. Однако один большой спутник может при распаде создать огромное радиоизлучающее кольцо, окружающее Солнце. Специальные поиски указанных явлений нам представляются интересными.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В. Виткевич, Астрон. ж., 37, 961 (1960).
2. Д. П. Уайлд, К. В. Шеридан, Д. Г. Трент, Радиоастрономия, Парижский симпозиум, ИИЛ, М., 1961, стр. 174.

ЭТАЛОН ЧАСТОТЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОЛЕКУЛЯРНОГО ГЕНЕРАТОРА

Л. И. Герштейн, В. М. Плечков

В 1959—60 гг. в НИРФИ были проведены работы по созданию эталона частоты на базе молекулярного генератора. Эта работа проводилась на основе созданных в институте систем фазовой автоподстройки частоты кристаллонов (ФАП)[1].

В макете прибора стабильность частоты молекулярного генератора (10^{-9}) с помощью систем ФАП была перенесена на частоту в 1 мгц. Высокостабильная частота 1 мгц подается на умножители и делители, на выходе которых получается сетка эталонных частот. Работа системы фазовой автоподстройки генератора (1) по молекулярному генератору (11) поясняется блок-схемой на рис. 1. Напряжение частоты $f_0 = 1$ мгц с кварцевого генератора (1) умножается до частоты 23868 мгц—сначала при

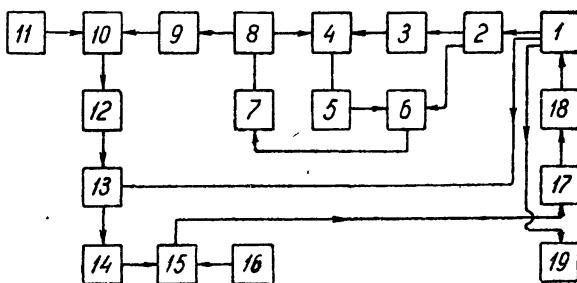


Рис. 1. Блок-схема эталона частоты:

1—кварцевый генератор с частотой $f_0 = 1$ мгц; 2—умножитель с коэффициентом умножения 52 ($13 \times 1 \times 2 \times 2 \times 1$); 3—умножитель с коэффициентом умножения 152 ($2 \times 2 \times 2 \times 19$); 4—смеситель, 5—УПЧ на частоту 52 мгц (полоса 10 мгц, коэффициент усиления 8—10); 6—фазовый детектор, 7—усилитель с полосой 0—5 мгц и коэффициентом усиления 15; 8—кристаллонный генератор с $f_{\text{кл}} = 7956$ мгц, 9—утротитель на кристалле (выходная частота 23868 мгц); 10—балансный смеситель; 11—молекулярный генератор с частотой $f_{\text{МГ}} = 23870$, 12942 мгц, 12—УПЧ на $f_{\text{пр}} = 2,13$ мгц ($\Delta f = 20$ кгц, усиление 10^3), 13—смеситель (частота на выходе 129,42 кгц); 14—делитель частоты с коэффициентом деления $n = 100$ ($4 \times 5 \cdot 5$); 15—фазовый детектор, 16—вспомогательный кварцевый генератор $f_1 = 1,2942$ кгц; 17—фильтр; 18—реактивная лампа; 19—блок с выходами эталонных частот от 100 гц до 100 мгц.

помощи лампового умножителя (2) до 52 мгц, затем при помощи системы ФАП кристаллона (3—8) до 7956 мгц. Далее частота 7956 мгц доводится утротителем (9) до 23868 мгц и подается на балансный смеситель (10). На другой вход балансного смесителя подается с молекулярного генератора (11) частота $f_{\text{МГ}} = 23870$, 12942 мгц. Полученная разностная частота усиливается УПЧ (12) и поступает на смеситель (13), на который также подводится напряжение от кварцевого генератора (1). В результате образуется разностная частота 129,42 кгц (разность между 2,12942 мгц и второй гармоникой кварцевого генератора (1)). Частота 129,42 кгц поступает на делитель (14), который делит ее в 100 раз (до частоты 1,2942 кгц). Далее частота 1,2942 кгц поступает на фазовый детектор (15), на другой вход которого с вспомогательного кварцевого генератора (16) поступает частота 1,2942 кгц. Выход фазового детектора через фильтр (17) соединен с реактивной лампой (18), которая управляет частотой кварцевого генератора (1). При замкнутой цепи автоподстройки частота кварцевого генератора (1) поддерживается равной

$$f_0 = \frac{f_{\text{МГ}} - f_{1n}}{k + m}, \quad (1)$$

где $n = 100$ —коэффициент деления частоты (14), $k = 23868$ — коэффициент умножения тракта от генератора (1) до балансного смесителя (10), $m = 2$ — номер использованной в смесителе (13) гармоники генератора (1). Так как частота вспомогательного кварцевого генератора (16) взята равной 1,2942 кгц, то частота кварцевого генератора (1) (при замкнутой цепи автоподстройки) устанавливается равной 1 мгц с точностью определения значения частоты молекулярного генератора (11). Вносимая вспомогательным кварцевым генератором (16) нестабильность в значение частоты генератора (1)—порядка $\pm 0,5 \cdot 10^{-10}$, считая нестабильность кварцевого генератора (16) порядка 10^{-5} .

Приведенную выше блок-схему эталона можно осуществить с другими значениями коэффициентов умножения и промежуточных частот. Из изученных 8 вариантов по конструктивным соображениям был осуществлен вариант с данными, приведенными на рис. 1. Подготовлен также вариант, позволяющий получить наибольшее по сравнению с другими отношение сигнал/шум на выходе УПЧ (12). Его основное отличие от описываемого таково: коэффициенты умножения умножителей (2) и (3) соответственно равны $55 = (11 \times 5)$ и $144 = (2 \times 2 \times 2 \times 18)$, $f_{np} = 54,87 \text{ мГц}$.

Отрегулированная схема фазовой автоподстройки кварцевого генератора (1) по молекулярному генератору имеет следующие данные: полоса удержания на частоте генератора (1) $\pm 25 \text{ Гц}$; полоса захвата на той же частоте $\pm 1 \text{ Гц}$; отношение сигнал/шум (по напряжению) после смесителя (13) 20 (при мощности, поступающей от молекулярного генератора, $5 \cdot 10^{-11} \text{ вт}$). Полученная полоса удержания оказывается вполне достаточной для автоподстройки кварцевого генератора (1), который выполнен на типовом кварце на 1 мГц без термостата (его стабильность без системы автоподстройки $\pm 10 \text{ Гц}$). Первоначальный запуск схемы автоподстройки производится вручную перестройкой в пределах 10^{-5} генератора (1). Постоянный контроль системы автоподстройки осуществляется индикаторами, подключенными к фазовому детектору (15) и к выходу УПЧ (12). Изготовленный макет эталона используется в настоящее время для целей поверки и настройки кварцевых генераторов высокой стабильности.

Осуществленная система автоподстройки обладает некоторыми особенностями по сравнению с существующими схемами [2-4].

1. Применена фазовая автоподстройка частоты кварцевого генератора (1) под частоту молекулярного генератора (при помощи реактивной лампы), что повышает точность поддержания частоты и снижает требования к стабильности и качеству кварцевого генератора (1).

2. Благодаря тому, что при работе системы автоподстройки значение промежуточной частоты УПЧ (12) остается неизменным, можно взять очень узкую полосу УПЧ и благодаря этому получить хорошее отношение сигнал/шум при слабом сигнале от молекулярного генератора и простейшей схеме УПЧ.

3. В системе отсутствует специальный стабилизированный гетеродин, который применяется в ряде схем [2,3], и УПЧ на две частоты [3]. В описываемом макете функцию гетеродина осуществляет утроитель, запитываемый от клистрона, который стабилизируется системой ФАП. Как утроитель, так и система ФАП используются в тракте умножения частоты генератора (1).

Для макета эталона был разработан молекулярный генератор, обеспечивающий продолжительную и устойчивую работу прибора. Примененная в молекулярном гене-

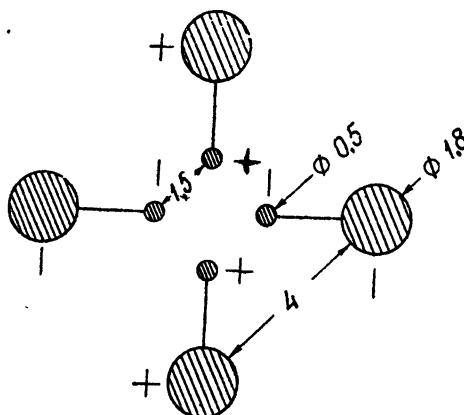


Рис. 2. Сечение сортирующей системы.

раторе (см. рис 2) конструкция квадрупольного конденсатора позволила свести к минимуму зависимость частоты молекулярного генератора от напряжения на сортирующей системе. В нашем случае при изменении напряжения на сортирующей системе в районе насыщения (17 кВ) на 20% частота молекулярного генератора изменилась на $1 \cdot 10^{-10}$. Для настройки резонатора в молекулярном генераторе на линию излучения использовалась методика, описанная в работе [5].

В заключение авторы выражают благодарность В. С. Троицкому за полезные консультации при создании макета эталона.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, В. Л. Сибиряков, Радиотехника и электроника, 3, 290 (1958).
2. Н. Г. Басов, И. Д. Мурин, А. П. Петров, А. М. Прохоров, И. В. Штраухи, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 3, 50 (1958).
3. Г. А. Васнева, В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, Д. Н. Клышко, Ю. Л. Свердлов, Е. И. Сверчков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 2, 185 (1958).
4. А. Я. Лейкин, Измерительная техника, № 8, 43 (1959).
5. А. Я. Лейкин, Астрон. ж., 36, 734 (1959).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 ноября 1961 г.

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТЕРЯХ ЗАРЯДА ПРИ ДВИЖЕНИИ НАД АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ

Ф. Г. Басс, С. И. Ханкина

В литературе неоднократно рассматривался вопрос об энергетических потерях зарядов, движущихся параллельно плоской границе двух изотропных сред с различными диэлектрическими проницаемостями [1–3]. В настоящей заметке найдены энергетические потери при движении заряда в вакууме над произвольной анизотропной средой; более подробно исследован частный случай анизотропии—одноосный кристалл.

Заряд движется с постоянной скоростью v вдоль оси x на расстоянии a от поверхности раздела. Электромагнитное поле определяется системой уравнений Максвелла и граничными условиями—непрерывностью тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на границе:

$$\begin{aligned} \text{rot } H &= \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j; \\ \text{rot } E &= - \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}; \\ E_{\tau}^{(1)} &= E_{\tau}^{(2)} \Big|_{z=0}; \quad H_{\tau}^{(1)} = H_{\tau}^{(2)} \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $E^{(1)}$, $H^{(1)}$ —электрическое и магнитное поля в вакууме, $E^{(2)}$ и $H^{(2)}$ —в анизотропной среде. В верхнем полупространстве (в вакууме) $D = E$, в нижнем $D_l = \epsilon_{ik} E_k$; j отлично от нуля только в верхнем полупространстве.

Рассмотрим два вида движущихся зарядов: 1) точечный заряд: $j = q\delta(x - vt) \times \delta(y) \delta(z - a)$; 2) заряженная нить: $j = \tau v \delta(x - vt) \delta(z - a)$, где q —заряд частицы, τ —заряд на единицу длины нити.

Используя суперпозицию полей точечных зарядов, нетрудно определить потери движущегося диполя. Решение системы (1) будем искать в виде разложения в интеграл Фурье по координатам и времени:

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_x d\omega_y d\omega A(\omega, \omega) \exp [i(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z - \omega t)] - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_x d\omega_y d\omega dQ (\text{grad div } j + k^2 j) \frac{1}{\omega_z} \exp \{i[\omega_x(x - x') + \omega_y(y - y') \pm \omega_z(z - z') - \omega t]\}; \\ dQ &= dx' dy' dz'; \quad k^2 = \omega^2/c^2; \quad \omega_z = \sqrt{k^2 - \omega_x^2 - \omega_y^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Во втором слагаемом формулы (2) в показателе экспоненты берется знак плюс, если $z - z' > 0$, и знак минус, если $z - z' < 0$. Далее,

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_x d\omega_y d\omega B(\omega, \omega) \exp [i(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z - \omega t)] + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_x d\omega_y d\omega C(\omega, \omega) \exp [i(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z - \omega t)], \end{aligned} \quad (3)$$

где первое слагаемое — разложение в интеграл Фурье электрического поля необыкновенной волны, второе — обыкновенной волны, а χ_z' и χ_z'' — корни дисперсионного уравнения в анизотропной среде:

$$|\chi^2 \delta_{ik} - \chi_i \chi_k - k^2 \epsilon_{ik}| = 0. \quad (4)$$

Энергетические потери заряда на единицу пройденного пути определяются по формуле:

$$-\frac{dW}{dx} = \frac{1}{v} \int j E dQ. \quad (5)$$

В случае анизотропии нижнего полупространства после обычных выкладок для потерь энергии найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} = & \operatorname{Re} \frac{(1 - \beta^2)^{1/4}}{2 v^{3/2} \sqrt{\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) \omega \exp \left(-2a \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right); \\ & \{ [\alpha'' \gamma (\chi_z + \chi_z') (\gamma'' \chi_z'' + \chi_x) - \alpha' \gamma' (\chi_z + \chi_z'') (\gamma' \chi_z' + \chi_x)] (1 - \beta^2) + \beta^2 \gamma' \gamma'' \chi_z [\alpha'' (\chi_z + \chi_z') - \\ & - \alpha' (\chi_z + \chi_z'')] \} [\gamma' \alpha'' (\chi_z + \chi_z') (\gamma'' \chi_z'' + \gamma'' \chi_z'' \chi_z + \chi_x \chi_z) - \\ & - \gamma'' \alpha' (\chi_z + \chi_z'') (\gamma' \chi_z'' + \gamma' \chi_z' \chi_z + \chi_x \chi_z)]^{-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\beta = v/c, \quad \chi_x = \omega/v,$$

$$\begin{aligned} \alpha' = & \frac{k^2 [\epsilon_{xy} (\chi_x^2 - k^2 \epsilon_{zz}) + \epsilon_{zy} (\chi_x \chi_z' + k^2 \epsilon_{xz})]}{(\chi_z'^2 - k^2 \epsilon_{xx}) (\chi_x^2 - k^2 \epsilon_{zz}) - (\chi_x \chi_z' + k^2 \epsilon_{xz}) (\chi_x \chi_z' + k^2 \epsilon_{zy})}, \\ \gamma' = & \frac{k^2 [\epsilon_{xy} (\chi_x^2 - k^2 \epsilon_{zz}) + \epsilon_{zy} (\chi_x \chi_z' + k^2 \epsilon_{xz})]}{\epsilon_{zy} (\chi_z'^2 - k^2 \epsilon_{xx}) + \epsilon_{xy} (\chi_x \chi_z' + k^2 \epsilon_{zx})}, \end{aligned}$$

α'' и γ'' получаются из α' и γ' соответственно заменой χ_z' на χ_z'' . Для точечного заряда $f(\omega) = q^2 |\omega^{1/2}|$, для заряженной нити $f(\omega) = 2 \tau^2 \sqrt{\pi a v (1 - \beta^2)^{-1/2}}$, для диполя $f(\omega) = |\omega^{5/2}| v^{-2} [(1 - \beta^2) p_z^2 + p_x^2]$, где p_z и p_x — проекции дипольного момента p на оси z и x . Формула (6) получена для точечного заряда и диполя при условии $a\omega/v \gg 1$, что соответствует $\chi_y = 0$; для заряженной нити она верна при любых значениях a .

Рассмотрим одноосный кристалл и исследуем три случая:

1) оптическая ось кристалла перпендикулярна границе раздела сред ($\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_0$; $\epsilon_{zz} = \epsilon_e$);

2) оптическая ось лежит в плоскости раздела сред и параллельна направлению движения заряда ($\epsilon_{xx} = \epsilon_e$; $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_0$);

3) оптическая ось лежит в плоскости раздела сред и перпендикулярна направлению движения заряда ($\epsilon_{yy} = \epsilon_e$; $\epsilon_{xx} = \epsilon_{zz} = \epsilon_0$).

В первом случае

$$\begin{aligned} -\frac{\partial W}{\partial x} = & \frac{2(1 - \beta^2)^{3/4}}{\sqrt{\pi a} v^{3/2}} \int d\omega f(\omega) \left(\epsilon_0 \epsilon_e \frac{1 - \beta^2}{\beta^2 \epsilon_e - 1} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1 - \beta^2}{\beta^2 \epsilon_e - 1} \epsilon_0 \epsilon_e \right)^{-1} \exp \left(-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right) + \\ & + \frac{2(1 - \beta^2)^{3/4}}{v^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left\{ \frac{f(\omega) \exp \left(-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right)}{\frac{\partial}{\partial \omega} \left[1 + \epsilon_0 \sqrt{\epsilon_e (1 - \beta^2) / \epsilon_0 (1 - \beta^2 \epsilon_e)} \right]} \right\}_{\omega=\omega_j} \end{aligned} \quad (7)$$

где ω_j — корни уравнения

$$1 + \epsilon_0(\omega_j) \sqrt{\frac{\epsilon_e(\omega_j) (1 - \beta^2)}{\epsilon_0(\omega_j) [1 - \beta^2 \epsilon_e(\omega_j)]}} = 0.$$

Первое слагаемое в (7) определяет потери энергии заряда в областях частот, для которых выполняется неравенство

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_e} (\epsilon_e \beta^2 - 1) > 0.$$

Второе слагаемое определяет энергетические потери в областях частот, для которых

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_e} (\epsilon_e \beta^2 - 1) < 0.$$

Для второго случая в формуле (7) достаточно произвести замену ϵ_0 на ϵ_e , а ϵ_e на ϵ_0 .

В третьем случае

$$\begin{aligned} -\frac{\partial W}{\partial x} = & \frac{2(1-\beta^2)^{3/4}}{\sqrt{\pi a} v^{3/2}} \int_{\beta^2 \epsilon_0 > 1} d\omega f(\omega) \epsilon_0 \left(\frac{1-\beta^2}{\beta^2 \epsilon_0 - 1} \right)^{1/2} \left(1 + \epsilon_0^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^2 \epsilon_0 - 1} \right)^{-1} \times \\ & \times \exp \left(-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \right) + \frac{2(1-\beta^2)^{3/4}}{v^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left\{ \frac{f(\omega)}{\omega} \exp \left(-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \right) \right\}_{\omega=\omega_j} \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь ω_j — корни уравнения

$$1 + \epsilon_0(\omega_j) \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 \epsilon_0(\omega_j)}} = 0.$$

Второе слагаемое в (8) определяет потери энергии в области частот, для которых $\beta^2 \epsilon_0 < 1$.

Вследствие несимметрии условий задачи возникает сила, искривляющая траекторию движущегося заряда. Приведем результат только для точечного заряда. Отклоняющая сила определяется выражением:

$$F_z = q(E_z + \beta H_y) |_{z=a, y=0, x=vt}.$$

В первом случае

$$\begin{aligned} F_z = & \frac{q^2(1-\beta^2)^{5/4}}{\sqrt{\pi a} v^{3/2}} \int \omega^{1/2} \exp \left(-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \right) \left(1 - \epsilon_0 \epsilon_e \frac{1-\beta^2}{\beta^2 \epsilon_e - 1} \right) \times \\ & \times \left(1 + \epsilon_0 \epsilon_e \frac{1-\beta^2}{\beta^2 \epsilon_e - 1} \right)^{-1} d\omega + \frac{q^2(1-\beta^2)^{5/4}}{\sqrt{\pi a} v^{3/2}} \int \omega^{1/2} \exp \left(-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \right) \times \\ & \times \left(1 - \epsilon_0^{1/2} \epsilon_e^{1/2} \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta^2 \epsilon_e - 1}} \right) \left(1 + \epsilon_0^{1/2} \epsilon_e^{1/2} \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta^2 \epsilon_e - 1}} \right)^{-1} d\omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Первое слагаемое в (9) верно при

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_e} (\epsilon_e \beta^2 - 1) > 0.$$

Второе слагаемое в (9) определяет отклоняющую силу в областях частот, для которых

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_e} (\epsilon_e \beta^2 - 1) < 0.$$

Для второго случая достаточно в формуле (9) произвести замену ϵ_0 на ϵ_e и ϵ_e на ϵ_0 .

В третьем случае

$$\begin{aligned} F_z = & \frac{q^2(1-\beta^2)^{5/4}}{\sqrt{\pi a} v^{3/2}} \left\{ \int_{\beta^2 \epsilon_0 < 1} d\omega \omega^{1/2} \left(1 - \epsilon_0 \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 \epsilon_0}} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(1 + \epsilon_0 \sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 \epsilon_0}} \right)^{-1} \exp \left(-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \right) + \int_{\beta^2 \epsilon_0 > 1} d\omega \omega^{1/2} \left(1 + \epsilon_0^2 \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 \epsilon_0} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(1 - \epsilon_0^2 \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 \epsilon_0} \right)^{-1} \exp \left(-2a \frac{\omega}{v} \sqrt{1-\beta^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Авторы благодарят Э. А. Канера за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ситенко, В. С. Ткалич, ЖТФ, 29, 1075 (1959).
2. В. Е. Пафомов, ЖЭТФ, 32, 610 (1957).
3. Г. Н. Гариян, О. С. Мергелян, Изв. АН СССР, 13, 123 (1960).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
5 ноября 1961 г.

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРОВ С ПЕРЕМЕННОЙ ЕМКОСТЬЮ В ОДНОМ ИЗ НИХ

H. B. Соина

Как известно, в синхронном режиме ($\omega_H/2=\omega$) коэффициент усиления системы с переменными параметрами зависит от сдвига фаз между накачкой и сигналом [1,2]. Уравнения Кирхгофа, описывающие систему двух индуктивно связанных контуров с переменной емкостью в одном из них, имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2\dot{h}q_1 + \omega_0^2 q_1 [1 + m \cos(\omega_H t)] + \gamma \ddot{q}_2 &= A \cos(\omega t + \varphi); \\ \ddot{q}_2 + 2\dot{h}q_2 + \omega_0^2 q_2 + \gamma \ddot{q}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где q_1, q_2 —заряды на конденсаторах 1 и 2 контуров, γ —коэффициент связи, m —глубина модуляции емкости.

Как и в [2], будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} q_1 &= k'(\omega, t) e^{j\omega t} + \text{k. с.}; \\ q_2 &= k''(\omega, t) e^{j\omega t} + \text{k. с.}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} k'(\omega, t) &= k'_0(\omega) + k'_{-1}(\omega) e^{-j\omega_H t} + \dots; \\ k''(\omega, t) &= k''_0(\omega) + k''_{-1}(\omega) e^{-j\omega_H t} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

—коэффициенты передачи в первый и во второй контуры при достаточно больших добротностях контуров в (3) можно ограничиться только двумя членами. С учетом (3) и соотношения $\omega_H = 2\omega$ (2) примет вид:

$$\begin{aligned} q_1 &= (k'_0 + k'^*_{-1}) e^{j\omega t} + \text{k. с.}; \\ q_2 &= (k''_0 + k''^*_{-1}) e^{j\omega t} + \text{k. с.}, \end{aligned} \quad (4)$$

Поставив (4) в (1) и приравняв коэффициенты при $e^{j\omega t}$ и $e^{-j\omega t}$, будем иметь систему уравнений для определения $k'_0, k'_{-1}, k''_0, k''_{-1}$. Ее решение

$$\begin{aligned} |k'_0|^2 &= |k'_{-1}|^2 = A^2(\alpha^2 + \beta^2) \left\{ (\alpha^2 + \beta^2) \left[\alpha^2 + \beta^2 + \frac{m^2}{4} - m\beta \sin(2\varphi) - m\alpha \cos(2\varphi) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^2(1-\alpha)^2 [\gamma^2(1-\alpha)^2 - 2(\alpha^2 - \beta^2) - m\beta \sin(2\varphi) + m\alpha \cos(2\varphi)] \right\} \omega_0^{-2} \times \\ &\quad \times \left\{ (\alpha^2 + \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{m^2}{4} \right) + \gamma^2(1-\alpha)^2 [\gamma^2(1-\alpha)^2 - 2(\alpha^2 - \beta^2)] \right\}^{-2} \\ &\quad (k'_0 = k'^*_{-1}), \end{aligned}$$

где

$$\alpha = 1 - \omega^2/\omega_0^2, \quad \beta = \omega/Q\omega_0.$$

Условием самовозбуждения системы является обращение коэффициента передачи в бесконечность, т. е. знаменателя k_0' в нуль. Так как знаменатель k_0' является действительной величиной, то для определения критической глубины модуляции m_{kp} и частоты возбуждения имеем не два уравнения, как при исследовании бигармонического режима [2], а одно:

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 - m^2/4) + \tau_i^2(1-\alpha)^2 [\gamma_i^2(1-\alpha)^2 - 2(\alpha^2 - \beta^2)] = 0. \quad (5)$$

Из (5) можно определить зависимость $m_{kp}(\delta, \chi, Q)$, где $\delta = \alpha - 1 - \omega^2/\omega_0^2$ — относительная расстройка*, $\chi = \gamma_i Q$ — параметр, характеризующий связь. Таким образом, уравнение (5) фактически определяет границы области нестабильности при разных χ и Q . Эти границы приведены на рис. 1 (кривые построены для $Q=10$). Видно, что минимальное значение m_{kp} получается не при $\delta=0$ ($\omega_H/2=\omega_0$), а при некоторой расстройке δ , тем большей, чем больше величина связи. На том же рисунке пунктиром приведены кривые $m_{kp}(\delta)$ при $\chi=0$ (одноконтурная система) для добротностей $Q=20; 10; 8$.

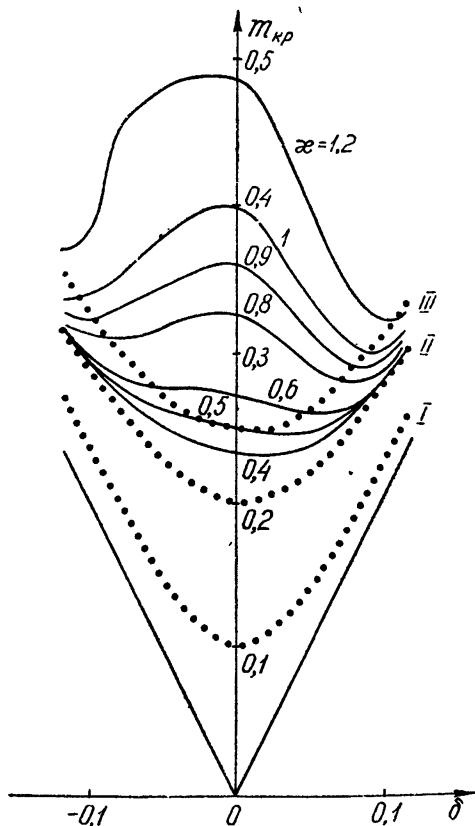


Рис. 1.

Третья кривая явно показывает, что связь с балластным контуром дает больший выигрыш в полосе регенерации, а следовательно, в полосе пропускания, чем простое уменьшение добротности одноконтурной системы. Из анализа кривых следует также, что для целей расширения полосы усиления при малых $n=1-m/m_{kp}$ (большой регенерации) можно применять только небольшие связи ($\chi \leq 0.5$). При больших χ резонансные кривые будут иметь провал при $\delta=0$, увеличивающийся с ростом χ , что видно из рисунка и на что обращалось внимание в [2]. Приближенные вычисления дают для полосы усиления в синхронном режиме (которая является полосой перестройки усилителя в бигармоническом режиме [1]) следующее выражение:

* Следует иметь в виду, что с изменением частоты сигнала меняется и частота накачки, так как $\omega_H = 2\omega$.

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{\text{перестр}} = \frac{\sqrt{V2-1} (1+x^2)}{Q \sqrt{1-4x^2-x^4}} \cdot \sqrt{n} . \quad (6)$$

Эта формула получена в предположении большой регенерации ($n \ll 1$); поэтому, как и следовало ожидать, она имеет смысл ($\Delta f/f$ действительно) для связей, не превышающих некоторую величину ($x < x_0$, где $x_0 \approx 0,5$ —корень знаменателя (6)), что хорошо согласуется с предыдущим.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. М. Богаткова, Е. М. Гершензон, Т. С. Домбровская, Н. Г. Птицына, Г. И. Рожкова, В. В. Сперантов, В. С. Эткин, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, под. ред. Я. А. Федотова, вып. 6, изд. Сов. радио, М., 1960.
2. Е. М. Гершензон, Ю. Е. Дьяков, Н. В. Соина, Л. А. Смирнова, В. С. Эткин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 121 (1961).

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
13 июля 1961 г.

РАДИОИЗЛУЧЕНИЕ СОЛНЦА НА ВОЛНЕ $\lambda=1,8 \text{ м.м.}$

Н. А. Горохов, Ю. А. Дрягин, Л. И. Федосеев

В июле—августе 1960 года были произведены измерения радиоизлучения Солнца на волне 1,8 м.м.

С целью уменьшения влияния атмосферного поглощения на точность измерений местом наблюдений был выбран район вблизи горы Эльбрус на высоте 3060 м над уровнем моря. Для наблюдений использовалась радиотелескоп с шириной диаграммы направленности (по уровню половинной мощности) 20'. Методика измерений и обработка результатов аналогичны описанным в [1]. Найдено, что эффективная температура Солнца составляет $5300^\circ \pm 700^\circ \text{K}$. Интересно сопоставить полученное значение эффективной температуры Солнца T_\odot с данными на других волнах.

λ (м.м.)	T_\odot (°K)
4,3	9600 ± 500 [2]
4,0	8000 ± 700 [1]
3,0	5870 ± 950 [2]
2,73	5500 ± 715 [2]
2,15	5433 ± 500 [2]
1,8	5300 ± 700

Были также произведены единичные измерения радиояркости Луны вблизи третьей четверти. Получено значение эффективной температуры $T_\zeta = 250^\circ$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, 433 (1961).
2. C. W. Tolbert, A. W. Straiton, Astrophys. J., 134, 91 (1961).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 января 1962 г.